В. Г. Болтянский, И. М. Яглом

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ВЕКТОРЫ

ПРОСВЕЩЕНИЕ • 1964

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, И. М. ЯГЛОМ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ВЕКТОРЫ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1964

ПРЕДИСЛОВИЕ

В текущем учебном году в старших классах средней школы вводится новая программа по математике. В частности, курс геометрии IX класса посвящен изучению геометрических преобразований (осевая и центральная симметрия, поворот, параллельный перенос, гомотетия) и элементов векторной алгебры. Обе эти темы ранее никогда не проходились в нашей школе, и введение их, на первых порах, вероятно, вызовет известные трудности. Можно надеяться, что трудности эти будут мало заметны учащимся, поскольку школьник всегда в новом учебном году изучает новый для себя материал. Но учителю, разумеется, всегда легче преподавать те разделы курса, где он может применить знания и навыки, полученные в процессе предшествующей работы, опереться на опыт старших товарищей, использовать методическую литературу. В текущем учебном году учитель геометрии в IX классе будет почти полностью лишен всего этого. Вот почему мы сочли своим долгом наряду с учебным пособием для учащихся IX класса написать и более обстоятельную книгу по тем же вопросам, предназначенную для учителя.

Положение учителя осложняется еще и тем, что разделы геометрии, подлежащие изучению в IX классе, существенно отличаются по своему характеру от других разделов. Традиционный курс геометрии, преподававшийся в школе до сих пор, по общему строению, по порядку прохождения материала, по идеям и методам восходит еще к знаменитым книгам «Начал» древнегреческого математика Евклида, написанным свыше двух тысячелетий тому назад. Новая программа по геометрии решительно порывает с евклидовскими традициями. Она проникнута совершенно иными идеями. Среди них в первую очередь надо указать на представление о фигуре как о множестве точек и о преобразовании как о своеобразной «геометрической» функции. Эти идеи, глубоко чуждые метафизическому мышлению Евклида, явились мощными движущими силами всего современного развития математики; они, бесспорно, должны быть отражены в школьных программах и учебниках. Другой характерной чертой современной математики является глубокая связь между всеми ее разделами, выражающаяся, в частности, в своеобразной «геометризации» алгебры и «алгебраизации» геометрии. Отражением этой черты современной математики является в новой программе тема о векторах: глубоко геометрическая по своему содержанию, тема эта не случайно носит название «векторной алгебры», поскольку предметом ее является создание своеобразного «геометрического исчисления», приспособленного для решения геометрических задач, но по форме очень близкого к аппарату обычной алгебры.

Важно подчеркнуть, что изучение геометрических преобразований и векторной алгебры не только способствует созданию более правильных и более современных взглядов на само содержание математики, но указывает также новые методы решения содержательных геометрических задач, чрезвычайно важные не только для самой математики, но и для ее приложений — в первую очередь для механики и физики. Огромная роль векторов для механики и для физики общеизвестна. Менее известно большое место, уделяемое современной физикой понятию геометрического преобразования. Место это таково, что рассмотрение симметричных фигур (бабочек, снежинок и пр.) и использование перегибания чертежа для доказательства геометрических теорем можно считать более характерным для современной науки, чем типичные для школы Евклида рассуждения, связанные с рассмотрением цепочек равных треугольников, имеющие несколько кустарный характер.

Выпущенное авторами пособие для учащихся демонстрирует один из вариантов реализации указанных выше общих идей в школьном преподавании. Мы понимаем, что при практической работе по новой книге у учителя возникнет много вопросов. Не следует думать, что настоящая книга сможет дать ему ответы на все эти вопросы, что она содержит поурочные разработки или детальные методические указания: ведь составление таких разработок и указаний было бы возможно лишь на основе опыта преподавания по новой программе, а темы «Геометрические преобразования» и «Векторная алгебра» вводятся в практику преподавания впервые. Тем не менее мы надеемся, что ознакомление с настоящей книгой окажет помощь учителю в его работе.

Книга, предлагаемая вниманию читателя, имеет следующую структуру. Расположение и названия глав в ней полностью соответствуют учебному пособию для учащихся. В каждой главе имеются: 1) основной текст, напечатанный крупным шрифтом; 2) задачи и упражнения; 3) дополнения и методические указания. Текст, напечатанный крупным шрифтом (если его собрать воедино), представляет собой расширенный вариант пособия для учащихся (точнее, теоретической части пособия для учащихся). Более полное изложение будет, несомненно, полезно учителю, кое-что из содержащегося здесь дополнительного материала может быть использовано учителем во внеклассной работе или даже рассказано на уроке в классе. Дополнительный материал частично выделен в новые параграфы, отсутствующие в пособии для учащихся; изложение вопросов, разобранных в учебном пособии, также проводится здесь несколько подробнее. Весьма заметно увеличено, по сравнению с учебным пособием, количество рисунков. В частности, изложение почти каждого из рассматриваемых типов геометрических преобразований начинается с параграфа «Примеры и иллюстрации», содержащего наглядный материал, предваряющий систематическое изучение. Особое место среди дополнительного материала занимает приложение к первой части книги, посвященное задачам на построение, и параграфы 69, 70 и 75, содержащие новый (и, по нашему мнению, рациональный) вариант изложения начал тригонометрии.

Вслед за теоретическим материалом в каждой главе идут «Задачи и упражнения». Число задач увеличено по сравнению с пособием для учащихся более чем вдвое. Несмотря на то что пособие для учащихся выпущено большим тиражом, мы сочли нецелесообразным исключать из полного списка задач, помещенных в этой книге, задачи, вошедшие в пособие для учащихся. Объясняется это прежде всего тем, что авторы придают большое значение системе расположения задач, последовательности их решения и их связи с теорией. Кроме того, нам не хотелось ставить эту книгу в зависимость от пособия для учащихся, так как она представляет, по нашему мнению, и самостоятельный интерес (например, для студентов педагогических институтов). Наконец, составленный нами задачник является первым школьным задачником по темам «Геометрические преобразования» и «Векторы», и его полная публикация в одной книге, как нам кажется, создаст определенные удобства для читателя (в первую очередь для учителя).

Некоторые задачи повторяются по два раза (см., например, задачи **81**, **666б**) и теорему на стр. 139, задачи **235** и **693** или задачу **482** и задачу **3** на стр. 210); здесь мы имеем в виду дать возможность сопоставить между собой разные решения одной задачи, что всегда поучительно. Более трудные задачи отмечены звездочками; эти задачи рассчитаны в основном для внеклассных занятий и для индивидуальных заданий более сильным учащимся. В конце книги приведены ответы ко всем задачам, для которых это возможно, а также указания к наиболее трудным задачам.

Большое место в книге занимают дополнения и методические указания, помещаемые в конце каждой главы (после задач и упражнений). Их основная цель — создать у учителя правильное представление о научном содержании изучаемой части курса. Здесь имеются также и некоторые прямые методические рекомендации. Дополнения и методические указания к каждой главе завершаются обсуждением предложенных задач; для ряда характерных задач приводятся подробные решения.

В конце книги указан довольно большой список дополнительной литературы, который, бесспорно, окажется полезным читателю, пожелавшему глубже ознакомиться с новыми темами, вводимыми в школьный курс геометрии. Многие из указанных в списке литературы книг могут быть использованы во внеклассной работе с учащимися.

Эта книга написана для учителя; однако нам кажется, что она может оказаться интересной и полезной и для наиболее сильных учащихся, пожелавших несколько выйти за пределы школьного курса. Разумеется, дополнения и методические указания к отдельным главам, как правило, не рассчитаны на школьников; эту часть книги учащийся может опустить. Мы надеемся, что книга будет полезна также студентам педагогических институтов. Этой категории читателей мы советуем, напротив, обратить особое внимание на дополнения и методические указания.

Пособие для учащихся, а также значительная часть настоящей книги неоднократно обсуждались педагогической общественностью. Мы считаем своим приятным долгом выразить искреннюю признательность всем лицам, принимавшим участие в обсуждении книги и оказавшим нам помощь советами и указаниями, в том числе В. Г. Ашкинузе, К. С. Богушевскому, В. А. Жарову, О. А. Котию, Е. Г. Крейдлину, С. В. Кудрявцеву, А. Д. Семушину, Р. С. Черкасову, С. И. Шварцбурду, А. А. Шершевскому и особенно $\boxed{\text{В. Б. Гуревичу}}$, Г. Б. Гуревичу, А. Н. Колмогорову, А. И. Маркушевичу и З. А. Скопецу.

В. Г. Болтянский,
И. М. Яглом

ЧАСТЬ I

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ГЛАВА I

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

§ 1. ПРИМЕРЫ И ИЛЛЮСТРАЦИИ

Взгляните на рисунки 1—4. Предметы, изображенные на этих рисунках, представляются нам «правильными», «симметричными». На каждом из этих рисунков проведена пунктиром вертикальная

Рис. 1.

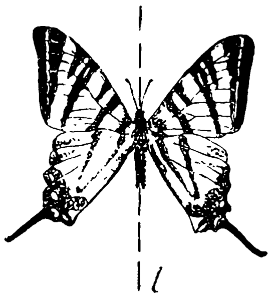


Рис. 2.

линия l, делящая фигуру на две части, причем правая и левая половина фигуры являются как бы зеркальным отражением друг друга. В таких случаях говорят, что фигура **симметрична** относительно прямой l, а прямая l называется **осью симметрии** фигуры.

Симметричные фигуры можно получать с помощью следующего приема. Проведем в плоскости чертежа некоторую прямую l и по одну сторону от нее начертим какую-либо фигуру, например кривую линию, идущую от одной точки линии l к другой ее точ-

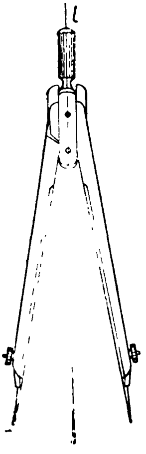


Рис. 3.

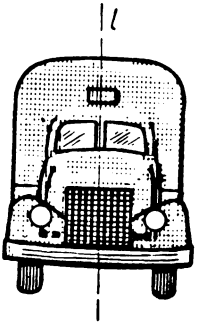


Рис. 4.

ке. Приставим теперь к прямой l край зеркала, перпендикулярного к плоскости чертежа (рис. 5). В зеркале мы увидим отражение начерченной линии. Начерченная линия и ее отражение вместе образуют симметричную фигуру (с осью симметрии l).

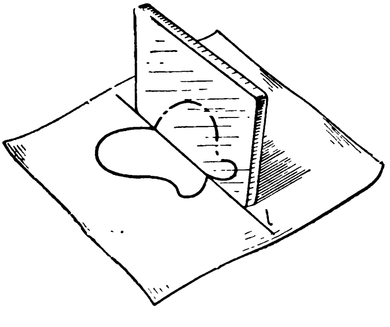


Рис. 5.

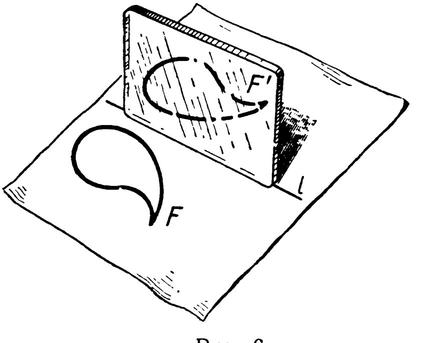


Рис. 6.

Если вместо линии, изображенной на рисунке 5, мы возьмем замкнутую линию F, расположенную целиком по одну сторону от прямой l, то ее изображение F' (рис. 6) не будет иметь с линией F общих точек. Симметричная фигура, образованная начер-

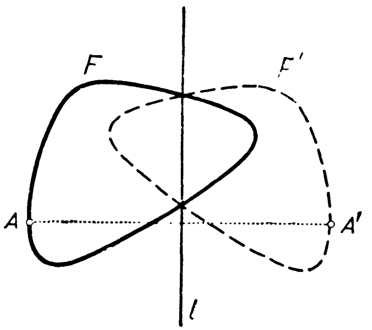


Рис. 7.

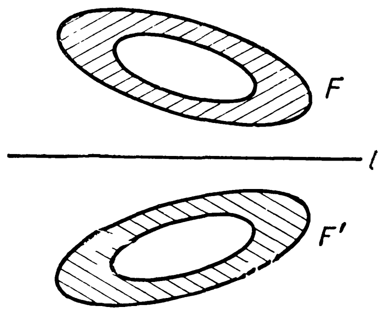


Рис. 8.

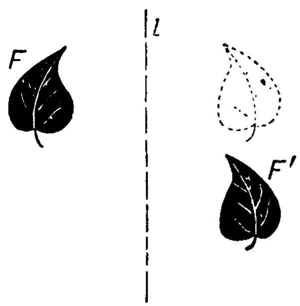


Рис. 9.

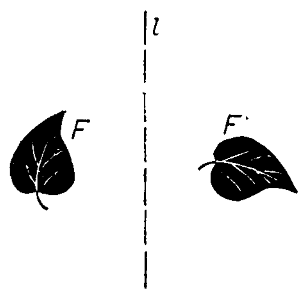


Рис. 10.

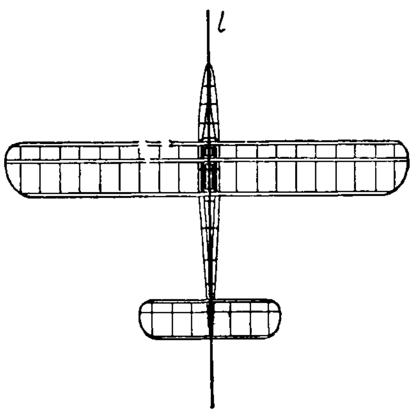


Рис. 11. Планер.

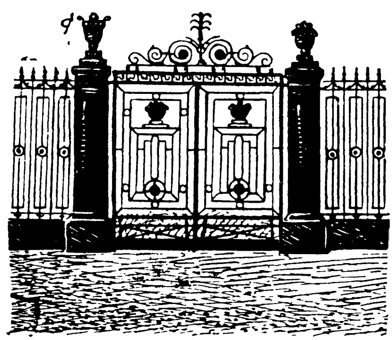


Рис. 12. Ворота Летнего сада в Ленинграде.

Рис. 13. Московский университет.

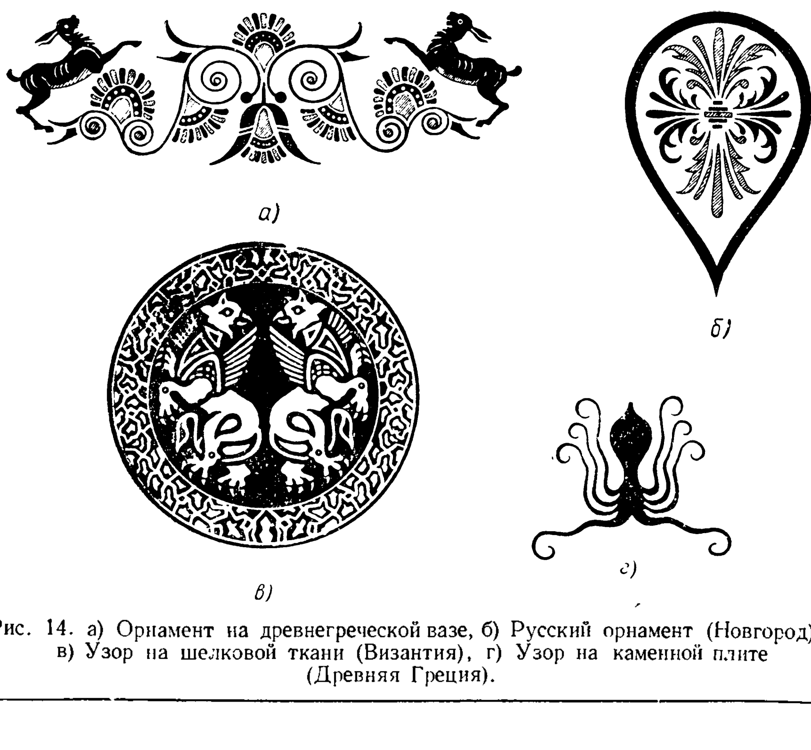


Рис. 14. а) Орнамент на древнегреческой вазе, б) Русский орнамент (Новгород), в) Узор на шелковой ткани (Византия), г) Узор на каменной плите (Древняя Греция).

ченной линией и ее изображением, будет состоять в этом случае из двух отдельных кусков F и F'. Это, однако, не мешает нам рассматривать F и F', вместе взятые, как одну фигуру, симметричную относительно прямой l.

Можно, конечно, рассматривать F и F' и как две различные фигуры. Об этих фигурах говорят, что они симметричны относительно прямой l. Иначе говоря, если некоторая фигура симметрична относительно прямой l, то части F и F' этой фигуры, расположенные по разные стороны от l, представляют собой

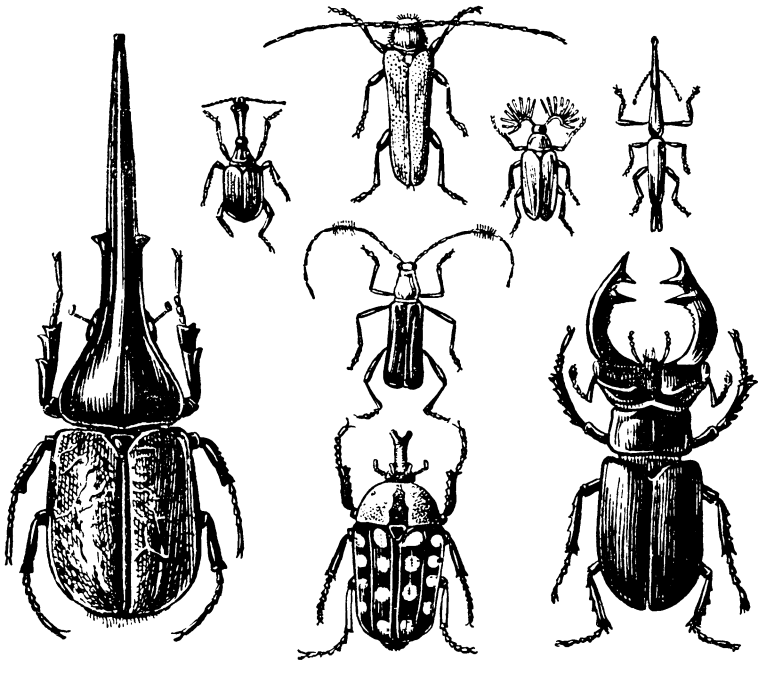


Рис. 15. Жуки.

две фигуры, симметричные друг другу относительно прямой l. Наоборот, если фигуры F и F' симметричны друг другу относительно прямой l, то вместе они образуют одну фигуру с осью симметрии l. На рисунках 7, 8 приведены примеры симметричных друг другу фигур (относительно прямой l); для наглядности на рисунке 7 фигура F' изображена пунктиром. Для сравнения на рисунках 9, 10 приведены фигуры, несимметричные друг другу относительно прямой l.

Симметричные фигуры нередко можно встретить в жизни, прикладном искусстве, архитектуре (рис. 11—15).

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Определение. *Точки A и A' называются* ***симметричными относительно прямой*** *l, если отрезок AA' перпендикулярен прямой l и делится этой прямой пополам* (рис. 16).

Пусть на плоскости задана некоторая прямая l. Тогда для каждой точки A, не лежащей на прямой l, найдется единственная точка A', симметричная точке A относительно прямой l. Чтобы построить эту точку A', достаточно опустить из точки A на прямую l перпендикуляр AP и на его продолжении за точку P отложить отрезок $PA'=AP$. Если точка A' симметрична точке A относительно прямой l, то и, обратно, точка A симметрична точке A' относительно l. Поэтому говорят, что точки A и A' симметричны друг другу относительно прямой l, или просто *точки A и A' симметричны относительно прямой l* (рис. 16).

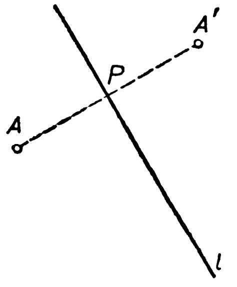


Рис. 16.

Если точка A лежит на прямой l, то мы условимся считать, что *точка, симметричная точке A относительно прямой l, совпадает с точкой A.*

Предположим далее, что на плоскости, кроме прямой l, задана некоторая фигура F, например отрезок, кривая линия, ок-

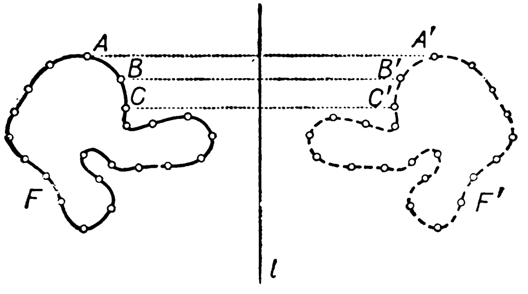


Рис. 17.

ружность, круг, треугольник, параллелограмм, трапеция и т. д. Возьмем произвольную точку A фигуры F и найдем точку A', симметричную точке A относительно прямой l (рис. 17). Затем возьмем точку B фигуры F и найдем симметричную ей точку B'; далее, возьмем точку C фигуры F и симметричную ей точку C' и т. д. Рассмотрим всевозможные точки A', B', C', ..., симметричные точкам A, B, C, ... фигуры F, или, как говорят в математике, множество всех точек, симметричных точкам фигуры F относительно прямой l. Это множество, состоящее из точек A', B', C', ..., представляет собой некоторую фигуру F'; на рисунке 17 фигура F' изображена пунктиром. Фигуру F' называют *фигурой, симметричной фигуре F относительно прямой l.* Говорят также и иначе: *фигуры F и F' симметричны относительно прямой l.* Примеры симметричных друг другу фигур мы имели в § 1 (рис. 6, 7, 8).

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. *Фигура F', образованная всеми точками, симметричными точкам фигуры F относительно заданной прямой l, называется* ***симметричной фигуре F относительно прямой l.***

Для каждой фигуры F и каждой прямой l на плоскости найдется фигура F', симметричная фигуре F относительно l. Переход от фигуры F к симметричной ей фигуре F' называется ***симметрией относительно прямой l***, или, как иногда говорят, ***осевой симметрией.***

§ 3. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Необходимые материалы и инструменты: линейка, лист миллиметровой бумаги.

Построение симметричных фигур на миллиметровой бумаге. С помощью линейки проведите карандашом прямую l, совпадающую с одной из жирных линий, намеченных на миллиметровой бумаге. По одну сторону от проведенной прямой изобразите какую-либо фигуру, например замкнутую линию F (рис. 18). На линии F отметьте ряд точек, достаточно густо расположенных на ней. Для каждой из этих точек найдите симметричную ей точку относительно прямой l (это легко сделать, используя деления миллиметровой бумаги). Соедините между собой полученные точки; это и даст линию F', симметричную линии F.

§ 4. ФИГУРЫ, ОБЛАДАЮЩИЕ ОСЬЮ СИММЕТРИИ

Осевая симметрия переводит каждую фигуру F в фигуру F', симметричную ей относительно оси l. Если же за исходную фигуру взять фигуру F', то та же осевая симметрия переведет ее в фигуру F: *при осевой симметрии фигуры F и F' меняются местами* (т. е. каждая из них переходит во вторую фигуру).

Иногда бывает удобно рассматривать симметричные относительно прямой l фигуры F и F' как две части одной фигуры. Эту фигуру, состоящую из фигур F и F', вместе взятых, мы обозначим через G. Так как в результате осевой симметрии части F и F' фигуры G поменяются местами, то вся фигура перейдет сама в себя. Это иллюстрируется рисунками 1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 15; изображенные на этих рисунках фигуры (бабочка, лист, машина и др.) при симметрии относительно l переходят сами в себя. Другими словами, если взять произвольную точку A рас-

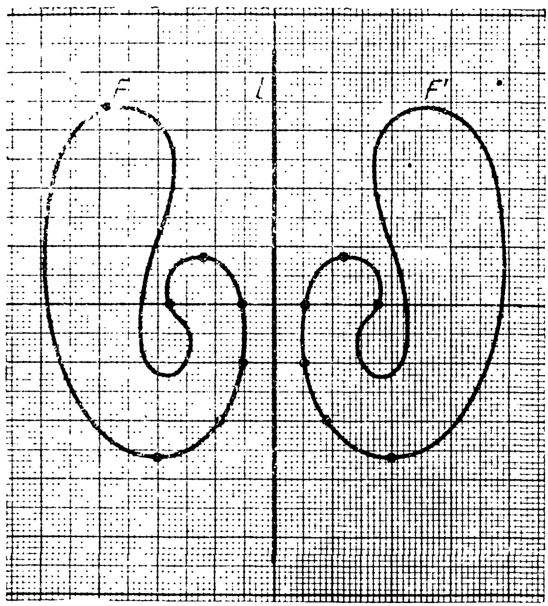


Рис 18.

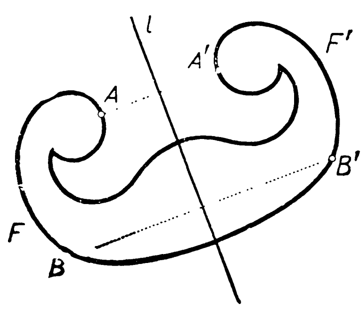


Рис. 19.

сматриваемой фигуры, то симметричная ей точка A' также принадлежит той же самой фигуре (ср. рис. 19). Фигуры, обладающие этим свойством, называются **симметричными относительно прямой** l.

Определение. *Фигура F называется* ***симметричной относительно прямой*** *l, если при симметрии относительно этой прямой F переходит в ту же самую фигуру* (т. е. если симметричная фигуре F относительно прямой l фигура F' совпадает с F, рис. 19).

Если фигура F симметрична относительно прямой l, то эта прямая называется **осью симметрии** фигуры F.

§ 5. ПЕРЕГИБАНИЕ ЛИСТА БУМАГИ

Проведем на листе бумаги прямую линию l и возьмем какую-нибудь точку A, не лежащую на прямой l. Перегнем лист бумаги по линии l до совмещения обеих половин листа. Тогда точка A совместится с некоторой точкой A' другой половины листа. Отметим эту точку A' и затем снова разогнем лист бумаги. Докажем, что *точки A и A' симметричны относительно прямой l* (рис. 20).

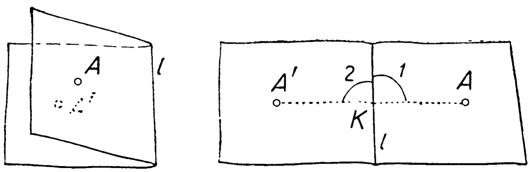


Рис. 20.

Соединим точки A и A' отрезком прямой. Так как при перегибании отмеченные на рисунке 20 углы 1 и 2 совмещаются один с другим, то $\angle 1 = \angle 2$. Но углы эти смежные; следовательно, оба они прямые. Из совмещения точек A и A' при перегибании следует также, что изображенные на рисунке 20 отрезки KA и KA' равны между собой. Таким образом, отрезок AA' перпендикулярен прямой l и делится этой прямой пополам. Это и означает, что точки A и A' симметричны относительно прямой l.

Верно и обратное: *две точки A и A', симметричные относительно прямой l, при перегибании чертежа по прямой l совмещаются.* Действительно, из симметрии точек A и A' следует, что отрезки KA и KA' (рис. 16) равны и перпендикулярны прямой l. Поэтому при перегибании листа бумаги отрезок KA пойдет по KA' и точки A и A' совпадут.

Таким способом можно получать и симметричные фигуры. Например, если по одну сторону от линии перегиба l изображена не застывшей еще краской некоторая фигура F, то при перегибании чертежа мы получим на другой стороне листа симметричный отпечаток F' фигуры F. Учащиеся нередко превращают этот прием в забаву: поставив кляксу на листе бумаги, перегнув его и затем надавив ладонью, они получают после разворачивания листа бумаги красивый симметричный узор (рис. 21).

Рис. 21.

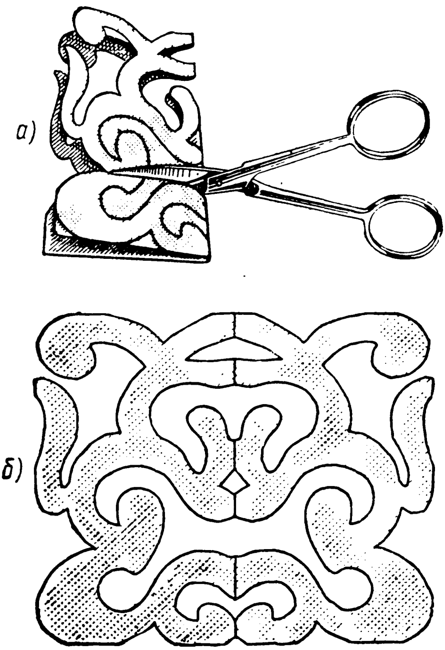


Рис. 22.

Можно также вырезать ножницами какой-либо узор на сложенном вдвое листе бумаги (рис. 22, *а*) и затем развернуть листок; полученный узор симметричен относительно линии сгиба (рис. 22, *б*).

§ 6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Необходимые материалы и инструменты: линейка, лист кальки и чертеж, приготовленный при выполнении самостоятельного задания § 3.

Построение симметричных фигур с помощью листа кальки. Наложите кальку на лист миллиметровой бумаги с изображенными на нем симметричными относительно прямой l фигурами F и F'. С помощью линейки проведите на кальке прямую l и, кроме того, обведите на кальке фигуру F. Теперь снимите лист кальки с миллиметровой бумаги и перегните его по линии l так, чтобы начерченная фигура находилась на внешней стороне сложенного листа кальки. На второй половине листа кальки обведите снова изображение фигуры F. Развернув теперь лист кальки, вы увидите по одну сторону линии l фигуру F, а по другую сторону — симметричную ей фигуру F'. Сравните полученный чертеж с чертежом, полученным при выполнении предыдущей работы.

§ 7. СВОЙСТВА ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Следующие свойства осевой симметрии вытекают из возможности осуществления осевой симметрии с помощью перегибания листа бумаги.

Теорема 1. *Фигуры, симметричные относительно прямой l, равны между собой.*

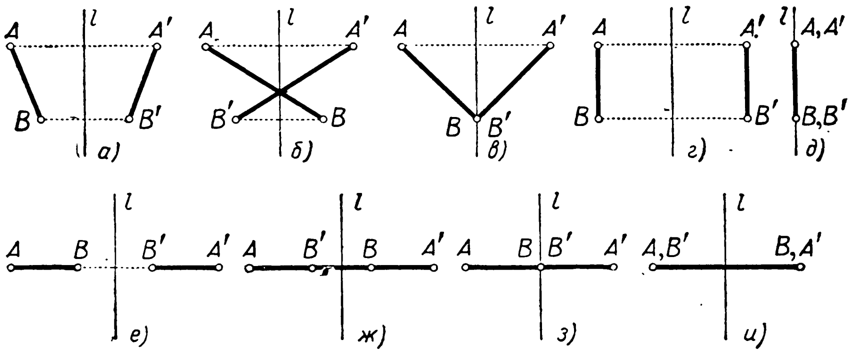


Рис. 23.

В самом деле, так как при перегибании листа бумаги по прямой l фигуры F и F', симметричные относительно l, совмещаются, то они равны между собой.

Частными случаями теоремы 1 являются следующие теоремы 2 и 3.

Теорема 2. *Фигура, симметричная отрезку AB относительно прямой l, представляет собой отрезок $A'B'$, равный отрезку AB. Концы A' и B' отрезка $A'B'$ симметричны концам A и B первоначального отрезка.*

Разные случаи, которые здесь могут представиться, изображены на рисунке 23.

Теорема 3. *Фигура S', симметричная окружности S относительно прямой l, представляет собой окружность, равную первоначальной. Центром этой окружности служит точка O', симметричная относительно прямой l центру O окружности S* (рис. 24).

В самом деле, если A — произвольная точка исходной окружности, а A' — симметричная ей относительно l точка и O' — точка, симметричная центру окружности S, то, в силу теоремы 2,

$$O'A' = OA = r,$$

где r — радиус окружнсcти S. Различные случаи, которые здесь могут представиться, изображены на рисунке 25.

Теорема 4. *Фигура a', симметричная прямой a относительно прямой l, также является прямой линией. Если прямая a пересекает l, то a' пересекает l в той же точке, причем прямые a и a' образуют с прямой l равные углы; в частности, если прямая a перпендикулярна l, то a' совпадает с a. Если прямая a параллельна l, то a' тоже параллельна l и удалена от l на то же расстояние, что и a. Наконец, если прямая a совпадает с l, то и a' совпадает с l.*

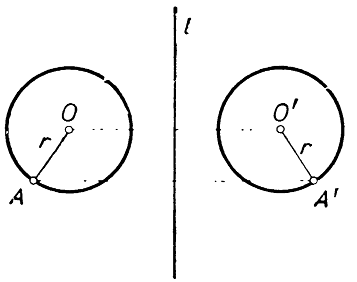


Рис. 24.

Доказательство. Фигура, равная прямой линии (т. е. совпадающая с ней при наложении), также является прямой линией. Поэтому, в силу теоремы 1, фигура a' есть прямая. Если прямая a пересекается с l в точке M (рис. 26, a), то прямая a'

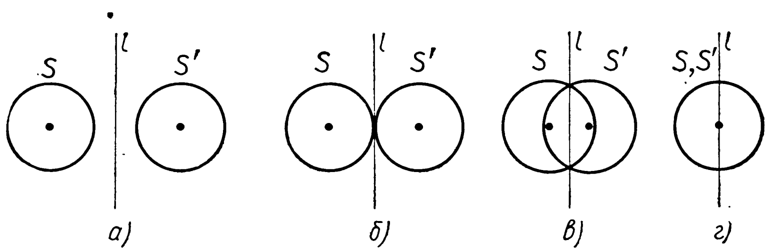


Рис. 25.

также проходит через точку M, ибо при симметрии относительно l точка M переходит в себя. Изображенные на рисунке 26, a $\angle 1$ и $\angle 2$ равны, так как они совмещаются при симметрии (теорема 1). На рисунке 26, $б$ специально изображен случай $a \perp l$.

Предположим теперь, что прямая a параллельна l (рис. 26, $в$). В этом случае прямая a' не может пересечь l, так как иначе симметричная ей прямая a должна была бы пересечь l в той же самой точке. Следовательно, $a' \parallel l$. Далее, расстояния от прямых a и a' до прямой l равны, так как любой перпендикуляр к прямой l пересекает a и a' в симметричных точках A и A', и потому $A'P=AP$ (рис. 26, *в*). Последнее утверждение теоремы 4 очевидно.

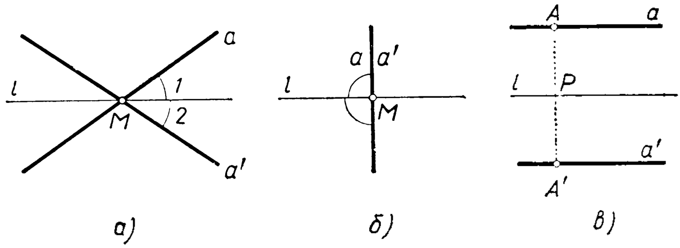


Рис. 26.

§ 8. ПОСТРОЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ФИГУР

Задача 1. *Построить точку, симметричную данной точке A относительно данной прямой l.*

Решение. Из точки A опускаем перпендикуляр AP на прямую l (например, с помощью линейки и угольника). На его продолжении за точку P откладываем отрезок $PA'=AP$. Точка A' — искомая (см. рис. 16, стр. 12).

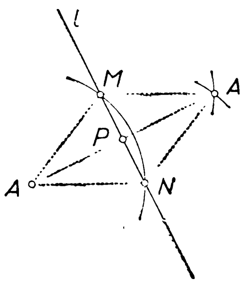


Рис. 27.

Другое решение может быть осуществлено одним только циркулем. Мы проводим некоторым радиусом дугу окружности с центром в точке A, пересекающую прямую l в точках M и N (рис. 27). Затем, принимая точки M и N за центры, проводим тем же радиусом дуги окружностей; точка пересечения этих дуг и будет искомой точкой A'. Доказательство правильности построения вытекает из того, что $MANA'$ — ромб; его диагонали AA' и MN взаимно перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам.

Задача 2. *Построить отрезок, симметричный данному отрезку AB относительно данной прямой l.*

Решение. Строим точки A' и B', симметричные точкам A и B относительно прямой l (задача 1). Отрезок $A'B'$ — искомый (теорема 2, § 7).

Задача 3. *Построить многоугольник, симметричный данному многоугольнику относительно данной прямой l.*

Решение. Строим точки A', B', C', ..., симметричные вершинам A, B, C, ... данного многоугольника относительно прямой l. Последовательно соединяя полученные точки отрезками, мы и получаем многоугольник, симметричный данному (рис. 28).

Задача 4. *Построить угол, симметричный данному углу AOB относительно данной прямой l.*

Решение. Пусть O — вершина данного угла, а A и B — какие-либо две точки, лежащие на сторонах этого угла (рис. 29). Построим точки O', A', B', симметричные точкам O, A, B относительно прямой l. Тогда $\angle A'O'B'$ — искомый.

Задача 5. *Построить окружность, симметричную данной окружности относительно данной прямой l.*

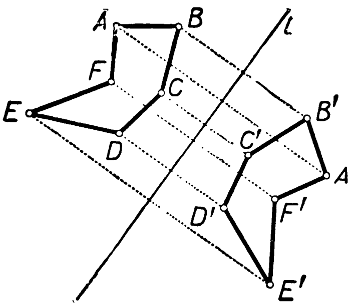


Рис. 28.

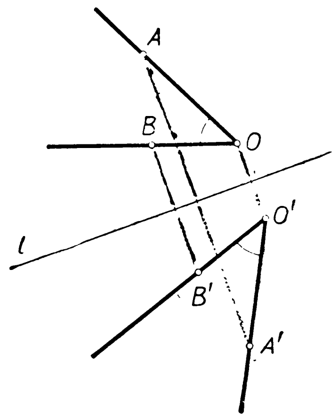


Рис. 29.

Решение. Строим точку O', симметричную центру O данной окружности относительно прямой l. Проводим окружность с центром в точке O', радиус которой равен радиусу данной окружности (см. рис. 24). Эта окружность и будет искомой (теорема 3, § 7).

§ 9. ПРИМЕРЫ СИММЕТРИЧНЫХ ФИГУР

Многие из геометрических фигур, встречавшихся в курсе геометрии VI—VII классов, обладают осью симметрии, т. е. являются симметричными фигурами. Так, *перпендикуляр l, восставленный к отрезку AB в его середине, является осью симметрии этого отрезка* (рис. 30). В самом деле, при симметрии относительно прямой l отрезок AB переходит в отрезок, концы которого симметричны точкам A и B относительно l (см. теорему 2 из § 7). Но точке A симметрична точка B, а точке B — точка A. Поэтому при симметрии относительно прямой l отрезок AB перейдет сам в себя, и, значит, прямая l является его осью симметрии.

Осью симметрии угла ABC является его биссектриса BD (рис. 31). В самом деле, при симметрии относительно прямой BD луч BA перейдет в луч BC, а луч BC — в луч BA (см. теорему 4 из § 7). Но это означает, что угол ABC при симметрии относительно прямой BD перейдет сам в себя.

Осью симметрии равнобедренного треугольника ABC является биссектриса l угла при вершине (рис. 32). В самом деле, при симметрии относительно прямой l луч BA перей-

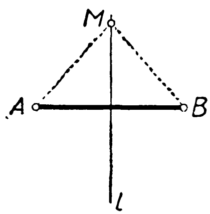


Рис. 30.

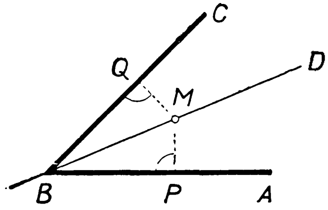


Рис. 31.

дет в луч BC и наоборот. Так как отрезки BA и BC равны, то при симметрии относительно прямой l они перейдут один в другой. А отсюда следует, что треугольник ABC при симметрии относительно l перейдет сам в себя.

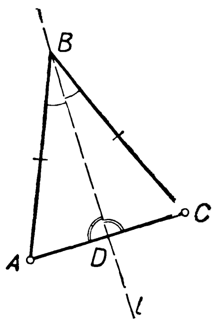


Рис. 32.

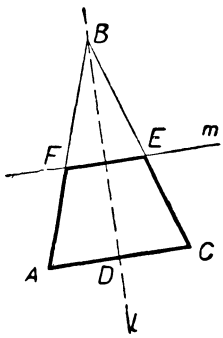


Рис. 33.

Проведем теперь прямую m, перпендикулярную оси симметрии l равнобедренного треугольника ABC и пересекающую его боковые стороны в точках F и E (рис. 33). Мы получим равнобочную трапецию $ACEF$. Так как точки F и E симметричны относительно прямой l, то *прямая l, проходящая через середины оснований равнобочной трапеции, является ее осью симметрии.*

Каждая прямая l, проходящая через центр O окружности, является ее осью симметрии (рис. 34). В самом деле, при симметрии относительно l рассматриваемая окружность перейдет в окружность того же радиуса с центром в точке O', симметричной O относительно l (теорема 3, § 7). Но точка O' совпадает с O, и потому окружность переходит сама в себя.

Рассмотрим, наконец, **две** окружности с центрами O и O_1 (рис. 35). Прямая OO_1 является осью симметрии как одной, так и другой окружностей. Поэтому *прямая OO_1 (линия центров) будет являться осью симметрии фигуры, образованной двумя окружностями*: при симметрии относительно этой прямой каждая из окружностей переходит в себя и наша сложная «фигура»,

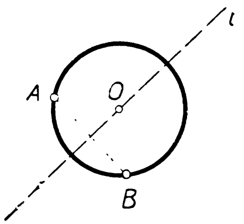


Рис. 34.

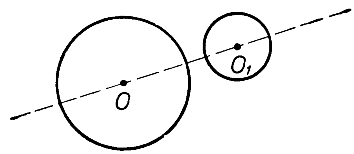


Рис. 35.

состоящая из двух окружностей, также перейдет в себя. Если две окружности — концентрические, то **любая** прямая, проходящая через их общий центр, является осью симметрии фигуры, образованной этими двумя окружностями.

§ 10. ПРИМЕНЕНИЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ

С помощью осевой симметрии могут быть доказаны многие геометрические теоремы — как уже известные из курса геометрии VI—VIII классов, так и новые. Приведем несколько примеров.

Каждая точка M прямой l, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину, равноудалена от концов отрезка (рис. 30). В самом деле, точки A и B симметричны относительно прямой l; поэтому отрезки AM и BM симметричны относительно l и, следовательно, равны (теорема 2, § 7).

Каждая точка M биссектрисы l угла ABC равноудалена от сторон угла (рис. 31). Действительно, опустим из точки M перпендикуляр MP на сторону BA. При симметрии относительно биссектрисы BM точка P переходит в некоторую точку Q стороны BC (так как сторона BA переходит в BC). Угол MPB переходит при симметрии относительно прямой l в угол MQB. Следовательно, эти углы равны (теорема 1, § 7), т. е. $MQ \perp BC$. Наконец, $MP = MQ$, так как эти отрезки симметричны друг другу относительно прямой l.

Углы при основании AC равнобедренного треугольника ABC равны, а биссектриса BD угла при вершине является в то же время медианой и высотой (рис. 32). Это вытекает из того, что прямая BD — ось симметрии треугольника ABC. При симметрии относительно прямой BD угол BAC совмещается с углом BCA;

отрезок AD — с отрезком CD; угол ADB — с углом CDB (значит, эти углы — прямые).

Диаметр l, перпендикулярный к хорде AB окружности, делит эту хорду пополам (рис. 34). Это вытекает из того, что прямая l — ось симметрии окружности; поэтому точка A окружности симметрична относительно прямой l точке B.

Касательные MA и MB, проведенные к окружности из внешней точки M, образуют равные углы с хордой AB. Отрезки MA и MB равны между собой. Прямая MO, соединяющая точку M с центром окружности, перпендикулярна хорде AB и пересекает эту хорду в ее середине K (рис. 36).

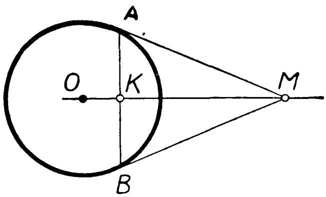


Рис. 36.

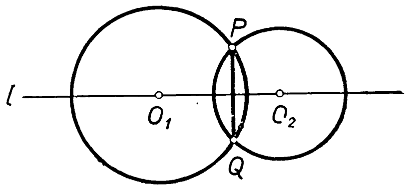


Рис. 37.

Прямая OM является осью симметрии окружности. Касательная MA, имеющая единственную общую точку с окружностью, переходит при симметрии относительно прямой OM в прямую, также имеющую единственную общую точку с окружностью, т. е. в касательную MB. При симметрии относительно

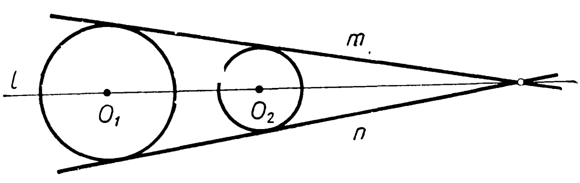


Рис. 38.

прямой OM отрезок MA переходит в отрезок MB; угол MAB переходит в угол MBA; отрезок AK переходит в отрезок BK; угол MKA переходит в угол MKB. Поэтому $MA=MB$; $\angle MAB = \angle MBA$; $AK=BK$; $\angle MKA = \angle MKB = 90°$.

Общая хорда PQ двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров O_1O_2 и делится ею пополам (рис. 37). В самом деле, прямая O_1O_2 является осью симметрии каждой из окружностей. Точке P, принадлежащей обеим окружностям, симметрична относительно этой прямой точка, также принадлежащая обеим окружностям, т. е. точка Q. Отсюда и вытекает сделанное утверждение.

Общие внешние касательные двух окружностей либо пересекаются на линии центров O_1O_2 (рис. 38), *либо параллельны. Общие внутренние касательные двух окружностей пересекаются на линии центров* (рис. 39).

Действительно, прямая O_1O_2 является осью симметрии фигуры, образованной двумя окружностями. При симметрии относительно O_1O_2 прямая m, имеющая по одной общей точке с каждой окружностью, переходит в прямую n, также имеющую по одной общей точке с каждой окружностью, т. е. общая касательная m переходит в общую касательную n. Если при этом m — общая внешняя касательная, то окружности расположены по одну сторону от прямой m, и потому отрезок O_1O_2 не пересекает

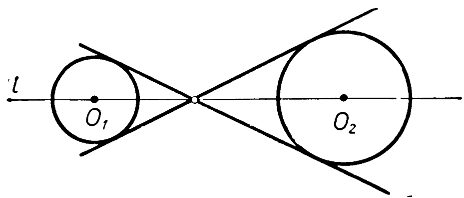


Рис. 39.

прямой m. Из теоремы 4, § 7, вытекает, что и прямая n не пересекает отрезка O_1O_2, т. е. n также является общей внешней касательной. Итак, при симметрии относительно прямой O_1O_2 общая внешняя касательная переходит в другую общую внешнюю касательную. Аналогично, общая внутренняя касательная переходит в другую общую внутреннюю касательную. Отсюда и следует наше утверждение (см. теорему 4, § 7).

Другие примеры применения осевой симметрии вы найдете в задачах.

§ 11. ЗАДАЧИ

В предыдущем параграфе при применении осевой симметрии мы каждый раз использовали симметричность той или иной геометрической фигуры (отрезка, угла, равнобедренного треугольника, окружности и т. д.). Но осевой симметрией можно пользоваться и для решения задач, не связанных с рассмотрением симметричных фигур. В таких случаях осевая симметрия применяется не ко всему чертежу в целом, а лишь к некоторой его части. При этом мы приходим к новому чертежу, который может оказаться более удобным для решения задачи, чем исходный.

Приведем два примера.

Задача 1. *Даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на прямой l такую точку M, чтобы сумма $AM+MB$ была наименьшей* (рис. 40).

Можно представить себе следующую жизненную ситуацию, приводящую к решению этой задачи. Прямая l представляет собой прямолинейную телефонную линию, а точки A и B — батарею и штаб некоторой воинской части. Связист получил задание отправиться из батареи в штаб, причем по дороге он должен подойти к телефонной линии l и, подключившись, проверить ее работу. Никаких препятствий на местности нет; подключение связист может осуществить в любой точке линии. Спрашивается, какой путь будет наиболее выгодным для связиста (т. е. самым коротким)?

Решение. Рассмотрим точку B', симметричную точке B относительно прямой l (рис. 41). Тогда для любой точки N прямой l мы имеем $NB=NB'$ (теорема 2, § 7), и потому

$$AN+NB=AN+NB'.$$

Таким образом, сумма $AN+NB$ равна длине ломаной ANB'. Следовательно, наименьшую величину сумма расстояний $AN+NB$

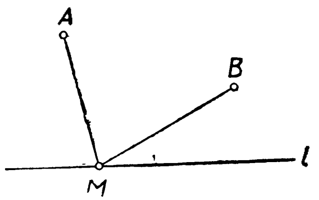


Рис. 40.

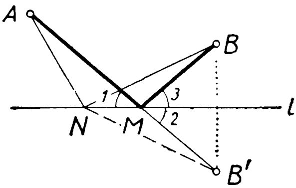


Рис. 41.

будет иметь в том случае, когда наименьшую длину будет иметь ломаная ANB'. Но ломаная ANB' будет иметь наименьшую длину, если она обратится в отрезок прямой, т. е. если роль точки N играет точка M пересечения прямой l с отрезком AB'. Эта точка M и является искомой (рис. 41).

Замечание. Из решения задачи следует, что искомая точка M лежит на одной прямой с точками A и B', и потому $\angle 1=\angle 2=\angle 3$ (рис. 41). Иначе говоря, кратчайший путь AMB характеризуется тем, что для него «угол падения» равен «углу отражения». Так как именно этим условием характеризуется путь светового луча, отражающегося от зеркала, то мы видим, что световой луч, выходящий из точки A и попадающий в точку B после отражения от «зеркала» l, «выбирает» кратчайший путь. Этот факт является частным случаем известного в оптике общего принципа Ферма[1], согласно которому свет всегда (при отражении, преломлении и т. д.) «выбирает» из всех возможных путей тот, который требует наименьшего времени прохождения.

Задача 2. *Построить квадрат, две противоположные вершины которого лежат на данной прямой l, а две другие — на двух данных окружностях* (рис. 42).

[1] П. Ферма (P. Fermat) — известный французский математик XVII столетия.

Решение[1].

Анализ. Предположим, что задача решена и $ABCD$ — искомый квадрат; точки A и C лежат на прямой l, точка B — на данной окружности R, а точка D — на другой данной окружности S (рис. 43). Так как диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам, то точки B и D симметричны относительно прямой AC (т. е. относительно прямой l). Но точка B принадлежит окружности R; поэтому симметричная ей точка D должна лежать на окружности R', симметричной окружности R относительно прямой l. Кроме того, точка D лежит на окружности S. Следовательно, D есть точка пересечения окружностей S и R'.

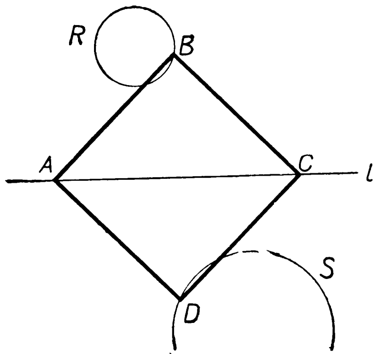


Рис. 42.

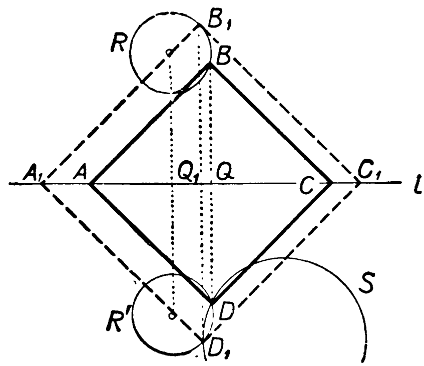


Рис. 43.

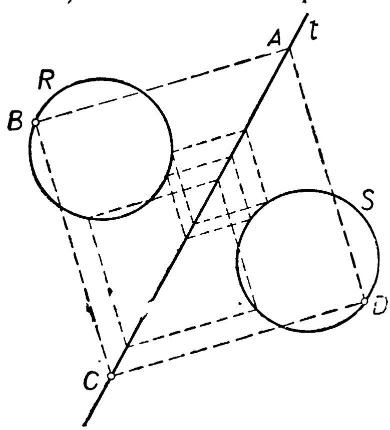


Рис. 44.

Построение. Построим окружность R', симметричную окружности R относительно прямой l (см. задачу 5, § 8). Пусть D — точка пересечения окружностей S и R' (мы предполагаем, что точка D не лежит на прямой l). Обозначим через B точку, симметричную точке D относительно прямой l, и через Q — точку пересечения отрезка BD с прямой l. Наконец, отложим на прямой l по обе стороны от точки Q отрезки QA и QC, равные отрезку QD. Тогда $ABCD$ — искомый квадрат.

[1] Решение задачи на построение обычно делится на четыре части: анализ, построение, доказательство и исследование (см. по этому поводу стр. 182).

Доказательство. Четырехугольник $ABCD$ является квадратом, так как диагонали его равны, перпендикулярны и делятся в точке пересечения Q пополам. Точки A и C лежат, по построению, на прямой l, а точка D — на окружности S. Наконец, так как точка D лежит на окружности R', то симметричная ей точка B лежит на окружности R.

Исследование. В зависимости от расположения окружностей S и R' число точек пересечения этих окружностей, не лежащих на прямой l, может быть равно 2, 1 или 0. В соответствующих случаях задача будет иметь *два*, *одно* или *ни одного* решения. Может даже случиться, что окружности S и R' совпадают, т. е. имеют бесконечно много общих точек (это будет в том случае, если окружности R и S симметричны относительно прямой l). В этом случае задача будет иметь *бесконечно много* решений (рис. 44).

Задачи и упражнения к главе I

Определение осевой симметрии. Симметричные фигуры

1. Перерисуйте в тетрадь фигуры, приведенные на рисунке 45. Для каждой из этих фигур изобразите фигуру, симметричную ей относительно оси l.

2. Перерисуйте в тетрадь изображенные на рисунке 46 «левые половины» симметричных фигур и дополните полученные рисунки.

3. Укажите оси симметрии фигур, изображенных на рисунке 47.

4. Укажите оси симметрии фигур, изображенных на рисунке 48. Какие из изображенных на этом рисунке фигур не имеют осей симметрии? Какие из изображенных на этом рисунке фигур имеют больше одной оси симметрии?

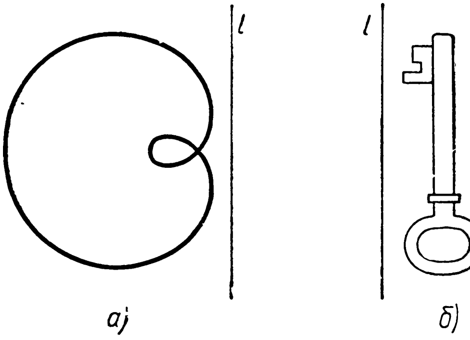


Рис. 45.

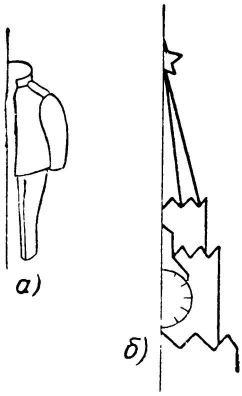


Рис. 46.

5. Какие из заглавных букв русского лфавита (рис. 49) симметричны? Какие из них имеют несколько осей симметрии?

Укажите несколько слов, запись которых симметрична.

6. Может ли фигура иметь бесконечно много осей симметрии?

7. Укажите вокруг себя несколько предметов, изображение которых на бумаге будет иметь оси симметрии.

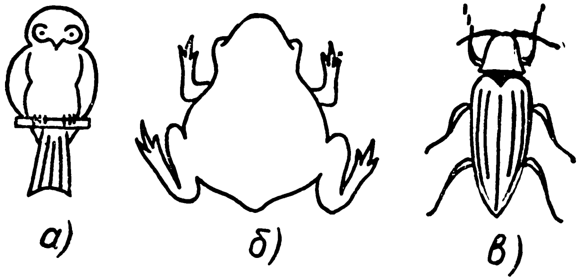


Рис. 47.

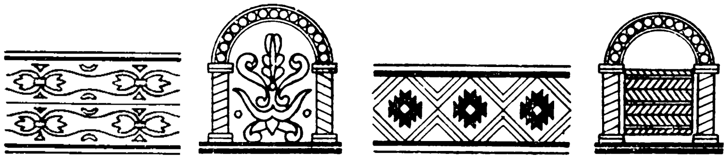


Рис. 48.

АБВГДЕЖЗИКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЙЬЭЮЯ

Рис. 49.

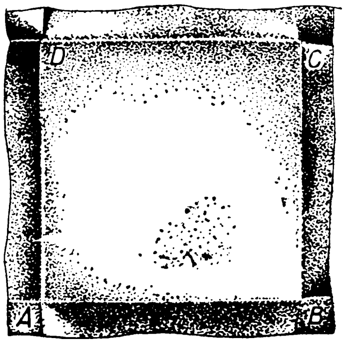


Рис. 50.

Перегибание листа бумаги

В задачах 8—10 требуется согнуть несколько раз лист бумаги так, чтобы линии сгиба образовывали требуемую фигуру (или пересечения линий сгиба определили требуемую точку).

8. На листе бумаги изображены три точки A, B и C. С помощью перегибания листа бумаги, без помощи каких бы то ни было геометрических инструментов, отметьте

а) центр описанной окружности треугольника ABC;

б) центр вписанной окружности треугольника ABC.

9. На листе бумаги отмечены две точки A и B. С помощью перегибания листа бумаги изобразите квадрат $ABCD$ (рис. 50).

10. На листе бумаги отмечены две точки A и B. С помощью перегибания листа бумаги изобразите равносторонний треугольник ABC.

11. С помощью листа бумаги и ножниц изобразите фигуру, имеющую

а) одну ось симметрии (см. рис. 22 на стр. 16);

б) две взаимно перпендикулярные оси симметрии;

в) три оси симметрии;

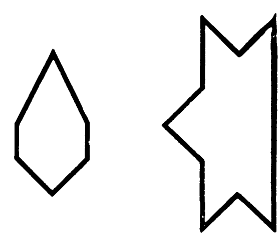
г) четыре оси симметрии.

Свойства осевой симметрии

12. Какие точки переходят сами в себя при симметрии относительно прямой l? Какие прямые переходят сами в себя при симметрии относительно прямой l? Какие окружности переходят сами в себя при симметрии относительно прямой l?

13. Дан угол ABC и его биссектриса BD. Докажите, что прямая $B'D'$, симметричная прямой BD относительно некоторой прямой l, является биссектрисой угла $A'B'C'$, симметричного углу ABC относительно прямой l.

14. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два треугольника, симметричные друг другу относительно некоторой прямой l. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC симметрична относительно прямой l точке пересечения медиан треугольника $A'B'C'$.



а) б)

Рис. 51.

15. Укажите оси симметрии многоугольников, изображенных на рисунке 51. Для каждой из вершин этих многоугольников укажите вершину, симметричную ей относительно оси симметрии.

16. Даны два отрезка AB и CD. Докажите, что эти отрезки в том и только в том случае симметричны относительно некоторой прямой l, если 1) отрезки AB и CD равны; 2) точки A, B, C, D принадлежат одной окружности (или одной прямой).

17. Даны две окружности S и R. В каком случае существует такая прямая l, что окружность R симметрична S относительно l?

18. Отрезки AB и CD симметричны друг другу относительно двух (различных!) прямых l_1 и l_2. Докажите, что точки A, C, B и D являются вершинами прямоугольника.

19. Прямая PQ, перпендикулярная биссектрисе угла ABC, пересекает стороны угла в точках P и Q. Докажите, что точки P и Q симметричны относительно биссектрисы угла.

20. На сторонах угла ABC отложены равные отрезки BK и BL; точки K и L соединены с произвольной точкой M биссектрисы угла. Докажите, что отрезки MK и ML симметричны относительно прямой BM.

21. Докажите, что

а) равные окружности, пересекающиеся в точках A и B, симметричны относительно прямой AB;

б) равные окружности, касающиеся в точке A, симметричны относительно общей касательной, проведенной в этой точке.

22. Окружность S, центр которой принадлежит биссектрисе BD угла ABC, отсекает на сторонах угла отрезки KL и MN. Докажите, что эти отрезки симметричны друг другу относительно биссектрисы угла.

Примеры симметричных фигур

23. Какие из перечисленных ниже многоугольников имеют оси симметрии: разносторонний треугольник; равнобедренный треугольник, равносторонний треугольник; параллелограмм; прямоугольник; ромб; квадрат; неравнобочная трапеция; равнобочная трапеция; правильный пятиугольник; правильный n-угольник?

Укажите в каждом случае точное число осей симметрии.

24. Какие из следующих фигур имеют оси симметрии: круг; полукруг; сектор; сегмент; круг с начерченными диаметром AB и хордой AC, образующими угол в 45°; круг с проведенными к нему из точки M касательными MA и MB, образующими угол в 60°; линза, образованная пересечением двух неравных кругов; кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями; кольцо, образованное двумя эксцентрическими (т. е. не концентрическими) окружностями?

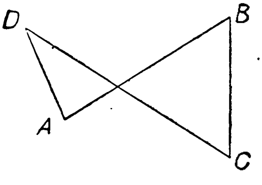


Рис. 52

Какие из этих фигур имеют больше одной оси симметрии?

25. Сколько осей симметрии имеет фигура, образованная

а) двумя пересекающимися прямыми;

б) двумя параллельными прямыми;

в) двумя совпадающими прямыми (т. е. фигура, состоящая из одной-единственной прямой)?

26. Сколько осей симметрии имеет отрезок AB?

27. Какое наибольшее число осей симметрии может иметь треугольник?

28. Докажите, что если треугольник имеет две оси симметрии, то он имеет и третью ось симметрии.

29. а) Перечислите все виды выпуклых четырехугольников, имеющих ось симметрии.

б) Перечислите все виды выпуклых четырехугольников, имеющих две или больше осей симметрии.

30. Какое наибольшее число осей симметрии может иметь четырехугольник?

31. а) Перечислите все виды невыпуклых четырехугольников, имеющих ось симметрии.

б) Перечислите все виды невыпуклых четырехугольников, имеющих две или больше осей симметрии.

32. а) «Самопересекающимся четырехугольником» назовем замкнутую ломаную $ABCD$, противоположные звенья AB и CD которой пересекают друг друга (рис. 52). Перечислите все виды самопересекающихся четырехугольников, имеющих ось симметрии.

б) Перечислите все виды самопересекающихся четырехугольников, имеющих две или больше осей симметрии.

33. Сколько осей симметрии имеет фигура, образованная

а) окружностью S и точкой A;

б) окружностью S и прямой a;

в) двумя окружностями S и R?

Построение симметричных фигур

34. Даны две точки A и B; постройте такую прямую l, что точки A и B симметричны друг другу относительно прямой l.

35. Даны две прямые a и b; постройте такую прямую l, что прямые a и b симметричны друг другу относительно прямой l.

36. На плоскости дан треугольник ABC. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно его а) медианы AD;

б) биссектрисы AE;

в) высоты AF.

37. Постройте треугольник, симметричный данному треугольнику ABC относительно его средней линии MN.

38. Постройте параллелограмм, симметричный данному параллелограмму $ABCD$ относительно

а) диагонали AC;

б) средней линии MN параллелограмма $ABCD$.

39. Дан круг K и его хорда AB. Постройте круг K', симметричный кругу K относительно хорды AB, и заштрихуйте фигуру, образованную пересечением кругов K и K'.

40. На плоскости дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Постройте другой шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$, симметричный шестиугольнику $ABCDEF$ относительно его диагонали AC. Заштрихуйте многоугольник, образованный пересечением шестиугольников $ABCDEF$ и $A'B'C'D'E'F'$. Каким будет этот последний многоугольник?

Применение осевой симметрии к доказательству теорем

41. Докажите, что диагонали ромба являются его осями симметрии.

42. Какие свойства ромба вытекают из наличия у него осей симметрии?

43. Докажите, что трапеция в том и только в том случае имеет ось симметрии, если она равнобочная.

44. Какие известные вам свойства равнобочной трапеции вытекают из наличия у нее оси симметрии?

45. Найдите в курсе геометрии VI—VIII классов другие теоремы, в доказательстве которых можно использовать осевую симметрию. Дайте новые доказательства этих теорем, использующие понятие осевой симметрии.

46. Точки A и B, расположенные на сторонах угла MPN на равных расстояниях от вершины P, соединены с точкой Q биссектрисы угла. Докажите, что отрезки QA и QB

а) составляют равные углы с биссектрисой PQ;

б) составляют равные углы соответственно с прямыми PM и PN;

в) равны между собой.

47. На равных сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AM и CN. Докажите, что

а) отрезки CM и AN равны;

б) точка пересечения прямых CM и AN принадлежит биссектрисе BD треугольника.

48. На равных сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC вне его построены квадраты; P и Q — центры этих квадратов. Докажите, что

а) прямые PA и QC, PC и QA пересекаются на биссектрисе угла B треугольника;

б) прямая PQ перпендикулярна биссектрисе угла B;

в) $PA=QC$; $PC=QA$.

49. На равных сторонах равнобочной трапеции $ABCD$ вне ее построены равносторонние треугольники ADM и BCN. Докажите, что

а) $MB=NA$; $MC=ND$.

б) $MN \parallel AB$ (или MN и AB принадлежат одной прямой).

50. На сторонах угла ABC отложены равные отрезки $BK=BL$; в точках K и L восставлены перпендикуляры KQ и LQ к сторонам угла. Докажите, что

а) точка Q (точка пересечения перпендикуляров) принадлежит биссектрисе угла;

б) отрезки QK и QL равны;

в) прямые KQ и LQ пересекают стороны BL и BK угла в точках E и F, равноудаленных от вершины угла.

51. Докажите, что прямая, проведенная через середину основания равнобочной трапеции перпендикулярно основанию, делит пополам и второе основание трапеции.

52. а) Докажите, что прямая, соединяющая середины оснований равнобочной трапеции, перпендикулярна основаниям.

б) Докажите, что если прямая, соединяющая середины оснований трапеции, перпендикулярна основаниям, то трапеция — равнобочная.

53. а) Докажите, что прямая, соединяющая середины оснований равнобочной трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон.

б) Докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей равнобочной трапеции с точкой пересечения продолжений боковых сторон, перпендикулярна основаниям трапеции и делит их пополам.

54*. Средняя линия, соединяющая середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и через точку пересечения боковых сторон. Следует ли из этого, что трапеция — равнобочная?

55. Пусть $ABCD$ — равнобочная трапеция с основаниями AB и DC; P и Q — точки пересечения медиан треугольников ABC и ABD. Докажите, что $PD=QC$.

56. Пусть K и L — середины оснований AB и CD равнобочной трапеции $ABCD$. Докажите, что

а) центры M и N окружностей, вписанных в треугольники ADK и BCK, равноудалены от точки L;

б) центры P и Q окружностей, описанных вокруг треугольников ADL и BCL, равноудалены от точки K.

57. На стороне BA угла ABC отложены отрезки BM и BN, а на второй стороне BC — равные им отрезки $BP=BM$ и $BQ=BN$. Докажите, что

а) отрезки MQ и NP равны;

б) отрезки MQ и NP пересекаются на биссектрисе угла.

58. Через концы A и B большего основания равнобочной трапеции $ABCD$ проведены прямые AT и BT, образующие равные углы TAB и TBA с основанием AB; точка T соединена с точкой E пересечения диагоналей трапеции. Докажите, что прямая ET

а) проходит через точку F пересечения продолжений боковых сторон трапеции;

б) делит основания трапеции пополам;

в) перпендикулярна основаниям трапеции.

59. Пусть O — точка пересечения диагоналей равнобочной трапеции $ABCD$, AD и BC — ее боковые стороны. Докажите, что $\triangle ADO=\triangle BCO$.

60. Обозначим через M точку пересечения диагоналей равнобочной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, а через P и Q — центры окружностей, описанных вокруг треугольников ADM и BCM. Докажите, что

а) отрезок PQ параллелен основаниям трапеции;

б) $BP=AQ$;

в) прямая, соединяющая точку M с точкой пересечения прямых BP и AQ, делит основания трапеции пополам.

61. Точки M и N пересечения двух окружностей R и S соединены с произвольной точкой Q их линии центров. Докажите, что

а) отрезки QM и QN равны;

б) отрезки QM и QN составляют одинаковые углы с линией центров.

62. Из точки M проведены к окружности касательные MA и MB; на них отложены равные отрезки MK и ML. Докажите, что

а) точки K и L равноудалены от центра O окружности;

б) углы ALO и BKO (где A и B — точки окружности) равны;

в) три прямые AL, BK и MO пересекаются в одной точке.

63. Центр O окружности принадлежит биссектрисе угла ABC. Докажите, что если окружность пересекает стороны угла, то

а) хорды MN и PQ, отсекаемые окружностью на сторонах угла, равны;

б) хорды MP и NQ параллельны; хорды MQ и NP равны (или, наоборот, хорды MQ и NP параллельны, а хорды MP и NQ равны).

64. На касательной t окружности отложены от точки касания A равные отрезки AB и AC; из точек B и C проведены к окружности касательные BD и CE (отличные от t). Докажите, что а) углы ABD и ACE равны;

б) прямые DE (где D и E — точки окружности) и t параллельны;

в) отрезки BD и CE равны;

г) отрезки BE и CD равны.

65. Две окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что углы, образованные касательными к окружностям, проведенными в точке A, равны углам между касательными, проведенными в точке B.

66. Центры окружностей R и S принадлежат биссектрисе угла ABC; окружность R пересекает стороны BA и BC угла в точках K, L и U, V, а окружность S — в точках M, N и W, Z (причем на луче BA точка K предшествует L и точка M — N, а на луче BC точка U предшествует V и точка W — Z). Докажите, что

$$KM=UW,\ KN=UZ,\ LM=VW,\ LN=VZ.$$

67. Прямая l пересекает одну из двух концентрических окружностей в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что $AC=BD$ и $AD=BC$.

68. Окружность S пересекает одну из двух концентрических окружностей в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что $AC=BD$, $AD=BC$ и $AB \parallel CD$.

69. Из точки Q, принадлежащей линии центров O_1O_2 двух окружностей R и S, проведены касательные QA, QB окружности R и касательные QC, QD окружности S (точки A, B и C, D принадлежат окружностям R и S). Докажите, что прямые AC и BD, так же как прямые AD и BC, пересекаются на прямой O_1O_2 (или параллельны).

Разные задачи

70. Даны прямая MN и две точки A и B по одну сторону от MN. Найдите на прямой MN такую точку Q, что прямые AQ и BQ образуют с MN одинаковые углы.

71. На плоскости даны прямая l и две точки A и B по разные стороны от нее. Найдите на прямой такую точку M, чтобы разность расстояний MA и MB была наибольшей.

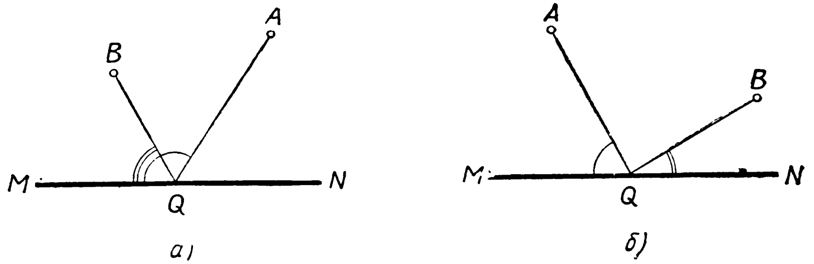


Рис. 53.

72. На плоскости даны угол ABC и прямая l. Постройте квадрат так, чтобы две противоположные вершины квадрата принадлежали прямой l, а две другие — сторонам угла ABC.

73. На плоскости даны прямые l и m и окружность S. Постройте ромб $ABCD$ с углом BAD, равным 60°, вершины A и C которого принадлежат прямой l, вершина B — прямой m и вершина D — окружности S.

74. Даны прямая l и две окружности R и S по одну сторону от l. Найдите на прямой l такую точку Q, что касательные QA и QB, проведенные из Q к окружностям R и S, образуют с l равные углы.

75. Даны прямая MN и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой MN такую точку Q, что $\angle AQM=2\angle BQM$ (рис. 53, a).

76*. Даны прямая MN и две точки A и B по одну сторону от MN. Найдите на прямой MN такую точку Q, что $\angle AQM = 2\angle BQN$ (рис. 53, o).

77. Постройте четырехугольник $ABCD$, у которого диагональ AC является биссектрисой угла A, зная длины всех сторон четырехугольника.

78*. Докажите, что два отличных от ромбоида четырехугольника $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны, если диагонали AC и $A'C'$ являются биссектрисами углов A и A' и каждая сторона первого четырехугольника равна соответствующей ей стороне второго четырехугольника. Можно ли утверждать то же самое, если четырехугольники являются ромбоидами?

[Ромбоидом называется такой четырехугольник $ABCD$, соседние стороны которого попарно равны (например, $AB = AD$, $BC = DF$).]

79*. Постройте треугольник ABC, зная основание $BC = a$, высоту $AP = h$ и разность $\angle B - \angle C = \alpha$ прилежащих к основанию углов.

80*. Постройте треугольник ABC, зная две стороны $AB = c$, $AC = b$ и разность $\angle B - \angle C = \alpha$ углов, прилежащих к третьей стороне.

81. Высоты AP и BQ треугольника ABC пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках D и E. Докажите, что точка, симметричная D относительно прямой BC, совпадает с точкой, симметричной E относительно прямой AC.

Выведите отсюда, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

82. а) Постройте три окружности, симметричные описанной окружности треугольника ABC относительно его сторон. Докажите, что эти три окружности пересекаются в одной точке H.

б) Докажите, что точка H [см. задачу а)] является точкой пересечения высот треугольника ABC (см. задачу 81).

83*. Пусть D — точка пересечения высот треугольника ABC (см. задачу 81). Окружности, описанные вокруг треугольников ABC, ABD, ACD и BCD, обозначим через S, S_1, S_2 и S_3; а их центры — через O, O_1, O_2 и O_3. Докажите, что

а) окружности S, S_1, S_2 и S_3 равны;

б) отрезки OD, O_1C, O_2B и O_3A пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам;

в) четырехугольники $ABCD$ и $OO_1O_2O_3$ равны.

84*. Даны прямые m и n, пересекающиеся в точке O, и точка A. Постройте треугольник ABC, для которого прямые m, n и OA служат биссектрисами углов.

85*. Дана окружность S и три прямые l, m, n, проходящие через ее центр. Опишите вокруг окружности S треугольник ABC, вершины которого лежат на данных прямых.

86*. Даны две прямые m, n, пересекающиеся в точке O, и точка P. Постройте такой треугольник ABC, сторона AB которого проходит через точку P, чтобы прямые m, n и OP были перпендикулярами, восставленными к сторонам треугольника в их серединах.

87. Докажите, что из всех треугольников с данными основанием и высотой равнобедренный имеет наименьший периметр.

88*. На прямоугольном биллиарде $ABCD$ даны два шара M и N. Как надо толкнуть шар M для того, чтобы он, отразившись от бортов AB и BC, попал в шар N? Решите тот же вопрос с заменой бортов AB и BC бортами AB и AD.

[Закон отражения биллиардных шаров от борта биллиарда в точности совпадает с законом отражения световых лучей от зеркала; он гласит: *угол падения* (шара на борт биллиарда) *равен углу отражения* (рис. 54).]

89*. На прямоугольном биллиарде $ABCD$ даны два шара M и N. Как надо толкнуть шар M для того, чтобы он, отразившись последовательно от всех четырех бортов биллиарда, попал в шар N?

90. Даны прямая l и две точки P и Q по одну сторону от l. Укажите на прямой l такую точку R, чтобы периметр треугольника PQR был наименьшим.

91*. Дан угол ABC и внутри него точка P. Постройте треугольник наименьшего возможного периметра, одна вершина которого совпадает с точкой P, а две другие принадлежат сторонам данного угла.

92*. В данный остроугольный треугольник ABC впишите треугольник наименьшего возможного периметра.

93. Пусть a и b — две произвольные взаимно перпендикулярные прямые плоскости, M — произвольная точка. Обозначим через M_1 точку, симметричную точке M относительно прямой a; через M_2 — точку, симметричную M_1 относительно b; через M_3 — точку, симметричную M_2 относительно a; через M_4 — точку, симметричную M_3 относительно b. Докажите, что точка M_4 совпадает с M.

94. Пусть AOB — произвольный угол, OC — его биссектриса. Выберем произвольную точку M и найдем точку N, симметричную M относительно прямой OA; затем точку P, симметричную N относительно OC; наконец, точку Q, симметричную P относительно OB. Докажите, что точки M и Q симметричны относительно прямой OC.

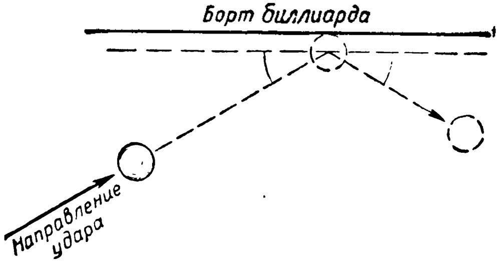


Рис. 54.

95*. Докажите, что если фигура имеет две оси симметрии l и l_1, то и прямая l_2, симметричная l относительно прямой l_1, также является осью симметрии фигуры.

96*. Докажите, что если фигура имеет две и только две оси симметрии, то эти оси взаимно перпендикулярны.

97*. Докажите, что если фигура имеет конечное число осей симметрии, то они пересекаются в одной точке и каждые две соседние из них образуют один и тот же угол.

98*. Докажите, что если многоугольник имеет несколько (больше двух) осей симметрии, то эти оси пересекаются в одной точке.

Остается ли это утверждение в силе для произвольных (может быть, неограниченных) плоских фигур?

Дополнения и методические указания к главе I

1. Наглядное представление о симметрии. [К § 1.] Первая глава книги, посвященная осевой симметрии, начинается наглядным описанием этого преобразования и иллюстрациями, демонстрирующими роль осевой симметрии в окружающей нас действительности. Нам кажется нежелательным, чтобы учащиеся начинали новую тему с заучивания формальных определений. Яркие иллюстрации могут заинтересовать учащихся и способствовать лучшему усвоению предмета. Возможно было бы полезным использование специальных наглядных пособий на уроках; учащиеся могут изготовить их самостоятельно, например, скопировав рисунки из книги в увеличенном виде. Разумеется, учитель может подобрать и другие примеры. Целесообразно также затратить несколько минут на уроке, предложив учащимся назвать (может быть, нарисовать на доске) ряд предметов, изображение которых обладает осью симметрии.

2. Осевая симметрия как геометрическое преобразование. [К первой половине § 2.] Осевая симметрия является наиболее простым геометрическим преобразованием. Поэтому тему «Геометрические преобразования» естественно начинать именно с нее.

В IX классе следует добиваться ясного понимания того факта, что осевая симметрия представляет собой точечное преобразование плоскости. Это означает следующее. Возьмем в плоскости некоторую прямую l и обозначим симметрию относительно этой прямой одной буквой σ. Симметрия σ переводит каждую точку A в точку $A'=\sigma(A)$ (рис. 55). Запись $A'=\sigma(A)$ подчеркивает связь геометрического преобразования (осевой симметрии) с общим понятием функции: симметрия σ является функцией, которая каждой точке A (аргументу) ставит в соответствие некоторую точку $\sigma(A)$ (а именно, точку, симметричную A относительно прямой l). Эта функция, однако, существенно отличается от функций, изучаемых в курсе алгебры: в курсе алгебры значения аргумента и значения функции являются числами, в то время как для функции σ значениями аргумента и функции являются точки.

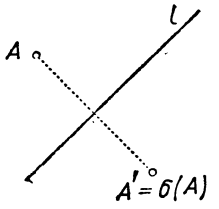


Рис. 55.

Понятие геометрического преобразования является довольно сложным. В связи с этим в учебном пособии принят индуктивный путь ознакомления с геометрическими преобразованиями, при котором учащиеся сначала изучают конкретные примеры преобразований и лишь после этого знакомятся с общей идеей геометрического преобразования. Поэтому термин «геометрическое преобразование» впервые разъясняется лишь в VI главе учебного пособия. Связь понятия геометрического преобразования с понятием функции вряд ли может быть раскрыта в общеобразовательной средней школе. Поэтому функциональная символика (т. е. запись вида $A'=\sigma(A)$) в учебном пособии не используется. Однако учитель должен добиваться отчетливого понимания того, что осевая симметрия переводит каждую точку A плоскости в некоторую точку A'. Уча-

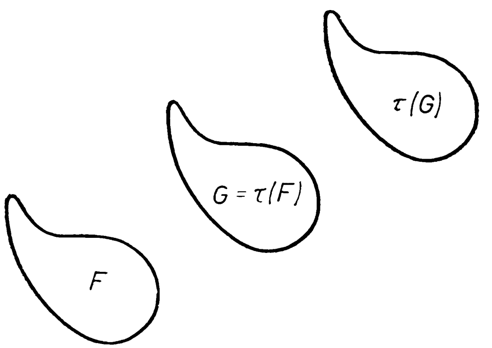


Рис. 56.

щиеся также должны ясно понимать, что точка, не лежащая на прямой l переходит при симметрии относительно l в отличную от нее точку, а точка, лежащая на прямой l — в ту же самую точку. Иными словами, точки, лежащие на прямой l, и только они, являются неподвижными точками рассматриваемого геометрического преобразования. Аналогично этому неподвижными прямыми симметрии относительно прямой l являются сама прямая l и все прямые, перпендикулярные l (см. задачу 12, стр. 29). При этом прямая l является точечно-неподвижной, т. е. все ее точки переходят при осевой симметрии сами в себя; прямые, перпендикулярные l, являются неподвижными, но не точечно-неподвижными.

Важно подчеркнуть, что если точка B симметрична точке A относительно прямой l, то и обратно, точка A симметрична точке B относительно l. Иначе говоря, для симметрии σ относительно прямой l справедливо следующее утверждение: *если* $\sigma(A)=B$, *то также* $\sigma(B)=A$. То же имеет место и для фигур: *если фигура G симметрична фигуре F относительно прямой l, то и фигура F симметрична фигуре G* (см. рисунки 6, 7, 8, 17, стр. 8, 9,12). Это обстоятельство характерно для симметрии относительно прямой и для рассматриваемой в гл. II симметрии относительно точки; произвольные геометрические преобразования этим свойством не обладают. Например, если τ — параллельный перенос и $\tau(F)=G$, то $\tau(G)\neq F$ (рис. 56).

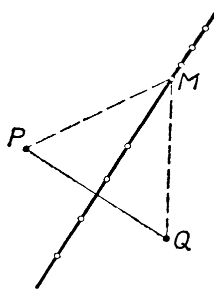


Рис. 57.

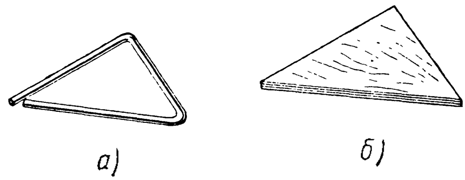


Рис. 58.

3. Геометрическая фигура как точечное множество. [Ко второй половине § 2.] При рассмотрении геометрических преобразований каждая фигура понимается как ***множество точек.*** Например, *окружность* с центром O и радиусом r есть множество всех точек, находящихся на расстоянии r от точки O. *Круг* есть множество всех точек, находящихся на расстоянии $\leqslant r$ от центра O. *Прямая* также рассматривается как множество точек (ее можно определить, например, как множество всех точек, равноудаленных от двух точек P и Q; рис. 57). *Прямолинейный отрезок AB* есть множество всех точек, расположенных на прямой AB между A и B. *Треугольник* можно рассматривать как два различных множества. Во-первых, под треугольником ABC можно понимать множество всех точек, принадлежащих отрезкам AB, BC и CA («контур» ABC). Во-вторых, можно называть треугольником часть плоскости, т. е. множество всех точек, расположенных на контуре ABC или внутри него (см. рис. 58, *а*, *б*)[1].

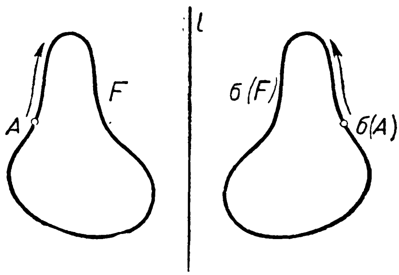


Рис. 59.

Тот факт, что каждая фигура рассматривается как точечное множество, позволяет объяснить смысл выражения: «данная фигура F при геометрическом преобразовании σ переходит в фигуру F'». Пусть F — некоторая фигура. Когда точка A пробегает множество F, точка $\sigma(A)$ пробегает некоторое множество F' (рис. 59).

[1] Такая нечеткость терминологии (т. е. то обстоятельство, что два различных множества точек обозначаются одним и тем же термином) обычно не ведет к недоразумениям, так как из текста бывает ясно, в каком смысле употреблено слово «треугольник». Однако в некоторых случаях эта двусмысленность представляет известные неудобства. Некоторым утешением для нас может служить то, что в западноевропейских языках наряду с этим неудобством имеется и еще большее: окружность и круг обозначаются в этих языках одним и тем же словом (der Kreis, the circle, le cercle).

Это множество F' и называется *фигурой, в которую переходит F при геометрическом преобразовании σ*. Используя функциональную символику, можно написать: $F'=\sigma(F)$. Таким образом, *утверждение «фигура F переходит при преобразовании σ в фигуру F'» означает, что имеют место следующие два обстоятельства:* 1) *если A — точка фигуры F, то точка $\sigma(A)$ принадлежит фигуре F';* 2) *если A' — точка фигуры F', то существует такая точка A фигуры F, что $A'=\sigma(A)$.* Иначе говоря, фигура F' состоит из тех, и только тех, точек, в которые переходят точки фигуры F при преобразовании σ. Учащиеся должны ясно понимать смысл утверждения: фигура F переходит при преобразовании σ в фигуру F'; однако спрашивать у них точную формулировку (подобную той, которая выше выделена курсивом) не следует.

4. **Построение симметричных фигур**. [К § 3.] В тексте учебного пособия имеются «Самостоятельные работы», органически связанные с разбираемым теоретическим материалом. Эти работы несложны и рассчитаны на выполнение их учащимися дома без помощи учителя. Цель этих самостоятельных заданий состоит в том, чтобы помочь учащемуся лучше усвоить определение изучаемого геометрического преобразования, а также привыкнуть к идее рассмотрения геометрических фигур как точечных множеств. При выполнении самостоятельной работы § 3 учащиеся осознают, что фигура (в данном случае — линия) состоит из бесконечного множества точек и потому для произвольно заданной линии построить симметричную ей линию можно лишь приближенно. Чем гуще расположены на линии F отмеченные точки, тем точнее осуществляется построение симметричной ей линии F'.

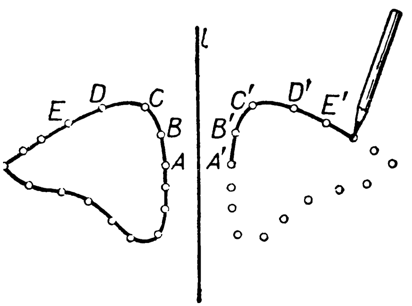


Рис. 60.

При этом точки $A', B', C', \ldots$, симметричные отмеченным на линии F точкам $A, B, C, \ldots$, нужно соединять «последовательно», т. е. в таком же порядке, в каком соединены линией F точки $A, B, C, \ldots$. Иначе говоря, если точки $A, B, C, \ldots$ последовательно расположены на линии F, то для получения линии F' нужно провести дугу $A'B'$, затем дугу $B'C'$ и т. д. (рис. 60). [Разумеется, при отсутствии миллиметровой бумаги можно выполнить задание на листе бумаги из тетради в клетку.]

Заметим, что если F — не произвольная кривая линия, а отрезок, многоугольник, окружность или, вообще, фигура, состоящая из прямолинейных отрезков и дуг окружностей, то построение фигуры F', симметричной фигуре F относительно прямой l, можно с помощью простейших чертежных инструментов осуществить точно (см. § 8).

5. **Фигуры, обладающие осью симметрии.** [К § 4.] Пусть l — некоторая прямая; обозначим через σ симметрию относительно этой прямой. Прямая l называется осью симметрии фигуры F (а сама фигура F называется симметричной относительно прямой l), если фигура $\sigma(F)$ совпадает с F:

$$\sigma(F)=F.$$

В § 4 по существу используется понятие объединения двух фигур. Пусть F и G — две фигуры (рассматриваемые, как мы уже знаем, как точечные множества). ***Объединением*** фигур F и G называется фигура, которая получается, если ко всем точкам фигуры F добавить все (не принадлежащие ей) точки фигуры G. Объединение фигур F и G обозначается символом $F \cup G$. Так, если F и G — два луча, исходящие из одной точки, то фигура $F \cup G$ представляет собой у г о л (рис. 61). Треугольник ABC, рассматриваемый как «контур», представляет собой объединение трех отрезков AB, AC и BC. На рисунке 62 показано объединение $F \cup G$ двух кругов F и G.

Сказанное в начале § 4 можно сформулировать в виде следующей теоремы: *если фигуры F и F' симметричны относительно прямой l, то их объединение $F \cup F'$ имеет прямую l своей осью симметрии.* В самом деле, обозначим через σ симметрию относительно прямой l. Тогда $\sigma(F') = F$, $\sigma(F) = F'$ и потому фигура $F \cup F'$ переходит при симметрии σ в фигуру $\sigma(F) \cup \sigma(F') = F' \cup F$, т. е. переходит сама в себя. (Ср. со сказанным в п. **9** на стр. 42.)

Эта теорема хорошо иллюстрируется следующим примером. Если F — луч, исходящий из точки O на прямой l, а $F' = \sigma(F)$ — симметричный ему луч, то фигура $F \cup F'$ симметрична относительно прямой l (т. е. биссектриса угла является его осью симметрии, см. § 9, стр. 20).

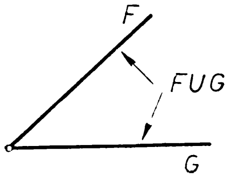


Рис. 61.

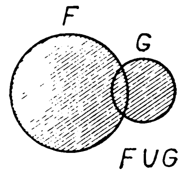


Рис. 62.

6. Осевая симметрия как результат движения. [К §§ 5, 6 и теореме 1 § 7.] Осевая симметрия переводит отрезок, прямую, треугольник, окружность и т. д. снова в отрезок, прямую, треугольник, окружность. Вообще, каждая фигура F переходит при симметрии в р а в н у ю ей фигуру F' (теорема 1, § 7). Наглядно этот факт представляется почти очевидным; но как его доказать? Теорема 1 § 7 имеет дело с п р о и з в о л ь н ы м и фигурами. Что же означает равенство произвольно взятой фигуры F и симметричной ей фигуры F'? Согласно определению равенства фигур, принятому в средней школе, это означает, что фигуру F можно наложить (м е х а н и ч е с к и, т. е. как твердое целое) на фигуру F'. Никакого другого определения равенства фигур учащиеся не знают. Поэтому в доказательстве теоремы 1 § 7 мы н е и з б е ж н о должны ссылаться на физический эксперимент. В тексте учебного пособия для этого используется перегибание листа бумаги: при перегибании чертежа симметричные фигуры совмещаются, следовательно, они равны.

Следует заметить, что существует и другое, «чисто геометрическое» определение равенства фигур: *две фигуры F и F' называются равными, если между точками этих фигур можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что расстояние между любыми двумя точками A, B фигуры F равно расстоянию между соответствующими им точками A', B' фигуры F'.* Опираясь на это определение, можно дать чисто геометрическое и притом довольно несложное доказательство теоремы 1 § 7 (ср. ниже лемму на стр. 41). Однако приведенное здесь определение равенства фигур незнакомо школьникам и является достаточно сложным хотя бы потому, что точная формулировка этого определения связана с понятием взаимно однозначного соответствия. Поэтому «экспериментальное» доказательство теоремы 1 § 7, например то, которое изложено в учебном пособии, является единственно возможным в курсе средней школы.

Приведенное «экспериментальное» доказательство теоремы 1 § 7 обладает одним дефектом. Именно если фигура F пересекает прямую l, то при перегибании чертежа в действительности совмещается с симметричной ей фигурой не сама фигура F, а «согнутая» фигура, получающаяся из F при перегибании чертежа. Иначе говоря, перегибание чертежа подтверждает лишь, что часть фигуры $F \cup \sigma(F)$, расположенная по одну сторону от l, совмещается с частью этой фигуры, расположенной по другую сторону от l. Например, если F — фигура, изображенная на рисунке 63, *а*, то перегибание чертежа в действительности обнаруживает не равенство фигур F и F', а равенство фигуры, вычерченной на рисунке 63, *б* сплошной линией, и симметричной ей фигуры. Точно так же, если F — прямая, пересекающая l (рис. 64, *а*), то «согнутая» фигура представляет собой угол (рис. 64, *б*), так что в действительности перегибание чертежа обнаруживает равенство этого угла симметричному ему углу, а не совмещение прямой F с симметричной ей прямой F'.

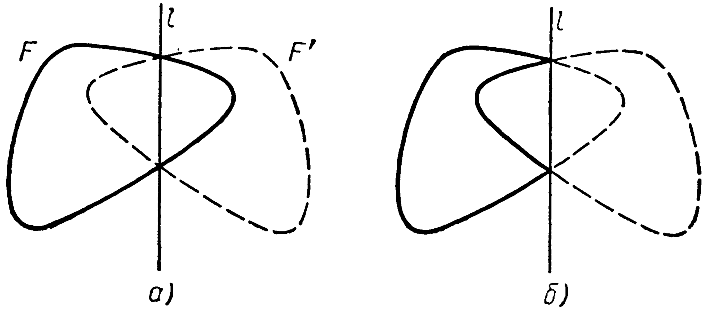


Рис. 63.

Это затруднение можно устранить, если симметрию относительно прямой l реализовать не с помощью перегибания чертежа, а с помощью (механического!) вращения всей плоскости, как твердого целого, вокруг прямой l на 180°. Такое вращение плоскости можно иллюстрировать на простой модели: к твердому листу плоского материала (лучше всего прозрачного) прикрепляется проволочная спица,

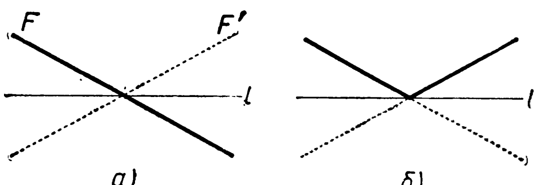


Рис. 64.

концы которой неподвижно укрепляются; поворот листа на 180° интерпретирует осевую симметрию (рис. 65).

В школе, однако, целесообразно, быть может, не упоминать о затруднениях, связанных с перегибанием чертежа. О повороте всей плоскости как твердого целого (рис. 65) следует сказать лишь в том случае, если кто-либо из особенно внимательных учеников сам подметит дефект рассуждения, связанного с перегибанием чертежа.

7. Фигура, симметричная отрезку. [К теореме 2 § 7.] Выше мы говорили о том, что доказательство теоремы 1 § 7 в общем случае неизбежно требует в школе ссылки на физический эксперимент. Это, однако, не исключает возможности чисто геометрического доказательства этой теоремы для конкретных фигур. Такие доказательства можно дать. Однако в таком случае придется отдельно доказывать эту теорему для отрезка, треугольника, угла, окружности и т. д. При этом каждое из таких доказательств будет не слишком простым. Проиллюстрируем это на примере отрезка.

Теорема. *Пусть AB — произвольный отрезок и l — прямая. Обозначим через A' и B' точки, симметричные точкам A и B относительно прямой l. Тогда отрезок AB переходит при симметрии относительно прямой l в отрезок $A'B'$, причем отрезки AB и $A'B'$ равны.*

Доказательство. Пусть M — произвольная точка отрезка AB, а M' — точка, симметричная M относительно прямой l. Докажем, что точка M' лежит на отрезке AB. (Рис. 66 намеренно сделан неточно: точка M' не лежит на отрезке $A'B'$.) Пусть P и Q — точки пересечения отрезков AA' и BB' с прямой l. Мы имеем:

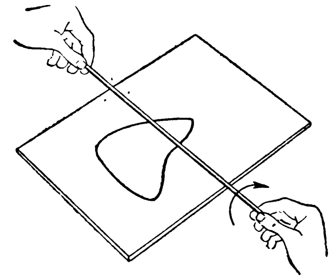


Рис. 65.

1) $\triangle APQ = \triangle A'PQ$ (по двум катетам); следовательно, $\angle AQP = \angle A'QP$ и $AQ = A'Q$.

2) $\angle AQB = 90^\circ - \angle AQP = 90^\circ - \angle A'QP = \angle A'QB'$.

3) $\triangle AQB = \triangle A'QB'$ (по двум сторонам и заключенному между ними углу); следовательно, $AB = A'B'$.

Важно подчеркнуть, что доказанное равенство $AB = A'B'$ отнюдь не означает завершения доказательства теоремы. Пока что доказана следующая лемма, не эквивалентная сформулированной теореме: *если A' и B' — точки, симметричные точкам A и B относительно прямой l, то расстояние AB равно расстоянию $A'B'$.* Однако из этой леммы доказываемая теорема выводится уже сравнительно просто.

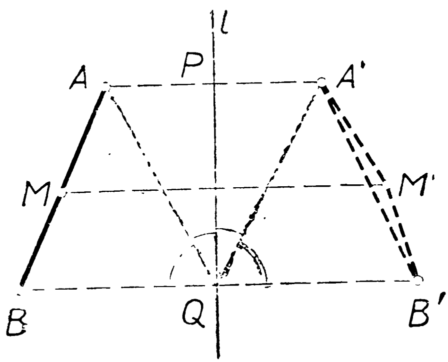


Рис. 66.

4) $AM = A'M'$ (в силу доказанной леммы).

5) $BM = B'M'$ (в силу доказанной леммы).

6) Так как точка M лежит на отрезке AB, то $AM + BM = AB$. Из доказанных выше равенств $AB = A'B'$, $AM = A'M'$, $BM = B'M'$ вытекает теперь, что $A'M' + M'B' = A'B'$. Но это и означает, что точка M' лежит на отрезке $A'B'$.

Итак, доказано, что если точка M лежит на отрезке AB, то симметричная ей точка M' лежит на отрезке $A'B'$. Обратно, *если точка M', симметричная некоторой точке M, лежит на отрезке $A'B'$, то точка M лежит на отрезке AB* — это доказывается так же. Иначе говоря, точка M' тогда и только тогда лежит на отрезке $A'B'$, когда точка M лежит на отрезке AB. Это и означает, что при симметрии относительно прямой l отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$. Равенство этих отрезков было доказано выше. Теорема доказана.

(Ср. ниже, гл. VI, пп. **3** и **4**, стр. 171—173.)

Приведенное доказательство является строгим и притом чисто геометрическим, не апеллирующим ни к каким физическим представлениям. Однако бросающаяся в глаза относительная громоздкость этого рассуждения делает его неприемлемым для общеобразовательной школы.

8. Основные свойства осевой симметрии. [К § 7.] Теорема 1 является в § 7 основной. Теоремы 2, 3 и 4 являются в действительности просто применениями этой теоремы к различным частным случаям. Однако, так как учащиеся не привыкли к формулировкам, в которых говорится о «произвольных» фигурах, мы сочли необходимым отдельно сформулировать теоремы 2, 3, 4 (случай отрезка, окружности, прямой линии). Учитель должен обратить внимание учащихся на то, что из теоремы 1 вытекают также следующие предложения, не сформулированные в учебном пособии: фигура, симметричная лучу относительно прямой l, также является лучом; фигура, симметричная данному углу относительно прямой l, представляет собой угол, равный данному; фигура, симметричная относительно l треугольнику ABC, представляет собой треугольник $A'B'C'$, равный треугольнику ABC, и т. д.

Теоремы 2, 3, 4 потому выделены в тексте учебного пособия, что они наиболее часто используются при решении задач (в частности, задач на построение). Овладение этими теоремами должно заключаться не в заучивании их дословных формулировок, а в умении свободно пользоваться ими при решении задач.

В теореме 4 учащийся столкнется с непривычным для него утверждением: *фигура, равная прямой линии, есть прямая линия*; в этой формулировке содержится неявная ссылка на малонаглядный процесс физического наложения одной (бесконечной!) прямой на другую. Однако ничего другого тут сказать нельзя, поскольку никакого о п р е д е л е н и я прямой линии или точного описания ее свойств в средней школе не дается.

Доказательство теоремы 3 можно упростить, если рассматривать окружность S вместе с ее центром O как о д н у фигуру F. Эта фигура обладает тем свойством, что для любой отличной от O точки A этой фигуры расстояние OA равно r. При симметрии фигура F переходит в равную ей фигуру F', т. е. снова в окружность, рассматриваемую вместе с ее центром. Доказательство же, приведенное в учебном пособии, отдельно рассматривает фигуру, симметричную окружности S, и точку, симметричную точке O. Это сделано потому, что школьник не привык рассматривать несвязное множество, состоящее из окружности и ее центра, как «одну фигуру».

9. Фигура, симметричная объединению фигур. [К § 8.]

Т е о р е м а. *Пусть F и G — две фигуры, а $F' = \sigma(F)$ и $G' = \sigma(G)$ — фигуры, симметричные им относительно прямой l. Тогда фигуры $F \cup G$ и $F' \cup G'$ симметричны друг другу относительно l* [1].

Например, если лучи F и G исходят из одной точки (рис. 67), то угол $F \cup G$ симметричен углу $\sigma(F) \cup \sigma(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M — точка, принадлежащая фигуре $F \cup G$. Эта точка принадлежит либо фигуре F, либо фигуре G; пусть, например, она принадлежит фигуре F. Тогда точка $\sigma(M)$ принадлежит фигуре $F' = \sigma(F)$, а следовательно, и объединению $F' \cup G'$. Обратно, если точка N' принадлежит фигуре $F' \cup G'$, то она принадлежит одной из фигур F', G'; пусть, например, она принадлежит фигуре G'. Тогда точка N, переходящая при симметрии в точку N', принадлежит фигуре G, а значит, и объединению $F \cup G$. Итак, *каждая точка фигуры $\sigma(F \cup G)$ принадлежит фигуре $F' \cup G' = \sigma(F) \cup \sigma(G)$ и обратно.*

---

[1] Пользуясь функциональными обозначениями, эту теорему можно выразить следующим равенством:

$$\sigma(F \cup G) = \sigma(F) \cup \sigma(G).$$

Это означает, что фигуры $\sigma(F \cup G)$ и $F' \cup G'$ совпадают, а значит, фигуры $F \cup G$ и $F' \cup G'$ симметричны.

Следствие. *Если точки $A', B', C', \ldots, K'$ симметричны точкам $A, B, C, \ldots, K$ относительно прямой l, то многоугольник $A'B'C' \ldots K'$ симметричен относительно l многоугольнику $ABC \ldots K$.*

В самом деле, из теоремы 2 § 7 следует, что отрезок $A'B'$ симметричен отрезку AB, отрезок $B'C'$ симметричен отрезку BC и т. д. (см. рис. 28 на стр. 20). Поэтому многоугольник $A'B'C' \ldots K'$ (являющийся объединением отрезков $A'B'$, $B'C'$, $\ldots$, $K'A'$) симметричен многоугольнику $ABC \ldots K$ (являющемуся объединением отрезков AB, BC, $\ldots$, KA).

Подобно этому, если F и G — два луча, исходящих из одной точки, а F' и G' — симметричные им лучи относительно прямой l, то (в силу доказанной теоремы) угол $F \cup G$ симметричен углу $F' \cup G'$ (рис. 29).

