И. В. Раскина, Д. Э. Шноль

Логические задачи

Издательство МЦНМО
Москва, 2013

УДК 51(07)
ББК 22.1
З36

Раскина И. В, Шноль Д. Э.

З36 Логические задачи. — М.: МЦНМО, 2013.— 120 с.: ил.

ISBN ???

Десятая книжка из серии «Школьные математические кружки» посвящена задачам о спортивных турнирах и ориентирована в первую очередь на школьников 6–9 классов. В неё вошли разработки шести занятий математического кружка, а также более 50 дополнительных задач разной сложности. Первые три занятия рассчитаны на начинающих школьников, следующие три — на более подготовленных.

Брошюра адресована руководителям математических кружков и школьным учителям математики. Надеемся, что она будет интересна школьникам, их родителям, а также всем любителям математики, видящим её не только в учебниках, но и в спорте, а также в других проявлениях окружающей нас жизни.

Инесса Владимировна Раскина, *Дмитрий Эммануилович Шноль*

Логические задачи

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. Горская* Иллюстрации *А. Неледва*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 1.12.2013 г.
Формат $60 \times 88\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем $7\ ^1/_2$ печ. л.
Тираж 3000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499)-241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп»
105187, Москва, Борисовская ул., д. 14.

ISBN ???

Предисловие

Серия «Школьные математические кружки» предполагает посвятить несколько выпусков решению логических задач. Вы держите в руках первый из них.

Вам предлагаются *шесть тематических занятий* математического кружка 1–2 года обучения. Первые пять занятий разработаны в традиционной для данной серии форме. В начале каждого занятия мелким шрифтом напечатаны *методические рекомендации*. Затем, после краткого вступления, подробно разбираются несколько *ключевых задач*. Учитель может поступить с ними по-разному. Не обязательно обсуждать их все подряд в начале занятия. Какие-то можно сначала предложить порешать самостоятельно (возможно, дома). Имеет смысл также после разбора одной-двух задач дать каждому ученику возможность поработать в своем темпе над аналогичными, и лишь после этого разобрать следующую ключевую задачу (над которой к этому моменту наиболее быстрые успеют поломать голову).

Далее следуют *задачи для самостоятельного решения*. Их количество, как правило, избыточно для одного занятия кружка. Это сделано сознательно: подобрать универсальный набор задач для кружка произвольного уровня невозможно. Учитель может рекомендовать ребятам решать определённые задачи, исходя из их подготовки. Задачи расположены в порядке усложнения. Можно решать их подряд, тогда большинство кружковцев успеют потренироваться на более простых задачах, но до самых сложных задач не дойдут.

Шестое занятие — игровое, методика его проведения подробно описана в соответствующей главе.

Решение многих задач школьнику 5–6 класса трудно записать и гораздо легче рассказать. Чтобы каждый успел высказаться, учитель может проверить устные решения у первых 2–3 учеников, назначить их экспертами по данной задаче, а затем остальных отправлять рассказывать своё решение экспертам. Обычно более сильные ученики с удовольствием выступают в роли экспертов, а подчас и более дотошно слушают решение.

В конце книги имеется список *дополнительных задач*, не вошедших в занятия, но идейно близких к ним.

Почти ко всем задачам приведены *ответы* и *решения*, а к некоторым еще и *подсказки* и *комментарии*. Подсказки, ответы и решения отнесены в конец книги и отделены друг от друга для удобства школьников, работающих с книгой самостоятельно. Если решить задачу никак не удаётся, посмотрите подсказку. Когда ответ получен, проверьте его и при необходимости найдите ошибку. Если ответ верен, не поленитесь прочитать решение и сравнить его со своим.

* * *

Задачи первого и шестого занятий в основном основаны на комбинации верных и неверных утверждений. К ним близок распространённый сюжет про остров рыцарей и лжецов, развёрнутый на четвёртом и пятом занятиях. На втором и третьем занятиях подробно рассматривается решение задач на установление соответствия между двумя множествами (такие задачи иногда называют сюжетными). Наибольшее вниманию уделено методу полного перебора и использованию графов и таблиц.

Разумеется, за шесть занятий невозможно даже вкратце познакомиться с основными типами логических задач. В вышедших ранее книжках нашей серии представлены задачи на графы и на поиск алгоритма (в частности, на взвешивания, переливания и переправы). Работу с высказываниями, содержащими слова «и», «или», «если ..., то ...», «все», «некоторые» и т. п., мы отложили до следующих выпусков.

