А. Г. Мордкович
Н. П. Николаев
П. В. Семенов

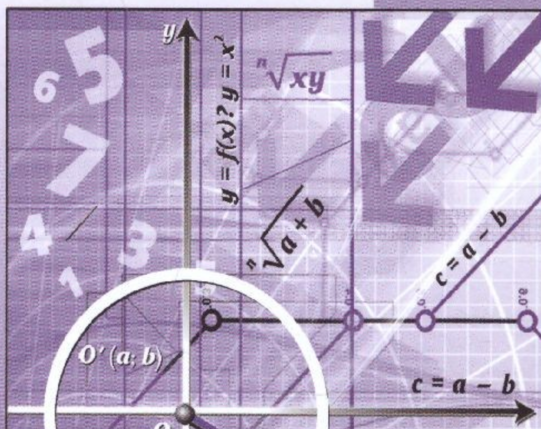
ФГОС

Алгебра

9

Углублённый уровень

часть 1



издательство
Мнемозина

А. Г. Мордкович
Н. П. Николаев
П. В. Семенов

Алгебра

9

часть 1

УЧЕБНИК
для общеобразовательных организаций
(углублённый уровень)

Рекомендовано Министерством просвещения Российской Федерации

13-е издание, стереотипное

Москва 2019

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6
М79

На учебник получены положительные заключения по результатам трёх экспертиз: научной (Российская академия наук, № 004948 от 19.12.2016), педагогической (Российская академия наук, № 005055 от 19.12.2016) и общественной (РШБА, № ОЭ/16-0383 от 26.12.2016)

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра. 9 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (углублённый уровень). В 2 ч. Ч. 1 / [А. Г. Мордкович и др.]. — 13-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2019. — 288 с. : ил.

ISBN 978-5-346-04286-0

Учебник написан в соответствии с ФГОС ООО, реализует авторскую концепцию, в которой приоритетной содержательно-методической основой является функционально-графическая линия, а идейным стержнем курса — математический язык и математическая модель, с помощью которых строится описание реальных ситуаций окружающей действительности. В учебнике реализованы принципы проблемного, развивающего и опережающего обучения.

Подбор и последовательность учебного материала позволяют изучать предмет как на базовом, так и на углублённом уровне в соответствии с Примерной основной общеобразовательной программой.

Электронная форма учебника содержит соответствующий мультимедийный материал и тесты для самопроверки.

Первая часть учебника содержит теоретический материал, написанный понятным языком, доступным для всех учащихся.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Николаев Николай Петрович, **Семенов** Павел Владимирович

АЛГЕБРА

9 класс

УЧЕБНИК
для общеобразовательных организаций
(углублённый уровень)
В двух частях
Часть 1

Формат 70×90 1/16. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,06. Доп. тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство «Мнемозина».
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б. Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 6781.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин.
Тел.: 8 (495) 783 8284. www.shop.mnemozina.ru

Отпечатано в АО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Ульяновский Дом Печати».
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.

ISBN 978-5-346-04285-3 (общ.)
ISBN 978-5-346-04286-0 (ч. 1)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие девятиклассники! Учебник для изучения курса алгебры в 9-м классе состоит из двух книг: первая часть содержит теоретический материал, вторая часть содержит практический материал, в котором представлено большое количество разноуровневых заданий по каждой теме. Сейчас вы держите в руках первую часть. Структурно книга состоит из пяти глав, в каждой главе есть параграфы, часть которых разделена на пункты. В конце каждого параграфа приведены вопросы для самопроверки. Закончив изучение параграфа, прочитайте вопросы для самопроверки и попробуйте ответить на них. Если возникнут затруднения, всегда можно в соответствующем параграфе учебника найти ответы на все вопросы.

Каждая глава заканчивается разделом «Основные результаты». Это своеобразный смотр достижений, «сухой остаток», подведение итогов, что для успешности процесса обучения очень важно. В электронной форме учебника представлен тест, выполнив который вы сможете проверить свои знания по теме. Кроме того, в конце каждой главы приведены темы исследовательских работ, которые помогут вам расширить знания по математике и создать свой ученический проект.

Оглавление и предметный указатель, помещённые в конце книги, помогут вам быстро найти нужный раздел, определение того или иного понятия или теорему. Для облегчения навигации текст снабжён графическими пиктограммами.

Желаем вам успехов!

Авторы

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Решение примера согласно предложенному ранее алгоритму

Ключевое место в рассуждении

Новые понятия и термины

Обратите внимание!
Текст для вдумчивого чтения!

1 ГЛАВА НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ

§ 1 РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1 Равносильность неравенств

рациональное неравенство с одной переменной

решение неравенства

В курсе алгебры 8-го класса вы встречались с частными случаями рациональных неравенств — линейными и квадратными неравенствами с одной переменной (ниже, в примерах 1—4, мы напомним, как решают такие неравенства). Вообще **рациональным неравенством с одной переменной** называют неравенство вида $h(x) > q(x)$ (вместо знака $>$ может быть знак $<$, $\geqslant$, $\leqslant$), где $h(x)$ и $q(x)$ — *рациональные выражения*, т. е. выражения, составленные из чисел и переменной x с помощью операций сложения, умножения, деления и возведения в натуральную степень (разумеется, переменная может быть обозначена любой другой буквой).

Прежде чем говорить о приёмах решения рациональных неравенств, напомним некоторые термины.

Значение переменной x, которое обращает неравенство $h(x) > q(x)$ в верное числовое неравенство, называют **решением неравенства** (или **частным решением**). Множество всех частных решений неравенства называют **общим решением** (или просто **решением**) **неравенства**.

Как видите, термин «решение» употребляют и в смысле общего, и в смысле частного решения неравенства. Более того, сам процесс поиска решений неравенства тоже называют решением неравенства. Обычно по тексту бывает ясно, какой смысл вкладывается в слово «решение».

равносильные неравенства

равносильное преобразование неравенства

Неравенства $f(x) < g(x)$ и $r(x) < s(x)$ называют **равносильными**, если они имеют одинаковые решения (или оба не имеют решений).

Обычно при решении стараются заменить неравенство более простым равносильным ему неравенством. Такую замену называют **равносильным преобразованием неравенства**. Правила, по которым это можно сделать, указаны ниже.

Правило 1 Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с **противоположным** знаком, **не меняя** при этом знака неравенства.

Например, неравенство $3x + 5 < x^2$ равносильно неравенству $-x^2 + 3x + 5 < 0$: член x^2 перенесли из правой части неравенства в левую с противоположным знаком.

Правило 2 Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же **положительное** число, **не меняя** при этом знака неравенства.

Например, неравенство $8x - 4 > 12x^2$ равносильно неравенству $2x - 1 > 3x^2$: обе части первого неравенства разделили на положительное число 4.

Правило 3 Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же **отрицательное** число, **изменив** при этом знак неравенства на противоположный ($<$ на $>$, $\leqslant$ на $\geqslant$).

Например, неравенство $-2x^2 - 3x + 1 \leqslant 0$ равносильно неравенству $2x^2 + 3x - 1 \geqslant 0$: обе части неравенства умножили на отрицательное число -1, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Замечание 1 Слово «можно» в формулировках правил 1—3 означает, что после выполнения указанных преобразований получится неравенство, равносильное данному.

Правила 2 и 3 допускают следующие обобщения (соответствующие утверждения представляют собой теоремы, которые мы для удобства оформим в виде правил).

Правило 2* Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, **положительное** при всех значениях x, и **сохранить знак** исходного неравенства, то получится неравенство, равносильное исходному.

Правило 3* Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, **отрицательное** при всех значениях x, и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное исходному.

Например, неравенство $(2x + 1)(x^2 + 2) > 0$ равносильно неравенству $2x + 1 > 0$: обе части исходного неравенства разделили на выражение $x^2 + 2$, положительное при любых значениях x; при этом знак исходного неравенства сохраняется.

Неравенство $\frac{3x - 4}{-x^4 - 1} > 0$ равносильно неравенству $3x - 4 < 0$: обе части исходного неравенства умножили на выражение $-x^4 - 1$, отрицательное при любых значениях x; при этом знак исходного неравенства изменили на противоположный.

Доказательство Докажем теорему, составляющую содержание правила 2*.

Дано неравенство

$$h(x) > q(x); \tag{1}$$

умножим обе его части на выражение $p(x)$, положительное при всех значениях x, и рассмотрим неравенство

$$h(x)p(x) > q(x)p(x). \tag{2}$$

Докажем, что неравенства (1) и (2) равносильны.

Пусть $x = a$ — частное решение неравенства (1), тогда $h(a) > q(a)$ — верное числовое неравенство.

По условию выражение $p(x)$ положительно при всех значениях x, следовательно, $p(a) > 0$. Если обе части числового неравенства $h(a) > q(a)$ умножить на положительное число $p(a)$, то получится $h(a)p(a) > q(a)p(a)$ — верное числовое неравенство. Это значит, что $x = a$ — частное решение неравенства (2).

Пусть теперь $x = b$ — частное решение неравенства (2), тогда $h(b)p(b) > q(b)p(b)$ — верное числовое неравенство. Но $p(b) > 0$, значит, обе части числового неравенства $h(b)p(b) > q(b)p(b)$ можно разделить на $p(b)$, сохранив знак неравенства. В результате получится $h(b) > q(b)$ — верное числовое неравенство, т. е. $x = b$ — частное решение неравенства (1).

Итак, любое частное решение неравенства (1) является в то же время частным решением неравенства (2) и, наоборот, любое частное решение неравенства (2) является частным решением неравенства (1). Это означает, что множества частных решений, т. е. общие решения обоих неравенств, совпадают. Следовательно, неравенства (1) и (2) равносильны.

Все остальные правила доказываются аналогично.

2 Линейные и квадратные неравенства

ПРИМЕР 1

Решить неравенство $\frac{x}{3} + \frac{2x - 1}{5} > 2x - \frac{1}{15}$.

Решение Воспользуемся правилом 2: умножим обе части неравенства на положительное число 15, оставив знак неравенства без изменения. Это преобразование позволит нам освободиться от знаменателей:

$$15\left(\frac{x}{3} + \frac{2x - 1}{5}\right) > 15\left(2x - \frac{1}{15}\right);$$

$$5x + 3(2x - 1) > 30x - 1;$$
$$11x - 3 > 30x - 1.$$

Последнее неравенство равносильно исходному.

Воспользовавшись правилом 1 решения неравенств, перенесём член $30x$ из правой части неравенства в левую, а член -3 — из левой части в правую, поменяв при этом их знаки на противоположные:

$$11x - 30x > -1 + 3;$$
$$-19x > 2.$$

Наконец, применив правило 3, получим $x < -\frac{2}{19}$.

Ответ $x < -\frac{2}{19}$, или $\left(-\infty; -\frac{2}{19}\right)$.

ПРИМЕР 2

Решить неравенство $3x + 9 < 2x^2$.

Решение Воспользовавшись правилом 1, преобразуем неравенство к виду $-2x^2 + 3x + 9 < 0$.

Найдём корни квадратного трёхчлена $-2x^2 + 3x + 9$, решив квадратное уравнение $-2x^2 + 3x + 9 = 0$: $x_1 = 3$, $x_2 = -1{,}5$.

Парабола, служащая графиком функции $y = -2x^2 + 3x + 9$, пересекает ось x в точках 3 и $-1{,}5$, а ветви параболы направлены вниз, поскольку старший коэффициент квадратного трёхчлена равен -2, т. е. является отрицательным числом.

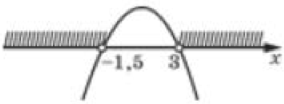


Рис. 1

На рис. 1 схематически изображён график функции. Как видите, ось y не обозначена, поскольку для ответа на вопрос задачи нам не надо знать точного её расположения. Мы воспользуемся лишь тем, что $y < 0$ в нижней полуплоскости относительно оси x.

Итак, $y < 0$ на открытом луче $(-\infty; -1{,}5)$ или на открытом луче $(3; +\infty)$.

Ответ $x < -1{,}5$; $x > 3$.

Полезно вспомнить два утверждения, которые были доказаны в курсе алгебры 8-го класса.

1. *Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней (т. е. его дискриминант — отрицательное число) и при этом $a > 0$, то при всех значениях x выполняется неравенство*

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Иными словами, если $D < 0$, $a > 0$, то неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ выполняется при всех значениях x, а неравенство $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ в этом случае не имеет решений.

2. *Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней (т. е. его дискриминант — отрицательное число) и при этом $a < 0$, то при всех значениях x выполняется неравенство*

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Иными словами, если $D < 0$, $a < 0$, то неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ выполняется при всех значениях x, а неравенство $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ в этом случае не имеет решений.

Эти утверждения — частные случаи следующей теоремы.

ТЕОРЕМА

Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ с отрицательным дискриминантом при всех значениях x имеет знак старшего коэффициента a.

ПРИМЕР 3

Решить неравенство:

а) $2x^2 - x + 4 > 0$; б) $-x^2 + 3x - 8 \geqslant 0$.

Решение а) Дискриминант D квадратного трёхчлена $2x^2 - x + 4$ равен $(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -31$, т. е. $D < 0$. Старший коэффициент трёхчлена (число 2) положителен. Значит, по теореме при всех значениях x выполняется неравенство $2x^2 - x + 4 > 0$, т. е. решением заданного неравенства служит вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$.

б) Дискриминант D квадратного трёхчлена $-x^2 + 3x - 8$ равен $3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = -23$, т. е. $D < 0$. Старший коэффициент трёхчлена (число -1) отрицателен. Следовательно, по теореме при всех значениях x выполняется неравенство $-x^2 + 3x - 8 < 0$. Это значит, что заданное неравенство $-x^2 + 3x - 8 \geqslant 0$ не выполняется ни при каком значении x, т. е. оно не имеет решений.

Ответ а) $(-\infty; +\infty)$; б) нет решений.

Следующий пример напомнит ещё один способ рассуждений при решении неравенств.

ПРИМЕР 4

Решить неравенство $x^2 - 6x + 8 > 0$.

Решение Разложим квадратный трёхчлен $x^2 - 6x + 8$ на множители. Корнями трёхчлена являются числа 2 и 4. Воспользовавшись формулой $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, получим:

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4).$$

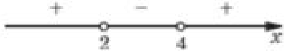


Рис. 2

Отметим на числовой прямой корни трёхчлена (рис. 2). Выясним, когда произведение $(x - 2)(x - 4)$ положительно, а когда — отрицательно.

Если $x > 4$, то $x - 2 > 0$ и $x - 4 > 0$, значит, $(x - 2)(x - 4) > 0$.

Если $2 < x < 4$, то $x - 2 > 0$, а $x - 4 < 0$, значит, $(x - 2)(x - 4) < 0$.

Если $x < 2$, то $x - 2 < 0$ и $x - 4 < 0$, а потому $(x - 2)(x - 4) > 0$.

Нам нужно ответить на вопрос: при каких значениях переменной x квадратный трёхчлен $x^2 - 6x + 8$ принимает положительные значения? С помощью геометрической иллюстрации, представленной на рис. 2, делаем вывод: указанный квадратный трёхчлен принимает положительные значения на двух открытых лучах $(-\infty; 2)$ и $(4; +\infty)$.

Ответ $x < 2$; $x > 4$.

3 Метод интервалов

Метод рассуждений, который мы применили в примере 4, называют обычно *методом интервалов* (или *методом промежутков*). Он активно используется в математике при решении рациональных неравенств.

метод интервалов

Используя его, обычно преобразуют заданное рациональное неравенство к виду $f(x) > 0$, где $f(x)$ — алгебраическая дробь или многочлен. Далее раскладывают числитель и знаменатель дроби на множители вида $x - a$ (если, конечно, это возможно) и рассуждают, как в примере 4.

ПРИМЕР 5

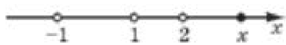
Решить неравенство $(x - 1)(x + 1)(x - 2) > 0$.

Решение Рассмотрим многочлен $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$.

Он обращается в 0 в точках 1, −1, 2; отметим эти точки на числовой прямой (рис. 3). Числовая прямая разбивается указанными точками на четыре промежутка, на каждом из которых $f(x)$ сохраняет постоянный знак. Проверим это утверждение (для каждого из указанных промежутков в отдельности).

Рис. 3

Рис. 4



Возьмём произвольную точку x из промежутка $(2; +\infty)$. Она расположена на числовой прямой правее точки 2. Это значит, что $x > -1$, $x > 1$, $x > 2$ (рис. 4). Но тогда $x + 1 > 0$, $x - 1 > 0$, $x - 2 > 0$ и $f(x) > 0$ (как произведение трёх положительных чисел). Итак, на всём промежутке $(2; +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) > 0$.

Пусть теперь произвольная точка x лежит в интервале $(1; 2)$, т. е. расположена на числовой прямой правее точки 1, но левее точки 2. Значит, $x > -1$, $x > 1$ и $x < 2$ (рис. 5), а потому $x + 1 > 0$, $x - 1 > 0$, $x - 2 < 0$ и $f(x) < 0$ (как произведение двух положительных чисел и одного отрицательного). Итак, на всём промежутке $(1; 2)$ выполняется неравенство $f(x) < 0$.

Рис. 5

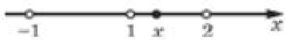
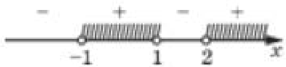


Рис. 6


Рис. 7


Рис. 8


Аналогично на всём промежутке $(-1; 1)$ выполняется неравенство $f(x) > 0$ (рис. 6), а на промежутке $(-\infty; -1)$ — неравенство $f(x) > 0$ (рис. 7).

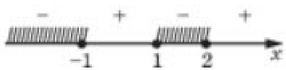
Подведём итоги. Знаки многочлена $f(x)$ в выделенных промежутках таковы, как показано на рис. 8. Нас интересуют те промежутки, на которых выполняется неравенство $f(x) > 0$. Оно выполняется на интервале $(-1; 1)$ и на открытом луче $(2; +\infty)$.

Ответ $-1 < x < 1$; $x > 2$.

ПРИМЕР 6

Решить неравенство $(x - 1)(x + 1)(x - 2) \leqslant 0$.

Решение Воспользуемся геометрической иллюстрацией предыдущего примера (см. рис. 8), но внесём в неё два изменения. Во-первых, поскольку нас интересует, при каких значениях x выполняется неравенство $f(x) < 0$, нам придётся выбрать промежутки $(-\infty; -1)$ и $(1; 2)$. Во-вторых, нас устраивают и те точки, в которых выполняется равенство $f(x) = 0$. Это точки -1, 1, 2, отметим их на рисунке тёмными кружочками. На рис. 9 представлена геометрическая иллюстрация решения, от которой нетрудно перейти к аналитической записи.

Рис. 9


Ответ $x \leqslant -1$; $1 \leqslant x \leqslant 2$.

ПРИМЕР 7

Решить неравенство $2x - 3x^3 - x^2 \leqslant 0$.

Решение Удобнее расположить члены неравенства в левой части по порядку убывания степеней. Кроме того, как показывает опыт, желательно, чтобы старший коэффициент был положительным. Но для этого нужно обе части неравенства умножить на -1 и изменить знак неравенства: $3x^3 + x^2 - 2x \geqslant 0$ Далее имеем: $x(3x^2 + x - 2) \geqslant 0$. Найдём корни квадратного трёхчлена $3x^2 + x - 2$, а именно: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$; $x_1 = \dfrac{2}{3}$, $x_2 = -1$. Теперь этот трёхчлен можно разложить на множители:

$$3x^2 + x - 2 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 1).$$

Интересующее нас неравенство теперь перепишем в следующем виде:

$$3x\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 1) \geqslant 0.$$

Отметим на числовой прямой точки 0, $\frac{2}{3}$, -1. Знаки выражения $3x\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 1)$ на полученных промежутках указаны на рис. 10. Осталось записать аналитически найденные числовые промежутки.

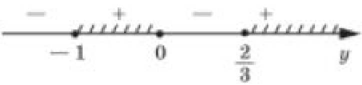


Рис. 10

Ответ $-1 \leqslant x \leqslant 0$; $x \geqslant \dfrac{2}{3}$.

4 Дробно-рациональные неравенства

ПРИМЕР 8

Решить неравенство $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 5x - 6} < 0$.

Решение Разложим на множители числитель и знаменатель алгебраической дроби. В числителе получаем

$$x^2 - x = x(x - 1).$$

Чтобы разложить на множители квадратный трёхчлен $x^2 - 5x - 6$, содержащийся в знаменателе дроби, найдём его корни: $x_1 = -1$, $x_2 = 6$. Значит,

$$x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6).$$

Таким образом, мы преобразовали заданное неравенство к виду

$$\frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x - 6)} < 0.$$

Рассмотрим выражение

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-6)}.$$

Числитель этой дроби обращается в 0 в точках 0 и 1, а знаменатель обращается в 0 в точках −1 и 6. Отметим их на числовой прямой (рис. 11), которая разбивается указанными точками на пять промежутков, причём на каждом промежутке выражение $f(x)$ сохраняет свой знак. Знаки указаны на рис. 11, они определяются аналогично тому, как это было сделано в примере 5. Нас интересует, где выполняется неравенство $f(x) < 0$. С помощью полученной иллюстрации устанавливаем, что $f(x) < 0$ на интервале $(-1; 0)$ и на интервале $(1; 6)$.

Рис. 11

Ответ $-1 < x < 0;\ 1 < x < 6.$

ПРИМЕР 9

Решить неравенство $\dfrac{6x^2 - 5x + 4}{6x^2 - x - 2} \geqslant 1.$

Решение

$$\frac{6x^2 - 5x + 4}{6x^2 - x - 2} - 1 \geqslant 0;$$

$$\frac{6x^2 - 5x + 4 - 6x^2 + x + 2}{6x^2 - x - 2} \geqslant 0;$$

$$\frac{-4x + 6}{6x^2 - x - 2} \geqslant 0.$$

Если в правой части неравенства содержится только число 0, удобнее проводить рассуждения в случае, когда в левой его части и числитель, и знаменатель дроби имеют положительные старшие коэффициенты. Умножив обе части неравенства на −1 и изменив при этом знак неравенства на противоположный, получим равносильное ему неравенство

$$\frac{4x - 6}{6x^2 - x - 2} \leqslant 0.$$

Далее разложим числитель и знаменатель алгебраической дроби $\dfrac{4x - 6}{6x^2 - x - 2}$ на множители. Числитель запишем так: $4\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

Чтобы разложить на множители содержащийся в знаменателе дроби квадратный трёхчлен $6x^2 - x - 2$, найдём его корни: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Значит,

$$6x^2 - x - 2 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

(мы снова, как и в примере 7, воспользовались формулой разложения на множители квадратного трёхчлена).

Тем самым заданное неравенство приобрело вид

$$\frac{4\left(x - \frac{3}{2}\right)}{6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)} \leqslant 0.$$

Рассмотрим выражение

$$f(x) = \frac{4\left(x - \frac{3}{2}\right)}{6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)}.$$

Числитель этой дроби обращается в 0 в точке $\left(x - \frac{3}{2}\right)$, а знаменатель — в точках $\frac{2}{3}$ и $-\frac{1}{2}$. Отметим их на числовой прямой (рис. 12, *а*), которая разбивается указанными точками на четыре промежутка, причём на каждом промежутке выражение $f(x)$ сохраняет знак. Нас интересуют те промежутки, на которых выполняется неравенство $f(x) < 0$, они заштрихованы на рис. 12, *б*. По условию нас интересуют и те точки x, в которых выполняется равенство $f(x) = 0$. Такая точка только одна — это точка $x = \left(x - \frac{3}{2}\right)$. (она отмечена тёмным кружочком), поскольку лишь при этом значении числитель дроби $f(x)$ обращается в нуль. Таким образом, на рис. 12 представлена полная иллюстрация решения заданного неравенства, от которой нетрудно перейти к аналитической записи.

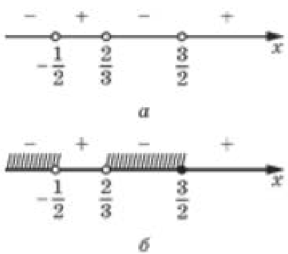


Рис. 12

Ответ $x < -\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3} < x \leqslant \frac{3}{2}$.

Во всех рассмотренных примерах мы преобразовывали заданное неравенство в равносильное ему неравенство вида $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$, где

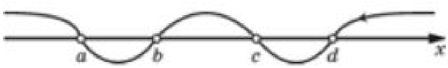
$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$$

кривая знаков

(количество множителей в числителе и знаменателе дроби может быть любым). Затем отмечали на числовой прямой точки a, b, c, d и определяли знаки выражения $f(x)$ на выделенных промежутках. Обратите внимание, что знаки выражения $f(x)$ чередуются (рис. 13). Это чередование удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой, которая чертится справа налево, начиная сверху; она показана на рис. 14. На тех промежутках, где эта кривая (её иногда называют *кривой знаков*) расположена выше оси x, выполняется неравенство $f(x) > 0$; на тех промежутках, где эта кривая расположена ниже оси x, выполняется неравенство $f(x) < 0$.

Рис. 13

Рис. 14



ПРИМЕР 10

Решить неравенство $\dfrac{x^3 - 7x}{(2x+3)(3x-8)} \geqslant 0$.

Решение Преобразуем данное неравенство к виду

$$\frac{x(x^2-7)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)3\left(x-\frac{8}{3}\right)} \geqslant 0$$

и умножим обе части неравенства на 6:

$$\frac{x\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{8}{3}\right)} \geqslant 0.$$

Чтобы воспользоваться методом интервалов, отметим на числовой прямой точки 0, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$ (в этих точках числитель дроби обращается в нуль) и точки $-\dfrac{3}{2}$ и $\dfrac{8}{3}$ (в этих точках знаменатель дроби обращается в нуль). Обычно точки отмечают схематически, учитывая порядок их следования (какая — правее, какая — левее), и не особенно обращают внимание на соблюдение масштаба. Ясно, что $-\sqrt{7} < -\frac{3}{2} < 0$. Что касается чисел $\sqrt{7}$ и $\frac{8}{3}$, то $\sqrt{7} = 2{,}65$, а $\frac{8}{3} = 2{,}67$, значит, $\sqrt{7} < \frac{8}{3}$.

Итак, $-\sqrt{7} < -\frac{3}{2} < 0 < \sqrt{7} < \frac{8}{3}$.

Отметим эти точки в указанном порядке на числовой прямой (рис. 15). Расставим знаки выражения

$$f(x) = \frac{x\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{8}{3}\right)} \geqslant 0$$

на полученных промежутках: на самом правом ставим знак «+», а далее знаки чередуются (рис. 16). Выделим штриховкой те промежутки, на которых выполняется интересующее нас неравенство $f(x) > 0$ (рис. 17). Учтём, наконец, что речь идёт о *нестрогом неравенстве* $f(x) \geqslant 0$, значит, нас интересуют и те точки, в которых выражение $f(x)$ обращается в нуль. Это корни числителя дроби $f(x)$, т. е. точки 0, $-\sqrt{7}$ и $\sqrt{7}$; отметим их на числовой прямой (см. рис. 17) тёмными кружочками. Вот теперь рис. 17 даёт полное представление о решении заданного неравенства.

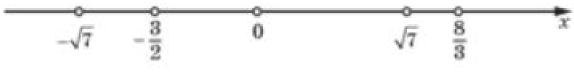


Рис. 15

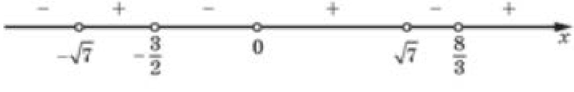


Рис. 16

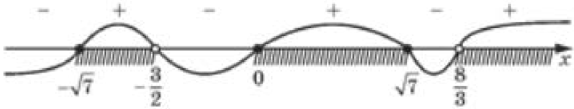


Рис. 17

Ответ $-\sqrt{7} \leqslant x < -\frac{3}{2}$; $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{7}$; $x > \frac{8}{3}$.

5 Обобщение метода интервалов

Встречаются рациональные неравенства, при решении которых метод интервалов следует применять с осторожностью и некоторыми поправками. Проиллюстрируем это заключительными примерами параграфа.

ПРИМЕР 11

Решить неравенство $(x-1)^2(x+2) < 0$.

Решение Рассмотрим выражение $f(x) = (x-1)^2(x+2)$, отметим точки 1 и -2 на числовой прямой и определим знаки $f(x)$ на каждом из трёх полученных промежутков.

Если $x \in (1; +\infty)$, т. е. $x > 1$, то

$$(x-1)^2 > 0,\ x+2 > 0.$$

Значит, выполняется неравенство $f(x) > 0$.

Если $x \in (-2; 1)$, т. е. $-2 < x < 1$, то

$$(x-1)^2 > 0,\ x+2 > 0.$$

Значит, выполняется неравенство $f(x) > 0$.

Если $x \in (-\infty; -2)$, т. е. $x < -2$, то

$$(x-1)^2 > 0,\ x+2 < 0.$$

Значит, выполняется неравенство $f(x) < 0$.

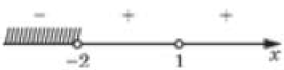


Рис. 18

Изменение знаков выражения $f(x)$ показано на рис. 18. Нас интересует случай, когда $f(x) < 0$; выбираем открытый луч $(-\infty; -2)$.

Ответ $x < -2$.

Замечание 2 Если бы заданное в примере 11 неравенство было нестрогим, т. е. имело вид $(x-1)^2(x+2) \leqslant 0$, то геометрическая модель решения изменилась бы: точки 1 и -2 следовало бы отметить закрашенными кружочками и включить в ответ (рис. 19). Решение неравенства имело бы тогда следующий вид: $x \leqslant -2$; $x = 1$.

Рис. 19

В только что разобранном примере 11 не было того чередования знаков, на которое мы обращали внимание ранее, а потому и «кривую знаков» здесь чертить не стоит. Привычная картина нарушена из-за того, что в выражении $f(x)$ фигурирует множитель $(x-1)^2$, из-за него при переходе через точку $x = 1$ знак выражения не меняется.

Так же обстоит дело с любыми множителями вида $(x-a)^n$, где n — чётное число. Если же в выражении содержится множитель вида $(x-a)^n$, где n — нечётное число, то при переходе через точку $x = a$ знак выражения меняется. Советуем вам в подобных случаях не чертить «кривую знаков», а определять во всех полученных промежутках знаки выражения.

ПРИМЕР 12

Решить неравенство $\dfrac{x^2(3x+4)^3(x-2)^4}{(x-5)^5(2x-7)^6} \geqslant 0$.

Решение Отметим на числовой прямой корни числителя — точки 0, $-\dfrac{4}{3}$, 2, и корни знаменателя — точки 5 и 3,5 (рис. 20).

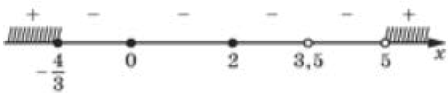


Рис. 20

Выражение $f(x) = \dfrac{x^2(3x+4)^3(x-2)^4}{(x-5)^5(2x-7)^6}$ принимает положительные значения при $x > 5$, а далее по промежуткам знаки $f(x)$ меняются так, как показано на рис. 20 (обратите внимание, что слева и справа от точек 0, 2 и 3,5 знаки одинаковы, а слева и справа от точек $-\dfrac{4}{3}$ и 5 — различны; это как раз и связано с чётностью или нечётностью соответствующих показателей). Заштрихуем промежутки, на которых $f(x) > 0$, и закрасим точки, в которых $f(x)$ обращается в 0 (корни числителя). Полученная геометрическая иллюстрация решения заданного неравенства позволяет составить аналитическую запись решения.

Ответ $x \leqslant -\dfrac{4}{3}$; $x = 0$; $x = 2$; $x > 5$.

ПРИМЕР 13

Решить неравенство $\dfrac{19 - x^2 - 4x}{49 - x^2} < \dfrac{3}{7+x}$.

Решение Преобразуем неравенство к виду

$$\frac{19 - x^2 - 4x}{49 - x^2} - \frac{3}{7+x} < 0.$$

Преобразуем выражение, стоящее в левой части неравенства:

$$\frac{19 - x^2 - 4x}{49 - x^2} - \frac{3}{7 + x} = \frac{19 - x^2 - 4x}{(7 - x)(7 + x)} - \frac{3^{\overline{7-x}}}{7 + x} =$$

$$= \frac{19 - x^2 - 4x - 3(7 - x)}{(7 - x)(7 + x)} = \frac{-x^2 - x - 2}{(7 - x)(7 + x)} = \frac{x^2 + x + 2}{(x - 7)(x + 7)}.$$

Таким образом, задача сводится к решению неравенства

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x - 7)(x + 7)} < 0.$$

Дискриминант D квадратного трёхчлена $x^2 + x + 2$ отрицателен:

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7.$$

Значит, корней у трёхчлена нет, а потому формула $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ здесь неприменима. Как же быть?

Ответ на этот вопрос даёт сформулированная выше теорема: если у квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент, то трёхчлен принимает *положительные* значения при всех значениях x. Но тогда на него можно разделить обе части неравенства, не меняя знака неравенства: это приведёт к неравенству, равносильному данному. Итак, от неравенства $\frac{x^2 + x + 2}{(x - 7)(x + 7)} < 0$ мы переходим к равносильному ему и более простому неравенству $\frac{1}{(x - 7)(x + 7)} < 0$.

Рис. 21

Воспользовавшись методом интервалов (рис. 21), выбираем в качестве решения неравенства интервал $(-7; 7)$.

Ответ $-7 < x < 7$.

При решении квадратных неравенств советуем не злоупотреблять методом интервалов. Пусть, например, нужно решить неравенство $3x^2 - 2x - 2 < 0$. Корнями квадратного трёхчлена $3x^2 - 2x - 2$ являются числа $x_1 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{7}}{3}$. Пользоваться здесь формулой $3x^2 - 2x - 2 = 3(x - x_1)(x - x_2)$ обременительно. Проще отметить найденные корни на числовой прямой, учитывая при этом, что $x_2 < x_1$, и схематически построить проходящую через эти точки параболу $y = 3x^2 - 2x - 2$ с ветвями вверх (рис. 22), а затем выбрать промежуток, на котором парабола расположена ниже числовой прямой — интервал $(x_2; x_1)$. Это и есть решение неравенства.

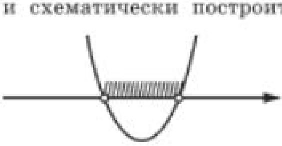


Рис. 22

Вопросы для самопроверки

1. Что называют частным решением неравенства с одной переменной?
2. Что называют общим решением (или просто решением) неравенства с одной переменной?
3. В каком случае неравенства $f(x) > g(x)$ и $r(x) < s(x)$ называют равносильными?
4. Известно, что оба неравенства $f(x) > g(x)$ и $p(x) < h(x)$ не имеют решений. Можно ли назвать их равносильными?
5. Сформулируйте правила решения неравенства с одной переменной.
6. Расскажите, как, применяя правила, вы решите неравенство:

   а) $3x + 10 \leqslant 0$; б) $3x + 6 > 5x + 14$.
7. Опишите алгоритм решения неравенства $ax^2 + bx + c > 0$, где $a \neq 0$. Примените этот алгоритм для решения неравенства $x^2 - 4x + 3 > 0$.
8. Опишите алгоритм решения неравенства $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где $a \neq 0$. Примените этот алгоритм для решения неравенства $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$.
9. Известно, что дискриминант D квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен и $a > 0$. Что вы скажете о решении неравенства:

   а) $ax^2 + bx + c > 0$; в) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$;
   б) $ax^2 + bx + c < 0$; г) $ax^2 + bx + c \leqslant 0$?
10. Известно, что дискриминант D квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен и $a < 0$. Что вы скажете о решении неравенства:

   а) $ax^2 + bx + c > 0$; в) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$;
   б) $ax^2 + bx + c < 0$; г) $ax^2 + bx + c \leqslant 0$?
11. Расскажите, в чём состоит метод решения неравенств, называемый методом интервалов, и примените его для решения неравенства:

   а) $x(x + 1)(x - 2) < 0$; в) $(x - 1)^2(x - 3)^3 (x + 4) > 0$.
   б) $(x - 1)(x - 3)(x + 4) \geqslant 0$;
12. Верно ли такое решение неравенства $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$: так как $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$, то, перейдя к обратным числам, получим $x \geqslant 3$? Решите неравенство $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$, применяя правила и метод интервалов.

   Сравните полученное решение с найденным выше ($x \geqslant 3$). Почему получились разные результаты?

§2 МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1 Множества и подмножества

В этом параграфе мы рассмотрим простейшие понятия и обозначения *языка теории множеств*, который вот уже более ста лет составляет своеобразный фундамент, базис современного математического языка.

Множество состоит из элементов. Если этих элементов немного, то удобно все элементы просто перечислить в каком-нибудь порядке. Чтобы не забыть, что перечисляемые элементы объединены вместе в некоторое множество, такое перечисление производят внутри фигурных скобок { , }. Вот некоторые примеры.

Словесное описание множества	Поэлементное описание множества	Задание множества перечислением его элементов
Цифры десятичной системы счисления	Множество состоит из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
Гласные буквы русского алфавита	Множество состоит из букв А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я	{А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я}
Корни уравнения $x^2 + 10x - 39 = 0$	Множество состоит из чисел 3 и −13	{−13; 3}

Элементы множества можно перечислять в произвольном порядке. От изменения порядка перечисления элементов само множество не меняется. Например, {А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я} и {Я, И, Ы, Э, Ю, Ё, О, У, А, Е} — это одно и то же множество, состоящее из всех гласных букв русского алфавита.

Если множество не содержит ни одного элемента, его называют *пустым множеством* и обозначают $\varnothing$.

пустое множество

Чаще всего мы будем заниматься *числовыми* множествами, т. е. множествами, элементами которых являются числа. Для числовых множеств есть естественный порядок перечисления их элементов от меньшего числа к большему.

Если элементов во множестве много (например, несколько десятков, сотен и т. д.) или если множество бесконечно (например, множество всех натуральных или множество всех целых чисел), то явное перечисление элементов такого множества невозможно. Способы задания, описания таких множеств весьма разнообразны. Вот некоторые из них.

№	Задание множества	Словесное описание множества
1)	$\{10, 15, 20, \ldots, 90, 95\}$	Множество всех двузначных чисел, кратных 5
2)	$\{1, 4, 9, 16, 25, 49, \ldots\}$	Множество квадратов всех натуральных чисел
3)	$\boldsymbol{N}$	Множество натуральных чисел
4)	$\boldsymbol{Q}$	Множество рациональных чисел
5)	$\{x \mid 2 < x < 7\}$	Множество всех чисел, которые больше 2 и меньше 7
6)	$(2; 7)$	Множество всех чисел, которые больше 2 и меньше 7

В случаях 1) и 2) по нескольким предъявленным элементам множества мы по аналогии *догадываемся* о том, как устроено всё множество целиком. Этот способ в том или ином виде использует словесный оборот «...и так далее».

Некоторые числовые множества столь часто встречаются в различных разделах математики, что для них ввели специальные обозначения. Именно так обстоит дело в случаях 3) и 4) или, например, для множества целых чисел, которое обозначают $\boldsymbol{Z}$.

В случае 5) множество задано с помощью его *характеристического свойства*. Это один из самых распространённых способов задания множества. Символ «|» внутри фигурных скобок является сокращением слов «...таких, что...».

Наконец, в случае 6), как и в случаях 3) и 4), множество $\{x \mid 2 < x < 7\}$ задано с помощью специального обозначения. Здесь мы имеем дело с одним из наиболее типичных примеров числовых множеств — с интервалом. Наряду с интервалами мы очень часто встречаемся и с другими *числовыми промежутками*. Например, $\{x \mid a \leq x \leq b\} = [a; b]$ — отрезок с концами a и b; $\{x \mid x < b\} = (-\infty; b)$ — открытый луч с концом в точке b.

ПРИМЕР 1

По указанному заданию множества дать его словесное описание:

а) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$;

б) $\{2, 4, 6, \ldots, 18, 20\}$;

в) $\{12, 22, 32, \ldots, 92\}$;

г) $\{1, 8, 27, 64, 125, \ldots\}$.

Решение Словесные описания одного и того же множества могут выглядеть по-разному. Ведь в естественном разговорном языке одну и ту же мысль можно выразить по-разному. Поэтому в скобках приведём и другие возможные варианты ответов.

а) Множество всех чётных цифр (все цифры, кроме цифр 1, 3, 5, 7, 9);

б) множество всех чётных натуральных чисел, которые меньше 21 (все числа, полученные из чисел 1, 2, ..., 9, 10 умножением на 2);

в) множество всех двузначных чисел, оканчивающихся на 2 (все числа вида $10x + 2$, где x — любая цифра, кроме 0);

г) множество кубов всех натуральных чисел (множество значений функции $y = x^3$ для натуральных значений аргумента x).

ПРИМЕР 2

Решив соответствующее неравенство, составить более привычную запись числового множества:

а) $\{x \mid x^2 + 1 > 0\}$; в) $\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{x} > 1\right\}$;

б) $\{x \mid x^2 + 1 < 0{,}5\}$; г) $\{x \mid 35x^2 \leqslant 24x + 35\}$.

Решение а) Прочитаем запись $\{x \mid x^2 + 1 > 0\}$ шаг за шагом. Следует найти множество всех x таких, что $x^2 + 1 > 0$. Это неравенство верно для всех действительных чисел. Получаем ответ: вся числовая прямая; в символьной записи: $(-\infty; +\infty)$, или $\boldsymbol{R}$.

б) Следует найти множество всех x таких, что $x^2 + 1 < 0{,}5$, т. е. $x^2 < -0{,}5$. У этого неравенства нет решений. Впрочем в подобных случаях говорят так: решение — пустое множество, или, в символьной записи, $\varnothing$.

в) Следует найти множество решений неравенства $\frac{1}{x} > 1$. Имеем:

$$\frac{1}{x} - 1 > 0;\ \ \frac{1-x}{x} > 0;\ \ \frac{x-1}{x} < 0.$$

Воспользовавшись методом интервалов (рис. 23), получаем интервал $(0; 1)$.

Рис. 23

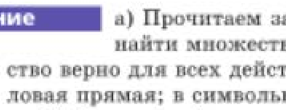


Рис. 24

г) $35x^2 \leqslant 24x + 35$; $35x^2 - 24x - 35 \leqslant 0$;

$$\frac{D}{4} = \sqrt{12^2 + 35^2} = \sqrt{1369} = 37;$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 37}{35};$$

$$x_1 = \frac{-25}{35} = -\frac{5}{7},\ \ x_2 = \frac{49}{35} = \frac{7}{5}.$$

Ветви параболы $y = 35x^2 - 24x - 35$ направлены вверх. Поэтому множество решений неравенства $35x^2 - 24x - 35 \leqslant 0$ — это отрезок между корнями $x_1 = -\frac{5}{7}$ и $x_2 = \frac{7}{5}$ (рис. 24).

Ответ а) R; б) $\varnothing$; в) $(0; 1)$; г) $\left[-\frac{5}{7}; \frac{7}{5}\right]$.

знак принадлежности

Такие словесные обороты, как «элемент x принадлежит множеству A» или «x является элементом множества A», достаточно длинные и не всегда удобны в записи решений конкретных задач. В математике эти выражения более кратко записывают так: $x \in A$. Смысл *знака принадлежности* $\in$ легко запомнить: $\in$ — это перевёрнутая буква «Э», т. е. буква, с которой как раз и начинается слово «элемент». Наряду со знаком принадлежности $\in$ используют и его «отрицание» — знак $\notin$. Запись $x \notin A$ является сокращением фразы «x не является элементом множества A». Например,

$3 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, а $13 \notin \{1, 3, 5, 7, 9\}$;

У $\in$ {А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я}, но Ь $\notin$ {А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я};

$2017 \in N$, тогда как $201{,}7 \notin N$;

$0 \in \{x \mid 35x^2 \leqslant 24x + 35\}$, а $2 \notin \{x \mid 35x^2 \leqslant 24x + 35\}$ (см. пример 2, г).

Заметим, что если неверно, что $x \in A$, то верно, что $x \notin A$. Наоборот, если верно, что $x \in A$, то неверно, что $x \notin A$.

ПРИМЕР 3

Верно ли, что:

а) $0 \in N$; в) $1 \in \{x \mid x^7 - 6x^6 + 3x^3 + 1 < 0\}$;

б) $0 \in Z$; г) $1 \in \left\{x \,\middle|\, \sqrt{x^2 - 2} > 30\right\}$?

Решение а) Нет. 0 не является натуральным числом. Значит, $0 \notin N$.

б) Да. Более того, само обозначение Z множества целых чисел получено от первой буквы слова «Zero» — нуль.*

в) Да. Подставим $x = 1$ в неравенство $x^7 - 6x^6 + 3x^3 + 1 < 0$. Получим верное числовое неравенство: $-1 < 0$.

г) Нет. При $x = 1$ не определена левая часть неравенства

$$\sqrt{x^2 - 2} > 30,$$

т. е. неверно и само неравенство.

* По другим данным, от немецкого слова Zahl — число.

Определение 1

Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то множество B называют **подмножеством** множества A. Обозначение: $B \subset A$. Знак $\subset$ называют знаком **включения**.

Знаки принадлежности $\in$ и включения $\subset$ несколько похожи друг на друга. Однако это принципиально разные знаки, и их не следует путать. Например, запись $1 \subset \{1, 2, 3\}$ ошибочна, так как в её левой части находится не множество, а элемент множества. В то же время с записью $1 \in \{1, 2, 3\}$ всё в порядке: она означает, что число 1 является элементом множества $\{1, 2, 3\}$. Всё в порядке и с записью $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$, которая означает, что одноэлементное множество $\{1\}$ является подмножеством трёхэлементного множества $\{1, 2, 3\}$, что, разумеется, верно. Запись $[1; 2] \in (0; 3)$ ошибочна, так как в её левой части находится не элемент, а множество. А вот запись $[1; 2] \subset (0; 3)$, как говорят, корректна и геометрически означает, что на числовой прямой отрезок $[1; 2]$ целиком содержится в интервале $(0; 3)$. Включение $[1; 2] \subset (0; 3)$ можно проверить и алгебраически: оно означает, что всякое решение неравенства $1 \leqslant x \leqslant 2$ будет решением неравенства $0 < x < 3$.

подмножество

знак включения

2 Пересечение множеств

Для наглядного объяснения различных *операций над множествами* очень удобно изображение множеств в виде плоских фигур. Обычно множества при этом изображают в виде некоторых кругов. Такие круги называют *кругами Эйлера* в честь великого швейцарского математика Леонарда Эйлера.

Начнём с операции *пересечения* множеств. Из курса геометрии эта операция хорошо известна в применении к простейшим плоским линиям и фигурам.

круги Эйлера

пересечение множеств

Определение 2

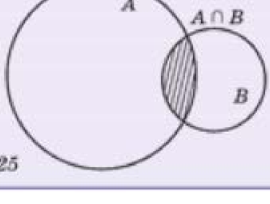


Рис. 25

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех общих элементов множеств A и B, т. е. из всех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B (рис. 25). Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$.

Используя уже известные способы задания множеств, это определение можно перевести из словесной записи в формульную:

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.}$$

ПРИМЕР 4

Найти пересечение $A \cap B$ множеств A и B:

а) $A = \{11, 22, \dots, 88, 99\}$, $B = \{3, 6, 9, \dots\}$;

б) A — множество различных букв, используемых в слове «перераспределение», B — множество различных букв, используемых в слове «реформирование»;

в) $A = (1; \sqrt{10})$, $B = N$;

г) A — множество точек окружности радиусом 1 с центром в начале координат, B — множество точек прямой $y = 3x - 5$.

Решение а) A — это множество всех двузначных чисел, кратных 11, B — это множество всех натуральных чисел, кратных 3. Число x принадлежит и множеству A, и множеству B, если оно двузначно и кратно как 11, так и 3, т. е. кратно 33. Таких чисел имеется ровно три: 33, 66 и 99.

Итак, $A \cap B = \{33, 66, 99\}$.

б) Выпишем все встречающиеся в указанных словах буквы по одному разу: $A = \{$п, е, р, а, с, д, л, н, и$\}$, $B = \{$р, е, ф, о, м, и, в, а, н$\}$. Рассмотрим по очереди все элементы первого множества. Так как п $\in A$, но п $\notin B$, то буква «п» не является общей для множеств A и B. Значит, п $\notin A \cap B$. Так как е $\in A$ и е $\in B$, то буква «е» является общей для множеств A и B. Значит, е $\in A \cap B$. Перебирая все буквы множеств A и B, получаем: $A \cap B = \{$е, р, а, н, и$\}$.

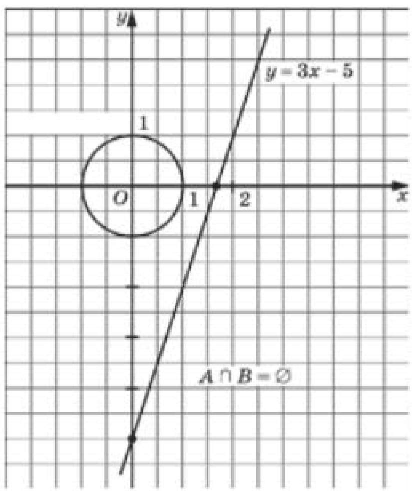


Рис. 26

в) Число 1 принадлежит множеству $B = N$, но не принадлежит множеству $A = (1; \sqrt{10})$: конец интервала не входит в сам интервал. Значит, $1 \notin A \cap B$. Так как $3 < \sqrt{10} < 4$, то числа 2 и 3 принадлежат и множеству A, и множеству B: $2 \in A \cap B$ и $3 \in A \cap B$. Все натуральные числа, начиная с 4, лежат вне интервала $(1; \sqrt{10})$. Значит, все эти числа не принадлежат пересечению $A \cap B$.

Итак, $A \cap B = \{2; 3\}$.

г) Допустим, что точка $(x; y)$ координатной плоскости принадлежит пересечению $A \cap B$. Так как она лежит на единичной окружности, то $x^2 + y^2 = 1$ (подробнее об окружностях на координатной плоскости мы поговорим в § 8). Так как она лежит на заданной прямой, то $y = 3x - 5$. Значит,

$$x^2 + (3x - 5)^2 = 1;$$
$$10x^2 - 30x + 24 = 0;$$
$$5x^2 - 15x + 12 = 0.$$

Найдём дискриминант полученного квадратного уравнения: $D = 15^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12 = 225 - 240 < 0$. Дискриминант отрицателен, значит, корней у квадратного уравнения $5x^2 - 15x + 12 = 0$ нет. Поэтому у множеств A и B нет общих точек. Такие множества называют *непересекающимися* (рис. 26). Пишут: $A \cap B = \varnothing$.

Можно рассматривать пересечения не только двух, но и трёх, четырёх и т. д. множеств. Например, *пересечением* множеств A, B и C называют множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B, и множеству C (рис. 27). Пересечение множеств A, B и C обозначают так: $A \cap B \cap C$.

С пересечением множеств мы встречаемся, когда речь идёт об одновременном выполнении нескольких условий. В алгебре типичным примером является *система уравнений* с одной переменной $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$ Если A — множество корней первого уравнения системы, а B — множество корней второго уравнения системы, то пересечение $A \cap B$ состоит из всех чисел, которые яв-

Леонард Эйлер (1707—1783), великий швейцарский, немецкий и российский математик и физик. Долгое время работал в России. Внёс фундаментальный вклад в математику, механику, физику, астрономию и ряд прикладных наук.

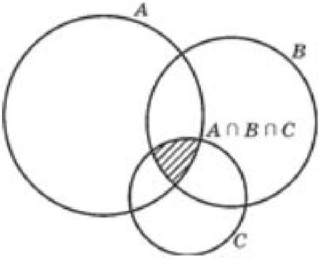


Рис. 27

ляются одновременно корнями и первого, и второго уравнений системы. Значит, пересечение $A \cap B$ представляет собой решение системы уравнений $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

ПРИМЕР 5

На школьной спартакиаде каждый из 25 учеников 9-го класса выполнил норматив по бегу или по прыжкам в высоту. Оба норматива выполнили 7 учеников, а 11 выполнили только норматив по бегу. Сколько учеников выполнили норматив по бегу, а сколько — по прыжкам в высоту?

Решение Воспользуемся кругами Эйлера (рис. 25). Круг A — это множество учеников, выполнивших норматив по бегу, круг B — это множество учеников, выполнивших норматив по прыжкам. Их пересечение, согласно условию, содержит 7 элементов, часть множества A без пересечения содержит 11 элементов. В классе 25 учеников, значит, часть множества B без пересечения содержит 7 элементов. Теперь нетрудно ответить на вопрос задачи: норматив по бегу выполнили $11 + 7 = 18$ учеников, а норматив по прыжкам выполнили $7 + 7 = 14$ учеников.

3 Объединение множеств

Использование операции пересечения множеств в математике соответствует использованию союза «и» в русском языке. Родственный ему союз «или» связан с другой операцией над множествами — *операцией объединения*.

Определение 3

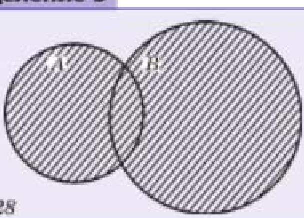


Рис. 28

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств — множеству A или множеству B (рис. 28). Объединение множеств A и B обозначают так: $A \cup B$.

Как и в случае пересечения, это определение можно перевести из словесной записи в формульную:

объединение множеств

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

ПРИМЕР 6

Найти объединение $A \cup B$ множеств A и B:

а) A — множество делителей числа 105, B — множество делителей числа 55;

б) A — множество цифр записи числа 3^5, B — множество цифр записи числа 2^{10};

в) $A = (1; \sqrt{10})$, $B = [2; 4]$;

г) A — множество точек координатной плоскости, у которых абсцисса больше 3, B — множество точек координатной плоскости, у которых ордината не больше 2.

Решение а) Разложим на простые множители числа 105 и 55. Так как $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, а $55 = 5 \cdot 11$, то $A = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$, а $B = \{1, 5, 11, 55\}$. Ко всем элементам множества A добавим все элементы множества B, которые ещё не встречались в A, т. е. добавим 11 и 55. Значит,

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 11, 15, 21, 35, 55, 105\}.$$

б) $3^5 = 243$, $2^{10} = 1024$. Значит, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 4\}$. Поступим, как и в задании а). Получим: $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

в) Тут удобнее работать с числовой прямой. Данные множества (числовые промежутки) $A = (1; \sqrt{10})$, $B = [2; 4]$ пересекаются, но ни одно из них не содержится целиком в другом (рис. 29). Используем для этих множеств различные штриховки и затем посмотрим, какое числовое множество в итоге мы заштриховали. Получится, что $A \cup B = (1; 4]$.

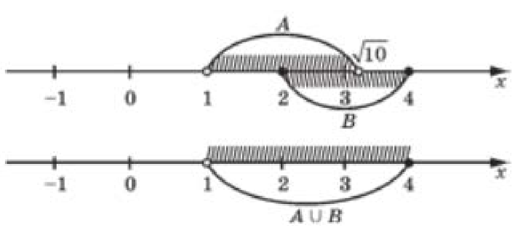


Рис. 29

г) Тут тоже удобнее использовать чертёж. Множество A — это множество всех точек, лежащих правее вертикальной прямой $x = 3$. Используем для него вертикальную штриховку (рис. 30). Множество B — это множество всех точек, лежащих ниже горизонтальной прямой $y = 2$ или на самой этой прямой. Используем для него горизонтальную штриховку (рис. 31).

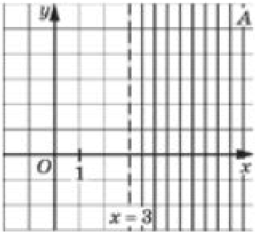


Рис. 30

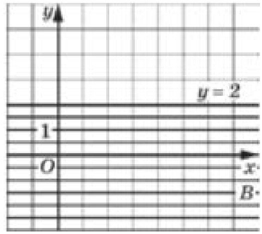


Рис. 31

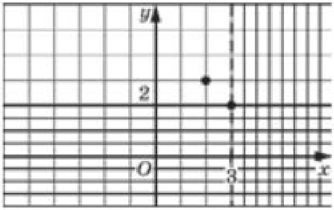


Рис. 32

Тогда $A \cup B$ — это множество всех тех точек плоскости, которые мы заштриховали первым или вторым способом (рис. 32). Отметим для примера, что начало координат и точка (3; 2) принадлежат объединению $A \cup B$, а точка (2; 3) ему не принадлежит.

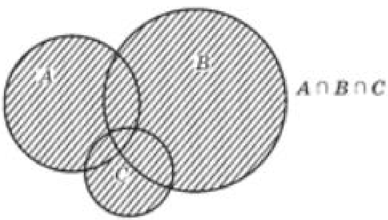


Рис. 33

Как и для пересечений, можно рассматривать объединения не только двух, но и трёх, четырёх и т. д. множеств. Например, *объединением* множеств A, B и C называют множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат множеству A, множеству B или множеству C (рис. 33). Объединение множеств A, B и C обозначают так: $A \cup B \cup C$.

Замечание Знаки пересечения $\cap$ и объединения $\cup$ учащиеся часто путают. Вот несколько советов по их запоминанию. Знак объединения $\cup$ похож на первую букву английского слова «Union» — объединение. Иногда помогает и такая модель: операция объединения $\cup$ — это открытый мешок, в который ссыпаются элементы объединяемых множеств. Значит, $A \cup B$ содержит в себе все элементы обоих множеств A и B и не содержит никаких других элементов. Если вы хорошо запомнили знак объединения $\cup$, то знак пересечения $\cap$ — это просто другой, оставшийся знак. Можно также заметить, что $\cap$ несколько напоминает русскую букву «П», с которой начинается слово «пересечение».

Вопросы для самопроверки

1. Что означает запись $x \in A$?
2. Что означает запись $A \subset B$?
3. Как называют в математике знак $\subset$? знак $\in$?
4. Верна ли запись $\boldsymbol{N} \in \boldsymbol{Z}$? запись $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$?
5. Верна ли запись $1 \in \boldsymbol{N}$? запись $1 \subset \boldsymbol{N}$?
6. Укажите, какие из представленных ниже соотношений являются истинными высказываниями, а какие — ложными:
   а) $3{,}5 \in \boldsymbol{Q}$;
   б) $3{,}5 \in \boldsymbol{Z}$;
   в) $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{Z}$;
   г) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$;
   д) $0 \in \boldsymbol{N}$;
   е) $0 \in \boldsymbol{Z}$;
   ж) $0 \in \boldsymbol{Q}$;
   з) $(-2;\ 0) \in [-2;\ 0]$;
   и) $(-2;\ 0) \subset [-2;\ 0]$;
   к) $(2;\ 5] \subset [2;\ 5)$;
   л) $(2;\ 5] \not\subset [2;\ 5)$;
   м) $(2;\ 5] \subset [2;\ 5)$;
   н) $(2;\ 5] \not\subset [2;\ 5]$.
7. Выпишите все двухэлементные подмножества множества $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.
8. Выпишите все подмножества множества $\{1,\ 3,\ 5\}$. Сколько подмножеств получилось? Если меньше восьми, постарайтесь найти утерянные подмножества.
9. Что называют пересечением множеств A и B? Как обозначают пересечение множеств A и B?
10. Что называют объединением множеств A и B? Как обозначают объединение множеств A и B?

§ 3 СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

1 Основные понятия, связанные с системами неравенств

Первое знакомство с системами неравенств состоялось в курсе алгебры 8-го класса, где мы рассмотрели несколько примеров решения систем линейных неравенств. Здесь речь пойдёт о более сложных системах неравенств. А в конце параграфа мы рассмотрим несколько текстовых задач, где составление математической модели приводит к системе неравенств.

Начнём с определения основных понятий.

Определение 1

Несколько неравенств с одной переменной образуют **систему неравенств**, если ставится задача найти такие значения переменной, которые являются частными решениями всех заданных неравенств.

Определение 2

Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют **частным решением** (или **решением**) **системы неравенств**. Множество всех частных решений системы неравенств называют **общим решением системы неравенств** (или просто **решением системы неравенств**).

Неравенства, образующие систему, объединяют фигурной скобкой (так же обстоит дело и в системах уравнений). Иногда используют и запись системы неравенств в виде *двойного неравенства*. Например, систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 2x - 1 < 11 \end{cases}$$

можно записать в виде двойного неравенства $3 < 2x - 1 < 11$.

Пусть нужно решить систему неравенств

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases}$$

система неравенств

решение системы неравенств

Предположим, что решением первого неравенства системы является интервал $(a;\ b)$, а решением второго неравенства — интервал $(c;\ d)$. Отметим эти промежутки на одной числовой прямой, использовав для первого интервала верхнюю штриховку, а для второго — нижнюю штриховку (рис. 34). Решением системы неравенств является *пересечение решений неравенств системы*; в рассматриваемом случае это интервал $(c;\ b)$ — промежуток, который, как видно на рисунке, заштрихован и сверху, и снизу.

Рис. 34

Кроме указанного метода штриховок при решении систем неравенств используют и так называемый метод «крыш». Соответствующая иллюстрация представлена на рис. 35. Можно использовать и тот, и другой метод.

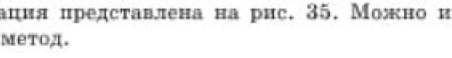


Рис. 35

ПРИМЕР 1

Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 9 \geqslant 0, \\ 5x - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$

Решение Преобразовав первое неравенство системы к виду $(x - 3)(x + 3) \geqslant 0$ и применив метод интервалов (рис. 36), получим: $x \leqslant -3$; $x \geqslant 3$. Преобразовав второе неравенство системы к виду $x(5 - x) \geqslant 0$ и применив метод интервалов (рис. 37), получим $0 \leqslant x \leqslant 5$.

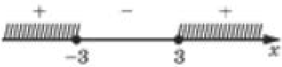


Рис. 36

Рис. 37

Теперь отметим найденные решения на одной координатной прямой, использовав для решений первого неравенства верхнюю штриховку, а для решений второго — нижнюю штриховку (рис. 38). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы, т. е. отрезок [3; 5].

Рис. 38

Ответ $3 \leqslant x \leqslant 5$.

ПРИМЕР 2

Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ x^2 + x + 2 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ x^2 + x + 2 > 0. \end{cases}$

Решение а) Из первого неравенства находим, что $x > 2$. Квадратный трёхчлен $x^2 + x + 2$, стоящий в левой части второго неравенства, имеет отрицательный дискриминант, а его старший коэффициент положителен. Значит, при всех значениях x выполняется неравенство $x^2 + x + 2 > 0$, а потому второе неравенство системы не имеет решений. Но тогда и система не имеет решений.

б) Решение первого неравенства имеет вид $x > 2$, а второе неравенство выполняется при любых значениях x. Значит, решение системы совпадает с решением первого неравенства системы.

Ответ а) нет решений; б) $x > 2$.

Этот пример — хорошая иллюстрация для следующих полезных утверждений.

1. **Если в системе из нескольких неравенств с одной переменной одно неравенство не имеет решений, то и система не имеет решений.**

2. **Если в системе из двух неравенств с одной переменной одно неравенство выполняется при любых значениях переменной, то решением системы служит решение другого неравенства системы.**

ПРИМЕР 3

Решить систему неравенств $\begin{cases} \sqrt{18x - x^2 - 45} \cdot (x^2 - 10) \geqslant 0, \\ x^2 - 2x - 24 \leqslant 0. \end{cases}$

Решение Если $18x - x^2 - 45 = 0$, т. е. $x = 3$ или $x = 15$, первое неравенство системы выполняется. Второму неравенству удовлетворяет лишь значение $x = 3$, его следует включить в ответ. Если $18x - x^2 - 45 > 0$, то задача сводится к решению следующей системы неравенств: $\begin{cases} 18x - x^2 - 45 > 0, \\ (x^2 - 10) \geqslant 0, \\ x^2 - 2x - 24 \leqslant 0, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} (x - 3)(x - 15) < 0, \\ \left(x - \sqrt{10}\right)\left(x + \sqrt{10}\right) \geqslant 0, \\ (x - 6)(x + 4) \leqslant 0. \end{cases}$

Решение первого неравенства системы — интервал $(3; 15)$; решение второго неравенства — объединение лучей: $(-\infty; -\sqrt{10}] \cup [\sqrt{10}; +\infty)$; решение третьего неравенства — отрезок $[-4; 6]$. На рис. 39 представлена геометрическая иллюстрация поиска пересечения указанных трёх множеств (методом «крыш»); этим пересечением является отрезок $[\sqrt{10}; 6]$.

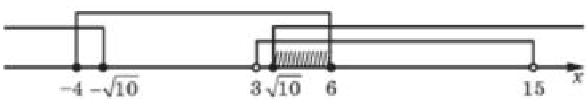


Рис. 39

Ответ $x = 3$; $\sqrt{10} \leqslant x \leqslant 6$.

2 Системы неравенств как математические модели реальных ситуаций

Рассмотрим задачи, математические модели которых представляют собой системы неравенств.

ПРИМЕР 4

Пристань B находится в 45 км от пристани A вниз по течению. Катер тратит на путь от A до B более 1,5 ч, а на обратный путь — менее 2 ч. Чему равна собственная скорость катера, если известно, что она выражается целым числом и что скорость течения реки 3 км/ч?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — собственная скорость катера; естественно, что должно выполняться условие $x > 3$. Тогда $(x + 3)$ км/ч — скорость катера по течению; $(x - 3)$ км/ч — скорость катера против течения; $\frac{45}{x+3}$ ч — время движения из A в B (оно по условию больше $\frac{3}{2}$ ч); $\frac{45}{x-3}$ ч — время движения из B в A (оно по условию меньше 2 ч).