Разумеется, приведенные здесь теорема и следствия рассчитаны не на учащегося, а на учителя; учащийся должен считать факты такого рода очевидными. На уроке следует считать совершенно корректной такую, например, фразу, связанную с задачей 4 § 8 (рис. 29): «так как луч $O'A'$ симметричен относительно l лучу OA, а луч $O'B'$ симметричен лучу OB, то угол $A'O'B'$ симметричен углу AOB».

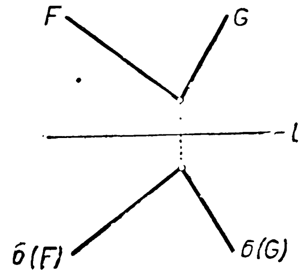


Рис. 67.

10. Пересечение фигур. [К § 9, 10.] Пусть F и G — две фигуры. Фигура, состоящая из всех точек, принадлежащих как фигуре F, так и фигуре G, называется ***пересечением*** фигур F и G. Пересечение фигур F и G обозначается символом $F \cap G$. Например, если обе фигуры F, G являются прямыми линиями, то их пересечение $F \cap G$ 1) совсем не содержит точек, когда прямые F, G

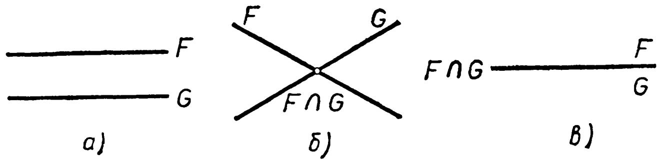


Рис. 68.

параллельны (рис. 68, *а*); 2) состоит из одной точки, когда F и G пересекаются (рис. 68, *б*); 3) представляют собой прямую линию, когда F и G совпадают (рис. 68, *в*). Если F и G — две окружности, то их пересечение может совсем не содержать точек (рис. 69, *а*), содержать одну точку (рис. 69, *б*), две точки (рис. 69, *в*) или может представлять собой окружность (рис. 69, *г*). Пересечение двух треугольников (рассматриваемых как части плоскости) может быть многоугольником (не более чем с шестью сторонами), отрезком, точкой или может совсем не содержать точек (рис. 70). Пересечение круга и прямой линии может быть отрезком, точкой или может совсем не содержать точек (рис. 71). На рисунке 72 изображена «линза» $F \cap G$, являющаяся пересечением двух кругов F и G (ср. рис. 62, на котором изображено объединение двух кругов). Заметим, что если круг F целиком содержится в круге G, то пересечение $F \cap G$ совпадает с кругом F, а объединение $F \cup G$ совпадает с кругом G.

Теорема. *Пусть F и G — две фигуры, а $F' = \sigma(F)$ и $G' = \sigma(G)$ — фигуры, симметричные им относительно прямой l. Тогда фигуры $F \cap G$ и $F' \cap G'$ симметричны друг другу относительно l* [1]. Доказательство этой теоремы (очень похожее на доказательство теоремы п. 9 на стр. 42) мы опускаем.

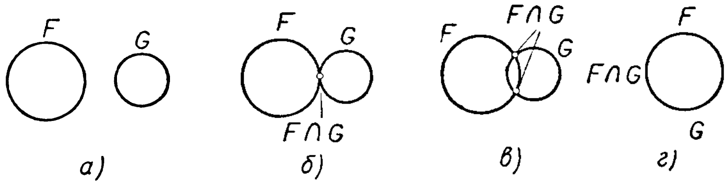


Рис. 69.

На рисунке 73 изображены линии F, G и симметричные им линии F', G'. Пересечение $F \cap G$ представляет собой одну точку M, а пересечение $F' \cap G'$ — точку M'. Согласно указанной теореме, *точки M и M' симметричны относительно прямой l*.

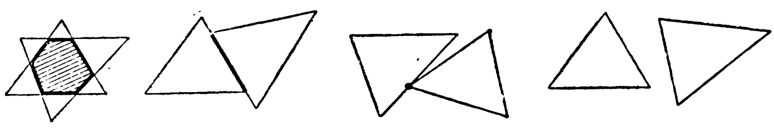


Рис. 70.

Аналогичное положение вещей имеет место на рисунке 74, на котором изображены окружности F и G и симметричные им относительно l окружности F' и G'. Окружности F и G пересекаются в двух точках M и N, симметричных точкам M' и N', в которых пересекаются окружности F' и G'. (Другими словами фигура $F \cap G$, состоящая из двух точек M, N, симметрична фигуре $F' \cap G'$, состоящей из двух точек M', N'.) На рисунке 75 изображены *касающиеся* окружности F и G. Они имеют только о д н у общую точку; следовательно, симметричные им окружности F' и G' также имеют только одну общую точку, т. е. также касаются друг друга.

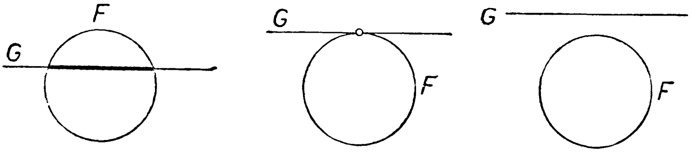


Рис. 71.

Учитель должен обратить внимание на то, что соображения такого рода часто используются в учебном пособии (см., например, рис. 36, 38,39 и относящийся к ним текст — теоремы о касательных к окружностям). Разумеется, в классе формулировать указанную здесь теорему и ссылаться на нее нецелесообразно.

---

[1] Пользуясь функциональными обозначениями, эту теорему можно выразить следующим равенством:

$$\sigma(F \cap G) = \sigma(F) \cap \sigma(G).$$

Корректной можно признать, например, следующую фразу: «Окружности F и G имеют только одну общую точку; *значит*, и симметричные им окружности F' и G' имеют только одну общую точку, т. е. касаются» (рис. 75). Приведем пример более полного рассуждения (которое вряд ли целесообразно требовать от всех учащихся): «Окружности F и G касаются в точке M, т. е. точка M принадлежит как линии F, так и линии G. Так как точка M принадлежит линии F, то симметричная ей относительно l точка M' принадлежит линии F'; так как M принадлежит линии G, то M' принадлежит линии G'. Таким образом, M' есть общая точка окружностей F' и G'. Другой общей точки N' ок-

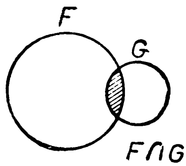


Рис. 72.

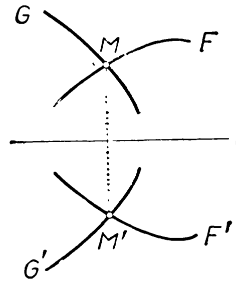


Рис. 73.

ружности F' и G' иметь не могут: иначе точка N, симметричная N', была бы второй общей точкой окружностей F и G. Поэтому окружности F' и G' имеют только одну общую точку, т. е. касаются друг друга».

Пусть теперь F и G — две фигуры, каждая из которых симметрична относительно прямой l, т. е. $F=\sigma(F)$, $G=\sigma(G)$. В таком случае *объединение* $F \cup G$

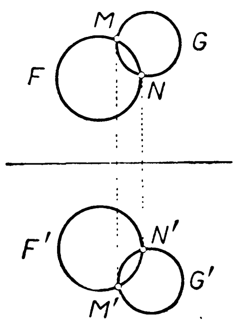


Рис. 74.

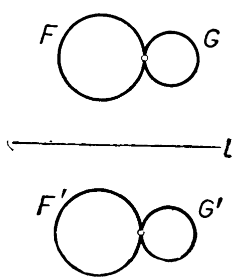


Рис. 75.

этих двух фигур симметрично относительно прямой l; пересечение $F \cap G$ также симметрично относительно прямой l. Например, если F и G — две окружности с различными центрами, то их линия центров является осью симметрии каждой из них, и потому l является осью симметрии фигуры $F \cup G$, образованной обеими окружностями (рис. 35, стр. 22). Пересечение $F \cap G$ этих двух окружностей также будет симметрично относительно прямой l, т. е. точки пересечения окружностей F и G симметричны относительно их линии центров l (см. рис. 37, стр. 23, и относящийся к нему текст).

11. Роль примеров и задач. [К § 9—11.] Основная цель, которая преследуется при прохождении темы «осевая симметрия», состоит в усвоении идеи геометрического преобразования и овладении методом преобразования чертежа при решении задач и доказательстве теорем. Эти идеи и методы иллюстрируются в тексте (§ 9—11) на ряде примеров и задач. *Ни один из этих примеров и ни одна задача не имеют самостоятельного теоретического значения.* Они приведены лишь как достаточно простые и типичные иллюстрации общего метода. Поэтому заучивать все предложения, выделенные курсивом в § 9, 10, совершенно нецелесообразно. Задачи, приведенные в § 11, учитель также может при желании заменить другими. Учащийся должен уметь привести примеры симметричных фигур (взятых из § 9, сообщенных учителем или найденных учащимся самостоятельно). Учащийся должен также усвоить методику применения геометрических преобразований (в данном случае — осевой симметрии) к доказательству теорем и решению задач. При этом основным критерием при проверке усвоения материала должно являться не формальное знание материала § 10—11, а умение самостоятельно решать задачи и доказывать теоремы, аналогичные тем, которые приведены в этих параграфах.

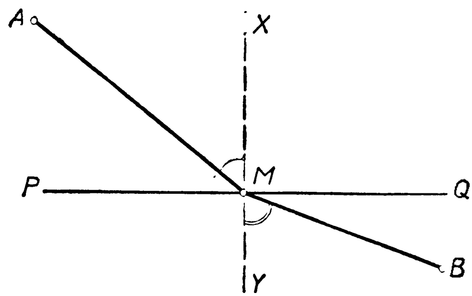


Рис. 76.

12. О принципе Ферма. [К задаче 1 § 11.] Результат задачи 1 § 11 иллюстрирует знаменитый принцип Ферма, играющий в современной физике очень важную роль. Этот принцип демонстрирует значение для современной физики тонких математических рассуждений, связанных с задачами на отыскание наибольших и наименьших значений. Беседа на эту тему кажется нам уместной на школьном математическом кружке. Поэтому мы укажем здесь вывод из принципа Ферма закона преломления света («Закон Снеллиуса»[1]), гласящего, что *при переходе из одной среды в другую* (например, из воздуха в стекло или в воду) *луч света преломляется таким образом, что отношение синусов угла падения и угла отражения* (угла AMX и угла BMY на рис. 76) *равно отношению скоростей света в первой и во второй средах* (т. е. зависит только от сред, но не от направления луча). Этот вывод не связан с осевой симметрией.

Итак, пусть мы *имеем две точки A и B по разные стороны от некоторой прямой PQ* (рис. 76)*; требуется найти такую точку M прямой PQ, что путь AMB из точки A в точку B, где отрезок AM проходится с заданной скоростью u, а отрезок MB — с другой скоростью v, требует наименьшего времени.* [Эту задачу можно сформулировать и независимо от оптических представлений: предположим, что A — местоположение корабля в море, а B — населенный пункт на суше, в который надо послать матроса с корабля; спрашивается, в какой точке M берега PQ надо его высадить с лодки, чтобы он прибыл в B в кратчайшее время; скорость лодки в море равна u, а скорость мат-

[1] В. Снеллиус (V. Snellius) — голландский естествоиспытатель XVI века.

роса на суше равна v.] Закон преломления света утверждает, что *искомая точка M характеризуется условиями*

$$\frac{\sin \angle AMX}{\sin \angle BMY} = \frac{\cos \angle AMP}{\cos \angle BMQ} = \frac{u}{v}.$$

В самом деле, пусть точка M удовлетворяет этим условиям, N — какая угодно другая точка прямой PQ (рис. 77). Докажем, что сумма $\frac{AM}{u}+\frac{MB}{v}$ (эта сумма выражает время движения по пути AMB) меньше суммы $\frac{AN}{u}+\frac{NB}{v}$:

$$\frac{AM}{u}+\frac{MB}{v} < \frac{AN}{u}+\frac{NB}{v}.$$

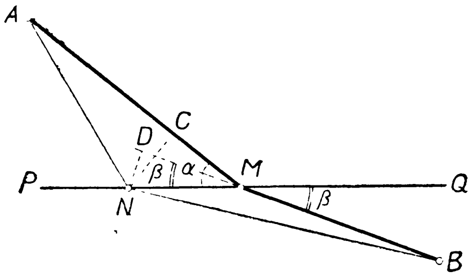


Рис. 77.

Обозначим для простоты $\angle AMP=\alpha$, $\angle BMQ=\beta$. Опустим из точки N перпендикуляры NC и ND на прямые AM и BM. Тогда

$$CM=MN\cos\alpha,\quad DM=MN\cos\beta$$

и

$$\frac{CM}{DM}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{u}{v},\quad \text{т. е.}\quad \frac{CM}{u}=\frac{DM}{v}.$$

Теперь уже легко прийти к требуемому результату. Мы имеем:

$$\frac{AM}{u}+\frac{MB}{v}=\frac{AC+CM}{u}+\frac{MB}{v}=\frac{AC}{u}+\frac{CM}{u}+\frac{MB}{v}=$$

$$=\frac{AC}{u}+\frac{DM}{v}+\frac{MB}{v}=\frac{AC}{u}+\frac{DB}{v}.$$

Но $AC < AN$ и $DB < NB$. Следовательно,

$$\frac{AM}{u}+\frac{MB}{v}=\frac{AC}{u}+\frac{DB}{v}<\frac{AN}{u}+\frac{NB}{v},$$

что и требовалось доказать.

13. О задачах и упражнениях. Общее количество задач и упражнений, приведенных в книге, заметно превосходит непосредственные потребности учителя; таким образом, учитель сможет выбрать из них те, которые ему понравятся больше. Мы рассчитываем также, что знакомство с большим числом задач, использующих соображения симметрии для доказательства теорем (задачи к § 10; эти задачи, бесспорно, являются здесь важнейшими и на них должно быть обращено главное внимание) поможет учителю в случае нужды самостоятельно придумать упражнения такого же рода. Многие из предложенных в книге задач могут быть использованы во внеклассной работе с учащимися; при этом могут оказаться полезными также книги, указанные в списке литературы в конце книги.

Первые 11 задач являются вводными; они рассчитаны на то, чтобы лучше ознакомить учащихся с осевой симметрией. При этом задачи **1** и **2** не предполагают, разумеется, абсолютно точного копирования рисунков из книги. Задачи **8—10** можно предложить учащимся сделать на уроке в классе; задачу **11** лучше предложить на дом. Ясно, как решать, скажем, задачу **9**: для этого надо сложить сначала лист бумаги по прямой AB; затем перегнуть его в точке A так, чтобы продолжение прямой AB (линия сгиба) совпало с AB; так мы получим прямую (линию сгиба) AD. Затем перегнув бумагу так, чтобы прямая AD совпала с AB, мы сможем найти точку D (из условия $AD=AB$); аналогично ищется и вершина C. Несколько сложнее задача **10**: здесь сначала надо перегнуть бумагу так, чтобы получить перпендикуляр DK, восставленный к отрезку AB в его середине D (линия сгиба); затем так перегнуть бумагу по линии AE, проходящей через точку A, чтобы точка B совместилась с точкой C прямой DK.

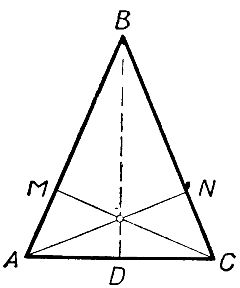


Рис. 78.

Поучительными нам кажутся простые задачи **12**, **13—14**, **17**, **23—24**, **25—26**, **33**. Интересны несколько более трудные задачи **16**, **18**, **29** а) — б). Наибольшее внимание надо уделить задачам **41—69**, выбрав из них те, которые кажутся более удачными; решения некоторых из этих задач мы укажем в п. **14**. Задачи **70—98** менее важны; большинство их отмечено звездочкой, т. е. не рассчитано на всех учащихся. Из более простых задач мы можем рекомендовать как интересные задачи **71**, **75** (последнюю задачу поучительно сопоставить с более трудной задачей **76**), **87** и **90** (задачу **90** поучительно сопоставить с более трудной задачей **91**).

Очень трудной, но и очень интересной является задача **92**, которую полезно разобрать на школьном кружке. При этом можно воспользоваться книгами: Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, Физматгиз, М., 1962, темы 5 и 6; Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, Гостехиздат, М., 1952, задача **144**, а также указанной в списке литературы книгой И. М. Яглом, Геометрические преобразования, I (§ 2 гл. II второй части).

14. Примеры решения задач. 1) Задача **47** (стр. 31). Равнобедренный треугольник ABC — симметричная фигура; его осью симметрии является биссектриса BD угла при вершине (рис. 78; см. § 9). Стороне AB треугольника симметрична сторона CB; при этом точке M стороны AB симметрична относительно BD такая точка N стороны CB, что $AM=CN$ (теорема 2 § 7). Поэтому фигурирующему в задаче **47** отрезку CM симметричен относительно прямой BD отрезок AN (см. ту же теорему 2). Но отсюда вытекает, что отрезки AN и CM равны (в силу теоремы 2) и что прямые AN и CM пересекаются на оси симметрии BD (теорема 4 § 7).

Заметим, что задачу **47** а) легко решить и не пользуясь соображениями симметрии (ведь треугольники ACM и ACN равны!); однако, если не использовать осевую симметрию, то решение задачи **47** б) будет уже неизбежно довольно сложным.

2) Задача **55** (стр. 32). Равнобочная трапеция $ABCD$ — симметричная фигура (§ 9); ее осью симметрии является прямая MN, соединяющая середины

оснований AB и DC (рис. 79). Треугольник ABC симметричен относительно прямой MN треугольнику BAD. При перегибании листа бумаги вдоль прямой MN медианы треугольника ABC совместятся с медианами треугольника BAD и точка P пересечения медиан треугольника ABC перейдет в точку Q пересечения медиан треугольника ABD. Таким образом, точки P и Q симметричны относительно прямой MN. [Здесь можно избежать ссылки на перегибание листа бумаги. В этом случае надо рассуждать так: медиана CM треугольника ABC симметрична относительно прямой MN медиане DM треугольника BAD; поэтому эти медианы равны (см. теорему 2 § 7). Далее, отрезок $MP=\frac{1}{3}MC$ симметричен относительно прямой MN равному ему отрезку $MQ=\frac{1}{3}MD$ (см.

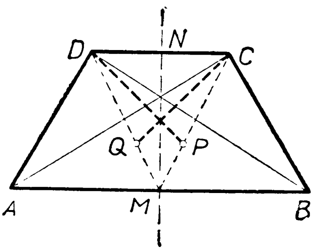


Рис. 79.

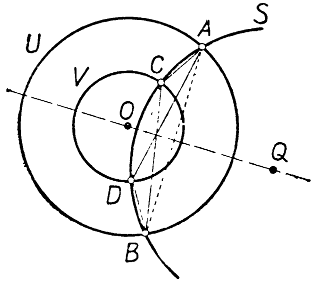


Рис. 80.

ту же теорему 2); но это и означает, что точка P симметрична точке Q.] Далее, точки D и C также симметричны относительно прямой MN. Поэтому отрезки PD и QC симметричны относительно прямой MN; следовательно, они равны (теорема 2).

3) Задача **68** (стр. 33). Обозначим концентрические окружности через U и V и пусть O — их общий центр, а Q — центр окружности S (рис. 80). Прямая OQ является общей осью симметрии окружностей U, V и S (§ 9). Так как и окружность U и окружность S переходят при симметрии относительно OQ сами в себя, то точка A пересечения U и S должна перейти при этой симметрии во вторую точку B пересечения U и S. Точно так же доказывается, что точка C симметрична относительно прямой OQ точке D. Поэтому отрезки AC и BD симметричны относительно прямой OQ, а следовательно, они равны (теорема 2 § 7). Аналогично доказывается и равенство отрезков AD и BC. Наконец, $AB \perp OQ$ (в силу определения осевой симметрии) и $CD \perp OQ$; следовательно, $AB \parallel CD$.

ГЛАВА II

ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

§ 12. ПРИМЕРЫ И ИЛЛЮСТРАЦИИ

Изображенные на рисунках 81, 82 фигуры не имеют осей симметрии, но они также представляются нам «правильными», «симметричными». Впечатление «правильности» создается следующим обстоятельством. На каждой из рассмотренных фигур отмечена точка O и любой точке A рассматриваемой фигуры отвечает точка A' той же фигуры, расположенная по другую сторону от точки O на том же расстоянии от O, что и точка A. В таких случаях говорят, что фигура **симметрична относительно точки** O (или центрально симметрична), а точка O называется **центром симметрии** фигуры. Другие примеры центрально-симметричных фигур приведены на рисунке 83.

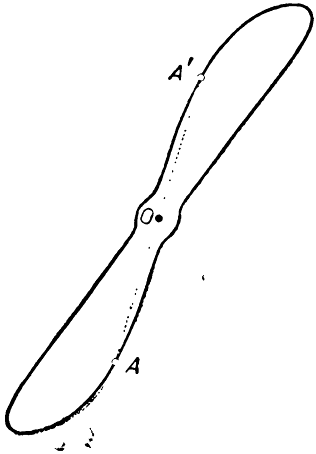


Рис. 81.

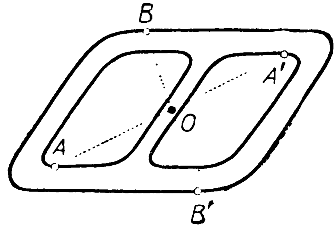


Рис. 82.

На рисунках 81, 82 фигуры являются «связными», т. е. состоящими из одного куска. На рисунках 84, 85 изображены также

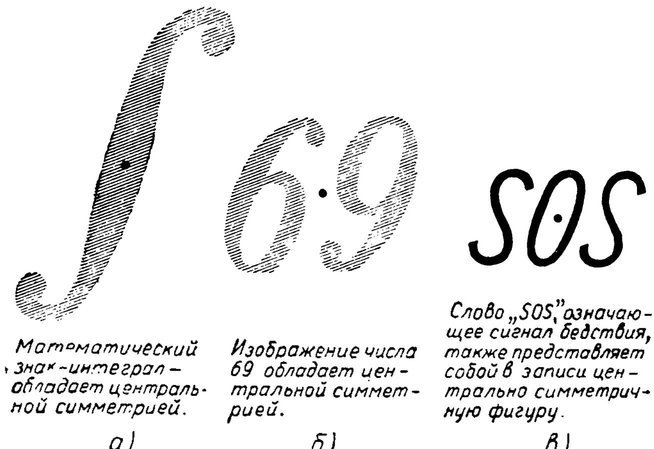


Рис. 83.

симметричные относительно точки O фигуры, состоящие, однако, из двух отдельных кусков F и F'. При этом каждой точке A фигуры F соответствует точка A' фигуры F', расположенная на

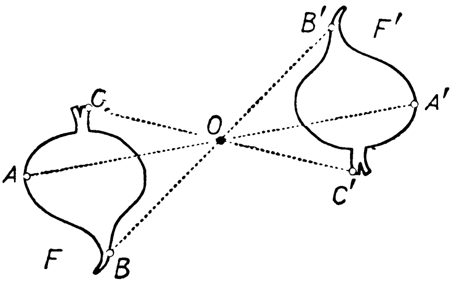


Рис. 84.

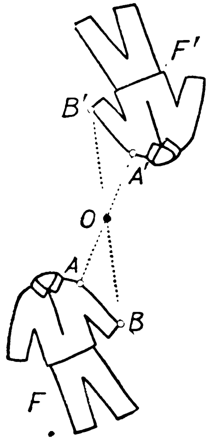


Рис. 85.

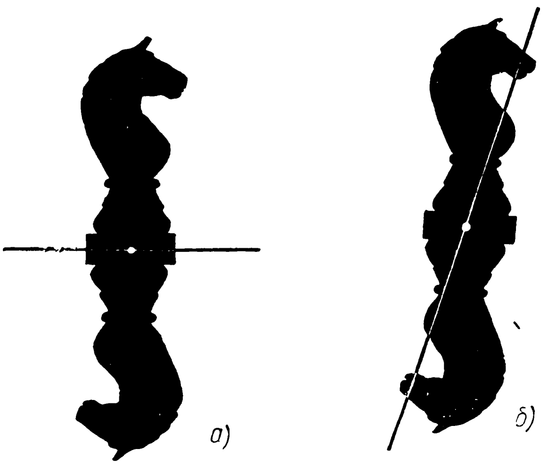


Рис. 86.

продолжении AO за точку O на том же расстоянии от O, что и точка A. В этом случае говорят, что фигуры F и F' **симметричны друг другу** относительно точки O. Таким образом, если фигуры F и F' симметричны друг другу относительно точки O, то вместе они образуют одну фигуру, имеющую точку O своим центром симметрии. Если же фигура симметрична относительно точки O, то всякая прямая, проходящая через точку O, разбивает ее на две части F, F', которые симметричны друг другу относительно точки O (рис. 86, *а*, *б*).

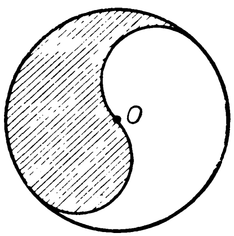


Рис. 87.

Разбиение центрально-симметричной фигуры на две части, симметричные друг другу относительно точки O, можно осуществлять не только с помощью прямых линий, но и с помощью кривых линий (симметричных относительно точки O). Например, S-образная линия, проведенная на рисунке 87, разбивает круг на две симметричные друг другу «запятые» (одна из которых для наглядности заштрихована).

§ 13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Определение. Точки A и A' *называются* ***симметричными относительно точки*** O, *если отрезок* AA' *проходит через точку* O *и делится этой точкой пополам* (рис. 88).

Выберем на плоскости определенную точку O. Тогда для каждой отличной от O точки A найдется единственная точка A', симметричная точке A относительно точки O. Для построения точки A' надо провести прямую AO и отложить на ней (на продолжении отрезка AO за точку O) отрезок $OA'=OA$. Если точка A' симметрична точке A относительно точки O, то и, обратно, точка A симметрична точке A' относительно O.

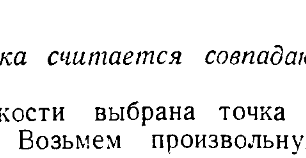


Рис. 88.

Для точки O симметричная ей точка считается совпадающей с ней самой.

Предположим теперь, что на плоскости выбрана точка O и начерчена некоторая фигура F. Возьмем произвольную точку A фигуры F и найдем точку A', симметричную точке A относительно точки O (рис. 89). Затем возьмем еще одну точку B фигуры F и найдем симметричную ей относительно O точку B' и т. д. Множество всех точек A', B', C',..., симметричных точкам A, B, C,... фигуры F относительно точки O, представляет собой новую фигуру F' (рис. 89). Фигура F' называется фигурой, симметричной фигуре F относительно точки O. Говорят также, что фигуры F и F' симметричны друг другу относительно точки O.

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. *Фигура F', образованная всеми точками, симметричными точкам фигуры F относительно данной точки O, называется* ***симметричной фигуре F относительно точки*** *O.*

Примеры симметричных друг другу фигур показаны на рисунках 84, 85, 89, 90.

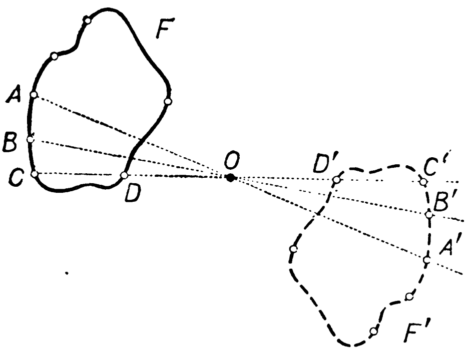


Рис. 89.

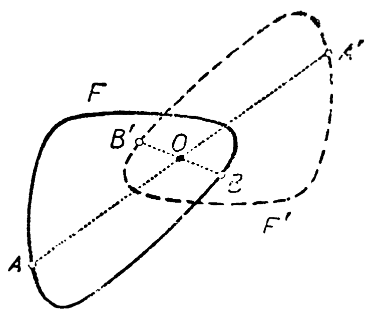


Рис. 90.

Для каждой фигуры F найдется фигура F', симметричная фигуре F относительно заданной точки O. Переход от фигуры F к симметричной ей относительно O фигуре F' называется ***симметрией относительно точки*** O или ***центральной симметрией.***

§ 14. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Необходимые инструменты: линейка и циркуль.

Построение фигуры, симметричной данной относительно точки O, с помощью линейки и циркуля. Отметьте на листе бумаги некоторую точку O и изобразите на этом же листе какую-либо фигуру, например замкнутую линию F (рис. 89). На линии F отметьте ряд точек, достаточно густо расположенных на ней. Для каждой из этих точек постройте точку, симметричную ей относительно O (для чего соедините каждую из точек с O и на продолжении полученного отрезка отложите отрезок такой же длины). Соедините между собой полученные точки; вы получите линию F', симметричную линии F относительно точки O.

§ 15. ФИГУРЫ, ОБЛАДАЮЩИЕ ЦЕНТРОМ СИММЕТРИИ

Центральная симметрия переводит каждую фигуру F в другую фигуру F'. Обратно, фигуру F' та же центральная симметрия переводит в исходную фигуру F: *при центральной симметрии фигуры F и F' меняются местами.*

Рассмотрим теперь обе фигуры F и F' как одну фигуру. В результате центральной симметрии ее части F и F' перейдут одна в другую, а вся «объединенная» фигура перейдет сама в себя. Этим свойством обладает также каждая из изображенных на рисунках 81, 82 фигур: если взять произвольную точку A рассматриваемой фигуры, то точка A', симметричная ей относительно указанной на рисунке точки O, также принадлежит той же самой фигуре.

Фигуры, обладающие указанным свойством, называются центрально-симметричными фигурами. Другими словами, *фигура F называется* ***симметричной относительно точки*** *O (или* ***центрально-симметричной****), если при симметрии относительно точки O эта фигура переходит сама в себя.* Если фигура симметрична относительно точки O, то эта точка называется центром симметрии фигуры F.

Примеры центрально-симметричных фигур были приведены в § 12.

§ 16. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ КАК ПОВОРОТ НА 180°

Точки, симметричные относительно данной точки O, можно также получить следующим образом. Отметим на листе бумаги некоторую точку O и укрепим лист на столе с помощью булавки, проткнув его в точке O (рис. 91). Теперь, не вынимая бу-

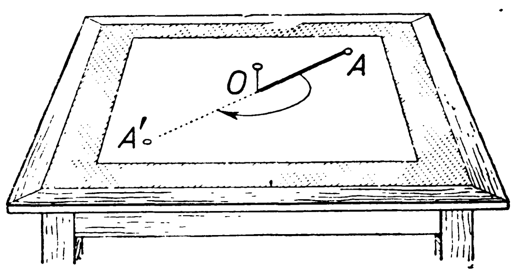


Рис. 91.

лавки, повернем лист бумаги на 180°, перемещая его по поверхности стола. Каждая точка A в результате этого поворота займет новое положение по другую сторону от точки O и на том же расстоянии от O. Иначе говоря, точка A займет то положение, которое ранее (до поворота) занимала точка A', симметричная точке A относительно O. Таким образом, если точки A и A' симметричны относительно точки O, то в результате поворота они поменяются местами: каждая из них займет то положение, которое до поворота занимала другая точка.

Аналогично обстоит дело и с фигурами. Если F и F' — две фигуры, симметричные друг другу относительно точки O, то в результате указанного поворота каждая из них займет то положение, которое ранее занимала другая фигура. Если мы представим себе теперь, что фигура F' неподвижна (например, вырезана из листа бумаги и прикреплена к столу), а фигура F совершает тот же поворот на 180°, то ясно, что в результате этого поворота фигура F совместится с фигурой F'. Если фигура F центрально-симметрична (имеет центр симметрии O), то после поворота вокруг O на 180° она перейдет сама в себя.

§ 17. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Необходимые материалы и инструменты: чертеж, полученный в результате выполнения самостоятельной работы § 14, лист кальки, булавка.

Воспроизведение центральной симметрии с помощью поворота. Наложите кальку на имеющийся у вас чертеж (фигуры F и F', симметричные относительно точки O). Проткните кальку и чертеж булавкой в точке O и обведите на кальку фигуру F. Затем, оставляя чертеж неподвижным, поверните лист кальки ровно на 180° и убедитесь в том, что начерченная на кальке фигура совместится с имеющейся на чертеже фигурой F'.

§ 18. СВОЙСТВА ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Связь центральной симметрии с поворотом на 180° (см. § 16, 17) убеждает нас в справедливости следующих теорем:

Теорема 1. *Две фигуры, симметричные друг другу относительно точки O, равны между собой.*

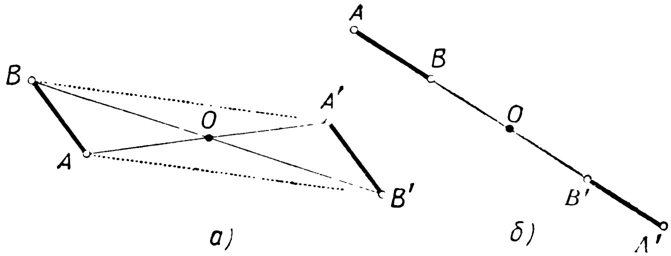


Рис. 92.

В самом деле, так как эти фигуры можно совместить поворотом одной из них вокруг точки O на 180°, то они равны.

Теорема 2. *Фигура, симметричная отрезку AB относительно точки O, представляет собой отрезок $A'B'$, равный пер-*

воначальному отрезку AB; точки A' и B' симметричны относительно точки O концам A, B первоначального отрезка. Отрезки AB и $A'B'$ либо параллельны (рис. 92, *а*), *либо расположены на одной прямой, проходящей через точку O* (рис. 92, *б*).

Первое утверждение теоремы 2 непосредственно следует из теоремы 1. Параллельность отрезков AB и $A'B'$ (в случае, когда прямая AB не проходит через O) вытекает из того, что отрезки AA' и BB' делятся в точке O пополам, и потому четырехугольник $ABA'B'$ — параллелограмм. Если же прямая AB проходит через O, то концы A', B' отрезка $A'B'$ принадлежат той же прямой AB в силу определения центральной симметрии.

Теорема 3. *Фигура, симметричная окружности относительно точки O, представляет собой окружность того же радиуса. Центр ее симметричен центру первоначальной окружности относительно точки O.*

Первое утверждение теоремы 3 вытекает из теоремы 1. Точка Q', симметричная центру Q первоначальной окружности, служит центром полученной окружности, ибо в силу теоремы 2

$$QA = Q'A' = r$$

(см. рис. 93).

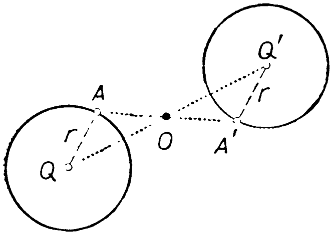


Рис. 93.

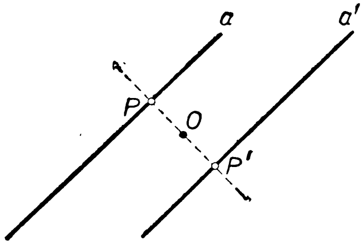


Рис. 94.

Из теорем 1 и 2 непосредственно вытекает

Теорема 4. *Фигура a', симметричная прямой a относительно точки O, также является прямой линией. Если прямая a не проходит через O, то прямая a' параллельна a и находится от точки O на том же расстоянии, что и a. Если же прямая a проходит через точку O, то прямая a' совпадает с a.*

[Если прямая a не проходит через точку O, то прямая, перпендикулярная a и a' и проходящая через O, пересекает a и a' в симметричных относительно O точках P и P' (рис. 94). Поэтому $OP = OP'$; следовательно, прямые a и a' удалены от точки O на одно расстояние.]

Теоремы 2 и 3 позволяют легко строить фигуры, симметричные заданным фигурам относительно данной точки O. Построение точки A', симметричной точке A относительно точки O, не представляет труда (см. рис. 88). Для построения многоугольника F' симметричного данному многоугольнику F относительно точки O, достаточно найти точки, симметричные вершинам многоугольника F относительно точки O, и затем последовательно соединить полученные точки (рис. 95). Теорема 3 указывает построение окружности, симметричной данной окружности относительно точки O (см. рис. 93).

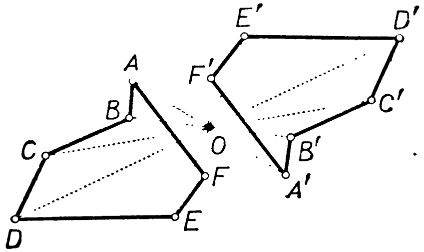


Рис. 95.

§ 19. ЦЕНТР СИММЕТРИИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Теорема. *Параллелограмм является центрально-симметричной фигурой, центром симметрии которой служит точка пересечения диагоналей.* (Эту точку часто называют просто центром параллелограмма.)

Доказательство. Пусть $ABCD$ — произвольный параллелограмм и O — точка пересечения его диагоналей (рис. 96). Так как диагонали AC и BD делятся в точке O пополам, то точки A и C симметричны относительно точки O; точки B и D также симметричны относительно O. Из этого, в силу теоремы 2 § 18, вытекает, что отрезки AB и CD симметричны относительно точки O и, точно так же, отрезки BC и DA симметричны относительно точки O. Поэтому при симметрии относительно O (при повороте вокруг O на угол $180°$) параллелограмм перейдет сам в себя.

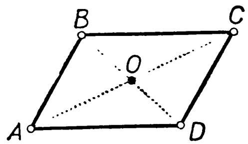


Рис. 96.

Из существования у параллелограмма центра симметрии вытекает ряд его свойств как известных из курса геометрии VI—VIII классов, так и новых. Приведем несколько примеров:

1. *Противоположные стороны параллелограмма равны.*

2. *Противоположные углы параллелограмма равны.*

3. *На всякой прямой, проходящей через точку O пересечения диагоналей параллелограмма, стороны параллелограмма высекают отрезок, делящийся в точке O пополам* (рис. 97).

4. *Биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны между собой* (рис. 98) *или совпадают.*

Теоремы 1 и 2 вытекают из того, что как противоположные стороны параллелограмма, так и его противоположные углы симметричны относительно точки O (см. теорему 1 § 18). Теорема 3 вытекает из того, что изображенные на рисунке 97 точки M и N симметричны относительно точки O. Теорема 4 вытекает из того, что при повороте вокруг точки O на 180° углы ABC и ADC параллелограмма совместятся и биссектриса BP угла ABC совместится с биссектрисой DQ угла ADC. Но это

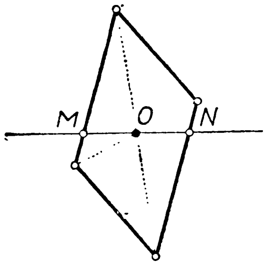


Рис. 97.

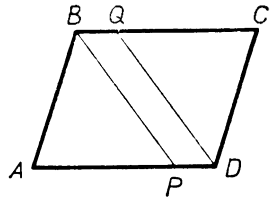


Рис. 98.

значит, что прямые BP и DQ симметричны относительно точки O, а в таком случае они либо параллельны, либо совпадают (см. теорему 4 § 18).

Много других теорем, выводимых из симметричности параллелограмма, имеется в задачах и упражнениях к этой главе.

§ 20. ЗАДАЧИ

Существование у фигуры центра симметрии позволяет устанавливать различные ее свойства. Выше мы видели это на примере параллелограмма. Вот еще одна задача такого рода.

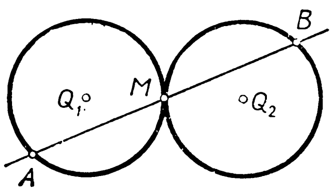


Рис. 99.

Задача 1. *Две равные окружности касаются друг друга внешним образом в точке M. Доказать, что на каждой прямой, проходящей через точку M, окружности высекают равные хорды* (рис. 99).

Решение. Рассматриваемые окружности симметричны относительно точки M: это следует из того, что они равны и их центры симметричны относительно точки M (рис. 99; см. теорему 3 § 18). Поэтому изображенные на рисунке 99 точки A и B симметричны относительно точки M, откуда следует, что $AM = MB$.

При решении задач центральная симметрия часто применяется также не ко всему чертежу в целом, а лишь к некоторой его **части**. При этом мы приходим к новому чертежу, который может оказаться более удобным для решения задачи, чем исходный (ср. § 11). Проиллюстрируем сказанное одним примером.

Задача 2. *Дан угол ABC и точка O внутри него. Провести через точку O прямую, отрезок которой, заключенный между сторонами угла ABC, делится в точке O пополам.*

Решение.

Анализ. Предположим, что задача решена и MN — искомая прямая (точка M лежит на стороне AB, точка N — на стороне BC; рис. 100). Так как точка O — середина отрезка MN, то точки M и N симметричны относительно O. Но точка M принадлежит прямой AB; следовательно, симметричная ей точка N должна лежать на прямой $A'B'$, симметричной AB относительно точки O (на рис. 100 прямая $A'B'$ проведена пунктиром). Таким образом, N должна быть точкой пересечения прямых $A'B'$ и BC.

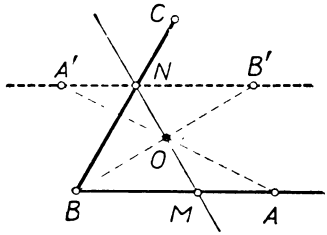


Рис. 100.

Построение. Пусть A — какая-то определенная точка луча BA (эту точку можно выбрать произвольно). Построим точки A' и B', симметричные точкам A и B относительно точки O. Проведем прямую $A'B'$ и обозначим через N точку пересечения этой прямой с прямой BC. Тогда прямая NO — искомая.

Доказательство правильности построения и исследование (показывающее, что задача всегда имеет *одно* решение) мы предоставляем читателю.

Задачи и упражнения к главе II

Определение центральной симметрии. Центрально-симметричные фигуры

99. Перерисуйте в тетрадь фигуры, изображенные на рисунке 101. Для каждой из этих фигур постройте фигуру, симметричную ей относительно точки O.

100. Перерисуйте в тетрадь изображенные на рисунке 102, *а*, *б* «верхние половины» фигур с центром симметрии O и дополните полученные рисунки.

101. Укажите центры симметрии фигур, изображенных на рисунках 103, *а*, *б*, *в*.

102. Какие из изображенных на рисунке 104 цифр центрально-симметричны? Выпишите несколько чисел, запись которых представляет собой центрально-симметричную фигуру.

103. Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (ср. рис. 105), то она имеет центр симметрии.

104. Обязана ли точка пересечения двух осей симметрии плоской фигуры F являться ее центром симметрии?

105. Докажите, что если фигура F имеет ось симметрии l и центр симметрии O, принадлежащий оси l, то и перпендикуляр, восставленный к оси l в точке O, также является осью симметрии фигуры F.

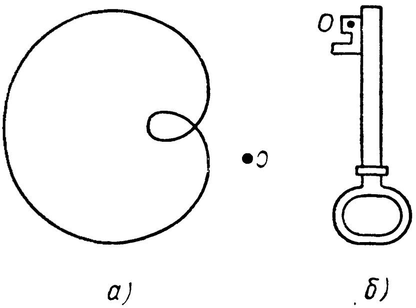


Рис. 101.

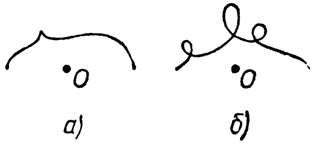


Рис. 102.

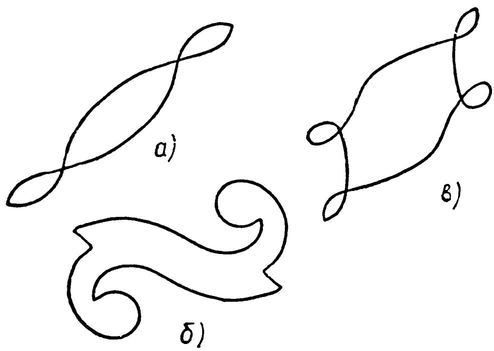


Рис. 103.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Рис. 104.

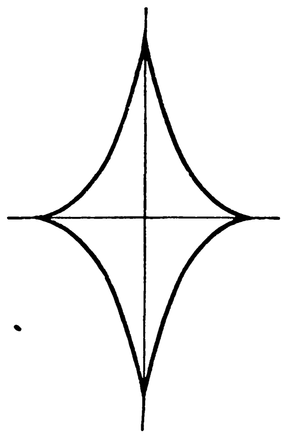


Рис 105.

106*. Пусть l — ось симметрии фигуры F, а O — ее центр симметрии. Докажите, что

а) точка O_1, симметричная O относительно прямой l, также является центром симметрии фигуры F;

б) прямая l_1, симметричная l относительно точки O, также является осью симметрии фигуры F.

107*. Может ли плоская фигура иметь два и только два центра симметрии?

108*. а) Может ли ограниченная фигура иметь два разных центра симметрии? А неограниченная фигура?

б) Может ли ограниченная плоская фигура иметь ось симметрии и центр симметрии, не принадлежащий этой оси? А неограниченная фигура?

Свойства центральной симметрии

109. Какие точки переходят сами в себя при симметрии относительно точки O? Какие прямые переходят сами в себя при симметрии относительно точки O? Какие окружности переходят сами в себя при симметрии относительно точки O?

110. а) Докажите, что любые два равные и параллельные (или расположенные на одной прямой) отрезка симметричны относительно некоторой точки O.

б) Пусть $AB=CD$ и $AB \parallel CD$. Всегда ли существует такая точка O, что точка A симметрична C относительно точки O и точка B симметрична D относительно точки O?

111. Докажите, что любые две равные окружности симметричны относительно середины отрезка, соединяющего центры этих окружностей.

112. Окружность S' симметрична окружности S относительно точки O. При каком расположении точки O и окружности S окружность S'

а) пересекает S;

б) касается S;

в) не имеет с S общих точек?

113. Докажите, что две равные окружности, касающиеся друг друга внешним образом, симметричны относительно точки касания.

114. Докажите, что две параллельные прямые симметричны относительно любой точки, равноудаленной от этих прямых.

115. Сколько центров симметрии имеет фигура, образованная двумя пересекающимися прямыми?

Сколько центров симметрии имеет фигура, образованная двумя параллельными прямыми?

116. Докажите, что если две окружности симметричны относительно некоторой точки O, то они симметричны также относительно некоторой прямой l. Обратно, если две окружности симметричны относительно некоторой прямой, то они симметричны также относительно некоторой точки.

117. В каком случае имеет центр симметрии фигура, образованная

а) окружностью S и точкой A;

б) окружностью S и прямой a;

в) двумя окружностями R и S?

118*. Треугольники ABC и DEF симметричны относительно некоторой точки O и относительно некоторой прямой l. Докажите, что

а) треугольники ABC и DEF — равнобедренные;

б) ось симметрии треугольника ABC совпадает с осью симметрии треугольника DEF.

119. Отрезок CD симметричен отрезку AB относительно некоторой точки O. Докажите, что перпендикуляры, восставленные к отрезкам AB и CD в их серединах, симметричны относительно точки O.

120. Треугольники ABC и $A'B'C'$ симметричны относительно точки O. Докажите, что точки M и M' пересечения медиан этих треугольников симметричны относительно точки O.

121. Пусть D, E, F — середины сторон треугольника ABC; M — точка пересечения медиан; K, L, N — середины отрезков MA, MB и MC. Докажите, что треугольник KLN равен треугольнику DEF.

122. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, D, E, F — середины отрезков MA, MB, MC. Через точки D, E и F проведены прямые, параллельные сторонам BC, CA и AB треугольника ABC. Докажите, что треугольник, образованный этими последними прямыми, равен исходному треугольнику.

123. Периметр треугольника ABC равен $2p$, а площадь — S. Чему равны периметр и площадь

а) шестиугольника, образованного в пересечении треугольника ABC и треугольника $A'B'C'$, симметричного ABC относительно его точки пересечения медиан M?

б) шестиугольной звезды, образованной обоими треугольниками ABC и $A'B'C'$?

124. Как должна быть расположена точка Q для того, чтобы треугольник $A'B'C'$, симметричный данному треугольнику ABC относительно точки Q, пересекался с треугольником ABC?

125. Какую форму может иметь пересечение треугольника ABC и треугольника $A'B'C'$, симметричного ABC относительно некоторой точки Q? [В этой задаче под «треугольником ABC» понимается ч а с т ь п л о с к о с т и, ограниченная тремя отрезками AB, BC и CA.]

126. Какие из следующих фигур имеют центр симметрии: разносторонний треугольник; равносторонний треугольник; отрезок; луч; прямая; угол; пара вертикальных углов; полоса, заключенная между двумя параллельными прямыми; трапеция; прямоугольник; правильный шестиугольник; правильный n-угольник?

Какие из этих фигур имеют больше одного центра симметрии?

127. Какие из следующих фигур имеют центр симметрии: окружность; круг; сектор; сегмент; окружность с начерченными в ней двумя параллельными хордами; «круговой слой», заключенный между двумя параллельными хордами круга; кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями; кольцо, образованное двумя эксцентрическими (т. е. не концентрическими) окружностями; линза, образованная пересечением двух равных кругов; линза, образованная пересечением двух неравных кругов?

128. Докажите, что никакой треугольник не имеет центра симметрии.

Вообще — никакой многоугольник с нечетным числом сторон не имеет центра симметрии.

129. На плоскости дан треугольник ABC. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно

а) вершины A;

б) середины D стороны BC;

в) точки M пересечения медиан.

130. На плоскости дан параллелограмм $ABCD$. Постройте параллелограмм, симметричный параллелограмму $ABCD$ относительно

а) вершины A;

б) середины E стороны AB;

в) точки M, делящей диагональ AC в отношении $AM:MC=2:1$.

131. Дан круг K и внутри него точка A. Постройте круг, симметричный кругу K относительно точки A. Заштрихуйте фигуру, образованную пересечением обоих кругов.

Центр симметрии параллелограмма

132. Докажите, что если четырехугольник имеет центр симметрии, то этот четырехугольник — параллелограмм.

133. Докажите, что если шестиугольник имеет центр симметрии, то его противоположные стороны равны и параллельны. Обратно, если противоположные стороны шестиугольника равны и параллельны, то этот шестиугольник имеет центр симметрии.

134. Всегда ли центрально-симметричный шестиугольник — правильный?

135*. Докажите, что многоугольник в том и только в том случае имеет центр симметрии, если он имеет четное число сторон и любые две его противоположные стороны равны и параллельны.

136. Существуют ли невыпуклые четырехугольники, имеющие центр симметрии?

Существуют ли невыпуклые шестиугольники, имеющие центр симметрии?

137. Прямая EF, проходящая через центр O параллелограмма $ABCD$, пересекает противоположные стороны AB и CD параллелограмма в точках E и F. Докажите, что $AE=CF$.

138. На противоположных сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки $AM=CN$. Докажите, что прямая MN проходит через центр параллелограмма.

139. Прямые MN и PQ, проходящие через центр O параллелограмма $ABCD$, пересекают противоположные стороны параллелограмма в точках M и N, P и Q. Докажите, что $MP=QN$.

140. Из точки O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры OM, ON, OP и OQ на его стороны. Докажите, что четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм и что диагонали этого параллелограмма пересекаются в точке O.

141. На противоположных сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки; $AK=CL$; также и на сторонах AD и BC отложены равные отрезки $BM=DN$. Докажите, что четырехугольник $KMLN$ — параллелограмм, центр которого совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

142. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, A_1, B_1 C_1, D_1 — такие точки на продолжениях его сторон, что B есть середина отрезка AA_1, C — середина отрезка BB_1, D — середина отрезка CC_1 и A — середина отрезка DD_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

143. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ вписан в параллелограмм $ABCD$. Докажите, что центры этих параллелограммов совпадают.

144. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм; Q_1 и Q_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC. Докажите, что отрезки AC, BD и Q_1Q_2 пересекаются в одной точке.

145. Пусть O — центр симметрии параллелограмма $ABCD$, M, N, P, Q — точки пересечения медиан треугольников OAB, OBC, OCD и ODA. Докажите, что четырехугольник $MNPQ$ — тоже параллелограмм.

146. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм; P и Q — центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и CDA. Докажите, что $PB \parallel QD$ и $PD \parallel QB$.

147. На противоположных сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ вне его построены равные треугольники ABE и CDF, причем так, что $AE=CF$, $BE=DF$. Докажите, что прямая EF проходит через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ и делится в этой точке пополам.

148. На сторонах параллелограмма $ABCD$ вне его построены подобные между собой треугольники ABA_1, BCB_1, CDC_1 и DAD_1, причем так, что $\angle A_1AB=\angle B_1BC=\angle C_1CD=\angle D_1DA$, $\angle A_1BA=\angle B_1CB=\angle C_1DC=\angle D_1AD$. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

149. На сторонах параллелограмма вне его построены правильные пятиугольники. Докажите, что их центры образуют параллелограмм.

150. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники ABE и CDF, а на сторонах AD и BC, также вне параллелограмма $ABCD$, — квадраты с центрами G и H. Докажите, что четырехугольник $EGFH$ — параллелограмм.

Разные задачи

151. Выведите из свойств центральной симметрии теорему о равенстве вертикальных углов.

152. Какие еще вы знаете примеры теорем, в доказательстве которых может быть использована центральная симметрия? Дайте новые доказательства этих теорем, использующие понятие центральной симметрии.

153. Докажите, что если прямая l, пересекающая равные окружности S_1 и S_2, делит пополам отрезок линии центров этих окружностей, заключенный между центрами, то окружности S_1 и S_2 высекают на l равные хорды.

154. Равные окружности F и G касаются друг друга в точке A. Докажите, что если прямая l проходит через A, то она образует с касательными к F и к G в отличных от A точках пересечения с этими окружностями равные углы.

155. Пусть R и S — две равные окружности, O и Q — их центры, M — середина отрезка OQ. Из точки M к окружности R проведена касательная MA. Докажите, что прямая MA касается также и окружности S.

156. Две равные окружности касаются друг друга внешним образом в точке Q; две прямые, проходящие через точку Q, пересекают эти окружности в точках A, B и C, D. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

157. В двух диаметрально противоположных точках A и B окружности S проведены касательные MN и PQ; на этих касательных отложены по обе стороны от точек A и B равные отрезки $AM=AN=BP=BQ$. Докажите, что $MP \parallel NQ$, а отрезки MQ, NP и AB пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам (или, наоборот, $MQ \parallel NP$, а отрезки MP, NQ и AB пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам).

158. Пусть A и B, C и D — диаметрально противоположные точки двух концентрических окружностей. Докажите, что отрезки AC и BD равны и параллельны (или расположены на одной прямой).

159. Пусть AB и CD — равные и параллельные хорды окружности S с центром O. На этих хордах построены равные треугольники ABM и CDN, причем так, что точки O и M находятся по разные стороны прямой AB, а точки O и N — по разные стороны прямой CD. Докажите, что прямая MN или перпендикулярна хордам AB и CD или проходит через точку O и делится в этой точке пополам.

В каком случае имеют место оба эти обстоятельства сразу (т. е. $MN \perp AB$ и отрезок MN проходит через точку O и делится в ней пополам)?

160. Пусть D, E, F — середины сторон AB, BC и CA треугольника ABC, O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ADF и DEF. Докажите, что отрезок O_1O_2 делит пополам среднюю линию DF треугольника ABC.

161. Две равные окружности R и S касаются друг друга в точке M. Три прямые, проходящие через точку M, пересекают окружность R в точках A, B, C, а окружность S — в точках D, E, F. Пусть P и Q — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и DEF. Докажите, что прямая PQ проходит через точку M.

162*. а) Три равные окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друг друга внешним образом: S_1 касается S_2 в точке A; S_2 касается S_3 в точке B; S_3 касается S_1 в точке C. Прямая l_1 проходит через A и пересекает S_1 и S_2 в точках M_1 и M_2; прямая l_2 проходит через B и пересекает S_2 и S_3 в точках M_2 и M_3; прямая l_3 проходит через C и пересекает S_3 и S_1 в точках M_3 и M_1'. Докажите, что M_1 и M_1' — диаметрально противоположные точки окружности S_1.

б) Четыре равные окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 попарно касаются друг друга внешним образом: S_1 и S_2 касаются в точке A; S_2 и S_3 касаются в точке B; S_3 и S_4 касаются в точке C; S_4 и S_1 касаются в точке D. Прямая l_1 проходит через A и пересекает S_1 и S_2 в точках M_1 и M_2; прямая l_2 проходит через B и пересекает S_2 и S_3 в точках M_2 и M_3; прямая l_3 проходит через C и пересекает S_3 и S_4 в точках M_3 и M_4; прямая l_4 проходит через D и пересекает S_4 и S_1 в точках M_4 и M_1'. Докажите, что точки M_1 и M_1' совпадают.

163. а) Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ делится точкой O пересечения диагоналей пополам. Докажите, что если $OA>OC$, то $\angle A < \angle C$.

б) Что можно сказать о четырехугольнике $ABCD$, если известно, что $\angle B = \angle D$ и что диагональ BD делит диагональ AC пополам?

164. Через данную точку Q проведите прямую так, чтобы отрезок, заключенный между точкой пересечения этой прямой с данной прямой l и с данной окружностью F, делился точкой Q пополам.

165. Через точку A пересечения двух окружностей F и G проведите прямую так, чтобы обе окружности высекали на этой прямой равные хорды.

166*. В окружности F даны две хорды AB и CD и на хорде CD точка Q. Найдите на окружности такую точку M, чтобы прямые AM и BM высекали на хорде CD отрезок KL, делящийся в точке Q пополам.

167*. Дан треугольник ABC площади S и внутри него точка Q. Расстояния от точки Q до сторон BC, AC и AB треугольника равны αh_a, βh_b и γh_c, где h_a, h_b и h_c — соответствующие высоты треугольника ABC. Чему равна площадь s пересечения треугольника ABC с треугольником $A'B'C'$, симметричным треугольнику ABC относительно точки Q? Как надо выбрать точку Q для того, чтобы эта площадь s была наибольшей?

Дополнения и методические указания к главе II

1. Общие указания к главе II. Изучение темы «Центральная симметрия» требует заметно меньше времени и усилий, чем изучение темы «Осевая симметрия». Объясняется это не столько меньшим объемом материала, сколько идейной близостью этих двух тем. В силу этого учащиеся приступают к изучению темы «Центральная симметрия» гораздо более подготовленными. Почти все принципиальные моменты, отмеченные в указаниях и дополнениях к главе I, сохраняют силу и здесь.

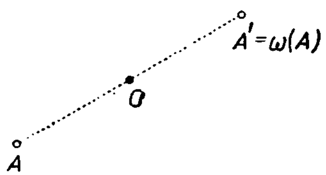


Рис. 106.

Иллюстративный материал, собранный в § 12, преследует те же цели, что и материал § 1 (ср. п. 1 на стр. 35).

Как и осевая симметрия, *центральная симметрия является точечным преобразованием плоскости*. Пусть O — некоторая точка плоскости. Симметрия ω относительно точки O переводит каждую точку A в точку $A' = \omega(A)$ (рис. 106). [Как и в случае осевой симметрии, использование функциональной записи $A' = \omega(A)$ на уроках нецелесообразно — прежде всего потому, что обозначение геометрического преобразования одной буквой ω очень непривычно для учащихся.] После того как изложено определение центральной симметрии, учителю целесообразно подчеркнуть сходство и различие в определении осевой и центральной симметрии. Как осевая, так и центральная симметрия переводят каждую точку A в некоторую точку A'; однако нахождение точки A' по заданной точке A для осевой и центральной симметрии различно (ср. рис. 55 и рис. 106). Общим для осевой и центральной симметрии является также то важное обстоятельство, что если точка A переходит при симметрии в точку A', то точка A' переходит при этой симметрии в точку A. Иначе говоря, если $\sigma(A) = A'$, то $\sigma(A') = A$ (осевая симметрия); точно так же, если $\omega(A) = A'$, то $\omega(A') = A$ (центральная симметрия; рис. 106). Последующие преобразования, изучаемые в курсе IX класса, этим свойством обладать уже не будут.

Единственной неподвижной точкой симметрии относительно точки O является сама точка O; **неподвижными прямыми** — все прямые, проходящие через O (ср. задачу **109**).

Рассмотрение геометрической фигуры как точечного множества не является специфическим для осевой симметрии. Этот подход к понятию фигуры сохраняется при изучении всех преобразований в курсе IX класса и, в частности, при изучении центральной симметрии (ср. п. 3 на стр. 37).

Самостоятельная работа § 14 способствует закреплению такого взгляда на фигуру (ср. п. 4 на стр. 38).

Поворот чертежа на 180° вокруг точки O (§ 16) играет при изучении центральной симметрии ту же роль, что и перегибание чертежа при изучении осевой симметрии. Именно, поворот на 180° позволяет доказать, что каждая фигура переходит при центральной симметрии в равную ей фигуру (теоре-

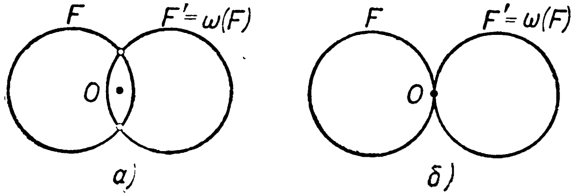


Рис. 107.

ма 1 § 18). По этому поводу можно повторить почти все сказанное в п. 6 на стр. 39: использование физического эксперимента для доказательства теоремы 1 § 18 неизбежно в школьном курсе.

Сказанное в пп. 7 — 8 на стр. 40 — 42 также в полной мере относится и к центральной симметрии.

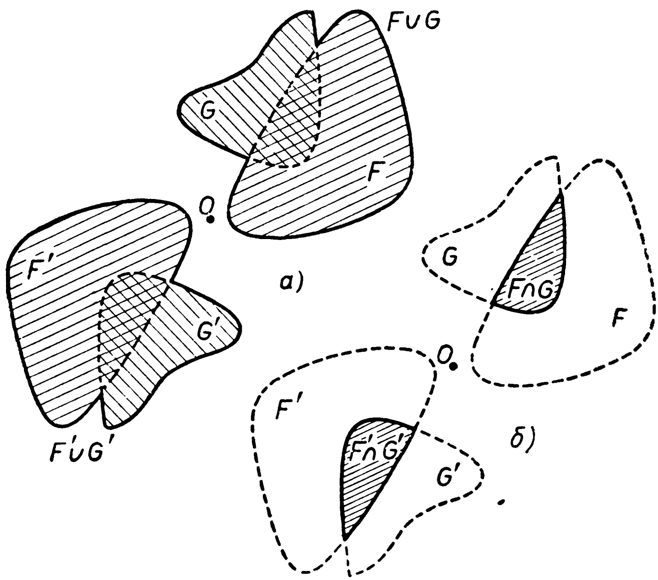


Рис. 108.

2. Объединение и пересечение фигур. Пусть O — некоторая точка. Обозначим через ω симметрию относительно точки O. Для каждой фигуры F существует фигура $F' = \omega(F)$, симметричная фигуре F относительно точки O. При этом

объединение $F \cup \omega(F)$, так же как и пересечение $F \cap \omega(F)$, имеет точку O своим центром симметрии.

Например, если F — окружность, а $\omega(F)$ — симметричная ей окружность (относительно точки O), то пересечение $F \cap \omega(F)$ представляет собой фигуру, имеющую точку O своим центром симметрии. Поэтому *если окружности* F *и* $\omega(F)$ *пересекаются* (рис. 107, *а*), *то точки их пересечения симметричны относительно точки* O; *если же окружности* F *и* $\omega(F)$ *касаются друг друга, то точка касания обязательно совпадает с* O (рис. 107, *б*).

Пусть теперь F и G — две фигуры, а $F'=\omega(F)$ и $G'=\omega(G)$ — фигуры, симметричные им относительно точки O. Тогда *фигуры* $F \cup G$ *и* $F' \cup G'$ *симметричны друг другу относительно точки* O (рис. 108, *а*). Точно так же, *фигуры* $F \cap G$ *и* $F' \cap G'$ *симметричны друг другу относительно точки* O (рис. 108, *б*)[1].

Эти теоремы существенно используются при решении задач на центральную симметрию. Поэтому от учащихся следует добиваться интуитивного понимания их (но, разумеется, не знания формулировок!). Например, *если* F *и* G — *две линии, пересекающиеся в точке* M, *а* F' *и* G' — *линии, симметричные* F *и* G *относительно точки* O, *то линии* F' *и* G' *пересекаются в точке* M', *симметричной* M *относительно* O (рис. 109). На рисунке 110 изображены две пересекающиеся окружности и две окружности, симметричные им относительно точки O.

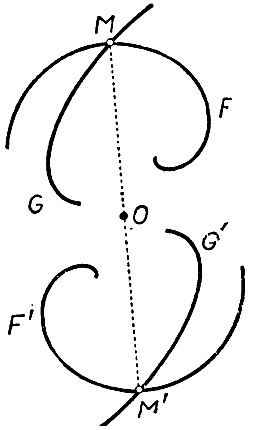


Рис. 109.

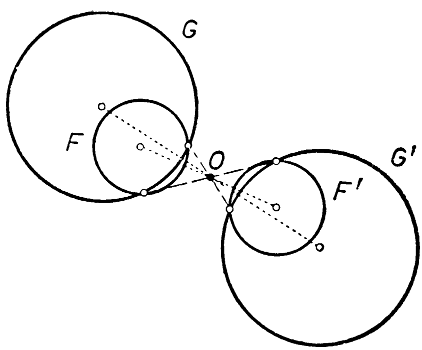


Рис. 110.

В доказательстве теоремы о центре симметрии параллелограмма (§ 19) также неявно используется понятие объединения фигур. В самом деле, обозначим через F сторону AB параллелограмма $ABCD$ с центром O, а через G — сторону BC (рис. 111). Тогда, обозначая через ω симметрию относительно O, имеем: $\omega(F)=CD$, $\omega(G)=DA$. Поэтому ломаная ABC (т. е. фигура $F \cup G$) симметрична относительно O фигуре $\omega(F) \cup \omega(G)$, т. е. ломаной CDA. А так как ломаные ABC и CDA симметричны друг другу относительно точки O, то их объединение, т. е. весь параллелограмм $ABCD$, имеет точку O своим центром симметрии.

(Ср. также с л е д с т в и е в п. 9 на стр. 43.)

В решении задачи 1 на стр. 58 также нетрудно усмотреть применение понятия пересечения фигур.

3. Роль примеров и задач. [К § 19, 20.] Сказанное в п. **11** на стр. 45—46 в полной мере относится и к содержанию § 19, 20 главы II. В этих параграфах самостоятельное значение имеет только теорема о том, что *точка пересе-*

---

[1] Используя функциональную символику, эти теоремы можно записать так:

$$\omega(F \cup G)=\omega(F) \cup \omega(G); \quad \omega(F \cap G)=\omega(F) \cap \omega(G).$$

чения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии. Все остальные предложения, собранные в этих параграфах, являются чисто иллюстративными и свободно могут быть заменены другими. Добиваться тщательного заучивания этих предложений ни в коем случае не следует. Повторяем, основное состоит вовсе не в усвоении отдельных фактов, а в овладении идеей геометрического преобразования и методом преобразования чертежа при решении задач и доказательстве теорем.

4. О задачах и упражнениях. Первые 10 задач к главе II являются вводными — они полезны для лучшего уяснения понятия центральной симметрии. Для лучшего понимания определений осевой и центральной симметрии полезно разобрать задачу **103** (стр. 59). Решение ее несложно; если фигура F имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии l_1 и l_2 (рис. 112), то наряду с каждой точкой A фигура F содержит также точку A', симметричную A относительно прямой l_1. Но тогда ей принадлежит и точка A'', симметричная A' относительно прямой l_2, а эта точка симметрична A относительно точки O

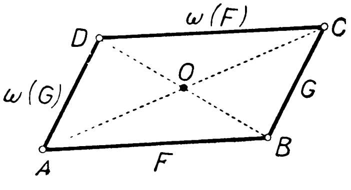


Рис. 111.

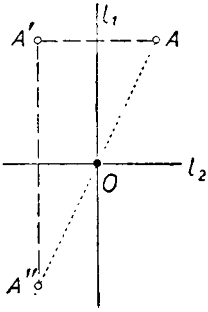


Рис. 112.

пересечения l_1 и l_2 (см. рис. 112). Отсюда и вытекает, что точка O является центром симметрии фигуры F. Аналогично решается и близкая к задаче **103** задача **105**. Задачи **106** а), б) и **107** похожи на задачи **103** и **105**. Однако эти последние задачи являются более сложными; несмотря на их поучительность, разобрать их стоит лишь при наличии сильного класса. Задачи **108** а) и б) являются простыми следствиями задач **106** и **107**.

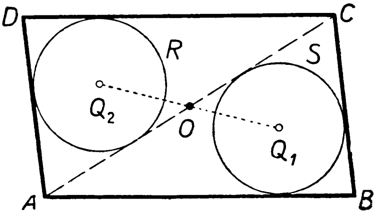


Рис. 113.

Задачи **109—114** [за исключением разве что задачи **110** б)] являются весьма простыми; они полезны для усвоения содержания § 18. Задачи **115** и **117** требуют более свободного владения понятием центральной симметрии. Полезными нам кажутся простые задачи **121** и **122**; следует также разобрать задачи **126** и **127**. Задачи **129—131** посвящены построению фигур, симметричных данным относительно известной точки; их можно решать и до задач **109—128**.

Наиболее важными в главе II являются задачи **132—165**; на эти задачи должно быть обращено главное внимание. Число задач такого рода в книге велико; учитель может выбрать те из них, которые ему покажутся более удачными.

5. Примеры решения задач. 1) З а д а ч а **144** (стр. 63). Треугольник ABC (рис. 113) симметричен треугольнику CDA относительно центра O параллелограмма (см. § 19, в частности, рис. 96 на стр. 57). При повороте вокруг точки O на угол 180° треугольник ABC переходит в треугольник CDA; окружность S, вписанная в треугольник ABC, переходит в окружность R, вписанную в треугольник CDA; центр Q_1 окружности S переходит в центр Q_2 окружности R. Поэтому точки Q_1 и Q_2 симметричны относительно точки O и, значит, отрезок Q_1Q_2 проходит через точку O пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма (он даже делится в этой точке пополам).

2) Задача **150** (стр. 63). При повороте вокруг центра O параллелограмма $ABCD$ на 180° сторона AB параллелограмма переходит в сторону CD и равносторонний треугольник ABE переходит в равносторонний треугольник CDF (рис. 114). Поэтому симметрия относительно точки O переводит точку E в точку F. Точно так же доказывается, что центры G и H квадратов $ADKL$ и $BCMN$, построенных на сторонах AD и BC параллелограмма, симметричны относительно точки O. Отсюда следует, что диагонали четырехугольника $EGFH$ делятся в точке O пополам; следовательно, этот четырехугольник — параллелограмм с центром O.

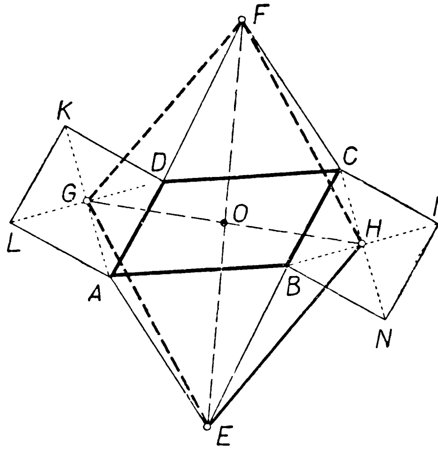


Рис. 114.

3) Задача **159** (стр. 64). Заметим, что хорды AB и CD симметричны относительно центра O окружности (в случаях, изображенных на рис. 115, *а*, *б*, точка A симметрична точке D, а точка B — точке C) и симметричны отно-

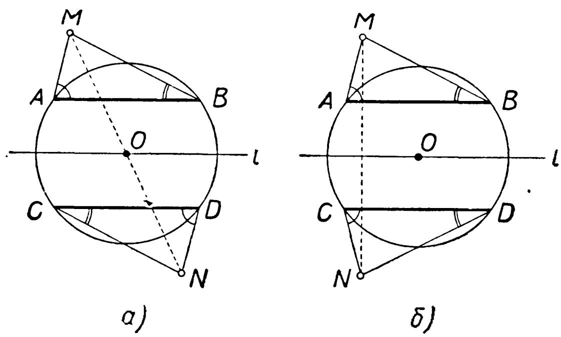


Рис. 115.

сительно диаметра l окружности, параллельного AB и CD. (При симметрии относительно O или относительно l хорда AB окружности переходит в хорду $A'B'$, параллельную и равную AB; но такая хорда, отличная от AB, есть только одна; поэтому $A'B'$ совпадает с CD.) Предположим сначала, что $AM = DN$ (рис. 115, *а*); при этом $\angle BAM = \angle CDN$ и $\angle ABM = \angle DCN$. Поворот вокруг точки O на угол 180° переводит отрезок AB в отрезок DC и треугольник ABM — в треугольник DCN (прямая AM после поворота совместится с прямой DN, ибо $\angle BAM = \angle CDN$ и т. д.). Таким образом, мы убеждаемся, что точка M симметрична точке N относительно O; поэтому отрезок MN проходит через точку O и делится в ней пополам.

Пусть теперь $AM=CN$, $BM=DN$ (рис. 115, *б*); при этом $\angle BAM=\angle DCN$ и $\angle ABM=\angle CDN$. В этом случае треугольник ABM переходит в треугольник CDN при симметрии относительно прямой l. Поэтому точки M и N симметричны относительно прямой l и, следовательно, $MN\perp l$, т. е. $MN\perp AB$.

Из сказанного также ясно, что для того чтобы отрезок MN проходил через точку O и делился в этой точке пополам и одновременно был перпендикулярен AB (перпендикулярен l), надо, чтобы имели место условия $AM=BM=CN=DN$, т. е. чтобы треугольники ABM и CDN были равнобедренными.

ГЛАВА III

ПОВОРОТ

§ 21. ПРИМЕРЫ И ИЛЛЮСТРАЦИИ

Взгляните на рисунки 116—117. Изображенные на этих рисунках фигуры не имеют ни осей, ни центра симметрии. Тем не менее они также представляются нам «правильными» и в каком-то смысле

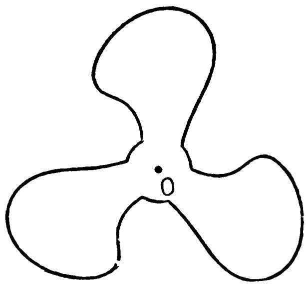


Рис. 116.

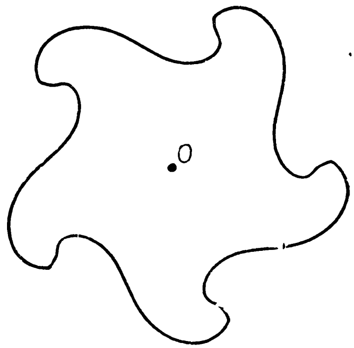


Рис. 117.

«симметричными». Эта «правильность» заключается, как нетрудно заметить, в том, что каждая из этих фигур при повороте вокруг точки O на некоторый угол снова переходит сама в себя. Фигура, изображенная на рисунке 116, переходит в себя при повороте на угол $120°$ $\left(\text{т. е. } \frac{360°}{3}\right)$, а фигура, изображенная на рисунке 117,— при повороте на угол $72°$ $\left(\text{т. е. } \frac{360°}{5}\right)$. Если фигура F переходит в себя при повороте вокруг точки O на угол $\frac{360°}{n}$ (где n — целое положительное число), то говорят, что точка O является для фигуры F **центром симметрии порядка** n.

Сложив лист бумаги в 8 раз (рис. 118) и вырезав на ней ножницами некоторый узор, мы получим, после разворачивания листа, фигуру, имеющую центр симметрии четвертого порядка (рис. 119). Этим приемом часто пользуются для изготовления красивых симметричных узоров.

Фигуры, обладающие центром симметрии некоторого порядка n,

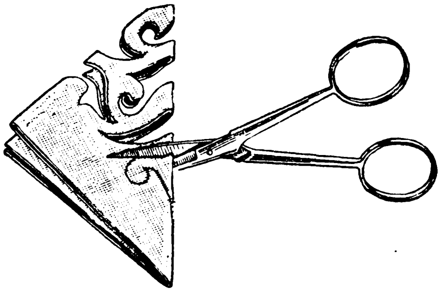


Рис. 118.

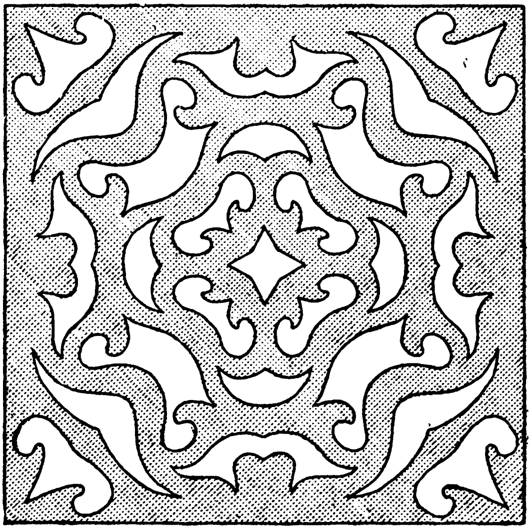


Рис. 119.

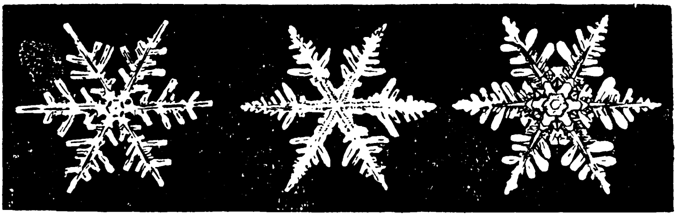


Рис. 120.

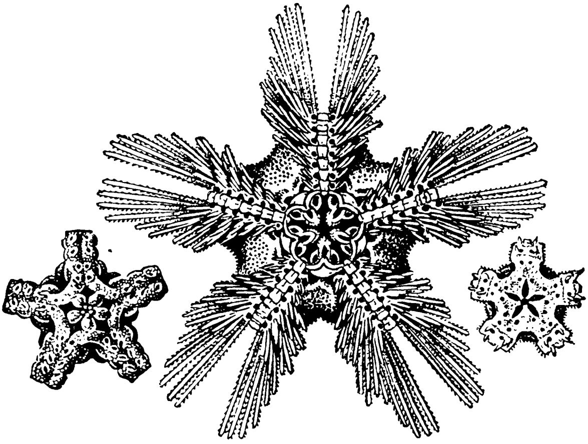


Рис. 121.

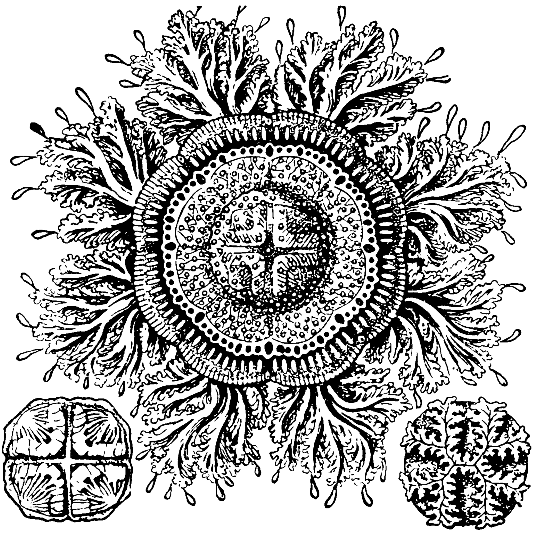


Рис. 122.

часто встречаются в жизни и в прикладном искусстве. На рисунке 120 изображены формы снежинок. Все они имеют центр симметрии шестого порядка. Морские звезды (рис. 121) имеют центр симметрии пятого порядка, а некоторые другие биологические виды — центры симметрии иного порядка (рис. 122). На рисунках 123—125 изображены некоторые старинные орнаменты, имеющие центры симметрии разных порядков.

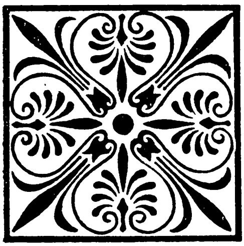


Рис. 123. Орнамент на древнегреческой вазе.

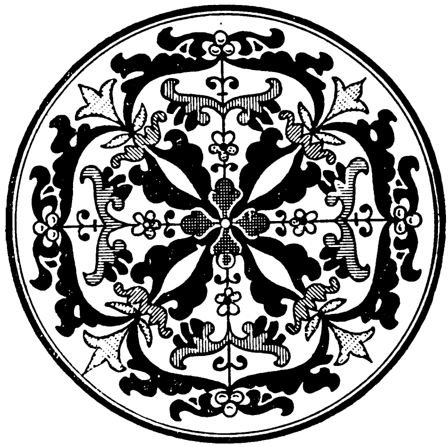


Рис. 124. Рисунок на облицовочном изразце (Италия, эпоха Возрождения).

Весьма часто фигуры, имеющие центр симметрии некоторого порядка, обладают также несколькими осями симметрии, а иногда

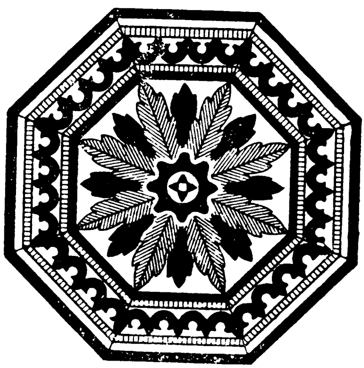


Рис. 125. Рисунок на облицовочном изразце, обладающий симметрией 8-го порядка.

и центром симметрии (в смысле главы II). Так, пятиугольная звезда (имеющая центр симметрии пятого порядка, рис. 126) обладает пятью осями симметрии. Снежинки (рис. 120) обладают шестью осями симметрии, а также центром симметрии. Фигура, изображенная на рисунке 127 (обладающая центром симметрии четвертого порядка), не имеет осей симметрии, но является центрально-симметричной.

Мы видели, что понятие центра симметрии порядка n связано с поворотом фигуры на угол $\frac{360^\circ}{n}$. Изучению поворота (на произвольный угол) и посвящена настоящая глава. Однако, прежде чем переходить к точному определению поворота, мы должны рассмотреть некоторые вспомогательные понятия.

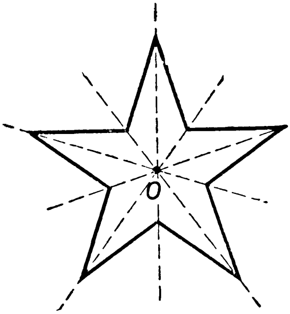


Рис. 126.

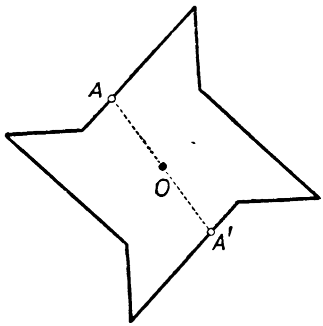


Рис. 127.

§ 22. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ОБ УГЛЕ

Пусть OM и ON—два луча, исходящие из одной точки O и не составляющие продолжение один другого (рис. 128). Проведем окружность некоторого радиуса с центром в точке O и обозначим точки ее пересечения с лучами OM и ON через A и B. Рассмотрим угол MON между лучами OM и ON, меньший 180°. Этот угол измеряется, как известно, величиной дуги AB (точнее, той из двух дуг с концами A и B, которая меньше 180°— сплошная дуга на рис. 128).

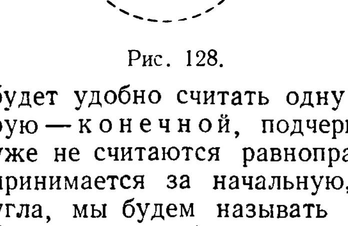


Рис. 128.

До сих пор, говоря об углах, мы всегда считали лучи, являющиеся сторонами этого угла, равноправными. Теперь же нам будет удобно считать одну из сторон угла начальной, а вторую — конечной, подчеркивая тем самым, что стороны угла уже не считаются равноправными. Угол, для которого луч OM принимается за начальную, а луч ON — за конечную сторону угла, мы будем называть ***углом от луча OM до луча ON***. Этот угол мы будем считать положительным, если, пробегая дугу AB от точки A до точки B, мы движемся по окружности против направления движения часовой стрелки (рис. 129, *а*); мы будем считать его отрицательным, если, пробегая дугу AB от A до B, мы движемся по направлению движения часовой стрелки (рис. 129, *б*). Угол от луча OM до луча ON мы будем называть ***направленным углом*** и обозначать символом $\measuredangle MON$ (в отличие от обычного, ненаправленного угла между лучами OM и ON, стороны которого считаются равноправными; такой угол обозначается по-прежнему через $\angle MON$).

Итак, мы пришли к следующему определению.

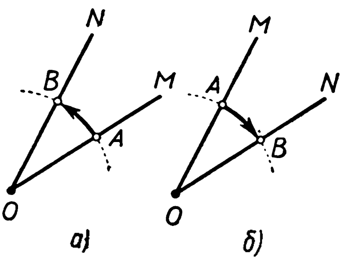


Рис. 129.

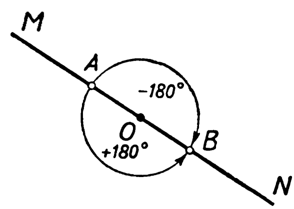


Рис. 130.

Определение. *Угол $\measuredangle MON$ от луча OM до луча ON по абсолютной величине всегда равен (ненаправленному) углу $\angle MON$ между лучами OM и ON. Угол $\measuredangle MON$ положителен, если, про-*

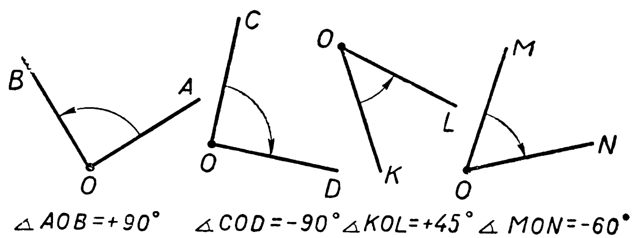


Рис. 131.

бегая меньшую 180° дугу AB окружности с центром O от точки A луча OM до точки B луча ON, мы движемся против направления движения часовой стрелки (рис. 129, *а*). *Угол $\measuredangle MON$ отрицателен, если, пробегая дугу AB окружности от точки A до точки B, мы движемся по направлению движения часовой стрелки* (рис. 129, *б*). Если лучи OM и ON составляют продолжение один другого (рис. 130), то $\measuredangle MON$ от луча OM до луча ON можно считать как равным $+180°$, так и равным $-180°$.

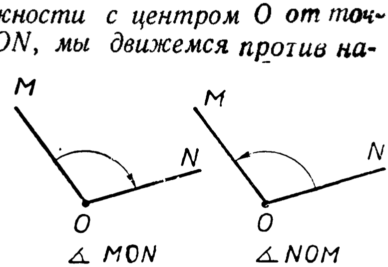


Рис. 132.

На рисунке 131, как легко видеть, $\sphericalangle AOB = +90°$, $\sphericalangle COD = -90°$, $\sphericalangle KOL = +45°$, $\sphericalangle MON = -60°$. Для любых двух лучей OM и ON, исходящих из одной точки O, справедливо равенство:

$$\sphericalangle MON = -\sphericalangle NOM$$

(рис. 132).

Из определения направленного угла вытекает, что $\sphericalangle MON$ всегда заключается между $-180°$ и $+180°$. *Если нам задан луч ON и некоторый угол α* (положительный или отрицательный), *заключенный между $-180°$ и $+180°$, то существует единственный луч OM, для которого $\sphericalangle MON = \alpha$.* В самом деле, если $\alpha \neq 0°$ и $\alpha \neq \pm 180°$, то существуют два луча OM' и OM'', для

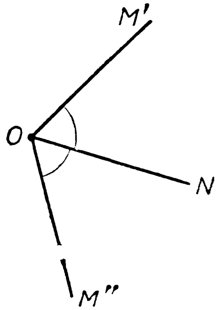


Рис. 133.

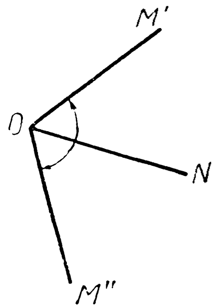


Рис. 134.

которых $\angle NOM' = \angle NOM'' = |\alpha|$ (рис. 133). Однако при этом один из направленных углов $\sphericalangle NOM'$ и $\sphericalangle NOM''$ положителен, а другой отрицателен (рис. 134), так что только один из них равен α (а второй равен $-\alpha$).

§ 23. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ОБ ОТРЕЗКЕ. ВЕКТОР

В предыдущем параграфе мы ввели понятие направленного угла, считая стороны угла неравноправными: одну начальной, а другую конечной. Подобно этому часто приходится наряду

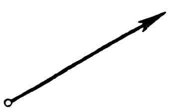


Рис. 135.

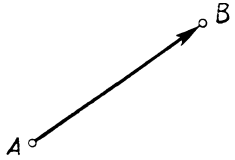


Рис. 136.

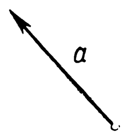


Рис. 137.

с обыкновенными отрезками рассматривать ***направленные отрезки***, считая один из концов отрезка его началом, а второй — концом. На чертежах направленные отрезки изображают в виде отрезков со стрелками (рис. 135), причем стрелка указывает направление от начала отрезка к его концу. Направленные отрезки называют также ***векторами***; этим названием мы будем пользоваться в дальнейшем.

Вектор с началом A и концом B (рис. 136) обозначается через $\overline{AB}$ (в отличие от обычного, т. е. ненаправленного отрезка с концами в точках A и B, который обозначается символом AB — без черточки сверху). Вектор обозначают также одной жирной буквой, например, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ... (рис. 137). Так как в тетради или на доске писать жирные буквы неудобно, то вместо них пишут обычные (светлые) буквы с черточкой сверху (т. е. пишут $\bar{a}$ вместо $\boldsymbol{a}$, $\bar{b}$ вместо $\boldsymbol{b}$ и т. д.).

Длиной вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Если вектор обозначен одной жирной буквой, то его длина обозначается той же светлой буквой (а в тетради или на доске — той же буквой без черточки). Длину вектора иногда обозначают также вертикальными черточками — как и абсолютную величину числа. Таким образом, длина вектора $\boldsymbol{a}$ обозначается через a или $|\boldsymbol{a}|$ (а в тетради или на доске длина вектора $\bar{a}$ обозначается через a или $|\bar{a}|$).

§ 24. СЕГМЕНТ, ВМЕЩАЮЩИЙ ДАННЫЙ УГОЛ

Пусть AB — некоторый о т р е з о к и O — произвольная точка плоскости (рис. 138). Проведем лучи OA и OB. Угол AOB между лучами OA и OB называется *углом, под которым отрезок AB виден из точки O*; разумеется, этот угол всегда положителен (так как он ненаправленный). Возьмем теперь в е к т о р $\overline{AB}$ с началом A и концом B и рассмотрим $\measuredangle AOB$ (направлен-

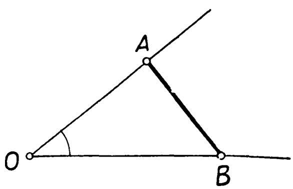


Рис. 138.

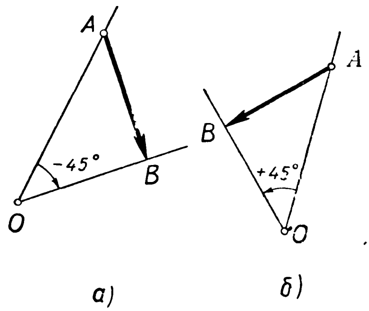


Рис. 139.

ный!) от луча OA до луча OB. Этот угол называется *углом, под которым вектор $\overline{AB}$ виден из точки O*. Угол, под которым вектор $\overline{AB}$ виден из точки O, уже может быть как положительным, так и отрицательным. Например, на рисунке 139, *а* вектор $\overline{AB}$ виден из точки O под углом $-45°$, а на рисунке 139, *б* вектор $\overline{AB}$ виден из точки O под углом $+45°$; о т р е з о к AB в обоих случаях виден из точки O под углом $45°$.

З а д а ч а. *Даны отрезок AB и угол α, заключенный между* $0°$ *и* $180°$ (причем $\alpha \neq 0°$ и $\alpha \neq 180°$). *Найти множество всех точек, из которых отрезок AB виден под углом α.*

Р е ш е н и е. Пусть O — какая-нибудь точка, из которой отрезок AB виден под углом α (рис. 140). Проведем окружность, проходящую через точки A, B и O. Ту из двух дуг этой окружности с концами A и B, которая содержит точку O, мы обозначим через F. Из любой точки O', лежащей на дуге F, отрезок AB также виден под углом α (так как $\angle AOB$ и $\angle AO'B$ — вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, и потому $\angle AO'B = \angle AOB$). Если же точка Q не лежит на дуге F, но расположена с той же стороны от пря-

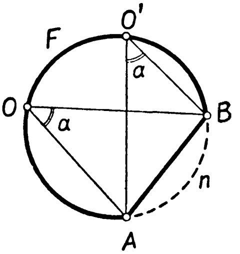


Рис. 140.

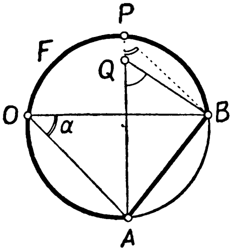


Рис. 141.

мой AB, что и точка O, то из точки Q отрезок AB виден под углом, о т л и ч н ы м от α. Действительно, пусть точка Q лежит в н у т р и проведенной окружности и луч AQ пересекает второй раз окружность в точке P (рис. 141). Тогда, в силу теоремы о внешнем угле треугольника,

$$\angle AQB > \angle APB = \alpha,$$

т. е. $\angle AQB \neq \alpha$. Пусть теперь точка Q лежит в н е проведенной окружности и P — точка дуги F, принадлежащая треугольнику ABQ (рис. 142, *а* — *в*). Тогда, в силу той же теоремы о внешнем угле,

$$\angle AQB < \angle APB = \alpha,$$

т. е. и в этом случае $\angle AQB \neq \alpha$ (так, в случае, изображенном на рис. 142, *в*, имеем $\angle 1 < \angle 3$ и $\angle 2 < \angle 4$).

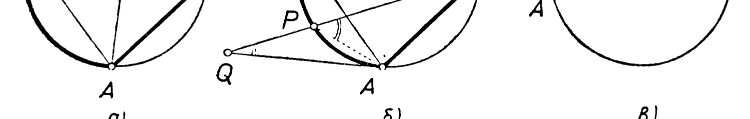


Рис. 142.

Таким образом, *все точки дуги F принадлежат искомому множеству точек* (т. е. множеству точек, из которых отрезок AB виден под углом α). С другой стороны, *все точки, расположенные по ту же сторону от прямой AB,* *что и точка O, и не принадлежащие дуге F, не относятся к нашему множеству.*

Если точка O' симметрична точке O относительно прямой AB (рис. 143), то углы AOB и $AO'B$ будут симметричны относительно прямой AB, а следовательно, равны (см. теорему 1 § 7, стр. 17). Поэтому множество всех точек, из которых отрезок AB виден под углом α, представляет собой фигуру, симметричную относительно прямой AB. Это множество состоит из *всех точек дуги F и всех точек дуги F′, симметричной дуге F относительно прямой AB* (рис. 144). Поставленная задача полностью решена.

Если отрезок AB и угол α заданы, то, для того чтобы построить дуги F и F', достаточно найти центр Q дуги F. Пусть прямая AM есть касательная к дуге F, проведенная в точке A (рис. 145). Эта касательная будет составлять с прямой AB угол α (по теореме об угле между касательной и хордой). Для построения центра Q мы прежде всего проведем через точку A такую прямую AM, что $\angle MAB=\alpha$; это и будет касательная к дуге F. Центр Q дуги F найдется теперь как точка пересечения перпендикуляра AN к прямой AM и перпендикуляра, восставленного к отрезку AB в его середине. Центр Q' дуги F' симметричен точке Q относительно прямой AB (см. теорему 3 § 7, стр. 17).

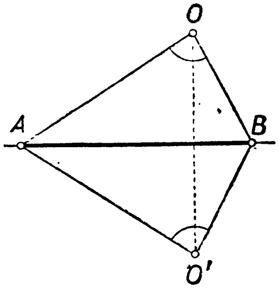


Рис. 143.

Так как на дугу AnB (рис. 140) опирается вписанный угол AOB, равный α, то центральный угол AQB, опирающийся на эту дугу, равен 2α. Дуге F, дополняющей дугу AnB до полной окружности, отвечает центральный угол, равный $360° - 2\alpha$. Поэтому, *если α — острый угол, то дуга F больше полуокружности* (рис. 146, *а*); *если α — тупой угол, то дуга F меньше полуокружности* (рис. 146, *б*); *наконец, если угол α — прямой, то каждая из двух дуг F и F′ равна полуокружности,* так что вместе эти дуги образуют целую *окружность, построенную на отрезке AB, как на диаметре* (рис. 146, *в*).

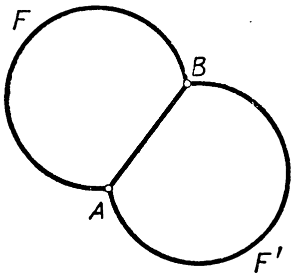


Рис. 144.

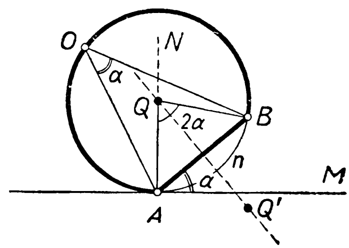


Рис. 145.

Изменим теперь условие нашей задачи. Вместо отрезка AB мы возьмем вектор $\overline{AB}$ и будем искать *множество всех точек, из которых данный вектор $\overline{AB}$ виден под известным углом α, заключенным между $-180°$ и $+180°$* (причем $\alpha \neq 0°$ и $\alpha \neq \pm 180°$). В этом случае вместо двух дуг окружностей F и F' мы получим только одну из них. Действительно, из точек одной дуги вектор $\overline{AB}$ виден под положительным углом, а из точек второй дуги — под отрицательным углом (рис. 147). Таким образом, *множество всех точек, из ко-*

торых данный вектор $\overline{AB}$ *виден под данным углом* α (положительным или отрицательным), *представляет собой дугу окружности с концами в точках* A *и* B (рис. 148). Эта дуга вместе с отрезком AB ограничивает сегмент круга: его называют ***сегментом, вмещающим данный угол*** α.

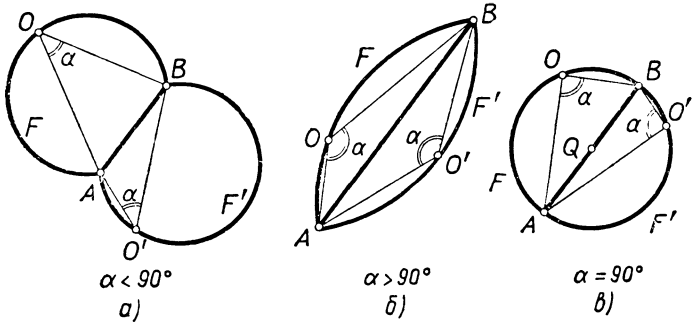


Рис. 146.

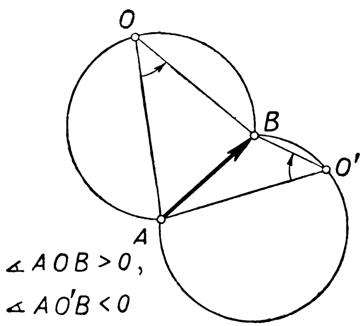


Рис. 147.

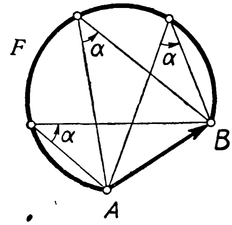


Рис. 148.

§ 25. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВОРОТА

При изучении центральной симметрии мы уже пользовались (§ 16) поворотом на угол 180°. Теперь рассмотрим поворот на произвольный угол.

Чтобы получить наглядное представление о повороте, поступим так же, как в § 16. Отметим на листе бумаги некоторую точку O и укрепим лист на столе с помощью булавки, проткнув его в точке O. Затем, не вынимая булавки, повернем лист вокруг точки O на некоторый угол α (рис. 149). Каждая точка A в результате этого поворота займет новое положение A'. Мы будем говорить, что *точка* A' *получается из точки* A *поворотом вокруг точки* O *на угол* α. Если на листе бумаги изображена некоторая фигура F, то после указанного поворота листа бумаги она займет новое положение. Обозначим фигуру в новом ее положении через F' (рис. 149). Здесь мы также говорим, что *фигура F' получается из фигуры F поворотом вокруг точки O на угол α.*

Дадим теперь точное определение п о в о р о т а в о к р у г т о ч к и O на угол α.

О п р е д е л е н и е. *Пусть даны точка O и угол α (положительный или отрицательный). Возьмем произвольную*

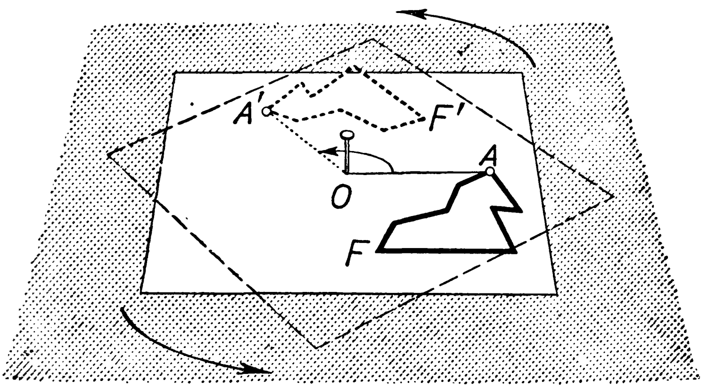


Рис. 149.

от O точку A и обозначим через A' точку, определяемую следующими двумя условиями: 1) *угол $\measuredangle AOA'$ от луча OA до луча OA' равен α;* 2) *отрезок OA' равен отрезку OA* (рис. 150). *Переход от точки A к точке A' называется* ***поворотом*** *вокруг точки O на угол α.*

Сама точка O переходит при повороте вокруг точки O (на любой угол) *в т у ж е с а м у ю т о ч к у.*

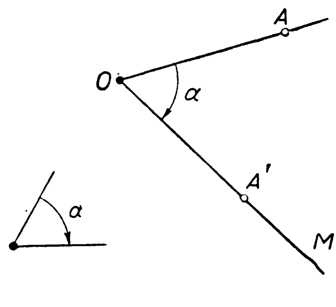


Рис. 150.

Таким образом, для построения точки A', в которую переходит известная точка A при повороте вокруг точки O на угол α, нам надо:

1) соединить точку A с точкой O;

2) построить такой луч OM, что $\measuredangle AOM=\alpha$;

3) отложить на этом луче OM отрезок $OA'=OA$.

Подчеркнем еще, что фигурирующий в определении поворота угол α — это н а п р а в л е н н ы й угол, который может быть как положительным, так и отрицательным. Знак угла α определяет направление поворота (ср. рис. 151, на котором изображены точки A' и A'', получающиеся из одной и той же точки A поворотами на углы α и $-\alpha$).

Если на плоскости задана некоторая фигура F, то для любой ее точки A можно найти точку A', в которую переходит A при повороте вокруг точки O на угол α (рис. 152). Множество всех получающихся таким образом точек A' представляет собой новую фигуру F'. Об этой фигуре говорят, что она получается из фигуры F при помощи поворота (вокруг точки O на угол α).

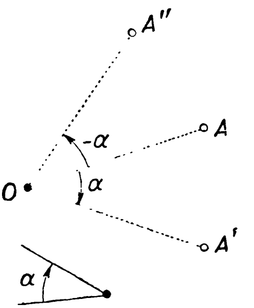


Рис. 151.