Что же объединяет столь различные задачи? Пожалуй, прежде всего то, что для их решения не требуется ни вычислений, ни специальных математических знаний, ни знакомства с хитроумными олимпиадными методами. Отсутствие препятствий технического характера позволяет сконцентрироваться на способе рассуждений как таковом. Поэтому *логические задачи являются идеальным материалом для развития математического мышления*. В этом состоит краткий ответ на вопрос, *зачем* вообще учить школьников решать логические задачи. Поясним сказанное подробнее.

Сама *постановка вопроса о необходимости доказательства* в логических задачах более естественна для школьника, чем в геометрии, на которую традиционно взваливается ноша логического ликбеза. Попытка начать с простейших утверждений, но при этом рассуждать строго приводит семиклассников в недоумение: зачем доказывать, что треугольники равны, если это и так видно по чертежу? А логические задачи благодаря опоре на жизненный опыт и воображение достаточно нетривиальны с самого начала, поэтому этап специальных упражнений, в которых ответ очевиден и его подробное обоснование ученику представляется искусственным, не требуется.

Отсутствие технических сложностей имеет и то преимущество, что борьба с ними не может в сознании ученика подменить собой доказательство. При решении, скажем, уравнений ученик тратит на тождественные преобразования столько сил и бумаги, что не сомневается в исполнении долга. Тем более, что письменного обоснования равносильности преобразований не требуется.

При решении логических задач, напротив, не требуется ничего, кроме обоснования ответа. Школьники привыкли, что в математических задачах перед сообщением ответа надо хоть что-то сказать или написать. Поскольку никаких арифметических или других формальных действий логические задачи не предполагают, дети при записи решений и устных ответах постепенно *приучаются ко все более внятным доказательствам*.

Выяснив, зачем, вы начинаете понимать, *когда и как* лучше всего использовать логические задачи. Самое главное: навыки решения не должны превращаться в самоцель. Результатом обучения является математическая культура, а не умение выяснять, кто из богатырей убил Змея Горыныча или узнавать за один вопрос, где деревня рыцарей. Отсюда вытекают рекомендации по использованию логических задач вообще и данной книги в частности.

1. *Логические задачи особенно уместны на занятиях кружка в* 5, 6 *и отчасти в* 7 *классе*. Они служат хорошей подготовкой к осознанному изучению геометрии. Кроме того, пяти- и шестиклассники ценят занимательность сюжета и охотно обсуждают самое сложное и интересное с родителями.

2. При решении логических (как, впрочем, и других) задач *не стоит ограничивать учеников в выборе метода*. Если целью занятия является именно отработка метода, то надо стараться предлагать такие задачи, где этот метод наиболее удобен. Но если ученик всё же решает посвоему — дайте ему возможность довести дело до конца, а потом познакомьте с другим подходом.

3. Полезнее всего не изучать методично все новые типы логических задач, а *решать разнообразные задачи понемногу в течение всего года*. Конечно, каждую новую идею (скажем, необходимость доводить перебор до конца, даже если случай, удовлетворяющий условию, уже найден) вскоре после первого знакомства полезно применить несколько раз. Но если школьники решили на занятии не все задачи (а такое всегда будет происходить!), вовсе не обязательно немедленно «ликвидировать пробелы». Лучше оставить что-то «на потом». Тем более *не стоит*

посвящать логическим задачам много занятий кружка подряд. Авторы весьма приветствуют растаскивание тщательно скомпонованных нами занятий на фрагменты, сочетающиеся с задачами на другие темы. Как и широкое использование логических задач вне тематических занятий.

4. Необходимость доказательства лучше всего демонстрируют *задачи с неполными данными*, *имеющие неоднозначный ответ*. Обращайте внимание детей на такие задачи.

5. *Некоторые задачи хорошо решать в парах и в группах*. Часто получается сыграть маленькую *ролевую игру по сюжету задачи* (об этом подробно написано в методических указаниях к занятиям). Эти формы работы нравятся школьникам 5–7 класса и стимулируют их интерес к математике.

6. *Советуйте детям обсуждать наиболее интересные задачи с членами семьи*. Взрослые люди, далекие от математики, порой интересуются головоломками не меньше, а решают их нисколько не лучше, чем дети. Именно логические задачи могут стать поводом для равноправного, а следовательно, радостного и плодотворного семейного общения.

7. *Поощряйте детей сочинять собственные задачи*. Для детей (а также их родителей, см. предыдущий пункт) с гуманитарным складом ума эта деятельность может оказаться наиболее привлекательной и эффективной. Разумеется, придумывание задач не должно становиться обязательным заданием для не склонных к литературному творчеству детей.

Мы надеемся, что в этой книжке Вы найдёте немало задач, решение которых доставит Вам настоящее удовольствие.