Математическая модель задачи представляет собой систему неравенств:

$$\begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{45}{x+3} > \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{45}{x-3} < 2. \end{cases}$$

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Так как $x > 3$, то $x + 3 > 0$ и $x - 3 > 0$, а потому во втором и третьем неравенствах системы мы можем освободиться от знаменателей, не меняя знаков неравенств. Кроме того, полезно обе части второго неравенства разделить на 3. В итоге придём к более простой системе неравенств:

$$\begin{cases} x > 3, \\ 30 > x + 3, \\ 45 < 2x - 6. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим:

$$25{,}5 < x < 27.$$

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, чему равна скорость катера, обозначенная буквой x. Мы получили двойное неравенство $25{,}5 < x < 27$. В условии сказано, что искомая скорость выражается целым числом. Этому двойному неравенству удовлетворяет лишь одно целое число — число 26.

Ответ 26 км/ч.

ПРИМЕР 5

У мальчика есть некоторое количество марок. Ему подарили альбом для марок. Если мальчик наклеит по 20 марок на лист, ему не хватит альбома, а если он наклеит по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист альбома останется пустым. Если мальчику подарят ещё один такой же альбом, на каждом листе которого уже наклеено по 21 марке, то всего у него будет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

Решение. I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Введём две переменные: x — число листов в альбоме, y — число марок, которые есть у мальчика.

Если он наклеит по 20 марок на лист, то расклеенными окажутся $20x$ марок, что по условию меньше числа марок, имеющихся у мальчика, значит, $20x < y$.

Если он наклеит по 23 марки на лист, то по условию для расклейки хватит $(x - 1)$ листов, на которых поместится $23(x - 1)$ марок; это согласно условию не меньше числа имеющихся марок. Итак, $23(x - 1) \geqslant y$.

Наконец, в задаче сказано, что если мальчику подарят такой же альбом, в котором наклеено $21x$ марок, то всего получится 500 марок, т. е. $21x + y = 500$. Таким образом, получаем смешанную систему (термин *смешанная* означает, что в системе есть не только неравенства, но и уравнение):

$$\begin{cases} 20x < y, \\ 23(x - 1) \geqslant y, \\ 21x + y = 500. \end{cases}$$

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Выразив y из уравнения системы и подставив результат в оба неравенства системы, получим систему неравенств

$$\begin{cases} 20x < 500 - 21x, \\ 23(x - 1) \geqslant 500 - 21x. \end{cases}$$

Решение этой системы неравенств имеет следующий вид:

$$11\frac{39}{44} \leqslant x < 12\frac{8}{41}.$$

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, сколько листов в альбоме. Это число мы обозначили буквой x и получили $11\frac{39}{44} \leqslant x < 12\frac{8}{41}$. Этому двойному неравенству удовлетворяет лишь одно целое число 12.

Ответ 12 листов.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют системой неравенств?
2. Если множество A является решением неравенства $f(x) > 0$, а множество B — решением неравенства $g(x) < 0$, то что собой представляет решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0? \end{cases}$
3. Дана система неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$ Оказалось, что неравенство $f(x) > 0$ не имеет решений. Что вы можете сказать о решении заданной системы неравенств?
4. Дана система неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$ Оказалось, что неравенство $f(x) > 0$ имеет своим решением множество A, а неравенство $g(x) < 0$ выполняется при любых значениях переменной. Что вы можете сказать о решении заданной системы неравенств?

§4 СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ

Кроме систем неравенств, встречаются и математические модели другого рода — *совокупности неравенств* (и даже *совокупности систем неравенств*).

Определение 1

Несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность неравенств**, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением *хотя бы одного* из заданных неравенств.

Определение 2

Значение переменной, удовлетворяющее хотя бы одному из неравенств совокупности, называют **частным решением** (или **решением**) **совокупности неравенств**. Множество всех частных решений представляет собой **общее решение совокупности неравенств** (прилагательное *общее* обычно опускают).

Из определения совокупности неравенств следует, что *её решением служит объединение решений неравенств совокупности.*

совокупность неравенств

решение совокупности неравенств

Неравенства, образующие совокупность, объединяют *квадратной скобкой*. Например, запись

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11 \end{array}\right.$$

означает, что неравенства $2x - 1 > 3$ и $3x - 2 \geqslant 11$ образуют совокупность неравенств.

Впрочем, чаще специальный знак не используют, а записывают неравенства в строчку, отделяя их друг от друга точкой с запятой, но предваряя эту запись термином *совокупность неравенств*.

ПРИМЕР 1

Решить совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11. \end{array}\right.$

Решение Из первого неравенства получаем $x > 2$, из второго — $x \geqslant \frac{13}{3}$. Отметив эти решения на общей числовой прямой (рис. 40), находим их объединение: $x > 2$.

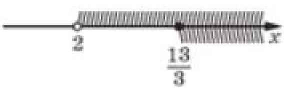


Рис. 40

Ответ $x > 2$.

ПРИМЕР 2

Решить совокупность неравенств $x^2 - 9 \geqslant 0;\ 5x - x^2 \geqslant 0$.

Решение В предыдущем параграфе мы решили систему этих же неравенств. Геометрическая иллюстрация решения системы была представлена на рис. 38. Пользуясь тем же рисунком, можно получить информацию о решении совокупности неравенств, только на этот раз следует выбрать не пересечение, а объединение решений — те промежутки, которые отмечены штриховкой хотя бы один раз. В данном случае получаем: $x \leqslant -3$; $x \geqslant 0$.

В заключение рассмотрим достаточно сложный, но важный пример. Важный, во-первых, потому, что при его решении мы учтём практически всё самое главное, что говорили в предыдущих параграфах о решении неравенств, и, во-вторых, потому, что это будет первый пример решения *совокупности систем неравенств*. Сложность его состоит в обилии технических приёмов и в том, что мы рассматриваем здесь системы из трёх неравенств (а не из двух, как чаще всего было до сих пор).

ПРИМЕР 3

Решить совокупность систем неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l} x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2 > 0, \\ \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{7}, \\ \dfrac{2x - 9}{2x^2 + 3x + 4} \geqslant 0; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x^2 > 9, \\ x^2 \geqslant 8, \\ \dfrac{3x + 3}{x + 4} \leqslant 2. \end{array}\right.$$

Решение I ЭТАП. Решим первую систему.

1) Преобразуем первое неравенство:

$$x^2(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) > 0;\ x^2(x - 2)^3 > 0.$$

Отметим на числовой прямой точки 0 и 2 (рис. 41). Выражение $f(x) = x^2(x - 2)^3$ принимает положительные значения при $x > 2$, а далее по промежуткам знаки $f(x)$ меняются так, как показано на рис. 41. Выделим промежуток, на котором $f(x) > 0$, — открытый луч $(2; +\infty)$.

2) Решим второе неравенство:

Рис. 41

$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{7};\quad \frac{1}{x} - \frac{1}{7} \geqslant 0;$$

$$\frac{7 - x}{x} \geqslant 0;\quad \frac{x - 7}{x} \leqslant 0.$$

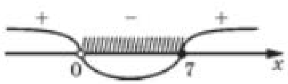


Рис. 42

Воспользовавшись методом интервалов (рис. 42), получим решение неравенства — полуинтервал $(0; 7]$.

3) Решим неравенство $\dfrac{2x - 9}{2x^2 + 3x + 4} \geqslant 0$.

Заметим, что квадратный трёхчлен $2x^2 + 3x + 4$ имеет отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент, значит, этот трёхчлен положителен при всех значениях x, а потому неравенство можно преобразовать к более простому виду $2x - 9 \geqslant 0$, откуда находим $x \geqslant 4{,}5$, т. е. луч $[4{,}5; +\infty)$.

4) Изобразим найденные решения трёх неравенств на одной числовой прямой и найдём их *пересечение* (рис. 43). Получим решение первой системы неравенств — отрезок $[4{,}5; 7]$.

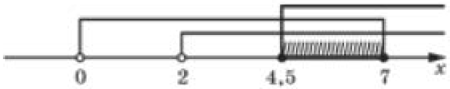


Рис. 43

II ЭТАП. Решим вторую систему. Сразу заметим, что если выполняется неравенство $x^2 > 9$, то тем более выполняется неравенство $x^2 \geqslant 8$, так что второе неравенство системы не содержит дополнительной информации о её решении и его можно отбросить.

1) Преобразуем первое неравенство:

$$x^2 - 9 > 0; \quad (x - 3)(x + 3) > 0.$$

Рис. 44

Воспользовавшись методом интервалов (рис. 44), получим: $x < -3$; $x > 3$.

2) Решим третье неравенство второй системы:

Рис. 45

$$\frac{3x + 3}{x + 4} \leqslant 2; \quad \frac{3x + 3}{x + 4} - 2 \leqslant 0;$$

$$\frac{3x + 3 - 2x - 8}{x + 4} \leqslant 0; \quad \frac{x - 5}{x + 4} \leqslant 0;$$

$$-4 < x \leqslant 5 \text{ (рис. 45).}$$

3) Изобразим найденные решения двух неравенств на одной числовой прямой и найдём их пересечение (рис. 46). Получим решение второй системы неравенств: $(-4; -3) \cup (3; 5]$.

Рис. 46

III ЭТАП. Решение совокупности систем — это *объединение* найденных решений систем. Изобразим эти решения на одной числовой прямой (рис. 47) и найдём их объединение. Получим интервал $(-4; -3)$ и полуинтервал $(3; 7]$.

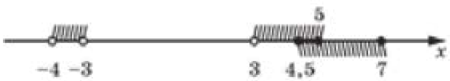


Рис. 47

Ответ: $-4 < x < -3$; $3 < x \leqslant 7$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют совокупностью неравенств с одной переменной? Что называют частным решением совокупности неравенств? Что называют общим решением (или просто решением) совокупности неравенств?
2. Пусть множество A — решение неравенства $f(x) > g(x)$, а множество B — решение неравенства $p(x) < h(x)$. Что является решением совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ p(x) < h(x)? \end{array}\right.$
3. Дана совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ p(x) < h(x). \end{array}\right.$ Оказалось, что неравенство $f(x) > g(x)$ выполняется при любых значениях переменной, а решением неравенства $p(x) < h(x)$ является множество A. Что вы можете сказать о решении заданной совокупности неравенств?
4. Дана совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ p(x) < h(x). \end{array}\right.$ Оказалось, что неравенство $f(x) > g(x)$ не имеет решений, а решением неравенства $p(x) < h(x)$ является множество A. Что вы можете сказать о решении заданной совокупности неравенств?

§5 НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ

1 Основные понятия

В курсе алгебры 8-го класса вы решали уравнения с модулями и, наверное, помните, что главное при решении таких уравнений — уметь «раскрывать» модули, пользуясь определением: если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$; если $a < 0$, то $|a| = -a$.

При решении неравенств с модулями, кроме указанного определения, используются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1

Если $c > 0$, то неравенство $|f(x)| < c$ равносильно двойному неравенству $-c < f(x) < c$.

ТЕОРЕМА 2

Если $c \geqslant 0$, то неравенство $|f(x)| > c$ равносильно совокупности неравенств $f(x) < -c$; $f(x) > c$.

ТЕОРЕМА 3

Если обе части неравенства $f(x) < g(x)$ принимают только неотрицательные значения, то оно равносильно неравенству $(f(x))^2 < (g(x))^2$.

Доказательство 1. Пусть $c > 0$ и пусть $x = a$ — частное решение неравенства $|f(x)| < c$, т. е. верно числовое неравенство $|f(a)| < c$. Если $f(a) \geqslant 0$, то $|f(a)| = f(a)$, и неравенство $|f(a)| < c$ можно переписать так: $0 \leqslant f(a) < c$. Если $f(a) < 0$, то $|f(a)| = -f(a)$, и неравенство $|f(a)| < c$ можно переписать так: $-f(a) < c$, т. е. $-c < f(a) < 0$.

Итак, в любом случае выполняется двойное неравенство $-c < f(a) < c$. Значит, $x = a$ — частное решение неравенства $-c < f(x) < c$.

Пусть, обратно, $x = b$ — частное решение неравенства $-c < f(x) < c$, т. е. верно числовое неравенство $-c < f(b) < c$. Умножив все его части на -1, получим $-c < -f(b) < c$. Поскольку $|f(b)|$ равен либо $f(b)$, либо $-f(b)$, получаем, что $-c < |f(b)| < c$. Левую часть этого двойного неравенства можно опустить как очевидную.

Итак, верно неравенство $|f(b)| < c$, а это значит, что $x = b$ — частное решение неравенства $|f(x)| < c$.

Вывод: при $c > 0$ неравенства $|f(x)| < c$ и $-c < f(x) < c$ равносильны.

2. Пусть $c \geqslant 0$ и пусть $x = a$ — частное решение неравенства $|f(x)| > c$, т. е. верно числовое неравенство $|f(a)| > c$. Если $f(a) \geqslant 0$, то $|f(a)| = f(a)$, и неравенство $|f(a)| > c$ можно переписать так: $f(a) > c$. Если $f(a) < 0$, то $|f(a)| = -f(a)$ и неравенство $|f(a)| > c$ можно переписать так: $-f(a) > c$, т. е. $f(a) < -c$.

Итак, в любом случае значение $x = a$ удовлетворяет либо неравенству $f(x) > c$, либо неравенству $f(x) < -c$. Значит, $x = a$ — частное решение совокупности неравенств: $f(x) < -c$; $f(x) > c$.

Пусть, обратно, $x = b$ — частное решение совокупности неравенств $f(x) < -c$; $f(x) > c$. Это значит, что либо $f(b) < -c$, либо $f(b) > c$ — верное числовое неравенство. Первое неравенство можно переписать так: $-f(b) > c$. Поскольку $|f(b)|$ равен либо $f(b)$, либо $-f(b)$, получаем, что $|f(b)| > c$.

Итак, верно неравенство $|f(b)| > c$, а это значит, что $x = b$ — частное решение неравенства $|f(x)| > c$.

Вывод: при $c \geqslant 0$ неравенство $|f(x)| > c$ равносильно совокупности неравенств $f(x) < -c$; $f(x) > c$.

3. Пусть $g(x) > f(x) \geqslant 0$ и пусть $x = a$ — частное решение неравенства $f(x) < g(x)$, т. е. верно числовое неравенство $f(a) < g(a)$. Поскольку

обе части этого неравенства неотрицательны, верно и неравенство $(f(a))^2 < (g(a))^2$. Это значит, что $x = a$ — частное решение неравенства $(f(x))^2 < (g(x))^2$.

Пусть, обратно, $x = b$ — частное решение неравенства $(f(x))^2 < (g(x))^2$, т. е. $(f(b))^2 < (g(b))^2$ — верное числовое неравенство. Это неравенство можно преобразовать к виду $(f(b) - g(b))(f(b) + g(b)) < 0$. Но из условия следует, что $f(b) + g(b) > 0$. Значит, неравенство $(f(b) - g(b))(f(b) + g(b)) < 0$ можно преобразовать к виду $f(b) - g(b) < 0$, т. е. к виду $f(b) < g(b)$. Это значит, что $x = b$ — частное решение неравенства $f(x) < g(x)$.

Вывод: если $g(x) > f(x) \geqslant 0$, то неравенства $f(x) < g(x)$ и $(f(x))^2 < (g(x))^2$ равносильны.

2 Решение неравенств вида $|f(x)| < g(x)$

Пусть требуется решить *неравенство* $|f(x)| < g(x)$. Освободиться от знака модуля можно тремя способами.

Первый способ. Если $f(x) \geqslant 0$, то $|f(x)| = f(x)$, и заданное неравенство принимает вид $f(x) < g(x)$. Если $f(x) < 0$, то $|f(x)| = -f(x)$, и заданное неравенство принимает вид $-f(x) < g(x)$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < g(x). \end{cases}$$

Второй способ. Перепишем заданное неравенство в виде $g(x) > |f(x)|$. Отсюда сразу следует, что $g(x) > 0$. Воспользуемся тем, что при $g(x) > 0$ неравенство $|f(x)| < g(x)$ равносильно двойному неравенству $-g(x) < f(x) < g(x)$ (утверждение 1). Это позволит свести неравенство $|f(x)| < g(x)$ к системе неравенств

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ -g(x) < f(x) < g(x), \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

Третий способ. Воспользуемся тем, что при $g(x) > 0$ обе части неравенства $|f(x)| < g(x)$ неотрицательны, а потому согласно утверждению 3 их возведение в квадрат есть равносильное преобразование неравенства. Учтём, кроме того, что $|a|^2 = a^2$. Это позволит свести неравенство $|f(x)| < g(x)$ к системе неравенств

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ (f(x))^2 < (g(x))^2. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1

Решить неравенство $|x^2 - 3x + 2| < 2x - x^2$.

Решение *Первый способ.* Заданное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ x^2 - 3x + 2 < 2x - x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0, \\ -(x^2 - 3x + 2) < 2x - x^2. \end{cases}$$

Решая первую систему, получим

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 2) \geqslant 0, \\ 2(x - 2)(x - 0{,}5) < 0, \end{cases}$$

откуда находим (рис. 48):

$$0{,}5 < x \leqslant 1.$$

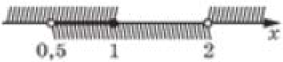


Рис. 48

Решая вторую систему, получим

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 2) < 0, \\ x < 2, \end{cases}$$

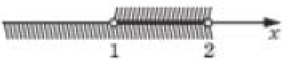


Рис. 49

откуда находим (рис. 49):

$$1 < x < 2.$$

Объединив найденные решения систем неравенств, получим $0{,}5 < x < 2$.

Второй способ. Заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x - x^2 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 < 2x - x^2, \\ x^2 - 3x + 2 > -(2x - x^2). \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{cases} x(x - 2) < 0, \\ 2(x - 2)(x - 0{,}5) < 0, \\ x < 2; \end{cases}$$

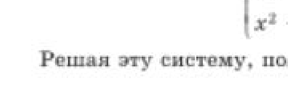


Рис. 50

$0{,}5 < x < 2$ (рис. 50).

Третий способ. Заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x - x^2 > 0, \\ (x^2 - 3x + 2)^2 < (2x - x^2)^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\begin{cases} x(x-2) < 0, \\ (x^2-3x+2)^2-(2x-x^2)^2 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-2) < 0, \\ ((x^2-3x+2)-(2x-x^2))((x^2-3x+2)+(2x-x^2)) < 0; \end{cases}$$

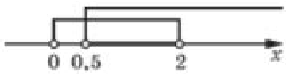


Рис. 51

$$\begin{cases} x(x-2) < 0, \\ 2(x-0{,}5)(x-2)^2 > 0; \end{cases}$$

$0{,}5 < x < 2$ (рис. 51).

Ответ $0{,}5 < x < 2$.

3 Решение неравенств вида $|f(x)| > g(x)$

Пусть теперь требуется решить *неравенство* $|f(x)| > g(x)$. Освободиться от знака модуля можно тремя способами.

Первый способ. Если $f(x) \geqslant 0$, то $|f(x)| = f(x)$, и заданное неравенство принимает вид $f(x) > g(x)$. Если $f(x) < 0$, то $|f(x)| = -f(x)$, и заданное неравенство принимает вид $-f(x) > g(x)$. Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x). \end{cases}$$

Второй способ. Рассмотрим два случая: $g(x) \geqslant 0$, $g(x) < 0$. Если $g(x) < 0$, то неравенство $|f(x)| > g(x)$ выполняется для всех значений x из области определения выражения $f(x)$; обозначим её $D(f)$. Если $g(x) \geqslant 0$, то воспользуемся тем, что согласно утверждению 2 неравенство $|f(x)| > g(x)$ равносильно совокупности неравенств $f(x) < -g(x)$; $f(x) > g(x)$. Таким образом, заданное неравенство сводится к совокупности трёх систем:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ x \in D(f); \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) < -g(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Третий способ. В случае когда $g(x) \geqslant 0$, неравенство $|f(x)| > g(x)$ равносильно неравенству $(f(x))^2 > (g(x))^2$; значит, заданное неравенство сводится к совокупности систем:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ x \in D(f); \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ (f(x))^2 > (g(x))^2. \end{cases}$$

ПРИМЕР 2

Решить неравенство $|x^2 - 3x + 2| \geqslant 2x - x^2$.

Решение *Первый способ.* Заданное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 2x - x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0, \\ -(x^2 - 3x + 2) \geqslant 2x - x^2. \end{cases}$$

Решив первую систему, получим $x \leqslant 0{,}5$; $x \geqslant 2$. Вторая система не имеет решений. В результате решением совокупности систем является решение первой системы.

Второй способ. Если $2x - x^2 \leqslant 0$, то заданное неравенство выполняется (его левая часть неотрицательна, а правая — неположительна). Если $2x - x^2 > 0$, то заданное неравенство равносильно совокупности двух неравенств: $x^2 - 3x + 2 \geqslant 2x - x^2$; $x^2 - 3x + 2 \leqslant -(2x - x^2)$. Таким образом, получаем совокупность неравенства и двух систем неравенств:

$$2x - x^2 \leqslant 0;$$

$$\begin{cases} 2x - x^2 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 2x - x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - x^2 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 \leqslant -(2x - x^2). \end{cases}$$

Решив неравенство $2x - x^2 \leqslant 0$, получим $x \leqslant 0$; $x \geqslant 2$. Решение первой системы — полуинтервал $0 < x \leqslant 0{,}5$. Вторая система не имеет решений.

В итоге получаем $x \leqslant 0{,}5$; $x \geqslant 2$.

Третий способ. Если $2x - x^2 \leqslant 0$, то заданное неравенство выполняется. Если $2x - x^2 > 0$, то обе части заданного неравенства можно возвести в квадрат. Таким образом, получаем совокупность неравенства и системы неравенств:

$$2x - x^2 \leqslant 0; \qquad \begin{cases} 2x - x^2 > 0, \\ (x^2 - 3x + 2)^2 \geqslant (2x - x^2)^2. \end{cases}$$

Решения неравенства $2x - x^2 \leqslant 0$ — лучи: $x \leqslant 0$; $x \geqslant 2$.

Решим систему $\begin{cases} x(x - 2) < 0, \\ (x^2 - 3x + 2)^2 - (2x - x^2)^2 \geqslant 0. \end{cases}$

Имеем:

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ ((x^2 - 3x + 2) - (2x - x^2))((x^2 - 3x + 2) + (2x - x^2)) \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ (2x^2 - 5x + 2)(x - 2) \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ 2(x - 0{,}5)(x - 2)^2 \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \leqslant 0{,}5;\ x = 2; \end{cases}$$

$$0 < x \leqslant 0{,}5.$$

Объединив это решение с найденными выше решениями $x \leqslant 0$; $x \geqslant 2$, получаем $x \leqslant 0{,}5$; $x \geqslant 2$.

Ответ $x \leqslant 0{,}5$; $x \geqslant 2$.

4 Неравенства с модулями

ПРИМЕР 3

Решить неравенство $|x - 2| + |x + 4| < 10$.

Решение *Первый способ.* Выражение $x - 2$ обращается в нуль в точке 2, а выражение $x + 4$ обращается в нуль в точке -4. Указанные две точки разбивают числовую прямую на три промежутка: $x < -4$; $-4 \leqslant x \leqslant 2$; $x > 2$.

На промежутке $x < -4$ выражение $x - 2$ принимает отрицательные значения, равно как и выражение $x + 4$. Значит, на указанном промежутке выполняются соотношения:

$$|x - 2| = -(x - 2),\ |x + 4| = -(x + 4),$$

а потому заданное неравенство принимает вид

$$-(x - 2) - (x + 4) < 10.$$

На промежутке $-4 \leqslant x \leqslant 2$ выражение $x - 2$ принимает неположительные значения, а выражение $x + 4$ — неотрицательные. Значит, на указанном промежутке выполняются соотношения:

$$|x - 2| = -(x - 2),\ |x + 4| = x + 4,$$

а потому заданное неравенство принимает вид

$$-(x - 2) + (x + 4) < 10.$$

Наконец, на промежутке $x > 2$ выражение $x - 2$ принимает положительные значения, равно как и выражение $x + 4$. Значит, на указанном промежутке выполняются соотношения:

$$|x - 2| = x - 2,\ |x + 4| = x + 4,$$

а потому заданное неравенство принимает вид

$$(x - 2) + (x + 4) < 10.$$

В итоге получаем совокупность трёх систем неравенств:

$$\begin{cases} x < -4, \\ -(x-2)-(x+4) < 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 2, \\ -(x-2)+(x+4) < 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ (x-2)+(x+4) < 10. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $-6 < x < -4$, из второй — $-4 \leqslant x \leqslant 2$, из третьей — $2 < x < 4$. Объединив найденные решения, находим ответ: $-6 < x < 4$.

Второй способ вам известен, его применяли в курсе алгебры 8-го класса.

Неравенство $|x-2|+|x+4| < 10$ на геометрическом языке означает, что нам нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 2) + \rho(x; -4) < 10$, т. е. сумма расстояний каждой из таких точек от точек 2 и -4 меньше 10. Это точки, заключённые в интервале от -6 до 4 (рис. 52).

Рис. 52

Ответ $-6 < x < 4$.

Вопросы для самопроверки

1. Расскажите, как вы будете решать неравенство вида $|f(x)| < c$ в случае, когда $c > 0$; в случае, когда $c \leqslant 0$.
2. Расскажите, как вы будете решать неравенство вида $|f(x)| > c$ в случае, когда $c < 0$; в случае, когда $c \geqslant 0$.
3. Расскажите, как вы будете решать неравенство вида $|f(x)| < h(x)$. Проиллюстрируйте ваш рассказ на примере решения неравенства $|2x-1| < 3x+5$.
4. Расскажите, как вы будете решать неравенство вида $|f(x)| \geqslant h(x)$. Проиллюстрируйте ваш рассказ на примере решения неравенства $|2x-1| \geqslant 3x+5$.

§ 6 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1 Решение неравенств вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Рассмотрим неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$. Ясно, что решения такого неравенства должны удовлетворять условию $f(x) \geqslant 0$ и условию $g(x) > 0$. Осталось лишь заметить, что при одновременном выполнении указанных выше условий обе части заданного иррационального неравенства неотрицательны, а потому их возведение в квадрат представляет собой равносильное преобразование неравенства.

Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1

Решить неравенство $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$.

Решение Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2, \end{cases}$$

$$\text{т. е.} \begin{cases} (x - 4)(x + 3) \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x > -12. \end{cases}$$

Получаем $x \geqslant 4$ (рис. 53).

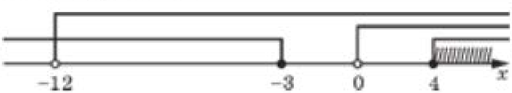


Рис. 53

2 Решение неравенств вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Рассмотрим теперь неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Ясно, во-первых, что его решения должны удовлетворять условию $f(x) \geqslant 0$. Во-вторых, замечаем, что при $g(x) < 0$ (и при отмеченном выше условии $f(x) \geqslant 0$) справедливость неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$ не вызывает сомнений. В-третьих, замечаем, что если $g(x) \geqslant 0$, то можно возвести в квадрат обе части заданного иррационального неравенства, т. е. записать $f(x) \geqslant g^2(x)$. Отсюда, кстати, автоматически следует, что $f(x) \geqslant 0$.

Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

ПРИМЕР 2

Решить неравенство $\sqrt{x^2 - x - 12} \geqslant x$.

Решение Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 - x - 12 \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 12 \geqslant x^2. \end{cases}$$

Получаем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ (x-4)(x+3) \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \leqslant -12. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рис. 54

Из первой системы находим $x \leqslant -3$ (рис. 54); вторая система не имеет решений.

Ответ $x \leqslant -3$.

3 Разные примеры

ПРИМЕР 3

Решить неравенство $(x + 5)(x - 2) + 3\sqrt{x(x + 3)} > 0$.

Решение Преобразуем неравенство к виду

$$x^2 + 3x - 10 + 3\sqrt{x^2 + 3x} > 0$$

и введём новую переменную $y = \sqrt{x^2 + 3x}$. Тогда последнее неравенство примет вид $y^2 + 3y - 10 > 0$, откуда находим, что либо $y < -5$, либо $y > 2$. Задача сводится к решению совокупности двух неравенств: $\sqrt{x^2 + 3x} < -5$; $\sqrt{x^2 + 3x} > 2$.

Первое неравенство не имеет решений, а из второго находим:

$$x^2 + 3x > 4; \quad (x + 4)(x - 1) > 0; \quad x < -4; \quad x > 1.$$

ПРИМЕР 4

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{4x^2 - 15x + 11}}{x^3 - x - 6} \geqslant 0$.

Решение Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 4x^2 - 15x + 11 \geqslant 0, \\ x^3 - x - 6 > 0. \end{cases}$$

Решив уравнение $4x^2 - 15x + 11 = 0$, находим его корни: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{11}{4}$. Значит, решение первого неравенства системы — объединение лучей $(-\infty; 1] \cup \left[\dfrac{11}{4}; +\infty\right)$ (рис. 55).

Рис. 55

Рассмотрим многочлен

$$p(x) = x^3 - x - 6.$$

Замечаем, что $x = 2$ — корень этого многочлена, значит, $p(x)$ делится без остатка на $x - 2$. Вместо деления уголком можно выполнить следующие преобразования:

$$p(x) = x^3 - x - 6 = (x^3 - 8) - (x - 2) =$$
$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 3).$$

Квадратный трёхчлен $x^2 + 2x + 3$ имеет отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент; значит, он положителен при любых значениях x, а потому неравенство $p(x) > 0$ равносильно неравенству $x - 2 > 0$.

Таким образом, решение второго неравенства системы — открытый луч $(2; +\infty)$.

Осталось найти пересечение решений первого и второго неравенств системы; получаем луч $\left[\frac{11}{4}; +\infty\right)$ (см. рис. 55). Но (внимание!) точку $x = 1$ (тёмная точка на рис. 55) тоже следует включить в ответ, хотя она и не принадлежит указанному пересечению. Дело в том, что при $x = 1$ числитель заданной дроби обращается в нуль, а знаменатель отличен от нуля (и не важно, что он при $x = 1$ принимает отрицательное значение); следовательно, $x = 1$ — частное решение заданного нестрогого неравенства.

Ответ $x = 1$; $x \geqslant 2\frac{3}{4}$.

ПРИМЕР 5

Решить неравенство $x^2 + 8x + 15 + \sqrt{-x-4} \geqslant \dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{4 - x}}$.

Решение Область определения для данного неравенства задаётся системой неравенств $\begin{cases} -x - 4 \geqslant 0, \\ 4 - x > 0, \end{cases}$ решив которую получаем $x \leqslant -4$. При этом условии числитель дроби, находящейся в правой части заданного неравенства, можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{(x-4)(x+4)} =$$
$$= \sqrt{|x-4|} \cdot \sqrt{|x+4|} = \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{-x-4}.$$

Учтя это, поработаем с заданным неравенством:

$$x^2 + 8x + 15 + \sqrt{-x-4} \leqslant \frac{\sqrt{4-x} \cdot \sqrt{-x-4}}{\sqrt{4-x}};$$
$$x^2 + 8x + 15 \leqslant 0;$$
$$(x+5)(x+3) \leqslant 0;$$
$$-5 \leqslant x \leqslant -3.$$

Выше мы отметили, что должно выполняться и неравенство $x \leqslant -4$. Таким образом, окончательно получаем такое решение заданного неравенства: $-5 \leqslant x \leqslant -4$.

Вопросы для самопроверки

1. Расскажите, как вы будете решать неравенство вида $\sqrt{f(x)} < c$ в случае, когда $c > 0$; в случае, когда $c \leqslant 0$.
2. Расскажите, как вы будете решать неравенство вида $\sqrt{f(x)} > c$ в случае, когда $c < 0$; в случае, когда $c \geqslant 0$.
3. Расскажите, как вы будете решать неравенство вида $\sqrt{f(x)} < h(x)$. Проиллюстрируйте ваш рассказ на примере решения неравенства $\sqrt{2x + 3} < x$.
4. Расскажите, как вы будете решать неравенство вида $\sqrt{f(x)} \geqslant h(x)$. Проиллюстрируйте ваш рассказ на примере решения неравенства $\sqrt{2x + 3} \geqslant x$.

§7 НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

В курсе алгебры 8-го класса вам уже встречались уравнения с параметрами. Здесь мы рассмотрим задачи с параметрами, решение которых сводится к решению неравенств.

ПРИМЕР 1

Известно, что уравнение $ax^2 - (4a + 4)x + 3a + 13 = 0$ имеет действительные корни (один или два). При каких значениях параметра a:

а) каждый из корней больше 1;

б) каждый из корней меньше 1;

в) один корень больше, а другой меньше 1?

Решение Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $-4x + 13 = 0$, откуда находим $x = \frac{13}{4}$.

Если $a \neq 0$, то заданное уравнение можно переписать в виде

$$x^2 - \frac{4a + 4}{a}x + \frac{3a + 13}{a} = 0.$$

Графиком функции $y = x^2 - \frac{4a + 4}{a}x + \frac{3a + 13}{a}$ является парабола с ветвями, направленными вверх.

а) Случай $a = 0$ нас вполне устраивает, поскольку при $a = 0$ корень уравнения $x = \frac{13}{4}$ удовлетворяет заданному условию — он больше 1.

Корни заданного уравнения при $a \neq 0$ больше 1 тогда и только тогда, когда парабола пересекает ось x (или в крайнем случае касается оси x) в точках, лежащих правее точки (1; 0); геометрическая модель представлена на рис. 56. Составим соответствующую аналитическую модель.

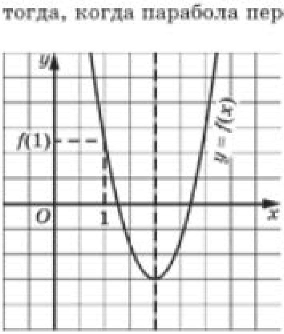


Рис. 56

Во-первых, должно выполняться условие $D \geqslant 0$, где D — дискриминант квадратного уравнения (в противном случае уравнение не будет иметь корней). Во-вторых, ось параболы должна проходить правее точки (1; 0). Наконец, в-третьих, должно выполняться условие $f(1) > 0$, где

$$f(x) = x^2 - \frac{4a+4}{a}x + \frac{3a+13}{a}.$$

Итак, нас интересуют дискриминант D, уравнение оси параболы и значение $f(1)$.

1) $D = \left(\frac{4a+4}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3a+13}{a} = \frac{4a^2 - 20a + 16}{a^2}$.

2) Уравнение оси параболы $y = ax^2 + bx + c$ имеет вид $x = \frac{-b}{2a}$, значит, для рассматриваемой функции получаем $x = \frac{2a+2}{a}$.

3) $f(1) = 1^2 - \frac{4a+4}{a} \cdot 1 + \frac{3a+13}{a} = \frac{9}{a}$.

Учитывая указанные выше три условия, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{4a^2 - 20a + 16}{a^2} \geqslant 0, \\ \frac{2a+2}{a} > 1, \\ \frac{9}{a} > 0. \end{cases}$$

Выполнив преобразования каждого неравенства системы, получим:

$$\begin{cases} \frac{4(a-1)(a-4)}{a^2} \geqslant 0, \\ \frac{a+2}{a} > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$0 < a \leqslant 1;\ a \geqslant 4.$$

Добавив указанное выше значение параметра $a = 0$, получим $0 \leqslant a \leqslant 1$; $a \geqslant 4$.

б) Выясним, при каких значениях параметра a корни заданного уравнения меньше 1. Если $a = 0$, то, как мы видели выше, $x = \frac{13}{4}$; это значение больше 1, а потому случай $a = 0$ нас теперь не устраивает.

Если $a \neq 0$, то корни уравнения $x^2 - \frac{4a+4}{a}x + \frac{3a+13}{a} = 0$ меньше 1 тогда и только тогда, когда парабола пересекает ось x (или в крайнем случае касается оси x) в точках, лежащих левее точки (1; 0); геометрическая модель представлена на рис. 57. Составим соответствующую аналитическую модель.

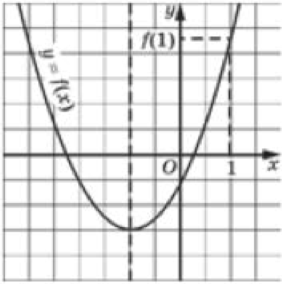


Рис. 57

Во-первых, как и в пункте а), должно выполняться условие $D \geqslant 0$. Во-вторых, ось параболы должна проходить левее точки (1; 0). Наконец, в-третьих, должно выполняться условие $f(1) > 0$.

Учитывая указанные выше три условия, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{4a^2 - 20a + 16}{a^2} \geqslant 0, \\ \frac{2a+2}{a} < 1, \\ \frac{9}{a} > 0. \end{cases}$$

Выполнив преобразования каждого неравенства системы, получим:

$$\begin{cases} \frac{4(a-1)(a-4)}{a^2} \geqslant 0, \\ \frac{a+2}{a} < 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений.

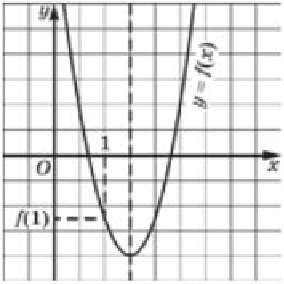


Рис. 58

в) Геометрическая модель ситуации, когда 1 находится между корнями уравнения, представлена на рис. 58. Достаточно потребовать выполнения условия $f(1) < 0$. Таким образом, приходим к неравенству $\frac{9}{a} < 0$, откуда находим $a < 0$.

Ответ: а) $0 \leqslant a \leqslant 1$; $a \geqslant 4$;
б) таких значений параметра нет;
в) $a < 0$.

ПРИМЕР 2

Сколько корней имеет уравнение $|x - 2| = ax + 1$ при различных значениях параметра a?

Решение *Первый способ.* Если $x \geqslant 2$, то $|x - 2| = x - 2$, и уравнение принимает вид $x - 2 = ax + 1$, т. е. $x(1 - a) = 3$. Если же $x < 2$, то $|x - 2| = -(x - 2)$, и уравнение принимает вид $-(x - 2) = ax + 1$, т. е. $x(1 + a) = 1$.

Итак, получилась совокупность двух смешанных систем:

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x(1 - a) = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2, \\ x(1 + a) = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим первую систему совокупности. Если $a = 1$, то уравнение системы не имеет решений (поскольку принимает вид $0 = 3$). Если $a \neq 1$, то из уравнения системы находим $x = \frac{3}{1 - a}$. Это значение будет корнем заданного уравнения, если удовлетворяет неравенству $x \geqslant 2$, и не является корнем, если не удовлетворяет указанному неравенству.

Решив неравенство $\frac{3}{1 - a} \geqslant 2$, получим $-0,5 \leqslant a < 1$.

Итак, если $-0,5 \leqslant a < 1$, то первая система имеет единственное решение $x = \frac{3}{1 - a}$; если $a < -0,5$ или $a \geqslant 1$, то система не имеет решений.

Рассмотрим вторую систему совокупности. Если $a = -1$, то уравнение системы не имеет решений (поскольку принимает вид $0 = 1$). Если $a \neq -1$, то из уравнения системы находим $x = \frac{1}{1 + a}$. Это значение является корнем заданного уравнения, если удовлетворяет неравенству $x < 2$, и не является корнем, если не удовлетворяет указанному неравенству.

Решив неравенство $\frac{1}{1 + a} < 2$, получим $a < -1$; $a > -0,5$.

Итак, если $a < -1$ или $a > -0,5$, то система имеет единственное решение $x = \frac{1}{1 + a}$; если $-1 \leqslant a \leqslant -0,5$, то система не имеет решений.

Объединим полученные выводы.

1) Если $a < -1$, то вторая система имеет единственное решение, а первая — не имеет решений. Значит, в этом случае заданное уравнение имеет единственный корень: $x = \frac{1}{1 + a}$.

2) Если $-1 \leqslant a < -0,5$, то обе системы не имеют решений, значит, заданное уравнение не имеет корней.

3) Если $a = -0{,}5$, то первая система имеет решение, а вторая — нет, значит, заданное уравнение имеет единственный корень: $x = \frac{3}{1-a}$, т. е. $x = 2$.

4) Если $-0{,}5 < a < 1$, то обе системы имеют решения, значит, заданное уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{3}{1-a}$, $x_2 = \frac{1}{1+a}$.

5) Если $a \geqslant 1$, то вторая система имеет решение, а первая система не имеет решений. Значит, в этом случае заданное уравнение имеет единственный корень: $x = \frac{1}{1+a}$.

Второй способ. На рис. 59 изображён график функции $y = |x - 2|$. Число корней уравнения $|x - 2| = ax + 1$ равно числу точек пересечения построенного графика и графика функции $y = ax + 1$ — прямой, проходящей через точку (0; 1). При $a = -1$ эта прямая параллельна левой ветви графика функции $y = |x - 2|$; при $a = -0{,}5$ эта прямая проходит через вершину графика функции $y = |x - 2|$; при $a = 1$ эта прямая параллельна правой ветви графика функции $y = |x - 2|$. Именно указанные три значения и являются главными для описания всей ситуации.

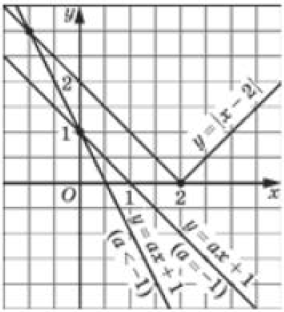


Рис. 59

При $a = -1$ уравнение не имеет корней, а при $a < -1$ — один корень (см. рис. 59). При $a = -0{,}5$ уравнение имеет один корень, при $-1 < a < -0{,}5$ — не имеет корней, а при $-0{,}5 < a < 0$ — имеет два корня (рис. 60). При $0 \leqslant a < 1$ уравнение имеет два корня, а при $a \geqslant 1$ — один корень (рис. 61).

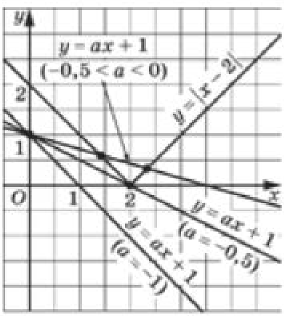


Рис. 60

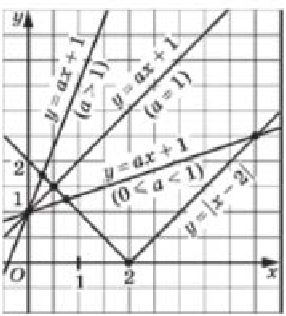


Рис. 61

Ответ Если $a < -1$, $a = -0{,}5$ или $a \geqslant 1$, то уравнение имеет один корень; если $-1 \leqslant a < -0{,}5$, то уравнение не имеет корней; если $-0{,}5 < a < 1$, то уравнение имеет два корня.

ПРИМЕР 3

При каких значениях параметра a системе неравенств

$$\begin{cases} x^3 + 4x^2 - 5x \leqslant 0, \\ |x - 2a| \leqslant 2 \end{cases}$$

удовлетворяет только одно значение переменной x?

Решение Рассмотрим первое неравенство системы:

$$x(x^2 + 4x - 5) \leqslant 0;\ x(x - 1)(x + 5) \leqslant 0.$$

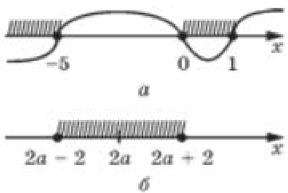


Рис. 62

Геометрическая иллюстрация решения неравенства представлена на рис. 62, *а*. Решение состоит из луча $(-\infty; -5]$ и отрезка $[0; 1]$.

Рассмотрим второе неравенство системы. Чтобы изобразить его решения геометрически, нужно отметить на числовой прямой точку $2a$ и ещё две точки, удалённые от неё вправо и влево на 2 единицы масштаба. Получится отрезок $[2a - 2; 2a + 2]$ (рис. 62, б), длина которого равна 4.

Заданная система неравенств будет иметь единственное решение (т. е. решение, состоящее из одной точки) в трёх случаях:

1) если левый конец отрезка $[2a - 2; 2a + 2]$ совпадает с точкой -5; в этом случае отрезок $[2a - 2; 2a + 2]$ длиной 4 принадлежит отрезку $[-5; 0]$ длиной 5 и единственным решением системы неравенств будет точка $x = -5$;

2) если правый конец отрезка $[2a - 2; 2a + 2]$ совпадает с точкой 0; в этом случае единственным решением системы неравенств будет $x = 0$;

3) если левый конец отрезка $[2a - 2; 2a + 2]$ совпадает с точкой 1; в этом случае единственным решением системы неравенств будет $x = 1$.

А теперь найдём значения параметра, при которых наступает один из трёх указанных выше случаев.

В случае 1) имеем $2a - 2 = -5$, т. е. $a = -1{,}5$.

В случае 2) имеем $2a + 2 = 0$, т. е. $a = -1$.

В случае 3) имеем $2a - 2 = 1$, т. е. $a = 1{,}5$.

Ответ $-1{,}5$; -1; $1{,}5$.

Основные результаты

- Мы познакомились с *понятиями*, относящимися к решению неравенств с одной переменной:
  — частное решение, общее решение, решение неравенства;
  — рациональное неравенство;
  — равносильные неравенства, равносильное преобразование неравенства;
  — система неравенств;
  — решение системы неравенств.
- Мы познакомились с начальными понятиями общепринятого в математике языка *теории множеств*:
  — элемент множества, подмножество данного множества;
  — объединение и пересечение множеств;
  — пустое множество.
- Мы научились находить объединение и пересечение множеств, иллюстрировать операции над множествами с помощью кругов Эйлера.
- Мы научились решать рациональные неравенства, используя *метод интервалов*.
- Мы научились решать системы и совокупности рациональных неравенств, неравенства с модулями, иррациональные неравенства.

Темы исследовательских работ

1. Операции над множествами.
2. Системы и совокупности неравенств.
3. Неравенства с переменной под знаком модуля.
4. Иррациональные неравенства.
5. Неравенства с параметрами.

2 ГЛАВА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§8 УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1 Задачи, приводящие к системам уравнений

С системами уравнений вы уже встречались в курсе алгебры 7-го класса, но это были только системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Теперь мы поговорим о решении систем нелинейных уравнений с двумя переменными, тем более что такие системы довольно часто представляют собой математические модели изучаемых ситуаций.

ПРИМЕР 1

Периметр прямоугольного треугольника равен 84 см, а гипотенуза — 35 см. Найти длины отрезков, на которые делит гипотенузу биссектриса прямого угла.

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Вычислим сначала катеты прямоугольного треугольника. Обозначим их длины буквами x, y. Поскольку периметр треугольника равен 84 см, получаем, что $x + y + 35 = 84$, т.е. $x + y = 49$. А по теореме Пифагора $x^2 + y^2 = 35^2$. В итоге приходим к системе уравнений $\begin{cases} x + y = 49, \\ x^2 + y^2 = 1225. \end{cases}$

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Выразим y из первого уравнения системы и полученный результат подставим вместо y во второе уравнение:

$$y = 49 - x,\ x^2 + (49 - x)^2 = 1225,$$
$$x^2 + (2401 - 98x + x^2) = 1225,\ x^2 - 49x + 588 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, получим: $x_1 = 21$, $x_2 = 28$. Из формулы $y = 49 - x$ находим: $y_1 = 28$, $y_2 = 21$. Итак, система имеет два решения: (21, 28), (28, 21).

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Воспользуемся известным из геометрии свойством биссектрисы треугольника: биссектриса делит противолежащую сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Это значит, что гипотенуза, равная 35 см, делится биссектрисой на части в отношении 3 : 4. Нетрудно догадаться, что эти части равны 15 см и 20 см.

Ответ 15 см, 20 см.

ПРИМЕР 2

Пристани B и C находятся ниже пристани A по течению реки на 30 км и 45 км соответственно (рис. 63). Моторная лодка отходит от пристани A, доходит до C, сразу поворачивает назад и приходит в B, затратив на весь путь 4 ч 40 мин. В другой раз эта же лодка отошла от пристани C, дошла до A, сразу повернула назад и пришла в B, затратив на весь путь 7 ч. Чему равны собственная скорость лодки и скорость течения реки?

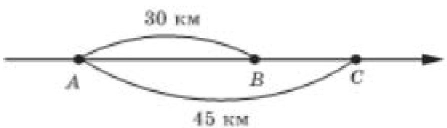


Рис. 63

I ЭТАП. *Составление математической модели*

Введём две переменные:

x км/ч — собственная скорость лодки,

y км/ч — скорость течения реки.

Тогда $(x + y)$ км/ч — скорость движения лодки по течению реки,

$(x - y)$ км/ч — скорость движения лодки против течения реки.

Рассмотрим первый рейс лодки. Он составил 45 км по течению от A до C и 15 км против течения от C до B. Значит,

$\frac{45}{x + y}$ ч — время движения лодки от A до C,

$\frac{15}{x - y}$ ч — время движения лодки от C до B.

Всего на первый рейс лодка затратила 4 ч 40 мин, т. е. $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ ч.

Таким образом, получаем уравнение $\frac{45}{x + y} + \frac{15}{x - y} = \frac{14}{3}$.

Рассмотрим второй рейс лодки. Он составил 45 км против течения от C до A и 30 км по течению от A до B. Значит,

$\frac{45}{x - y}$ ч — время движения лодки от C до A,

$\frac{30}{x + y}$ ч — время движения лодки от A до B.

Всего на второй рейс лодка затратила 7 ч. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{45}{x - y} + \frac{30}{x + y} = 7.$$

Математическая модель задачи представляет собой систему двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} \frac{45}{x + y} + \frac{15}{x - y} = \frac{14}{3}, \\ \frac{45}{x - y} + \frac{30}{x + y} = 7. \end{cases}$$

Как решить эту систему, мы пока не знаем, придётся вернуться к ней позднее (это будет сделано в § 11), но сначала надо создать необходимую теоретическую базу.

2 Рациональные уравнения с двумя переменными

Определение 1

Уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $f(x;\ y) = 0$, где $f(x;\ y)$ — алгебраическое выражение. **Решением уравнения с двумя переменными** $f(x;\ y) = 0$ называют пару чисел $(x;\ y)$, которая удовлетворяет уравнению, т. е. подстановка которой в уравнение обращает его в верное числовое равенство.

решение уравнения с двумя переменными

Например, $(3;\ 7)$ — решение уравнения $x^2 + y^2 = 58$, поскольку $3^2 + 7^2 = 58$ — верное числовое равенство; $\left(\sqrt{22};\ -6\right)$ — решение уравнения $x^2 + y^2 = 58$, поскольку $\left(\sqrt{22}\right)^2 + (-6)^2 = 58$ — верное числовое равенство. В то же время пара $(4;\ 5)$ не является решением уравнения, поскольку $4^2 + 5^2 = 58$ — неверное числовое равенство.

Определение 2

Два уравнения $p(x;\ y) = 0$ и $q(x;\ y) = 0$ называют **равносильными**, если они имеют одинаковые решения (в частности, если оба уравнения не имеют решений).

равносильные уравнения с двумя переменными

Обычно при решении стараются заменить данное уравнение более простым, но равносильным ему уравнением. Такую замену называют *равносильным преобразованием уравнения*. Ниже указаны основные равносильные преобразования.

1) *Перенос членов уравнения из одной части уравнения в другую с противоположными знаками.*

Например, замена уравнения $2x + 5y = 7x - 8y$ уравнением $2x - 7x = -8y - 5y$ есть равносильное преобразование.

2) *Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число или выражение, всюду отличное от нуля.*

Например, замена уравнения $0{,}5x^2 - 0{,}3xy = 2y$ уравнением $5x^2 - 3xy = 20y$ (обе части уравнения умножили почленно на 10) есть равносильное преобразование.

Неравносильными преобразованиями уравнения, как и в случае уравнений с одной переменной, могут быть:

1) *освобождение от знаменателей, содержащих переменные*;

2) *возведение обеих частей уравнения в одну и ту же чётную степень.*

Если в процессе решения уравнения применялось одно из указанных неравносильных преобразований, то все найденные решения надо проверить подстановкой в исходное уравнение, поскольку среди них могут оказаться посторонние решения, т. е. пары, не удовлетворяющие исходному уравнению.

Уравнение с двумя переменными чаще всего имеет бесконечно много решений. Но бывает, что уравнение с двумя переменными имеет конечное множество решений или вовсе не имеет решений. Например, уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = -1$ не имеет решений, а уравнение $(x - 1)^4 + (y + 2)^6 = 0$ имеет единственное решение $(1; -2)$ (при всех остальных значениях переменных левая часть уравнения положительна, т. е. не равна нулю).

Среди уравнений с двумя переменными выделяют так называемые *рациональные уравнения*, т. е. уравнения вида $p(x; y) = 0$, где $p(x; y)$ — рациональное выражение (выражение, составленное из чисел и переменных с помощью арифметических операций). Особый интерес среди них представляют однородные уравнения.

Определение 3

Многочлен с двумя переменными вида

$$p(x; y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + \ldots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n,$$

где a_n или a_0 отлично от нуля, называют **однородным многочленом n-й степени с двумя переменными x, y**. Если $p(x; y)$ — однородный многочлен, то уравнение $p(x; y) = 0$ называют **однородным уравнением**.

Характерный признак однородного многочлена — сумма показателей степеней переменных в каждом члене многочлена одна и та же.

Приведём примеры:

$p(x; y) = 2x + 3y$ — однородный многочлен первой степени; соответственно, $2x + 3y = 0$ — однородное уравнение первой степени;

однородный многочлен

однородное уравнение

$p(x; y) = 3x^2 + 5xy - 7y^2$ — однородный многочлен второй степени; соответственно, $3x^2 + 5xy - 7y^2 = 0$ — однородное уравнение второй степени;

$p(x; y) = x^3 + 4xy^2 - 5y^3$ — однородный многочлен третьей степени; соответственно, $x^3 + 4xy^2 - 5y^3 = 0$ — однородное уравнение третьей степени;

$p(x; y) = x^3 + 4xy^2 - 5y^3 + 3xy$ — неоднородный многочлен.

Любую константу можно считать однородным многочленом нулевой степени: например, 3, $\sqrt{7}$, $-0{,}3$ — однородные многочлены нулевой степени.

Существует достаточно изящный способ решения однородных уравнений. Поясним его суть на двух примерах, связанных с решением однородных уравнений третьей степени.

ПРИМЕР 3

Решить уравнение $x^3 + 4xy^2 - 5y^3 = 0$.

Решение Заметим прежде всего, что если в заданном уравнении положить $x = 0$, то получится $y = 0$; это значит, что пара (0; 0) является решением однородного уравнения (этот результат справедлив для любого однородного уравнения положительной степени).

Пусть теперь $x \neq 0$. Разделив почленно обе части заданного однородного уравнения третьей степени на x^3, получим

$$1 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0.$$

Введём новую переменную $z = \frac{y}{x}$. Тогда уравнение примет вид $1 + 4z^2 - 5z^3 = 0$. Решим это уравнение:

$$5z^3 - 4z^2 - 1 = 0;$$
$$(5z^3 - 5z^2) + (z^2 - 1) = 0;$$
$$5z^2(z - 1) + (z - 1)(z + 1) = 0;$$
$$(z - 1)(5z^2 + z + 1) = 0.$$

Из уравнения $z - 1 = 0$ находим $z = 1$; уравнение $5z^2 + z + 1 = 0$ не имеет корней.

Если $z = 1$, то $\frac{y}{x} = 1$, т. е. $y = x$. Это значит, что любая пара вида $(t; t)$ является решением заданного однородного уравнения (пара (0; 0) также входит в указанный перечень решений).

Ответ $(t; t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

ПРИМЕР 4

Решить уравнение $2x^3 - 5x^2y + 2xy^2 = 0$.

Решение Имеем $x(2x^2 - 5xy + 2y^2) = 0$. Значит, либо $x = 0$, либо $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$. В первом случае заданному уравнению удовлетворяют любые пары вида $(0; t)$, где $t \in \boldsymbol{R}$. Во втором случае, разделив почленно обе части однородного уравнения второй степени $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$2 - 5\frac{y}{x} + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0.$$

Введём новую переменную $z = \frac{y}{x}$. Тогда уравнение примет вид $2z^2 - 5z + 2 = 0$, откуда находим: $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$, т. е. либо $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2$, а потому $y = 2x$, либо $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$, а потому $x = 2y$. Это значит, что любая пара вида $(t;\ 2t)$ или $(2t;\ t)$ является решением заданного однородного уравнения.

Ответ $(0;\ t)$, $(t;\ 2t)$, $(2t;\ t)$, где $t \in \boldsymbol{R}$.

Вернёмся ещё раз к последнему однородному уравнению. Полученный ответ следует понимать так: при взгляде на любую пару чисел мы можем сразу сказать, является она решением уравнения или нет. Например, решениями заданного однородного уравнения являются:

$(0;\ 0)$, $(0;\ -5)$, $\left(0;\ \sqrt{5}\right)$ (это пары вида $(0;\ t)$);

$(1;\ 2)$, $(-4;\ -8)$, $\left(\sqrt{7};\ 2\sqrt{7}\right)$ (это пары вида $(t;\ 2t)$);

$(6;\ 3)$, $(-7;\ -3{,}5)$, $\left(\frac{4}{7};\ \frac{2}{7}\right)$ (это пары вида $(2t;\ t)$).

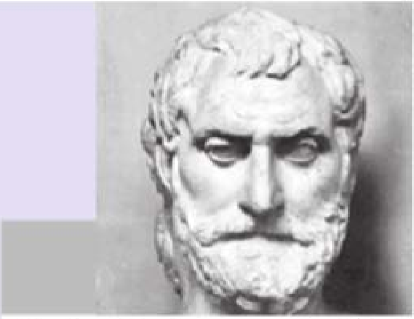
В то же время такие, например, пары, как $(5;\ 5)$, $(3;\ 0)$, $(2{,}5;\ 0{,}7)$ не являются решениями заданного уравнения.

3 Диофантовы уравнения

ПРИМЕР 5

Найти все целочисленные решения уравнения $x - y = 10$.

Решение Если $x = k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то уравнение $x - y = 10$ принимает вид $k - y = 10$, откуда получаем $y = k - 10$; это целое число. Значит, целочисленными решениями уравнения служат любые пары вида $(k;\ k - 10)$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.



Диофант (предположительно III в.), древнегреческий математик, называемый «отцом алгебры».

Если дано целое рациональное уравнение с несколькими переменными и с целочисленными коэффициентами и если поставлена задача найти целочисленные (или, в более общем случае, рациональные) его решения, то говорят, что задано *диофантово уравнение* (в честь древнегреческого математика Диофанта). Диофантово уравнение называют также *неопределённым уравнением*. Неопределённость заключается, видимо, в том, что такое уравнение, как правило, имеет бесконечное множество решений, как это было выше в примере 5.

В большинстве случаев решение диофантовых уравнений сопряжено со значительными трудностями. Иногда они преодолеваются с помощью свойств делимости целых чисел.

диофантово уравнение

ПРИМЕР 6

Найти целочисленные решения уравнения $2x + 3y = 17$.

Решение Пусть $(x; y)$ — решение уравнения. Тогда $17 - 3y = 2x$. Так как x — целое число, то число $17 - 3y$ чётно. Рассмотрим отдельно случай, когда y чётно, и случай, когда y нечётно.

1) Если y — чётное число, то $3y$ чётно, а $17 - 3y$ нечётно как разность нечётного числа 17 и чётного числа $3y$. Значит, этот случай нам не подходит.

2) Если y — нечётное число, то $y = 2k + 1$, где k — целое число. Тогда $17 - 3y = 17 - 3(2k + 1) = 17 - 6k - 3 = 14 - 6k = 2(7 - 3k)$.

Так как по условию $17 - 3y = 2x$, то $2(7 - 3k) = 2x$, $x = 7 - 3k$.

Итак, если $(x; y)$ — решение данного уравнения, то $x = 7 - 3k$, а $y = 2k + 1$, где k — целое число.

Проверим, что верно и обратное, т. е. если $x = 7 - 3k$, а $y = 2k + 1$, то $(x; y)$ — решение уравнения $2x + 3y = 17$.

Произведём подстановку:

$$2x + 3y = 2(7 - 3k) + 3(2k + 1) = 14 - 6k + 6k + 3 = 17.$$

Значит, любая пара вида $(7 - 3k; 2k + 1)$ является решением уравнения $2x + 3y = 17$.

Чтобы вам был понятнее полученный результат, дадим параметру k несколько конкретных целочисленных значений.

Пусть $k = 0$; тогда пара $(7 - 3k;\ 2k + 1)$ превращается в $(7;\ 1)$. Подставив значения $x = 7$, $y = 1$ в уравнение $2x + 3y = 17$, получим $14 + 3 = 17$ — верное равенство.

Пусть $k = 1$; тогда пара $(7 - 3k;\ 2k + 1)$ превращается в $(4;\ 3)$. Подставив значения $x = 4$, $y = 3$ в уравнение $2x + 3y = 17$, получим $8 + 9 = 17$ — верное равенство.

Пусть $k = 2$; тогда пара $(7 - 3k;\ 2k + 1)$ превращается в $(1;\ 5)$. Подставив значения $x = 1$, $y = 5$ в уравнение $2x + 3y = 17$, получим $2 + 15 = 17$ — верное равенство.

Пусть $k = -1$; тогда пара $(7 - 3k;\ 2k + 1)$ превращается в $(10;\ -1)$. Подставив значения $x = 10$, $y = -1$ в уравнение $2x + 3y = 17$, получим $20 - 3 = 17$ — верное равенство.

Для наглядности сведём полученные результаты в таблицу.

k	$x = 7 - 3k$	$y = 2k + 1$	$2x + 3y$
0	7	1	$2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 14 + 3 = 17$
1	4	3	$2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 8 + 9 = 17$
2	1	5	$2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 2 + 15 = 17$
–1	10	–1	$2 \cdot 10 + 3 \cdot (-1) = 20 - 3 = 17$

Так же обстоит дело со всеми остальными целочисленными значениями параметра k.

Ответ $(7 - 3k;\ 2k + 1)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

ПРИМЕР 7

Найти целочисленные решения уравнения $4x + 7y = 29$.

Решение Преобразуем уравнение к виду $x = \dfrac{29 - 7y}{4}$ и далее $x = \dfrac{28 + 1 - 7y}{4}$, т. е. $x = 7 - \dfrac{7y - 1}{4}$. Значение x будет целым тогда и только тогда, когда выражение $p(y) = 7y - 1$ делится без остатка на 4. Для целого числа y по отношению к числу 4 имеются четыре возможности: оно кратно числу 4, оно даёт при делении на 4 остаток 1, оно даёт при делении на 4 остаток 2, оно даёт при делении на 4 остаток 3. Рассмотрим каждую из этих возможностей по отдельности.

1) $y = 4n$. Тогда $p(y) = 7y - 1 = 7 \cdot 4n - 1 = 28n - 1$. Это число не делится на 4.

2) $y = 4n + 1$. Тогда $p(y) = 7y - 1 = 7(4n + 1) - 1 = 28n + 6$. Это число не делится на 4.

3) $y = 4n + 2$. Тогда $p(y) = 7y - 1 = 7(4n + 2) - 1 = 28n + 13$. Это число не делится на 4.

4) $y = 4n + 3$. Тогда $p(y) = 7y - 1 = 7(4n + 3) - 1 = 28n + 20$. Это число делится на 4.

Итак, $y = 4n + 3$. Тогда $x = 7 - \frac{7y - 1}{4} = 7 - \frac{28n + 20}{4} = 7 - (7n + 5) = 2 - 7n$.

Ответ $(2 - 7n; 4n + 3)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

ПРИМЕР 8

Найти целочисленные решения уравнения $4x^2 - y^2 = 11$.

Решение Перепишем уравнение в виде $(2x - y)(2x + y) = 11$. Левая часть уравнения представляет собой произведение двух целых чисел. Оно может равняться 11 лишь в четырёх случаях: когда первый множитель равен 1, а второй 11; когда первый множитель равен -1, а второй -11; когда первый множитель равен 11, а второй 1; когда первый множитель равен -11, а второй -1. Значит, задача сводится к решению четырёх систем уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x + y = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -1, \\ 2x + y = -11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 11, \\ 2x + y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -11, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x = 3$, $y = 5$; из второй $x = -3$, $y = -5$; из третьей $x = 3$, $y = -5$; из четвёртой $x = -3$, $y = 5$.

Ответ $(3; 5)$, $(-3; -5)$, $(3; -5)$, $(-3; 5)$.

4 График уравнения с двумя переменными

Определение 4

Пусть дано уравнение $p(x; y) = 0$. Множество точек $(x; y)$ координатной плоскости xOy таких, что $(x; y)$ — решение уравнения $p(x; y) = 0$, называют *графиком уравнения*.

График уравнения с двумя переменными

ПРИМЕР 9

Построить график уравнения

$$3x + 4y - 12 = 0. \qquad (1)$$

Решение Из курса алгебры 7-го класса вам известно, что графиком линейного уравнения с двумя переменными $ax + by + c = 0$, где хотя бы одно из чисел a, b отлично от нуля, является прямая линия. Значит, график уравнения (1) — прямая, для построения которой достаточно указать две точки, ей принадлежащие. Если в уравнение (1) подставить $x = 0$, то оно примет вид $4y - 12 = 0$, откуда находим $y = 3$; итак, (0; 3) — точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (1). Если в уравнение (1) подставить $y = 0$, то оно примет вид $3x - 12 = 0$, откуда находим $x = 4$; итак, (4; 0) — точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (1).

