АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ

ISAACI NEWTONI

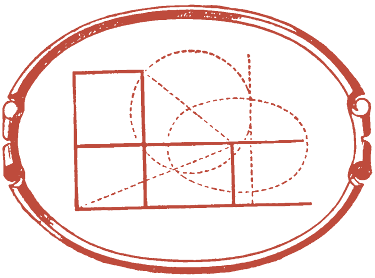
ARITHMETICA UNIVERSALIS,

SIVE DE COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE ARITHMETICA LIBER

ИСААК НЬЮТОН

ВСЕОБЩАЯ АРИФМЕТИКА
ИЛИ КНИГА ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СИНТЕЗЕ И АНАЛИЗЕ

ПЕРЕВОД, СТАТЬЯ И КОММЕНТАРИИ
А. П. ЮШКЕВИЧА



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1948

Под общей редакцией Комиссии Академии Наук СССР
по изданию научно-популярной литературы
Председатель Комиссии президент Академии Наук СССР
академик *С. И. ВАВИЛОВ*
Зам. председателя член-корреспондент Академии Наук СССР
П. Ф. ЮДИН


ВСЕОБЩАЯ АРИФМЕТИКА
ИСААК НЬЮТОН

ВСЕОБЩАЯ АРИФМЕТИКА ИЛИ КНИГА ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СИНТЕЗЕ И АНАЛИЗЕ[1]

Вычисления производятся либо при помощи чисел, как в обыкновенной арифметике, либо при помощи видов (species), как в алгебре.[2] Оба приема основаны на одинаковых принципах и ведут к одной цели, причем арифметика — путем определенным и частным, алгебра же — путем неопределенным и всеобщим. Поэтому почти все предложения, а особенно заключения, содержащиеся в алгебре, можно назвать теоремами. Особое превосходство алгебры заключается в том, что, тогда как в арифметике при решении вопросов переходят только от данных величин к искомым, в алгебре следуют обратному порядку, переходя от искомых величин, рассматриваемых как данные, к данным величинам, рассматриваемым как искомые, с тем чтобы как-либо удалось притти к заключению или уравнению, из которого можно было бы найти искомую величину. Именно таким путем решаются очень трудные задачи, решение которых было бы тщетно искать при помощи одной арифметики. Однако все действия арифметики столь необходимы в алгебре, что они лишь совместно образуют полную науку вычислений, и поэтому я буду излагать их обе вместе.

Приступающий к изучению науки вычисления должен сначала ознакомиться со значением употребляемых в ней терминов и знаков и изучить основные действия, как то: сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней, приведение дробей и радикалов и методы приведения членов уравнений и исключения неизвестных (когда их несколько). Далее нужно приобрести сноровку во всех этих действиях, приводя задачи к уравнениям, и, наконец, изучить природу и решение уравнений.

О ЗНАЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ ТЕРМИНОВ И ЗНАКОВ

Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное (surdus).[3] Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей.

Каждому известны знаки целых чисел (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и значения этих знаков, собранных по нескольку вместе. Подобно тому как числа, стоящие на первом месте перед единицей, т. е. слева, означают десятки единиц, числа, стоящие на втором месте, — сотни, стоящие на третьем месте, — тысячи и т. д., подобно этому, числа, стоящие на первом месте после единицы, означают десятые доли этой единицы, числа, стоящие на втором месте справа, — сотые доли, стоящие на третьем месте, — тысячные доли и т. д. Такие числа мы называем десятичными дробями, ибо они всегда убывают в десятичном отношении. Чтобы отличать целые от десятичных дробей, мы ставим запятую, или же точку, или еще маленькую линию. Таким образом, 732|569 обозначает семьсот тридцать две единицы вместе с пятью десятыми, шестью сотыми и девятью тысячными долями единицы, что можно записать и так: 732,/569, или 732,569 или же 732 $\llcorner$ 569. Так, далее, число 57104,2083 обозначает пятьдесят семь тысяч сто четыре единицы вместе с двумя десятыми восемью тысячными и тремя десятитысячными долями единицы. А число 0,064 обозначает шесть сотых и четыре тысячных доли.[4]

Знаки иррациональных чисел и дробных чисел приведены далее.

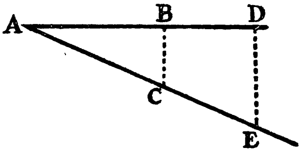
Когда величина какой-либо вещи не известна или рассматривается как неопределенная, так что мы не можем ее выразить с помощью чисел, мы обозначаем ее каким-либо видом (species) или какой-либо буквой. Когда мы рассматриваем как неопределенные известные величины, то обозначаем их для отличия начальными буквами алфавита a, b, c, d, а неизвестные — последними буквами z, y, x и т. д. Некоторые обозначают известные величины согласными или прописными буквами, а неизвестные — гласными или строчными буквами.[5]

Фиг. 1

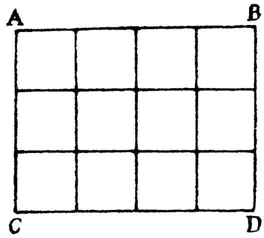
Величины бывают либо положительные, или же больше, чем ничто, либо отрицательные, или же меньше, чем ничто. Так, в общежитии имущество можно назвать положительным достоянием, а долг — отрицательным. Подобным же образом местное движение тела вперед можно назвать положительным, а движение назад — отрицательным, ибо первое движение увеличивает длину пути, а второе ее уменьшает. Аналогичным образом, если в геометрии линия, проведенная в какую-либо одну сторону, считается положительной, то отрицательной будет линия, проведенная в противоположную сторону. Если, например (фиг. 1), AB проведена направо, а BC налево и AB считается положительной, то BC будет отрицательной, ибо она, будучи проведенной, уменьшает AB, делая ее короче, как AC, или же ничем, если точка C совпадает с точкой A, или же меньше, чем ничто, если BC длиннее, чем AB, от которой ее нужно отнять. Отрицательная величина обозначается знаком $-$, а перед положительной ставится знак $+$. Запись $\mp$ обозначает неопределенный знак, а запись $\pm$ неопределенный знак, обратный первому.[6,7]

В собрании величин знак $+$ перед какой-нибудь из них выражает, что ее нужно прибавить, а знак $-$, что ее нужно вычесть. Эти знаки мы обыкновенно выражаем словами „плюс“ и „минус“. Так, $2+3$, или 2 плюс 3, означает сумму чисел 2 и 3, т. е. 5; а $5-3$, или 5 минус 3, означает разность, возникающую при вычитании 3 из 5, т. е. 2. Далее, $-5+3$ есть разность, возникающая при вычитании 5 из 3 и равная -2; $6-1+3$ дает 8. Точно так же $a+b$ есть сумма величин a и b; $a-b$ есть разность, которая возникает при вычитании b из a, и $a-b+c$ есть сумма этой разности и величины c. Если a есть 5, b есть 2 и c есть 8, то $a+b$ будет 7, $a-b$ будет 3 и $a-b+c$ будет 11. Далее, $2a+3a$ есть $5a$ и $3b-2a-b+3a$ есть $2b+a$, ибо $3b-b$ дает $2b$ и $-2a+3a$ дает a, а сумма их есть $2b+a$, и так далее. Значки $+$ и $-$ называются „знаками“. Если величине не предшествует какой-либо знак, то перед ней подразумевается знак $+$.