Авторы благодарны А. В. Шаповалову за подробные обсуждения и предложенные задачи.

Занятие 1

Перебор в логических задачах

Перебери мешок фасоли, белую отдели от коричневой,
посади под окнами семь розовых кустов.
А главное — познай самое себя.
Евгений Шварц

Это занятие предназначено для начинающих математиков любого возраста, включая учеников начальной школы с хорошо развитым навыком чтения. Почти во всех задачах персонажи делают верные и неверные утверждения. К подобным задачам школьники обычно без труда подбирают правильный ответ и могут проверить, что он соответствует условию. Основная цель занятия — продемонстрировать, что в математической задаче важно *не только найти ответ*, *но и доказать его единственность*. Необходимость такого доказательства подчеркивается в задаче 1.2 (где логическая неаккуратность связывается с судебной ошибкой) и задаче 1.11 (в которой обычно угадывают только один из двух возможных ответов).

Доказать отсутствие других ответов можно с помощью *полного перебора*. В задаче 1.3 обсуждается, как удачная организация перебора укорачивает решение.

Полный перебор позволяет верно решить задачу, не вникая в тонкости, и этим удобен. Но, как и всякий метод, он не универсален. Внимательное чтение условия задачи позволяет порой найти другое, более изящное решение (см. решение 3 задачи 1.1 и задачу 1.12). Подробнее об этом речь пойдёт на двух следующих занятиях.

Побочный сюжет, который учитель может при желании затронуть — изоморфизм задач. К задаче 1.8 в задачнике в конце книги предлагается «двойник» — задача 14. Её можно предложить решить дома или на следующем занятии, а потом сравнить эти две задачи и убедиться, что с литературной точки зрения они не похожи, но математически абсолютно идентичны. Работу с изоморфными задачами на следующем занятии предлагается развить в самостоятельное придумывание задач.

Подбор или полный перебор?

Задача 1.1. До царя дошла весть, что кто-то из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им всем явиться ко двору. Молвили богатыри:

Илья Муромец: — Змея убил Добрыня Никитич.

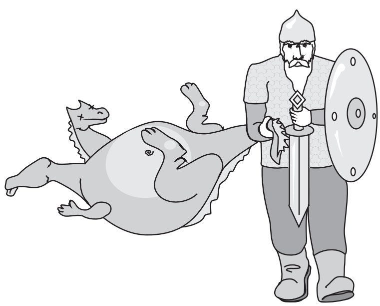
Добрыня Никитич: — Змея убил Алёша Попович.

Алёша Попович: — Я убил змея.

Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?

Первое «решение». Змея убил Добрыня. Тогда Илья сказал правду, а Добрыня и Алёша слукавили. Всё сходится.

Задача «решена» подбором: приведён ответ и доказано, что он удовлетворяет условию. Но этого недостаточно: надо ещё проверить, единственный ли он! Поэтому пока задачу нельзя считать решённой.



Второе решение. Рассмотрим по очереди, кто мог убить змея. Если Илья Муромец, то все трое сказали неправду, что противоречит условию. Если Добрыня Никитич, то правду сказал Илья, а Алёша и Добрыня слукавили. Если Алёша, то и Добрыня, и Алёша сказали правду, а это тоже противоречит условию. Итак, убить змея мог только Добрыня.

Вот теперь задача решена не подбором, а *полным перебором*: проверены все возможности и доказано, что только одна из них удовлетворяет условию. Это верное решение. Правда, оно стало длинным. Нельзя ли покороче? Можно! Для этого надо «всего лишь» найти ту самую ниточку, потянув за которую, легко размотать весь клубок. В данном случае надо сравнить два последних высказывания.

Третье решение. Добрыня и Алеша утверждают одно и то же. Но правду сказал лишь один богатырь. Это мог быть только Илья. Значит, змея убил Добрыня.

Эта задача в итоге решена коротко и верно. Что же делать, если заветную ниточку найти не удаётся? Тогда приходится решать задачу перебором. При этом важно *честно перебрать все случаи, а не останавливаться, как только угадан ответ.*

Задача 1.2. Из сейфа похищены важные документы. Полиция уверена, что в краже участвовали двое из семерых подозреваемых: А, Б, В, Г, Д, Е, Ж. По показаниям консьержки дома напротив один из похитителей был высокого роста. Шерлок Холмс, осмотрев место происшествия, обнаружил пепел сигары и несколько волосков собаки. По характерным царапинам на сейфе он определил, что взломщик — левша.

А, Б, В и Г высокие; все, кроме А курят сигары; Д и Ж держат дома собак, а А и Е — левши. На основании всех улик инспектор Лестрейд арестовал А и Д. Правильно ли он поступил?