Проведём через точки (0; 3) и (4; 0) прямую — это и будет график уравнения (1) (рис. 64).

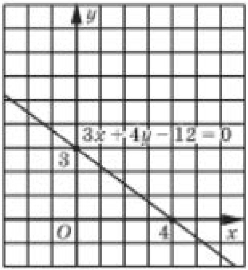


Рис. 64

Если уравнение $p(x; y) = 0$ удаётся преобразовать к виду $y = f(x)$, то график функции $y = f(x)$ считается одновременно и графиком уравнения $p(x; y) = 0$.

ПРИМЕР 10

Построить график уравнения

$$y - 2x^2 = 0.$$

Решение Преобразуем уравнение к виду $y = 2x^2$. Графиком функции $y = 2x^2$ является парабола (рис. 65).

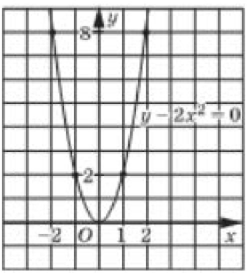


Рис. 65

ПРИМЕР 11

Построить график уравнения $xy = 2$.

Решение Преобразуем уравнение к виду $y = \frac{2}{x}$. Графиком функции $y = \frac{2}{x}$ является гипербола (рис. 66).

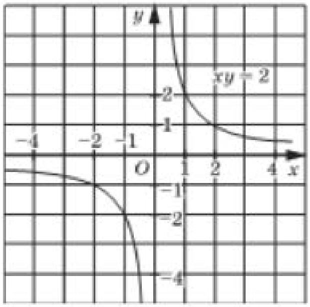


Рис. 66

5 Формула расстояния между двумя точками координатной плоскости

Строя графики уравнений в примерах 8—10, мы опирались лишь на материал, известный вам из курса алгебры 7—8-го классов: графиками были прямая, парабола, гипербола. В этом пункте мы расширим круг геометрических фигур, которые могут служить графиками уравнений с двумя переменными.

ТЕОРЕМА 1

Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ координатной плоскости xOy вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Доказательство Соединим точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ отрезком и проведём прямые $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$ (рис. 67). Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Длина катета AC равна расстоянию между точками x_1 и x_2 оси x, т. е. $AC = |x_2 - x_1|$. Длина катета BC равна расстоянию между точками y_1 и y_2 оси y, т. е. $BC = |y_2 - y_1|$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, т. е.

$$AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2. \qquad (2)$$

Так как $|a|^2 = a^2$, то формулу (2) можно переписать в виде $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Значит, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Теорема доказана.

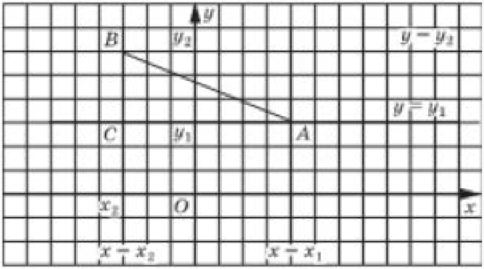


Рис. 67

Вычислим, например, расстояние между точками (9; −1) и (2; −25). Получим $\sqrt{(2-9)^2 + (-25+1)^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$.

ТЕОРЕМА 2

Графиком уравнения

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (3)$$

на координатной плоскости xOy является окружность с центром в точке $O'(a; b)$ и радиусом r ($r > 0$) (рис. 68).

Доказательство Возьмём любую точку $M(x; y)$ окружности (см. рис. 68). По теореме 1 имеем $O'M = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Но $O'M = r$, значит, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, т. е.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

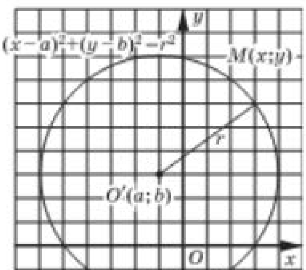


Рис. 68

Итак, координаты любой точки $M(x; y)$, принадлежащей окружности, удовлетворяют уравнению (3).

Если точка $P(x; y)$ не лежит на окружности, то либо $O'P < r$ (если точка P расположена внутри окружности), либо $O'P > r$ (если точка P расположена вне окружности). И в том, и в другом случае уравнению (3) координаты точки P не удовлетворяют.

Следовательно, точки окружности и только они удовлетворяют уравнению (3). Теорема доказана.

ПРИМЕР 12

Построить график уравнения

$$x^2 + y^2 = 16.$$

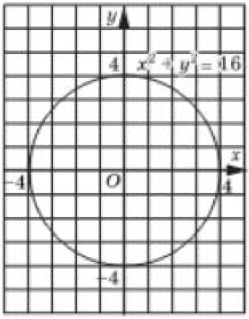


Рис. 69

Решение Перепишем уравнение в виде $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$. По теореме 2 графиком этого уравнения является окружность с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом 4 (рис. 69).

ПРИМЕР 13

Построить график уравнения:

а) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

Решение а) Перепишем уравнение в виде $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$. Графиком этого уравнения по теореме 2 является окружность с центром в точке $(1; 2)$ и радиусом 3 (рис. 70).

б) Перепишем уравнение в виде $(x^2 + 4x + 4) + y^2 = 4$, т. е.

$$(x + 2)^2 + y^2 = 4,$$

и далее

$$(x - (-2))^2 + (y - 0)^2 = 2^2.$$

Графиком этого уравнения по теореме 2 является окружность с центром в точке $(-2; 0)$ и радиусом 2 (рис. 71).

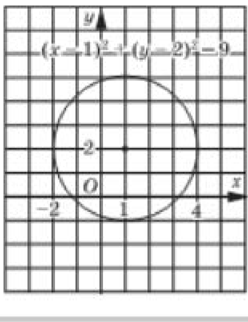


Рис. 70

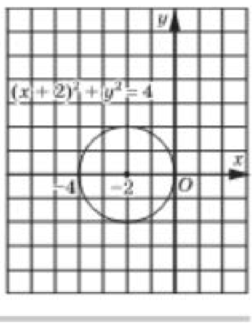
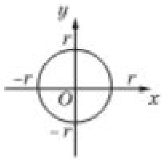
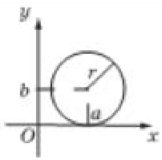


Рис. 71

Оформим основные результаты этого пункта в виде таблицы.

Аналитическая модель	Геометрическая модель	Словесная модель
$x^2 + y^2 = r^2$		Окружность на координатной плоскости с центром в начале координат и радиусом r
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$		Окружность на координатной плоскости с центром в точке $(a; b)$ и радиусом r

ПРИМЕР 14

Построить график уравнения $\dfrac{x^2 - 6x + y^2 + 2{,}75}{4x - 3y} = 0$.

Решение Дробь равна нулю — это значит, что числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Приравняв числитель нулю и выполнив понятные преобразования, получим $(x - 3)^2 + y^2 = 6{,}25$. Это уравнение окружности радиусом 2,5 с центром в точке $(3; 0)$.

Рассмотрим уравнение $4x - 3y = 0$. Его графиком является прямая, проходящая через начало координат и точку $(3; 4)$ (рис. 72), она пересекает окружность в двух точках; именно эти точки и следует исключить. Таким образом, графиком уравнения является окружность с двумя «выколотыми» точками.

Осталось выяснить, какие же точки нам пришлось «выкалывать». Из уравнения $4x - 3y = 0$ находим $y = \frac{4}{3}x$. Подставим $\frac{4}{3}x$ вместо y в уравнение окружности:

$$(x - 3)^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 6{,}25;$$

$$x^2 - 6x + 9 + \frac{16x^2}{9} - \frac{25}{4} = 0;$$

$$100x^2 - 216x + 99 = 0;$$

$$x_1 = 0{,}66,\ x_2 = 1{,}5.$$

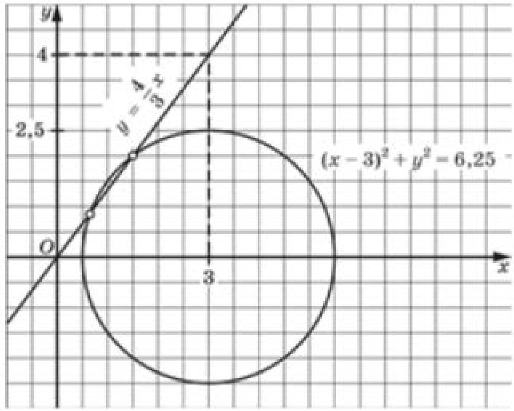


Рис. 72

Если $x = 0,66$, то по формуле $y = \frac{4}{3}x$ находим $y = 0,88$; если $x = 1,5$, то $y = 2$. Графиком уравнения является окружность (см. рис. 72) с двумя «выколотыми» точками: (0,66; 0,88) и (1,5; 2).

Вопросы для самопроверки

1. Что такое уравнение с двумя переменными?
2. Что называют решением уравнения с двумя переменными?
3. Решите уравнение:
   а) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 = 4y - 2x - 5$.
4. Подберите три решения уравнения:
   а) $2x + 3y = 6$; б) $x^2 + y^2 = 25$.
5. Что называют однородным многочленом от двух переменных?
6. Приведите пример однородного многочлена 4-й степени.
7. Решите уравнение $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.
8. Что называют графиком уравнения $p(x; y) = 0$?
9. Что представляет собой график уравнения $2x + 3y = 6$? Постройте этот график.
10. Запишите формулу расстояния между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ координатной плоскости xOy.
11. Что представляет собой график уравнения
    $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$?

§ 9 НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Наряду с уравнениями с двумя переменными рассматривают и *неравенства с двумя переменными* — это неравенства вида $p(x;\ y) > 0$, $p(x;\ y) < 0$. Как правило, для их решения используют геометрическую модель — изображение решения неравенства на координатной плоскости в виде множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенству. Например, на рис. 73, *а* изображено множество решений неравенства $y \geqslant 2x^2$ — точки, лежащие на параболе и выше неё; на рис. 73, *б* изображено множество решений неравенства $x^2 + y^2 \leqslant 16$ — точки, лежащие на окружности радиусом 4 с центром в точке (0; 0) и внутри ограниченного ею круга; на рис. 74 изображено множество решений неравенства $(x + 2)^2 + y^2 > 4$ — точки, лежащие вне круга.

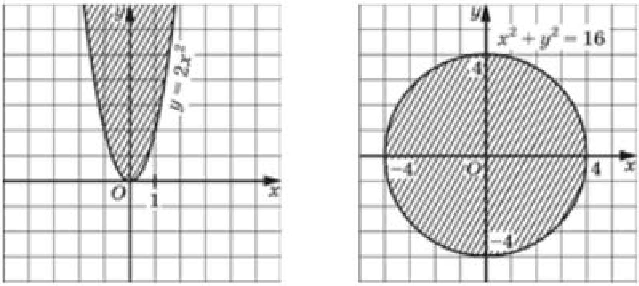


Рис. 73

а *б*

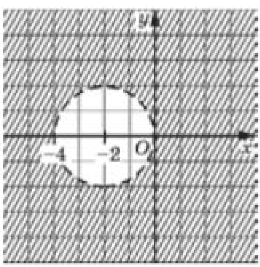


Рис. 74

ПРИМЕР 1

Решить неравенство $xy < 2$.

Решение Если $x = 0$, то неравенство принимает вид $0 < 2$. Это верное неравенство, значит, все точки оси y (прямая $x = 0$) при-

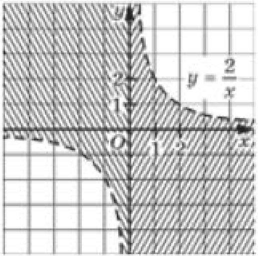


Рис. 75

надлежат множеству решений неравенства. Если $x > 0$, то неравенство $xy < 2$ можно переписать в виде $y < \frac{2}{x}$. Значит, в правой полуплоскости (при $x > 0$) следует взять точки, лежащие ниже правой ветви гиперболы $y = \frac{2}{x}$. Если $x < 0$, то неравенство $xy < 2$ можно переписать в виде $y > \frac{2}{x}$. Значит, в левой полуплоскости (при $x < 0$) следует взять точки, лежащие выше левой ветви гиперболы. Множество решений неравенства $xy < 2$ изображено на рис. 75.

Иногда при построении графика уравнения с двумя переменными приходится использовать неравенства с двумя переменными. Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР 2

Построить график уравнения $(x - 2)\sqrt{\frac{y+3}{x-2}} = -\sqrt{(y+3)(x-2)}$.

Решение Наличие знака «минус» перед корнем в правой части уравнения заставляет нас потребовать выполнения дополнительного условия $x - 2 < 0$. Если $x - 2 < 0$, то наличие под знаком корня выражения $(y + 3)(x - 2)$ вынуждает нас принять ещё одно дополнительное ограничение: $y + 3 \leq 0$. При указанных ограничениях имеющиеся радикалы можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{(y+3)(x-2)} = \sqrt{|y+3|} \cdot \sqrt{|x-2|} = \sqrt{-y-3} \cdot \sqrt{2-x};$$

$$\sqrt{\frac{y+3}{x-2}} = \frac{\sqrt{-y-3}}{\sqrt{2-x}}.$$

Теперь поработаем с заданным уравнением:

$$(x-2)\frac{\sqrt{-y-3}}{\sqrt{2-x}} = -\sqrt{-y-3} \cdot \sqrt{2-x};$$

$$(x-2)\sqrt{-y-3} = -(2-x)\sqrt{-y-3};$$

$$\sqrt{-y-3} = \sqrt{-y-3}.$$

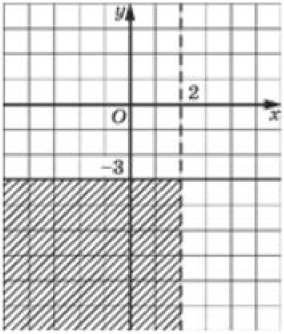


Рис. 76

Таким образом, заданное уравнение выполняется при любых допустимых значениях переменных. Эти допустимые значения определяются системой неравенств $\begin{cases} x - 2 < 0, \\ y + 3 \leqslant 0. \end{cases}$

На рис. 76 представлено множество точек координатной плоскости, которые удовлетворяют заданному уравнению.

ПРИМЕР 3

Построить **график уравнения** $|y - x^2| = x^2 - 2x$.

Решение Если $y \geqslant x^2$, то $|y - x^2| = y - x^2$, и заданное уравнение принимает вид $y - x^2 = x^2 - 2x$, т. е. $y = 2x^2 - 2x$. Если $y < x^2$, то $|y - x^2| = -(y - x^2)$, и заданное уравнение принимает вид $-(y - x^2) = x^2 - 2x$, т. е. $y = 2x$.

Решения неравенства $y \geqslant x^2$ — это множество точек, принадлежащих параболе $y = x^2$ и расположенных выше неё (рис. 77). При этом должно выполняться уравнение $y = 2x^2 - 2x$, т. е. интересующие нас точки должны лежать на параболе $y = 2x^2 - 2x$. Указанные две параболы пересекаются в точках (0; 0) и (2; 4). Решения уравнения при $y \geqslant x^2$ — множество точек, принадлежащих выделенным на рис. 77 двум частям параболы $y = 2x^2 - 2x$ (при $x \leqslant 0$ и при $x \geqslant 2$).

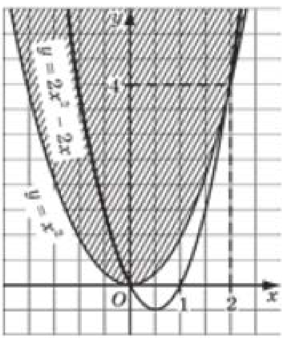


Рис. 77

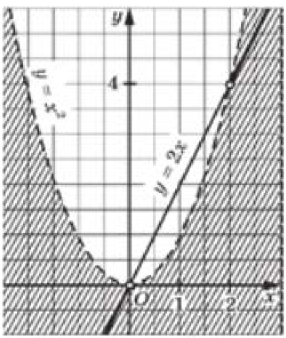


Рис. 78

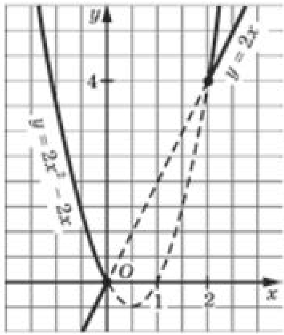


Рис. 79

Решения неравенства $y < x^2$ — это множество точек, расположенных ниже параболы $y = x^2$ (рис. 78). При этом должно выполняться уравнение $y = 2x$, т. е. интересующие нас точки должны лежать на прямой $y = 2x$. Решения заданного уравнения — множество точек, принадлежащих выделенным на рис. 78 частям прямой (при $x < 0$ и при $x > 2$).

График заданного уравнения представлен на рис. 79.

Завершая параграф, рассмотрим несколько примеров, в которых удаётся решить неравенство с двумя переменными, не прибегая к помощи координатной плоскости.

ПРИМЕР 4

Решить неравенство $4x^2 - 4x + 5 \leqslant \dfrac{8}{y^2 + 10y + 27}$.

Решение Выполним некоторые преобразования заданного неравенства:

$$(2x - 1)^2 + 4 \leqslant \frac{8}{(y + 5)^2 + 2}.$$

Обозначим левую часть неравенства $p(x)$, а правую — $q(y)$. Достаточно очевидно, что для любого x выполняется неравенство $p(x) \geqslant 4$. Поскольку знаменатель дроби $q(y)$ не меньше чем 2, сама дробь не больше чем 4. Итак, для любых пар $(x; y)$, удовлетворяющих заданному уравнению, должна выполняться следующая цепочка:

$$4 \leqslant p(x) \leqslant q(y) \leqslant 4,$$

а это возможно тогда и только тогда, когда $p(x) = 4$ и $q(y) = 4$. Из уравнения $p(x) = 4$ получаем $x = \dfrac{1}{2}$; из уравнения $q(y) = 4$ получаем $y = -5$.

Ответ $\left(\dfrac{1}{2}; -5\right)$.

ПРИМЕР 5

Найти целочисленные решения неравенства:

а) $4\sqrt{2x + 3y - 7} + 3\sqrt{4x - 3y - 5} \leqslant 2{,}5$;

б) $\dfrac{2}{3(x + 2)^2 + 4(y + 3)^4} \geqslant \dfrac{3}{8}$.

Решение а) Если x, y — целые числа, то подкоренные выражения — целые числа; нас, естественно, интересуют лишь неотрицательные значения подкоренных выражений. Если хотя бы одно из этих выражений больше нуля (т. е. равно 1, 2, 3, ...), то левая часть неравенства уж во всяком случае не меньше чем 3, что нас не устраивает. Значит, устроить нас может лишь один случай: когда оба подкоренных выражения одновременно обращаются в нуль. Таким образом, задача сводится к решению системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 3y = 5. \end{cases}$

Находим решение этой системы: $x = 2$; $y = 1$.

б) Преобразуем данное неравенство: $3(x + 2)^2 + 4(y + 3)^4 \leqslant \dfrac{16}{3}$.

Поскольку $3(x + 2)^2 \geqslant 0$, должно выполняться неравенство $4(y + 3)^4 \leqslant \dfrac{16}{3}$, т. е. $(y + 3)^4 \leqslant \dfrac{4}{3}$. Это возможно только в трёх случаях: $y = -3$, $y = -2$, $y = -4$. Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

Если $y = -3$, то неравенство $3(x + 2)^2 + 4(y + 3)^4 \leqslant \dfrac{16}{3}$ принимает вид $(x + 2)^2 \leqslant \dfrac{16}{9}$. Это верно при следующих целочисленных значениях x: -3, -2, -1. Таким образом, получили три решения заданного неравенства: $(-3; -3)$, $(-2; -3)$, $(-1; -3)$.

Если $y = -2$ или $y = -4$, то неравенство $3(x + 2)^2 + 4(y + 3)^4 \leqslant \dfrac{16}{3}$ принимает вид $(x + 2)^2 \leqslant \dfrac{4}{9}$.

Это верно лишь при $x = -2$. Таким образом, получили ещё два целочисленных решения заданного неравенства: $(-2; -2)$, $(-2; -4)$.

Ответ а) $(2; 1)$;
б) $(-3; -3)$, $(-2; -3)$, $(-1; -3)$, $(-2; -2)$, $(-2; -4)$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют решением неравенства $p(x; y) > 0$?
2. Подберите три решения неравенства:
   а) $2x + 3y > 6$; б) $x^2 + y^2 < 25$.
3. Постройте множество точек координатной плоскости xOy, удовлетворяющих неравенству:
   а) $x^2 + y^2 < 25$; б) $x^2 + y^2 \leqslant 25$; в) $x^2 + y^2 > 25$.

§ 10 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СИСТЕМАМИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1 Графический метод решения систем уравнений с двумя переменными

Системы уравнений с двумя переменными встречались вам в курсе алгебры 7-го класса — это были системы двух линейных уравнений с двумя переменными. В предыдущем параграфе мы говорили о более сложных, чем линейные, уравнениях с двумя переменными, теперь рассмотрим системы таких уравнений.

Определение 1

Уравнения $p(x; y) = 0$ и $q(x; y) = 0$ образуют **систему уравнений**, если поставлена задача найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие одновременно обоим уравнениям. Пишут

$$\begin{cases} p(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0. \end{cases}$$

Пару чисел $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого, и второго уравнений системы, называют **решением системы уравнений.** Решить систему уравнений — это значит найти все её решения или установить, что решений нет.

Например, пара $(3; 7)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ y - x = 4. \end{cases} \qquad (1)$$

В самом деле, эта пара удовлетворяет как первому, так и второму уравнению системы, значит, является её решением. А пара (5; 9) не является решением системы (1): она не удовлетворяет первому уравнению (хотя и удовлетворяет второму уравнению системы).

система уравнений

решение системы уравнений

Разумеется, переменные в уравнениях, образующих систему уравнений, могут быть обозначены и другими буквами, например: a и b, s и t, u и v и т. д. Но в любом случае при записи ответа в виде пары чисел используют *лексикографический способ*, т. е. на первое место ставят ту из двух букв, которая в латинском алфавите встречается раньше.

Систему уравнений можно решать графическим методом: надо построить график первого уравнения, затем построить график второго уравнения и найти точки пересечения этих графиков; координаты каждой точки пересечения служат решением системы уравнений.

ПРИМЕР 1

Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y - x = 4. \end{cases}$

Решение 1) Построим график уравнения $x^2 + y^2 = 16$ — окружность с центром в начале координат и радиусом 4 (рис. 80).

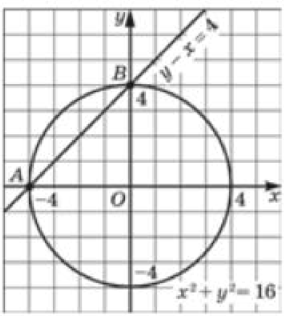


Рис. 80

2) Построим график уравнения $y - x = 4$. Это прямая, проходящая через точки (0; 4) и (–4; 0) (см. рис. 80).

3) Окружность и прямая пересекаются в точках A и B (см. рис. 80). Судя по построенной геометрической модели, точка A имеет координаты (–4; 0), а точка B — координаты (0; 4). Проверка показывает, что на самом деле пары (–4; 0) и (0; 4) являются решениями каждого уравнения системы, а значит, и решениями системы уравнений. Следовательно, заданная система уравнений имеет два решения: (–4; 0) и (0; 4).

Ответ (–4; 0); (0; 4).

ПРИМЕР 2

Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - y = 0, \\ xy = 2. \end{cases}$

Решение 1) Графиком первого уравнения является парабола $y = 2x^2$ (рис. 81).

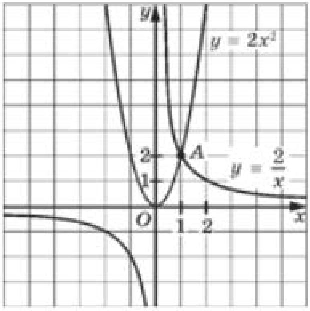


Рис. 81

2) Графиком второго уравнения является гипербола $y = \frac{2}{x}$ (см. рис. 81).

3) Парабола и гипербола пересекаются, судя по чертежу, в точке $A(1;\ 2)$. Проверка показывает, что действительно пара $(1;\ 2)$ является решением каждого уравнения системы, а значит, и решением системы уравнений. Следовательно, заданная система уравнений имеет одно решение: $(1;\ 2)$.

Ответ $(1;\ 2)$.

Графический метод решения систем уравнений красив, но ненадёжен: во-первых, потому что графики уравнений удаётся построить далеко не всегда; во-вторых, даже если графики уравнений удалось построить, точки пересечения могут быть не такими «хорошими», как в специально подобранных примерах 1 и 2, а то и вовсе окажутся за пределами чертежа. Значит, нужно иметь более надёжные алгебраические методы решения систем двух уравнений с двумя переменными. Об этом пойдёт речь в следующем параграфе.

ПРИМЕР 3

Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = x^2 + a \end{cases}$ при различных значениях параметра a при условии, что $a \geqslant -10$?

Решение Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 16$ является окружность радиусом 4 с центром в начале координат (рис. 82). Графиком уравнения $y = x^2 + a$ является парабола с вершиной в точке $(0;\ a)$ (см. рис. 82). Число решений системы, т. е. число точек пересечения параболы и окружности, зависит от положения вершины параболы, т. е. от значения параметра a.

Если $a > 4$, то парабола и окружность не пересекаются (см. рис. 82), значит, система не имеет решений.

Если $a = 4$, то парабола и окружность имеют единственную общую точку $(0;\ 4)$ (см. рис. 82), значит, система имеет одно решение.

Если $-4 < a < 4$, то парабола и окружность пересекаются в двух точках (рис. 83), значит, система имеет два решения.

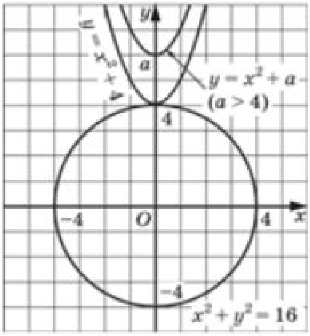


Рис. 82

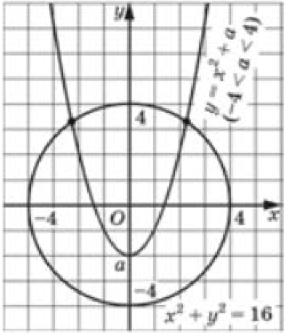


Рис. 83

Если $a = -4$, то парабола и окружность имеют три общие точки (рис. 84), значит, система имеет три решения.

Если $a = -10$, то парабола и окружность пересекаются в четырёх точках. Убедиться в этом можно так: парабола $y = x^2 - 10$ пересекает ось x в точках $-\sqrt{10}$ и $\sqrt{10}$. Обе эти точки лежат внутри круга (рис. 85; здесь масштаб уменьшен по сравнению с рис. 82—84).

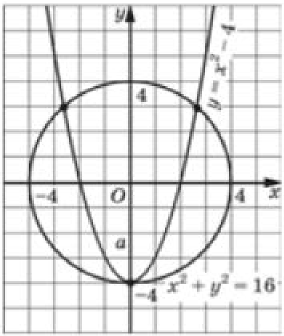


Рис. 84

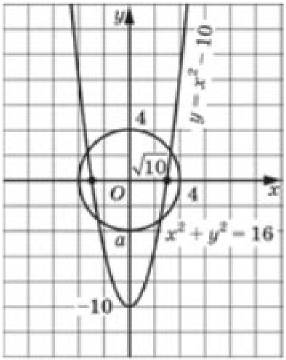


Рис. 85

Аналогичная ситуация имеет место и в случае, когда $-10 < a < -4$.

Ответ Нет решений, если $a > 4$; одно решение, если $a = 4$; два решения, если $-4 < a < 4$; три решения, если $a = -4$; четыре решения, если $-10 \leqslant a < -4$.

ПРИМЕР 4

Найти целочисленные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^3 = 96, \\ 2xy + 5x = 8y + 22. \end{cases}$$

Решение Преобразуем второе уравнение: $x = \dfrac{8y + 22}{2y + 5}$ (деление на $2y + 5$ возможно, поскольку это выражение не обращается в нуль при целочисленных значениях y); $x = 4 + \dfrac{2}{2y + 5}$. Дробь $\dfrac{2}{2y + 5}$ должна быть целым числом. Значит, для её знаменателя есть четыре возможности: он может быть равен -1, 1, -2, 2. Из уравнения $2y + 5 = -1$ находим $y = -3$; из уравнения $2y + 5 = 1$ находим $y = -2$; уравнения $2y + 5 = 2$, $2y + 5 = -2$ целочисленных корней не имеют.

Итак, либо $y = -3$, либо $y = -2$. Подставим поочерёдно каждое из этих значений в первое уравнение заданной системы. Если $y = -3$, то первое уравнение принимает вид $2x^2 + 81 = 96$; это уравнение не имеет целочисленных корней. Если $y = -2$, то первое уравнение принимает вид $2x^2 + 24 = 96$; это уравнение имеет целочисленные корни: $x = \pm 6$.

Ответ $(6; -2)$, $(-6; -2)$.

2 Системы неравенств с двумя переменными

Определение 2

Если поставлена задача найти такие пары чисел $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют неравенствам $p(x; y) > 0$ и $q(x; y) > 0$, то говорят, что указанные неравенства образуют **систему неравенств** $\begin{cases} p(x; y) > 0, \\ q(x; y) > 0. \end{cases}$

Пару чисел $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого, и второго неравенств системы, называют **решением системы неравенств**. Решить систему неравенств — значит найти все её решения (или установить, что решений нет).

а-я

система неравенств с двумя переменными

решение системы неравенств

ПРИМЕР 5

Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x - 3y \leqslant 6, \\ x + y + 7 \geqslant 0. \end{cases}$

Решение 1) Построим график уравнения $2x - 3y = 6$. Это прямая, проходящая через точки (3; 0) и (0; −2). Возьмём в качестве контрольной точку (0; 0), расположенную выше построенной прямой; её координаты удовлетворяют неравенству $2x - 3y \leqslant 6$. Значит, геометрическим решением первого неравенства заданной системы являются полуплоскость, расположенная выше прямой, и сама прямая (поскольку заданное неравенство нестрогое) (рис. 86).

2) Построим график уравнения $x + y + 7 = 0$. Это прямая, проходящая через точки (−7; 0) и (0; −7). Возьмём в качестве контрольной точку (0; 0), расположенную выше построенной прямой; её координаты удовлетворяют неравенству $x + y + 7 \geqslant 0$. Значит, геометрическим решением второго неравенства заданной системы служат полуплоскость, расположенная выше прямой, и сама прямая (рис. 87).

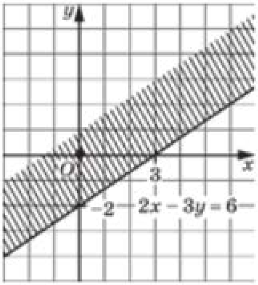


Рис. 86

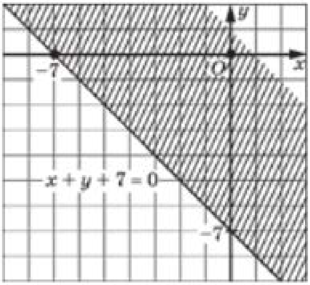


Рис. 87

3) В качестве решений заданной системы неравенств следует взять все общие точки построенных полуплоскостей, т. е. их пересечение (заштриховано на рис. 88).

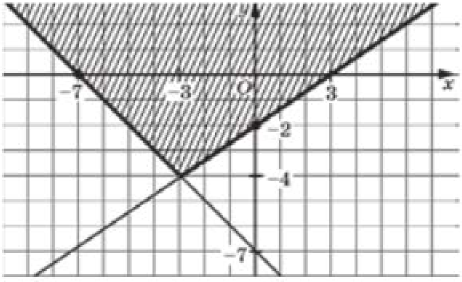


Рис. 88

ПРИМЕР 6

Решить систему неравенств $\begin{cases} y \geqslant x^2 - 4x + 1, \\ y \leqslant x - 3. \end{cases}$

Решение Надо найти пересечение множества решений неравенства $y \geqslant x^2 - 4x + 1$ (рис. 89) и неравенства $y \leqslant x - 3$ (рис. 90). Искомое множество решений изображено на рис. 91 — *параболический сегмент*.

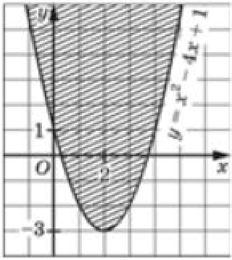


Рис. 89

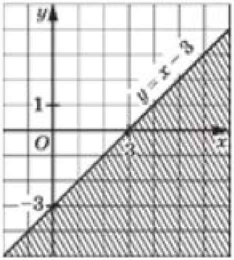


Рис. 90

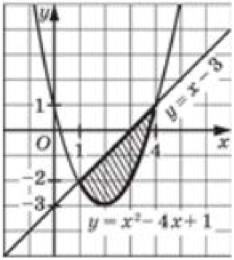


Рис. 91

ПРИМЕР 7

Найти целочисленные решения системы неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{2x + 3y - 6} < \sqrt{5} - 1, \\ \dfrac{1}{(x - 2y)^2 + 1} > \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Решение Если x, y — целые числа, то $2x + 3y - 6$ — целое число. Поскольку оно содержится под знаком квадратного корня, оно должно быть неотрицательным: 0, 1, 2, 3, ... Но уже значение 2 нас не устраивает, поскольку $\sqrt{2} > \sqrt{5} - 1$. Значит, нас интересуют только два случая: $2x + 3y - 6 = 0$ или $2x + 3y - 6 = 1$.

Выполним преобразования второго неравенства системы:

$$(x - 2y)^2 + 1 < \frac{3}{2}; \ (x - 2y)^2 < \frac{1}{2}.$$

Это возможно лишь при условии, что $x - 2y = 0$. В итоге задача сводится к решению совокупности двух систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ x = 2y; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x = 2y. \end{cases}$$

Первая система не имеет целочисленных решений, а из второй системы находим: $x = 2$, $y = 1$.

Ответ (2; 1).

Вопросы для самопроверки

1. Что такое система двух уравнений с двумя переменными?
2. Что называют решением системы двух уравнений с двумя переменными?
3. Дана система уравнений $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$ Какие из предложенных ниже пар чисел являются её решениями:
   а) (5; 0); в) (3; 4); д) (−1; 2)?
   б) (2; 1); г) (1; 2);
4. Расскажите, как графически решить систему уравнений $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$
5. Покажите на координатной плоскости xOy решения системы неравенств $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 1, \\ y \leqslant x. \end{cases}$

§ 11 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

1 Метод подстановки

Этот метод вы уже применяли в 7-м классе при решении систем двух линейных уравнений с двумя переменными. Он заключается в том, что из одного уравнения системы одну из переменных выражают через другую, затем полученное выражение подставляют во второе уравнение системы и решают его относительно оставшейся переменной. Найдя корни последнего уравнения, ищут соответствующие значения выраженной переменной.

Выше (см. пример 14 в § 8) мы уже фактически решили методом подстановки систему уравнений $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x, \\ (x-3)^2 + y^2 = 6{,}25. \end{cases}$

Рассмотрим ещё несколько примеров.

ПРИМЕР 1

Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$

Решение 1) Выразим x через y из первого уравнения системы:

$$x = 5 - 3y.$$

2) Подставим полученное выражение вместо x во второе уравнение системы: $(5 - 3y)y = 2$.

3) Решим это уравнение:

$$5y - 3y^2 = 2; \quad 3y^2 - 5y + 2 = 0;$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{2}{3}.$$

4) Подставим поочерёдно каждое из найденных значений y в уравнение $x = 5 - 3y$. Если $y = 1$, то $x = 5 - 3 \cdot 1 = 2$; если $y = \frac{2}{3}$, то $x = 5 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 3$.

5) Пары $(2; 1)$ и $\left(3; \frac{2}{3}\right)$ — решения заданной системы уравнений.

Ответ $(2; 1)$; $\left(3; \frac{2}{3}\right)$.

ПРИМЕР 2

Решить систему уравнений $\begin{cases} y^2 - 2xy - 3x^2 = 0, \\ x^3 + y^3 = 28. \end{cases}$

Решение Поработаем с первым уравнением системы. Это однородное уравнение второй степени (см. § 9). Если $x = 0$, то $y = 0$; сразу заметим, что пара $(0; 0)$ не удовлетворяет второму уравнению системы, т. е. не является решением системы. Если $x \neq 0$, то обе части первого уравнения системы можно почленно разделить на x^2 и затем ввести новую переменную $z = \frac{y}{x}$:

$$y^2 - 2xy - 3x^2 = 0; \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x} - 3 = 0;$$

$$z^2 - 2z - 3 = 0; \ z_1 = 3, \ z_2 = -1.$$

Значит, либо $\frac{y}{x} = 3$, т. е. $y = 3x$, либо $\frac{y}{x} = -1$, т. е. $y = -x$. В итоге получаем совокупность двух систем уравнений:

$$\begin{cases} y = 3x, \\ x^3 + y^3 = 28; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x, \\ x^3 + y^3 = 28. \end{cases}$$

Подставив $3x$ вместо y во второе уравнение первой системы, получим:

$$x^3 + (3x)^3 = 28; \quad 28x^3 = 28; \quad x = 1.$$

Итак, $x = 1$, а поскольку $y = 3x$, то $y = 3$.

Подставив $-x$ вместо y во второе уравнение второй системы, получим уравнение $x^3 + (-x)^3 = 28$, которое не имеет корней. Значит, вторая система не имеет решений.

Ответ (1; 3).

ПРИМЕР 3

Чему равно наименьшее значение выражения

$$p(x; y) = |2x - y - 4| + \sqrt{x^4 + \frac{4x^2}{y} + \frac{4}{y^2} + 9}$$

и при каких значениях переменных оно достигается?

Решение Здесь $|2x - y - 4| \geqslant 0$ и $\sqrt{x^4 + \frac{4x^2}{y} + \frac{4}{y^2} + 9} \geqslant 3$, поскольку $\sqrt{x^4 + \frac{4x^2}{y} + \frac{4}{y^2} + 9} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{2}{y}\right)^2 + 9}$. Если нам повезёт, а именно окажется, что существует такая пара $(x; y)$, при которой одновременно выполняются равенства $|2x - y - 4| = 0$ и $\sqrt{\left(x^2 + \frac{2}{y}\right)^2 + 9} = 3$, то $p_{\text{наим}} = 3$.

Фактически задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x^2 + \dfrac{2}{y} = 0. \end{cases}$$

Выразим y из первого уравнения: $y = 2x - 4$. Подставим полученное выражение вместо y во второе уравнение:

$$x^2 + \frac{2}{2x-4} = 0;$$

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0;$$

$$(x^3 - 1) - 2(x^2 - 1) = 0;$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) - 2(x-1)(x+1) = 0;$$

$$(x-1)(x^2 - x - 1) = 0.$$

Из последнего уравнения находим: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Соответственно, по формуле $y = 2x - 4$ находим: $y_1 = -2$, $y_2 = \sqrt{5} - 3$, $y_3 = -\sqrt{5} - 3$.

Ответ $p_{наим} = 3$, достигается при следующих парах значений переменных: $(1; -2)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ \sqrt{5} - 3\right)$, $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ -\sqrt{5} - 3\right)$.

2 Системы уравнений с тремя переменными

До сих пор мы говорили о системах двух уравнений с двумя переменными. Встречаются и системы уравнений с другим числом переменных, например с тремя переменными. *Решить систему трёх уравнений с тремя переменными*

$$\begin{cases} p_1(x;\ y;\ z) = 0, \\ p_2(x;\ y;\ z) = 0, \\ p_3(x;\ y;\ z) = 0 \end{cases}$$

значит найти все тройки чисел $(x;\ y;\ z)$, при подстановке которых во все уравнения системы получаются верные числовые равенства. Каждую такую тройку чисел называют *решением системы трёх уравнений с тремя переменными*.

В следующем примере мы покажем, как используется *метод подстановки* для решения системы трёх уравнений с тремя переменными.

ПРИМЕР 4

Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x - 3y - z = 0, \\ 2x + y + 5z = 2, \\ 3x - 2y + 4z = -4. \end{cases}$

Решение Выразим z из первого уравнения системы: $z = 4x - 3y$. Подставим полученное выражение вместо z во второе и третье уравнения системы:

$$\begin{cases} z = 4x - 3y, \\ 2x + y + 5(4x - 3y) = 2, \\ 3x - 2y + 4(4x - 3y) = -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 4x - 3y, \\ 22x - 14y = 2, \\ 19x - 14y = -4. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $14y = 22x - 2$. Подставив выражение $22x - 2$ вместо $14y$ в третье уравнение системы, получим: $19x - (22x - 2) = -4$; $x = 2$. Подставив значение $x = 2$ во второе уравнение системы, получим $y = 3$. Подставив, наконец, значения $x = 2$, $y = 3$ в первое уравнение системы, получим $z = -1$.

Ответ можно записать двумя способами: либо $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = -1, \end{cases}$

либо $(2;\ 3;\ -1)$.

ПРИМЕР 5

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x + 9y^2 - 12y + 5 = 0, \\ 4x + 3y + z^3 = 27. \end{cases}$$

Решение Первое уравнение можно преобразовать к виду $(2x + 1)^2 + (3y - 2)^2 = 0$, откуда находим: $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$. Подставив найденные значения во второе уравнение системы, получим:

$$-2 + 2 + z^3 = 27;\ z = 3.$$

Ответ $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 3\right)$.

3 Метод алгебраического сложения

Этот метод, как и метод подстановки, знаком вам из курса алгебры 7-го класса. Суть метода напомним с помощью примера.

ПРИМЕР 6

Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + xy + 2 = 0, \\ 4y + 3xy + 30 = 0. \end{cases}$

Решение Умножим все члены первого уравнения системы на 3, а второе уравнение оставим без изменения:

$$\begin{cases} 6x + 3xy + 6 = 0, \\ 4y + 3xy + 30 = 0. \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение системы из её первого уравнения:

$$(6x + 3xy + 6) - (4y + 3xy + 30) = 0 - 0;$$

$$6x - 4y - 24 = 0;$$

$$3x - 2y - 12 = 0.$$

В результате алгебраического сложения двух уравнений исходной системы получилось уравнение более простое, чем первое и второе уравнения заданной системы. Этим более простым уравнением мы имеем право заменить любое уравнение заданной системы, например второе. Тогда заданная система уравнений заменится более простой:

$$\begin{cases} 2x + xy + 2 = 0, \\ 3x - 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

Эту систему можно решить методом подстановки. Из второго уравнения находим $y = \frac{3x - 12}{2}$; подставим это выражение вместо y в первое уравнение системы:

$$2x + x \cdot \frac{3x - 12}{2} + 2 = 0;$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0;$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

Осталось подставить найденные значения x в уравнение $y = \frac{3x - 12}{2}$. Если $x = 2$, то $y = -3$; если $x = \frac{2}{3}$, то $y = -5$.

Ответ $(2; -3)$; $\left(\frac{2}{3}; -5\right)$.

4 Метод введения новых переменных

С методом введения новой переменной при решении уравнений с одной переменной вы познакомились в курсе алгебры 8-го класса. Суть этого метода при решении систем уравнений та же, но с технической точки зрения имеются некоторые особенности. Мы их обсудим в следующих примерах.

ПРИМЕР 7

Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2{,}5, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

Решение Введём новую переменную $t = \dfrac{x}{y}$. Тогда первое уравнение системы можно будет переписать в более простом виде: $t + \dfrac{1}{t} = 2{,}5$.

Решим это уравнение относительно переменной t:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}; \quad 2t^2 - 5t + 2 = 0;$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Но $t = \dfrac{x}{y}$, значит, либо $\dfrac{x}{y} = 2$, т. е. $x = 2y$, либо $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$, т. е. $y = 2x$.

Таким образом, с помощью метода введения новой переменной нам удалось как бы «расслоить» первое уравнение системы на два простых уравнения:

$$x = 2y; \quad y = 2x.$$

Теперь задача сводится к решению совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

При решении первой системы уравнений воспользуемся методом подстановки, тем более что здесь для него всё готово: подставим выражение $2y$ вместо x во второе уравнение системы. Получим:

$$(2y)^2 - y^2 = 3; \quad y^2 = 1;$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -1.$$

Так как $x = 2y$, то $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Тем самым получены два решения заданной системы: $(2; 1)$ и $(-2; -1)$.

При решении второй системы уравнений снова воспользуемся методом подстановки: подставим выражение $2x$ вместо y во второе уравнение системы. Получим:

$$x^2 - (2x)^2 = 3; \quad x^2 = -1.$$

Это уравнение не имеет корней, значит, и система уравнений не имеет решений. Таким образом, в ответ надо включить только решения первой системы.

Ответ $(2; 1); \quad (-2; -1)$.

Метод введения новых переменных при решении систем двух уравнений с двумя переменными можно применять не только в одном уравнении системы (как было в примере 7), но и в обоих уравнениях системы одновременно. Так будет обстоять дело в примере 8.

ПРИМЕР 8

Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} + \dfrac{3}{2x+y} = 2, \\ \dfrac{8}{x-3y} - \dfrac{9}{2x+y} = 1. \end{cases}$

Решение Введём две новые переменные: $a = \dfrac{2}{x-3y}$, $b = \dfrac{3}{2x+y}$. Тогда $\dfrac{8}{x-3y} = 4a$, $\dfrac{9}{2x+y} = 3b$.

Это позволит переписать заданную систему в значительно более простом виде, но относительно новых переменных a и b:

$$\begin{cases} a + b = 2, \\ 4a - 3b = 1. \end{cases}$$

Применим для решения этой системы метод алгебраического сложения:

$$+\begin{cases} 3a + 3b = 6, \\ 4a - 3b = 1 \end{cases}$$
$$\overline{7a = 7;}$$
$$a = 1.$$

Так как $a = 1$, то из уравнения $a + b = 2$ находим, что $b = 1$. Таким образом, относительно переменных a и b мы получили одно решение:

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x - 3y} = 1, \\ \dfrac{3}{2x + y} = 1, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x - 3y = 2, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

Применим для решения этой системы метод алгебраического сложения:

$$+\begin{cases} x - 3y = 2, \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$7x = 11;$$

$$x = \frac{11}{7}.$$

Так как $x = \frac{11}{7}$, то из уравнения $2x + y = 3$ находим: $y = 3 - 2x = 3 - 2 \cdot \frac{11}{7} = -\frac{1}{7}$. Таким образом, относительно переменных x и y мы получили одно решение:

$$\begin{cases} x = \dfrac{11}{7}, \\ y = -\dfrac{1}{7}. \end{cases}$$

Ответ $\left(\frac{11}{7}; -\frac{1}{7}\right)$.

Вы знаете, что основная идея решения уравнений состоит в постепенном переходе от одного уравнения к другому, более простому, но равносильному заданному. В предыдущем параграфе мы ввели понятие равносильности для уравнений с двумя переменными. Это понятие применимо и для систем уравнений.

Определение

Две системы уравнений с двумя переменными называют **равносильными**, если их решения совпадают или если обе системы не имеют решений.

равносильные системы

Методы, которые мы обсудили в этом параграфе (метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных), абсолютно корректны с точки зрения равносильности. Иными словами, *используя эти методы, заменяем одну систему уравнений другой, более простой, но равносильной первоначальной системе.*

5 Методы умножения и деления

Иногда при решении систем двух уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} p_1(x;\ y) = q_1(x;\ y), \\ p_2(x;\ y) = q_2(x;\ y) \end{cases}$$

выгодно составлять *уравнение-произведение*

$$p_1(x;\ y)p_2(x;\ y) = q_1(x;\ y)q_2(x;\ y),$$

выгодно в том смысле, что это уравнение может оказаться более простым, чем любое из уравнений системы. Тогда и система уравнений

$$\begin{cases} p_1(x;\ y)p_2(x;\ y) = q_1(x;\ y)q_2(x;\ y), \\ p_2(x;\ y) = q_2(x;\ y) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} p_1(x;\ y)p_2(x;\ y) = q_1(x;\ y)q_2(x;\ y), \\ p_1(x;\ y) = q_1(x;\ y) \end{cases}$$

оказывается более удобной для последующего решения. В этом суть *метода умножения.* Однако при его использовании следует учитывать, что возможно появление *посторонних решений.* Смотрите: если пара $(x_0;\ y_0)$ такова, что

$$p_2(x_0;\ y_0) = q_2(x_0;\ y_0) = 0,$$

то эта пара автоматически становится решением системы

$$\begin{cases} p_1(x;\ y)p_2(x;\ y) = q_1(x;\ y)q_2(x;\ y), \\ p_2(x;\ y) = q_2(x;\ y) \end{cases}$$

(обе части обоих уравнений системы при значениях $x = x_0$, $y = y_0$ одновременно обращаются в 0). Но эта пара вовсе не обязана удовлетворять первому уравнению исходной системы $p_1(x;\ y) = q_1(x;\ y)$, а значит, может не быть решением исходной системы.

Вывод. При использовании метода умножения не следует забывать о необходимости проверки всех найденных решений (чаще всего с помощью их непосредственной подстановки в заданную систему уравнений).

ПРИМЕР 9

Решить систему уравнений $\begin{cases} xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}, \\ xy + 24 = \dfrac{x^3}{y}. \end{cases}$

Решение Перемножим уравнения системы и рассмотрим уравнение-произведение совместно с первым уравнением системы:

$$\begin{cases} (xy - 6)(xy + 24) = \dfrac{y^3}{x} \cdot \dfrac{x^3}{y}, \\ xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 8, \\ xy - 6 = \dfrac{y^3}{x}. \end{cases}$$

Выразив x через y из первого уравнения и подставив выражение $\dfrac{8}{y}$ вместо x во второе уравнение, получим: $y^4 = 16$; $y_1 = 2$, $y_2 = -2$ и, соответственно, $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

Подставив найденные пары $(4; 2)$ и $(-4; -2)$ в исходную систему, убеждаемся в том, что обе они удовлетворяют системе, а потому являются её решениями.

Ответ $(4; 2)$, $(-4; -2)$.

Иногда при решении систем двух уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} p_1(x;\ y) = q_1(x;\ y), \\ p_2(x;\ y) = q_2(x;\ y) \end{cases}$$

выгодно составлять *уравнение-частное* $\dfrac{p_1(x;\ y)}{p_2(x;\ y)} = \dfrac{q_1(x;\ y)}{q_2(x;\ y)}$, выгодно в том смысле, что это уравнение может оказаться более простым, чем любое из уравнений системы. Тогда и система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{p_1(x;\ y)}{p_2(x;\ y)} = \dfrac{q_1(x;\ y)}{q_2(x;\ y)}, \\ p_2(x;\ y) = q_2(x;\ y) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{p_1(x;\ y)}{p_2(x;\ y)} = \dfrac{q_1(x;\ y)}{q_2(x;\ y)}, \\ p_1(x;\ y) = q_1(x;\ y) \end{cases}$$

оказывается более удобной для последующего решения. В этом суть *метода деления*. При его использовании следует помнить, что *на* *нуль делить нельзя.* Но ведь не исключено, что может существовать пара $(x_0; y_0)$ такая, для которой $p_2(x_0; y_0) = q_2(x_0; y_0) = 0$, и если это так, то лучше разделить второе уравнение на первое (при условии, что в этом случае такой опасности не будет) или проверить пару $(x_0; y_0)$ на предмет того, не является ли она «потерянным» в результате деления решением заданной системы.

ПРИМЕР 10

Решить систему уравнений $\begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ xy(x-y) = 6. \end{cases}$

Решение Применив метод деления, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy(x+y)}{xy(x-y)} = \dfrac{30}{6}, \\ xy(x-y) = 6. \end{cases}$$

Заметим сразу, что здесь нет той опасности, о которой мы говорили выше, поскольку обе части второго уравнения заданной системы (уравнения-делителя) не могут одновременно обратиться в нуль (это очевидно, так как правая часть этого уравнения явно отлична от нуля).

Преобразуем первое уравнение полученной системы:

$$\frac{xy(x+y)}{xy(x-y)} = \frac{30}{6}; \quad \frac{x+y}{x-y} = 5; \quad x + y = 5(x-y); \quad y = \frac{2x}{3}.$$

В итоге приходим к более простой системе уравнений:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{3}, \\ xy(x-y) = 6. \end{cases}$$

Она без труда решается методом подстановки.

Ответ (3; 2).

В заключение приведём пример решения системы трёх уравнений с тремя переменными, где используется комбинация рассмотренных методов.

ПРИМЕР 11

Решить систему уравнений $\begin{cases} xy + xz = -4, \\ yz + yx = -1, \\ zx + zy = -9. \end{cases}$

Решение Присвоим для удобства уравнениям системы значки (1), (2), (3) соответственно и составим следующую комбинацию уравнений системы: $\frac{(1)+(2)+(3)}{2}-(3)$. Имеем:

$$\frac{(xy+xz)+(yz+yx)+(zx+zy)}{2}-(zx+zy)=\frac{-4-1-9}{2}-(-9),$$

откуда после преобразований получим достаточно простое уравнение: $xy=2$. Подставив в первое уравнение заданной системы вместо xy значение 2, получим $xz=-6$. Подставив во второе уравнение заданной системы вместо xy значение 2, получим $yz=-3$. Тем самым мы пришли к более простой системе уравнений:

$$\begin{cases} xy=2, \\ xz=-6, \\ yz=-3. \end{cases}$$

Перемножив все три уравнения этой системы, получим $(xyz)^2=36$; значит, либо $xyz=6$, либо $xyz=-6$.

Если $xyz=6$, то, учитывая, что $yz=-3$, получаем $x=-2$. Сопоставив уравнение $xyz=6$ с уравнением $xz=-6$, приходим к выводу, что $y=-1$. Из уравнений $xyz=6$ и $xy=2$ вытекает, что $z=3$. Тем самым получено решение системы: $(-2;\ -1;\ 3)$.

Если $xyz=-6$, то, учитывая, что $yz=-3$, получаем $x=2$. Сопоставив уравнение $xyz=-6$ с уравнением $xz=-6$, приходим к выводу, что $y=1$. Из уравнений $xyz=-6$ и $xy=2$ вытекает, что $z=-3$. Тем самым получено решение системы $(2;\ 1;\ -3)$.

Ответ $(-2;\ -1;\ 3)$; $(2;\ 1;\ -3)$.

Вопросы для самопроверки

1. Расскажите, в чём суть метода подстановки, применяемого при решении системы двух уравнений с двумя переменными.
2. Опишите алгоритм решения системы двух уравнений с двумя переменными методом подстановки на примере решения системы $\begin{cases} x+3y=5, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$
3. Расскажите, в чём суть метода алгебраического сложения, применяемого при решении системы двух уравнений с двумя переменными.

4. Прокомментируйте метод алгебраического сложения на примере решения системы:
а) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 3y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$
5. Расскажите, в чём суть метода введения новых переменных, применяемого при решении системы двух уравнений с двумя переменными. В каких двух вариантах он применяется? Проиллюстрируйте ваш рассказ с помощью приведённых выше решений примеров 7 и 8.
6. В каком случае две системы двух уравнений с двумя переменными называют равносильными?

§ 12 ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ. СИММЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

1 Однородные системы уравнений

В этом параграфе речь пойдёт о двух специальных видах систем двух уравнений с двумя переменными, представляющих определённый интерес, — об однородных и симметрических системах.

Систему уравнений

$$\begin{cases} p(x;\ y) = a, \\ q(x;\ y) = b \end{cases}$$

называют **однородной**, если $p(x;\ y)$, $q(x;\ y)$ — однородные многочлены, а a и b — действительные числа.

однородная система уравнений

Если $p(x;\ y)$ и $q(x;\ y)$ — однородные многочлены одной и той же степени, то идея решения однородной системы достаточно проста. Она сводится к тому, что с помощью составления некоторой комбинации уравнений системы можно получить однородное уравнение. Впрочем, если в заданной системе $a = 0$ или $b = 0$, то в системе уже есть однородное уравнение, которое, как мы видели в § 9, решается методом введения новой переменной $z = \frac{y}{x}$. Если оба числа a и b отличны от нуля, то, применив метод деления, получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} \dfrac{p(x;\ y)}{q(x;\ y)} = \dfrac{a}{b}, \\ q(x;\ y) = b. \end{cases}$$

Переписав первое уравнение системы в виде

$$bp(x;\ y) - aq(x;\ y) = 0$$

и выполнив соответствующие преобразования, получим однородное уравнение.

ПРИМЕР 1

Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$

Решение Левые части обоих уравнений системы — однородные многочлены третьей степени, значит, система является однородной. Применив метод деления (здесь он не приведёт к потере решений), получим:

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2y + 2xy^2 + y^3} = \frac{1}{2}; \quad \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{y(x + y)^2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{y(x + y)} = \frac{1}{2}; \quad 2(x^2 - xy + y^2) = y(x + y);$$

$$y^2 - 3xy + 2x^2 = 0; \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\frac{y}{x} + 2 = 0.$$

Введя новую переменную $z = \frac{y}{x}$, получим квадратное уравнение $z^2 - 3z + 2 = 0$ с корнями $z_1 = 1$, $z_2 = 2$. Значит, либо $\frac{y}{x} = 1$, т. е. $y = x$, либо $\frac{y}{x} = 2$, т. е. $y = 2x$. В итоге приходим к совокупности двух систем, каждая из которых существенно проще заданной системы и без труда решается методом подстановки:

$$\begin{cases} y = x, \\ x^3 + y^3 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x, \\ x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

Подставив x вместо y во второе уравнение первой системы, получим: $2x^3 = 1$; $x^3 = \frac{1}{2}$. Удобнее переписать последнее уравнение в виде $x^3 = \frac{4}{8}$. В курсе алгебры 8-го класса мы уже встречались с кубическими корнями. Из уравнения $x^3 = \frac{4}{8}$ получаем $x = \sqrt[3]{\frac{4}{8}}$. Заметим, что имеет место равенство $\sqrt[3]{\frac{4}{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$. Значит, $x = \sqrt[3]{\frac{4}{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Итак, первая система имеет решение $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$.

Подставив $2x$ вместо y во второе уравнение второй системы, получим: $9x^3 = 1$; $x^3 = \frac{1}{9}$. Удобнее переписать последнее уравнение в виде $x^3 = \frac{3}{27}$. Получим $x = \sqrt[3]{\frac{3}{27}}$, т. е. $x = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$. Тогда $y = 2x = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$.

Итак, вторая система имеет решение $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$.

Ответ $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$.

2 Симметрические системы уравнений

Для введения понятия симметрической системы нам понадобится понятие симметрического выражения. Выражение $p(x; y)$ называют **симметрическим**, если оно сохраняет свой вид при одновременной замене x на y и y на x. Соответственно, уравнение $p(x; y) = 0$ называют **симметрическим уравнением**, если его левая часть — симметрическое выражение. Например, симметрическим является выражение $x^2y + xy^2$. В самом деле, при одновременной замене x на y и y на x получится выражение $y^2x + yx^2$, но это то же самое, что $x^2y + xy^2$. Приведём ещё несколько примеров симметрических выражений:

$$xy,\ x + y,\ x^2 + y^2,\ x^3 + y^3,\ x^4 + y^4,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y},\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \text{ и т. д.}$$

Первые два из них считаются *основными* в том смысле, что любые другие симметрические выражения можно представить в виде некоторой комбинации xy и $x + y$. Смотрите:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy;$$

$$x^3 + y^3 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (3x^2y + 3xy^2) = (x + y)^3 - 3xy(x + y);$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2;$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy}; \quad \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{x^3 + y^3}{xy} = \frac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{xy}.$$

Систему двух уравнений с двумя переменными называют **симметрической системой**, если она состоит из симметрических уравнений. Идея решения симметрической системы фактически предопределена проведёнными выше рассуждениями — вводят две новые переменные: $u = x + y$ и $v = xy$.

симметрическая система уравнений

ПРИМЕР 2

Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$

Решение Введём две новые переменные: $u = x + y$, $v = xy$. Воспользуемся при этом полученным выше выражением $x^3 + y^3$ через $x + y$ и xy:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y).$$

Тогда заданная система примет вид

$$\begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17, \\ u + v = 5. \end{cases}$$

Выразим v из второго уравнения: $v = 5 - u$; подставим полученное выражение вместо v в первое уравнение системы:

$$u^3 - 3u(5 - u) + (5 - u)^3 = 17;$$
$$u^3 - 15u + 3u^2 + 125 - 75u + 15u^2 - u^3 = 17;$$
$$18u^2 - 90u + 108 = 0;$$
$$u^2 - 5u + 6 = 0;$$
$$u_1 = 2, \quad u_2 = 3.$$

Соответственно находим $v_1 = 3$, $v_2 = 2$.

Осталось решить совокупность двух простых систем уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Первая система не имеет действительных решений, из второй находим два решения: (1; 2), (2; 1).

Ответ (1; 2), (2; 1).

Вопросы для самопроверки

1. Приведите пример однородной системы двух уравнений с двумя переменными. Опишите метод её решения.
2. В каком случае выражение $p(x;\ y)$ называют симметрическим?
3. Приведите три примера симметрических выражений.
4. Приведите пример симметрической системы двух уравнений с двумя переменными. Опишите метод её решения.

§ 13 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. СИСТЕМЫ С МОДУЛЯМИ

1 Системы иррациональных уравнений

В предыдущих параграфах мы рассматривали только системы рациональных уравнений. На самом деле методы решения систем уравнений, о которых шла речь выше, универсальны, они применимы и для решения систем уравнений других классов. В этом параграфе мы рассмотрим примеры решения *иррациональных систем*, т. е. таких систем, у которых хотя бы в одном уравнении переменные содержатся под знаком корня, а также примеры решения *систем с модулями*, т. е. таких систем, у которых хотя бы в одном уравнении переменные содержатся под знаком модуля.

ПРИМЕР 1

Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}} = 2, \\ 4y^2 - 1 = 3y(x-1). \end{cases}$

Решение Введём новую переменную $u = \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}$. Тогда первое уравнение системы примет вид $u + \dfrac{1}{u} = 2$, откуда находим $u = 1$. Значит,

$$\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} = 1; \quad \frac{3x-2y}{2x} = 1; \quad x = 2y.$$

Нам удалось преобразовать первое уравнение заданной системы к существенно более простому виду. Но тогда и саму систему можно переписать в более простом виде:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 - 1 = 3y(x-1). \end{cases}$$

Решения этой системы без труда находятся методом подстановки.

Ответ (2; 1); (1; 0,5).

ПРИМЕР 2

Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{x - \sqrt{y}} = 2, \\ \sqrt{y + \sqrt{x}} - \sqrt{y - \sqrt{x}} = 1. \end{cases}$

Решение Возведём в квадрат обе части обоих уравнений системы:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{x - \sqrt{y}}\right)^2 = 4, \\ \left(\sqrt{y + \sqrt{x}} - \sqrt{y - \sqrt{x}}\right)^2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \sqrt{y} + 2\sqrt{x + \sqrt{y}} \cdot \sqrt{x - \sqrt{y}} + x - \sqrt{y} = 4, \\ y + \sqrt{x} - 2\sqrt{y + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{y - \sqrt{x}} + y - \sqrt{x} = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - y} = 2, \\ 2y - 2\sqrt{y^2 - x} = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 - y}\right)^2 = (2 - x)^2, \\ \left(2\sqrt{y^2 - x}\right)^2 = (2y - 1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y = 4 - 4x + x^2, \\ 4(y^2 - x) = 4y^2 - 4y + 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 4x - 4, \\ 4y - 4x = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему двух линейных уравнений с двумя переменными, получим: $x = \frac{17}{12}$, $y = \frac{5}{3}$.

Проверка. Поскольку в процессе решения мы четыре раза возводили обе части уравнения в квадрат, возможно появление посторонних решений, а потому необходима проверка. Её в принципе можно сделать с помощью непосредственной подстановки найденных значений $x = \frac{17}{12}$, $y = \frac{5}{3}$ в уравнения исходной системы, но тогда придётся повозиться с квадратными корнями. Воспользуемся другим способом проверки.

Известно, что при возведении обеих частей уравнения в квадрат посторонние решения не появятся, если обе части уравнения принимают только неотрицательные значения. Это явно имело место при возведении в квадрат обоих уравнений исходной системы. При возведении в квадрат уравнений системы

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y} = 2 - x, \\ 2\sqrt{y^2 - x} = 2y - 1 \end{cases}$$

неотрицательность всех частей уравнений обеспечивается следующими условиями:

$$\begin{cases} x^2 - y \geqslant 0, \\ y^2 - x \geqslant 0, \\ 2 - x \geqslant 0, \\ 2y - 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Найденные значения $x = \frac{17}{12}$, $y = \frac{5}{3}$ удовлетворяют всем этим условиям, значит, удовлетворяют заданной системе уравнений.

Ответ $\left(\frac{17}{12}; \frac{5}{3}\right)$.