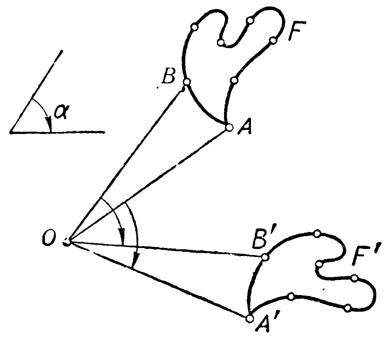


Рис. 152.

Определение. *Фигура F', образованная всеми точками, получающимися из точек фигуры F поворотом вокруг точки O на угол α, называется фигурой, получающейся из фигуры F поворотом вокруг точки O на угол α.*

§ 26. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Необходимые материалы и инструменты: лист кальки, булавка, угольник с углами 45°, циркуль.

Построение фигуры, получающейся из данной поворотом на угол 45°. Отметьте на листе бумаги некоторую точку O и изобразите на этом же листе какую-либо фигуру, например замкнутую линию F (рис. 153). На линии F отметьте ряд точек, достаточно густо расположенных на ней. Если A — какая-либо из отмеченных точек, то проведите отрезок OA и, пользуясь угольником, постройте такой луч OM, что $\measuredangle AOM = +45°$ (луч OM получается из луча OA поворотом на 45° в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки). На луче OM отложите отрезок $OA'=OA$. Тогда A' — первая найденная вами точка фигуры F'. Поступив точно так же со всеми отмеченными на линии F точками, вы получите ряд точек линии F'. Соедините

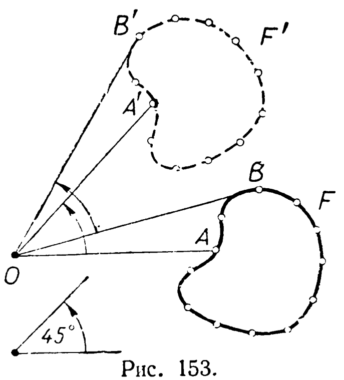


Рис. 153.

их между собой — это и даст линию F', которая получается из F поворотом на 45° вокруг точки O.

Теперь положите на полученный чертеж лист кальки и проткните кальку и чертеж булавкой в точке O. Обведите на кальке линию F. Оставляя чертеж неподвижным, поверните лист кальки вокруг точки O на 45° против направления вращения часовой стрелки. Убедитесь, что обведенная на кальке линия после поворота совместилась с линией F'.

§ 27. СВОЙСТВА ПОВОРОТА

Следующие свойства поворота родственны известным уже нам свойствам осевой и центральной симметрии (см. § 7 и § 18).

Теорема 1. *Фигура F', получающаяся из фигуры F поворотом на угол α вокруг точки O, равна фигуре F.*

В самом деле, фигура F может быть совмещена с фигурой F', см. §§ 25, 26.

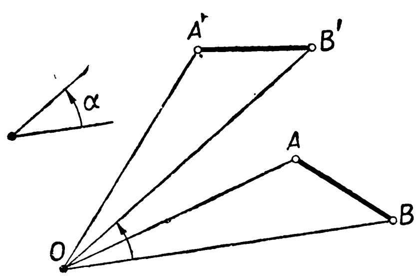


Рис. 154.

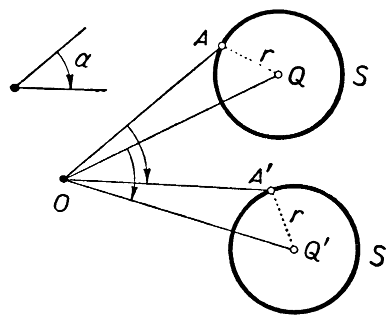


Рис. 155.

Теорема 2. *Фигура, получающаяся из отрезка AB с помощью поворота вокруг точки O на угол α, представляет собой отрезок $A'B'$, равный отрезку AB* (рис. 154). *Концы A' и B' отрезка $A'B'$ получаются из концов A и B отрезка AB с помощью того же поворота.*

Эта теорема сразу следует из теоремы 1.

Теорема 3. *Фигура, получающаяся из данной окружности S с помощью поворота вокруг точки O на угол α, представляет собой окружность S', равную окружности S* (рис. 155). *Центр окружности S' получается из центра первоначальной окружности S с помощью того же поворота.*

Действительно, поворот вокруг точки O переводит точку Q, удаленную от всех точек окружности S на одно и то же расстояние r (т. е. центр окружности S), в точку Q', удаленную на расстояние r от всех точек линии S' (см. теорему 2).

Иногда бывает полезным следующее замечание. Пусть l — произвольная прямая, не проходящая через точку O. Фигура l', получающаяся из l поворотом вокруг точки O на угол α, является прямой (теорема 1) и может быть получена следующим образом. Опустим из точки O перпендикуляр OP на прямую l (рис. 156). Затем находим точку P', в которую переходит точка P при рассматриваемом повороте. Наконец, через точку P' проводим прямую, перпендикулярную OP'; это и есть искомая прямая l'.

В самом деле, прямой угол OPA (рис. 156) переходит при повороте вокруг точки O на угол α в прямой угол $OP'A'$ (см. теорему 1). Отсюда и следует, что прямая PA перейдет в прямую $P'A'$.

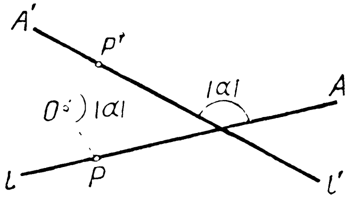


Рис. 156.

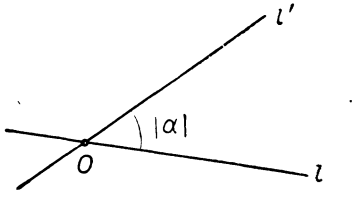


Рис. 157.

Это замечание мы используем при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 4. *Фигура l', в которую переходит прямая l при повороте вокруг некоторой точки O на угол α, также является прямой линией. Если $\alpha \neq 0°$ и $\alpha \neq \pm 180°$, то угол между прямыми l и l' равен $|\alpha|$; в противном же случае прямые l и l' параллельны друг другу или совпадают.*

Если прямая l проходит через точку O (рис. 157), то утверждение теоремы 4 очевидно. Если же прямая l не проходит через точку O, то угол между прямыми l и l' равен углу между перпендикулярами OP и OP', опущенными на эти прямые из точки O (рис. 156); эти углы равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому угол между прямыми l и l' в этом случае также равен $|\alpha|$.

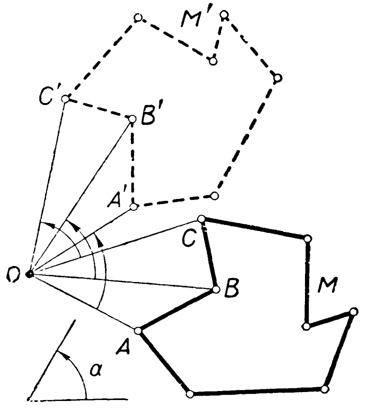


Рис. 158.

Доказанные теоремы позволяют строить фигуры, получающиеся из данных фигур с помощью поворота. Так, для построения многоугольника M', получающегося из данного многоугольника M с помощью поворота, достаточно найти точки, в которые при этом повороте переходят вершины данного многоугольника, а затем последовательно соединить полученные точки (рис. 158). Для построения окружности, получающейся из окружности S радиуса r поворотом вокруг точки O

на угол α, достаточно найти точку Q', в которую переходит при этом повороте центр Q окружности, и затем провести окружность с центром Q' и радиусом r (рис. 155).

§ 28. ЗАДАЧИ

Применение поворота к решению задач мы проиллюстрируем двумя примерами.

Задача 1. *На сторонах AB и AC треугольника ABC построены равносторонние треугольники ABM и ACN, причем треугольник ABM расположен вне треугольника ABC, а треугольник ACN — с той же стороны от прямой AC, что и исходный треугольник ABC* (рис. 159). *Доказать, что расстояние между точками M и N равно стороне BC.*

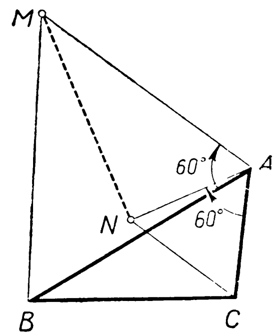


Рис. 159.

Решение. Предположим, что поворот на 60°, переводящий луч AB в луч AM, происходит по часовой стрелке (рис. 159). В таком случае $\angle BAM = -60°$ и $\angle CAN = -60°$; кроме того, $AM = AB$ и $AN = AC$. Но это означает, что точки M и N получаются из точек B и C поворотом вокруг точки A на угол $-60°$. Поэтому отрезок MN получается из отрезка BC поворотом вокруг точки A на угол $-60°$. Но отсюда следует, что эти отрезки равны (см. теорему 2 § 27).

Задача 2. *Даны три параллельные прямые a, b и c. Построить равносторонний треугольник ABC, вершины A, B, C которого лежат на данных прямых.*

Решение.

Анализ. Предположим, что задача решена и ABC — искомый треугольник (рис. 160). Так как $AB = AC$ и $\angle BAC = 60°$, то точка B

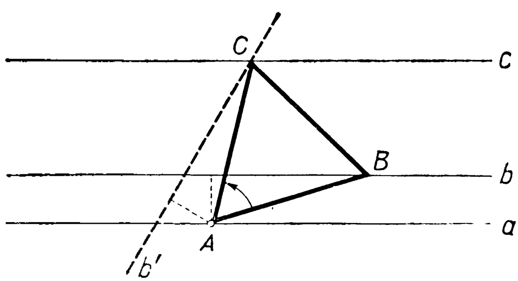


Рис 160.

переходит в точку C при повороте вокруг точки A на угол 60° или на угол $-60°$ (ибо $\angle BAC$ равен $+60°$ или $-60°$). Пусть, например, B переходит в C при повороте вокруг A на угол $+60°$.

Точка B лежит на прямой b. Поэтому точка C, получающаяся из нее поворотом вокруг точки A на угол $+60°$, должна лежать на прямой b', получающейся из прямой b поворотом вокруг A на угол $+60°$. Кроме того, точка C лежит, по условию, на прямой c. Поэтому C есть точка пересечения прямых b' и c.

Аналогично, если точка B переходит в C при повороте вокруг A на угол $-60°$ (рис. 161), то C есть точка пересечения прямой c и прямой b'', получающейся из b поворотом вокруг точки A на угол $-60°$.

Построение. Выберем точку A на прямой a произвольно. Затем построим прямую b', получающуюся из b поворотом вокруг A на угол $+60°$ (рис. 160). В пересечении прямых b' и c

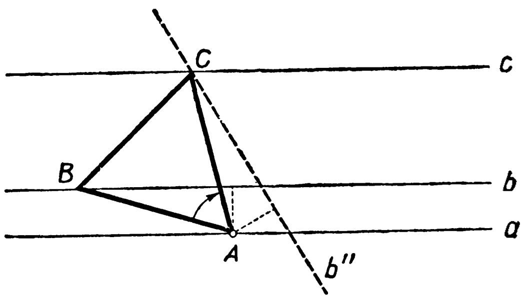


Рис. 161.

получаем точку C. Третья вершина B искомого треугольника ABC получается из точки C поворотом вокруг A на угол $-60°$. Другое построение мы получим, заменяя поворот вокруг точки A на угол $+60°$ поворотом вокруг той же точки на угол $-60°$ (рис. 161).

Доказательство. При повороте вокруг точки A на угол $-60°$ прямая b' переходит в прямую b (рис. 160). Следовательно, точка C прямой b' переходит при этом повороте в точку, лежащую на прямой b. Иначе говоря, точка B лежит на прямой b. Далее, по определению поворота, мы имеем: $\angle BAC = 60°$, $AC = AB$. Поэтому треугольник ABC — равнобедренный с углом $60°$ при вершине; следовательно, он равносторонний. Точно так же доказывается, что равносторонним является и изображенный на рисунке 161 треугольник.

Исследование. Прямая b' (рис. 160) не параллельна прямой b (см. теорему 4 § 27); поэтому она пересечет прямую $c \parallel b$ в некоторой точке C. Следовательно, треугольник ABC всегда существует. Также всегда существует и изображенный на рис. 161 треугольник. Поэтому при выбранной точке A задача всегда имеет два решения. (Точка A может быть выбрана на прямой a произвольно.)

§ 29. СИММЕТРИЯ ПОРЯДКА n

При рассмотрении осевой и центральной симметрии мы особое внимание уделяли «симметричным» фигурам, т. е. фигурам, которые при симметрии переходят сами в себя (см. § 4 и § 15). Рассмотрим теперь фигуры, которые переводятся в себя некоторым поворотом. Примеры таких фигур приведены в § 21.

Определение. *Фигура F называется* ***обладающей симметрией порядка*** *n, если она переходит в себя при повороте вокруг некоторой точки O на угол $\frac{360^\circ}{n}$, где n — некоторое целое положительное число.* Точка O называется **центром симметрии n-го порядка** фигуры F (рис. 162).

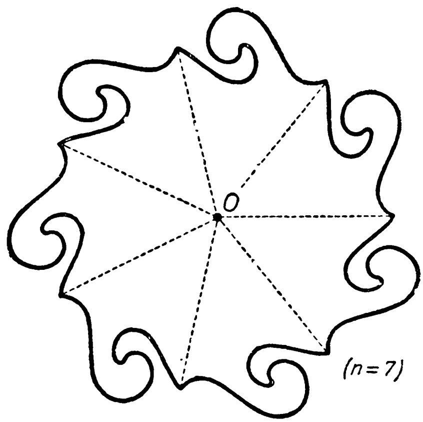


Рис. 162.

Если фигура F обладает симметрией второго порядка, то она переходит в себя при повороте вокруг центра симметрии O на угол $\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$. Согласно сказанному в § 15 (стр. 54), это означает, что фигура F **центрально-симметрична** и точка O является ее центром симметрии. Таким образом, *понятие симметрии порядка n является обобщением понятия центральной симметрии.* Заметим еще, что *если фигура F обладает симметрией порядка n* (т. е. переходит в себя при повороте на угол $\frac{360^\circ}{n}$ вокруг некоторой точки O) *и если число m является делителем числа n* (т. е. $n=mk$, где m и k — целые числа, бо́льшие единицы), *то фигура F обладает также симметрией порядка m.* Действительно, $\frac{360^\circ}{m}=k\frac{360^\circ}{n}$ и потому поворот вокруг точки O на угол $\frac{360^\circ}{m}$ получается, если k раз произвести поворот на угол $\frac{360^\circ}{n}$. А так как при каждом повороте на угол $\frac{360^\circ}{n}$ фигура F переходит в себя, то и при повороте на угол $\frac{360^\circ}{m}$ вокруг точки O она переходит сама в себя.

Из доказанного следует, в частности, что *если фигура F имеет центр симметрии четного порядка, то она является центрально-симметричной* (ср. рис. 119, 120, 123—125, 127).

§ 30. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Предположим, что некоторая окружность разделена точками A_1, A_2, A_3, ..., A_n на n равных частей (рис. 163). Каждая дуга, например $\smile A_1A_2$, стягивает центральный угол, равный $\frac{360°}{n}$.

Соединим теперь последовательно точки A_1, A_2, ..., A_n. При этом мы получим многоугольник $A_1A_2...A_n$, который называется ***правильным n-угольником*** (рис. 164). Исходная окружность (проходящая через все вершины правильного n-угольника) называется описанной окружностью этого n-угольника, а центр этой окружности — центром n-угольника.

Докажем некоторые свойства правильных многоугольников.

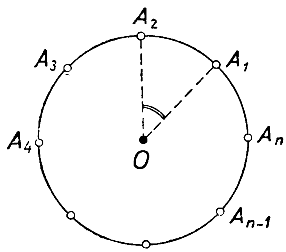


Рис. 163.

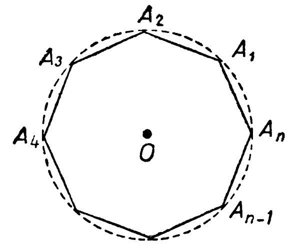


Рис. 164.

Теорема 1. *Правильный n-угольник обладает симметрией порядка n; центром симметрии порядка n является центр описанной окружности n-угольника.*

Действительно, при повороте вокруг центра описанной окружности на угол $\frac{360°}{n}$ точка A_1 переходит в A_2, точка A_2 — в A_3 и т. д., так что в результате правильный многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ переходит в себя. (При повороте на угол, меньший $\frac{360°}{n}$, точка A_1 переходит в некоторую точку дуги A_1A_2, не принадлежащую многоугольнику, так что при таком повороте многоугольник не может перейти в себя.)

Теорема 2 (обратная теореме 1). *Если выпуклый n-угольник имеет центр симметрии n-го порядка O, то он является правильным n-угольником и точка O служит центром описанной окружности этого n-угольника.*

Для доказательства выберем какую-либо вершину A_1 рассматриваемого многоугольника и проведем через нее окружность с центром O (рис. 164). Так как точка O, по условию, является центром симметрии n-го порядка n-угольника, то при повороте вокруг O на угол $\frac{360°}{n}$ n-угольник переходит сам в себя. Поэтому вершина A_1 переходит в некоторую другую вершину A_2, вершина A_2 — в новую вершину A_3 и т. д. Ясно, что все точки A_1, A_2, A_3, ... лежат на проведенной окружности. Так как поворот вокруг точки O совершается на угол $\frac{360°}{n}$, то дуга $\smile A_1A_2$ стягивает центральный угол $\frac{360°}{n}$, т. е. эта дуга равна $\frac{1}{n}$-й части всей окружности. То же справедливо для дуг $\smile A_2A_3$, $\smile A_3A_4$ и т. д. Следовательно, вершины A_1, A_2, ..., A_n рассматриваемого n-угольника делят окружность на n равных дуг, и, значит, многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ — правильный.

Теорема 3. *В правильном многоугольнике все стороны равны и все внутренние углы также равны между собой.*

В самом деле, при повороте на угол $\frac{360°}{n}$ вокруг центра описанной окружности сторона A_1A_2 совмещается с A_2A_3, сторона A_2A_3 — с A_3A_4 и т. д. (рис. 164). Точно так же, угол A_1 многоугольника совмещается при этом повороте с углом A_2, угол A_2 — с углом A_3 и т. д.

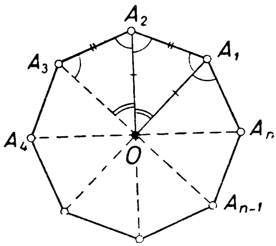


Рис. 165.

Теорема 4 (обратная теореме 3). *Если в выпуклом многоугольнике $A_1A_2 \ldots A_n$ все стороны равны и все внутренние углы также равны между собой, то этот многоугольник — правильный.*

Для доказательства проведем биссектрисы углов A_1 и A_2 и обозначим через O точку их пересечения (рис. 165). Так как $\angle A_1 = \angle A_2$, то половины этих углов также равны, т. е. $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1$. Следовательно, треугольник OA_1A_2 — равнобедренный; $OA_1 = OA_2$. Проведем теперь отрезок OA_3. В треугольниках OA_1A_2 и OA_2A_3 мы имеем:

$$OA_1 = OA_2, \quad A_1A_2 = A_2A_3 \text{ и } \angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_3$$

($\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \angle OA_2A_3$, так как OA_2 — биссектриса угла A_2). Следовательно, $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3$ и потому $OA_2 = OA_3$ и

$$\angle OA_3A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{1}{2} \angle A_2 = \frac{1}{2} \angle A_3.$$

Это значит, что прямая OA_3 является биссектрисой угла A_3.

Соединив теперь точку O с A_4, мы получим еще один треугольник OA_3A_4, также равный треугольникам OA_1A_2 и OA_2A_3. Продолжая таким образом, мы найдем, что все треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 равны между собой (рис. 165). Отсюда следует, что

$$OA_1 = OA_2 = \cdots = OA_n$$

и

$$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \ldots \angle A_{n-1}OA_n = \angle A_nOA_1.$$

Так как в сумме эти углы составляют 360°, то каждый из них равен $\frac{360°}{n}$. Теперь ясно, что точки A_1, A_2, ..., A_n лежат на одной окружности с центром в точке O и делят эту окружность на n равных дуг. Следовательно, многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ — правильный.

§ 31. ЗАДАЧА

Симметрия n-го порядка также находит применения при решении задач и доказательстве теорем. Приведем один пример.

Задача. *Середины K, L, M, N сторон квадрата $ABCD$ соединены с его вершинами, как показано на рисунке* 166. *Доказать, что четырехугольник, образованный прямыми AK, BL, CM, DN, также является квадратом.*

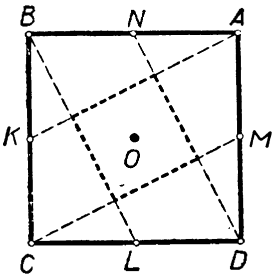


Рис. 166.

Доказательство. Квадрат является правильным четырехугольником, так как все его углы — прямые и все стороны равны между собой (теорема 4 § 30). Обозначим через O центр симметрии 4-го порядка этого квадрата. При повороте вокруг точки O на угол $\frac{360°}{4} = 90°$ квадрат $ABCD$ переходит в себя: вершина A переходит в вершину B, вершина B переходит в C, вершина C — в D и D переходит в A. Следовательно, середина N стороны AB перейдет в середину K стороны BC, точка K перейдет в точку L, точка L — в точку M и точка M — в N. Поэтому прямая AK перейдет в прямую BL, прямая BL — в CM, прямая CM — в DN и прямая DN — в AK. Это означает, что четырехугольник, образованный прямыми AK, BL, CM и DN, также перейдет в себя при повороте вокруг O на 90°. Следовательно, этот четырехугольник имеет центр симметрии четвертого порядка и потому является правильным четырехугольником (теорема 2 § 30), т. е. квадратом (см. теорему 3 § 30).

Задачи и упражнения к главе III

Обобщение понятия об угле

168. На плоскости дан луч OA с началом O. Постройте такие лучи OB_1, OB_2, OB_3, OB_1, OB_5, OB_6 и OB_7, что $\measuredangle AOB_1 = 45°$, $\measuredangle AOB_2 = -45°$, $\measuredangle AOB_3 = -60°$; $\measuredangle AOB_1 = 90°$; $\measuredangle AOB_5 = -120°$; $\measuredangle AOB_6 = 150°$ и $\measuredangle AOB_7 = \pm 180°$.

169. С помощью транспортира определите величину углов: $\measuredangle ABC$, $\measuredangle DEF$, $\measuredangle KLM$, $\measuredangle PQR$ и $\measuredangle XYZ$ (рис. 167).

170. Пусть OA, OB, OC и OD — четыре луча с общим началом O. Докажите, что если $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$, то и $\measuredangle AOC = \measuredangle BOD$. Остается ли справедливым это утверждение, если заменить в нем направленные углы обыкновенными (т. е. следует ли из равенства $\angle AOB=\angle COD$ соотношение $\angle AOC=\angle BOD$)?

171. Пусть AOC — произвольный угол, меньший $180°$, OB — луч, проходящий внутри этого угла. Докажите, что во всех случаях

$$\measuredangle AOB+\measuredangle BOC+\measuredangle COA=0.$$

172*. Пусть OA, OB и OC — произвольные три луча, выходящие из одной точки O. Чему может равняться сумма $\measuredangle AOB+\measuredangle BOC+\measuredangle COA$?

173. Пусть A, B, M и N — четыре произвольные точки окружности. Как связаны между собой углы $\measuredangle AMB$ и $\measuredangle ANB$? Рассмотрите два случая.

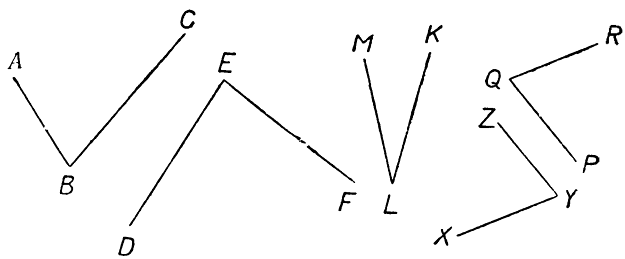


Рис. 167.

174. Треугольники ABC и ABC_1 симметричны относительно их общей стороны AB. Докажите, что $\measuredangle ABC=-\measuredangle ABC_1$, $\measuredangle BAC=-\measuredangle BAC_1$, $\measuredangle ACB=-\measuredangle AC_1B$.

175. Треугольники ABC и BAC_1 симметричны относительно середины D их общей стороны AB. Докажите, что

$$\measuredangle ABC=\measuredangle BAC_1,\quad \measuredangle BAC=\measuredangle ABC_1,\quad \measuredangle ACB=\measuredangle BC_1A.$$

176. Через концы A и B отрезка AB проведены две прямые AM и BN так, что

а) $\measuredangle BAM=\measuredangle ABN$;

б) $\measuredangle BAM=-\measuredangle ABN$.

Что можно сказать об этих прямых?

177. Докажите, что

а) если $\measuredangle MNP=-\measuredangle M_1N_1P_1$, $\measuredangle MNN_1=-\measuredangle M_1N_1N$, то углы MNP и $M_1N_1P_1$ симметричны относительно некоторой прямой l;

б) если $\measuredangle MNP=\measuredangle M_1N_1P_1$, $NM \parallel N_1M_1$ и лучи NM и N_1M_1 направлены в противоположные стороны, то углы MNP и $M_1N_1P_1$ симметричны относительно некоторой точки O.

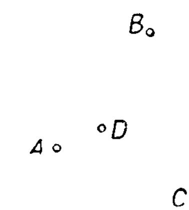


Рис. 168.

Обобщение понятия об отрезке. Вектор

178. Изобразите на чертеже несколько разных векторов, имеющих одинаковую длину.

179. Перерисуйте в тетрадь точки A, B, C, D (рис. 168); с помощью линейки с делениями измерьте длину векторов

$$\overline{AB},\ \overline{BA},\ \overline{AC},\ \overline{AD},\ \overline{BC},\ \overline{BD},\ \overline{CB},\ \overline{DC}.$$

180. Докажите, что всегда $|\overline{AB}|=|\overline{BA}|$.

181. На плоскости дан вектор $\overline{AB}$, отрезок a и угол α. Докажите, что условия $\measuredangle ABC=\alpha$ и $|\overline{BC}|=a$ однозначно определяют вектор $\overline{BC}$. Сколько существует таких векторов $\overline{BD}$, что $\angle ABD=\alpha$ и $|\overline{BD}|=a$?

Сегмент, вмещающий данный угол

182. На плоскости дан отрезок AB; постройте множество точек, из которых этот отрезок виден под углом 45°; 60°; 90°; 120°; 150°.

183. На плоскости дан вектор $\overline{AB}$; постройте множество точек, из которых этот вектор виден под углом 30°; —45°; —90°; 135°; —150°.

184. Дан треугольник ABC. Найдите точку M, из которой стороны треугольника видны под равными углами. При каких условиях существует такая точка M?

185. На прямой даны три точки A, B, C.

а) Постройте точку M, из которой отрезок AB виден под углом α, а отрезок BC — под углом β. В каких случаях задача имеет решение?

б) Постройте точку M, из которой вектор $\overline{AB}$ виден под углом α, а вектор $\overline{BC}$ — под углом β. В каких случаях задача имеет решение?

186. Задание вектора $\overline{AB}$ и (положительного или отрицательного) угла α однозначно определяет сегмент, вмещающий угол α; этот сегмент ограничен отрезком AB и некоторой дугой окружности. Зафиксируем вектор $\overline{AB}$, а значение угла α будем менять. Докажите, что если углы α_1 и α_2 имеют одинаковые знаки и $|\alpha_1| > |\alpha_2|$, то сегмент, вмещающий угол α_2, заключает внутри себя сегмент, вмещающий угол α_1.

187. Множество точек, из которых данный отрезок AB виден под известным углом α (где $0<\alpha<180°$), ограничивает некоторую плоскую фигуру («линзу»; при $\alpha=90°$ эта «линза» представляет собой круг, а при $\alpha<90°$ образована двумя дугами, бо́льшими полуокружности). Зафиксируем отрезок AB, а значение угла α будем менять. Докажите, что при $\alpha_2>\alpha_1$ «линза», отвечающая углу α_1, заключает внутри себя «линзу», отвечающую углу α_2.

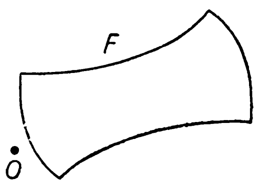


Рис. 169.

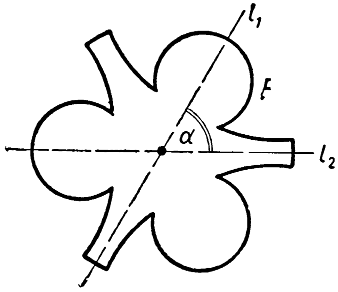


Рис. 170.

188. а) Что представляет собой множество точек, из которых данный отрезок AB виден под углом 180°?

б) Что представляет собой множество точек, из которых данный отрезок AB виден под углом 0°?

189. а) Обладает ли множество точек, из которых данный отрезок AB виден под фиксированным углом α, осями симметрии? Обладает ли это множество центром симметрии?

б) Обладает ли множество точек, из которых данный вектор $\overline{AB}$ виден под фиксированным углом α, осями симметрии? Обладает ли это множество центром симметрии?

Определение поворота

190. Перерисуйте в тетрадь изображенную на рисунке 169 фигуру F; изобразите на том же чертеже фигуру F', полученную из F поворотом вокруг точки O на угол 90°; заштрихуйте общую часть фигур F и F'.

191. Фигура F_1 получается из фигуры F поворотом вокруг точки O на угол $+90°$, а фигура F_2 получается из F поворотом вокруг той же точки O

на угол $-90°$. Докажите, что F_2 получается из F_1 симметрией относительно точки O.

192. Фигура F' получается из фигуры F поворотом вокруг точки O на угол α. Докажите, что фигура F также может быть получена из фигуры F' некоторым поворотом.

193*. Докажите, что если фигура F имеет две оси симметрии l_1 и l_2, образующие между собой угол α (см. рис. 170, где $\alpha=60°$), то F переходит в себя при повороте вокруг точки пересечения осей l_1 и l_2 на угол 2α.

194. Даны две точки A и B и (положительный или отрицательный) угол α. Докажите, что существует единственный поворот на угол α, переводящий точку A в точку B. Как найти точку O, вокруг которой происходит этот поворот?

Свойства поворота

195. Какие точки переходят сами в себя при повороте вокруг точки O на угол α? Какие прямые переходят сами в себя при повороте вокруг точки O на угол α? Какие окружности переходят сами в себя при повороте вокруг точки O на угол α?

196. Каков должен быть угол α для того, чтобы прямая l', получаемая из прямой l поворотом вокруг некоторой точки O на угол α, была параллельна l?

197. Угол $A'B'C'$ получен из угла ABC поворотом на угол $45°$ вокруг точки M, принадлежащей биссектрисе BM угла ABC. Докажите, что прямая $B'M$ является биссектрисой угла $A'B'C'$.

198. Треугольник $A'B'C'$ получен из треугольника ABC поворотом на угол $90°$ вокруг некоторой точки O. Докажите, что медиана $A'M'$ треугольника $A'B'C'$ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC.

199. Даны два равные непараллельные (и не принадлежащие одной прямой) отрезка AB и CD.

а) Докажите, что существует единственный поворот, переводящий отрезок AB в отрезок CD, причем так, что точка A переходит в точку C, а точка B — в точку D.

б) Как связаны между собой углы поворотов, переводящих отрезок AB в отрезок CD и в отрезок DC (см. задачу а)?

200*. Пусть AB и CD — два равных непараллельных (и не принадлежащих одной прямой) отрезка, M — точка пересечения прямых AB и CD, R и S — окружности, описанные вокруг треугольников ACM и BDM, N — отличная от M точка пересечения этих окружностей. Докажите, что отрезок AB можно перевести в отрезок CD поворотом вокруг точки N. Разберите отдельно случай, когда окружности R и S касаются друг друга в точке M.

201. Пусть AB и CD — два равных и параллельных отрезка. Всегда ли можно перевести отрезок AB в отрезок CD поворотом так, чтобы точка A перешла в точку C, а точка B — в точку D?

202. а) Даны две равные окружности R и S. Докажите, что окружность R можно бесконечным числом способов перевести поворотом в окружность S.

б) Равные окружности R и S пересекаются в точках A и B. Докажите, что окружность R можно перевести в окружность S поворотом с центром A. При этом каждая точка M окружности R переходит в такую точку N окружности S, что прямая MN проходит через B.

203*. Даны два равных треугольника ABC и DEF. В каком случае эти треугольники можно перевести один в другой поворотом?

204. Воспользовавшись транспортиром, изобразите равнобедренный треугольник ABC, где $AB=AC$ и $\angle A=40°$. Начертите треугольники, получаемые из треугольника ABC поворотом вокруг точки A на углы $40°$; $80°$; $120°$; $160°$; $-40°$; $-80°$; $-120°$; $-160°$. Какую фигуру представит собой совокупность всех начерченных треугольников?

205. Начертите правильный треугольник ABC, а также треугольник $A_1B_1C_1$, получаемый из треугольника ABC поворотом вокруг его центра на угол $60°$.

Обладает ли фигура, образованная треугольниками ABC и $A_1B_1C_1$, центром симметрии? А осями симметрии?

206. Дан прямоугольник $ABCD$. Постройте прямоугольник, получаемый из прямоугольника $ABCD$ поворотом на угол $+90°$ вокруг середины M стороны AB, а также прямоугольник, получаемый из прямоугольника $ABCD$ поворотом вокруг той же точки M на угол $-90°$.

207. Изобразите прямоугольник $ABCD$ и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$, получаемый из прямоугольника $ABCD$ поворотом вокруг его центра O

а) на угол $90°$;

б) на $\measuredangle AOB$.

208. Начертите круг K, а также круг K', получаемый из K поворотом вокруг точки A, принадлежащей ограничивающей K окружности, на угол $90°$. Заштрихуйте фигуру, образованную в пересечении кругов K и K'.

Обладает ли полученная фигура центром симметрии? А осями симметрии?

Разные задачи

209. Даны три концентрические окружности. Постройте равносторонний треугольник, вершины которого принадлежат этим окружностям.

210. а) Дан угол и внутри него точка A. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, вершина прямого угла которого совпадает с точкой A, а две другие вершины принадлежат сторонам угла.

б) Даны две окружности R и S и точка M. Постройте равносторонний треугольник MNP, вершины N и P которого принадлежат окружностям R и S.

211. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты $ABMN$ и $BCPQ$, причем квадрат $ABMN$ и треугольник ABC расположены по разные стороны от прямой AB, а квадрат $BCPQ$ и треугольник ABC — по одну сторону от прямой BC. Докажите, что отрезок MQ равен стороне AC треугольника и перпендикулярен этой стороне.

212. Пусть AB и CD — две такие хорды концентрических окружностей F и G с центром O, что $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$. Докажите, что $AC = BD$.

213. На равных хордах AB и CD окружности S с центром O построены равные между собой треугольники ABM и CDN, причем $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$ и $\measuredangle BAM = \measuredangle DCN$, $\measuredangle ABM = \measuredangle CDN$. Докажите, что точки M и N равноудалены от точки O и что $\measuredangle MON = \measuredangle AOC$.

Останется ли верным утверждение задачи, если заменить в ее условии направленные углы ненаправленными?

214. Даны две прямые l_1 и l_2, точка A и угол α. Проведите такую окружность с центром A, чтобы одна из дуг этой окружности, концы которой принадлежат прямым l_1 и l_2, по угловой мере была равна α.

215. На последовательных отрезках AB и BC прямой AC по одну сторону от нее построены равносторонние треугольники ABE и BCF. Пусть M — середина отрезка AF, N — середина отрезка CE. Докажите, что треугольник BMN — равносторонний.

216*. Дана окружность S с центром O, две точки A и B и угол $\measuredangle PQR = \alpha$. Найдите на окружности такие две точки C и D, что $\measuredangle COD = \alpha$ и $AC \parallel BD$.

217*. Две равные окружности R и S пересекаются в точках M и N. Через точку M проведены три прямые, пересекающие первую окружность в точках A, B и C, а вторую — в точках D, E и F. Докажите, что треугольник DEF может быть получен из треугольника ABC поворотом вокруг точки N.

218*. На сторонах AB и AC треугольника ABC, вне его, построены квадраты $ABMN$ и $ACPQ$. Докажите, что медиана AE треугольника ABC перпендикулярна стороне NQ треугольника ANQ и равна ее половине; точно так же, медиана AF треугольника ANQ перпендикулярна стороне BC треугольника ABC и равна ее половине.

219*. На сторонах произвольного треугольника ABC, вне его, построены квадраты $ABKL$, $BCMN$ и $CAPQ$; пусть U, V и W — центры этих квадратов. Докажите, что

а) если D, E, F — середины сторон AB, BC и CA, то $VD = WD$ и $VD \perp WD$; $UE = WE$ и $UE \perp WE$; $UF = VF$ и $UF \perp VF$.

б) $AV=UW$ и $AV \perp UW$; $BW=UV$ и $BW \perp UV$; $CU=VW$ и $CU \perp VW$.

220*. Постройте треугольник ABC, зная три точки U, V и W, являющиеся центрами квадратов, построенных на сторонах треугольника вне его.

221*. Дан равносторонний треугольник ABC и произвольная точка M. Докажите, что больший из трех отрезков MA, MB и MC не больше суммы двух других отрезков. [По-другому это утверждение можно сформулировать так: из трех отрезков MA, MB и MC можно построить треугольник.] В каком случае больший из отрезков MA, MB и MC будет р а в е н сумме двух других?

222*. На сторонах произвольного треугольника ABC, вне его, построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Докажите, что

а) отрезки AA_1, BB_1, CC_1 равны между собой;

б) отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке M и образуют между собой равные углы;

в) $MA_1=MB+MC$; $MB_1=MA+MC$; $MC_1=MA+MB$.

В каком случае точка M лежит внутри и в каком случае — вне треугольника ABC?

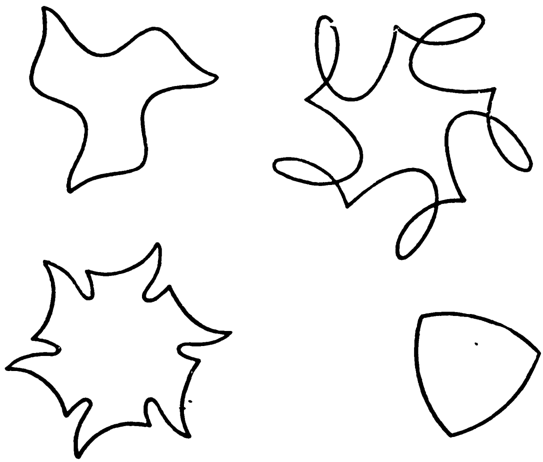


Рис. 171.

223*. Укажите внутри треугольника ABC такую точку M, чтобы сумма расстояний от нее до вершин треугольника была наименьшей.

Симметрия порядка n

224. Симметрией какого порядка обладают фигуры, изображенные на рисунке 171?

225. Перерисуйте в тетрадь изображенные на рисунке 172 части фигур, для которых точка O является центром симметрии 3-го порядка (рис. 172, *а*), 4-го порядка (рис. 172, *б*) и 5-го порядка (рис. 172, *в*), и дополните эти рисунки.

226. а) Докажите, что фигура, образованная тремя равными кругами, каждый из которых касается двух других, обладает центром симметрии 3-го порядка. Начертите эту фигуру.

б) Дан круг K и внутри него точка Q. Обозначим через K_1, K_2, K_3 и K_4 круги, получаемые из круга K поворотом вокруг точки Q на углы 72°; 144°; —72° и —144°. Обладает ли фигура, образованная пересечением кругов K, K_1, K_2, K_3 и K_4, центром симметрии? Какого порядка? Начертите эту фигуру.

227. а) Начертите правильный треугольник и изобразите три круга, центры которых совпадают с вершинами треугольника, а радиусы равны его стороне. Заштрихуйте общую часть этих трех кругов. Обладает ли она центром симметрии? Какого порядка?

б) Даны две перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке A. Изобразите два равных круга, касающихся в точке A прямой a, и два равных им круга, касающихся в той же точке прямой b. Заштрихуйте фигуру F, образованную всеми этими кругами. На отдельном чертеже заштрихуйте фигуру G, образованную всеми попарными пересечениями рассматриваемых кругов. Имеют ли фигуры F и G центры симметрии? Какого порядка?

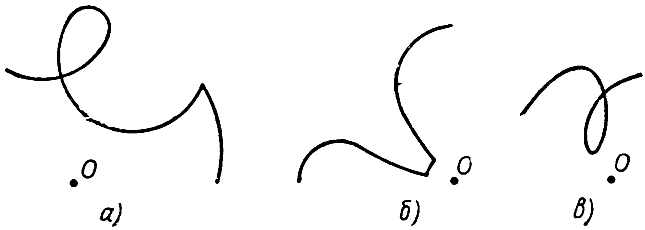


Рис. 172.

228*. Докажите, что если ограниченная фигура F имеет n (и только n) осей симметрии, то она обладает симметрией порядка n.

229*. Докажите, что если существует наименьший угол α, такой, что поворот на угол α вокруг некоторой точки O переводит фигуру F в себя, то $\alpha=\frac{360^\circ}{n}$, где n — число целое, и фигура F обладает симметрией порядка n.

Правильные многоугольники

230. Середины K, L, M, N сторон квадрата $ABCD$ соединены с противоположными вершинами, как показано на рисунке 173. Докажите, что точка пересечения диагоналей изображенного на рисунке 173 четырехугольника $PQRS$ совпадает с точкой пересечения диагоналей квадрата $ABCD$.

231. На продолжении сторон AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ соответственно за точки B, C, D и A отложены отрезки, равные стороне квадрата. Докажите, что концы этих отрезков сами образуют квадрат.

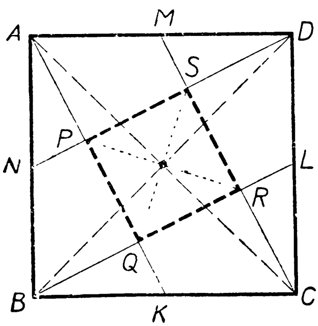


Рис. 173.

232. Стороны AB, BC и CA правильного треугольника ABC разделены точками K, L и M в отношении $AK:KB=BL:LC=CM:MA=2:1$. Докажите, что

а) треугольник KLM — правильный;

б) треугольник DEF, сторонами которого являются прямые AL, BM и CK, — правильный;

в) центры треугольников KLM и DEF совпадают с центром треугольника ABC.

233. а) На сторонах правильного треугольника, вне его, построены квадраты. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

б) На сторонах квадрата, вне его, построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют квадрат.

234. На сторонах правильного пятиугольника $ABCDE$, вне его, построены равные треугольники ABP, BCQ, CDR, DES, EAT, где $AP=BQ=CR=DS=ET$; $BP=CQ=DR=ES=AT$. Докажите, что пятиугольник $PQRST$ — правильный.

235*. На сторонах параллелограмма, вне его, построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

236. Три равных окружности попарно касаются друг друга. Докажите, что три точки касания являются вершинами правильного треугольника.

237. Окружность S радиуса r разделена точками A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 на шесть равных частей; затем построены дуги радиуса r с центрами в точках A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, заключенные внутри S. Эти шесть дуг образуют «шестилепестковую» фигуру F, заштрихованную на рисунке 174. Докажите, что каждый из «лепестков» этой фигуры обладает центром симметрии и что все шесть центров симметрии являются вершинами правильного шестиугольника.

238. а) Дана окружность S. Докажите, что при любом целом $n \geqslant 3$ можно построить n равных непересекающихся окружностей, каждая из которых касается двух других из этих окружностей и окружности S. Центры этих n окружностей образуют правильный n-угольник; другой правильный n-угольник образуют точки касания построенных окружностей с данной окружностью S.

б) При каком n построенные окружности будут равны данной?

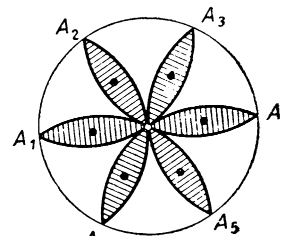


Рис. 174.

239. Докажите, что середины диагоналей правильного шестиугольника совпадают с вершинами некоторого меньшего правильного шестиугольника и с его центром.

240. На сторонах A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 правильного n-угольника $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ отложены равные отрезки $A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots = A_{n-1}B_{n-1} = A_nB_n$. Докажите, что многоугольник $B_1B_2 \ldots B_n$ — правильный.

241. Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — правильный n-угольник с центром O; $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}, Q_n$ — центры окружностей, описанных вокруг треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1. Докажите, что n-угольник $Q_1Q_2 \ldots Q_n$ — правильный. Сделайте чертеж, отвечающий случаю $n=6$.

242. а) Через центр правильного треугольника ABC проведены две прямые MN и PQ, образующие между собой угол 60°; пусть M, N и P, Q — точки пересечения этих прямых со сторонами треугольника. Докажите, что $MN=PQ$.

б) Через центр правильного шестиугольника проведены две прямые, образующие между собой угол 60°; пусть MN и PQ — отрезки, высекаемые сторонами шестиугольника на этих прямых. Докажите, что $MN=PQ$.

243. На сторонах AB и AC правильного треугольника ABC с центром O отложены отрезки AD и AE так, что $AD+AE=AB$. Докажите, что $OD=OE$ и что $\angle DOE = 120°$.

244. Прямая l пересекает стороны AB и CD квадрата (или их продолжения) в точках M и N; перпендикулярная к ней прямая l_1 пересекает стороны AD и BC (или их продолжения) в точках P и Q. Докажите, что $MN=PQ$.

245*. Даны четыре точки A, B, C и D. Постройте квадрат, стороны которого проходили бы через эти четыре точки.

246*. Треугольники ABC и $A'B'C'$ симметричны относительно двух различных прямых l и m. Докажите, что эти треугольники — правильные. Сделайте чертеж.

Дополнения и методические указания к главе III

1. **Направленные углы и отрезки.** [К § 22—24.] Определению поворота (§ 25) в книге предшествуют три параграфа (§ 22—24), имеющие вспомогательный характер. В § 22 вводится понятие ***направленного угла***. Для определения поворота направленные углы совершенно необходимы. При этом можно пойти двумя путями: либо сразу ввести наиболее общее понятие угла, используемое в тригонометрии и допускающее положительные и отрицательные углы

любой величины, либо ограничиться первоначально лишь «главным значением» направленного угла, заключенным в пределах от -180° до $+180^\circ$. Каждый из этих путей имеет свои достоинства и недостатки. Мы выбрали здесь второй путь (главное значение направленного угла). Достоинством его является то, что угол здесь выступает как **геометрическая фигура** (а не как **процесс** поворота луча). Таким образом, введенное в § 22 понятие направленного угла является более простым, чем применяемое в тригонометрии; в то же время такого понимания угла вполне достаточно для определения поворота. То обстоятельство, что направленный угол AOB (понимаемый в рассматриваемом в § 22 смысле) представляет собой геометрическую фигуру, определяемую лучами OA и OB, позволяет обозначить его символом $\measuredangle AOB$ (этот символ не является общеупотребительным). Углы, рассматриваемые в тригонометрии, **не определяются** своими сторонами; поэтому для них нельзя предложить простого обозначения.

Достоинством принятого в книге определения является также близость введенного здесь понятия направленного угла к понятию ***вектора***, играющему большую роль в этой книге. В самом деле, направленный угол понимается здесь как угол, одна сторона которого считается «начальной», а другая — «конечной»; точно так же вектор — это «направленный отрезок», т. е. отрезок, один конец которого считается «начальной точкой», а другой — «конечной». Именно поэтому определение вектора (§ 23) изложено в книге непосредственно за определение направленного угла (§ 22).

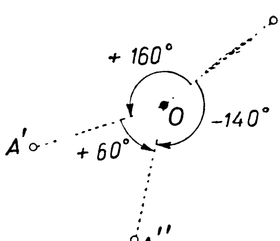


Рис. 175.

Недостатком принятого определения направленного угла является то, что сумма (или разность) величин двух направленных углов может не заключаться в пределах от -180° до $+180^\circ$. Это влечет за собой известные затруднения при рассмотрении «геометрической суммы» углов и **суммы поворотов**. Так, если мы произведем один за другим два поворота вокруг одной и той же точки O, скажем, на углы $+160^\circ$ и $+60^\circ$, то результирующий поворот («сумма» поворотов, ср. § 48) будет являться не поворотом на угол $+220^\circ$ (ведь такого угла мы не рассматриваем!), а поворотом на угол -140° (рис. 175). Если бы мы рассматривали полное обобщение понятия угла, принятое в тригонометрии, то могли бы утверждать, что *сумма поворотов вокруг одной точки O на углы α и β представляет собой поворот вокруг той же точки на угол $\alpha+\beta$*. Впрочем переход от понятия направленного угла, изложенного в § 22, к общему понятию направленного угла, принятому в тригонометрии, несложен: достаточно только условиться приписывать каждому углу наряду с его главным значением (заключенным между -180° и $+180^\circ$) также и все значения, отличающиеся от главного значения на целочисленное кратное полного угла, т. е. на величину $n\cdot 360^\circ$, где n — целое (см. ниже § 69).

В тексте пособия для учащихся содержание § 22 опущено: предполагается, что с направленными углами учащиеся **знакомы** из курса тригонометрии. Однако перед определением поворота учителю рекомендуется напомнить учащимся это понятие.

Понятие вектора в главе III практически не работает. Поэтому введение этого понятия можно отложить до главы IV (как это и сделано в пособии для учащихся).

§ 24, напечатанный в книге мелким шрифтом, включен в пособие в первую очередь потому, что соответствующий материал, не вошедший в программу восьмилетней школы, тесно связан с школьным курсом геометрии и очень полезен для решения задач. Этот материал хорошо иллюстрирует также различие между направленными и ненаправленными углами, направленными и ненаправленными отрезками. При всем том связь § 24 с остальным содержанием главы III не является органической; по-видимому, эту тему более целесообразно включить в программу восьмилетней школы (разумеется, без использования направленных углов и векторов). Материал § 24 существенно используется в задачах из § 50 приложения к I части книги.

2. Понятие поворота. [К §§ 25—26 и теореме 1 § 27.] Так же как осевая и центральная симметрия, *поворот является т о ч е ч н ы м п р е о б р а з о в а н и е м.* Обозначая поворот вокруг точки O на угол α одной буквой ρ, мы замечаем, что каждая точка A переходит при повороте ρ в некоторую точку $A'=\rho(A)$, нахождение которой показано на рисунке 176. Учитель должен подчеркнуть сходство поворота с изученными ранее преобразованиями (не упоминая само слово «преобразование»): и осевая симметрия, и центральная симметрия, и поворот переводят каждую точку A в некоторую точку A'. Однако правило, позволяющее по точке A найти точку A', в каждом случае формулируется по-своему (см. §§ 2, 13 и 25). По-прежнему сохраняется взгляд на фигуру как на точечное множество, что подчеркивается определением, приведенным в конце § 25, и самостоятельной работой § 26.

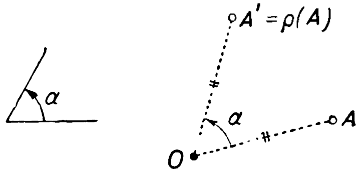


Рис. 176.

Единственной н е п о д в и ж н о й т о ч к о й поворота вокруг точки O на угол α является сама точка O. Н е п о д в и ж н ы х п р я м ы х поворот на угол $\alpha \neq \pm 180°$ (т. е. поворот, не являющийся центральной симметрией) не имеет вовсе.

Следует отметить одно важное различие между симметриями (осевой и центральной) и поворотом. Осевая симметрия σ и центральная симметрия ω являются, как говорят математики, и н в о л ю т и в н ы м и преобразованиями; это означает, что если точка A переходит в точку A', то точка A' переходит в A (в самом деле, если $\sigma(A)=A'$, то $\sigma(A')=A$, ср. стр. 37; если $\omega(A)=A'$, то $\omega(A')=A$, стр. 65). Именно поэтому мы не только можем сказать «точка A' симметрична точке A», но также и «точки A и A' симметричны д р у г д р у г у»

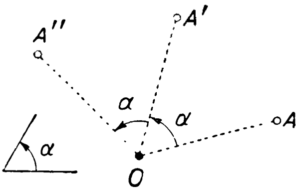


Рис. 177.

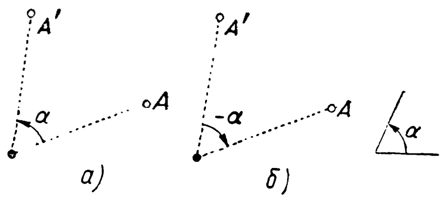


Рис. 178.

(ср. рис. 16 и 88 на стр. 12 и 52). В противоположность этому поворот ρ вокруг точки O на угол $\alpha \neq \pm 180°$ н е я в л я е т с я инволютивным преобразованием. Иначе говоря, если точка A (отличная от O) переводится поворотом ρ в точку A', то точка A' переводится тем же поворотом ρ не в точку A, а в д р у г у ю точку A'' (рис. 177). (Исключением является случай, когда $\alpha = \pm 180°$, т. е. случай, когда поворот является центральной симметрией.) Поэтому следует говорить «точка A' получается из точки A поворотом ρ» или «точка A переходит при повороте ρ в точку A'», но нельзя сказать «точки A и A' получаются друг из друга поворотом ρ». В самом деле, если точка A переходит в точку A' при повороте вокруг точки O на угол α (рис. 178, *а*), то точка A' переходит в A при повороте вокруг O на угол $-\alpha$ (рис. 178, *б*), т. е. при д р у г о м повороте.

По поводу теоремы 1 § 27 можно повторить почти все, сказанное в п. **6** на стр. 39—40 (ср. также стр. 66).

3. Свойства поворота. [К §§ 27, 28.] Формулировка теоремы 4 § 27 предполагает, что две пересекающиеся прямые l и l' образуют д в а (положительных) угла β и $180°-\beta$; если $\alpha \neq 0°, \pm 180°$, то один из углов β и $180°-\beta$ равен $|\alpha|$.

К свойствам поворота, изложенным в § 27, мы добавим еще следующую важную теорему, связанную с понятиями объединения и пересечения фигур.

Т е о р е м а. *Если поворот ρ вокруг точки O на угол α переводит фигуру F в фигуру F', а фигуру G — в фигуру G', то этот поворот переводит фигуру $F \cup G$ в фигуру $F' \cup G'$* (рис. 179, *а*); *точно так же, поворот ρ переводит фигуру $F \cap G$ в $F' \cap G'$* (рис. 179, *б*).

[Ср. общую теорему о преобразованиях на стр. 171.]

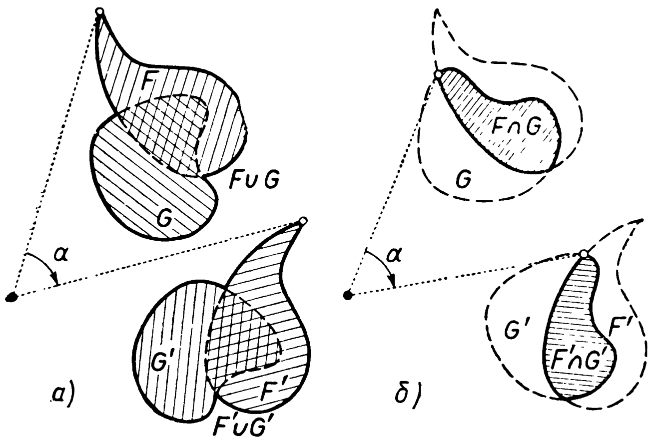


Рис. 179.

Эта теорема должна быть интуитивно понятна учащимся (хотя, разумеется, знакомить их с ее формулировкой не следует). Неявно эта теорема используется уже при построении многоугольника, получаемого из данного поворотом: если при повороте ρ точки $A, B, C, \ldots, K$ переходят в точки $A', B', C', \ldots, K'$, то отрезок AB переходит в $A'B'$, отрезок BC в отрезок $B'C'$ и т. д. (теоре-

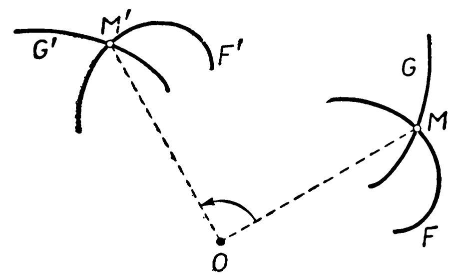


Рис. 180.

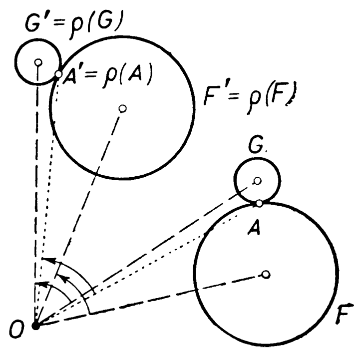


Рис. 181.

ма 2 § 27), и потому многоугольник $ABC \ldots K$ (представляющий собой о б ъ е д и н е н и е отрезков $AB, BC, \ldots, KA$) переходит в объединение отрезков $A'B', B'C', \ldots, K'A'$, т. е. в многоугольник $A'B'C' \ldots K'$. Аналогично, если две линии F, G пересекаются в точке M, а линии F', G', получающиеся из них при повороте ρ, пересекаются в точке M', то точка M переходит при повороте ρ в точку M' (рис. 180). На рисунке 181 изображены две касающиеся окружности F, G и две другие окружности $F'=\rho(F)$, $G'=\rho(G)$, получаемые из них поворотом ρ.

По поводу задач, приведенных в § 28, остается в силе все сказанное в п. 11 на стр. 45—46 и в п. 3 на стр. 68.

4. Симметрия порядка n и правильные многоугольники. [К §§ 29—31.] Материал §§ 29, 30 не включен в пособие для учащихся. Тем не менее он важен и тесно связан с изучаемым преобразованием (поворотом). § 29 (а также примеры § 21) играет по отношению к повороту такую же роль, какую §§ 4 и 15 играют по отношению к осевой и центральной симметрии. Заметим, кстати, что формы, обладающие симметрией порядка $n>2$, встречаются в окружающей нас действительности чаще, чем формы, обладающие центральной симметрией в чистом виде (т. е. не обладающие симметрией порядка $n>2$); ср. иллюстративный материал §§ 21 и 12.

Во избежание недоразумений укажем правильное употребление слов «симметрия порядка n». Мы говорим: фигура *обладает симметрией порядка n*, если она переходит в себя при *повороте* на угол $360°:n$ вокруг некоторой точки O. Иначе говоря, рассматриваемым геометрическим преобразованием является ***поворот***; что же касается ***симметрии порядка n***, то она является (при $n>2$) не геометрическим преобразованием, а свойством конкретных фигур (свойством своеобразной правильности, свойством переходить в себя при повороте на угол $360°:n$). Геометрическое преобразование (например, поворот) может быть применено к любой фигуре; симметрией порядка n обладают лишь немногие фигуры. Все это особенно важно подчеркнуть потому, что словом «симметрия» мы обозначаем как геометрическое преобразование, так и свойство фигур. Так мы говорим: *фигура F переходит при центральной симметрии в фигуру F'* (ср. рис. 84); здесь «центральная симметрия» означает геометрическое преобразование. Но мы говорим также: *фигура F обладает центральной симметрией* (ср. рис. 81); здесь «центральная симметрия» означает свойство фигуры — свойство, которым обладают далеко не все фигуры. Итак, симметрия порядка n — это (при $n>2$) не геометрическое преобразование, а свойство фигур (которым одни фигуры обладают, а другие — нет); в противоположность этому термин «центральная симметрия» (симметрия порядка 2) имеет два различных смысла: это есть одновременно и геометрическое преобразование и свойство фигур.

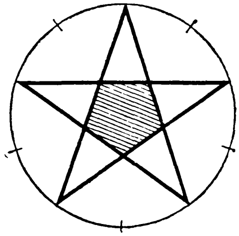


Рис. 182.

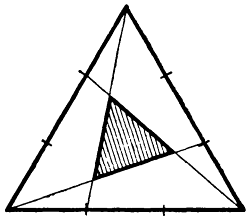


Рис. 183.

В заключение — несколько слов о правильных многоугольниках. Тема «Правильные многоугольники» в незначительном объеме проходится в восьмилетней школе; в программе же IX класса ее нет. Поэтому она не включена в пособие для учащихся. Учителю же, несомненно, будет интересно проследить, как понятие симметрии порядка n применяется к изучению правильных многоугольников. Тем более, что в § 30 свойства правильных многоугольников изложены полнее, чем в учебниках восьмилетней школы. Весьма поучительной является в этом смысле задача, разобранная в § 31. Доказать, что четырехугольник, образованный прямыми AK, BL, CM, DN (см. рис. 166), является квадратом (или, например, доказать, что заштрихованные на рис. 182, 183 многоугольники являются правильными), было бы без использования поворота довольно затруднительно.

5. О задачах и упражнениях. Большинство задач и упражнений, относящихся к главе III, связано с параграфами этой главы, исключенными в пособии для учащихся. Однако относиться к этим задачам следует по-разному. Несложные задачи **168—177** имеют своей целью закрепление в сознании учащихся понятия направленного угла; если это понятие не рассматривается в курсе геометрии, то соответствующие задачи, естественно, надо пропустить. Не заслуживают особого внимания и совсем простые задачи **178—181**, рассчитанные на слабых школьников, которым надо помочь привыкнуть к понятию вектора. [Понятие вектора само по себе, в отрыве от правил действий над векторами и даже от

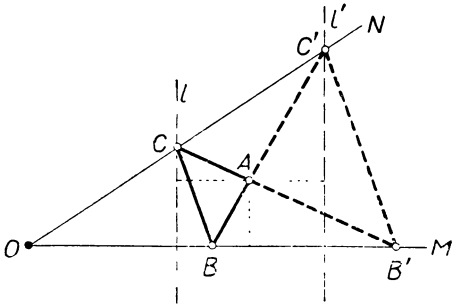


Рис. 184.

условия равенства векторов, является мало содержательным; поэтому здесь нельзя предложить более интересных задач.] В противоположность этому задачи **224—246**, посвященные симметрии порядка n и правильным многоугольникам, и интересны и поучительны. Многие из задач, связанных с правильными многоугольниками, вполне могут быть использованы и в том случае, если тема о симметрии порядка n не изучается самостоятельно: ведь учащиеся, знакомые с правильными многоугольниками из курса восьмилетней школы, должны понимать, что правильный n-угольник можно совместить с собой путем поворота на угол $\frac{360°}{n}$ вокруг его центра O, а также и то, что n-угольник, который совмещается сам с собой при повороте на угол $\frac{360°}{n}$, правильный. [Это можно дополнительно пояснить в процессе решения задач; можно ограничиться случаями квадрата и правильного треугольника.]

6. Примеры решения задач. 1) Задача **210** а) (стр. 94). Предположим, что задача решена и ABC — искомый прямоугольный треугольник; вершина B принадлежит стороне OM заданного угла MON, а вершина C — стороне ON (рис. 184). Поворот вокруг точки A на угол $+90°$ (или $-90°$) переводит точку B в точку C. Предположим, что $\measuredangle BAC = -90°$. Так как точка B, по условию, принадлежит прямой OM, то точка C принадлежит прямой l, получающейся из OM поворотом вокруг точки A на угол $-90°$; эту прямую нетрудно построить (на рис. 184 прямая l изображена пунктиром). Но точка C принадлежит также прямой ON; следовательно, она совпадает с точкой пересечения прямых ON и l. Построив C, мы без труда найдем и точку B (из условия $\measuredangle CAB =$

$= +90°$). Другое решение задачи мы получим, предположив, что $\measuredangle BAC = +90°$ (см. тот же рис. 184).

2) Задача **215** (стр. 94). Поворот вокруг точки B на угол $-60°$ переводит точку A в точку E, а точку F в точку C (рис. 185). Поэтому треугольник ABF этот поворот переводит в треугольник EBC, а следовательно, отрезок AF он переводит в отрезок EC. При этом середина M отрезка AF перейдет в середину N отрезка EC. Поскольку точку M поворот вокруг B на угол $-60°$ переводит в точку N, то $BM = BN$ и $\angle MBN = 60°$. Но это и означает, что треугольник BMN — равносторонний.

Условие этой задачи можно варьировать. Можно, например, принять за M такую точку отрезка AF, что $AM:MF = 1:2$, а за N — такую точку отрезка CE, что $CN:NE = 2:1$; можно также построить на отрезках AF и EC равносторонние треугольники AFM и ECN (позаботившись только, чтобы точка B была либо

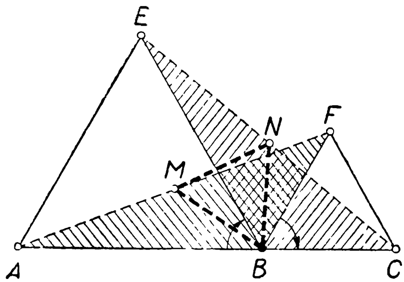


Рис. 185.

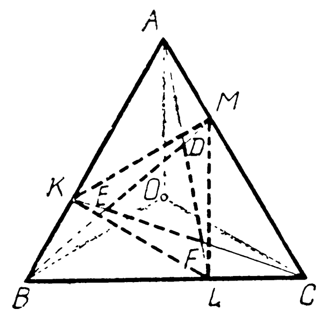


Рис. 186.

внешней для обоих этих треугольников, либо внутренней для обоих треугольников) и т. д. Во всех подобных случаях треугольник BMN будет равносторонним.

3) Задача **232** (стр. 96). Повернем треугольник ABC вокруг его центра O на угол $120°$. При этом отрезок AB перейдет в отрезок BC; отрезок BC — в отрезок CA и отрезок CA — в отрезок AB (рис. 186). Из того, что длины отрезков при повороте не меняются, следует, что точка K отрезка AB переходит в точку L отрезка BC, а последняя — в точку M отрезка CA. Значит, треугольник KLM при повороте вокруг точки O на угол $120°$ переходит сам в себя; следовательно, он правильный, и центр его совпадает с O. Далее, поскольку при рассматриваемом повороте точка A переходит в точку B, а точка L — в точку M, то прямая AL переходит в прямую BM. Аналогично доказывается, что прямая BM переходит в прямую CK и прямая CK — в прямую AL. Отсюда вытекает, что треугольник DEF, сторонами которого являются прямые AL, BM и CK, переходит при рассматриваемом повороте сам в себя; следовательно, треугольник DEF — также правильный с центром O.

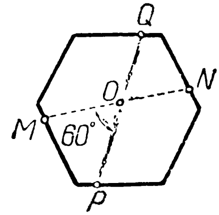


Рис. 187.

4) Задача **242** б) (стр. 97). Повернем шестиугольник вокруг его центра O на $\measuredangle MOP = 60°$ (рис. 187). При этом прямая OM перейдет в прямую OP, а шестиугольник совместится сам с собой. Точки M и N принадлежат шестиугольнику и прямой OM; при повороте они перейдут в точки, принадлежащие шестиугольнику и прямой OP, т. е. в точки P и Q. Но это означает, что отрезок MN перейдет при рассматриваемом повороте в отрезок PQ (см. теорему 2 § 27); следовательно, эти отрезки равны (см. ту же теорему 2).

ГЛАВА IV

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

§ 32. ПРИМЕРЫ И ИЛЛЮСТРАЦИИ

Взгляните на орнаменты, изображенные на рисунках 188, 189, 190. (Нужно представлять себе, что эти орнаменты продолжаются вправо и влево неограниченно.) Ни один из этих орнаментов не имеет ни осей, ни центров симметрии. Тем не менее каждый из изображенных орнаментов представляется нам в каком-то смысле «правильным».

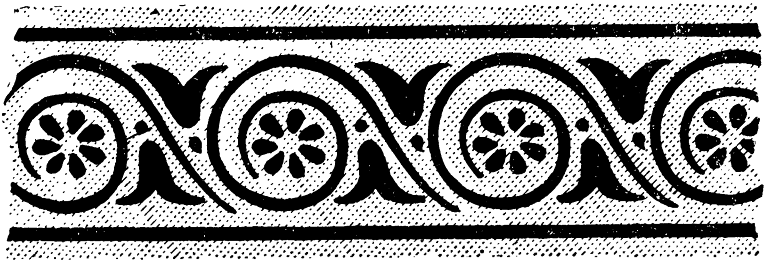


Рис. 188. Древнегреческий орнамент на вазе.

Эта «правильность» заключается в том, что если мы сдвинем любой из этих орнаментов как целое вправо или влево на определенный отрезок, то этот орнамент совместится сам с собой. Сказанное легко проверить, перерисовав орнамент на наложенную сверху кальку и сдвинув затем кальку вправо или влево.

Рис. 189. Живопись по стеклу в средневековом соборе (Франция).

Примененный нами «сдвиг фигуры как целого» называется в геометрии параллельным переносом. Параллельный перенос фигуры можно проиллюстрировать с помощью весьма простого приспособления. В куске картона с ровно обрезанным краем вырежем отверстие, имеющее форму некоторой фигуры. Положив на лист бумаги линейку, приложим картон краем к линейке и обведем карандашом контур отверстия. Затем, не снимая линейки, сдвинем вдоль нее лист картона на некоторое расстояние и снова обведем контур отверстия (рис. 191). В результате мы получим на бумаге две фигуры F, F', переходящие одна в другую при параллельном переносе (рис. 192).

Рис. 190. Орнамент на стене дворца Дария в Сузах (древняя Персия).

Еще один любопытный орнамент изображен на рисунке 193. Ясно, что при параллельном переносе (вправо или влево) на некоторый отрезок этот орнамент совмещается сам с собой. Он пе-

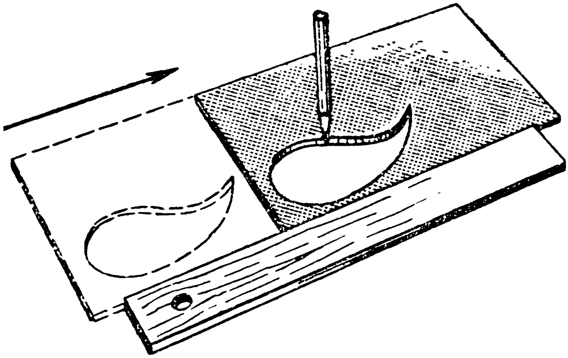


Рис. 191.

реходит в себя также и при параллельном переносе на определенный отрезок вверх или вниз. Несколько менее очевидно следующее свойство этого орнамента. При симметрии относительно любой вертикальной прямой мы получаем совершенно аналогичный орнамент, где только черные всадники едут направо, а белые всадники (образованные пробелами, не заполненными на рис. 193 фигурами черных всадников) — налево.

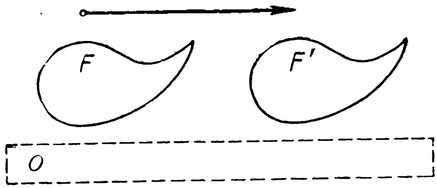


Рис. 192.

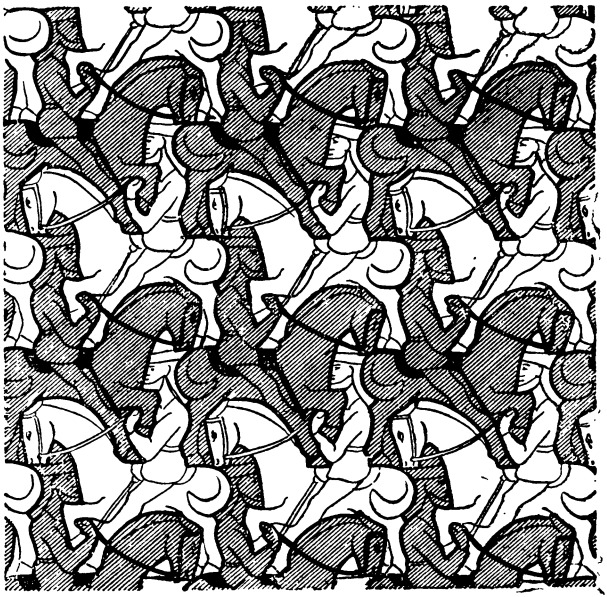


Рис. 193.

§ 33. РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Определение. *Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются* ***равными*** (рис. 194), *если выполнены следующие три условия:*

1) *прямые AB и CD параллельны (или совпадают);*

2) *направление (на прямой AB) от точки A к точке B совпадает с направлением (на прямой CD) от точки C к точке D* (см. рис. 194 и 195);

3) *отрезки AB и CD равны между собой.*

Равенство векторов обозначается тем же знаком $=$, что и равенство чисел: $\overline{AB}=\overline{CD}$ (рис. 194) или $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ (рис. 196).

Важно подчеркнуть, что равенство отрезков AB и CD (т. е. равенство длин векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$) недостаточно для того, чтобы были равны векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Если отрезки AB и CD равны между собой, но не выполнено условие 1) (рис. 197, *а*) или

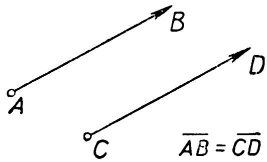


Рис. 194.

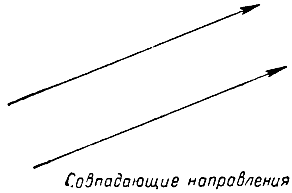


Рис. 195.

выполнено условие 1), но не выполнено условие 2) (рис. 197, *б*), то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ не считаются равными. На рисунке 198 все векторы равны между собой.

Из приведенного определения следует, что равенство векторов обладает тем же основным свойством, что и равенство чисел: *два вектора, порознь равные третьему, равны между собой*. Иначе говоря, если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, то $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ (рис. 199).

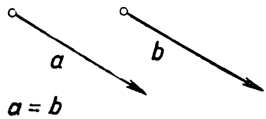


Рис. 196.

Во многих случаях бывает полезен следующий признак равенства векторов:

Если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ не расположены на одной прямой, то равенство $\overline{AB}=\overline{CD}$ имеет место в том, и только в том, случае, если четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм (рис. 200, *а*). Это вытекает из определения равенства векторов.

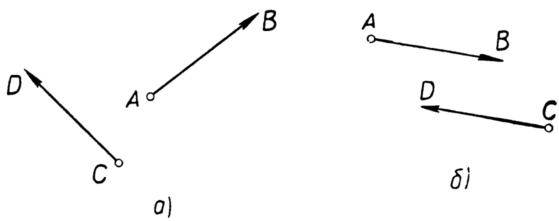


Рис. 197.

Следствие *Если A, B, C, D — такие четыре точки, что $\overline{AB}=\overline{CD}$, то $\overline{AC}=\overline{BD}$.*

В самом деле, если точки A, B, C, D не лежат на одной прямой, то из равенства $\overline{AB}=\overline{CD}$ вытекает, что $ABDC$ — параллелограмм (рис. 200, *а*), и потому $\overline{AC}=\overline{BD}$. Пусть теперь точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Предположим для определенности, что точка B лежит на отрезке AC (рис. 200, *б*). Тогда отрезки AC и BD равны:

$$AC=AB+BC=CD+BC=BD$$

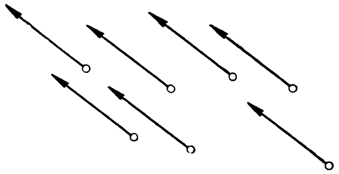


Рис. 198.

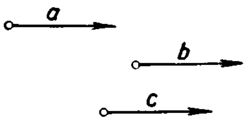


Рис. 199.

Так как, кроме того, направление векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ одинаково, то $\overline{AC}=\overline{BD}$. (Если точка B лежит на продолжении отрезка AC за точку A или за точку C, то рассуждение аналогично.)

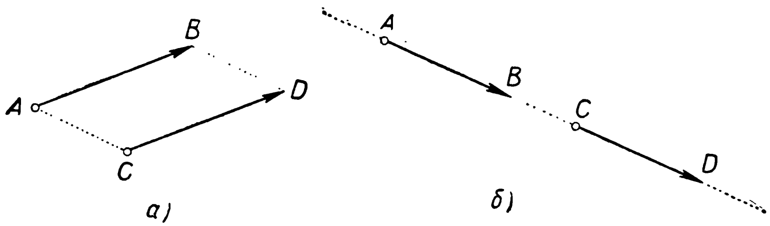


Рис. 200.

Из определения равенства векторов вытекает также и следующее важное утверждение:

Если на плоскости даны некоторый вектор $\overline{AB}$ *и точка* C, *то существует единственный вектор* $\overline{CD}$ *с началом* C, *равный*

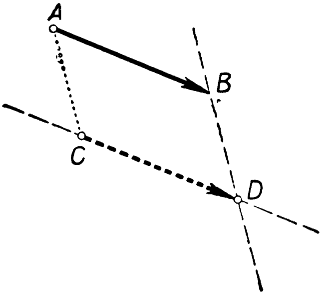


Рис. 201.

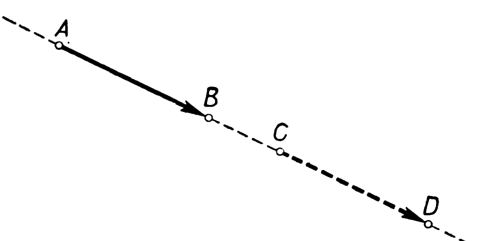


Рис. 202.

вектору $\overline{AB}$. Для того чтобы получить конец D этого вектора, достаточно провести через точку C прямую, параллельную прямой AB (рис. 201) или совпадающую с прямой AB (рис. 202), и отложить на ней в направлении, указываемом вектором $\overline{AB}$, отрезок $CD=AB$.

§ 34. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

Определение. *Пусть дан некоторый вектор* $\boldsymbol{a}$. *Для произвольной точки A мы обозначим через A' такую точку, что* $\overline{AA'}=\boldsymbol{a}$ (рис. 203). *Переход от точки A к точке A' называется* ***параллельным переносом*** *на вектор* $\boldsymbol{a}$.

Иначе говоря, для того чтобы найти точку A', в которую переходит точка A в результате параллельного переноса на вектор $\boldsymbol{a}$, нужно отложить от точки A вектор, равный вектору $\boldsymbol{a}$ (рис. 204, *а*, *б*). Конец этого вектора и будет искомой точкой A'.

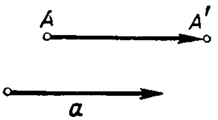


Рис. 203.

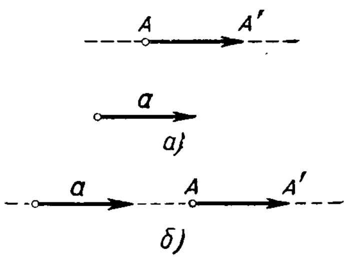


Рис. 204

Предположим теперь, что на плоскости заданы вектор $\boldsymbol{a}$ и некоторая фигура F (рис. 205). Для каждой точки A этой фигуры найдем точку A', получающуюся из A с помощью параллельного переноса на вектор $\boldsymbol{a}$. Множество всех точек, получающихся из точек фигуры F с помощью параллельного переноса на вектор $\boldsymbol{a}$, представляет собой некоторую новую фигуру F' — фигуру, получающуюся из фигуры F с помощью параллельного переноса на вектор $\boldsymbol{a}$.

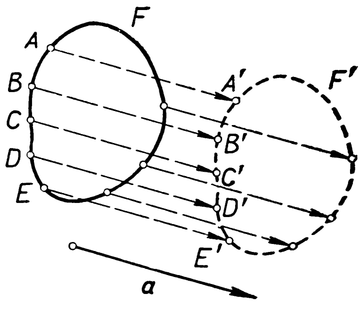


Рис. 205.

Определение. *Фигура F', образованная всеми точками, получающимися из точек заданной фигуры F параллельным переносом на вектор* $\boldsymbol{a}$, *называется фигурой, получающейся из F параллельным переносом на вектор* $\boldsymbol{a}$.

Из определения параллельного переноса следует, что если фигуру F переместить как целое, не поворачивая ее, в направлении вектора $\boldsymbol{a}=\overline{MN}$ на расстояние, равное длине отрезка MN, то она совместится с фигурой F', получаемой из фигуры F в результате параллельного переноса на вектор $\overline{MN}$ (см. рис. 205, 206).

§ 35. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Необходимые материалы и инструменты: линейка, угольник, циркуль, лист кальки.

Построение фигуры, получающейся из данной параллельным переносом. На листе бумаги начертите некоторый вектор $\overline{MN}$ и какую-либо фигуру, например, замкнутую линию F (рис. 206). На линии F отметьте ряд точек A, B, C, ..., достаточно густо расположенных на ней. С помощью линейки и угольника проведите через каждую из отмеченных точек прямую линию, параллельную MN. Измерив теперь с помощью циркуля отрезок MN, отложите на прямой, проходящей через точку A, отрезок $AA'=MN$, причем так, чтобы имело место равенство $\overline{AA'}=\overline{MN}$ (рис. 206). Аналогично постройте точки B', C', ..., получающиеся из точек B, C, ... параллельным переносом на вектор $\overline{MN}$. Соедините построенные точки A', B', C'... . Это и даст линию F', получающуюся из F с помощью параллельного переноса на вектор $\overline{MN}$.

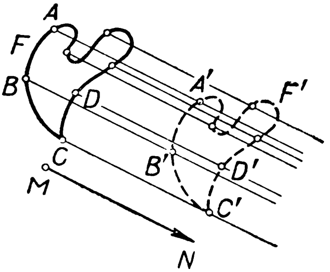


Рис. 206.

Теперь наложите на полученный чертеж лист кальки. Обведите на кальке линию F и прямую MN, отметив на этой прямой точку M. Оставляя чертеж неподвижным, сдвиньте лист кальки в направлении прямой MN так, чтобы отмеченная на кальке точка M совместилась с точкой N на чертеже. Убедитесь, что при таком сдвиге изображение линии F на кальке совместилось с фигурой F' на чертеже.

§ 36. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

Теорема 1. *Фигура F', получающаяся из фигуры F параллельным переносом на вектор $\boldsymbol{a}$, равна фигуре F.*

В самом деле, пусть фигура F' получается из фигуры F параллельным переносом на вектор $\boldsymbol{a}=\overline{MN}$ (рис. 206). В таком случае при перемещении фигуры F как твердого целого в направлении вектора $\boldsymbol{a}$ на расстояние, равное длине вектора $\boldsymbol{a}$, эта фигура совместится с F' (см. §§ 34, 35). Так как фигуры F и F' могут быть совмещены друг с другом, то они равны.

Теорема 2. *Фигура, получающаяся из отрезка AB с помощью параллельного переноса на вектор $\boldsymbol{a}$, представляет собой отрезок $A'B'$, равный отрезку AB* (рис. 207, а, б) *Концы A' и B' отрезка $A'B'$ получаются из концов A и B отрезка AB с помощью того же параллельного переноса. Отрезок $A'B'$ либо параллелен отрезку AB, либо принадлежит той же прямой.*

Первое утверждение теоремы 2 вытекает из теоремы 1. Если отрезок AB не параллелен вектору $\boldsymbol{a}$ (рис. 207, *а*), то $\overline{AA'}=\overline{BB'}(=\boldsymbol{a})$, откуда следует, что четырехугольник $AA'B'B$ — параллелограмм (ср. признак равенства векторов в § 33) и $A'B' \parallel AB$. Если же $AB \parallel \boldsymbol{a}$ (рис. 207, *б*), то рассматриваемый перенос переводит каждую точку прямой AB в точку той же прямой и поэтому отрезки AB и $A'B'$ принадлежат одной прямой.

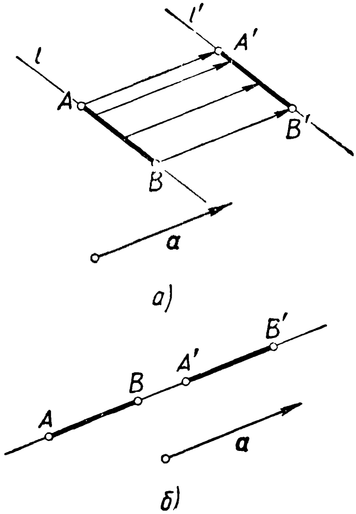


Рис. 207.

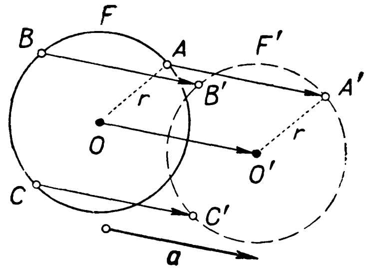


Рис. 208.

Теорема 3. *Фигура F', получающаяся из данной окружности F с помощью параллельного переноса, представляет собой окружность, равную окружности F* (рис. 208). *Центр окружности F' получается из центра окружности F с помощью того же параллельного переноса.*

В самом деле, параллельный перенос переводит окружность F в окружность F' (теорема 1). Центр O окружности F, т. е. точка, удаленная от всех точек окружности F на расстояние r, переходит при этом в точку O', удаленную на расстояние r от всех точек окружности F' (см. теорему 2).

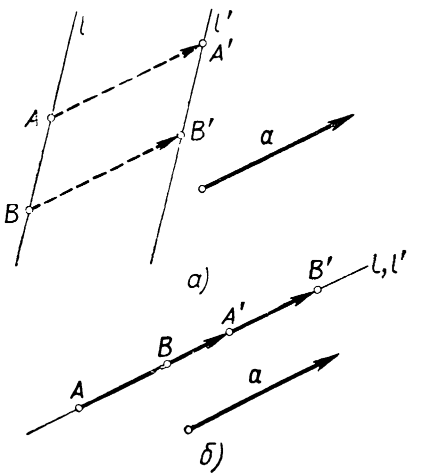


Рис. 209.

Теорема 4. *Фигура l', получающаяся из прямой l параллельным переносом на вектор $\boldsymbol{a}$, также представляет собой прямую линию. Прямая l' либо параллельна l, либо совпадает с ней* (рис. 209, *а*, *б*).

Теорема 4 вытекает из теорем 1 (фигура, равная прямой линии, есть прямая) и 2.

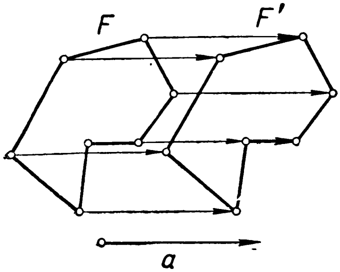


Рис. 210.

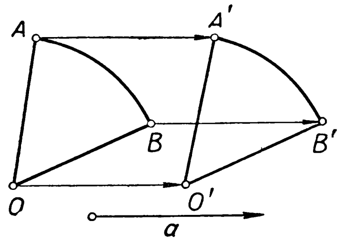


Рис. 211.

Теоремы 1—4 позволяют легко строить фигуры, получаемые из данных фигур с помощью известного параллельного переноса (см. рис. 210, 211).

§ 37. ЗАДАЧИ

При решении задач параллельный перенос обычно применяется не ко всему чертежу в целом, а лишь к некоторой его части. Проиллюстрируем это двумя примерами.

Задача 1. *Даны две окружности* R *и* S *и отрезок* MN (рис. 212). *Построить отрезок, равный и параллельный отрезку* MN, *концы которого лежат на данных окружностях.*

Решение.

Анализ. Предположим, что задача решена и AB — искомый отрезок (точка A лежит на окружности R, точка B — на окружности S). Так как отрезок AB равен и параллелен отрезку MN, то имеет место один из двух случаев: либо $\overline{AB}=\overline{MN}$, либо $\overline{AB}=\overline{NM}$.

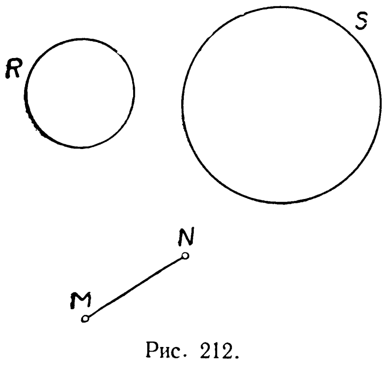


Рис. 212.

Пусть, например, $\overline{AB}=\overline{MN}$ (рис. 213). Тогда точка B получается из точки A параллельным переносом на вектор $\overline{MN}$. Так как точка A лежит на окружности R, то точка B должна принадлежать окружности R', получающейся из R с помощью параллельного переноса на вектор $\overline{MN}$. Кроме того, точка B, по условию, лежит на окружности S. Поэтому B есть точка пересечения окружностей R' и S.

Аналогично, если $\overline{AB}=\overline{NM}$ (рис. 214), то B есть точка пересечения окружности S и окружности R'', получающейся из R параллельным переносом на вектор $\overline{NM}$.

П о с т р о е н и е. Строим окружность R', получающуюся из R параллельным переносом на вектор $\overline{MN}$ (теорема 3 § 36). Пусть B — одна из точек пересечения окружностей R' и S. Если A — та точка окружности R, которая переходит в B при параллельном переносе на вектор $\overline{MN}$, то отрезок AB — искомый.

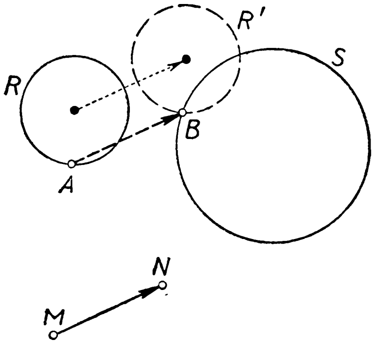


Рис. 213.

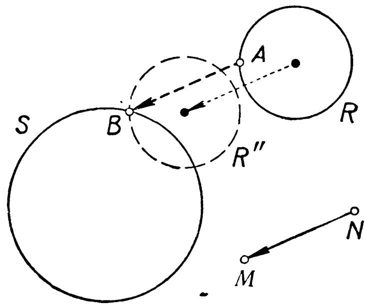


Рис. 214.

В этом построении параллельный перенос на вектор $\overline{MN}$ может быть заменен переносом на вектор $\overline{NM}$.

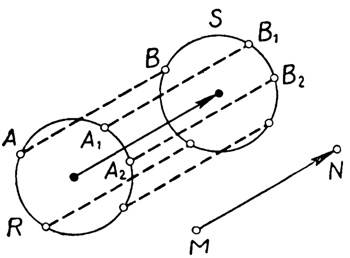


Рис. 215.

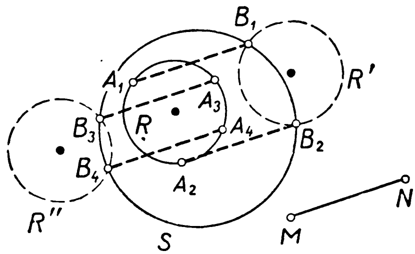


Рис. 216.

Д о к а з а т е л ь с т в о правильности построения мы предоставляем читателю.

И с с л е д о в а н и е. Если окружность S получается из окружности R параллельным переносом на вектор $\overline{MN}$ или на вектор $\overline{NM}$, то задача имеет *бесконечно много* решений (рис. 215). В остальных случаях задача имеет *не более четырех* решений, так как окружность S имеет не более двух точек пересечения с окружностью R' и не более двух точек пересечения с окружностью R''.

Случай, когда задача имеет *четыре* решения, показан на рисунке 216.

Задача 2. *В каком месте следует построить мост MN через реку, чтобы путь $AMNB$ из деревни A в расположенную по другую сторону реки деревню B был кратчайшим* (рис. 217)? Предполагается, что берега реки — параллельные прямые; мост должен быть перпендикулярен берегам.

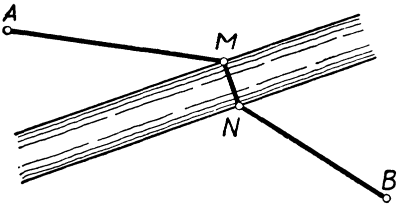


Рис. 217.

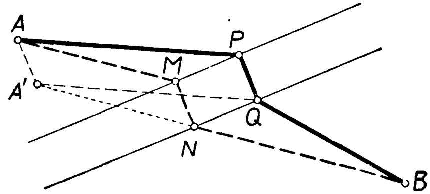


Рис. 218.

Решение.

Анализ. Предположим, что $APQB$ — некоторый путь (рис. 218). Перенесем параллельно отрезок AP на вектор $\overline{PQ}$; мы получим отрезок $A'Q$ (где A' — точка, получающаяся из A параллельным переносом на вектор $\overline{PQ}=\overline{MN}$). Так как $APQA'$ — параллелограмм, то

$$AP+PQ=AA'+A'Q \text{ и } AP+PQ+QB=AA'+A'Q+QB.$$

Но отрезок $AA'=PQ=MN$ нам известен — это расстояние между параллельными берегами реки. Следовательно, для того чтобы путь $APQB$ был кратчайшим, необходимо, чтобы наименьшей была длина ломаной $A'QB$. Но это будет, очевидно, в том случае, если ломаная $A'QB$, соединяющая точки A' и B, превращается в отрезок прямой, т. е. точка Q совпадает с точкой N пересечения отрезка $A'B$ с ближним к B берегом реки. Итак, *точка N, принадлежащая кратчайшему пути, есть точка пересечения прямой $A'B$ и ближайшего к деревне B берега реки.*

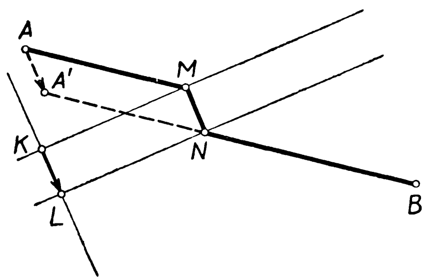


Рис. 219.

Построение. Проведем прямую, перпендикулярную берегам реки, и обозначим через K точку пересечения этой прямой с берегом, ближайшим к деревне A, а через L — точку пересечения с другим берегом (рис. 219). Построим точку A', получающуюся из A параллельным переносом на вектор $\overline{KL}$. Проведем, далее, отрезок $A'B$ и обозначим через N точку пересечения этого отрезка с берегом, ближайшим к деревне B. Опустив из точки N перпендикуляр NM на второй берег реки, мы и получаем место расположения требуемого моста MN.

Доказательство правильности построения и исследование (показывающее, что задача всегда имеет *одно* решение) мы предоставляем читателю.

Задачи и упражнения к главе IV

Равенство векторов

247. Перерисуйте в тетрадь изображенные на рисунке 220 точки A, B, C, D, O; отложите от точки O векторы, равные векторам $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DC}$.

248. Докажите, что если $\overline{AB}=\overline{DE}$ и $\overline{AC}=\overline{DF}$, то $\overline{BC}=\overline{EF}$. Сохраняет ли силу это утверждение, если заменить в нем направленные отрезки (векторы) обыкновенными отрезками?

249. Мы знаем, что если $\overline{AB}=\overline{CD}$, то и $\overline{AC}=\overline{BD}$. Сохраняет ли силу это утверждение, если заменить в нем направленные отрезки (векторы) обыкновенными отрезками?

250. Докажите, что для того чтобы имело место равенство $\overline{AB}=\overline{CD}$, необходимо и достаточно, чтобы середина отрезка AD совпала с серединой отрезка BC. Рассмотрите отдельно случаи, когда векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ не принадлежат одной прямой и когда они принадлежат одной прямой.

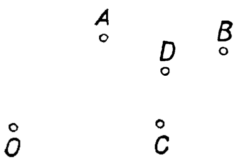


Рис. 220.

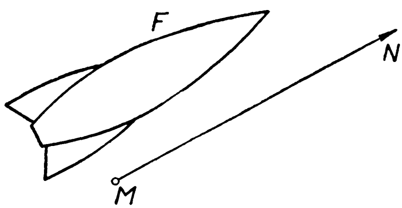


Рис. 221.

251. Воспользуйтесь результатом задачи **250** для построения точки D, определяемой равенством $\overline{CD}=\overline{AB}$, где точки A, B и C заданы.

Определение параллельного переноса

252. Перерисуйте в тетрадь изображенную на рисунке 221 фигуру F и отрезок MN; изобразите на том же рисунке фигуры F_1 и F_2, получающиеся из фигуры F параллельным переносом на векторы $\overline{MN}$ и $\overline{NM}$.

253. Фигура F' получается из фигуры F при помощи параллельного переноса. Докажите, что и фигура F получается из фигуры F' при помощи некоторого параллельного переноса.

254. Докажите, что точки A и B в том, и только в том, случае можно перевести некоторым параллельным переносом в точки C и D, если $\overline{AB}=\overline{CD}$.

255. Пусть фигура F' получается из фигуры F параллельным переносом на вектор $\boldsymbol{a}$. Соединим отрезком каждую точку фигуры F с соответствующей ей точкой фигуры F' и разделим этот отрезок пополам. Докажите, что множество точек деления образует фигуру G, также получающуюся из фигуры F некоторым параллельным переносом.

256*. Докажите, что если фигура F имеет две параллельные оси симметрии l_1 и l_2, то она переводится в себя некоторым параллельным переносом. Укажите примеры таких фигур.

Свойства параллельного переноса

257. Какие точки переходят сами в себя при параллельном переносе на вектор $\boldsymbol{a}$? Какие прямые переходят сами в себя при параллельном переносе на вектор $\boldsymbol{a}$? Какие окружности переходят сами в себя при параллельном переносе на вектор $\boldsymbol{a}$?

258. Даны треугольник ABC и вектор $\boldsymbol{a}$. Что представляет собой множество концов всевозможных векторов $\overline{MN}=\boldsymbol{a}$, начало M которых принадлежит треугольнику ABC?

259. Треугольник $A'B'C'$ получен из треугольника ABC параллельным переносом. Докажите, что соответствующие медианы треугольников ABC и $A'B'C'$ параллельны (или принадлежат одной прямой).

260. Треугольник $A'B'C'$ получен из треугольника ABC параллельным переносом на вектор $\boldsymbol{a}$; Q и Q' — точки пересечения биссектрис треугольников ABC и $A'B'C'$. Докажите, что $QQ'=a$.

261. Треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника ABC некоторым параллельным переносом; O и O' — центры вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$, а Q и Q' — центры их описанных окружностей. Докажите, что $OO' = QQ'$.

262. На сторонах AB и DC параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB=a$ и $BC=b$ построены равные треугольники ABM и DCN (где $AM=DN$, $BM=CN$); при этом стороны AB и CD мы считаем горизонтальными, а треугольники — расположенными выше прямых AB и DC. Чему равно расстояние между точками M и N?

263. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ построены квадраты — первый вне параллелограмма, а второй по ту же сторону от прямой CD, что и сам параллелограмм. Докажите, что расстояние между центрами квадратов равно стороне BC.

264. Пусть F, D и E — середины сторон AB, BC и CA треугольника ABC; центры окружностей, описанных вокруг треугольников AEF, BDF и CDE, обозначим через O_1, O_2 и O_3, а центры окружностей, вписанных в те же треугольники, — через Q_1, Q_2 и Q_3. Докажите, что треугольники $O_1O_2O_3$ и $Q_1Q_2Q_3$ равны между собой.

265. Пусть ABC — треугольник со сторонами $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$; середины сторон AB, BC и CA обозначим через D, E и F, а центры окружностей, описанных вокруг треугольников ADF, BDE, CEF, — через O, P, Q. Чему равны расстояния между точками O, P и Q?

266. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два треугольника, получаемые один из другого параллельным переносом, M — точка пересечения отрезков AB' и BA', N — точка пересечения отрезков AC' и CA', P — точка пересечения отрезков BC' и CB'. Докажите, что треугольник MNP равен треугольнику DEF, образованному средними линиями треугольника ABC.

267. Докажите, что если треугольник $A'B'C'$, получаемый из другого треугольника ABC параллельным переносом, пересекает треугольник ABC, то пересечение этих двух треугольников представляет собой треугольник, подобный ABC. (Здесь под треугольником понимается ч а с т ь п л о с к о с т и, ограниченная замкнутой ломаной ABC.)

268. Докажите, что если параллелограмм $A'B'C'D'$, получаемый из параллелограмма $ABCD$ параллельным переносом, пересекает параллелограмм $ABCD$, то пересечение этих двух параллелограммов также представляет собой параллелограмм. Обязан ли этот параллелограмм быть подобным параллелограмму $ABCD$?

269*. Пересечение квадрата $ABCD$ и квадрата $A'B'C'D'$, получаемого из $ABCD$ параллельным переносом, представляет собой снова квадрат. Что можно сказать о направлении параллельного переноса?

270. Докажите, что если окружность S' получается из окружности S параллельным переносом, то она может быть получена из окружности S симметрией относительно некоторой прямой, а также симметрией относительно некоторой точки.

271*. а) Треугольник $A'B'C'$ может быть получен из треугольника ABC параллельным переносом на вектор $\boldsymbol{a}$, а также симметрией относительно прямой l. Что можно сказать об этом треугольнике?

б) Докажите, что если треугольник $A'B'C'$ может быть получен из треугольника ABC параллельным переносом на вектор $\boldsymbol{a}$, то он не может быть получен из треугольника ABC симметрией относительно какой-либо точки O.

272*. Треугольники ABC и DEF равны между собой; стороны треугольника ABC параллельны равным им сторонам треугольника DEF. Докажите, что треугольник DEF может быть получен из треугольника ABC либо параллельным переносом на некоторый вектор $\boldsymbol{a}$, либо симметрией относительно некоторой точки O.

273. Дан треугольник ABC. Постройте треугольники, получающиеся из данного треугольника параллельным переносом на вектор $\overline{AB}$; на вектор $\overline{BC}$; на вектор $\overline{CA}$.

274. Дан треугольник ABC. Середины его сторон обозначим через D, E и F, а точку пересечения медиан — через M. Постройте три треугольника, получаемые из треугольника ABC паралельным переносом на векторы $\overline{DM}$, $\overline{EM}$ и $\overline{CM}$.

275. Дан параллелограмм $ABCD$ с центром O. Постройте параллелограмм, получающийся из данного параллельным переносом на вектор $\overline{AO}$; на вектор $\overline{OC}$; на вектор $\overline{OA}$.

276. Даны окружность S и вектор $\boldsymbol{a}$. Постройте окружность S', получаемую из окружности S параллельным переносом на вектор $\boldsymbol{a}$. В каком случае окружности S и S' будут пересекаться?

277. Докажите, что окружность S', получаемая из окружности S диаметра d с помощью параллельного переноса на вектор $\boldsymbol{a}$, в том и только в том случае касается окружности S, если $a=d$.

Разные задачи

278. Даны окружность S и прямая l. Поместить отрезок AB данной длины a так, чтобы он был параллелен известной прямой MN и чтобы концы его принадлежали прямой l и окружности S.

279*. Деревни A и B разделяются двумя реками (берега которых мы считаем параллельными прямыми; рис. 222). Как надо расположить мосты MN и PQ через эти реки (мосты, естественно, ставятся перпендикулярно направлению реки) с тем, чтобы путь $AMNPQB$ из деревни A в деревню B был возможно короче?

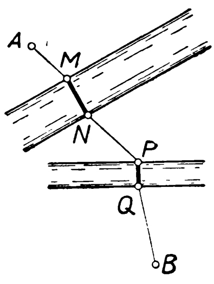


Рис. 222.

280. Пусть S и S_1 — две равные окружности, QA и Q_1A_1 — параллельные между собой радиусы этих окружностей. Докажите, что Q_1A_1 получается из QA параллельным переносом на вектор $\overline{QQ_1}$ или симметрией относительно середины отрезка QQ_1.

281. l и l_1 — две параллельные касательные к равным окружностям S и S_1 с центрами O и O_1, M и M_1 — точки касания. Докажите, что либо $MM_1 \parallel OO_1$, либо MM_1 пересекает отрезок OO_1 в его середине.

282. На равных и параллельных хордах AB и CD двух равных окружностей R и S с центрами O и Q построены правильные треугольники ABM и CDN; точки M и O расположены по разные стороны от хорды AB, а точки N и Q — по разные стороны от хорды CD. Докажите, что $MO \parallel NQ$.

283. На равных и параллельных хордах AB и CD окружности S с центром O построены равные треугольники ABM и CDN; при этом $\angle ABM=\angle CDN$, $\angle BAM=\angle DCN$. Докажите, что MN проходит через O или $MN \perp AB$. В каком случае будут иметь место оба эти обстоятельства одновременно?