Умножение в собственном смысле слова есть действие, производимое над целыми числами, с помощью которого находят новую величину, во столько раз бо́льшую множимого, во сколько множитель больше единицы. Но за отсутствием более подходящего слова умножением называют также действие над дробными или иррациональными числами, с помощью которого ищут новую величину, находящуюся со множимым в том же отношении (каково бы оно ни было), какое множитель имеет к единице. Умножение производится не только над отвлеченными числами, но и над конкретными величинами, как линии, поверхности, движения, веса и т. д., поскольку эти величины, будучи отнесены как к единице к некоторой известной величине одинакового с ними рода, могут выражать и заменять отношения чисел. Если, например, требуется умножить величину A на линию в 12 футов, причем за единицу взята линия в 2 фута, то получится при умножении $6A$, или шесть раз A, так же как если бы A умножалось на отвлеченное число 6, ибо $6A$ находится в том же отношении к A, какое линия в 12 футов имеет к двухфутовой единице. Аналогичным образом, если требуется перемножить какие-либо две линии AC и AD (фиг. 2), то следует принять AB за единицу, провести BC и параллельно ей DE; при этом умножении произведением будет AE, ибо AE относится к AD, как AC к единице AB.[8] Более того, в силу обычая и образование или описание поверхности посредством движения под прямым углом одной линии вдоль другой также называется умножением этих двух линий. Это объясняется тем, что, хотя сколько бы ни умножать какую-либо линию,



Фиг. 2



Фиг. 3

она не станет поверхностью, и, значит, подобное образование поверхности с помощью линий весьма отлично от умножения, но между этими действиями имеется некоторое сходство. Именно, при умножении числа единиц в одной из линий на число единиц в другой линии в произведении получится отвлеченное число единиц, содержащихся в поверхности, образуемой этими линиями, если только единица поверхности определена по обыкновению как квадрат, стороны которого суть линейные единицы.

Если, например, прямая AB (фиг. 3) состоит из четырех единиц, а AC — из трех, то прямоугольник AD будет состоять из четырежды трех, или же двенадцати, квадратных единиц, как это видно из чертежа. Такая же аналогия имеется между телом и произведением трех величин. Поэтому-то слова: провести (ducere), размер, прямоугольник, квадрат, куб, измерение, сторона и другие, являющиеся геометрическими терминами, употребляются и в арифметических действиях. Дело в том, что под квадратом, или прямоугольником, или же величиной двух измерений, мы не всегда понимаем поверхность, но обычно разумеем величину иного рода, получающуюся при умножении двух других величин, и весьма часто при этом линию, получающуюся при умножении двух других линий. Аналогичным образом, под кубом, или параллелепипедом, или величиной трех измерений, мы понимаем результат двух последовательных умножений. Подобным же образом мы говорим „сторона" вместо „корень", „провести" (ducere) вместо „умножить" и т. д..[9]

Число, поставленное непосредственно перед буквой, показывает, сколько раз нужно прибавить эту букву к самой себе. Так, $2a$ означает два a, $3b$ — три b, $15x$ означает пятнадцать x.[10]

Записанные подряд две или больше буквы обозначают произведение или величину, возникающую при взаимном перемножении всех этих букв. Так, ab обозначает произведение a на b, abx — произведение a на b, умноженное на x. Если, например, a есть 2, b есть 3 и x есть 5, то ab будет 6 и abx будет 30.

Иногда для обозначения произведения между перемножаемыми величинами ставят знак $\times$, или слово „на". Так, 3×5, или 3 на 5, означает 15. Впрочем, эти знаки употребляются главным образом при умножении составных величин. Так, если требуется умножить $y - 2b$ на $y + b$, то над каждой величиной проводится черта и затем пишут $\overline{y - 2b} \times \overline{y + b}$, или же $\overline{y - 2b}$ на $\overline{y + b}$.[11]

Деление в собственном смысле слова есть производимое над целыми числами действие, при помощи которого находят новую величину, во столько раз меньшую, чем делимое, во сколько раз единица меньше делителя. Но по аналогии принято называть делением также всякое действие, при помощи которого ищут новую величину, находящуюся в том же отношении к делимому, какое единица имеет к делителю, каков бы ни был делитель — дробное или иррациональное число или же иная величина любого рода. Поэтому, чтобы разделить линию AE на линию AC при единице AB (фиг. 2), следует провести ED параллельно CB, и линия AD будет частным. Более того, в силу некоторого сходства говорят о делении и в том случае, когда прямоугольник прилагают к некоторой данной линии как основанию, чтобы узнать тем самым его высоту.[12]

Запись одной из двух величин под другой, ниже которой между ними проведена черта, обозначает частное или же величину, возникающую при делении верхней величины на нижнюю. Так, $\frac{6}{2}$ означает величину, возникающую при делении 6 на 2, т. е. 3, а $\frac{5}{8}$ — величину, возникающую при делении 5 на 8, т. е. восьмую долю числа 5. Далее, $\frac{a}{b}$ есть величина, возникающая при делении a на b. Если, например, a есть 15 и b есть 3, то $\frac{a}{b}$ будет 5. Точно так же $\frac{ab-bb}{a+x}$ означает величину, получающуюся при делении $ab-bb$ на $a+x$ и т. д. Величины такого рода называются дробями, верхняя величина — знаменателем, а нижняя — числителем.

Иногда делитель пишут впереди делимого, отделяя от него дугой. Так, чтобы обозначить величину, возникающую при делении $\frac{axx}{a+b}$ на $a-b$, можно написать $\overline{a-b)}\,\frac{axx}{a+b}$.[13]

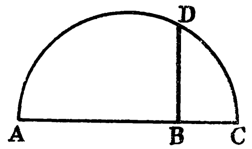
Хотя обычно запись величин непосредственно друг за другом обозначает умножение, но запись целого числа впереди дроби означает их сумму. Так, $3\frac{1}{2}$ значит три с половиной.

При умножении величины на самое себя принято, ради краткости, надписывать повыше ее число сомножителей. Вместо aaa пишут таким образом a^3, вместо $aaaa$ пишут a^4, вместо $aaaaa$ пишут a^5, вместо $aaabb$ пишут a^3bb, или a^3b^2.