2 Системы уравнений с модулями

ПРИМЕР 3

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{|x - 1|}{y} = 4x + y + \frac{y - x + 1}{y} - 4, \\ y^2 + 2x = 2|x - 1| - y + 4. \end{cases}$$

Решение Освободившись от знаменателей в первом уравнении системы и уединив слагаемое $2|x - 1|$ во втором уравнении системы, получим

$$\begin{cases} |x - 1| = 4xy + y^2 + y - x + 1 - 4y, \\ 2|x - 1| = y^2 + 2x + y - 4. \end{cases}$$

Если $x \geqslant 1$, то $x - 1 \geqslant 0$, а потому $|x - 1| = x - 1$. В этом случае первое уравнение системы принимает вид

$$x - 1 = 4xy + y^2 - 3y - x + 1, \text{ т. е. } 4xy + y^2 - 3y = 2x - 2.$$

Второе уравнение системы в этом случае принимает вид

$$2(x - 1) = y^2 + 2x + y - 4, \text{ т. е. } y^2 + y - 2 = 0.$$

Если $x < 1$, то $x - 1 < 0$, а потому $|x - 1| = -(x - 1)$. В этом случае первое уравнение системы принимает вид

$$-(x - 1) = 4xy + y^2 - 3y - x + 1, \text{ т. е. } 4xy + y^2 - 3y = 0.$$

Второе уравнение системы в этом случае принимает вид

$$-2(x-1) = y^2 + 2x + y - 4, \text{ т. е. } y^2 + y = 6 - 4x.$$

Таким образом, получаем совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 4xy + y^2 - 3y = 2x - 2, \\ y^2 + y - 2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 1, \\ 4xy + y^2 - 3y = 0, \\ y^2 + y = 6 - 4x. \end{cases}$$

Из последнего уравнения первой системы находим $y_1 = 1$, $y_2 = -2$. Подставив поочерёдно эти значения в первое уравнение первой системы, получим соответственно $x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}2$. Первое значение не удовлетворяет условию $x \geqslant 1$. Поэтому решение первой системы — пара чисел: $x = 1{,}2$, $y = -2$.

Решим вторую систему. Из её первого уравнения находим

$$y(4x + y - 3) = 0.$$

Значит, либо $y = 0$, либо $4x + y - 3 = 0$. Но $y = 0$ не удовлетворяет заданной системе уравнений (точнее, её первому уравнению). Во втором случае следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + y - 3 = 0, \\ y^2 + y = 6 - 4x. \end{cases}$$

Выразив $4x$ из первого уравнения системы ($4x = 3 - y$) и подставив полученное выражение вместо $4x$ во второе уравнение, придём к уравнению с одной переменной y:

$$y^2 + y = 6 - (3 - y);$$
$$y^2 = 3.$$

Значит, $y_1 = \sqrt{3}$, $y_2 = -\sqrt{3}$. Так как $x = \frac{3 - y}{4}$, то получаем:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \; x_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}.$$

Второе значение не удовлетворяет неравенству $x < 1$. Таким образом, для второй системы найдено одно решение:

$$x = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \; y = \sqrt{3}.$$

Ответ $(1{,}2; -2)$; $\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{4}; \sqrt{3}\right)$.

3 Разные примеры

ПРИМЕР 4

Решить систему уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{\dfrac{5y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ 4\sqrt{\dfrac{x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases}$

Решение Здесь имеет смысл применить метод умножения:

$$2\sqrt{\frac{5y}{x}} \cdot 4\sqrt{\frac{x}{5y}} = \left(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}\right);$$

$$8 = (x+y) - (x-y);$$

$$y = 4.$$

Подставив значение 4 вместо y во второе уравнение исходной системы, получим иррациональное уравнение с одной переменной:

$$2\sqrt{\frac{x}{5}} = \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}; \qquad (1)$$

$$\left(2\sqrt{\frac{x}{5}}\right)^2 = \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}\right)^2;$$

$$\frac{4x}{5} = x + 4 - 2\sqrt{x^2-16} + x - 4;$$

$$5\sqrt{x^2-16} = 3x;\ 25(x^2-16) = 9x^2;\ x^2 = 25;$$

$$x_1 = 5,\ x_2 = -5.$$

Значение -5 не удовлетворяет уравнению (1), значение 5 — удовлетворяет.

Итак, получили $x = 5$, $y = 4$.

Проверка (подстановкой найденных значений в исходную систему) убеждает нас в том, что пара (5; 4) — решение заданной системы.

Ответ (5; 4).

ПРИМЕР 5

Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} \sqrt{a-x} = \sqrt{y}, \\ 4x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ при различных значениях параметра a?

Решение Из первого уравнения системы получаем $y = a - x$. Подставив выражение $a - x$ вместо y во второе уравнение системы, получим уравнение с одной переменной x и параметром a:

$$4x^2 + (a - x)^2 = 20;$$

$$5x^2 - 2ax + (a^2 - 20) = 0; \qquad (2)$$

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 5(a^2 - 20)}}{5} = \frac{a \pm 2\sqrt{25 - a^2}}{5}.$$

Если $25 - a^2 < 0$, т. е. $a < -5$ или $a > 5$, уравнение не имеет корней.

Если $a = 5$, то $x = 1$, и из условия $y = a - x$ находим $y = 4$. Значит, при $a = 5$ система имеет одно решение $(1; 4)$.

Если $a = -5$, то $x = -1$ и, соответственно, $y = -4$. Это значение не удовлетворяет первому уравнению заданной системы, в котором присутствует $\sqrt{y}$, а потому должно выполняться условие $y \geqslant 0$. Значит, при $a = -5$ система не имеет решений.

Рассмотрим случай, когда $25 - a^2 > 0$, т. е. $-5 < a < 5$. Тогда уравнение (2) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{a + 2\sqrt{25 - a^2}}{5}, \quad x_2 = \frac{a - 2\sqrt{25 - a^2}}{5}.$$

В первом уравнении заданной системы присутствует $\sqrt{a - x}$, следовательно, должно выполняться условие $a - x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant a$. Выясним, при каких значениях параметра a указанному условию удовлетворяет x_1, а при каких — x_2.

Рассмотрим неравенство $\frac{a + 2\sqrt{25 - a^2}}{5} \leqslant a$. Имеем:

$$a + 2\sqrt{25 - a^2} \leqslant 5a;$$

$$\sqrt{25 - a^2} \leqslant 2a.$$

Из последнего неравенства следует, что $a \geqslant 0$. При этом условии обе части указанного неравенства можно возвести в квадрат. Получим:

$$25 - a^2 \leqslant 4a^2; \ a^2 \geqslant 5; \ a \geqslant \sqrt{5}$$

(мы учли, что $a \geqslant 0$). Итак, значение x_1 мы можем рассматривать лишь при выполнении условия $\sqrt{5} \leqslant a < 5$.

Рассмотрим теперь неравенство $x_2 \leqslant a$, т. е. $\frac{a - 2\sqrt{25 - a^2}}{5} \leqslant a$. Имеем:

$$a - 2\sqrt{25 - a^2} \leqslant 5a;$$

$$\sqrt{25 - a^2} \geqslant -2a.$$

Это неравенство явно выполняется при $a \geqslant 0$, точнее при $0 \leqslant a < 5$. Если же $-5 < a < 0$, то обе части последнего иррационального неравенства положительны и их можно возвести в квадрат:

$$25 - a^2 \geqslant 4a^2; \quad a^2 \leqslant 5; \quad a \geqslant -\sqrt{5}$$

(мы учли, что $a < 0$). Итак, значение x_2 мы можем рассматривать при выполнении условия $-\sqrt{5} \leqslant a < 5$.

Подведём итоги исследования числа решений заданной системы уравнений в случае, когда $-5 < a < 5$. Оказалось, что x_1 устраивает нас при $\sqrt{5} \leqslant a < 5$, а x_2 — при $-\sqrt{5} \leqslant a < 5$. Значит, уравнение (2) не имеет корней при $-5 \leqslant a < -\sqrt{5}$, имеет один корень при $-\sqrt{5} \leqslant a < \sqrt{5}$ и два корня при $\sqrt{5} \leqslant a < 5$. Соответствующее число решений при указанных условиях имеет и заданная система уравнений.

А теперь ответим на вопрос задачи. Система не имеет решений при $a < -5$, при $a = -5$, при $-5 < a < -\sqrt{5}$, при $a > 5$. Короче это можно записать так: $a < -\sqrt{5}$; $a > 5$. Далее мы получили, что система имеет одно решение, если $-\sqrt{5} \leqslant a < \sqrt{5}$ или если $a = 5$. Наконец, при $\sqrt{5} \leqslant a < 5$ система имеет два решения.

Ответ Нет решений при $a < -\sqrt{5}$ или $a > 5$; одно решение при $-\sqrt{5} \leqslant a < \sqrt{5}$ или $a = 5$; два решения при $\sqrt{5} \leqslant a < 5$.

§ 14 СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ

Некоторый опыт решения задач, сводящихся к системам уравнений, у вас есть: в 7-м классе встречались задачи, математическое моделирование которых приводило к системам линейных уравнений. Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 1

В райцентре два кинотеатра — «Факел» и «Слава», первый — на 400, а второй — на 600 мест. В зрительном зале кинотеатра «Слава» на 4 ряда больше, чем в кинотеатре «Факел», и, кроме того, в каждом ряду на 5 мест больше, чем в кинотеатре «Факел». Сколько рядов в зрительном зале кинотеатра «Факел», если известно, что в каждом ряду кинотеатра «Слава» более 25 мест?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Пусть x — число рядов в кинотеатре «Факел», y — число мест в каждом ряду кинотеатра «Факел». Тогда $x + 4$ — число рядов в кинотеатре «Слава», $y + 5$ — число мест в каждом ряду кинотеатра «Слава». Зная число рядов и число мест в ряду, можно найти общее число мест в каждом кинотеатре:

xy — число мест в кинотеатре «Факел»,

$(x + 4)(y + 5)$ — число мест в кинотеатре «Слава».

По условию $xy = 400$, а $(x + 4)(y + 5) = 600$.

Таким образом, мы приходим к системе двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} xy = 400, \\ (x + 4)(y + 5) = 600. \end{cases}$$

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Упростим второе уравнение системы:

$$\begin{cases} xy = 400, \\ xy + 4y + 5x = 580. \end{cases}$$

Применим метод алгебраического сложения. Вычтем первое уравнение системы из второго:

$$(xy + 4y + 5x) - xy = 580 - 400;$$

$$4y + 5x = 180.$$

Заменим этим уравнением второе уравнение системы:

$$\begin{cases} xy = 400, \\ 4y + 5x = 180. \end{cases}$$

Выразим y через x из второго уравнения системы: $y = \frac{180 - 5x}{4}$;

подставим это выражение вместо y в первое уравнение системы:

$$x \cdot \frac{180 - 5x}{4} = 400;$$

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 16.$$

Так как $y = \frac{180 - 5x}{4}$, то $y_1 = 20$, $y_2 = 25$.

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Мы должны проанализировать две возможности: либо в кинотеатре «Факел» 20 рядов по 20 мест в каждом ряду, либо 16 рядов по 25 мест в каждом ряду. Если выбрать первую возможность, то в кинотеатре «Слава» будет 24 ряда (по условию там на 4 ряда больше) по 25 мест в каждом ряду (по условию в каждом ряду «Славы» на 5 мест больше, чем в «Факеле»). Это нас не устраивает, так как по условию в каждом ряду «Славы» более 25 мест. Рассмотрим вторую возможность: в «Факеле» 16 рядов по 25 мест в каждом. Тогда в «Славе» будет 20 рядов по 30 мест в каждом. Это соответствует условию задачи.

Итак, из двух решений системы выбираем одно: $x = 16$, $y = 25$, а это означает, что в кинотеатре «Факел» 16 рядов.

Ответ 16 рядов.

На самом деле эта задача не является для вас новой, мы решали её в учебнике «Алгебра—8», но с помощью другой математической модели. Напомним, как мы рассуждали.

Пусть x — число рядов в кинотеатре «Факел», тогда $\frac{400}{x}$ — число мест в каждом ряду кинотеатра «Факел», $(x + 4)$ — число рядов в кинотеатре «Слава», $\frac{600}{x+4}$ — число мест в каждом ряду кинотеатра «Слава». А поскольку в кинотеатре «Слава» в каждом ряду на 5 мест больше, чем в «Факеле», то мы можем составить следующее уравнение: $\frac{600}{x+4} - \frac{400}{x} = 5$.

Сравним два варианта решения задачи. В первом варианте при составлении математической модели мы использовали две переменные, поэтому работа с такой моделью оказалась более трудной. Однако сама математическая модель была построена легче и быстрее. Во втором варианте получено рациональное уравнение с одной переменной. С технической точки зрения его решать проще, чем систему двух рациональных уравнений с двумя переменными, но зато больше усилий приходится тратить на составление математической модели.

ПРИМЕР 2

Пристани B и C находятся ниже пристани A по течению реки на 30 км и 45 км соответственно. Моторная лодка отошла от пристани A, дошла до C, сразу повернула назад и пришла в B, затратив на весь путь 4 ч 40 мин. В другой раз эта же лодка отошла от пристани C, дошла до A, сразу повернула назад и пришла в B, затратив на весь путь 7 ч. Чему равны собственная скорость лодки и скорость течения реки?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Этот этап мы рассмотрели ранее, в § 8 (см. пример. 2).

Математическая модель задачи представляет собой систему двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} \dfrac{45}{x+y} + \dfrac{15}{x-y} = \dfrac{14}{3}, \\ \dfrac{45}{x-y} + \dfrac{30}{x+y} = 7. \end{cases}$$

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Для решения системы уравнений воспользуемся методом введения новых переменных. Положим

$$\frac{15}{x+y} = a, \quad \frac{15}{x-y} = b.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 3a + b = \dfrac{14}{3}, \\ 2a + 3b = 7. \end{cases}$$

Решив эту систему двух линейных уравнений с двумя переменными a и b, получим $a = 1$, $b = \frac{5}{3}$.

Итак,

$\dfrac{15}{x+y} = 1$, т. е. $x + y = 15$;

$\dfrac{15}{x-y} = \dfrac{5}{3}$, т. е. $x - y = 9$.

Остаётся решить совсем простую систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ x - y = 9. \end{cases}$$

Получаем $x = 12$, $y = 3$.

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Требуется определить скорость лодки в стоячей воде и скорость течения реки. Первую скорость мы обозначили буквой x, получили $x = 12$; значит, собственная скорость лодки составляет 12 км/ч. Скорость течения мы обозначили буквой y, получили $y = 3$. Значит, скорость течения реки составляет 3 км/ч.

Ответ 12 км/ч; 3 км/ч.

ПРИМЕР 3

На предприятие поступили 2 одинаковых заказа. Первый заказ мастер и ученик, работая совместно, выполнили за 6 дней. Второй заказ взялся делать один ученик. Выполнив 20% задания, он заболел. Остальная работа пришлась на долю мастера. В итоге выполнение второго заказа заняло 11 дней. За сколько дней мог бы выполнить мастер и за сколько дней ученик, действуя в одиночку, если известно, что количество дней, необходимое каждому из них, выражается целым числом?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Если речь идёт о выполнении некоторой работы, не выраженной конкретным числом (т. е. не сказано, сколько деталей надо сделать, сколько кубометров земли выкопать и т. д.), то объём работы считают равным 1, а части работы выражают в долях единицы.

Пусть x — число дней, необходимых мастеру, чтобы выполнить в одиночку всю работу, а y — число дней, необходимых ученику, чтобы справиться в одиночку с той же работой. Если объём всей работы разделить на число дней, необходимых для её выполнения, то узнаем долю работы, выполняемую за 1 день.

Итак, $\frac{1}{x}$ — доля работы, которую выполняет мастер за 1 день, $\frac{1}{y}$ — доля работы, которую выполняет ученик за 1 день. Доля работы мастера за 6 дней выражается формулой $\frac{6}{x}$. Доля работы ученика за 6 дней выражается формулой $\frac{6}{y}$. По условию, работая вместе, мастер и ученик выполняют всю работу за 6 дней. Составляем уравнение: $\frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1$.

По условию ученик выполнил, трудясь в одиночку, 20% заказа, т. е. $\frac{1}{5}$ часть всей работы. На неё он потратил $\frac{1}{5}$ часть того времени, которое нужно ему на выполнение всей работы, т. е. $\frac{1}{5} \cdot y$ дней. Потом пришёл мастер, сделал оставшуюся работу, т. е. $\frac{4}{5}$ задания, на что затратил $\frac{4}{5} \cdot x$ дней.

По условию выполнение заказа длилось 11 дней:

$$\frac{y}{5} + \frac{4x}{5} = 11;$$

$$y + 4x = 55.$$

Таким образом, математическая модель задачи составлена:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1, \\ y + 4x = 55. \end{cases}$$

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Воспользуемся методом подстановки. Выразим y через x из второго уравнения системы: $y = 55 - 4x$; подставим выражение $55 - 4x$ вместо y в первое уравнение системы:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{55 - 4x} = 1.$$

Решив это рациональное уравнение, найдём его корни: $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{33}{4}$.

Осталось найти соответствующие значения y. Если $x = 10$, то из уравнения $y = 55 - 4x$ находим $y = 15$; если $x = \frac{33}{4}$, то из того же уравнения находим $y = 22$.

Итак, составленная система уравнений имеет два решения:

$$(10;\ 15) \text{ и } \left(\frac{33}{4};\ 22\right).$$

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

По условию количество дней, необходимых как мастеру, так и ученику для выполнения в одиночку всего заказа, выражается целым числом. Значит, пара $\left(\frac{33}{4}; 22\right)$ не соответствует условиям задачи. Остаётся лишь одна возможность: $x = 10$, $y = 15$.

Ответ 10 дней; 15 дней.

ПРИМЕР 4

Имеющиеся в фермерском хозяйстве комбайны, работая вместе, могут убрать урожай с поля за одни сутки. Получилось так, что комбайны включались в работу последовательно: в течение первого часа работал один комбайн, в течение второго — два, в течение третьего — три и т. д. до тех пор, пока не заработали все комбайны. В итоге за определённое время урожай был собран. Это время удалось бы уменьшить на 6 ч, если бы с самого начала работали все комбайны за исключением пяти. Какую часть поля (в процентах) уберут 5 комбайнов за 6 ч?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Как и в предыдущей задаче, примем величину всей работы (т. е. уборку урожая со всего поля) за 1. Введём три переменные: n — число комбайнов в хозяйстве; x — производительность одного комбайна, т. е. доля работы, выполняемая одним комбайном за 1 ч; t ч — фактическое время совместной работы всех комбайнов при уборке урожая.

Теперь будем читать условие задачи с самого начала и постепенно переводить его на математический язык, используя введённые переменные.

«Имеющиеся в фермерском хозяйстве комбайны, работая вместе, могут убрать урожай с поля за одни сутки». Это значит, что n комбайнов с производительностью x выполнят всю работу, равную 1, за 24 ч. Получаем первое уравнение:

$$24nx = 1.$$

Далее: «Получилось так, что комбайны включались в работу последовательно: в течение первого часа работал один комбайн, в течение второго — два, в течение третьего — три и т. д. до тех пор, пока не заработали все комбайны. В итоге за определённое время урожай был собран». Это значит, что за первый час, когда работал один комбайн, была выполнена доля работы, равная x, за второй час, когда работали два комбайна, была выполнена доля работы, равная $2x$, за третий час — $3x$, за четвёртый — $4x$ и т. д.; за $(n - 1)$-й час выполнена доля работы, равная $(n - 1)x$. Наконец подключился последний комбайн, и все вместе они работали ещё t ч (а значит, всего на уборку урожая затрачено $(n - 1 + t)$ ч), выполнив при этом долю работы, равную $(nx)t$. Таким образом, получаем второе уравнение:

$$x + 2x + 3x + \ldots + (n - 1)x + ntx = 1.$$

И наконец, последнее условие задачи: «Это время (т. е. время, затраченное на уборку урожая) удалось бы уменьшить на 6 ч, если бы с самого начала работали все комбайны за исключением пяти». Время, затраченное на уборку урожая, равно, как отмечено выше, $(n - 1 + t)$ ч. Значит, если бы с самого начала работали $(n - 5)$ комбайнов, то работа длилась бы $(n - 1 + t - 6)$ ч, т. е. $(n + t - 7)$ ч. Получаем третье уравнение:

$$(n + t - 7)(n - 5)x = 1.$$

В итоге имеем систему трёх уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} 24nx = 1, \\ x + 2x + 3x + \ldots + (n - 1)x + ntx = 1, \\ (n + t - 7)(n - 5)x = 1. \end{cases}$$

При этом n — натуральное число, а x и t — положительные числа.

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Чтобы преобразовать второе уравнение системы, нужно вычислить сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)$. Запишем интересующую нас сумму дважды:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1); \\ S &= (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots + 3 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Сложим эти две суммы «столбиками»: всего «столбиков» $(n - 1)$ и сумма слагаемых в каждом столбике равна n. В итоге получим $2S = (n - 1)n$, значит,

$$S = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Эта формула позволяет переписать второе уравнение системы в более простом виде: $\frac{n(n - 1)}{2}x + ntx = 1$, или $nx\left(\frac{n - 1}{2} + t\right) = 1$.

Далее из первого уравнения системы находим, что $x = \frac{1}{24n}$. Подставим это выражение вместо x во второе и третье уравнения системы (при этом второе уравнение запишем в преобразованном виде):

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{24n}, \\ \dfrac{n-1}{2} + t = 24, \\ (n + t - 7)\dfrac{n-5}{24n} = 1. \end{cases}$$

Теперь выразим переменную t из второго уравнения и подставим полученное выражение вместо t в третье уравнение системы:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{24n}, \\ t = \dfrac{49-n}{2}, \\ \left(n + \dfrac{49-n}{2} - 7\right)(n-5) = 24n. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $n_1 = 25$, $n_2 = -7$. Но при составлении математической модели мы отметили, что n — натуральное число, а этому условию удовлетворяет только первый корень, т. е. $n = 25$. Зная n, находим, что $t = 12$, $x = \frac{1}{600}$.

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

Производительность труда одного комбайна, которую мы обозначали буквой x, равна $\frac{1}{600}$. Значит, 5 комбайнов за 6 часов выполнят работу, равную $5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{600}$, т. е. $\frac{1}{20}$, что составляет 5%.

Ответ 5%.

ПРИМЕР 5

Дорога из A в B состоит из трёх участков, причём первый в 6 раз длиннее третьего. Велосипедист едет из A в B с разной скоростью на разных участках (но постоянной для каждого участка дороги). Найти среднюю скорость движения велосипедиста на протяжении всего пути, если известно, что она равна скорости движения на втором участке, на 2 км/ч меньше скорости движения на первом участке и на 10 км/ч больше половины скорости движения на третьем участке.

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

Введём три переменные: x км/ч — средняя скорость движения велосипедиста на пути от A до B; y км — длина третьего участка пути, тогда $6y$ км — длина первого участка; z км — длина второго участка.

Далее определим скорость движения велосипедиста на каждом из трёх участков: $(x + 2)$ км/ч — скорость движения на первом участке; x км/ч — скорость движения на втором участке; $(2x - 20)$ км/ч — скорость движения на третьем участке (по условию средняя скорость на 10 км/ч больше половины скорости движения на третьем участке, значит, $(x - 10)$ км/ч — половина скорости на третьем участке, а сама эта скорость равна $(2x - 20)$ км/ч).

На рис. 92 представлена схема движения велосипедиста.

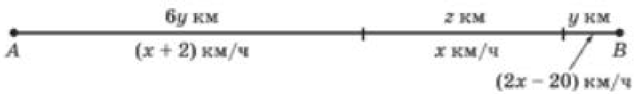


Рис. 92

Теперь нетрудно найти время движения велосипедиста на каждом участке, поскольку для каждого участка известны и его длина, и скорость движения: $\frac{6y}{x+2}$ ч — время движения на первом участке; $\frac{z}{x}$ ч — время движения на втором участке; $\frac{y}{2x-20}$ ч — время движения на третьем участке.

Время, затраченное на весь путь, можно вычислить не только как сумму трёх указанных величин, но и как частное от деления длины всего пути на среднюю скорость движения, т. е. $\frac{7y+z}{x}$.

В итоге приходим к уравнению

$$\frac{6y}{x+2} + \frac{z}{x} + \frac{y}{2x-20} = \frac{7y+z}{x}.$$

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Мы попали в непривычную ситуацию — математическая модель задачи представляет собой *одно уравнение с тремя переменными*. Тем не менее поработаем с этим уравнением:

$$\frac{6y}{x+2} + \frac{z}{x} + \frac{y}{2x-20} = \frac{7y}{x} + \frac{z}{x};$$

$$\frac{6y}{x+2} + \frac{y}{2x-20} = \frac{7y}{x}.$$

Разделим обе части уравнения на y. Здесь это делать можно, поскольку по смыслу задачи $y \neq 0$:

$$\frac{6}{x+2} + \frac{1}{2x-20} = \frac{7}{x}.$$

Получилось обычное уравнение с одной переменной x, оно имеет два корня: $x_1 = 14$, $x_2 = -20$.

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, чему равна средняя скорость движения велосипедиста на всём пути от A до B. Эту скорость мы обозначили буквой x. Для x нашли два значения, из которых по смыслу задачи подходит только первое.

Ответ 14 км/ч.

Иногда задачи, подобные рассмотренной выше, называют *нестандартными*. Нестандартность решённой задачи состоит в том, что число составленных уравнений оказалось меньше числа введённых переменных. Бывает, что в таких случаях в задаче требуется найти не значения переменных, а какое-либо их отношение. В рассмотренном же примере лишние переменные оказались *фиктивными*, они уничтожились в процессе преобразования уравнения.

Основные результаты

- В этой главе вы познакомились с новыми математическими моделями — системой двух уравнений с двумя переменными и системой двух неравенств с двумя переменными.
- Вы познакомились с новыми математическими *понятиями*:
  — уравнение (неравенство) с двумя переменными;
  — решение уравнения (неравенства) с двумя переменными;
  — система двух уравнений (неравенств) с двумя переменными;
  — решение системы двух уравнений с двумя переменными;
  — равносильность уравнений с двумя переменными, равносильность систем уравнений;
  — диофантово уравнение, однородный многочлен, однородное уравнение, симметрическое выражение, симметрическое уравнение, однородная система уравнений, симметрическая система уравнений.
- Мы обсудили и научились применять различные *методы решения систем двух уравнений с двумя переменными*:
  — графический метод;
  — метод подстановки;
  — метод алгебраического сложения;
  — метод введения новых переменных;
  — метод умножения;
  — метод деления.

- Мы обратили внимание на то, что метод введения новых переменных при решении систем двух уравнений с двумя переменными применяется в двух вариантах. Первый вариант: вводится одна новая переменная и используется только в одном уравнении системы. Второй вариант: вводятся две новые переменные и используются одновременно в обоих уравнениях системы.
- Мы доказали, что $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ — уравнение окружности, построенной на координатной плоскости xOy, с центром в точке $(a; b)$ и радиусом r. В частности, $x^2 + y^2 = r^2$ — уравнение окружности, построенной на координатной плоскости xOy, с центром в начале координат и радиусом r.

3 ГЛАВА ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

§ 15 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

1 Определение числовой функции

За время изучения курса алгебры вы уже привыкли к термину «функция». Это и понятно: ведь большинство математических моделей строится с помощью функций. Но вот само понятие «функция» мы не определили, хотя всем известно правило: прежде чем использовать какой-то термин, дай ему точное определение. И в основном мы чётко следовали этому правилу. Так, в 7-м классе мы ввели термин «степень с натуральным показателем» и точно его определили: «под a^n, где $n = 2, 3, 4, \ldots$, понимается произведение n множителей, каждый из которых равен a; под a^1 понимается само число a». В 8-м классе мы ввели термин «квадратный корень из неотрицательного числа», дав ему точное определение: «$\sqrt{a}$ — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a». Можно привести много подобных примеров.

Так почему же мы в 7-м классе, как только стали использовать понятие функции, не сформулировали определение, почему не сделали этого и в 8-м классе?

Дело в том, что ситуация с определением понятия «функция» в школе повторяет историю развития этого понятия вообще. Человечество активно и длительное время использовало функции как рабочий инструмент, не задумываясь об определении понятия функции. Лишь накопив необходимый опыт, математики начали думать о формальном определении.

Проанализируем наш опыт работы с понятием «функция». В 7-м классе мы ввели термин «линейная функция», понимая под этим уравнение с двумя переменными вида $y = kx + m$ и рассматривая переменные x и y как неравноправные: x — независимая переменная, y — зависимая переменная. Затем столкнулись с тем, что при описании реальных процессов встречаются зависимости и другого вида. В 7-м классе, кроме упомянутой линейной функции, мы изучили функцию $y = x^2$, в 8-м классе — функции $y = kx^2$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$.

Проанализируем весь багаж знаний, связанных с понятием «функция». Итак, функция — это математическая модель, описывающая какой-то реальный процесс. При описании такого процесса используют две переменные величины (в более сложных процессах участвует больше двух величин, но мы такие процессы пока не рассматривали). Одна из них меняется как бы сама по себе, независимо ни от чего (такую независимую переменную чаще всего обозначают буквой x), а другая переменная принимает значения, каждое из которых зависит от выбранного значения переменной x (такую зависимую переменную чаще всего обозначают буквой y). На математическом языке указанную зависимость y от x записывают так: $y = f(x)$.

Математическая модель $y = f(x)$ обычно дополняется указанием на то, в каком числовом множестве находятся значения независимой переменной x. Например, мы говорили о функции $y = \sqrt{x}$, подразумевая, что $x \geqslant 0$ (график функции изображён на рис. 93), но мы можем рассмотреть и функцию $y = \sqrt{x}$, где $x \in [0; 4]$ (график функции изображён на рис. 94). Это разные функции.

Бывает, что реальная ситуация описывается различными формулами на разных промежутках изменения независимой переменной. Такова, например, функция $y = g(x)$, где

$$g(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 2x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

График функции изображён на рис. 95. Напомним, как строить такие графики. Сначала надо построить параболу $y = x^2$ и выделить её

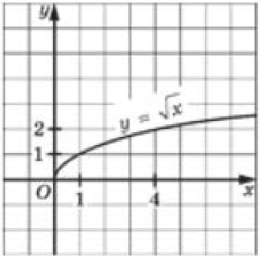


Рис. 93

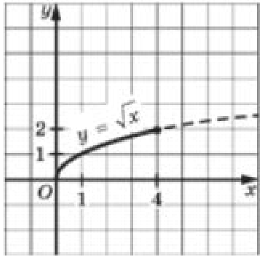


Рис. 94

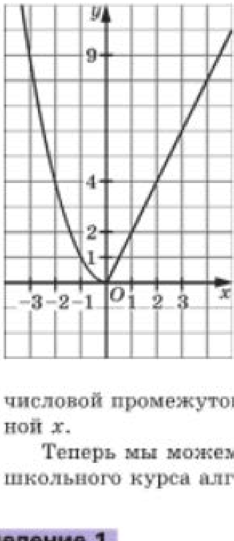


Рис. 95

часть при $x \leqslant 0$ (левая ветвь параболы), затем построить прямую $y = 2x$ и выделить её часть при $x > 0$. И наконец, надо обе выделенные части объединить на одном рисунке, т. е. построить в одной координатной плоскости.

Так что же такое функция? Проведённый выше анализ позволяет выделить два существенных момента.

1. Запись $y = f(x)$ указывает на ***правило*** (обычно говорят: «правило f»), с помощью которого, зная конкретное значение независимой переменной x, можно найти соответствующее значение переменной y.

2. При задании функции указывается числовое множество X (чаще всего какой-то числовой промежуток), откуда берут значения независимой переменной x.

Теперь мы можем сформулировать одно из главных определений школьного курса алгебры (да, пожалуй, и всей математики).

Определение 1

Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определённое число y, то говорят, что задана **функция $y = f(x)$ с областью определения X**; пишут

$$y = f(x), \quad x \in X.$$

При этом переменную x называют **независимой переменной** или **аргументом**, а переменную y — **зависимой переменной**.

Замечание В реальной жизни иногда говорят: «Каковы мои функции?» — или: «Каковы мои функциональные обязанности?», — спрашивая тем самым: «Каков круг моих действий, моих обязанностей?» — или: «Что я должен делать, как действовать?» Фактически в реальной жизни слово «функция» означает «действие» или «правила действий». Обратите внимание, что тот же смысл имеет и математический термин «функция», который мы разъяснили в определении 1.

Если $f(x)$ — алгебраическое выражение и множество X совпадает с областью определения этого выражения, то вместо записи $y = f(x)$, $x \in X$, используют более короткую запись $y = f(x)$ (хотя она не совсем соответствует определению 1).

функция

область определения функции

независимая переменная (аргумент)

зависимая переменная

естественная область определения функции

Для области определения функции $y = f(x)$ иногда удобно использовать обозначение $D(f)$. Например:

для функции $y = \sqrt{x}$ (см. рис. 93) имеем $D(f) = [0; +\infty)$;

для функции $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$ (см. рис. 94), имеем $D(f) = [0; 4]$;

для функции $y = g(x)$ (см. рис. 95) имеем $D(g) = (-\infty; +\infty)$.

Ещё раз подчеркнём, что нельзя говорить о функции $y = f(x)$ без задания её области определения, которая или указывается явно, или подразумевается — в случае, если область определения функции $y = f(x)$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$ (такую область определения иногда называют *естественной*).

ПРИМЕР 1

Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8}$;

в) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$.

Решение а) Так как область определения функции явно не указана, подразумевается, что она совпадает с областью определения выражения $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$. Таким образом, речь идёт о поиске *естественной области определения функции*.

Под знаком квадратного корня может находиться только неотрицательное число, значит, задача сводится к решению квадратного неравенства $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$.

Найдя корни квадратного трёхчлена $x^2 - 6x + 8$ ($x_1 = 2$; $x_2 = 4$) и схематически (не указывая на рисунке ось y) построив параболу $y = x^2 - 6x + 8$ (рис. 96), выбираем интересующие нас промежутки: $x \leqslant 2$; $x \geqslant 4$.

Рис. 96

Итак, $D(f) = (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$; $\cup$ — знак объединения множеств (см. § 2).

б) Функция $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8}$ определена в любой точке числовой прямой, за исключением точек 2 и 4 — при этих значениях x знаменатель дроби обращается в 0. Ответ можно записать так:

$$D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty).$$

Впрочем, на практике можно использовать сокращённую запись:

$$x \neq 2;\ x \neq 4.$$

в) Здесь задача сводится к решению неравенства

$$x^2 - 6x + 8 > 0.$$

Воспользовавшись геометрической моделью, представленной на рис. 96, но исключив из рассмотрения точки $x = 2$ и $x = 4$, получим:

$$D(f) = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty).$$

2 Область значений функции

Определение 2

Множество всех значений функции $y = f(x)$, $x \in X$, называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$.

область значений функции

Если известен график функции, то область значений функции найти сравнительно нетрудно. Для этого достаточно спроецировать график на ось ординат. То числовое множество, геометрическая модель которого получится на оси ординат в результате указанного проецирования, и будет представлять собой $E(f)$. Например:

для функции $y = \sqrt{x}$ имеем $E(f) = [0; +\infty)$ (см. рис. 93);

для функции $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$, имеем $E(f) = [0; 2]$ (см. рис. 94);

для функции $y = g(x)$ (см. рис. 95) имеем $E(f) = [0; +\infty)$.

ПРИМЕР 2

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x+1}, \text{ если } 0 < x \leqslant 3, \\ \dfrac{3}{x} + 1, \text{ если } x > 3. \end{cases}$

а) Вычислить $f(-2)$, $f(0)$, $f(1{,}25)$, $f(6)$, $f(-3)$.

б) Найти $D(f)$ и $E(f)$.

в) Выяснить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при различных значениях параметра a.

г) Решить неравенства: $f(x) < 0{,}5$; $f(x) > 0{,}5$.

Решение

а) Значение $x = -2$ удовлетворяет условию $-2 \leqslant x \leqslant 0$, следовательно, $f(-2)$ надо вычислять по формуле $f(x) = -x^2$; $f(-2) = -(-2)^2 = -4$.

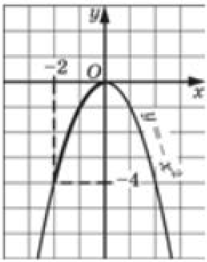


Рис. 97

Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $-2 \leqslant x \leqslant 0$, следовательно, $f(0)$ надо вычислять по формуле $f(x) = -x^2$; $f(0) = -0^2 = 0$.

Значение $x = 1{,}25$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 3$, следовательно, $f(1{,}25)$ надо вычислять по формуле $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f(1{,}25) = \sqrt{1{,}25+1} = 1{,}5$.

Значение $x = 6$ удовлетворяет условию $x > 3$, следовательно, $f(6)$ надо вычислять по формуле $f(x) = \dfrac{3}{x} + 1$; $f(6) = \dfrac{3}{6} + 1 = 1{,}5$.

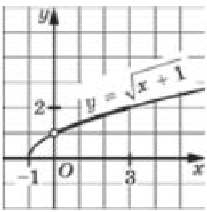


Рис. 98

Значение $x = -3$ не принадлежит области определения функции, а потому требование вычислить $f(-3)$ в данном случае некорректно.

б) Область определения функции состоит из трёх промежутков: $[-2; 0]$, $(0; 3]$, $(3; +\infty)$. Объединив их, получим луч $[-2; +\infty)$.

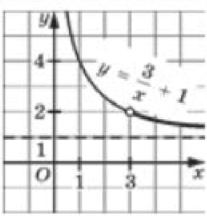


Рис. 99

Чтобы найти область значений функции, построим её график. Он состоит из трёх «кусочков»: части параболы $y = -x^2$, взятой на отрезке $[-2; 0]$ (рис. 97), части кривой $y = \sqrt{x+1}$, взятой на полуинтервале $(0; 3]$ (рис. 98), и части гиперболы $y = \dfrac{3}{x} + 1$, взятой на открытом луче $(3; +\infty)$ (рис. 99). Объединив эти кусочки на одном чертеже, получим график функции $y = f(x)$ (рис. 100). Спроецировав этот график на ось y, получим область значений функции, которая состоит из отрезка $[-4; 0]$ и полуинтервала $(1; 2]$.

Итак,

$$D(f) = [-2; +\infty),$$
$$E(f) = [-4; 0] \cup (1; 2].$$

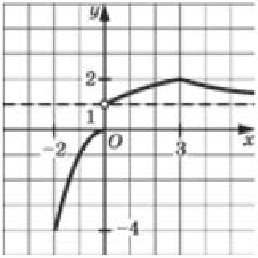


Рис. 100

в) Выясним, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ при различных значениях параметра a. Для этого нужно определить, сколько точек пересечения имеет построенный график функции (см. рис. 100) с прямой $y = a$ при различных значениях параметра a.

При $-4 \leqslant a \leqslant 0$ прямая пересекается с графиком только в одной точке, значит, уравнение имеет один корень. Аналогичная ситуация имеет место при $a = 2$. При $a < -4$, $0 < a \leqslant 1$, а также при $a > 2$ прямая и график не пересекаются, значит, уравнение не имеет корней. Наконец, график и прямая пересекаются в двух точках при $1 < a < 2$. В этом случае уравнение имеет два корня.

Итак, уравнение $f(x) = a$ не имеет корней при $a < -4$, $0 < a \leqslant 1$, $a > 2$; имеет один корень при $-4 \leqslant a \leqslant 0$ и при $a = 2$; имеет два корня при $1 < a < 2$.

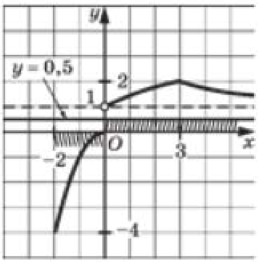


Рис. 101

г) Решим неравенство $f(x) < 0{,}5$. График функции располагается ниже прямой $y = 0{,}5$ при $-2 \leqslant x \leqslant 0$ (рис. 101) — это и есть решение неравенства.

Решим неравенство $f(x) > 0{,}5$. График функции располагается выше прямой $y = 0{,}5$ при $x > 0$ (см. рис. 101) — это и есть решение неравенства.

3 Решение примеров

ПРИМЕР 3

Под $\max(A; B)$ будем понимать наибольшее из чисел A, B. Построить график функции $y = \max(\sqrt{x}; 6 - x)$.

Решение На рис. 102 построены графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$. Они пересекаются в точке $(4; 2)$. Если $0 \leqslant x \leqslant 4$, то

$6 - x \geqslant \sqrt{x}$; если $x > 4$, то $\sqrt{x} > 6 - x$. Значит, если $0 \leqslant x \leqslant 4$, то $\max(\sqrt{x}; 6 - x) = 6 - x$; если же $x > 4$, то $\max(\sqrt{x}; 6 - x) = \sqrt{x}$.

Таким образом, речь идёт о построении графика кусочной функции $y = \begin{cases} 6 - x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 4. \end{cases}$ График функции изображён на рис. 103.

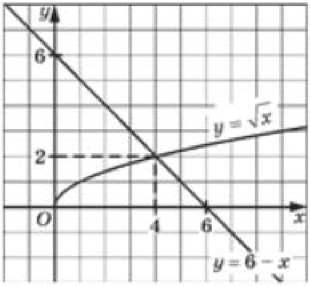


Рис. 102

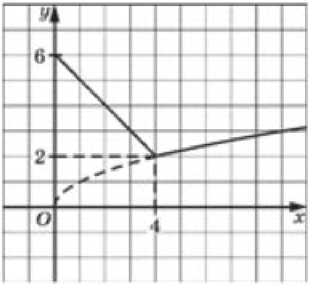


Рис. 103

ПРИМЕР 4

График функции $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $(2; 5)$, $(-1; -4)$, $(-2; -3)$. Найти коэффициенты a, b, c.

Решение Так как точка $(2; 5)$ принадлежит графику функции, выполняется равенство $5 = 4a + 2b + c$. Аналогично должны выполняться ещё два равенства: $-4 = a - b + c$ и $-3 = 4a - 2b + c$. Таким образом, задача сводится к решению системы трёх уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 5, \\ a - b + c = -4, \\ 4a - 2b + c = -3. \end{cases}$$

Вычтя второе уравнение из первого, получим $3a + 3b = 9$, т. е. $a + b = 3$. Вычтя второе уравнение из третьего, получим $3a - b = 1$. Сложив уравнения $a + b = 3$ и $3a - b = 1$, получим $4a = 4$, т. е. $a = 1$. Поскольку $a + b = 3$, получаем $b = 2$. Подставив найденные значения a и b в уравнение $a - b + c = -4$, получим $c = -3$.

Ответ $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

ПРИМЕР 5

График функции $y = \frac{a}{x+b}$ проходит через точку $\left(\sqrt{7};\ \sqrt{7}+3\right)$. Найти значения коэффициентов a и b, если известно, что это рациональные числа.

Решение Из условия следует, что выполняется равенство $\sqrt{7}+3 = \frac{a}{\sqrt{7}+b}$. Имеем: $\left(\sqrt{7}+3\right)\left(\sqrt{7}+b\right) = a$; $(b+3)\sqrt{7} = a - 3b - 7$.

Возможны два случая: $b + 3 = 0$, $b + 3 \neq 0$.

В первом случае должно выполняться и равенство $a - 3b - 7 = 0$, т. е. задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases} b+3=0, \\ a-3b-7=0. \end{cases}$ Решив эту систему, получим: $a = -2$, $b = -3$.

Во втором случае получаем $\sqrt{7} = \frac{a-3b-7}{b+3}$. По условию a и b — рациональные числа, но тогда и $\frac{a-3b-7}{b+3}$ — рациональное число. В то же время $\sqrt{7}$ — иррациональное число. Это значит, что равенство $\sqrt{7} = \frac{a-3b-7}{b+3}$ не выполняется ни при каких рациональных значениях a и b.

Ответ $a = -2$, $b = -3$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение числовой функции одной переменной.
2. Дана функция $y = x^2$, $x \in [1; 3]$. Какова её область определения? Какова её область значений?
3. Что такое естественная область определения функции? Укажите естественную область определения функции:

   а) $y = x^2$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
4. Что такое график функции одной переменной?
5. Как по графику функции найти область её значений? Приведите пример.

§ 16 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

1 Аналитический, графический и табличный способы

В предыдущем параграфе мы приводили различные примеры функций, описанных формулами. Но таким способом задание функции не исчерпывается. Ведь задать функцию $y = f(x)$ — это значит указать правило, которое позволяет по произвольно выбранному значению x из $D(f)$ вычислить соответствующее значение y. Чаще всего это правило связано с формулой или с несколькими формулами; такой способ задания функции обычно называют *аналитическим*. Между тем есть другие способы задания функции, о них и пойдёт речь в настоящем параграфе.

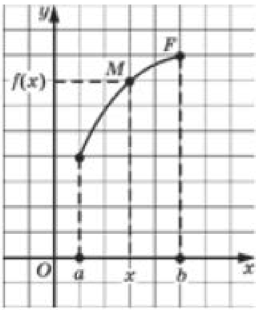


Рис. 104

Пусть F — некоторая линия на координатной плоскости и пусть, спроецировав эту линию на ось x, мы получим отрезок $[a; b]$ (рис. 104). Возьмём произвольную точку x из отрезка $[a; b]$ и проведём через неё прямую, параллельную оси ординат. Потребуем дополнительно, чтобы каждая такая прямая пересекала линию F только в одной точке — на рис. 104 соответствующая точка обозначена буквой M. Ордината точки M — это число $f(x)$, соответствующее выбранному значению x. Тем самым на отрезке $[a; b]$ задана функция $y = f(x)$. Такой способ задания функции называют *графическим*, а линию F — *графиком функции*.

аналитический способ задания функции

графический способ задания функции

Если функция была задана аналитически и нам удалось построить её график, то тем самым мы фактически осуществили переход от аналитического способа задания функции к графическому. Обратный же переход удаётся осуществить далеко не всегда. Как правило, это довольно трудная задача.

В следующих двух примерах мы осуществим переход от аналитического способа задания функции к графическому и обратно.

ПРИМЕР 1

Построить график функции:

а) $y = 2x - 4$; в) $y = 2|x| - 4$;

б) $y = |2x - 4|$; г) $y = |2|x| - 4|$.

Решение а) Прямая, служащая графиком заданной линейной функции, изображена на рис. 105.

б) В курсе алгебры 8-го класса мы говорили о том, что, для того чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, нужно: 1) построить график функции $y = f(x)$; 2) оставить без изменения те части графика, которые расположены не ниже оси x; 3) те части графика, которые расположены ниже оси x, заменить на симметричные им относительно оси x. Руководствуясь этим алгоритмом, строим график функции $y = |2x - 4|$ (рис. 106).

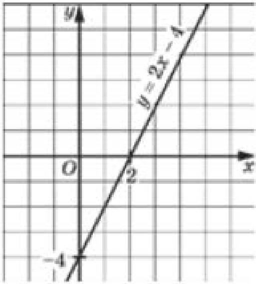


Рис. 105

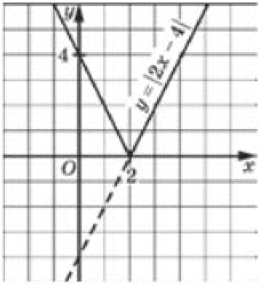


Рис. 106

в) В курсе алгебры 8-го класса мы говорили о том, что, для того чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, нужно: 1) построить график функции $y = f(x)$ при $x \geqslant 0$; 2) добавить к нему его симметричный образ относительно оси y. Руководствуясь этим алгоритмом, строим график функции $y = 2|x| - 4$ (рис. 107).

г) Если применим к графику функции $y = 2|x| - 4$ алгоритм из пункта б), мы как раз и получим график функции $y = |2|x| - 4|$ (рис. 108).

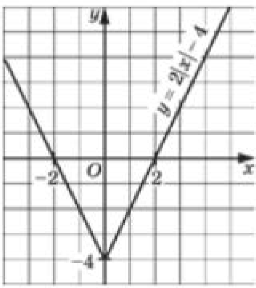


Рис. 107

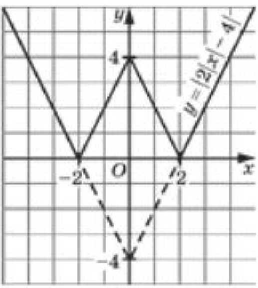


Рис. 108

ПРИМЕР 2

На рис. 109 изображена парабола, на рис. 110 — гипербола, на рис. 111 — полуокружность. Перейти во всех этих случаях к аналитическому заданию функции.

Решение Вершиной параболы служит точка (1; –3). Значит, уравнение параболы можно записать так: $y = a(x - 1)^2 - 3$. Осталось найти значение коэффициента a. Будем ориентироваться на вспомогательную систему координат (пунктирные линии на рис. 109). Замечаем, что в этой системе абсциссе 1 соответствует ордината 2 (выделенная точка на рис. 109). Значит, $a = 2$. Итак, аналитическое задание функции получено: $y = 2(x - 1)^2 - 3$.

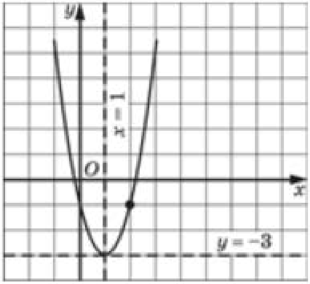


Рис. 109

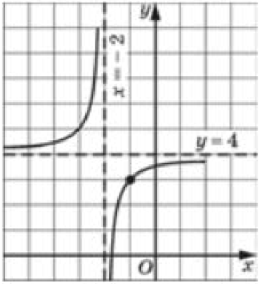


Рис. 110

Асимптотами гиперболы (рис. 110) служат прямые $x = -2$, $y = 4$. Значит, уравнение гиперболы можно записать так: $y = \frac{a}{x+2} + 4$. Осталось найти значение коэффициента a. Будем ориентироваться на вспомогательную систему координат (пунктирные линии на рис. 110). Замечаем, что в этой системе абсциссе 1 соответствует ордината –1 (выделенная точка на рис. 110). Значит, $a = -1$. Итак, аналитическое задание функции получено: $y = \frac{-1}{x+2} + 4$.

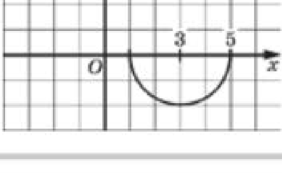


Рис. 111

Центром полуокружности (рис. 111) является точка (3; 0), радиус равен 2. Значит, уравнение соответствующей окружности таково: $(x - 3)^2 + y^2 = 4$. Из этого уравнения находим, что $y = \pm\sqrt{4 - (x - 3)^2}$. Поскольку на рис. 111 изображена нижняя полуокружность, получаем $y = -\sqrt{4 - (x - 3)^2}$.

Не всякая линия на координатной плоскости может рассматриваться как график некоторой функции. Например, окружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 9$ (рис. 112), не является графиком функции, поскольку любая прямая $x = a$, где $|a| < 3$, пересекает эту линию в двух точках (а для задания функции таких точек должно быть не более одной, т. е. прямая $x = a$ либо пересекает линию F в одной точке, либо вообще не пересекает её). В то же время если эту окружность разрезать на две части — верхнюю полуокружность (рис. 113) и нижнюю полуокружность (рис. 114), — то каждую из них можно считать графиком некоторой функции, причём в обоих случаях несложно от графического способа задания функции перейти к аналитическому. Из уравнения $x^2 + y^2 = 9$ находим $y^2 = 9 - x^2$ и далее $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Графиком функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ является верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = 9$ (см. рис. 113), а графиком функции $y = -\sqrt{9 - x^2}$ является нижняя половина окружности $x^2 + y^2 = 9$ (см. рис. 114).

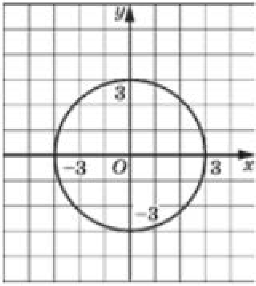


Рис. 112

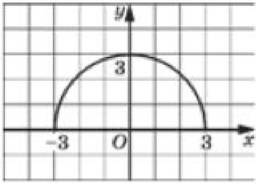


Рис. 113

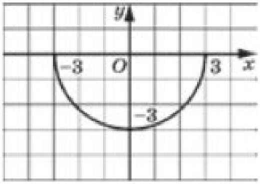


Рис. 114

Этот пример позволяет обратить внимание на одно существенное обстоятельство. Посмотрите на график функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ (см. рис. 113). Сразу видно, что $D(f) = [-3; 3]$. А если бы речь шла об отыскании области определения заданной аналитически функции $y = \sqrt{9 - x^2}$, пришлось бы, как мы это делали в § 15, решать неравенство $9 - x^2 \geqslant 0$. Потому-то обычно и стараются работать одновременно и с аналитическим, и с графическим способами задания функций, они друг друга дополняют.

табличный способ задания функции

Кроме аналитического и графического на практике применяют и *табличный* способ задания функции — с помощью таблицы, в которой указаны значения функции (иногда точные, иногда приближённые) для конечного множества значений аргумента. Примерами табличного задания функции могут служить таблицы квадратов чисел, кубов чисел, квадратных корней и т. д.

Во многих случаях табличное задание функции является удобным. Оно позволяет найти значение функции для имеющихся в таблице значений аргумента без всяких вычислений.

2 Словесный способ задания функции

словесный способ задания функции

Аналитический, графический, табличный — наиболее популярные способы задания функции, для наших нужд этих способов вполне достаточно. На самом деле в математике имеется довольно много различных способов задания функции, но мы познакомим вас ещё только с одним способом, который используется в весьма своеобразных ситуациях. Речь идёт о *словесном* способе, когда правило задания функции описывается словами. Приведём примеры.

1. Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех неотрицательных чисел с помощью следующего правила: каждому числу x ставится в соответствие первая цифра после запятой в десятичной записи числа x. Если, скажем, $x = 2{,}534$, то $f(x) = 5$ (первый знак после запятой — цифра 5); если $x = 13{,}002$, то $f(x) = 0$; если $x = \frac{2}{3}$, то, записав $\frac{2}{3}$ в виде бесконечной периодической десятичной дроби $0{,}6666...$, находим $f(x) = 6$. А чему равно значение $f(15)$? Оно равно 0, так как $15 = 15{,}000...$, и мы видим, что первая цифра после запятой есть 0 (вообще-то верно и равенство $15 = 14{,}99...$, но без особой необходимости принято не рассматривать бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9).

Любое неотрицательное число x можно записать в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной), а потому каждому значению x можно поставить в соответствие значение первой цифры после запятой, так что мы можем говорить о функции, хотя и несколько необычной. У этой функции

$$D(f) = [0; +\infty),\ E(f) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

2. Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех действительных чисел с помощью следующего правила: каждому числу x ставится в соответствие наибольшее из всех целых чисел, которые не превосходят x. Иными словами, функция $y = f(x)$ определяется следующими условиями:

а) $f(x)$ — целое число;

б) $f(x) \leqslant x$ (поскольку $f(x)$ не превосходит x);

в) $f(x) + 1 > x$ (если $f(x)$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x, то $f(x) + 1$ уже больше, чем x).

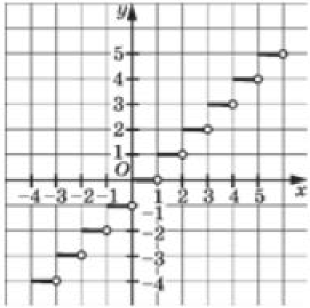


Рис. 115

Если, скажем, $x = 2{,}534$, то $f(x) = 2$, поскольку, во-первых, 2 — целое число, во-вторых, $2 \leqslant 2{,}534$ (точнее $2 < 2{,}534$) и, в-третьих, следующее целое число 3 уже больше, чем 2,534.

Если $x = 47$, то $f(x) = 47$, поскольку, во-первых, 47 — целое число, во-вторых, $47 \leqslant 47$ и, в-третьих, следующее за числом 47 целое число 48 уже больше, чем 47.

А чему равно значение $f(-0{,}(23))$? Оно равно -1 (проверьте!).

У этой функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$, а $E(f) = \mathbf{Z}$ (множество целых чисел).

функция «целая часть числа»

Функцию, о которой идёт речь, называют *целой частью числа*, для неё используют обозначение $[x]$. Например, $[2{,}534] = 2$; $[47] = 47$; $[-0{,}(23)] = -1$. На рис. 115 изображён график функции $y = [x]$.

ПРИМЕР 3

Построить график функции $y = x - [x]$.

Решение Построим в одной системе координат графики функций $y = x$ и $y = [x]$ (рис. 116). Вычитая ординаты второго графика из соответствующих ординат первого графика, получим требуемый график — он представлен на рис. 117.

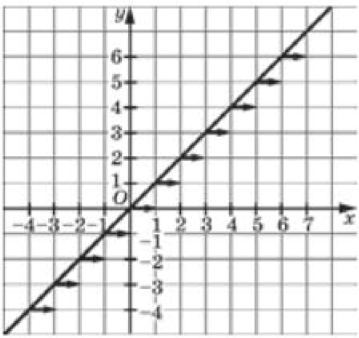


Рис. 116

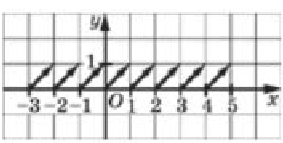


Рис. 117

функция «дробная часть числа»

Функцию, о которой шла речь в примере 3, называют *дробной частью числа*; для неё используют обозначение $\{x\}$. Например, $\{2{,}534\} = 0{,}534$, поскольку $2{,}534 - 2 = 0{,}534$, $\{47\} = 0$ (так как $47 - 47 = 0$), $\{-0{,}23\} = 0{,}77$ (так как $-0{,}23 - (-1) = 0{,}77$), $\{-0{,}(23)\} = 0{,}(76)$ (так как $-0{,}(23) - (-1) = 1 - 0{,}232323\ldots =$ $= 0{,}999999\ldots - 0{,}232323\ldots = 0{,}767676\ldots = 0{,}(76)$).

Итак, мы познакомились с двумя новыми функциями, для задания которых используется словесный способ, — это функции $y = [x]$ (целая часть числа x) и функция $y = \{x\}$ (дробная часть числа x).

3 Функции как математические модели реальных ситуаций

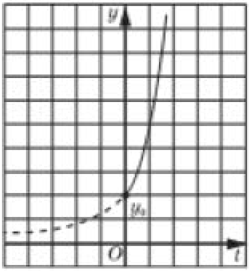
Функции во многих случаях служат математическими моделями реальных процессов. Например, любой равномерный процесс, в котором участвуют две переменные величины x и y, описывается формулой $y = kx + m$, где k, m — действительные числа; это линейная функция. Закон свободного падения описывается функцией $s = \frac{gt^2}{2}$; здесь время t — независимая переменная, а зависимая переменная s — пройденный путь. Многие подобные примеры известны вам из курса физики.

Приведём ещё три примера.

1. Предположим, что колония живых организмов находится в благоприятных условиях: пространство, занимаемое колонией, и пищевые ресурсы неограниченны, а хищников, питающихся организмами данной колонии, нет, благодаря чему рождаемость выше, чем смертность. В таких условиях обычно считают, что скорость изменения численности колонии пропорциональна численности (чем больше организмов, тем выше скорость; k — коэффициент пропорциональности). Математики установили, что число организмов колонии выражается формулой $y = y_0e^{kt}$, где y_0 — численность колонии в момент времени $t = 0$, а $e \approx 2{,}7$ (число e играет важную роль в математике, об этом вы узнаете в 11-м классе). На рисунке 118, *а* схематически представлен график функции $y = y_0e^{kt}$ (пунктиром добавлена гипотетическая часть графика при $t < 0$).

Примерно по такому же закону изменяется величина вклада в банке, этот закон называют *законом показательного роста*.

2. При радиоактивном распаде мгновенная скорость распада в момент времени t пропорциональна наличному количеству вещества. Закон радиоактивного распада выражается формулой $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$;



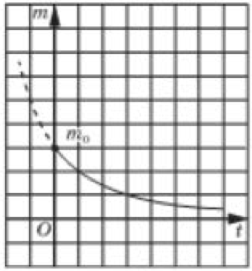


Рис. 118

здесь m_0 — масса вещества в момент времени $t = 0$, T — время, за которое масса вещества уменьшится вдвое (так называемый *период полураспада*). На рисунке 118, *б* схематически представлен график функции $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (пунктиром добавлена гипотетическая часть графика при $t < 0$).

Оба графика, представленные на рисунке 118 (со сплошной и пунктирной частями), называют *экспонентами*. Подробнее об экспоненте речь пойдёт в старших классах.

3. В комнату с температурой 20 °C внесли кипящий чайник. При определённых условиях можно считать, что скорость изменения температуры нагретого тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды. Температура T тела в момент времени t выражается формулой $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}$; здесь T_1 — температура окружающей среды, а T_0 — температура тела в момент времени $t = 0$. В ситуации с чайником $T_1 = 20°$, а $T_0 = 100°$. Значит, $T = 20 + 80e^{-kt}$. График этой функции схематически представлен на рисунке 119. Прямая $T = 20$ — асимптота графика.

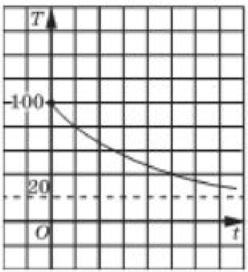


Рис. 119

График наглядно иллюстрирует вполне понятное обстоятельство: с течением времени температура чайника постепенно приближается к температуре окружающей среды. Процессы подобного рода называют *процессами выравнивания*.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите пример аналитического задания функции (с помощью одной формулы).

2. Приведите пример аналитического задания кусочной функции.
3. Приведите пример графического задания функции.
4. Приведите пример графика на координатной плоскости, который нельзя считать графическим заданием некоторой функции; объясните почему.
5. Приведите пример словесно заданной функции (отличный от примеров из § 16).
6. Придумайте кусочно заданную непрерывную функцию, областью определения которой является отрезок $[-2; 4]$ и график которой состоит из части параболы и отрезка прямой. Задайте эту функцию аналитически.
7. Придумайте кусочно заданную непрерывную функцию с одной точкой разрыва, областью определения которой является полуинтервал $(0; 9]$ и график которой состоит из части гиперболы $y = \frac{k}{x}$ и части графика функции $y = \sqrt{x}$. Задайте эту функцию аналитически.

§ 17 СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

1 Монотонность и ограниченность функций

Определение 1

Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей на множестве** $X \subset D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2

Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей на множестве** $X \subset D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

На практике удобнее пользоваться следующими формулировками: функция возрастает, если *большему значению аргумента* соответствует *большее значение функции;* функция убывает, если *большему значению аргумента* соответствует *меньшее значение функции.*

возрастающая функция

убывающая функция

монотонная функция

Обычно термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием **монотонная функция**, а исследование функции на возрастание или убывание называют *исследованием функции на монотонность.*

Если функция возрастает (или убывает) на своей естественной области определения, то говорят, что функция возрастающая (или, соответственно, убывающая) — без указания числового множества X.

ПРИМЕР 1

Исследовать на монотонность функцию:
а) $y = 5 - 2x$; б) $y = x^3 + 2$.

Решение а) Введём обозначение: $f(x) = 5 - 2x$. Если $x_1 < x_2$, то $-2x_1 > -2x_2$, и далее $5 - 2x_1 > 5 - 2x_2$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, а это означает, что заданная функция убывает на всей числовой прямой.

б) Введём обозначение: $f(x) = x^3 + 2$. Возьмём произвольные значения аргумента x_1 и x_2. Пусть $x_1 < x_2$, тогда по свойствам числовых неравенств получим:

$$x_1^3 < x_2^3;\; x_1^3 + 2 < x_2^3 + 2.$$

Последнее неравенство означает, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, а это значит, что заданная функция возрастает на всей числовой прямой.

Определение 3

Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу на множестве** $\boldsymbol{X \subset D(f)}$, если все значения этой функции на множестве X больше некоторого числа; иными словами, если существует число m такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) > m$.

Определение 4

Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху на множестве** $X \subset D(f)$, если все значения этой функции меньше некоторого числа; иными словами, если существует число M такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) < M$.

Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идёт об ограниченности функции снизу или сверху на всей области её определения.

ограниченная снизу функция

ограниченная сверху функция

ограниченная функция

Если функция ограничена и снизу, и сверху на всей области определения, то её называют **ограниченной**.

Ограниченность функции легко читается по её графику: если функция ограничена снизу, то её график целиком расположен выше некоторой горизонтальной прямой $y = m$ (рис. 120, *а*); если функция ограничена сверху, то её график целиком расположен ниже некоторой горизонтальной прямой $y = M$ (рис. 120, *б*).

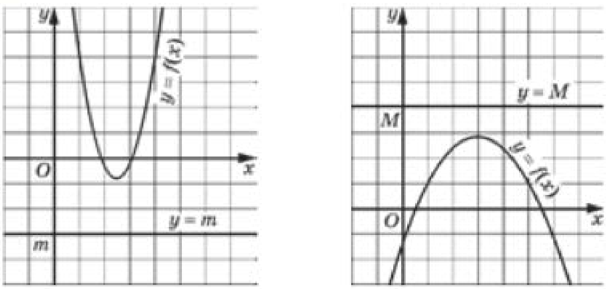


Рис. 120 *а* *б*

ПРИМЕР 2

Исследовать на ограниченность функцию $y = \sqrt{9 - x^2}$.

Решение С одной стороны, вполне очевидно неравенство

$$\sqrt{9 - x^2} \geqslant 0,$$

это означает, что функция ограничена снизу.

С другой стороны, $9 - x^2 \leqslant 9$, а потому

$$\sqrt{9 - x^2} \leqslant 3.$$

Это означает, что функция ограничена сверху.

А теперь посмотрите на график этой функции (см. рис. 113). Ограниченность функции и сверху, и снизу прочитывается по графику достаточно легко.