284. На противоположных сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ построены правильные пятиугольники с центрами Q и Q_1. Докажите, что $Q_1Q_2 \parallel BC$ или Q_1Q_2 проходит через центр O параллелограмма.

В каком случае будут иметь место оба эти обстоятельства одновременно (т. е. $Q_1Q_2 \parallel BC$ и Q_1Q_2 проходит через O)?

285. Постройте трапецию, зная четыре отрезка, равные сторонам трапеции.

286. Докажите, что две трапеции равны, если четыре стороны первой трапеции равны соответствующим сторонам второй трапеции.

287. Докажите, что из всех трапеций с данными основаниями и высотой наименьший периметр имеет равнобочная.

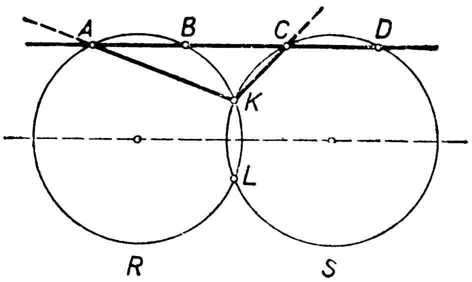


Рис. 223.

288. Постройте трапецию зная четыре отрезка, равные основаниям и диагоналям трапеции.

289. а) Докажите, что разность оснований трапеции всегда больше разности боковых сторон трапеции и меньше суммы боковых сторон.

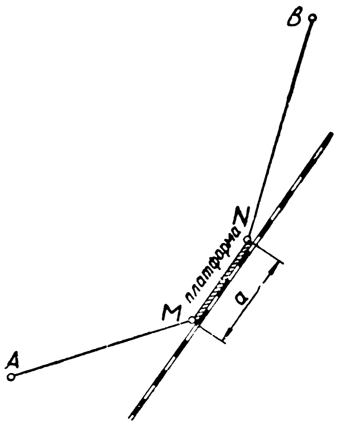


Рис. 224.

б) Докажите, что сумма оснований трапеции всегда меньше суммы ее диагоналей, но больше разности диагоналей.

290. Постройте трапецию, зная ее диагонали, угол между диагоналями и одну из боковых сторон.

291*. Средняя линия MN четырехугольника $ABCD$, соединяющая середины сторон AD и BC, равна полусумме сторон AB и CD. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

292. Постройте четырехугольник $ABCD$, зная все его стороны и угол между продолжениями боковых сторон AB и CD.

293. Постройте четырехугольник $ABCD$, зная его стороны AB и CD, диагонали AC и BD и угол между диагоналями.

294*. Даны две окружности R и S и прямая l. Проведите прямую, параллельную прямой l, на которой окружности R и S высекают равные хорды.

295*. Даны две равные окружности R и S, пересекающиеся в точках K и L. Прямая, параллельная линии центров этих окружностей, пересекает окружность R в точках A и B, а окружность S — в точках C и D (см. рис. 223). Докажите, что величина угла AKC не зависит от выбора проведенной прямой (а только от окружностей R и S).

296*. По одну сторону от железной дороги (которую мы представляем себе в виде прямой линии) расположены две деревни A и B (рис. 224). Где надо расположить на железной дороге платформу MN данной длины a с тем, чтобы общая длина дорог AM и BN, которые надо провести для соединения станции с деревнями A и B, была наименьшей?

Дополнения и методические указания к главе IV

1. Фигуры, переходящие в себя при параллельном переносе. [К § 32.] В предыдущих главах мы уделяли немало внимания фигурам, переходящим в себя при осевой симметрии (§ 4), при центральной симметрии (§ 15) и при повороте (§ 29). В противоположность этому в настоящей главе мы почти ничего не говорим о фигурах, переходящих в себя при параллельном переносе, ограничившись лишь указанием нескольких примеров таких фигур в § 32. Это связано с тем, что *всякая фигура, переходящая в себя при параллельном переносе, непременно является неограниченной,* в то время как

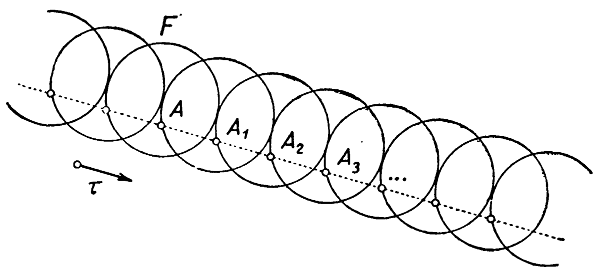


Рис. 225.

фигуры, обладающие осевой симметрией, центральной симметрией или симметрией порядка n, могут быть и ограниченными (см. примеры в § 1, 12, 21). Так как учащиеся не привыкли иметь дело с неограниченными фигурами, то на рассмотрении фигур, переходящих в себя при параллельном переносе, мы в учебном пособии не останавливаемся.

Легко понять, почему фигура F, переходящая в себя при некотором параллельном переносе τ, обязательно является неограниченной. Пусть A — произвольная точка фигуры F. Параллельный перенос τ переводит точку A в точку $A_1=\tau(A)$, принадлежащую той же фигуре (ибо по предположению $\tau(F)=F$). Значит, фигуре F принадлежит и точка $A_2=\tau(A_1)$, а потому и точка $A_3=\tau(A_2)$ и т. д. (рис. 225). Легко понять, что точки A, A_1, $A_2, \ldots$ расположены на одной прямой на равных расстояниях друг от друга; поэтому они образуют неограниченно удаляющуюся последовательность. Таким образом, фигура F должна быть неограниченной.

Сказанное отнюдь не означает, что фигуры, переходящие в себя при параллельном переносе, не заслуживают внимания. Достаточно сказать, что *если $y=f(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом T, то ее график представляет собой фигуру, переходящую в себя при параллельном переносе на вектор, параллельный оси абсцисс и имеющий длину T* (рис. 226 *а*, *б*). Обратно, *если график некоторой функции $y=f(x)$ переходит в себя при параллельном переносе в направлении оси абсцисс, то рассматриваемая функция — периодическая.*

Каждая прямая, параллельная направлению переноса, переходит в себя при параллельном переносе, т. е. является неподвижной прямой параллельного переноса. Неподвижных точек параллельный перенос вовсе не имеет.

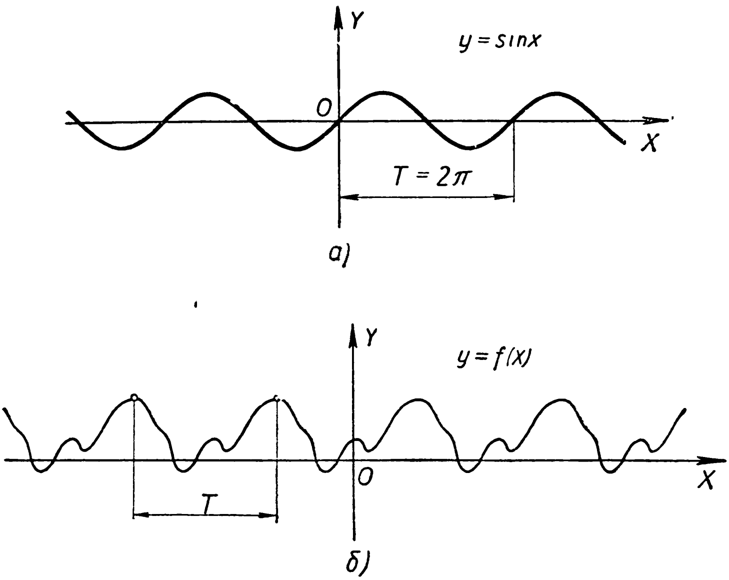


Рис. 226.

Отметим еще, что если

$$\ldots,\ a-3r,\ a-2r,\ a-r,\ a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ \ldots$$

— бесконечная в обе стороны арифметическая прогрессия с разностью r, то, отметив на числовой прямой точки, соответствующие членам этой прогрессии (рис. 227), мы получим множество точек, переходящее в себя при параллельном переносе вдоль прямой на расстояние r.

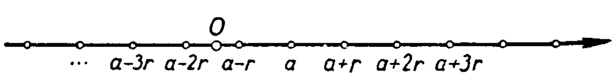


Рис. 227.

2. О понятии вектора. [К § 33.] Принятое в § 23 (стр. 76) определение вектора как направленного отрезка весьма просто и доходчиво. Однако оно страдает некоторой непоследовательностью, что выявляется в § 33 в связи с понятием равенства векторов. Направленный отрезок полностью определяется своими началом и концом. Два направленных отрезка, изображенных на рисунке 228, разумеется, различны (т. е. не совпадают друг с другом). Но, согласно определению, приведенному в § 33, мы считаем векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равными (т. е. одинаковыми?), что непоследовательно. Более того, впоследствии нам зачастую будет удобно обозначать равные (в смысле § 33) векторы одной и той же буквой (ср., например, рис. 323 на стр. 184) и не различать их. Иначе говоря, мы будем отождествлять все равные между собой векторы. Но это означает, что мы по сути дела откажемся от первоначального определения вектора как направленного отрезка (§ 23) и примем следующее определение: *вектором называется семейство всех параллельных между собой, одинаково направленных и имеющих одинаковую длину отрезков* (рис. 229). Таким образом, вектор представляет собой бесконечное множество направленных отрезков: из каждой точки плоскости исходит один отрезок, причем все эти отрезки параллельны, одинаково направлены и имеют одну и ту же длину.

В связи с тем, что вектор представляет собой семейство в с е х равных, параллельных и одинаково направленных отрезков, для любой точки A плоскости найдется в этом семействе отрезок, начинающийся в точке A. Нахождение такого отрезка называют о т к л а д ы в а н и е м   в е к т о р а $\boldsymbol{a}$ о т   д а н н о й   т о ч к и A (рис. 230). Эта операция, очевидно, сводится к построению отрезка, начинающегося в точке A и равного и параллельного данному. Итак, любой вектор $\boldsymbol{a}$ можно отложить от любой заданной точки A. Если B — конец построенного таким образом отрезка (рис. 230), то пишут

$$\boldsymbol{a}=\overline{AB}. \qquad (*)$$

При этом следует всегда помнить, что $\overline{AB}$ есть не все семейство отрезков, составляющее вектор, а лишь один отрезок этого семейства; однако такая за-

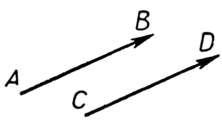


Рис. 228.

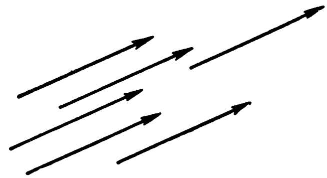


Рис. 229.

пись не вызывает недоразумений, так как этот отрезок полностью определяет все семейство.

В целях математической строгости можно было бы условиться применять обозначение $\overline{AB}$ для *направленного отрезка* с началом в точке A и концом в точке B, сохраняя обозначение $\boldsymbol{a}$ для *вектора*, т. е. для целого с е м е й с т в а таких отрезков. В таком случае запись (*) была бы некорректной (нельзя приравнять все бесконечное семейство одному его представителю) и ее было бы более правильным заменить записью

$$\overline{AB}\in\boldsymbol{a}, \qquad (**)$$

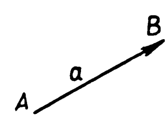


Рис. 230.

означающей, что направленный отрезок $\overline{AB}$ п р и н а д л е ж и т семейству отрезков (т. е. вектору) $\boldsymbol{a}$. Однако замена более правильной записи (**) записью (*) не будет вызывать недоразумений, в связи с чем мы всегда пользуемся записью (*) при откладывании векторов.

При определении вектора как направленного отрезка (§ 23) происходит подмена математических понятий, а именно подмена понятия *равенства* понятием *эквивалентности*. ***Равенство*** двух математических объектов имеет место тогда, и только тогда, когда эти объекты с о в п а д а ю т, т. е. когда мы дважды рассматриваем о д и н   и   т о т   ж е объект. ***Эквивалентностью*** же считают всякую связь между математическими объектами, обладающую следующими тремя свойствами:

I. *Всякий объект эквивалентен самому себе* («р е ф л е к с и в н о с т ь»).

II. *Если один объект эквивалентен второму, то и второй эквивалентен первому* («с и м м е т р и ч н о с т ь»).

III. *Если один объект эквивалентен второму, а второй — третьему, то первый объект эквивалентен третьему* («т р а н з и т и в н о с т ь»).

Например, п о д о б и е геометрических фигур является эквивалентностью (ибо выполнение свойств I—III здесь очевидно). Разумеется, *равенство* является частным случаем *эквивалентности*, но эквивалентность отнюдь не всегда сводится к равенству (как показывает пример подобных фигур). Направленные отрезки, у которых длины и направления совпадают, можно условиться считать эквивалентными (ибо условия I—III здесь очевидно выполняются), но называть их равными математически некорректно.

Для устранения некорректности такого вида в математике существует стандартный прием: *все эквивалентные между собой объекты собираются вместе в один «класс эквивалентности», и этот класс эквивалентности и объявляется тем новым объектом, который следует изучать.* Именно так обстоит дело с «равенством» треугольников (или других фигур). Изображенные на рисунке 231 треугольники, разумеется, не одинаковы, т. е. не совпадают; поэтому более правильно было бы и о них говорить, как об эквивалентных, а не о равных[1]. Но в геометрии принято считать два совпадающих при наложении треугольника одним и тем же треугольником, т. е. понимать под словом «треугольник» сразу весь класс треугольников, каждые два из которых можно совместить движением (ср. ниже, стр. 165). Только после этого соглашения приобретают смысл распространенные утверждения, вроде того, что «*задача построения треугольника по двум сторонам a и b и заключенному между ними углу C имеет единственное решение*» (т. е. что существует лишь один треугольник с данными сторонами a, b и углом C) — без такого нового понимания слова «треугольник» последнее утверждение будет явно неверным. И лишь это более широкое понимание слова «треугольник» (не подчеркиваемое в школе явно) делает законным употребление термина «равные треугольники» (ср. стр. 166).

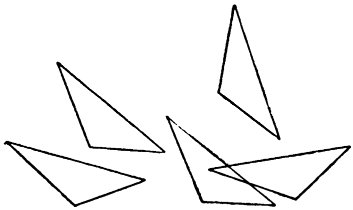


Рис. 231.

То же можно сказать и относительно направленных отрезков. Направленные отрезки, изображенные на рисунке 229, следует считать «эквивалентными», а не «равными». Если же собрать все эквивалентные направленные отрезки в один класс, то такой класс эквивалентности как раз и будет семейством всех параллельных, одинаково направленных отрезков одной и той же длины. В результате мы приходим к принятому нами определению вектора как семейства направленных отрезков.

Как же следует поступить при изложении учения о векторах в рамках средней школы? Нам кажется все же нецелесообразным (несмотря на полную математическую четкость) определять вектор как семейство направленных отрезков, а также пользоваться записью вида (**). По-видимому, разумнее всего определять в школе вектор как направленный отрезок, а о векторах, изображенных на рисунке 229, говорить, что это — «равные» векторы[2]. После этого следует сформулировать предложение о том, что вектор, равный данному, можно отложить от любой точки плоскости. Однако учитель, несомненно, должен хорошо понимать разницу между понятиями вектора (семейства направленных отрезков) и (одного) направленного отрезка.

В дальнейшем в дополнениях и методических указаниях к отдельным главам (но не в тексте пособия!) мы будем проводить четкое различие между понятиями «направленного отрезка» (одного!) и «вектора» (семейства направленных отрезков); таким образом, *выражения «направленный отрезок AB» и «вектор $\overline{AB}$» будут иметь у нас разный смысл.* В научной литературе говорят также

---

[1] Иногда треугольники, изображенные на рисунке 231, называют не «равными», а «конгруэнтными», т. е. вводят для эквивалентности фигур, выражающейся свойством «совпадать при наложении», название *конгруэнтность*. Такая терминология логически безупречна, но сравнительно мало распространена.

[2] Конечно, следует добиться у школьников ясного понимания того факта, что *векторы различных направлений* (хотя бы и имеющие одинаковую длину) *не являются равными.*

о «связанном векторе» (под которым подразумевается единственный направленный отрезок) и «свободном векторе» (этот термин имеет тот смысл, который мы придаем слову «вектор»). Однако такая терминология совершенно неприемлема в средней школе — она может только запутать учащихся, которым будет трудно разобраться в различии между двумя смыслами одного и того же термина «вектор».

3. О задачах и упражнениях. Число приведенных в книге задач, посвященных понятию параллельного переноса, меньше числа задач на центральную симметрию или тем более на осевую симметрию. Это связано с тем, что учащиеся должны уже привыкнуть как к общему понятию геометрического преобразования, так и к использованию конкретных геометрических преобразований; поэтому задерживаться на теме «Параллельный перенос» не следует. Вопрос о равенстве векторов, с которым связаны задачи **247—251**, является в этом разделе курса геометрии вспомогательным; ему надо уделить немного внимания. Однако поскольку понятие равенства векторов для дальнейшего чрезвычайно важно, то следует разобрать в классе несколько простых задач (например, **247**, **250**), которые будут способствовать закреплению этого понятия.

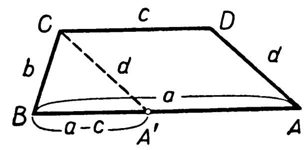


Рис. 232.

Несложные задачи **261—265** хорошо иллюстрируют определение параллельного переноса; результат задачи **264** может даже первоначально показаться неожиданным. Задачи на построение фигур, получаемых из данных параллельным переносом (задачи **273—276**), возможно, целесообразно рассмотреть сразу после прохождения § 36. Задачами **278—296** естественно кончить тему «Параллельный перенос».

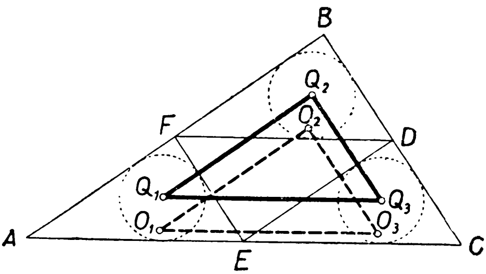


Рис. 233.

При этом задачи **285—293** фактически не слишком сильно связаны с использованием параллельного переноса; так, в задачах 285—287 можно было бы говорить не «перенесем параллельно сторону AD трапеции $ABCD$ в положение CA'» (рис. 232), а «проведем отрезок CA', параллельный боковой стороне AD трапеции»; тем самым мы избежим всякого указания на параллельный перенос. Мы, однако, включили эти несложные задачи в число тех, которые иллюстрируют понятие параллельного переноса, поскольку процедура их решения достаточно типична для использования этого преобразования. Так, в задаче **285** мы имеем четыре отрезка $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, первоначально расположенные так, что не видно, с чего можно начать построение трапеции. Параллельный перенос части чертежа, а именно отрезка AD на вектор $\overline{DC}$, сближает отрезки DA и CB; он приводит к образованию треугольника CBA', имеющего стороны известной длины: $CB=b$, $CA'=DA=d$ (см. теорему 2 § 36) с $BA'=BA-A'A=BA-CD=a-c$ (см. рис. 232); этот треугольник можно построить.

Самыми интересными из числа задач 278—296 являются, по-видимому, задачи 279 и 296; однако они сравнительно трудны. Нам кажется, что при наличии среднего состава учащихся эти задачи могут быть разобраны в классе; в сильном классе их следует задать на дом, а в слабом классе — опустить.

4. Примеры решения задач. 1) Задача 264 (стр. 116). Так как, очевидно, $\overline{AF}=\overline{FB}=\overline{ED}$ (рис. 233), то параллельный перенос на вектор $\overline{AF}$ переводит треугольник AEF в треугольник FDB. Другими словами, сдвинув треугольник AEF как целое в направлении стороны AB на расстояние, равное половине длины этой стороны, мы совместим его с треугольником FDB. При этом вписанная и описанная окружности треугольника AEF совместятся со вписанной и описанной окружностями треугольника FDB и точки Q_1, O_1 — с точками Q_2, O_2. Отсюда следует, что $\overline{Q_1Q_2}=\overline{O_1O_2}$ $(=\overline{AF})$. Точно так же доказывается, что $\overline{Q_2Q_3}=\overline{O_2O_3}$ $(=\overline{FE})$ и $\overline{Q_3Q_1}=\overline{O_3O_1}$ $(=\overline{EA})$. Поэтому треугольники $O_1O_2O_3$ и $Q_1Q_2Q_3$ равны (и каждый из них равен треугольнику AEF).

2) Задача 282 (стр. 117). Окружность R может быть переведена в окружность S параллельным переносом на вектор $\overline{OQ}$ и симметрией относительно

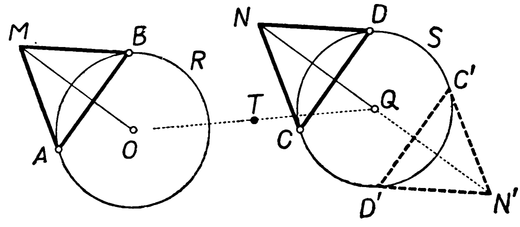


Рис. 234.

середины T отрезка OQ. При этом в обоих случаях хорда AB окружности R перейдет в хорду окружности S, равную и параллельную хорде AB (рис. 234; см. теорему 2 § 36 и теорему 2 § 18). В первом случае (хорда CD получается из AB параллельным переносом на вектор $\overline{OQ}$) правильный треугольник ABM переходит при параллельном переносе на вектор $\overline{OQ}$ в правильный треугольник CDN, точка M переходит в точку N и отрезок OM переходит в отрезок QN (см. теорему 2 § 36); следовательно, $OM \parallel QN$. Во втором случае (хорда $C'D'$ получается из хорды AB в результате симметрии относительно точки T) правильный треугольник ABM переходит при симметрии относительно T в правильный треугольник $C'D'N'$, точка M — в точку N'; поэтому отрезки OM и QN' будут симметричны относительно точки T и, следовательно, параллельны (см. теорему 2 § 18).

ГЛАВА V

ГОМОТЕТИЯ

§ 38. ГОМОТЕТИЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Определение. *Пусть O — данная точка плоскости и k — данное положительное число. Для любой отличной от O точки A найдется на луче OA такая точка A', что*

$$OA' = k \cdot OA$$

(рис. 235). *Переход от точки A к точке A' называется* ***гомотетией*** *с центром O и коэффициентом k.*

Это определение не указывает, в какую точку переходит при гомотетии точка O. Условимся считать, что *точка O* (центр гомотетии) *переходит при гомотетии сама в себя.*

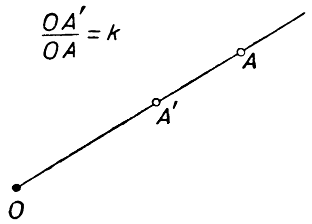


Рис. 235.

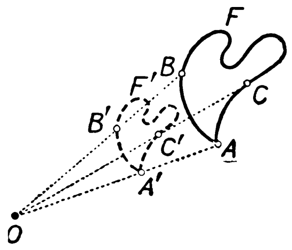


Рис. 236.

Предположим, что нам заданы точка O плоскости и положительное число k, а также некоторая ф и г у р а F. Для любой точки A фигуры F можно найти точку A', получающуюся из A с помощью гомотетии с центром O и коэффициентом k (рис. 236). Множество всех точек, получающихся из точек фигуры F с помощью рассматриваемой гомотетии, представляет собой некоторую новую фигуру F'. Эта фигура F' называется фигурой, получающейся из F при помощи гомотетии с центром O и коэффициентом k, или, короче, ф и г у р о й, г о м о т е т и ч н о й ф и г у р е F (с центром гомотетии O и коэффициентом гомотетии k).

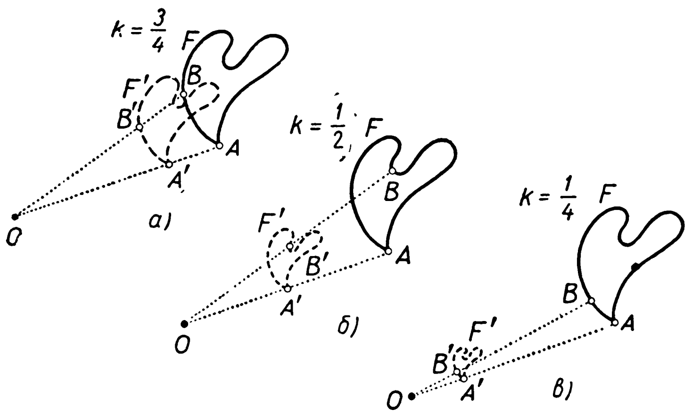


Рис. 237.

Гомотетию с центром O и коэффициентом k, меньшим единицы, иногда называют с ж а т и е м к точке O. Это название объясняется тем, что в результате такой гомотетии все точки плоскости приближаются к точке O, причем расстояния всех точек от точки O уменьшаются в одинаковое число раз. Так, например, при $k=\frac{1}{2}$ каждая точка A плоскости переходит в середину A' отрезка OA (рис. 237, *б*). На рисунке 237, *а* показана гомотетия с коэффициентом $k=\frac{3}{4}$, а на рисунке 237, *в* — гомотетия с коэффициен-

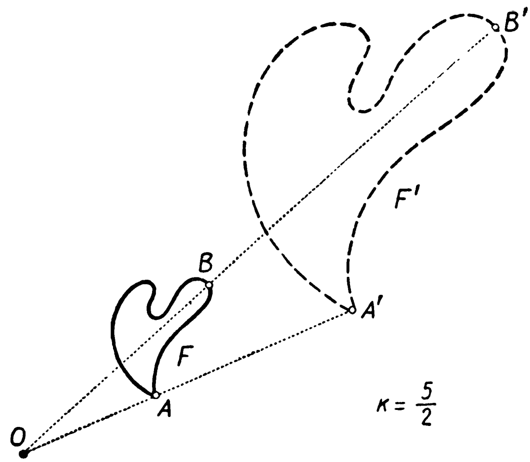


Рис. 238.

том $k=\frac{1}{4}$. Мы видим, что фигура F', гомотетичная F, будет иметь тем меньше размеры, чем меньше коэффициент гомотетии. Форма же фигуры при гомотетии не меняется, т. е. фигура F', гомотетичная F с коэффициентом гомотетии $k<1$, представляет собой «уменьшенную копию» фигуры F.

При $k>1$ гомотетия увеличивает («растягивает») фигуры (см. рис. 238, на котором изображена гомотетия с коэффициентом $k=\frac{5}{2}$).

§ 39. ГОМОТЕТИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Предположим снова, что *заданы точка O на плоскости и число k, которое*, однако, *мы теперь будем считать* ***отрицательным***. *Для любой отличной от O точки A* ***на продолжении*** *луча OA за точку O найдется такая точка A', что*

$$OA'=|k|\cdot OA$$

(рис. 239). *Переход от точки A к точке A' называется* ***гомотетией*** *с* ***центром*** *O и (отрицательным)* ***коэффициентом*** *k.*

Как и в случае положительного k, считают, что *точка O* (центр гомотетии) *переходит при гомотетии сама в себя.*

Пусть теперь заданы точка O плоскости, некоторое отрицательное число k, а также фигура F. Для любой точ-

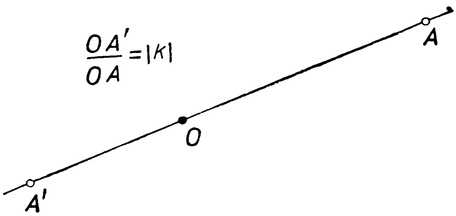


Рис. 239.

ки A фигуры F можно найти точку A', получающуюся из A с помощью гомотетии с центром O и коэффициентом k (рис 240). Множество всех точек, получающихся из точек фигуры F с по-

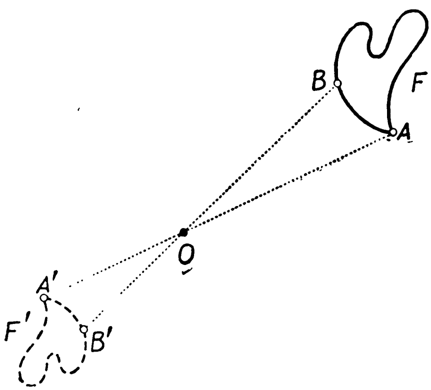


Рис. 240.

мощью рассматриваемой гомотетии, представляет собой новую фигуру F'. Эта фигура называется фигурой, получающейся из F при помощи гомотетии с центром O и коэффициентом $k<0$, или, короче, гомотетичной фигуре F. На рисунках 241, *а, б* показаны примеры гомотетии с отрицательным коэффициентом $\left(k=-\frac{1}{2}\right.$ и $\left.k=-\frac{3}{2}\right)$.

Гомотетия с центром O и коэффициентом гомотетии $k=-1$ совпадает, очевидно, с симметрией относительно точки O.

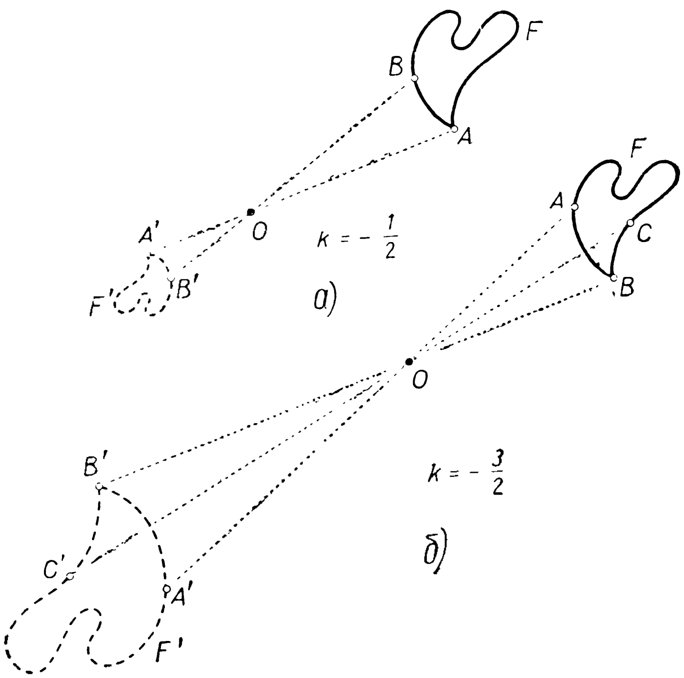


Рис. 241.

§ 40. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Необходимые инструменты: циркуль и линейка.

Построение гомотетичных фигур. На листе бумаги отметьте некоторую точку O и изобразите замкнутую линию F. На линии F отметьте ряд точек, достаточно густо расположенных на ней. Каждую из отмеченных точек соедините отрезком с точкой O и разделите соединяющий отрезок пополам. Последовательно соедините середины всех проведенных отрезков — это даст линию F', гомотетичную линии F с центром гомотетии O и коэффициентом $k=\frac{1}{2}$.

Постройте на этом же чертеже фигуру F', гомотетичную фигуре F с тем же центром гомотетии O и коэффициентом гомотетии $k=\frac{3}{4}$.

§ 41. ПАНТОГРАФ

Пантографом называется прибор, позволяющий механически вычерчивать фигуры, гомотетичные заданным фигурам. Рассмотрим четыре стержня, соединенных между собой так, как показано на рисунке 242. Стержни соединены шарнирами в таких точках A', M, N и P, что $MP=A'N$ и $NP=A'M$. Четырехугольник $A'NPM$ с равными противоположными сторонами является параллелограммом; углы его можно по желанию менять. Длины стержней выбраны так, что выполняется соотношение

$$\frac{OM}{OP}=\frac{MA'}{PA};$$

общую величину этих двух отношений мы обозначим через k.

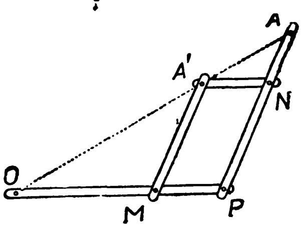


Рис. 242.

Из соотношения $\frac{OM}{OP}=\frac{MA'}{PA}$ и равенства углов OMA' и OPA (соответственные углы при параллельных MA' и PA) заключаем, что треугольники OMA' и OPA подобны (у них равны углы и отношения заключающих эти углы

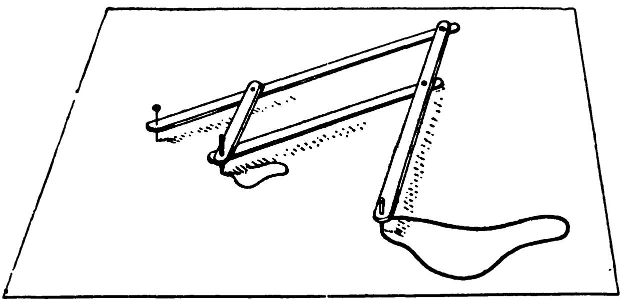


Рис. 243.

сторон). Поэтому $\angle A'OM=\angle AOP$ и, следовательно, *точки O, A' и A всегда лежат на одной прямой.* Из подобия этих треугольников вытекает также, что

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OM}{OP}=k.$$

Следовательно, при любых углах параллелограмма $A'NPM$ *точка A' получается из точки A при помощи гомотетии с центром O и коэффициентом k.*

Прибор используется следующим образом. Точка O укрепляется на чертеже неподвижно. В точке A помещается острие, а в точке A' — пишущее устройство (грифель). Если теперь мы будем двигать пантограф так, чтобы острие A описывало некоторую изображенную на чертеже линию F (рис. 243), то грифель A' опишет линию F', гомотетичную линии F с центром O и коэффициентом k.

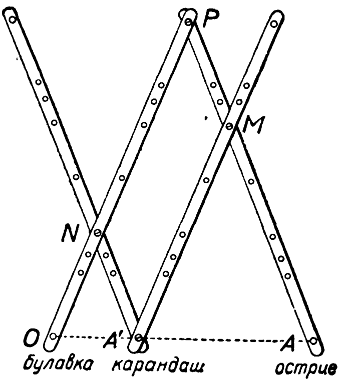


Рис. 244.

В описанном устройстве коэффициент гомотетии k не может меняться. Более удобен пантограф, в котором шарниры можно перемещать вдоль стержней, устанавливая значение коэффициента гомотетии k по желанию (рис. 244).

§ 42. СВОЙСТВА ГОМОТЕТИИ

Теорема 1. *Фигура, гомотетичная отрезку, представляет собой отрезок, концы которого получаются из концов первоначального отрезка с помощью той же гомотетии. Полученный отрезок параллелен первоначальному (либо расположен с ним на одной прямой;* рис. 245, *а, б) и имеет длину $|k|\cdot l$, где k — коэффициент гомотетии, а l — длина первоначального отрезка.*

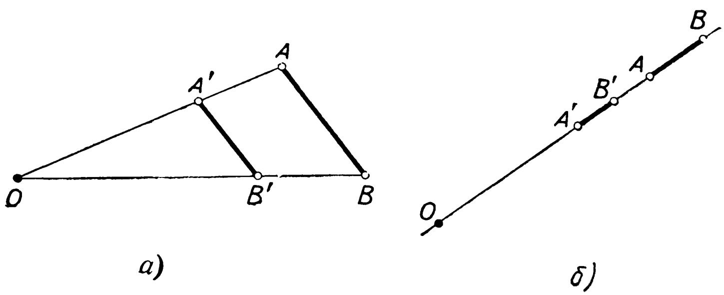


Рис. 245.

Доказательство. Пусть A и B — концы первоначального отрезка, а A' и B' — точки, получающиеся из A и B при рассматриваемой гомотетии. Если прямая AB не проходит через центр гомотетии O (рис. 246), то треугольники OAB и $OA'B'$ подобны (ибо $\angle AOB = \angle A'OB'$ и $OA' : OA = OB' : OB = |k|$). Следовательно, $\angle OAB = \angle OA'B'$ и значит $A'B' \parallel AB$; кроме того,

$$A'B' : AB = OA' : OA = |k|, \quad \text{т. е.} \quad A'B' = |k| \cdot AB.$$

Далее, пусть M — произвольная точка отрезка AB; обозначим через M' точку пересечения прямой OM с отрезком $A'B'$ (рис. 246). Из подобия треугольников OAM и $OA'M'$ следует, что

$$\frac{OM'}{OM}=\frac{OA'}{OA}=|k|.$$

Поэтому при гомотетии точка M переходит в точку M'. Отсюда следует, что отрезок AB переходит при гомотетии в отрезок $A'B'$. (На рис. 246, *а* изображен случай, когда $k>0$; случай $k<0$ показан на рис. 246, *б*.)

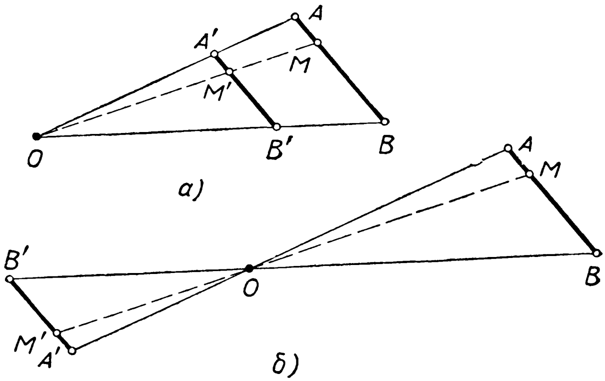


Рис. 246.

Если прямая AB проходит через точку O, то приведенное выше доказательство неприменимо. Рассмотрим этот случай.

Предположим сначала, что точки A и B расположены на прямой AB по одну сторону от точки O. Для определенности будем считать, что точка B расположена ближе к O, чем A (точка B может и совпадать с O). Выберем на отрезке AB произвольную точку M и обозначим через A', B' и M' точки, в которые переходят A, B и M при рассматриваемой гомотетии. Так как точки A, B и M лежат на прямой AB по одну сторону от точки O, то точки A', B' и M' также лежат по одну сторону от точки O. (При $k>0$ точки A', B' и M' лежат по ту же сторону от O, что и точки A, B, M, а при $k<0$ — по другую сторону; см. рис. 247, *а*, *б*.)

Из определения гомотетии следует, что

$$OA'=|k|\cdot OA,\quad OB'=|k|\cdot OB,\quad OM'=|k|\cdot OM.$$

Так как $OB<OM<OA$, то отсюда вытекает, что $OB'<OM'<OA'$, и потому точка M' лежит на отрезке $A'B'$. Обратно, если N' — произвольная точка отрезка $A'B'$, то $OB'<ON'<OA'$, откуда, разделив на $|k|$, получаем $OB<\frac{ON'}{|k|}<OA$. Следовательно, на от-

резке AB существует точка N, для которой $ON = \frac{1}{|k|} ON'$. Эта точка и переходит при рассматриваемой гомотетии в точку N'.

Таким образом, отрезок AB переходит при рассматриваемой гомотетии в отрезок $A'B'$. Далее,

$$A'B' = OA' - OB' = |k| \cdot OA - |k| \cdot OB = |k| \cdot (OA - OB) = |k| \cdot AB.$$

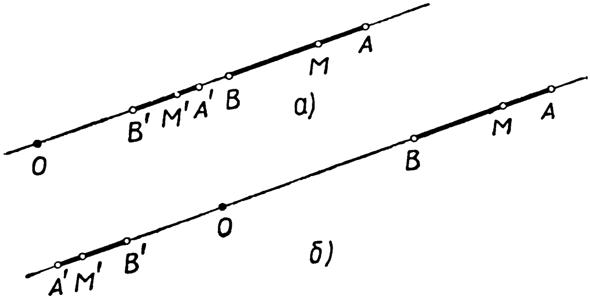


Рис. 247.

Пусть, наконец, точки A и B расположены на прямой AB **по разные стороны** от O (рис. 248, *а*, *б*). Тогда A' и B' также расположены по разные стороны от O. В силу доказанного выше, отрезок OA переходит при гомотетии в отрезок OA', а отрезок

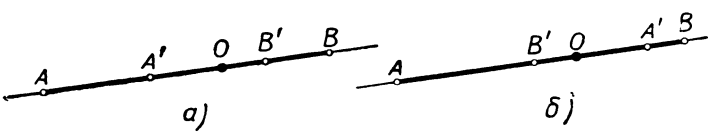


Рис. 248.

OB — в OB'. Следовательно, отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$. При этом

$$A'B' = OA' + OB' = |k| \cdot OA + |k| \cdot OB = |k| \cdot (OA + OB) = |k| \cdot AB.$$

Следствие. *При гомотетии все размеры фигуры пропорционально изменяются.* Более точно это означает следующее. *Пусть F — произвольная фигура и F' — фигура, гомотетичная F с коэффициентом гомотетии k. Тогда если A и B — две произвольные точки фигуры F, а A' и B' — точки фигуры F', в которые переходят A и B при рассматриваемой гомотетии, то*

$$\frac{A'B'}{AB} = |k|.$$

Например, если A, B, C, D, ... — какие-то точки фигуры F и A', B', C', D', ... — соответствующие им точки фигуры F' (т. е.

точки, в которые переходят A, B, C, D, ... при рассматриваемой гомотетии), то

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{A'D'}{AD}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{B'D'}{BD}=\ldots=|k|$$

(рис. 249).

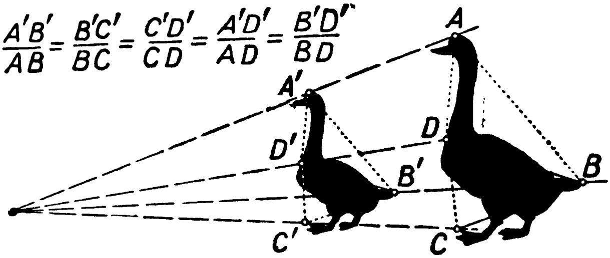


Рис. 249.

Теорема 2. *Фигура, гомотетичная многоугольнику M с коэффициентом гомотетии k, представляет собой многоугольник M', подобный многоугольнику M с коэффициентом подобия $|k|$. Вершины многоугольника M' получаются из вершин исходного многоугольника M с помощью той же гомотетии* (рис. 250).

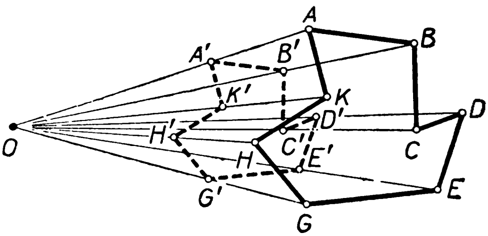


Рис. 250.

Доказательство. Обозначим через A, B, C, D, ..., K вершины многоугольника M, а через A', B', C', D', ..., K' — точки, в которые переходят эти вершины при рассматриваемой гомотетии (рис. 250). В силу теоремы 1, отрезок AB переходит в $A'B'$, отрезок BC — в $B'C'$ и т. д. Поэтому многоугольник M переходит в многоугольник M' с вершинами A', B', C', D', ..., K'. Далее,

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\ldots=\frac{K'A'}{KA}=|k|.$$

Кроме того,

$$\angle ABC=\angle A'B'C',\ \angle BCD=\angle B'C'D',\ \ldots,\ \angle KAB=\angle K'A'B'$$

(как углы с параллельными сторонами). Следовательно, углы многоугольника M' равны углам многоугольника M, а стороны многоугольника M' пропорциональны сторонам многоугольника M. Но это и значит, что многоугольник M' подобен многоугольнику M (с коэффициентом подобия $|k|$).

Теорема 3. *Фигура, гомотетичная окружности радиуса r с коэффициентом гомотетии k, представляет собой окружность радиуса $|k|\cdot r$. Центр этой окружности получается из центра исходной окружности с помощью той же гомотетии* (рис. 251).

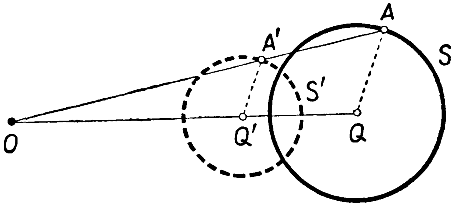


Рис. 251.

Доказательство. Пусть Q — центр заданной окружности S, а Q' — точка, в которую переходит Q при рассматриваемой гомотетии. Возьмем произвольную точку A окружности S и обозначим через A' точку, в которую A переходит при гомотетии (рис. 251). В силу теоремы 1, мы имеем

$$\frac{Q'A'}{QA}=|k|, \text{ т. е. } Q'A'=|k|\cdot QA=|k|\cdot r.$$

Следовательно, точка A' принадлежит окружности S' с центром Q' и радиусом $|k|\cdot r$, откуда видно, что окружность переходит при гомотетии в окружность.

Теорема 4. *Фигура l', в которую переходит прямая l при гомотетии с центром O и коэффициентом k, также является прямой линией. Если прямая l не проходит через точку O, то $l' \parallel l$. Если же прямая l проходит через точку O, то l' совпадает с l.*

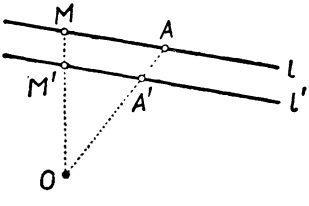


Рис. 252.

Доказательство. Пусть l — прямая, не проходящая через центр гомотетии O. Выберем на этой прямой точку A и обозначим через A' точку, в которую переходит A при рассматриваемой гомотетии. Наконец, проведем через A' прямую l', параллельную прямой l (рис. 252). Если M — произвольная точка прямой l, то прямая OM пересекает l' в некоторой точке M', и из подобия треугольников OMA и $OM'A'$ мы имеем:

$$\frac{OM'}{OM}=\frac{OA'}{OA}=|k|.$$

Следовательно, при рассматриваемой гомотетии точка M переходит в M'. Обратно, если N' — произвольная точка прямой l' и N — точка пересечения прямой ON' с прямой l, то точка N переходит при гомотетии в точку N'. Таким образом, *прямая l переходит в прямую l'.*

Если прямая l проходит через центр гомотетии O, то любая точка прямой l снова переходит в некоторую точку этой же прямой, и в любую точку прямой l переходит точка этой же прямой. Поэтому прямая l переходит при гомотетии сама в себя.

§ 43. ГОМОТЕТИЯ ОКРУЖНОСТЕЙ

Рассмотрим две окружности S_1 и S_2 радиусов r_1 и r_2. Пусть гомотетия с некоторым центром O и коэффициентом k переводит окружность S_1 в окружность S_2. В силу теоремы 3 § 42 должно быть

$$|k|\cdot r_1 = r_2.$$

Таким образом, получаем

$$|k| = \frac{r_2}{r_1},$$

т. е.

$$k = \frac{r_2}{r_1} \text{ или } k = -\frac{r_2}{r_1}.$$

Итак, *если гомотетия переводит окружность S_1 радиуса r_1 в окружность S_2 радиуса r_2, то коэффициент k гомотетии равен $\frac{r_2}{r_1}$ или $-\frac{r_2}{r_1}$.*

Рассмотрим эти два случая отдельно.

Теорема 1. *Пусть S_1 и S_2 — две произвольные окружности, r_1 и r_2 — их радиусы, а Q_1 и Q_2 — их центры* (рис. 253). *Если $r_1 \neq r_2$, то на прямой Q_1Q_2 существует единственная точка O, обладающая тем свойством, что окружность S_2 гомотетична окружности S_1 с центром гомотетии O и коэффициентом гомотетии $k = \frac{r_2}{r_1}$.*

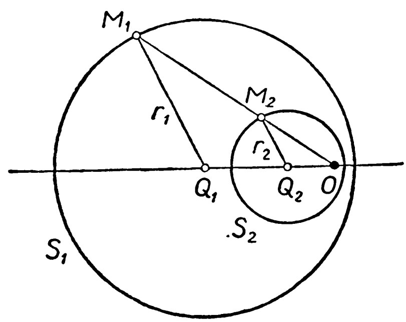


Рис. 253.

Доказательство. Проведем в окружностях S_1 и S_2 два параллельных радиуса Q_1M_1 и Q_2M_2, причем так, что направления от Q_1 к M_1 и от Q_2 к M_2 совпадают (рис. 253). Проведем прямую M_1M_2. Так как $r_1 \neq r_2$, то прямая M_1M_2 не параллельна прямой Q_1Q_2. Обозначим через O точку пересечения прямых M_1M_2 и Q_1Q_2. Из подобия треугольников OQ_1M_1 и OQ_2M_2 имеем:

$$\frac{OQ_2}{OQ_1} = \frac{Q_2M_2}{Q_1M_1} = \frac{r_2}{r_1} = k.$$

Поэтому точка Q_2 получается из точки Q_1 при помощи гомотетии с центром O и коэффициентом $k=\frac{r_2}{r_1}$. Так как $r_2=\frac{r_2}{r_1}r_1=kr_1$, то из теоремы 3 § 42 вытекает, что окружность S_2 получается из окружности S_1 при помощи той же самой гомотетии.

Докажем теперь, что найденная точка O — единственна. Пусть для определенности $r_1>r_2$, как на рисунке 253. В таком случае $OQ_1>OQ_2$, т. е. точка O лежит на продолжении отрезка Q_1Q_2 за точку Q_2. Из равенства

$$\frac{OQ_1}{OQ_2}=\frac{r_1}{r_2}$$

следует

$$\frac{OQ_2+Q_2Q_1}{OQ_2}=\frac{r_1}{r_2},$$

или

$$1+\frac{Q_2Q_1}{OQ_2}=\frac{r_1}{r_2},$$

т. е.

$$\frac{Q_2Q_1}{OQ_2}=\frac{r_1}{r_2}-1=\frac{r_1-r_2}{r_2}.$$

Таким образом, получаем

$$OQ_2=\frac{r_2}{r_1-r_2}Q_2Q_1.$$

Отсюда видно, что точка O зависит лишь от положения центров Q_1, Q_2 окружностей и от величин радиусов r_1, r_2, но не зави-

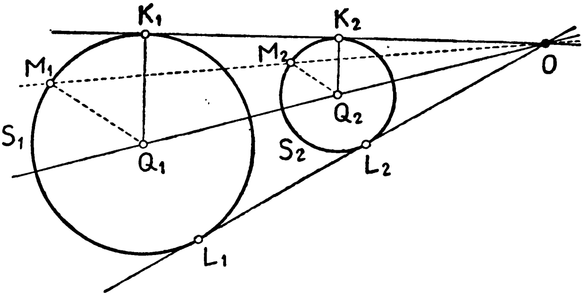


Рис. 254.

сит от выбора параллельных радиусов Q_1M_1 и Q_2M_2. Другими словами, для заданных двух окружностей S_1 и S_2 точка O существует только одна.

Точка O называется ***внешним центром гомотетии*** двух окружностей S_1 и S_2. Это название связано с тем, что точка O лежит вне отрезка Q_1Q_2 (ибо точки M_1 и M_2 лежат по одну сторону от прямой Q_1Q_2).

Если окружности S_1 и S_2 не лежат одна внутри другой, то они имеют две общие касательные K_1K_2 и L_1L_2 (рис. 254). Так как радиусы Q_1K_1 и Q_2K_2 параллельны (они перпендикулярны прямой K_1K_2), то их можно выбрать в качестве радиусов Q_1M_1 и Q_2M_2 рисунка 253. Поэтому касательная K_1K_2 проходит через точку O. Точно так же доказывается, что касательная L_1L_2 проходит через точку O. Таким образом, *внешний центр гомотетии двух неравных окружностей, не лежащих одна внутри другой, совпадает с точкой пересечения их общих внешних касательных* (рис. 255).

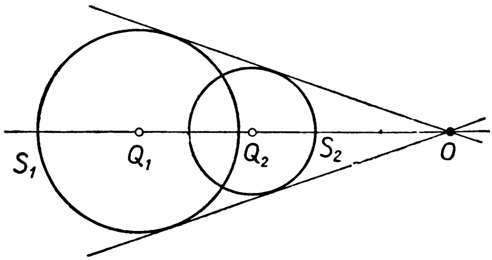


Рис. 255.

Если окружности S_1 и S_2 касаются внутренним образом (рис. 256), то их внешним центром гомотетии является точка касания.

Теорема 2. *Пусть S_1 и S_2 — две окружности, r_1 и r_2 — их радиусы, Q_1 и Q_2 — их центры* (рис. 257). *На прямой Q_1Q_2 существует единственная точка O', обладающая тем свойством, что окружность S_2 гомотетична окружности S_1 с центром гомотетии O' и коэффициентом гомотетии $k' = -\frac{r_2}{r_1}$.*

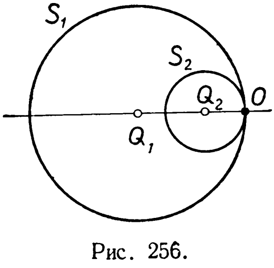


Рис. 256.

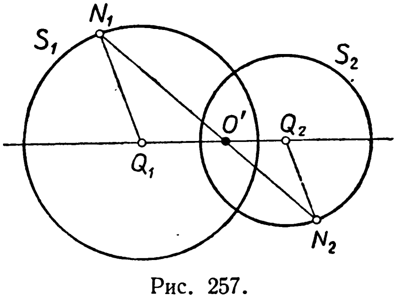


Рис. 257.

Доказательство. Проведем в окружностях S_1 и S_2 два параллельных радиуса Q_1N_1 и Q_2N_2, причем так, чтобы направления от Q_1 к N_1 и от Q_2 к N_2 были противоположны (рис. 257). Мы утверждаем, что точка пересечения прямых Q_1Q_2 и N_1N_2 и есть искомая точка O'. В самом деле, из подобия треугольников $O'Q_1N_1'$ и $O'Q_2N_2$ получаем:

$$\frac{O'Q_2}{O'Q_1}=\frac{Q_2N_2}{Q_1N_1}=\frac{r_2}{r_1}=|k'|,$$

причем точки Q_1 и Q_2 лежат по разные стороны от точки O'. Из теоремы 3 § 42 вытекает, что окружность S_2 получается из окружности S_1 при помощи гомотетии с центром гомотетии O' и (отрицательным) коэффициентом гомотетии $k'=-\frac{r_2}{r_1}$. Ясно, что точка O' лежит в н у т р и отрезка Q_1Q_2.

Из равенства

$$\frac{O'Q_2}{O'Q_1}=\frac{r_2}{r_1}$$

следует

$$\frac{Q_1Q_2-O'Q_1}{O'Q_1}=\frac{r_2}{r_1}, \text{ или } \frac{Q_1Q_2}{O'Q_1}-1=\frac{r_2}{r_1};$$

отсюда

$$\frac{Q_1Q_2}{O'Q_1}=1+\frac{r_2}{r_1}=\frac{r_1+r_2}{r_1},\ O'Q_1=\frac{r_1}{r_1+r_2}\,Q_1Q_2.$$

Последняя формула доказывает е д и н с т в е н н о с т ь точки O'.

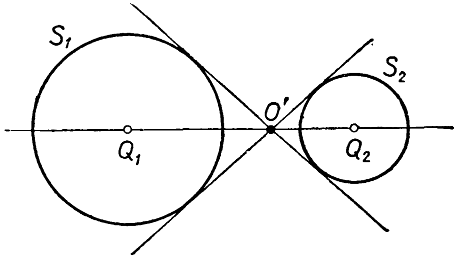


Рис. 258.

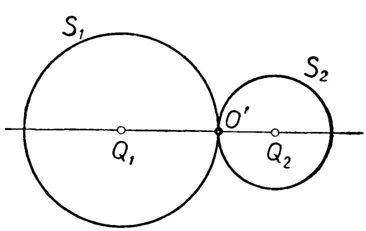


Рис. 259.

Точка O' называется ***внутренним центром гомотетии*** окружностей S_1 и S_2.

Если окружности S_1 и S_2 лежат одна вне другой, то они имеют две общие внутренние касательные и внутренний центр гомотетии O' совпадает с точкой пересечения этих касательных (рис. 258). Если окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом, то их внутренним центром гомотетии является точка касания (рис. 259).

Суммируя сказанное о внешнем и о внутреннем центре гомотетии двух окружностей, получаем: *если окружности S_1 и S_2*

не равны, то окружность S_1 можно двумя способами перевести при помощи гомотетии в окружность S_2 (рис. 260, *а*). *Если же окружности S_1 и S_2 равны, то S_1 можно при помощи гомотетии*

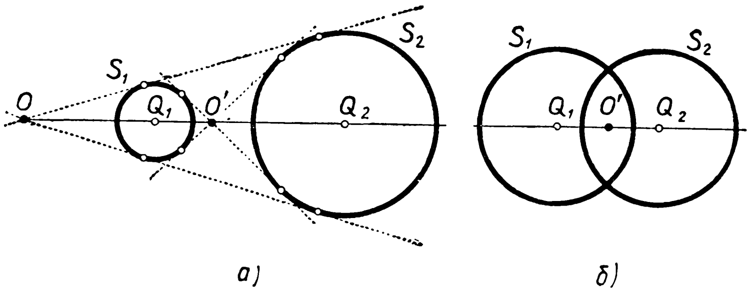


Рис. 260.

перевести в S_2 лишь одним способом (рис. 260, *б*; равные окружности не имеют внешнего центра гомотетии).

§ 44. ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МЕДИАН И ВЫСОТ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема о точке пересечения медиан треугольника тесно связана с гомотетией. Использование гомотетии не только позволяет дать иное доказательство этой теоремы, но и проливает новый свет на ее содержание. Это в свою очередь позволяет установить неожиданную связь между тремя замечательными точками треугольника.

Теорема. *Медианы произвольного треугольника ABC пересекаются в одной точке M и делятся в ней в отношении* $2:1$, *считая от вершины. Высоты треугольника ABC также пересекаются в одной точке H. Прямая MH проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC, причем точка M расположена между точками O и H и* $MO = \frac{1}{2}MH$ (рис. 261).

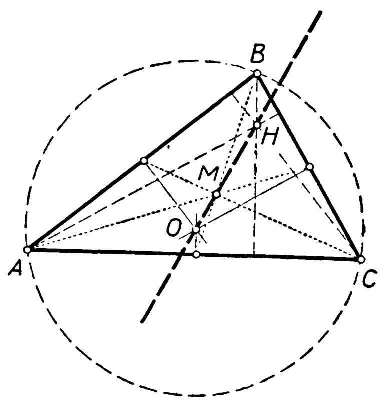


Рис. 261.

Доказательство. 1) Проведем медиану AD и обозначим через M точку, делящую медиану AD в отношении $AM:MD=2:1$ (рис. 262). Гомотетия с центром M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ переводит точку A в точку D, а отрезок AB — в параллельный ему отрезок, имеющий вдвое меньшую длину (теорема 1 § 42). Следовательно, этот отрезок совпадает со средней линией DE. Но это означает, что гомотетия с центром M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ переводит вершину B в середину E стороны AC, и потому точка M лежит на медиане BE и делит ее в отношении $BM:ME=2:1$. Аналогично, та же гомотетия переводит сторону AC в среднюю линию DF, и потому точка M лежит на медиане CF и делит ее в отношении $CM:MF=2:1$. Итак, все три медианы проходят через точку M и делятся в ней в отношении $2:1$.

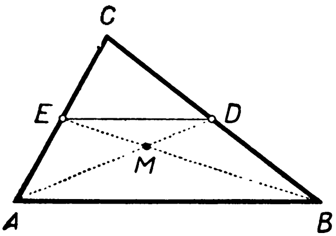


Рис. 262.

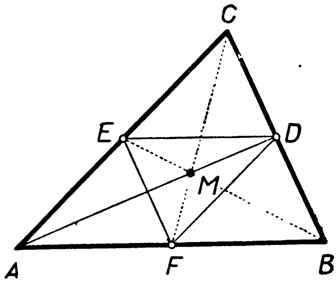


Рис. 263.

2) Как мы видели, гомотетия с центром M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ переводит вершины A, B, C треугольника в середины D, E, F его сторон. Иначе говоря, *рассматриваемая гомотетия переводит треугольник ABC в треугольник DEF* (рис. 263), *образованный средними линиями треугольника.*

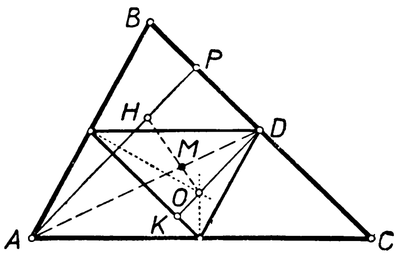


Рис. 264.

Высота AP треугольника ABC переходит при этой гомотетии в отрезок, проходящий через точку D и параллельный AP (см. теорему 1 § 42), т. е. в отрезок DK, перпендикулярный к стороне BC треугольника ABC и проходящий через ее середину D (рис. 264). Прямая DK проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC. Обозначим через H точку, которая переходит в O при рассматриваемой гомотетии. Так как прямая DK проходит через O и гомотетична прямой AP, то прямая AP проходит через точку H (ср. теорему 4 § 42, стр. 134). Точно так же доказывается, что высоты BQ и CR треугольника ABC (или их продолжения) проходят через точку H. Таким образом, H — **точка пересечения высот** треугольника ABC.

3) Заключительное утверждение теоремы вытекает из того, что при гомотетии с центром M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ точка H переходит в O.

Замечание. В случае остроугольного треугольника точка H пересечения высот расположена внутри треугольника (см. рис. 265, *а*).

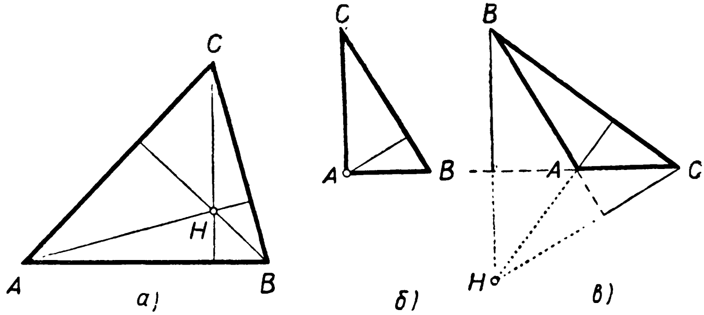


Рис. 265.

В прямоугольном треугольнике точка H совпадает с вершиной прямого угла (рис. 265, *б*); в случае тупоугольного треугольника точка H лежит вне треугольника (рис. 265, *в*).

§ 45. ЗАДАЧИ

Приведем примеры, иллюстрирующие применение гомотетии к решению задач на построение.

Задача 1. *Дан угол ABC и внутри него точка P. Провести через точку P прямую, отрезок MN которой, заключенный между сторонами угла, делится точкой P в отношении $NP:PM=$* $=1:2$ (рис. 266).

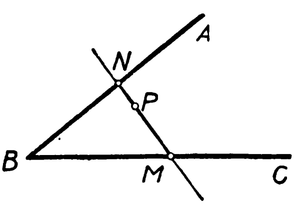


Рис. 266.

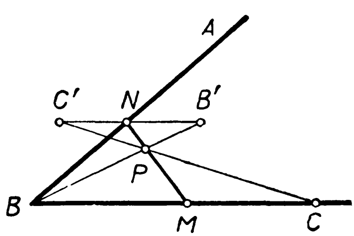


Рис. 267.

Решение.

Анализ. Предположим, что задача решена и прямая MN — искомая (рис. 267). Так как точка P лежит между точками M и N и $NP:PM=1:2$, то точка N получается из точки M гомотетией с центром P и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Но точка M принадлежит прямой BC. Следовательно, точка N принадлежит прямой $B'C'$, в которую переходит прямая BC при рассматриваемой гомотетии. Кроме того, точка N, по условию, принадлежит прямой AB. Поэтому N — точка пересечения прямых AB и $B'C'$.

Построение. Найдем точки B' и C', в которые переходят точка B и некоторая точка C стороны BC при гомотетии с центром P и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Точку пересечения прямых $B'C'$ и AB обозначим через N. Прямая NP — искомая.

Доказательство правильности построения и исследование, показывающее, что задача всегда имеет *единственное* решение, мы предоставляем читателю.

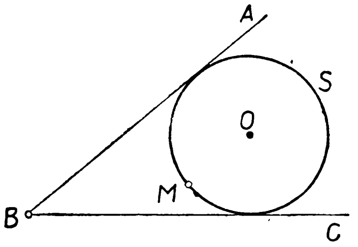


Рис. 268.

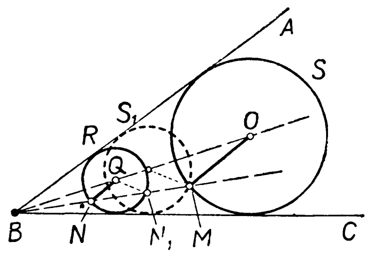


Рис. 269.

Задача 2. *Дан угол ABC и точка M внутри этого угла* (рис. 268). *Построить окружность S, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M.*

Решение.

Анализ. Предположим, что задача решена и S — искомая окружность (рис. 269). Произведем гомотетию с центром гомотетии B и каким-либо коэффициентом гомотетии k. При этом окружность S перейдет в какую-то окружность R, также вписанную в угол ABC, но уже, вообще говоря, не проходящую через точку M; если зафиксировать где-либо на биссектрисе угла ABC центр Q окружности R, то мы сможем ее построить. Окружность S пока указана быть не может (ибо мы не знаем коэффициента k гомотетии, переводящего окружность S в R); мы знаем только, что S проходит через точку M. Рассматриваемая гомотетия переводит точку M окружности S в точку N окружности R, лежащую на прямой BM; эту точку можно найти (как точку пересечения прямой BM с окружностью R). Далее, радиус OM окружности S гомотетичен радиусу QN окружности R; следовательно, $OM \parallel QN$ (см. теорему 1 § 42). Поэтому центр O искомой окружности S можно найти как точку пересечения биссектрисы BQ угла ABC и прямой $MO \parallel NQ$.

Построение. Строим произвольную окружность R, вписанную в угол ABC; центр этой окружности обозначим через Q. Далее, пусть N есть точка пересечения окружности R и прямой BM; O — точка пересечения биссектрисы угла и прямой $MO \parallel NQ$. Окружность S с центром O и радиусом OM и будет искомой.

Доказательство. Гомотетия с центром B и коэффициентом $\frac{BM}{BN}$ переводит окружность R в окружность S, проходящую через точку M и, так же как и окружность R, вписанную в угол ABC, т. е. в искомую окружность. Радиусу NQ окружности R гомотетичен радиус MO окружности S; поэтому $MO \parallel NQ$ и центр O окружности S — это есть точка пересечения прямой $MO \parallel NQ$ и биссектрисы угла ABC. (Центр O окружности S принадлежит биссектрисе угла ABC, ибо окружность S касается сторон угла.)

Исследование. Прямая MB пересекает окружность R в двух точках N и N_1. Используя в нашем построении одну или другую из этих точек, мы получим две окружности S и S_1, удовлетворяющие условию задачи. (Окружность S_1 на рис. 269 изображена пунктиром.) Таким образом, задача имеет *два* решения.

§ 46. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О ПОДОБИИ

В курсе геометрии VIII класса было дано следующее определение подобия многоугольников: *два многоугольника называются* ***подобными***, *если их соответствующие углы равны и соответствующие стороны пропорциональны.* Однако это определение относится только к многоугольникам; оно не применимо ни к каким другим фигурам. Здесь мы дадим более общее определение подобия, применимое к любым геометрическим фигурам.

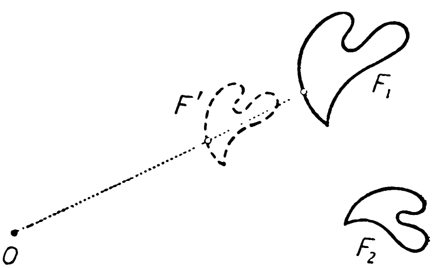


Рис. 270.

Определение. *Две фигуры F_1 и F_2 называются* ***подобными***, *если существует фигура F', равная одной из них и гомотетичная второй* (рис. 270).

Если фигура F' равна фигуре F_2 и гомотетична фигуре F_1 с центром гомотетии O и коэффициентом k, то говорят, что фигура F_2 подобна фигуре F_1 с коэффициентом подобия $|k|$. В частности, *если S_1 и S_2 — любые две окружности радиусов r_1 и r_2, то S_2 подобна S_1 с коэффициентом подобия $k=\frac{r_2}{r_1}$* (рис. 271). В самом деле, окружность S', гомотетичная окружности S_1 с коэффициентом гомотетии k (или $-k$), равна окружности S_2 (см. теорему 3 § 42).

Согласно нашему определению, любые две гомотетичные фигуры являются подобными. Наоборот, если фигуры F_1 и F_2 подобны, то, переместив фигуру F_2 в новое положение (т. е. заменив ее равной ей фигурой F'), можно добиться того, чтобы рассматриваемые фигуры стали гомотетичными.

В § 42 мы отмечали, что *при гомотетии все размеры фигуры пропорционально изменяются* (см. стр. 132—133, в частности, рис. 249).

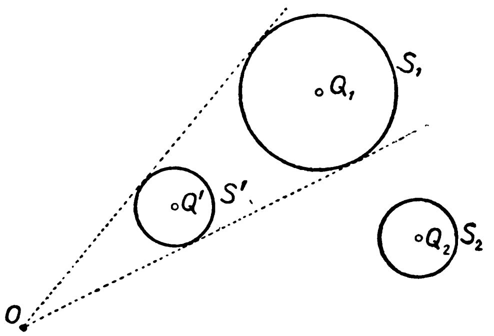


Рис. 271.

В силу нашего определения подобных фигур *все размеры одной из них получаются пропорциональным уменьшением (или увеличением) соответствующих размеров другой фигуры.* Здесь коэффициент пропорциональности — это и есть коэффициент подобия фигур. Так, например, если фигура F_2 подобна фигуре F_1 с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, то расстояние между любыми двумя точками A_2 и B_2 фигуры F_2 в два раза меньше расстояния между соответствующими им точками A_1 и B_1 фигуры F_1.

Докажем теперь, что *для многоугольников новое определение подобия совпадает с известным из курса VIII класса.* В самом деле, если два многоугольника F_1 и F_2 таковы, что существует многоугольник F', гомотетичный F_1 и равный F_2 (рис. 272), то углы многоугольника F_1 соответственно равны углам многоугольника F' и стороны многоугольника F_1 соответственно пропорциональны сторонам многоугольника F' (см. теорему 2 § 42). Но у многоугольника F' те же самые углы и стороны, что и у равного ему многоугольника F_2. Следовательно, многоугольники F_1 и F_2 подобны в том смысле, в каком это понималось в курсе геометрии VIII класса.

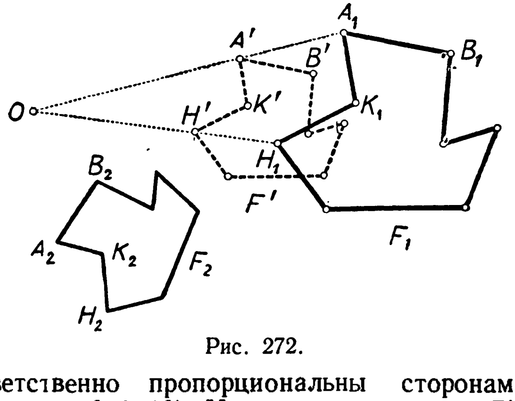


Рис. 272.

Обратно, пусть многоугольники F_1 и F_2 таковы, что их углы соответственно равны и стороны соответственно пропорциональны. Отношение сторон многоугольника F_2 к соответствующим сторонам многоугольника F_1 обозначим через k. Далее, обозначим через F' многоугольник, получающийся из F_1 гомотетией с коэффициентом k (и каким угодно центром гомотетии; рис. 272). В таком случае, в силу теоремы 2 § 42, многоугольники F' и F_2 будут иметь соответственно равные стороны и углы, т. е. эти многоугольники будут равны. Поэтому многоугольники F_1 и F_2 будут подобны и в смысле приведенного здесь общего определения подобия.

Задачи и упражнения к главе V

Определение гомотетии

299. Перерисуйте в тетрадь изображенную на рисунке 273 фигуру F; изобразите также фигуры F' и F'', гомотетичные F с центром гомотетии в указанной на рисунке точке O и коэффициентами гомотетии $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$.

300. Фигура F' получается из фигуры F гомотетией с центром O и коэффициентом k. Докажите, что также и фигура F получается из фигуры F' при помощи некоторой гомотетии. Каков будет коэффициент этой гомотетии?

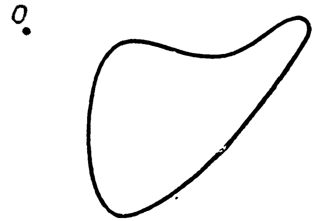


Рис. 273.

301. Фигуры F_1 и F_2 гомотетичны одной и той же фигуре F с центром гомотетии O и коэффициентами гомотетии k_1 и k_2. Докажите, что эти фигуры гомотетичны также между собой. Каков будет коэффициент гомотетии?

302. Докажите, что фигуры F' и F'', гомотетичные фигуре F с одним и тем же центром гомотетии O и коэффициентами гомотетии k и $-k$, симметричны относительно точки O.

303. Фигура F' гомотетична фигуре F с коэффициентом гомотетии k. Каждую точку фигуры F' соединим с соответствующей ей точкой фигуры F. Докажите, что множество середин всех полученных отрезков образует фигуру G, также гомотетичную фигуре F. Каков будет коэффициент гомотетии?

Свойства гомотетии

304. Какие точки переходят в себя при гомотетии с центром O и коэффициентом k? Какие прямые переходят в себя при гомотетии с центром O и коэффициентом k? Какие окружности переходят в себя при гомотетии с центром O и коэффициентом k?

305. Треугольник $A'B'C'$ получен из треугольника ABC некоторой гомотетией. Докажите, что каждая биссектриса треугольника $A'B'C'$ параллельна соответствующей биссектрисе треугольника ABC (или расположена с ней на одной прямой).

306. Трапеция $A'B'C'D'$ получается из трапеции $ABCD$ гомотетией с центром O; Q и Q' — точки пересечения диагоналей трапеций $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Докажите, что точки Q, Q' и O принадлежат одной прямой.

307. Произвольная точка Q плоскости соединена с вершинами треугольника ABC; середины отрезков QA, QB и QC обозначим через D, E и F. Докажите, что треугольник DEF равен треугольнику, образованному средними линиями треугольника ABC.

308. Из произвольной точки Q опущены перпендикуляры QM, QN и QP на стороны треугольника ABC; через середины отрезков QM, QN и QP проведены прямые, параллельные соответствующим сторонам треугольника (т. е. прямые $m \perp QM$, $n \perp QN$ и $p \perp QP$). Докажите, что треугольник, образованный этими последними тремя прямыми, равен треугольнику, образованному средними линиями треугольника ABC.

309. Даны две параллельные прямые l и m и точка Q, не принадлежащая ни одной из них. Через точку Q проводится произвольная секущая, пересекающая l и m в точках L и M. Докажите, что отношение $\frac{QL}{QM}$ не зависит от выбора этой секущей (а лишь от прямых l, m и от точки Q).

310*. Стороны треугольника $A'B'C'$ параллельны соответствующим сторонам треугольника ABC. Докажите, что треугольник $A'B'C'$ можно получить из треугольника ABC при помощи гомотетии или параллельного переноса.

311*. Треугольники $A'B'C'$ и $A''B''C''$ получаются из треугольника ABC при помощи гомотетии с центром O_1 и коэффициентом k_1 и при помощи гомотетии с центром O_2 и коэффициентом k_2. Докажите, что треугольник $A''B''C''$ может быть получен из треугольника $A'B'C'$ с помощью гомотетии или параллельного переноса. В каком случае треугольник $A''B''C''$ получается из треугольника $A'B'C'$ с помощью параллельного переноса?

312. Что представляет собой множество середин всех хорд окружности S, проходящих через фиксированную ее точку A?

313. Дана окружность и на ней три точки A, B и C. Проведите через точку A хорду AD, которая делится пополам хордой BC.

314. Треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника ABC гомотетией с центром O и коэффициентом $\frac{5}{6}$. Чему равно отношение периметра треугольника $A'B'C'$ к периметру треугольника ABC? Чему равно отношение площади треугольника $A'B'C'$ к площади треугольника ABC?

315. Окружность F' получается из окружности F при помощи гомотетии с центром O и коэффициентом k. Чему равно отношение длин окружностей F' и F? Отношение площадей двух кругов, ограниченных этими окружностями?

316. Отрезки AB и CD параллельны. Докажите, что если они не равны между собой, то существует два центра гомотетии, переводящей один из этих отрезков в другой, но если отрезки равны, то существует лишь один такой центр гомотетии. Где расположены рассматриваемые центры гомотетии?

317. Докажите, что если треугольник $A'B'C'$, гомотетичный треугольнику ABC, пересекает треугольник ABC, то пересечение также представляет собой треугольник, гомотетичный ABC. (Под треугольником здесь понимается ч а с т ь п л о с к о с т и; ср. задачу **267**.)

318. Докажите, что если параллелограмм $A'B'C'D'$, гомотетичный параллелограмму $ABCD$, пересекает $ABCD$, то пересечение также является параллелограммом. Будет ли этот параллелограмм обязательно гомотетичен параллелограмму $ABCD$?

319*. Пересечение квадрата $ABCD$ и квадрата $A'B'C'D'$, гомотетичного $ABCD$, также представляет собой квадрат. Что можно сказать о положении центра гомотетии, переводящей $ABCD$ в $A'B'C'D'$?

320. Даны два неравных квадрата K_1 и K_2. Докажите, что квадрат K_1 либо вовсе не может быть переведен в квадрат K_2 при помощи гомотетии, либо его можно перевести при помощи гомотетии в квадрат K_2 двумя различными способами.

321. Докажите, что никакой треугольник ABC нельзя перевести при помощи гомотетии в один и тот же треугольник $A'B'C'$ двумя различными способами.

322. Даны две точки A и B. Что представляет собой множество центров гомотетий, переводящих точку A в точку B?

323. Даны две параллельные прямые l и m. Где может располагаться центр гомотетии, переводящей прямую l в прямую m? Что представляет собой множество всевозможных центров гомотетии?

324. Пусть S_1, S_2 и S_3, S_4 — две пары касающихся между собой окружностей, вписанных в один и тот же угол; r_1, r_2, r_3 и r_4 — их радиусы (причем $r_1>r_2$ и $r_3>r_4$). Докажите, что $\frac{r_1}{r_2}=\frac{r_3}{r_4}$.

Построение гомотетичных фигур

325. Точка O совпадает с серединой стороны AB треугольника ABC. Постройте треугольник $A'B'C'$, гомотетичный треугольнику ABC относительно центра гомотетии O с коэффициентом гомотетии $k=\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 2; -2.

326. Дан треугольник ABC и точка Q внутри него. Постройте треугольник, гомотетичный треугольнику ABC с центром гомотетии Q и коэффициентом гомотетии $k=\frac{1}{2}$; 2; -1; -2.

327. Постройте параллелограмм, гомотетичный данному параллелограмму $ABCD$ с центром гомотетии в точке O пересечения диагоналей и коэффициентом гомотетии $k=\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 2; -2.

328. Постройте параллелограмм, гомотетичный данному параллелограмму $ABCD$ с центром гомотетии в точке Q, делящей диагональ AC в отношении $AQ:QC=1:2$, и коэффициентом гомотетии $k=-\frac{1}{2}$.

329. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Постройте трапецию, гомотетичную трапеции $ABCD$

а) с центром гомотетии в точке E пересечения прямых AD и BC и коэффициентом гомотетии $k_1=CD/AB$;

б) с центром гомотетии в точке F пересечения прямых AC и BD и коэффициентом гомотетии $k_2=-CD/AB$.

330. Постройте четырехугольник, гомотетичный данному четырехугольнику $ABCD$ с коэффициентом гомотетии $k=\frac{1}{2}$ и центром гомотетии: а) совпадающим с данной точкой Q_1, лежащей вне четырехугольника; б) совпадающим с вершиной A четырехугольника; в) совпадающим с данной точкой Q_2 стороны AB; г) совпадающим с точкой O пересечения диагоналей четырехугольника.

331. Дана окружность S с центром Q. Постройте окружности S_1 и S_2, гомотетичные окружности S с коэффициентами гомотетии $k_1=\frac{1}{2}$ и $k_2=-2$ и центром гомотетии

а) в точке Q;

б) в заданной точке M, расположенной внутри окружности S;

в) в данной точке A окружности S;

г) в данной точке N, расположенной вне окружности S.

Гомотетия окружностей

332. Даны две окружности S_1 и S_2 с центрами Q_1 и Q_2 и радиусами r_1 и r_2, $r_1>r_2$. К какой из точек Q_1 или Q_2 ближе внутренний центр гомотетии окружностей S_1 и S_2?

333. Даны две окружности R и S. Докажите, что либо окружность R можно двумя способами перевести в окружность S при помощи гомотетии, либо R можно перевести в окружность S при помощи гомотетии и при помощи параллельного переноса.

334. В каком случае внешний центр гомотетии двух окружностей R и S совпадает с их внутренним центром гомотетии?

335. Окружность S гомотетична окружности R с центром гомотетии в точке O окружности R и коэффициентом гомотетии k. Докажите, что окружности R

й S касаются. При каких k эти окружности будут касаться внешним образом и при каких — внутренним образом?

336. Дана окружность S с центром Q и радиусом r и точка O; $OQ=d$. Окружность S' гомотетична окружности S с центром гомотетии O и коэффициентом k. При каком k окружности S и S' касаются между собой?

337. а) Через точку касания M двух окружностей R и S проведена секущая, пересекающая второй раз окружности R и S в точках A и B. Докажите, что касательные к окружностям R и S в точках A и B параллельны.

б) Через точку M касания двух окружностей R и S проведены секущие k и l, пересекающие окружность R в точках A и B, а окружность S — в точках C и D. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

338. Через точку P пересечения общих внешних касательных двух окружностей R и S проведена прямая l, пересекающая окружность R в точках A и B, а окружность S в точках C и D (см. рис. 274). Докажите, что касательные к окружности R в точках A и B параллельны касательным к окружности S в точках C и D.

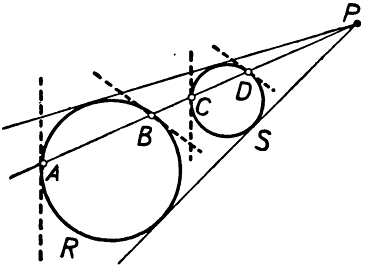


Рис. 274.

339. Через точку Q пересечения общих внутренних касательных окружностей R и S проведена секущая l, на которой окружности R и S высекают хорды AB и CD. На отрезках AB и CD по разные стороны от прямой l построены правильные треугольники ABM и CDN. Докажите, что прямая MN проходит через точку Q.

340. Через точку пересечения общих внутренних касательных двух окружностей S_1 и S_2 радиусов r_1 и r_2 проведена секущая, на которой окружности высекают хорды AB и CD. Докажите, что $AB:CD=r_1:r_2$.

341. Через точку M пересечения общих внешних касательных k и l окружностей R и S проведена секущая, пересекающая окружность R в точках A и B, а окружность S в точках C и D; прямая k касается окружностей R и S в точках E и F. Докажите, что треугольник ABE подобен треугольнику CDF.

342. Через точку N пересечения общих внутренних касательных двух окружностей R и S проведена секущая l, пересекающая окружность R в точках A и B, а окружность S — в точках C и D. Касательные к окружности R в точках A и B пересекаются в точке K, а касательные к окружности S в точках C и D — в точке L. Докажите, что

а) прямая KL проходит через точку N;

б) точки пересечения медиан треугольников ABK и CDL лежат на одной прямой с точкой N; высоты треугольников ABK и CDL, опущенные на стороны AB и CD, относятся как радиусы окружностей R и S.

343. Пусть M — точка пересечения продолжений боковых сторон AD и BC трапеции $ABCD$, N — точка пересечения ее диагоналей. Докажите, что

а) окружности R и S, описанные вокруг треугольников ABM и DCM, касаются между собой;

б) окружности R_1 и S_1, описанные вокруг треугольников ABN и DCN, касаются между собой;

в) радиусы окружностей R_1 и S_1 относятся как радиусы окружностей R и S.

344*. Окружности $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{n-1}, S_n$ попарно касаются друг друга внешним образом: S_1 и S_2 касаются в точке A_1, окружности S_2 и S_3 — в точке $A_2, \ldots$, окружности S_{n-1} и S_n — в точке A_{n-1}, окружности S_n и S_1 — в точке A_n. На окружности S_1 выбирается произвольная точка M_1. Пусть прямая M_1A_1 пересекает S_2 в точке M_2; прямая M_2A_2 пересекает S_3 в точке $M_3, \ldots$ $\ldots$, прямая $M_{n-1}A_{n-1}$ пересекает S_n в точке M_n; прямая M_nA_n пересекает S_1 в точке A_1'. Докажите, что точки A_1 и A_1' окружности S_1 являются диаметрально противоположными при n нечетном и совпадают при n четном.

Разные задачи

345. Как связана теорема о средней линии треугольника с теоремой 1 § 42?

346. а) Воспользуйтесь гомотетией для доказательства теоремы о средней линии трапеции.

б) Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

347. а) На основаниях AB и DC трапеции $ABCD$ по одну сторону от этих оснований (сверху оснований или снизу оснований, если считать основания трапеции горизонтальными) построены равносторонние треугольники ABM и DCN. Докажите, что прямая MN проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции.

б) На основаниях AB и CD трапеции $ABCD$, вне трапеции, построены квадраты. Докажите, что прямая, соединяющая их центры, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

348*. Докажите, что прямая, соединяющая середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон и через точку пересечения диагоналей.

349*. На плоскости даны две параллельные прямые l и l_1. При помощи одной линейки (без циркуля!)

а) разделите пополам данный отрезок AB прямой l;

б) через данную точку M проведите прямую, параллельную l и l_1.

350. Прямая l, параллельная основанию AC треугольника ABC, пересекает его боковые стороны в точках M, N; O и Q — центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и MBN. Докажите, что прямая OQ проходит через точку B.

351. Даны две окружности F и G и точка M. Проведите через M прямую l, пересекающую окружности F и G в таких точках A и B, что $AM:MB=$ $=2:3$.

352*. На стороне AB угла ABC дана точка M. Найдите на этой же стороне точку N, расстояние которой от точки M в два раза больше расстояния до стороны BC угла.

353. Две вершины треугольника перемещаются по сторонам угла ABC; стороны его остаются параллельными трем заданным прямым l, m и n. Докажите, что третья вершина треугольника описывает прямую, проходящую через вершину угла.

354*. Впишите в данный треугольник ABC другой треугольник MNP, стороны которого параллельны трем известным прямым m, n и p.

355. Прямая l пересекает стороны угла ABC в точках K и L, а параллельная ей прямая m — в точках M и N. Докажите, что перпендикуляры KP и LP, MQ и NQ, восставленные в точках K и L, M и N к сторонам угла, пересекаются в точках P и Q, лежащих на одной прямой с точкой B.

356. Стороны угла ABC пересечены рядом параллельных прямых. На отрезках, высекаемых сторонами угла на этих прямых, как на сторонах, строятся квадраты, расположенные с той же стороны от соответствующего отрезка, что и вершина B угла. Докажите, что центры всех этих квадратов принадлежат одной прямой, проходящей через точку B.

357. На стороне AB треугольника ABC отложены равные отрезки $AM=BN$; через точки M и N проведены прямые MP и NP, параллельные сторонам AC и BC треугольника. Докажите, что точка P принадлежит медиане CD, проведенной из вершины C.

358*. Пусть M, N и P — точки пересечения медиан трех треугольников ABC, ABD и ABE. Докажите, что если точки C, D и E принадлежат одной прямой, то и точки M, N и P также принадлежат одной прямой.

359. Дан треугольник ABC. Найдите внутри него точку M, расстояния от которой до сторон AB, BC и CA треугольника относятся друг к другу как $1:2:3$.

360. Даны две концентрические окружности R и S. Проведите прямую l, пересекающую эти окружности последовательно в таких точках A, B, C и D, что $AB=BC=CD$.

361. Даны три концентрические окружности S_1, S_2 и S_3. Проведите прямую l, пересекающую эти окружности последовательно в таких точках A, B, C, D, E и F, что $AB=BC$.

362. Имеется шарнирный параллелограмм $ABCD$, вершины A и B которого закреплены, а вершины C и D перемещаются, оставаясь на постоянных расстояниях $BC=AD$ от вершин B и A и на постоянном расстоянии $CD=AB$ друг от друга. Докажите, что в процессе изменения параллелограмма точка M пересечения его диагоналей описывает окружность.

363. Впишите в данный сектор OAB окружность, касающуюся ограничивающих сектор радиусов OA и OB и дуги AB окружности.

364. Дана окружность S с центром O и ее два взаимно перпендикулярных диаметра MN и PQ. Впишите в окружность S четыре меньшие круга, касающиеся окружности S и сторон углов MOP, PON, NOQ и QOM.

365. Впишите в данный треугольник ABC квадрат, две вершины которого лежат на основании AC треугольника, а две другие — на боковых сторонах.

366*. Даны угол ABC и окружность R. Впишите в угол окружность S, касающуюся окружности R.

367. Дан треугольник ABC. В точках пересечения его биссектрис с описанной вокруг треугольника окружностью проводятся касательные к окружности. Докажите, что образованный этими касательными треугольник гомотетичен треугольнику ABC.

368. Постройте треугольник, зная три точки пересечения его биссектрис с описанной вокруг треугольника окружностью.

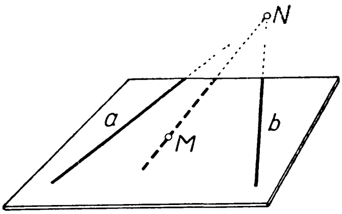


Рис. 275.

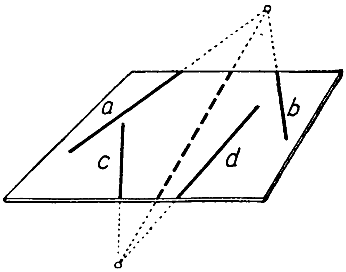


Рис. 276.

369*. а) Пусть P — произвольная точка плоскости, K, L, M — точки, симметричные точке P относительно середин D, E, F сторон AB, BC и CA треугольника ABC. Докажите, что отрезки CK, AL и BM пересекаются в одной точке Q и делятся в этой точке пополам.

б) Точка P описывает некоторую окружность S. Какую линию описывает точка Q, построение которой указано в задаче а)?

370*. Через середины D, E и F сторон треугольника ABC проведены прямые, параллельные биссектрисам противолежащих углов. Докажите, что

а) эти три прямые пересекаются в одной точке Q;

б) точка Q лежит на одной прямой с точкой M пересечения медиан треугольника и центром O вписанной в треугольник окружности, причем $QM:MO=1:2$.

371*. а) Докажите, что окружность S, проходящая через середины D, E и F сторон треугольника ABC, проходит также через основания P, Q, R высот и делит пополам отрезки высот, заключенные между точкой пересечения высот и вершинами. (Окружность S называется *окружностью девяти точек* треугольника ABC.)

б) Где располагаются центры гомотетии окружности S и описанной окружности треугольника? Чему равны коэффициенты гомотетии этих двух окружностей?

372*. Впишите в данную окружность S треугольник ABC, зная его вершину A и точку H пересечения высот.

373*. Даны окружность S с центром O и точка H внутри нее. Что представляет собой множество середин сторон всевозможных треугольников, вписанных в окружность S и имеющих H точкой пересечения высот?

374*. Дана окружность S. Что представляет собой множество точек пересечения высот всевозможных треугольников, вписанных в окружность S?

375*. а) Соедините данную точку M с точкой N пересечения двух данных прямых a и b, если точка N находится за пределами доступной нам области плоскости, например за пределами листа бумаги или доски, на которых осуществляется построение (рис. 275).

б) Соедините точку M с недоступной нам точкой пересечения прямой l и окружности F или двух окружностей F и G.

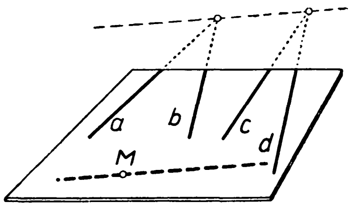


Рис. 277.

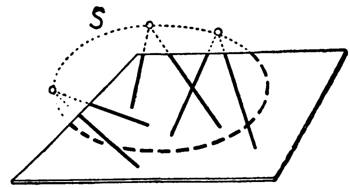


Рис. 278.

376*. Соедините между собой точки пересечения прямых a и b, c и d, если обе эти последние точки нам недоступны (рис. 276).

377*. Проведите через данную точку M прямую, параллельную «недоступной» нам прямой, заданной «недоступными» точками пересечения прямых a и b, c и d (рис. 277).

378*. Проведите окружность через три недоступные точки M, N и P, задаваемые каждая двумя проходящими через эту точку прямыми (рис. 278; разумеется, в этой задаче требуется начертить лишь ту часть искомой окружности, которая располагается в доступной для построений области).

Гомотетия и подобие

379. Перерисуйте в тетрадь пятиугольник $ABCDE$, изображенный на рисунке 279. Постройте пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, получаемый из пятиугольника $ABCDE$ гомотетией с центром гомотетии в указанной на рисунке 279 точке O и коэффициентом гомотетии $k=\frac{3}{4}$. Изобразите также пятиугольник $A'B'C'D'E'$, получаемый из пятиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ поворотом вокруг точки O на угол $\alpha=45°$. Проверьте, что пятиугольник $A'B'C'D'E'$ подобен пятиугольнику $ABCDE$.

380. Фигура F_2 гомотетична фигуре F_1 с коэффициентом гомотетии k. Каков коэффициент подобия фигуры F_2 по отношению к фигуре F_1?

381. Фигура F_2 подобна фигуре F_1 с коэффициентом подобия k. Докажите, что фигура F_1 подобна фигуре F_2. Каков будет коэффициент подобия?

382. Фигура F_1 подобна фигуре F с коэффициентом подобия k_1, а фигура F_2 подобна фигуре F с коэффициентом подобия k_2. Докажите, что фигура F_2 подобна фигуре F_1. Каков будет коэффициент подобия?

383. а) Докажите, что два круговых сектора подобны в том и только в том случае, если их центральные углы равны.

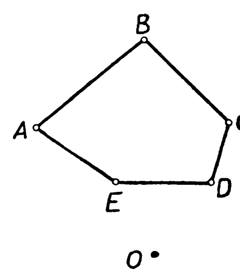


Рис. 279.

б) Докажите, что два круговых сегмента подобны в том и только в том случае, если ограничивающие их дуги имеют одинаковую угловую меру.

384. Докажите, что два кольца, образованные парой концентрических окружностей, подобны в том и только в том случае, если равны отношения радиусов, образующих кольцо окружностей.

385. а) Даны прямая l, окружность S и точка A. Постройте треугольник ABC, подобный заданному треугольнику MNP, так, чтобы вершина A совпала с заданной точкой, вершина B лежала на прямой l, а вершина C — на окружности S.

б) Даны три параллельные прямые l_1, l_2 и l_3. Постройте треугольник ABC, подобный заданному треугольнику MNP, так, чтобы его три вершины лежали на данных прямых.

в) Даны три концентрические окружности S_1, S_2 и S_3. Постройте треугольник ABC, подобный данному треугольнику MNP, так, чтобы его три вершины лежали на данных окружностях.

386*. Даны две окружности R и S, пересекающиеся в точках A и B. Докажите, что окружность R можно перевести в окружность S при помощи гомотетии с центром в точке A и последующего поворота вокруг A; коэффициент гомотетии равен отношению радиусов окружностей S и R, а угол поворота — углу между R и S[1]. При этом каждая точка M окружности R перейдет в точку M' пересечения прямой MB с S.

Рассмотрите случай, когда окружности R и S касаются в точке A.

387*. В данный угол ABC впишите окружность S, пересекающую заданную окружность R под данным углом α[1].

388*. а) Даны два непараллельных отрезка AB и CD. Докажите, что один из них всегда можно перевести в другой при помощи поворота вокруг некоторой точки O, сопровождаемого, быть может, еще гомотетией с центром в той же точке O.

б) Даны два подобных, но не равных треугольника ABC и DEF. В каком случае один из них можно перевести в другой при помощи поворота вокруг некоторой точки O, сопровождаемого гомотетией с центром в той же точке?

Дополнения и методические указания к главе V

1. Гомотетия как точечное преобразование. [К §§ 38—41.] После прохождения четырех предшествующих тем учащиеся легко воспримут, что гомотетия γ также представляет собой точечное преобразование. Правила, позволяющие по точке A найти точку $A'=\gamma(A)$, изложены в §§ 38, 39. Эти правила различны для гомотетии с положительным и отрицательным коэффициентом и потому гомотетию с коэффициентом $k>0$ и гомотетию с коэффициентом $k<0$, быть может, целесообразно определять не на одном уроке, а на разных. Нам даже кажется возможным в случае слабого класса вообще отказаться от рассмотрения гомотетии с отрицательным коэффициентом. При этом, разумеется, учитель должен будет тщательно отобрать дальнейшие теоремы и задачи, исключив те, в которых используется гомотетия с отрицательным коэффициентом (§§ 39 и 44, часть материала § 43; чертежи 239—241, 246, *б*; 247, *б*; 248, *б*; 257—259; 261—265, 266, 267; задачи **302**, **316**, **320**, **328**, **329** *б*), **332—334**, **339**, **340**, **342**, **343** б), в), **344**, **346** б), **347** б), **348**, **349** и **369—374**).

Подход к фигуре как к точечному множеству также будет привычен для учащихся (ср. § 40).

Новым по сравнению с предшествующими преобразованиями является то, что фигура $F'=\gamma(F)$, получаемая из фигуры F при помощи гомотетии γ, вообще говоря, не равна фигуре F. Исключение здесь составляет только

[1] Под углом между двумя (пересекающимися!) окружностями понимается угол между касательными к этим окружностям, проведенными в точке пересечения.

случай, когда коэффициент k гомотетии равен -1 и гомотетия представляет собой центральную симметрию, и случай $k=1$, когда гомотетия представляет собой так называемое ***тождественное преобразование***, переводящее каждую фигуру саму в себя.

На это обстоятельство учитель должен обратить внимание учащихся. Вместе с тем, не сохраняя размеров фигур, гомотетия сохраняет их форму. Подробнее об этом будет сказано ниже, в п. 6 (стр. 157—158).

С тем фактом, что фигура $F'=\gamma(F)$ не равна фигуре F, связана невозможность осуществления простого физического эксперимента, реализующего гомотетию. Механический способ осуществления гомотетии, описанный в § 41, разумеется, несложен. Однако тот факт, что при использовании пантографа осуществляется именно гомотетия, вовсе не является наглядно очевидным; доказательство этого факта, приведенное в § 41, потребовало некоторых рассуждений.

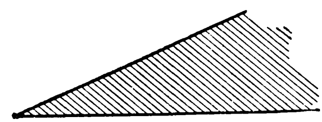


Рис. 280.

Единственной неподвижной точкой гомотетии с центром O (и любым коэффициентом $k \neq 1$) является точка O, неподвижными прямыми — все прямые, проходящие через точку O.

2. Фигуры, переходящие в себя при гомотетии. В главах I—IV мы немало внимания уделяли фигурам, переходящим в себя при рассматриваемых преоб-

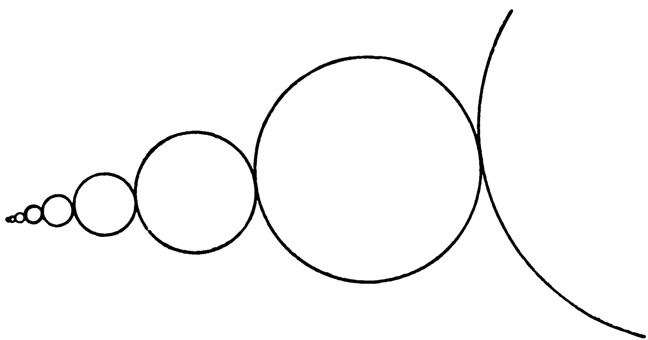


Рис. 281.

разованиях. Однако о фигурах, переходящих в себя при гомотетии, не было сказано ничего. Может создаться впечатление, что при $k \neq \pm 1$ таких фигур и не существует: ведь гомотетия переводит каждую фигуру в «уменьшенную или увеличенную ее копию», которая, как кажется, должна отличаться от исходной фигуры. И действительно, для ограниченных фигур дело обстоит именно так. Ведь если «диаметр» фигуры F (т. е. расстояние между двумя самыми далекими точками фигуры) равен l, то диаметр фигуры $F'=\gamma(F)$ равен $|k|\cdot l$, где k — коэффициент гомотетии γ, и, следовательно (при $|k| \neq 1$), фигура F' не может совпадать с фигурой F (так как они имеют разные размеры). В случае же неограниченных фигур такое рассуждение неприменимо (ибо не существует наибольшего расстояния между точками фигуры). И, действительно, среди неограниченных фигур существуют такие, которые переходят в себя при некоторой гомотетии с коэффициентом $k \neq \pm 1$.

Простейшим примером является прямая линия: если центр гомотетии лежит на прямой, то эта прямая переходит при гомотетии в себя (теорема 4 § 42). Угол с вершиной O (рис. 280) также переходит в себя при гомотетии с центром O и коэффициентом $k>0$. Фигура, изображенная на рисунке 281, также переходит в себя при гомотетии с центром O и некоторым коэффициентом $k>0$. Другим известным в математике примером фигуры, переходящей в себя при некоторой геометрии, является **логарифмическая спираль** (рис. 282). На каждом луче, выходящем из точки O, логарифмическая спираль высекает бесконечное множество точек (рис. 282), расстояния которых от точки

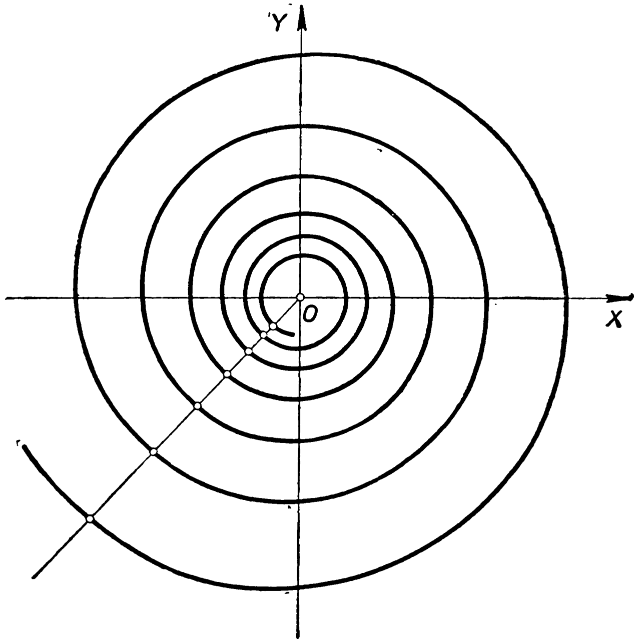


Рис. 282.

O выражаются числами, составляющими геометрическую прогрессию. Вообще, если

$$\ldots, aq^{-3},\ aq^{-2},\ aq^{-1},\ a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots$$

— бесконечная в обе стороны **геометрическая прогрессия** со знаменателем q, то, отметив на числовой прямой точки, соответствующие членам

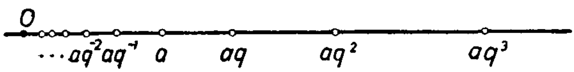


Рис. 283.

этой прогрессии (рис. 283), мы получим множество точек, переходящее в себя при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом q (ср. выше, стр. 120).

3. **Фигура, гомотетичная отрезку.** [К теореме 1 § 42.] При рассмотрении осевой симметрии, центральной симметрии, поворота и параллельного переноса мы существенно использовали то, что каждое из этих преобразований переводит любую фигуру в равную ей фигуру (теоремы 1 в §§ 7, 18, 27 и 36). Доказательство этого факта каждый раз проводилось со ссылкой на физический эксперимент. Как частный случай, мы получили из этих теорем, что отрезок каждым

из указанных преобразований снова переводится в отрезок (теоремы 2 в тех же параграфах). В п. 7 на стр. 40 мы отметили, что замена этих рассмотрений, опирающихся на физический эксперимент, чисто геометрическими доказательствами значительно усложняет изложение. В главе V, при доказательстве теоремы 1 § 42, мы вынуждены, однако, пойти на такое усложнение. Объясняется это тем, что здесь мы не имеем простого физического эксперимента, делающего тот факт, что отрезок переходит снова в отрезок, наглядно очевидным. Поэтому здесь чисто геометрическое доказательство является, пожалуй, единственно возможным. Такое доказательство и изложено в § 42.