Решение. Если документы похитили А и Д, то всё действительно сходится, так как А высокий левша, а Д курит и держит дома собаку. Но прежде чем арестовывать подозреваемых, необходимо проверить все версии. Это можно сделать по-разному. Разберём короткий способ.

При первом чтении условия выделяем признаки похитителей: рост, сигара, собака, левша. С каких удобнее начать? С двух последних: каждому из них соответствуют лишь по два подозреваемых. Один из похитителей — А или Е (только они левши). Другой — Д или Ж (только у них есть собаки). Из этих четверых высок только А, поэтому он — один из сообщников, а Е — невиновен. А вот точно определить второго невозможно — как пара А и Д, так и пара А и Ж удовлетворяет всем условиям. Поэтому инспектор Лестрейд неправ: вина Д не доказана, следствие необходимо продолжать.

Как видно из этого примера, следователь, пренебрегающий полнотой перебора, рискует упрятать за решётку невиновного. Последствия подобных ошибок для участника математической олимпиады не столь трагичны: ему всего лишь не засчитают задачу.

Как сделать перебор короче?

Задача 1.3. Из каюты капитана пиратского корабля исчезла бутылка ямайского рома. Подозрение пало на Гарри, Тома и Одноглазого Чарли. Подозреваемые заявили:

Гарри: не трогал я Вашего рома. Том тоже ни при чём.

Том: ручаюсь головой, сэр, Гарри невиновен. Ром стянул Одноглазый.

Чарли: бутылочку Вашу взял Гарри. А я в этом не замешан.

Капитану удалось выяснить, кто взял ром. Оказалось, что один из подозреваемых дважды солгал, другой — дважды сказал правду, а третий один раз солгал, а другой раз сказал правду. Кроме того, вор действовал в одиночку. Кто же он?

Обсуждение. Будем решать задачу перебором. Организовать его можно по-разному. Можно, например, для начала предположить, что Гарри солгал дважды. Тогда солгать один раз мог либо Том, либо Чарли. Причем либо в первом высказывании, либо во втором. Потом точно так же разобрать случаи, когда дважды лгали другие пираты. Не многовато ли случаев? Правда, каждый разбирается совсем просто, но в многочисленных развилках недолго и запутаться.

В этой задаче лучше смотреть не на то, кто лжёт, а на то, кто украл ром. Тогда получаются всего три случая.

Решение. Если ром украл Гарри, то он один раз сказал правду, а другой раз солгал. Том в этом случае дважды солгал, а Чарли дважды сказал правду. Всё сходится. Для полноты решения необходимо проверить и остальные случаи. Если ром украл Том, то и Гарри, и Том один раз сказали правду, а второй раз солгали — противоречие с условием. Если же вор — Чарли, то и Гарри, и Том дважды сказали правду, что также противоречит условию.

Ответ: ром украл Гарри.

Задача 1.4. Команды А, Б, В, Г и Д участвовали в эстафете. До соревнований пять болельщиков, высказали следующие прогнозы.

1) команда Д займёт 1-е место, команда В — 2-е;

2) команда А займёт 2-е место, Г — 4-е;

3) В — 3-е место, Д — 5-е;

4) В — 1-е место, Г — 4-е;

5) А — 2-е место, В — 3-е.

В каждом прогнозе одна часть подтвердилась, а другая — нет. Какое место заняла каждая из команд?

Решение. Рассмотрим два случая.

I. В первом прогнозе верна первая часть: Д заняла 1-е место. Тогда в третьем прогнозе верна первая часть, поэтому команда В на 3-м месте. В пятом прогноза верна вторая часть, поэтому команда А заняла не 2-е место. Тогда и во втором прогнозе верна вторая часть, то есть у команды Г — 4-е место. Для А и Б остались места 2-е и 5-е, следовательно у А — 5-е место.

II. В первом прогнозе верна вторая часть, то есть команда В заняла 2-е место. Тогда в пятом прогнозе нет верных предположений: команда А не может занять 2-е место, так как оно уже занято. Противоречие.

Ответ: команды заняли по порядку следующие места Д, Б, В, Г, А.

Подведём итоги. В задачах, где часть утверждений верны, а часть неверны, можно организовать перебор двумя способами:

- по тому, какие из высказываний правдивы.
- по тому, кто совершил действие (убил змея, украл ром, занял первое место и т. д.).