2 Наименьшее и наибольшее значения функции

Определение 5

Число m называют **наименьшим значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$**, если:
1) во множестве X *существует* точка x_0 такая, что $f(x_0) = m$;
2) *для любого* значения x из множества X выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Определение 6

Число M называют **наибольшим значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$**, если:
1) во множестве X *существует* точка x_0 такая, что $f(x_0) = M$;
2) *для любого* значения x из множества X выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Наименьшее значение функции обозначают символом $y_{\text{наим}}$, а наибольшее — символом $y_{\text{наиб}}$. Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идёт о поиске наименьшего или наибольшего значения функции во всей области определения.

наименьшее значение функции

наибольшее значение функции

Имеют место следующие полезные утверждения.

1) *Если у функции существует $y_{\text{наим}}$, то она ограничена снизу.*

2) *Если у функции существует $y_{\text{наиб}}$, то она ограничена сверху.*

3) *Если функция не ограничена снизу, то у неё не существует $y_{\text{наим}}$.*

4) *Если функция не ограничена сверху, то у неё не существует $y_{\text{наиб}}$.*

Докажем для примера свойства 1) и 3).

Пусть функция $y = f(x)$ достигает наименьшего значения на множестве X. Это значит, что существует такая точка $x_0 \in X$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$. Но это (см. определение 3) как раз и означает ограниченность функции снизу.

Свойство 3) можно доказать методом от противного. Если предположить, что $y_{наим}$ существует, то по свойству 1) функция ограничена снизу, что противоречит условию. Значит, $y_{наим}$ не существует.

ПРИМЕР 3

Исследовать функцию на ограниченность, найти наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = 2x + 2 - 6\sqrt{2x - 7}$;

б) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8} + \sqrt{2x^2 - 8x + 44}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 13} - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$;

г) $y = \dfrac{5x^2 + 10x + 14}{x^2 + 2x + 4}$.

Решение а) $2x + 2 - 6\sqrt{2x - 7} = (2x - 7) - 6\sqrt{2x - 7} + 9 = (\sqrt{2x - 7} - 3)^2$.

Функция $y = (\sqrt{2x - 7} - 3)^2$ принимает только неотрицательные значения, значит, она ограничена снизу. Из уравнения $\sqrt{2x - 7} - 3 = 0$ находим $x = 8$; в этой точке функция достигает своего наименьшего значения $y_{наим} = 0$. Сверху функция не ограничена, поскольку выражение $(\sqrt{2x - 7} - 3)^2$ может принимать сколь угодно большие значения.

б) Введём обозначение: $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} + \sqrt{2x^2 - 8x + 44}$. Найдём область определения функции. Для этого решим систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geqslant 0, \\ 2x^2 - 8x + 44 \geqslant 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства находим: $x \leqslant 2$; $x \geqslant 4$. Второе неравенство выполняется при любых значениях x, поскольку дискриминант квадратного трёхчлена $2x^2 - 8x + 44$ отрицателен, а старший коэффициент положителен. Значит, решения первого неравенства являются и решениями системы.

Итак, $D(f) = (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$.

Имеем $y = \sqrt{(x - 3)^2 - 1} + \sqrt{2(x - 2)^2 + 36}$. На луче $(-\infty; 2]$ квадратичные функции $y = (x - 3)^2 - 1$ и $y = 2(x - 2)^2 + 36$ не ограничены сверху, убывают и принимают неотрицательные значения. Теми же свойствами обладают функции $y = \sqrt{(x - 3)^2 - 1}$, $y = \sqrt{2(x - 2)^2 + 36}$ и их сумма, т. е. функция $y = f(x)$. Из убывания функции следует, что своего наименьшего значения она достигает в точке $x = 2$. Значит, на луче $(-\infty; 2]$ имеем: $y_{наим} = f(2) = 6$.

На луче $[4; +\infty)$ квадратичные функции $y = (x - 3)^2 - 1$ и $2(x - 2)^2 + 36$ не ограничены сверху, возрастают и принимают неотрицательные значения. Теми же свойствами обладают функции $y = \sqrt{(x-3)^2 - 1}$, $y = \sqrt{2(x-2)^2 + 36}$ и их сумма, т. е. функция $y = f(x)$. Из возрастания функции следует, что своего наименьшего значения она достигает в точке $x = 4$. Значит, на луче $[4; +\infty)$ имеем: $y_{\text{наим}} = f(4) = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$. Заметим, что $2\sqrt{11} > 6$.

Подведём итоги. Заданная функция ограничена снизу и $y_{\text{наим}} = 6$; сверху она не ограничена, и наибольшего значения не существует.

в) Эта функция вроде бы похожа на предыдущую, но есть существенное отличие: то, что верно для суммы неотрицательных возрастающих (убывающих) функций, не проходит для их разности. Придётся искать другие пути. Имеем:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 13} - \sqrt{x^2 - 4x + 5} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 13} - \sqrt{x^2 - 4x + 5}\right)\left(\sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}\right)}{\sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2 - 4x + 13}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2 - 4x + 5}\right)^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{8}{\sqrt{(x-2)^2 + 9} + \sqrt{(x-2)^2 + 1}}.$$

Знаменатель последней дроби принимает наименьшее значение 4 при $x = 2$; соответственно сама дробь при $x = 2$ достигает наибольшего значения, оно равно 2. Отсюда, кстати, сразу следует ограниченность функции сверху.

Далее, функция ограничена снизу, поскольку последняя дробь положительна при любых значениях x. На луче $[2; +\infty)$ функция $y = \sqrt{(x-2)^2 + 9} + \sqrt{(x-2)^2 + 1}$ положительна и возрастает, значит, функция $y = \dfrac{8}{\sqrt{(x-2)^2 + 9} + \sqrt{(x-2)^2 + 1}}$ положительна и убывает, наименьшего значения у неё нет.

Подведём итоги. Функция ограничена и сверху, и снизу, $y_{\text{наиб}} = 2$, наименьшего значения у функции нет.

г) Имеем: $\dfrac{5x^2 + 10x + 14}{x^2 + 2x + 4} = \dfrac{5(x^2 + 2x + 4) - 6}{x^2 + 2x + 4} = 5 - \dfrac{6}{(x+1)^2 + 3}$.

Знаменатель последней дроби принимает наименьшее значение 3 при $x = -1$; соответственно сама дробь при $x = -1$ достигает наибольшего значения, оно равно 2. Отсюда следует, что функция $y = 5 - \dfrac{6}{(x+1)^2 + 3}$ в точке $x = -1$ достигает наименьшего значения, оно равно 3.

Далее, для любого значения x выполняется неравенство $5 - \dfrac{6}{(x+1)^2 + 3} < 5$, а значит, функция ограничена сверху. На луче $[-1; +\infty)$ функция $y = (x+1)^2 + 3$ положительна и возрастает, функция $y = \frac{6}{(x+1)^2+3}$ положительна и убывает, значит, функция $y = 5 - \frac{6}{(x+1)^2+3}$ возрастает. Но это значит, что наибольшего значения у неё нет.

Подведём итоги. Функция ограничена и сверху, и снизу, $y_{наим} = 3$, наибольшего значения у функции нет.

3 Точки максимума и минимума. Выпуклость и непрерывность функций

В учебнике для 8-го класса мы ввели понятия максимума и минимума функции. Напомним соответствующие определения. В них используется понятие окрестности точки. *Окрестность точки* x_0 — это интервал с центром в точке x_0. Длину половины этого интервала называют *радиусом окрестности*. Например, (1,97; 2,03) — окрестность точки 2, а радиус окрестности равен 0,03. Когда при изучении свойств функции говорят об окрестности точки, обычно предполагают, что эта окрестность целиком содержится в области определения функции.

окрестность точки

радиус окрестности

Определение 7

Точку x_0 называют **точкой максимума функции $y = f(x)$**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Точку x_0 называют **точкой минимума функции $y = f(x)$**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_0) выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимума и минимума объединяют общим названием — *точки экстремума* (от лат. *extremum* — крайний). Для значений функции в этих точках используют символы y_{max}, y_{min}.

точка максимума

точка минимума

точка экстремума

На рис. 121 представлен график некоторой функции (предполагается, что $D(f) = (-\infty; +\infty)$). Как видите, у неё несколько точек экстремума: x_1 и x_3 — точки максимума, а x_2 и x_4 — точки минимума.

Обратите внимание, что $y_{наиб}$ и y_{max}, а также $y_{наим}$ и y_{min} могут быть равны, но могут и отличаться. Например,

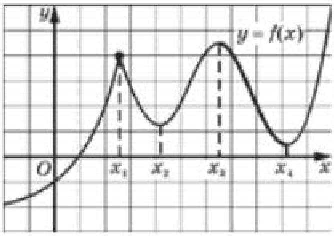


Рис. 121

функция, выпуклая вверх
функция, выпуклая вниз
непрерывная функция

у функции, график которой представлен на рис. 121, имеются две точки максимума и две точки минимума, и в то же время ни $y_{наиб}$, ни $y_{наим}$ не существуют.

Напомним ещё два свойства функций. Первое — свойство выпуклости функции. Считается, что *функция выпукла вниз* на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки её графика (с абсциссами из X) отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит н и ж е проведённого отрезка (рис. 122, *а*). *Функция выпукла вверх* на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки её графика (с абсциссами из X) отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит в ы ш е проведённого отрезка (рис. 122, *б*).

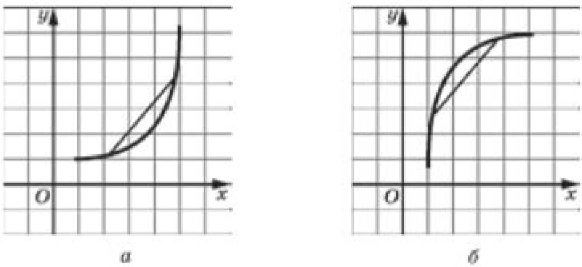


Рис. 122

Второе свойство — *непрерывность функции на промежутке X* — означает, что график функции на данном промежутке не имеет точек разрыва (т. е. представляет собой сплошную линию).

На самом деле в математике всё обстоит, как говорится, с точностью до наоборот: график функции изображается в виде сплошной линии (без разрывов) только тогда, когда доказана непрерывность функции. Но формальное определение непрерывности функции, достаточно сложное и тонкое, нам пока не по силам. То же самое можно сказать и о выпуклости функции. Обсуждая указанные два свойства функций, будем по-прежнему опираться на наглядно-интуитивные представления.

График функции $y = f(x)$ строится по точкам. Чем больше точек вида $(x, f(x))$ мы возьмём, тем более полное и точное представление о графике получим. А уж затем, читая график, мы делаем выводы о непрерывности функции, о её выпуклости вверх или вниз, об области значений функции и т. д. В ряде случаев те или иные свойства функции мы с вами в состоянии доказать, опираясь на имеющиеся у нас к настоящему моменту знания (что мы и сделаем в дальнейших пунктах этого параграфа). Но довольно часто, говоря о свойствах некоторой функции, мы вынуждены опираться только на наглядно-интуитивные представления. Но в этом нет ничего плохого или предосудительного. Из истории развития математики известно, что человечество часто и долго пользовалось различными свойствами тех или иных объектов, не зная точных определений и строгих обоснований. Потом, когда такие определения удавалось сформулировать, всё становилось на свои места.

4 Исследование линейной функции $y = kx + m$

ТЕОРЕМА 1

Если $k > 0$, то функция $y = kx + m$ возрастает на всей числовой прямой; если $k < 0$ то функция $y = kx + m$ убывает на всей числовой прямой.

Доказательство Положим $f(x) = kx + m$. Пусть $k > 0$. Если $x_1 < x_2$, то по соответствующим свойствам числовых неравенств (которые мы с вами изучали в курсе алгебры 8-го класса) $kx_1 < kx_2$ и, далее, $kx_1 + m < kx_2 + m$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Это и означает возрастание функции $y = f(x)$, т. е. линейной функции $y = kx + m$, на всей числовой прямой.

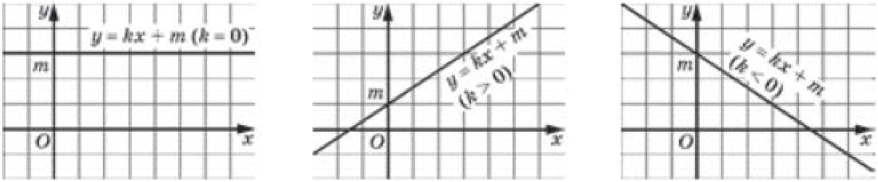
Пусть теперь $k < 0$ В этом случае из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $kx_1 > kx_2$ и, далее, $kx_1 + m > kx_2 + m$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Это и означает убывание функции $y = f(x)$, т. е. линейной функции $y = kx + m$ при $k < 0$, на всей числовой прямой. Теорема доказана.

Графиком функции $y = kx + m$ является прямая (рис. 123). Перечислим свойства линейной функции:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) возрастает, если $k > 0$ (рис. 123, *б*), убывает, если $k < 0$ (рис. 123, *в*);
3) не ограничена ни снизу, ни сверху;
4) нет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

5) функция непрерывна;
6) $E(f) = (-\infty; +\infty)$.



а *б* *в*

Рис. 123

5 Исследование функции $y = kx^2$ $(k \neq 0)$

ТЕОРЕМА 2

Если $k > 0$, то функция $y = kx^2$ возрастает на луче $[0; +\infty]$ и убывает на луче $(-\infty; 0]$. Если $k < 0$, то функция $y = kx^2$ убывает на луче $[0; +\infty)$ и возрастает на луче $(-\infty; 0]$.

Доказательство Обозначим $f(x) = kx^2$. Пусть $k > 0$ и $0 \leqslant x_1 < x_2$. Тогда по свойствам числовых неравенств последовательно получаем: $x_1^2 < x_2^2$; $kx_1^2 < kx_2^2$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$. Итак, на луче $[0; +\infty)$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, а это и означает, что при $k > 0$ функция $y = kx^2$ возрастает на луче $[0; +\infty)$.

Пусть $k > 0$ и $x_1 < x_2 \leqslant 0$. Тогда по свойствам числовых неравенств последовательно получаем: $x_1^2 > x_2^2$; $kx_1^2 > kx_2^2$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$. Итак, на луче $(-\infty; 0]$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, а это и означает, что при $k > 0$ функция $y = kx^2$ убывает на луче $[0; +\infty)$.

Пусть теперь $k < 0$ и $0 \leqslant x_1 < x_2$. Тогда $x_1^2 < x_2^2$; $kx_1^2 > kx_2^2$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$. Итак, на луче $[0; +\infty)$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, а это означает, что при $k < 0$ функция $y = kx^2$ убывает на луче $[0; +\infty)$.

Если $k < 0$ и $x_1 < x_2 \leqslant 0$, то $x_1^2 > x_2^2$; $kx_1^2 < kx_2^2$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$. Итак, на луче $(-\infty; 0]$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, а это означает, что при $k < 0$ функция $y = kx^2$ возрастает на луче $(-\infty; 0]$. Теорема доказана.

Графиком функции $y = kx^2$ является парабола с вершиной в начале координат и с ветвями, направленными вверх, если $k > 0$

(рис. 124), и вниз, если $k < 0$ (рис. 125). Прямая $x = 0$ (ось y) является осью параболы.

Свойства функции $y = kx^2$ для случая $k > 0$ (см. рис. 124):

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$;
3) ограничена снизу, не ограничена сверху;
4) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует;
5) непрерывна;
6) $E(f) = [0; +\infty)$;
7) выпукла вниз.

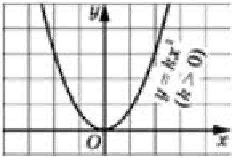


Рис. 124

Обратите внимание: на промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает, а на промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает. Такие промежутки называют *промежутками монотонности* функции.

Свойства функции $y = kx^2$ для случая $k < 0$ (см. рис. 125):

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) возрастает на луче $(-\infty; 0]$, убывает на луче $[0; +\infty)$;
3) не ограничена снизу, ограничена сверху;
4) $y_{\text{наим}}$ не существует, $y_{\text{наиб}} = 0$;
5) непрерывна;
6) $E(f) = (-\infty; 0]$;
7) выпукла вверх.

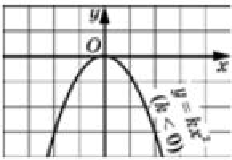


Рис. 125

6 Исследование функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$

ТЕОРЕМА 3

Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на открытом луче $(0; +\infty)$ и убывает на открытом луче $(-\infty; 0)$. Если $k < 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на открытом луче $(0; +\infty)$ и возрастает на открытом луче $(-\infty; 0)$.

Доказательство Положим $f(x) = \frac{k}{x}$, и пусть $k > 0$ и $0 < x_1 < x_2$. Тогда по свойствам числовых неравенств последовательно получаем: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$; $\frac{k}{x_1} > \frac{k}{x_2}$; т. е. $f(x_1) > f(x_2)$. Итак, на $(0; +\infty)$ из $x_1 < x_2$ следует

$f(x_1) > f(x_2)$, а это и означает, что при $k > 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на открытом луче $(0; +\infty)$.

Пусть теперь $x_1 < x_2 < 0$ (по прежнему $k > 0$). Тогда $-x_1 > -x_2 > 0$, $\frac{1}{-x_1} < \frac{1}{-x_2}$, $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$; $\frac{k}{x_1} > \frac{k}{x_2}$; т. е. $f(x_1) > f(x_2)$. Итак, на $(-\infty; 0)$ из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, а это и означает, что при $k > 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на открытом луче $(-\infty; 0)$.

Случай, когда $k < 0$, попробуйте рассмотреть самостоятельно.

Обращаем ваше внимание на то, что хотя функция $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ убывает и при $x > 0$, и при $x < 0$, назвать её убывающей во всей области определения нельзя. Пусть, скажем, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Тогда $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$. Получается, что $x_1 < x_2$ и $f(x_1) < f(x_2)$, а этого для убывающей функции не может быть.

Графиком функции $y = \frac{k}{x}$ является гипербола, оси координат служат асимптотами гиперболы, а начало координат — центром симметрии (рис. 126, 127).

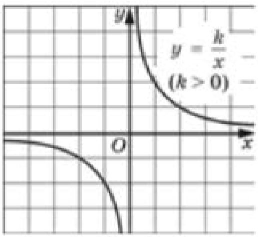


Рис. 126

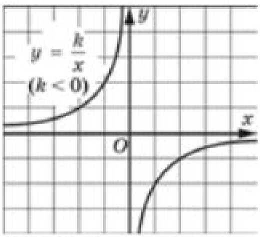


Рис. 127

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$:

1) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
2) если $k > 0$, то функция убывает на открытом луче $(-\infty; 0)$ и на открытом луче $(0; +\infty)$ (см. рис. 126); если $k < 0$, то функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$ (см. рис. 127);
3) не ограничена ни снизу, ни сверху;
4) нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;

5) функция непрерывна на открытом луче $(-\infty; 0)$ и на открытом луче $(0; +\infty)$;
6) $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
7) если $k > 0$, то функция выпукла вверх при $x < 0$, т. е. на открытом луче $(-\infty; 0)$, и выпукла вниз при $x > 0$, т. е. на открытом луче $(0; +\infty)$ (см. рис. 126). Если $k < 0$, то функция выпукла вверх при $x > 0$ и выпукла вниз при $x < 0$ (см. рис. 127).

7 Исследование функции $y = \sqrt{x}$

Графиком функции является ветвь параболы (рис. 128).

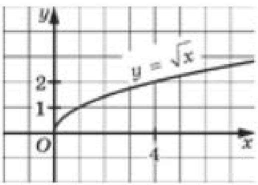


Рис. 128

Свойства функции $y = \sqrt{x}$:
1) $D(f) = [0; +\infty)$;
2) возрастает;
3) ограничена снизу, не ограничена сверху;
4) $y_{наим} = 0$, $y_{наиб}$ не существует;
5) непрерывна;
6) $E(f) = [0; +\infty)$;
7) выпукла вверх.

Докажем свойства 1)—4). Введём обозначение: $f(x) = \sqrt{x}$.

1) $D(f) = [0; +\infty)$. Речь идёт о естественной области определения функции, т. е. об области определения выражения $\sqrt{x}$. Она задаётся неравенством $x \geqslant 0$, отсюда и следует, что $D(f) = [0; +\infty)$.

2) Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Предположим, что $\sqrt{x_1} \geqslant \sqrt{x_2}$. Тогда $\left(\sqrt{x_1}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{x_2}\right)^2$, т. е. $x_1 \geqslant x_2$, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно, а верно неравенство $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Итак, из $0 \leqslant x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, а это и означает, что функция возрастает на луче $[0; +\infty)$.

3) Ясно, что функция ограничена снизу, поскольку для любого $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $\sqrt{x} \geqslant 0$. Докажем, что функция не ограничена сверху. Предположим противное, что она ограничена сверху, т. е. существует положительное число M такое, что для любого $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $\sqrt{x} < M$. Возьмём точку $x_0 = (M + 1)^2$. Тогда $f(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{(M + 1)^2} = M + 1 > M$.

Итак, мы предположили, что для любого $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $\sqrt{x} < M$, и в то же время нашли конкретную точку x_0, в которой это неравенство не выполняется. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно, а потому функция не ограничена сверху.

4) Имеем $f(0) = 0$ и для любого $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $\sqrt{x} \geqslant 0$. Это значит, что $y_{наим} = 0$. А поскольку функция не ограничена сверху, $y_{наиб}$ не существует.

8 Исследование функции $y = |x|$

Графиком функции является объединение двух лучей: $y = x$, $x \geqslant 0$, и $y = -x$, $x \leqslant 0$ (рис. 129).

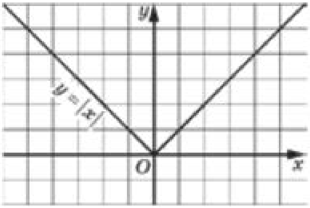


Рис. 129

Свойства функции $y = |x|$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$;
3) ограничена снизу, не ограничена сверху;
4) $y_{наим} = 0$, $y_{наиб}$ не существует;
5) непрерывна;
6) $E(f) = [0; +\infty)$.

9 Исследование функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Графиком функции является парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, где

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = f(x_0),$$

и с ветвями, направленными вверх при $a > 0$ (рис. 130) и вниз — при $a < 0$ (рис. 131). Прямая $x = -\frac{b}{2a}$ является осью симметрии параболы.

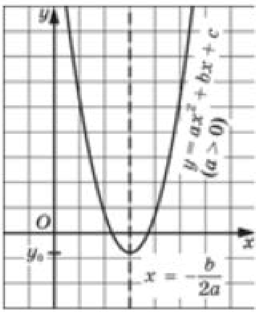


Рис. 130

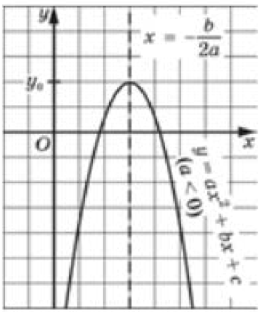


Рис. 131

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ для случая $a > 0$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) убывает на луче $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$, возрастает на луче $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$;
3) ограничена снизу, не ограничена сверху;
4) $y_{наим} = y_0$, $y_{наиб}$ не существует;
5) непрерывна;
6) $E(f) = [y_0; +\infty)$;
7) выпукла вниз.

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ для случая $a < 0$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) возрастает на луче $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$, убывает на луче $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$;
3) не ограничена снизу, ограничена сверху;
4) $y_{наим}$ не существует, $y_{наиб} = y_0$;
5) непрерывна;
6) $E(f) = (-\infty; y_0]$;
7) выпукла вверх.

10 Решение примеров

ПРИМЕР 4

На рис. 132 представлен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определить знаки коэффициентов a, b, c.

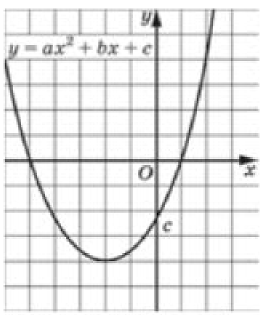


Рис. 132

Решение Ветви параболы направлены вверх, значит, $a > 0$. Парабола пересекает ось y в точке $(0; c)$, значит, $c < 0$. Абсцисса x_0 вершины параболы находится по формуле $x_0 = \frac{-b}{2a}$. Поскольку $a > 0$, $x_0 < 0$, делаем вывод: $b > 0$.

Ответ $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$.

ПРИМЕР 5

Построить график функции $y = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - x - 2}$.

Решение Имеем:

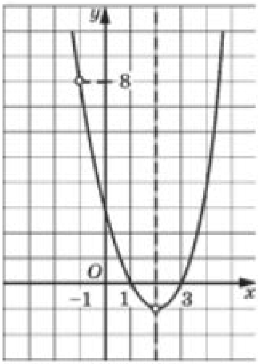


Рис. 133

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1);$$
$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3);$$
$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1).$$

Значит,

$$\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - x - 2} =$$
$$= \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x + 1)} = (x - 1)(x - 3).$$

Таким образом, $y = (x - 1)(x - 3)$, $x \neq 2$, $x \neq -1$. Графиком функции является парабола, пересекающая ось x в точках 1 и 3, с двумя «выколотыми» точками — абсциссы этих точек равны 2 и −1 (рис. 133).

ПРИМЕР 6

График кусочной функции $y = f(x)$, изображённый на рис. 134, состоит из дуги окружности, части гиперболы и отрезка прямой. Требуется прочитать график и перейти от графического задания функции к аналитическому.

Решение Перечислим свойства функции.

1) $D(f) = [-4; 7]$.

2) Функция возрастает на отрезке $[-4; 0]$, убывает на отрезке $[0; 3]$, возрастает на отрезке $[3; 7]$.

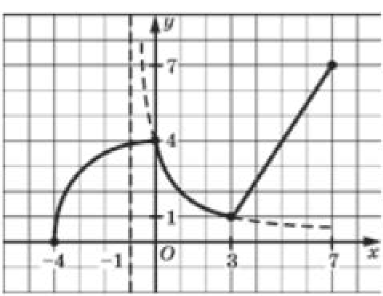


Рис. 134

3) Функция ограничена и снизу, и сверху.

4) $y_{наиб} = 7$ (достигается в точке $x = 7$), $y_{наим} = 0$ (достигается в точке $x = -4$).

5) Функция непрерывна в своей области определения.

6) $E(f) = [0; 7]$.

7) У функции есть две точки экстремума: $x = 0$ — точка максимума, причём $y_{max} = 4$; $x = 3$ — точка минимума, причём $y_{min} = 1$.

Составим аналитическое задание функции. На отрезке $[-4; 0]$ графиком функции является дуга окружности с радиусом, равным 4, с центром в точке 0; уравнение этой окружности $x^2 + y^2 = 4^2$, значит, для части верхней полуокружности получаем $y = \sqrt{16 - x^2}$.

На отрезке [0; 3] имеем график обратной пропорциональности с коэффициентом 4, сдвинутый влево по оси x на 1. Значит, на этом промежутке $y = \frac{4}{x + 1}$.

Наконец, на отрезке [3; 7] дана часть графика линейной функции $y = kx + m$, причём эта прямая проходит через точки (3; 1) и (7; 7), а потому коэффициенты k и m можно найти, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = 3k + m, \\ 7 = 7k + m. \end{cases}$$

Получим $k = 1{,}5$, $m = -3{,}5$. Значит, $y = 1{,}5x - 3{,}5$ (на отрезке [3; 7]).

Составим теперь аналитическое задание функции, обратив при этом внимание на «стыковые» точки ($x = 0$ и $x = 3$). Они не должны дублироваться в задании функции. Итак,

$$y = \begin{cases} \sqrt{16 - x^2}, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{4}{x + 1}, \text{ если } 0 < x < 3, \\ 1{,}5x - 3{,}5, \text{ если } 3 \leqslant x \leqslant 7. \end{cases}$$

Вопросы для самопроверки

1. Какую функцию называют возрастающей, а какую — убывающей?
2. Как, глядя на график функции, найти промежутки её монотонности? Проиллюстрируйте свой ответ с помощью графика какой-нибудь кусочной функции.
3. Какую функцию называют ограниченной снизу, а какую — ограниченной сверху?
4. Как, глядя на график функции, установить, является ли она:
   а) ограниченной снизу;
   б) ограниченной сверху;
   в) ограниченной?
5. Дайте определение наименьшего (наибольшего) значения функции на некотором промежутке из области определения функции.
6. Известно, что у функции есть наименьшее значение. Является ли она ограниченной снизу? сверху?

7. Известно, что у функции есть наибольшее значение. Является ли она ограниченной снизу? сверху?
8. Приведите пример функции, заданной графически, ограниченной снизу на некотором промежутке и достигающей на этом промежутке своего наименьшего значения.
9. Приведите пример функции, заданной графически, ограниченной снизу на некотором промежутке и не имеющей на этом промежутке наименьшего значения.
10. Приведите пример функции, заданной графически, ограниченной сверху на некотором промежутке и достигающей на этом промежутке своего наибольшего значения.
11. Приведите пример функции, заданной графически, ограниченной сверху на некотором промежутке и не имеющей на этом промежутке наибольшего значения.
12. Приведите пример аналитически заданной функции, непрерывной на некотором промежутке и такой, что:
    а) у неё существуют на этом промежутке и наименьшее, и наибольшее значения;
    б) у неё нет на этом промежутке ни наименьшего, ни наибольшего значения;
    в) у неё на этом промежутке есть наименьшее, но нет наибольшего значения;
    г) у неё на этом промежутке есть наибольшее, но нет наименьшего значения.
13. Что называют окрестностью точки a на числовой прямой? Укажите окрестность точки 3 радиусом 0,1.
14. Что такое точка максимума функции $y = f(x)$? Что такое точка минимума функции $y = f(x)$?
15. Задайте графически кусочную функцию $y = f(x)$, имеющую максимум в точке $x = 0$ и минимум в точке $x = 2$.
16. Какую функцию называют выпуклой вниз; выпуклой вверх? Приведите пример функции, выпуклой вниз; выпуклой вверх.

§ 18 ЧЁТНЫЕ И НЕЧЁТНЫЕ ФУНКЦИИ

В предыдущем параграфе мы говорили только о тех свойствах функций, которые в той или иной степени вам были уже известны из курса алгебры 8-го класса. Запас свойств функций будет постепенно пополняться. О двух новых свойствах пойдёт речь в настоящем параграфе.

1 Определение чётной и нечётной функции

Определение 1

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют **чётной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = f(x).$$

Определение 2

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют **нечётной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

чётная функция
нечётная функция

ПРИМЕР 1

Доказать, что $y = x^4$ — чётная функция.

Решение Здесь $f(x) = x^4$, $f(-x) = (-x)^4 = x^4$. Значит, для любого значения x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. функция является чётной.

Аналогично можно доказать, что функции $y = x^2$, $y = x^6$, $y = x^8$ также являются чётными.

ПРИМЕР 2

Доказать, что $y = x^3$ — нечётная функция.

Решение Здесь $f(x) = x^3$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$. Значит, для любого значения x выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. функция является нечётной.

Аналогично можно доказать, что функции $y = x$, $y = x^5$, $y = x^7$ также являются нечётными.

Мы заметили, что $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ — нечётные функции, $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ — чётные функции. И вообще для любой функции вида $y = x^n$, где n — натуральное число, можно сделать вывод:

если n — нечётное число, то функция $y = x^n$ — нечётная; если n — чётное число, то функция $y = x^n$ — чётная.

Существуют функции, которые не являются ни чётными, ни нечётными. Такова, например, функция $y = 2x + 3$. В самом деле, $f(1) = 5$, а $f(-1) = 1$, т. е. $f(-1) \neq f(1)$ и $f(-1) \neq -f(1)$. Значит, не выполняется ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$.

Итак, функция может быть чётной, нечётной, а также — ни той ни другой.

2 Исследование функций на чётность

Изучение вопроса, является заданная функция чётной или нечётной, обычно называют *исследованием функции на чётность*.

В определениях 1 и 2 речь идёт о значениях функции в точках x и $-x$. Тем самым предполагается, что функция определена и в точке x, и в точке $-x$. Это значит, что точки x и $-x$ принадлежат области определения функции. Если числовое множество X вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент $-x$, то такое множество называют *симметричным множеством*.

симметричное множество

Скажем, $(-2; 2)$, $[-5; 5]$, $(-\infty; +\infty)$ — симметричные множества, в то время как $[0; +\infty)$, $(-2; 3)$, $[-5; 6)$ — несимметричные множества.

Если функция $y = f(x)$ — чётная или нечётная, то её область определения $D(f)$ — симметричное множество. Если же $D(f)$ — несимметричное множество, то функция $y = f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной.

Учитывая сказанное выше, рекомендуем при исследовании функции на чётность использовать следующий алгоритм.

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ $y = f(x)$, $x \in X$, НА ЧЁТНОСТЬ

1. Установить, симметрична ли область определения функции. Если нет, то объявить, что функция не является ни чётной, ни нечётной. Если да, то перейти ко второму шагу алгоритма.
2. Найти $f(-x)$.
3. Сравнить $f(-x)$ и $f(x)$:
   а) если $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in X$, то функция чётная;
   б) если $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in X$, то функция нечётная;
   в) если хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq f(x)$ и хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни чётной, ни нечётной.

ПРИМЕР 3

Исследовать на чётность функцию:

а) $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$; б) $y = x^5 - \frac{3}{x^3}$; в) $y = \frac{x-4}{x^2-9}$; г) $y = \sqrt{x-3}$.

Решение а) $y = f(x)$, где $f(x) = x^4 + \frac{2}{x^6}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 0. Следовательно, $D(f)$ — симметричное множество.

2) $f(-x) = (-x)^4 + \frac{2}{(-x)^6} = x^4 + \frac{2}{x^6}$.

3) Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Таким образом, $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$ — чётная функция.

б) $y = f(x)$, где $f(x) = x^5 - x^5 - \frac{3}{x^3}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 0. Следовательно, $D(f)$ — симметричное множество.

2) $f(-x) = (-x)^5 - \frac{3}{-x^3} = -x^5 - \frac{3}{-x^3} = -\left(x^5 - \frac{3}{x^3}\right)$.

3) Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Таким образом, $y = x^5 - x^5 - \frac{3}{x^3}$ — нечётная функция.

в) $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{x-4}{x^2-9}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме 3 и –3. Значит, область определения функции — числовая прямая, из которой удалены две точки: 3 и –3. Это симметричное множество.

2) $f(-x) = \frac{(-x)-4}{(-x)^2-9} = -\frac{x+4}{x^2-9}$.

3) Сравнив $f(-x)$ и $f(x)$, замечаем, что, вероятно, не выполняются ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$. Чтобы в этом убедиться, возьмём конкретное значение x, например $x = 4$; имеем: $f(4) = 0$, а $f(-4) = -\frac{8}{7}$, т. е. $f(-4) \neq f(4)$ и $f(-4) \neq -f(4)$.

Таким образом, функция не является ни чётной, ни нечётной.

г) Функция определена на луче $[3; +\infty)$. Этот луч — несимметричное множество, значит, функция ни чётная, ни нечётная.

ПРИМЕР 4

Исследовать на чётность функцию:

а) $y = |x|$, $x \in [-2; 2]$; в) $y = x^3$, $x \in (-5; 5)$;

б) $y = |x|$, $x \in [-3; 3)$; г) $y = x^3$, $x \in (-5; 5]$.

Решение а) $D(f) = [-2;\ 2]$ — симметричное множество, и для всех значений x выполняется равенство $|-x| = |x|$. Значит, заданная функция чётная.

б) $D(f) = [-3;\ 3)$ — несимметричное множество. В самом деле, точка -3 принадлежит полуинтервалу $[-3;\ 3)$, а противоположная точка 3 не принадлежит этому полуинтервалу. Значит, функция не является ни чётной, ни нечётной.

в) $D(f) = (-5;\ 5)$ — симметричное множество, и $(-x)^3 = -x^3$ для всех значений x из $D(f)$. Значит, заданная функция нечётная.

г) Функция задана на полуинтервале, который не является симметричным множеством. Значит, функция ни чётная, ни нечётная.

3 Геометрический смысл чётности и нечётности функции

Теперь обсудим геометрический смысл свойства чётности и свойства нечётности функции.

Пусть $y = f(x)$ — чётная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in D(f)$. Рассмотрим две точки графика функции: $A(x;\ f(x))$ и $B(-x;\ f(-x))$. Так как $f(-x) = f(x)$, то у точек A и B абсциссы являются противоположными числами, а ординаты одинаковы, т. е. эти точки симметричны относительно оси y (рис. 135). Таким образом, для каждой точки A графика чётной функции $y = f(x)$ существует симметричная ей относительно оси y точка B того же графика.

ТЕОРЕМА 1

График чётной функции симметричен относительно оси y.

Пусть $y = f(x)$ — нечётная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$. Рассмотрим две точки графика функции: $A(x;\ f(x))$ и $B(-x;\ f(-x))$. Так как $f(-x) = -f(x)$, то у точек A и B и абсциссы, и ординаты являются противоположными числами, т. е. эти точки симметричны относительно начала координат (рис. 136). Таким образом,

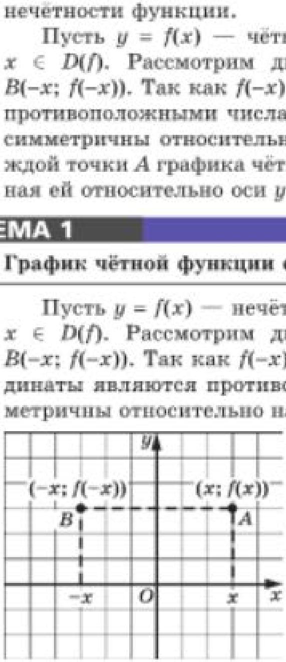


Рис. 135

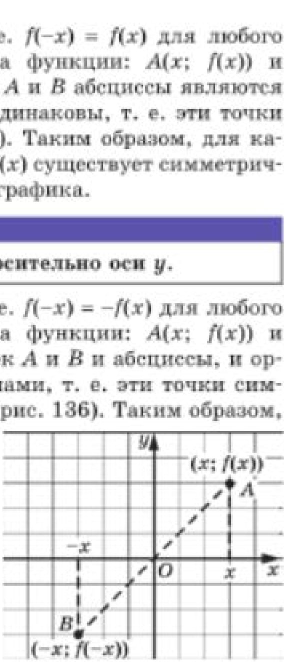


Рис. 136

для каждой точки A графика нечётной функции $y = f(x)$ существует симметричная ей относительно начала координат точка B того же графика.

ТЕОРЕМА 2

График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Верны и обратные утверждения.

ТЕОРЕМА 3

Если график функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси ординат, то $y = f(x)$ — чётная функция.

В самом деле, симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно оси y означает, что для любого значения x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — чётная функция.

ТЕОРЕМА 4

Если график функции $y = f(x)$ симметричен относительно начала координат, то $y = f(x)$ — нечётная функция.

Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно начала координат означает, что для любого значения x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — нечётная функция.

ПРИМЕР 5

Исследовать на чётность функцию $y = \sqrt{9 - x^2}$.

Решение *Первый способ.* Будем действовать по определению:

$$f(-x) = \sqrt{9 - (-x)^2} = \sqrt{9 - x^2} = f(x).$$

Значит, для любого значения x из $D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. функция является чётной.

Второй способ. График функции — полуокружность с центром в начале координат и радиусом 3 (см. рис. 113, с. 135), она симметрична относительно оси y. Значит, $y = \sqrt{9 - x^2}$ — чётная функция.

ПРИМЕР 6

Доказать, что функцию $y = f(x)$, $x \in X$, где X — симметричное множество, можно представить в виде суммы чётной и нечётной функции.

Решение Справедливо тождество $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Введём обозначения: $\frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x)$, $\frac{f(x) - f(-x)}{2} = h(x)$. Функция $y = g(x)$, $x \in X$, является чётной, а функция $y = h(x)$, $x \in X$, — нечётной. В самом деле, $g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$, а $h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$. Итак, $f(x) = g(x) + h(x)$, где функция $y = g(x)$ — чётная, а функция $y = h(x)$ — нечётная.

Вопросы для самопроверки

1. Какую функцию называют чётной?
2. Какую функцию называют нечётной?
3. В каком случае числовое множество называют симметричным?
4. Объясните, почему является или не является симметричным множество:
   а) $(-3; 3)$; в) $[-1; 2]$; д) $\{-1, 2, 3, -2, -3, 1\}$.
   б) $(-2; 2]$; г) $(-\infty; +\infty)$;
5. Может ли быть чётной или нечётной функция $y = f(x)$, $x \in [0; +\infty)$?
6. Сформулируйте алгоритм исследования функции на чётность.
7. Каким свойством обладает график чётной функции? График нечётной функции?
8. Как по графику функции установить, что она:
   а) является чётной; б) является нечётной; в) не является ни чётной, ни нечётной?

§ 19 ФУНКЦИИ $y = x^m$ ($m \in Z$), ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

В этом параграфе речь идёт о степенных функциях с целочисленным показателем, т. е. о функциях $y = x^5$, $y = x^8$, $y = x^{-10}$, $y = x^{-7}$ и т. д.

1 Функция $y = x^{2n}$ ($n \in N$)

Простейший случай такой функции мы рассматривали в 7-м классе — это была функция $y = x^2$. Рассмотрим теперь функцию $y = x^4$.

Поскольку это чётная функция, построим сначала ту часть её графика, которая располагается в правой полуплоскости (при $x \geqslant 0$).

Составим таблицу значений:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y	0	$\frac{1}{16}$	1	$\frac{81}{16}$

Отметим точки (0; 0), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{16}\right)$, (1; 1), $\left(\frac{3}{2}; \frac{81}{16}\right)$ на координатной плоскости (рис. 137, *а*); они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 137, *б*). Добавив к построенному графику линию, симметричную построенной относительно оси ординат, получим график функции $y = x^4$ (рис. 138). Он похож на параболу (но параболой его не называют).

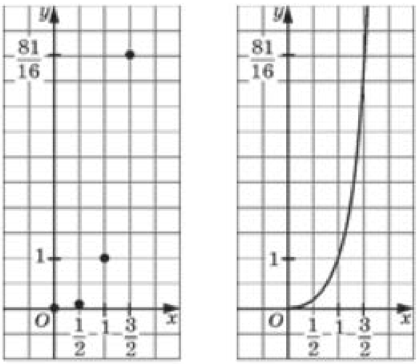


Рис. 137 *а* *б*

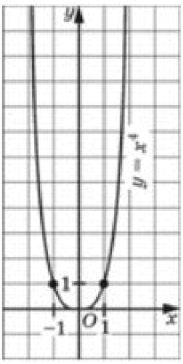


Рис. 138

Прежде чем перечислить свойства функции, заметим, что мы будем придерживаться того же порядка, который использовали в § 17, но с одной поправкой: свойству чётности функции отведём вторую позицию.

Свойства функции $y = x^4$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) чётная функция;
3) убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$;
4) ограничена снизу, не ограничена сверху;
5) $y_{наим} = 0$, $y_{наиб}$ не существует;
6) непрерывна;
7) $E(f) = [0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Эти свойства были прочитаны по графику, что в общем-то в математике не принято. Обычно поступают наоборот: исследуют свойства функции, а потом, опираясь на результаты проведённого исследования, строят её график. А можем ли мы доказать хотя бы некоторые из перечисленных выше свойств? Первое свойство очевидно (поскольку любое число x можно возвести в четвёртую степень). В § 18 доказано второе свойство. Можно доказать и третье: в самом деле, если $x_1 > x_2 \geqslant 0$, то по свойству числовых неравенств $x_1^4 > x_2^4$, а это и означает возрастание функции на луче $[0; +\infty)$ (см. определение 1 из § 17).

Если $x_1 < x_2 \leqslant 0$, то $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$, $(-x_1)^4 > (-x_2)^4$, т. е. $x_1^4 > x_2^4$. Итак, из $x_1 < x_2 \leqslant 0$ следует, что $x_1^4 > x_2^4$, а это и означает убывание функции на луче $(-\infty; 0]$.

Можно доказать четвёртое и пятое свойства. Ограниченность функции снизу очевидна: для любого x справедливо неравенство $x^4 \geqslant 0$. Отсюда, кстати, сразу следует и то, что $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается в точке $x = 0$). Неограниченность функции сверху докажем методом от противного.

Предположим, что функция ограничена сверху, т. е. существует число $M > 0$ такое, что для любого x справедливо неравенство $x^4 < M$. Рассмотрим значение функции в точке $x_0 = M + 1$. Имеем $(M + 1)^4 > M + 1 > M$. Итак, $x_0^4 > M$, а это противоречит предположению о том, что для любого x справедливо неравенство $x^4 < M$. Наше предположение неверно, т. е. функция не является ограниченной сверху. Отсюда, кстати, следует и то, что наибольшего значения у функции нет.

При желании можно пояснить (не доказать) свойство выпуклости функции вниз. Покажем, например, что на отрезке $[0; a]$, где $a > 0$, график функции $y = x^4$ расположен ниже отрезка OA (рис. 139).

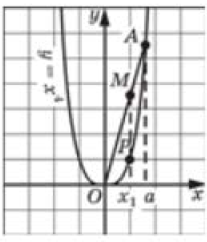


Рис. 139

На интервале $(0; a)$ возьмём произвольную точку x_1 и восставим из этой точки перпендикуляр к оси x. Он пересечёт график функции $y = x^4$ в точке P, а прямую OA — в точке M. Ордината точки P равна x_1^4. А чему равна ордината точки M? Давайте подсчитаем.

Прямая OA проходит через начало координат, значит, её уравнение имеет вид $y = kx$; она также проходит через точку $A(a; a^4)$. Подставив координаты точки A в уравнение $y = kx$, получим $a^4 = ka$. Значит, $k = a^3$, т. е. уравнение прямой OA таково: $y = a^3x$. Теперь ясно, что ордината точки M равна a^3x_1.

Итак, ордината точки P равна x_1^4, а ордината точки M равна a^3x_1. Какое из этих чисел больше? Поскольку $0 < x_1 < a$, то по свойствам числовых неравенств $x_1^3 < a^3$ и, далее, $x_1^3 \cdot x_1 < a^3 \cdot x_1$, т. е. $x_1^4 < a^3x_1$. Последнее неравенство означает, что точка P располагается ниже точки M. Отсюда можно сделать вывод: если провести произвольную прямую OA, то окажется, что график функции $y = x^4$ на отрезке $[0; a]$ лежит ниже соответствующего участка прямой OA.

Любая степенная функция $y = x^{2n}$ ($n \in N$) обладает теми же свойствами, что функция $y = x^4$, а график функции $y = x^{2n}$ при $n = 3, 4, 5, \ldots$ похож на график функции $y = x^4$ (см. рис. 138), только его ветви при больших по модулю значениях x более круто направлены вверх и более прижаты к оси x на отрезке $[-1; 1]$.

Отметим ещё, что линия, служащая графиком функции $y = x^{2n}$, *касается оси x в точке* $(0; 0)$, т. е. одна ветвь кривой плавно переходит в другую, как бы прижимаясь к оси x.

ПРИМЕР 1

Построить график функции $y = (x - 1)^6 - 2$.

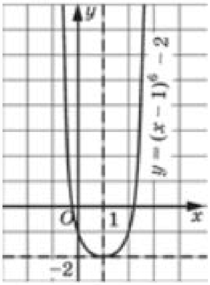


Рис. 140

Решение 1) Перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке $(1; -2)$ (рис. 140).

2) Построим график функции $y = x^6$ в новой системе координат, используя контрольные точки: $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; 1)$ (в новой системе координат). Затем через контрольные точки проведём линию, похожую на ту, которая изображена на рис. 138, — это и будет требуемый график, точнее, его эскиз (см. рис. 139).

2 Функция $y = x^{2n+1}$ ($n \in N$)

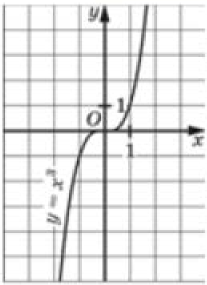


Рис. 141

Простейший случай такой функции — $y = x^3$. Её график при $x \geqslant 0$ в принципе выглядит так же, как и график функции $y = x^4$ при $x \geqslant 0$ (см. рис. 137). Нужно лишь учесть, что новая кривая чуть менее круто идёт вверх и чуть дальше отстоит от оси x на отрезке $[0; 1]$. Поскольку $y = x^3$ — нечётная функция, то, добавив линию, симметричную построенной относительно начала координат, получим график функции $y = x^3$ (рис. 141). Эту кривую называют **кубической параболой**.

Замечание Здесь наблюдается один из редких случаев, когда математики используют не очень удачный термин. Парабола — геометрическая фигура с определёнными свойствами. Линия, изображённая на рис. 141, этими свойствами не обладает, поэтому лучше было бы придумать ей другое название («кубическая парабола» — это что-то вроде «квадратной окружности»).

кубическая парабола

Отметим некоторые геометрические особенности кубической параболы $y = x^3$. У неё есть центр симметрии — точка (0; 0), которая отделяет друг от друга две части кривой; эти симметричные части называют *ветвями кубической параболы.*

Обратите внимание, что ветви кубической параболы переходят одна в другую без излома — плавно, касаясь оси x.

Свойства функции $y = x^3$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) нечётная функция;
3) возрастает;
4) не ограничена ни снизу, ни сверху;
5) нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) выпукла вверх при $x < 0$, выпукла вниз при $x > 0$.

График любой степенной функции $y = x^{2n+1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, похож на график функции $y = x^3$ (см. рис. 141), только чем больше показатель, тем более круто направлены вверх (и соответственно вниз) ветви графика. Отметим ещё, что линия, служащая графиком функции $y = x^{2n+1}$, *касается оси x в точке* (0; 0).

ПРИМЕР 2

Решить уравнение $x^5 = 3 - 2x$.

Решение 1) Рассмотрим две функции: $y = x^5$ и $y = 3 - 2x$.

2) Построим график функции $y = x^5$ (рис. 142).

3) Построим график линейной функции $y = 3 - 2x$. Это прямая линия, проходящая через точки (0; 3) и (1; 1) (см. рис. 142).

4) Построенные графики пересекаются, судя по чертежу, в точке $A(1; 1)$, причём простая проверка показывает, что координаты точки $A(1; 1)$ удовлетворяют уравнению. Значит, уравнение имеет один корень: $x = 1$.

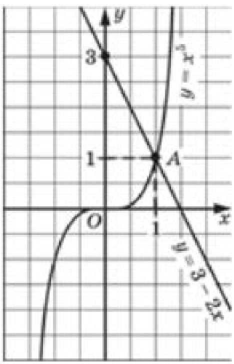


Рис. 142

Ответ 1.

Между прочим, геометрическая модель, представленная на рис. 142, наглядно иллюстрирует следующее утверждение, которое иногда позволяет изящно решать уравнения.

ТЕОРЕМА

Если функция $y = f(x)$ возрастает, а функция $y = g(x)$, убывает и если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет корень, то этот корень — единственный.

Доказательство Пусть x_1 — корень уравнения $f(x) = g(x)$. Возьмём из области определения уравнения любое значение x_2 такое, что $x_2 > x_1$. Функция $y = f(x)$ возрастает, значит, из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $y = g(x)$ убывает, значит, из $x_2 > x_1$ следует $g(x_1) > g(x_2)$. Получилась такая цепочка:

$$f(x_2) > f(x_1) = g(x_1) > g(x_2).$$

Получилось, что $f(x_2) > g(x_2)$, т. е. x_2 не является корнем уравнения.

Аналогично можно доказать, что если взять из области определения уравнения любое значение x_3 такое, что $x_3 < x_1$, то x_3 не является корнем уравнения.

Итак, уравнение имеет единственный корень, что и требовалось доказать.

Вот как, опираясь на это утверждение, мы можем решить уравнение из примера 2 без чертежа:

1) заметим, что при $x = 1$ выполняется равенство

$$1^5 = 3 - 2 \cdot 1,$$

значит, $x = 1$ — корень уравнения (этот корень мы угадали);

2) функция $y = 3 - 2x$ убывает, а функция $y = x^5$ возрастает, значит, корень у заданного уравнения только один и этим корнем является найденное выше значение $x = 1$.

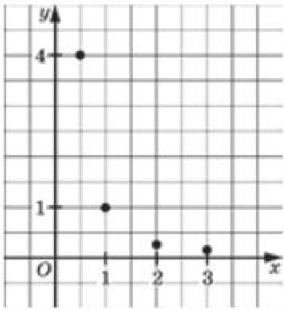
3 Функция $y = x^{-2n}$ $(n \in N)$

Выше мы говорили о степенных функциях с натуральным показателем. Теперь поговорим о степенных функциях с отрицательным целым показателем. Начнём с функции $y = x^{-2}$, или, что то же самое, $y = \frac{1}{x^2}$.

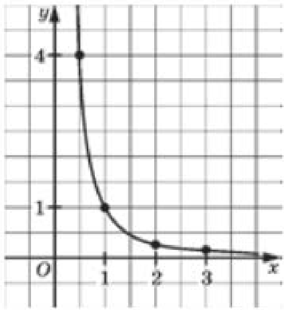
Область её определения — множество всех действительных чисел, кроме 0. Это чётная функция, значит, есть смысл сначала построить её график при $x > 0$. Составим таблицу значений:

x	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3
y	1	9	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

Отметим точки $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, $(1; 1)$, $\left(2; \frac{1}{4}\right)$, $\left(3; \frac{1}{9}\right)$ на координатной плоскости (рис. 143, *а*), они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 143, *б*). Добавив к ней ветвь, симметричную построенной относительно оси ординат, получим график функции $y = \frac{1}{x^2}$, или $y = x^{-2}$ (рис. 144).



а



б

Рис. 143

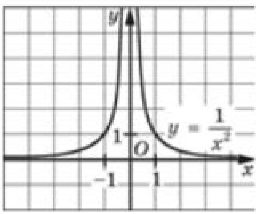


Рис. 144

Свойства функции $y = x^{-2}$:

1) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
2) чётная функция;
3) убывает на открытом луче $(0; +\infty)$, возрастает на открытом луче $(-\infty; 0)$;
4) ограничена снизу, не ограничена сверху;
5) нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;
6) непрерывна при $x < 0$ (т. е. на открытом луче $(-\infty; 0)$) и при $x > 0$ (т. е. на открытом луче $(0; +\infty)$);
7) $E(f) = (0; +\infty)$;
8) выпукла вниз и при $x < 0$, и при $x > 0$.

Докажем для примера убывание функции при $x > 0$.

Пусть $x_1 > x_2 > 0$. По свойствам числовых неравенств: $x_1^2 > x_2^2$, $\frac{1}{x_1^2} < \frac{1}{x_2^2}$, т. е. $x_1^{-2} < x_2^{-2}$. Итак, для функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^{-2}$, мы доказали, что если $x_1 > x_2 > 0$, то $f(x_1) < f(x_2)$, а это и означает убывание функции на открытом луче $(0; +\infty)$.

Можно доказать четвёртое и пятое свойства. Ограниченность функции снизу очевидна: для любого $x \neq 0$ справедливо неравенство $\frac{1}{x^2} > 0$. Неограниченность функции сверху докажем методом от противного.

Предположим, что функция ограничена сверху, т. е. существует число $M > 0$ такое, что для любого x справедливо неравенство $\frac{1}{x^2} < M$. Рассмотрим значение функции в точке $x_0 = \frac{1}{M+1}$. Имеем $f\left(\frac{1}{M+1}\right) = (M+1)^2 > M + 1 > M$. Итак, $\frac{1}{x_0^2} > M$, а это противоречит предположению о том, что для любого x справедливо неравенство $\frac{1}{x^2} < M$. Наше предположение неверно, т. е. функция не является ограниченной сверху. Отсюда, кстати, следует и то, что наибольшего значения у функции нет.

Осталось доказать, что и наименьшего значения у функции нет. Предположим, что оно есть, равно m и достигается в точке $x_0 > 0$. Но в силу убывания функции на $(0; +\infty)$ для $x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, т. е. $f(x) < m$. Значит, m не может быть наименьшим значением функции, $y_{наим}$ не существует.

График любой функции $y = x^{-2n}$ $(n \in N)$ похож на график функции $y = \frac{1}{x^2}$ (см. рис. 144). Отметим, что кривая $y = \frac{1}{x^{2n}}$ *асимптотически приближается к осям координат*. Говорят также, что ось x (т. е. прямая $y = 0$) является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = \frac{1}{x^{2n}}$, а ось y (т. е. прямая $x = 0$) является *вертикальной асимптотой* этого графика.

ПРИМЕР 3

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \frac{1}{x^2}$ на заданном промежутке:

а) $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$; б) $\left[-2; -\frac{1}{3}\right]$; в) $[1; +\infty)$.

Решение Для ответа на поставленный вопрос можно использовать график функции (см. рис. 144), а можно опираться на свойство монотонности. Далее мы будем действовать и так, и так.

а) При $x > 0$ функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{1}{x^2}$, убывает, значит, на заданном промежутке своих наименьшего и наибольшего значений она достигает на концах промежутка, если, разумеется, эти концы принадлежат промежутку. Для отрезка $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ получаем:

$$y_{\text{наим}} = f(3) = \frac{1}{9}, \quad y_{\text{наиб}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$$

б) При $x < 0$ функция возрастает, значит, на заданном промежутке своих наименьшего и наибольшего значений она достигает на концах промежутка, если, разумеется, эти концы принадлежат промежутку. В рассматриваемом случае имеем: $y_{\text{наим}} = f(-2) = \frac{1}{4}$, а $y_{\text{наиб}}$ не существует (правый конец не принадлежит заданному промежутку).

в) С помощью графика функции (см. рис. 144) устанавливаем, что $y_{\text{наим}}$ не существует, а $y_{\text{наиб}} = 1$.

4 Функция $y = x^{-(2n-1)}$ ($n \in N$)

Речь пойдёт о функциях $y = x^{-1}$, $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$ и т. д. Одну такую функцию вы изучили в курсе алгебры 8-го класса — это была функция $y = x^{-1}$, т. е. $y = \frac{1}{x}$. Её график — гипербола (рис. 145). График любой функции $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ похож на гиперболу.

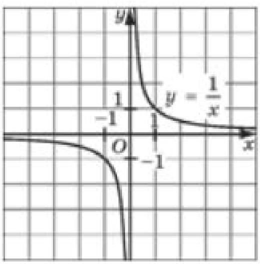


Рис. 145

Свойства функции $y = x^{-(2n-1)}$:

1) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
2) нечётная функция;
3) убывает и на открытом луче $(0; +\infty)$, и на открытом луче $(-\infty; 0)$;
4) не ограничена ни снизу, ни сверху;
5) нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;
6) непрерывна и при $x < 0$, и при $x > 0$;
7) $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
8) выпукла вверх при $x < 0$, выпукла вниз при $x > 0$.

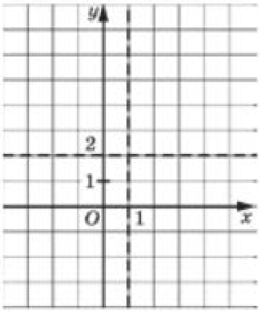
ПРИМЕР 4

Построить график функции $y = (x - 1)^{-3} + 2$.

Решение

1) Перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке (1; 2) (рис. 146, a).

2) Построив линию, служащую графиком функции $y = x^{-3}$ в новой системе координат, в старой системе координат получим требуемый график (рис. 146, *б*).



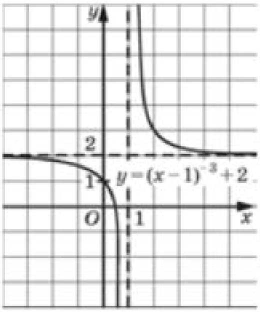


Рис. 146

Подведём итоги. Если $n \in N$, то:

— график функции $y = x^{2n}$ выглядит так, как показано на рис. 147;

— график функции $y = x^{2n+1}$ выглядит так, как показано на рис. 148;

— график функции $y = x^{-2n}$ выглядит так, как показано на рис. 149;

— график функции $y = x^{-(2n-1)}$ выглядит так, как показано на рис. 150.

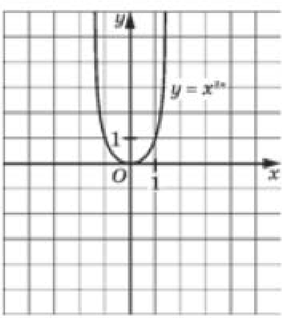


Рис. 147

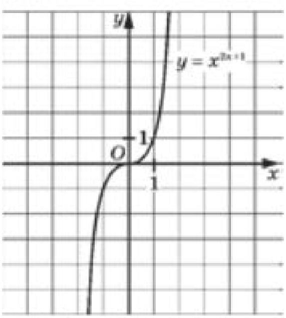


Рис. 148

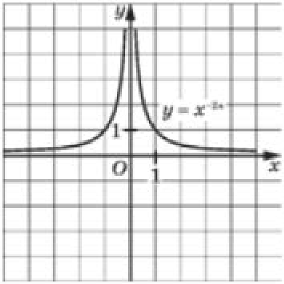


Рис. 149

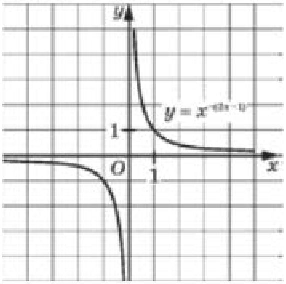


Рис. 150

Вопросы для самопроверки

1. Покажите схематически, как выглядит график функции $y = x^{2n}$, $n \in N$.
2. Покажите схематически, как выглядит график функции $y = x^{2n+1}$, $n \in N$.
3. Обладает ли график функции $y = x^{2n}$, $n \in N$, симметрией? Относительно чего?
4. Является ли функция $y = x^{2n}$, $n \in N$, чётной или нечётной?
5. Обладает ли график функции $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, симметрией? Относительно чего?
6. Является ли функция $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, чётной или нечётной?
7. Какова область значений функции $y = x^{2n}$, $n \in N$?
8. Какова область значений функции $y = x^{2n+1}$, $n \in N$?
9. Какое из утверждений верно:
   а) функция $y = x^{2n}$, $n \in N$, возрастает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$;
   б) функция $y = x^{2n}$, $n \in N$, возрастает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$;
   в) функция $y = x^{2n}$, $n \in N$, убывает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$;
   г) функция $y = x^{2n}$, $n \in N$, убывает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$?
10. Какое из утверждений верно:
    а) функция $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, возрастает при $x > 0$ и убывает при $x < 0$;
    б) функция $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, возрастает при $x > 0$ и возрастает при $x < 0$;
    в) функция $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, убывает при $x > 0$ и убывает при $x < 0$;
    г) функция $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, убывает при $x > 0$ и возрастает при $x < 0$?

11. Какое из утверждений верно:
    а) функция $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, выпукла вверх при $x > 0$ и выпукла вниз при $x < 0$;
    б) функция $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, выпукла вверх при $x > 0$ и выпукла вверх при $x < 0$;
    в) функция $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, выпукла вниз при $x > 0$ и выпукла вверх при $x < 0$;
    г) функция $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, выпукла вниз при $x > 0$ и выпукла вниз при $x < 0$?
12. Покажите схематически, как выглядит график функции $y = x^{-2n}$, $n \in N$.
13. Покажите схематически, как выглядит график функции $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$.
14. Обладает ли график функции $y = x^{-2n}$, $n \in N$, симметрией? Относительно чего?
15. Является ли функция $y = x^{-2n}$, $n \in N$, чётной или нечётной?
16. Обладает ли график функции $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, симметрией? Относительно чего?
17. Является ли функция $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, чётной или нечётной?
18. Какова область значений функции $y = x^{-2n}$, $n \in N$?
19. Какова область значений функции $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$?
20. Что такое асимптота графика функции $y = f(x)$?
21. Запишите уравнения асимптот графика функции $y = x^{-2n}$, $n \in N$.
22. Запишите уравнения асимптот графика функции $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$.
23. Какое из утверждений верно:
    а) функция $y = x^{-2n}$, $n \in N$, возрастает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$;
    б) функция $y = x^{-2n}$, $n \in N$, возрастает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$;
    в) функция $y = x^{-2n}$, $n \in N$, убывает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$;
    г) функция $y = x^{-2n}$, $n \in N$, убывает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$?
24. Какое из утверждений верно:
    а) функция $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, возрастает при $x > 0$ и убывает при $x < 0$;
    б) функция $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, возрастает при $x > 0$ и возрастает при $x < 0$;
    в) функция $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, убывает при $x > 0$ и убывает при $x < 0$;
    г) функция $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, убывает при $x > 0$ и возрастает при $x < 0$?

25. Какое из утверждений верно:
а) функция $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, выпукла вверх при $x > 0$ и выпукла вниз при $x < 0$;
б) функция $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, выпукла вверх при $x > 0$ и выпукла вверх при $x < 0$;
в) функция $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, выпукла вниз при $x > 0$ и выпукла вверх при $x < 0$;
г) функция $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, выпукла вниз при $x > 0$ и выпукла вниз при $x < 0$?

§ 20 ФУНКЦИЯ $y = \sqrt[3]{x}$, ЕЁ СВОЙСТВА И ГРАФИК

1 Определение кубического корня

Определение

Число b называют **кубическим корнем** (или **корнем третьей степени**) **из числа** a, если выполняется равенство $b^3 = a$.