Первая часть приведенного в § 42 доказательства теоремы 1, относящаяся к случаю, когда отрезок AB лежит на прямой, н е п р о х о д я щ е й через центр гомотетии O, сравнительно несложна. Отметим, впрочем, что как в настоящей книге, так и в пособии для учащихся эта часть доказательства несколько смазана. В сущности там доказано лишь, что *если точка M лежит на отрезке AB, то точка $M'=\gamma(M)$, в которую M переходит при гомотетии γ, лежит на отрезке $A'B'$* (где $A'=\gamma(A)$, $B'=\gamma(B)$). Для завершения доказательства надо было бы еще установить о б р а т н о е п р е д л о ж е н и е: *если точка N' лежит на отрезке $A'B'$, то точка N, переходящая в N' при гомотетии γ, лежит на отрезке AB*. После проведенного доказательства это почти очевидно: прямая ON' пересекает отрезок AB (рис. 284) и притом в такой точке N, что $\gamma(N)=N'$ (в силу уже доказанной части теоремы).

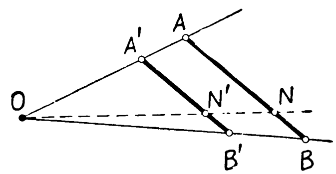


Рис. 284.

Мы не считаем, что учитель должен обязательно остановиться на этой завершающей части доказательства в классе, поскольку и без этого рассуждение большинству учащихся покажется достаточно убедительным. Указанная здесь завершающая часть доказательства, несмотря на ее внешнюю простоту, логически довольно тонка и требует некоторой математической культуры, которой мы не вправе требовать от всех учащихся.

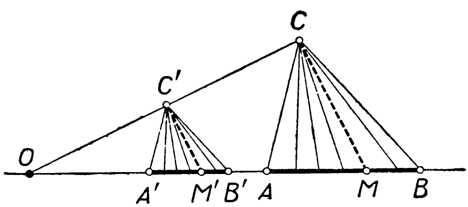


Рис. 285.

Вторая часть доказательства (в пособии для учащихся она напечатана мелким шрифтом) относится к случаю, когда отрезок AB лежит на прямой, проходящей через центр гомотетии O. Эта часть доказательства не особенно сложна; однако она сравнительно громоздка и к тому же отличается от первой части методом рассуждения: геометрические рассмотрения по сути дела заменяются здесь алгебраическими выкладками. В классе эта часть доказательства может быть опущена.

Заметим, что вторую часть доказательства можно провести и иначе, сведя ее к уже доказанной первой части. Для сравнения приводим такое рассуждение; оно является более «геометричным», но также довольно громоздко.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2 § 42. (Первая часть доказательства повторяет рассуждение на стр. 130—131; ср. рис. 246, *а*, *б*.)

Предположим теперь, что прямая AB проходит через точку O (рис. 285). Обозначим через A' и B' точки, в которые переходят при рассматриваемой гомотетии точки A и B; согласно определению гомотетии, точки A' и B' принадлежат прямой OAB. Выберем на плоскости еще какую-то (безразлично какую!) точку C, н е п р и н а д л е ж а щ у ю прямой AB. Пусть C' — точка, в которую переходит точка C при рассматриваемой гомотетии. Как уже мы знаем, отрезки AC и BC переходят в отрезки $A'C'$ и $B'C'$, при этом $A'C' \parallel AC$; $B'C' \parallel BC$ и $\frac{A'C'}{AC} = k$, $\frac{B'C'}{BC} = k$. Отсюда вытекает, что треугольники $A'B'C'$ и ABC подобны (ибо $\angle A'C'B' = \angle ACB$ и $\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$). Поэтому $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = k$.

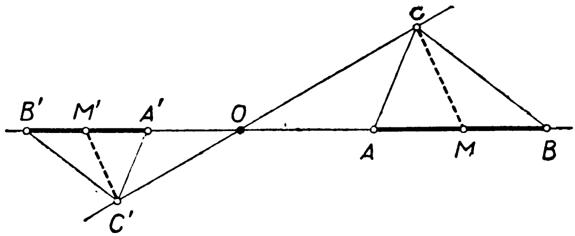


Рис. 286.

Далее, каждая точка M отрезка AB есть конец отрезка CM, заключенного в н у т р и угла ACB (рис. 285). Гомотетия переводит точку M в такую точку M' прямой OA, что $CM \parallel C'M'$ (по доказанному выше, ср. рис. 285 с рис. 246). Поэтому луч $C'M'$ заключен в н у т р и угла $A'C'B'$ (стороны которого параллельны сторонам угла ACB), и, значит, точка M' расположена м е ж д у A' и B', т. е. на отрезке $A'B'$.

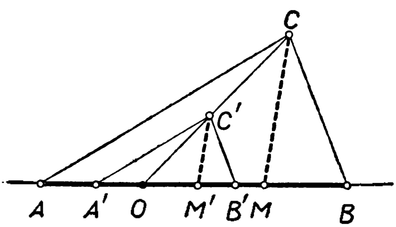


Рис. 287.

Таким образом, при гомотетии *каждая точка M отрезка AB переходит в некоторую точку M' отрезка $A'B'$, и потому отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$*. (На рис. 286 изображен случай, когда коэффициент гомотетии k отрицателен; на рис. 287 — случай, когда отрезок AB содержит точку O.)

4. Гомотетия окружностей. [К § 43.] Материал § 43 непосредственно примыкает к теореме 3 § 42. Здесь решается задача, в известном смысле о б р а т н а я той, ответ на которую дается теоремой 3 § 42. В самом деле, в § 42 мы считаем данными окружность F и гомотетию γ (т. е. центр гомотетии O и коэффициент k). Вопрос заключается в том, в какую фигуру переходит окружность F при гомотетии γ. Ответ на этот вопрос и дает теорема 3 § 42: оказывается, что *окружность при гомотетии снова переходит в окружность* (нахождение центра и радиуса которой указано в теореме 3). В § 43 решается иная задача: даны д в е окружности S и S'; требуется найти ту гомотетию, которая переводит окружность S в окружность S'. Оказывается, что для заданных окружностей S и S' существуют, вообще говоря, *две* таких гомотетии. Этот факт и устанавливается в § 43.

В пособие для учащихся материал § 43 не включен. Сделано это исключительно в целях экономии времени и места. Теоремы о гомотетии окружностей сравнительно несложны, очень поучительны и органически связаны с остальным содержанием главы V. При наличии резерва времени учитель может использовать этот материал. Но и в случае,если вопрос о гомотетии окружностей не будет специально разобран в классе, ряд задач, относящихся к гомотетии окружностей (см. задачи **332—344**), вполне может быть предложен учащимся.

5. Замечательные точки треугольника. [К § 44.] В § 44 приведено единое рассуждение, позволяющее установить следующие факты: 1) медианы произвольного треугольника пересекаются в одной точке M и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины; 2) высоты треугольника пересекаются в одной точке H; 3) точка M лежит на отрезке, соединяющем точку H с центром O описанной окружности, причем $HM:MO=2:1$. (Последний факт был впервые обнаружен крупнейшим математиком XVIII столетия, швейцарцем Леонардом Эйлером, большую часть жизни жившим и работавшим в Петербурге; по его имени, прямая, проходящая через точки H, M и O, называется прямой Эйлера.)

Все три факта, составляющие содержание теоремы § 44, не играют большой роли в математике; поэтому требовать заучивания этой теоремы вряд ли следует. Интересны здесь в первую очередь не результаты, а методы. Эта теорема ценна тем, что она показывает эффективность применения геометрических преобразований для получения новых фактов. Если, по мнению учителя, § 44 окажется сложным для учащихся, его можно свободно опустить, заменив разбором иной задачи, иллюстрирующей применение гомотетии.

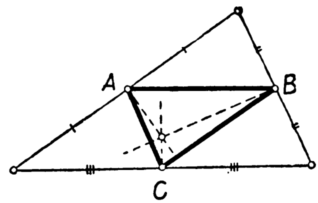


Рис. 288.

В пособии для учащихся теорема § 44 сформулирована иначе (с учетом того обстоятельства, что теорема о пересечении медиан учащимся известна). Следует отметить, что традиционное доказательство теоремы о пересечении высот треугольника в одной точке (ср. рис. 288), по-видимому, несколько проще для усвоения. Однако доказательство, приведенное в § 44, доставляет гораздо более сильный результат (теорему о прямой Эйлера).

Заметим, что в доказательстве теоремы о пересечении медиан существенно используется теорема о средней линии треугольника. Эта теорема с применением гомотетии может быть доказана особенно просто: гомотетия с центром C и коэффициентом $\frac{1}{2}$ переводит точки A и B в точки E и D и, следовательно, переводит основание AB в среднюю линию ED. Поэтому $ED \parallel AB$ и $ED=\frac{1}{2}AB$ (теорема 1 § 42).

Содержание § 44 иллюстрируется интересными (но не простыми) задачами **369—374**. В решении задач **369—370** используются соображения, близкие к тем, которые применялись в § 44. В решении задач **371—374** используется теорема о прямой Эйлера.

6. О подобных фигурах. [К § 46.] Учащиеся IX класса, разумеется, уже имеют интуитивное представление о подобных фигурах. Более того, представление о подобии возникает у детей в сравнительно раннем возрасте: ребенок совершенно четко скажет: «вот эти два изображения одинаковы, только одно больше, а другое меньше, а те два изображения — неодинаковы». Однако точно объяснить, что это значит, по каким признакам можно судить о подобии фигур, не сможет не только ребенок, но и большинство учащихся, окончивших 8 классов. Несмотря на то что о подобии многоугольников учащиеся знают из курса VIII класса, объяснить, что такое подобие произвольных фигур, они не сумеют. Например, вопрос о том, в каком случае две дуги окружности подобны, в подавляющем большинстве случаев вызовет непреодолимые затруднения.

Гомотетия дает возможность точного определения подобия фигур; такое определение и приведено в § 46. В случае многоугольников это определение отличается по форме от определения, известного из курса VIII класса, и потому приходится доказывать, что оба определения в случае многоугольников эквивалентны. Таким образом, новое определение (связанное с понятием гомотетии) не противоречит ранее полученным сведениям. Вместе с тем это новое определение гораздо содержательнее, так как применимо к произвольным фигурам, а не только к многоугольникам.

Приведенное в § 42 следствие к теореме 1 (стр. 132) вместе со сказанным в § 46 вскрывает основное содержание понятия подобия: *переход от фигуры к подобной ей фигуре характеризуется пропорциональным изменением всех размеров фигуры.* Такое описание подобных фигур можно рассматривать как обобщение известного из курса VIII класса определения подобных многоугольников (заметим, что *угол между любыми двумя прямыми фигуры F равен углу между соответствующими им прямыми подобной F фигуры F'*); его существо должно быть отчетливо понято учащимися. Однако это свойство подобных фигур трудно положить в основу формального определения, поскольку оно связано со сложным понятием взаимно однозначного соответствия между точками двух фигур. Поэтому в средней школе приходится базироваться на приведенном в § 46 определении, использующем преобразование гомотетии и имеющем более формальный характер. (Ср. ниже, п. 5 на стр. 173.)

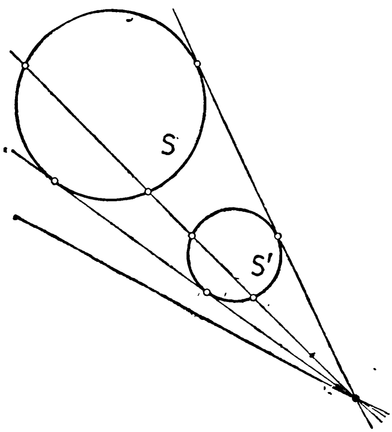


Рис. 289.

Понятие подобия устанавливает между фигурами определенное «отношение эквивалентности» (смысл этого термина объяснялся на стр. 121), разбивающее все фигуры на классы «эквивалентных» (подобных) фигур (ср. простые задачи **381—382**).

7. О задачах и упражнениях. Число задач и упражнений к главе V довольно велико. Разумеется, в классе нет возможности разобрать все эти задачи; однако следует иметь в виду, что тема «гомотетия» труднее предыдущих и овладение материалом требует решения значительного числа задач.

Задачи **299—303** являются вводными; задерживаться на них не следует. Задачи на построение гомотетичных фигур (**325—331**) в соответствии с порядком изложения теоретического материала сдвинуты к середине темы. Нам, однако, кажется, что эти задачи целесообразно решать сразу же после ознакомления со свойствами гомотетии — они помогут закрепить знание определения гомотетии и ее свойств, помогут научиться представлять гомотетичные фигуры. Разумеется, если учитель решил ограничиться лишь рассмотрением гомотетии с положительным коэффициентом, он и в этих задачах должен отбросить все задания, в которых фигурирует гомотетия с отрицательным коэффициентом.

Задачи на гомотетию окружностей составляют существенную часть всех задач. Они достаточно просты и интересны; пренебрегать ими не следует даже и в том случае, если учащиеся не знакомы с понятиями внешнего и внутреннего центра гомотетии двух окружностей. Большая часть этих задач свободно может быть решена и без использования материала § 43. Тот факт, что центр гомотетии двух окружностей часто совпадает с точкой пересечения их общих касательных, почти очевиден. В самом деле, пусть гомотетия с центром в точке O, внешней по отношению к окружности S, переводит S в окружность S' (рис. 289). Из определения гомотетии следует, что на каждой секущей l окружности S, проходящей через точку O, будут иметься д в е точки окружности S' (гомотетичные точкам пересечения l с S); на касательной m окружности S, проходящей через O, будет иметься о д н а точка окружности S' (гомотетичная точке касания m с S); наконец, проходящая через O прямая n, не пересекающая S, не будет содержать точек S'. Но отсюда следует, что касательные к окружности S, проведенные из точки O, являются одновременно и касательными к окружности S', т. е. что O есть точка пересечения общих касательных окружностей S и S'.

Несложные задачи **379, 383—385** иллюстрируют важное понятие подобия произвольных фигур; они заслуживают разбора в классе.

8. **Примеры решения задач.** 1) З а д а ч а **321** (стр. 147). Обозначим угол, в который вписаны окружности S_1, S_2, S_3 и S_4, через ABC, а центры окружностей — через Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 (рис. 290). Гомотетия с центром в точке B и коэффициентом $\frac{BQ_3}{BQ_1}$ переводит точку Q_1 в точку Q_3; стороны угла эта гомотетия переводит в себя. Окружность S_1 с центром Q_1 переходит при этом в окружность S_1' с центром Q_3 (см. теорему 3 § 42). Далее, так как окружность S_1 имеет единственную общую точку с прямой BA и единственную общую точку с BC, то окружность S_1' также имеет с прямыми BA и BC (которые при гомотетии переходят в себя) по о д н о й общей точке; другими

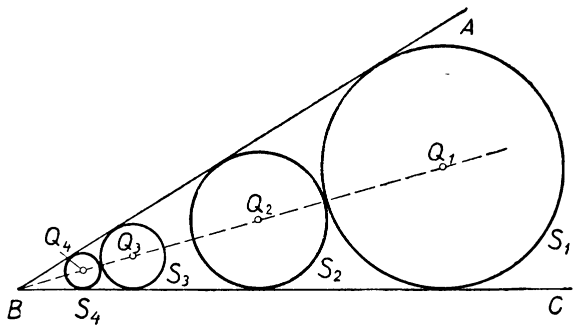


Рис. 290.

словами, она касается сторон угла ABC. Но окружность с центром Q_3, касающаяся сторон угла, существует только одна; следовательно, окружность S_1' совпадает с S_3. Далее, окружность S_2 рассматриваемая гомотетия переводит в некоторую окружность S_2', касающуюся сторон угла ABC (ибо окружность S_2 касается сторон угла) и касающуюся окружности S_3 (ибо окружность S_2 касается окружности S_1). Радиус r_2' окружности S_2' равен kr_2, где k — коэффициент рассматриваемой гомотетии (см. теорему 3 § 42). С другой стороны, радиус r_3 окружности S_3 равен $k \cdot r_1$; а так как $r_1 > r_2$, то $r_3 > r_2'$. Отсюда следует, что окружность S_2' совпадает с S_4. Теперь мы имеем $r_3 = k \cdot r_1$, $r_4 = k \cdot r_2$, откуда и вытекает утверждение задачи.

2) З а д а ч а **348** (стр. 149). Пусть E — точка пересечения продолжений боковых сторон AD и BC трапеции $ABCD$, а F — точка пересечения ее диагоналей AC и BD (рис. 291). Так как $\frac{ED}{EA} = \frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB}$, то гомотетия с центром в точке E и коэффициентом гомотетии $k = \frac{DC}{AB}$ переводит точку A в точку D, а точку B — в точку C; следовательно, эта гомотетия переводит основание AB трапеции в основание DC (см. теорему 1 § 42). В силу той же теоремы 1 § 42, середина M отрезка AB перейдет при рассматриваемой гомотетии в середину N отрезка DC. Так как точка N гомотетична точке M с центром гомотетии E, то *точки M, N и E лежат на одной прямой.*

Заметим теперь, что $\frac{FC}{FA} = \frac{FD}{FB} = \frac{CD}{AB}$. Поэтому гомотетия с центром F и коэффициентом $k_1 = -\frac{CD}{AB}$ переводит точку A в точку C, а точку B — в точку D, т. е. снова переводит основание AB трапеции в основание CD. Середину M основания AB эта гомотетия переводит в середину N основания CD. Поэтому точки M, N и центр гомотетии F лежат на одной прямой, т. е. *все четыре точки M, N, E и F лежат на одной прямой*, что и требовалось доказать.

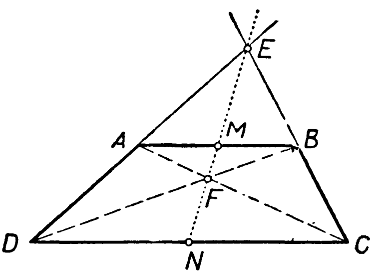


Рис. 291.

Заметим, что решение этой задачи, не использующее гомотетии, довольно утомительно.

3) Задача 365 (стр. 150). Предположим, что задача решена и $KLMN$ — искомый квадрат (рис. 292). Произведем гомотетию с центром A и некоторым коэффициентом k. В результате этой гомотетии квадрат $KLMN$ перейдет в квадрат $K'L'M'N'$, вершины K' и L' которого по-прежнему лежат на прямой AC, а вершина N' — на прямой AB. Однако вершина M' уже не будет принадлежать стороне BC. Если как-то выбрать точку N' на прямой AB, то квадрат $K'L'M'N'$ нетрудно будет построить (рис. 292). При этом, так как точки M, M' и центр гомотетии A лежат на одной прямой, то точка M является точкой пересечения прямых AM' и BC.

Отсюда вытекает следующее построение. Выбрав произвольную точку N' стороны AB, опустим из нее перпендикуляр $N'K'$ на основание AC и на отрезке $N'K'$ построим квадрат $K'L'M'N'$. Затем вершину M', не лежащую на сторонах AB и AC, соединим с точкой A. Пусть M — точка пересечения прямой AM' со стороной BC. Проведя $MN \parallel AC$ и опустив из точки M и точки N пересечения прямой MN со стороной AB перпендикуляры NK и ML на основание AC, мы и получим искомый квадрат $KLMN$.

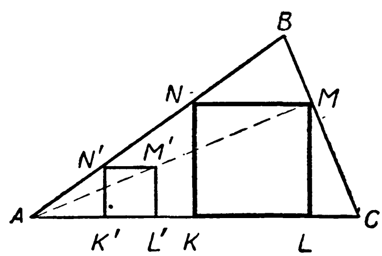
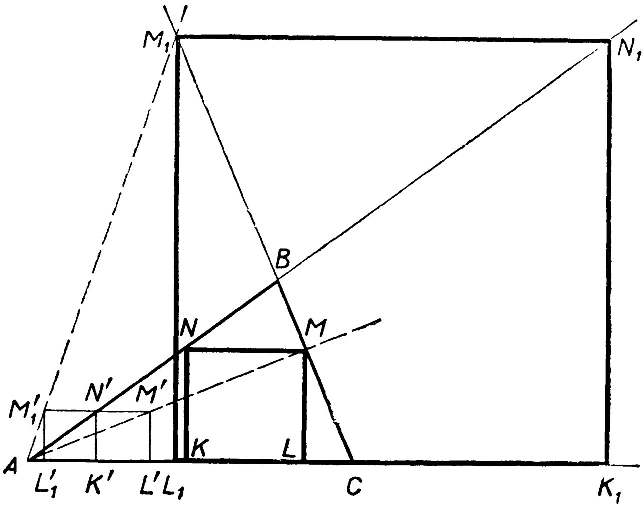


Рис. 292.

Доказательство правильности построения вытекает из того, что гомотетия с центром A и коэффициентом $\frac{AM}{AM'}$ переводит квадрат $K'L'M'N'$ в квадрат $KLMN$. Более интересно в этой задаче исследование.

Прежде чем приступать к исследованию, надо уговориться о точном смысле слов «квадрат, вписанный в треугольник ABC». В школьной практике под этими словами чаще всего понимают квадрат, целиком заключенный внутри треугольника ABC. При таком понимании слов «вписанный квадрат» задача будет, очевидно, иметь *единственное* решение, если ни один из углов A и C треугольника ABC не будет тупым, и не будет иметь *ни одного* решения, если один из углов A и C — тупой (в этом случае построенный квадрат $KLMN$ не будет заключаться внутри треугольника).

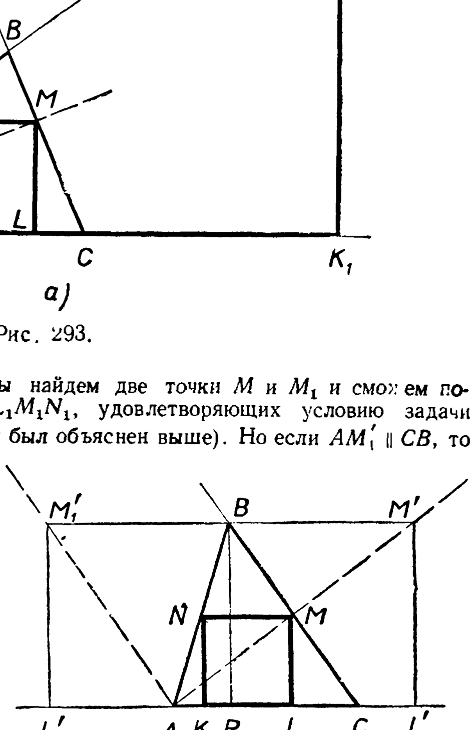
Зачастую под «многоугольником F, вписанным в многоугольник G», понимают такой многоугольник F, все вершины которого лежат на сторонах (или на продолжениях сторон!) многоугольника G; при этом многоугольник F не обязан заключаться внутри G. При таком понимании слов «вписанный квадрат» задача 365 будет, как правило, иметь *два* решения. В самом деле, существуют два квадрата $N'K'L'M'$ и $N'K'L'_1M'_1$ с данной стороной $N'K'$, две вершины которых лежат на стороне AC треугольника, а одна — на стороне AB (см. рис. 293, *а*). Вершину M искомого квадрата $KLMN$ мы получим, найдя точку пересечения прямых AM' и AM_1' со стороной BC. Если ни одна из этих прямых



а)

Рис. 293.

не параллельна стороне BC, то мы найдем две точки M и M_1 и сможем построить два квадрата $KLMN$ и $K_1L_1M_1N_1$, удовлетворяющих условию задачи (понимаемому в том смысле, который был объяснен выше). Но если $AM_1' \parallel CB$, то задача **365** будет иметь лишь *одно* решение.



б)

Рис. 293.

Для того чтобы отчетливее уяснить себе, при каких условиях задача **365** будет иметь единственное решение, достаточно принять за точку N' вершину B треугольника (рис. 293, *б*). Тогда легко увидеть, что условие $AM_1' \parallel CB$ равносильно равенству основания AC треугольника ABC отрезку $BM_1' = BP$, т. е. *равенству высоты* $BP = h$ *и основания* $AC = b$. [Этот результат можно получить из следующей изящной теоремы, которую можно легко доказать, используя подобие треугольников ABC и NBM, ABC и N_1BM_1 (рис. 293, *а*): если m и n — стороны двух квадратов, вписанных в треугольник ABC с соблюдением условий задачи 365 (понимаемых так, как здесь сказано), а $BP = h$ — его высота, то *отрезок* h *будет являться* ***средним гармоническим*** *для отрезков* m *и* n, т. е. $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$, или $h = \frac{2mn}{m+n}$.]

ГЛАВА VI

ПОНЯТИЕ О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ

§ 47. ЧТО ТАКОЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ?

Осевая симметрия, центральная симметрия, поворот, параллельный перенос, гомотетия имеют то общее, что все они «преобразуют» каждую фигуру F в некоторую фигуру F'. Поэтому их называют геометрическими преобразованиями.

Вообще, ***геометрическим преобразованием*** *называют всякое правило, позволяющее для каждой точки A на плоскости указать новую точку A', в которую переводится точка A рассматриваемым преобразованием.* Если на плоскости задана какая-либо фигура F, то множество всех точек, в которые переходят точки фигуры F при рассматриваемом преобразовании, представляет собой некоторую фигуру F'. В этом случае говорят, что *фигура F' получается из F при помощи рассматриваемого преобразования.*

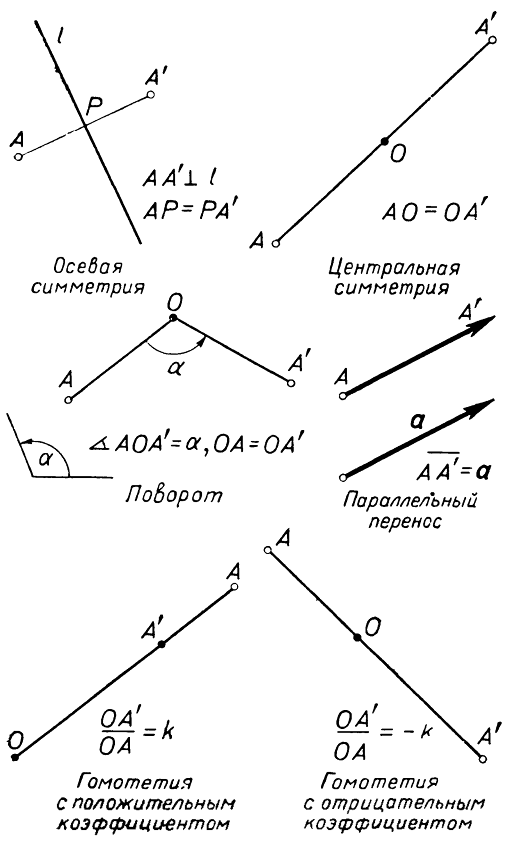


Рис. 294.

Пример. *Симметрия относительно прямой l* является геометрическим преобразованием. Правило, позволяющее по точке A найти соответствующую ей точку A', в этом случае заключается в следующем: *из точки A опускается перпендикуляр AP на прямую l и на его продолжении за точку P откладывается отрезок $PA'=AP$.*

На рисунке 294 схематически изображены правила, позволяющие перейти от точки A к точке A' для каждого из изучавшихся ранее геометрических преобразований.

Преобразования, которым были посвящены главы I — V, являются важнейшими в геометрии. Кроме них, в геометрии рассматриваются и многие другие преобразования; однако их изучение выходит за рамки курса средней школы.

§ 48. СЛОЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Предположим, что мы рассматриваем два геометрических преобразования, одно из которых называем «первым», а другое — «вторым». Возьмем на плоскости произвольную точку A и обозначим через A' ту точку, в которую переходит A при первом преобразовании (рис. 295). В свою очередь точка A' переводится вторым преобразованием в некоторую точку A''. Иначе говоря, точка A'' получается из точки A при помощи последовательного применения д в у х преобразований: сначала первого, а затем второго.

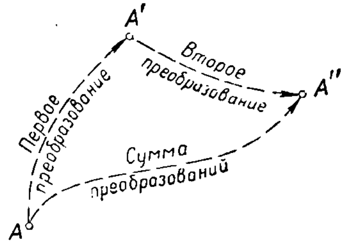


Рис. 295.

Результат последовательного выполнения взятых двух преобразований также представляет собой геометрическое преобразование: оно переводит точку A в точку A''. Это «результирующее» преобразование называется ***суммой*** первого и второго рассмотренных преобразований.

Пусть на плоскости задана какая-либо фигура F. Первое преобразование переводит ее в некоторую фигуру F' (рис. 296). Вторым преобразованием эта фигура F' переводится в некоторую новую фигуру F''. Сумма же первого и второго преобразований сразу переводит фигуру F в фигуру F''.

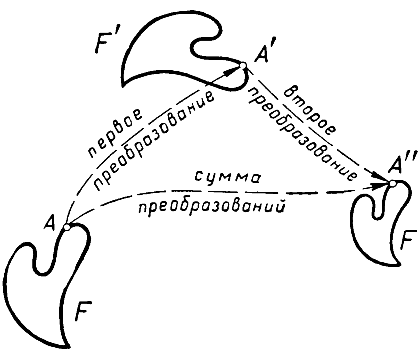


Рис. 296.

Пример. *Пусть первое преобразование представляет собой симметрию относительно точки O_1, а второе преобразование — симметрию относительно другой точки O_2. Найдем с у м м у этих двух преобразований.*

Пусть A — произвольная точка плоскости. Предположим сначала, что точка A не лежит на прямой O_1O_2. Обозначим через A' точку, симметричную точке A относительно O_1, а через A'' — точку, симметричную точке A' относительно O_2 (рис. 297). Так как O_1O_2 — средняя линия треугольника $AA'A''$, то отрезок AA'' параллелен отрезку O_1O_2 и имеет вдвое большую длину. Направление от точки A к точке A'' совпадает с направлением от точки O_1 к точке O_2. Обозначим через $\overline{MN}$ такой вектор, что $MN \parallel O_1O_2$, отрезок MN в два раза длиннее отрезка O_1O_2 и направления от M к N и от O_1 к O_2 совпадают. Тогда $\overline{AA''}=\overline{MN}$, т. е. точка A'' получается из точки A *параллельным переносом на вектор* $\overline{MN}$.

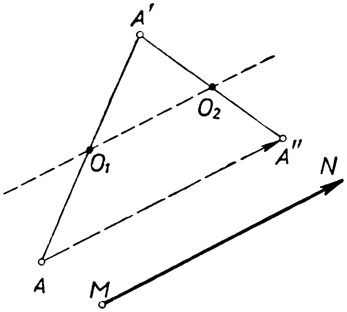


Рис. 297.

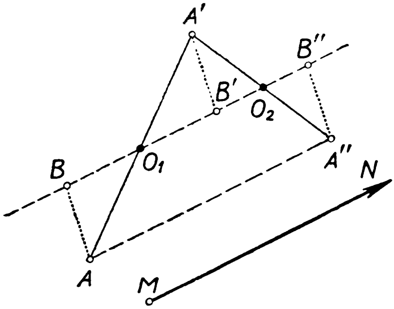


Рис. 298.

То же справедливо и для точки, лежащей на прямой O_1O_2. В самом деле, пусть точка B лежит на прямой O_1O_2 (рис. 298). Выберем на плоскости произвольную точку A, не лежащую на прямой O_1O_2, и обозначим через A' и B' точки, в которые переходят A и B при симметрии относительно точки O_1, а через A'' и B'' — точки, в которые переходят A' и B' при симметрии относительно точки O_2. В силу свойств центральной симметрии (см. теорему 2 из § 18) отрезки AB, $A'B'$ и $A''B''$ равны друг другу и параллельны. Из того, что отрезки AB и $A''B''$ равны и параллельны, вытекает, что $ABB''A''$ — параллелограмм. Поэтому $\overline{AA''}=\overline{BB''}$ (см. в § 33, стр. 107, признак равенства векторов). Так как точка A не лежит на прямой O_1O_2, то, в силу доказанного выше, $\overline{AA''}=\overline{MN}$. Следовательно, и $\overline{BB''}=\overline{MN}$.

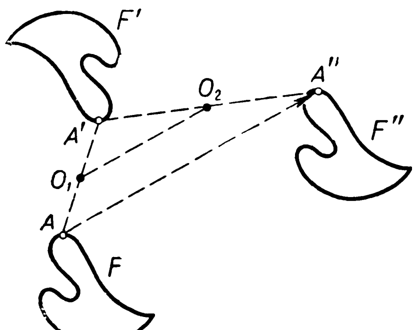


Рис. 299.

Окончательно мы получаем: *сумма симметрии относительно точки O_1 и симметрии относительно точки O_2 представляет собой параллельный перенос* (на вектор $\overline{MN}$, определение которого по точкам O_1 и O_2 было описано выше). На рис. 299 показано применение суммы симметрий к некоторой фигуре F.

§ 49. ДВИЖЕНИЯ

Осевая симметрия, поворот (в частности, центральная симметрия) и параллельный перенос имеют то общее, что каждое из этих преобразований переводит любую фигуру F на плоскости в равную ей фигуру F'. Преобразования, обладающие этим свойством, называются ***движениями***. Гомотетия представляет собой (при $|k| \neq 1$) пример преобразования, не являющегося движением. Действительно, движение переводит любую фигуру в равную ей фигуру, т. е. изменяет лишь положение фигуры на плоскости; гомотетия же изменяет и размеры фигур.

Рис. 300.

При выполнении самостоятельных работ, связанных с движениями (см. §§ 6, 17, 26, 35), мы пользовались листом кальки. Перемещая лист кальки, мы каждый раз убеждались, что фигура F', полученная из фигуры F рассматриваемым преобразованием, равна фигуре F. В случае гомотетии такое использование кальки невозможно: фигуры F и F' в этом случае не равны между собой.

Движения играют в геометрии чрезвычайно важную роль. Они не изменяют ни формы, ни размеров фигур, меняя лишь расположение фигуры. Но фигуры, отличающиеся лишь своим положением на плоскости (рис. 300), с точки зрения геометрии совершенно одинаковы. Именно поэтому их и называют в геометрии «равными фигурами». Ни одно свойство геометрической фигуры не отличается от соответствующего свойства равной ей фигуры. Так, например, равные треугольники имеют не только одинаковые стороны, но и одинаковые углы, медианы, биссектрисы, площади, радиусы вписанной и описанной окружностей и т. д.

Правда, например, измеренная по горизонтали «ширина» d первого из двух равных треугольников, изображенных на рисунке 301, отличается от «ширины» d' второго треугольника. Но это доказывает лишь то, что понятие «ширины» треугольника не имеет геометрического смысла и в геометрии не должно рассматриваться. Действительно, «ширина» связана с расположением треугольника по отношению к горизонтальному направлению. Но понятие «горизонтального направления» относится не к геометрии, а к астрономии или географии (это есть направление, параллельное поверхности земли, принимаемой за плоскость). Если мы повернем лист бумаги (т. е. подвергнем его движению), то направление, которое раньше было горизонтальным, может стать вертикальным или наклонным. Аналогично, о двух равных треугольниках, изображенных на классной доске, мы можем сказать, что они «различны», поскольку один из них находится в центре доски, а другой — у ее края. Однако это различие также не относится к геометрии (ибо в геометрии плоскость, моделью которой служит доска, считается безграничной). Цвет изображения также не относится к области геометрии: один и тот же чертеж, нужный для решения задачи, можно изготовить фиолетовыми чернилами, синими чернилами, карандашом — от этого его геометрическое содержание не изменится.

На уроках геометрии мы всегда считали равные фигуры (т. е. такие, которые можно совместить при помощи движения) одинаковыми или неразличимыми. Такие фигуры часто принимают за одну и ту же фигуру. Именно поэтому мы можем сказать, например, что задача построения треугольника по двум сторонам a, b и заключенному между ними углу C имеет только о д н о решение. На самом деле, конечно, треугольников, имеющих данные стороны a и b и заключенный между ними угол C данной величины, можно найти очень много (рис. 302). Однако все эти треугольники одинаковы, равны — и поэтому их можно принять за «один» треугольник.

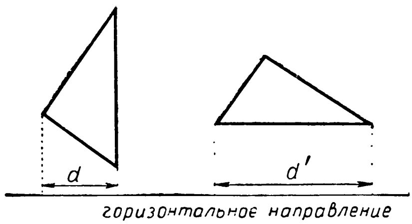


Рис. 301.

Таким образом, геометрия изучает те свойства фигур, которые одинаковы у равных фигур. Такие свойства можно назвать «геометрическими свойствами». Другими словами, можно сказать, что геометрия изучает свойства фигур, не зависящие от их расположения. Но фигуры, отличающиеся только расположением (равные фигуры), — это те, которые можно совместить с помощью движения. Поэтому мы приходим к следующему определению предмета геометрии: *геометрия изучает те свойства фигур, которые сохраняются при движениях.*

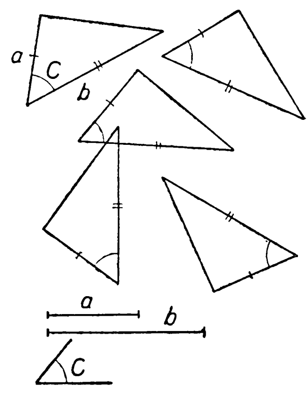


Рис. 302.

Итак, понятие движения играет в геометрии первостепенную роль. Движения («наложения») использовались в VI классе для определения равных фигур, для доказательства признаков равенства треугольников; понятие движения, как мы видели выше, позволяет также дать описание предмета геометрии.

Между тем в определениях понятия равенства фигур и понятия движения в школьном курсе геометрии имеется серьезный логический пробел. В самом деле, равные фигуры определялись как такие фигуры, которые могут быть совмещены наложением (т. е. движением). Движения же были определены выше как такие преобразования, которые переводят каждую фигуру в равную ей. Таким образом, равенство фигур определялось с помощью понятия движения, а движение определялось через понятие равенства фигур. Здесь получается так называемый порочный круг: первое понятие определяется через второе, а второе — через первое.

Этот логический пробел не мешает, однако, правильному пониманию геометрии. Дело в том, что когда в VI классе говорят о «перемещении» и «наложении» фигур, то имеют в виду вовсе не геометрическое преобразование (движение), а *физическое движение*, т. е. механическое перемещение тела как твердого целого. При этом происходит подмена математического понятия фигуры реальным предметом; например, треугольник мы представляем себе вырезанным из какого-то материала или начерченным на реальном листе бумаги, а не на воображаемой (математической) плоскости. С понятием же механического перемещения тела каждый из нас хорошо знаком из повседневного опыта; поэтому использование «перемещения фигур» в геометрии не вызывает никаких неясностей.

Таким образом, понятие движения и понятие равенства фигур имеют опытное происхождение, связанное с наблюдением окружающего нас материального мира. Никакого другого, чисто геометрического определения этих понятий в школьном курсе геометрии нет. Поэтому доказательства самых первых теорем о равенстве фигур (признаков равенства треугольников) представляют собой по существу описание физического процесса наложения материальных (например, вырезанных из картона) треугольников. Последующие же теоремы, базирующиеся на признаках равенства треугольников, доказываются уже «чисто геометрически», без обращения к физическому эксперименту. С таким же положением мы еще раз встречаемся в курсе IX класса. Когда мы говорим о равенстве двух произвольных фигур, симметричных друг другу относительно оси, мы вынуждены пользоваться физическим экспериментом (перегибанием листа бумаги) — ведь само определение равных фигур существенно использует физические представления. Аналогично, при изучении центральной симметрии и дальнейших движений мы доказывали равенство фигур с помощью физического эксперимента (с листом кальки). В дальнейшем же, при доказательстве теорем и решении задач, физический эксперимент становится ненужным и рассуждения приобретают «чисто геометрический» характер.

Сказанное, конечно, не означает, что геометрию следует считать частью физики. Разумеется, геометрия (как и вся математика) имеет опытное происхождение и связана с изучением окружающего нас реального мира. Однако в отличие от физики геометрия изучает не «физические» свойства тел (цвет, температуру, плотность, электропроводность и т. п.), а специфические «геометрические» свойства, связанные лишь с ф о р м о й и р а з м е р а м и предметов.

На рубеже XIX и XX веков (работами многих математиков из разных стран — итальянца М. Пиери, немцев Д. Гильберта и Ф. Шура, русского математика В. Ф. Кагана и др.) было установлено, что *геометрию можно построить строго логическим путем, не обращаясь к физическим представлениям и экспериментам.* При таком построении геометрии все ее теоремы выводятся чисто логическим (дедуктивным) путем из небольшого числа аксиом, в которых точно описываются все необходимые свойства таких понятий, как точка, прямая, движение и т. д. Так, например, при доказательстве теорем о равенстве треугольников используется следующее свойство движений: *каждую точку A плоскости можно совместить движением с любой другой точкой A'; после этого можно совместить движением любой луч a с началом в точке A с другим известным лучом a' с началом в A'; наконец, можно так выбрать движение, что определенная полуплоскость, ограниченная прямой луча a, переходит в указанную заранее полуплоскость, ограниченную прямой луча a'; при этом существует единственное движение плоскости с указанными свойствами.* Это свойство движений обычно не доказывают, т. е. принимают за аксиому. Однако последовательное аксиоматическое построение геометрии очень сложно и поэтому не может быть изложено в рамках школьного курса.

Задачи и упражнения к главе VI

Примеры геометрических преобразований

389. На плоскости задана некоторая прямая l. **Проектированием на прямую** l называется геометрическое преобразование, переводящее каждую точку A плоскости в проекцию A' этой точки на прямую l.

а) Во что переводит проектирование на прямую l треугольник, окружность, круг?

б) Во что переходят при проектировании на прямую l прямые линии?

в) Какие точки проектирование на прямую l переводит в себя? Какие прямые проектирование на прямую l переводят в себя?

390*. На плоскости выбрана определенная точка O; задан также некоторый треугольник PQP'. **Поворотным растяжением** называется геометрическое преобразование, переводящее каждую отличную от O точку A в такую точку A', что треугольник AOA' подобен PQP', причем $\measuredangle AOA' = \measuredangle PQP'$, (т. е. углы AOA' и PQP' совпадают по величине и направлению, см. § 22 гл. III); точку O поворотное растяжение переводит само в себя.

а) Докажите, что каждую фигуру поворотное растяжение переводит в подобную ей фигуру.

б) Какие точки поворотное растяжение переводит в себя? Какие прямые поворотное растяжение переводит в себя? Какие окружности поворотное растяжение переводит в себя?

в) Какие известные вам геометрические преобразования можно рассматривать как частный случай поворотного растяжения?

391*. На плоскости даны прямая l и точка O на этой прямой; задано также определенное положительное число k. Рассмотрим геометрическое преобразование, переводящее каждую отличную от O точку A в такую точку A', что прямая l является биссектрисой угла AOA' (быть может — образованного двумя совпавшими прямыми) и $OA' : OA = k$; это преобразование (точку O оно переводит в себя) можно назвать «симметричным растяжением».

а) Докажите, что каждую фигуру F «симметричное растяжение» переводит в подобную ей фигуру F'.

б) Какие точки «симметричное растяжение» переводит в себя? Какие прямые «симметричное растяжение» переводит в себя?

392*. На плоскости задана прямая l и указано (положительное или отрицательное!) число k. Рассмотрим следующее геометрическое преобразование: каждую точку прямой l оно переводит в себя, а не принадлежащую l точку A — в такую точку A' прямой $AP \perp l$, что $A'P : AP = k$ (здесь P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l) и точка A при положительном k лежит с той же стороны от прямой l, что и A, а при отрицательном

k — с другой стороны. (Это преобразование иногда называют «сжатием к прямой l» с коэффициентом k.)

а) Докажите, что каждую прямую линию рассматриваемое преобразование переводит снова в прямую линию.

б) Докажите, что если рассматриваемое преобразование переводит три точки A, B и C одной прямой в точки A', B' и C', то $A'B' : A'C' = AB : AC$.

в) Что представляет собой сжатие к прямой при $k = -1$?

г) Переводит ли сжатие к прямой окружности снова в окружности?

Сложение геометрических преобразований

393. Отличается ли сумма симметрии относительно точки O_1 и симметрии относительно точки O_2 от суммы симметрии относительно точки O_2 и симметрии относительно точки O_1 (обратите внимание на порядок, в котором берутся рассматриваемые преобразования)?

394. а) Что представляет собой сумма симметрии относительно точки O и параллельного переноса на вектор $\overline{MN}$?

б) Что представляет собой сумма параллельного переноса на вектор $\overline{MN}$ и симметрии относительно точки O?

395. а) Что представляет собой сумма симметрии относительно прямой l и симметрии относительно параллельной ей прямой m?

б) Что представляет собой сумма симметрии относительно прямой l и симметрии относительно пересекающей ее прямой m?

396. В каком случае сумма симметрии относительно прямой l и симметрии относительно прямой m не зависит от порядка, в котором мы осуществляем эти преобразования?

397. Что представляет собой сумма поворота вокруг точки O на угол α и поворота вокруг той же точки на угол β?

Зависит ли эта сумма от порядка, в котором берутся повороты?

398. Что представляет собой сумма гомотетии с центром O и коэффициентом k и симметрии относительно точки O?

Зависит ли эта сумма от порядка, в котором берутся рассматриваемые преобразования?

399. Что представляет собой сумма гомотетии с центром O и коэффициентом k_1 и гомотетии с тем же центром O и коэффициентом k_2? Зависит ли эта сумма от порядка, в котором осуществляются гомотетии?

400. Докажите, что поворотное растяжение (см. задачу **390**) представляет собой сумму поворота и гомотетии.

401. Докажите, что «симметричное растяжение» (см. задачу **391**) представляет собой сумму симметрии относительно прямой и гомотетии.

402*. Что представляет собой сумма поворота вокруг точки O_1 на угол α_1 и поворота вокруг точки O_2 на угол α_2?

403. Докажите, что сумма симметрии относительно прямой l и параллельного переноса в направлении этой прямой не зависит от порядка, в котором совершаются преобразования. (Эту сумму называют «скользящей симметрией».)

404*. Докажите, что

а) сумма гомотетии с центром O_1 и коэффициентом k_1 и гомотетии с центром O_2 и коэффициентом k_2 при $k_1k_2 \neq 1$ представляет собой гомотетию с коэффициентом $k = k_1k_2$, а при $k_1k_2 = 1$ — параллельный перенос;

б) центр O полученной таким путем гомотетии принадлежит прямой O_1O_2 (или направление полученного параллельного переноса параллельно прямой O_1O_2).

405*. Даны три попарно не равные окружности S_1, S_2 и S_3. Докажите, что

а) три попарных внешних центра гомотетии этих окружностей лежат на одной прямой;

б) шесть попарных центров гомотетии окружностей (внешних и внутренних) лежат по три на четырех прямых.

Движения

406. Докажите, что сумма двух движений также представляет собой движение.

407. При каком коэффициенте гомотетии преобразование гомотетии является движением?

408. Может ли сумма гомотетии и движения представлять собой движение?

409. Может ли сумма двух преобразований гомотетии представлять собой движение?

410*. Даны два равных отрезка AB и CD. Докажите, что отрезок AB можно перевести в отрезок CD поворотом вокруг некоторой точки O или параллельным переносом.

411. Даны две равные фигуры F_1 и F_2. Докажите, что F_1 можно перевести поворотом или параллельным переносом либо в фигуру F_2, либо в фигуру F'_2, симметричную F_2 относительно некоторой прямой.

Дополнения и методические указания к главе VI

1. **Взаимно однозначные соответствия.** [К § 47.] В § 47 мы сформулировали определение геометрического преобразования, в котором нетрудно увидеть понятие ф у н к ц и и от точки плоскости: ***геометрическим преобразованием*** *называется всякая* ф у н к ц и я π, *сопоставляющая любой точке* A *плоскости некоторую точку* $A'=\pi(A)$ (ср. п. 2, стр. 35).

В действительности, однако, такое определение геометрического преобразования является слишком общим. Рассматриваемые в геометрии преобразования, как правило, являются в з а и м н о о д н о з н а ч н ы м и. *Преобразование* π *называется* ***взаимно однозначным****, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:*

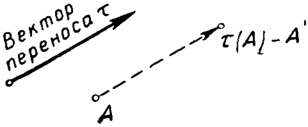


Рис. 303.

1) *никакие две различные точки не переходят при преобразовании* π *в одну и ту же точку* (т. е. если $A \neq B$, то $\pi(A) \neq \pi(B)$);

2) *для любой точки* A' *найдется точка* A, *переходящая в нее при преобразовании* π (т. е. для любой точки A' найдется такая точка A, что $\pi(A)=A'$).

Все рассмотренные выше преобразования являются взаимно однозначными. Возьмем для примера параллельный перенос τ. Для каждой точки A' найдется единственная точка A, переходящая в A' при переносе τ (т. е. точка, для которой $\tau(A)=A'$, рис. 303). Так как такая точка A всегда найдется, то выполнено условие 2). Так как такая точка A только одна, то выполнено условие 1). Таким образом, параллельный перенос является *взаимно однозначным* геометрическим преобразованием. Так же обстоит дело и с другими рассмотренными выше преобразованиями.

Иногда в геометрии встречаются и такие преобразования, которые не являются взаимно однозначными. Например, если l — произвольная прямая на плоскости, то п р о е к т и р о в а н и е м на прямую l называется преобразование, при котором каждая точка A плоскости переходит в основание A' перпендикуляра AA', опущенного на прямую l; точки прямой l переходят при этом преобразовании в себя (см. задачу 389). Это преобразование (которое нам встретится в §§ 63,64) не является взаимно однозначным (см. рис. 304).

2. **Преобразование фигур.** [К § 47.] Пусть на плоскости задана некоторая фигура F (рассматриваемая как множество точек). Рассмотрим некоторое преобразование π. Каждую точку A фигуры F оно переводит в некоторую точку $A'=\pi(A)$. Множество всех таких точек A' представляет собой фигуру F'. Эту фигуру F' называют ф и г у р о й, п о л у ч а ю щ е й с я и з F п р и п о м о щ и п р е о б р а з о в а н и я π. Фигуру F' обозначают также через $\pi(F)$.

Если фигура F переходит в себя при преобразовании π (т. е. фигура $F'=\pi(F)$ совпадает с фигурой F), то фигуру F называют ***неподвижной фигурой*** преобразования π. Так, для симметрии σ относительно прямой l неподвижными фигурами являются те, для которых прямая l является осью симметрии[1]. В частности, точка, переходящая в себя при преобразовании π, называется неподвижной точкой этого преобразования. Симметрия относительно прямой имеет бесконечно много неподвижных точек: ими являются все точки прямой l. Параллельный перенос совсем не имеет неподвижных точек. Остальные рассмотренные преобразования (центральная симметрия, поворот, гомотетия) имеют по одной неподвижной точке (ср. задачи **12**, **109**, **195**, **257** и **304**).

Если F и G — две произвольные фигуры, то при преобразовании π фигура $F \cap G$ переходит в $\pi(F) \cap \pi(G)$, а фигура $F \cup G$ переходит в $\pi(F) \cup \pi(G)$[2]. Доказательство этого предложения содержится по существу в рассуждениях, приведенных на стр. 42—43.

3. Движения и расстояния (наглядные пояснения). [К § 49.] Выше мы определили *движение* как такое геометрическое преобразование, которое переводит каждую фигуру в равную ей фигуру. Отсюда, в частности, вытекает, что каждое движение переводит произвольный отрезок AB в равный ему отрезок $A'B'$. Иными словами, если A и B — две произвольные точки плоскости, а A' и B' — точки, в которые они переходят при некотором движении, то расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками A' и B'. Этот факт выражают также словами: *всякое движение сохраняет расстояние между точками.*

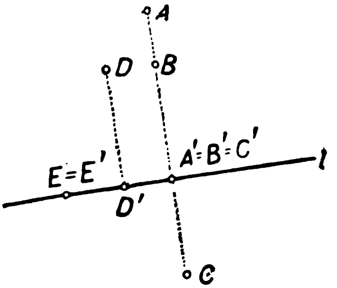


Рис. 304.

Обратно, если геометрическое преобразование сохраняет расстояния между точками, то оно перемещает каждую фигуру «как твердое целое»: ведь когда мы говорим, что «фигура перемещается как твердое целое», мы как раз и имеем в виду, что фигура ни в какой своей части не сжимается и не растягивается, т. е. что расстояние между каждыми двумя ее точками не изменяется. Иначе говоря, если геометрическое преобразование сохраняет расстояния между точками, то оно переводит каждую фигуру в равную ей фигуру и, следовательно, является движением.

Таким образом, *геометрическое преобразование в том и только в том случае является движением, если оно сохраняет расстояния между точками.* Разумеется, это предложение нельзя признать геометрически доказанной теоремой, поскольку пояснения, данные выше, опирались на представления, заимствованные из опыта (сжатие и растяжение, перемещение фигуры как твердого целого и т. п.). В справедливости этого предложения убеждает нас наша физическая интуиция.

Указанное предложение играет большую роль в геометрии. Оно позволяет по-новому осмыслить понятие равенства фигур. Пусть F и F' — две равные фигуры, т. е. такие фигуры, что существует движение, переводящее фигуру F в фигуру F' (рис. 305). При этом движении каждая точка A фигуры F переходит в некоторую точку A' фигуры F', т. е. устанавливается некоторое соответствие между точками фигуры F и точками фигуры F'. Точку A' фигуры F', в которую переходит A при рассматриваемом движении, называют точкой фигуры F', соответствующей точке A фигуры F. Если A и B — две произвольные точки фигуры F, а A' и B' — соответствующие им точки

---

[1] Иногда все фигуры, которые могут переходить в себя при некотором движении δ (отличном от тождественного преобразования; см. стр. 153), называют *симметричными фигурами*. Примеры симметричных фигур читатель найдет в §§ 1, 12, 22, 32.

[2] По-другому это можно записать так:

$$\pi(F \cup G) = \pi(F) \cup \pi(G) \text{ и } \pi(F \cap G) = \pi(F) \cap \pi(G).$$

фигуры F', то расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками A' и B' (ибо движение сохраняет расстояния).

Итак, если F и F' — две равные фигуры, то расстояние между произвольными точками A и B фигуры F равно расстоянию между соответствующими им точками A' и B' фигуры F' (рис. 305). Обратно, если между точками фигур F и F' можно установить соответствие, сохраняющее расстояния, то в силу сказанного выше это соответствие можно считать движением, переводящим фигуру F в F', и потому фигуры F и F' равны между собой. Таким образом,

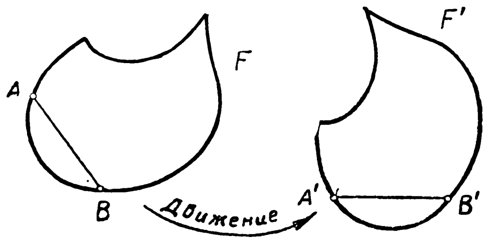
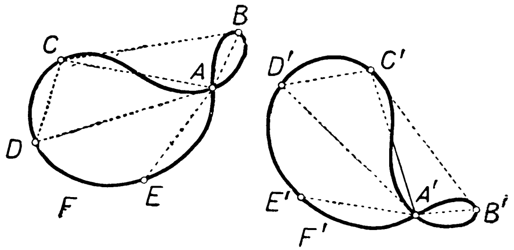


Рис. 305.

две фигуры F и F' в том и только в том случае являются равными, если между точками этих фигур можно установить такое соответствие, что расстояние между произвольными точками A и B фигуры F равно расстоянию между соответствующими им точками A' и B' фигуры F' (рис. 306).

Заметим еще, что *каждое движение плоскости представляет собой поворот, параллельный перенос, либо сумму поворота или параллельного переноса с симметрией относительно прямой* (см. задачу **411** на стр. 170).

4. Движения и расстояния (очерк метрического построения геометрии). [К § 49.] Сказанное в п. **3** позволяет понять, каким образом можно исключить физические представления из геометрических доказательств. Условимся о п р е-



$A'B' = AB,\quad A'C' = AC,$
$A'D' = AD,\quad A'E' = AE,$
$B'C' = BC,\quad C'D' = CD,$
. . . .
. . . .

Рис. 306.

д е л я т ь движения следующим образом: ***движением*** *называется всякое геометрическое преобразование, сохраняющее расстояния между точками* (т. е. переводящее любые две точки A и B в такие точки A' и B', что $A'B' = AB$). Это определение не предполагает известным общее понятие равенства фигур. Наоборот, *равные фигуры в геометрии определяются теперь как такие, которые можно совместить при помощи движения.* Это равносильно о п р е д е л е н и ю равных фигур с помощью предложения, указанного в конце п. **3**.

Из приведенного определения движения можно чисто геометрически установить основные свойства движений. Так, например, можно доказать, что *п р я м у ю л и н и ю каждое движение переводит снова в прямую линию.* В самом деле, прямую AB можно определить как множество таких точек C, что большее из трех расстояний AB, AC и BC равно сумме двух других (см. рис. 307, *а*, *б*). Движение же сохраняет расстояния между точками. Поэтому наше множество точек C (прямую AB) движение переводит в множество таких точек C', что большее из трех расстояний $A'B'$, $A'C'$ и $B'C'$ равно сумме двух других, т. е. в прямую $A'B'$. Отрезок AB — множество таких точек C, что $AC+CB=AB$, — *движение переводит в отрезок* $A'B'$. Окружность радиуса r определяется как множество таких точек M, расстояние которых от фиксированной точки O равно r. Поэтому *каждое движение переводит окружность радиуса r снова в окружность радиуса r* (в множество точек M', расстояния которых от определенной точки O' равны r). *Треугольник ABC движение переводит* в треугольник $A'B'C'$, стороны которого равны сторонам треугольника ABC, т. е. *в треугольник $A'B'C'$, равный треугольнику ABC* и т. д.

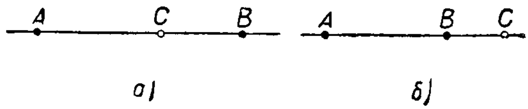


Рис. 307.

То, что *осевая симметрия, центральная симметрия, вращение и параллельный перенос сохраняют расстояния между точками*, легко вывести чисто геометрически из указанных на рисунке 294 определений этих преобразований. Для случая осевой симметрии это было доказано на стр. 41 [пункты 1), 2), 3) приведенного там доказательства]. Для случая центральной симметрии это вытекает из равенства треугольников OAB и $OA'B'$ (рис. 308; эти треугольники равны по двум сторонам и заключенному между ними углу). Для случаев поворота и параллельного переноса соответствующие доказательства также несложны.

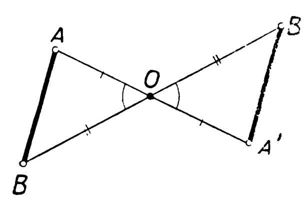


Рис. 308.

Сказанное выше поясняет, что геометрия может быть построена не на базе понятий движения и равенства фигур (вводимых с помощью физических представлений), а на основе понятия *расстояния между двумя точками*. Такое построение геометрии может быть осуществлено чисто дедуктивным путем (из аксиом, описывающих свойства таких понятий, как точка, прямая, расстояние и т. п.). Однако полное осуществление этой программы является технически весьма сложным и не может быть реализовано в школьном преподавании.

5. Преобразования подобия. Гомотетия не является движением. Она принадлежит к иному, более обширному классу геометрических преобразований — к классу преобразований подобия. ***Преобразованиями подобия*** *называют такие геометрические преобразования, которые сохраняют отношения расстояний между точками* (т. е. переводят каждые четыре точки A, B, C, D в такие четыре точки A', B', C' D', что $\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$). Ясно, что все движения сохраняют отношения расстояний между точками (они сохраняют даже сами расстояния); поэтому *движения также относятся к числу преобразований подобия*. Однако совокупность преобразований подобия шире совокупности движений. Так, например, *преобразование гомотетии* (с коэффициентом $k\neq\pm 1$) является преобразованием подобия (см. § 42, следствие), но не является движением.

Преобразование подобия изменяет все расстояния между точками в одном и том же отношении k; это число k называется коэффициентом подобия. В самом деле, пусть преобразование подобия переводит точки A и B в точки A' и B'; отношение $\frac{A'B'}{AB}$ мы обозначим через k. Рассмотрим теперь какие угодно две другие точки C и D; пусть наше преобразование переводит их в точки C' и D'. Из определения преобразования подобия следует, что

$$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD} \quad \text{или} \quad \frac{C'D'}{CD}=\frac{A'B'}{AB}=k.$$

Так как точки C и D мы выбрали произвольно, то отсюда и следует наше утверждение.

В качестве примера укажем, что гомотетия с (каким угодно!) центром O и коэффициентом гомотетии k является преобразованием подобия с коэффициентом подобия $|k|$.

Каждое преобразование подобия переводит прямую линию AB в прямую линию $A'B'$. В самом деле, если три точки A, B и C принадлежат одной прямой, то, скажем, $AB=AC+BC$ (где AB — наибольший из трех отрезков AB, AC, BC). Поэтому три точки A', B' и C', в которые переводятся точки A, B и C, нашим преобразованием подобия тоже принадлежат одной прямой. В самом деле, так как

$$A'B'=k\cdot AB, \quad A'C'=k\cdot AC, \quad B'C'=k\cdot BC$$

(где k — коэффициент подобия), то для точек A', B' и C' выполняется равенство $A'B'=A'C'+B'C'$; но это возможно лишь, если точки A', B', C' принадлежат одной прямой.

Отрезок AB преобразование подобия переводит в отрезок $A'B'$.

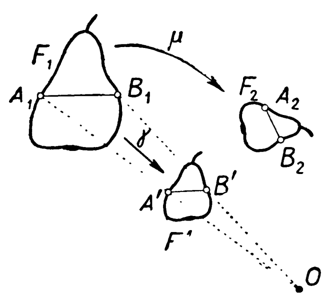


Рис. 309.

Окружность радиуса r переходит при преобразовании подобия с коэффициентом подобия k в окружность радиуса kr. Треугольник ABC со сторонами $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ *преобразование подобия переводит* в треугольник $A'B'C'$ со сторонами $A'B'=kc$, $B'C'=ka$, $C'A'=kb$, *т. е. в треугольник, подобный исходному треугольнику.*

В § 46 было приведено общее определение подобных фигур. Здесь же мы определили общие преобразования подобия. Связь между этими двумя понятиями устанавливается следующей важной теоремой:

Теорема. *Две фигуры F_1 и F_2 подобны между собой в том и только в том случае, если существует преобразование подобия, переводящее фигуру F_1 в фигуру F_2.*

Доказательство. Пусть фигуры F_1 и F_2 подобны (в смысле определения, данного в § 46). Тогда существует такая фигура F', что фигуры F_1 и F' гомотетичны, а фигуры F_2 и F' равны (ср. рис. 270 на стр. 143). Обозначим через γ гомотетию, переводящую фигуру F_1 в фигуру F', а через δ — движение, переводящее фигуру F' в F_2. Тогда сумма этих двух преобразований переводит фигуру F_1 в фигуру F_2. Но сумма гомотетии и движения является, очевидно, преобразованием подобия. Тем самым найдено преобразование подобия, переводящее фигуру F_1 в F_2.

Обратно, пусть существует преобразование подобия μ, переводящее фигуру F_1 в F_2. Обозначим через k коэффициент подобия этого преобразования. Выберем теперь на плоскости произвольную точку O и рассмотрим гомотетию γ с центром O и коэффициентом k. Фигуру, в которую переходит F_1 при этой гомотетии, мы обозначим через F'.

Докажем, что фигура F' равна фигуре F_2. Пусть A_1 и B_1 — две произвольные точки фигуры F_1; $A_2=\mu(A_1)$, $B_2=\mu(B_1)$ — соответствующие им точки фигуры F_2 и $A'=\gamma(A_1)$, $B'=\gamma(B_1)$ — соответствующие точки фигуры F' (рис. 309). Тогда

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1}=k$$

(по определению преобразования подобия с коэффициентом k) и

$$\frac{A'B'}{A_1B_1}=k$$

(по теореме 1 § 42). Из этих двух равенств следует, что $A_2B_2=A'B'$. Таким образом, между точками фигур F_2 и F' установлено такое соответствие, что расстояние между двумя произвольными точками фигуры F_2 равно расстоянию между соответствующими им точками фигуры F'. Поэтому фигуры F_2 и F' равны (см. пп. 3, 4).

Итак, найдена фигура F', гомотетичная фигуре F_1 и равная фигуре F_2. Следовательно, фигуры F_1 и F_2 подобны.

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1}=\frac{B_2C_2}{B_1C_1}=\frac{C_2D_2}{C_1D_1}=\frac{B_2D_2}{B_1D_1}=\frac{B_2E_2}{B_1E_1}=k.$$

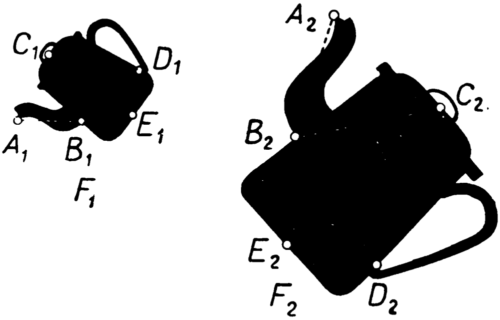


Рис. 310.

Доказанная теорема позволяет дать новое определение подобных фигур, эквивалентное определению, приведенному в § 46:

Две фигуры п о д о б н ы, *если расстояния между соответствующими точками этих фигур пропорциональны.* Более точно, *фигуры F_1 и F_2 называются* п о д о б н ы м и (*с* к о э ф ф и ц и е н т о м п о д о б и я *k*), *если между точками этих фигур можно установить такое соответствие, что расстояние A_1B_1 между двумя произвольными точками A_1 и B_1 фигуры F_1 и расстояние A_2B_2 между соответствующими им точками A_2 и B_2 фигуры F_2 связаны соотношением*

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1}=k$$

(рис. 310).

Сравните это определение с предложением, приведенным в конце п. 3.

6. О задачах и упражнениях. Последняя тема раздела «Геометрические преобразования» имеет особый характер: она рассчитана на лекционное изложение (заключительная беседа учителя). Задачи по этой теме отличаются от остальных задач — они менее конкретны и вряд ли заинтересуют учащихся, не имеющих вкуса к абстрактным построениям. Поэтому при наличии слабого класса эти задачи целесообразно опустить.

Наиболее простыми по постановке вопроса (но не по решению) являются задачи, связанные с понятием суммы преобразований. Поэтому при желании проиллюстрировать задачами материал главы VI естественно воспользоваться в первую очередь задачами **393—399**. Довольно сложные задачи **402** и **404** представляют значительный теоретический интерес. Их целесообразно использовать для внеклассной работы с учащимися, проявляющими повышенный интерес к математике.

7. **Примеры решения задач.** Разберем здесь, для примера, как решается вопрос о с у м м е д в у х п о в о р о т о в (задача **402**, стр. 169). Отметим прежде всего, что *сумма симметрии σ_1 относительно прямой l_1 и симметрии σ_2 относительно параллельной ей прямой l_2 представляет собой параллельный перенос τ в направлении, перпендикулярном прямым l_1 и l_2, на расстояние d, равное удвоенному расстоянию a между прямыми l_1* и l_2 (ср. задачу **395** а), стр. 169); *сумма симметрии σ_1 относительно прямой l_1 и симметрии σ_2 относительно пересекающей ее прямой l_2 представляет собой поворот ρ вокруг точки O пересечения прямых l_1 и l_2 на угол δ, равный удвоенному углу α между прямыми* [ср. задачу 395 б)]. В самом деле, пусть A — произвольная

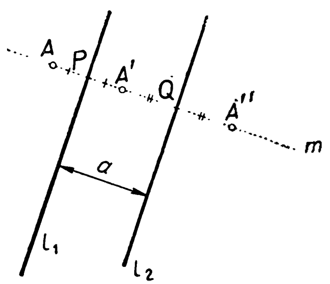


Рис. 311.

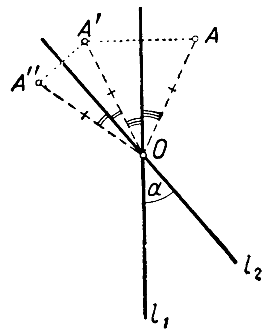


Рис. 312.

точка плоскости и $A'=\sigma_1(A)$, $A''=\sigma_2(A')$ (рис. 311, 312). Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то точки A, A' и A'' принадлежат одной прямой m, перпендикулярной l_1 и l_2 (ибо $AA'\perp l_1$ и $A'A''\perp l_2$). Пусть прямая m пересекает l_1 в точке P, а l_2 — в точке Q; отрезок PQ равен расстоянию a между прямыми l_1 и l_2. Так как

$$AA'=AP+PA'=2PA';\quad A'A''=A'Q+QA''=2A'Q,$$

то

$$AA''=AA'+A'A''=2PA'+2A'Q=2PQ=2a$$

(см. рис. 311; для полноты доказательства здесь следует рассмотреть всевозможные случаи расположения точки A). Но это и означает, что *точка A'' получается из точки A параллельным переносом τ в направлении прямой m на расстояние $d=2a$.* Если же прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке O, то $AO=A'O$ и $A'O=A''O$ и поэтому $AO=A''O$. Обозначим, далее, $\measuredangle l_1Ol_2=\alpha$. Так как

$$\measuredangle AOA'=\measuredangle AOl_1+\measuredangle l_1OA'=2\measuredangle l_1OA',\quad \measuredangle A'OA''=\measuredangle A'Ol_2+\measuredangle l_2OA''=2\measuredangle A'Ol_2,$$

то

$$\measuredangle AOA''=\measuredangle AOA'+\measuredangle A'OA''=2\measuredangle l_1OA'+2\measuredangle A'Ol_2=2\measuredangle l_1Ol_2=2\alpha$$

(см рис. 312; для полноты доказательства здесь следует рассмотреть всевозможные случаи расположения точки A). Но это и означает, что *точка A'' получается из точки A поворотом ρ вокруг точки O на угол $\delta=2\alpha$.*

Перейдем теперь к задаче о сумме поворота ρ_1 вокруг точки O_1 на угол α_1 и поворота ρ_2 вокруг точки O_2 на угол α_2. Мы считаем, что точки O_1 и O_2 различны; случай совпадающих точек O_1 и O_2 является гораздо более простым (см. задачу 397). Точки O_1 и O_2 соединим прямой m; проведем через точку O_1 такую прямую l_1, что $\measuredangle l_1O_1m=\frac{1}{2}\alpha_1$, а через точку O_2 такую прямую l_2, что $\measuredangle mO_2l_2=\frac{1}{2}\alpha_2$ (рис. 313, 314). Обозначим через σ_1, σ и σ_2 симметрии относительно прямых l_1, m и l_2.

Сумма симметрий σ_1 и σ представляет собой поворот ρ_1 вокруг точки O_1 на угол α_1; другими словами, если A — произвольная точка и $A_1=\sigma_1(A)$, $A_2=\sigma(A_1)$, то $A_2=\rho_1(A)$. Аналогично, сумма симметрий σ и σ_2 представляет собой поворот ρ_2 вокруг точки O_2 на угол α_2; другими словами, если $A_1=\sigma(A_2)$, $A'=\sigma_2(A_1)$, то $A'=\rho_2(A_2)$ (рис. 313, 314). Но отсюда вытекает, что *результат применения суммы поворотов ρ_1 и ρ_2 к произвольной точке A представляет собой ту же точку A', которая получается из A в результате применения к ней суммы симметрий σ_1 и σ_2.* Действительно, точку A' из точки A можно получить так: $A_1=\sigma_1(A)$, $A'=\sigma_2(A_1)$.

Далее надо рассмотреть отдельно два случая.

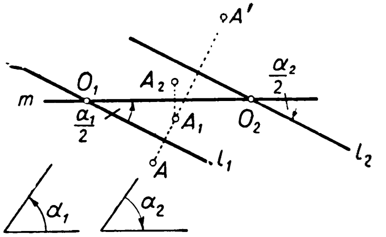


Рис. 313.

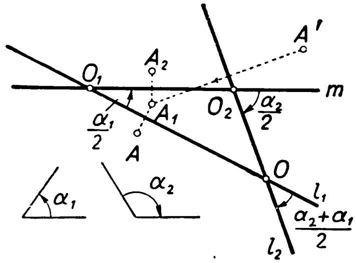


Рис. 314.

1) Если $\alpha_2=-\alpha_1$, $\frac{\alpha_2}{2}=-\frac{\alpha_1}{2}$, то прямые l_1 и l_2 параллельны (см. рис. 313). В этом случае сумма симметрий относительно прямых l_1 и l_2 представляет собой параллельный перенос. Таким образом, *сумма поворота вокруг точки O_1 на угол α_1 и поворота вокруг другой точки O_2 на противоположный угол $\alpha_2=-\alpha_1$ представляет собой параллельный перенос.* Для определения направления и величины этого параллельного переноса (т. е. вектора переноса; см. § 34) надо провести прямые l_1 и l_2, построение которых было описано выше; поворот совершается в направлении, перпендикулярном l_1 и l_2 на расстояние, равное удвоенному расстоянию между l_1 и l_2.

2) Если $\alpha_2\neq-\alpha_1$, то прямые l_1 и l_2 пересекаются (рис. 314). В этом случае сумма симметрий σ_1 и σ_2 представляет собой поворот вокруг точки O пересечения прямых l_1 и l_2. Итак, *сумма поворота вокруг точки O_1 на угол α_1 и поворота вокруг другой точки O_2 на угол α_2 при $\alpha_2\neq-\alpha_1$ представляет собой поворот вокруг некоторой третьей точки O.* Для построения точки O и определения угла поворота α следует снова построить прямые l_1 и l_2; точка O совпадает с точкой их пересечения; угол α равен удвоенному углу между прямыми l_1 и l_2.

Нетрудно убедиться, что угол α равен $\alpha_1+\alpha_2$, если $|\alpha_1+\alpha_2|\leqslant 180°$, и равен $(\alpha_1+\alpha_2)\pm 360°$ в противном случае (почему?).

ПРИЛОЖЕНИЕ К ПЕРВОЙ ЧАСТИ

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

§ 50. РАСЧЛЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ

В предыдущих главах мы рассматривали некоторые примеры применения геометрических преобразований к решению задач на построение. В связи с этим здесь уместно остановиться на общих приемах решения задач на построение.

Каждая задача на построение сводится к нахождению (по данным в задаче условиям) одной или нескольких точек. Например, построение треугольника (или многоугольника) сводится к нахождению его вершин; построение окружности — к нахождению ее центра и одной точки, лежащей на окружности, и т. д. Между тем, имеющиеся в нашем распоряжении чертежные средства (линейка, угольники, циркуль, лекала и т. п.) приспособлены для

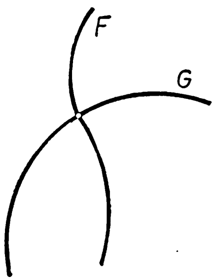


Рис. 315.

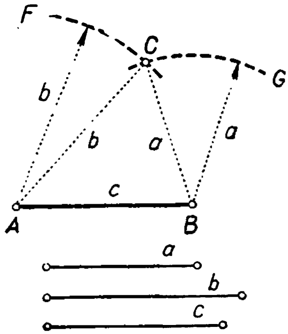


Рис. 316.

вычерчивания линий. Поэтому при решении задачи на построение на плоскости каждая точка (кроме непосредственно заданных) обычно определяется пересечением двух линий F и G (рис. 315).

Так, например, при построении треугольника по трем сторонам a, b и c мы выбираем на плоскости произвольный отрезок AB, имеющий длину c (рис. 316). Его концы A и B — две вершины искомого треугольника. Задача заключается в нахождении третьей вершины C. Эта третья вершина находится как точка пересечения двух линий — окружности радиуса b с центром в точке A и окружности радиуса a с центром в точке B.

При нахождении центра O окружности, вписанной в треугольник ABC, искомая точка O также находится как точка пересечения двух линий (рис. 317): биссектрисы AM угла A и биссектрисы BN угла B. Если затем требуется построить и саму вписанную окружность, т. е. найти одну точку, лежащую на этой окружности, то такая точка P снова определяется как точка пересечения двух линий: стороны AB и перпендикуляра, опущенного на эту сторону из точки O (рис. 317).

В соответствии с тем, что искомая точка определяется как точка пересечения двух линий, требования, налагаемые задачей на искомую точку, обычно можно *расчленить на два отдельных условия*. Ни первое, ни второе из этих условий, взятое в отдельности, еще не определяет искомой точки. Множество точек, удовлетворяющих только первому условию, представляет собой некоторую линию F; множество точек, удовлетворяющих только второму условию, представляет собой некоторую другую линию G. Так как искомая точка должна удовлетворять и первому, и второму условию, то она должна принадлежать как линии F, так и линии G. Иначе говоря, искомая точка должна совпадать с точкой пересечения двух линий: линии F и линии G (ср. рис. 315).

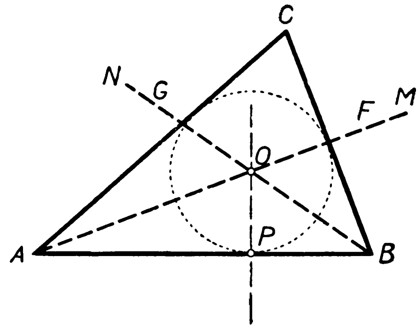


Рис. 317.

Поясним сказанное на примере рассмотренных выше задач. В задаче построения треугольника по трем сторонам a, b и c искомая точка C (рис. 316) определяется условиями:

$$AC=b, \qquad BC=a.$$

Здесь имеются два отдельных условия: первое ($AC=b$) и второе ($BC=a$). Множество всех точек C, удовлетворяющих только первому условию $AC=b$, представляет собой окружность F с центром в точке A и радиусом b. Множество всех точек C, удовлетворяющих только второму условию $BC=a$, представляет собой окружность G с центром в точке B и радиусом a. Искомая точка C должна удовлетворять обоим указанным условиям, поэтому за искомую точку C следует принять точку пересечения обеих окружностей F и G.

В задаче о нахождении центра O вписанной окружности искомая точка O должна быть равноудалена от всех трех сторон AB, BC, CA треугольника ABC. Это требование можно расчленить на следующие два условия: 1) точка O равноудалена от сторон AB и AC; 2) точка O равноудалена от сторон AB и BC. Множество всех точек, удовлетворяющих только первому условию, представляет собой биссектрису F угла BAC; множество всех точек, удовлетворяющих только второму условию, представляет собой биссектрису G угла ABC. Так как искомая точка O должна удовлетворять обоим условиям, то она совпадает с точкой пересечения биссектрис F и G (рис. 317).

§ 51. ЗАДАЧА

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий указанное расчленение условий задачи на построение.

Задача. *Построить треугольник ABC, зная основание $AB=c$, высоту h, опущенную на основание, и величину угла при вершине:* $\angle ACB=\alpha$ (рис. 318).

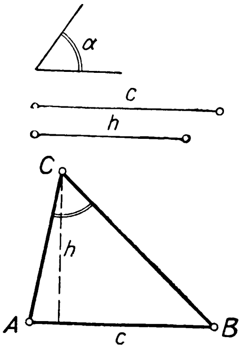


Рис. 318.

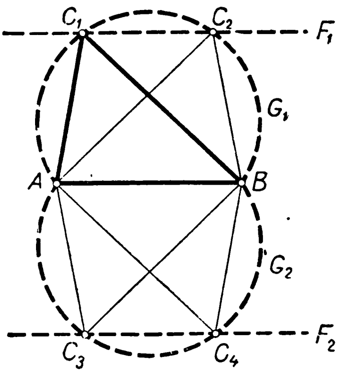


Рис. 319.

Решение. Возьмем на плоскости отрезок AB длины c (рис. 319). Задача заключается в нахождении третьей вершины искомого треугольника. Эта вершина C определяется следующими двумя условиями: 1) точка C находится на расстоянии h от прямой AB; 2) угол ACB равен данному углу α. Множество всех точек, удовлетворяющих только условию 1), представляет собой, очевидно, пару параллельных прямых F_1 и F_2, расположенных на расстоянии h от прямой AB. Множество всех точек, удовлетворяющих только условию 2), представляет собой (в силу сказанного в § 24) пару дуг G_1 и G_2 окружностей, симметричных относительно прямой AB. Так как искомая точка C должна удовлетворять обоим условиям 1) и 2), то она должна быть одной из точек пересечения прямых F_1 или F_2 с дугами G_1 или G_2. Этих точек пересечения может быть четы-

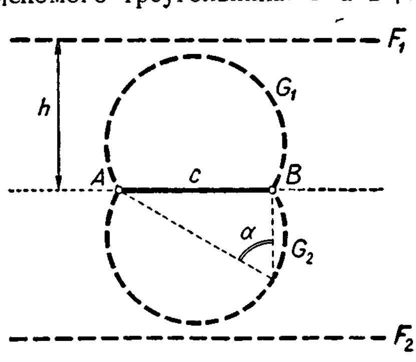


Рис. 320.

ре (точки C_1, C_2, C_3, C_4 на рис. 319). Так как все четыре треугольника: $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$, $\triangle ABC_3$ и $\triangle ABC_4$ — равны между собой, то следует считать, что задача имеет *единственное* решение (или *ни одного* решения, если прямые F_1, F_2 не пересекают дуг G_1, G_2; рис. 320).

Задачи и упражнения к приложению

В каждой из нижеследующих задач на построение расчлените условие задачи на два требования, определяющие две линии, пересечение которых определяет искомую точку; построив эти линии, решите поставленную задачу.

412. Постройте треугольник ABC, зная основание $AB=c$, длину медианы $CM=m$ и величину угла $ACB=\alpha$.

413. Постройте треугольник ABC, зная основание $AB=c$, длину медианы $CM=m$ и длину высоты $CP=h$.

414. Постройте треугольник ABC, зная основание $AB=c$, угол $ABC=\alpha$ и высоту $CP=h$.

415. Постройте треугольник ABC, зная основание $AB=c$, угол $ACB=\alpha$ и радиус r вписанной окружности.

416. Постройте треугольник ABC, зная радиус R описанной окружности, угол $BAC=\alpha$ и высоту $AP=h$.

417. Впишите в данную окружность треугольник ABC, имеющий известный угол $BAC=\alpha$ и медиану AM известной длины m.

418. Постройте треугольник ABC, зная основание $AB=c$, угол $ACB=\alpha$ при вершине C и отношение $\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}$ боковых сторон.

419. Постройте окружность, проходящую через данные две точки A и B и в точке A касающуюся данной прямой l.

420. Постройте окружность S данного радиуса r, касающуюся данной прямой l и проходящую через данную точку A.

421. Постройте окружность S данного радиуса r, проходящую через данную точку A и касающуюся данной окружности G. Рассмотрите отдельно случаи внешнего и внутреннего касания.

422. Впишите в данный угол ABC окружность S данного радиуса r.

423. Проведите в данной окружности S хорду AB, имеющую заданную длину a и проходящую через известную точку M.

Методические указания к приложению

1. О так называемом «методе геометрических мест». В этой книге, так же как и в пособии для учащихся, прижившийся в школьной практике термин «геометрическое место точек» последовательно заменяется термином «множество точек». Это соответствует как современной научной терминологии, так и современному взгляду на «фигуры» и бесконечные множества. Термин «геометрическое место точек» восходит еще к знаменитому древнегреческому ученому и философу Аристотелю, который считал, что прямая, например, не с о с т о и т из точек, а является лишь «местом», где могут располагаться точки. Эту точку зрения Аристотель мотивировал тем, что точки не имеют размеров и любое количество точек, сколько бы их ни примыкало друг к другу, ничего, кроме точки, составить не могут. По этой же причине Аристотель изгонял из геометрии и движение, отказываясь считать, что линию можно рассматривать как след движения точки. Эти взгляды Аристотеля были тесно связаны с его метафизическими философскими концепциями.

Несмотря на то, что мы уже давно свободно обращаемся с бесконечными множествами и привыкли, например, рассматривать числовую ось как м н о ж е с т в о точек, находящихся во взаимно однозначном соответствии с действительными числами, в школьном преподавании до сих пор сохранилось пресловутое «геометрическое место».

Поскольку термин «геометрическое место точек» не несет никакой смысловой нагрузки, отличающей его от термина «множество точек», сохранять его в практике преподавания излишне. Более того, употребление этого термина приносит даже определенный вред. Нередко приходится слышать, что геометрическое место точек — это не просто множество точек, а такое множество, все точки которого характеризуются некоторым определенным свойством (например, свойством находиться на равных расстояниях от концов данного отрезка). Такая точка зрения, разумеется, совершенно ошибочна. Ведь любое множество точек является «геометрическим местом точек, принадлежащих этому множеству», т. е. точки любого множества характеризуются определенным свойством (а именно, свойством принадлежать данному множеству).

Мы уверены, что от термина «геометрическое место точек» надо решительно отказаться (причем не только в старших классах, но и в восьмилетней школе).

Содержание § 50 вскрывает также еще одно заблуждение, связанное с «методом геометрических мест». Принято считать, что «метод геометрических мест» является одним из многих частных методов решения задач на построение — наряду, например, с методом параллельного переноса части чертежа или, скажем, методом инверсии. На деле же, как это видно из содержания § 50, расчленение условия задачи на два требования, составляющее содержание «метода геометрических мест», есть неизбежный этап решения любой задачи на построение.

2. Схема решения задачи на построение. Расчленение требований задачи на два отдельных условия не всегда производится столь же просто, как в примерах, приведенных в §§ 50, 51. Иногда для нахождения этих двух условий приходится приложить немало усилий. В сложных случаях решение задачи на построение начинают с так называемого анализа.

Анализ задачи заключается в следующем. Мы предполагаем, что задача уже решена, и изготовляем примерный чертеж. С помощью этого чертежа мы внимательно изучаем требования задачи. Иногда при этом приходится проводить некоторые вспомогательные линии. Цель анализа заключается в том, чтобы выделить два отдельных условия, определяющих искомую точку. Эти два условия определяют две линии: линию F, состоящую из всех точек, удовлетворяющих первому условию, и линию G, состоящую из всех точек, удовлетворяющих второму условию. Разумеется, расчленение требований задачи на два условия должно быть произведено так, чтобы линии F и G, о которых шла речь, могли быть построены с помощью имеющихся в нашем распоряжении чертежных средств (линейки, угольников, циркуля или других инструментов). Иногда в процессе анализа оказываются полезными те или иные геометрические преобразования (см., например, § 11, задача 2; § 20, задача 2; § 28, задача 2; § 37; § 45).

После того как проведен анализ задачи, следует построение. Здесь указывается, как при помощи имеющихся чертежных инструментов могут быть построены те линии F и G, которые соответствуют двум условиям, найденным в процессе анализа. Искомая точка будет точкой пересечения двух построенных линий F и G.

Вслед за построением идет доказательство, целью которого является установление того факта, что найденная точка (или точки) пересечения линий F и G действительно удовлетворяет всем требованиям задачи.

Решение завершается исследованием, в процессе которого требуется установить, сколько точек пересечения могут иметь линии F и G и сколько решений имеет задача. Иногда число решений может быть различным в зависимости от величин заданных углов, длин заданных отрезков и т. д.

Примеры, иллюстрирующие эту общую схему, имеются в §§ 11, 20, 28, 37, 45.

3. Примеры решения задач. 1) Задача **417** (стр. 181). Предположим, что задача решена и ABC — искомый треугольник (рис. 321). Поскольку мы знаем угол $BAC=\alpha$, опирающийся на хорду BC, то мы можем считать известной и саму эту хорду: для построения ее достаточно отложить от любой точки N заданной окружности S хорды NB и NC, образующие угол $BNC=\alpha$ (хорду NB можно выбрать произвольно). Далее, вершина A треугольника ABC должна располагаться на окружности S (точнее, на дуге F этой окружности, «вмещающей» угол α); это и есть первое требование. Второе требование задано в условиях задачи: расстояние $MA=m$, где M — середина хорды BC. Для определенности положим $\alpha<90°$. Если m меньше расстояния от M до самой далекой от M точки P дуги F, но больше $MB=MC$, то окружность G с центром M и радиусом m пересечет дугу F в двух точках A и A_1 (рис. 321); при этом треугольники ABC и A_1BC будут равны (они симметричны относительно прямой MP). Если $m=MP$, то дуга F и окружность G имеют одну общую точку P; если $m>MP$ или $m\leqslant MA$, то линии F и G не пересекутся и задача вообще не будет иметь решений.

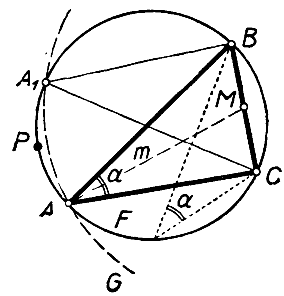


Рис. 321.

Разумеется, заменив хорду BC какой-либо другой хордой той же длины, мы получим другие треугольники, удовлетворяющие условию задачи. Таким образом, если считать различающиеся лишь расположением треугольники р а з л и ч н ы м и, то задача будет иметь *бесконечно много* решений при $m\leqslant MP$ и *ни одного* решения — при $m>MP$. Если же считать равные треугольники одинаковыми, дающими о д н о решение задачи, то надо будет считать что задача имеет *одно* решение при $m\leqslant MP$ и *ни одного* при $m>MP$. Предоставляем читателю самостоятельно провести исследование при $\alpha\geqslant 90°$.

2) З а д а ч а **423** (стр. 181). Предположим, что задача решена и AB — искомая хорда (рис. 322). Обозначим середину этой хорды буквой N. Так как нам известна длина a хорды AB, то мы можем считать известным и расстояние ON от центра O окружности S до хорды AB. Для того чтобы найти это расстояние, достаточно провести где-либо в окружности хорду A_1B_1 длины a, а для этого достаточно найти точку B_1 пересечения окружности S с окружностью R с центром в произвольной точке A_1 окружности S и радиусом a. Пусть N_1 есть середина хорды A_1B_1; тогда $ON=ON_1$ (если хорды равны, то равны и их расстояния от центра окружности) и, следовательно, *точка N принадлежит окружности F с центром O и радиусом ON_1* (1-е требование). 2-е требование доставляется известной теоремой о том, что перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду, делит хорду пополам; отсюда имеем: $ON\perp AB$, или $\angle MNO=90°$. Поэтому *точка N принадлежит также окружности G, построенной на отрезке OM как на диаметре*. Соединив точку N пересечения окружностей F и G с точкой M, мы найдем искомую хорду AB.

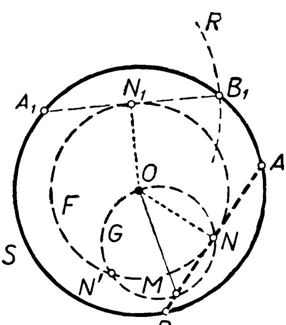


Рис. 322.

Легко видеть, что задача имеет *два* решения, если $a<2r$ (где r — радиус окружности S) и $OM>\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ $(=ON_1)$; *одно* решение, если $a<2r$ и $OM=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$, или если $a=2r$ и точка M не совпадает с O; *бесконечно много* решений, если $a=2r$ и точка M совпадает с O, и *ни одного* решения — в остальных случаях.

ЧАСТЬ II

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

ГЛАВА VII

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

§ 52. СУММА ДВУХ ВЕКТОРОВ

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два произвольных вектора на плоскости (рис. 323). Возьмем на плоскости произвольную точку O и отложим вектор $\overline{OM}$, равный вектору $\boldsymbol{a}$:

$$\overline{OM}=\boldsymbol{a}.$$

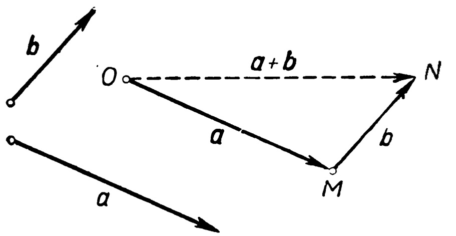


Рис. 323.

Затем от точки M отложим вектор $\overline{MN}$, равный вектору $\boldsymbol{b}$:

$$\overline{MN}=\boldsymbol{b}.$$

Вектор $\overline{ON}$ называется ***суммой*** векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обозначается через $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$:

$$\overline{ON}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

Таким образом, *для построения суммы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ нужно отложить на плоскости произвольный вектор, равный вектору $\boldsymbol{a}$, и от конца его отложить вектор, равный вектору $\boldsymbol{b}$. Тогда «замыкающий» вектор* (т. е. вектор, начало которого совпадает с началом первого из отложенных векторов, а конец — с концом второго) *и будет равен вектору $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.*

Согласно определению, для построения суммы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ нужно не только знать векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, но, кроме того, выбрать на плоскости некоторую точку O (от которой откладывается вектор $\boldsymbol{a}$). Покажем, что если заменить точку O другой точкой O', то вектор $\overline{ON}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ заменяется равным ему вектором, т. е. что

сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ не зависит от выбора точки O.

В самом деле, пусть O' — произвольная отличная от O точка плоскости. Отложим от точки O' вектор $\overline{O'M'}=\boldsymbol{a}$, а от полученной точки M' — вектор $\overline{M'N'}=\boldsymbol{b}$ (рис. 324). Так так $\overline{O'M'}=\overline{OM}$, то $\overline{OO'}=\overline{MM'}$ (см. следствие в § 33; стр. 107). Точно так же из равенства $\overline{M'N'}=\overline{MN}$ вытекает, что $\overline{MM'}=\overline{NN'}$. Таким образом,

$$\overline{OO'}=\overline{MM'}=\overline{NN'}.$$

Из равенства $\overline{OO'}=\overline{NN'}$ вытекает теперь, что $\overline{O'N'}=\overline{ON}$. Тем самым независимость суммы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ от выбора точки O доказана.

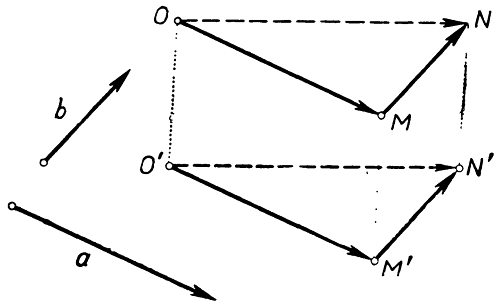


Рис. 324.

Определение суммы двух векторов непосредственно приводит к следующему простому, но важному выводу:

Для любых трех точек A, B, C на плоскости справедливо равенство:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Это соотношение называют **правилом трех точек**.

Правило трех точек очень часто применяется при решении задач.

§ 53. СУММА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ

Теорема. *Сумма параллельного переноса на вектор $\boldsymbol{a}$ и параллельного переноса на вектор $\boldsymbol{b}$ представляет собой параллельный перенос на вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.*

Доказательство. Согласно определению суммы двух геометрических преобразований (§ 48), *суммой двух параллельных переносов называется геометрическое преобразование, получаемое в результате последовательного выполнения этих переносов.* Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор первого переноса, а $\boldsymbol{b}$ — вектор второго переноса. Возьмем на плоскости произвольную точку A. В результате первого переноса точка A переходит в такую точку A', что $\overline{AA'}=\boldsymbol{a}$ (рис. 325). При выполнении второго параллельного переноса точка A' переходит в такую точку A'', что $\overline{A'A''}=\boldsymbol{b}$. Но в силу правила трех точек мы можем написать равенство:

$$\overline{AA'}+\overline{A'A''}=\overline{AA''},$$

или, иначе,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overline{AA''}.$$

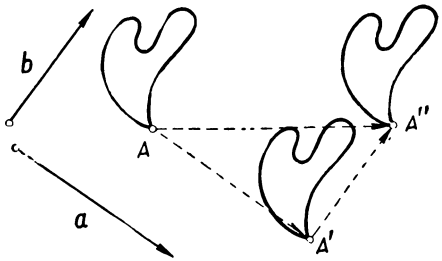


Рис. 325.

Полученное равенство $\overline{AA''}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ означает, что точка A'' получается из точки A переносом на вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Так как точка A — произвольная, то отсюда и следует наша теорема.

§ 54. НУЛЕВОЙ ВЕКТОР

Правило трех точек приводит к тому, что сумма $\overline{AB}+\overline{BA}$ векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ представляет собой «вектор» $\overline{AA}$, начало и конец которого совпадают:

$$\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}.$$

«Вектор» $\overline{AA}$ изображается «отрезком нулевой длины», т. е. точкой, и не имеет какого-либо определенного направления. Мы вынуждены считать такой «вектор» равноправным со всеми остальными векторами, так так в противном случае векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ не имели бы суммы.

Итак, $\overline{AA}$ мы также считаем вектором; этот вектор называется ***нулевым вектором*** и обозначается символом $\mathbf{0}$ (а в тетради и на доске — символом $\overline{0}$). Если B — любая отличная от A точка плоскости, то вектор $\overline{BB}$ мы считаем равным вектору $\overline{AA}$ (и обозначаем тем же символом $\mathbf{0}$). Таким образом, *нулевым вектором называется такой вектор, начало и конец которого совпадают.*

Из правила трех точек вытекает, что для любого вектора $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$ имеем:

$$\overline{AB}+\overline{BB}=\overline{AB},$$

или, иначе,

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}.$$

Это равенство, напоминающее знакомое из арифметики равенство $a+0=a$, и послужило причиной того, что вектор $\overline{BB}$ называется «нулевым» вектором.

§ 55. КОММУТАТИВНОСТЬ СЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Лемма. *Пусть векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *отложены от одной точки* O:

$$\boldsymbol{a}=\overline{OA},\quad \boldsymbol{b}=\overline{OB}.$$

Обозначим через M *середину отрезка* AB, *а через* C — *точку, симметричную точке* O *относительно точки* M. *Тогда*

$$\overline{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

Доказательство. Так как M — середина отрезка AB, то точки A и B симметричны относительно точки M. Таким образом, при симметрии относительно M точки O и B переходят в точки C и A и поэтому отрезки OB и CA равны между собой и параллельны или принадлежат одной прямой (теорема 2 § 18).

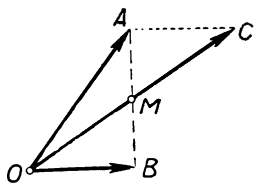


Рис. 326.

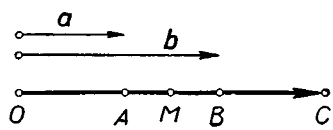


Рис. 327.

Кроме того, направление от O к B противоположно направлению от C к A, так как симметрия относительно точки совпадает с поворотом на угол 180°, а при таком повороте каждое направление переходит в противоположное (см. рис. 326; на рис. 327 отдельно изображен случай параллельных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$). Таким образом, направление от O к B совпадает с направлением от A к C. Но тогда $\overline{OB}=\overline{AC}$ и мы имеем:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}.$$

Лемма доказана.

Если в предыдущей лемме векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ не лежат на одной прямой (рис. 326), то четырехугольник $OACB$ является параллелограммом (так как $\overline{OB}=\overline{AC}$). В этом случае доказанное в лемме равенство $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}$ выражает правило параллелограмма, применяющееся в физике для определения суммы векторов («параллелограмм сил»): *сумма векторов* $\overline{OA}$ *и* $\overline{OB}$ *равна вектору* $\overline{OC}$, *изображаемому диагональю параллелограмма* $OACB$ (построенного на векторах $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$; рис. 328). Следует отметить, что «правило параллелограмма» менее удобно для определения суммы векторов, чем правило трех точек: «правило параллелограмма» теряет смысл в случае параллельности векторов-слагаемых и нуждается в этом случае в дополнительных разъяснениях, в то время как правило трех точек (а также доказанная лемма) применимо во всех случаях. В тех же случаях, когда векторы-слагаемые не параллельны, правило параллелограмма и правило трех точек лишь несущественно отличаются друг от друга.

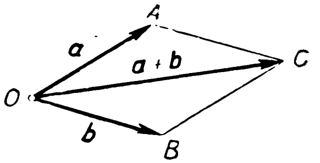


Рис. 328.

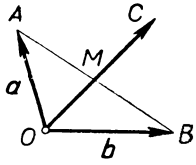


Рис. 329.

Теперь мы можем доказать следующую теорему:

Сложение векторов коммутативно (переместительно), т. е. для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *справедливо равенство*

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

Для доказательства отложим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ от одной точки O и обозначим через M середину отрезка AB, а через C — точку, симметричную точке O относительно M (рис. 329). Тогда, согласно лемме, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overline{OC}$. Но так как серединой отрезка BA является та же точка M, то, согласно лемме,

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overline{OC}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

В случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не параллельны, равенство $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ вытекает также и из правила параллелограмма.

§ 56. АССОЦИАТИВНОСТЬ СЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ. СУММА НЕСКОЛЬКИХ ВЕКТОРОВ

Как и в обычной алгебре, в «алгебре векторов» справедлив *ассоциативный (сочетательный) закон сложения векторов, выражаемый равенством:*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

Для доказательства этого закона отложим от произвольной точки O вектор $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$, от точки A — вектор $\overline{AB}=\boldsymbol{b}$ и от точки B — вектор $\overline{BC}=\boldsymbol{c}$. В силу правила трех точек имеем

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overline{OA}+\overline{AB})+\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC}$$

и

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overline{OA}+(\overline{AB}+\overline{BC})=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC},$$

откуда и следует ассоциативность сложения векторов.

Замечание. Приведенное доказательство совсем не требует чертежа. Это характерно для решения задач и доказательства теорем при помощи векторов (впрочем, для того, чтобы обходиться здесь без чертежей, требуется известный навык). При желании читатель может повторить вывод соотношения ассоциативности, воспользовавшись рисунком 330.

Сумма трех векторов определяется равенством:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$

(т. е. для получения суммы трех векторов нужно к сумме первых двух прибавить третий). Так как в силу ассоциативного закона

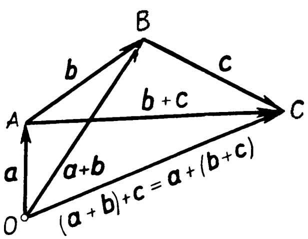


Рис. 330.

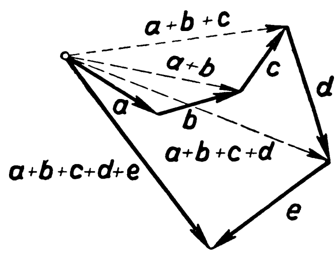


Рис. 331.

векторы $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ совпадают между собой, то любой из этих векторов можно записать в виде $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ (без скобок):

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

Приведенное выше доказательство ассоциативного закона (см. рис. 330) убеждает нас в том, что *сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ представляет собой замыкающую этих векторов, отложенных один за другим.* Иначе говоря,

$$\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{OC}$$

для любых четырех точек O, A, B, C.

То же справедливо и для любого числа слагаемых. *Суммой нескольких векторов называется вектор, получаемый в результате последовательного прибавления каждого из наших векторов к сумме предшествующих.* Например, в случае пяти векторов:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}=\{[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}]+\boldsymbol{d}\}+\boldsymbol{e}$$

(рис. 331). Из этого определения непосредственно вытекает следующее правило: *если несколько векторов отложены таким обра-*

зом, что начало второго совпадает с концом первого, начало третьего — с концом второго и т. д., то замыкающая, т. е. вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец — с концом последнего вектора, представляет собой сумму всех взятых векторов. Например,

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE}$$

(см. рис. 332).

Из того, что сумма нескольких векторов может быть определена как замыкающая, непосредственно вытекает следующее условие замкнутости векторного многоугольника: *Пусть* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$,...— *несколько векторов; отложим их последовательно один за другим* (т. е. так, чтобы начало второго совпадало с концом первого, начало третьего — с концом второго и т. д). *Для того, чтобы получающаяся ломаная, составленная из векторов* (она

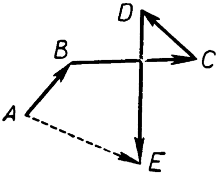


Рис. 332.

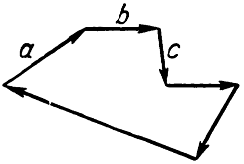


Рис. 333.