Если a есть 5 и b есть 2, то a^3 будет $5\times5\times5$, или 125; a^4 будет $5\times5\times5\times5$, или 625; a^3b^2 будет $5\times5\times5\times2\times2$, или 500. Заметьте, что число, написанное между двумя соседними буквами, относится всегда к первой из них; например, в записи a^3bb 3 означает, что a следует дважды умножить на самое себя, а не то, что нужно взять три раза bb. Заметьте также, что говорят, что эти величины имеют столько же измерений (dimensio) или такую же степень (potestas vel dignitas), сколько в них содержится перемножающихся сомножителей или величин; при этом число, надписываемое над буквой, называется показателем (index) ее степени или измерений. Например, aa — двух измерений, или второй степени, a^3 — трех измерений, на что указывает приписанное повыше число 3. Величина aa называется также квадратом, a^3 — кубом, a^4 — биквадратом или квадрато-квадратом, a^5 — квадрато-кубом, a^6 — кубо-кубом, a^7 — квадрато-квадрато-кубом и т. д. Величина a, последовательные умножения которой на самое себя образуют эти различные степени, называется корнем этих степеней. Именно, a есть квадратный корень квадрата aa, кубический корень куба a^3 и т. д.[14]

Так как корень, умноженный на самого себя, образует квадрат, этот квадрат, вновь умноженный на корень, образует куб и т. д., то (согласно определению умножения) единица относится к корню, как корень к квадрату, квадрат к кубу и т. д. Поэтому квадратный корень из какой-нибудь величины является средней пропорциональной между единицей и этой величиной; кубический корень является первой из двух средних пропорциональных между единицей и этой величиной; корень четвертой степени — первой из трех средних пропорциональных и т. д. Поэтому корни распознаются по двум их свойствам или признакам: во-первых, они при умножении на самих себя образуют высшие степени, а во-вторых, они представляют собой средние пропорциональные между этими степенями и единицей. То обстоятельство, например, что квадратный корень из 64 есть 8, а кубический корень есть 4, видно либо из того, что 8×8 дает 64, или $4 \times 4 \times 4$ дает 64, либо из того, что 1 относится к 8, как 8 к 64, или же, в случае кубического корня, из того, что 1 относится к 4, как 4 к 16 и как 16 к 64. Поэтому, чтобы извлечь квадратный корень из линии AB (фиг. 4), нужно продолжить линию AB до C так, чтобы BC было единицей, на AC как на диаметре описать полукруг и в B восстановить перпендикуляр, пересекающий круг в D. Так как линия BD есть средняя пропорциональная между AB и единицей BC, то она и будет искомым корнем.

Для обозначения корня какой-либо величины мы ставим перед ней в случае квадратного корня знак $\sqrt{\ }$, в случае кубического корня $\sqrt{3:}$, в случае корня четвертой степени $\sqrt{4:}$ и т. д. Так, $\sqrt{64}$ означает 8, а $\sqrt{3:64}$ означает 4; $\sqrt{aa}$ есть a; $\sqrt{ax}$ означает квадратный корень из ax; $\sqrt{3: 4axx}$ есть кубический корень из $4axx$. Если a есть 3 и x есть 12, то $\sqrt{ax}$ будет $\sqrt{36}$, или 6, а $\sqrt{3: 4axx}$ будет $\sqrt{3: 1728}$, или 12. Когда такие корни извлечь невозможно, их называют иррациональными величинами (например, $\sqrt{ax}$) или иррациональными числами (например, $\sqrt{12}$). [15]



Фиг. 4

Некоторые ученые для обозначения квадрата употребляют знак q и для куба c, для квадрато-квадрата qq, для квадрато-куба qc и т. д. Чтобы выразить квадрат, куб, биквадрат и т. д. A, они соответственно написали бы Aq, Ac, Aqq и т. д., а для кубического корня из $abb - x^3$ написали бы $\sqrt{\mathrm{c}: abb - x^3}$. Другие ученые применяют иные знаки, но они уже почти вышли из употребления.

Знак $=$ выражает равенство стоящих по его сторонам величин.[16] Так, $x = b$ означает, что x равен b.

Знак $::$ выражает, что величины, стоящие по его сторонам, пропорциональны. Так, $a \cdot b :: c \cdot d$ означает, что a относится к b, как c к d. Запись $a \cdot b \cdot e :: c \cdot d \cdot f$ означает, что a, b и e относятся между собой соответственно, как c, d и f, или же, что равны отношения величин a к c, b к d и e к f.[17]

Смысл других знаков, составленных из выше приведенных, не трудно будет понять по аналогии. Так, $\frac{3}{4}a^3bb$ означает три четверти a^3bb; $3\frac{a}{c}$ означает трижды $\frac{a}{c}$; $7\sqrt{ax}$ семь $\sqrt{ax}$; $\frac{a}{b}x$ означает произведение x на $\frac{a}{b}$; $\frac{5ee}{4a+9e}z^3$ означает произведение z^3 на $\frac{5ee}{4a+9e}$, т. е. на частное от деления $5ee$ на $4a+9e$; $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$ означает $\sqrt{ax}$, умноженный на $\frac{2a^3}{9c}$; $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ есть частное от деления $7\sqrt{ax}$ на c; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ есть частное от деления $8a\sqrt{cx}$ на сумму величин $2a+\sqrt{cx}$. Точно так же, $\frac{3ax^2-x^3}{a+x}$ есть частное от деления разности $3ax^2-x^3$ на сумму $a+x$; а $\sqrt{\frac{3ax^2-x^3}{a+x}}$ есть корень из этого частного. Далее, $(2a+3c)\sqrt{\frac{3ax^2-x^3}{a+x}}$ означает произведение корня из того же частного на $2a+3c$. Аналогично, $\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$ означает корень из суммы величин $\frac{1}{4}a^2$ и b^2; $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}$ означает корень из суммы величин $\frac{1}{2}a$ и $\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$; $\frac{2a^3}{a^2-z^2}\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}$ есть тот же корень, умноженный на $\frac{2a^3}{a^2-z^2}$, и т. д.

Заметьте, что в случае таких составных величин нет надобности уделять особое внимание значению отдельных букв; достаточно понимать вообще, что, например, $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}$ означает корень суммы $\frac{1}{2}a+$ $+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$, какова бы ни была эта сумма, если бы вместо букв были поставлены числа или линии. Точно так же достаточно понимать, что $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}}{a-\sqrt{ab}}$ означает частное от деления величины $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}$ на величину $a-\sqrt{ab}$, причем эти величины рассматриваются как простые и известные; мы можем и не знать, каковы их значения, и не уделять особого внимания составу или значению их отдельных частей. Я считал нужным предостеречь об этом, чтобы начинающих не отпугнула в самом начале сложность членов, входящих в величины.

О СЛОЖЕНИИ

Сложение не слишком сложных чисел — действие очевидное. Так, с первого взгляда ясно, что 7 и 9, или $7+9$, дают 16 или что $11+15$ дают 26. Однако когда числа сложнее, их для сложения следует подписывать друг под другом и находить сумму каждого из столбцов отдельно. Например, чтобы сложить числа 1357 и 172, запишите одно из них, скажем 172, под другим, 1357, так, чтобы единицы одного, т. е. 2, стояли в точности под единицами другого, т. е. 7, и чтобы другие числа в одном стояли в точности под соответствующими им числами в другом, т. е. десятки под десятками, т. е. 7 под 5, и сотни под сотнями, т. е. 1 под 3.