Пишут $\sqrt[3]{a} = b$; a — *подкоренное число*, 3 — *показатель корня*.

Таким образом, равенства $\sqrt[3]{a} = b$; $b^3 = a$ и $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ эквивалентны, т. е. выражают одну и ту же зависимость между действительными числами a и b. Короче это можно записать так: $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$; $\Leftrightarrow$ — *знак эквивалентности*.

Например, $\sqrt[3]{27} = 3$, так как $3^3 = 27$; $\sqrt[3]{1} = 1$, так как $1^3 = 1$; $\sqrt[3]{0} = 0$, так как $0^3 = 0$; $\sqrt[3]{-64} = -4$, так как $(-4)^3 = -64$; $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \frac{3}{2}$, так как $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$.

Кубический корень $\sqrt[3]{a}$ существует для любого числа a. Это утверждение доказывается в курсе высшей математики. Мы будем пользоваться им без доказательства. При извлечении кубического корня сравнительно редко получается рациональное число. Чаще получается иррациональное число, для которого можно найти лишь приближённое значение.

кубический корень

Докажем для примера, что $\sqrt[3]{5}$ — иррациональное число. **Предположим противное**, что $\sqrt[3]{5}$ — рациональное число, т. е. $\sqrt[3]{5} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая обыкновенная дробь. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 5$, т. е. $m^3 = 5n^3$. Последнее равенство означает, что $m^3 \vdots 5$, т. е. натуральное число m^3 делится на 5 без остатка (напомним, что символ $\vdots$ означает «делится на»).

Но это возможно тогда и только тогда, когда $m \vdots 5$, т. е. $m = 5k$, где k — некоторое натуральное число. Подставим выражение $5k$ вместо m в равенство $m^3 = 5n^3$; получим $(5k)^3 = 5n^3$, откуда $n^3 = 25k^3$. Последнее равенство означает, что $n^3 \vdots 25$ и уж тем более $n^3 \vdots 5$. Но тогда и $n \vdots 5$.

Итак, получили, что $m \vdots 5$ и $n \vdots 5$. Отсюда следует, что дробь $\frac{m}{n}$ — сократимая (её числитель и знаменатель можно сократить на 5), а это противоречит условию, согласно которому $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь.

Полученное противоречие означает, что наше предположение о рациональности числа $\sqrt[3]{5}$ неверно, т. е. это число иррациональное.

Корень третьей степени из положительного числа — положительное число, а корень третьей степени из отрицательного числа — отрицательное число. Это следует из того, что при возведении в куб знак числа не меняется. Справедливо тождество

$$\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}.$$

В самом деле, пусть $\sqrt[3]{-x} = b$, а $\sqrt[3]{x} = c$. Тогда $b^3 = -x$, а $c^3 = x$. Отсюда следует, что $b^3 = -c^3$, или $b^3 = (-c)^3$. Из последнего равенства следует, что $b = -c$, т. е. $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.

ПРИМЕР 1

Доказать, что:

а) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$; б) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ $(b \neq 0)$.

Решение а) $\left(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = ab$. Значит, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ — это число, куб которого равен ab. А таким числом является $\sqrt[3]{ab}$. Значит, $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.

б) Доказывается аналогично.

2 Функция $y = \sqrt[3]{x}$

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in [0; +\infty)$ отметим некоторые её свойства и построим график. Введём привычное обозначение: $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

1) $D(f) = [0; +\infty)$.

2) $y = \sqrt[3]{x}$ — возрастающая функция на луче $[0; +\infty)$.

В самом деле, пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$; нам надо доказать, что тогда и $\sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2}$. Предположим противное, что $\sqrt[3]{x_1} \geqslant \sqrt[3]{x_2}$. Тогда по свойству числовых неравенств $\left(\sqrt[3]{x_1}\right)^3 \geqslant \left(\sqrt[3]{x_2}\right)^3$, т. е. $x_1 \geqslant x_2$, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно, а потому $\sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2}$.

3) Функция $y = \sqrt[3]{x}$ не ограничена сверху на луче $[0; +\infty)$. Предположим противное: существует число $M > 0$ такое, что для любого $x \in [0; +\infty)$ выполняется неравенство $\sqrt[3]{x} < M$. Возьмём на луче $[0; +\infty)$ точку $x_0 = (M + 1)^3$. Тогда $f(x_0)$ $f(x_0) = \sqrt[3]{(M + 1)^3} = M + 1 > M$. Итак, мы нашли точку x_0, в которой выполняется неравенство $f(x_0) > M$. Это противоречит предположению о том, что для любого $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $f(x) < M$. Значит, наше предположение неверно, т. е. функция не ограничена сверху. В то же время она ограничена снизу: на луче $[0; +\infty)$ выполняется неравенство $\sqrt[3]{x} \geqslant 0$.

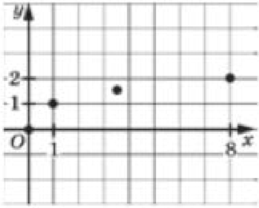
4) Непосредственным следствием предыдущего свойства является следующее свойство: $y_{наим} = 0$, $y_{наиб}$ не существует.

Построим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ на луче $[0; +\infty)$. Составим таблицу значений.

x	0	1	8	$3\frac{3}{8}$
y	0	1	2	1,5

Построим точки (0; 0), (1; 1), (8; 2), $\left(3\frac{3}{8}; 1{,}5\right)$ на координатной плоскости (рис. 151, *а*); они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 151, *б*). Мы учитываем при этом и то, что функция возрастает, и то, что она не ограничена сверху.

Поскольку, как доказано выше, справедливо тождество $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$, функция $y = \sqrt[3]{x}$ является нечётной. Воспользовавшись этим, добавим к графику, построенному на рис. 151, *б*, ветвь, симметричную ему относительно начала координат. Тогда получим



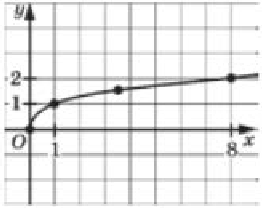


Рис. 151 *а* *б*

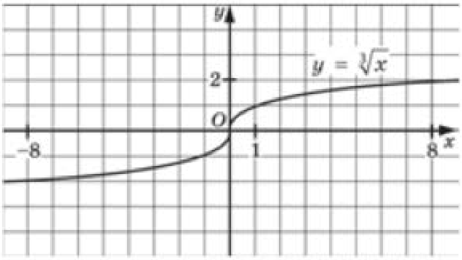


Рис. 152

весь график функции $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 152). Перечислим свойства этой функции.

Свойства функции $y = \sqrt[3]{x}$:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) $y = \sqrt[3]{x}$ — нечётная функция;
3) функция $y = \sqrt[3]{x}$ возрастает на всей числовой прямой;
4) функция $y = \sqrt[3]{x}$ не ограничена ни снизу, ни сверху;
5) у функции нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;
6) функция непрерывна на всей числовой прямой;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) функция выпукла вниз на $(-\infty; 0]$ и выпукла вверх на $[0; +\infty)$.

Обратите внимание: в точке $x = 0$ график *касается* оси y.

3 Решение примеров

ПРИМЕР 2

Решить уравнение $\sqrt[3]{x} = 10 - x$.

Решение Замечаем, что $x = 8$ — корень уравнения. Так как $y = \sqrt[3]{x}$ — возрастающая функция, а $y = 10 - x$ — убывающая функция, то $x = 8$ — единственный корень заданного уравнения (геометрическая иллюстрация представлена на рис. 153).

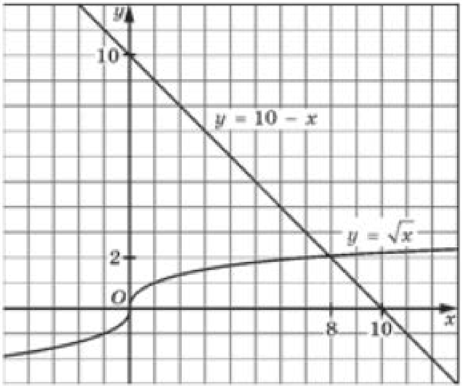


Рис. 153

Ответ 8.

ПРИМЕР 3

Построить график функции $y = \sqrt[3]{x + 1} - 2$.

Решение Перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; -2)$ (пунктирные прямые $x = -1$, $y = -2$ на рис. 154) и «привяжем» функцию $y = \sqrt[3]{x}$ к новой системе координат. Получим требуемый график (см. рис. 154).

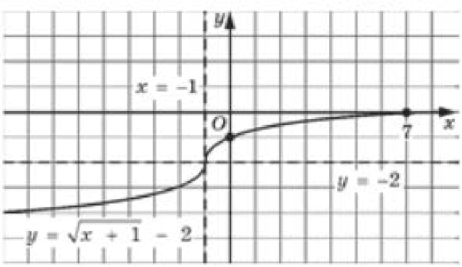


Рис. 154

ПРИМЕР 4

Построить и прочитать график функции

$$y = \begin{cases} -2 - x, \text{ если } x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, \text{ если } x \geqslant -1. \end{cases}$$

Решение Построим прямую $y = -2 - x$ и возьмём её часть при $x < -1$ (рис. 155). Построим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ и возьмём его часть при $x \geqslant -1$ (рис. 156). А теперь обе построенные линии расположим в одной системе координат (рис. 157) — это и будет требуемый график.

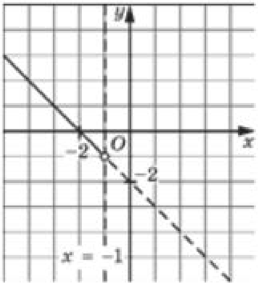


Рис. 155

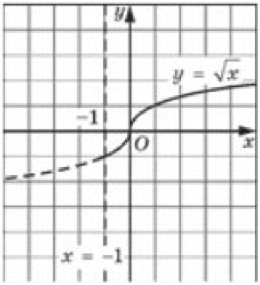


Рис. 156

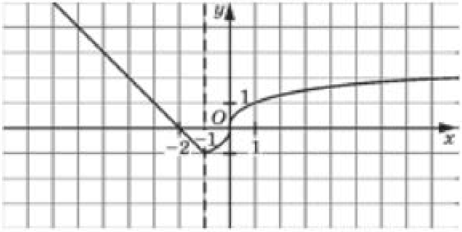


Рис. 157

Прочитаем построенный график:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) функция не является ни чётной, ни нечётной;
3) убывает на $(-\infty; -1]$, возрастает на $[-1; +\infty)$;
4) функция ограничена снизу и не ограничена сверху;
5) у функции нет наибольшего значения, а $y_{\text{наим}} = -1$;
6) функция непрерывна на всей числовой прямой;
7) $E(f) = [-1; +\infty)$.

Завершая эту главу, упомянем ещё одно свойство функции, которое иногда бывает полезным при исследовании функции, при построении её графика, при решении неравенств графическим методом. Речь идёт о *промежутках знакопостоянства функции*, т. е. о тех промежутках оси x, на которых функция сохраняет постоянный знак. Так, для функции, график которой изображён на рис. 157, промежутками знакопостоянства будут: открытый луч $(-\infty; -2)$ — здесь функция принимает положительные значения; $(-2; 0)$ — на этом интервале функция принимает отрицательные значения; $(0; +\infty)$ — на этом открытом луче функция принимает положительные значения.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют кубическим корнем (или корнем третьей степени) из числа a?
2. Объясните, почему равенство $\sqrt[3]{64} = 4$ является верным, а равенство $\sqrt[3]{9} = 2$ — неверным.
3. Какова область определения функции $y = \sqrt[3]{x}$?
4. Какова область значений функции $y = \sqrt[3]{x}$?
5. Является ли функция $y = \sqrt[3]{x}$ возрастающей; убывающей; монотонной; немонотонной?
6. Какое из утверждений верно:
   а) функция $y = \sqrt[3]{x}$ возрастает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$;
   б) функция $y = \sqrt[3]{x}$ возрастает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$;
   в) функция $y = \sqrt[3]{x}$ убывает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$;
   г) функция $y = \sqrt[3]{x}$ убывает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$?
7. Какое из утверждений верно:
   а) функция $y = \sqrt[3]{x}$ выпукла вверх при $x \geqslant 0$ и выпукла вниз при $x \leqslant 0$;
   б) функция $y = \sqrt[3]{x}$ выпукла вверх при $x \geqslant 0$ и выпукла вверх при $x \leqslant 0$;
   в) функция $y = \sqrt[3]{x}$ выпукла вниз при $x \geqslant 0$ и выпукла вверх при $x \leqslant 0$;
   г) функция $y = \sqrt[3]{x}$ выпукла вниз при $x \geqslant 0$ и выпукла вниз при $x \leqslant 0$?
8. Придумайте кусочную функцию, график которой состоит из части графика функции $y = \sqrt[3]{x}$ и луча графика линейной функции. Задайте её графически и аналитически.

Основные результаты

- В этой главе мы навели относительный порядок в наших представлениях о функциях, их свойствах и графиках, которые складывались постепенно в ходе изучения алгебры в 7-м и 8-м классах.
- Мы сформулировали определения следующих *понятий*:
  — функция, область определения, область значений функции;
  — монотонность (возрастание и убывание) функции;
  — ограниченность функции снизу, сверху;
  — наименьшее и наибольшее значения функции;
  — чётность и нечётность функции;
  — кубический корень.
- Вы познакомились с различными *способами задания функции*:
  — аналитическим, графическим, табличным, словесным.
- Вы узнали новые *математические термины*:
  — чётная функция, нечётная функция;
  — степенная функция.
- Мы ввели новые *обозначения* (новые символы математического языка): $D(f)$ для области определения функции $y = f(x)$; $E(f)$ для области значений функции $y = f(x)$.
- Вы узнали новые *математические модели* — функции $y = x^n$, $y = x^{-n}$, где n — натуральное число, и функцию $y = \sqrt[3]{x}$; рассмотрели их свойства и графики.
- *Мы обсудили геометрические особенности графика*:
  — возрастающей функции, убывающей функции;
  — чётной функции, нечётной функции;
  — ограниченной снизу, ограниченной сверху функции;
  — непрерывной функции;
  — выпуклой вверх, выпуклой вниз функции.
- Вы научились исследовать функции на монотонность, ограниченность, чётность, находить точки экстремума.
- Вы научились строить графики функций $y = x^n$, $y = x^{-n}$ $(n \in N)$, $y = \sqrt[3]{x}$, описывать их свойства.

Темы исследовательских работ

1. Словесный способ задания функций. Функции $y = [x]$, $y = \{x\}$.
2. Графики функций, аналитическое задание которых содержит знаки модуля.
3. Функционально-графические методы решения уравнений.

4 ГЛАВА ПРОГРЕССИИ

§ 21 ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1 Определение числовой последовательности

Рассмотрим четыре функции:

1) $y = x^2$, $x \in [0; 1]$;
2) $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$;
3) $y = x^2$;
4) $y = x^2$, $x \in N$.

Они заданы одной и той же формулой $y = x^2$, но области определения функций различны. В первом случае $D(f) = [0; 1]$. Во втором — $D(f) = [0; +\infty)$. В третьем область определения функции не указана. Согласно действующей в математике договорённости подразумевается, что в этом случае $D(f)$ совпадает с областью определения выражения, задающего функцию, т. е. с областью определения выражения x^2: $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Наконец, в четвёртом случае областью определения функции является множество N натуральных чисел: $D(f) = N$. Графики этих функций изображены на рис. 158—161.

Согласитесь, что первые три функции более привычны для вас, нежели четвёртая. На протяжении трёх лет изучения алгебры в школе мы рассматривали самые разные функции, но областью их определения практически всегда был какой-либо промежуток или объединение нескольких промежутков, а график функции состоял из одной или нескольких сплошных линий. А как обстоит дело с четвёртой функцией? Её область определения — множество натуральных чисел — состоит из отдельных точек (математики говорят: «из изолированных точек»), соответственно, и график функции состоит из отдельных точек. Возникает вопрос, а нужно ли изучать функции, заданные на множестве натуральных чисел, встречаются ли они в

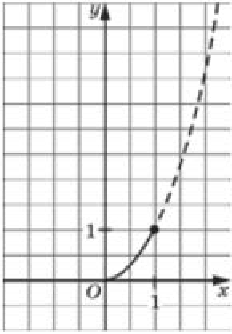


Рис. 158

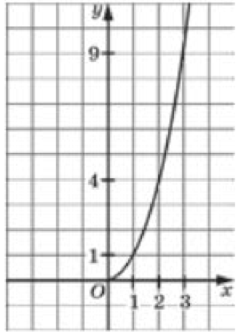


Рис. 159

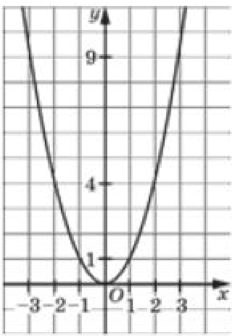


Рис. 160

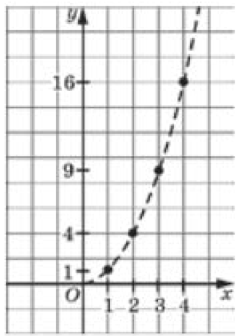


Рис. 161

реальной жизни; точнее, встречаются ли ситуации, математические модели которых представляют собой функции с областью определения N?

Вспомним задачу из учебника «Алгебра–7»: «На складе имеется 500 т угля, каждый день подвозят по 30 т. Сколько угля будет на складе через день, 2 дня, 3 дня, 15 дней и т. д.?»

Если за x принять число дней, а за y — количество угля (в тоннах), то математической моделью ситуации будет линейная функция, заданная на множестве N натуральных чисел:

$$y = 500 + 30x,\ x \in N.$$

Ещё пример. На банковский счёт положили a р. Банк ежемесячно на сумму, находящуюся на счету, начисляет $p\%$. Сколько денег на счету станет через месяц, 2 месяца, 12 месяцев и т. д.?

Оказывается, математической моделью этой ситуации служит функция $y = a \cdot 2^{kx}$, $x \in N$; здесь y — сумма вклада (в рублях), x — число полных месяцев, прошедших с момента открытия счёта, а

k — некоторый положительный коэффициент, связанный с банковским процентом p (обычно используют приближённую формулу $k = 0{,}014p$).

Ответ на поставленный вопрос мы получили: функции, заданные на множестве натуральных чисел ($y = f(x)$, $x \in N$), нужно изучать.

А зачем писать $y = f(x)$, $x \in N$, не проще ли в таких случаях писать $y = f(n)$, договорившись раз и навсегда, что аргумент n — натуральное число ($n \in N$)? Так и сделаем. В рассмотренных выше примерах:

вместо $y = x^2$, $x \in N$, напишем $y = n^2$;
вместо $y = 500 + 30x$, $x \in N$, напишем $y = 500 + 30n$;
вместо $y = a \cdot 2^{kx}$, $x \in N$, напишем $y = a \cdot 2^{kn}$.

На практике оказалось удобным вместо $f(1)$ писать y_1, вместо $f(2)$ — y_2, вместо $f(3)$ — y_3, вместо $f(n)$ — y_n. Значения функции $y = f(n)$ можно записать *последовательно* одно за другим: $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ..., $f(n)$, ... или, в соответствии с указанной выше договорённостью, $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$. Например, для функции $y = n^2$ получаем:

$$y_1 = 1^2 = 1;$$
$$y_2 = 2^2 = 4;$$
$$y_3 = 3^2 = 9;$$
$$y_4 = 4^2 = 16 \text{ и т. д.}$$

Полученные значения запишем *последовательно* одно за другим:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \dots,\ n^2,\ \dots .$$

Число 1 в этой записи находится на первом месте, 4 — на втором, 9 — на третьем, 16 — на четвёртом, а n^2 — на n-м месте.

Подчеркнём ещё раз, что следующие записи:

1) $y = f(x)$, $x \in N$;
2) $y = f(n)$;
3) $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$ или $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ — различны по форме, но одинаковы по содержанию.

Определение

Функцию вида $y = f(x)$, $x \in N$, называют **функцией натурального аргумента** или **числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$.

а:я

числовая последовательность

Значения y_1, y_2, y_3 (и т. д.) называют *первым*, *вторым*, *третьим* (и т. д.) *членами последовательности* соответственно. В символе y_n число n называют *индексом*, он указывает порядковый номер того или иного члена последовательности (в записи $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$). Иногда для обозначения последовательности используется запись (y_n).

Многоточия в обозначении последовательности (имеется в виду запись $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$) означают, что правее y_3 располагаются дальнейшие члены последовательности (y_4, y_5, y_6 и т. д.), рядом с y_n находятся (а в случае необходимости и записываются) y_{n-1} (слева) и y_{n+1} (справа). Члену y_{n-1} предшествует y_{n-2}, а за y_{n+1} следует y_{n+2} и т. д.

Для обозначения членов последовательности используются различные буквы, например: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, или $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, или $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$.

Как известно, функция может быть задана различными способами: аналитически, графически, словесно и т. д. (см. § 16). Последовательность как частный случай функции тоже можно задавать различными способами, среди которых особенно важны три: *аналитический*, *словесный* и *рекуррентный*.

2 Словесное задание последовательности

Суть этого способа задания последовательности поясним на примере. Известно, что $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$. С этим иррациональным числом можно связать две последовательности:

1) последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ по недостатку 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, …;

2) последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ по избытку 2, 1,5, 1,42, 1,415, 1,4143, 1,41422, … .

В обоих случаях правило составления последовательности описано словами (не формулой).

Ещё один пример — последовательность простых чисел:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ \ldots .$$

Последовательность задана словесно.

3 Аналитическое задание числовой последовательности

Говорят, что последовательность задана *аналитически*, если указана формула её n-го члена $y_n = f(n)$. Например, $y_n = n^2$ — это аналитическое задание последовательности $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$, о которой шла речь выше. Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером. Если, например, $n = 9$, то $y_9 = 9^2$, т. е. $y_9 = 81$; если $n = 27$, то $y_{27} = 27^2$, т. е. $y_{27} = 729$.

А если взят определённый член последовательности, то можно указать его номер. Например, если $y_n = 625$, то из уравнения $n^2 = 625$ находим, что $n = 25$. Это значит, что 25-й член заданной последовательности равен 625.

Для последовательности $y_n = (-1)^n\frac{1}{n}$ находим:

$$y_1 = (-1)^1 \cdot \frac{1}{1} = -1;$$

$$y_2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$y_3 = (-1)^3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3};$$

$$y_4 = (-1)^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

и т. д.

Таким образом, получаем последовательность

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, (-1)^n\frac{1}{n}, \ldots .$$

Заметим, что эту же последовательность можно было задать аналитически в виде кусочной функции $y = f(n)$, где

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{1}{n}, \text{ если } n \text{ — нечётное натуральное число,} \\ \frac{1}{n}, \text{ если } n \text{ — чётное натуральное число.} \end{cases}$$

Как и в предыдущем примере, нетрудно найти член последовательности с заданным номером. Например, $y_{37} = -\frac{1}{37}$, а $y_{48} = \frac{1}{48}$.

стационарная последовательность

Если $y_n = C$, то речь идёт о последовательности $C, C, C, \ldots, C, \ldots$, которую называют *стационарной*.

Как видите, зная формулу n-го члена последовательности, нетрудно найти её первый, второй, третий члены и вообще любой член с указанным номером. Гораздо труднее решать обратную задачу: угадывать возможную формулу n-го члена последовательности, для которой указано несколько первых членов.

ПРИМЕР 1

Найти одну из возможных формул n-го члена последовательности:

а) 1, 3, 5, 7, 9, ...;

б) 4, 8, 12, 16, 20, ...;

в) 7, 11, 15, 19, 23, ...;

г) $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \ldots$.

Решение а) Приведена последовательность нечётных натуральных чисел. Аналитически она задаётся формулой $y_n = 2n - 1$.

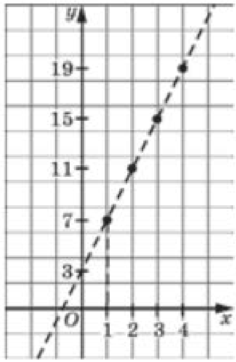


Рис. 162

б) $y_n = 4n$ (последовательность натуральных чисел, кратных 4).

в) Каждый член этой последовательности на 3 больше соответствующего члена последовательности из пункта б), а значит, $y_n = 4n + 3$. На рис. 162 изображён график последовательности $y_n = 4n + 3$, т. е. график функции $y = 4x + 3$, $x \in N$. Он состоит из точек прямой $y = 4x + 3$ с абсциссами $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ и т. д.

г) Если записать первый член 2 в виде $\frac{2}{1}$, то можно догадаться, что $y_n = \frac{n+1}{n^2}$.

ПРИМЕР 2

Дана последовательность $y_n = 24n + 36 - 5n^2$.

а) Сколько в ней положительных членов?

б) Найти наибольший член последовательности.

в) Есть ли в последовательности наименьший член?

Решение Здесь удобно перейти к «функциональному» определению последовательности: рассмотрим функцию $y = 24x + 36 - 5x^2$ при $x \in N$.

а) Чтобы ответить на поставленный вопрос, решим неравенство $24x + 36 - 5x^2 > 0$.

Из уравнения $24x + 36 - 5x^2 = 0$ находим: $x_1 = 6$, $x_2 = -\frac{6}{5}$. Уравнение оси симметрии параболы $y = -5x^2 + 24x + 36$ можно найти по формуле $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, получим $x = 2{,}4$. На рис. 163 схематически (с разными масштабами по осям) изображён график функции $y = -5x^2 + 24x + 36$.

Неравенство

$$24x + 36 - 5x^2 > 0$$

выполняется при $-\frac{6}{5} < x < 6$. В этом интервале содержится пять натуральных чисел (1, 2, 3, 4, 5); соответственно в заданной последова-

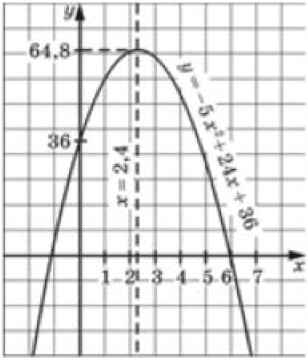


Рис. 163

тельности пять положительных членов: y_1, y_2, y_3, y_4, y_5.

б) График последовательности состоит из точек параболы с абсциссами 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Среди них можно найти точку с наибольшей ординатой. Ясно, что это будет точка, наиболее близко расположенная к оси параболы. Уравнение оси, напомним, $x = 2,4$, ближайшая точка последовательности имеет абсциссу $x = 2$. Значит, наибольшим членом последовательности является y_2. Осталось вычислить значение второго члена последовательности $y_n = 24n + 36 - 5n^2$:

$$y_2 = 24 \cdot 2 + 36 - 5 \cdot 2^2 = 64.$$

в) Члены последовательности, начиная с третьего, располагаются на правой ветви построенной параболы. Наименьшего среди них нет.

Ответ а) 5; б) $y_2 = 64$ — наибольший член последовательности; в) наименьшего члена у последовательности нет.

4 Рекуррентное задание последовательности

Важный для приложений способ задания последовательности состоит в том, что указывается *правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны её предыдущие члены*. При вычислении членов последовательности по этому правилу мы как бы всё время возвращаемся назад и выясняем, чему равны предыдущие члены. Такой способ задания последовательности называют *рекуррентным* (от лат. слова *recurrere* — возвращаться). Чаще всего в таких случаях указывают формулу, позволяющую выразить n-й член последовательности через предыдущие, и задают 1—2 начальных члена последовательности. Приведём примеры.

рекуррентный способ задания последовательности

1. $y_1 = 3$; $y_n = y_{n-1} + 4$, если $n = 2, 3, 4, \ldots$. Иными словами, n-й член последовательности получается из предыдущего $(n - 1)$-го члена прибавлением к нему числа 4:

$$y_1 = 3;$$
$$y_2 = y_1 + 4 = 3 + 4 = 7;$$

$$y_3 = y_2 + 4 = 7 + 4 = 11;$$
$$y_4 = y_3 + 4 = 11 + 4 = 15 \text{ и т. д.}$$

Тем самым получаем последовательность

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots .$$

Заметим, что эту последовательность нетрудно задать аналитически: $y_n = 4n - 1$.

2. $y_1 = 3$; $y_n = 2y_{n-1}$, если $n = 2, 3, 4, \ldots$. Иными словами, n-й член последовательности получается из предыдущего $(n - 1)$-го члена умножением его на 2:

$$y_1 = 3;$$
$$y_2 = 2y_1 = 2 \cdot 3 = 6;$$
$$y_3 = 2y_2 = 2 \cdot 6 = 12;$$
$$y_4 = 2y_3 = 2 \cdot 12 = 24 \text{ и т. д.}$$

Тем самым получаем последовательность

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \ldots .$$

Заметим, что и здесь нетрудно перейти к аналитическому заданию последовательности: $y_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

3. $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_n = y_{n-2} + y_{n-1}$, если $n = 3, 4, 5, \ldots$. Иными словами, n-й член последовательности равен сумме двух предшествующих ему членов. Итак,

$$y_1 = 1;$$
$$y_2 = 1;$$
$$y_3 = y_1 + y_2 = 1 + 1 = 2;$$
$$y_4 = y_2 + y_3 = 1 + 2 = 3;$$
$$y_5 = y_3 + y_4 = 2 + 3 = 5;$$
$$y_6 = y_4 + y_5 = 3 + 5 = 8;$$
$$y_7 = y_5 + y_6 = 5 + 8 = 13;$$
$$y_8 = y_6 + y_7 = 8 + 13 = 21;$$
$$y_9 = y_7 + y_8 = 13 + 21 = 34;$$
$$y_{10} = y_8 + y_9 = 21 + 34 = 55 \text{ и т. д.}$$

Фибоначчи, или Леонардо Пизанский (ок. 1170 — ок. 1250), первый крупный математик средневековой Европы. С его трудов в Европе стала распространяться позиционная система счисления (ранее была римская нотация).

Тем самым получаем последовательность

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots .$$

Эту последовательность специально изучают в математике, поскольку она обладает целым рядом интересных свойств. Её называют *последовательностью Фибоначчи* — по имени итальянского математика XIII века. Задать последовательность Фибоначчи рекуррентно — легко, а аналитически — труднее: она задаётся с помощью формулы Бине́

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

последовательность Фибоначчи

ПРИМЕР 3

Последовательность (y_n) задана рекуррентно: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_n = 5y_{n-1} - 6y_{n-2}$, если $n > 2$. Задать эту последовательность аналитически.

Решение Найдём несколько начальных членов последовательности:

$$y_1 = 1;$$

$$y_2 = 2;$$

$$y_3 = 5y_2 - 6y_1 = 5 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 4;$$

$$y_4 = 5y_3 - 6y_2 = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 8;$$

$$y_5 = 5y_4 - 6y_3 = 5 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 16;$$

$$y_6 = 5y_5 - 6y_4 = 5 \cdot 16 - 6 \cdot 8 = 32.$$

Получили последовательность 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... Возникает естественное предположение, что $y_n = 2^{n-1}$. Чтобы убедиться в его справедливости, проверим, выполняется ли для $y_n = 2^{n-1}$ заданное в условии рекуррентное соотношение $y_n = 5y_{n-1} - 6y_{n-2}$.

Если $y_n = 2^{n-1}$, то $y_{n-1} = 2^{n-2}$, $y_{n-2} = 2^{n-3}$. Тогда

$$5y_{n-1} - 6y_{n-2} = 5 \cdot 2^{n-2} - 6 \cdot 2^{n-3} = 2^{n-3} \cdot (5 \cdot 2 - 6) = \\ = 2^{n-3} \cdot 2^2 = 2^{n-1} = y_n.$$

Рекуррентное соотношение выполняется, наша догадка подтвердилась.

Ответ $y_n = 2^{n-1}$.

ПРИМЕР 4

Последовательность (y_n) задана рекуррентно:

$$y_1 = a,\ y_n = y_{n-1}^2 - 4y_{n-1} + 4,\ \text{если } n > 1.$$

При каких значениях параметра a последовательность является стационарной?

Решение Последовательность (y_n), у которой $y_1 = a$, будет стационарной, если каждый её член равен a, в частности, $y_n = a$, $y_{n-1} = a$. Тогда рекуррентное соотношение

$$y_n = y_{n-1}^2 - 4y_{n-1} + 4$$

принимает вид $a = a^2 - 4a + 4$, т. е. $a^2 - 5a + 4 = 0$. Решив это уравнение, находим $a_1 = 1$, $a_2 = 4$.

Ответ При $a = 1$ или при $a = 4$.

Среди рекуррентно заданных последовательностей особо выделяют два простых, но важных случая: 1) указан первый член последовательности $y_1 = a$ и задано рекуррентное соотношение $y_n = y_{n-1} + d$ (a и d — числа); 2) указан первый член последовательности $y_1 = b$ и задано рекуррентное соотношение $y_n = y_{n-1} \cdot q$ (b и q — числа). В первом случае говорят, что задана арифметическая прогрессия (см. пример 3), во втором — что задана геометрическая прогрессия (см. пример 4). Подробнее о прогрессиях речь пойдёт в § 23 и 24.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое числовая последовательность?
2. Что значит задать последовательность аналитически? Приведите примеры аналитически заданных последовательностей.
3. Приведите пример словесно заданной последовательности.
4. Что значит задать последовательность рекуррентно? Приведите пример рекуррентно заданной последовательности.

§ 22 СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Числовая последовательность — частный случай числовой функции, а потому некоторые свойства функций можно перенести и на последовательности.

1 Ограниченные последовательности

Определение 1

Последовательность (y_n) называют **ограниченной сверху**, если существует такое число M, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $y_n \leq M$. Иными словами, последовательность *ограничена сверху*, если все её члены не больше некоторого числа.

Число M называют *верхней границей* последовательности. Ясно, что если последовательность ограничена сверху, то у неё бесконечно много верхних границ: M, $M + 1$, $M + 2$, $M + 4$, 5 и т. д.

Например, последовательность $-1, -4, -9, -16, -25, \ldots, -n^2, \ldots$ ограничена сверху; в качестве верхней границы можно взять число -1 (или любое число, большее чем -1).

Определение 2

Последовательность называют **ограниченной снизу**, если существует такое число m, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $y_n \geq m$. Иными словами, последовательность *ограничена снизу*, если все её члены не меньше некоторого числа.

Число m называют *нижней границей* последовательности. Например, последовательность $1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$ ограничена снизу; в качестве нижней границы можно взять число 1 (или любое число, меньшее чем 1).

ограниченность последовательности сверху (снизу)

верхняя (нижняя) граница

ограниченная последовательность

Если последовательность ограничена и сверху, и снизу, то её называют **ограниченной последовательностью.** Например, ограниченной является последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. В качестве верхней границы можно взять число 1, в качестве нижней — число 0. Если построить график этой последовательности, т. е. график функции $y = \frac{1}{x}$, $x \in N$, то можно заметить, что весь график расположен в полосе между двумя горизонтальными

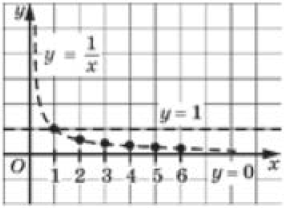


Рис. 164

прямыми (в данном случае это $y = 0$ и $y = 1$ — рис. 164). Но в этом и состоит, как известно, геометрический признак ограниченности функции (см. § 17).

Особенно наглядным становится свойство ограниченности последовательности, если члены последовательности отметить точками на числовой прямой. Ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности принадлежат некоторому отрезку. Так, изобразив члены последовательности $y_n = \frac{1}{n}$ точками на числовой прямой, замечаем, что все они принадлежат отрезку [0; 1] (рис. 165).

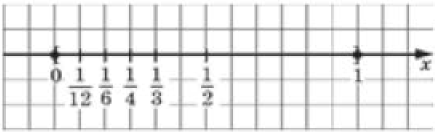


Рис. 165

ПРИМЕР 1

Исследовать на ограниченность последовательность

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение Чтобы было понятно, о какой последовательности идёт речь, выпишем несколько её членов:

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1}},$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и т. д.

Эта последовательность ограничена снизу: все её члены удовлетворяют неравенству $y_n \geqslant 1$. Выясним, является ли последовательность ограниченной сверху. Рассмотрим её n-й член ($n > 1$):

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

В этой сумме n слагаемых, причём наименьшим из них является последнее слагаемое $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Значит, $y_n > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, т. е. $y_n > \sqrt{n}$.

Поскольку число $\sqrt{n}$ можно выбрать больше любого заданного числа M, то и y_n можно выбрать больше любого заданного числа M. Это значит, что последовательность не ограничена сверху.

Ответ Последовательность ограничена снизу и не ограничена сверху.

2 Монотонные последовательности

Определение 3

Последовательность (y_n) называют **возрастающей**, если каждый её член (кроме первого) больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots < y_{n-1} < y_n < \ldots .$$

Например, последовательность 1, 4, 9, 16, 25, ... , n^2, ... — возрастающая.

Определение 4

Последовательность (y_n) называют **убывающей**, если каждый её член (кроме первого) меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \ldots > y_{n-1} > y_n > \ldots .$$

Например, последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ — убывающая.

возрастающая последовательность

убывающая последовательность

монотонная последовательность

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином — **монотонные последовательности**. Например, последовательности 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ... и $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ — монотонные, а последовательность $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \ldots$ — не монотонная.

Исследуют последовательности на монотонность с помощью приведённых выше определений, но иногда бывает удобно использовать следующее достаточно очевидное утверждение: *если функция $y = f(x)$ возрастает (убыва-*

ет) на луче $[1; +\infty)$, *то последовательность* $y_n = f(n)$ *возрастает (убывает)*. Например, функция $y = x^2$ возрастает на луче $[1; +\infty)$ и последовательность $y_n = n^2$ возрастает; функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на луче $[1; +\infty)$ и последовательность $y_n = \frac{1}{n}$ убывает.

ПРИМЕР 2

Исследовать на монотонность последовательность $y_n = \frac{n^2}{5^n}$.

Решение Выпишем n-й и $(n + 1)$-й члены последовательности: $y_n = \frac{n^2}{5^n}$, $y_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}$. Чтобы сравнить эти члены, составим их разность и оценим её знак:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}} - \frac{n^2}{5^n} = \frac{(n^2 + 2n + 1) - 5n^2}{5^{n+1}} = \frac{2n + 1 - 4n^2}{5^{n+1}}.$$

Для натуральных значений n справедливы неравенства $2n \leqslant 2n^2$ и $1 < 2n^2$. Сложив их, получим $2n + 1 < 4n^2$. Значит, для любых натуральных значений n справедливо неравенство $\frac{2n + 1 - 4n^2}{5^{n+1}} < 0$, т. е. $y_{n+1} - y_n < 0$.

Итак, для любых натуральных значений n выполняется неравенство $y_{n+1} < y_n$, а это значит, что **последовательность (y_n) убывает**.

ПРИМЕР 3

Исследовать на монотонность последовательность $y_n = -\frac{1}{n^2 + 2\sqrt{n}}$.

Решение Рассмотрим функцию $y = -\frac{1}{x^2 + 2\sqrt{x}}$. Здесь $x > 0$, знаменатель дроби с увеличением x увеличивается, значит, дробь $\frac{1}{x^2 + 2\sqrt{x}}$ уменьшается и, соответственно, значение выражения $-\frac{1}{x^2 + 2\sqrt{x}}$ увеличивается. Отсюда вывод: функция возрастает при $x > 0$, а значит, возрастает и на луче $[1; +\infty)$. Но тогда и последовательность $y_n = -\frac{1}{n^2 + 2\sqrt{n}}$ **возрастает**.

ПРИМЕР 4

Последовательность (y_n) задана рекуррентно:

$$y_1 = a,\ y_n = y_{n-1}^2 - 3y_{n-1} - 5,\ \text{если } n > 1.$$

Доказать, что при $a > 5$ последовательность является возрастающей.

Решение Последовательность (y_n) будет возрастающей, если $y_n > y_{n-1}$ для любого номера $n > 1$. Воспользовавшись заданным рекуррентным соотношением, запишем интересующее нас неравенство в виде

$$y_{n-1}^2 - 3y_{n-1} - 5 > y_{n-1} \qquad (1)$$

и решим его, положив для удобства $y_{n-1} = t$:

$$t^2 - 3t - 5 > t;\ t^2 - 4t - 5 > 0;\ t < -1,\ t > 5.$$

Случай, когда $t < -1$, т. е. $y_{n-1} < -1$, нас явно не интересует: в этом случае последовательность не может быть возрастающей, поскольку по условию $y_1 = a > 5$. Остаётся случай $t > 5$. Если $t > 5$, т. е. $y_{n-1} > 5$, то неравенство (1) выполняется, значит, $y_n > y_{n-1}$.

Далее будем рассуждать так. По условию $y_1 = a$. Если $a > 5$, т. е. $y_1 > 5$, то выполняется неравенство $y_2 > y_1$. Отсюда следует, что $y_2 > 5$, но тогда выполняется неравенство $y_3 > y_2$. Отсюда следует, что $y_3 > 5$, но тогда выполняется неравенство $y_4 > y_3$ и т. д. Тем самым доказано, что заданная последовательность при $a > 5$ возрастает.

Вопросы для самопроверки

1. Какую последовательность называют: а) возрастающей; б) убывающей?
2. Приведите пример: а) возрастающей последовательности; б) убывающей последовательности; в) немонотонной последовательности.
3. Какую последовательность называют: а) ограниченной снизу; б) ограниченной сверху; в) ограниченной?
4. Приведите пример последовательности: а) ограниченной снизу; б) ограниченной сверху; в) ограниченной; г) не ограниченной ни снизу, ни сверху.

§ 23 АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1 Основные понятия

Определение

Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и некоторого числа d, называют **арифметической прогрессией**, а число d — **разностью арифметической прогрессии.**

Таким образом, арифметическая прогрессия — это числовая последовательность (a_n), заданная рекуррентно соотношениями:

арифметическая прогрессия

разность прогрессии

$$a_1 = a, \quad a_n = a_{n-1} + d$$
$$(n = 2, 3, 4, \ldots)$$

(a и d — заданные числа).

Можно ли, глядя на числовую последовательность, установить, является ли она арифметической прогрессией? Можно. Если вы убедились в том, что разность между любым членом последовательности и предшествующим ему членом постоянна (т. е. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots$), то перед вами — арифметическая прогрессия. Разумеется, при этом предполагается, что обнаруженная закономерность выполняется не только для явно выписанных членов последовательности, но и для всей последовательности в целом. Приведём примеры.

1. 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 1$, $d = 2$.

2. 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, −1, −4, ... Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 20$, $d = -3$.

3. 8, 8, 8, 8, 8, 8, ... Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 8$, $d = 0$.

Арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью, если $d > 0$ (см. пример 1), *и убывающей, если* $d < 0$ (см. пример 2).

Для обозначения того, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, иногда бывает удобна следующая запись:

$$\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Значок $\div$ заменяет словосочетание «арифметическая прогрессия».

Если в арифметической прогрессии отбросить все члены, следующие за каким-то конкретным членом последовательности, например за a_n, то получится *конечная арифметическая прогрессия*

$$\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

Иногда в конечной арифметической прогрессии удобно записывать не только несколько членов в начале, но и несколько членов в конце, например так:

$$\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

В следующих пунктах этого параграфа рассмотрим наиболее важные свойства арифметической прогрессии.

2 Формула n-го члена арифметической прогрессии

Задание арифметической прогрессии, о котором идёт речь в определении, является *рекуррентным*. Во многих случаях оно неудобно: чтобы вычислить, например, a_{100}, надо предварительно найти предшествующие 99 членов последовательности. Эту вычислительную работу можно существенно упростить, если удастся найти формулу n-го члена, т. е. перейти к *аналитическому заданию арифметической прогрессии*.

Рассмотрим арифметическую прогрессию $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ с разностью d:

$$\begin{aligned}
&a_1 = a_1,\\
&a_2 = a_1 + d,\\
&a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,\\
&a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,\\
&a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Нетрудно догадаться, что для любого номера n справедливо равенство

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)d.} \qquad (1)$$

«Нетрудно догадаться», «можно сообразить» и т. д. — это стилистические обороты из области интуиции. Разумеется, математики ими пользуются, но в основном для открытия каких-то новых фактов, а не для их обоснования. Формулу (1) мы «прочувствовали», но не обосновали. Приведём доказательство.

Если $n = 1$, то $a_1 = a_1 + (1 - 1)d$ — верное равенство, т. е. формула (1) для $n = 1$ верна.

Предположим, что формула (1) верна для натурального числа $n = k$, т. е. предположим, что верно равенство $a_k = a_1 + (k - 1)d$. Докажем, что тогда формула (1) верна и для следующего натурального числа $n = k + 1$, т. е. докажем, что $a_{k+1} = a_1 + kd$.

В самом деле, по определению арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d$, значит,

$$a_{k+1} = a_k + d = (a_1 + (k - 1)d) + d = a_1 + kd.$$

А теперь смотрите: для $n = 1$ формула (1) верна (это мы проверили). Далее мы доказали, что если формула (1) верна для числа $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$. Итак, формула (1) верна для $n = 1$, значит, она верна и для $n = 2$; так как она верна для $n = 2$, то она верна и для $n = 3$ и т. д. Значит, формула (1) верна для любого натурального числа n.

Приведённый метод рассуждений носит название *метод математической индукции* (подробнее мы поговорим о нём в § 25).

Запишем формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n - 1)d$ в виде $a_n = dn + (a_1 - d)$ и введём обозначения: $a_n = y$, $a_1 - d = m$. Получим $y = dn + m$, или

$$y = dx + m,\ x \in N.$$

Значит, арифметическую прогрессию можно рассматривать как *линейную функцию* ($y = dx + m$), *заданную на множестве* N *натуральных чисел*. Угловой коэффициент этой линейной функции равен d — разности арифметической прогрессии. На рис. 166 схематически изображён график арифметической прогрессии — изолированные точки на прямой (с абсциссами $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ и т. д.).

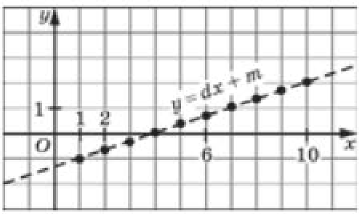


Рис. 166

Вернёмся к двум примерам, рассмотренным выше.

1) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 1$, $d = 2$. Составим формулу n-го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d;$$
$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2;$$
$$a_n = 2n - 1$$

(заметим, что эту формулу нетрудно было угадать, глядя на заданную последовательность нечётных чисел 1, 3, 5, 7, ...).

2) 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, −1, −4, ... Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 20$, $d = -3$. Составим формулу n-го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d;$$
$$a_n = 20 + (n - 1) \cdot (-3);$$
$$a_n = 23 - 3n.$$

ПРИМЕР 1

Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.
а) Известно, что $a_1 = 5$, $d = 4$. Найти a_{22}.
б) Известно, что $a_1 = -2$, $d = 3$, $a_n = 118$. Найти n.
в) Известно, что $d = -2$, $a_{39} = 83$. Найти a_1.
г) Известно, что $a_1 = 7$, $a_{15} = -35$. Найти d.

Решение Во всех случаях в основе решения лежит формула n-го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

а) $a_{22} = a_1 + 21d = 5 + 21 \cdot 4 = 89$.
б) $118 = -2 + (n - 1) \cdot 3$;
$118 = 3n - 5$;
$n = 41$.
в) $83 = a_1 + 38 \cdot (-2)$;
$a_1 = 159$.
г) $-35 = 7 + 14d$;
$d = -3$.

Ответ а) 89; б) 41; в) 159; г) -3.

ПРИМЕР 2

При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй её член в частном получается 7; при делении десятого члена прогрессии на её пятый член в частном получается 2 и в остатке 5. Найти двадцатый член этой прогрессии.

Решение Условия задачи можно кратко записать так:

1) $\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$;
2) $a_9 = 7a_2$;
3) $a_{10} = 2a_5 + 5$.

Воспользовавшись формулой n-го члена арифметической прогрессии, получим:

$$a_9 = a_1 + 8d;$$
$$a_2 = a_1 + d;$$
$$a_{10} = a_1 + 9d;$$
$$a_5 = a_1 + 4d.$$

Тогда второе условие задачи ($a_9 = 7a_2$) можно записать в виде

$$a_1 + 8d = 7(a_1 + d),$$

т. е.

$$d = 6a_1.$$

Третье условие задачи ($a_{10} = 2a_5 + 5$) можно записать в виде

$$a_1 + 9d = 2(a_1 + 4d) + 5,$$

т. е.

$$d = a_1 + 5.$$

В итоге получаем очень простую систему двух линейных уравнений с двумя переменными a_1 и d:

$$\begin{cases} d = 6a_1, \\ d = a_1 + 5. \end{cases}$$

Решив систему, находим, что $a_1 = 1$, $d = 6$.

Осталось вычислить двадцатый член прогрессии:

$$a_{20} = a_1 + 19d = 1 + 19 \cdot 6 = 115.$$

ПРИМЕР 3

Могут ли числа 0, 37 и $2\sqrt{13}$ быть членами одной арифметической прогрессии?

Решение Предположим, что эти числа являются членами одной арифметической прогрессии; пусть первый член прогрессии равен a, а разность прогрессии равна d. Тогда $0 = a + kd$, $37 = a + md$, $2\sqrt{13} = a + pd$, где k, m, p — попарно различные целые неотрицательные числа. Вычтя первое равенство из второго, получим $37 = d(m - k)$; вычтя первое равенство из третьего, получим $2\sqrt{13} = d(p - k)$. Значит, $\frac{2\sqrt{13}}{37} = \frac{p - k}{m - k}$, т. е. $\sqrt{13} = \frac{37(p - k)}{2(m - k)}$. Получилось, что $\sqrt{13}$ — рациональное число, что неверно. Значит, наше предположение неверно, т. е. заданные числа не являются членами одной арифметической прогрессии.

3 Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии

Пусть дана конечная арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Обозначим через S_n сумму её членов:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Рассмотрим конкретный пример отыскания S_n. Дана конечная арифметическая прогрессия 1, 2, 3, ..., 98, 99, 100. Сумму её членов вычислим следующим образом:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 =$$
$$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) =$$
$$= \underbrace{101 + 101 + 101 + 101 + \ldots + 101}_{50 \text{ слагаемых}} = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), немецкий математик, физик, астроном. Сделал ряд фундаментальных научных открытий. Органично сочетал исследования в теоретической и прикладной математике.

Есть легенда, что этот способ вычисления указанной суммы в возрасте пяти лет использовал К. Ф. Гаусс, которого считают величайшим математиком всех времен и называют королем математики.

Примерно та же идея используется для вычисления суммы членов произвольной конечной арифметической прогрессии.

Для начала заметим, что

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n.$$

В самом деле, по определению арифметической прогрессии $a_2 = a_1 + d$, $a_{n-1} = a_n - d$. Значит,

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n.$$

Аналогично можно установить, что

$$a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$

и вообще *сумма члена, находящегося на k-м месте от начала конечной арифметической прогрессии, и члена, находящегося на k-м месте от её конца, равна сумме первого и последнего членов прогрессии:* $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Теперь вычислим S_n. Имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Сложив эти два равенства, получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots +$$
$$+ (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В правой части этого равенства n пар слагаемых, каждая пара, как мы установили выше, равна $a_1 + a_n$. Значит,

$$2S_n = n(a_1 + a_n).$$

Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

ПРИМЕР 4

Дана арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

а) Известно, что $a_1 = 5$, $d = 4$. Найти S_{22}.
б) Известно, что $a_1 = 7$, $S_8 = 140$. Найти d.

Решение а) $a_{22} = a_1 + 21d = 5 + 21 \cdot 4 = 89$;

$$S_{22} = \frac{22 \cdot (a_1 + a_{22})}{2} = 11 \cdot (5 + 89) = 1034.$$

б) $S_8 = \dfrac{8(a_1 + a_8)}{2}$;

$140 = 4(7 + a_8)$;

$35 = 7 + a_8$;

$a_8 = 28$.

Теперь применим к a_8 формулу n-го члена арифметической прогрессии: $a_8 = a_1 + 7d$; $28 = 7 + 7d$; $d = 3$.

Ответ а) 1034; б) 3.

ПРИМЕР 5

а) Найти сумму всех чётных трёхзначных натуральных чисел;
б) найти сумму всех трёхзначных натуральных чисел, кратных 11, но не кратных 5.

Решение а) Речь идёт о сумме членов конечной арифметической прогрессии 100, 102, 104, ..., 998. У этой прогрессии $a_1 = 100$, $a_n = 998$, $d = 2$. Нужно вычислить S_n, но для этого сначала надо узнать, чему равно n, т. е. сколько членов содержится в указанной арифметической прогрессии.

Воспользуемся формулой $a_n = a_1 + (n - 1)d$:

$$998 = 100 + (n - 1) \cdot 2;$$

$$n = 450.$$

Итак, $a_1 = 100$, $n = 450$, $a_{450} = 998$. Вычислим S_{450}:

$$S_{450} = \frac{450 \cdot (100 + 998)}{2} = 225 \cdot 1098 = 247050.$$

б) Трёхзначные числа, кратные 11, можно представить в виде конечной арифметической прогрессии 110, 121, 132, ..., 990. Число членов этой прогрессии равно 81, и их сумма S' вычисляется следующим образом:

$$S' = \frac{110 + 990}{2} \cdot 81 = 550 \cdot 81.$$

Но по условию задачи из написанной прогрессии следует удалить числа, кратные 5, т. е. числа 110, 165, ..., 990. Эти 17 чисел также образуют конечную арифметическую прогрессию, причём их сумма S'' вычисляется следующим образом:

$$S'' = \frac{110 + 990}{2} \cdot 17 = 550 \cdot 17.$$

Интересующая нас сумма S равна $S' - S''$. Значит,

$$S = 550 \cdot 81 - 550 \cdot 17 = 550 \cdot 64 = 35\,200.$$

Ответ а) 247 050; б) 35 200.

Иногда оказывается полезной видоизменённая формула суммы n членов арифметической прогрессии. Если в формуле для S_n учесть, что $a_n = a_1 + d(n - 1)$, то получим

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n.}$$

ПРИМЕР 6

Турист, двигаясь по пересечённой местности, за первый час пути прошёл 800 м, а за каждый следующий час проходил на 25 м меньше, чем за предыдущий. Сколько времени он потратил на весь путь, равный 5700 м?

Решение I ЭТАП. *Составление математической модели.*

За первый час турист прошёл 800 м, за второй — 775 м, за третий — 750 м и т. д. Математической моделью является конечная арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

у которой $a_1 = 800$, $d = -25$, $S_n = 5700$. Надо найти n (в часах — время движения туриста).

II ЭТАП. *Работа с составленной моделью.*

Воспользуемся второй формулой для S_n:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n;$$

$$5700 = \frac{2 \cdot 800 - 25(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$228 = \frac{64 - (n-1)}{2} \cdot n$$

(обе части уравнения разделили на 25);

$$456 = n(65 - n);$$
$$n^2 - 65n + 456 = 0;$$
$$n_1 = 8,\ n_2 = 57.$$

III ЭТАП. *Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, сколько времени был в пути турист. Это время мы обозначили буквой n и получили для n две возможности: $n = 8$ или $n = 57$. Переменная n имеет и другой смысл: она показывает число взятых начальных членов арифметической прогрессии 800, 775, 750, 725, 700, ... Первый раз сумма членов этой прогрессии равна 5700 при $n = 8$:

$$800 + 775 + 750 + 725 + 700 + 675 + 650 + 625 = 5700.$$

Это значит, что путь длиной 5700 м турист преодолеет за 8 часов. Но как понимать второе значение $n = 57$? Оно означает, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{57} = 5700$. С математической точки зрения в этой записи никакого противоречия нет. Но смотрите: здесь $a_{42} = a_1 + 41d = 800 - 41 \cdot 25 = -225$; отрицательными будут и все последующие члены арифметической прогрессии. А по смыслу задачи нас интересуют только положительные члены прогрессии (путь в одну сторону). Поэтому значение $n = 57$ нас не устраивает.

Ответ 8 ч.

4 Характеристическое свойство арифметической прогрессии

Пусть дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Рассмотрим три её члена, следующие друг за другом: a_{n-1}, a_n, a_{n+1}. Известно, что

$$a_n - d = a_{n-1},$$
$$a_n + d = a_{n+1}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.}$$

Это значит, что каждый член арифметической прогрессии (кроме первого и последнего, если он есть) равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов.

Верно и обратное: если последовательность (a_n) такова, что для любого $n > 1$ выполняется равенство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

то (a_n) — арифметическая прогрессия.

В самом деле, последнее равенство можно переписать так:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Это значит, в частности, что $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, $a_3 - a_2 = a_4 - a_3$ и т. д. Иными словами, разность между любым членом последовательности и предшествующим ему членом всегда одна и та же, а это и означает, что задана арифметическая прогрессия.

Тем самым мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА (Характеристическое свойство арифметической прогрессии)

Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый её член, кроме первого (и последнего, в случае конечной последовательности), равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов.

ПРИМЕР 7

При каком значении x числа $3x + 2$, $5x - 4$ и $11x + 12$ образуют конечную арифметическую прогрессию?

Решение Согласно характеристическому свойству заданные выражения должны удовлетворять соотношению

$$5x - 4 = \frac{(3x + 2) + (11x + 12)}{2}.$$

Решим это уравнение:

$$10x - 8 = 14x + 14;$$
$$x = -5,5.$$

При этом значении x заданные выражения $3x + 2$, $5x - 4$, $11x + 12$ принимают соответственно значения $-14,5$, $-31,5$, $-48,5$. Это арифметическая прогрессия, её разность равна -17.

Ответ $-5,5$.

5 Разные примеры

ПРИМЕР 8

При каких значениях параметра a корни уравнения $3x^3 - (2a + 10)x^2 + (6a + 3)x = 0$, взятые в некотором порядке, образуют конечную арифметическую прогрессию?

Решение Перепишем уравнение в виде

$$x(3x^2 - (2a + 10)x + (6a + 3)) = 0.$$

Значит, либо $x = 0$, либо $3x^2 - (2a + 10)x + (6a + 3) = 0$. Из квадратного уравнения находим ещё два корня:

$$x = 3, \quad x = \frac{2a + 1}{3}.$$

Итак, числа 0, 3, $\frac{2a+1}{3}$ должны в определённом порядке образовывать арифметическую прогрессию. Возможны три варианта расположения числа $\frac{2a+1}{3}$ на числовой прямой: левее числа 0; между числами 0 и 3; правее числа 3. В первом случае числа $\frac{2a+1}{3}$, 0, 3 образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $\frac{2a+1}{3} = -3$, т. е. когда $a = -5$. Во втором случае числа 0, $\frac{2a+1}{3}$, 3 образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда число $\frac{2a+1}{3}$ равно среднему арифметическому чисел 0 и 3, т. е. если $\frac{2a+1}{3} = \frac{3}{2}$. Из этого уравнения находим $a = \frac{7}{4}$. Наконец, в третьем случае числа 0, 3, $\frac{2a+1}{3}$ образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $\frac{2a+1}{3} = 6$, т. е. когда $a = 8{,}5$.

Ответ -5, 1,75 или 8,5.

ПРИМЕР 9

Известно, что сумма первых n членов последовательности (y_n) равна $an^2 + bn + c$, где a, b, c — действительные числа. При каких значениях a, b, c последовательность (y_n) является арифметической прогрессией?

Решение Последовательность будет арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого n выполняется соотношение

$$y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n+2}}{2},$$

или, что то же самое,

$$2y_{n+1} = y_n + y_{n+2}. \quad (2)$$

Но по условию нам известна лишь сумма S_n. Можно ли с её помощью найти y_n, y_{n+1}, y_{n+2}? Можно, смотрите:

$$S_n = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + y_n;$$
$$S_{n-1} = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1};$$
$$y_n = S_n - S_{n-1}.$$

Имеем:

$$S_n = an^2 + bn + c;$$
$$S_{n-1} = a(n-1)^2 + b(n-1) + c;$$
$$S_n - S_{n-1} = 2an - a + b.$$

Итак,

$$y_n = 2an - a + b. \quad (3)$$

Тогда

$$y_{n+1} = 2a(n+1) - a + b = 2an + a + b;$$
$$y_{n+2} = 2a(n+2) - a + b = 2an + 3a + b.$$

Числа $y_n = 2an - a + b$, $y_{n+1} = 2an + a + b$, $y_{n+2} = 2an + 3a + b$ удовлетворяют соотношению (2) при любых значениях a и b.

Проведённые рассуждения верны лишь для $n > 1$, поскольку мы использовали формулу для S_{n-1}. Значит, формулой (2) нельзя пользоваться при $n = 1$. Если $n = 1$, то получаем $y_1 = S_1 = a + b + c$; по формуле (3) находим $y_2 = 3a + b$; $y_3 = 5a + b$. Для чисел $y_1 = a + b + c$, $y_2 = 3a + b$, $y_3 = 5a + b$ должно выполняться соотношение (2), т. е. $2(3a + b) = (a + b + c) + (5a + b)$. После упрощений получаем $c = 0$.

Ответ $c = 0$, a и b — любые действительные числа.

ПРИМЕР 10

Найти четырёхзначное число, кратное 45, цифры которого образуют конечную арифметическую прогрессию.

Решение Пусть x, y, z, t — последовательные цифры искомого числа p. Так как p кратно 45, то p делится на 5 и на 9. Делимость на 5 возможна лишь в двух случаях: когда цифра единиц числа p равна 0 или 5. Итак, либо $t = 0$, либо $t = 5$. Делимость на 9 возможна тогда и только тогда, когда сумма цифр числа p кратна 9. Это значит, что

$$x + y + z + t = 9n,\ n \in N.$$

Впрочем, учитывая, что x, y, z, t — цифры, а $t = 0$ или 5 (т. е. во всяком случае $t < 9$), можно сделать уточнение:

$$x + y + z + t = 9n, \text{ где } n = 1, 2 \text{ или } 3.$$

Осталось учесть, что цифры искомого числа образуют арифметическую прогрессию. Согласно характеристическому свойству числа x, y, z, t образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $y = \frac{x+z}{2}$ и $z = \frac{y+t}{2}$, или, что то же самое,

$$\begin{cases} x + z = 2y, \\ y + t = 2z. \end{cases}$$

Суммируя всё сказанное выше, приходим к совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} t = 0, \\ x + z = 2y, \\ y + t = 2z, \\ x + y + z + t = 9n \ (n = 1, 2, 3); \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 5, \\ x + z = 2y, \\ y + t = 2z, \\ x + y + z + t = 9n \ (n = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Рассмотрим первую систему. Подставив значение $t = 0$ в третье уравнение, получим $y = 2z$. Подставив $2z$ вместо y во второе уравнение, получим $x = 3z$. Наконец, подставив $x = 3z$, $y = 2z$ и $t = 0$ в четвёртое уравнение системы, получим $6z = 9n$ ($n = 1, 2, 3$). При $n = 1$ и $n = 3$ получаются нецелые значения z, при $n = 2$ получаем $z = 3$. Итак, значение цифры z найдено: $z = 3$. Тогда $x = 3z = 9$, $y = 2z = 6$, а значит, искомое число равно 9630.

Рассмотрим вторую систему. Подставив значение $t = 5$ в третье уравнение, получим $y = 2z - 5$. Подставив $2z - 5$ вместо y во второе уравнение, получим $x = 3z - 10$. Подставив $x = 3z - 10$, $y = 2z - 5$ и $t = 5$ в четвёртое уравнение, получим $6z - 10 = 9n$ ($n = 1, 2, 3$). Это уравнение относительно z не имеет при $n = 1$, 2 или 3 натуральных решений.

Ответ 9630.

Вопросы для самопроверки

1. Какую последовательность называют арифметической прогрессией?
2. Является ли последовательность 1, 5, 9, 13, 17, ... арифметической прогрессией? Если да, то чему равна её разность?
3. Приведите пример арифметической прогрессии, разность которой: а) положительна; б) отрицательна; в) равна нулю.
4. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n).
5. Является ли последовательность 2, 5, 8, 11, ... арифметической прогрессией? Если да, то найдите её 17-й член; 41-й член.
6. Запишите формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии (a_n).
7. Является ли последовательность 3, 1, –1, –3, ... арифметической прогрессией? Если да, то найдите сумму первых двадцати её членов.
8. В чём состоит характеристическое свойство арифметической прогрессии?
9. Дана арифметическая прогрессия (a_n). Известно, что $a_{35} = 43$, $a_{37} = 49$. Найдите a_{36}.

§ 24 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Для удобства читателя этот параграф мы построим по тому же плану, что и предыдущий.

1 Основные понятия

Определение

Числовую последовательность, все члены которой отличны от нуля и каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на одно и то же число q, называют **геометрической прогрессией**. При этом число q называют **знаменателем геометрической прогрессии**.

Таким образом, геометрическая прогрессия — это числовая последовательность (b_n), заданная рекуррентно соотношениями:

$$\boxed{\begin{gathered} b_1 = b, \quad b_n = b_{n-1} \cdot q \\ (n = 2, 3, 4, \ldots) \end{gathered}}$$

(b и q — заданные числа, $b \neq 0$, $q \neq 0$).

геометрическая прогрессия

знаменатель прогрессии

Можно ли, глядя на числовую последовательность, установить, является ли она геометрической прогрессией? Можно: если вы убедились в том, что отношение любого члена последовательности к предыдущему члену постоянно (т. е. $b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = b_4 : b_3 = \ldots$), то перед вами геометрическая прогрессия. Приведём примеры.