может оказаться невыпуклой и даже пересекающей себя), *была замкнутой* (т. е. чтобы конец последнего вектора совпадал с началом первого, рис. 333), *необходимо и достаточно, чтобы сумма всех этих векторов была равна нулевому вектору:*

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\ldots=\boldsymbol{0}.$$

Замечание. Коммутативный и ассоциативный законы выполняются и для сложения чисел, и для сложения векторов. Это очень удобно и важно, так как позволяет, не переучиваясь, производить действия над равенствами, содержащими векторы, используя навыки, выработанные при изучении действий над числами. В частности, в векторной сумме, как и в сумме чисел, можно как угодно переставлять и группировать слагаемые. Например,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}),$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}),$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}]$$

и т. д.

Аналогия между числами и векторами, как мы сейчас увидим, сохраняется и далее при определении вычитания векторов и в действиях над равенствами.

§ 57. ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Как и в случае чисел, ***разностью***

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

векторов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *называется такой вектор* $\boldsymbol{x}$, *который в сумме с вектором* $\boldsymbol{b}$ *дает вектор* $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}.$$

Иначе говоря, равенство $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ по определению означает, что справедливо соотношение

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}.$$

Существует ли вектор $\boldsymbol{x}$, который (при заданных $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$) удовлетворяет соотношению $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$? Рисунок 334 изображает это соотношение; на нем векторы $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$ и $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$ отложены от одной точки O. Из этого рисунка видно, что *разностью векторов* $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ *является вектор* $\overline{BA}$:

$$\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}.$$

Впрочем, это следует непосредственно и из правила трех точек, так как

$$\overline{OB}+\overline{BA}=\overline{OA}.$$

Итак, *для получения разности* $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ *достаточно отложить векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *от одной точки и взять вектор, идущий из конца*

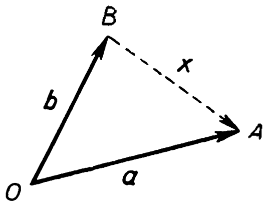


Рис. 334.

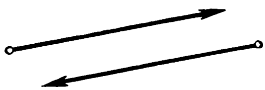


Рис. 335.

вектора $\boldsymbol{b}$ *к концу вектора* $\boldsymbol{a}$. Таким образом, операция вычитания векторов всегда выполнима.

Разность $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}$ двух равных векторов, очевидно, является нулевым вектором:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

Разность двух векторов можно получить и несколько иначе. Для этого нам понадобиться предварительно ввести одно новое понятие.

Определение. *Два параллельных (или лежащих на одной прямой) вектора, имеющие равные длины, но направленные в противоположные стороны* (рис. 335), *называются* ***противоположными*** *векторами.*

Если A и B — какие угодно точки плоскости, то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ являются противоположными векторами. Так как

$$\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}$$

(см. стр. 186), то *сумма двух противоположных векторов равна нулевому вектору.*

Вектор $\mathbf{0}-\boldsymbol{a}$ является вектором, противоположным вектору $\boldsymbol{a}$. В самом деле, находя разность $\mathbf{0}-\boldsymbol{a}$ по данному выше правилу, мы приходим к выводу, что вектор $\mathbf{0}-\boldsymbol{a}$ изображается тем же отрезком, что и вектор $\boldsymbol{a}$, но направленным в противоположную сторону:

$$\overline{AA}-\overline{AB}=\overline{BA}.$$

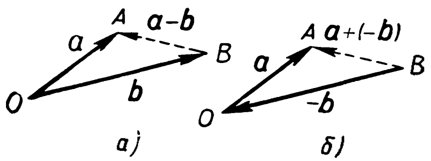


Рис. 336.

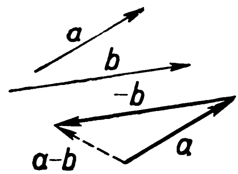


Рис. 337.

Для краткости вектор $\mathbf{0}-\boldsymbol{a}$, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$, обозначают символом $-\boldsymbol{a}$. Мы уже знаем, что

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$$

(см. § 54).

Докажем, что

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

В самом деле, если

$$\boldsymbol{a}=\overline{OA},\quad \boldsymbol{b}=\overline{OB},\quad -\boldsymbol{b}=\overline{BO}$$

(рис. 336), то

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$$

и

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}=\overline{BO}+\overline{OA}=\overline{BA}.$$

Формула $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ дает другое определение операции вычитания: *для того, чтобы вычесть из некоторого вектора* $\boldsymbol{a}$ *вектор* $\boldsymbol{b}$, *достаточно прибавить к нему противоположный вектор* $-\boldsymbol{b}$ (рис. 337).

Напомним еще раз, что равенства

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a} \text{ и } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

по определению, означают одно и то же. Это показывает, что для равенств, составленных из векторов, справедливо следующее правило, выполняющееся и для равенств, составленных из чисел: *слагаемые из одной части равенства можно переносить в другую, меняя стоящие перед этими слагаемыми знаки на противоположные.*

Иначе говоря, для сложения и вычитания векторов выполняются все свойства, выполняющиеся для сложения и вычитания чисел (возможность в алгебраической сумме произвольно переставлять слагаемые, возможность произвольно расставлять скобки в сумме нескольких слагаемых, возможность переносить слагаемые из одной части равенства в другую с изменением знака).

Задачи и упражнения к главе VII

Определение суммы векторов; правило трех точек

424. Докажите, что если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны и одинаково направлены, то вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ также параллелен им, направлен в ту же сторону и имеет длину $a+b$.

425. Докажите, что если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны и противоположно направлены, причем $a > b$, то вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ также параллелен им, его направление совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, а длина равна $a-b$.

426. Длины векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы. Как следует направить эти векторы, чтобы длина вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ была: 1) наибольшей; 2) наименьшей?

427. Докажите, что для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливы неравенства

$$a-b \leqslant |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant a+b.$$

В каком случае справедливы равенства:

$$1)\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=a+b;\quad 2)\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=a-b?$$

428. На числовой оси с нулевой отметкой в точке O взяты точки A и B, которым соответствуют числа a и b. Точку, которой соответствует число $a+b$, обозначим через C.

Докажите, что $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}$. Рассмотрите случаи:

1) $a=2,\ b=3$;
2) $a=3,\ b=-2$;
3) $a=2,\ b=-6$;
4) $a=-2,\ b=5$;
5) $a=-1,\ b=-3$.

429. На числовой оси с нулевой отметкой в точке O взяты точки A и B, которым соответствуют числа a и b. Отложим от точки B вектор, равный $\overline{OA}$; в какой точке окончится полученный вектор?

430. Два взаимно перпендикулярных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обладают тем свойством, что длина вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ вдвое больше длины вектора $\boldsymbol{a}$. Найдите углы, образованные вектором $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ с векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

431. Может ли длина вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ быть меньше, чем длина каждого из векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$?

432. Точки A, B, C, D — вершины параллелограмма, O — его центр. Выразите векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, совпадающие со сторонами этого параллелограмма, через векторы $\boldsymbol{a}=\overline{AO}$, $\boldsymbol{b}=\overline{BO}$, $\boldsymbol{c}=\overline{CO}$, $\boldsymbol{d}=\overline{DO}$.

433. Векторы $\overline{AB}=\boldsymbol{p}$ и $\overline{AF}=\boldsymbol{q}$ служат двумя смежными сторонами правильного шестиугольника $ABCDEF$. Выразите через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ векторы $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{FE}$, $\overline{ED}$, идущие по сторонам этого шестиугольника.

434. Точки A, B, C, D — вершины прямоугольника, O — его центр. Какие векторы, начинающиеся и кончающиеся в точках A, B, C, D, O, равны между собой? Какие из них представляются в виде суммы двух других?

435. Точки D, E и F — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC. Выразите вектор $\overline{AD}$, идущий по медиане, исходящей из точки A, через векторы, которые начинаются и кончаются в точках A, B, C, E, F.

436. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник. Докажите, что

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{DC}.$$

437. На плоскости даны четыре точки A, B, C, D. Выразите всеми возможными способами векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ в виде суммы двух векторов, начало и конец которых совпадают с данными точками.

438. Пусть $ABCDE$ — произвольный пятиугольник. Выразите векторы $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{CA}$, $\overline{DA}$ в виде суммы двух векторов, изображаемых направленными отрезками, совпадающими со сторонами пятиугольника.

Сумма двух параллельных переносов

439. Точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Что представляет собой сумма двух параллельных переносов на векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$?

440*. Постройте прямоугольный треугольник, катеты которого равны и параллельны двум данным взаимно перпендикулярным отрезкам, а концы гипотенузы лежат на двух данных окружностях.

441. $ABCDE$ — правильный пятиугольник. Сумма параллельных переносов на векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ переводит некоторую точку M в N, а сумма параллельных переносов на векторы $\overline{CD}$ и $\overline{EA}$ переводит эту же точку M в другую точку P. Докажите, что точки M, N и P лежат на одной прямой. Какой стороне пятиугольника параллельна эта прямая?

Коммутативность сложения векторов. Правило параллелограмма

442. Докажите равенство $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ в случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны, используя результат задачи 428.

443. От точки O пересечения двух прямых l_1 и l_2 отложен вектор $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$, не идущий ни по одной из этих прямых. Можно ли вектор $\boldsymbol{a}$ представить в виде суммы двух векторов, направленных по прямым l_1 и l_2? Как это сделать?

444. Груз P весом 1 *т* поддерживается двумя стержнями AB и CB, прикрепленными к стене с помощью шарниров (рис. 338). Найдите усилия, возникающие в стержнях, если $\angle CAB=90°$, $\angle ACB=60°$.

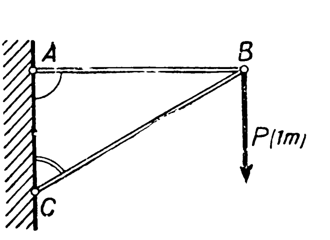


Рис. 338.

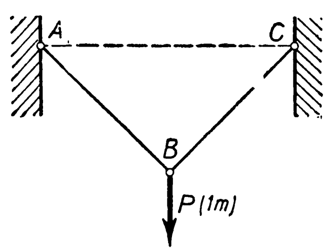


Рис. 339.

445. Груз P весом 1 *т* подвешен в середине троса ABC, прикрепленного к крюкам A и C, расположенным на одной высоте. Определите натяжения троса на участках AB и BC, если длина троса равна $2a$, а $AC=a\sqrt{2}$ (рис. 339).

Ассоциативность сложения векторов; сумма нескольких векторов; условие замкнутости

446. Найдите сумму векторов $\overline{AB}$, $\overline{MA}$, $\overline{BM}$ (A, B, M — три данные точки).

447. Точки A, B, C, D — вершины параллелограмма, O — его центр. Упростите следующие выражения:

$$(\overline{AB}+\overline{DO})+\overline{OA};$$

$$(\overline{BC}+\overline{OA})+\overline{OD};$$

$$\overline{OA}+\overline{BC}+\overline{DO}+\overline{CD}.$$

448. На плоскости дан четырехугольник $ABCD$. Выразите всевозможными способами векторы $\overline{AB}$, $\overline{BA}$, $\overline{AC}$, $\overline{CA}$ в виде суммы векторов, по величине и направлению совпадающих со сторонами четырехугольника или с его диагоналями.

449. На плоскости даны пять точек A, B, C, D, E. Выразите всевозможными способами вектор $\overline{AB}$ в виде суммы ненулевых векторов, начало и конец которых совпадают с какими-либо из данных точек.

450. Существует ли пятиугольник, стороны которого равны и параллельны диагоналям произвольного заданного пятиугольника?

451. Существует ли пятиугольник, диагонали которого равны и параллельны сторонам произвольно заданного пятиугольника?

452. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что существует четырехугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам OA, OB, OC, OD. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

453*. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна нулевому вектору.

Вычитание векторов

454. Точки A, B, C, D — вершины параллелограмма, O — его центр. Выразите векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$, направленные по сторонам этого параллелограмма, через векторы $\boldsymbol{a}=\overline{AO}$ и $\boldsymbol{b}=\overline{BO}$.

455. Векторы $\overline{AB}=\boldsymbol{p}$ и $\overline{AF}=\boldsymbol{q}$ служат двумя смежными сторонами правильного шестиугольника. Выразите через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ векторы, идущие по сторонам этого шестиугольника.

456. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$. Выразите векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ через векторы $\overline{OE}=\boldsymbol{p}$ и $\overline{OF}=\boldsymbol{q}$.

457. На векторах $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{AD}=\boldsymbol{b}$ построен параллелограмм $ABCD$. Какой из векторов, соединяющих вершины параллелограмма, равен сумме $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$? Разности $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$?

458. На плоскости заданы параллелограмм $ABCD$ и точка O. Докажите, что $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}$.

459. Если $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}$ (где O, A, B, C, D — некоторые пять точек плоскости и точки A,B,C,D не лежат на одной прямой), то четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

460. Даны параллелограмм $MNPQ$ и точка A. Выразите вектор $\overline{AQ}$ через векторы $\overline{AM}=\boldsymbol{m}$, $\overline{AN}=\boldsymbol{n}$, $\overline{AP}=\boldsymbol{p}$.

461. Рассматривая параллелограмм, построенный на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, проверьте правильность соотношения

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}.$$

462. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$ обладают тем свойством, что длины векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ одинаковы. Какой угол образуют между собой векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$?

463. На числовой оси с нулевой отметкой в точке O взяты точки A и B, которым соответствуют числа a и b. Точку, которой соответствует число $a-b$, обозначим через C. Докажите, что $\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{OC}$.

464. Определите неизвестный вектор $\boldsymbol{x}$ из равенств

1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$;

2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

465. Докажите, что длина вектора $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ не превосходит суммы длин векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, но не меньше разности этих длин. В каком случае выполнено каждое из следующих равенств:

1) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=a+b$;

2) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=a-b$;

3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=b-a$.

466. Даны четырехугольник и точка M. Докажите, что точки, симметричные точке M относительно середин сторон четырехугольника, являются вершинами параллелограмма.

467. Даны четыре точки A, B, C, D. Выразите двумя способами вектор $\overline{AB}$ в виде разности двух векторов, начало и конец которых совпадают с данными точками.

468. Выразите вектор $\overline{AB}$ в виде алгебраической суммы следующих векторов:

а) $\overline{AC}$, $\overline{DC}$, $\overline{BD}$;

б) $\overline{DA}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$;

в) $\overline{DA}$, $\overline{DC}$, $\overline{CB}$.

Противоположные векторы

469. Могут ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ быть равны?

470. Докажите, что сумма двух векторов в том и только в том случае равна нулевому вектору, если эти векторы противоположны.

471. Докажите, что если фигура F_1 получается из F параллельным переносом на вектор $\overline{AB}$, то фигура F получается из F_1 параллельным переносом на противоположный вектор $\overline{BA}$.

472. Фигура F_1 получается из F параллельным переносом на вектор $\overline{AB}$, а фигура F_2 получается из F параллельным переносом на вектор $\overline{AC}$. Можно ли фигуру F_2 получить из F_1 параллельным переносом? На какой вектор?

473. Даны две точки M и N. Найдите такую точку P, что векторы $\overline{MP}$ и $\overline{NP}$ противоположны.

Поведение векторов при движениях

474. Существует ли вектор, переходящий при повороте на угол $\alpha \neq 0$ $(-180° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ в равный ему вектор?

475. При некотором движении векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ переходят в векторы $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$. В какой вектор перейдет сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ при этом движении? Рассмотрите также случай трех и большего числа векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ...

476. При некотором движении векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ переходят в векторы $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$. В какой вектор перейдет разность $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$?

477. Какие векторы переходят при симметрии относительно прямой l в равные им векторы? Какие векторы переходят при этой симметрии в противоположные им векторы?

478. При симметрии относительно оси l вектор $\boldsymbol{a}$ переходит в вектор $\boldsymbol{a}'$. Как расположена относительно оси симметрии сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'$? Разность $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}'$?

479. Точки A и B симметрично отражены относительно точки O_1; полученные точки A_1 и B_1 симметрично отражены относительно O_2; полученные после второго отражения точки A_2 и B_2 симметрично отражены относительно точки O_3 и т. д.; наконец, после симметрии относительно точки O_n, мы получаем точки A_n и B_n. Докажите, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{A_nB_n}$ равны между собой при четном n и противоположны при n нечетном.

480*. Даны точки O_1, O_2, ... , O_n. Докажите, что при нечетном n существует точка M, обладающая следующим свойством: если M симметрично отразить относительно точки O_1, затем полученную точку M_1 отразить относительно O_2, полученную точку M_2 отразить относительно O_3 и т. д., то точка M_n, полученная после отражения относительно точки O_n, совпадает с M. Как найти точку M? Сколько таких точек существует?

481*. Докажите, что если n нечетно, то сумма симметрий относительно точек $O_1, O_2, \ldots, O_n$ представляет собой симметрию относительно точки M, найденной в задаче **480**. Что представляет собой сумма четного числа симметрий относительно некоторых точек?

482*. Постройте пятиугольник, зная середины его сторон.

483*. Докажите, что сумма любого числа центральных симметрий и параллельных переносов снова является центральной симметрией или параллельным переносом.

Дополнения и методические указания к главе VII

1. Сложение векторов. [К § 52.] Выше мы уже отмечали (см. п. **2** на стр. 120), что вектором правильнее называть не один направленный отрезок, а семейство всех равных, параллельных и одинаково направленных отрезков. Для определения суммы векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ мы, согласно определению, изложенному в § 52, должны выбрать направленный отрезок $\overline{OM}$, изображающий вектор $\boldsymbol{a}$, и затем второй направленный отрезок $\overline{MN}$, изображающий вектор $\boldsymbol{b}$. Тогда вектор, изображаемый направленным отрезком $\overline{ON}$, принимается за сумму векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обозначается через $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Иначе говоря, сумма векторов определяется по представителям. Мы берем не вектор $\boldsymbol{a}$ (который представляет собой семейство направленных отрезков), а лишь один направленный отрезок из этого семейства, т. е. берется один представитель $\overline{OM}$ семейства направленных отрезков $\boldsymbol{a}$. Точно так же вместо другого семейства направленных отрезков (т. е. вектора) $\boldsymbol{b}$ берется один представитель $\overline{MN}$ этого семейства. Затем проводится направленный отрезок $\overline{ON}$. Вектор, представителем которого является направленный отрезок $\overline{ON}$, и объявляется суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. [Другими словами, сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ определяется так: если $\overline{OM}\in\boldsymbol{a}$ и $\overline{MN}\in\boldsymbol{b}$, то $\overline{ON}\in\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (ср. выше, стр. 121).]

Но ясно, что определение суммы векторов «по представителям» не может быть признано корректным до тех пор, пока не установлено, что получаемый вектор (который мы обозначаем через $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$) *не зависит от выбора представителей в семействах направленных отрезков* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$. Ведь могло бы оказаться, что, взяв вместо $\overline{OM}$ и $\overline{MN}$ какие-либо другие представители $\overline{O'M'}$ и $\overline{M'N'}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, мы получим направленный отрезок $\overline{O'N'}$, определяющий другой вектор. В действительности, однако, этого не происходит: направленные отрезки $\overline{ON}$ и $\overline{O'N'}$ равны, параллельны и одинаково направлены, т. е. определяют один и тот же вектор. Доказательство проведено в § 52 мелким шрифтом. До проведения этого доказательства нельзя считать установленным, что сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ определяется векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ однозначно.

Таким образом, мелкий шрифт в § 52 имеет принципиальное значение: это рассуждение показывает корректность определения суммы векторов. Однако у учащихся вряд ли возникнет потребность в проведении этого доказательства; поэтому в классе соответствующее рассуждение можно опустить.

2. Векторы на прямой. [К § 52.] Предположим, что мы ограничиваемся лишь рассмотрением векторов, принадлежащих одной прямой l. Нам будет удобно задать на прямой l определенное направление, которое мы будем называть «положительным»; это направление указывается стрелкой, поставленной на прямой. Кроме того, фиксируем определенную единицу измерения длин. [Прямую, на которой задано направление и фиксирована единица измерения длин, называют осью: см. § 63 гл. IX. Таким образом, мы рассматриваем здесь по существу не векторы на прямой, а векторы на оси.] Любой вектор $\boldsymbol{a}$, принадлежащий прямой l, мы можем теперь характеризовать его величиной, или «направленной длиной», т. е. длиной вектора, взятой со знаком «+» или «—» в зависимости от того, совпадает ли направление вектора с выбранным на прямой направлением или противоположно ему. В самом деле, *равные векторы прямой l имеют одинаковую величину; обратно, векторы прямой l, имеющие одинаковую величину, равны между собой.*

Очень важно заметить, что *величина вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ равна сумме величин векторов $\boldsymbol{a}$* и $\boldsymbol{b}$; это утверждение будет играть известную роль в гл. IX (см. § 64, стр. 227). Для его доказательства достаточно рассмотреть всевозможные случаи расположения трех точек A, B и C на прямой l и проверить, что во всех случаях величина вектора $\overline{AC}$ будет равна сумме величин векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ (см., например, рис. 340, *а*, *б*, где вел.$\overline{AB}=-3$, вел.$\overline{BC}=-4$, вел.$\overline{AC}=-7$, соответственно вел.$\overline{AB}=2$, вел.$\overline{BC}=-3$ и вел.$\overline{AC}=-1$).

3. **Поведение векторов при движениях.** [К лемме § 55.] Пусть $\overline{AB}$ — некоторый направленный отрезок и δ — некоторое движение. Обозначим через

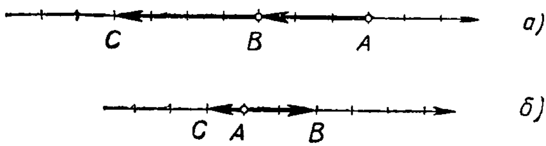


Рис. 340.

$A'=\delta(A)$ и $B'=\delta(B)$ точки, в которые переходят A и B при движении δ. В таком случае считают, что направленный отрезок $\overline{AB}$ переходит при движении δ в направленный отрезок $\overline{A'B'}$.

Теорема: *Если направленные отрезки* $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ *определяют один и тот же вектор* (т. е. равны по длине, параллельны и одинаково направлены), *то направленные отрезки $\overline{A'B'}$ и $\overline{C'D'}$, в которые они переходят при дви-*

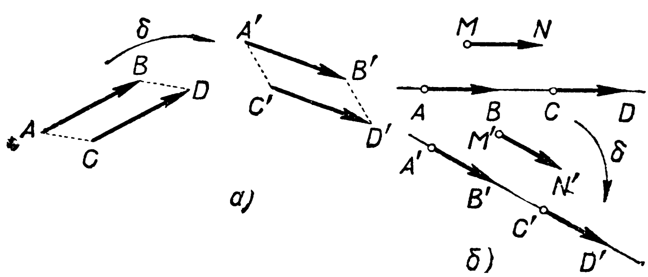


Рис. 341.

жении δ, также определяют один и тот же вектор. Иначе говоря, если $\overline{AB}=\overline{CD}$, то $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$.

Доказательство. Предположим сначала, что точки A, B, C, D не лежат на одной прямой (рис. 341, *а*). Так как $\overline{AB}=\overline{CD}$, то $ABDC$ — параллелограмм (см. признак равенства векторов в § 33, стр. 107). Движение δ переводит параллелограмм в равную ему фигуру, так что $A'B'D'C'$ — также параллелограмм. Но из этого следует, что $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$, т. е. направленные отрезки $\overline{A'B'}$ и $\overline{C'D'}$, также определяют один и тот же вектор.

Пусть теперь точки A, B, C, D лежат на одной прямой и $\overline{AB}=\overline{CD}$ (рис. 341, *б*). Выберем направленный отрезок $\overline{MN}=\overline{AB}$, не лежащий на прямой AB, и обозначим через $\overline{M'N'}$ направленный отрезок, в который переходит $\overline{MN}$ при движении δ. Тогда в силу доказанного выше

$$\overline{A'B'}=\overline{M'N'} \text{ и } \overline{C'D'}=\overline{M'N'},$$

а потому $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$.

Доказанная теорема показывает, что *каждый вектор* $\boldsymbol{a}$ (т. е. семейство направленных отрезков, см. стр. 120) *при движении* δ *переходит снова в некоторый вектор* $\boldsymbol{a}'=\delta(\boldsymbol{a})$. Например, *при центральной симметрии* ω *каждый вектор* $\boldsymbol{a}$ *переходит в противоположный вектор* $-\boldsymbol{a}$:

$$\omega(\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}$$

(этот факт используется в лемме, § 55). Далее, *при любом параллельном переносе* τ *каждый вектор* $\boldsymbol{a}$ *переходит в тот же самый вектор:*

$$\tau(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}.$$

В самом деле, если вектор $\boldsymbol{a}$ изображается направленным отрезком $\overline{AB}$, а $\overline{A'B'}$ — направленный отрезок, в который переходит $\overline{AB}$ при параллельном переносе τ (рис. 342), то $\overline{AA'}=\overline{BB'}$ (в силу определения параллельного переноса). Поэтому $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ (см. следствие в § 33, стр. 107), т. е. $\boldsymbol{a}=\tau(\boldsymbol{a})$.

Важное понятие преобразования векторов при движениях не определяется в тексте пособия; использование его в § 55 вряд ли затруднит учащихся. Этому понятию посвящены также задачи **474—483**; при этом и здесь (как и в доказательстве леммы § 55) мы считаем, что учащиеся, не задумываясь, примут на веру сам факт перехода вектора при движении снова в вектор.

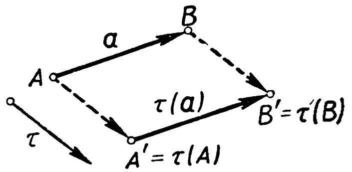


Рис. 342.

4. О понятии равенства векторов. Вспомним теперь, что в школьном преподавании мы не рассматриваем вектор как семейство направленных отрезков, а считаем вектором каждый направленный отрезок, в связи с чем приходится говорить о равенстве векторов (ср. стр. 122). При этом имеет место следующая теорема (ср. конец п. 3):

Теорема. *Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ в том и только в том случае равны между собой, если существует параллельный перенос τ, переводящий $\overline{AB}$ в $\overline{CD}$.*

В самом деле, если $\overline{AB}=\overline{CD}$, то $\overline{AC}=\overline{BD}$ (см. следствие в § 33), и потому параллельный перенос на вектор $\overline{AC}$ переводит вектор $\overline{AB}$ в вектор $\overline{CD}$. Обратно, если вектор $\overline{AB}$ переходит при некотором параллельном переносе в вектор $\overline{CD}$, то $\overline{AC}=\overline{BD}$ (в силу определения параллельного переноса), и потому $\overline{AB}=\overline{CD}$.

Эта теорема вскрывает глубокое различие между понятием равенства векторов и понятием равенства геометрических фигур. В самом деле, *фигуры F_1 и F_2 равны друг другу в том и только в том случае, если существует какое-либо движение, переводящее фигуру F_1 в F_2*. В случае же векторов вместо произвольных движений надо рассматривать лишь параллельные переносы. Поэтому *вектор нельзя считать геометрической фигурой* (ибо понятие равенства векторов отличается от понятия равенства фигур). Впрочем, ничего удивительного в этом нет: ведь фигуру мы понимаем как множество точек, а вектор $\overline{AB}$ не является множеством точек (этим он отличается от отрезка AB).

Итак, между понятием равенства векторов и понятием равенства фигур существует глубокое различие. Но между этими двумя понятиями имеется и сходство (позволяющее оба эти понятия обозначать одним словом «равенство»). Именно, и в том и в другом случае имеется некоторая совокупность геометрических преобразований, позволяющая устанавливать равенство рассматриваемых геометрических объектов. Для сравнения запишем параллельно следующие критерии равенства треугольников и векторов:

Два $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{треугольника}}{\textit{вектора}}$ *в том и только в том случае равны между собой, если существует* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{движение}}{\textit{параллельный перенос}}$, *при котором первый из них переходит во второй.*

Это сходство не случайно; оно имеет очень глубокие основания, связанные с рассмотрением так называемых групп преобразований и впервые высказанные выдающимся немецким геометром Ф. Клейном. Изложение этих идей далеко выходит, однако, за рамки школьного курса геометрии. Читателя, интересующегося этим вопросом, мы отсылаем к указанной на стр. 296 книге И. М. Яглома «Геометрические преобразования», тт. I, II (см. текст «Что такое геометрия?»).

5. **Вычитание векторов.** [К § 57.] В § 57 дано два определения операции вычитания векторов: первое из них определяет вычитание как действие, обратное к сложению, а второе дает явную формулу:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \qquad (*)$$

Эти два определения эквивалентны, т. е. любое из них может быть принято за первоначальное и тогда другое определение будет вытекать из него как теорема. В § 57 мы, приняв первое из упомянутых определений, доказали, исходя из него, формулу (*). Не представляет труда установить и обратное: *если определить разность* $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ *формулой* (*), *то можно доказать, что вычитание обратно сложению* (т. е., что из равенства $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}$ вытекает $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$). В самом деле, если $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$, то мы имеем:

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}=0+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

6. **О задачах и упражнениях.** Задачи **424—427** тесно связаны друг с другом и по-разному освещают один и тот же вопрос: сумма двух параллельных векторов. Эти задачи могут быть использованы не только для решения в классе или дома, но и при последующем опросе учащихся. Мы считаем, что факты, изложенные в этих задачах, учащиеся должны ясно и четко понимать. Две последующие задачи (**428** и **429**) также посвящены тому же вопросу, причем связывают понятие суммы векторов с координатами. Их также можно отнести к числу обязательных. [По поводу материала задач **424—429**. см. п. **2** стр. 197]. Задачи **430** и **431** связаны с правильным представлением о сумме непараллельных векторов. Из них особенно полезна задача **431**; мы рекомендуем сделать несколько чертежей на доске, т. е. несколько раз использовать эту задачу при опросе разных учащихся. Задачи **432—438** очень несложны. Они иллюстрируют правило трех точек и очень полезны учащимся. В дальнейшем будет приведено немало схожих задач, связанных с вычитанием векторов и умножением вектора на число. Следует добиваться, чтобы учащиеся свободно решали задачи такого типа — это является необходимым элементом решения последующих более сложных задач.

Задачи на сумму параллельных переносов (**439—441**) помогают изучению суммы векторов. При недостатке времени (или в случае слабого класса) можно опустить эти задачи или ограничиться только первой из них.

Задачи **442—445** несложны; их можно рекомендовать для разбора в классе.

Из задач **446—452** наиболее важны первые три (ср. сказанное о задачах **432—438**). Задача **453** очень интересна, но не очень проста; она связана с задачей **474**.

Из числа задач **454—466** мы особенно рекомендуем задачи **454—457**, **461**, **463—465**, так как их решение способствует приобретению необходимых для дальнейшего навыков. Задачи **458—460** однотипны и также весьма полезны; можно решить, например, одну из них. Задача **466** интересна тем, что это первая задача, по формулировке несвязанная с векторами, решение которой легко провести с помощью векторов; если учитель будет разбирать ее в классе, интересно сравнить ее векторное решение с «обычным» решением, связанным с проведением средних линий.

Задачи **469—473**, относящиеся к понятию нулевого вектора и противоположных векторов, несложны; их можно решать и до задач **454—468**. По идейной нагрузке задачи **471**, **472**, связанные с рассмотрением параллельных переносов, несколько труднее других; их можно пропустить.

Задачи к главе VII завершаются циклом задач, связанных с поведением векторов при движениях (задачи **474—483**). Из них отметим задачу **474**, которая полезна для решения других задач (сама она очень проста). Задачи **479—483** составляют единое целое и посвящены применению векторов к нахождению суммы параллельных переносов и центральных симметрий. Это позволяет решить сравнительно трудную задачу на построение (задача **482**: ср. ниже,

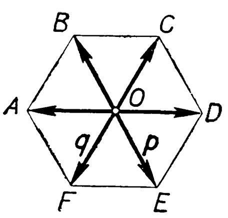


Рис. 343.

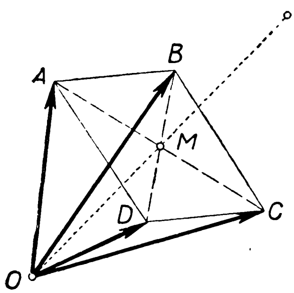


Рис. 344.

стр. 210). Этот цикл задач не является обязательным; в пособии для учащихся он отсутствует.

7. Примеры решения задач. 1) Задача **456** (стр. 195). Все шесть треугольников, на которые отрезки OA, OB, OC, OD, OE, OF разбивают правильный шестиугольник $ABCDEF$, являются равносторонними (рис. 343). Поэтому точки B, O и E расположены на одной прямой и $OB=OE$. Следовательно, $\overline{OB}=\overline{EO}=-\overline{OE}=-\boldsymbol{p}$. Точно так же $\overline{OC}=-\boldsymbol{q}$. Остается найти векторы $\overline{OA}$ и OD. Мы имеем (учитывая, что $OFAB$ и $OEDC$ — параллелограммы):

$$\overline{OA}=\overline{OF}+\overline{OB}=\boldsymbol{q}+(-\boldsymbol{p})=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p},$$

$$\overline{OD}=\overline{OE}+\overline{OC}=\boldsymbol{p}+(-\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}.$$

Таким образом, векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ выражены через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$:

$$\overline{OA}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p},\quad \overline{OB}=-\boldsymbol{p},\quad \overline{OC}=-\boldsymbol{q};\quad \overline{OD}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}.$$

2) Задача **458** (стр. 195). Обозначим через M точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, а через P — точку, симметричную точке O относительно точки M (рис. 344). Тогда, согласно лемме § 55, мы имеем:

$$\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OP},\quad \overline{OB}+\overline{OD}=\overline{OP}$$

(так как M — середина отрезков AC и BD). Следовательно,

$$\overline{OA}+OC=\overline{OB}+\overline{OD}.$$

Приведем еще другое решение той же задачи, которое можно записать в виде двух строчек равенств (использующих свойства сложения и вычитания векторов):

$$\overline{OA}+\overline{OC} = (\overline{OB}+\overline{BA}) + (\overline{OD}+\overline{DC}) =$$
$$=(\overline{OB}+\overline{OD}) + (\overline{BA}+\overline{DC}) = (\overline{OB}+\overline{OD})+\mathbf{0} = \overline{OB}+\overline{OD}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\overline{BA}$ и $\overline{DC}$ — противоположные векторы, и потому $\overline{BA}+\overline{DC}=\mathbf{0}$). [Заметим, что в обоих приведенных решениях не используется операция вычитания векторов; мы, однако, поместили эту задачу в разделе задач на вычитание векторов, так как она тесно связана с задачей **460**.]

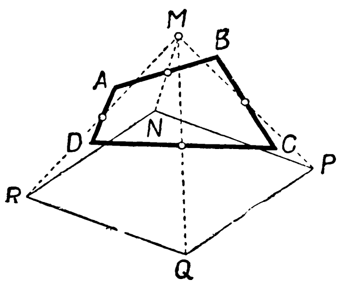


Рис. 345.

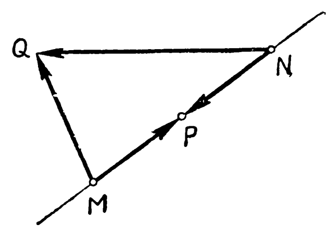


Рис. 346.

3) Задача **466** (стр. 196). Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, а N, P, Q, R — точки, симметричные точке M относительно середин сторон AB, BC, CD и DA (рис. 345).

Тогда, согласно лемме § 55, мы имеем:

$$\overline{MN}=\overline{MA}+\overline{MB}, \quad \overline{MP}=\overline{MB}+\overline{MC},$$
$$\overline{MQ}=\overline{MC}+\overline{MD}, \quad \overline{MR}=\overline{MD}+\overline{MA}.$$

Далее,

$$\overline{NR}-\overline{PQ}=(\overline{MR}-\overline{MN})-(\overline{MQ}-\overline{MP})=$$
$$=(\overline{MD}+\overline{MA})-(\overline{MA}+\overline{MB})-(\overline{MC}+\overline{MD})+(\overline{MB}+\overline{MC})=\mathbf{0}.$$

Следовательно, $\overline{NR}=\overline{PQ}$ и потому $NRQP$ — параллелограмм.

4) Задача **473** (стр. 196). Проведем прямую MN и обозначим через P середину отрезка MN. Ясно, что векторы $\overline{MP}$ и $\overline{NP}$ противоположны, так что точка P — искомая. Покажем, что других точек, обладающих требуемым свойством, нет. Если точка Q не лежит на прямой MN, то точки M, N, Q являются вершинами треугольника, и потому векторы $\overline{MQ}$ и $\overline{NQ}$ не параллельны одной прямой (рис. 346). Значит, эти векторы не являются противоположными. Таким образом, вне прямой MN нет точек, обладающих требуемым свойством. Далее, если P' — точка прямой MN, отличная от точки P, то отрезки MP' и NP' имеют разную длину, поэтому векторы $\overline{MP'}$ и $\overline{NP'}$ не могут быть противоположными. Таким образом, середина отрезка MN есть единственная точка, обладающая требуемым свойством.

ГЛАВА VIII

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

§ 58. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УМНОЖЕНИЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Пусть $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$ — некоторый вектор и k — отличное от нуля число. Обозначим через A' точку, в которую переходит точка A при **гомотетии** с центром гомотетии O и коэффициентом гомотетии k (рис. 347). В этом случае вектор $\overline{OA'}$ называют **произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на число k** и пишут

$$\overline{OA'}=k\cdot\overline{OA}=k\boldsymbol{a}.$$

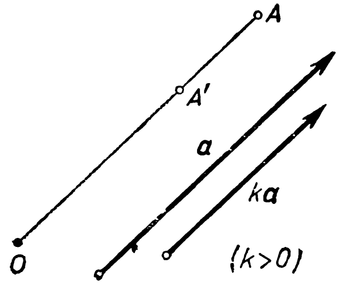


Рис. 347.

Произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на число 0 считается равным нулевому вектору:

$$0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

Таким образом, произведение $k\boldsymbol{a}$ определено для любого числа k и любого вектора $\boldsymbol{a}$.

Вспоминая определение гомотетии (§ 38, 39), мы можем сформулировать определение произведения вектора на число следующим образом:

Произведение *$k\boldsymbol{a}$ представляет собой вектор, удовлетворяющий следующим трем условиям:*

1) *вектор $k\boldsymbol{a}$ параллелен вектору $\boldsymbol{a}$;*

2) *длина вектора $k\boldsymbol{a}$ равна длине вектора $\boldsymbol{a}$, умноженной на абсолютную величину числа k:*

$$|k\boldsymbol{a}|=|k|\cdot|\boldsymbol{a}|;$$

3) *вектор $k\boldsymbol{a}$ при $k>0$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{a}$, а при $k<0$ — в противоположную сторону.*

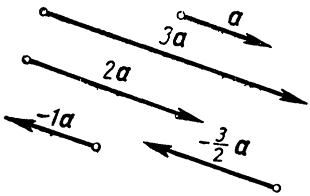


Рис. 348.

На рисунке 348 изображены векторы $k\boldsymbol{a}$ при разных значениях k.

Из определения операции умножения вектора на число непосредственно вытекает справедливость следующих двух утверждений, которые часто оказываются полезными:

1) *Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны (и $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$), то существует такое число k, что $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.*

2) *Если $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{e}$ — вектор единичной длины, направление которого совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, то*

$$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{e}.$$

Последнее вытекает из того, что оба вектора $\boldsymbol{a}$ и $a\boldsymbol{e}$ имеют одну и ту же длину:

$$|a\boldsymbol{e}|=a\cdot|\boldsymbol{e}|=a\cdot 1=a.$$

§ 59. Свойства операции умножения вектора на число

Из определения умножения вектора на число непосредственно вытекают следующие соотношения:

$$0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0};$$
$$k\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0};$$
$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a};$$
$$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a};$$
$$(-k)\cdot\boldsymbol{a}=-(k\boldsymbol{a}).$$

Все они напоминают хорошо известные свойства операции умножения чисел.

Следующие три свойства также подчеркивают эту аналогию:

1) $k\cdot(l\boldsymbol{a})=(kl)\cdot\boldsymbol{a}$; 2) $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$; 3) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.

Докажем эти свойства.

Доказательство свойства 1). Будем предполагать, что $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $k\neq 0$ и $l\neq 0$, так как в противном случае доказываемое соотношение очевидно. Из определения операции умножения вектора на число следует, что векторы $k(l\boldsymbol{a})$ и $(kl)\boldsymbol{a}$ параллельны вектору $\boldsymbol{a}$ и что они имеют одну и ту же длину (ибо $|k|\cdot|l\boldsymbol{a}|=|k|\cdot|l|\cdot|\boldsymbol{a}|$ и $|kl|\cdot|\boldsymbol{a}|=|k|\cdot|l|\cdot|\boldsymbol{a}|$). Поэтому остается только проверить, что эти векторы одинаково направлены. Но если k и l — числа одного знака, то и вектор $k(l\boldsymbol{a})$ и вектор $(kl)\boldsymbol{a}$ направлены в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{a}$. Если же числа k и l имеют разные знаки, то и вектор $(kl)\boldsymbol{a}$ и вектор $k(l\boldsymbol{a})$ направлены противоположно вектору $\boldsymbol{a}$. Тем самым равенство $k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$ доказано.

Доказательство свойства 2). Будем предполагать, что $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, так как в противном случае доказываемое соотношение очевидно. Рассмотрим сначала случай, когда *числа k и l имеют один и тот же знак*. В этом случае все три вектора $(k+l)\boldsymbol{a}$, $k\boldsymbol{a}$ и $l\boldsymbol{a}$ имеют одно и то же направление (рис. 349). Кроме того, длина вектора $k\boldsymbol{a}$ равна $|k|a$, а длина вектора $l\boldsymbol{a}$ равна $|l|a$. Следовательно, вектор $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$ имеет длину

$$|k|a+|l|a=(|k|+|l|)a=|k+l|a=|k+l|\cdot|\boldsymbol{a}|,$$

т. е. векторы $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$ и $(k+l)\boldsymbol{a}$ имеют одну и ту же длину. Так как они, кроме того, направлены в одну сторону, то они равны.

Предположим теперь, что k *и* l *имеют противоположные знаки*, и пусть, например, число $k+l$ имеет тот же знак, что и число l (т. е. знак, противоположный знаку k; рис. 350). Тогда числа $-k$ и $k+l$ имеют одинаковые знаки, и потому, по доказанному выше,

$$(-k)\,\boldsymbol{a}+(k+l)\,\boldsymbol{a}=[-k+(k+l)]\,\boldsymbol{a}=l\boldsymbol{a}.$$

Но так как $(-k)\cdot\boldsymbol{a}=-(k\boldsymbol{a})$, то

$$-(k\boldsymbol{a})+(k+l)\,\boldsymbol{a}=l\boldsymbol{a},$$

откуда и следует справедливость равенства $(k+l)\,\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$ в этом случае.

Наконец, если хотя бы одно из чисел k, l, $k+l$ равно нулю, то соотношение $(k+l)\,\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$ очевидно.

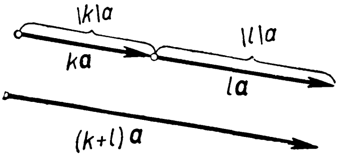


Рис. 349.

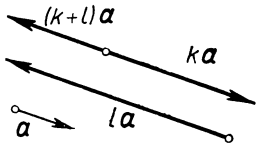


Рис. 350.

Д о к а з а т е л ь с т в о с в о й с т в а 3). Отложим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ от одной точки O:

$$\boldsymbol{a}=\overline{OA},\quad \boldsymbol{b}=\overline{OB}$$

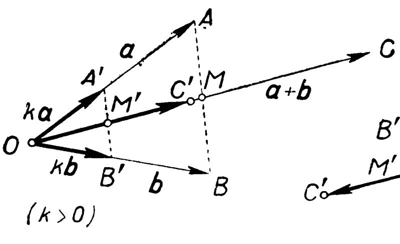


Рис. 351.

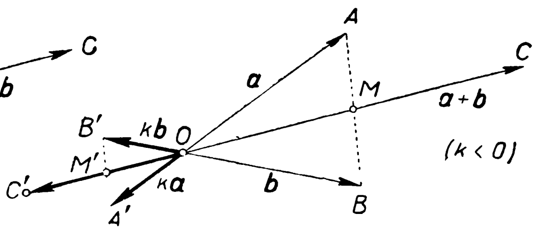


Рис. 352.

и обозначим через M середину отрезка AB, а через C — точку, симметричную точке O относительно точки M (рис. 351, 352). Тогда (в силу леммы § 55)

$$\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

При гомотетии с центром O и коэффициентом k точка O перейдет в себя, а точки A, B, C, M перейдут в некоторые новые точки A', B', C', M'. По определению умножения вектора на число, мы имеем

$$\overline{OA'}=k\cdot\overline{OA}=k\boldsymbol{a},\ \overline{OB'}=k\cdot\overline{OB}=k\boldsymbol{b},\ \overline{OC'}=k\cdot\overline{OC}=k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Так как при гомотетии середина отрезка переходит в середину отрезка, то точка M' — середина отрезка $A'B'$. Точка C' симметрична точке O относительно M'. Следовательно, согласно лемме § 55,

$$\overline{OA'}+\overline{OB'}=\overline{OC'},\ \text{т. е.}\ k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

§ 60. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Пусть AB — произвольный отрезок и C — его внутренняя точка (рис. 353). Тогда число

$$\frac{AC}{CB}$$

называется *отношением, в котором точка C делит отрезок AB*. Например, если C — середина отрезка AB (рис. 354), то отноше-

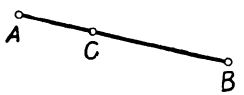


Рис. 353.

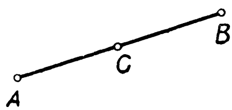


Рис. 354.

ние, в котором точка C делит отрезок AB, равно 1 (так как $AC=CB$). Если, далее, C_1 и C_2 — точки, делящие отрезок AB на три равные части (рис. 355), то точка C_1 делит отрезок AB в отношении $\frac{1}{2}$, а точка C_2 делит отрезок AB в отношении 2.

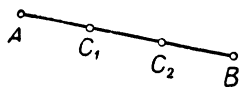


Рис. 355.

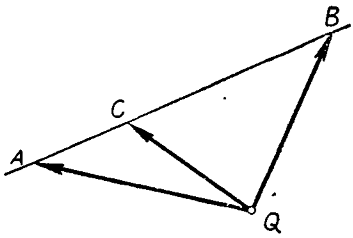


Рис. 356.

Теорема 1. *Пусть C — точка, делящая отрезок AB* в *отношении $m:n$* (т. е. $AC:CB=m:n$), *Q — произвольная точка плоскости* (рис. 356). *Тогда*[1]

$$\overline{QC}=\frac{n}{m+n}\overline{QA}+\frac{m}{m+n}\overline{QB}.$$

[1] Если точка C лежит не на отрезке AB, а на его продолжении, то отношение, в котором она делит отрезок AB, считается отрицательным. Формула, указанная в теореме 1, при этом остается справедливой.

Обратно, если выполнено это соотношение, то точка C делит отрезок AB в отношении $m:n$.

Доказательство. Так как точка C делит отрезок AB в отношении $m:n$, то

$$AC=\frac{m}{n}CB.$$

Следовательно,

$$AB=AC+CB=\left(1+\frac{m}{n}\right)CB=\frac{m+n}{n}CB.$$

Отсюда находим:

$$AC:AB=\frac{m}{n}:\frac{m+n}{n}=\frac{m}{m+n}, \text{ т. е. } AC=\frac{m}{m+n}AB.$$

Но направления векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ совпадают; поэтому

$$\overline{AC}=\frac{m}{m+n}\overline{AB}.$$

Заменяя здесь вектор $\overline{AC}$ на $\overline{QC}-\overline{QA}$, а вектор $\overline{AB}$ на $\overline{QB}-\overline{QA}$, получаем

$$\overline{QC}-\overline{QA}=\frac{m}{m+n}\overline{QB}-\frac{m}{m+n}\overline{QA},$$

откуда

$$\overline{QC}=\frac{m}{m+n}\overline{QB}+\left(1-\frac{m}{m+n}\right)\overline{QA}=\frac{m}{m+n}\overline{QB}+\frac{n}{m+n}\overline{QA}.$$

Обратно, если это равенство выполнено, то, проводя вычисления в обратном порядке, мы найдем, что $AC:CB=m:n$.

Теорема 2. *Пусть A, B, C и Q — четыре произвольные точки плоскости. Точка C тогда и только тогда лежит на прямой AB* (рис. 357), *когда существует такое число k, что*

$$\overline{QC}=k\cdot\overline{QA}+(1-k)\cdot\overline{QB}.$$

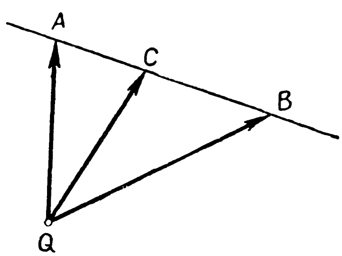


Рис. 357.

Доказательство. Написанное соотношение можно переписать так:

$$\overline{QC}=k\cdot\overline{QA}+\overline{QB}-k\cdot\overline{QB},$$

или, иначе,

$$\overline{QC}-\overline{QB}=k\cdot(\overline{QA}-\overline{QB}),$$

или, наконец, в виде

$$\overline{BC}=k\cdot\overline{BA}.$$

Последнее же соотношение выполнено тогда и только тогда, когда векторы $\overline{BC}$ и $\overline{BA}$ параллельны одной и той же прямой, т. е. когда точка C лежит на прямой AB.

§ 61. СЛЕДСТВИЯ

I. *Точка C тогда и только тогда является серединой отрезка AB, когда*

$$\overline{QC}=\frac{1}{2}(\overline{QA}+\overline{QB}),$$

где Q — произвольная точка плоскости (рис. 358). Иначе это соотношение может быть записано в виде:

$$2\overline{QC}=\overline{QA}+\overline{QB}.$$

Это вытекает из формулы, доказанной в § 60 (см. теорему 1), если положить в этой формуле $m=n$.

II. *Пусть ABC — произвольный треугольник и M — его центр тяжести (точка пересечения медиан). Тогда*

$$\overline{QM}=\frac{1}{3}(\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}),$$

где Q — произвольная точка плоскости (рис. 359).

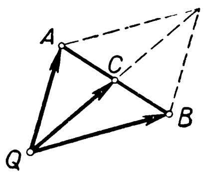


Рис. 358.

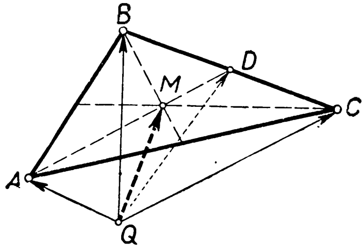


Рис. 359.

В самом деле, если D — середина стороны BC, то в силу следствия I мы имеем:

$$\overline{QD}=\frac{1}{2}(\overline{QB}+\overline{QC}).$$

Далее, точка M делит медиану AD в отношении $AM:MD=2:1$ (рис. 359). Поэтому в силу теоремы 1 § 60 мы имеем:

$$\overline{QM}=\frac{1}{3}\overline{QA}+\frac{2}{3}\overline{QD}=\frac{1}{3}\overline{QA}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\overline{QB}+\overline{QC})\right]=$$

$$=\frac{1}{3}(\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}).$$

§ 62. ЗАДАЧИ

Приведем три примера применения векторов к решению геометрических задач.

Задача 1. *Доказать, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.*

Решение. Пусть K, L, M, N — середины сторон четырехугольника $ABCD$, Q — произвольная точка плоскости (рис. 360). Тогда

$$\overline{QK}=\frac{1}{2}(\overline{QA}+\overline{QB}),\ \overline{QL}=\frac{1}{2}(\overline{QB}+\overline{QC}),$$

$$\overline{QM}=\frac{1}{2}(\overline{QC}+\overline{QD}),\ \overline{QN}=\frac{1}{2}(\overline{QD}+\overline{QA})$$

(см. следствие I § 61). Отсюда следует

$$\overline{KL}=\overline{QL}-\overline{QK}=\frac{1}{2}(\overline{QC}-\overline{QA})$$

и

$$\overline{NM}=\overline{QM}-\overline{QN}=\frac{1}{2}(\overline{QC}-\overline{QA}).$$

Таким образом,

$$\overline{KL}=\overline{NM},$$

что и доказывает наше утверждение[1].

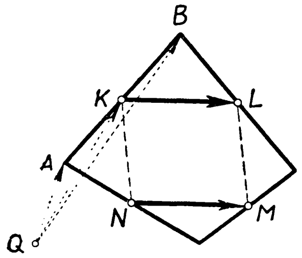


Рис. 360.

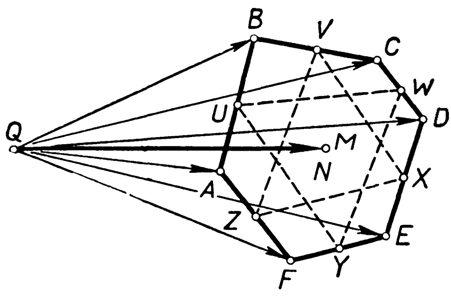


Рис. 361.

Задача 2. *Пусть $ABCDEF$ — произвольный шестиугольник и U, V, W, X, Y, Z — середины его сторон* (рис. 361). *Доказать, что центры тяжести треугольников UWY и VXZ совпадают.*

Решение. В силу следствия I § 61 мы имеем:

$$\overline{QU}=\frac{1}{2}(\overline{QA}+\overline{QB}),\quad \overline{QV}=\frac{1}{2}(\overline{QB}+\overline{QC}),$$

[1] Если «четырехугольник» $ABCD$ — самопересекающийся, то «параллелограмм» $KLMN$ может быть вырожденным, т. е. отрезки KL и MN могут принадлежать одной прямой.

$$\overline{QW}=\frac{1}{2}(\overline{QC}+\overline{QD}),\quad \overline{QX}=\frac{1}{2}(\overline{QD}+\overline{QE}),$$

$$\overline{QY}=\frac{1}{2}(\overline{QE}+\overline{QF}),\quad \overline{QZ}=\frac{1}{2}(\overline{QF}+\overline{QA});$$

здесь Q — произвольная точка плоскости. Далее, обозначая через M и N центры тяжести треугольников UWY и VXZ, имеем, согласно следствию II:

$$\overline{QM}=\frac{1}{3}(\overline{QU}+\overline{QW}+\overline{QY})=$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\overline{QA}+\overline{QB})+\frac{1}{2}(\overline{QC}+\overline{QD})+\frac{1}{2}(\overline{QE}+\overline{QF})\right]=$$
$$=\frac{1}{6}(\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}+\overline{QE}+\overline{QF})$$

и

$$\overline{QN}=\frac{1}{3}(\overline{QV}+\overline{QX}+\overline{QZ})=$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\overline{QB}+\overline{QC})+\frac{1}{2}(\overline{QD}+\overline{QE})+\frac{1}{2}(\overline{QF}+\overline{QA})\right]=$$
$$=\frac{1}{6}(\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}+\overline{QE}+\overline{QF}).$$

Таким образом,

$$\overline{QM}=\overline{QN},$$

откуда вытекает, что точки M и N совпадают.

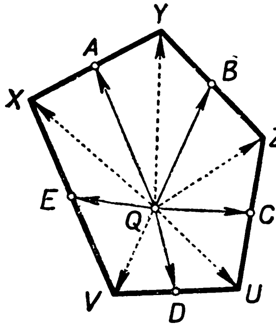


Рис. 362.

Задача 3. *На плоскости даны пять точек A, B, C, D, E. Построить пятиугольник $XYZUV$, для которого эти точки являются серединами сторон* (рис. 362).

Решение. Возьмем на плоскости произвольную точку Q. Так как точки A, B, C, D, E являются серединами сторон, то, по следствию I § 61, имеем:

$$\overline{QA}=\frac{1}{2}(\overline{QX}+\overline{QY});\ \overline{QB}=\frac{1}{2}(\overline{QY}+\overline{QZ});$$

$$\overline{QC}=\frac{1}{2}(\overline{QZ}+\overline{QU});\ \overline{QD}=\frac{1}{2}(\overline{QU}+\overline{QV});\ \overline{QE}=\frac{1}{2}(\overline{QV}+\overline{QX}).$$

Поскольку точки A, B, C, D, E нам даны, то векторы $\overline{QA}$, $\overline{QB}$, $\overline{QC}$, $\overline{QD}$, $\overline{QE}$ также известны; напротив, векторы $\overline{QX}$, $\overline{QY}$, $\overline{QZ}$, $\overline{QU}$, $\overline{QV}$ требуется определить. Таким образом, выписанные пять равенств представляют собой *систему пяти уравнений с пятью неизвестными*. Эту систему нам требуется решить.

Для решения системы можно поступить так. Поменяем во втором и четвертом уравнениях знаки на обратные:

$$\overline{QA}= \frac{1}{2}(\overline{QX}+\overline{QY});$$

$$-\overline{QB}=-\frac{1}{2}(\overline{QY}+\overline{QZ});$$

$$\overline{QC}= \frac{1}{2}(\overline{QZ}+\overline{QU});$$

$$-\overline{QD}=-\frac{1}{2}(\overline{QU}+\overline{QV});$$

$$\overline{QE}= \frac{1}{2}(\overline{QV}+\overline{QX}).$$

Сложим теперь все получившиеся равенства. Мы получим

$$\overline{QA}-\overline{QB}+\overline{QC}-\overline{QD}+\overline{QE}=\overline{QX}.$$

Последнее соотношение позволяет легко построить вектор $\overline{QX}$ (рис. 363). Тем самым мы найдем вершину X искомого пятиугольника. После этого, зная середины A, B, C, D сторон XY, YZ, ZU, UV, мы легко найдем и остальные вершины Y, Z, U, V пятиугольника.

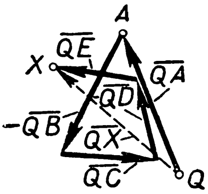


Рис. 363.

Задачи и упражнения к главе VIII

Определение произведения вектора на число

484. Изобразите какой-либо вектор $\boldsymbol{a}$. Постройте следующие векторы:

$$-\boldsymbol{a},\ \frac{3}{2}\boldsymbol{a},\ -\frac{3}{4}\boldsymbol{a},\ -3\boldsymbol{a},\ \sqrt{2}\,\boldsymbol{a},$$

$$\sqrt{3}\,\boldsymbol{a},\ \sqrt{5}\,\boldsymbol{a},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{a}.$$

485. Изобразите два непараллельных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Постройте векторы:

$$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\ -\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\ -3\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b},\ \frac{3}{2}\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}.$$

486. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и BC. Докажите, что

$$\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{CB}-\overline{CA}).$$

487. Точка P — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\overline{PC}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

488. При каком значении k справедливо соотношение

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=k(\overline{DE}+\overline{EA})$$

(A, B, C, D, E — данные точки)?

489. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — середины сторон CD и AD. Выразите вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{CB}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{DC}=\boldsymbol{b}$.

490. Угол A ромба $ABCD$ равен 60°. Из центра O этого ромба опущены на его стороны перпендикуляры OM, ON, OP и OQ. Выразите векторы $\overline{OM}$, $\overline{ON}$, $\overline{OP}$ и $\overline{OQ}$ через векторы $\overline{AB}=\boldsymbol{m}$ и $\overline{AD}=\boldsymbol{n}$.

491. Векторы $\overline{AC}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{BD}=\boldsymbol{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразите через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$, совпадающие со сторонами этого параллелограмма.

492. Докажите следующие равенства:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{b},$$

рассматривая параллелограмм, построенный на (непараллельных) векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

493. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Выразите вектор $\overline{AD}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

494. Докажите, что если точки O, A и B расположены на одной прямой, причем точки A и B лежат по одну сторону от O, то

$$\overline{OA}=k\cdot\overline{OB},$$

где k — отношение длин отрезков OA и OB. Как изменится это равенство, если точки A и B расположены по разные стороны от точки O?

495. Докажите, что если $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор, а $\boldsymbol{e}$ — вектор длины 1, параллельный вектору $\boldsymbol{a}$ и направленный в противоположную сторону, то $\boldsymbol{a}=-a\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}=-\frac{1}{a}\boldsymbol{a}$.

496. Даны два непараллельных вектора $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$. Докажите, что векторы $\overline{OM}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\overline{ON}=\frac{b}{a}\boldsymbol{a}+\frac{a}{b}\boldsymbol{b}$ симметричны относительно биссектрисы угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

497. Из точки O выходят два вектора $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$. Найдите какой-нибудь вектор $\overline{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB.

498. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отложены от одной точки. Докажите, что если при некотором $k>0$ вектор $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ направлен по биссектрисе угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то $a=kb$.

499. Докажите, что вектор $\overline{OP}=b\boldsymbol{a}-a\boldsymbol{b}$ направлен по биссектрисе угла, смежного с углом между векторами $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$ и $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$.

500. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отличны от нулевого вектора и непараллельны. Докажите, что если числа α и β удовлетворяют условию $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, то $\alpha=0$ и $\beta=0$.

501. При некотором движении вектор $\boldsymbol{a}$ переходит в вектор $\boldsymbol{a}'$. В какой вектор перейдет при этом движении вектор $k\boldsymbol{a}$?

502. Докажите, что при гомотетии равные векторы переходят в равные между собой векторы.

503. В какой вектор перейдет вектор $k\boldsymbol{a}$ при гомотетии с коэффициентом l?

504. Равны ли векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ и $3\boldsymbol{a}$?

505. Докажите соотношения:

$$\underbrace{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\ldots+\boldsymbol{a}}_{n\text{ слагаемых}}=n\boldsymbol{a},\quad \underbrace{-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}-\ldots-\boldsymbol{a}}_{n\text{ слагаемых}}=(-n)\boldsymbol{a}.$$

506. Докажите соотношение:

$$(-k)\boldsymbol{a}=-(k\boldsymbol{a}).$$

Свойства умножения вектора на число

507. Докажите соотношение $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$, используя результаты задач 502 и 503.

508. Обозначим через $\boldsymbol{l}$ вектор, идущий от точки 0 к точке 1 на числовой оси, и отложим от точки 0 вектор $k\boldsymbol{l}$. Какое число будет соответствовать концу этого вектора?

509. Докажите соотношение $(k+l)\,\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$, воспользовавшись результатами задач 428 и 508.

510. Докажите, что

а) $(k-l)\,\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}-l\boldsymbol{a}$;

б) $k\,(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$.

511. Упростите выражения:

$$3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-4(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b};$$

$$\boldsymbol{a}-2(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-3(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}).$$

512. Определите неизвестный вектор $\boldsymbol{x}$ из уравнений:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b};$$

$$2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}.$$

Какие свойства действий над векторами используются при решении этих уравнений?

513. а) Пусть $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. Выразите через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы

$$2\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n},\ 3\boldsymbol{m}+\frac{1}{3}\boldsymbol{n},\ -\boldsymbol{m}-\frac{1}{10}\boldsymbol{n}.$$

б) Пусть $\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$. Выразите через $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ векторы

$$2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},\ 3\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b},\ -\boldsymbol{a}-\frac{1}{5}\boldsymbol{b}.$$

в) Векторы

$$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\quad -\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\quad 3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$$

выразите через векторы $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

514. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отличны от нулевого вектора и непараллельны. Вычислите α и β, если

1) $3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{a}+(2\beta+1)\,\boldsymbol{b}$;
2) $(\alpha+\beta-1)\boldsymbol{a}+(2\alpha-\beta)\boldsymbol{b}=0$;
3) $(2\alpha-\beta-1)\boldsymbol{a}-(3\alpha+\beta+10)\boldsymbol{b}=0$;
4) $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=(\beta+1)\boldsymbol{a}-(\alpha-1)\boldsymbol{b}$.

515. В трапеции $ABCD$ основание AD в k раз больше основания BC. Выразите вектор $\overline{QD}$ через векторы $\overline{QA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{QB}=\boldsymbol{b}$, $\overline{QC}=\boldsymbol{c}$ (Q — произвольная точка плоскости).

516. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Выразите векторы, направленные по сторонам этого шестиугольника, через векторы $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{BD}=\boldsymbol{b}$.

517. Векторы $\overline{AB}=\boldsymbol{p}$ и $\overline{AF}=\boldsymbol{q}$ служат двумя смежными сторонами правильного шестиугольника $ABCDEF$. Выразите через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ векторы, идущие по диагоналям этого шестиугольника.

518. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overline{AK}=\boldsymbol{k}$, $\overline{AL}=\boldsymbol{l}$, выразите векторы $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ через $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{l}$.

519. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF; кроме того, на плоскости выбрана произвольная точка Q. Выразите векторы $\overline{QB}$, $\overline{QC}$ и $\overline{QD}$ через векторы $\overline{QA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{QF}=\boldsymbol{f}$, $\overline{QE}=\boldsymbol{e}$.

520. Докажите, что если A, B, C, D — середины последовательных сторон четырехугольника, то $\overline{AB}+\overline{CD}=0$. Какой геометрический смысл имеет этот результат?

521. Докажите, что если A, B, C, D, E, F — середины последовательных сторон шестиугольника, то

$$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}=0.$$

522. Точки A_1, A_2, ..., A_{2n-1}, A_{2n} — середины последовательных сторон $2n$-угольника. Докажите, что

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\ldots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}=0.$$

523. Дан правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Докажите, что

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_3}+\overline{A_1A_4}+\overline{A_1A_5}+\overline{A_1A_6}=3\overline{A_1A_4}.$$

524. Дан правильный $2n$-угольник $A_1A_2\ldots A_{2n}$. Докажите, что

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_3}+\ldots+\overline{A_1A_{2n}}=n\cdot\overline{A_1A_{n+1}}.$$

525. а) Дан правильный многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ с центром O и точка Q. Докажите, что

$$\overline{QO}=\frac{1}{n}(\overline{QA_1}+\overline{QA_2}+\ldots+\overline{QA_n}).$$

б) Даны два правильных n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ с центрами в точках O_1 и O_2. Докажите, что

$$\overline{O_1O_2}=\frac{1}{n}(\overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}+\ldots+\overline{A_nB_n}).$$

526. Пусть O_1 и O_2 — центры двух правильных пятиугольников $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Докажите, что

$$\overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}+\overline{A_3B_3}+\overline{A_4B_4}+\overline{A_5B_5}=5\overline{O_1O_2}.$$

527. Пусть $ABCD$ и $MNPQ$ — два квадрата. Докажите, что

$$\overline{AM}+\overline{BN}+\overline{CP}+\overline{DQ}=\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CM}+\overline{DN}.$$

528. Даны две различные точки A, B и число k. Найдите такую точку M, что векторы $\overline{AM}$ и $k\cdot\overline{BM}$

а) равны между собой;

б) противоположны.

529. Существует ли в плоскости треугольника ABC такая точка Q, что $\overline{QA}+2\overline{QB}+3\overline{QC}=0$?

530. На прямой заданы три точки A, B, C. Существует ли на этой прямой такая точка Q, что $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}=0$?

531. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Найдите сумму векторов $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}$.

532. В треугольнике найдите такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, была равна нулевому вектору.

533. В параллелограмме найдите такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам параллелограмма, была равна нулевому вектору. Докажите, что такая точка только одна.

534. Докажите, что для всякого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ найдется точка O, для которой

$$\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\ldots+\overline{OA_n}=0,$$

и что такая точка только одна.

535. Докажите, что для каждого пятиугольника $ABCDE$ существует такая точка O, что какова бы ни была точка Q,

$$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}+\overline{QE}=\overline{QO}.$$

536*. Пусть $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ — два произвольных n-угольника. Докажите, что, какова бы ни была перестановка $i_1, i_2, ..., i_n$ чисел $1, 2, ..., n$, имеет место равенство

$$\overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}+ ... +\overline{A_nB_n}=\overline{A_1B_{i_1}}+\overline{A_2B_{i_2}}+ ... +\overline{A_nB_{i_n}}.$$

537. При каждой вершине треугольника ABC построены ромбы, стороны которых равны и направлены по сторонам треугольника; AA_1, BB_1 и CC_1 — диагонали этих ромбов. Докажите, что

$$\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\mathbf{0}.$$

Деление отрезка в данном отношении

538. Точки M_1, M_2 делят отрезок AB на три равные части; Q — произвольная точка. Выразите векторы $\overline{QM_1}$ и $\overline{QM_2}$ через векторы $\overline{QA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{QB}=\boldsymbol{b}$.

539. Точки C_1, C_2, C_3 делят отрезок AB на четыре равные части; D — произвольная точка. Выразите векторы $\overline{DC_1}$, $\overline{DC_2}$, $\overline{DC_3}$ через векторы $\overline{DA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{DB}=\boldsymbol{b}$.

540. Даны три точки M, A, B, а четвертая точка C взята так, что $\overline{AB}=3\overline{AC}$. Выразите вектор $\overline{MC}$ через векторы $\overline{MA}$ и $\overline{MB}$.

541. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Выразите вектор $\overline{AD}$ через векторы $\overline{AB}=\boldsymbol{c}$ и $\overline{AC}=\boldsymbol{b}$.

542. В плоскости взяты три точки A, B, M. На отрезке AB взята такая точка C, что $AC:CB=k$. Выразите вектор $\overline{MC}$ через $\overline{MA}$ и $\overline{MB}$.

543*. На сторонах AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ взяты такие точки K, L, M, N, что

$$AK:KB=BL:LC=CM:MD=DN:NA=k,$$

причем число k отлично от 1. Докажите, что если $KLMN$ — параллелограмм, то и $ABCD$ — параллелограмм.

Остается ли в силе утверждение задачи, если $k=1$?

544*. В параллелограмме $ABCD$ положим $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overline{AD}=\boldsymbol{b}$. При каком соотношении между числами α и β вектор $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$, исходящий из точки A, пересекает сторону BC?

Середина отрезка

545. а) Пусть D, E, F — середины сторон треугольника ABC, Q — произвольная точка плоскости. Докажите, что

$$\overline{QD}+\overline{QE}+\overline{QF}=\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}.$$

б) Пусть $A_1A_2...A_n$ — произвольный многоугольник, а B_1, B_2, ..., B_n — середины его сторон. Докажите, что для произвольной точки Q справедливо соотношение

$$\overline{QA_1}+\overline{QA_2}+ ... +\overline{QA_n}=\overline{QB_1}+\overline{QB_2}+ ... +\overline{QB_n}.$$

546. Пусть $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — два произвольные шестиугольника, K, L, M, N, P, Q — середины сторон первого шестиугольника и K_1, L_1, M_1, N_1, P_1, Q_1 — середины соответствующих сторон второго шестиугольника. Докажите, что

$$\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}+\overline{DD_1}+\overline{EE_1}+\overline{FF_1}=\overline{KK_1}+\overline{LL_1}+\overline{MM_1}+\overline{NN_1}+\overline{PP_1}+\overline{QQ_1}.$$

547. Две перпендикулярные прямые, проходящие через точку M, пересекают окружность в точках A, B и C, D. Докажите, что

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=2\overline{OM},$$

где O — центр окружности.

548. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон.

549. В треугольнике ABC проведена медиана CM и взята точка N так, что $\overline{CM}+\overline{CN}=\mathbf{0}$. Выразите векторы $\overline{NA}$ и $\overline{NB}$ через векторы $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$.

550. Через точку M, взятую внутри параллелограмма, проведены прямые, параллельные его сторонам. Они пересекают стороны параллелограмма в точках A, C и B, D. Докажите, что точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ (т. е. отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника) является серединой отрезка OM, где O — центр данного параллелограмма.

551. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что

$$\overline{MN}=\frac{1}{2}\left(\overline{BC}+\overline{AD}\right) \text{ и } \overline{MN}=\frac{1}{2}\left(\overline{AC}+\overline{BD}\right).$$

552. Точки M и N являются серединами диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что

$$\overline{MN}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right) \text{ и } \overline{MN}=\frac{1}{2}\left(\overline{AD}+\overline{CB}\right).$$

553. В четырехугольнике $ABCD$ положим

$$\overline{AB}=\boldsymbol{m},\quad \overline{BC}=\boldsymbol{n},\quad \overline{CD}=\boldsymbol{p}.$$

Найдите вектор $\overline{EF}$, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

554. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности ее оснований.

555. В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон AD и BC. Докажите, что $2MN \leqslant AB+CD$.

556. В плоскости треугольника дана точка M. Докажите, что точки, симметричные с точкой M относительно середин сторон треугольника, являются вершинами треугольника, центрально симметричного данному.

557. $ABCD$ — параллелограмм, O — его центр, Q — произвольная точка плоскости. Выразите вектор $\overline{QO}$ через векторы

$$\overline{QA}=\boldsymbol{a},\ \overline{CD}=\boldsymbol{b},\ \overline{AD}=\boldsymbol{c}.$$

558. а) Докажите, что в произвольном четырехугольнике средние линии (отрезки, соединяющие середины противоположных сторон), пересекаясь, делятся пополам.

б) Докажите, что в произвольном четырехугольнике отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходит через точку пересечения средних линий и делится в этой точке пополам.

559. Пусть S — точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ и Q — произвольная точка плоскости. Докажите, что

$$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}=4\overline{QS}.$$

560. а) Пусть M и N — точки пересечения средних линий двух четырехугольников $ABCD$ и $EFGH$. Докажите, что

$$\overline{AE}+\overline{BF}+\overline{CG}+\overline{DH}=4\overline{MN}.$$

б) Докажите, что, каковы бы ни были четырехугольники $ABCD$ и $EFGH$, всегда

$$\overline{AE}+\overline{BF}+\overline{CG}+\overline{DH}=\overline{AF}+\overline{BG}+\overline{CH}+\overline{DE}.$$

561. Точка M — середина отрезка AB, точка M' — середина отрезка $A'B'$. Докажите, что середины отрезков AA', BB' и MM' расположены на одной прямой.

562. Точки D и E — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$, идущие по сторонам треугольника, через векторы $\overline{CD}=\boldsymbol{p}$ и $\overline{BE}=\boldsymbol{q}$.

563. Существует ли треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника?

564. На равных сторонах AC и BC равнобедренного треугольника ABC взяты такие точки M и N, что $CM+CN=AC$. Докажите, что средняя линия PQ, параллельная основанию AB, делит отрезок MN пополам.

565. Дана трапеция $ABCD$, в которой большее основание AB в k раз больше меньшего основания CD. Точки M и N — середины оснований. Выразите векторы $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ и $\overline{MN}$ через векторы $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{AD}=\boldsymbol{b}$.

566. Точки M и N — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что середины диагоналей четырехугольников $AMND$ и $BMNC$ являются вершинами параллелограмма (или лежат на одной прямой).

567. На стороне AB треугольника ABC дана точка P, через которую проведена прямая, параллельная медиане CD. Эта прямая пересекает прямые BC и AC в точках A_1 и B_1. Докажите, что

$$\overline{PA_1}+\overline{PB_1}=\overline{AC}+\overline{BC}.$$

568*. На прямой a даны три точки M, N, P, а на прямой b — три точки M_1, N_1, P_1, причем точка N лежит между M и P, точка N_1 лежит между M_1 и P_1 и справедливо равенство $MN:NP=M_1N_1:N_1P_1$. Докажите, что середины отрезков MM_1, NN_1 и PP_1 лежат на одной прямой (или совпадают).

569*. а) Докажите, что если прямая, соединяющая середины противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей, то этот четырехугольник является трапецией (или параллелограммом).

б) Докажите, что если средние линии четырехугольника (отрезки, соединяющие середины противоположных сторон) проходят через точку пересечения его диагоналей, то этот четырехугольник является параллелограммом.

570. Даны три точки O_1, O_2, O_3 и еще одна точка M. Обозначим через M_1 точку, симметричную точке M относительно O_1, через M_2 — точку, симметричную точке M_1 относительно O_2, через M_3 — точку, симметричную точке M_2 относительно O_3, через M_4 — точку, симметричную точке M_3 относительно O_1, через M_5 — точку, симметричную точке M_4 относительно O_2, и через M_6 — точку, симметричную точке M_5 относительно O_3. Докажите, что точки M и M_6 совпадают.

571*. Дан треугольник ABC. Построен треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого равны медианам треугольника ABC, и затем треугольник $A_2B_2C_2$, стороны которого равны медианам треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны. Найдите коэффициент подобия.

572. Решите задачу **481**, используя следствие I § 61.

573. Решите задачу **482**, используя следствие I § 61.

Центр тяжести треугольника

574. Дан треугольник ABC. Докажите, что равенство

$$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}=0$$

имеет место в том и только в том случае, если Q — центр тяжести треугольника ABC.

575. а) Пусть M и N — центры тяжести треугольников ABC и DEF. Докажите, что

$$\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=3\overline{MN}.$$

б) Пусть A, B, C, D, E, F — произвольные точки плоскости. Докажите, что

$$\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=\overline{AE}+\overline{BF}+\overline{CD}.$$

576. Точка M — центр тяжести треугольника ABC. Докажите, что

$$\overline{CM}=\frac{1}{3}\left(\overline{CA}+\overline{CB}\right).$$

577. Пусть M и M_1 — центры тяжести треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны, то прямая MM_1 также параллельна этим прямым.

578*. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки K, L, M. Докажите, что

а) если

$$AK:KB=BL:LC=CM:MA,$$

то центры тяжести треугольников ABC и KLM совпадают;

б) обратно, если центры тяжести треугольников ABC и KLM совпадают, то

$$AK:KB=BL:LC=CM:MA.$$

579. Докажите, что если O — центр описанной окружности треугольника ABC, а H — точка пересечения высот, то

$$\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}.$$

580. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник. Обозначим через M, N, P, Q — центры тяжести треугольников BCD, ACD, ABD, ABC. Докажите, что отрезки AM, BN, CP, DQ пересекаются в одной точке и каждый из них делится этой точкой в отношении $3:1$ (считая от вершин четырехугольника).

581. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник. Докажите, что точка, фигурирующая в задаче 580, совпадает с точкой, о которой говорится в задаче 558.

582. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что четырехугольник, вершинами которого являются центры тяжести треугольников BCD, ACD, ABD и ABC, подобен четырехугольнику $ABCD$.

583. Докажите, что центры тяжести двух треугольников, указанных в задаче 556, лежат на одной прямой с точкой M.

584*. а) В плоскости треугольника ABC взята точка M и от нее отложены векторы $\overline{MD}=\overline{AB}$, $\overline{ME}=\overline{BC}$, $\overline{MF}=\overline{CA}$. Докажите, что центром тяжести треугольника DEF является точка M.

б) Из точки P, лежащей внутри треугольника ABC, опущены перпендикуляры на стороны BC, AC, AB и на этих перпендикулярах отложены отрезки MA_1, MB_1, MC_1, равные этим сторонам. Докажите, что центром тяжести треугольника $A_1B_1C_1$ является точка M.

[В задачах а) и б) через точку M проводятся прямые, параллельные или соответственно перпендикулярные сторонам треугольника, и на них откладываются отрезки, равные этим сторонам. В обоих случаях центр тяжести полученного треугольника совпадает с точкой M.]

585. Даны три отрезка A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Их середины обозначим через A_3, B_3, C_3. Далее, центры тяжести треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ обозначим через M_1, M_2, M_3. Докажите, что точка M_3 является серединой отрезка M_1M_2 (или же все три точки M_1, M_2, M_3 совпадают).

586. Даны три треугольника $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ с общим центром тяжести M. Обозначим через A центр тяжести треугольника $A_1A_2A_3$, через B — центр тяжести треугольника $B_1B_2B_3$ и через C — центр тяжести треугольника $C_1C_2C_3$. Докажите, что центр тяжести треугольника ABC совпадает с точкой M.

587. Пусть O — произвольная точка в плоскости треугольника ABC. Обозначим через P, Q, R центры тяжести треугольников AOB, BOC, COA. Докажите, что центр тяжести треугольника ABC, центр тяжести треугольника PQR и точка O лежат на одной прямой.

Дополнения и методические указания к главе VIII

1. **Определение умножения вектора на число.** [К § 58.] В § 58 приведены две формулировки определения произведения вектора на число. Обе эти формулировки (так же как и определение суммы векторов, ср. п. 1, стр. 197) имеют тот недостаток, что они связаны с выбором представителей: вектор $\boldsymbol{a}$ представляет собой семейство направленных отрезков; мы же выбираем представителя $\overline{OA}$ этого семейства и по нему строим направленный отрезок $\overline{OA'}$, являющийся представителем вектора $k\boldsymbol{a}$. Как и в случае суммы векторов, здесь возникает вопрос о независимости этого определения от выбора представителя $\overline{OA}$. Впрочем, такая независимость в данном случае почти очевидна: она непосредственно следует из второго (не связанного с гомотетией) определения произведения вектора на число, приведенного в конце § 58.

2. **Поведение векторов при гомотетии.** [К § 58.] При любой гомотетии вектор снова переходит в некоторый вектор. Это утверждение означает следующее: если $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, ... — направленные отрезки, являющиеся представителями вектора $\boldsymbol{a}$ и A', B', C', D', E', F', ... — точки, в которые переходят A, B, C, D, E, F, ... при гомотетии γ, то направленные отрезки $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{E'F'}$, ... являются представителями одного вектора $\boldsymbol{a}'$, который можно обозначить через $\gamma(\boldsymbol{a})$. Действительно, из равенства $\overline{AB}=\overline{CD}$ вытекает, что $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$ (это доказывается так же, как и на стр. 198, ибо при гомотетии параллелограмм снова переходит в параллелограмм; см. рис. 364). Вектор $\boldsymbol{a}'=\gamma(\boldsymbol{a})$ называется вектором, в который переходит вектор $\boldsymbol{a}$ при гомотетии γ.

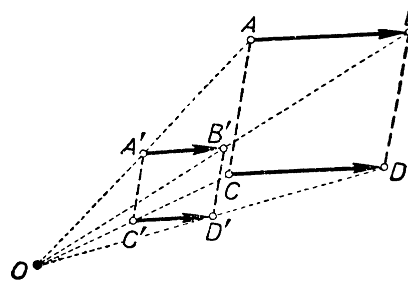


Рис. 364.

Теорема. *Гомотетия γ с коэффициентом k (и произвольным центром гомотетии O) переводит любой вектор $\boldsymbol{a}$ в вектор $k\boldsymbol{a}$*:

$$\gamma(\boldsymbol{a})=k\boldsymbol{a}.$$

В самом деле, отложим от центра гомотетии O вектор $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$. При гомотетии γ точка O переходит в себя, а точка A переходит в точку $A'=\gamma(A)$. Следовательно, направленный отрезок $\overline{OA}$ переходит при гомотетии в $\overline{OA'}$, и потому $\overline{OA'}$ является представителем вектора $\gamma(\boldsymbol{a})$. Согласно первому определению произведения вектора на число (§ 58), имеем: $\overline{OA'}=k\cdot\overline{OA}$, т. е. $\gamma(\boldsymbol{a})=k\boldsymbol{a}$.

3. **Свойства операции умножения вектора на число.** [К § 59.] Доказательства свойств 1), 2), 3) умножения вектора на число (§ 59, стр. 204) в пособии для учащихся приведены мелким шрифтом. Учитель вполне может в классе опустить доказательства этих свойств. Разумеется, формулировки всех свойств (как первых пяти очевидных свойств, так и нуждающихся в доказательстве) должны быть сообщены учащимся. При этом у учащихся не должно создаваться впечатления, что последние три свойства столь же очевидны, как и первые пять. И уж совершенно нельзя допустить, чтобы учащиеся полагали, будто все восемь свойств сами собой разумеются и никакого доказательства не требуют, поскольку речь идет об «умножении». Учащиеся должны понимать, что умножение чисел и умножение вектора на число — совершенно разные операции; они обе обозначаются одним и тем же термином «умножение» именно

потому, что свойства этих операций записываются одинаково (причем это вовсе не очевидно заранее, а нуждается в доказательстве). Иначе говоря, возможность использования одного и того же названия «умножение» для двух по существу различных операций является следствием сходства свойств этих операций (но, разумеется, не наоборот: из присвоения двум операциям одинакового названия «умножение» вовсе не следует без доказательства совпадение свойств этих операций).

Вопрос о том, как довести все это до сознания учащихся, разумеется, может быть решен только учителем. Возможно, что целесообразно одно из свойств 1) — 3) доказать на уроке (не требуя заучивания этого доказательства учащимися), указав вслед за тем учащимся, что остальные два свойства тоже должны доказываться, но эти доказательства рассказаны им не будут. От педагогического такта учителя зависит, какую линию поведения он выберет в этом вопросе.

Еще раз подчеркиваем, что знание всех перечисленных свойств умножения вектора на число (хотя бы и без доказательств) и умение пользоваться ими обязательно для учащихся. Укажем здесь некоторые примеры, демонстрирующие применение этих свойств.

1) Рассмотрим, например, второе из уравнений, приведенных в задаче **512:**

$$2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}.$$

В силу уже установленных свойств сложения и вычитания векторов (коммутативность сложения и возможность переноса слагаемых из одной части равенства в другую с изменением знака) имеем:

$$2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b},$$

или (так как $\boldsymbol{a}=1\boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$)

$$2\boldsymbol{x}+1\boldsymbol{x}=(3\boldsymbol{a}+1\boldsymbol{a})+(1\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}$$

(скобки мы имеем право расставлять по нашему желанию в силу ассоциативности сложения векторов). Далее используем то, что $-(5\boldsymbol{b})=(-5)\,\boldsymbol{b}$, и свойство 2):

$$2\boldsymbol{x}+1\boldsymbol{x}=(3\boldsymbol{a}+1\boldsymbol{a})+[1\boldsymbol{b}+(-5)\,\boldsymbol{b}]-\boldsymbol{c},$$

$$(2+1)\,\boldsymbol{x}=(3+1)\,\boldsymbol{a}+[1+(-5)]\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},$$

или

$$3\boldsymbol{x}=4\boldsymbol{a}+(-4)\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.$$

Наконец, мы используем то, что $(-4)\boldsymbol{b}=-(4\boldsymbol{b})$ и умножим обе части полученного равенства на $\frac{1}{3}$:

$$3\boldsymbol{x}=4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},$$

$$\frac{1}{3}(3\boldsymbol{x})=\frac{1}{3}[4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}].$$

Учитывая свойство 3), получаем отсюда

$$\frac{1}{3}(3\boldsymbol{x})=\frac{1}{3}(4\boldsymbol{a})+\frac{1}{3}(-4\boldsymbol{b})+\frac{1}{3}(-\boldsymbol{c});$$

наконец, используя свойство 1), окончательно имеем:

$$\boldsymbol{x}=\frac{4}{3}\boldsymbol{a}-\frac{4}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}.$$

2) Докажем, что имеет место соотношение

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ слагаемых}}=na \qquad (*)$$

(ср. задачу **505**). Мы имеем:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=1\cdot\boldsymbol{a}+1\cdot\boldsymbol{a}=(1+1)\,\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}$$

(здесь мы пользовались свойствами $\boldsymbol{a}=1\cdot\boldsymbol{a}$ и $(k+l)\ \boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$). Аналогично получаем:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}+1\boldsymbol{a}=(2+1)\,\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{a}+1\boldsymbol{a}=(3+1)\,\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{a},$$

и т. д. Доказанное равенство еще раз показывает целесообразность применения названия «умножение» к рассматриваемой операции над векторами. (Разумеется, равенство (*) не вытекает из того, что рассматриваемая операция н а з ы в а е т с я умножением, и нуждается в доказательстве; такое доказательство и приведено выше.)

4. О решении задач с помощью векторов. [К § 62.] При решении задач с помощью векторов часто приходится выбирать на плоскости некоторую точку (в тексте она обозначается через Q), с целью сопоставить каждой точке A вектор $\overline{QA}$ (называемый *радиусом-вектором* этой точки A, ср. стр. 230). Точку Q, как правило, можно выбирать п р о и з в о л ь н о (ср. формулировки следствий I и II в § 61). Иногда, впрочем, целесообразно для упрощения решения выбрать точку Q специальным образом. Например, если в следствии II § 61 за точку Q принять вершину A треугольника, то приведенная в этом следствии формула примет более простой вид:

$$\overline{AM}=\frac{1}{3}\,(\overline{AB}+\overline{AC}).$$

(ср. задачу **576**). [См. в связи с этим ниже решение задачи **529**, стр. 224.]

5. О задачах и упражнениях. Задачи к главе VIII (равно как и задачи к главе X) наиболее богаты геометрическим содержанием. Однако вначале идут задачи «аппаратного» характера, т. е. задачи, предназначенные для осмысления действий над векторами и приобретения вычислительных навыков.

Первые две задачи **484, 485** обязательны. Они способствуют пониманию определения произведения вектора на число. Заметим, что решение этих задач предполагает умение построить отрезки $\sqrt{2}a$, $\sqrt{3}a$, $\sqrt{5}a$, где a — данный отрезок. Идущие вслед за тем задачи **486—493** способствуют закреплению определения и приобретению навыков; они родственны задачам **432—438** и **454—457**. Из задач **486—493** мы особенно рекомендуем задачи **486, 487, 489, 491, 493**. Задачи **494, 495** также непосредственно связаны с определением произведения вектора на число. Несложные теоремы, содержащиеся в этих задачах, очень полезны для дальнейшего; например, они оказываются полезными для решения следующих задач **496—499**. Из этих задач **496—499** мы особенно рекомендуем задачи **497** и **499**. По поводу задач **501—503** см. выше, п. **2**. Задача **500** также очень полезна.

По поводу задач **504—506** см. п. **3**, стр. 220—221. Задачу **508** мы очень рекомендуем — она полезна для дальнейшего. В задачах **507, 509** предлагается найти другие доказательства соотношений дистрибутивности (§ 59). Учитывая, что выше (ср. стр. 219) мы рекомендовали пропустить доказательство соотношений дистрибутивности на уроке, целесообразно предложить на дом задачи **507** и **509**, но только сильным ученикам. Задачи **510—514** способствуют приобретению навыков алгебраических действий с векторами; к некоторым из них есть указания в конце книги. Следующую группу составляют задачи **515—519**; все они сравнительно несложны. Задачи **520—527** близки друг к другу; они полезны и интересны, однако можно их и пропустить без особого ущерба. (Заметим, что задачи 523—527 связаны с задачей 453.) Задачи 528—530 и 532—536 составляют новый цикл (ниже мы разберем решение задачи 529). Задача 531 является подготовительной к задаче 532, но она также интересна и сама по себе.

Из задач 538—544, составляющих следующий цикл, мы рекомендуем для обязательного решения задачи 538—540, 542. Они являются наиболее простыми в этом цикле.

Далее идет обширная группа задач (545—573), связанная с применением следствия I, § 61 (середина отрезка). Здесь имеются задачи вычислительного характера, из которых мы особенно рекомендуем задачи 545, 547, 549, 551—553, 556, 562, 565. Однако наибольшее число задач этого раздела (подобно задаче 466 из гл. VII) по формулировке не связано с векторами. Для многих из них «векторное» решение значительно проще, чем решение, не использующее алгебры векторов. Здесь надо отметить прежде всего задачи 558, 561, 563, 566. Задачи 568—572 являются более трудными. Решение задачи 571 разобрано в брошюре «Векторы в школьном курсе геометрии» тех же авторов, указанной на стр. 297.

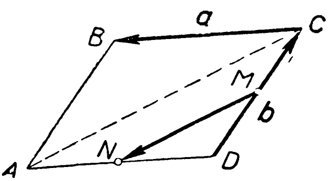


Рис. 365.

Наконец, последний цикл задач (574—587) связан со следствием II, § 61. Задачи вычислительного характера (574—576, 579) здесь несложны. Остальные задачи иллюстрируют применение векторов к решению геометрических задач. Наиболее простыми являются задачи 577, 580, 582, 585. Решение этих задач без помощи векторов довольно затруднительно (ср. приведенное ниже простое решение задачи 585; без векторов эта задача решается сложно).

6. Примеры решения задач. 1) Задача 489 (стр. 212). Мы имеем (рис. 365):

$$\overline{MN}=\overline{MD}+\overline{DN}=\frac{1}{2}\,\overline{CD}+\frac{1}{2}\,\overline{DA}=-\frac{1}{2}\,\overline{DC}+\frac{1}{2}\,\overline{CB}=$$

$$=-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}a.$$

2) Задача 497 (стр. 212). Если бы мы имели два вектора $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$ равной длины, направленные по лучам OA и OB, то параллелограмм $OMPN$, построенный на этих векторах, был бы ромбом, и потому вектор $\overline{OP}=\overline{OM}+\overline{ON}$ был бы направлен по биссектрисе угла AOB (рис. 366). Таким образом, задача сводится к отысканию двух векторов равной длины, направленных по лучам OA и OB. В качестве таких векторов можно взять $\frac{1}{a}\boldsymbol{a}$ и $\frac{1}{b}\boldsymbol{b}$ (длина каждого из них равна единице: $\left|\frac{1}{a}\boldsymbol{a}\right|=\frac{1}{a}\cdot|\boldsymbol{a}|=\frac{1}{a}\cdot a=1$). Таким образом, вектор $\frac{1}{a}\boldsymbol{a}+\frac{1}{b}\boldsymbol{b}$ направлен по биссектрисе угла AOB. Вместо $\frac{1}{a}\boldsymbol{a}$ и $\frac{1}{b}\boldsymbol{b}$ можно также взять векторы $b\boldsymbol{a}$ и $a\boldsymbol{b}$ (длина каждого из них равна ab); поэтому вектор $b\boldsymbol{a}+a\boldsymbol{b}$ также направлен по биссектрисе угла AOB. (Заметим, что векторы $\frac{1}{a}\boldsymbol{a}+\frac{1}{b}\boldsymbol{b}$ и $b\boldsymbol{a}+a\boldsymbol{b}$ пропорциональны: второй получается из первого умноже-

нием на число ab; вообще, если k — любое положительное число, то вектор $k\left(\frac{1}{a}\boldsymbol{a}+\frac{1}{b}\boldsymbol{b}\right)$ направлен по биссектрисе угла AOB.)

3) Задача 518 (стр. 213). Обозначим:

$$\overline{BC}=\boldsymbol{a},\quad \overline{CD}=\boldsymbol{b}$$

(рис. 367). Тогда легко находим:

$$\overline{AK}=\overline{AB}+\overline{BK}=-\overline{CD}+\frac{1}{2}\overline{BC}=-\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a};$$

$$\overline{AL}=\overline{AD}+\overline{DL}=\overline{BC}-\frac{1}{2}\overline{CD}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

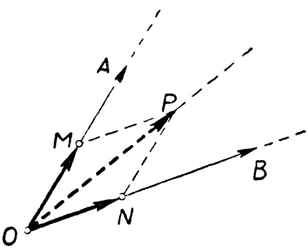


Рис. 366.

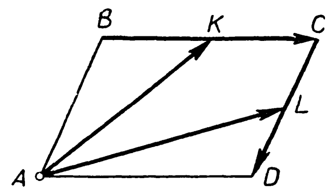


Рис. 367.

Тем самым векторы $\overline{AK}$ и $\overline{AL}$ выражены через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Но нам нужно решить обратную задачу: выразить $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ через $\overline{AK}$ и $\overline{AL}$. Поэтому найденные соотношения

$$\begin{cases} -\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{l} \end{cases}$$

мы рассмотрим как систему уравнений, из которой и найдем $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Умножая первое из уравнений на $-\frac{1}{2}$ и прибавляя его ко второму, найдем

$$\frac{3}{4}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{l}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k},$$

откуда

$$\boldsymbol{a}=\frac{4}{3}\boldsymbol{l}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}.$$

Аналогично, умножая первое уравнение на -2 и прибавляя его ко второму, найдем

$$\frac{3}{2}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{l}-2\boldsymbol{k},$$

откуда

$$\boldsymbol{b}=\frac{2}{3}\boldsymbol{l}-\frac{4}{3}\boldsymbol{k}.$$

Таким образом,

$$\overline{BC}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}+\frac{4}{3}\boldsymbol{l};\ \overline{CD}=-\frac{4}{3}\boldsymbol{k}+\frac{2}{3}\boldsymbol{l}.$$

4) Задача 529 (стр. 214). Соотношение $\overline{QA}+2\overline{QB}+3\overline{QC}=\mathbf{0}$ можно переписать в следующем виде (используя только векторы, исходящие из точки A):

$$-\overline{AQ}+2(-\overline{AQ}+\overline{AB})+3(-\overline{AQ}+\overline{AC})=\mathbf{0},$$

откуда

$$6\overline{AQ}=2\overline{AB}+3\overline{AC}.$$

Таким образом, мы получаем соотношение:

$$\overline{AQ}=\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AC}.$$

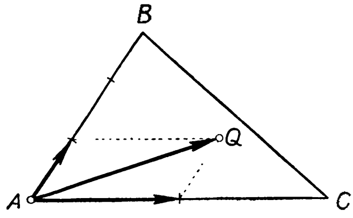


Рис. 368.

Из этого следует, что требуемая точка существует, и притом только одна: она является концом вектора, равного $\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AC}$, отложенного от точки A (рис. 368).

5) Задача 585 (стр. 218). Выберем на плоскости произвольную точку Q (рис. 369). В силу следствия I § 61, мы имеем:

$$\overline{QA_3}=\frac{1}{2}(\overline{QA_1}+\overline{QA_2}),$$

$$\overline{QB_3}=\frac{1}{2}(\overline{QB_1}+\overline{QB_2}),$$

$$\overline{QC_3}=\frac{1}{2}(\overline{QC_1}+\overline{QC_2}).$$

Далее, в силу следствия II § 61:

$$\overline{QM_1}=\frac{1}{3}(\overline{QA_1}+\overline{QB_1}+\overline{QC_1}),$$

$$\overline{QM_2}=\frac{1}{3}(\overline{QA_2}+\overline{QB_2}+\overline{QC_2}),$$

$$\overline{QM_3}=\frac{1}{3}(\overline{QA_3}+\overline{QB_3}+\overline{QC_3})=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\overline{QA_1}+\overline{QA_2})+\frac{1}{2}(\overline{QB_1}+\overline{QB_2})+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(\overline{QC_1}+\overline{QC_2})\right]=\frac{1}{6}(\overline{QA_1}+\overline{QB_1}+\overline{QC_1}+\overline{QA_2}+\overline{QB_2}+\overline{QC_2})=$$

$$=\frac{1}{2}\overline{QM_1}+\frac{1}{2}\overline{QM_2}.$$

Доказанное соотношение

$$\overline{QM_3}=\frac{1}{2}\overline{QM_1}+\frac{1}{2}\overline{QM_2}$$

означает, что точка M_3 является серединой отрезка M_1M_2 (если точки M_1 и M_2 совпадают, то точка M_3 также совпадает с ними).

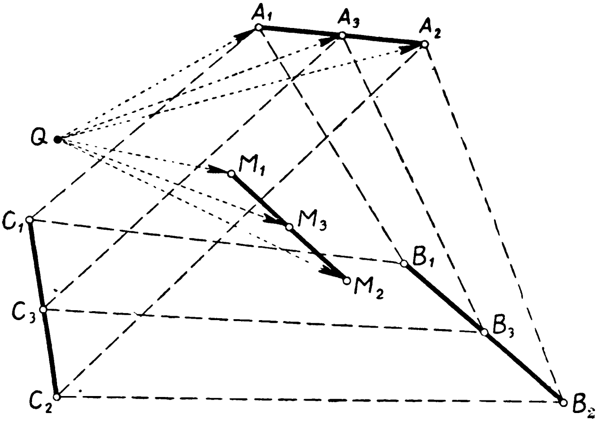


Рис. 369.

ГЛАВА IX

ПРОЕКЦИИ И КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ

§ 63. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

Определения. Прямая линия, на которой задано некоторое направление (на чертежах указываемое стрелкой) и задана единица измерения длин, называется ***осью***. Вектор, имеющий длину 1 и направление, совпадающее с направлением оси, называется ***единичным вектором*** этой оси.

Пусть l — некоторая ось, $\boldsymbol{e}$ — ее единичный вектор (рис. 370) и $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$ — произвольный вектор на плоскости. Обозначим через A_1 и B_1 проекции точек A и B на прямую l (т. е. основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую l). ***Проекцией вектора*** $\overline{AB}$ ***на ось*** l называется длина отрезка A_1B_1, взятая со знаком «+», если направления векторов $\overline{A_1B_1}$ и $\boldsymbol{e}$ совпадают, и со знаком «—» в противном случае. Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается символом $\text{пр}_l\,\overline{AB}$.

Из определения проекции вектора на ось сразу следует, что если $\overline{AB}\neq\mathbf{0}$, то $\text{пр}_l\,\overline{AB}=0$ в том и только в том случае, если $AB\perp l$.

Теорема 1. *Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.*

Доказательство. Пусть $\overline{AB}=\overline{CD}$. Обозначим через A_1, B_1, C_1, D_1 проекции точек A, B, C, D на прямую l. Через точки B

и D проведем прямые, параллельные l, и обозначим через M и N точки пересечения этих прямых с AA_1 и CC_1 (рис. 371). В получившихся прямоугольных треугольниках ABM и CDN равны гипотенузы и, кроме того, $\angle ABM = \angle CDN$ (как углы с параллельными сторонами). Следовательно, $\triangle ABM = \triangle CDN$, и потому $MB = ND$. Кроме того, $A_1B_1 = MB$, $C_1D_1 = ND$ (так как A_1B_1BM и C_1D_1DN — прямоугольники). Таким образом,

$$\overline{A_1B_1} = \overline{MB} = \overline{ND} = \overline{C_1D_1}.$$

Но равенство $\overline{A_1B_1} = \overline{C_1D_1}$ означает, что отрезки A_1B_1 и C_1D_1 имеют одну и ту же длину и одно и то же направление, т. е. что проекции векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ на ось l равны между собой.

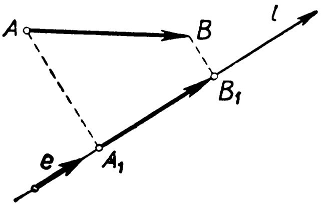


Рис. 370.

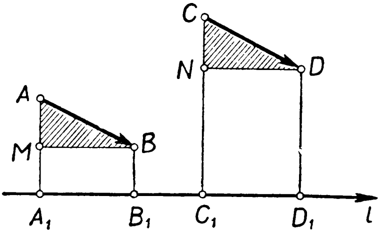


Рис. 371.

Теорема 2. *Пусть A_1 и B_1 — проекции точек A и B на ось l. Тогда*

$$\overline{A_1B_1} = k\boldsymbol{e},$$

где $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор оси l, а $k = \text{пр}_l \overline{AB}$.

Доказательство. Так как векторы $\overline{A_1B_1}$ и $\boldsymbol{e}$ расположены на одной прямой, причем $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$, то в силу свойства параллельных векторов (§ 58) справедливо равенство

$$\overline{A_1B_1} = k\boldsymbol{e},$$

где k — некоторое число. Если $\overline{AB} \perp l$, то $\text{пр}_l \overline{AB} = 0$ и $\overline{A_1B_1} = \boldsymbol{0}$ (ибо точки A_1 и B_1 совпадают), так что в этом случае теорема справедлива. Если же прямая AB не перпендикулярна оси l, то точки A_1 и B_1 не совпадают. Так как длина вектора $\boldsymbol{e}$ равна единице, то из равенства $\overline{A_1B_1} = k\boldsymbol{e}$ вытекает (см. § 58), что $|\overline{A_1B_1}| = |k|$, т. е. число k равно длине отрезка A_1B_1, взятой с некоторым знаком. В силу того же определения умножения вектора на число (§ 58), число k положительно, если векторы $\overline{A_1B_1}$ и $\boldsymbol{e}$ одинаково направлены, и отрицательно в противном случае. Поэтому во всех случаях

$$k = \text{пр}_l \overline{AB}.$$

§ 64. СВОЙСТВА ПРОЕКЦИЙ

1) *Проекция суммы двух векторов на произвольную ось равна сумме проекций этих векторов*:

$$\text{пр}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\text{пр}_l\boldsymbol{a}+\text{пр}_l\boldsymbol{b}.$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overline{BC}$, тогда $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overline{AC}$ (рис. 372). Обозначим через A_1, B_1, C_1 проекции точек A, B, C на ось l. Тогда мы можем написать:

$$\overline{A_1B_1}=x'\boldsymbol{e};\ \overline{B_1C_1}=x''\boldsymbol{e};\ \overline{A_1C_1}=x\boldsymbol{e},$$

где

$$x'=\text{пр}_l\boldsymbol{a};\ x''=\text{пр}_l\boldsymbol{b};\ x=\text{пр}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Но мы имеем:

$$x\boldsymbol{e}=\overline{A_1C_1}=\overline{A_1B_1}+\overline{B_1C_1}=x'\boldsymbol{e}+x''\boldsymbol{e}=(x'+x'')\boldsymbol{e}.$$

Отсюда следует

$$x=x'+x'',$$

что требовалось доказать.