Далее, начиная справа, скажите: 2 и 7 дают 9, что запишите ниже. Затем, 7 и 5 дают 12. Подпишите последнее число 2 и удержите в памяти первое, т. е. 1, с тем чтобы прибавить его к двум следующим числам, т. е. 3 и 1. Далее скажите: 1 да 1 дают 2, что в сумме с 3 дает 5, и 5 подпишите внизу. Теперь остается лишь 1, первая цифра верхнего числа, которую также следует записать внизу, после чего вы и получите сумму 1529.

$$\begin{array}{r} 1\,357 \\ 172 \\ \hline 1\,529 \end{array}$$

Чтобы сложить в одну сумму числа 87899 + 13403 + 885 + + 1920, запишите все их друг под другом, так, чтобы в одном столбце оказались все единицы, в другом — десятки, в третьем — сотни, в четвертом — тысячи и т. д.

Затем скажите: 5 и 3 дают 8 и 8 + 9 дают 17. Запишите 7 внизу и прибавьте 1 к числам следующего столбца, говоря: 1 + 8 дают 9, 9 + 2 дают 11 и 11 + 9 дают 20. Запишите внизу 0 и продолжайте, как и ранее: 2 + 8 дают 10, 10 + 9 дают 19, 19 + 4 дают 23 и 23 + 8 дают 31. Удерживая в памяти 3, запишите 1 внизу и скажите, как и ранее: 3 + 1 дают 4, 4 + 3 дают 7, 7 + 7 дают 14; запишите поэтому внизу 4 и, наконец, скажите: 1 + 1 дают 2, а 2 + 8 дают 10. Запишите 10 внизу и вы получите сумму всех этих чисел.

$$\begin{array}{r} 87\,899 \\ 13\,403 \\ 1\,920 \\ 885 \\ \hline 104\,107 \end{array}$$

Сложение десятичных дробей производится таким же образом, как можно видеть из следующего примера:

$$\begin{array}{l} 630{,}953 \\ \;\;51{,}0807 \\ 305{,}37 \\ \hline 987{,}4037 \end{array}$$

При сложении алгебраических членов складываемые величины с их знаками соединяют вместе и затем объединяют те, которые могут быть объединены. Так, a и b дают $a + b$; a и $-b$ дают $a - b$; $-a$ и $-b$ дают $-a - b$; $7a$ и $9a$ дают $16a$; $-a\sqrt{ac}$ и $b\sqrt{ac}$ дают $-a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$, или $b\sqrt{ac} - a\sqrt{ac}$, ибо порядок, в котором пишутся слагаемые величины, безразличен.

Положительные величины, составленные из одинаковых букв, объединяются путем сложения коэффициентов при этих буквах. Так, $7a + 9a$ дают $16a$; $11bc + 15bc$ дают $26bc$. Точно так же $3\frac{a}{c} + 5\frac{a}{c}$ дают $8\frac{a}{c}$, а $2\sqrt{ac} + 7\sqrt{ac}$ дают $9\sqrt{ac}$. Далее, $6\sqrt{ab - x^2} + 7\sqrt{ab - x^2}$ дают $13\sqrt{ab - x^2}$. Аналогично, $6\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$ дают $13\sqrt{3}$. Затем, $a\sqrt{ac} + b\sqrt{ac}$ дают $(a + b)\sqrt{ac}$, причем a и b складываются, как если бы они были числовыми множителями $\sqrt{ac}$. Таким же образом $(2a + 3c)\sqrt{\frac{3ax^2 - x^3}{a + x}} + 3a\sqrt{\frac{3ax^2 - x^3}{a + x}}$ дают $(5a + 3c) \times \sqrt{\frac{3ax^2 - x^3}{a + x}}$, ибо $2a + 3c$ и $3a$ дают $5a + 3c$.

Положительные дроби с общим знаменателем соединяются путем сложения их числителей. Так, $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ дают $\frac{3}{5}$; $\frac{2ax}{b} + \frac{3ax}{b}$ дают $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}} + \frac{17a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$ дают $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a + \sqrt{cx}}$, а $\frac{a^2}{c} + \frac{bx}{c}$ дают $\frac{a^2 + bx}{c}$.

Отрицательные величины складываются так же, как положительные. Так, -2 и -3 дают -5; $\frac{-4ax}{b}$ и $\frac{-11\,ax}{b}$ дают $\frac{-15\,ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ и $-b\sqrt{ax}$ дают $(-a - b)\sqrt{ax}$. Если же нужно сложить отрицательную величину с положительной, то следует уменьшить положительную на отрицательную. [18] Например, 3 и -2 дают 1; $\frac{11ax}{b}$ и $\frac{-4ax}{b}$ дают $\frac{7ax}{b}$; $-a\sqrt{ac}$ и $b\sqrt{ac}$ дают $(b - a)\sqrt{ac}$. Заметьте, что когда отрицательная величина превосходит положительную, то сумма будет отрицательной. Так, 2 и -3 дают -1; $\frac{-11ax}{b}$ и $\frac{4ax}{b}$ дают $\frac{-7ax}{b}$; $2\sqrt{ac}$ и $-7\sqrt{ac}$ дают $-5\sqrt{ac}$.

При сложении большего числа величин или более сложных величин удобно следовать порядку действий, указанному нами ранее при сложении чисел. Если, например, требуется сложить $17ax - 14a + 3$, $4a + 2 - 8ax$ и $7a - 9ax$, то подпишите их столбиками друг под другом, так, чтобы наиболее сходные члены стояли в одних и тех же столбцах. Таким образом, в одном столбце будут стоять числа 3 и 2, в другом буквы $-14a$, $4a$ и $7a$, наконец, в третьем будут находиться буквы $17ax$, $-8ax$ и $-9ax$. Затем я складываю члены каждого столбца отдельно, говоря: 2 и 3 дают 5, что и подписываю ниже. Далее: $7a$ и $4a$ дают $11a$, а вместе с $-14a$ дают $-3a$, что я снова пишу внизу. Наконец, $-9ax$ и $-8ax$ дают $-17ax$, а вместе с $17ax$ дают 0. Таким образом, сумма будет $-3a + 5$.[19,20]

$$\begin{array}{rrr} 17ax & -14a & +3 \\ -8ax & +4a & +2 \\ -9ax & +7a & \\ \hline * & -3a & +5 \end{array}$$