1. 1, 3, 9, 27, 81, ... Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 1$, $q = 3$.

2. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$. Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$.

3. $5, -1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, -\frac{1}{625}, \ldots$. Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{5}$.

4. 8, 8, 8, 8, 8, 8, ... Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 8$, $q = 1$.

Заметим, что эта последовательность является и арифметической прогрессией.

Если последовательность

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

является геометрической прогрессией, то и последовательность квадратов, т. е.

$$b_1^2, b_2^2, b_3^2, \ldots, b_n^2, \ldots,$$

является геометрической прогрессией. У второй геометрической прогрессии первый член равен b_1^2, а знаменатель равен q^2.

Геометрическая прогрессия является возрастающей последовательностью, если $b_1 > 0$, $q > 1$ (см. выше первый пример), *и убывающей, если* $b_1 > 0$, $0 < q < 1$ (см. второй пример).

Для обозначения того, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, иногда удобна следующая запись:

$$\because\!\because\; b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots .$$

Значок $\because\!\because$ заменяет словосочетание «геометрическая прогрессия».

Если в геометрической прогрессии отбросить все члены, следующие за b_n, то получится *конечная геометрическая прогрессия*

$$\because\!\because\; b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n.$$

2 Формула n-го члена геометрической прогрессии

Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ со знаменателем q. Имеем:

$$b_1 = b_1,$$
$$b_2 = b_1q,$$
$$b_3 = b_2q = (b_1q)q = b_1q^2,$$
$$b_4 = b_3q = (b_1q^2)q = b_1q^3,$$
$$b_5 = b_4q = (b_1q^3)q = b_1q^4 \text{ и т. д.}$$

Например, $b_8 = b_1q^7$, $b_{100} = b_1q^{99}$. Приходим к следующему выводу:

Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$\mathbf{b_n = b_1q^{n-1}}. \qquad \textbf{(1)}$$

Докажем эту формулу методом математической индукции, о котором мы говорили в предыдущем параграфе (п. 2). При $n = 1$ формула (1) принимает вид $b_1 = b_1$, т. е. формула верна. Предположим, что она выполняется при $n = k$, т. е. предположим, что равенство $b_k = b_1q^{k-1}$ верное. Докажем, что тогда формула (1) верна и для $n = k + 1$, т. е. докажем, что тогда выполняется равенство $b_{k+1} = b_1q^k$.

В самом деле, $b_{k+1} = b_kq = (b_1q^{k-1})q = b_1q^k$. Итак, формула (1) выполняется при $n = 1$, и из того, что она верна для $n = k$, следует, что она верна для $n = k + 1$. Значит, формула (1) верна для любого $n \in N$.

Перепишем формулу n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1q^{n-1}$ в виде

$$b_n = \frac{b_1}{q} \cdot q^n$$

и введём обозначения: $b_n = y$, $\frac{b_1}{q} = m$. Получим $y = mq^n$, или, подробнее,

$$y = mq^x,\ x \in \mathbf{N}.$$

Аргумент x содержится в показателе степени, поэтому такую функцию называют *показательной функцией*. Значит, геометрическую прогрессию можно рассматривать как *показательную функцию, заданную на множестве* $\mathbf{N}$ *натуральных чисел*.

На рис. 167 изображён график функции $y = 2^x$, $x \in \mathbf{N}$, а на рис. 168 — график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in \mathbf{N}$. В обоих случаях получаем изолированные точки (с абсциссами $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ и т. д.),

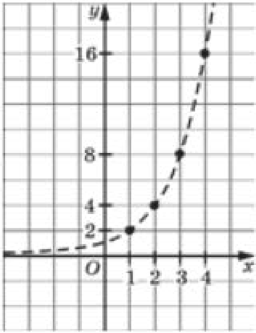


Рис. 167

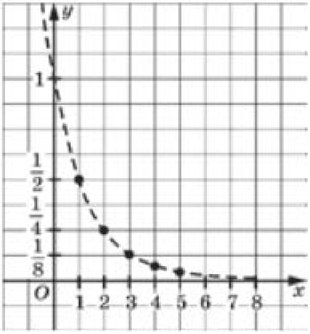


Рис. 168

лежащие на некоторой кривой (на этих рисунках представлена одна и та же кривая, только по-разному расположенная и изображённая в разных масштабах). Эту кривую называют *экспонентой*. Подробнее о показательной функции и её графике речь пойдёт в старших классах.

Вернёмся к примерам из предыдущего пункта.

1. 1, 3, 9, 27, 81, ... — геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 1$, $q = 3$. Составим формулу n-го члена:

$$b_n = 1 \cdot 3^{n-1}, \text{ т. е. } b_n = 3^{n-1}.$$

2. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$ — геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$. Составим формулу n-го члена:

$$b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

3. $5, -1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, -\frac{1}{625}, \ldots$. Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{5}$. Составим формулу n-го члена:

$$b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

ПРИМЕР 1

Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$.

а) Известно, что $b_1 = \frac{2}{3}$, $q = -3$. Найти b_6.

б) Известно, что $b_1 = 3$, $q = 2$, $b_n = 1536$. Найти n.

в) Известно, что $q = -2$, $b_7 = -512$. Найти b_1.

г) Известно, что $b_1 = 14$, $b_7 = \frac{7}{32}$. Найти q.

Решение Во всех случаях в основе решения лежит формула n-го члена геометрической прогрессии

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

а) $b_6 = b_1 q^5 = \frac{2}{3} \cdot (-3)^5 = -162.$

б) $1536 = 3 \cdot 2^{n-1}$; $512 = 2^{n-1}$.
Поскольку $512 = 2^9$, получаем, что $n - 1 = 9$, $n = 10$.

в) $b_7 = b_1 \cdot q^6$; $-512 = b_1 \cdot (-2)^6$; $b_1 = -8$.

г) $b_7 = b_1 \cdot q^6$; $\frac{7}{32} = 14 \cdot q^6$; $q^6 = \frac{1}{64}$; $q = \frac{1}{2}$ или $q = -\frac{1}{2}$.

ПРИМЕР 2

Разность между седьмым и пятым членами геометрической прогрессии равна 48, сумма пятого и шестого членов прогрессии также равна 48. Найти двенадцатый член этой прогрессии.

Решение Условия задачи можно кратко записать так:

1) $\div\div b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$;
2) $b_7 - b_5 = 48$;
3) $b_5 + b_6 = 48$.

Воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_7 = b_1 q^6;\ b_5 = b_1 q^4;\ b_6 = b_1 q^5.$$

Тогда второе условие задачи ($b_7 - b_5 = 48$) можно записать в виде

$$b_1 q^6 - b_1 q^4 = 48,$$

т. е.

$$b_1 q^4 (q^2 - 1) = 48.$$

Третье условие задачи ($b_5 + b_6 = 48$) можно записать в виде

$$b_1 q^4 + b_1 q^5 = 48,$$

т. е.

$$b_1 q^4 (q + 1) = 48.$$

В итоге мы получили систему двух уравнений с двумя переменными b_1 и q:

$$\begin{cases} b_1 q^4 (q^2 - 1) = 48, \\ b_1 q^4 (q + 1) = 48. \end{cases}$$

Приравняем левые части обоих уравнений системы:

$$b_1 q^4 (q^2 - 1) = b_1 q^4 (q + 1);$$
$$q^2 - 1 = q + 1$$

(мы разделили обе части уравнения на выражение $b_1 q^4$, отличное от нуля).

Из уравнения $q^2 - q - 2 = 0$ находим: $q_1 = 2$, $q_2 = -1$.

Подставив значение $q = 2$ во второе уравнение системы, получим $b_1 \cdot 16 \cdot 3 = 48$, т. е. $b_1 = 1$.

Подставив значение $q = -1$ во второе уравнение системы, получим $b_1 \cdot 1 \cdot 0 = 48$; это уравнение не имеет решений.

Итак, $b_1 = 1$, $q = 2$ — эта пара является решением составленной системы уравнений.

В задаче требуется вычислить b_{12}. Воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_{12} = b_1q^{11} = 1 \cdot 2^{11} = 2048.$$

3 Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии

Пусть дана конечная геометрическая прогрессия

$$\div\div\ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n.$$

Обозначим через S_n сумму её членов:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n.$$

Выведем формулу для нахождения этой суммы.

Начнём с самого простого случая, когда $q = 1$. Тогда геометрическая прогрессия состоит из n чисел, равных b_1, т. е. имеет вид $b_1, b_1, b_1, \ldots, b_1$. Сумма этих чисел равна nb_1.

Пусть теперь $q \neq 1$. Для нахождения S_n применим искусственный приём — выполним некоторые преобразования выражения S_nq:

$$\begin{gathered} S_nq = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n)q = \\ = b_1q + b_2q + b_3q + \ldots + b_{n-2}q + b_{n-1}q + b_nq = \\ = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_{n-1} + b_n + b_nq = \\ = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n) + b_nq - b_1 = \\ = S_n + b_nq - b_1 = S_n + (b_1 \cdot q^{n-1}) \cdot q - b_1 = S_n + b_1q^n - b_1. \end{gathered}$$

Итак,

$$S_nq = S_n + b_1q^n - b_1. \qquad (2)$$

Выполняя преобразования, мы, во-первых, пользовались определением геометрической прогрессии, согласно которому $b_1q = b_2$, $b_2q = b_3$, $b_3q = b_4$, ..., $b_{n-2}q = b_{n-1}$, $b_{n-1}q = b_n$; во-вторых, прибавили и вычли b_1, отчего значение выражения, разумеется, не изменилось; в-третьих, воспользовались формулой n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_nq = (b_1q^{n-1})q = b_1q^n.$$

Из формулы (2) выражаем S_n:

$$S_n q - S_n = b_1(q^n - 1),$$
$$S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1),$$

Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии (при $q \neq 1$):

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

ПРИМЕР 3

Дана конечная геометрическая прогрессия

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n.$$

Известно, что $b_1 = 3$, $q = 2$, $n = 6$. Найти:
а) сумму членов прогрессии; б) сумму квадратов её членов.

Решение а) $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 63 = 189.$

б) Выше (см. с. 212) мы уже отмечали, что если все члены геометрической прогрессии возвести в квадрат, то получится геометрическая прогрессия с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2. Тогда сумма шести членов новой прогрессии будет вычисляться по формуле $S_6 = \frac{b_1^2((q^2)^6 - 1)}{q^2 - 1}$. Подставив в эту формулу $b_1 = 3$, $q = 2$, получим:

$$S_6 = \frac{9(2^{12} - 1)}{2^2 - 1} = 3 \cdot 4095 = 12\,285.$$

Ответ а) 189; б) 12 285.

ПРИМЕР 4

Найти восьмой член геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$.

Решение Подставим данные значения в формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$:

$$96 = 3q^{n-1};$$
$$q^{n-1} = 32.$$

Далее имеем:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1};$$

$$189 = \frac{3(q^n - 1)}{q - 1};$$

$$63(q - 1) = q^n - 1. \qquad (3)$$

Выше мы нашли, что $q^{n-1} = 32$. Умножив обе части этого равенства на q, получим $q^n = 32q$. Подставим $32q$ вместо q^n в формулу (3):

$$63(q - 1) = 32q - 1,$$
$$31q = 62,$$
$$q = 2.$$

Зная, что $b_1 = 3$ и $q = 2$, легко найти b_8:

$$b_8 = 3 \cdot 2^7 = 384.$$

4 Характеристическое свойство геометрической прогрессии

Пусть дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$. Рассмотрим три её члена, следующие друг за другом: b_{n-1}, b_n, b_{n+1}. Известно, что

$$\frac{b_n}{q} = b_{n-1},$$
$$b_n q = b_{n+1}.$$

Перемножив эти равенства, получим:

$$\boxed{b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}.}$$

Это значит, что квадрат каждого члена геометрической прогрессии (кроме первого и последнего) равен произведению предшествующего и последующего членов этой прогрессии.

Верно и обратное: если последовательность (b_n), где $b_n \neq 0$, такова, что для любого $n > 1$ выполняется равенство

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1},$$

то (b_n) — геометрическая прогрессия.

В самом деле, последнее равенство можно переписать так:

$$b_n : b_{n-1} = b_{n+1} : b_n.$$

Это значит, в частности, что $b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = b_4 : b_3$ и т. д. Иными словами, отношение любого члена последовательности к предшествующему члену всегда одно и то же, а это и означает, что задана геометрическая прогрессия.

Фактически мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА (Характеристическое свойство геометрической прогрессии)

Числовая последовательность, все члены которой отличны от нуля, является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого её члена, кроме первого (и последнего, в случае конечной последовательности), равен произведению предшествующего и последующего членов.

В предыдущем параграфе мы получили характеристическое свойство арифметической прогрессии: любой её член (кроме крайних) равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов. Обратимся теперь к характеристическому свойству геометрической прогрессии и выполним некоторые преобразования:

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1};$$

$$\sqrt{b_n^2} = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}};$$

$$|b_n| = \sqrt{b_n^2} = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}.$$

Число $\sqrt{ab}$ называют *средним геометрическим чисел* a и b. Таким образом, последнее равенство означает, что *модуль любого члена геометрической прогрессии равен среднему геометрическому предыдущего и последующего членов*. В такой формулировке аналогия между характеристическими свойствами арифметической и геометрической прогрессий становится отчётливей.

ПРИМЕР 5

При каком значении x числа $10x + 7$, $4x + 6$ и $2x + 3$ образуют геометрическую прогрессию?

Решение Согласно характеристическому свойству заданные выражения должны удовлетворять соотношению

$$(4x + 6)^2 = (10x + 7)(2x + 3).$$

Решим это уравнение:

$$16x^2 + 48x + 36 = 20x^2 + 44x + 21;$$

$$4x^2 - 4x - 15 = 0;$$

$$x_1 = 2{,}5,\ x_2 = -1{,}5.$$

Подставляя $x_1 = 2{,}5$ в заданные выражения $10x + 7$, $4x + 6$, $2x + 3$, находим соответственно: 32, 16, 8. Это конечная геометрическая прогрессия. Подставляя $x_2 = -1{,}5$ в заданные выражения $10x + 7$, $4x + 6$, $2x + 3$, находим соответственно: -8, 0, 0 — это не геометрическая прогрессия.

Ответ 2,5.

5 Разные задачи на прогрессии

ПРИМЕР 6

Взяли три числа, которые образуют конечную возрастающую геометрическую прогрессию. Заметили, что если второе число увеличить на 2, а первое и третье числа оставить без изменения, то получится арифметическая прогрессия. Если после этого третье число увеличить на 9, то снова получится геометрическая прогрессия. Какие три числа были взяты сначала?

Решение Условия задачи можно кратко записать так:

1) ∺ b_1, b_2, b_3;
2) ÷ $b_1, b_2 + 2, b_3$;
3) ∺ $b_1, b_2 + 2, b_3 + 9$.

Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии условие 2) означает, что

$$b_2 + 2 = \frac{b_1 + b_3}{2};$$
$$2(b_1q + 2) = b_1 + b_1q^2;$$
$$b_1(1 + q^2 - 2q) = 4.$$

Согласно характеристическому свойству геометрической прогрессии условие 3) означает, что

$$(b_2 + 2)^2 = b_1(b_3 + 9);$$
$$(b_1q + 2)^2 = b_1(b_1q^2 + 9);$$
$$b_1^2q^2 + 4b_1q + 4 = b_1^2q^2 + 9b_1;$$
$$b_1(9 - 4q) = 4.$$

Таким образом, получаем систему двух уравнений с двумя переменными b_1 и q:

$$\begin{cases} b_1(1 + q^2 - 2q) = 4, \\ b_1(9 - 4q) = 4. \end{cases}$$

Приравняв левые части обоих уравнений системы, получим:

$$b_1(1 + q^2 - 2q) = b_1(9 - 4q);$$
$$1 + q^2 - 2q = 9 - 4q$$

(мы разделили обе части уравнения на число b_1, отличное от нуля);

$$q^2 + 2q - 8 = 0;$$
$$q_1 = 2,\ q_2 = -4.$$

Подставив значение $q = 2$ во второе уравнение системы, получим $b_1 = 4$. Зная b_1 и q, нетрудно записать три числа, образующие геометрическую прогрессию: 4, 8, 16.

Подставив значение $q = -4$ во второе уравнение системы, получим $b_1 = \frac{4}{25}$. В этом случае три числа, образующие геометрическую прогрессию, выглядят так: $\frac{4}{25}, -\frac{16}{25}, \frac{64}{25}$.

Из двух найденных геометрических прогрессий только первая является возрастающей, как того требует условие задачи.

Ответ 4, 8, 16.

ПРИМЕР 7

Шестой член возрастающей геометрической прогрессии на 18 больше её пятого члена. Пятый, седьмой и девятый члены этой прогрессии являются одновременно первым, вторым и одиннадцатым членами некоторой арифметической прогрессии. Найти первые пять членов этой арифметической прогрессии.

Решение Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ — заданная геометрическая прогрессия. По условию шестой её член на 18 больше пятого, значит, $b_6 - b_5 = 18$.

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ — искомая арифметическая прогрессия. Согласно условию задачи выполняются следующие соотношения:

$$a_1 = b_5; \quad a_2 = b_7; \quad a_{11} = b_9.$$

Воспользуемся тем, что разность d арифметической прогрессии равна $a_2 - a_1$, т. е. $d = b_7 - b_5$. Далее

$$b_9 = a_{11} = a_1 + 10d = b_5 + 10(b_7 - b_5) = 10b_7 - 9b_5.$$

Итак, мы составили два соотношения для геометрической прогрессии:

$$\begin{cases} b_6 - b_5 = 18, \\ b_9 = 10b_7 - 9b_5, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} b_1q^5 - b_1q^4 = 18, \\ b_1q^8 = 10b_1q^6 - 9b_1q^4. \end{cases}$$

Решим эту систему. Разделив обе части второго уравнения системы на отличное от нуля выражение b_1q^4, получим $q^4 - 10q^2 + 9 = 0$. Это биквадратное уравнение имеет 4 корня: $\pm1, \pm3$. Но по условию геометрическая прогрессия возрастающая, следовательно, из указанных четырёх значений в качестве знаменателя прогрессии можно взять только значение 3; итак, $q = 3$. Подставив это значение в первое уравнение системы, получим $b_1 = \frac{1}{9}$.

В задаче требуется найти первые пять членов арифметической прогрессии. Сначала найдём a_1 и a_2:

$$a_1 = b_5 = b_1q^4 = \frac{1}{9} \cdot 3^4 = 9; \quad a_2 = b_7 = b_1q^6 = \frac{1}{9} \cdot 3^6 = 81;$$
$$d = a_2 - a_1 = 72.$$

Теперь можно записать первые пять членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 9$, $d = 72$:

$$9,\ 81,\ 153,\ 225,\ 297.$$

ПРИМЕР 8

Вычислить сумму:

а) $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$;

б) $3 + 33 + 333 + 3333 + \ldots + \underbrace{333\ldots3}_{n\text{ цифр}}$.

Решение а) Обозначим искомую сумму буквой S:

$$S = (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + (96^2 - 95^2) + \ldots + (2^2 - 1^2) =$$
$$= (100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + (96 - 95)(96 + 95) +$$
$$+ \ldots + (2 - 1)(2 + 1) = 199 + 195 + 191 + \ldots + 3.$$

Числа 199, 195, 191, ..., 3 — это 50 членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 199$, $d = -4$. Сумму 50 членов прогрессии найдём по известной формуле:

$$S = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = \frac{199 + 3}{2} \cdot 50 = 5050.$$

б) Обозначим искомую сумму буквой S и рассмотрим $3S$:

$$3S = 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + 999\ldots9 =$$
$$= (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + (10^4 - 1) + \ldots + (10^n - 1) =$$
$$= (10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \ldots + 10^n) - n.$$

В скобках содержится сумма n членов геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 10$, $q = 10$. Эту сумму найдём по известной формуле:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{10(10^n - 1)}{9}.$$

Итак, $3S = \frac{10(10^n - 1)}{9} - n$, значит, $S = \frac{10}{27}(10^n - 1) - \frac{n}{3}$.

ПРИМЕР 9

Среди членов последовательности (y_n) есть числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Может ли эта последовательность быть геометрической прогрессией?

Решение Предположим, что (y_n) — геометрическая прогрессия с первым членом y_1 и знаменателем q, а числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ — её k-й, n-й и m-й члены. Тогда

$$1 = y_1q^{k-1};\quad \sqrt{2} = y_1q^{n-1};\quad \sqrt{3} = y_1q^{m-1};$$

из этих равенств находим, что $\sqrt{2} = q^{n-k}$; $\sqrt{3} = q^{m-k}$.

Возведём обе части первого равенства в степень $2(m-k)$, а обе части второго равенства в степень $2(n-k)$:

$$2^{m-k} = q^{2(n-k)(m-k)};\quad 3^{n-k} = q^{2(m-k)(n-k)}.$$

Таким образом получили, что $2^{m-k} = 3^{n-k}$. Но равенство степеней с основаниями 2 и 3 и целочисленными показателями невозможно, значит, предположение о том, что (y_n) — геометрическая прогрессия, неверно.

ПРИМЕР 10

Разложить на множители:

а) $x^n - y^n$ $(n \in N)$; б) $x^{2n+1} + y^{2n+1}$ $(n \in N)$.

Решение а) Рассмотрим конечную геометрическую прогрессию 1, $\frac{y}{x}$, $\left(\frac{y}{x}\right)^2$, $\left(\frac{y}{x}\right)^3$, ..., $\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}$. У этой прогрессии первый член равен 1, знаменатель прогрессии $\frac{y}{x}$, число членов n. Найдём её сумму:

$$1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} = \frac{1\cdot\left(\left(\frac{y}{x}\right)^n - 1\right)}{\frac{y}{x} - 1}.$$

Умножим обе части записанного равенства на x^{n-1}:

$$x^{n-1}\left(1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}\right) = \frac{x^n\cdot\left(\left(\frac{y}{x}\right)^n - 1\right)}{x\left(\frac{y}{x} - 1\right)};$$

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1} = \frac{y^n - x^n}{y - x};$$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Таким образом, мы получили формулу разложения двучлена $x^n - y^n$ на множители. Выпишем её частные случаи:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y);$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2);$$
$$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3);$$
$$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4).$$

б) Проведём аналогичные рассуждения для конечной геометрической прогрессии $1, -\frac{y}{x}, \left(\frac{y}{x}\right)^2, -\left(\frac{y}{x}\right)^3, \ldots, \left(\frac{y}{x}\right)^{2n}$. У этой прогрессии первый член равен 1, знаменатель прогрессии равен $-\frac{y}{x}$, число членов $2n + 1$; найдём её сумму:

$$1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{y}{x}\right)^{2n} = \frac{1 \cdot \left(\left(-\frac{y}{x}\right)^{2n+1} - 1\right)}{-\frac{y}{x} - 1}.$$

Умножим обе части записанного равенства на x^{2n}:

$$x^{2n}\left(1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{y}{x}\right)^{2n}\right) = \frac{x^{2n+1} \cdot \left(1 - \left(-\frac{y}{x}\right)^{2n+1}\right)}{x\left(1 + \frac{y}{x}\right)};$$

$$x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - x^{2n-3}y^3 + \ldots - xy^{2n-1} + y^{2n} = \frac{x^{2n+1} + y^{2n+1}}{x + y};$$

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x + y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - x^{2n-3}y^3 + \\ + \ldots - xy^{2n-1} + y^{2n}).$$

Мы получили ещё одну формулу разложения двучлена на множители. Выпишем её частные случаи:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2);$$
$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4).$$

6 Прогрессии и банковские расчёты

Представьте себе, что вы открыли в банке вклад в сумме a р. под p% годовых на t лет. У вас есть две стратегии поведения: либо в конце каждого года хранения вклада снимать проценты по вкладу, т. е. полученную прибыль в размере $\frac{p}{100} \cdot a$ р., либо прийти в банк один раз — в конце срока хранения вклада. Какой доход вы получите в том и другом случаях?

В первом случае при $t = 1$ вы получите $\left(a + \frac{p}{100} \cdot a\right)$ р., при $t = 2$ ваша итоговая сумма составит $\left(a + \frac{2p}{100} \cdot a\right)$ р., при $t = 3$ — $\left(a + \frac{3p}{100} \cdot a\right)$ р. и т. д. Математическая модель ситуации — конечная арифметическая прогрессия

$$a,\ a + \frac{p}{100} \cdot a,\ a + \frac{2p}{100} \cdot a,\ a + \frac{3p}{100} \cdot a,\ \ldots,\ a + \frac{tp}{100} \cdot a.$$

Итак, при первой стратегии поведения за t лет вы получите $a\left(1 + \frac{tp}{100}\right)$ р. — это так называемая *формула простых процентов*.

формула простых процентов

Если вы решили прийти в банк только в конце срока хранения вклада, то при $t = 1$ получаемая сумма составит, как и в первом случае, $a + \frac{p}{100} \cdot a$, т. е. $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ р.; сумма вклада увеличилась в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раз. Во столько же раз она увеличится и к концу второго года хранения, и к концу третьего года хранения и т. д. Математическая модель ситуации — конечная геометрическая прогрессия

$$a,\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right),\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2,\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3,\ \ldots,\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t.$$

Итак, при второй стратегии поведения за t лет вы получите $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ р. — это так называемая *формула сложных процентов*.

формула сложных процентов

Рассмотрим конкретный пример. Пусть вклад составляет 10000 р., банк даёт 10% годовых, срок хранения вклада — 5 лет. Если вы выбрали стратегию простых процентов, то к концу срока хранения вы получите в итоге сумму, равную $10000 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 10}{100}\right)$, т. е. 15 000 р. Если же вы выбрали стратегию сложных процентов, то к концу срока хранения вы получите в итоге сумму, равную $10000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5$, т. е. 16105,1 р. Как говорится в одном рекламном слогане, почувствуйте разницу.

Вопросы для самопроверки

1. Какую последовательность называют геометрической прогрессией?
2. Является ли последовательность 32, 16, 8, 4, 2, ... геометрической прогрессией? Если да, то чему равен её знаменатель?
3. Приведите пример геометрической прогрессии, знаменатель которой удовлетворяет неравенству:
   а) $q > 1$; б) $0 < q < 1$; в) $q < 0$.
4. Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии (b_n).
5. Запишите формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии (b_n).
6. Является ли последовательность $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, ... геометрической прогрессией? Если да, то найдите её 8-й член; 10-й член; сумму первых восьми членов.
7. В чём состоит характеристическое свойство геометрической прогрессии?
8. Дана геометрическая прогрессия (b_n). Известно, что $b_{15} = 3$, $b_{17} = 12$. Найдите b_{16}, если известно, что:
   а) знаменатель прогрессии — положительное число;
   б) знаменатель прогрессии — отрицательное число.

§ 25 МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

1 Дедукция и индукция. Полная и неполная индукция

В основе всякого математического исследования лежат дедуктивный и индуктивный методы. *Дедуктивный* метод рассуждений — это рассуждение от общего к частному, т. е. рассуждение, исходным моментом которого является общее утверждение, а заключительным моментом — частный результат. Если мы при решении конкретного примера делаем выводы, опираясь на какую-то теорему, то это дедуктивное рассуждение. Слово же *индукция* (или *индуктивный* метод рассуждений) применяется к рассуждениям, при помощи которых получают общие выводы, опираясь на ряд частных утверждений.

дедуктивный метод рассуждений

индуктивный метод рассуждений

Приведём пример рассуждения по индукции. Требуется установить, что каждое чётное натуральное число в пределах от 4 до 100 можно представить в виде суммы двух простых чисел. Для этого просто переберём все интересующие нас числа и выпишем соответствующие суммы:

$$4 = 2 + 2; \quad 6 = 3 + 3; \quad 8 = 3 + 5; \quad 10 = 5 + 5;$$
$$12 = 5 + 7; \quad 14 = 7 + 7; \quad 16 = 3 + 13; \quad \ldots;$$
$$90 = 7 + 83; \quad 92 = 3 + 89; \quad 94 = 5 + 89; \quad 96 = 7 + 89;$$
$$98 = 19 + 79; \quad 100 = 3 + 97.$$

Эти 49 равенств (мы выписали только 13 из них, недостающие 36 равенств вы при желании можете составить сами, например $50 = 7 + 43$; $62 = 3 + 59$ и т. д.) показывают, что сформулированное общее утверждение (про *любое* чётное число в пределах от 4 до 100) верно, оно было доказано перебором *всех* возможных частных случаев. Это так называемая *полная индукция*, когда общее утверждение доказывается *для конечного множества элементов* рассмотрением каждого элемента множества по отдельности.

Но ведь чаще общее утверждение относится не к конечному, а к бесконечному множеству, когда рассмотреть по отдельности каждый элемент множества невозможно. В таких случаях общее утверждение, получившее подтверждение в ряде частных случаев, считается не доказанным, а *угаданным*, полученным *неполной индукцией*. Естественно, оно может быть верным, но может быть и неверным. Приведём примеры.

полная индукция

неполная индукция

1. Рассматриваются суммы первых n нечётных натуральных чисел:

$$1 = 1^2; \quad 1 + 3 = 4 = 2^2; \quad 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2;$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2; \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2.$$

Выдвинем гипотезу, что $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Проверим её для шести и семи слагаемых:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2;$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2.$$

Гипотеза подтвердилась. Но всё равно утверждение остаётся гипотезой, пока оно не доказано. Впрочем, доказать его нетрудно: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$ — это сумма n членов арифметической прогрессии; значит,

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = n^2.$$

2. Рассматриваются суммы кубов первых n натуральных чисел:

$$1^3 = 1 = 1^2;$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2;$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2;$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2.$$

Выдвинем гипотезу, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)^2.$$

Проверим её для пяти и шести слагаемых:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2;$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441 = 21^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2.$$

Гипотеза подтвердилась. На самом деле сформулированное утверждение верно, мы докажем его позднее.

3. Рассматривается последовательность $y_n = n^2 + n + 17$:

$$y_1 = 19; \quad y_2 = 23; \quad y_3 = 29; \quad y_4 = 37;$$

$$y_5 = 47; \quad y_6 = 59; \quad y_7 = 73.$$

Все полученные числа простые. Возникает предположение: вся последовательность состоит из простых чисел. Проверим это для следующих трёх членов последовательности: $y_8 = 89$; $y_9 = 107$; $y_{10} = 127$. Числа 89, 107, 127 — простые, гипотеза подтвердилась. И тем не менее она неверна: есть в последовательности члены, не являющиеся простыми числами, например y_{16}:

$$y_{16} = 16^2 + 16 + 17 = 16(16 + 1) + 17 = 17(16 + 1) = 17 \cdot 17$$

является составным числом.

Итак, утверждение, полученное неполной индукцией, остаётся лишь гипотезой, пока не доказано точным математическим рассуждением, охватывающим все частные случаи. Иными словами, неполная индукция не считается в математике законным методом строгого доказательства, поскольку может привести к ошибке. Однако замечательно то, что она иногда приводит к истине. Можно охарактеризовать неполную индукцию как эвристический (от греч. *heurisko* — отыскиваю) метод открытия новых истин.

2 Метод математической индукции

метод математической индукции

Метод полной индукции имеет в математике ограниченное применение, поскольку охватывает лишь ситуации с конечным числом частных случаев. Чаще всего математическое утверждение охватывает бесконечное множество частных случаев, сделать проверку для всех случаев невозможно. Опираться при этом на неполную индукцию опасно, можно сделать неправильный вывод. Во многих случаях выход заключается в обращении к особому методу рассуждений, который называют *методом математической индукции*. Он заключается в следующем.

Пусть нужно доказать справедливость некоторого утверждения $A(n)$ для любого натурального числа n (например, нужно доказать, что сумма первых n нечётных чисел равна n^2). Сначала проверяют справедливость утверждения для $n = 1$ *(базис индукции)*. Затем доказывают, что для любого натурального значения k верно следующее утверждение: если справедливо $A(k)$, то справедливо и $A(k + 1)$ *(индукционный шаг)*. Тогда утверждение $A(n)$ считается доказанным для любого n.

В самом деле, утверждение справедливо для $n = 1$ (это проверялось отдельно). Далее доказано, что из $A(k)$ следует $A(k + 1)$; значит, если верно $A(1)$, то верно и $A(2)$; если верно $A(2)$, то верно и $A(3)$; если верно $A(3)$, то верно и $A(4)$ и т. д. В конце концов мы дойдём до любого натурального числа, а потому утверждение считается доказанным для любого n.

Этот метод уже использовался в § 23. При получении формулы n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$ мы применяли рассуждения, основанные на неполной индукции, а затем обосновали эту формулу методом математической индукции.

Обобщая сказанное, сформулируем следующий общий принцип.

ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Утверждение, зависящее от натурального числа n, справедливо для любого n, если выполнены два условия:

а) утверждение верно для $n = 1$;

б) из справедливости утверждения для $n = k$, где k — любое натуральное число, вытекает справедливость утверждения и для следующего натурального числа $n = k + 1$.

ПРИМЕР 1

Доказать, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)^2 \qquad (1)$$

(это равенство мы угадали в предыдущем пункте).

Решение 1) Справедливость равенства (1) для $n = 1$ (и даже для $n = 2, 3, 4, 5, 6$) ранее проверена.

2) Предположим, что равенство (1) выполняется при $n = k$, т. е. предположим, что верно равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k)^2. \qquad (2)$$

Докажем, что тогда проверяемое равенство (1) верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что верно равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k + (k + 1))^2$$

или, что то же самое,

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k + (k + 1))^2 - (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + k^3) = (k + 1)^3. \qquad (3)$$

Особо подчеркнём: равенство (3) интересует нас не само по себе. Представляет интерес только один вопрос — следует оно из равенства (2) или нет.

Заменив сумму кубов в левой части равенства (3) квадратом суммы из правой части равенства (2), получим:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k + (k + 1))^2 - (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k)^2 =$$
$$= ((1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k + (k + 1)) - (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k)) \times$$
$$\times ((1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k + (k + 1)) + (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k)) =$$
$$= (k + 1) \cdot (2(1 + 2 + 3 + \ldots + k) + (k + 1)) =$$
$$= (k + 1) \cdot \left(2 \cdot \frac{1 + k}{2} \cdot k + (k + 1)\right) = (k + 1) \cdot (k(k + 1) + (k + 1)) =$$
$$= (k + 1)(k + 1)^2 = (k + 1)^3.$$

Итак, из равенства (2) следует равенство (3).

Оба условия (базис индукции и индукционный шаг) принципа математической индукции выполняются, значит, равенство (1) верно для любого натурального значения n.

Метод математической индукции используется в различных ситуациях. Так, в примере 1 мы применили этот метод для доказательства тождества, а в § 23 — для вывода формулы n-го члена арифметической прогрессии. Рассмотрим ещё ряд примеров. Но сначала заметим, что иногда требуется доказать некоторое утверждение не для всех натуральных значений n, как было до сих пор, а для $n \geqslant p$. Тогда на первом шаге проверяют справедливость утверждения не для $n = 1$, а для $n = p$, а в остальном схема применения метода математической индукции та же.

2 Примеры использования метода математической индукции

ПРИМЕР 2

Найти сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n + 1)}.$$

Решение Обозначим сумму символом S_n и найдём её значения при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}; \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3};$$

$$S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}; \quad S_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}; \ \ldots .$$

Мы получили последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$. Возникает гипотеза, что $S_n = \frac{n}{n+1}$. Докажем справедливость этой формулы методом математической индукции.

Для $n = 1$ формула справедлива. Предположим, что $S_k = \frac{k}{k+1}$. Докажем, что тогда $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

В самом деле,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

По принципу математической индукции делаем вывод, что заданная сумма равна $\frac{n}{n+1}$.

Заметим, однако, что в этом примере, как и ниже, в примере 4 б), можно обойтись без метода математической индукции:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

ПРИМЕР 3

Доказать, что для $n \geqslant 2$ и $x > 0$ справедливо неравенство

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

(его называют *неравенством Бернулли* в честь швейцарского математика Якоба Бернулли (1654—1705)).

Решение 1) При $n = 2$ неравенство выполняется:

$$(1 + x)^2 > 1 + 2x,$$

что является верным неравенством.

2) Предположим, что неравенство Бернулли верно для $n = k$ $(k \geqslant 2)$:

$$(1 + x)^k > 1 + kx. \qquad (4)$$

Докажем, что тогда оно верно и для $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$(1 + x)^{k+1} > 1 + (k + 1)x.$$

В самом деле, умножив обе части неравенства (4) на одно и то же принимающее только положительные значения выражение $1 + x$, получим:

$$(1 + x)^{k+1} > (1 + kx)(1 + x); \ (1 + kx)(1 + x) =$$
$$= 1 + (k + 1)x + kx^2 > 1 + (k + 1)x;$$

итак, $(1 + x)^{k+1} > 1 + (k + 1)x$.

По принципу математической индукции делаем вывод, что неравенство Бернулли справедливо для всех $n \geqslant 2$.

ПРИМЕР 4

Доказать, что для $n \geqslant 2$ справедливо неравенство:

а) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$;

б) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

Решение а) 1) При $n = 2$ проверяемое неравенство принимает вид

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}.$$

Это верное неравенство, поскольку его левая часть меньше 2, а правая — больше 2.

2) Предположим, что при $n = k$ $(k \geqslant 2)$ выполняется неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}. \qquad (5)$$

Докажем, что тогда выполняется неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}. \qquad (6)$$

Прибавив к обеим частям неравенства (5) одно и то же выражение $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$, получим

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Если мы докажем, что

$$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}, \qquad (7)$$

то тем самым будет получено неравенство (6).

Рассмотрим разность правой и левой частей неравенства (7) и выполним некоторые преобразования:

$$2\sqrt{k+1}-\left(2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=\frac{2k+2-2\sqrt{k+1}\sqrt{k}-1}{\sqrt{k+1}}=$$

$$=\frac{k+1-2\sqrt{k+1}\sqrt{k}+k}{\sqrt{k+1}}=\frac{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2}{\sqrt{k+1}}.$$

Полученное выражение положительно, значит, неравенство (7) верно, а потому верно и неравенство (6).

Итак, оба условия принципа математической индукции выполнены. Значит, требуемое неравенство доказано.

б) Это неравенство также можно доказать методом математической индукции, но целесообразнее использовать элементарные приёмы — мы это сделали выше, в § 22 (см. там пример 1).

ПРИМЕР 5

Доказать, что $(11^{n+2}+12^{2n+1})\ \vdots\ 133$ для любого натурального значения n (напомним, что знак $\vdots$ означает «делится на»).

Решение При $n = 1$ утверждение принимает вид

$$(11^3+12^3)\ \vdots\ 133.$$

Это верно, поскольку

$$11^3+12^3=(11+12)(11^2-11\cdot 12+12^2)=(23\cdot 133)\ \vdots\ 133.$$

Предположим, что утверждение верно при $n = k$, т. е. предположим, что $(11^{k+2}+12^{2k+1})\ \vdots\ 133$.

Докажем, что тогда утверждение верно и при $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$(11^{k+3}+12^{2k+3})\ \vdots\ 133.$$

В самом деле,

$$11^{k+3}+12^{2k+3}=11\cdot 11^{k+2}+12^2\cdot 12^{2k+1}=$$
$$=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\cdot 12^{2k+1}.$$

Согласно предположению $(11^{k+2} + 12^{2k+1}) \vdots 133$. Тогда и сумма $11 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}$ делится на 133, т. е.

$$(11^{k+3} + 12^{2k+3}) \vdots 133.$$

По принципу математической индукции делаем вывод, что требуемое утверждение доказано.

ПРИМЕР 6

Дана последовательность Фибоначчи:

$$y_1 = 1,\ y_2 = 1,\ y_n = y_{n-2} + y_{n-1},\text{ если } n = 3, 4, 5, \ldots$$

(см. пример § 21, пункт 4). Доказать, что:

а) $y_{2n+2} = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n+1}$;

б) $y^2_{n+1} - y_n y_{n+2} = (-1)^n$.

Решение а) При $n = 1$ утверждение принимает вид

$$y_4 = y_1 + y_3.$$

Это верное равенство, поскольку $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$, $y_4 = 3$.

Предположим, что утверждение верно для $n = k$, т. е.

$$y_{2k+2} = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2k+1}.$$

Докажем, что тогда утверждение верно для $n = k + 1$, т. е.

$$y_{2k+4} = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2k+1} + y_{2k+3}.$$

С помощью рекуррентного соотношения, задающего последовательность Фибоначчи, находим, что $y_{2k+4} = y_{2k+2} + y_{2k+3}$. Воспользовавшись для y_{2k+2} сделанным предположением, получим:

$$y_{2k+4} = y_{2k+2} + y_{2k+3} = (y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2k+1}) + y_{2k+3} =$$
$$= y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2k+1} + y_{2k+3}.$$

Значит, утверждение верно для любого n.

б) При $n = 1$ утверждение принимает вид

$$y^2_2 - y_1 y_3 = (-1)^1.$$

Поскольку $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$, получаем $1^2 - 1 \cdot 2 = -1$ — верное равенство.

Предположим, что утверждение верно для $n = k$, т. е.

$$y^2_{k+1} - y_k y_{k+2} = (-1)^k;$$

докажем, что тогда утверждение верно для $n = k + 1$, т. е.

$$y^2_{k+2} - y_{k+1} y_{k+3} = (-1)^{k+1}.$$

В самом деле,

$$y_{k+2}^2 - y_{k+1}y_{k+3} = y_{k+2}^2 - y_{k+1}(y_{k+1} + y_{k+2}) =$$
$$= y_{k+2}^2 - y_{k+1}^2 - y_{k+1}y_{k+2} = y_{k+2}(y_{k+2} - y_{k+1}) - y_{k+1}^2 =$$
$$= y_{k+2}y_k - y_{k+1}^2 = -(y_{k+1}^2 - y_ky_{k+2}) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}.$$

Значит, утверждение верно для любого n.

Вопросы для самопроверки

1. В чём заключается дедуктивный метод рассуждений?
2. В чём заключается индуктивный метод рассуждений?
3. В чём состоит принцип математической индукции? Как вы считаете, рассуждения, основанные на этом методе, являются по своей сути индуктивными или дедуктивными?
4. Перечислите типы заданий, для выполнения которых является полезным метод математической индукции.

Основные результаты

- Мы познакомились с новой *математической моделью* — числовой последовательностью (функцией натурального аргумента).
- Мы узнали новые *термины* математического языка:
  — числовая последовательность, n-й член последовательности;
  — монотонная (возрастающая, убывающая) последовательность;
  — арифметическая прогрессия, разность арифметической прогрессии;
  — геометрическая прогрессия, знаменатель геометрической прогрессии.
- Мы ввели новые *обозначения*:
  (y_n) или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ — для числовой последовательности;
  $\div$ — для арифметической прогрессии;
  $\because\!\!\because$ — для геометрической прогрессии;
  S_n — для суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ членов последовательности (x_n).
- Мы обсудили *три способа* задания числовой последовательности: аналитический; словесный; рекуррентный.

- Мы сформулировали и обосновали ряд свойств арифметической и геометрической прогрессий. Сведём их в одну таблицу.

	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение	$a_1 = a,\ a_n = a_{n-1} + d$	$b_1 = b,\quad b_n = b_{n-1} \cdot q,$ $b \neq 0,\ q \neq 0$
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$b_n = b_1 q^{n-1}$
Характеристическое свойство	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$\lvert b_n \rvert = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$
Формула суммы n членов	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},\ q \neq 1$

- Мы познакомились с новым методом рассуждений — методом математической индукции.

Темы исследовательских работ

1. Числовые последовательности и их свойства.
2. Описание реальных ситуаций с помощью прогрессий.
3. Использование метода математической индукции.

5 ГЛАВА ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 26 КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

1 Дерево вариантов

Простейшие комбинаторные задачи несколько напоминают детскую игру в кубики. Имеется конечное число кубиков, или элементов некоторого конечного множества, а нужно посчитать количество тех или иных комбинаций, составленных из этих кубиков (элементов). Если нужных комбинаций не слишком много, то все их можно просто перечислить или, как говорят, перебрать все возможности. В этом и состоит *метод перебора вариантов*. Например, если из цифр 1, 5, 9 следует составить трёхзначное число без повторяющихся цифр, то все возможные варианты нетрудно выписать. Это 159, 195, 519, 591, 915 и 951. Значит, всего можно составить шесть таких чисел.

Подчеркнём, что уже в этом простом примере мы привели не случайный, а разумно *организованный перебор*. Сначала на первом месте зафиксировали 1 и увидели, что таких вариантов всего два: 159 и 195. Затем на первое место поставили 5 и увидели, что получилось ещё два варианта: 519 и 591. Наконец, составили числа, начинающиеся с 9, — это 915 и 951.

Хорошо подобранный перебор вариантов крайне важен в более сложных ситуациях, когда и количество возможных комбинаций достаточно велико, и подсчёт приходится вести, рассматривая различные случаи.

ПРИМЕР 1

Из цифр 2, 4, 7 следует составить трёхзначное число, в котором ни одна цифра не может повторяться более двух раз.

а) Найти наименьшее такое число.

б) Найти наибольшее такое число.

в) Сколько таких чисел, начинающихся с 2, можно составить?

г) Сколько всего таких чисел можно составить?

Решение а) Наименьшим числом будет 224, ведь если на первое или на второе место вместо цифры 2 поставить цифру 4 или цифру 7, то увеличится или число сотен, или число десятков. А раз цифра 2 уже повторилась, то на последнем месте должна стоять цифра 4 (а не 7).

б) Рассуждая аналогично, найдём наибольшее число — это 774.

в) Сначала назовём числа без повторений цифр. Это 247 и 274. Потом назовём числа, в которых повторяется 2. Это 224, 227, 242, 272. Число, в котором повторена цифра 4, только одно, это 244. Число, в котором повторена цифра 7, также одно, это 277. Всего получилось $2 + 4 + 1 + 1 = 8$ чисел.

г) Количество чисел, начинающихся с цифры 4, можно посчитать так же, как в пункте в); их всего восемь. Разумеется, то же верно и для чисел, начинающихся с цифры 7, их тоже восемь. Всего получим 24 числа.

Ответ а) 224; б) 774; в) 8; г) 24.

Формально для ответа в пункте г) можно было бы и не решать а) и б). Однако в каждой задаче на перебор вариантов бывает полезно выписать несколько типичных комбинаций, количество которых мы собираемся подсчитать.

Как и многие математические задачи, пример 1 г) допускает другой способ решения. Вот он. Найдём сначала количество *всех* трёхзначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 4, 7. По *правилу умножения*, с которым мы познакомимся чуть позже, их будет $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. А теперь вычтем количество чисел с тройными повторениями цифр. Таких чисел всего три: 222, 444, 777. Значит, ответ: $27 - 3 = 24$.

Решение примера 1 в) также можно оформить по-другому, записав построение трёхзначного числа шаг за шагом в виде некоторого «поэтажного» плана. Поместим первую цифру 2 в верхний прямоугольник, от которого проведём три «дороги» (рис. 169). Они соответствуют выбору второй цифры. Это или 2, или 4, или 7. Получим три прямоугольника на втором уровне и перейдём к выбору третьей цифры. Если второй цифрой оказалась 2, то по условию третьей цифрой может быть или 4, или 7. Значит, тут возможны всего два варианта, в результате которых получатся трёхзначные числа 224 и 227. Если же вторая цифра равна 4 или 7, то для третьей цифры ограничений нет и это может быть или 2, или 4, или 7. Значит, в каждом из этих двух случаев возможны по три варианта составления трёхзначных чисел. Получатся числа 242, 244, 247 и 272, 274, 277.

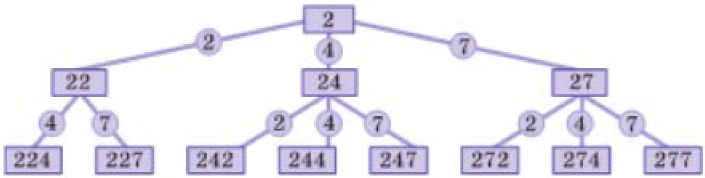


Рис. 169

Всего: 8 чисел

Мы составили так называемое *дерево возможных вариантов*. Преимущество этого способа рассуждения состоит в его наглядности: все варианты видны на картинке (см. рис. 169), и понятно, как именно организован перебор всех возможностей.

дерево возможных вариантов

Такого рода диаграммы в подробностях удобно рисовать только для сравнительно небольшого числа вариантов, а, например, для сотен комбинаций дерево вариантов целиком не нарисуешь. Тогда приходится действовать по-другому.

2 Правило умножения

Правило умножения Для того чтобы найти число всех возможных исходов проведения двух испытаний A и B, следует перемножить число всех исходов испытания A и число всех исходов испытания B.

правило умножения

Для объяснения правила умножения нарисуем дерево вариантов. На первом уровне у нас будут перечислены все исходы a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n испытания A. После каждого из уже выписанных исходов возможны все исходы b_1, b_2, b_3, ..., b_{k-1}, b_k испытания B — ведь испытания предполагаются независимыми. В результате получится $\underbrace{k + k + k + \ldots + k}_{n} = nk$ исходов (рис. 170).

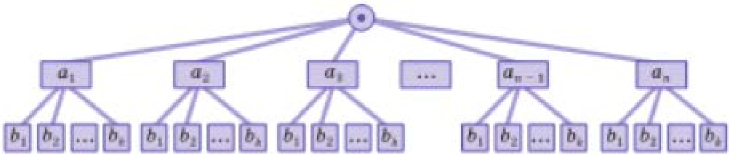


Рис. 170 Всего: n раз по k, т. е. nk исходов

Замечание Правило умножения верно и для трёх, и для четырёх и т. д. независимых испытаний. Для объяснения достаточно нарисовать нужное дерево вариантов и подсчитать количество возможных вариантов.

В некоторых случаях приходится использовать более общее правило умножения. Вернёмся к рис. 170. Для сохранения вывода «Всего: n раз по k, т. е. nk исходов» совсем не обязательно на нижнем уровне иметь n одинаковых групп из k исходов b_1, b_2, ..., b_k. Состав групп может быть различным. Важно только, чтобы в каждой группе было бы ровно k исходов.

Общее правило умножения Если испытание A имеет n исходов, после наступления каждого из которых испытание B имеет k исходов, то число всех возможных исходов последовательного проведения испытаний A и B равно $n \cdot k$.

Такое правило применимо и в тех случаях, когда сами исходы второго испытания B зависят от исходов первого испытания A. Самое главное, чтобы *число* исходов B не зависело от исходов A.

В дальнейшем мы не будем всякий раз уточнять, каким именно вариантом правила умножения мы пользуемся. Также мы будем использовать правило умножения не только для двух, но и для трёх, четырёх и т. д. испытаний.

Для следующего примера мы приведём три способа решения: перебором, с помощью дерева вариантов и по правилу умножения.

ПРИМЕР 2

В коридоре — три лампочки. Сколько имеется различных способов освещения, включая случай, когда все лампочки не горят?

Решение *Первый способ* (перебор вариантов). Пронумеруем лампочки и будем писать + или − в зависимости от того, горит или не горит очередная лампочка. Тогда все способы освещения можно просто перечислить. Вот они: + + +, + + −, + − +, + − −, − + +, − + −, − − +, − − −. Всего восемь способов.

Второй способ (дерево вариантов). На рис. 171 наглядно представлены восемь способов освещения коридора.

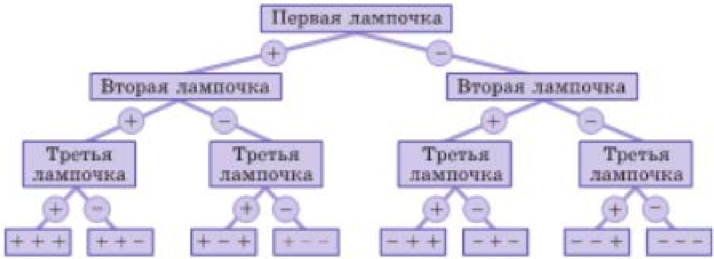


Рис. 171

Третий способ (правило умножения). Первая лампочка может или гореть, или не гореть, т. е. имеется два возможных исхода. Но то же самое относится ко второй и к третьей лампочкам. Мы предполагаем, что лампочки горят или нет *независимо* друг от друга. По правилу умножения получаем, что число всех способов освещения равно $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Ответ 8.

У каждого из этих трёх способов решения в каждом конкретном случае есть и преимущества, и недостатки. Выбор способа решения — за вами!

3 Факториалы и перестановки

Отметим всё же, что правило умножения позволяет практически одним способом решать самые разнообразные задачи. Например, оно приводит к крайне важному в математике понятию ***факториала***.

ПРИМЕР 3

В семье — шесть человек, а за столом в кухне — шесть стульев. Было решено каждый вечер перед ужином рассаживаться на эти шесть стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

Решение Ответ оказывается неожиданно большим: почти два года! Объясним его. Для удобства рассуждений пронумеруем стулья № 1, № 2, № 3, № 4, № 5, № 6 и будем считать, что члены семьи (бабушка, дедушка, мама, папа, дочь, сын) занимают места по очереди. Нас интересует, сколько всего существует различных способов рассаживания.

Предположим, что первой садится бабушка. У неё имеется шесть вариантов выбора стула. Вторым садится дедушка и выбирает стул из пяти оставшихся. Мама делает свой выбор третьей, и выбор у неё будет из четырёх стульев. У папы будет уже три варианта, у дочки — два, ну а сын сядет на единственный незанятый стул. По комбинаторному правилу умножения получаем, что всего имеется $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ различных способов рассаживания, а 720 дней — это почти два года.

Ответ 720.

Определение

Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают $n!$ и называют **«эн факториал»**:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

n-факториал

По-английски одно из значений слова *factor* — «множитель». Так что *«эн факториал»* примерно переводится как «состоящий из n множителей». Приведём несколько первых значений для $n!$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	$1 \cdot 2 = 2$	$2! \cdot 3 = 6$	$3! \cdot 4 = 24$	$4! \cdot 5 = 120$	$5! \cdot 6 = 720$	$6! \cdot 7 = 5040$

Значения $n!$ очень быстро возрастают с увеличением n. Например, 10! больше, чем 3,5 миллиона, а 15! примерно равно 1,3 триллиона.

Для подсчётов, связанных с $n!$, бывает удобно использовать такую формулу:

Формула	Объяснение
$n! = (n-1)! \cdot n$	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)) \cdot n = (n-1)! \cdot n$

Например, для вычисления значения $\frac{7! \cdot 4!}{6! \cdot 5!}$ совсем не обязательно находить все четыре факториала и потом производить вычисления. Удобнее сначала провести сокращения:

$$\frac{7! \cdot 4!}{6! \cdot 5!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 4!}{6! \cdot 4! \cdot 5} = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

ПРИМЕР 4

а) Сколькими способами четыре вора могут по одному разбежаться на все четыре стороны?

б) В 9 «А» классе в среду семь уроков: алгебра, геометрия, литература, русский язык, английский язык, биология и физкультура. Сколько вариантов расписания на среду можно составить?

Решение а) Пусть воры разбегаются поочерёдно. Тогда у первого есть четыре варианта выбора направления, у второго — три варианта, у третьего — два и у последнего — один вариант. По правилу умножения получаем ответ: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$.

б) Для алгебры есть семь вариантов расположения в расписании. Если для алгебры выбор сделан, то для геометрии будет уже шесть вариантов. Если алгебра и геометрия заняли в расписании своё место, то для литературы остаётся пять вариантов и т. д. По правилу умножения получаем ответ: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$.

Ответ а) $24 = 4!$; б) $5040 = 7!$.

Мы видим, что условия задач выглядят по-разному, а решаются они почти одним и тем же способом. Значит, есть какое-то общее правило для решения такого типа задач. Мы сформулируем его в виде теоремы о перестановках элементов конечного множества.

ТЕОРЕМА

n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно $n!$ способами.

Исторически более принят не термин «расстановка», а термин «перестановка», и поэтому эту теорему чаще формулируют так: «*Число всех перестановок множества из n элементов равно $n!$*». Сокращённо это записывают в виде формулы

$$\boxed{P_n = n!}$$

В этом сокращении буква P соответствует первой букве английского глагола (существительного) *permute (permutation)*, который и переводится как «переставлять» («перестановка»). Например, $P_3 = 3! = 6$, $P_7 = 7! = 5040$ и т. д.

Вопросы для самопроверки

1. В подъезде девятиэтажного дома на каждом этаже по 4 квартиры. Наибольший номер квартиры в подъезде — 108. Найдите наименьший номер квартиры в этом подъезде.
2. В восемнадцатиэтажном доме 3 подъезда и на каждом этаже по 4 квартиры. Сколько всего квартир в этом доме?
3. В булочной продают чёрный хлеб пяти сортов. Коля и Толя независимо друг от друга покупают по батону чёрного хлеба. Сколько имеется вариантов такой покупки?
4. В булочной продают чёрный хлеб пяти сортов. Толя покупает хлеб сразу после Коли и его выбор будет отличаться от выбора Коли. Сколько имеется вариантов такой покупки?
5. При гадании по стихотворному тексту наугад называют номер строфы и номер строки в ней. Затем эту строку зачитывают. Сколько имеется результатов гадания по тексту второй главы романа в стихах А. С. Пушкина «Евгений Онегин»?
6. Два светофора работают независимо. На каждом светофоре может гореть красный, жёлтый или зелёный свет. Нарисуйте дерево вариантов работы светофоров. Сколько получилось вариантов?
7. Сформулируйте правило умножения для двух испытаний.
8. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 3, 8, 9 (повторения допускаются)?
9. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0, 3, 8, 9 (повторения допускаются)?
10. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0, 3, 8, 9 (без повторения цифр)?
11. Нарисуйте дерево вариантов к вопросу 10.
12. Игральный кубик бросают дважды. Найдите число возможных результатов выпадений кубика.
13. Во сколько раз число $5!$ больше суммы $3! + 4!$?
14. Решите уравнение $2 \cdot x! + 5! = 10200$.
15. Сформулируйте теорему о перестановках множества из n элементов.

§ 27 СТАТИСТИКА: ДИЗАЙН ИНФОРМАЦИИ

Начнём с конкретного примера. Допустим, что в 9-х классах «А» и «Б» измерили рост (в сантиметрах) 50 учеников. Получился набор из 50 чисел, некоторые из которых могли повториться. Вряд ли самое маленькое из них будет меньше 140, а самое большое — больше 200. Можно, соблюдая очерёдность измерений, выписать все данные в строчку через запятую. Можно расположить их в две колонки в соответствии с классными списками. Можно как-то записать их в виде таблицы 5×10 и т. п. В итоге будет собрана полная информация о проведённом измерении. К сожалению, практически при любом способе расположения *абсолютно всех* данных эта информация трудно «читается»: она не наглядна, занимает много места, никак не упорядочена и т. д.

А представьте результаты, состоящие не из 50, а из 500, 5000 или из миллионов различных чисел! Например, число и размеры вкладов в Сбербанке за текущий год или данные о производительности труда на предприятиях какой-нибудь отрасли по всей стране, результаты голосования по всем избирательным участкам и т. п. Единственный разумный выход — каким-то образом *преобразовать* первоначальные данные измерения, в первую очередь заметно уменьшив их общее количество. Одна из основных задач статистики как раз и состоит в надлежащей *обработке информации*. Конечно, у статистики есть много других задач: получение и хранение информации, выработка различных прогнозов, оценка их достоверности и т. д. Ни одна из этих целей не достижима без обработки данных.

Итак, в первую очередь займёмся статистическими методами обработки информации. Как правило, порядок преобразований первоначально полученной информации таков:

1) сначала данные измерений *упорядочивают* и *группируют*;
2) затем составляют *таблицы распределения данных*;
3) таблицы распределения переводят в *графики распределения*;
4) наконец, получают своего рода *паспорт данных* измерения, в котором собрано небольшое количество основных *числовых характеристик* полученной информации.

Зафиксируем одно конкретное измерение и проследим шаг за шагом, как его данные преобразуются в процессе обработки информации.

Измерение (И). У 50 работников городского предприятия попросили оценить время, которое они в среднем тратят на путь от дома до работы. Получились следующие данные в минутах (с точностью до 10 минут).

20	100	20	30	40	50	30	80	90	40
30	50	20	50	30	30	50	60	60	50
30	40	60	50	100	60	90	10	20	50
90	80	20	40	50	10	50	40	30	40
60	120	30	40	60	20	60	10	50	60

1 Группировка информации

Первое, что следует оценить, — это рамки, в которых вообще могут находиться данные измерения. Менее 10 минут (т. е. 0 минут) никто не заявил (территориально дом и работа — это не одно и то же), а более 180 минут (более трёх часов) на проезд по городу в одну сторону вряд ли кто-то будет тратить каждый день. Значит, в принципе в этом измерении могли получиться числа 10, 20, 30, ..., 160, 170, 180. Мы составили *общий ряд данных*. Данные располагают, как правило, *в порядке возрастания*.

Итак:

Измерение	Общий ряд данных
Время в пути (в минутах)	10, 20, 30, ..., 170, 180

ПРИМЕР 1

Выписать общий ряд данных следующих измерений:
а) месяц рождения учеников вашей школы;
б) год рождения ваших родственников и знакомых;
в) годовой процент начислений по вкладам в банке;
г) начальные буквы в первой строке стихотворения.

Решение а) Всего может получиться 12 месяцев. Если перечислить их не по названиям, а по номерам, то получим общий ряд данных:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.$$

б) Вряд ли у вас есть родственники или знакомые, которым много больше 100 лет, а вот новорождённые вполне могут встретиться. Значит, общий ряд данных выглядит так: 1917, 1918, ..., 2014, 2015, 2016.

в) Никакой уважающий себя банк более 15 % годовых не даст. Что касается нижней оценки, то тут менее 0,01 %, которые даёт Сбербанк России по вкладам до востребования, невозможно представить. Значит, в этом случае общий ряд данных выглядит так: 0,01; 0,02; 0,03; ... ; 14,98; 14,99; 15.

г) В первой строке стихотворения в принципе могут встретиться все буквы русского алфавита от *а* до *я*. Следует исключить нереальные случаи (*ь*, *ъ*, *ы*). Оставшиеся буквы можно, например, перенумеровать по порядку и перейти к числовому общему ряду: 1, 2, 3, ..., 29, 30.

Подчеркнём, что определения в статистике не всегда носят столь же точный характер, как, скажем, определения в геометрии или алгебре. Например, в пункте б) примера 1 от добавления 1914 и 1915 к последовательности 1916, 1917, ..., 2015 она не перестанет быть общим рядом данных. В пункте в) все годовые проценты можно было в принципе измерять с точностью до десятых и тогда общий ряд данных составили бы числа 0,1; 0,2; ...; 0,9; 1; 1,1; ...; 14,9; 15.

В конкретном измерении вполне может случиться так, что какие-то данные из общего ряда вообще не встретились. Значит, надо отличать реально полученные результаты измерения от общего ряда данных. Например, в измерении (И) нам реально встретились только такие результаты: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 120. Каждое из этих чисел называют *вариантой* измерения.

Варианта измерения — *один из результатов этого измерения.*

Несколько непривычно, но в статистике используют слово именно женского рода.

варианта измерения

Если все варианты измерения перечислить по порядку (и без повторений), то получится *ряд данных измерения*. В нашем измерении (И) ряд данных — это 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 120.

Итак:

Измерение	Общий ряд данных	Ряд данных конкретного измерения
Время в пути	10, 20, 30, ..., 170, 180	10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 120

ПРИМЕР 2

Выписать ряд данных измерения, состоящего из всех разных букв первых двух строк стихотворения:

а) «Не говори никому, / Всё, что ты видел, забудь...»*;
б) «Это дерево сосна, / И судьба сосны ясна...»**.

Решение И в а), и в б) общий ряд данных — все буквы русского алфавита. а) Ряд данных: *а, б, в, г, д, е, ё, з, и, к, л, м, н, о, р, с, т, у, ч, ы, ь*. Тут использована 21 буква на 33 местах и повторений букв очень мало.

б) Ряд данных: *а, б, в, д, е, и, н, о, р, с, т, у, ы, ь, э, я*. Здесь использованы 16 букв на 30 местах, повторений больше, и в особенности это относится к букве «с». Это так называемая *аллитерация*.

Как мы видим, не все варианты конкретного измерения находятся в одинаковом положении. Какие-то встречаются много раз, какие-то реже, а некоторые встречаются по одному разу.

Определение

Если среди всех данных конкретного измерения одна из вариант встретилась ровно k раз, то число k называют **кратностью** этой варианты измерения.

кратность варианты

Например, в измерении (И) время в 60 минут встретилось восемь раз, а время 120 минут встретилось один раз. Значит, кратность варианты 60 равна восьми, а кратность варианты 120 равна единице. Перед дальнейшей обработкой данные измерения удобно *сгруппировать*. Делается это так. Для удобства запишем данные измерения (И) в десятках минут.

$\cancel{2}$	$\cancel{10}$	$\cancel{2}$	3	4	5	3	8	9	4
3	5	2	5	3	3	5	6	6	5
3	4	6	5	10	6	9	1	2	5
9	8	2	4	5	1	5	4	3	4
6	12	3	4	6	2	6	1	5	6

Первые три результата 2, 10, 2 в первой строке перечёркнуты в знак того, что мы их уже сосчитали. Линии, которыми эти результаты перечёркнуты, повторим в выписанном заранее ряду данных:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	//								/		

* Из стихотворения О. Мандельштама.
** Из стихотворения Ю. Минералова.