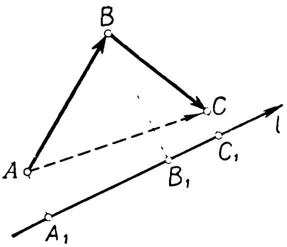


Рис. 372.

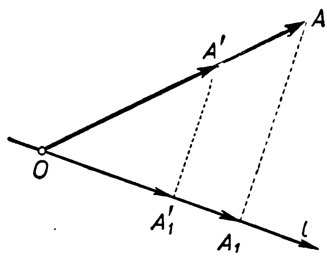


Рис. 373.

2) *Проекция вектора $k\boldsymbol{a}$ на произвольную ось l равна проекции на эту ось вектора $\boldsymbol{a}$, умноженной на число k*:

$$\text{пр}_l(k\boldsymbol{a})=k\cdot\text{пр}_l\boldsymbol{a}.$$

Доказательство. Отложим вектор $\boldsymbol{a}$ от точки O, лежащей на оси l:

$$\boldsymbol{a}=\overline{OA},$$

и обозначим через A_1 проекцию точки A на прямую l. Тогда $AA_1\perp l$. Обозначим через A' и A_1' точки, в которые переходят точки A и A_1 при гомотетии с центром O и коэффициентом k (рис. 373). Согласно теореме 1 § 42, отрезок $A'A_1'$ параллелен отрезку AA_1 (или расположен с ним на одной прямой), и потому $A'A_1'\perp l$. Следовательно, A_1' — проекция точки A' на прямую l.

В силу определения умножения вектора на число мы имеем:

$$\overline{OA'}=k\cdot\overline{OA}=k\boldsymbol{a},\ \overline{OA_1'}=k\cdot\overline{OA_1}.$$

Но

$$\overline{OA_1}=xe, \quad \overline{OA_1'}=x'e,$$

где

$$x=\text{пр}_l a, \quad x'=\text{пр}_l(ka).$$

Таким образом,

$$x'e=\overline{OA_1'}=k\cdot\overline{OA_1}=k(xe)=(kx)e.$$

Отсюда следует

$$x'=kx,$$

что нам и требовалось доказать.

§ 65. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Пусть OX и OY — две взаимно перпендикулярные оси на плоскости, составляющие вместе систему координат. Мы будем предполагать направления осей выбранными таким образом, что поворот оси OX вокруг точки O против часовой стрелки на $90°$ переводит ее в ось OY (рис. 374); иначе говоря, $\measuredangle XOY=+90°$ (см. § 22, стр. 74). Обычно ось OX (или, иначе, ось абсцисс) представляют себе в виде горизонтальной прямой, направленной вправо, а ось OY (ось ординат) — в виде вертикальной прямой, направленной вверх.

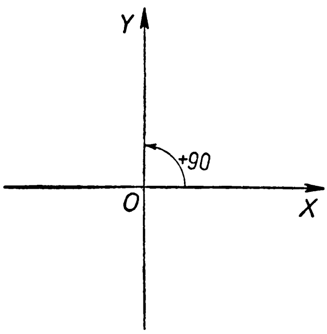


Рис. 374.

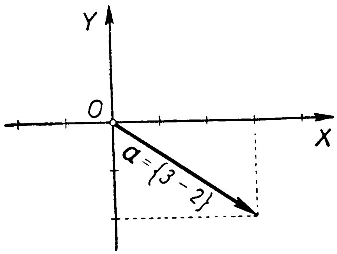


Рис. 375.

Пусть a — произвольный вектор на плоскости. Обозначим его проекции на оси OX и OY соответственно через x и y:

$$x=\text{пр}_{OX}a, \quad y=\text{пр}_{OY}a.$$

Проекции x и y вектора a на оси координат называются ***координатами вектора*** $\boldsymbol{a}$ (в системе XOY); число x можно назвать абсциссой вектора a, а y — его ординатой. Вектор с координатами x, y мы будем иногда обозначать символом $\{x, y\}$. Например, запись $a=\{3, -2\}$ означает, что вектор a имеет координаты

$$x=3, \quad y=-2$$

(рис. 375).

§ 66. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ОСЯМ КООРДИНАТ

Теорема. *Пусть XOY — прямоугольная система координат на плоскости, а $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — единичные векторы осей OX и OY* (рис. 376). *Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ справедливо равенство*

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},$$

где x и y — координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в системе XOY.

Доказательство. Отложим вектор $\boldsymbol{a}$ от начала координат O:

$$\boldsymbol{a}=\overline{OA}$$

(рис. 376). Обозначим через A_1 и A_2 проекции точки A на оси координат. В силу определения координат вектора мы имеем:

$$\overline{OA_1}=x\boldsymbol{i}, \quad \overline{OA_2}=y\boldsymbol{j}.$$

Далее,

$$\boldsymbol{a}=\overline{OA}=\overline{OA_1}+\overline{OA_2}$$

(§ 55, «правило параллелограмма»). Отсюда вытекает требуемое соотношение:

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

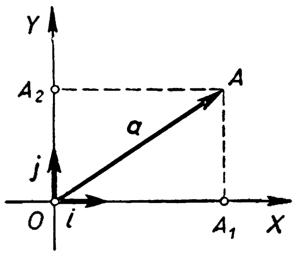


Рис. 376.

Обратная теорема. *Пусть XOY — прямоугольная система координат на плоскости, а $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — единичные векторы осей OX и OY. Если для некоторого вектора $\boldsymbol{a}$ справедливо равенство*

$$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{i}+l\boldsymbol{j},$$

то числа k, l являются координатами вектора $\boldsymbol{a}$.

Доказательство. Отложим по осям координат векторы $\overline{OA_1}=k\boldsymbol{i}$, $\overline{OA_2}=l\boldsymbol{j}$ (рис. 376) и обозначим через A четвертую вершину прямоугольника OA_1AA_2. Очевидно, имеем:

$$\overline{OA}=\overline{OA_1}+\overline{OA_2}=k\boldsymbol{i}+l\boldsymbol{j}=\boldsymbol{a}.$$

Так как $AA_1 \perp OX$, то A_1 — проекция точки A на ось OX и, следовательно, абсцисса x вектора $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$ определяется равенством $x\boldsymbol{i}=\overline{OA_1}$. Но, по построению, $\overline{OA_1}=k\boldsymbol{i}$. Следовательно, $k\boldsymbol{i}=x\boldsymbol{i}$, т. е. $k=x$. Аналогично устанавливается, что $l=y$, где y — ордината вектора $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$.

§ 67. КООРДИНАТЫ СУММЫ ДВУХ ВЕКТОРОВ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Теорема 1. *Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ имеет в прямоугольной системе координат XOY координаты $\{x_1, y_1\}$, а вектор $\boldsymbol{b}$ — коор-*

динаты $\{x_2, y_2\}$. *Тогда вектор* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *имеет в этой же системе* XOY *координаты* $\{x_1+x_2, y_1+y_2\}$ (рис. 377).

Доказательство. В самом деле, координаты x, y вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ определяются как проекции этого вектора на оси координат:

$$x = \text{пр}_{OX}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}); \quad y = \text{пр}_{OY}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Отсюда имеем (см. § 64):

$$x = \text{пр}_{OX}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{пр}_{OX}\boldsymbol{a} + \text{пр}_{OX}\boldsymbol{b} = x_1 + x_2,$$

$$y = \text{пр}_{OY}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{пр}_{OY}\boldsymbol{a} + \text{пр}_{OY}\boldsymbol{b} = y_1 + y_2.$$

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{a}$ — *вектор, который имеет в системе* XOY *координаты* $\{x, y\}$ *и* k — *некоторое число. Тогда вектор* $k\boldsymbol{a}$ *имеет в той же системе* XOY *координаты* $\{kx, ky\}$ (рис. 378).

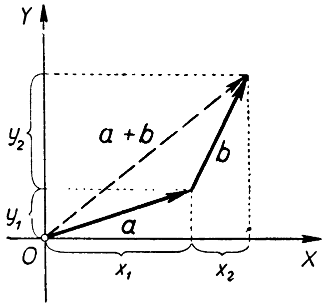


Рис. 377.

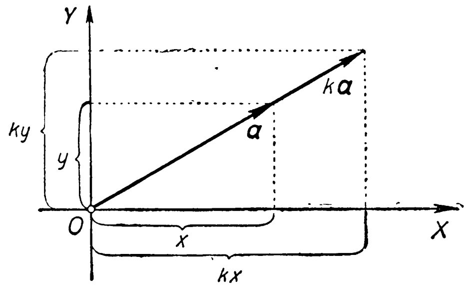


Рис. 378.

В самом деле, координаты вектора $k\boldsymbol{a}$ имеют следующие значения (см. § 64, свойство 2):

$$\text{пр}_{OX}(k\boldsymbol{a}) = k\ \text{пр}_{OX}\boldsymbol{a} = kx,$$

$$\text{пр}_{OY}(k\boldsymbol{a}) = k\ \text{пр}_{OY}\boldsymbol{a} = ky.$$

§ 68. СВЯЗЬ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ ВЕКТОРА И КООРДИНАТАМИ ТОЧКИ

Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ имеет в прямоугольной системе XOY координаты x, y. Отложим вектор $\boldsymbol{a}$ от точки O:

$$\boldsymbol{a} = \overline{OA}$$

(рис. 379). Вектор $\overline{OA}$ называется ***радиусом-вектором*** точки A. Проекции x и y радиуса-вектора $\overline{OA}$ точки A на оси координат называются *координатами точки* A. Таким образом, *координаты точки* A *в прямоугольной системе координат* XOY *совпадают с координатами радиуса-вектора этой точки.*

Рассмотрим теперь вектор $\overline{AB}$ с произвольным началом A.

Теорема. *Если в прямоугольной системе координат XOY точка A имеет координаты (x_1, y_1), а точка B — координаты (x_2, y_2), то вектор $\overline{AB}$ имеет координаты*

$$\{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\}$$

(рис. 380).

Доказательство. Вектор $\overline{OA}$, как мы знаем, имеет координаты x_1, y_1, а вектор $\overline{OB}$ — координаты x_2, y_2. Обозначим

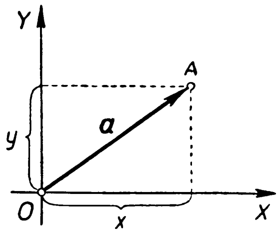


Рис. 379.

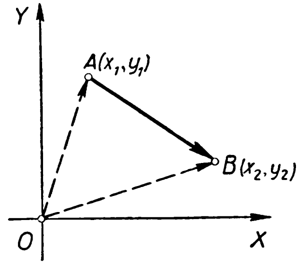


Рис. 380.

неизвестные нам координаты вектора $\overline{AB}$ через x, y. Так как $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$, то, согласно теореме 1 из § 67, имеем:

$$x_2 = x_1 + x,\quad y_2 = y_1 + y.$$

Отсюда и вытекает, что

$$x = x_2 - x_1,\quad y = y_2 - y_1.$$

§ 69. СВЯЗЬ КООРДИНАТ ВЕКТОРА С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Пусть XOY — прямоугольная система координат на плоскости и $\boldsymbol{e} = \overline{OE}$ — вектор длины 1, образующий с осью OX острый угол α:

$$\measuredangle XOE = \alpha\ (0° < \alpha < 90°)$$

(рис. 381). *Тогда вектор $\boldsymbol{e}$ имеет в системе XOY координаты* $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

В самом деле, пусть E_1 и E_2 — проекции точки E на оси координат. Из прямоугольного треугольника OEE_1 находим:

$$OE_1 = OE \cdot \cos\alpha = 1 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha,$$

$$OE_2 = E_1E = OE \cdot \sin\alpha = 1 \cdot \sin\alpha = \sin\alpha.$$

Но длины отрезков OE_1 и OE_2 совпадают с координатами x, y вектора $\boldsymbol{e} = \overline{OE}$, так что $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$.

Пусть теперь вектор $e=\overline{OE}$ длины 1 образует с осью OX произвольный (положительный или отрицательный) угол α:

$$\measuredangle XOE=\alpha \quad (-180^\circ \leqslant \alpha \leqslant +180^\circ)$$

(рис. 382). Координаты вектора $e=\overline{OE}$ обозначим через x, y.

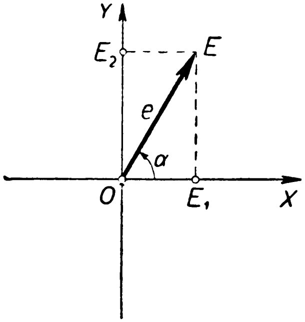


Рис. 381.

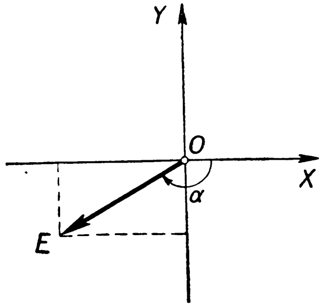


Рис. 382.

Определение. *Синус и косинус произвольного угла* α $(-180^\circ \leqslant \alpha \leqslant +180^\circ)$ *определяются формулами*

$$\cos\alpha=x, \quad \sin\alpha=y,$$

где x, y — *координаты (в прямоугольной системе* XOY) *вектора* $e=\overline{OE}$ *длины* 1, *образующего с осью* OX *угол* α (т. е. такого, что $\measuredangle XOE=\alpha$).

В силу сказанного выше, для случая острого угла это определение совпадает с определением синуса и косинуса, известным из курса геометрии VIII класса. Для остальных углов это определение является новым. В силу этого определения, установленная в начале параграфа связь между координатами вектора и тригонометрическими функциями имеет место для произвольного (а не только острого!) угла α:

Пусть XOY — *прямоугольная система координат на плоскости и* $e=\overline{OE}$ — *вектор длины* 1, *образующий с осью* OX *угол* α, (т. е. пусть $\measuredangle XOE=\alpha$, где $-180^\circ \leqslant \alpha \leqslant +180^\circ$; рис. 382). *Тогда вектор* e *имеет в системе* XOY *координаты* $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

До сих пор при рассмотрении направленных углов мы считали, что величина направленного угла заключается в пределах от -180° до $+180^\circ$. В ряде вопросов оказывается удобным рассматривать направленные углы любой величины. Для этого уславливаются считать, что каждому направленному углу AOB, имеющему величину α (рис. 383), приписывается не только одно значение α, а наряду с ним и все значения, получающиеся из α прибавлением (или вычитанием) любого целочисленного кратного «полного угла», т. е. 360°. Таким образом, выражения «угол от луча OA до луча OB равен $\alpha+360°$» или, скажем, «угол от луча OA до луча OB равен $\alpha-720°$» означают по определению то же самое, что и выражение «угол от луча OA до луча OB равен α». Например, если $\measuredangle AOB$ равен $+270°$, то можно также сказать, что $\measuredangle AOB=-90°$ (рис. 384). Ясно, что, какой бы величины угол мы ни взяли, прибавлением (или вычитанием) угла, кратного $360°$, можно получить значение, заключенное между $-180°$ и $+180°$. Так, например,

$$1176°=3\cdot 360°+96°,\quad 2000°=6\cdot 360°-160°, \text{ и т. п.}$$

Учитывая сказанное в конце § 22 (стр. 76), заключаем отсюда, что,

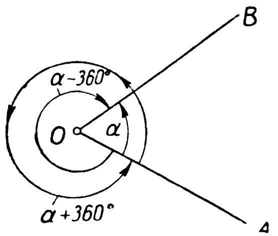


Рис. 383.

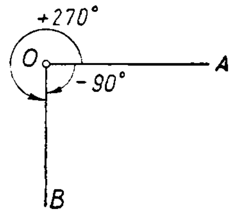


Рис. 384.

если нам задан луч OM и некоторый угол α (произвольной величины), то существует единственный луч ON, для которого $\measuredangle MON=\alpha$.

Целесообразность рассмотрения углов произвольной величины иллюстрируется следующим очевидным утверждением:

Если угол от луча OM до луча ON равен α, а угол от луча ON до луча OP равен β, то угол от луча OM до луча OP равен $\alpha+\beta$ (т. е. $\measuredangle MOP=\measuredangle MON+\measuredangle NOP$ при любом расположении лучей OM, ON, OP, исходящих из одной точки O). Ранее, ограничиваясь углами, заключенными в пределах от $-180°$ до $+180°$, мы не могли этого утверждать. Например, если $\measuredangle MON=130°$, $\measuredangle NOP=110°$, то теперь мы можем утверждать, что $\measuredangle MOP=240°$, в то время как ранее мы должны были считать, что $\measuredangle MOP=-120°$ (ибо $240°>180°$; см. рис. 385).

Определение синуса и косинуса некоторого угла теперь непосредственно распространяется на углы произвольной величины:

Синус и косинус произвольного угла α определяются формулами

$$\cos\alpha=x,\quad \sin\alpha=y,$$

где x, y — координаты (в прямоугольной системе XOY) вектора $\mathbf{e}=\overline{OE}$ длины 1, образующего с осью OX угол α.

В силу этого определения, *синусы (или косинусы) любых двух углов, отличающихся друг от друга на целочисленное кратное угла* 360°, *равны между собой*. Например,

$$\sin 1176° = \sin 96°, \quad \cos 2000° = \cos(-160°).$$

Теорема. *Пусть XOY — прямоугольная система координат на плоскости и* $\boldsymbol{a} = \overline{OA}$ — *вектор длины* a, *образующий с осью* OX *угол* α (рис. 386). *Тогда вектор* $\boldsymbol{a}$ *имеет в системе* XOY *координаты* $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$.

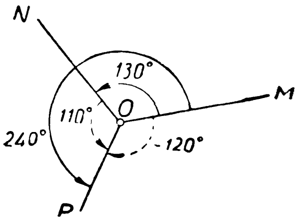


Рис. 385

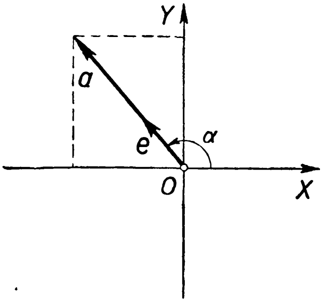


Рис. 386.

Действительно, обозначим через $\boldsymbol{e} = \overline{OE}$ вектор длины 1, направление которого совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$. Тогда (см. § 58, стр. 203)

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}.$$

Но мы уже знаем, что вектор $\boldsymbol{e}$ имеет координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Отсюда в силу теоремы 2 § 67 вытекает, что вектор $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}$ имеет координаты $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$.

§ 70. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Теорема. *Для любого угла* α *справедливы соотношения*

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

(эти соотношения называются формулами приведения).

Доказательство. Пусть вектор $\boldsymbol{e} = \overline{OE}$ длины 1 образует с осью OX угол α, а вектор $\boldsymbol{e}' = \overline{OE'}$ длины 1 образует с осью OX угол $-\alpha$ (рис. 387). Тогда точки E и E' симметричны друг другу относительно оси OX, откуда вытекает, что абсциссы векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ совпадают (т. е. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$), а ординаты равны по абсолютной величине и противоположны по знаку (т. е. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$).

Далее, обозначим через $\boldsymbol{e}''$ вектор, симметричный вектору $\boldsymbol{e}$ относительно оси OY. Тогда угол от отрицательной части оси OX

до вектора e'' равен $-\alpha$ (рис. 388, *а*), а потому угол от положительной части оси OX до вектора e'' равен $180°-\alpha$ (рис. 388, *б*). Так как векторы e и e'' симметричны друг другу относительно оси OY, то их ординаты совпадают (т. е. $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$), а абсциссы равны по абсолютной величине и противоположны по знаку (т. е. $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$).

Формулы приведения играют важную роль по следующей причине. Если дан произвольный угол α, то, изменяя его на целочисленное кратное угла 360°, можно заменить его углом, заключенным между $-180°$ и $+180°$. Поэтому для нахождения синусов и косинусов произвольных углов достаточно знать синусы и косинусы углов, заключенных между $-180°$ и $+180°$. В силу первых двух формул приведения достаточно даже знать лишь синусы и косинусы положительных углов, заключенных между 0° и 180°. Наконец, в силу последних двух формул приведения, нахождение синуса или косинуса тупого угла α сводится к нахождению синуса или косинуса острого угла $180°-\alpha$. Таким образом, имея таблицы значений тригонометрических функций (синуса и косинуса) для острых углов, можно находить тригонометрические функции произвольных углов (с помощью формул приведения).

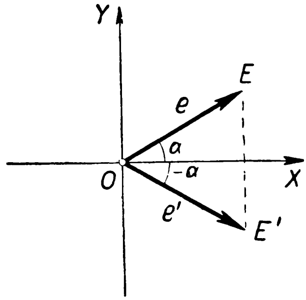


Рис. 387.

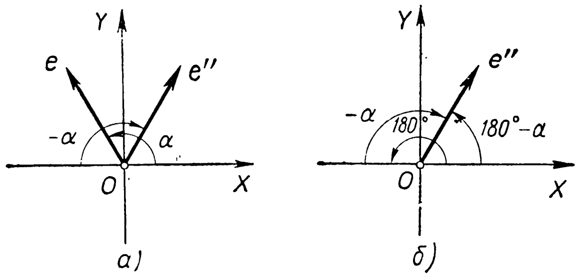


Рис. 388.

Например,

$$\sin 794°=\sin 74°,\quad \cos 342°=\cos 18°,$$

$$\sin(-609°)=\sin 69°,\quad \cos(-880°)=-\cos 20°.$$

Следствие. *Пусть l — произвольная ось, $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор длины a. Обозначим через α угол* (ненаправленный, т. е. заключенный между 0 и 180°) *между направлением оси l и направлением вектора $\boldsymbol{a}$* (рис. 389). *Тогда*

$$\text{пр}_l\,\boldsymbol{a}=a\cos\alpha.$$

Другими словами, *проекция вектора на ось равна длине проектируемого вектора, умноженной на косинус угла между осью и вектором.*

Доказательство. Примем ось l за ось абсцисс системы координат XOY и направим ось координат перпендикулярно к ней (рис. 390). Вектор $\boldsymbol{a}$ отложим от точки O:

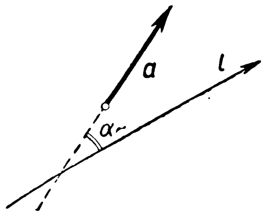


Рис. 389.

$$\boldsymbol{a}=\overline{OA}$$

и обозначим через x, y его координаты. Вектор $\boldsymbol{a}$ образует с осью OX угол $\pm\alpha$ (т. е. либо $\measuredangle XOA=+\alpha$, либо $\measuredangle XOA=-\alpha$, ср. рис. 390 и 391).

Согласно теореме, доказанной в § 69, абсцисса x вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. его проекция на ось l, равна либо $a\cos\alpha$, либо $a\cos(-\alpha)$. Но в силу формул приведения $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, и потому в любом случае (рис. 391) имеем:

$$\text{пр}_l\boldsymbol{a}=a\cos\alpha.$$

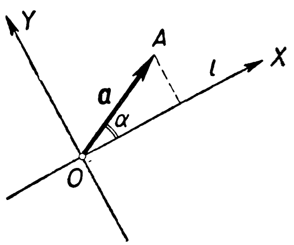


Рис. 390.

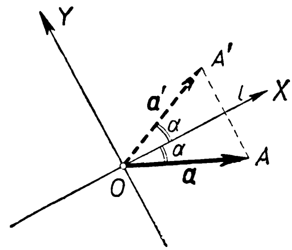


Рис. 391.

Задачи и упражнения к главе IX

Проекция вектора на ось

588. Могут ли неравные векторы иметь равные проекции на одну и ту же ось? В каком случае?

589. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ симметричны относительно прямой m; при каком расположении оси l справедливы следующие равенства:

$$1)\ \text{пр}_l\boldsymbol{a}=\text{пр}_l\boldsymbol{a}';\quad 2)\ \text{пр}_l\boldsymbol{a}=-\text{пр}_l\boldsymbol{a}'?$$

590. Даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Существует ли ось l, для которой $\text{пр}_l\boldsymbol{a}=\text{пр}_l\boldsymbol{b}$?

591. а) Докажите, что если для двух непараллельных осей l, m выполнены соотношения

$$\text{пр}_l\boldsymbol{a}=0,\quad \text{пр}_m\boldsymbol{a}=0,$$

то $\boldsymbol{a}$ — нулевой вектор.

б) Докажите, что если для двух непараллельных осей l, m выполнены соотношения

$$\text{пр}_l\boldsymbol{a}=\text{пр}_l\boldsymbol{b},\quad \text{пр}_m\boldsymbol{a}=\text{пр}_m\boldsymbol{b},$$

то $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

Свойства проекций

592. Докажите, что для любых точек A, B, C, D справедливо равенство

$$\text{пр}_l \overline{AB} + \text{пр}_l \overline{BC} + \text{пр}_l \overline{CD} = \text{пр}_l \overline{AD}.$$

593. Пусть $ABCDE$ — некоторый пятиугольник, l — произвольная ось. Чему равна сумма

$$\text{пр}_l \overline{AB} + \text{пр}_l \overline{BC} + \text{пр}_l \overline{CD} + \text{пр}_l \overline{DE} + \text{пр}_l \overline{EA}?$$

594. Дано: $\text{пр}_l \boldsymbol{a} = -1$, $\text{пр}_l \boldsymbol{b} = 3$. Вычислите следующие проекции:

$$\text{пр}_l (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b});\ \text{пр}_l (-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b});\ \text{пр}_l \left(3\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right);\ \text{пр}_l (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}).$$

595. Докажите формулу:

$$\text{пр}_l (p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b} - r\boldsymbol{c}) = p \cdot \text{пр}_l \boldsymbol{a} + q \cdot \text{пр}_l \boldsymbol{b} - r \cdot \text{пр}_l \boldsymbol{c}.$$

596. Докажите, что $\text{пр}_l (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \text{пр}_l \boldsymbol{a} - \text{пр}_l \boldsymbol{b}$.

Координаты вектора

597. Вектор $\boldsymbol{a}$ образует с осью OX угол α и имеет длину a. Определите координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в каждом из следующих случаев:

1) $\alpha = 0°$, $a = 3$; 2) $\alpha = 90°$; $a = 2$; 3) $\alpha = 180°$; $a = \frac{3}{2}$;

4) $\alpha = -90°$; $a = \frac{1}{2}$; 5) $\alpha = 45°$; $a = 1$; 6) $\alpha = 60°$, $a = 2$;

7) $\alpha = 135°$, $a = 3$; 8) $\alpha = -120°$, $a = 5$; 9) $\alpha = -30°$, $a = 4$;

10) $\alpha = -150°$, $a = 6$; 11) $\alpha = -60°$, $a = \frac{1}{3}$.

598. Вектор $\boldsymbol{a}$ образует с осью OX угол α и имеет длину a. Пользуясь таблицами, определите координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в каждом из следующих случаев:

1) $\alpha = 57°36'$, $a = 2{,}75$; 2) $\alpha = -129°11'$, $a = 1{,}84$;
3) $\alpha = 108°14'$, $a = 3{,}11$; 4) $\alpha = -12°42'$, $a = 0{,}94$;
5) $\alpha = 169°18'$, $a = 1{,}73$; 6) $\alpha = 24°11'$, $a = 1{,}54$;
7) $\alpha = -71°15'$, $a = 3{,}55$; 8) $\alpha = -175°20'$, $a = 0{,}18$.

599. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ отложены от начала координат O. Как расположены друг по отношению к другу эти векторы в каждом из следующих случаев:

а) абсциссы векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны, а ординаты равны по абсолютной величине и противоположны по знаку;

б) ординаты равны, а абсциссы отличаются знаком;

в) и абсцисса, и ордината вектора $\boldsymbol{a}$ отличаются знаком от абсциссы и ординаты вектора $\boldsymbol{b}$.

Сделайте чертежи для следующих случаев:

1) $\boldsymbol{a} = \{1, 2\}$, $\boldsymbol{b} = \{1, -2\}$; 2) $\boldsymbol{a} = \{-2, 1\}$, $\boldsymbol{b} = \{-2, -1\}$;
3) $\boldsymbol{a} = \{1, 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{-1, 3\}$; 4) $\boldsymbol{a} = \{2, -2\}$, $\boldsymbol{b} = \{-2, -2\}$;
5) $\boldsymbol{a} = \{0, 1\}$, $\boldsymbol{b} = \{0, -1\}$; 6) $\boldsymbol{a} = \{3, 0\}$, $\boldsymbol{b} = \{-3, 0\}$;
7) $\boldsymbol{a} = \{2, 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{-2, -3\}$; 8) $\boldsymbol{a} = \{2, -3\}$, $\boldsymbol{b} = \{-2, 3\}$.

600. Запишите векторы $\boldsymbol{a} = \{2, 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{-1, 3\}$, $\boldsymbol{c} = \{0, -2\}$, $\boldsymbol{d} = \{-1, -5\}$, $\boldsymbol{e} = \{5, -4\}$ с помощью единичных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, направленных по осям координат.

601. Дано: $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{d} = -2\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{f} = -5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, где $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — единичные векторы, направленные по осям координат. Найдите координаты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$.

602. Вычислите k и l, если

1) $3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}=k\boldsymbol{i}+(2l+1)\boldsymbol{j}$;
2) $(k+l-1)\boldsymbol{i}+(2k-l)\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$;
3) $(2k-l-1)\boldsymbol{i}-(3k+l+10)\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$;
4) $k\boldsymbol{i}+l\boldsymbol{j}=(l+1)\boldsymbol{i}-(k-1)\boldsymbol{j}$.

Координаты суммы двух векторов и произведения вектора на число

603. Как найти координаты вектора $-\boldsymbol{a}$, если известны координаты вектора $\boldsymbol{a}$?

604. Как найти координаты вектора $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, зная координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$?

605. Даны три вектора $\boldsymbol{a}=\{x_1, y_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{x_2, y_2\}$, $\boldsymbol{c}=\{x_3, y_3\}$. Докажите, что координатами вектора $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$ являются числа

$$x=\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3, \quad y=\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3.$$

606. Даны три вектора $\boldsymbol{a}=\{2, 4\}$, $\boldsymbol{b}=\{-3, 1\}$, $\boldsymbol{c}=\{5, -2\}$. Найдите координаты векторов

1) $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$; 2) $\boldsymbol{a}+24\boldsymbol{b}+14\boldsymbol{c}$; 3) $2\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; 4) $5\boldsymbol{c}$.

607. Даны три вектора $\boldsymbol{a}=\{5, 3\}$, $\boldsymbol{b}=\{2, 0\}$, $\boldsymbol{c}=\{4, 2\}$. Подберите отличные от нуля числа α, β и γ так, чтобы сумма $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$ была равна нулю.

608. Выразите вектор $\boldsymbol{c}$ через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\boldsymbol{a}=\{4; -2\}$, $\boldsymbol{b}=\{3; 5\}$, $\boldsymbol{c}=\{1; -7\}$;
2) $\boldsymbol{a}=\{5; 4\}$, $\boldsymbol{b}=\{-3; 0\}$, $\boldsymbol{c}=\{19; 8\}$;
3) $\boldsymbol{a}=\{-6; 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{4; 7\}$, $\boldsymbol{c}=\{9; -3\}$.

609. В каждом из следующих случаев определите, при каком значении k вектор $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ будет параллелен вектору $\boldsymbol{c}$:

1) $\boldsymbol{a}=\{2; 3\}$, $\boldsymbol{b}=\{3; 5\}$, $\boldsymbol{c}=\{-1; 3\}$;
2) $\boldsymbol{a}=\{1; 0\}$, $\boldsymbol{b}=\{2; 2\}$, $\boldsymbol{c}=\{3; -5\}$;
3) $\boldsymbol{a}=\{3; -2\}$, $\boldsymbol{b}=\{1; 1\}$, $\boldsymbol{c}=\{0; 5\}$.

Связь между координатами вектора и координатами точки

610. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$, если точки A и B имеют следующие координаты:

1) $A(3; 1)$, $B(5; 0)$; 2) $A(-1; 3)$, $B(-2; 1)$;
3) $A(0; 4)$, $B(5; 0)$; 4) $A(3; 1)$, $B(-1; -3)$.

611. Вершинами треугольника ABC являются точки $A(1; 1)$, $B(0; 3)$, $C(-1; -1)$. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$. Проверьте с помощью координат соотношение $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\boldsymbol{0}$.

612. От точки A отложен вектор $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$. Найдите координаты точки B в каждом из следующих случаев.

а) $A(0; 0)$, $\boldsymbol{a}=\{-2; 1\}$;
б) $A(-1; 5)$, $\boldsymbol{a}=\{1; -3\}$;
в) $A(2; 7)$, $\boldsymbol{a}=\{-2; -5\}$.

613. Найдите координаты середины отрезка AB в каждом из следующих случаев:

а) $A(0; 0)$, $B(1; 5)$; б) $A(-2; 3)$, $B(-5; 7)$.

614. Найдите координаты центра тяжести треугольника ABC, если точки A, B и C имеют следующие координаты:

а) $A(0; 0)$, $B(0; 3)$, $C(5; 0)$;
б) $A(0; 0)$, $B(2; 5)$, $C(-1; 7)$;
в) $A(1; 3)$, $B(3; 6)$, $C(-2; 5)$.

615. Даны четыре точки $A(0; 2)$, $B(3; 1)$, $C(-5; 3)$, $D(2; 4)$. Найдите координаты такой точки Q, что $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}=\mathbf{0}$.

616. Известны координаты вершин A, B, C параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты вершины D:

1) $A(2; 3)$, $B(1; 4)$, $C(0, -2)$;
2) $A(-2; -1)$, $B(3; 0)$, $C(1, -2)$.

617. Известны координаты вершин A и B треугольника ABC и координаты его центра тяжести M. Найдите координаты третьей вершины C:

1) $A(4; 1)$, $B(3; -2)$, $M(0; 2)$;
2) $A(3; 5)$, $B(-1; -3)$, $M(1; 1)$.

618. а) Докажите, что параллельный перенос на вектор $\boldsymbol{a}$ с координатами (a, b) переводит точку $A(x, y)$ в точку $A'(x+a, y+b)$.

б) Даны треугольник ABC и вектор $\boldsymbol{a}$. В каждом из следующих случаев найдите координаты вершин треугольника $A_1B_1C_1$, в который переходит треугольник ABC при параллельном переносе на вектор $\boldsymbol{a}$:

1) $A(0; 3)$, $B(4; -2)$, $C(-1; -2)$, $\boldsymbol{a}=\{4; 1\}$
2) $A(1; 4)$, $B(5; -1)$, $C(-2, -3)$; $\boldsymbol{a}=\{1; -2\}$.

619. а) Докажите, что симметрия относительно точки Q с координатами (a, b) переводит точку $A(x, y)$ в точку $A'(2a-x, 2b-y)$.

б) Даны треугольник ABC и точка Q. В каждом из следующих случаев найдите координаты вершин треугольника $A'B'C'$, в который переводит треугольник ABC симметрия относительно точки Q:

1) $A(0, 3)$, $B(2, -4)$, $C(-2, -1)$; $Q(0, 0)$;
2) $A(3, 0)$, $B(-2, -2)$, $C(3, 1)$; $Q(2, -1)$.

620. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(1; 1)$, $B(0; 3)$, $C(-1; -1)$. Найдите координаты векторов $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BM}$, $\overline{FM}$, где D, E, F — середины сторон BC, CA, AB треугольника, а M — его центр тяжести.

621. Проверьте, пользуясь координатами векторов, справедливость соотношений:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c});$$
$$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b};$$
$$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a};$$
$$k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}.$$

Связь координат вектора с тригонометрическими функциями. Формулы приведения

622. а) Для каких углов α справедливы соотношения:

1) $\cos\alpha > 0$; 2) $\cos\alpha=0$; 3) $\cos\alpha < 0$; 4) $\cos\alpha = +1$; 5) $\cos\alpha=-1$.

б) Для каких углов α справедливы соотношения

1) $\sin\alpha > 0$; 2) $\sin\alpha = 0$; 3) $\sin\alpha < 0$; 4) $\sin\alpha = 1$; 5) $\sin\alpha = -1$.

623. Покажите, что для любого числа a, удовлетворяющего условию $-1 \leqslant a \leqslant 1$, существует один и только один угол α, заключенный в пределах $0 \leqslant \alpha \leqslant 180°$, для которого $\cos\alpha = a$.

624. Найдите неотрицательный угол α ($0 \leqslant \alpha < 180°$) из следующих соотношений:

1) $\cos\alpha=0{,}871$; 2) $\cos\alpha=-0{,}375$; 3) $\cos\alpha=0$; 4) $\cos\alpha=0{,}279$; 5) $\cos\alpha=1$; 6) $\cos\alpha=-0{,}111$; $\cos\alpha=0{,}399$; $\cos\alpha=-1$.

625. В каждом из следующих случаев найдите $\sin\alpha$:

1) $\alpha=37°29'$; 2) $\alpha=90°$; 3) $\alpha=134°11'$; 4) $\alpha=175°18'$.

626. Найдите по таблицам:

1) $\lg\cos 25°42'$; 2) $\lg\cos 65°18'$; 3) $\lg\cos 83°19'$;
4) $\lg\cos 56°18'$; 5) $\lg\cos 5°11'$; 6) $\lg\cos 49°12'$;
7) $\lg\sin 59°15'$; 8) $\lg\sin 9°13'$; 9) $\lg\sin 81°7'$;
10) $\lg\sin 30°34'$.

627. Найдите положительный (острый) угол α, если дано:

1) $\lg\cos\alpha=\bar{1},2519$; 2) $\lg\cos\alpha=\bar{1},5518$; 3) $\lg\cos\alpha=\bar{1},9519$;
4) $\lg\cos\alpha=\bar{1},4938$; 5) $\lg\cos\alpha=\bar{2},8509$.

628. Вычислите при помощи логарифмической линейки:

1) $5\sin 27°$; 2) $1,2\sin 98°$; 3) $0,2\sin 78°$;
4) $4,3\cos 15°$; 5) $5,7\cos 126°$; 6) $12,1\cos 163°$;
7) $\dfrac{2,5}{\cos 18°}$; 8) $\dfrac{3,6}{\sin 152°}$; 9) $\dfrac{5,8}{\cos 138°}$; 10) $\dfrac{6,1}{\sin 38°}$.

629. Векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ имеют длины a, b, c и образуют с осью OX углы α, β, γ. Определите координаты вектора $\overline{AD}$.

630. Точки A, B и C — три последовательные вершины правильного n-угольника со стороной a; чему равна проекция вектора $\overline{AB}$ на ось BC (направленную от точки B к C)?

631. Точки A и B — две соседние вершины правильного n-угольника со стороной a, O — его центр. Чему равна проекция вектора $\overline{AB}$ на ось OA?

Дополнения и методические указания к главе IX

1. Определение проекции вектора на ось. [К § 63.] В § 63 дано определение проекции н а п р а в л е н н о г о о т р е з к а на ось. Тем не менее в действительности мы можем говорить о проекции в е к т о р а на ось (понимая под вектором, как всегда, с е м е й с т в о направленных отрезков). В самом деле, теорема 1 § 63 показывает, что если два направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ являются представителями одного и того же вектора $\boldsymbol{a}$, то

$$\text{пр}_l\overline{AB}=\text{пр}_l\overline{CD}.$$

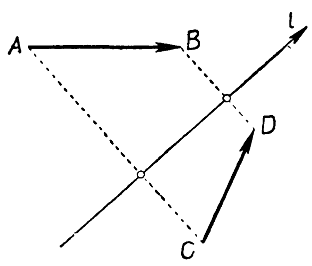


Рис. 392.

Иначе говоря, число $\text{пр}_l\overline{AB}$ не зависит от выбора представителя $\overline{AB}$ вектора $\boldsymbol{a}$, и потому это число можно обозначить символом $\text{пр}_l\boldsymbol{a}$ и назвать *проекцией в е к т о р а $\boldsymbol{a}$ на ось l*.

Теорема 2 § 63 доставляет нам по существу новое определение проекции вектора на ось. Это второе определение во многих отношениях является более удобным, чем первое; в дальнейшем работает, как правило, именно оно. Мы предпочли, однако, за основу взять первое (явное) определение проекции вектора на ось, более наглядно выясняющее смысл этого понятия.

Заметим, что если $\overline{AB}=\overline{CD}$, то $\text{пр}_l\overline{AB}=\text{пр}_l\overline{CD}$; однако обратное неверно: из равенства $\text{пр}_l\overline{AB}=\text{пр}_l\overline{CD}$ вовсе не следует, что $\overline{AB}=\overline{CD}$, т. е. что $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ являются представителями одного и того же вектора $\boldsymbol{a}$ (ср., например, рис. 392, а также задачу **588**). Другими словами, проекция вектора на ось не определяет однозначно этого вектора. В противоположность этому, если заданы проекции вектора a на две не параллельные оси, то вектор a однозначно определяется (ср. задачу **591**). В частности, если рассматриваемые две оси взаимно перпендикулярны и принимаются за оси координат, то мы получаем: *каждый вектор однозначно определяется заданием своих координат.*

2. Вектор как пара чисел. [К § 65—67.] Предположим, что на плоскости выбрана некоторая система координат. В таком случае каждому вектору a однозначно соответствует пара чисел x, y, являющихся координатами этого вектора. Обратно, если задана произвольная пара чисел x, y, то найдется такой вектор a, координатами которого являются эти числа x, y (а именно вектор $a=xi+yi$; см. обратную теорему в § 66). Тем самым устанавливается соответствие между множеством всех векторов на плоскости и множеством всех пар действительных чисел. Это соответствие является взаимно однозначным.

Весьма важно, что при таком соответствии действия над векторами (сложение векторов, вычитание, умножение вектора на число) переходят в очень простые операции, выполняемые над парами чисел. Именно, указанным действиям над векторами отвечают такие же действия над парами чисел, выполняемые покоординатно:

$$\{x_1, y_1\}+\{x_2, y_2\}=\{x_1+x_2, y_1+y_2\},$$
$$\{x_1, y_1\}-\{x_2, y_2\}=\{x_1-x_2, y_1-y_2\},$$
$$k\{x, y\}=\{kx, ky\}.$$

Это обстоятельство проливает новый свет на сходство свойств операций над числами и операций над векторами. Например, коммутативность сложения векторов при таком подходе является прямым следствием коммутативности сложения чисел. Действительно,

$$\{x_1, y_1\}+\{x_2,y_2\}=\{x_1+x_2, y_1+y_2\},$$
$$\{x_2, y_2\}+\{x_1, y_1\}=\{x_2+x_1, y_2+y_1\}.$$

Но так как для чисел сложение коммутативно, то $x_1+x_2=x_2+x_1$, $y_1+y_2=$ $=y_2+y_1$, и потому

$$\{x_1, y_1\}+\{x_2, y_2\}=\{x_2, y_2\}+\{x_1, y_1\}$$

(ср. задачу **621**).

3. Связь координат вектора и координат точки. [К § 68.] В § 68 сформулировано следующее утверждение: *координаты радиуса вектора $\overline{OA}$ точки A совпадают с координатами точки A* (ср. рис. 379 на стр. 231). Это утверждение представляет собой по существу определение координат точки, с которыми учащиеся знакомы еще из курса восьмилетней школы. Учителю рекомендуется подчеркнуть, что сформулированное предложение совпадает с определением координат точки, пояснив это одним-двумя чертежами на доске.

4. Об определении тригонометрических функций. [К § 69,70.] В настоящей книге §§ 69, 70, посвященные связи координат вектора с тригонометрическими функциями, значительно расширены по сравнению с соответствующим текстом пособия для учащихся. Здесь излагается наиболее целесообразный, с нашей точки зрения, путь введения тригонометрических функций в школе (ср. также § 75, в котором выводятся тригонометрические формулы сложения). Этот материал настолько тесно связан с понятиями вектора и координат вектора, что отрывать его от содержания главы IX совершенно нецелесообразно. Мы предполагаем, что в дальнейшем, при ликвидации самостоятельного курса тригонометрии, этот материал естественно отнести к векторной алгебре (т. е. изучать его в курсе геометрии). Напротив, общее изучение тригонометрических функций (их поведение, построение графиков, тождественные преобразования тригонометрических выражений, определение и свойства обратных тригонометрических функций и т. п.) целесообразно отнести к курсу алгебры и теории функций. [Вопрос о радианном измерении углов, сводящийся к простой замене единицы измерения, настолько прост, что вопрос о его месте роли не играет.]

5. О задачах и упражнениях. Задачи на проекции (**588—591** и **592—596**) несложны и могут все считаться обязательными.

Задачи **597—599** также обязательны. Мы не предполагаем, что учащиеся знакомы с определением синуса и косинуса произвольного угла, и потому предполагается, что при решении этих задач в каждом случае будет изготовляться чертеж [заменяющий использование формул приведения; ср. рис. 393, относящийся к задаче 598, 2)], после чего можно будет применять таблицы тригонометрических функций о с т р ы х углов. Однако если в связи с перестановками в программе учащиеся уже знакомы с тригонометрическими функциями произвольных углов и формулами приведения, то, разумеется, можно этим воспользоваться. Это будет не только изучением нового материала, но и закреплением сведений из тригонометрии. Следующие же три задачи (**600—602**) мы рекомендуем решить с учащимися, так как они способствуют уяснению важного представления о разложении произвольного вектора по векторам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$.

Последующие задачи (**603—621**), кроме задачи **607**, несложны и также рекомендуются для решения. Особо отметим

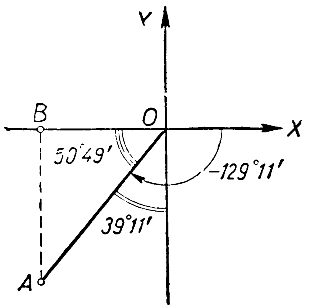


Рис. 393.

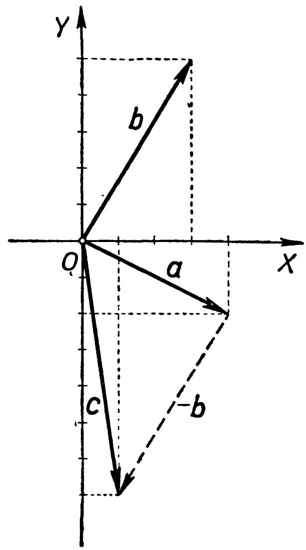


Рис. 394.

задачу **621**, в которой предлагается проверить справедливость законов действий над векторами (ср. п. **2**, стр. 241). Эта задача очень полезна; однако следует заметить, что решение ее не может рассматриваться как доказательство соотношений 1), 2), 3) § 59: ведь при установлении свойств координат (в § 67) мы уже пользовались свойствами 1), 2), 3). Поэтому решение задачи **621** можно рассматривать лишь как проверку, как подтверждение этих свойств, но не как доказательство. (Решение этой задачи будет служить доказательством свойств 1) — 3), если о п р е д е л и т ь операции над векторами с помощью теорем 1 и 2 § 67.) Тем не менее, если учитель не доказывал в классе этих свойств (как мы рекомендовали на стр. 219), то такая проверка кажется нам очень полезной (не говоря уже о том, что она способствует усвоению понятия координат вектора).

Задачи **622—631** содержат хорошо известный учителю материал. Кроме вычислительных задач, здесь имеются задачи **623**, **630**, **631**, которые мы очень рекомендуем. Если учащимся, в связи с перестановками в программе, тригонометрический материал знаком, то можно, по усмотрению учителя, ограничиться лишь несколькими примерами или совсем пропустить этот раздел.

6. Примеры решения задач. 1) З а д а ч а **607** (стр. 238). Согласно теореме 2 § 67, вектор $\alpha \boldsymbol{a}$ имеет координаты $\{5\alpha,\ 3\alpha\}$. Точно так же, вектор $\beta \boldsymbol{b}$ имеет координаты $\{2\beta,\ 0\}$, а вектор $\gamma \boldsymbol{c}$ имеет координаты $\{4\gamma,\ 2\gamma\}$. Следовательно, по теореме 1 § 67, вектор $\alpha \boldsymbol{a}+\beta \boldsymbol{b}+\gamma \boldsymbol{c}$ имеет координаты $\{5\alpha+2\beta+4\gamma,\ 3\alpha+2\gamma\}$.

Для того чтобы вектор $\alpha \boldsymbol{a}+\beta \boldsymbol{b}+\gamma \boldsymbol{c}$ был равен нулевому вектору, необходимо и достаточно, чтобы обе его координаты были равны нулю, т. е. чтобы выполнялись следующие два равенства:

$$\begin{cases} 5\alpha+2\beta+4\gamma=0, \\ 3\alpha+2\gamma=0. \end{cases}$$

Итак, наша задача состоит в том, чтобы найти числа α, β, γ, удовлетворяющие выписанной системе уравнений. Из этих уравнений мы легко находим:

$$\gamma=-\frac{3}{2}\alpha,\ \beta=-\frac{5}{2}\alpha-2\gamma=-\frac{5}{2}\alpha+3\alpha=\frac{1}{2}\alpha.$$

Таким образом, нужно лишь найти такие α, β и γ, чтобы выполнялись соотношения: $\gamma=-\frac{3}{2}\alpha$, $\beta=\frac{1}{2}\alpha$. Например, полагая $\alpha=2$, находим:

$$\alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=-3.$$

(Рекомендуется проверить, что при этих значениях α, β, γ вектор $\alpha \boldsymbol{a}+\beta \boldsymbol{b}+\gamma \boldsymbol{c}$ действительно обращается в нуль.)

2) Задача **608**, 1) (стр. 238). Мы должны найти такие числа α и β, что $\boldsymbol{c}=\alpha \boldsymbol{a}+\beta \boldsymbol{b}$. Вектор $\alpha \boldsymbol{a}+\beta \boldsymbol{b}$ имеет координаты $\{4\alpha+3\beta,\ -2\alpha+5\beta\}$ (см. решение задачи **607**). Поэтому для выполнения равенства $\alpha \boldsymbol{a}+\beta \boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ нужно, чтобы выполнялись соотношения:

$$\begin{cases} 4\alpha+3\beta=1, \\ -2\alpha+5\beta=-7. \end{cases}$$

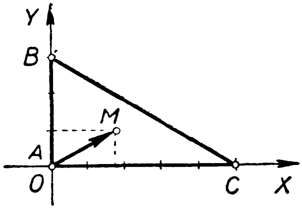


Рис. 395.

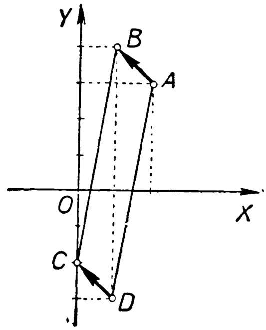


Рис. 396.

Решая получившуюся систему уравнений относительно α и β, легко находим: $\alpha=1$, $\beta=-1$, т. е. $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (ср. рис. 394).

Замечание. В записи на доске и в тетрадях вполне можно допустить также следующие равенства:

$$\boldsymbol{a}=\{4,\ -2\};\ \boldsymbol{b}=\{3,\ 5\};\ \text{значит,}\ \alpha\boldsymbol{a}=\{4\alpha,\ -2\alpha\},\ \beta\boldsymbol{b}=\{3\beta,\ 5\beta\};$$
$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\{4\alpha+3\beta,\ -2\alpha+5\beta\};\ \text{следовательно,}$$
$$\{4\alpha+3\beta,\ -2\alpha+5\beta\}=\{1,\ -7\},$$

откуда получаем систему уравнений, указанную выше. Важно, чтобы учащиеся понимали, что *равенство векторов означает совпадение их координат*, т. е. если $\{x_1,\ y_1\}=\{x_2,\ y_2\}$, то имеют место два равенства: $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

3) Задача **614**, а) (стр. 239). Мы имеем:

$$\overline{OA}=\{0;\ 0\},\ \overline{OB}=\{0;\ 3\},\ \overline{OC}=\{5;\ 0\}.$$

Поэтому, обозначая через M центр тяжести треугольника ABC, находим:

$$\overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})=\frac{1}{3}(\{0;\ 0\}+\{0;\ 3\}+\{5;\ 0\})=\frac{1}{3}\cdot\{5;\ 3\}=\left\{\frac{5}{3};\ 1\right\}.$$

Но координаты вектора $\overline{OM}$ совпадают с координатами точки M; поэтому эта точка M имеет координаты $\left(\frac{5}{3};\ 1\right)$ (ср. рис. 395).

4) Задача 616, 1) (стр. 239). Обозначим неизвестные координаты точки D через x, y. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\overline{AB}=\overline{DC}$. Но мы имеем (в силу теоремы § 68):

$$\overline{AB}=\{-1;\ 1\},\quad \overline{DC}=\{-x,\ -2-y\}.$$

Таким образом, мы получаем из равенства $\overline{AB}=\overline{DC}$ следующие два соотношения:

$$-x=-1,\quad -2-y=1.$$

Из них легко определяем x и y:

$$x=1,\quad y=-3.$$

Итак, точка D имеет координаты $1, -3$ (ср. рис. 396).

ГЛАВА X

СКАЛЯРНОЕ УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

§ 71. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два произвольных вектора, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$. Обозначим через l ось, параллельную вектору $\boldsymbol{a}$ и имеющую то же направление (рис. 397). Под **проекцией вектора $\boldsymbol{b}$ на вектор $\boldsymbol{a}$** мы будем понимать проекцию вектора $\boldsymbol{b}$ на ось l:

$$\text{пр}_a\,\boldsymbol{b}=\text{пр}_l\,\boldsymbol{b}.$$

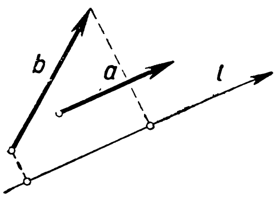


Рис. 397.

Определение. *Произведение длины вектора $\boldsymbol{a}$ и проекции на него другого вектора $\boldsymbol{b}$ называется* ***скалярным произведением*** *вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ и обозначается символом $\boldsymbol{ab}$:*

$$\boldsymbol{ab}=a\,\text{пр}_a\,\boldsymbol{b}.$$

Это определение теряет смысл, если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, так как в этом случае направление вектора $\boldsymbol{a}$ не определено. Однако в этом случае $a=0$ и скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ считается равным нулю: *если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{ab}=0$.*

Так как в силу результатов § 70 $\text{пр}_a\,\boldsymbol{b}=b\cos\alpha$, где α — угол между направлениями векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (ненаправленный; рис. 398), то

$$\boldsymbol{ab}=ab\cos\alpha.$$

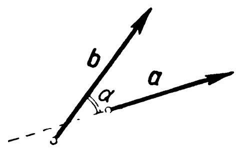


Рис. 398.

Таким образом, *скалярное произведение двух векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними.* Так, например, если $a=6$, $b=4$ и векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют между собой угол $\alpha=60^\circ$, то

$$\boldsymbol{ab}=6\cdot4\cdot\cos60^\circ=12.$$

Если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, то скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ принимает вид $\boldsymbol{aa}$; его называют **скалярным квадратом** вектора $\boldsymbol{a}$ и обозначают символом $\boldsymbol{a}^2$. Так как $\cos 0°=1$, то из формулы $\boldsymbol{ab}=ab\cos\alpha$ вытекает, что *скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{a}$ равен квадрату его длины:*

$$\boldsymbol{a}^2=a^2.$$

Известно, что косинус острого угла положителен (рис. 399, *а*), косинус прямого угла равен нулю (рис. 399, *б*), а косинус тупого угла отрицателен (рис. 399, *в*). Поэтому:

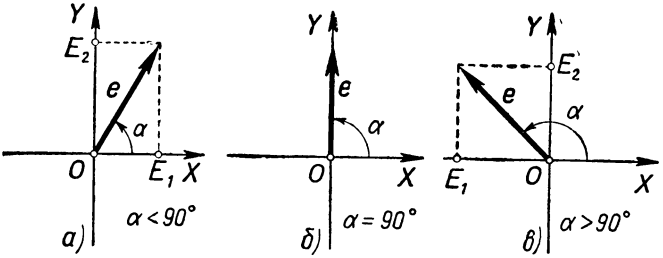


Рис. 399.

Скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, отличных от нуля и образующих между собой угол α,

положительно, если α — острый угол;
равно нулю, если α — прямой угол;
отрицательно, если α — тупой угол.

Особо подчеркнем, что *два не равных нулю вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в том и только в том случае перпендикулярны друг другу, если* $\boldsymbol{ab}=0$ (**условие перпендикулярности векторов**).

§ 72. СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Теорема 1. *Скалярное умножение коммутативно, т. е.*

$$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$$

для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Доказательство теоремы вытекает из формулы

$$\boldsymbol{ab}=ab\cos\alpha.$$

Из коммутативности скалярного умножения векторов и из равенства $\boldsymbol{ab}=a\cdot \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ вытекает, что также

$$\boldsymbol{ab}=b\cdot \text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

Теорема 2. *Скалярное умножение ассоциативно по отношению к умножению вектора на число, т. е.*

$$(k\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{ab}),\quad \boldsymbol{a}(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{ab})$$

для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и числа k.

Доказательство. Если $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, то соотношение $\boldsymbol{a}(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{ab})$ очевидно — обе части последнего равенства обращаются в нуль. Пусть $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$; тогда мы имеем (см. § 64, свойство 2):

$$\boldsymbol{a}(k\boldsymbol{b})=a\cdot \text{пр}_{\boldsymbol{a}}(k\boldsymbol{b})=a(k\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b})=ka\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{ab}).$$

Далее, в силу коммутативности скалярного умножения имеем:

$$(k\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(k\boldsymbol{a})=k(\boldsymbol{ba})=k(\boldsymbol{ab}).$$

Теорема 3. *Скалярное умножение дистрибутивно (распределительно) относительно сложения векторов:*

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac};\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}.$$

Доказательство. Соотношение $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$ очевидно, если $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$; в этом случае $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$ и $\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}=0$. Пусть теперь $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$. Тогда в силу свойства 1 § 64 мы имеем:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=a\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=a\cdot(\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}+\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{c})=a\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}+a\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}.$$

Второе соотношение дистрибутивности получается из первого перестановкой сомножителей:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{ca}+\boldsymbol{cb}=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}.$$

Замечания. Свойства скалярного умножения, составляющие содержание теорем 1—3, похожи на хорошо знакомые правила действий с числами. Это позволяет легко производить вычисления со скалярными произведениями. Например:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{bd};$$
$$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot 3\boldsymbol{c}+(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(-\boldsymbol{d})=6\boldsymbol{ac}+3\boldsymbol{bc}-2\boldsymbol{ad}-\boldsymbol{bd};$$
$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2;$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$$

и т. д. В этом и заключается ценность скалярного произведения: с одной стороны, оно геометрически интересно, так как позволяет находить длины отрезков (с помощью формулы $\boldsymbol{a}^2=a^2$) и позволяет находить величины углов (с помощью формулы $\boldsymbol{ab}=ab\cos\alpha$); с другой стороны, скалярное произведение алгебраически удобно, так как вычисления со скалярными произведениями производятся по правилам, хорошо знакомым из арифметики и алгебры.

Имеются, однако, и серьезные различия между скалярным умножением векторов и умножением чисел. Заметим прежде всего, что скалярное произведение двух векторов является не вектором, а объектом другой природы — числом («скаляром»)[1]. Далее, в то время как в обычной алгебре произведение двух чисел равно нулю только в том случае, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, в «алгебре векторов» дело обстоит совсем не так: *равенство* $\boldsymbol{ab}=0$ *может выполняться и при* $\boldsymbol{a}\neq 0$, $\boldsymbol{b}\neq 0$ (если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны).

Последнее замечание влечет за собой еще одно существенное различие между «алгеброй векторов» и обычной алгеброй: *векторные равенства нельзя сокращать на отличный от нуля множитель.*

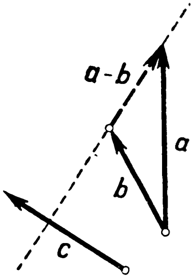


Рис. 400.

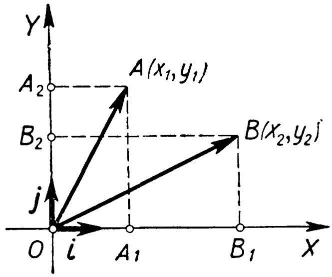


Рис. 401.

В самом деле, если из соотношения $ac=bc$ для чисел a, b и $c\neq 0$ вытекает, что $a=b$, то из равенства

$$\boldsymbol{ac}=\boldsymbol{bc}\quad(\boldsymbol{c}\neq 0)$$

вытекает лишь, что $\boldsymbol{ac}-\boldsymbol{bc}=0$, или $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=0$, и, следовательно, *вектор* $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ *или равен нулю, или перпендикулярен вектору* $\boldsymbol{c}$ (рис. 400).

§ 73. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В КООРДИНАТАХ

Теорема. *Пусть в некоторой прямоугольной системе координат XOY вектор* $\boldsymbol{a}$ *имеет координаты* x_1, y_1, *а вектор* $\boldsymbol{b}$ — *координаты* x_2, y_2. *Тогда*

$$\boldsymbol{ab}=x_1x_2+y_1y_2.$$

---

[1] Это обстоятельство делает невозможным саму постановку вопроса об определении «векторного деления»: символу $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ нельзя приписать никакого смысла. Можно, правда, определить частное $\frac{\alpha}{\boldsymbol{a}}$ от деления числа α на вектор $\boldsymbol{a}$ как такой вектор $\boldsymbol{b}$, что $\boldsymbol{ab}=\alpha$; однако это частное не определяется однозначно (ибо из равенств $\boldsymbol{ab}_1=\boldsymbol{ab}_2=\alpha$ не следует, что $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_2$; ср. ниже), что делает определяемую таким образом операцию «деления числа на вектор» малоинтересной.

Это же обстоятельство мешает рассматривать произведения трех векторов. Так, например, формула

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

на область векторов никак не переносится.

Доказательство. В силу теоремы § 66, мы имеем:

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j},$$

где $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — единичные векторы, направленные по осям OX и OY (рис. 401). Учитывая, что $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=1$ (ибо векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — единичные), $\boldsymbol{ij}=0$ (ибо векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ перпендикулярны), мы получаем:

$$\boldsymbol{ab}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})=$$
$$=x_1x_2\cdot\boldsymbol{i}^2+x_1y_2\cdot\boldsymbol{ij}+x_2y_1\cdot\boldsymbol{ij}+y_1y_2\cdot\boldsymbol{j}^2=x_1x_2+y_1y_2.$$

Словами эту формулу можно выразить так: *скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

Следствие 1. *Скалярный квадрат $\boldsymbol{a}^2$ вектора $\boldsymbol{a}$ с координатами x, y вычисляется по формуле*

$$\boldsymbol{a}^2=a^2=x^2+y^2.$$

Следствие 2. *Для любого угла α справедливо соотношение*

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

В самом деле, пусть $\boldsymbol{e}$ — вектор длины 1, образующий с осью OX угол α (см. рис. 381, 382 на стр. 232). В силу сказанного в § 69, этот вектор имеет координаты $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$. Поэтому

$$1=e^2=\boldsymbol{e}^2=x^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha.$$

§ 74. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА И ВЕЛИЧИНЫ УГЛА

Теорема 1. *Пусть точка A имеет в прямоугольной системе координат XOY координаты x_1, y_1, а точка B — координаты x_2, y_2. Тогда длина отрезка AB равна*

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(рис. 402).

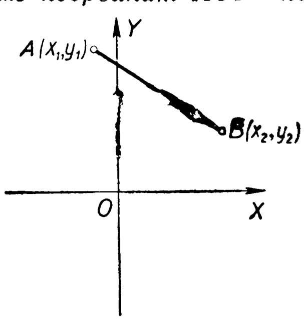


Рис. 402.

Доказательство. Вектор $\overline{AB}$ имеет координаты x_2-x_1, y_2-y_1 (см. § 68). Вычисляя скалярный квадрат этого вектора, находим (см. § 73, следствие 1):

$$AB^2=\overline{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Отсюда и вытекает теорема 1.

Пример. *Найти расстояние между точками A $(1,-2)$ и B $(-5,6)$.*

Решение. В силу теоремы 1 имеем:

$$AB=\sqrt{[-5-1]^2+[6-(-2)]^2}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=\sqrt{100}=10$$

(рис. 403).

Теорема 2. *Пусть вектор* $\boldsymbol{a}$ *имеет в некоторой прямоугольной системе координат* XOY *координаты* x_1, y_1, *а вектор* $\boldsymbol{b}$ *— координаты* x_2, y_2. *Тогда угол* α *между векторами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ (рис. 404) *определяется по формуле*

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{ab}}{ab}.$$

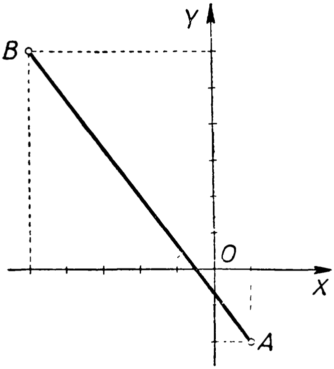


Рис. 403.

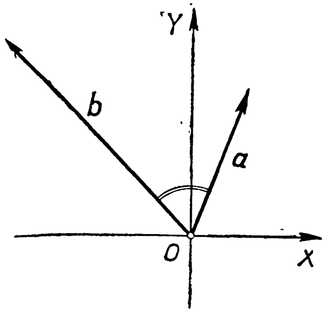


Рис. 404.

Доказательство. Составим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Как мы знаем,

$$\boldsymbol{ab}=ab\cos\alpha.$$

Отсюда и вытекает формула

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{ab}}{a\cdot b}.$$

Воспользовавшись тем, что

$$\boldsymbol{ab}=x_1x_2+y_1y_2$$

(см. § 73) и

$$a^2=x_1^2+y_1^2,\quad a=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\ ;\ b^2=x_2^2+y_2^2,\ b=\sqrt{x_2^2+y_2^2},$$

мы получим:

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{ab}}{a\cdot b}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

Отметим, что, как известно из тригонометрии, угол α, заключенный между 0° и 180°, определяется по его косинусу однозначно. Таким образом, зная координаты двух векторов, можно найти угол между ними.

Пример 1. *Найти угол между векторами* $\boldsymbol{a}=\{1,-2\}$ *и* $\boldsymbol{b}=\{-3,1\}$.

Решение. В силу теоремы 2 имеем:

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{ab}}{a\cdot b}=\frac{1\cdot(-3)+(-2)\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1}}=\frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=$$

$$=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда находим

$$\alpha=135^\circ$$

(см. рис. 405).

Пример 2. *Четыре точки заданы своими координатами* (рис. 406):

$$A(3,1),\ B(1,4),\ C(1,0),\ D(4,5)$$

Определить угол между прямыми AB и CD.

Решение. Согласно теореме § 68, вектор $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$ имеет координаты —2, 3, а вектор $\boldsymbol{b}=\overline{CD}$ имеет координаты 3,5. Найдем угол α между этими векторами — это и будет искомый угол между прямыми AB и CD. В силу теоремы 2 имеем:

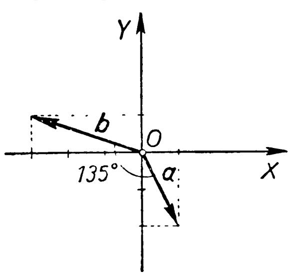


Рис. 405.

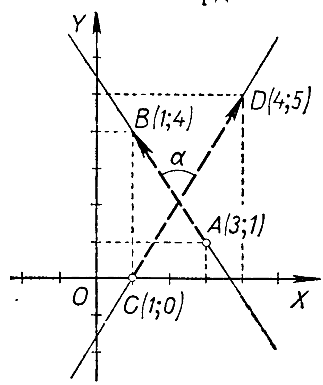


Рис. 406.

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{ab}}{a\cdot b}=\frac{(-2)\cdot 3+3\cdot 5}{\sqrt{(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{9}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{34}}=$$

$$=\frac{9\sqrt{13}\cdot\sqrt{34}}{13\cdot 34}\approx 0{,}4282.$$

Отсюда по таблицам находим

$$\alpha\approx 64^\circ 39'.$$

§ 75. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ

Теорема 1. *Для любого угла α справедливы соотношения:*

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha;$$
$$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha;$$
$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha;$$
$$\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha.$$

Доказательство. Обозначим через $\boldsymbol{e}$ вектор длины 1, образующий с осью OX угол α, а через $\boldsymbol{e}'$ — вектор длины 1, образующий с осью OX угол $90^\circ-\alpha$. Мы имеем:

$$\alpha=45^\circ+(\alpha-45^\circ),\quad 90^\circ-\alpha=45^\circ-(\alpha-45^\circ);$$

иначе говоря,

$$\alpha=45^\circ+\gamma,\quad 90^\circ-\alpha=45^\circ-\gamma,\quad \text{где } \gamma=\alpha-45^\circ.$$

Поэтому один из векторов $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ образует с биссектрисой угла XOY угол γ, а другой образует угол $-\gamma$ (рис. 407), и, следовательно, векторы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ симметричны относительно этой биссектрисы. Поэтому, обозначая через x, y координаты вектора $\boldsymbol{e}$, а через x', y' — координаторы вектора $\boldsymbol{e}'$, мы можем написать (ср. рис. 407):

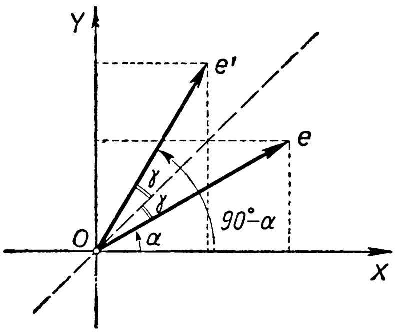


Рис. 407.

$$x'=\text{пр}_{OX}\boldsymbol{e}'=\text{пр}_{OY}\boldsymbol{e}=y,$$
$$y'=\text{пр}_{OY}\boldsymbol{e}'=\text{пр}_{OX}\boldsymbol{e}=x.$$

Но в силу определения синуса и косинуса произвольного угла, мы имеем:

$$x=\cos\alpha,\quad y=\sin\alpha;$$
$$x'=\cos(90^\circ-\alpha),\ y'=\sin(90^\circ-\alpha)$$

(так как вектор $\boldsymbol{e}$ образует с осью OX угол α, а вектор $\boldsymbol{e}'$ — угол $90^\circ-\alpha$). Таким образом, первые две формулы, указанные в теореме, непосредственно вытекают из равенств

$$x'=y,\quad y'=x.$$

Последние две формулы легко вытекают из двух первых:

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\sin[90^\circ-(-\alpha)]=\cos(-\alpha)=\cos\alpha;$$
$$\cos(90^\circ+\alpha)=\cos[90^\circ-(-\alpha]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

Доказанные соотношения, так же как и формулы, выведенные на стр. 234—235, называются **формулами приведения**. При этом формулы, выведенные в § 70, позволяли свести нахождение синуса или косинуса любого угла к нахождению синуса или косинуса некоторого **острого** угла. Формулы настоящего параграфа позволяют свести нахождение синуса или косинуса угла, заключающегося между 45° и 90°, к определению косинуса или синуса угла, **меньшего** 45°. Так, например,

$$\sin 67° = \cos (90° - 67°) = \cos 23°; \quad \cos 67° = \sin 23°.$$

Теорема 2. *Для любых углов α, β справедливы соотношения:*

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

(Эти формулы называют **тригонометрическими формулами сложения**.)

Доказательство. Обозначим через $\boldsymbol{e}$ вектор длины 1, образующий с осью OX угол α, а через $\boldsymbol{f}$ — вектор длины 1, образующий с осью OX угол β (рис. 408). Согласно § 69, мы имеем следующие координаты векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$:

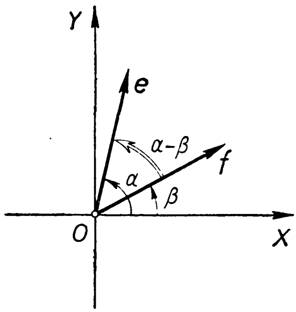


Рис. 408.

$$\boldsymbol{e} = \{\cos\alpha, \ \sin\alpha\}, \quad \boldsymbol{f} = \{\cos\beta, \ \sin\beta\}.$$

Далее угол между векторами $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ равен $\alpha - \beta$, и потому (см. § 71)

$$\boldsymbol{ef} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

С другой стороны, зная координаты векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$, мы можем написать следующее выражение для их скалярного произведения (см. § 73):

$$\boldsymbol{ef} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Сравнивая оба полученных значения скалярного произведения $\boldsymbol{ef}$, мы получаем первую из указанных в теореме 2 формул:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Из нее легко выводятся и три последующие формулы:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos[90° - (\alpha+\beta)] = \cos[(90° - \alpha) - \beta] =$$
$$= \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \sin(90° - \alpha)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin[\alpha + (-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

§ 76. ЗАДАЧИ

Приведем примеры, иллюстрирующие применение скалярного произведения векторов к решению геометрических задач.

Задача 1. *Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.*

Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 409). Обозначим $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overline{AD}=\boldsymbol{b}$. Тогда $\overline{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overline{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, и мы находим:

$$AC^2+DB^2=\overline{AC}^2+\overline{DB}^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=$$
$$=(\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2)+(\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2)=$$
$$=2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2=2a^2+2b^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2.$$

Задача 2. *Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что медианы, проведенные к его боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.*

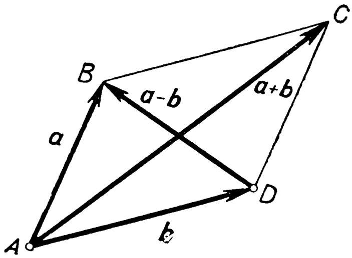


Рис. 409.

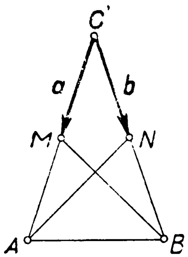


Рис. 410.

Решение. Пусть ABC — треугольник, о котором идет речь в условии задачи, $AC=BC$; M и N — середины сторон AC и BC (рис. 410). Векторы $\overline{CM}$ и $\overline{CN}$ обозначим через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Тогда

$$\overline{CM}=\boldsymbol{a},\ \overline{CA}=2\boldsymbol{a},\ \overline{CN}=\boldsymbol{b},\ \overline{CB}=2\boldsymbol{b}.$$

Далее имеем:

$$\overline{BM}=\overline{BC}+\overline{CM}=-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a};\ \overline{AN}=\overline{AC}+\overline{CN}=-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

По условию, прямые BM и AN перпендикулярны, т. е.

$$\overline{BM}\cdot\overline{AN}=0,$$

или, иначе,

$$(-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0.$$

Раскрывая скобки, находим: $5\boldsymbol{ab}-2\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2=0$,

или, что то же самое, $5ab\cos\alpha-2a^2-2b^2=0$, где α — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. искомый угол C треугольника ABC. Но $a^2=b^2=ab$ (так как $a=b$). Следовательно, имеем:

$$5\cos\alpha - 4 = 0, \text{ т. е. } \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

По таблице находим:

$$\alpha \approx 36°52'.$$

Задача 3. *Пусть K, L, M, N — середины сторон четырехугольника $ABCD$ (рис. 411). Доказать, что диагонали AC и BD в том и только в том случае перпендикулярны друг другу, если средние линии KM и LN равны между собой.*

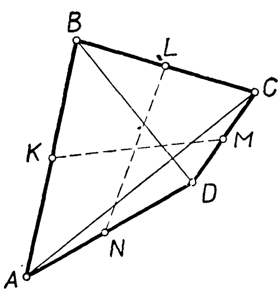


Рис. 411.

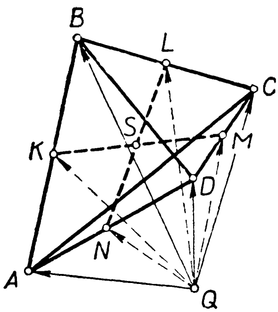


Рис. 412.

Решение. Выберем на плоскости некоторую точку Q и обозначим (рис. 412):

$$\overline{QA}=\boldsymbol{a},\ \overline{QB}=\boldsymbol{b},\ \overline{QC}=\boldsymbol{c},\ \overline{QD}=\boldsymbol{d}.$$

Тогда, в силу следствия 1, § 61, имеем:

$$\overline{QK}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2},\ QL=\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2},\ \overline{QM}=\frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{2},\ \overline{QN}=\frac{\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}}{2}.$$

Следовательно,

$$\overline{KM}=\overline{QM}-\overline{QK}=\frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2},$$

$$\overline{LN}=\overline{QN}-\overline{QL}=\frac{\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{2}.$$

Далее, найдем разность квадратов длин векторов $\overline{KM}$ и $\overline{LN}$:

$$KM^2-LN^2=\overline{KM}^2-\overline{LM}^2=(\overline{KM}+\overline{LN})(\overline{KM}-\overline{LN}).$$

Каждая из скобок легко находится, так как $\overline{KM}$ и $\overline{LN}$ нам уже известны:

$$\overline{KM}+\overline{LN}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b},\ \overline{KM}-\overline{LN}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}.$$

Таким образом,

$$KM^2 - LN^2 = (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}).$$

Но

$$\boldsymbol{d} - \boldsymbol{b} = \overline{QD} - \overline{QB} = \overline{BD}, \quad \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} = \overline{QC} - \overline{QA} = \overline{AC}.$$

Следовательно,

$$KM^2 - LN^2 = \overline{BD} \cdot \overline{AC}.$$

Отсюда видно, что равенство $KM = LN$ имеет место в том и только в том случае, если $\overline{BD} \cdot \overline{AC} = 0$, т. е. если диагонали BD и AC четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны (см. § 71).

Задачи и упражнения к главе X

Определение скалярного произведения

632. Вычислите скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$, если (α — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$):

1) $a=8$; $b=5$; $\alpha=60°$;
2) $a=b=1$, $\alpha=135°$;
3) $\alpha=90°$;
4) $a=3$, $b=1$; векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны и одинаково направлены;
5) $a=3$, $b=1$; векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны и противоположно направлены.

633. При каком расположении векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливы соотношения:

1) $\boldsymbol{ab} = ab$;
2) $\boldsymbol{ab} = -ab$?

634. Что можно сказать о расположении векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если их скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$.

1) положительно;
2) отрицательно;
3) равно нулю?

635. Дан равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна 1. Полагая $\boldsymbol{a} = \overline{BC}$, $\boldsymbol{b} = \overline{CA}$, $\boldsymbol{c} = \overline{AB}$, вычислите выражение $\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{ca}$.

636. Докажите, что если для двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (не равных $\boldsymbol{0}$) известны ab и $\boldsymbol{ab}$, то угол α между этими векторами $(0 \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ однозначно определяется.

637. Определите угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в каждом из следующих случаев:

1) $a=2$; $b=3$; $\boldsymbol{ab}=4{,}851$;
2) $a=1$, $b=1$; $\boldsymbol{ab}=0{,}891$;
3) $a=2$; $b=0{,}25$; $\boldsymbol{ab}=0{,}341$;
4) $a=2$; $b=5$; $\boldsymbol{ab}=-8{,}25$.

Свойства скалярного произведения

638. В каком случае имеет место равенство $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{bc})\boldsymbol{a}$?

639. Какому условию должны удовлетворять векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, чтобы имело место равенство:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|?$$

640. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не параллельны между собой; при каком значении k вектор $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{b}$?

641. Раскройте скобки в следующих выражениях:

а) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;
б) $(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})^2$;
в) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$;
г) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;
д) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2$.

642. Докажите, что вектор $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{a}$.

643. Как должны быть расположены векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, исходящие из одной точки O, если существует такой вектор $\boldsymbol{p}\neq 0$, что $\boldsymbol{ap}=\boldsymbol{bp}=\boldsymbol{cp}$?

644. Докажите, что если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — произвольные векторы, причем $\boldsymbol{ac}\neq 0$, то существует такое число k, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c}$ перпендикулярны друг другу.

645. $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Вычислите скалярное произведение

$$(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}).$$

646. Известно, что векторы $\boldsymbol{s}+2\boldsymbol{t}$ и $5\boldsymbol{s}-4\boldsymbol{t}$ взаимно перпендикулярны. Какой угол образуют единичные векторы $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{t}$?

647. Известно, что векторы $3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ и $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ перпендикулярны между собой и векторы $\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ и $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ также перпендикулярны между собой. Найдите угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

648. Каков геометрический смысл формулы

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2?$$

649. Каков геометрический смысл тождества

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2?$$

Вычисление скалярного произведения в координатах. Нахождение длин отрезков и величин углов

650. Вычислите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданных своими координатами:

$$\boldsymbol{a}=\{5;\ 2\},\ \boldsymbol{b}=\{-3;\ 6\};$$

$$\boldsymbol{a}=\{6;\ -8\},\ \boldsymbol{b}=\{12;\ 9\};$$

$$\boldsymbol{a}=\{3;\ -5\},\ \boldsymbol{b}=\{7;\ 4\}.$$

651. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}=\{3;\ -2\}$, $\boldsymbol{b}=\{-5;1\}$, $\boldsymbol{c}=\{0;\ 4\}$. Найдите: 1) $3\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{ab}+5\boldsymbol{b}^2-6\boldsymbol{bc}-2\boldsymbol{c}^2$; 2) $2(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}-3(\boldsymbol{b}^2)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b}$.

652. Даны два вектора: $\boldsymbol{a}=\{5;\ 2\}$, $\boldsymbol{b}=\{7;\ -3\}$. Найдите вектор $\boldsymbol{c}$, удовлетворяющий одновременно следующим условиям:

$$\boldsymbol{ac}=38,\ \boldsymbol{bc}=30.$$

653. Дан вектор $\boldsymbol{a}=\{-6;\ 8\}$. Найдите координаты единичного вектора, параллельного вектору $\boldsymbol{a}$ и направленного: 1) в ту же сторону, 2) в противоположную сторону.

654. Найдите $\text{пр}_l\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a}=\{7;\ 8\}$, а ось l параллельна вектору $\{-8;\ 6\}$ и имеет то же направление.

655. Из одной точки проведены векторы $\boldsymbol{a}=\{-12;\ 16\}$, $\boldsymbol{b}=\{12;\ 5\}$. Найдите координаты вектора, который, если его отложить от той же точки, делит пополам угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

656. Дан вектор $\boldsymbol{a}=\{-5;\ 2\}$. Найдите вектор $\boldsymbol{b}$, равный по длине вектору $\boldsymbol{a}$ и обладающий тем свойством, что: а) угол от вектора $\boldsymbol{a}$ до вектора $\boldsymbol{b}$ равен $+90°$; б) угол от вектора $\boldsymbol{a}$ до вектора $\boldsymbol{b}$ равен $-90°$.

657. Определите угол α между двумя векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданными своими координатами:

1) $\boldsymbol{a}=\{4;\ 3\}$, $\boldsymbol{b}=\{1;\ 7\}$;
2) $\boldsymbol{a}=\{6;\ -8\}$, $\boldsymbol{b}=\{12;\ 9\}$;
3) $\boldsymbol{a}=\{2;\ 5\}$, $\boldsymbol{b}=\{3;-7\}$;
4) $\boldsymbol{a}=\{2;\ -6\}$, $\boldsymbol{b}=\{-3;\ 9\}$.

658. Определите длину отрезка AB в следующих случаях:

1) $A(2;\ 3)$, $B(3;\ 1)$;
2) $A(-2;\ 5)$, $B(1;\ 9)$;
3) $A(-2;\ 0)$; $B(-7;\ 12)$.

659. Какой угол образуют с осью OX следующие векторы:

$$\boldsymbol{a}=\{2;\ 3\},\ \boldsymbol{b}=\{-2;\ 5\},\ \boldsymbol{c}=\{-5;\ 1\},\ \boldsymbol{d}=\{-1;\ -1\}?$$

660. Определите угол между прямыми AB и CD в каждом из нижеследующих случаев:

1) $A(3;1)$, $B(3,5)$, $C(1,2)$, $D(0;\ 1)$; 2) $A(5;\ -2)$, $B(0;\ -1)$, $C(-1;\ 2)$, $D(0;\ 0)$.

661. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Найдите ее длину, если:

1) $A(2;\ 1)$, $B(3;\ 2)$, $C(1;\ -3)$;
2) $A(4;\ 0)$, $B(0;\ 3)$, $C(-1;\ -1)$.

662. Известны координаты вершин треугольника ABC:

1) $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 3)$, $C(2^1/_2;\ 2^1/_2)$;
2) $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 4)$, $C(8;\ 3)$;
3) $A(2;\ 1)$, $B(-1;\ 3)$, $C(2;\ 5)$.

Является ли этот треугольник прямоугольным, остроугольным или тупоугольным?

663. Найдите $\angle ABC$, если точки A, B, C имеют следующие координаты:

1) $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$, $C(4;\ 4)$;
2) $A(0;\ 3)$, $B(3;\ 2)$, $C(2;\ 5)$;
3) $A(2;\ -1)$; $B(2;\ 2)$, $C(-3;\ 5)$.

Разные задачи

664. Рассматривая ромб с углом α при вершине, одна сторона которого параллельна оси OX, выразите $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$ через тригонометрические функции угла α.

665. Используя скалярное произведение, докажите, что:
а) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;
б) диагонали прямоугольника равны между собой.

666. а) Докажите, что при любом расположении точек A, B, C, D на плоскости имеет место равенство

$$\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BD}+\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0.$$

б) Выведите из равенства предыдущей задачи, что высоты произвольного треугольника ABC пересекаются в одной точке.

667. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Вычислите

$$\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BE}+\overline{AB}\cdot\overline{CF}.$$

668. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Докажите, что если $BC>AC$, то угол CDB — тупой.

669. Докажите, что угол C треугольника ABC будет острым, прямым или тупым, смотря по тому, будет ли медиана CD, проведенная из вершины C, больше, равна или меньше $\frac{1}{2}AB$.

670. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что $AD:DB=m:n$. Зная длины сторон $AC=a$ и $BC=b$ треугольника и величину угла C, вычислите длину отрезка CD.

671. а) Найдите длину медианы $AD = m_a$ треугольника, зная длины заключающих ее сторон $AC = b$, $AB = c$ и величину угла A.

б) Найдите длину биссектрисы $AE = l_a$ треугольника, зная длины заключающих ее сторон $AC = b$, $AB = c$ и величину угла A.

672. Докажите, что если M — середина отрезка AB, то

$$QA^2 + QB^2 = 2QM^2 + \frac{1}{2} AB^2$$

(Q — произвольная точка плоскости).

673. Известны стороны треугольника ABC. Определите:

а) длину медианы $AD = m_a$;

б) длину биссектрисы $AE = l_a$.

674. а) Докажите, что если в треугольнике две медианы равны, то треугольник — равнобедренный.

б) Докажите, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник — равнобедренный.

675. Даны три точки A, B, C, для которых

$$AC^2 + BC^2 = \frac{1}{2} AB^2.$$

Докажите, что $\overline{AC} + \overline{BC} = \mathbf{0}$.

676. Пусть M — центр тяжести треугольника ABC и Q — произвольная точка. Докажите, что

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 = 3QM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2.$$

677. Докажите, что если центр тяжести M треугольника ABC совпадает с точкой пересечения высот, то треугольник — равносторонний.

678. Докажите, что если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки M

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

679. В прямоугольном треугольнике ABC, где $\angle C = 90°$, проведена высота CD. Выразите через векторы $\boldsymbol{a} = \overline{CB}$ и $\boldsymbol{b} = \overline{CA}$ а) вектор $\overline{AD}$; б) вектор $\overline{CD}$.

680. В плоскости прямоугольника $ABCD$ дана точка M. Докажите, что $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$.

681. Докажите, что разность между суммой квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин параллелограмма и суммой квадратов расстояний от этой точки до двух других его вершин не зависит от выбора точки плоскости (а только от параллелограмма). В каком случае эти две суммы будут равны?

682. Пусть M — точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ (т. е. его средних линий), Q — произвольная точка плоскости. Докажите, что

$$QA^2 + QB^2 + QC^2 + QD^2 = 4QM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2.$$

683. Найдите множество всех точек, сумма квадратов расстояний от которых до двух заданных точек плоскости имеет постоянное значение.

684. Найдите множество всех точек, сумма квадратов расстояний от которых до трех заданных точек плоскости имеет постоянное значение. Решите ту же задачу для случая четырех точек.

685. а) Докажите, что если в четырехугольнике суммы квадратов противоположных сторон равны, то диагонали взаимно перпендикулярны.

б) Докажите, что если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то суммы квадратов противоположных сторон равны (теорема, обратная теореме, составляющей содержание задачи а).

686. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, K, L, M, N — середины его последовательных сторон, φ — угол между диагоналями. Докажите, что

$$(AB^2+CD^2)-(AD^2+BC^2)=2(KM^2-LN^2)=2AC\cdot BD\cdot\cos\varphi.$$

В какой связи стоит результат этой задачи с теоремами задач **685** а), б), а также с разобранной в § 76 задачей 3 (стр. 254)?

687. Докажите, что в трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований.

688. Докажите, что сумма квадратов сторон произвольного четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей, увеличенной на учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины диагоналей.

689. Докажите, что если сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна сумме квадратов всех его сторон, то этот четырехугольник — параллелограмм (теорема, обратная теореме, составляющей содержание задачи 1 § 76).

690. В четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AB, точка N — середина стороны CD и O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что

$$MN^2=\frac{1}{4}(AC^2+BD^2+AC\cdot BD\cos\angle AOB).$$

691. Сумма квадратов сторон треугольника равна m. Чему равна сумма квадратов его медиан?

692*. Дан треугольник ABC. Вектор $\overline{CA}$ повернут вокруг точки C на угол $+90°$, а вектор $\overline{CB}$ — на угол $-90°$. Полученные векторы обозначены через $\overline{CA_1}$ и $\overline{CB_1}$. Докажите, что медиана треугольника CA_1B_1, проведенная из вершины C, перпендикулярна прямой AB.

693*. На сторонах параллелограмма, вне его, построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами квадрата.

694*. На сторонах четырехугольника, вне его, построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами четырехугольника с равными и взаимно перпендикулярными диагоналями.

695*. В треугольнике ABC высоты AD и BE продолжены за вершины A и B, и на их продолжениях отложены отрезки $AM=BC$ и $BN=AC$. Докажите, что отрезки CM и CN равны и перпендикулярны.

696*. Докажите, что если Q — произвольная точка плоскости, H — точка пересечения высот и O — центр описанной окружности треугольника ABC, то

$$\overline{QO}=\frac{\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}-\overline{QH}}{2}.$$

Дополнения и методические указания к главе X

1. Определение скалярного произведения. [К § 71.] Скалярное произведение является очень важной операцией над векторами. Она представляет известные трудности для восприятия учащимися. Прежде всего следует обратить внимание на то, что в скалярном произведении сомножители являются векторами, а само произведение — числом. Далее, для определения скалярного произведения очень существенным является выбор единицы измерения длин. Предполагается, что единица измерения длин выбрана и не меняется более; поэтому длина каждого отрезка является числом. Это и позволяет записать определение скалярного произведения в виде формулы

$$\mathbf{ab}=ab\cos\alpha.$$

Если мы изменим единицу измерения длин, например увеличим ее в k раз, то длина каждого отрезка изменится: вместо a длина первого вектора станет равной $\frac{1}{k}a$, а длина второго вектора станет равной $\frac{1}{k}b$. Поэтому при новом выборе единицы измерения длин скалярное произведение тех же векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ изменится и станет равным

$$\frac{1}{k}a\cdot\frac{1}{k}b\cdot\cos\alpha=\frac{1}{k^2}ab\cos\alpha,$$

т. е. оно умножится на $\frac{1}{k^2}$. Вот почему определение скалярного произведения векторов (в противоположность, скажем, определению суммы векторов или произведения вектора на число) возможно лишь в том случае, если фиксирована единица измерения длин (например, за единицу измерения длин принят отрезок 1 *см*).

2. Единственность скалярного произведения. [К § 71—72.] Целесообразность принятого определения мотивируется его замечательными свойствами, доказанными в § 72. Однако тут, естественно, возникает следующий вопрос: нельзя ли как-либо иначе определить «произведение» векторов с тем, чтобы новое «произведение» было не «хуже» произведения $ab\cos\varphi$, а, может быть, даже и еще более удачным? Однако оказывается, что другого «произведения», обладающего столь же хорошими алгебраическими и геометрическими свойствами, не существует.

Для того чтобы точно сформулировать последнее утверждение, отметим следующее важное свойство скалярного произведения: если при некотором движении векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ переходят в векторы $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, то $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'$. [Другими словами, если δ — произвольное движение и $\boldsymbol{a}'=\delta(\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{b}'=\delta(\boldsymbol{b})$ (см. выше, стр. 199), то $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{ab}$.] Это свойство скалярного произведения называется его и н в а р и а н т н о с т ь ю (ср. выше, стр. 165—166). Доказывается это свойство очень просто: так как при движении длины и углы не меняются, то $a=a'$, $b=b'$ и угол α между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен углу α' между векторами $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$; следовательно, $ab\cos\alpha=a'b'\cos\alpha'$, т. е.

$$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'.$$

Следующая теорема доказывает е д и н с т в е н н о с т ь скалярного произведения и тем самым показывает, что выбор числа $ab\cos\alpha$ в качестве «произведения» векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ является вполне закономерным и естественным:

Т е о р е м а. *Пусть $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}$ — некоторое «произведение» векторов* (т. е. правило, относящее каждым двум векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ число $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}$), *которое обладает свойством инвариантности, а также следующими алгебраическими свойствами*:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})*\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}*\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}*\boldsymbol{c};\quad \boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}*\boldsymbol{a};$$
$$(\lambda\,\boldsymbol{a})*\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}).$$

Тогда произведение $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}$ только числовым множителем отличается от скалярного произведения $\boldsymbol{ab}$ (т. е. существует такое число k, что $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=k\cdot\boldsymbol{ab}$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — два взаимно перпендикулярных вектора длины 1, направленные по осям OX и OY. Мы имеем:

$$\boldsymbol{i}*\boldsymbol{j}=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{0})*\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}*\boldsymbol{j}+\boldsymbol{0}*\boldsymbol{j},$$

откуда следует, что $\boldsymbol{0}*\boldsymbol{j}=0$. Далее, при симметрии относительно прямой, по которой направлен вектор $\boldsymbol{j}$ (эта симметрия является движением), пара векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ переходит в пару векторов $-\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Поэтому, в силу свойства инвариантности, $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{j}=(-\boldsymbol{i})*\boldsymbol{j}$. Отсюда получаем:

$$2(\boldsymbol{i}*\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}*\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}*\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}*\boldsymbol{j}+(-\boldsymbol{i})*\boldsymbol{j}=[\boldsymbol{i}+(-\boldsymbol{i})]*\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}*\boldsymbol{j}=0,$$

и потому $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{j}=0$; следовательно, и $\boldsymbol{j}*\boldsymbol{i}=0$. Наконец, так как при повороте на 90° пара векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}$ переходит в пару векторов $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j}$, то $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}*\boldsymbol{j}$. Обозначим это число через k:

$$\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}*\boldsymbol{j}=k,\quad \boldsymbol{i}*\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}*\boldsymbol{i}=0.$$

Пользуясь этими соотношениями, получаем для любых векторов $\boldsymbol{a}=\{x_1, y_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{x_2, y_2\}$ (ср. § 73):

$$\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})*(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})=x_1x_2\cdot\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i}+x_1y_2\cdot\boldsymbol{i}*\boldsymbol{j}+x_2y_1\cdot\boldsymbol{j}*\boldsymbol{i}+y_1y_2\cdot\boldsymbol{j}*\boldsymbol{j}=$$
$$=x_1x_2\cdot k+y_1y_2\cdot k=k\cdot(x_1x_2+y_1y_2)=k\cdot\boldsymbol{ab}.$$

3. Роль скалярного произведения. Мы уже видели в п. 2, что скалярное произведение является единственным произведением векторов, которое обладает свойством инвариантности и хорошими алгебраическими свойствами. Однако скалярное произведение ценно еще и тем, что оно легко вычисляется в координатах (§ 73), а также позволяет вычислять длины и углы (§ 74). Все это делает скалярное произведение ценнейшим геометрическим инструментом.

Изучением скалярного произведения заканчивается школьный курс векторной алгебры. Векторная алгебра является важным математическим аппаратом. Учитель должен добиться, чтобы учащиеся прочно овладели алгебраическими навыками действий над векторами, а также умели применять векторы при решении геометрических задач. В частности, умение вычислять длины и углы с помощью скалярного произведения (§ 74) является одним из самых важных элементов курса геометрии IX класса. На этот материал следует решить большое количество задач. Навыки в нахождении длин и углов с помощью скалярного произведения важнее, чем навыки в решении треугольников, которым по традиции много времени уделяют в школе. Пора пересмотреть эту традицию и уделять решению задач с помощью скалярного произведения значительно больше времени, чем на решение треугольников.

Не следует, однако, заставлять учащихся заучивать довольно громоздкую формулу, позволяющую вычислить угол α между векторами, зная координаты этих векторов. Гораздо ценнее понимание смысла этой формулы, которого легче добиться, если записывать эту формулу в нераскрытом виде: $\cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{ab}}{ab}$.

4. О задачах и упражнениях. Задачи 632—637, связанные с определением скалярного произведения, все несложны, и их следует считать обязательными. Отметим, что в задаче **634** речь идет о предложениях, обратных тем, которые сформулированы в конце § 71.

Со свойствами скалярного произведения связаны задачи **638—649**. Это большей частью вычислительные задачи, которые, как правило, сравнительно несложны. Большинство из них должно быть самостоятельно решено учащимися.

Задачи **650—664** связаны с вычислением скалярных произведений, длин и углов в координатах. Их все (или почти все) можно рекомендовать для обязательного решения.

Из геометрических задач, иллюстрирующих применение скалярного произведения (задачи **665—696**), прежде всего рекомендуется решить наиболее простые задачи **666—667**. Следующая группа задач (**668—677**) связана с применением скалярного произведения к изучению свойств треугольников. Из них мы особенно рекомендуем задачи **668—673**. Из дальнейших задач наиболее просты и интересны задачи **678, 681, 682, 685, 686, 688, 689**. (Решения задач 685—686 можно найти в брошюре авторов, указанной на стр. 297.)

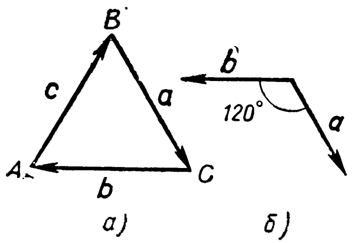


Рис. 413.

В число задач к главе X не включены задачи и упражнения, связанные с тригонометрическим материалом (следствие 2 § 73, § 75), поскольку их легко найти в любом задачнике по тригонометрии.

5. **Примеры решения задач.** 1) Задача 635 (стр. 255). Легко видеть, что угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 120° (см. рис. 413, *а*, *б*). Точно так же

угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ равен $120°$ и угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ равен $120°$. Учитывая еще, что $a=b=c=1$, находим:

$$\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}=ab\cos 120°+bc\cos 120°+ca\cos 120°=$$
$$=3\cos 120°=-\frac{3}{2}.$$

2) Задача **638** (стр. 255). Если хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равен нулевому вектору, то требуемое равенство, очевидно, выполняется.

Пусть теперь ни один из векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не равен нулевому вектору. Вектор $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$, получающийся умножением вектора $\boldsymbol{c}$ на число $\boldsymbol{ab}$, параллелен вектору $\boldsymbol{c}$. Точно так же вектор $(\boldsymbol{bc})\,\boldsymbol{a}$ параллелен вектору $\boldsymbol{a}$. Поэтому если имеет место равенство $(\boldsymbol{ab})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{bc})\cdot\boldsymbol{a}$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ параллельны между собой.

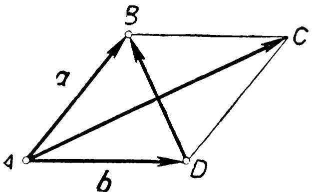


Рис. 414.

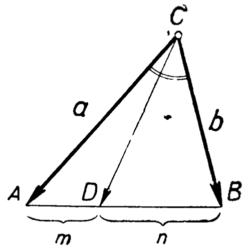


Рис. 415.

Обратно, пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ параллельны между собой. Тогда, по свойству параллельных векторов, $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{c}$ (где k — некоторое число), и потому

$$(\boldsymbol{ab})\,\boldsymbol{c}=[(k\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}=[k(\boldsymbol{cb})]\boldsymbol{c}=$$
$$=(\boldsymbol{cb})\,(k\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{bc})\,\boldsymbol{a}.$$

Итак, требуемое равенство справедливо в следующих двух случаях:
а) *хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равен нулевому вектору*;
б) *векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ параллельны.*

3) Задача **646** (стр. 256). Так как векторы $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{t}$ единичные, то мы имеем: $\boldsymbol{s}^2=\boldsymbol{t}^2=1$; кроме того, $\boldsymbol{st}=1\cdot 1\cdot\cos\alpha$, где α — угол между векторами $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{t}$. Далее, так как векторы $\boldsymbol{s}+2\boldsymbol{t}$ и $5\boldsymbol{s}-4\boldsymbol{t}$ взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:

$$(\boldsymbol{s}+2\boldsymbol{t})(5\boldsymbol{s}-4\boldsymbol{t})=0,$$

откуда получаем:

$$5\boldsymbol{s}^2+6\boldsymbol{st}-8\boldsymbol{t}^2=0,$$

или

$$5+6\cos\alpha-8=0.$$

Теперь находим: $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, и потому $\alpha=60°$.

4) Задача **665а)** (стр. 257). Пусть $ABCD$ — ромб (рис. 414). Обозначим $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overline{AD}=\boldsymbol{b}$. Тогда легко найти векторы, направленные по диагоналям этого ромба:

$$\overline{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\quad \overline{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

Для того чтобы убедиться, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны, достаточно установить, что скалярное произведение $\overline{AC}\cdot\overline{DB}$ равно нулю. Мы имеем:

$$\overline{AC}\cdot\overline{DB}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=a^2-b^2.$$

Но так как $ABCD$ — ромб, то все его стороны равны: $a=b$ и потому $a^2-b^2=0$. Таким образом, $\overline{AC}\cdot\overline{DB}=0$, и потому $AC\perp DB$.

5) Задача **670** (стр. 257). Положим $\overline{CA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{CB}=\boldsymbol{b}$ (рис. 415). Тогда, в силу теоремы 1 § 60, мы имеем:

$$\overline{CD}=\frac{n}{m+n}\overline{CA}+\frac{m}{m+n}\overline{CB}=\frac{n}{m+n}\boldsymbol{a}+\frac{m}{m+n}\boldsymbol{b}.$$

Образуем скалярный квадрат вектора $\overline{CD}$:

$$CD^2=\overline{CD}^2=\left(\frac{n}{m+n}\boldsymbol{a}+\frac{m}{m+n}\boldsymbol{b}\right)^2=$$

$$=\frac{n^2}{(m+n)^2}\boldsymbol{a}^2+\frac{2mn}{(m+n)^2}\boldsymbol{ab}+\frac{m^2}{(m+n)^2}\boldsymbol{b}^2=$$

$$=\frac{n^2a^2}{(m+n)^2}+\frac{2mnab\cos C}{(m+n)^2}+\frac{m^2b^2}{(m+n)^2}.$$

Извлекая корень, получаем отсюда:

$$CD=\frac{1}{m+n}\sqrt{n^2a^2+m^2b^2+2mnab\cos C}.$$

6) Задача **681** (стр. 258). Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, O — его центр и M — произвольная точка плоскости (рис. 416). Нам надо показать, что алгебраическая сумма

$$MA^2+MC^2-MB^2-MD^2$$

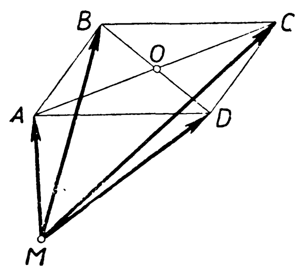


Рис. 416.