Выбирать надо стараться тот, где перебор короче. Но в любом случае важно проводить перебор до конца, а не останавливаться, как только найден ответ, удовлетворяющий условию.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.5. На Олину парту упал бумажный самолёт с нарисованными красными сердечками. Оля развернула его и прочитала: «Ты — лучшая девочка в классе!» Она повернулась к сидящим за ней ребятам: Ване, Серёже и Алёше. Все три мальчика покраснели.

— Кто из вас делает мне такие комплименты? — спросила Оля.

— Это Сергей! — сказал Ваня.

— Нет, это не я! — сказал Серёжа.

— Я ничего такого не делал! — сказал Алёша.

Подруга Оли Маша ухмыльнулась: «Двое из них лгут!» Однако она не хочет больше ничего говорить. Кто является тайным поклонником Оли?

Задача 1.6. Богини Гера, Афина и Афродита пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения:

Афродита: «Я самая прекрасная».

Афина: «Афродита не самая прекрасная».

Гера: «Я самая прекрасная».

Афродита: «Гера не самая прекрасная».

Афина: «Я самая прекрасная».

Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух других богинь ложны. Мог ли Парис вынести решение, кто прекраснее из богинь?

Задача 1.7. Алёша, Вася и Серёжа занимались в разных кружках: танцевальном, хоровом и драматическом.

На вопрос, кто в каком кружке занимается, они ответили:

Алёша: Я — в танцевальном.

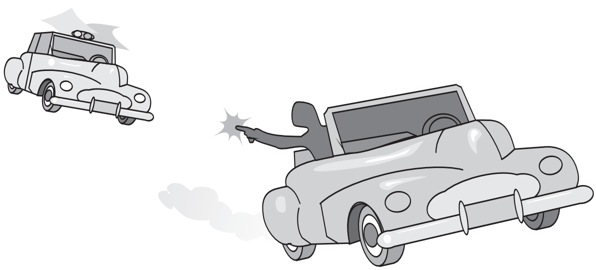
Вася: Я — не в танцевальном.

Серёжа: Я — не в хоровом.

Засмеявшись, добавили:

— Вы ведь из математического кружка, вот и определите, в каком кружке каждый из нас занимается, учитывая, что из трёх ответов один верный, а два — нет.

Задача 1.8. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники скрылись на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был чёрный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только её цвет. Какого цвета и какой марки был автомобиль?



Задача 1.9. Четверо друзей соревновались в метании сосновых шишек. На вопрос, какое каждый из них занял место, они ответили:

Андрей: Я был вторым, Боря — третьим.

Вася: Я был вторым, Андрей — первым.

Гриша: Я был вторым, Боря — четвёртым.

При этом известно, что каждый мальчик один раз говорил правду, а один раз — неправду. Кто какое место занял?

Задача 1.10. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

а) ничьей не будет;

б) в ворота «Юга» забьют;

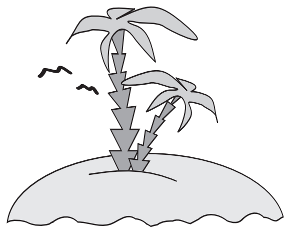
в) «Север» выиграет;

г) «Север» не проиграет;

д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что ровно три прогноза оказались верными. С каким счетом закончился матч?

Задача 1.11. Три путешественника увидели вдали зелёный остров.



— На этом острове больше ста пальм! — воскликнул первый.

— Нет, пальм на острове меньше ста, — возразил второй.

— Одна-то пальма на острове наверняка есть, — сказал третий.

Когда они высадились на остров, только одно из этих утверждений оказалось истинным. Сколько пальм было на острове?

Задача 1.12. Три мальчика после рыбалки сказали:

Петя: Я поймал 22 рыбы; Гриша на две больше меня, а Вася на одну меньше меня.

Гриша: Я поймал не меньше всех; Вася поймал 25 рыб; разница между моим и Васиным уловом составляет три рыбы.

Вася: Я поймал меньше, чем Петя; Петя поймал 23 рыбы, а Гриша на три рыбы больше, чем Петя.

Оказалось, что каждый из ребят сделал два истинных утверждения и одно ложное. Сколько рыб поймал каждый из них?

Подсказки

1.7. Проверьте по очереди про каждого мальчика, мог ли именно он сказать правду.

1.8. Выберите любого преступника. Он мог верно указать либо цвет, либо марку машины. Рассмотрите оба случая.

1.10. Не хотите перебирать все возможные исходы матча с точностью до счёта? И не надо, их бесконечно много! Зато ответов на вопрос «Кто выиграл?» всего три.