Будем двигаться по строчкам далее и перечёркивать очередные результаты, а каждое зачёркивание копировать ниже соответствующей варианты в ряду данных. Вот что получится после прохождения первой строки: в ней по два раза встретились варианты 2, 3, 4 и по одному разу — варианты 5, 8, 9, 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	//	//	//	/			/	/	/		

Результат после прохождения первых двух строк выглядит так:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	///	~~////~~	//	~~////~~	//		/	/	/		

Чтобы не сбиться со счёту, вместо каждой пятой чёрточки проводят линию с другим наклоном, которая перечёркивает четыре предыдущие чёрточки. На практике, конечно, все подсчёты производят в одном месте: ведь промежуточные результаты не нужны. Вот как в итоге будет выглядеть результат подсчёта кратностей в нашем примере:

1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
///	~~////~~/	~~////~~///	~~////~~//	~~////~~~~////~~	~~////~~///	//	///	//	/

Теперь можно составить *сгруппированный ряд данных*. В нём каждая варианта повторена столько раз, сколько она встретилась в измерении, т. е. число повторений каждой варианты равно кратности этой варианты:

сгруппированный ряд данных

$$\underbrace{1, 1, 1}_{3},\ \underbrace{2, \ldots, 2}_{6},\ \underbrace{3, \ldots, 3}_{8},\ \underbrace{4, \ldots, 4}_{7},\ \underbrace{5, \ldots, 5}_{10},\ \underbrace{6, \ldots, 6}_{8},$$
$$8, 8, \underbrace{9, 9, 9}_{3}, 10, 10, 12.$$

На этом заканчивается первый шаг обработки информации — её упорядочивание и группировка.

После завершения этого шага удобно ввести важный статистический показатель — *медиану* ряда данных. Кратко, медиана ряда чисел — это число, которое после упорядочения ряда «делит» его на две равные по количеству данных половины. Например, если упорядоченный ряд состоит из 15 чисел, то восьмое по счёту число — это его медиана. И слева, и справа от медианы расположено одинаковое количество чисел такого ряда — по 7 штук (см. рис. 172).

медиана измерения

Рис. 172

А как поступать, если упорядоченный ряд состоит из 16 чисел? Тогда надо выбрать восьмое и девятое по счету числа и взять их полусумму. Она снова находится «посередине», делит ряд «пополам»: и слева, и справа от него расположено одинаковое количество чисел ряда, по 8 штук.

Вот несколько примеров нахождения медиан:

Ряд 3, 4, 5 состоит из трёх чисел, его медиана равна 4.

Ряд −3, −3, −1, 0, 5, 6, 7, 8, 2015 состоит из девяти чисел, его медиана равна 5.

Ряд 3, 4, 5, 6 состоит из четырёх чисел, его медиана равна полусумме $\frac{4+5}{2}$, т. е. равна 4,5.

Ряд 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 состоит из десяти чисел, его медиана равна полусумме чисел, стоящих на 5-м и на 6-м местах, т.е. равна $\frac{0+0}{2} = 0$.

Сформулируем общее правило.

Правило Для нахождения медианы ряда следует упорядочить этот ряд и посчитать в нём количество чисел. Если ряд содержит $2n + 1$ число, то медиана — это число, стоящее на $(n + 1)$-м месте. Если ряд содержит $2n$ чисел, то медиана — это число, равное полусумме чисел, стоящих на n-м $(n + 1)$-м местах.

2 Табличное представление информации

Составим таблицу из двух строк, в первой из которых будет ряд данных измерения. Во вторую строку таблицы поставим кратности соответствующих вариант. Получим *таблицу распределения* данных. Вот как это выглядит в измерении (И).

	Варианта (время в десятках минут)										Сумма
	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	
Кратность	3	6	8	7	10	8	2	3	2	1	50

Если сложить все кратности, то получится количество всех данных измерения — *объём измерения*. Так как опрашивали 50 работников, то объём измерения (И) равен именно 50. На практике для контроля всегда складывают найденные кратности вариант: сумма должна равняться объёму измерения.

таблица распределения данных

объём измерения

Кроме того, при общей оценке распределения данных не очень важно, что, например, варианта 9 имеет кратность 3 среди всех 50 данных. Так как $\frac{3}{50} = 0{,}06$, то удобнее сказать, что эта варианта занимает шесть сотых общего объёма измерения. Так и поступают, т. е. делят кратность варианты на объём измерения и получают **частоту** варианты.

$$\textbf{Частота варианты} = \frac{\text{Кратность варианты}}{\text{Объём измерения}}$$

Частоты всех вариант удобно приписать третьей строкой к уже составленной таблице. Новую трёхстрочную таблицу называют *таблицей распределения частот* измерения. Вот как это выглядит в измерении (И).

	Варианта (время в десятках минут)										Сумма
	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	
Кратность	3	6	8	7	10	8	2	3	2	1	50
Частота	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,04	0,06	0,04	0,02	1

частота варианты

таблица распределения частот

Сумма всех частот равна 1 — ведь это сумма дробей с одинаковым знаменателем, у которых сумма всех числителей как раз и равна этому знаменателю. Для удобства счёта и построения графиков частоты переводят в проценты от объёма измерения. Тогда таблицу распределения дополняют ещё строкой частот в процентах. Она получается из предыдущей строки умножением на 100 %. Итак, для измерения (И) получаем следующую таблицу уже из четырёх строк.

	Варианта (время в десятках минут)										Сумма
	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	
Кратность	3	6	8	7	10	8	2	3	2	1	50
Частота	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,04	0,06	0,04	0,02	1
Частота, %	6	12	16	14	20	16	4	6	4	2	100

Сумма всех частот в процентах, конечно же, равна 100 — ведь эта сумма в сто раз больше суммы в предыдущей строке.

3 Графическое представление информации

Итак, распределение данных измерения удобно задавать с помощью таблиц. Но мы знаем, что и для функций есть *табличный* способ их задания. Таблицы образуют «мостик», по которому от распределения данных можно перейти к функциям и графикам.

график распределения выборки

Отложим по оси абсцисс значения из первой строки таблицы распределения (т. е. варианты), а по оси ординат — значения из её второй строки (т. е. кратности варианты). Построим соответствующие точки в координатной плоскости. Получим графическое изображение имеющейся информации — *график распределения выборки*. Построенные точки для наглядности соединяют отрезками. Вот как это выглядит в измерении (И), данные которого мы уже представили в табличном виде.

По оси абсцисс	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
По оси ординат	3	6	8	7	10	8	2	3	2	1

На координатной плоскости мы получили ломаную линию (рис. 173), которая является графиком некоторой кусочно-линейной функции. Эту ломаную называют *многоугольником*, или *полигоном*, *распределения* данных. Собственно, *polygon* и переводится как «многоугольник».

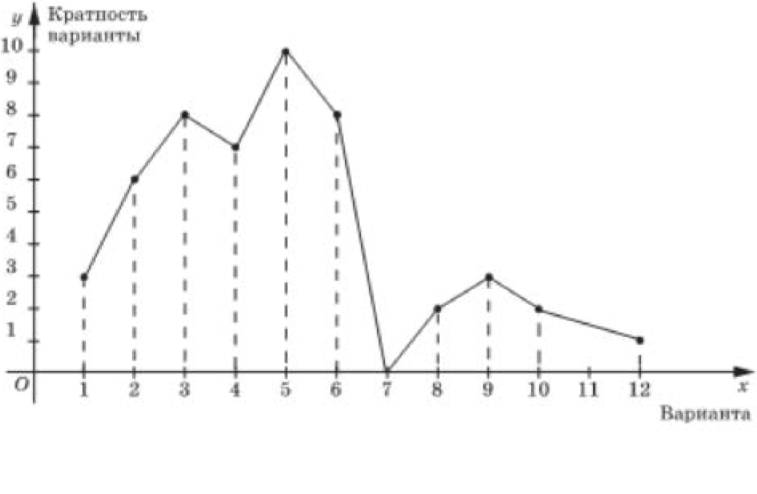


Рис. 173

Точно так же составленные таблицы распределения частот и распределения частот в процентах позволяют построить *многоугольник частот* и *многоугольник частот в процентах*. Для наглядности в практических приложениях удобнее использовать многоугольники частот в процентах: в них изменения по оси ординат от 1 до 100 визуально более заметны, чем изменения от 0 до 1. Построим многоугольник частот в процентах для измерения (И) (рис. 174).

многоугольник распределения данных

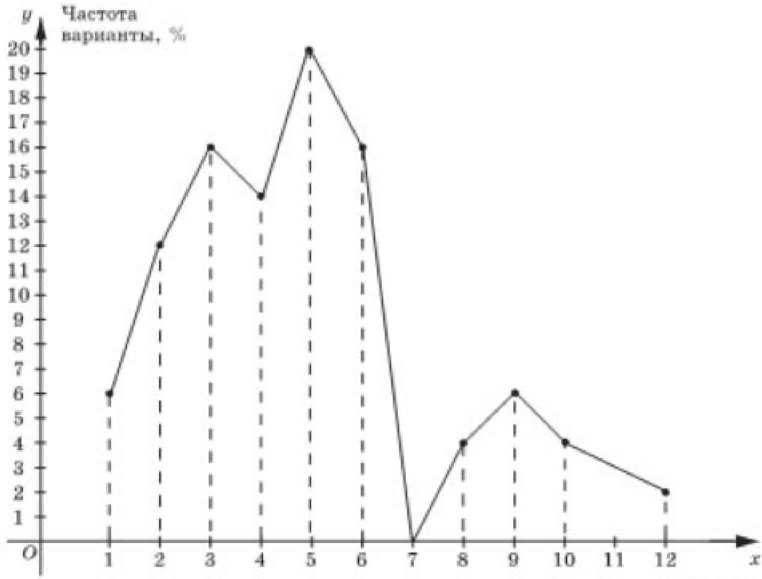


Рис. 174

По оси абсцисс	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
По оси ординат	6	12	16	14	20	16	4	6	4	2

Мы видим, что даже для небольшого объёма измерений аккуратное «причёсывание» информации — довольно кропотливая вещь. При работе с большими объёмами информации используют методы приближённой группировки данных. В таких случаях вариантой измерения является не одно число, а числовой промежуток.

Например, в измерении (И) всех работников предприятия можно разделить на три группы. Во-первых, это те, кто живёт близко от работы. Они тратят на дорогу 10, 20 или 30 минут. Во-вторых, это те, кто живёт недалеко. Их путь занимает от 40 до 60 минут. Все остальные живут далеко и проводят в дороге более часа. Тем самым мы разбили промежуток между самой маленькой и самой большой вариантой на промежутки 1—3; 4—6; 8—12 (в десятках минут). В итоге вместо десяти первоначальных вариант получилось всего три новые варианты: близко, недалеко, далеко.

Для каждого промежутка можно найти количество результатов измерения, попавших в этот промежуток. Получим кратности и **таблицу распределения новых вариант**.

	Варианта			Сумма
	близко	недалеко	далеко	
Кратность	17	25	8	50

Разумеется, можно составить и таблицы распределения частот и процентных частот новых вариант. Вот что получится.

	Варианта			Сумма
	близко	недалеко	далеко	
Кратность	17	25	8	50
Частота, %	34	50	16	100

Рис. 175

При такой грубой оценке мы кое-что утеряли из первоначальной информации. Например, теперь неизвестно количество работников, путь которых занимает 60 минут. Но мы что-то и приобрели: информация получила более ясное и удобное для объяснения представление. Вот как это выглядит, например, на круговой диаграмме (рис. 175).

При графическом представлении больших объёмов информации многоугольники распределения заменяют *гистограммами*, или *столбчатыми диаграммами*. Вы познакомитесь с ними в старшей школе.

4 Числовые характеристики данных измерения

Каждый человек, кроме своих формальных, паспортных, данных, обладает рядом других свойств и качеств. Кто-то лучше всех решает задачи, кто-то — брюнет, кто-то замечательно играет на гитаре и т. п. Однако сравнительно небольшая паспортная информация (Ф.И.О., дата рождения, номер и дата выдачи паспорта) позволяет однозначно определить человека, выделить его среди других. У данных измерений тоже есть своего рода краткий паспорт, состоящий из набора основных *числовых характеристик*. Поясним некоторые из них на уже знакомом нам примере измерения (И).

Разность между максимальной и минимальной вариантой называют *размахом измерения*. В измерении (И) размах равен $120 - 10 = 110$ минутам.

Ту варианту, которая в измерении встретилась чаще других, называют *модой измерения*. Если данные измерения уже собраны в двустрочную таблицу распределения, то для нахождения моды следует:

— во второй строке (кратность) выбрать наибольшее число;

— от найденного числа подняться на клетку выше: полученное число и будет модой.

мода

размах

Если данные измерения представлены графически в виде многоугольника распределения, то мода — это точка, в которой достигается максимум многоугольника распределения. Например, в измерении (И) мода равна 50 минутам — наибольшее число работников (10) именно так оценивают время своего пути на работу.

Заметим, что возможны более сложные распределения данных. Например:

			Мода				Мода				
Варианта	−3	−1	0	2	4	5	6	10	11	12	Всего: 10
Кратность	5	7	25	11	3	8	20	10	7	4	Объём: 100

У этого распределения две моды. Как говорят, это *бимодальное* распределение.

среднее

Наиболее важной характеристикой числового ряда данных является *среднее значение* (*среднее арифметическое*, или просто *среднее*).

Правило 1 Для нахождения среднего значения следует:

1) просуммировать все данные измерения;

2) полученную сумму разделить на количество данных.

Для подсчёта среднего значения удобно использовать сгруппированный ряд данных. Вот как это выглядит в измерении (И):

$$\underbrace{1, 1, 1}_{3},\ \underbrace{2, \ldots, 2}_{6},\ \underbrace{3, \ldots, 3}_{8},\ \underbrace{4, \ldots, 4}_{7},\ \underbrace{5, \ldots, 5}_{10},\ \underbrace{6, \ldots, 6}_{8},$$

$$8, 8, \underbrace{9, 9, 9}_{3}, 10, 10, 12.$$

Найдём среднее значение:

$$\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 8 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 12 \cdot 1}{50} =$$

$$= \frac{3 + 12 + 24 + 28 + 50 + 48 + 16 + 27 + 20 + 12}{50} = 4{,}8 \text{ (десятков минут).}$$

Значит, среднее время для опрошенных работников составляет 48 минут.

Если таблица распределения частот данных уже известна, то среднее значение можно вычислять прямо по ней. Смотрите:

$$\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + \ldots + 12 \cdot 1}{50} =$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{50} + 2 \cdot \frac{6}{50} + 3 \cdot \frac{8}{50} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{50}.$$

Обратите внимание: все дроби в последней сумме — это частоты вариант, которые стоят перед этими дробями в качестве множителей. Значит, в таблице распределения частот можно просто перемножить числа в каждом столбце и затем сложить все полученные произведения.

	Варианта										Сумма
	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	
Частота	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,04	0,06	0,04	0,02	1

Сформулируем общее правило.

Правило 2 Для нахождения среднего значения данных измерения следует:
1) каждую варианту умножить на её частоту;
2) сложить все полученные произведения.

Мы закончим этот параграф ещё одним конкретным примером измерения, кратко повторив для него шаги 1)—4) обработки данных (см. с. 246).

ПРИМЕР 3

На вступительном письменном экзамене по математике можно получить от 1 до 10 баллов. Сорок абитуриентов получили такие оценки:

6	7	7	8	9	2	10	6	5	6
7	3	7	9	9	2	3	2	6	6
6	7	8	8	2	6	7	9	7	5
9	8	2	6	6	3	7	7	6	6

1) Составить общий ряд данных; упорядочить и сгруппировать полученные оценки.
2) Составить таблицы распределения данных и распределения частот.
3) Построить графики распределения.
4) Найти размах, моду и среднее измерения.

Решение 1) В принципе, возможны такие оценки: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Это *общий ряд данных*. В конкретно предложенном измерении встретились только такие оценки: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Это *ряд данных*, все числа в нём — *варианты измерения*. Наконец, $\underbrace{2, \ldots, 2}_{5}$, 3, 3, 3, 5, 5, $\underbrace{6, \ldots, 6}_{11}$, $\underbrace{7, \ldots, 7}_{9}$, $\underbrace{8, \ldots, 8}_{4}$, $\underbrace{9, \ldots, 9}_{5}$, 10 — это *сгруппированный ряд данных*.

2) Всего было выставлено 40 оценок. Значит, 40 — это *объём* данного измерения. Соберём кратности всех восьми вариант в таблицу; подсчитаем и внесём в ту же таблицу все частоты (конкретизируем: 0,125 — это $\frac{5}{40}$, 0,075 — это $\frac{3}{40}$ и т. д.).

	Варианта								Сумма
	2	3	5	6	7	8	9	10	
Кратность	5	3	2	11	9	4	5	1	40
Частота	0,125	0,075	0,05	0,275	0,225	0,1	0,125	0,025	1
Частота, %	12,5	7,5	5	27,5	22,5	10	12,5	2,5	100

3) Полученная таблица распределения позволяет построить три многоугольника распределения: данных, частот и частот в процентах (рис. 176—178).

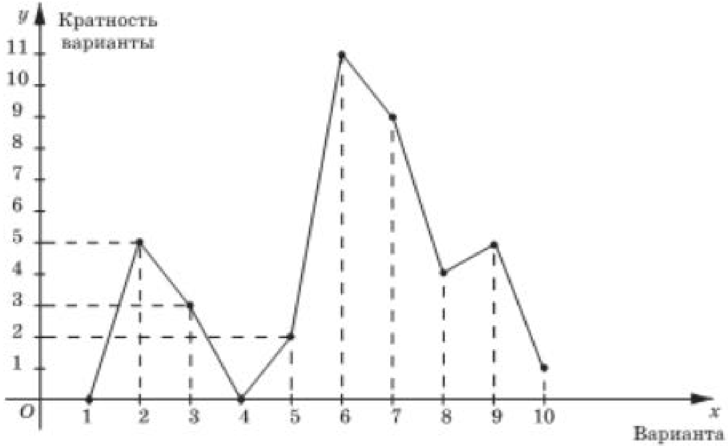


Рис. 176

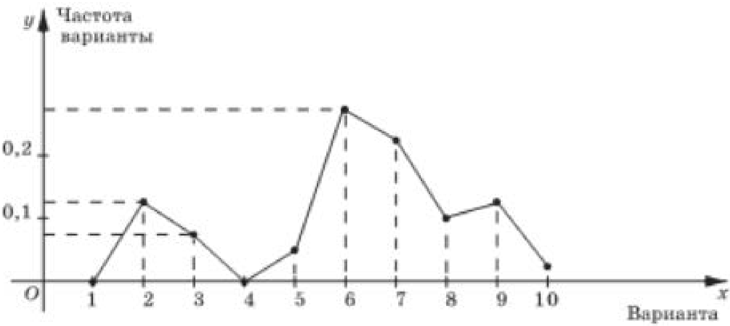


Рис. 177

По существу различия в этих графиках состоят только в выборе единиц измерения и масштаба по оси ординат.

4) Вернёмся к первоначальным данным. *Размах* измерения равен $10 - 2 = 8$. *Мода* равна 6 — эта оценка встретилась чаще других. Наконец, *среднее значение* равно

$$\frac{2\cdot5+3\cdot3+5\cdot2+6\cdot11+7\cdot9+8\cdot4+9\cdot5+10\cdot1}{40}=$$

$$=\frac{10+9+10+66+63+32+45+10}{40}=\frac{245}{40}=6{,}125.$$

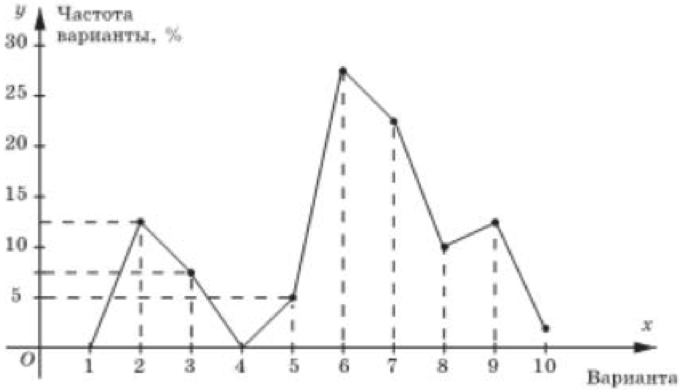


Рис. 178

5 Дисперсия

Среднее значение — несомненно, важный показатель распределения данных. Ничуть не менее важным является показатель того, насколько тесно, плотно, расположены данные вокруг своего среднего. Этот показатель называется *дисперсией* (от латинского *dispersio* — рассеяние) Дисперсия чисел x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n равна числу $\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$, где $\overline{x}$ — среднее значение.

Если дисперсия равна нулю, то равен нулю и числитель этой дроби. Значит, все (сами по себе неотрицательные) слагаемые $(x_1 - \overline{x})^2$, $(x_2 - \overline{x})^2$, ..., $(x_n - \overline{x})^2$ равны нулю. Поэтому $x_1 = \overline{x}$, $x_2 = \overline{x}$, ..., $x_n = \overline{x}$, т. е. ряд состоит из n одинаковых чисел. Чем ближе дисперсия к нулю, тем теснее числа x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n расположены вокруг своего среднего значения $\overline{x}$. Если дисперсия заметно отличается от нуля, то какие-то числа ряда заметно отличаются от среднего $\overline{x}$.

а:я

дисперсия

ПРИМЕР 4

Четыре контролёра независимо друг от друга взвесили опытный образец. Получились такие результаты (в граммах): 14,1; 13,85; 14,15; 13,9. Для прохождение образцом проверки требуется, чтобы дисперсия была меньше 0,04. Пройдёт ли проверку этот образец?

Решение Так как $14{,}1 + 13{,}85 + 14{,}15 + 13{,}9 = (14{,}1 + 13{,}9) + (13{,}85 + 14{,}15) = 56$, то среднее равно $56 : 4 = 14$. Выпишем отклонения: $0{,}1$; $-0{,}15$; $0{,}15$; $-0{,}1$ — и квадраты отклонений: $0{,}01$; $0{,}0225$; $0{,}0225$; $0{,}01$. Их среднее равно $0{,}065 : 4 = 0{,}0165$. Это и есть дисперсия. Она меньше $0{,}04$.

Ответ Да, пройдёт.

Два следующих свойства среднего и дисперсии иногда позволяют упростить вычисления.

ТЕОРЕМА 1

Если каждое число ряда увеличить (уменьшить) на постоянное число a, то среднее ряда также увеличится (уменьшится) на то же число, а дисперсия не изменится.

ТЕОРЕМА 2

Если каждое число ряда умножить на постоянное число, то среднее ряда также умножится на то же число, а дисперсия умножится на квадрат этого числа.

Вопросы для самопроверки

1. Из скольких основных этапов состоит порядок преобразования данных конкретного измерения?
2. Назовите этапы преобразования данных конкретного измерения. Опишите, в чём состоит упорядочивание и группировка данных.
3. Объясните, в чём разница между общим рядом данных и рядом данных конкретного измерения.
4. Сгруппируйте следующий ряд данных:

   $$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 2,\ 4,\ 5,\ 5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 2,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 4,\ 3,\ 3,\ 1,\ 2,\ 2.$$

   Каков объём этого ряда?
5. Перечислите все варианты ряда данных из вопроса 4. Какая из этих вариант встретилась чаще всего? Какова её кратность?
6. Что называется вариантой измерения (вариантой ряда данных)?
7. Дайте определение частоты варианты. Почему частота не может быть больше единицы?
8. Почему сумма частот всех вариант измерения всегда равна единице?

9. Какая из вариант называется модой измерения (модой ряда данных)?
10. Может ли кратность варианты быть равной нулю? Ответ обоснуйте.
11. Расскажите, как по сгруппированному ряду данных составить таблицу распределения.
12. Расскажите, как по таблице распределения данных нарисовать полигон распределения.
13. Сформулируйте два правила нахождения среднего значения.
14. Найдите среднее значение и медиану для ряда из вопроса 4.
15. Что такое дисперсия распределения данных?

§ 28 ПРОСТЕЙШИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ

1 Подсчёт вероятностей

С некоторыми комбинаторными задачами мы уже встречались в § 26. В каждой из них мы подсчитывали количество всевозможных комбинаций, которые тем или иным способом можно составить, исходя из условия конкретной задачи. Например, из цифр 1, 5, 9 можно составить ровно шесть трёхзначных чисел без повторяющихся цифр: 159, 195, 519, 591, 915 и 951. А какую часть из них составляют, например, числа, кратные пяти? Видно, что из этих шести чисел только два числа делятся на пять: 195 и 915. Значит, числа, кратные пяти, составляют *одну треть* общего числа всех составленных чисел. В теории вероятностей говорят в этом случае так:

$\frac{1}{3}$ — *это вероятность того, что трёхзначное число, составленное из неповторяющихся цифр 1, 5 и 9, будет кратно пяти.*

Рассмотрим ещё несколько подобных примеров.

ПРИМЕР 1

Из цифр 1, 5, 9 случайным образом составляют трёхзначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что получится число:

а) большее 500;
б) квадратный корень из которого не больше 24;
в) кратное трём;
г) кратное девяти?

Решение а) Из шести возможных чисел 159, 195, 519, 591, 915, 951 первые два числа — 159, 195 — меньше 500, а последние четыре числа 519, 591, 915, 951 больше 500. Так как $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, то числа, большие 500, составляют две трети общего числа исходов, и искомая вероятность равна $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

б) Так как $24^2 = 576$, то квадратные корни из чисел 159, 195, 519 меньше 24, а квадратные корни из чисел 591, 915, 951 больше 24. Значит, нужные нам числа составляют половину общего числа исходов, и искомая вероятность равна $\frac{1}{2}$.

в) Сумма цифр каждого из шести чисел 159, 195, 519, 591, 915, 951 равна 15, т. е. делится на 3. Поэтому каждое из возможных шести чисел кратно 3. Так как $\frac{6}{6} = 1$, то искомая вероятность равна 1.

г) Сумма цифр каждого из чисел равна 15, т. е. не делится на 9. Поэтому среди этих шести чисел вообще нет чисел, кратных 9. Так как $\frac{0}{6} = 0$, то искомая вероятность равна 0.

Ответ а) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 0.

невозможное событие

случайное событие

Проанализируем решение примера 1. В пункте в) ответ можно было получить, не выписывая и даже не подсчитывая все возможные трёхзначные числа из цифр 1, 5, 9. Просто при перестановках цифр их сумма 15 не меняется, т. е. все числа будут кратны трём. Здесь мы имеем дело с *достоверным событием*. Оно произойдёт при любом способе составления трёхзначного числа из цифр 1, 5, 9 без повторяющихся цифр. В пункте г) никакое из чисел, которые вообще можно составить из цифр 1, 5, 9, не делится на 9. Здесь мы встретились с *невозможным событием*. Оно никогда не произойдёт при составлении трёхзначного числа из цифр 1, 5, 9 без повторений. В пунктах а) и б) интересующие нас события могли как произойти, так и не произойти при случайном составлении трёхзначного числа. Такие события называют *случайными событиями*.

Простейший и, наверное, наиболее известный источник случайных событий — это игра «Орлянка»: монетку подбрасывают и смотрят, какая из её сторон, орёл или решка, выпадет.

ПРИМЕР 2

Монету подбрасывают три раза. Какова вероятность того, что:
а) все три раза выпадет решка;
б) решка выпадет в два раза чаще, чем орёл;
в) орёл выпадет в три раза чаще, чем решка;
г) при первом и третьем подбрасывании результаты будут различны?

Решение Составим дерево вариантов, обозначив О — выпадение орла и Р — выпадение решки (рис. 179). Мы видим, что всего возможны восемь исходов: ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР.

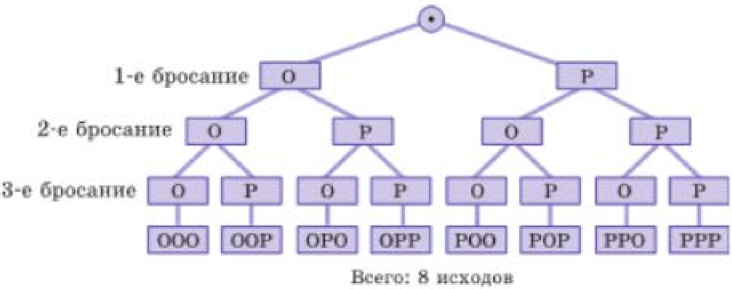


Рис. 179

а) Решка выпадет три раза только в одном из восьми исходов. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

б) Из восьми возможных исходов только в трёх случаях решка выпадет в два раза чаще, чем орёл: ОРР, РОР, РРО. Значит, искомая вероятность равна $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

в) Если решка выпала хоть раз, то орлов должно быть не менее трёх. Но тогда подбрасываний будет никак не меньше четырёх, а их по условию всего три. Значит, указанное событие невозможно. Впрочем, можно просто перебрать все восемь возможных исходов и увидеть, что ни один из них не подходит. Итак, искомая вероятность равна 0.

г) Из восьми возможных исходов интересующее нас событие произойдёт в следующих четырёх случаях: ООР, ОРР, РОО, РРО. Значит, искомая вероятность равна $\frac{4}{8} = 0{,}5$.

Ответ а) 0,125; б) 0,375; в) 0; г) 0,5.

2 Классическое определение вероятности

В реальности монетка может упасть не только на одну из своих сторон, но и прислониться к стене или ножке стула, может укатиться довольно далеко и потеряться, её может кто-то схватить и убежать и т. п. Ясно, что при подсчётах вероятностей невозможно или, по крайней мере, очень сложно учесть подобные случаи. Поэтому заранее договариваются, что при подбрасывании монетки возможны только два случая — орёл или решка и, более того, что эти случаи *равновозможны* между собой. Это означает, что вероятность выпадения орла при одном подбрасывании монетки заранее *предполагается равной* $\frac{1}{2}$ и, соответственно, вероятность выпадения решки при одном подбрасывании монетки также *предполагается равной* $\frac{1}{2}$. Получается некоторая «идеальная» монетка, или простейшая *вероятностная модель* реальных монет. Различие тут примерно такое же, как между реальным автомобилем и машиной, которая, как это бывает в текстовых задачах, на протяжении нескольких часов едет с постоянной скоростью по прямолинейному шоссе. Конечно же, и прямолинейность шоссе, и равномерность движения, да и просто «расстояние между пунктами А и Б» — это только *модели* реальных ситуаций. Однако для простейших, первоначальных подсчётов как раз и нужны простые модели: ведь действовать в сложных моделях намного сложнее!

равновозможные исходы

Итак, мы приходим к следующей схеме подсчёта вероятности случайного события при проведении некоторого испытания. Подчеркнём, что применять эту схему можно *только* в тех случаях, когда все исходы этого испытания *равновозможны* между собой.

Принято вероятность события A обозначать $P(A)$. Объяснение такого обозначения очень простое: «вероятность» по-французски — *probabilité*, по-английски «вероятно» — *probably*. Используя это обозначение, вероятность события A можно найти с помощью формулы $P(A) = \frac{N(A)}{N}$.

Классическая вероятностная схема

Для нахождения вероятности случайного события A при проведении некоторого испытания следует:

1) найти число N всех возможных исходов данного испытания;
2) найти количество $N(A)$ тех исходов испытания, в которых наступает событие A;
3) найти частное $\frac{N(A)}{N}$; оно и будет равно вероятности события A.

Довольно часто пункты 1)—3) приведённой классической вероятностной схемы выражают одной довольно длинной фразой.

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A, к общему числу (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

В частности, если событие A *невозможно* при проведении некоторого испытания, то $N(A) = 0$ и поэтому $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{0}{N} = 0$. Напротив, *достоверность* события A при проведении некоторого испытания означает, что $N(A) = N$ и поэтому $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{N}{N} = 1$.

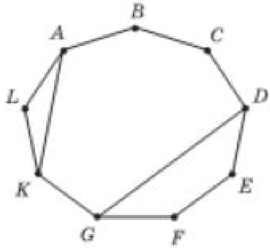
ПРИМЕР 3

В правильном девятиугольнике $ABCDEFGKL$ случайным образом провели одну из диагоналей. Какова вероятность того, что:
а) по обе стороны от неё лежит одинаковое количество вершин;
б) по одну сторону от диагонали будет лежать более двух вершин;
в) диагональ отрезает от девятиугольника какой-то треугольник;
г) один из концов диагонали — вершина L или вершина D?

Решение а) Вне диагонали лежит семь вершин. Так как 7 — число нечётное, то по обе стороны не может лежать одинаковое количество вершин. Значит, это невозможное событие, его вероятность равна 0.

б) Если по одну сторону от диагонали лежит одна вершина, то по другую сторону — шесть вершин; если по одну сторону лежат две вершины, то по другую сторону — пять вершин (рис. 180, *а*); наконец, если по одну сторону лежат три вершины, то по другую — четыре (рис. 180, *б*). Мы видим, что в любом случае хотя бы с одной стороны лежит более двух вершин. Значит, мы имеем дело с достоверным событием, его вероятность равна 1.

в) Сначала придётся посчитать количество N всех диагоналей. Начало диагонали можно выбрать девятью способами, а конец — шестью способами: ведь при уже выбранном начале диагональ нельзя провести ни в эту вершину, ни в две соседние вершины. По правилу умножения получается $9 \cdot 6 = 54$ диагонали. Но при таком подсчёте каждую диагональ, например DG, мы посчитали дважды: как диагональ с началом в D и концом в G и как диагональ с началом в G и концом в D (рис. 180, *а*). Значит, всего проведено $N = 54 : 2 = 27$ диагоналей.



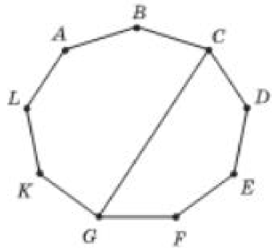


Рис. 180 *а* *б*

Диагонали, отрезающие треугольники, — это AC, BD, CE, DF, EG, FK, GL, KA, BL (рис. 181). Их девять — столько, сколько вершин у $ABCDEFGKL$. Значит, искомая вероятность равна $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

г) Из вершины D можно провести шесть диагоналей (рис. 182) и из вершины L — столько же. Получается 12 диагоналей, но одну из них, а именно диагональ LD, мы посчитали дважды. Остальные десять диагоналей посчитаны по одному разу. Значит, интересующее нас событие произойдёт в 11 случаях, а потому искомая вероятность равна $\frac{11}{27}$.

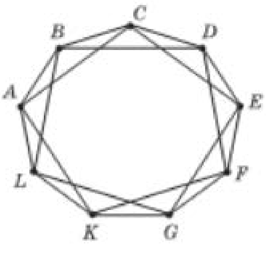


Рис. 181

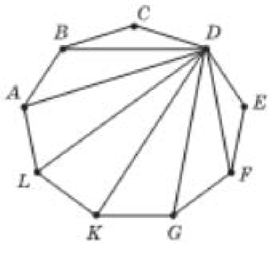


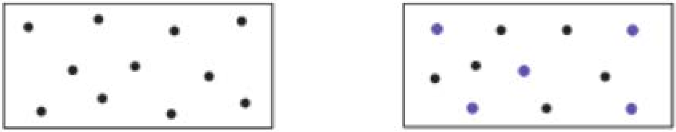
Рис. 182

Ответ а) 0; б) 1; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{11}{27}$.

3 События и множества

Имеется тесная связь между, с одной стороны, множествами, их элементами и подмножествами и, с другой стороны, испытаниями (опытами, экспериментами), их исходами и случайными событиями.

Допустим, вы каким-то образом перечислили все N возможных исходов некоторого опыта, испытания, эксперимента. Может быть, вы выписали эти исходы в одну строку, через запятую. Может быть, каждый исход записали в отдельную строку и строки пронумеровали. Может быть, вы изобразили исходы какими-то значками на листе бумаги или разместили их под разными «ярлычками» на экране монитора и т. п. Важно, что все N исходов вы рассмотрели как единое множество, перечисленное поэлементно (рис. 183, *а*).



Всего: N исходов — *а*

Из них: $N(A)$ благоприятствующих событию A — *б*

Рис. 183

Теперь вас интересует вероятность некоторого случайного события A, которое может произойти, а может и не произойти в результате проведённого испытания. Это означает, что событие A происходит при наступлении *только некоторых* из всех возможных N исходов. Отметим их цветом (рис. 183, *б*). Тогда в вашем списке всех исходов возникает некоторое подмножество, состоящее из $N(A)$ элементов.

Получается, что случайное событие A ассоциируется с подмножеством множества всех исходов, а вероятность события A — это доля исходов, *благоприятствующих* A, среди множества всех N возможных исходов. В частности, вероятность каждого отдельного исхода равна $\frac{1}{N}$.

благоприятствующий исход

В нижеприведённой таблице мы показываем связь между терминами теории вероятностей и теории множеств.

Испытание с N исходами	Множество из N элементов
Отдельный исход испытания	Элемент множества
Случайное событие	Подмножество
Невозможное событие	Пустое подмножество
Достоверное событие	Подмножество, совпадающее со всем множеством
Вероятность события	Доля элементов подмножества среди всех элементов множества

Оба столбца в этой таблице могут быть продолжены: новых понятий и в теории вероятностей, и в теории множеств хватает. Как при этом «переходить» по строчкам — весьма сложный вопрос. Мы ограничимся только небольшим продвижением и начнём, как обычно, с примера.

ПРИМЕР 4

Из 50 точек 17 — синего цвета, 13 — оранжевого, а остальные точки никак не окрашены. Какова вероятность того, что случайным образом выбранная точка окажется: а) синей; б) не оранжевой; в) окрашенной; г) не окрашенной?

Решение

а) $P = \dfrac{N(\text{синяя точка})}{N} = \dfrac{17}{50} = 0{,}34.$

б) $P = \dfrac{N\ (\text{не оранжевая точка})}{N} = \dfrac{50 - 13}{50} = 0{,}74.$

в) $P = \dfrac{N(\text{синяя или оранжевая точка})}{N} = \dfrac{17 + 13}{50} = 0{,}6.$

г) $P = \dfrac{50 - (17 + 13)}{50} = 0{,}4.$

Определение

Событие B называют **противоположным событию** A, если событие B происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A; обозначают: $B = \overline{A}$. События A и B называют **несовместными**, если они не могут происходить одновременно.

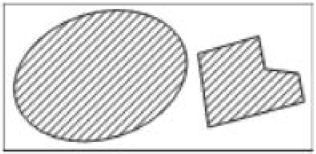


Рис. 184 A и B несовместны

Несовместные события изображаются непересекающимися подмножествами множества всех исходов испытания (рис. 184).

Типичный пример несовместных событий: любое событие A и противоположное событие $\overline{A}$.

Доказательство следующей теоремы, по существу, повторяет решение примера 4 в).

ТЕОРЕМА 1

Если события A и B несовместны, то вероятность того, что наступит или A, или B, равна $P(A) + P(B)$.

Доказательство Обозначим буквой C интересующее нас событие. Событие C наступает тогда и только тогда, когда происходит *хотя бы одно из событий A или B*. Так как A и B несовместны, то $N(C) = N(A) + N(B)$. Поделим это равенство на N — число всех возможных исходов испытания. Получим:

$$P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{N(A) + N(B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} = P(A) + P(B).$$

Для того чтобы теорему 1 записать с использованием формул, нужно как-то назвать и обозначить событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из двух данных событий A и B. Такое событие называют *суммой* событий A и B и обозначают $A + B$. При переводе операции сложения случайных событий на язык теории множеств получается операция объединения множеств: ведь соотношение $x \in A \cup B$ как раз и означает, что $x \in A$ или $x \in B$.

Итак, вот краткая формулировка теоремы 1.

Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

ТЕОРЕМА 2

Для нахождения вероятности противоположного события следует из единицы вычесть вероятность самого события:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Доказательство Событие $A + \bar{A}$ достоверно: при любом исходе испытания происходит либо событие A, либо событие $\bar{A}$ Значит, $P(A + \bar{A}) = 1$. Событие A и противоположное событие $\bar{A}$ по определению несовместны. Значит, $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Поэтому $1 = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, и $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

В тех случаях, когда посчитать вероятность противоположного события проще, чем найти вероятность самого события, удобно использовать и симметричную формулу $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Типичной ситуацией являются события, описание которых использует оборот «хотя бы один раз» или аналогичный ему.

ПРИМЕР 5

Какова вероятность того, что при трёх последовательных бросаниях игрального кубика хотя бы один раз выпадет 6?

Решение При одном бросании кубика равновозможны выпадения 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. При втором бросании, вне зависимости от исхода предыдущего бросания, возможны те же результаты. Для трёх бросаний по правилу умножения получаем, что всего возможно $N = 6 \cdot 6 \cdot 6$ исходов. Обозначим буквой A интересующее нас событие, т. е. выпадение хотя бы одной шестёрки. А в чём состоит противоположное событие $\bar{A}$? Оно означает, что шестёрка вообще не выпадет ни в первый, ни во второй, ни в третий раз. Но тогда все три раза на кубике выпадет одна из *пяти* цифр 1, 2, 3, 4 или 5. Применим ещё раз правило умножения и найдём, что $N(\bar{A}) = 5 \cdot 5 \cdot 5$. Значит, $P(\bar{A}) = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787$ и $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0{,}4213$.

4 Вероятность и геометрия

Мы познакомились с вероятностными задачами, в которых множество исходов можно тем или иным способом *подсчитать*. Другими словами, количество N всех возможных исходов *конечно*. Но встречаются испытания и с *бесконечным* числом исходов. К ним классическая вероятностная схема уже не применима. Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 6

Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x - 1| \leqslant 3$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства $|x - 2| \geqslant 3$?

Решение Разумеется, следует для начала решить оба неравенства. Вспомним геометрический смысл модуля разности $|a - b|$ — это расстояние между точками a и b числовой прямой. Поэтому неравенство $|x - 1| \leqslant 3$ означает, что расстояние между точками x и 1 не больше 3. Значит, $[-2; 4]$ — решение этого неравенства. Отметим этот отрезок длиной 6 штриховкой (рис. 185).

Рис. 185

Рис. 186

Второе неравенство $|x - 2| \geqslant 3$ означает, что расстояние между точками x и 2 не меньше 3. Значит, $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$ — решение этого неравенства (рис. 186). Отметим это множество другой штриховкой. В пересечении получится отрезок $[-2; -1]$ (рис. 187).

Рис. 187

Мы видим, что из всех решений неравенства $|x - 1| \leqslant 3$ только *одну шестую часть* составляют решения неравенства $|x - 2| \geqslant 3$. Вероятность попасть в любой участок отрезка предполагается пропорциональной длине этого отрезка. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{6}$.

ПРИМЕР 7

Графический редактор, установленный на компьютере, случайно отмечает одну точку на мониторе — квадрате $ABCD$ со стороной 12 см. Какова вероятность того, что эта точка:

а) окажется в верхней половине монитора;

б) окажется одновременно и в нижней, и в левой половине монитора;

в) будет удалена от вершины D не более чем на 11 см;

г) будет ближе к центру монитора, чем к вершине C?

Решение а) Пусть S — площадь монитора. Тогда площадь его верхней половины равна $0{,}5S$ (рис. 188, *а*). Вероятность попасть в любую часть монитора предполагается пропорциональной площади этой части. Значит, искомая вероятность равна $\frac{0{,}5S}{S} = 0{,}5$.

б) В этом случае редактор может отметить любую точку из левой нижней четверти монитора (рис. 188, *б*). Её площадь равна $0{,}25S$. Значит, вероятность указанного события равна $\frac{0{,}25S}{S} = 0{,}25$.

в) Нарисуем круг радиусом 11 см с центром в точке D. В пересечении со всем квадратом $ABCD$ получится только четверть этого круга (рис. 188, *в*). Площадь этой четверти равна $\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{121\pi}{4} = 30{,}25\pi$. Выясним, какую часть площадь этой фигуры составляет от площади всего монитора:

$$\frac{30{,}25\pi}{144} = \frac{30{,}25 \cdot 3{,}14}{144} = \frac{94{,}985}{144} = 0{,}66.$$

Отношение площадей как раз и даёт нужную вероятность.

г) Соединим отрезком вершину C с центром O монитора. К этому отрезку построим серединный перпендикуляр m. Его точки равноудалены от точек C и O, а точки, лежащие выше m, находятся ближе к C, чем к центру O. Пусть $K = m \cap BC$, $L = m \cap CD$ и $M = m \cap OC$.

Тогда ΔKCL состоит из всех точек монитора, которые удалены от C не дальше, чем от центра монитора (рис. 188, *г*).

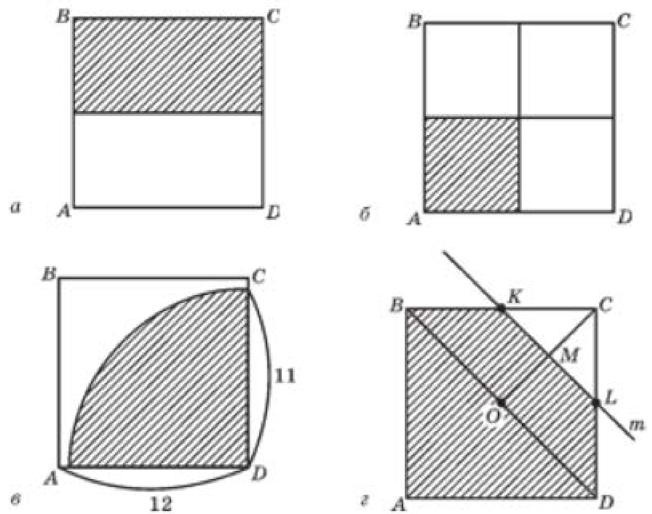


Рис. 188

Так как $MC = 0{,}5OC = 0{,}25AC = 0{,}25 \cdot \sqrt{2} \cdot AB$, то

$$S_{KCL} = 2S_{KMC} = 2 \cdot 0{,}5 \cdot MC^2 = MC^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot AB^2 = 0{,}125S.$$

Значит, вероятность выбора точки из ΔKCL равна $\frac{S_{KCL}}{S} = 0{,}125$.

По условию нам следует найти вероятность события, противоположного попаданию в ΔKCL. По формуле $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ получаем искомую вероятность: $1 - 0{,}125 = 0{,}875$.

Ответ а) 0,5; б) 0,25; в) $\approx$ 0,66; г) 0,875.

Сформулируем общее правило для нахождения *геометрических вероятностей*.

Правило Если площадь $S(A)$ фигуры A разделить на площадь $S(X)$ фигуры X, которая целиком содержит фигуру A, то получится вероятность того, что точка, случайно выбранная из фигуры X, окажется в фигуре A: $P = \frac{S(A)}{S(X)}$.

Аналогично поступают и с множествами на числовой прямой, и с пространственными телами. Но в этих случаях площади следует заменить или на длину числовых множеств, или на объёмы пространственных тел. В действительности этот выбор является дискретным, просто точек очень много и они все равноправны, и поэтому можно применять соображения непрерывной вероятности.

геометрическая вероятность

Вопросы для самопроверки

1. Монету подбрасывают два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет орёл?
2. Монету подбрасывают два раза. Какова вероятность того, что результаты будут разными?
3. Монету подбрасывают три раза. Нарисуйте дерево вариантов. Какова вероятность того, что в первый и во второй раз результаты будут одинаковыми?
4. Игральный кубик бросают дважды. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 1? равна 13?
5. Игральный кубик бросают дважды. Какова вероятность того, что произведение выпавших очков меньше 40? больше 0,9?
6. Объясните, почему вероятность достоверного события всегда равна 1.
7. Объясните, почему вероятность невозможного события всегда равна 0.
8. Из скольких основных шагов состоит классическая вероятностная схема?
9. Объясните, почему вероятность любого события не может быть больше 1.
10. Сформулируйте определение события, противоположного событию A.
11. Сформулируйте теорему о нахождении вероятности противоположного события.
12. Какие два события называются несовместными?
13. Сформулируйте теорему о вероятности $P(A + B)$ суммы двух несовместных событий.
14. На отрезке [0; 5] наугад выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется ближе к числу 3, чем к числу 1?
15. В поле 3×3 для игры в крестики-нолики наугад выбирают точку. Какова вероятность того, что она окажется в центральном квадрате?

§ 29 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ

В заключительном параграфе главы 5 мы расскажем о связи между вероятностями случайных событий (§ 28) и экспериментальными статистическими данными (§ 27). Напомним, что статистические данные, как правило, представляют собой данные какого-либо конкретного измерения, проведённого *в реальности*, а при вычислении вероятностей случайных событий мы имеем дело с той или иной *моделью реальности*. Как же связаны между собой реальность и модель реальности? Насколько точно наши теоретические представления об окружающем мире соответствуют тому, что происходит на практике?

Рассмотрим конкретный пример, связанный с наиболее известным источником случайных событий — подбрасыванием монетки.

ПРИМЕР 1

На практических занятиях по обработке данных каждый из 20 школьников подбросил рублёвую монетку 50 раз, подсчитал количество k выпадений орла и записал это количество в процентах от общего числа бросаний. Полученные данные были собраны в таблицу.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k	24	27	23	26	28	25	24	25	26	22	23	23	22	26	27	24	23	29	30	21
%	48	54	46	52	56	50	48	50	52	44	46	46	44	52	54	48	46	58	60	42

Мы видим, что встретились достаточно разбросанные результаты: от 21 до 30. Если частоту появления орла перевести в проценты, то получатся результаты от 42 до 60 %. С одной стороны, *ровно половина* (25) от числа всех бросаний получилась только в двух случаях. Но, с другой стороны, отклонения остальных результатов от 25 не так уж и велики: самое большое отклонение равно 5, т. е. составляет 10 % от общего количества бросаний монетки. Объединим полученные результаты в более крупные группы. Будем считать, что сумма результатов № 1 и № 2 — это один результат для 100 бросаний, сумма результатов № 3 и № 4 — это второй результат для 100 бросаний и т. п. Получим новую таблицу.

№	1–2	3–4	5–6	7–8	9–10	11–12	13–14	15–16	17–18	19–20
k	51	49	53	49	48	46	48	51	52	51

Перевод в проценты тут можно не делать: ведь появление 51 орла при 100 бросаниях как раз и означает появление орла в 51 % случаев от общего числа бросаний. Теперь *ровно половина* от 100 бросаний вообще не встретилась, но зато отклонения от этой половины в процентном измерении уменьшились и составляют уже не более 4 %. Продолжим укрупнение. Посмотрим, что выйдет при группировке по 200 бросаний.

№	1–4	5–8	9–12	13–16	17–20
k	100	102	94	99	103
%	50	51	47	49,5	51,5

Мы видим, что при увеличении количества бросаний монетки частота появления орла приближается к половине от общего числа бросаний. Особенно это заметно, если рассмотреть все проведённые бросания монетки — все повторения одного и того же простейшего эксперимента со случайным исходом. Всего в $20 \cdot 50 = 1000$ проведённых бросаний монетки орёл появился в 498 случаях:

$$100 + 102 + 94 + 99 + 103 = 500 + (0 + 2 - 6 - 1 + 3) = 498.$$

Процентная частота появления орла, таким образом, равна 49,8 %, и отклонение от половины, т. е. от 50 %, составляет только 0,2 %.

Вообще проведение заметного числа экспериментов показывает, что частота выпадения орла при достаточно большом числе бросаний практически неотличима от 0,5, или от 50 %. Например, в большинстве учебников по статистике или по теории вероятностей приводят результаты экспериментов французского учёного Ж. Бюффона (XVIII в.) и английского математика К. Пирсона (конец XIX в.). Они бросали монету соответственно 4040 и 24 000 раз, и орёл выпал 2048 и 12 012 раз. Если посчитать частоту выпадения орла, то получится $\frac{2048}{4040} = 0{,}50693...$ у Бюффона и $\frac{12\,012}{24\,000} = 0{,}5005$ у Пирсона.

Определение

При неограниченном увеличении числа независимых повторений одного и того же опыта в неизменных условиях практически достоверно, что частота появления фиксированного случайного события сближается с некоторым постоянным числом. Это явление называют **статистической устойчивостью**, а указанное число — **статистической вероятностью события**.

Подчеркнём, что для каждого конкретного числа повторений опыта частота появления события скорее всего отличается от вероятности события. Явление статистической устойчивости гарантирует лишь, что с увеличением числа повторений опыта вероятность заметного отличия частоты события от его вероятности стремится к нулю.

Такая устойчивость имеет место не только для бросаний монетки, но и для вытаскивания карт, выпадения определённого числа очков на игральных кубиках, пола новорождённых, среднесуточной температуры и вообще для большинства случайных событий. Явление статистической устойчивости соединяет реально проводимые, *эмпирические*, испытания с теоретическими моделями этих испытаний.

ПРИМЕР 2

Статистические исследования большого количества литературных текстов показали, что частоты появления той или иной буквы (или пробела между словами) стремятся при увеличении объёма текста к некоторым определённым константам. Таблицы, в которых собраны буквы того или иного языка и соответствующие константы, называют *частотными таблицами* языка. Приведём таблицу встречаемости букв русского языка, кроме *ё* и *ъ* (частоты приведены в процентах).

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й
Частота	6,2	1,4	3,8	1,1	2,5	7,2	0,7	1,6	6,2	1,0

Буква	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф
Частота	2,8	3,5	2,6	5,3	9,0	2,3	4,0	4,5	5,3	2,1	0,2

Буква	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	—
Частота	0,9	0,4	0,4	0,6	0,3	1,6	1,4	0,3	0,6	1,8	17,5

Это значит, что из 1000 *случайно* выбранных в тексте букв или пробелов буква *ф* будет в среднем стоять на двух местах, буква *о* — на девяноста местах, пробел окажется в среднем на 175 местах и т. д.

У каждого автора есть своя частотная таблица использования букв, слов, специфических литературных оборотов и т. п. По этой частотной таблице можно определить автора примерно так же, как и по отпечаткам пальцев. Вот два примера из нашей недавней истории. До сегодняшнего дня не утихают споры об авторстве «Тихого Дона». Многие считают, что в 23 года такую глубокую и воистину великую книгу М. А. Шолохов написать просто не мог. Выдвигались разные аргументы и разные кандидаты в авторы. Особенно жаркими были споры в момент присуждения ему Нобелевской премии по литературе (1965). Статистический анализ текстов и сличение с текстами, где авторство М. А. Шолохова не вызывало сомнений, подтвердили всё же гипотезу о нём как об истинном авторе «Тихого Дона».

Вторая история носит более политический характер. В начале 60-х годов «на Западе», как говорили тогда в СССР, опубликовали литературные произведения, «очерняющие прогрессивный характер социалистической системы...». Автором являлся А. Терц, и это был, вне всякого сомнения, псевдоним. В соответствующих органах провели сравнительный анализ опубликованных «вредительских» текстов и результаты сличили с имеющимися текстами ряда возможных кандидатов в авторы. Так было установлено, что настоящим автором является литературовед Андрей Донатович Синявский. Он, в общем-то, в итоге и не отпирался и на суде в 1966 году («Процесс Синявского и Даниэля») получил семь лет наказания в колонии общего режима. Вот такая статистика.

Приведём пример использования статистики при расшифровке закодированных текстов. Один из первых известных способов шифровки текстовых сообщений состоит в следующем. Каждую букву алфавита языка, на котором пишется сообщение, заменяют какой-то другой буквой этого же алфавита. Получается *перестановка* букв алфавита. Например:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	...	Я
Я	Ы	Ё	Ж	З	М	Ф	Щ	О	Ю	Р	Т	С	Ч	Ш		А

Тогда словосочетание «милая мама» после шифровки будет выглядеть так: «сютяа сяся». Адресат послания, у которого есть таблица перестановки букв, без труда сможет провести обратный перевод загадочного слова «тшжюря» (сделайте это, а наша расшифровка — в конце параграфа). Если же послание перехвачено, а шифровальный код неизвестен, то при расшифровке может помочь статистика. Допустим, что текст послания достаточно большой. Например, около страницы машинописного текста. Получится 30—40 строчек по 60—70 букв, т. е. всего около 2000 «шифрованных» букв. Составим для них частотную таблицу встречаемости в тексте шифровки и сравним её с таблицей встречаемости «настоящих» букв русского алфавита (см. выше). Если для какой-то буквы, скажем для *й*, подсчитанная частота превысит 9 %, то с заметной долей уверенности можно утверждать, что этой буквой зашифрована буква *о* первоначального текста. Если же частота буквы, скажем *м*, в шифровке оказалась равной примерно 7 %, то скорее всего это шифр буквы *е*. Конечно, так получится только приблизительная расшифровка, потому что, скажем, буквы *а* и *и* или *ц* и *ч* неразличимы по частоте встречаемости. Но потом можно будет учесть грамматику русского языка, таблицы встречаемости не только букв, но и устойчивых сочетаний букв (*ст*, *про*), союзы, предлоги, общий смысл послания и т. п. и в итоге успешно расшифровать имеющийся текст.

Такой статистический метод работает и при замене букв алфавита произвольными значками, например:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	...	Я
W	{	пробел	!	Q	∅	;	©	@		§

Явление статистической устойчивости позволяет приблизительно оценивать вероятности событий даже в тех случаях, когда эти вероятности мы заранее не знаем. Действительно, пусть требуется найти или оценить вероятность события A при проведении некоторого испытания. Будем проводить независимые повторения этого испытания в неизменных условиях. Отметим те из повторений, в которых наступило интересующее нас событие A, и подсчитаем частоту наступления события A.

Статистическая устойчивость означает, что при проведении большого числа повторений испытания подсчитанная частота практически совпадёт с неизвестной нам вероятностью наступления события A. Значит, найденная частота приблизительно равна вероятности события A. Следует только точно понимать, что частоту наступления мы подсчитываем для *реальных* событий, а вероятность — для *теоретической модели* этих событий.

ПРИМЕР 3

Каждый из десяти игроков 50 раз подряд повторил одновременные бросания трёх игральных костей различного цвета и подсчитал количество k тех бросаний, в которых не выпала шестёрка. Получились такие результаты:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	28	32	24	30	31	25	29	29	27	28

а) Составить таблицу частот (в процентах) невыпадения шестёрки для каждого игрока.

б) Составить таблицу частот (в процентах) невыпадения шестёрки для результатов игроков 1—2, 3—4, ..., 9—10.

в) Какова частота невыпадения шестёрки для всех 500 проведённых бросаний?

г) Найти вероятность невыпадения шестёрки при бросании трёх игральных костей.

Решение

а)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	28	32	24	30	31	25	29	29	27	28
%	56	64	48	60	62	50	58	58	54	56

б)

№	1—2	3—4	5—6	7—8	9—10
%	60	54	56	58	55

в) Всего из 500 проведённых бросаний шестёрка отсутствовала в 283 случаях. Значит, частота равна $\frac{283}{500} = 0{,}566$, или $56{,}6\,\%$.

г) Проведём подсчёт по классической вероятностной схеме. По правилу умножения при бросании трёх различных игральных костей возможны $N = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ равновозможных исходов. Пусть A — событие, состоящее в невыпадении шестёрки. Это значит, что для каждой кости есть только пять равновозможных исходов: 1, 2, 3, 4, 5. Снова по правилу умножения получаем, что $N(A) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Значит,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787.$$

Итак, мы видим, что *теоретическая* вероятность невыпадения шестёрки, вычисленная по классической вероятностной *модели*, составляет примерно $57{,}9\,\%$, а статистическая частота, вычисленная *практически*, равна $56{,}6\,\%$. Расхождение, конечно, имеется, но не слишком существенное.

И в заключение: «тшжюря» — это «логика».

Основные результаты

- Вы познакомились с основными *методами* решения простейших *комбинаторных задач*:
  — перебор вариантов;
  — построение дерева вариантов;
  — правило умножения.
- Мы ввели новое *понятие*: факториал.
- Вы познакомились с новой *математической моделью*, которая служит описанием многих вероятностных задач, — классической вероятностной схемой. Для подсчёта вероятности в этой модели используется формула

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}.$$

- Вы узнали об основных видах *случайных событий*:
  — достоверное и невозможное события;
  — несовместные события;
  — событие, противоположное данному событию;
  — сумма двух случайных событий.
- Мы доказали три *теоремы*:
  — о числе перестановок множества, состоящего из n элементов:

$$P_n = n!;$$

  — о вероятности суммы двух несовместных событий;
  — о вероятности противоположного события.
- Мы обсудили простейшие *методы статистической обработки* результатов измерений, полученных при проведении того или иного эксперимента.
- Вы узнали новые *понятия и термины*:
  — общий ряд данных и ряд данных конкретного измерения;
  — варианта ряда данных, её кратность, частота и процентная частота;
  — сгруппированный ряд данных;
  — многоугольник распределения.
- Вы познакомились с простейшими *числовыми характеристиками* информации, полученной при проведении эксперимента, которые образуют своего рода паспорт результатов этого эксперимента:
  — объём,
  — размах,
  — мода и медиана,
  — среднее значение.

Темы исследовательских работ

1. Многогранное правило умножения.
2. Рисуем деревья вариантов.
3. Факториалы и их свойства. Уравнения и неравенства с факториалами.
4. Классические вероятностные игры: бросания монеты, кубика.
5. Геометрия и вероятность.
6. Статистика в нашем классе: рост, вес, на какой день недели приходится день рождения, среднее значение оценок по предмету и т. п.

Предметный указатель

Исторические сведения

Знак равенства = был впервые предложен *Робертом Рекордом* (1510—1558), автором первой изданной в Англии книги по алгебре (1540). Горизонтальные отрезки были весьма длинными. Автор обосновывал это примерно так: «Я использовал этот знак, потому что нет ничего более равного, чем два таких отрезка» (см. ниже оригинальный текст). Такой же знак в то время использовался и для обозначения параллельности. Путаница была исчерпана, после того как для параллельности стали использовать вертикальные отрезки. Окончательно это произошло только в XVIII в. Ещё Декарт в середине XVII в. использовал для равенства специальный знак ∞.

„I will sette as I doe often in woorkes use, a paire of parallels or Gemowe lines of one lengthe thus ═══════, bicause noe. 2. thynges can be moare equalle",

Знаки неравенств >, < были получены из знака Рекорда наклоном отрезков. Это предложение *Томаса Хэрриота* (1560—1621) было принято математиками благосклоннее и быстрее, чем сам знак =, уже к концу XVII в.


УЧЕБНИКЪ
АЛГЕБРЫ
СЕДЬМОЕ ИЗДАНІЕ.
ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Знаки нестрогих неравенств $\geqslant$, $\leqslant$ предложил один из предшественников математического анализа *Джон Валлис* (1616—1703), автор монографии «Всеобщая математика или полный курс арифметики» (1657). В оригинале черта стояла выше знака строгого неравенства, а не ниже его.

Систематическое изучение и решение различного типа неравенств — вещь относительно недавняя в учебниках по математике. В отечественной учебной литературе такие разделы стали регулярно появляться, начиная со второй половины XX в. До этого ограничивались числовыми неравенствами, их свойствами и решением линейных неравенств, см., например, регулярный учебник алгебры начала XX в.

(http://www.mathedu.ru/schoolbooks/shaposhnikov-uchebnik_algebri-2.djvu)

В докомпьютерные и докалькуляторные времена различные приёмы и способы приближённых вычислений составляли чуть ли не основной материал многих математических трактатов, начиная от древневавилонских до эпохи Позднего Возрождения.

Десятичные дроби впервые встречаются в древнекитайской математике (примерно III в. до н. э.). Широкое распространение десятичные дроби и их «исчисление» получили у арабских и персидских учёных. В Европе голландский математик *Симон Стевин* в своей книге «Десятая» (1585) привёл набор практических правил арифметики десятичных дробей и указал на полезность их использования в различных видах измерений и вычислений. Вскоре после его работ в математике появилась десятичная запятая (в Англии — точка). Определённый этап этого развития науки о числе подвёл Ньютон в трактате «Универсальная арифметика» (1707), которым в основном был завершён долгий процесс уравнивания в правах на существование целых, дробных, отрицательных и иррациональных чисел. Российский академик *А. Н. Крылов* (1863—1945) писал о приближениях чисел так: «Приближённое число следует записать так, чтобы все цифры, кроме последней, были бы надёжными (верными)». Довольно часто это правило называют *правилом Крылова.* По мере становления математики как теоретической науки вопросы практических и приближённых вычислений стали обособляться в отдельные разделы.

Представление числа в стандартном виде — базовая операция при любых действиях с числами той или иной программной компьютерной оболочки. Особенно она незаменима при работе с очень большими или очень маленькими по модулю числами. Чаще всего для стандартной записи используется однострочная форма записи. Например, 1,23459e+03 = $1{,}23459 \cdot 10^3 = 1234{,}59$. Здесь «e» или «E» — сокращение от латинского слова *экспонента* (exponent), которое может быть переведено как «возведение в степень». По этой причине стандартную запись числа часто называют и *экспоненциальной*. Стандартная запись действительного числа — один из основных технических инструментов многочисленных практических приложений математики.

Оглавление

ГЛАВА 4. ПРОГРЕССИИ

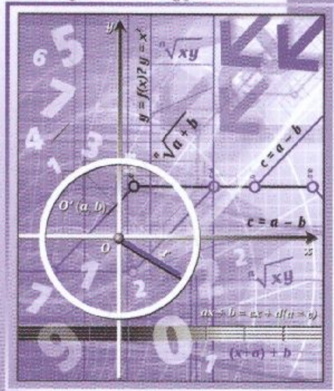
ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Алгебра

9

часть 1

Углублённый уровень



ISBN 978-5-346-04596-0

9 785346 045960