не зависит от выбора точки M. Мы имеем:

$$\overline{MA}=\overline{MO}+\overline{OA};\quad \overline{MC}=\overline{MO}+\overline{OC}=\overline{MO}-\overline{OA};$$

$$\overline{MB}=\overline{MO}+\overline{OB};\quad \overline{MD}=\overline{MO}+\overline{OD}=\overline{MO}-\overline{OB}.$$

Отсюда получаем:

$$MA^2+MC^2-MB^2-MD^2=\overline{MA}^2+\overline{MC}^2-\overline{MB}^2-\overline{MD}^2=$$

$$=(\overline{MO}+\overline{OA})^2+(\overline{MO}-\overline{OA})^2-(\overline{MO}+\overline{OB})^2-(\overline{MO}-\overline{OB})^2=$$

$$=\overline{MO}^2+2\overline{MO}\cdot\overline{OA}+\overline{OA}^2+\overline{MO}^2-2\overline{MO}\cdot\overline{OA}+\overline{OA}^2-$$

$$-\overline{MO}^2-2\overline{MO}\cdot\overline{OB}-\overline{OB}^2-\overline{MO}^2+2\overline{MO}\cdot\overline{OB}-\overline{OB}^2=$$

$$=2\cdot\overline{OA}^2-2\cdot\overline{OB}^2=2(OA^2-OB^2).$$

Мы видим, что сумма $MA^2+MC^2-MB^2-MD^2$ равна $2(OA^2-OB^2)$ и потому не зависит от выбора точки M.

Равенство $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$ выполняется в том и только в том случае, если $OA^2-OB^2=0$, т. е. если $OA=OB$. Иначе говоря, это будет в случае, если диагонали параллелограмма $ABCD$ равны между собой, т. е. если $ABCD$ — прямоугольник.

ГЛАВА XI

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

§ 77. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Для любого треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ имеет место формула

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Другими словами, *квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, уменьшенной на удвоенное произведение этих сторон на косинус заключенного между ними угла.* Это соотношение называется **теоремой косинусов**.

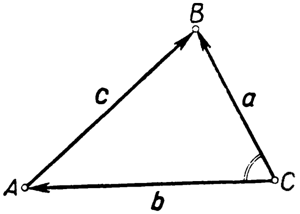


Рис. 417.

Доказательство. Обозначим $\overline{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overline{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overline{AB}=\boldsymbol{c}$ (рис. 417); тогда

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

Отсюда, учитывая, что угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен C, получаем:

$$c^2=\boldsymbol{c}^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2=a^2-2ab\cos C+b^2.$$

Учитывая, что косинус острого угла положителен, косинус тупого угла отрицателен и косинус прямого угла равен нулю, получаем:

Следствие. *Квадрат стороны, лежащей против острого угла треугольника, меньше суммы квадратов двух других сторон; квадрат стороны, лежащей против прямого угла треугольника, равен сумме квадратов двух других сторон* (теорема Пифагора); *квадрат стороны, лежащей против тупого угла треугольника, больше суммы квадратов двух других сторон.*

§ 78. ФОРМУЛА ПРОЕКЦИЙ

Теорема. *Для любого треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ имеет место формула*

$$a=b\cos C+c\cos B.$$

(Эта формула называется **формулой проекций**.)

Доказательство. Положим, как и в § 77,

$$\boldsymbol{a}=\overline{CB},\quad \boldsymbol{b}=\overline{CA},\quad \boldsymbol{c}=\overline{AB}$$

и обозначим через l ось, имеющую направление вектора $\boldsymbol{a}$ (рис. 418). Тогда вектор $\boldsymbol{b}$ образует с осью l угол C, вектор $\boldsymbol{c}$ образует с этой осью угол B, а вектор $\boldsymbol{a}$ образует с осью l угол, равный нулю. Поэтому (см. § 70, стр. 236)

$$\text{пр}_l \boldsymbol{a}=a,\ \text{пр}_l \boldsymbol{b}=b\cos C,\ \text{пр}_l \boldsymbol{c}=c\cos B.$$

Так как, кроме того, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$, то из свойства 1 § 64 вытекает требуемое соотношение.

§ 79. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ЕГО ЭЛЕМЕНТАМ

Теорема 1. *Для любого треугольника ABC справедливо соотношение*

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,$$

где *S — площадь треугольника, a и b — длины сторон BC и AC, а C — угол между этими сторонами.*

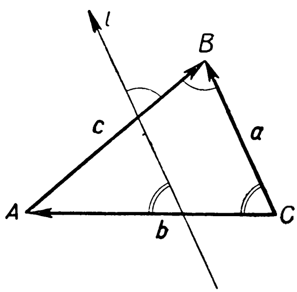


Рис. 418.

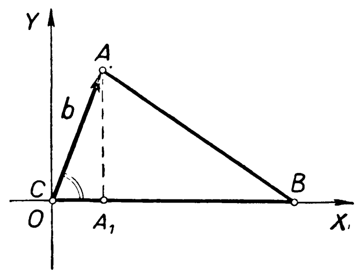


Рис. 419.

Доказательство. Расположим треугольник ABC так, чтобы вершина C совпала с началом системы координат XOY, вершина B лежала на положительной части оси OX, а вершина A лежала выше оси OX (рис. 419). Обозначим через A_1 проекцию точки A на ось OX. Тогда координата y вектора $\overline{CA}$ равна длине отрезка AA_1, т. е. равна высоте h треугольника ABC, опущенной из вершины A. Но, согласно § 69, координата y вектора $\overline{CA}$ равна $b\sin C$ (так как этот вектор имеет длину b и образует с осью OX угол C). Таким образом,

$$h=b\sin C$$

и потому

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

Теорема 2. *Пусть a, b, c — длины сторон треугольника и*

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

— его полупериметр. Тогда площадь S этого треугольника может быть вычислена по формуле

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ .$$

(Эта формула известна под названием формулы Герона[1].)

Доказательство. В силу теоремы 1 имеем:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2(1-\cos^2 C)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-(ab\cos C)^2}.$$

Но из теоремы косинусов имеем:

$$ab\cos C=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2),$$

и потому

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}.$$

Подкоренное выражение преобразуется следующим образом:

$$a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2=\left(ab+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\left(ab-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{2}\cdot\frac{c^2-(a^2+b^2-2ab)}{2}=$$

$$=\frac{1}{4}[(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2]=$$

$$=\frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).$$

Последнее выражение упрощается так:

$$\frac{1}{4}(a+b+c)[(a+b+c)-2c][(a+b+c)-2b][(a+b+c)-2a]=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2p(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)=$$

$$=4p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Окончательно мы получаем:

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{4p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

---

[1] Герон Александрийский — древнегреческий математик, живший и работавший в г. Александрии (Египет). Время жизни Герона в точности неизвестно (разные историки-математики относят это время к разным периодам — от II в. до нашей эры до II в. нашей эры).

§ 80. ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Для любого треугольника ABC со сторонами $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ имеют место формулы:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Другими словами, *стороны любого треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.* (Эти соотношения носят название теоремы синусов.)

Доказательство. Согласно теореме 1 § 79, мы имеем:

$$\sin C=\frac{2S}{ab},$$

и потому

$$\frac{c}{\sin C}=c:\frac{2S}{ab}=\frac{abc}{2S}.$$

Аналогично, заменяя сторону c стороной a или b, мы получим:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{abc}{2S},\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{abc}{2S}.$$

Отсюда и вытекает справедливость теоремы синусов.

§ 81. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Решением треугольника называется нахождение всех его элементов (сторон и углов), если известны три из них. Рассмотрим основные случаи решения треугольников.

I. *Известны две стороны треугольника и заключенный между ними угол.* Пусть, например, даны стороны $BC=a$ и $AC=b$ и угол C. По теореме косинусов мы можем определить сторону c:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

После вычисления стороны c углы A и B теперь могут быть найдены с помощью той же теоремы косинусов. В самом деле, написав

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

мы найдем

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

откуда с помощью таблиц можно определить угол A. Аналогично определяется и угол B. (Можно также определить угол B из формулы $B=180°-A-C$.)

II. *Известны сторона треугольника и два прилежащих к ней угла.* Пусть, например, даны сторона $AB=c$ и углы A и B. Прежде всего из соотношения $\angle A+\angle B+\angle C=180°$ мы можем определить угол C. Далее, для нахождения сторон a и b можно воспользоваться теоремой синусов. В самом деле, из равенств

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

находим

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C},\quad b=\frac{c\sin B}{\sin C}.$$

III. *Известны три стороны треугольника.* В этом случае для нахождения углов треугольника пользуются теоремой косинусов, из которой получаем:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

(ср. со случаем I).

Замечание. Иногда встречаются и иные случаи решения треугольников. Например, может случиться, что заданными тремя элементами являются три медианы треугольника или, скажем, два угла и площадь и т. п. Разумеется, три заданных элемента треугольника должны однозначно определить этот треугольник, так как иначе «решить» треугольник по этим трем элементам невозможно. Например, задача «решить треугольник по заданным трем его углам» не может быть поставлена, так как задание трех углов не определяет треугольника (любой треугольник, подобный искомому, имеет те же углы).

Задачи и упражнения к главе XI

Теорема косинусов

697. Сформулируйте и докажите предложения, обратные тем, которые сформулированы в конце § 77.

698. Найдите диагонали ромба со стороной 4 и углом 65°11′.

699. а) Диагонали параллелограмма имеют длины 5 и 8; угол между диагоналями равен 77°18′. Определите стороны параллелограмма.

б) Смежные стороны параллелограмма равны 2 и $3\frac{1}{2}$; угол между ними равен 18°24′. Определите диагонали параллелограмма.

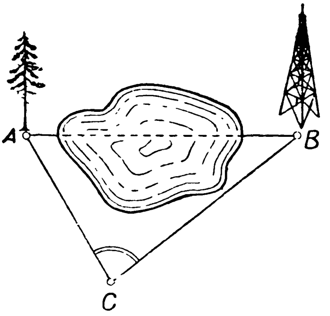


Рис. 420.

700. Две силы $F_1=70$ *кг* и $F_2=60$ *кг* приложены к одной точке под углом 40° друг к другу. Найти величину равнодействующей и углы, которые она составляет с силами F_1 и F_2.

701. Для измерения расстояния между двумя пунктами A и B выбрали третий пункт C (рис. 420) и измерили расстояния AC, BC и угол ACB. По результатам измерения найдите AB, если:

1) $AC=73{,}2$ *м*, $BC=68{,}1$ *м*, $\angle ACB=72°10''$;

2) $AC=275$ *м*, $BC=311$ *м*, $\angle ACB=41°54'$.

702. Выведите формулу проекций (см. § 78) из теоремы косинусов.

703. В треугольнике ABC проведены высоты AD и BE. Докажите, что

$$DE = AB \cdot |\cos C|.$$

704. Стороны AB, BC, CD и DA четырехугольника равны a, b, c и d; $\angle ABC = \alpha$, $\angle BCD = \beta$. Докажите, что

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha - 2bc\cos\beta + 2ac\cos(\alpha+\beta).$$

(Эту формулу иногда называют **теоремой косинусов** для четырехугольника.)

705. Найдите сторону AB четырехугольника $ABCD$, если $AB=2$, $BC=3$, $CD=4$, $\angle ADC = \angle BCD = 60°$.

Площадь треугольника

706. В параллелограмме две смежные стороны равны a и b, а угол между ними равен α. Докажите, что площадь этого параллелограмма равна $ab\sin\alpha$.

707. Вычислите площадь ромба со стороной 7,2 *см* и углом 69°48′.

708. Докажите, что площадь вписанного в круг четырехугольника равна

$$\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\alpha,$$

где a, b, c, d — длины последовательных сторон четырехугольника, а α — угол между сторонами a и b.

709. Вычислите площадь земельного участка, имеющего форму треугольника, если при съемке плана этого участка с масштабом 1:200 000 две его стороны изображены отрезками 3,7 *см* и 4,2 *см* и угол между ними равен 54°.

710. При съемке плана участка $ABCD$ полярным способом (за плюс взята точка O — одна из внутренних точек участка) измерением были получены следующие данные:

$$OA=28\ м,\ OB=31\ м,\ OC=24\ м,\ OD=37\ м;$$

$$\angle AOB=36°,\ \angle BOC=78°,\ \angle COD=110°,$$

$$\angle DOA=136°.$$

Вычертите план участка $ABCD$ и вычислите его площадь; угол NOA (азимут направления OA) равен 280°.

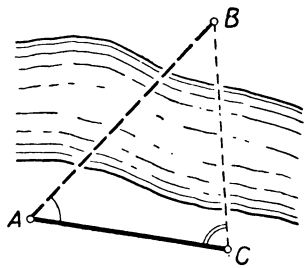


Рис. 421.

711. Вычислите площадь треугольника по следующим данным:

1) $a=60$, $b=85$, $C=47°12'$;
2) $a=32$, $b=11$, $c=22$;
3) $b=13$, $c=25$, $A=27°40'$;
4) $a=15$, $b=26$, $c=18$;
5) $a=20$, $c=30$, $B=108°29'$.

712*. Докажите, что площадь четырехугольника, вписанного в окружность, равна $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — длины сторон четырехугольника и p — его полупериметр.

Теорема синусов

713. Для измерения расстояния между двумя пунктами A и B, расположенными на разных берегах реки, выбрали третий пункт C (рис. 421) и измерили расстояние AC и углы A и C треугольника ABC. По результатам измерения найдите AB, если:

1) $AC=200$ *м*, $A=62°$, $C=75°$; 2) $AC=172$ *м*, $A=67°$, $C=82°$.

714. На горе, склон которой понижается к горизонту под углом β, стоит дерево. Тень дерева, падающая вниз по склону горы при высоте солнца α ($\alpha > \beta$), имеет длину l. Определите высоту дерева (рис. 422).

715. Для измерения расстояния до звезды S наблюдали ее из двух точек A и B земной орбиты. Измерения показали, что $\angle SAB = \alpha$, $\angle SBA = \beta$; базис $AB = l$. По какой формуле можно определить расстояние AS до звезды S?

716. Используя результат предыдущей задачи и пользуясь приближенной формулой

$$\sin(180°\cdot k) \approx 3{,}14\ k,$$

справедливой для очень малых значений k, определите расстояние до следующих звезд:

1) $\alpha = \beta$, $180° - \alpha - \beta = 1'',5$ (α Центавра);
2) $\alpha = \beta$, $180° - \alpha - \beta = 0'',75$ (α Большого Пса);
3) $\alpha = \beta$, $180° - \alpha - \beta = 0'',6$ (61 Лебедя).

Во всех случаях l — диаметр земной орбиты ($\approx 3\cdot 10^8$ *км*).

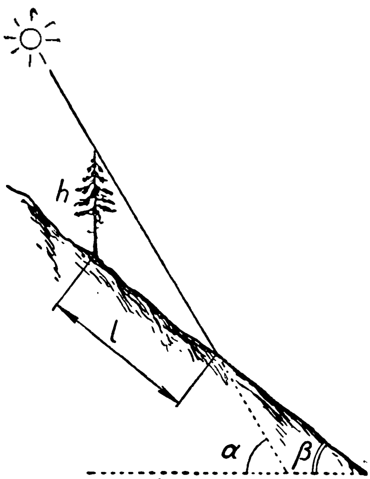


Рис. 422.

717. Для измерения высоты башни AB, стоящей на вершине холма, измерили длину выбранного горизонтального базиса $CD = l$ и углы $\angle ACD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $\angle ADC = \gamma$, $\angle BDC = \delta$. Найдите высоту башни.

718. Спутник, движущийся по круговой орбите на высоте h над землей, прошел (в зените) над точкой A земной поверхности, а спустя t секунд был виден из точки A под углом α к горизонту. Определите (зная радиус Земли R) период обращения спутника. Для числовых подсчетов возьмите следующие данные:

$$h = 240\ км,\quad R = 6300\ км,\quad \alpha = 47°11',$$

$$t = 29\ сек.$$

719. Сила, равная 30 *кГ*, разложена на две составляющие, которые образуют с ее направлением углы 67°15′ и 51°36′. Найдите величины этих составляющих.

720. а) Докажите, что для любого треугольника ABC справедлива формула $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$, где R — радиус описанного круга. Выведите отсюда новое доказательство теоремы синусов.

б) Докажите формулу $abc = 4RS$, где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь и R — радиус описанного круга.

721. Докажите, что если в треугольнике один угол равен 30°, то сторона, лежащая против этого угла, равна радиусу описанного круга.

722. Вычислите радиус круга, описанного около треугольника, если дано: 1) $a = 17$, $A = 69°11'$; 2) $b = 29$, $B = 48°29'$.

723. Зная углы треугольника, определите отношение площади треугольника к площади описанного круга.

Решение треугольников

724. Решите прямоугольный треугольник, если даны катеты:

1) $a = 118$, $b = 209$; 2) $a = 3{,}11$, $b = 4{,}89$;
3) $a = 0{,}754$, $b = 1{,}011$.

725. Решите прямоугольный треугольник, если даны гипотенуза и острый угол:

1) $c=4,18$, $A=71°18'$; 2) $c=0,119$, $B=29°14'$;
3) $c=129$, $A=53°38'$.

726. Решите прямоугольный треугольник, если даны катет и острый угол:
1) $a=14,3$, $A=19°36'$; 2) $b=39,4$, $B=74°12'$;
3) $b=0,37$, $A=54°28'$.

727. Решите прямоугольный треугольник, если даны гипотенуза и катет:
1) $c=3,75$, $a=2,11$; 2) $c=118$, $b=69$;
3) $c=0,57$; $a=0,48$.

728. Решите треугольники по следующим элементам:
1) $a=b=31,2$, $A=58°12'$;
2) $a=b=28,1$, $c=13,7$;
3) $a=c=0,576$, $B=104°16'$;
4) $a=118$, $b=92$, $C=58°41'$;
5) $a=54,2$, $B=41°14'$, $C=73°51'$;
6) $a=18$, $b=24$, $c=13$;
7) $a=153$, $b=117$, $c=134$;
8) $a=17,6$, $c=13,1$, $B=118°34'$;
9) $a=113$, $A=73°15'$, $B=29°13'$;
10) $b=18,3$, $c=11,8$, $A=71°44'$;
11) $a=5,41$, $b=7,14$, $c=6,28$;
12) $b=31,2$, $A=124°7'$, $B=18°39'$.

729. Даны две стороны треугольника и угол против одной из них. Укажите, в каких случаях остальные элементы треугольника однозначно определяются, а в каких нет; объясните, почему. В тех случаях, когда остальные элементы треугольника однозначно определяются тремя заданными, отыщите их:
1) $a=31$, $b=18$, $A=31°36'$;
2) $a=27,1$, $b=34,5$, $A=36°15'$;
3) $a=0,31$, $c=0,26$, $A=32°45'$;
4) $a=3,75$, $c=2,24$, $C=58°29'$;
5) $b=31$, $c=27$, $B=129°12'$;
6) $b=135$, $c=189$, $B=35°49'$.

730. Определите стороны и углы треугольника по следующим данным (R — радиус описанного круга, r — радиус вписанного круга, S — площадь треугольника, h_a, h_b, h_c — высоты, l_a — биссектриса угла A):
1) $R=5,63$, $A=57°11'$, $B=108°19'$;
2) $S=372$, $A=29°13'$, $C=54°9'$;
3) $A=72°$, $h_a=37,1$, $a=b$;
4) $S=152$, $A=62°19'$, $a=b$;
5) $a=3,72$, $h_a=1,72$, $b=c$;
6) $h_a=2,71$, $B=128°15'$, $C=15°18'$;
7) $l_a=1,207$, $B=123°15'$, $C=37°11'$;
8) $r=13$, $B=108°13'$, $C=52°18'$;
9) $S=15,8$, $a=3,25$, $B=86°18'$;
10) $h_a=8$, $h_b=12$, $h_c=16$.

731. Вычислите угол между диагоналями выпуклого четырехугольника $ABCD$, если известны его стороны и диагональ:

$$AB=31,\quad BC=29,\quad CD=33,\quad DA=35,\quad AC=27.$$

732. Дана выпуклая ломаная $ABCD$, в которой

$$AB=9,\quad BC=11,\quad CD=32,$$
$$\angle ABC=109°,\quad \angle BCD=154°.$$

Найдите длину отрезка AD.

Дополнения и методические указания к главе XI

1. О решении треугольников. [К § 81.] В § 81 рассмотрены основные случаи решения треугольников. Для решения используются: теорема косинусов

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

теорема синусов

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

и соотношение

$$A+B+C=180°.$$

Иногда удобно также пользоваться формулой проекций:

$$a=b\cos C+c\cos B$$

(см. § 78). Может возникнуть вопрос: какой формулой пользоваться в том или ином случае; как запомнить это? Запоминать учащимся ничего не рекомендуется; нужно только, чтобы они знали указанные выше формулы. При этом каждый раз *следует применять ту формулу, в которой нам известны все элементы, кроме одного*; этот неизвестный элемент и находим из взятой формулы. Из этого общего правила есть только одно исключение: при разыскании угла следует по возможности избегать пользования теоремой синусов. Объясняется это тем, что $\sin\alpha=\sin(180°-\alpha)$, и потому, зная синус, мы не можем однозначно определить этот угол. Если все же приходится пользоваться теоремой синусов для нахождения углов, то следует найти дополнительные условия, позволяющие судить о том, какой из двух углов, α или $180°-\alpha$, следует взять (ср. ниже решение задачи **729**).

Иногда для нахождения какого-либо элемента можно воспользоваться не одной, а двумя-тремя из приведенных выше формул; в этом случае нужно взять ту, которая легче позволяет найти недостающий элемент.

Рассмотрим случай I, указанный в § 81: даны a, b и C. В этом случае, как легко видеть, только теорема косинусов позволяет что-либо вычислить (в остальных соотношениях всегда остается не менее двух неизвестных элементов). Поэтому первым шагом обязательно является нахождение стороны c по формуле косинусов. Для нахождения одного из углов A и B можно теперь воспользоваться либо теоремой косинусов, либо теоремой синусов, либо формулой проекций. Теорема синусов, как мы говорили уже выше, нежелательна (хотя она и наиболее проста); поэтому следует воспользоваться либо теоремой косинусов, либо формулой проекций. (При этом пользование формулой проекций требует несколько меньшего количества вычислений; однако в пособие для учащихся формула проекций не включена, так как без нее всегда можно обойтись.) Наконец, если уже найдены два угла, то третий проще всего найти по формуле $A+B+C=180°$.

Есть, однако, один случай, когда пользование теоремой синусов позволяет однозначно определить угол. Именно, *если известны* a, b *и* A, *причем* $a\geqslant b$, *то, определяя* $\sin B$ *по теореме синусов*

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a},$$

нужно в качестве B *обязательно взять острый угол.* Действительно, так как $a\geqslant b$, то $A\geqslant B$, и если бы было $B\geqslant 90°$, то мы имели бы $A<90°$, что невозможно; следовательно, в рассматриваемом случае угол B обязательно острый (ср. ниже решение задачи **729**).

Обратимся теперь к случаю II: даны a, B и C. Здесь можно прежде всего найти угол A по формуле $A+B+C=180°$. Затем можно применить только теорему синусов для нахождения второй стороны (b или c). Третью сторону можно затем определить по любой из формул (теорема косинусов, теорема синусов, формула проекций), но проще всего опять применить теорему синусов.

Наконец, в случае III (даны a, b, c) первым шагом обязательно является нахождение одного из углов по теореме косинусов (ибо в любом другом соотношении имеется не менее двух неизвестных углов). Если же уже найден один угол (т. е. известны три стороны и угол), то дальнейшее решение проходит так же, как и в первом случае; например, можно найти второй угол по теореме косинусов, а затем найти третий угол из соотношения $A+B+C=180°$.

2. Численные примеры на решение треугольников. [К § 81.] Пример 1. *Известно, что* $a=50{,}8$; $b=32{,}3$; $C=23°30'$. *Требуется найти* A, B, c.

Решение. По таблицам (или с помощью логарифмической линейки) находим

$$\cos C=\cos 23°30' \approx 0{,}917.$$

Далее, по теореме косинусов получаем (при вычислениях рекомендуется пользоваться логарифмической линейкой):

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(50{,}8)^2+(32{,}3)^2-2\cdot 50{,}8\cdot 32{,}3\cdot 0{,}917=$$
$$=2581+1043-3010=614,$$

откуда (с помощью линейки или по таблицам) находим

$$c\approx 24{,}8.$$

Второй раз теорему косинусов применяем для определения угла A:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\approx\frac{(32{,}3)^2+(24{,}8)^2-(50{,}8)^2}{2\cdot 32{,}3\cdot 24{,}8}\approx$$
$$\approx\frac{1043+614-2580}{2\cdot 32{,}3\cdot 24{,}8}\approx-0{,}577.$$

Отсюда имеем

$$A=\arccos(-0{,}577)\approx 180°-54°45'=125°15'.$$

Наконец,

$$B=180°-A-C\approx 180°-125°15'-23°30'=31°15'.$$

Пример 2. *Дано* $c=48{,}8$, $A=106°$, $B=25°20'$. *Требуется найти* a, b *и* C.

Решение. Прежде всего находим

$$C=180°-A-B=180°-106°-25°20'=48°40'.$$

Далее используем теорему синусов. Для этого выпишем значения синусов углов треугольника:

$$\sin A=\sin 106°=\sin(180°-106°)=\sin 74°\approx 0{,}961;$$
$$\sin B=\sin 25°20'\approx 0{,}428;\quad \sin C=\sin 48°40'\approx 0{,}751.$$

Используя эти значения, получаем:

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}\approx\frac{48{,}8\cdot 0{,}961}{0{,}751}\approx 62{,}5;\quad b=\frac{c\sin B}{\sin C}\approx\frac{48{,}8\cdot 0{,}428}{0{,}751}\approx 27{,}8.$$

Пример 3. *Дано* $a=28$; $b=35$; $c=42$. *Требуется найти* A, B, C.

Решение. Из теоремы косинусов находим:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(35)^2+(42)^2-(28)^2}{2\cdot 35\cdot 42}=\frac{1225+1764-784}{2\cdot 35\cdot 42}\approx 0{,}75,$$

откуда получаем:

$$A=\arccos(0{,}75)\approx 41°24'.$$

Аналогично,

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{(28)^2+(42)^2-(35)^2}{2\cdot 28\cdot 42} = \frac{784+1764-1225}{2\cdot 28\cdot 42} \approx 0{,}562$$

и, следовательно,

$$B = \arccos(0{,}562) = 55°46'.$$

Наконец,

$$C = 180° - A - B = 180° - 41°24' - 55°46' = 82°50'.$$

3. О задачах и упражнениях. Решение треугольников никак нельзя считать одним из важных разделов школьного курса геометрии. Несомненно, следует добиться, чтобы учащиеся знали теоремы косинусов и синусов и формулы для вычисления площадей. Но решение б о л ь ш о г о числа задач на решение треугольников (для приобретения вычислительных навыков) излишне.

В книге имеются только три задачи (**728—730**), в которых содержится 28 примеров решения треугольников. Достаточно решить половину из них. В то же время решение задач **697—723** и **731—732**, содержащих элементы логического мышления, полезнее шаблонного решения треугольников.

4. Примеры решения задач. Так как решение треугольников — материал, издавна знакомый учителю, то мы здесь ограничимся тем, что укажем первые пункты решения задачи **729** (стр. 271).

Р е ш е н и е з а д а ч и **729**. 1) Так как угол A расположен против большей из двух известных сторон a, b, то все элементы треугольника однозначно определяются; угол B должен быть острым (см. выше, стр. 272). По теореме синусов находим:

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{18\cdot\sin 31°36'}{31} \approx 0{,}304,$$

откуда $B \approx 17°43'$. Теперь по формуле $A+B+C=180°$ легко получаем: $C \approx 130°41'$. Наконец, еще раз применяя теорему синусов, находим последнюю сторону:

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} \approx \frac{31\cdot\sin 130°41'}{\sin 31°36'} \approx 44{,}9.$$

2) Здесь угол A противолежит м е н ь ш е й из двух сторон a, b; поэтому теорема синусов дает не одно, а два значения угла b:

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{34{,}5\cdot\sin 36°15'}{27{,}1} \approx 0{,}753.$$

Отсюда получаем $B_1 \approx 48°50'$ или $B_2 \approx 131°10'$. В первом случае находим, далее, $C_1 = 180° - A - B \approx 94°55'$; во втором случае $C_2 \approx 12°35'$. Наконец, по теореме синусов находим третью сторону. В первом случае:

$$c_1 = \frac{a\sin C_1}{\sin A} \approx \frac{27{,}1\cdot\sin 94°55'}{\sin 36°15'} \approx 45{,}7;$$

во втором случае —

$$c_2 = \frac{a\sin C_2}{\sin A} \approx \frac{27{,}1\cdot\sin 12°35'}{\sin 36°15'} \approx 9{,}98.$$

Итак, по заданным элементам треугольник однозначно не определяется; условиям задачи удовлетворяют д в а треугольника:

а) $B=48°50'$, $C=94°55'$, $c=45{,}7$; б) $B=131°10'$, $C=12°35'$, $c=9{,}98$. Вот почему «решение» треугольника по указанным данным нельзя считать корректно поставленной задачей. (Впрочем, и в тех случаях, когда заданными элементами треугольник определяется н е о д н о з н а ч н о, можно также ставить задачу о «решении» треугольника, понимая под этим нахождение в с е х треугольников с этими элементами.)

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Часть I

5. Примеры: АННА, ШАЛАШ.

6. Может (приведите примеры).

8. а) Воспользуйтесь тем, что перпендикуляр, восставленный к отрезку в его середине, является его осью симметрии.

б) Воспользуйтесь тем, что биссектриса угла является его осью симметрии.

10. Воспользуйтесь тем, что равносторонний треугольник ABC имеет две оси симметрии AD и BE.

11. Воспользуйтесь перегибанием листа бумаги.

17. Если R и S равны.

23. Правильный n-угольник имеет n осей симметрии.

25. а) две; б), в) бесконечно много.

26. Две.

27. Три.

29. а) Ромбоид (см. задачу 78 на стр. 34), в частности ромб или квадрат; равнобедренная трапеция, в частности прямоугольник или квадрат.

б) Ромб (в частности, квадрат); прямоугольник (в частности, квадрат).

30. Четыре.

33. а) Одну, если A не есть центр S; бесконечно много, если A — центр S;

б) одну, если a не проходит через центр S; две, если a проходит через центр S;

в) одну, если S и R не равны и не концентричны; две, если S и R равны; бесконечно много, если S и R концентричны (или совпадают).

40. Ромбом.

47. Отрезки CM и AN симметричны относительно прямой BD.

48. Точки P и Q симметричны относительно биссектрисы угла B.

49. Точки P и Q симметричны относительно оси симметрии трапеции.

54. Нет; этим свойством обладает каждая трапеция (см. ниже задачу 348, стр. 149).

63. См. задачу 22.

65. Эти углы симметричны относительно линии центров окружностей.

68. Воспользуйтесь тем, что линия центров окружностей является осью симметрии чертежа.

70—71. Замените точку B точкой B', симметричной B относительно данной прямой.

73. Воспользуйтесь тем, что отношение диагоналей ромба с острым углом $60°$ равно $\sqrt{3}:1$.

75. Воспользуйтесь тем, что точка A_1, симметричная точке A относительно прямой BQ, принадлежит прямой MN.

76. Пусть точка B' симметрична B относительно прямой MN. Далее можно воспользоваться тем, что точка A_1, симметричная A относительно прямой

$B'Q$, принадлежит прямой MN (первое решение), или же тем, что прямая AQ касается окружности S с центром B' и радиусом, равным расстоянию от B' до MN (второе решение).

77. Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник и D' — точка, симметричная точке D относительно прямой AC; тогда треугольник BCD' можно построить.

78. Докажите, что если $AB \neq AD$, то задача 77 имеет единственное решение. Нет, нельзя.

79—80. Пусть ABC — искомый треугольник, l — параллельная BC прямая, проходящая через вершину A, C' — точка, симметричная C относительно прямой l. Тогда $\angle BAC' = 180° - \alpha$.

81. Если высота AP треугольника ABC пересекает описанную окружность треугольника в точке D, то прямая BD образует со стороной BC такой же угол, как и высота BQ, т. е. прямые BD и BQ симметричны относительно прямой BC. Поэтому точка, симметричная точке D относительно прямой BC, принадлежит как высоте AP, так и высоте BQ.

82. Воспользуйтесь результатом задачи 81.

83. Докажите, что окружности S и S_1 симметричны относительно стороны AB треугольника.

84—85. Воспользуйтесь тем, что точки A' и A'', симметричные вершине A треугольника относительно биссектрис m и n углов B и C, принадлежат прямой BC.

86. Воспользуйтесь тем, что OP есть перпендикуляр к стороне AB треугольника. Далее, если вершины A и C треугольника симметричны относительно прямой m, то C принадлежит прямой $A'B'$, симметричной AB относительно m. Точка C принадлежит также прямой $A''B''$, симметричной AB относительно n.

87. Пусть AB — основание треугольника, $l \parallel AB$ — прямая, расстояние которой от AB равно высоте треугольника. Достаточно найти такую точку C прямой l, что сумма расстояний AC и BC — наименьшая.

88. Замените точку M точкой M', симметричной M относительно AB, а точку N — точкой N', симметричной N относительно BC.

89. Пусть точка M' симметрична M относительно AB, точка M'' симметрична M' относительно BC, точка M''' симметрична M'' относительно CD и точка M'''' симметрична M''' относительно DA. Сначала замените точку M точкой M'; затем точку M' точкой M'' и т. д.

91. Замените отрезки PQ и PR отрезками $P'Q$ и $P''R$, симметричными первоначальным отрезкам относительно сторон угла.

92. Закрепив вершину P вписанного в треугольник ABC треугольника PQR на стороне AB, мы придем к задаче 91; при этом наименьший возможный периметр треугольника PQR будет равен расстоянию между точками P' и P'', симметричными P относительно сторон AC и BC. Далее остается выбрать точку P так, чтобы расстояние $P'P''$ было наименьшим; для этого надо, чтобы расстояние CP ($CP' = CP''$) было наименьшим, т. е. чтобы было $CP \perp AB$.

Ответ: искомым треугольником является тот, вершины которого совпадают с основаниями высот треугольника ABC.

95. Пусть M — произвольная точка фигуры; M' и M'' — точки, симметричные точке M относительно прямых l и l_1; M_1 — точка, симметричная точке M' относительно прямой l_1. Тогда точка M_1 симметрична точке M'' относительно прямой l_2.

96—97. Воспользуйтесь результатом задачи 95.

98. Пусть три оси симметрии образуют треугольник PQR и M — точка внутри этого треугольника. Рассмотрите вершину A многоугольника, наиболее удаленную от M, и докажите, что многоугольник должен иметь вершину A, еще более удаленную от M, чем A. [Другое решение: можно также воспользоваться результатом задачи 95.]

Для неограниченных фигур наше утверждение может быть неверным (пример: полоса, ограниченная двумя параллельными прямыми).

102. Примеры: 1001, 986.

104. Не обязана.

106. Пусть M — произвольная точка фигуры F; M_1 — точка, симметричная M относительно прямой l; M_2 — точка, симметричная M относительно точки O. При этом

а) точка M', симметричная M_2 относительно прямой l, симметрична M_1 относительно точки O_1;

б) точка M'', симметричная M_1 относительно точки O, симметрична M_2 относительно прямой l_1.

107. Нет; если O и O_1 — два разных центра симметрии фигуры F, то и точка O_2, симметричная O относительно O_1, также является центром симметрии F.

108. а) Если фигура F имеет два разных центра симметрии O и O_1, то она имеет бесконечно много центров симметрии, неограниченно удаляющихся вдоль прямой OO_1 (см. задачу **107**); поэтому F не может быть ограниченной.

Неограниченная фигура F может иметь много центров симметрии (пример: полоса, ограниченная двумя параллельными прямыми).

б) Ограниченная фигура — не может (ср. задачи **106** и **108** а); неограниченная фигура — может.

110. б) Не всегда: для этого необходимо, чтобы направления отрезков AB и CD (от A к B, соответственно от C к D) были противоположны.

115. Один; бесконечно много.

117. а) Если A совпадает с центром S;

б) если a проходит через центр S;

в) если окружности R и S концентричны.

118. Воспользуйтесь тем, что стороны треугольника DEF параллельны соответствующим им сторонам треугольника ABC (см. теорему 2 § 18).

122. Этот треугольник симметричен исходному относительно точки пересечения медиан исходного треугольника.

123. а) $\frac{4}{3}p$; $\frac{2}{3}S$; б) $\frac{8}{3}p$; $\frac{4}{3}S$.

124. Внутри треугольника.

125. Форму параллелограмма или форму шестиугольника, противоположные стороны которого равны и параллельны (в крайнем случае это пересечение может также явиться отрезком или точкой).

126. Правильный n-угольник имеет центр симметрии лишь при четном n.

Больше одного центра симметрии имеет лишь полоса, заключенная между двумя параллельными прямыми.

127. Окружность с начерченными в ней двумя параллельными хордами AB и CD имеет центр симметрии лишь в том случае, если $AB=CD$.

135. Стороны центрально-симметричного многоугольника попарно симметричны относительно центра симметрии O — поэтому число сторон должно быть четным и стороны должны быть попарно равны и параллельны. Если последние условия выполнены, то середины всех диагоналей многоугольника, соединяющих противоположные вершины, совпадают; точка пересечения этих диагоналей и является центром симметрии многоугольника.

136. Невыпуклые центрально-симметричные шестиугольники существуют.

143. Докажите, что центр параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ принадлежит обеим средним линиям параллелограмма $ABCD$.

144. Точки Q_1 и Q_2 симметричны относительно центра O параллелограмма.

145. Точки M и P, N и Q симметричны относительно точки O.

146. Точки P и Q симметричны относительно центра параллелограмма.

147. Точки E и F симметричны относительно точки O.

148. Точка O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ является центром симметрии четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

153. Середина отрезка O_1O_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2, является центром симметрии фигуры, образованной окружностями S_1 и S_2.

158. Воспользуйтесь теоремой 2 § 18.

159. Точки M и N или симметричны относительно точки O, или симметричны относительно проходящей через O прямой, параллельной AB. Прямая MN проходит через O и, одновременно, перпендикулярна AB лишь в том случае, если треугольники ABM и CDN — равнобедренные.

160. Воспользуйтесь тем, что треугольники ADF и EDF симметричны относительно середины Q отрезка DF.

162. Если окружности S_1 и S_2 касаются в точке A, то прямая l, проходящая через точку A, пересекает их в точках M_1 и M_2, симметричных относительно A; касательные m_1 и m_2 к этим окружностям в точках M_1 и M_2 также симметричны относительно A и потому параллельны. Это рассуждение показывает, что касательные m_1 и m_1' к S_1 в точках M_1 и M_1' параллельны или совпадают, т. е. точки M_1 и M_1' — диаметрально противоположные или совпадают.

163. а) Сравните $\angle BAD$ и $\angle BC'D$, где точка C' симметрична C относительно точки O.

б) Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом (ср. задачу **162**).

166. Пусть точка A' симметрична A относительно точки Q. Тогда угол $A'LB$ можно определить; далее см. § 24.

167. В зависимости от расположения точки Q пересечение треугольников ABC и $A'B'C'$ может быть параллелограммом или центрально-симметричным шестиугольником (см. задачу **125**). Первый случай будет иметь место, если хотя бы одно из чисел α, β, γ будет больше $\frac{1}{2}$; второй — если все три числа α, β, γ меньше $\frac{1}{2}$. [Больше чем о д н о из чисел α, β, γ превосходить $\frac{1}{2}$ не может, ибо $\alpha+\beta+\gamma=1$; это вытекает из того, что $S=S_{MBC}+S_{MAC}+S_{MAB}=$ $=\alpha S+\beta S+\gamma S$.] Если $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$, то искомая площадь $s=8\beta\gamma S$; если же $\alpha<\frac{1}{2}$; $\beta\leqslant\frac{1}{2}$; $\gamma<\frac{1}{2}$, то $s=[2-4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)]\cdot S$.

Величина s будет наибольшей, если принимает наименьшее значение сумма

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{1}{3}[(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]=$$

$$=\frac{1}{3}[1+(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2],$$

т. е. если $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$ и точка Q совпадает с точкой M пересечения медиан треугольника ABC. В этом последнем случае $s=\frac{2}{3}S$ (ср. с задачей **123**а)).

172. 0°, 360° и —360°.

173. $\measuredangle AMB=\measuredangle ANB$ или $\measuredangle AMB-\measuredangle ANB=\pm 180°$.

176. а) $AM \parallel BN$; б) прямые AM и BN пересекаются в такой точке C, что треугольник ABC — равнобедренный.

177. а) Прямая l параллельна прямым MN и M_1N_1 и равноудалена от них.

б) Точка O совпадает с серединой отрезка NN_1.

181. Условия $\angle ABD=\alpha$ и $BD=a$ определяют два вектора.

184. Если все углы треугольника меньше 120°.

185. а) если $\alpha+\beta<180°$.

б) Если $|\alpha-\beta|<180°$ и знаки углов α и β противоположны.

188. а) Отрезок; б) два луча.

192. Фигура F получается из фигуры F' поворотом вокруг точки O на угол $360°-\alpha$ (или $-\alpha$).

193. Если точка A_1 симметрична точке A фигуры F относительно прямой l_1, а точка A' симметрична точке A_1 относительно прямой l_2, то точка A' получается из точки A поворотом вокруг точки O на угол 2α.

199. а) Это есть поворот на $\angle BAM$, где отрезок AM параллелен CD и одинаково с CD направлен, переводящий точку A в точку C; далее см. задачу **194**. (Точку O, вокруг которой осуществляется поворот, можно построить как точку пересечения перпендикуляров, восставленных к отрезкам AC и BD в их серединах; если эти два перпендикуляра совпадают, то O — точка пересечения прямых AB и CD.) б) Разность этих углов равна $\pm 180°$.

200. Если окружности R и S касаются в точке M, то поворот, переводящий отрезок AB в отрезок CD, — это поворот вокруг точки M.

201. Не всегда — лишь если направления отрезков AB и CD противоположны.

202. б) Пусть прямая MN проходит через B, M — точка окружности R, N — точка S. Докажите, что $\angle MAN$ равен углу поворота с центром A, переводящего R в S.

203. Для этого необходимо и достаточно, чтобы «направления обхода» треугольников ABC и DEF (от A к B и к C соответственно от D к E и к F) совпадали (оба совпадали с направлением движения часовой стрелки или оба были ему противоположны; здесь положено $AB=DE$, $BC=EF$; $CA=FD$); кроме того, если сторона DE параллельна AB, направления этих сторон (от D к E и от A к B) должны быть противоположны.

212. Отрезок BD получается из отрезка AC поворотом вокруг точки O на $\measuredangle AOB$.

213. Точка N получается из точки M поворотом вокруг точки O на $\measuredangle AOC$. Не остается.

214. Поверните прямую l_1 вокруг точки A на угол α; найдите точку пересечения полученной прямой l'_1 с прямой l_2.

215. Воспользуйтесь тем, что треугольник EBC получается из треугольника ABF поворотом вокруг точки B на угол $60°$.

216. Пусть точка A' получается из точки A поворотом вокруг точки O на угол α; тогда $\angle BDA'=\alpha$.

217. Воспользуйтесь результатом задачи **202б)**.

218. Отложите на продолжении AE за точку E отрезок $EK=AE$; сравните треугольник ANQ с треугольником ANK', получаемым из треугольника ABK поворотом вокруг точки A на угол $90°$.

219. а) Пусть F' — вершина параллелограмма $DFWF'$. Докажите, что поворот вокруг точки D на угол $90°$ переводит треугольник DEV в треугольник $DF'W$.

б) Воспользовавшись результатом задачи а), докажите, что поворот вокруг середины D стороны AB на угол $90°$ переводит треугольник DAV в треугольник DUW.

220. Воспользуйтесь результатом задачи **219а)** или задачи **219б)**.

221. Поверните треугольник ABM вокруг точки A на $60°$ в положение ACM'; воспользуйтесь тем, что $MM'=AM$ и $CM'=BM$.

Больший из трех отрезков AM, BM и CM будет равен сумме двух других лишь в том случае, если точка M принадлежит окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

222. а) Из того, что треугольник ABB_1 при повороте вокруг точки A на угол $60°$ переходит в треугольник AC_1C, следует, что $CC_1=BB_1$.

б) Из того же обстоятельства, что и выше, следует, что угол между прямыми CC_1 и BB_1 равен $60°$. Далее, рассматриваемый поворот переводит точку M пересечения BB_1 и AA_1 в такую точку M' прямой C_1M, что $\angle MAM'=60°$ ($\angle AMC_1=\angle ABC_1=60°$, ибо $\angle A_1AB=\angle CC_1B$). Но точки B_1, B и M лежат на одной прямой; поэтому и точки C, C_1 и M' лежат на одной прямой (см. теорему 4 § 27), т. е. CC_1 проходит через точку M.

в) Так как поворот вокруг точки A на угол 60° переводит треугольник AMB в треугольник $AM'C_1$, то $M'C_1 = MB$; поэтому

$$MC_1 = MM' + M'C_1 = MA + MB.$$

Точка M лежит внутри треугольника ABC в том и только в том случае, если ни один из углов треугольника не превосходит 120° (ср. задачу **184**).

223. П е р в о е р е ш е н и е. Пусть M — внутренняя точка треугольника ABC. Повернем треугольник ABM вокруг точки A на угол 60° в положение $AB'M'$. Тогда $B'M' = BM$, $M'M = AM$ и $AM + BM + CM = B'M' + M'M + MC$. Поэтому остается выбрать точку M так, чтобы длина ломаной $B'M'MC$ была наименьшей; если это возможно, то так, чтобы эта ломаная совпала с отрезком $B'C$. О т в е т: искомая точка M совпадает с рассмотренной в задаче **222** (и в задаче **184**) или с вершиной угла, превосходящего 120°.

В т о р о е р е ш е н и е. Построим на стороне AB треугольник ABC, вне его — правильный треугольник ABC'. В силу результата задачи **221** для любой точки M имеем:

$$MC' \leqslant MA + MB,$$

откуда следует, что

$$MA + MB + MC \leqslant CC';$$

если же точка M — та же, что и в задаче **222**, то

$$MA + MB + MC = CC'.$$

227. а) Эта фигура обладает тремя осями симметрии и центром симметрии третьего порядка.

б) Фигуры F и G имеют центр симметрии 4-го порядка.

228. См. задачу **97**.

229. Если $\alpha \neq \dfrac{360^\circ}{n}$, то существуют два таких целых числа n и $n+1$, что $n\alpha < 360^\circ < (n+1)\alpha$; при этом вращение вокруг O на угол $(n+1)\alpha - 360^\circ$, м е н ь ш и й α, также переводит F в себя.

230. Точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ является центром симметрии четвертого порядка четырехугольника $PQRS$.

235. Пусть P и Q — центры квадратов, построенных на сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ с центром O, M и N — середины сторон AB и BC, M_1 — вершина параллелограмма $OMPM_1$. Докажите, что треугольник OM_1P переходит в треугольник ONQ при повороте вокруг точки O на угол 90° (или на -90°).

238. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — правильный n-угольник, описанный вокруг окружности S с центром O; $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — окружности, вписанные в треугольники $A_1OA_2, A_2OA_3, \ldots, A_nOA_1$ (или — вневписанные окружности этих треугольников). Окружности $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — искомые.

б) При $n=6$ (и вневписанных окружностях).

239. Центр правильного шестиугольника — общая середина трех «больших» диагоналей — является центром симметрии шестого порядка для шестиугольника, образованного серединами шести других диагоналей.

242. а) Вращение вокруг центра правильного треугольника O на 120° переводит отрезок MN в отрезок PQ.

243. Вращение вокруг O на 120° переводит отрезок OD в отрезок OE.

244. Пусть отрезки $M_1N_1 \parallel MN$ и $P_1Q_1 \parallel PQ$ проходят через центр O квадрата; тогда вращение вокруг O на 90° переводит M_1N_1 в P_1Q_1.

245. Пусть $BD_1 \perp AC$ и $BD_1 = AC$; тогда точка D_1 также принадлежит стороне квадрата (см. задачу **244**).

246. Нетрудно понять, что треугольники ABC и $A'B'C'$ не могут быть симметричны относительно каждой из двух п а р а л л е л ь н ы х прямых l и m. Если же l и m пересекаются в точке Q и образуют угол α, то ABC переходит в себя в результате двух последовательных симметрий относительно прямых l и m, т. е. в результате вращения вокруг O на угол 2α (ср. с задачей **193**).

253. Если F' получается из F параллельным переносом на вектор $\overline{MN}$, то F получается из F' параллельным переносом на вектор $\overline{NM}$.

256. Если точка A_1 симметрична точке A фигуры F относительно прямой l_1, а точка A' симметрична точке A_1 относительно прямой l_2, то точка A' получается из A параллельным переносом в направлении, перпендикулярном l_1 и l_2 на расстояние, в два раза большее расстояния между l_1 и l_2.

262. b.

264. Воспользуйтесь тем, что, например, треугольник BDF получается из треугольника AEF параллельным переносом на вектор $\overline{AF}$.

265. $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ и $\frac{c}{2}$.

268. Не обязан.

269. Оно совпадает с направлением одной из диагоналей квадрата $ABCD$.

271. а) Треугольник ABC — равнобедренный (и прямая l перпендикулярна его основанию).

б) Если треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника ABC параллельным переносом и $\overline{A'B'}=\overline{AB}$, то $\overline{A'C'}=\overline{AC}$. Если же треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника ABC симметрией относительно некоторой точки O и $\overline{A'B'}=\overline{AB}$, то $\overline{A'C'}=\overline{CB}$.

272. Треугольник DEF получается из треугольника ABC параллельным переносом (на вектор $\overline{AD}$), если «направления обхода» этих треугольников (ср. указание к решению задачи **203**) совпадают; в противном случае он симметричен треугольнику ABC относительно середины отрезка, соединяющей две соответствующие друг другу вершины.

276. Если $a<2r$, где r — радиус окружности S.

279. Замените точку A точкой A', получаемой из точки A параллельным переносом на вектор $\overline{MN}$; тогда вы придете к задаче, разобранной в тексте книги (стр. 114).

281. Прямые l и l_1 либо получаются одна из другой с помощью параллельного переноса на вектор $\overline{OO_1}$, либо симметричны относительно середины отрезка OO_1.

282. Треугольники ABM и CDN либо получаются один из другого с помощью параллельного переноса на вектор $\overline{OQ}$, либо симметричны относительно середины отрезка OQ.

283. Если треугольники ABM и CDN — равнобедренные.

284. Если $ABCD$ — прямоугольник.

285—286. Перенесите параллельно одну из боковых сторон трапеции в направлении ее оснований на расстояние, равное меньшему основанию трапеции.

287. Воспользуйтесь результатом задачи **87**.

288. Перенесите параллельно одну из диагоналей трапеции в направлении, параллельном ее основаниям, на расстояние, равное меньшему основанию трапеции.

291. Перенесите параллельно стороны AB и DC четырехугольника $ABCD$ в новые положения MB' и MC'; затем перенесите параллельно отрезок MB' в положение $C'B''$ и рассмотрите треугольник $MC'B''$.

292. Перенесите параллельно сторону CD в положение BD'.

293. Перенесите параллельно диагональ AC в положение BC'.

294. Перенесите параллельно окружность R в направлении прямой l в такое положение R', что линия центров окружностей R' и S перпендикулярна l.

295. Перенесите параллельно хорду AK окружности F на вектор $\overline{AC}$.

296. Перенесите параллельно точку A в направлении железной дороги на расстояние a в положение A_1; далее воспользуйтесь задачей, разобранной в § 11.

300. $\frac{1}{k}$.

301. Фигура F_2 гомотетична фигуре F_1 с коэффициентом гомотетии $\frac{k_2}{k_1}$.

303. $\frac{k+1}{2}$.

308. Этот треугольник гомотетичен треугольнику ABC с центром гомотетии Q и коэффициентом $\frac{1}{2}$.

310. Докажите, что если прямая BB' пересекает прямую AA' в некоторой точке O, то и прямая CC' пересекает AA' в той же точке O.

311. Воспользуйтесь результатом задачи **310**. Треугольник $A''B''C''$ получается из треугольника $A'B'C'$ параллельным переносом лишь при $k_2=k_1$.

312. Окружность S', гомотетичную окружности S с центром гомотетии A и коэффициентом $\frac{1}{2}$.

313. Воспользуйтесь результатом задачи **312**.

314. $\frac{5}{6}$; $\frac{25}{36}$.

315. k; k^2.

316. Они совпадают с точками пересечения AC и BD, AD и BC.

319. Центр гомотетии принадлежит одной из диагоналей квадрата $ABCD$.

320. Последнее имеет место, если стороны квадрата K_1 параллельны сторонам квадрата K_2.

322. Прямую AB без точек A и B.

323. Где угодно на плоскости, но не на прямых l и m.

324. Пара окружностей S_3, S_4 гомотетична паре окружностей S_1, S_2 с центром гомотетии в вершине угла.

327. Параллелограммы, получаемые из данного гомотетией с коэффициентами $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ (а также 2 и -2), не отличаются друг от друга.

334. Если окружности R и S — концентрические.

336. $k=\frac{d+r}{d-r}$ или $\frac{d-r}{d+r}$ при $d>r$; $k=\frac{r+d}{r-d}$ или $\frac{r-d}{r+d}$ при $d<r$; k — любое при $d=r$.

341. Эти треугольники даже гомотетичны (с центром гомотетии в точке M).

342. Треугольники ABK и CDL гомотетичны с центром гомотетии в точке N.

343. Воспользуйтесь тем, что треугольники ABM и DCM гомотетичны с центром M и коэффициентом $\frac{DC}{AB}$; треугольники ABN и CDN гомотетичны с центром N и коэффициентом $-\frac{CD}{AB}$.

344. Воспользуйтесь результатом задачи **337** а) (ср. с указанием к задаче **162**).

346. а) Пусть E — точка пересечения боковых сторон трапеции $ABCD$, $MN \parallel AB \parallel DC$ — ее средняя линия. Принимая E за центр гомотетии, а числа $\frac{ED}{EA}$ и $\frac{EM}{EA}$ — за коэффициент гомотетии, получаем $DC=AB\cdot\frac{ED}{EA}$; $MN=AB\cdot\frac{EM}{EA}$. Далее остается воспользоваться тем, что $EM=\frac{1}{2}(EA+ED)$.

б) Ср. с решением задачи а) (здесь надо принять за центр гомотетии точку F пересечения диагоналей трапеции).

347. а) Треугольники ABM и DCN гомотетичны с центром гомотетии в точке пересечения боковых сторон трапеции.

б) Построенные квадраты гомотетичны с центром гомотетии в точке пересечения диагоналей трапеции.

348. Воспользуйтесь тем, что точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения продолжений ее боковых сторон являются центрами гомотетии, переводящей одно основание трапеции в другое.

349. Воспользуйтесь результатом задачи 348.

352. Пусть N_1 — какая угодно точка луча BA, P_1 — такая точка, что $N_1P_1 \perp BC$ и $N_1P_1 = MN_1$. Множество всех полученных таким образом точек P_1 образует прямую, проходящую через точку M.

354. Воспользуйтесь результатом задачи 353.

356. Все эти квадраты гомотетичны одному из них с центром гомотетии в точке B.

357. Треугольники ABC и MNP гомотетичны с центром гомотетии в середине стороны AB треугольника.

358. Прямая MNP гомотетична прямой CDE с центром гомотетии в середине отрезка AB и коэффициентом гомотетии $\frac{1}{3}$.

359. Воспользуйтесь тем, что множество таких точек N_1, расстояния от которых до AB и до BC относятся как $1:2$, представляют собой прямую.

360. Фиксируем точку A; тогда множество таких точек B_1 хорд AD_1, что $AB_1 : AD_1 = 1:3$, представляет собой окружность.

361. Фиксируем точку A; тогда множество середин B_1 секущих AC_1, где точка C_1 принадлежит окружности S_3, представляет собой окружность.

362. Эта окружность гомотетична окружности, описываемой точкой C, с центром гомотетии в точке A и коэффициентом гомотетии $\frac{1}{2}$.

363. Воспользуйтесь тем, что любая окружность, вписанная в угол AOB, гомотетична искомой.

366. Гомотетия с центром в (неизвестной!) точке M касания окружностей R и S переводит окружность S в окружность R, а стороны угла ABC — в прямые $A'B' \parallel AB$ и $B'C' \parallel BC$, касающиеся окружности R. Точку M можно найти как точку пересечения окружности R и прямой BB'.

367. Докажите, что стороны построенного треугольника параллельны сторонам треугольника ABC.

368. Воспользуйтесь результатом задачи 367.

369. а) Треугольник EFD гомотетичен треугольнику ABC с центром в точке пересечения медиан N и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Треугольник LMK гомотетичен треугольнику EFD с центром гомотетии P и коэффициентом 2. Отсюда следует, что стороны треугольника LMK равны и параллельны сторонам треугольника ABC, но противоположно им направлены, т. е. что треугольник LMK симметричен треугольнику ABC с центром симметрии в некоторой точке Q.

б) Докажите, что точка Q гомотетична точке P с центром гомотетии в точке N пересечения медиан треугольника ABC и коэффициентом гомотетии $-\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что точка Q описывает окружность S'.

370. Воспользуйтесь тем, что треугольники ABC и DEF гомотетичны с центром гомотетии в точке M пересечения медиан треугольника ABC и коэффициентом гомотетии $-\frac{1}{2}$.

371. Пусть S_1 — окружность, гомотетичная описанной окружности $\overline{S}$ треугольника с центром гомотетии в точке H пересечения высот и коэффициентом гомотетии $\frac{1}{2}$; S_2 — окружность, гомотетичная окружности $\overline{S}$ с центром гомотетии в точке M пересечения медиан и коэффициентом гомотетии $-\frac{1}{2}$. Окружность S_1 делит пополам отрезки HA, HB и HC высот; она также

проходит через точки P, R и Q (ср. задачу **81**, стр. 34). Окружность S_2 проходит через точки D, E и F. Радиусы окружностей S_1 и S_2 равны (они равны половине радиуса окружности $\overline{S}$); можно также показать, что их центры совпадают, откуда следует, что и S_1, и S_2 — это одна и та же окружность S.

372. Точка M пересечения медиан треугольника ABC принадлежит отрезку OH, где O есть центр окружности и делит этот отрезок в отношении $HM:MO=2:1$ (см. § 44). Построив точку M, мы без труда найдем и середину D стороны BC. Сама сторона BC проходит через точку D и перпендикулярна высоте AH.

373. Окружность S', гомотетичную окружности S с центром гомотетии в точке M отрезка OH, делящей этот отрезок в отношении $OM:MN=1:2$ (ср. § 44, стр. 139), и коэффициентом гомотетии $-\frac{1}{2}$.

374. Ясно, что если треугольник ABC вписан в окружность S, то его точка пересечения медиан M расположена в н у т р и S. С другой стороны, для любой внутренней точки M окружности S и любой точки A, принадлежащей этой окружности, можно построить вписанный в окружность S треугольник ABC, имеющий M точкой пересечения медиан. Таким образом, множество точек M пересечения медиан рассматриваемых треугольников совпадает с кругом K, ограниченным окружностью S. Множество же точек H пересечения высот представляет собой круг K', концентрический с кругом K и имеющий в полтора раза больший радиус (ибо $OH:OM=3:2$, ср. стр. 139).

375—378. Выберите на плоскости произвольную точку O и произведите гомотетию с центром O и таким коэффициентом k, чтобы все фигурирующие в задаче точки и линии перешли в «доступные» точки и линии; далее осуществите переход от преобразованного чертежа к первоначальному.

380. $|k|$.

382. $k_2:k_1$.

385. а) Вершина C принадлежит окружности S и прямой l', получаемой из l гомотетией с центром A и коэффициентом $\frac{AC}{AB}$ и последующим поворотом вокруг A на $\measuredangle BAC$ (можно сказать, что l' п о д о б н а l).

386. Ср. с указанием к задаче **202б**).

387. Гомотетия с центром в (неизвестной!) точке M пересечения окружностей R и S и последующий поворот вокруг M на угол α переводят окружность S в окружность R (см. задачу **386**), а прямые AB и BC — в прямые $A'B'$ и $B'C'$, касающиеся окружности R и образующие угол α с прямой AB, соответственно BC. Прямые $A'B'$ и $B'C'$ можно построить. После этого точку M можно найти как точку пересечения окружности R и сегмента, построенного на отрезке BB' и вмещающего угол α. (Ср. с задачей **366**.)

388. а) Пусть M — точка пересечения прямых AB и CD, R и S — окружности, описанные вокруг треугольников ACM и BDM, N — вторая точка пересечения этих окружностей. (Если окружности R и S касаются в точке M, то условимся считать, что точка N совпадает с точкой M.) Докажите, что отрезок AB можно перевести в отрезок CD вращением вокруг точки N, сопровождаемым (если $AB\neq CD$) гомотетией с центром в той же точке.

б) Для этого необходимо и достаточно, чтобы «направления обхода» треугольников ABC и DEF (от A к B к C и от D к E к F) совпадали (ср. с задачей 203).

389. а) В отрезок прямой l.

б) В прямую l и в точки прямой l.

в) Точки прямой l; прямую l.

390. а) См. ниже задачу **400**.

б) Точку O; ни одной прямой (если $\measuredangle PQP'\neq 0°, \pm 180°$); ни одной окружности (если $QP'\neq QP$).

в) Поворот, если $OP=OP'$; гомотетию (в частности, центральную симметрию), если «треугольник» PQP' вырождается и точки P, Q, P' принадлежат одной прямой.

391. а) См. ниже задачу **401**.

б) Лишь точку O (если $k \neq 1$); прямую l и перпендикуляр m, восставленный к l в точке O (если $k \neq 1$).

392. а) Пусть прямая a пересекает l в точке M; точку A прямой a «сжатие к прямой l» переводит в точку A'. Докажите, что каждую точку B прямой l это преобразование переводит в точку B' пересечения перпендикуляра, опущенного из B на l, с прямой $A'M$.

в) Симметрию относительно прямой l.

г) Не переводит.

395. а) Параллельный перенос в направлении, перпендикулярном l и m.

б) Поворот вокруг точки пересечения l и m.

396. Если $l \perp m$ или l совпадает с m.

397. Поворот вокруг точки O на угол $\alpha_1+\alpha_2$ (или на угол $360° \pm (\alpha_1+\alpha_2)$). Не зависит.

398. Гомотетию с центром O и коэффициентом — k.

399. Гомотетию с центром O и коэффициентом k_1k_2.

402. Воспользовавшись результатом задачи 395 б), представьте первый поворот как сумму симметрий относительно прямых l_1 и O_1O_2, а второй — как сумму симметрий относительно прямых O_1O_2 и l_2; докажите, что сумма двух поворотов равносильна сумме симметрий относительно прямых l_1 и l_2, т. е. (см. задачу 395) повороту или параллельному повороту.

404. а) Пусть первая гомотетия переводит точку A в точку A_1, а вторая — точку A_1 в точку A'. Если $k_1k_2=1$, то $\triangle A_1AA' \sim \triangle A_1O_1O_2$; поэтому $AA' \parallel O_1O_2$ и $\frac{AA'}{O_1O_2}$ не зависит от выбора точки A. Если $k_1k_2 \neq 1$, то AA' пересекает прямую O_1O_2 в точке O; при этом ни положение точки O, ни отношение $OA':OA$ не зависят от выбора точки A, а лишь от точек O_1, O_2 и коэффициентов k_1, k_2.

б) Воспользуйтесь тем, что единственные прямые, которые при гомотетии переходят в себя, — это прямые, проходящие через центр гомотетии.

405. См. задачу **404** б).

407. При $k = -1$.

408. Лишь в том случае, когда коэффициент k гомотетии равен -1.

409. Да, если произведение k_1k_2 коэффициентов гомотетии равно ± 1.

410. Пусть симметрия относительно прямой l переводит точку A в точку C, а точку B — в точку B'; симметрия относительно прямой m переводит точку B' в точку D. Сумма двух симметрий относительно прямых l и m переводит AB в CD; далее см. задачу **395**.

411. Ср. указание к задаче **410**.

415. Постройте предварительно треугольник AOB, где O — центр вписанной окружности.

416—417. Определите предварительно длину основания AB треугольника.

418. Отложив на плоскости отрезок $AB=c$, мы сможем найти точку прямой AB, через которую проходит биссектриса угла C.

423. Найдите два условия, определяющие середину M хорды.

Часть II

426. 1) Параллельно и в одну сторону; 2) параллельно и в противоположные стороны. Указание. Воспользуйтесь результатами задач **424—425** и теоремой о том, что каждая сторона треугольника меньше суммы, но больше разности двух других сторон.

427. Ср. с задачей **426**.

429. В точке, которой соответствует число $a+b$.

430. 60° и 30°.

431. Может: если ABC—такой треугольник, что в нем AC — наименьшая сторона, то векторы $\mathbf{a}=\overline{AB}$ и $\mathbf{b}=\overline{BC}$ — искомые.

432. $\overline{AF}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}$; $\overline{BC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$; $\overline{CD}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$; $\overline{DA}=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}$.

433. $\overline{BC}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$; $\overline{CD}=\boldsymbol{q}$; $\overline{FE}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$; $\overline{ED}=\boldsymbol{p}$.

434. $\overline{AB}=\overline{DC}$; $\overline{BA}=\overline{CD}$; $\overline{AD}=\overline{BC}$; $\overline{DA}=\overline{CB}$; $\overline{AO}=\overline{OC}$;

$$\overline{OA}=\overline{CO};\ \overline{DO}=\overline{OB};\ \overline{OD}=\overline{BO};$$

$$\overline{AD}=\overline{AO}+\overline{OD}=\overline{OC}+\overline{OD}=\overline{OC}+\overline{BO};$$

$$\overline{AO}=\overline{AD}+\overline{DO}=\overline{BC}+\overline{DO}=\overline{BC}+\overline{OB} \text{ и т. д.}$$

435. $\overline{AD}=\overline{AE}+\overline{AF}$.

439. Параллельный перенос на вектор $\overline{DB}$.

440. Приняв данные отрезки за векторы, найти их сумму s, затем к одной из данных окружностей нужно применить параллельный перенос на вектор s. В точке пересечения полученной окружности со второй данной окружностью будет находиться одна из вершин искомого треугольника. Задача может иметь до 16 решений (а иногда — бесконечное множество решений).

441. Параллельна стороне DE.

443. Можно. Нужно провести через точку A прямые, параллельные l_1 и l_2, и рассмотреть получившийся параллелограмм.

444. Стержень BC сжимается силой 2 m, стержень AB растягивается силой $\approx$ $\approx 1{,}732$ m.

445. $\approx 0{,}707$ m.

446. 0.

447. $\overline{DB}$, $\overline{BD}$, $\overline{BA}$.

450—451. Существует.

452. Докажите равенства $\overline{OA}+\overline{OC}=0$; $\overline{OB}+\overline{OD}=0$.

453. При повороте на угол $360^\circ : n$ (где n — число вершин многоугольника) эта сумма переходит в равный ей вектор; воспользуйтесь результатом задачи 474.

454. $\overline{AB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; $\overline{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; $\overline{CD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$; $\overline{DA}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

455. $\overline{AB}=\boldsymbol{p}$; $\overline{BC}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$; $\overline{CD}=\boldsymbol{q}$; $\overline{DE}=-\boldsymbol{p}$; $\overline{EF}=-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$; $\overline{FA}=-\boldsymbol{q}$.

456. $\overline{OA}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$; $\overline{OB}=-\boldsymbol{p}$; $\overline{OC}=-\boldsymbol{q}$; $\overline{OD}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}$.

457. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overline{AC}$; $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overline{DB}$

458—459. Перенесите $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ из одной части равенства в другую.

460. $\overline{AQ}=\boldsymbol{m}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{n}$.

462. 150°.

464. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

465. 1) Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны и противоположно направлены. 2) Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны и одинаково направлены, причем $a > b$. 3) Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны и одинаково направлены, причем $a < b$.

466. Воспользуйтесь леммой § 55.

469. Только в том случае, если точки A и B совпадают.

472. На вектор $\overline{BC}$.

473. Середина отрезка MN. Указание. Надо доказать, что никакая точка, кроме середины отрезка MN, требуемым свойством не обладает.

474. Таким вектором является только нулевой вектор.

475. Сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ переходит в вектор $\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$.

476. Разность $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ переходит в вектор $\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{b}'$.

477. В равные переходят векторы, параллельные прямой l; в противоположные — векторы, перпендикулярные этой прямой.

478. Вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'$ параллелен прямой l (или равен 0); вектор $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}'$ перпендикулярен прямой l (или равен 0).

480. Требуемая точка M существует всегда, и только одна. Чтобы ее найти, нужно взять любую точку A и построить точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с помощью симметрий относительно точек $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Искомая точка M будет тогда серединой отрезка AA_n.

Указание. Для доказательства воспользуйтесь результатом задачи 479.

481. Сумма четного числа симметрий относительно некоторых точек является параллельным переносом. Указание. Воспользуйтесь результатами задач 479 и 480.

482. Воспользуйтесь результатом задачи 481.

483. См. пример из § 48 (стр. 163) и задачу 481.

487. $\overline{PC}=\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AD}$.

488. $k=-1$.

489. $\overline{MN}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

490. $\frac{1}{2}\boldsymbol{m}-\frac{1}{4}\boldsymbol{n};\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{m}+\frac{1}{4}\boldsymbol{n};\ \frac{1}{4}\boldsymbol{m}-\frac{1}{2}\boldsymbol{n};\ -\frac{1}{4}\boldsymbol{m}+\frac{1}{2}\boldsymbol{n}$.

491. $\overline{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b};\ \overline{BC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b};\quad \overline{CD}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b};$

$\overline{DA}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

493. $\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AC}$.

497. $b\boldsymbol{a}+a\boldsymbol{b}\ \left(\text{или } \frac{1}{a}\boldsymbol{a}+\frac{1}{b}\boldsymbol{b}\right)$.

501. В вектор $k\boldsymbol{a}'$.

503. В вектор $(kl)\boldsymbol{a}$.

504. Совпадают.

508. Число k.

511. $-5\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b};\ 5\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$.

512. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

513. а) $2\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}=4\boldsymbol{b};\ 3\boldsymbol{m}+\frac{1}{3}\boldsymbol{n}=\frac{10}{3}\boldsymbol{a}+\frac{8}{3}\boldsymbol{b};\ -\boldsymbol{m}-\frac{1}{10}\boldsymbol{n}=-\frac{11}{10}\boldsymbol{a}-$

$-\frac{9}{10}\boldsymbol{b}$.

б) $2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n};\ \ 3\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=\frac{17}{9}\boldsymbol{m}-\frac{7}{9}\boldsymbol{n};\ -\boldsymbol{a}-\frac{1}{5}\boldsymbol{b}=$

$=-\frac{3}{5}\boldsymbol{m}+\frac{1}{5}\boldsymbol{n}$.

Указание. Рассматривая соотношения $\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ как систему уравнений, найдите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

в) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\frac{1}{5}\boldsymbol{p}+\frac{3}{5}\boldsymbol{q};\ -\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\frac{4}{5}\boldsymbol{p}-\frac{3}{5}\boldsymbol{q};\ 3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=\frac{18}{5}\boldsymbol{p}-\frac{1}{5}\boldsymbol{q}$.

514. 1) $\alpha=3;\ \beta=2;$ 2) $\alpha=\frac{1}{3};\ \ \beta=\frac{2}{3};$ 3) $\alpha=-\frac{9}{5};\ \ \beta=-\frac{23}{5};$

4) $\alpha=1;\ \beta=0$.

Указание. Приведите подобные члены и воспользуйтесь результатом задачи 500.

515. $\overline{QD}=\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c}$.

516. $\overline{AB}=a$; $\overline{BC}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$; $\overline{CD}=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$; $\overline{DE}=-a$;

$$\overline{EF}=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b;\ \overline{FA}=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b.$$

517. $\overline{AC}=\overline{FD}=2p+q$; $\overline{AD}=2p+2q$; $\overline{AE}=\overline{BD}=2q+p$;
$\overline{CE}=\overline{BF}=q-p$; $\overline{CF}=-2p$; $\overline{BE}=2q$.

518. $\overline{BC}=-\frac{2}{3}k+\frac{4}{3}l$; $\overline{CD}=-\frac{4}{3}k+\frac{2}{3}l$.

519. $\overline{QB}=2f-a$; $\overline{QC}=2e-a$; $\overline{QD}=f+e-a$.

520. Выразите указанные векторы через векторы, идущие по сторонам многоугольника.

525—526. Воспользуйтесь результатом задачи 453.

527. Воспользуйтесь результатом задачи 525 б).

528. а) $\overline{AM}=\frac{k}{k-1}\overline{AB}$; б) $\overline{AM}=\frac{k}{k+1}\overline{AB}$.

529. Существует и только одна:

$$\overline{AQ}=\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AC}.$$

530. Существует и только одна:

$$\overline{AQ}=\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}.$$

531. 0.

532. Такая точка только одна: центр тяжести треугольника.

533. Точка пересечения диагоналей параллелограмма.

535—536. Воспользуйтесь результатом задачи 534.

537. Обозначая через k длину стороны ромбов, выразите векторы, идущие по сторонам ромбов, через векторы $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$.

538. $\overline{QM_1}=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$; $\overline{QM_2}=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$.

539. $\overline{DC_1}=\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}b$; $\overline{DC_2}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$; $\overline{DC_3}=\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}b$.

540. $\overline{MC}=\frac{2}{3}\overline{MA}+\frac{1}{3}\overline{MB}$.

541. $\overline{AD}=\frac{b}{b+c}c+\frac{c}{b+c}b$.

542. $\overline{MC}=\frac{1}{k+1}\overline{MA}+\frac{k}{k+1}\overline{MB}$.

543. Выбрав на плоскости произвольную точку Q, выразите векторы $\overline{QK}$, $\overline{QL}$, $\overline{QM}$, $\overline{QN}$ через $\overline{QA}$, $\overline{QB}$, $\overline{QC}$, $\overline{QD}$ и воспользуйтесь результатами задач 458, 459.

544. При выполнении условий $0<\beta<\alpha$, $\alpha>1$.

546. Воспользуйтесь результатом задачи 545 б).

548. Воспользуйтесь результатом задачи 427.

549. $\overline{NA}=\frac{3}{2}\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{CB}$; $\overline{NB}=\frac{1}{2}\overline{CA}+\frac{3}{2}\overline{CB}$.

550. Обозначьте векторы, изображаемые сторонами параллелограмма, через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а векторы $\overline{MA}$ и $\overline{MB}$ через $k\boldsymbol{a}$ и $l\boldsymbol{b}$.

553. $\overline{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{m}+\frac{1}{2}\boldsymbol{p}$.

555. Воспользуйтесь результатом задачи 551.

557. $\overline{QO}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

560. б) Воспользуйтесь результатом задачи а).

562. $\overline{AB}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{p}-\frac{4}{3}\boldsymbol{q}$; $\overline{BC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{q}-\frac{2}{3}\boldsymbol{p}$; $\overline{CA}=\frac{4}{3}\boldsymbol{p}+\frac{2}{3}\boldsymbol{q}$.

563. Существует.

564. Положив $\overline{CA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{CB}=\boldsymbol{b}$ и обозначив через k отношение $AM:AC$, найдите векторы $\overline{PQ}$ и $\overline{PF}$, где F — середина отрезка MN.

565. $\overline{AC}=\frac{1}{k}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; $\overline{BC}=-\frac{k-1}{k}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; $\overline{MN}=-\frac{k-1}{2k}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

569. а) Пусть M — середина стороны AB, а N — середина стороны CD и средняя линия MN проходит через точку O пересечения диагоналей. Положите $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overline{OC}=k\boldsymbol{a}$, $\overline{OD}=l\boldsymbol{b}$; найдите векторы $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$ и воспользуйтесь тем, что эти векторы направлены по одной прямой.

б) См. задачу а).

571. $\frac{3}{4}$.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 531.

575. а) Воспользуйтесь результатом задачи 574.

б) Воспользуйтесь результатом задачи а).

577. Воспользуйтесь результатом задачи 575, а).

578. а) Воспользуйтесь теоремой 1 § 60 и следствием II, § 61.

б) Примите за точку Q, фигурирующую в теореме 1 § 60 и в следствии II § 61, вершину A треугольника.

579. Используя теорему § 44, докажите, что

$$\overline{OM}=\frac{1}{3}\overline{OH}.$$

584. Воспользуйтесь результатом задачи 574.

588. Могут, если разность этих векторов перпендикулярна оси.

589. 1) при $l \parallel m$; 2) при $l \perp m$.

590. Существует: эта ось должна быть перпендикулярна вектору $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

593. 0.

594. 5; 7; $-\frac{9}{2}$; -4.

597. 1) $\{3;\ 0\}$; 2) $\{0;\ 2\}$; 3) $\left\{-\frac{3}{2};\ 0\right\}$; 4) $\left\{0;\ -\frac{1}{2}\right\}$;

5) $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$; 6) $\{1;\ \sqrt{3}\}$; 7) $\left\{-\frac{3}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$;

8) $\left\{-\frac{5}{2};-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right\}$; 9) $\{2\sqrt{3},\ -2\}$; 10) $\{-3\sqrt{3},\ -3\}$;

11) $\left\{\frac{1}{6};\quad -\frac{\sqrt{3}}{6}\right\}$.

598. 1) $\{1,47;\quad 2,32\}$; 2) $\{-1,16;\quad -1,43\}$; 3) $\{-0,97;\quad 2,95\}$; 4) $\{0,92;\quad -0,21\}$; 5) $\{-1,70;\quad 0,32\}$; 6) $\{1,40;\quad 0,63\}$; 7) $\{1,14;\quad -3,36\}$; 8) $\{-0,18; -0,015\}$.

599. а) Симметричны относительно оси абсцисс; б) симметричны относительно оси ординат; в) симметричны относительно начала координат (т. е. $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$).

600. $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{e}=5\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$.

601. $\boldsymbol{a}=\{3,\ -2\}$; $\boldsymbol{b}=\{1,\ -5\}$; $\boldsymbol{c}=\{3;\ 1\}$; $\boldsymbol{d}=\{-2,\ 0)$; $\boldsymbol{e}=\{0,\ -1\}$; $\boldsymbol{f}=\{-5;\ 3\}$.

602. 1) $k=3$, $l=2$; 2) $k=\frac{1}{3}$; $l=\frac{2}{3}$; 3) $k=-\frac{9}{5}$; $l=-\frac{23}{5}$;

4) $k=1$; $l=0$.

606. 1) $\{-30;\ 21\}$; 2) $\{0;\ 0\}$; 3) $\left\{\frac{11}{2};\ \frac{15}{2}\right\}$; 4) $\{25;\ -10\}$.

607. $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=-3$.

Указание. Вывести из условий задачи систему уравнений

$$\begin{aligned} 5\alpha+2\beta+4\gamma&=0,\\ 3\alpha+2\gamma&=0 \end{aligned}$$

и с помощью этой системы выразить α и γ через β.

608. 1) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; 2) $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$; 3) $\boldsymbol{c}=-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$.

609. 1) $k=-\frac{9}{14}$; 2) $k=-\frac{5}{16}$; 3) $k=-3$.

Указание. Для параллельности вектора $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ вектору $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ нужно, чтобы выполнялось равенство $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=l\boldsymbol{c}$.

610. 1) $\{2,\ -1\}$; 2) $\{-1;\ -2\}$; 3) $\{5,\ -4\}$; 4) $\{-4;\ -4\}$.

611. $\overline{AB}=\{-1,\ 2\}$; $\overline{BC}=\{-1,\ -4\}$; $\overline{CA}=\{2,2\}$.

612. а) $(-2;\ 1)$; б) $(0;\ 2)$; в) $(0;\ 2)$.

613. а) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{5}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{7}{2},\ 5\right)$.

Указание. Воспользуйтесь равенством $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}+\frac{1}{2}\overline{OB}$, где M — середина отрезка AB, а O — начало координат.

614. а) $\left(\frac{5}{3};\ 1\right)$; б) $\left(\frac{1}{3};\ 4\right)$; в) $\left(\frac{2}{3};\ \frac{14}{3}\right)$.

615. $\left(0;\ \frac{5}{2}\right)$.

616. 1) $(1;\ -3)$; 2) $(-4;\ -3)$.

617. 1) $(-7;\ 7)$; 2) $(1;\ 1)$.

618. б) 1) $A_1\,(4;\ 4)$; $B_1\,(8;\ -1)$; $C_1\,(3;\ -1)$; 2) $A_1\,(2;\ 2)$; $B_1\,(6;\ -3)$; $C_1\,(-1;\ -5)$.

619. б) 1) $A'\,(0;\ -3)$, $B'\,(-2;\ 4)$, $C'\,(2;\ 1)$; 2) $A'\,(3;\ -2)$, $B'\,(6;\ 0)$, $C'\,(1;\ -3)$.

620. $\overline{AD}=\left\{-\frac{3}{2};\ 0\right\}$, $\overline{AE}=\{-1;\ -1\}$, $\overline{BM}=\{0;\ -2\}$, $\overline{FM}=$
$=\left\{-\frac{1}{2};\ -1\right\}$.

622. а) 1) $-90° < \alpha < 90°$; 2) $\alpha = \pm 90°$; 3) $-180° < \alpha < 90°$ и $90° < \alpha \leqslant 180°$; 4) $\alpha = 0°$; 5) $\alpha = \pm 180°$.

б) 1) $0° < \alpha < 180°$; 2) $\alpha = 0°$ и $\alpha = \pm 180°$; 3) $-180° < \alpha < 0°$; 4) $\alpha = 90°$; 5) $\alpha = -90°$.

624. 1) $\alpha = 29°25'$; 2) $\alpha = 112°1'$; 3) $\alpha = 90°$; 4) $\alpha = 73°48'$; 5) $\alpha = 0°$; 6) $\alpha = 96°22'$; 7) $\alpha = 66°29'$; 8) $\alpha = 180°$.

625. 1) $\sin\alpha = 0{,}6086$; 2) $\sin\alpha = 1$; 3) $\sin\alpha = 0{,}7171$; 4) $\sin\alpha = 0{,}0819$.

626. 1) $\bar{1},9548$; 2) $\bar{1},6210$; 3) $\bar{1},0659$; 4) $\bar{1},7442$; 5) $\bar{1},9982$; 6) $\bar{1},8152$; 7) $\bar{1},9342$; 8) $\bar{1},2046$; 9) $\bar{1},9947$; 10) $\bar{1},7064$.

627. 1) $\alpha = 79°43'$; 2) $\alpha = 69°7'$; 3) $\alpha = 26°29'$; 4) $\alpha = 71°50'$; 5) $\alpha = 85°56'$.

628. 1) 2,27; 2) 1,19; 3) 0,196; 4) 4,15; 5) —3,35; 6) —11,6; 7) 2,63; 8) 7,67; 9) —7,8; 10) 9,9.

629. $x = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma$; $y = a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma$.

630. $a\cos\dfrac{360°}{n}$.

631. $-a\sin\dfrac{180°}{n}$.

632. 1) 20; 2) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 3) 0; 4) 3; 5) —3.

633. 1) Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны и одинаково направлены; 2) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны и противоположно направлены.

634. 1) Векторы образуют острый угол (либо параллельны и одинаково направлены); 2) векторы образуют тупой угол (либо параллельны и противоположно направлены); 3) векторы взаимно перпендикулярны (либо хотя бы один из них равен $\boldsymbol{0}$).

635. $-\dfrac{3}{2}$.

637. 1) 36°3′; 2) 27°; 3) 47°; 4) 145°36′.

638. В случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ параллельны.

639. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ должны быть перпендикулярны.

640. $k = -\dfrac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{b}^2}$.

641. $\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$; $\boldsymbol{a}^2 - 6\boldsymbol{ab} + 9\boldsymbol{b}^2$; $2\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{b}^2 - 5\boldsymbol{ab}$; $\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{c}^2 + 2\boldsymbol{bc}$; $2\boldsymbol{ac} + 2\boldsymbol{bc} - 2\boldsymbol{c}^2$.

643. Концы векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ должны быть расположены на одной прямой, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{p}$.

644. $k = -\dfrac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{ac}}$.

645. —8.

646. 60°.

647. $\cos\alpha = \dfrac{19}{5\sqrt{43}}$; $\alpha = 54°35'$.

Указание. Выразите $\boldsymbol{ab}$ через $\boldsymbol{a}^2$ и через $\boldsymbol{b}^2$. Полученные равенства $\boldsymbol{ab} = \dfrac{19}{43}\boldsymbol{a}^2$ и $\boldsymbol{ab} = \dfrac{19}{25}\boldsymbol{b}^2$ перемножьте, а затем извлеките квадратный корень.

648. Указанная формула выражает следующую теорему: если $ABCD$ — параллелограмм и $\alpha = \angle BOC$ — угол между его диагоналями, то $AC \cdot BD \cos\alpha = AB^2 - AD^2$.

649. См. задачу 1, § 76.

650. 1) —3; 2) 0; 3) 1.

651. 1) 181; 2) $\{-194;\ 12\}$.

652. $\boldsymbol{c}=\{6;\ 4\}$.

653. 1) $\left\{-\frac{3}{5};\ \ \frac{4}{5}\right\}$; 2) $\left\{\frac{3}{5};\ -\frac{4}{5}\right\}$.

654. $-\frac{4}{5}$.

655. $\left\{\frac{21}{65};\ \ \frac{77}{65}\right\}$.

656. а) $\boldsymbol{b}=\{-2,\ -5\}$; б) $\boldsymbol{b}=\{0,\ 0\}$.

657. 1) $\alpha=45°$; 2) $\alpha=90°$; 3) $\alpha=135°$; 4) $\alpha=180°$.

658. 1) $\sqrt{5}$; 2) 5; 3) 13.

659. 1) $56°18'$; 2) $111°48'$; 3) $168°43'$; 4) $-135°$.

660. $45°$; 2) $52°7'$.

661. 1) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{61}$.

662. 1) прямоугольный (B — вершина прямого угла); 2) тупоугольный (B — вершина тупого угла); 3) остроугольный.

663. 1) $81°52'$; 2) $53°8'$; 3) $120°58'$.

664. $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

666. а) Выразите все векторы через три из них, например, через $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, или (второе решение) выберите на плоскости произвольную точку Q и выразите все векторы через векторы с началом Q.

б) Примите за точку D из задачи а) точку пересечения двух высот.

667. $\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BE}+\overline{AB}\cdot\overline{CF}=0$.

668. Вычислите скалярное произведение $\overline{DC}\cdot\overline{DB}$, выразив $\overline{DC}$ и $\overline{DB}$ через векторы $\overline{CA}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{CB}=\boldsymbol{b}$.

670. $CD=\frac{1}{m+n}\sqrt{n^2a^2+m^2b^2+2mn\,ab\cos C}$, где a и b — длины сторон CA и CB.

Указание. Выразите вектор $\overline{CD}$ через векторы $\overline{CA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{CB}=\boldsymbol{b}$ и возведите его в квадрат.

671. а) $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$;

б) $l_a=\frac{bc}{b+c}\sqrt{2(1+\cos A)}$.

672. Выразите векторы $\overline{QA}$ и $\overline{QB}$ через векторы $\overline{QM}$ и $\overline{AB}$. (Можно также воспользоваться результатом задачи 649.)

673. а) $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 672.

б) $l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$, где p — полупериметр.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $\boldsymbol{l}_a=\frac{\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{cb}}{b+c}$, где $\boldsymbol{l}_a=\overline{AE}$, $\boldsymbol{c}=\overline{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overline{AC}$, и возведите эту формулу в квадрат. Скалярное произведение $\boldsymbol{bc}$ найдите с помощью соотношения $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2$.

674. а) Выразите векторы $\overline{BE}$ и $\overline{AD}$, идущие по медианам треугольника ABC, через векторы $\overline{CA}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{CB}=\boldsymbol{b}$, а затем воспользуйтесь равенством $AD^2=BE^2$. (Можно также воспользоваться результатом задачи **673**, а).

б) Воспользуйтесь результатом задачи **673** б).

676. Воспользуйтесь результатом задачи **574**.

677. Запишите условие перпендикулярности векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CM}$, выразив их через векторы $\overline{CA}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{CB}=\boldsymbol{b}$; выведите отсюда, что $a=b$.

678. Выразите все векторы через $\overline{MA}=\boldsymbol{p}$, $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{BC}=\boldsymbol{b}$.

679. а) $\overline{AD}=k(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, где $k=\dfrac{\boldsymbol{b}^2}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$.

У к а з а н и е. Число k определяется из условия перпендикулярности векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

б) $\overline{CD}=\dfrac{b^2}{a^2+b^2}\boldsymbol{a}+\dfrac{a^2}{a^2+b^2}\boldsymbol{b}$.

681. Указанные суммы равны в том и только в том случае, если параллелограмм является прямоугольником.

682. Докажите, что $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD}=\boldsymbol{0}$, и выразите все векторы через $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$, $\overline{QM}$.

683. Окружность с центром в середине данного отрезка.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом задачи 672.

684. Окружность. У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом задачи 676 (или **682** — для случая четырех точек).

686. Теоремы задач **685** а), б) и задачи 3 из § 76 вытекают из этого результата.

689. Воспользуйтесь результатом задачи **688**.

690. Воспользуйтесь результатом задачи **551**.

691. $\dfrac{3}{4}m$.

692. Обозначим через $A_1B'C$ треугольник, получающийся из треугольника ABC поворотом на 90° вокруг точки C. Тогда $(\overline{CA_1}-\overline{CB'})\perp(\overline{CA}-\overline{CB})$. Выразите медиану треугольника A_1B_1C через векторы $\overline{CA_1}$ и $\overline{CB'}$.

693—695. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — два вектора, а $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$ — векторы, получающиеся из них поворотом на угол $+90°$. Тогда

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'=0;\ \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'=0;\ \boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}'^2;\ \boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{b}'^2;\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'.$$

Этими соотношениями и следует пользоваться при решении задач 693—695 (выбирая векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ по смыслу задачи).

696. Докажите, что если O определяется равенством

$$\overline{QO}=\frac{\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}-\overline{QH}}{2},\quad \text{то } \overline{OA}^2=\overline{OB}^2=\overline{OC}^2.$$

698. 4,31 и 6,74.

699. а) 5,16 и 4,22.

б) 5,43 и 1,72.

700. Величина равнодействующей $\approx$ 122 *кг*; образует угол 21°36′ с силой 60 *кГ* и угол 18°24′ с силой 70 *кГ*.

701. 1) 83,3 *м*; 2) 212 *м*.

704. Возведите обе части равенства $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$ в квадрат.

705. $AB=4$. У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом задачи 704

707. 48,6.

709. 25,1 *кв. км*.

710. 1396 *кв. м*.

711. 1) 1871; 2) 60,6; 3) 75,4; 4) 131; 5) 284.

712. Используйте результат задачи **708** и формулу $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; вычислите $\cos\alpha$ по теореме косинусов.

713. 1) 283 *м*; 2) 138 *м*.

714. $\dfrac{l\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}$.

715. $AS=\dfrac{l\sin\beta}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)}$.

716. 1) $41\cdot10^{12}$ *км*; 2) $83\cdot10^{12}$ *км*; 3) $103\cdot10^{12}$ *км*. В парсеках (1 парсек $\approx 30{,}8\cdot10^{12}$ *км*) эти расстояния соответственно равны: 1) 1,3 парсека; 2) 2,7 парсека; 3) 3,3 парсека.

717. $AB^2=l^2\left[\dfrac{\sin^2\delta}{\sin^2(\beta+\delta)}+\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin^2(\alpha+\gamma)}-\dfrac{2\sin\delta\sin\gamma}{\sin(\beta+\delta)\sin(\alpha+\gamma)}\cos(\alpha-\beta)\right]$.

718. Угол γ, под которым из центра земли видна дуга, пройденная спутником за t секунд, равен $90^\circ-\alpha-\beta$, где β — острый угол, определенный из равенства $\sin\beta=\dfrac{R}{R+h}\cos\alpha$. Период обращения спутника равен $\dfrac{360^\circ\cdot t}{\gamma^\circ}$ секунд (для числовых данных ≈ 90 мин.).

719. 26,8 *кГ* и 31,6 *кГ*.

720. а) Проведите диаметр BD и хорду DC. Рассмотрите отдельные случаи, когда угол A является острым, тупым, прямым.

б) Воспользуйтесь результатом задачи а).

722. 1) 9,1; 2) 19,4.

723. $\dfrac{2}{\pi}\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$.

724. 1) $c=240$; $A=34^\circ23'$, $B=55^\circ37'$;
2) $c=5{,}79$; $A=32^\circ30'$; $B=57^\circ30'$;
3) $c=1{,}261$; $A=36^\circ44'$; $B=53^\circ16'$.

725. 1) $a=3{,}96$; $b=1{,}34$; $B=18^\circ42'$;
2) $a=0{,}104$; $b=0{,}058$; $A=60^\circ46'$;
3) $a=104$; $b=76{,}5$; $B=36^\circ22'$.

726. 1) $c=42{,}6$; $b=40{,}1$; $B=70^\circ24'$;
2) $c=40{,}9$; $a=11{,}1$; $A=15^\circ48'$;
3) $c=0{,}64$; $a=0{,}52$; $B=35^\circ32'$.

727. 1) $b=3{,}1$; $A=34^\circ14'$; $B=55^\circ46'$;
2) $a=95{,}7$; $A=54^\circ13'$; $B=35^\circ47'$;
3) $b=0{,}31$; $A=57^\circ21'$; $B=32^\circ39'$.

728. 1) $C=63^\circ36'$; $c=32{,}9$;
2) $A=B=75^\circ54'$; $c=28^\circ12'$;
3) $A=C=37^\circ52'$; $b=0{,}91$;
4) $c=105$; $A=73^\circ$; $B=48^\circ19'$;
5) $A=64^\circ55'$; $b=39{,}4$; $c=57{,}5$;
6) $A=47^\circ34'$; $B=100^\circ13'$; $C=32^\circ13'$;
7) $A=74^\circ48'$; $B=47^\circ33'$; $C=57^\circ39'$;
8) $b=26{,}5$; $A=35^\circ42'$; $C=25^\circ44'$;
9) $C=77^\circ32'$; $b=57{,}6$; $c=115$;
10) $a=18{,}4$; $B=70^\circ44'$; $C=37^\circ32'$;
11) $A=47^\circ1'$; $B=74^\circ53'$; $C=58^\circ6'$;
12) $C=37^\circ14'$; $a=80{,}8$; $c=59{,}0$.

729. По указанным данным можно определить синус угла, лежащего против второй стороны. Если первая сторона (угол против которой задан) меньше второй стороны, то угол против второй стороны больше угла против первой; он может быть и острым и тупым. Поэтому, зная синус, мы не можем однозначно определить этот угол. Если же первая сторона больше второй, то

угол против второй стороны меньше угла против первой, так что угол против второй стороны обязательно острый. Следовательно, зная синус, можно этот угол определить однозначно.

В примерах 2), 4) и 6) дан угол против меньшей из двух заданных сторон, и потому остальные элементы не определяются однозначно. В примерах же 1), 3), 5) определяются:

1) $B=17°43'$; $C=130°41'$; $c=44,9$;
3) $C=26°59'$; $B=120°16'$; $b=0,51$;
5) $C=42°27'$; $A=8°21'$; $a=5,8$.

730.

1) $C=14°30'$; $a=9,46$; $b=10,7$; $c=2,82$;
2) $B=96°38'$; $a=21,2$; $b=43,2$; $c=35,3$;
3) $B=72°$; $C=36°$; $a=b=63,1$; $c=39$;
4) $B=62°19'$; $C=55°22'$; $a=b=19,2$; $c=17,9$;
5) $A=94°28'$; $B=C=42°46'$; $b=c=2,53$;
6) $A=36°27'$; $a=7,77$; $b=10,3$; $c=3,45$;
7) $A=19°34'$; $a=0,58$; $b=1,46$; $c=1,05$;
8) $A=19°34'$; $a=35,9$; $b=102,2$; $c=85,1$;
9) $c=9,74$; $b=10,1$; $A=18°44'$; $C=74°15'$;
10) $A=117°17'$; $B=36°20'$; $C=26°23'$;
$a=27$; $b=18$; $c=13,5$.

731. $91°58'$. (Находим сначала $\angle BAC$, $\angle CAD$, $\angle BAD$; затем BD и, наконец, $\angle ABD$.)

732. 43.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Геометрические преобразования

И. М. Яглом, Геометрические преобразования, т. I (Движения и преобразования подобия), Гостехиздат, М., 1955.

Эта книга специально посвящена изучению простейших геометрических преобразований и их применениям к решению задач. В книге подробно рассматриваются все типы преобразований, фигурирующие в программе по геометрии для IX класса средней школы, и некоторые другие близкие им. Обсуждаются общие свойства движений и преобразований подобия, а также роль этих преобразований в геометрии; проводится полная классификация движений и преобразований подобия. В книге содержится много геометрических задач, в решении которых используются преобразования; эти задачи сопровождаются подробными решениями. (Следует, впрочем, отметить, что собранные здесь задачи, как правило, несколько труднее тех, которые могут быть использованы на уроке в школе).

Второй том той же книги (Гостехиздат, М., 1956) посвящен более сложным типам геометрических преобразований; он может быть использован во внеклассной работе.

Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 1, Учпедгиз, М., 1957.

Обстоятельный учебник элементарной геометрии, написанный выдающимся математиком; этот учебник ранее широко использовался во французских школах. В книге много места уделяется движениям и преобразованиям подобия. Содержится очень много задач, снабженных подробными решениями, составленными Д. И. Перепелкиным.

Вторая часть той же книги (Учпедгиз, М., 1958) посвящена стереометрии. В ней много места уделено геометрическим преобразованиям в пространстве; она может быть использована во внеклассной работе.

Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. 1, Гостехиздат, М — Л., 1948.

Подробный учебник элементарной геометрии, рассчитанный на студентов педагогических институтов; по охвату материала близок к книге Ж. Адамара. Здесь также много внимания уделяется простейшим геометрическим преобразованиям.

Вторая часть книги (Гостехиздат, М.— Л., 1949) посвящена стереометрии и весьма подробно рассматривает вопрос о движениях и преобразованиях подобия в пространстве; эта книга может быть использована во внеклассной работе.

И. М. Яглом и Л. С. Атанасян, Геометрические преобразования, Энциклопедия элементарной математики, кн. IV (Геометрия), Физматгиз, М., 1963, стр. 49—158.

Обстоятельная статья, посвященная общим вопросам теории геометрических преобразований, простейшим типам преобразований, их применениям и роли геометрических преобразований в геометрии. Эта статья рассчитана в первую очередь на преподавателей математики и студентов педагогических институтов; она предполагает первоначальное знакомство читателей с учением о преобразованиях.

И. И. Александров, Сборник геометрических задач на построение, Учпедгиз, М., 1950.

Весьма обширное собрание задач на построение, расклассифицированных по методам их решения. Многие задачи сопровождаются полными решениями или краткими указаниями. В книге собрано очень большое число задач, решаемых с применением тех или иных геометрических преобразований.

Ф. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. II (геометрия), ОНТИ, М.—Л., 1934.

Лекции, читавшиеся знаменитым немецким математиком и педагогом учителям немецких средних школ. Вопросам, связанным с геометрическими преобразованиями, в этих лекциях уделяется очень большое внимание.

Г. Вейль (H. Weyl), Simmetry (Симметрия), Princeton, 1952. (Перевод книги запланирован издательством «Наука».)

Популярная книга одного из крупнейших математиков XX века. В ней широко освещен вопрос о математическом содержании понятия симметрии и о роли этого понятия в жизни, науке и прикладном искусстве. Книга богато иллюстрирована.

Векторная алгебра

Я. С. Дубнов, Основы векторного исчисления, ч. I, Гостехиздат, М., 1950.

Обстоятельное сочинение видного математика и педагога, весьма подробно рассматривающее основные операции векторной алгебры, а также некоторые вопросы применений алгебры векторов к геометрии и к механике. Книга содержит много интересных задач.

В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, Векторы в курсе геометрии средней школы, Учпедгиз, М., 1962.

Пособие для учителей средней школы. Наряду с материалом, входящим в программу по геометрии для IX класса, здесь рассмотрен также вопрос о векторах в пространстве и о физических применениях понятия вектора.

В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, Векторы и их применения в геометрии, Энциклопедия элементарной математики, кн. IV (геометрия), Физматгиз, М., 1963, стр. 291—381.

Подробная статья, рассчитанная в первую очередь на учителей средних школ. По охвату материала заметно превышает программу средней школы; наряду со сложением и вычитанием векторов, умножением вектора на число и скалярным произведением векторов (на плоскости и в пространстве) здесь рас-

сматриваются и некоторые другие операции векторной алгебры. Затронут также вопрос о построении всей геометрии на основе понятия вектора. Имеются многочисленные примеры приложений алгебры векторов к конкретным задачам.

Н. М. Фишман, Векторы на плоскости, ОНТИ, М.—Л., 1935.

Небольшая брошюра, рассчитанная на учащихся старших классов средней школы. Здесь рассмотрены простейшие операции векторной алгебры и их применения к геометрии и механике.

В. М. Майоров и З. А. Скопец, Задачник-практикум по векторной алгебре, Учпедгиз, М., 1961.

Пособие для студентов-заочников педагогических институтов, содержащее основные сведения по векторной алгебре и задачи, относящиеся собственно к учению о векторах и к применениям алгебры векторов к геометрии и механике. В книге собрано много задач элементарно-геометрического содержания.

А. М. Лопшиц, Аналитическая геометрия, Учпедгиз, М., 1948.

Учебник аналитической геометрии, рассчитанный на студентов педагогических институтов. В этом учебнике очень много внимания уделено вопросам векторной алгебры.

СОДЕРЖАНИЕ

Задачи и упражнения к главе V

Дополнения и методические указания к главе V

Глава VI. Понятие о геометрическом преобразовании

Задачи и упражнения к главе VI

Дополнения и методические указания к главе VI

Приложение к первой части. О решении задач на построение

Методические указания к Приложению

Часть II. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Глава VII. Сложение и вычитание векторов

Задачи и упражнения к главе VII

Дополнения и методические указания к главе VII

Глава VIII. Умножение вектора на число

Задачи и упражнения к главе VIII

Дополнения и методические указания к главе VIII

Глава IX. Проекции и координаты векторов

Задачи и упражнения к главе IX

Дополнения и методические указания к главе IX

Глава X. Скалярное умножение векторов

Задачи и упражнения к главе X

Дополнения и методические указания к главе X

Глава XI. Метрические соотношения в треугольнике

Задачи и упражнения к главе XI

Дополнения и методические указания к главе XI

Ответы и указания

Владимир Григорьевич Болтянский
Исаак Моисеевич Яглом

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ВЕКТОРЫ

Редактор *В. В. Гольдберг*
Обложка художника *Ю. М. Сигова*
Художественный редактор *Б. Л. Николаев*
Технический редактор *М. И. Смирнова*
Корректор *Р. Б. Берман*

***

Сдано в набор 23/VIII 1963 г.
Подписано к печати 18/XI 1964 г.
$60 \times 90^1/_{16}$. Печ. л. 19. Уч-изд. л. 20,25
Тираж 56 тыс. экз.

***

Издательство «Просвещение»
Государственного комитета
Совета Министров РСФСР
по печати
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41
Типография изд-ва «Уральский рабочий».
Свердловск, проспект Ленина, 49.
Заказ № 613.

Цена без переплета 55 коп.,
переплет 10 коп.

Цена 65 коп.