1.12. Эта сложнее всех предыдущих. Полный перебор по количеству пойманных рыб невозможен. Перебор по тому, какое из трёх утверждений каждого мальчика истинно, приводит к рассмотрению «всего лишь» 27 случаев. Рассматривать их по очереди и искать 26 противоречий — занятие не из приятных. Вспомним первую задачу этого занятия: чтобы найти короткое решение, мы заметили, что Добрыня и Алеша утверждают одно и то же. Похожий приём применён и в первом решении задачи про самолётик, упавший на Олину парту: там, напротив, высказывания Вани и Серёжи противоречат друг другу. Попробуем и на этот раз поискать либо одинаковые, либо взаимоисключающие высказывания. Эта и есть та «заветная ниточка», потянув за которую, легко распутать клубок.

2.9. Угадать ответ просто. Нетрудно даже привести пример, как такое могло быть: все, кроме Вани, заняли ровно на одно место ниже, чем рассчитывали, а Ваня — первое. Но как доказать, что никакого другого места Ваня занять не мог? Для этого полезно поискать узкое место: на какое место в чемпионате труднее всего подобрать кандидата?

Ответы

Занятие 1

1.5. Алёша.

1.6. Афродита.

1.7. Алёша в хоровом, Вася в танцевальном, Серёжа в драматическом.

1.8. Чёрный «Бьюик».

1.9. Андрей первый, Гриша второй, Боря третий, Вася четвёртый.

1.10. «Юг» выиграл со счетом 2:1.

1.11. Либо ровно 100 пальм, либо ни одной пальмы.

1.12. Петя поймал 23 рыбы, Гриша — 25, а Вася — 22 рыбы.

Занятие 2

2.7. Алмаз нашёл Пили, топаз — Ели, а медный таз — Спали.

2.8. Портрет Орла написал Попугай, авторов других картин определить нельзя.

2.9. Первое.

2.10. Валя в белых туфлях и голубом платье, Лида — в голубых туфлях и белом платье, Тамара — в красных туфлях и красном платье.

2.11. С физиком и историком математик говорил по-русски, а с биологом — по-английски.

2.12. Жуй Джем, Джем Пей, Пей Чай и Чай Жуй (имя предшествует фамилии).

Занятие 3

3.6. Алла, Вика, Боря, Соня, Денис.

Решения задач

Занятие 1

Задача 1.5. Первое решение. Ваня и Серёжа противоречат друг другу. Поэтому один из них лжёт, а другой говорит правду. Поэтому Алёша лжёт, и именно он бросил самолётик.

Второе решение. Если самолётик бросил Ваня, то солгал только он. Если Серёжа, то снова лжёт он один. Оба предположения противоречат условию. А вот если тайный поклонник Оли Алёша, то лгут двое, Алёша и Ваня, что согласуется с условием.

Задача 1.6. Рассмотрим случаи: кто самая прекрасная.

1) Пусть это Афродита. Тогда все её утверждения действительно истинны, а утверждения Геры и Афины ложны.

2) Пусть это Афина. Тогда второе утверждение Афродиты «Гера не самая прекрасная» оказывается истинным — противоречие.

3) Пусть это Гера. Тогда первое утверждение Афины «Афродита не самая прекрасная» оказывается истинным — снова противоречие.

Итак, самая прекрасная Афродита.

Задача 1.7. Посмотрим, кто мог сказать правду.

Если Алёша, то он занимается в танцевальном кружке, а Вася — в каком-то другом. Но тогда и Вася сказал правду — противоречие.

Если Вася, то Серёжа солгал и занимается в хоровом кружке. Вася не в танцевальном и не в хоровом кружке — значит, в драматическом. Алёше остаётся танцевальный кружок, но тогда он тоже сказал правду — снова противоречие.

Остаётся последняя возможность — правду сказал Серёжа. Вася солгал и занимается в танцевальном кружке. Серёжа не в хоровом и не в танцевальном — значит, в драматическом. Алёше остаётся хоровой кружок, и он действительно солгал.

Задача 1.8. Требуется рассмотреть всего два случая: Браун мог верно указать либо цвет, либо марку машины.

1) Если верен цвет, то машина была синей. Тогда Джонс верно указал на марку «Крайслер», а Смит солгал дважды — противоречие.

2) Если же Браун верно указал марку, то преступники скрылись на «Бьюике» и его цвет не синий. Джонс указал марку неверно, поэтому он верно указал цвет — чёрный. Смит верно указал что цвет не синий — всё сходится.

Задача 1.9. Предположим, что у Андрея верно первое высказывание. Значит, он занял второе место. Тогда Вася солгал дважды. Пришли к противоречию.

Значит, Андрей сказал правду во втором высказывании, и Боря был третьим. Тогда Гриша мог сказать правду только в первом высказывании, и именно он был вторым. Поэтому Вася мог сказать правду только во втором высказывании, и первым был Андрей. Васе остается четвёртое место.