Так же решаются следующие примеры:

$$\begin{array}{rr} 12x & +7a \\ 7x & +9a \\ \hline 19x & +16a \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 11bc & -7\sqrt{ac} \\ 15bc & +2\sqrt{ac} \\ \hline 26bc & -5\sqrt{ac} \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} -\frac{4ax}{b} & +6\sqrt{3} & +\frac{1}{5} \\ +\frac{11ax}{b} & -7\sqrt{3} & +\frac{2}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b} & -\sqrt{3} & +\frac{3}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & & +a^2y & +2a^3 & -\frac{a^4}{2y} \\ & -2ay^2 & -4a^2y & +a^3 & \\ y^3 & +2ay^2 & -\frac{1}{2}a^2y & & \\ \hline y^3 & 0 & -3\frac{1}{2}a^2y & +3a^3 & -\frac{a^4}{2y} \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} & -6x^2 & +\frac{3}{7}x \\ +5x^3 & & +\frac{5}{7}x \\ \hline 5x^3 & -6x^2 & +\frac{8}{7}x \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 5x^4 & +2ax^3 & & \\ -3x^4 & -2ax^3 & +8\frac{1}{4}a^3\sqrt{a^2+x^2} & \\ -2x^4 & +5bx^3 & & -20a^3\sqrt{a^2-x^2} \\ & -4bx^3 & -7\frac{1}{4}a^3\sqrt{a^2+x^2} & \\ \hline * & +bx^3 & +a^3\sqrt{a^2+x^2} & -20a^3\sqrt{a^2-x^2}. \end{array}$$

О ВЫЧИТАНИИ

Отыскание разности не слишком сложных чисел — действие очевидное. Например, ясно, что если отнять 9 от 17, то останется 8. В случае более сложных чисел вычитаемое число при вычитании подписывают под тем, от которого его нужно отнять, а затем вычитают нижние цифры от соответствующих верхних. Так, чтобы вычесть 63 543 из 782 579, подпишите 63 543 под 782 579 и скажите: 3 из 9 дает в остатке 6, что и запишите внизу. Далее, 4 из 7 дает в остатке 3, что также запишите внизу. Далее, 5 из 5 дает в остатке 0, который следует также записать внизу. Теперь следует отнять 3 от 2; так как, однако, 3 больше, чем 2, то вам нужно позаимствовать единицу у ближайшей цифры, т. е. у 8: эта единица вместе с 2 дает 12, от чего можно отнять 3; при этом в остатке получится 9, что опять-таки следует записать внизу. Теперь от 8 нужно отнять, кроме 6, еще 1; поэтому прибавьте 1 к 6 и отнимите от 8 сумму 7, останется 1, которую опять-таки запишите внизу. Наконец, так как отнимать от верхней цифры 7 в нижнем числе больше нечего, то запишите внизу 7 и вы получите разность: 719036.

$$\begin{array}{r} 782\,579 \\ 63\,543 \\ \hline 719\,036 \end{array}$$

Нужно особо следить за тем, чтобы цифры вычитаемого были подписаны на однородных местах, т. е. чтобы единицы вычитаемого были подписаны под единицами уменьшаемого, десятки под десятками; точно так же десятые доли под десятыми долями и т. д.,— как мы это показали уже, говоря о сложении. Так, чтобы вычесть десятичную дробь 0,63 из целого числа 547, их следует расположить не так: $\begin{array}{r}547\\0{,}63\end{array}$, но так: $\begin{array}{l}547\\\;\;0{,}63\end{array}$, с тем чтобы нуль (circulus), занимающий в десятичной дроби место единиц, был помещен под единицами другого числа. Затем, представляя себе, что на пустых местах верхнего числа стоят нули, скажите: 3 от 0 отнять нельзя, поэтому нужно занять 1 на предыдущем месте, это даст 10, от чего и нужно отнять 3; это даст 7, что и следует записать внизу. Далее, заимствованная 1 вместе с 6 дает 7, и это следует вычесть из верхнего 0, и так как это невозможно, то нужно вновь позаимствовать на предыдущем месте 1, чтобы получить 10; вычитая теперь 7 из 10, вы получите в остатке 3, что и запишите внизу. Складывая заимствованную 1 с 0 и вычитая сумму 1 из 7, вы получите в остатке 6, что опять-таки запишите внизу. Припишите, наконец, внизу две цифры 54 (ибо из них вычитать больше нечего) и вы получите остаток: 546,37.

$$\begin{array}{r} 547 \\ 0{,}63 \\ \hline 546{,}37 \end{array}$$

Для упражнения мы приведем здесь еще несколько примеров как с целыми, так и с десятичными дробями.

$$\begin{array}{r} 1673 \\ 1541 \\ \hline 132 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1673 \\ 1580 \\ \hline 93 \end{array} \quad \begin{array}{r} 458\,074 \\ 9\,205 \\ \hline 448\,869 \end{array} \quad \begin{array}{r} 35{,}72 \\ 14{,}32 \\ \hline 21{,}40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 46{,}5003 \\ 3{,}078 \\ \hline 43{,}4223 \end{array} \quad \begin{array}{r} 308{,}7 \\ 25{,}74 \\ \hline 282{,}96 \end{array}$$

Если от меньшего числа нужно отнять большее, следует отнять от большего меньшее и к остатку приписать отрицательный знак. Так, если требуется отнять 1673 от 1541, то я, наоборот, отнимаю 1541 от 1673 и перед остатком 132 ставлю знак —.

При вычитании алгебраических членов соединяют величины, переменив предварительно знаки всех вычитаемых величин, и затем объединяют те, которые могут быть объединены, как это делалось при сложении. Так, вычитание $+7a$ из $+9a$ дает в остатке $+9a-7a$, или $2a$; $-7a$ из $+9a$ дает $+9a+7a$, или $16a$; $+7a$ из $-9a$ дает $-9a-7a$, или $-16a$; а $-7a$ из $-9a$ дает $-9a+7a$, или $-2a$. Аналогично, $3\frac{a}{c}$ из $5\frac{a}{c}$ дает $2\frac{a}{c}$; $7\sqrt{ac}$ из $2\sqrt{ac}$ дает $-5\sqrt{ac}$. Далее, $\frac{2}{9}$ из $\frac{5}{9}$ дает в остатке $\frac{3}{9}$; $-\frac{4}{7}$ из $\frac{3}{7}$ дает $\frac{7}{7}$; $\frac{-2ax}{b}$ из $\frac{3ax}{b}$ дает $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ из $-\frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ дает $-\frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; $\frac{a^2}{c}$ из $\frac{bx}{c}$ дает

$\frac{bx-a^2}{c}$; $a-b$ из $2a+b$ дает $2a+b-a+b$, или $a+2b$; $3az-z^2+ac$ из $3az$ дает $3az-3az+z^2-ac$, или z^2-ac; $\frac{2a^2-ab}{c}$ из $\frac{a^2+ab}{c}$ дает $\frac{a^2+ab-2a^2+ab}{c}$, или $\frac{2ab-a^2}{c}$; а $(a-x)\sqrt{ax}$ из $(a+x)\sqrt{ax}$ дает $(a+x-a+x)\sqrt{ax}$, или $2x\sqrt{ax}$ и т. д.