Задача 1.10. У матча возможны три исхода. Разберём случаи.

1) «Север» выиграл. Тогда первые четыре прогноза будут верными, что противоречит условию.

2) Была ничья. Тогда заведомо неверны прогнозы а), в) и д) (так как при ничьей количество забитых голов чётно). Таким образом, верными оказались не более двух прогнозов, что тоже противоречит условию.

3) «Север» проиграл. Тогда третий и четвёртый прогнозы оказались неверными. Значит, все оставшиеся три прогноза верны. Так как в ворота «Юга» забили, всего бы-

ло забито три гола и «Юг» выиграл, то матч закончился со счётом 2 : 1.

Задача 1.11. Если верно первое утверждение, то верно и третье. Поэтому больше ста пальм на острове быть не может. Если верно второе утверждение, то первое заведомо ложно. А вот чтобы ложным оказалось и третье утверждение, на острове должно быть 0 пальм (что, конечно же, меньше 100). Наконец, чтобы верным оказалось только третье утверждение, пальмы на острове должны быть, но их должно быть не больше 100 и не меньше 100, то есть ровно 100.

Задача 1.12. Выделим важную часть условия:

Петя: Петя поймал 22 рыбы; Гриша поймал на 2 рыбы больше, чем Петя.

Вася: Петя поймал 23 рыбы, Гриша поймал на 3 рыбы больше, чем Петя.

Петя и Вася противоречат друг другу в двух утверждениях. Поскольку ни Петя, ни Вася не лгали дважды, один из них верно указал Петин улов, а другой — разницу между Петиным и Гришиным уловом. Итак, надо рассмотреть всего два случая:

1) Петя поймал 22 рыбы, а Гриша на три больше, то есть 25 рыб. Тогда Вася по словам Пети (который больше не лгал) поймал 21 рыбу. Поэтому Гриша солгал дважды. Противоречие.

2) Петя поймал 23 рыбы, а Гриша на две больше, то есть 25 рыб. Тогда Вася по словам Пети (который больше не лгал) поймал 22 рыбы. Здесь противоречия нет: из Петиных высказываний ложно только первое, из Гришиных — второе, а из Васиных — третье.

Занятие 2

Задача 2.7. Рассуждать можно как с помощью таблицы (см. рис. 25), так и без неё. Судя по цвету капюшона, медный таз нашёл не Ели, а по длине бороды — не Пили.

Авторы задач

Большинство использованных в книге задач давно и заслуженно стали математическим фольклором, или восходят к нему. Их обычно публикуют без указания авторов. Это, однако, не повод умалчивать об авторах, которых удалось установить:

Е. Г. Кукина: Д26

А. А. Заславский: 5.10

В. В. Произволов: Д35

И. В. Раскина: 2.7, 2.8, 3.1, 3.5, 3.10, 3.12, Д28, Д43, Д45

И. С. Рубанов: Д21

С. И. Токарев: 4.7

С. В. Усов: Д16, Д29, Д50, Д51

Л. Е. Федулкин, В.М. Федулкина: 1.10

А. В. Хачатурян: 5.10, 6.1

А. В. Шаповалов: 2.1, 2.9, Д1, Д19, Д23, Д30, Д31, Д32, Д33, Д37, Д38, Д39, Д47

Д. Э. Шноль: 1.2, 3.4, 3.7, 4.11, 4.13, 5.3, 5.4, Д2, Д24, Д44, Д49

А. С. Штерн: Д20, Д27, Д46

Спасибо этим авторам, а также тем неизвестным, кто сочинил фольклорные жемчужины!

Раздаточный материал

Занятие 1. Перебор в логических задачах

Задача 1.1. До царя дошла весть, что кто-то из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им всем явиться ко двору. Молвили богатыри:

Илья Муромец: — Змея убил Добрыня Никитич.

Добрыня Никитич: — Змея убил Алёша Попович.

Алёша Попович: — Я убил змея.

Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?

Задача 1.2. Из сейфа похищены важные документы. Полиция уверена, что в краже участвовали двое из семерых подозреваемых: А, Б, В, Г, Д, Е, Ж. По показаниям консьержки дома напротив один из похитителей был высокого роста. Шерлок Холмс, осмотрев место происшествия, обнаружил пепел сигары и несколько волосков собаки. По характерным царапинам на сейфе он определил, что взломщик — левша.

А, Б, В и Г высокие; все, кроме А курят сигары; Д и Ж держат дома собак, а А и Е — левши. На основании всех улик инспектор Лестрейд арестовал А и Д. Правильно ли он поступил?

Задача 1.3. Из каюты капитана пиратского корабля исчезла бутылка ямайского рома. Подозрение пало на Гарри, Тома и Одноглазого Чарли. Подозреваемые заявили:

Гарри: не трогал я Вашего рома. Том тоже ни при чём.

Том: ручаюсь головой, сэр, Гарри невиновен. Ром стянул Одноглазый.

Чарли: бутылочку Вашу взял Гарри. А я в этом не замешан.

Капитану удалось выяснить, кто взял ром. Оказалось, что один из подозреваемых дважды солгал, другой — дважды сказал правду, а третий один раз солгал, а другой раз сказал правду. Кроме того, вор действовал в одиночку. Кто же он?

Задача 1.4. Команды А, Б, В, Г и Д участвовали в эстафете. До соревнований пять болельщиков, высказали следующие прогнозы.

1) команда Д займёт 1-е место, команда В — 2-е;

2) команда А займёт 2-е место, Г — 4-е;

3) В — 3-е место, Д — 5-е;

4) В — 1-е место, Г — 4-е;

5) А — 2-е место, В — 3-е.

В каждом прогнозе одна часть подтвердилась, а другая — нет. Какое место заняла каждая из команд?

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.5. На Олину парту упал бумажный самолёт с нарисованными красными сердечками. Оля развернула его и прочитала: «Ты — лучшая девочка в классе!» Она повернулась к сидящим за ней ребятам: Ване, Серёже и Алёше. Все три мальчика покраснели.

— Кто из вас делает мне такие комплименты? — спросила Оля.

— Это Сергей! — сказал Ваня.

— Нет, это не я! — сказал Серёжа.

— Я ничего такого не делал! — сказал Алёша.

Подруга Оли Маша ухмыльнулась: «Двое из них лгут!» Однако она не хочет больше ничего говорить. Кто является тайным поклонником Оли?

Задача 1.6. Богини Гера, Афина и Афродита пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения:

Афродита: «Я самая прекрасная».

Афина: «Афродита не самая прекрасная».

Гера: «Я самая прекрасная».

Афродита: «Гера не самая прекрасная».

Афина: «Я самая прекрасная».

Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух других богинь ложны. Мог ли Парис вынести решение, кто прекраснее из богинь?

Задача 1.7. Алёша, Вася и Серёжа занимались в разных кружках: танцевальном, хоровом и драматическом. На вопрос, кто в каком кружке занимается, они ответили:

Алёша: Я — в танцевальном.

Вася: Я — не в танцевальном.

Серёжа: Я — не в хоровом.

Засмеявшись, добавили:

— Вы ведь из математического кружка, вот и определите, в каком кружке каждый из нас занимается, учитывая, что из трёх ответов один верный, а два — нет.

Задача 1.8. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники скрылись на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был чёрный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только её цвет. Какого цвета и какой марки был автомобиль?

Задача 1.9. Четверо друзей соревновались в метании сосновых шишек. На вопрос, какое каждый из них занял место, они ответили:

Андрей: Я был вторым, Боря — третьим.

Вася: Я был вторым, Андрей — первым.

Гриша: Я был вторым, Боря — четвёртым.

При этом известно, что каждый мальчик один раз говорил правду, а один раз — неправду. Кто какое место занял?

Задача 1.10. Перед футбольным матчем команд «Север» и «Юг» было дано пять прогнозов:

а) ничьей не будет;

б) в ворота «Юга» забьют;

в) «Север» выиграет;

г) «Север» не проиграет;

д) в матче будет забито ровно 3 гола.

После матча выяснилось, что ровно три прогноза оказались верными. С каким счетом закончился матч?

Задача 1.11. Три путешественника увидели вдали зелёный остров.

— На этом острове больше ста пальм! — воскликнул первый.

— Нет, пальм на острове меньше ста, — возразил второй.

— Одна-то пальма на острове наверняка есть, — сказал третий.

Когда они высадились на остров, только одно из этих утверждений оказалось истинным. Сколько пальм было на острове?

Задача 1.12. Три мальчика после рыбалки сказали:

Петя: Я поймал 22 рыбы; Гриша на две больше меня, а Вася на одну меньше меня.

Гриша: Я поймал не меньше всех; Вася поймал 25 рыб; разница между моим и Васиным уловом составляет три рыбы.

Вася: Я поймал меньше, чем Петя; Петя поймал 23 рыбы, а Гриша на три рыбы больше, чем Петя.

Оказалось, что каждый из ребят сделал два истинных утверждения и одно ложное. Сколько рыб поймал каждый из них?

Оглавление