Если величины составлены из большего количества членов, то действие можно производить в том же порядке, что и для чисел, как это видно из следующих примеров:

$$\begin{array}{r} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 5x-2a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15bc+2\sqrt{ac} \\ -11bc+7\sqrt{ac} \\ \hline 26bc-5\sqrt{ac} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x^3 \qquad +\frac{5}{7}x \\ 6x^2-\frac{3}{7}x \\ \hline 5x^3-6x^2+\frac{8}{7}x \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{5} \\ \frac{4ax}{b}-6\sqrt{3}-\frac{1}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{5} \end{array}$$

ОБ УМНОЖЕНИИ

Следует выучить наизусть все числа, возникающие при перемножении любых двух чисел, не больших 9, вроде того, например, что 5 на 7 дает 35 или же 8 на 9 дает 72 и т. д. Умножение бо́льших чисел производится затем с помощью правил, ясных из следующих примеров.

Чтобы умножить 795 на 4, запишите, как это здесь показано, 4 под 795. Затем скажите: 4 на 5 дает 20 и запишите последнюю цифру 0 произведения под числом 4, а первую цифру 2 удержите в уме для следующего действия. Далее скажите: 4 на 9 дает 36; к этому прибавьте удержанные 2, и сумма будет 38. Припишите, как и ранее, внизу последнюю цифру 8 этого произведения и удержите в уме первую, 3. Наконец, скажите: 4 на 7 дает 28; к этому прибавьте удержанные 3, и сумма будет 31. Если записать внизу 31, то вы получите число 3180, возникающее при умножении 795 на 4.

$$\begin{array}{r} 795 \\ 4 \\ \hline 3180 \end{array}$$

Если требуется умножить 9043 на 2305, напишите, как и ранее, одно из этих чисел, скажем 2305, под другим, 9043, и прежде всего умножьте, как было уже показано, верхнее число 9043 на 5; в произведении вы получите 45215. Затем умножьте на 0, что даст 0000; потом на 3, что даст 27129, и, наконец, на 2, что даст 18086. Все получившиеся числа подпишите друг под другом с тем, чтобы последняя цифра каждой низшей строки стояла на одно место влево от последней цифры ближайшей верхней строки. Наконец, сложите все эти числа и в качестве произведения 9043 на 2305 получится число 20844115.

$$\begin{array}{r} 9043 \\ 2305 \\ \hline 45215 \\ 0000 \\ 27129 \\ 18086 \\ \hline 20844115 \end{array}$$

При умножении десятичных дробей на целые или на другие десятичные дроби действие производится так же, как вы можете видеть из следующих примеров:

$$\begin{array}{r} 72{,}4 \\ 29 \\ \hline 6516 \\ 1448 \\ \hline 2099{,}6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50{,}18 \\ 2{,}75 \\ \hline 25090 \\ 35126 \\ 10036 \\ \hline 137{,}9950 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}9025 \\ 0{,}0132 \\ \hline 78050 \\ 117075 \\ 39025 \\ \hline 0{,}05151300 \end{array}$$

Заметьте, что в получающемся числе всегда должно быть отделено с правой руки столько же десятичных цифр, сколько их имеется в обоих сомножителях вместе. Если в произведении для этого случайно нехватит цифр, то недостающие места должны быть заполнены слева нулями, как в третьем из приведенных примеров.

При умножении простых алгебраических членов числа умножаются на числа и буквы на буквы и произведение берется положительным, если оба множителя положительные или оба отрицательные, в противном случае оно берется отрицательным.

Так, $2a$ на $3b$ или же $-2a$ на $-3b$ дает $+6ba$, или $+6ab$, ибо порядок расположения букв безразличен. Далее, $-2a$ на $+3b$ или же $2a$ на $-3b$ дает $-6ab$; $2ac$ на $8bcc$ дает $16abccc$, или $16abc^3$; $7ax^2$ на $-12a^2x^2$ дает $-84a^3x^4$; $-16cy$ на $31ay^3$ дает $-496acy^4$; $-4z$ на $-3\sqrt{az}$ дает $12z\sqrt{az}$. Точно так же 3 на -4 дает -12, а -3 на -4 дает 12.

При умножении дробей их числители умножаются на числители, а знаменатели на знаменатели. Так, $\frac{2}{5}$ на $\frac{5}{7}$ дает $\frac{10}{35}$; $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$ дает $\frac{ac}{bd}$; $2\frac{a}{b}$ на $3\frac{c}{d}$ дает $6 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ или $6\frac{ac}{bd}$; $\frac{3acy}{2bb}$ на $-\frac{7cy^2}{4b^3}$ дает $-\frac{21ac^2y^3}{8b^5}$; $-\frac{4z}{c}$ на $-\frac{3\sqrt{az}}{c}$ дает $\frac{12z\sqrt{az}}{c^2}$; $\frac{a}{b}x$ на $\frac{c}{d}x^2$ дает $\frac{ac}{bd}x^3$. Далее, 3 на $\frac{2}{5}$ дает $\frac{6}{5}$, в чем можно убедиться, если придать 3 вид дроби $\frac{3}{1}$ со знаменателем единица. Аналогично, $\frac{15a^2z}{c^2}$ на $2a$ дает $\frac{30a^3z}{c^2}$. В связи с этим попутно заметьте, что $\frac{ab}{c}$ и $\frac{a}{c}b$ — одно и то же, так же как и $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$ и $\frac{a}{c}bx$ или $\frac{(a+b)\sqrt{cx}}{a}$ и $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$ и т. д.

Радикальные величины с одинаковым показателем, т. е. два квадратных корня или два кубических корня, или два корня четвертой степени и т. д., перемножаются посредством перемножения их членов под одним общим знаком радикала. Так, $\sqrt{3}$ на $\sqrt{5}$ дает $\sqrt{15}$; $\sqrt{ab}$ на $\sqrt{cd}$ дает $\sqrt{abcd}$;

$\sqrt[3]{5ay^2}$ на $\sqrt[3]{7ayz}$ дает $\sqrt[3]{35a^2y^3z}$; $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ на $\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$ дает $\sqrt{\frac{a^4b^2}{c^2}}$, т. е. $\frac{a^2b}{c}$; $2a\sqrt{az}$ на $3b\sqrt{az}$ дает $6ab\sqrt{aazz}$, т. е. $6a^2bz$; $\frac{3x^2}{\sqrt{ac}}$ на $-\frac{2x}{\sqrt{ac}}$ дает $-\frac{6x^3}{\sqrt{a^2c^2}}$, или $-\frac{6x^3}{ac}$, а $-\frac{4x\sqrt{ab}}{7a}$ на $-\frac{3d^2\sqrt{5cx}}{10c^2}$ дает $\frac{12d^2x\sqrt{5abcx}}{70ac^2}$.

При умножении величин, состоящих из нескольких частей, все части одной величины умножаются на все части другой, как это было показано при умножении чисел. Так, $c-x$ на a дает $ac-ax$; $a^2+2ac-bc$ на $a-b$ дает $a^3+2a^2c-a^2b-3abc+b^2c$. В самом деле, $a^2+2ac-bc$ на $-b$ дает $-a^2b-2abc+b^2c$ и $a^2+2ac-bc$ на a дает a^3+2a^2c-abc, а сумма этих двух величин есть $a^3+2a^2c-a^2b-3abc+b^2c$.

Ниже приводятся этот и другие примеры такого рода умножения:

$$\begin{array}{r}
a^2+2ac-bc \\
a-b \\
\hline
-a^2b-2abc+b^2c \\
+a^3+2a^2c\qquad-abc \\
\hline
a^3+2a^2c-a^2b-3abc+b^2c
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a+b \\
a+b \\
\hline
\qquad ab+b^2 \\
a^2+ab \\
\hline
a^2+2ab+b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a+b \\
a-b \\
\hline
\qquad -ab-b^2 \\
a^2+ab \\
\hline
a^2 \quad * \quad -b^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
y^2+2ay-\frac{1}{2}a^2 \\
y^2-2ay+a^2 \\
\hline
+a^2y^2+2a^3y-\frac{1}{2}a^4 \\
-2ay^3-4a^2y^2+a^3y\qquad \\
+y^4+2ay^3-\frac{1}{2}a^2y^2\qquad\qquad \\
\hline
y^4 \quad * \quad -3\frac{1}{2}a^2y^2+3a^3y-\frac{1}{2}a^4
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\frac{2ax}{c}-\sqrt{\frac{a^3}{c}} \\
3a+\sqrt{\frac{ab^2}{c}} \\
\hline
\frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{ab^2}{c}}-\sqrt{\frac{a^4b^2}{c^2}} \\
\frac{6a^2x}{c}-3a\sqrt{\frac{a^3}{c}}\qquad\qquad\qquad \\
\hline
\frac{6a^2x}{c}-3a\sqrt{\frac{a^3}{c}}+\frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{ab^2}{c}}-\frac{a^2b}{c}
\end{array}$$

О ДЕЛЕНИИ

При делении чисел ищется, сколько раз делитель содержится в делимом, и делитель столько же раз вычитается из делимого, а в частном пишется столько же единиц; это действие повторяется столько раз, сколько раз можно вычесть делитель из делимого.

Так, чтобы разделить 63 на 7, выясните, сколько раз 7 содержится в 63, и в частном получится точно 9; следовательно, $\frac{63}{7}$ равно 9. Чтобы разделить 371 на 7, напишите делитель 7 впереди 371 и, начиная с первых цифр делимого, скажите: сколько раз самое большее 7 содержится в 37? Ответ будет: 5. Запишите в частном 5 и вычтите 5×7, или 35, от 37. В остатке получится 2, рядом с чем запишите последнюю цифру делимого, т. е. 1. Вы получите при этом остаток делимого 21, над которым будет произведено следующее действие. Скажите, как и ранее: сколько раз 7 содержится в 21? Ответ будет: 3. Записав в частном 3, отнимите 3×7, или 21, от 21; в остатке будет 0. Отсюда ясно, что при делении 371 на 7 получается в точности 53.

```
7) 371 (53
   35
   ——
    21
    21
    ——
     0
```

Чтобы разделить 4798 на 23, начните с первых цифр 47 и скажите: сколько раз 23 содержится в 47? Ответ будет: 2. Запишите в частном 2 и от 47 отнимите 2×23, или 46. Остаток есть 1. Припишите рядом с ним следующую цифру делимого, т. е. 9, и вы получите для дальнейших вычислений 19. Скажите теперь: сколько раз содержится 23 в 19? Ответ будет: 0. Запишите поэтому в частном 0 и из 19 вычтите 0×23, или 0. В остатке будет 19. Припишите к 19 последнюю цифру 8, что даст для дальнейших выкладок 198. Скажите теперь: сколько раз 23 содержится в 198 (что можно сообразить, рассматривая первые цифры обоих чисел и учитывая, сколько раз 2 содержится в 19)? Ответ будет: 8. Запишите поэтому в частном 8 и от 198 отнимите 8×23, или 184.

В остатке будет 14, что и нужно будет делить далее на 23. Таким образом, частное будет $208\frac{14}{23}$. Если не желательно иметь дело с дробью $\frac{14}{23}$, то вы можете продолжать деление при помощи десятичных дробей сколько угодно, всякий раз приписывая рядом с остатком нуль. Так, рядом с остатком 14 я ставлю 0 и получается 140. Теперь скажите: сколько раз 23 содержится в 140? Ответ будет: 6. Запишите поэтому в частном 6 и от 140 отнимите 6×23, или 138, останется 2. Присоедините к этому, как и ранее 0 и, продолжая таким образом действие сколь угодно далеко, вы получите под конец в частном 208,6086 и т. д.

```
23) 4798 (208,6086  и т. д.
    46
    ---
     198
     184
     ---
      140
      138
      ---
        200
        184
        ---
         160
```

Аналогично делится десятичная дробь 3,5218 на десятичную дробь 46,1, что дает в частном 0,07639 и т. д. При этом заметьте, что в частном должно быть отделено столько десятичных знаков, на сколько их больше в последнем делимом, чем в делителе. Так, в настоящем примере делитель 46,1 содержит один десятичный знак 1, а последнее делимое, т. е. 0,004370, содержит их шесть; поэтому в частном их должно быть пять.

```
46,1) 3,5218 (0,07639
      3 227
      ------
      0,2948
      0,2766
      -------
      0,01820
      0,01383
      --------
      0,004370
```

Для пояснения мы приводим здесь еще несколько примеров.

```
9043) 20844115 (2305        72,4)  2099,6 (29
      18086                        1448
      -----                        ----
       27581                        6516
       27129                        6516
       -----                        ----
         45215                         0
         45215
         -----
             0
```

$$\begin{array}{l} 50{,}18)\ 137{,}995\ (2{,}75 \\ \quad\quad\ \ 10036 \\ \hline \quad\quad\quad 37635 \\ \quad\quad\quad 35126 \\ \hline \quad\quad\quad\ \ 25090 \\ \quad\quad\quad\ \ 25090 \\ \hline \quad\quad\quad\quad\ 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{l} 0{,}0132)\ 0{,}051513\ (3{,}9025 \\ \quad\quad\quad\quad\ 396 \\ \hline \quad\quad\quad 0{,}01191 \\ \quad\quad\quad\quad\ 1188 \\ \hline \quad\quad\quad 0{,}0000330 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\ 264 \\ \hline \quad\quad\quad 0{,}00000660 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\ 660 \\ \hline \quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Деление алгебраических членов производится при помощи разложения того, что соединяется при умножении. Так, ab, деленное на a, дает в частном b. Далее, $6ab$, деленное на $2a$, дает $3b$, а деленное на $-2a$, дает $-3b$; $-6ab$, деленное на $2a$, дает $-3b$, а деленное на $-2a$, дает $3b$; $16abc^3$, деленное на $2ac$, дает $8bc^2$; $-84a^3x^4$, деленное на $-12a^2x^2$, дает $7ax^2$. Аналогично, $\frac{6}{35}$, деленное на $\frac{2}{5}$, дает $\frac{3}{7}$; $\frac{ac}{bd}$, деленное на $\frac{a}{b}$, дает $\frac{c}{d}$; $-\frac{21ac^2y^3}{8b^5}$, деленное на $\frac{3acy}{2b^2}$, дает $-\frac{7cy^2}{4b^3}$; $\frac{6}{5}$, деленное на 3, дает $\frac{2}{5}$, а $\frac{6}{5}$, деленное, наоборот, на $\frac{2}{5}$, дает $\frac{3}{1}$, или 3; $\frac{30a^3z}{c^2}$, деленное на $2a$, дает $\frac{15a^2z}{c^2}$, а $\frac{15a^2z}{c^2}$, деленное на $2a$, дает $\frac{15az}{2c^2}$. Затем $\sqrt{15}$, деленный на $\sqrt{3}$, дает $\sqrt{5}$; $\sqrt{abcd}$, деленный на $\sqrt{cd}$, дает $\sqrt{ab}$, а деленный на $\sqrt{ab}$, дает $\sqrt{cd}$; $\sqrt{a^3c}$ на $\sqrt{ac}$ дает $\sqrt{a^2}$, или a; $\sqrt[3]{35a^2y^3z}$, деленный на $\sqrt[3]{5ay^2}$, дает $\sqrt[3]{7ayz}$; $\sqrt{\frac{a^4b^2}{c^2}}$, деленный на $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$, дает $\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$; $\frac{12d^2x\sqrt{5abcx}}{70ae^2}$, деленное на $-\frac{3d^2\sqrt{5cx}}{10e^2}$, дает $-\frac{4x\sqrt{ab}}{7a}$. Аналогично, $(a+b)\sqrt{ax}$, деленное на $a+b$, дает $\sqrt{ax}$, а деленное, наоборот, на $\sqrt{ax}$, дает $a+b$. Далее, $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$, деленное на $\frac{1}{a+b}$, дает $a\sqrt{ax}$, а деленное на a, дает $\frac{1}{a+b}\sqrt{ax}$, или $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$. Наоборот, $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$, деленное на $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$, дает a. При всех этих делениях следите за тем, чтобы делить друг на друга величины одного рода, т. е. числа на числа, буквы на буквы, радикальные величины на радикальные величины, числители дробей на числители, знаменатели на знаменатели и т. д.; кроме того, при делении числителей, знаменателей и радикалов величины какого-либо рода следует делить лишь на однородные с ними.

Если делимая величина не может быть разложена таким образом при помощи делителя, то в случае, когда обе величины целые, достаточно подписать делитель под делимым, отделив их чертой. Так, чтобы разделить ab на c, напишите $\frac{ab}{c}$, а чтобы разделить $(a+b)\sqrt{cx}$ на a, напишите $\frac{(a+b)\sqrt{cx}}{a}$, или $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$. Аналогично, $\sqrt{ax-x^2}$, деленный на $\sqrt{cx}$, дает $\frac{\sqrt{ax-x^2}}{\sqrt{cx}}$, или $\sqrt{\frac{ax-x^2}{cx}}$; $(a^2+ab)\sqrt{a^2-2x^2}$, деленное на $(a-b)\sqrt{a^2-x^2}$, дает $\frac{a^2+ab}{a-b}\sqrt{\frac{a^2-2x^2}{a^2-x^2}}$. А $12\sqrt{5}$, деленное на $4\sqrt{7}$, дает $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Если же эти величины дробные, умножьте числитель делимого на знаменатель делителя, а знаменатель на числитель, — первое произведение будет числителем частного, а второе его знаменателем. Так, чтобы разделить $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$, напишите $\frac{ad}{bc}$, т. е. умножьте a на d и b на c. Подобным же образом, $\frac{3}{7}$, деленное на $\frac{5}{4}$, дает $\frac{12}{35}$. Далее, $\frac{3a}{4c}\sqrt{ax}$, деленное на $\frac{2c}{5a}$, дает $\frac{15a^2}{8c^2}\sqrt{ax}$, а деленное на $\frac{2c\sqrt{a^2-x^2}}{5a\sqrt{ax}}$, дает $\frac{15a^3x}{8c^2\sqrt{a^2-x^2}}$. Точно так же $\frac{ab}{d}$, деленное на c $\left(\text{или на } \frac{c}{1}\right)$, дает $\frac{ab}{cd}$; а c $\left(\text{или } \frac{c}{1}\right)$, деленное на $\frac{ab}{d}$, дает $\frac{cd}{ab}$; $\frac{3}{7}$, деленное на 5, дает $\frac{3}{35}$; 3, деленное на $\frac{5}{4}$, дает $\frac{12}{5}$. Далее, $\frac{a+b}{c}\sqrt{cx}$, деленное на a, дает $\frac{a+b}{ac}\sqrt{cx}$; $(a+b)\sqrt{cx}$, деленное на $\frac{a}{c}$, дает $\frac{ae+bc}{a}\sqrt{cx}$; $2\sqrt{\frac{ax^2}{c}}$, деленное на $3\sqrt{cd}$, дает $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^2}{c^2d}}$, а деленное на $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$, дает $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{c^2d}}$. А $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{11}}$, деленное на $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, дает $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{49}{33}}$ и т. д.

При делении величины, составленной из нескольких членов, делят на делитель каждый из ее членов. Например, $a^2+3ax-x^2$, деленное на a, дает $a+3x-\frac{x^2}{a}$. Когда делитель также состоит из нескольких членов, действие производится в том же порядке, что и при делении чисел. Так, чтобы разделить $a^3+2a^2c-a^2b-3abc+b^2c$ на $a-b$, скажите: сколько раз a содержится в a^3, т. е. первый член делителя в первом члене делимого? Ответ будет: a^2. Запишите поэтому a^2 в частном. Вычтя затем из делимого произведение частного a^2 на $a-b$, или же a^3-a^2b, вы получите остаток $2a^2c-3abc+b^2c$, который надлежит делить далее. Спросите снова: сколько раз a содержится в $2a^2c$? Ответ будет: $2ac$. Запишите поэтому в частном $2ac$ и вычтите из предыдущего остатка $2ac$ на $a-b$, или $2a^2c-2abc$. В остатке теперь будет $-abc+b^2c$. Снова спросите: сколько раз содержится a в $-abc$? Ответ будет: $-bc$. Запишите в частном $-bc$. Если вычесть напоследок $-bc$ на $a-b$, т. е. $-abc+b^2c$, из последнего остатка, то более ничего не останется. Это означает, что деление доведено до конца и что частное есть $a^2+2ac-bc$.

Чтобы придать этим действиям ту форму, которую мы употребляли при делении чисел, члены делимого и делителя следует расположить по измерениям той буквы, которая кажется наиболее подходящей для действия.[21] На первом месте нужно поставить члены, в которых эта буква имеет наивысшее измерение, на втором месте — члены, в которых измерение той же буквы, ближайшее по порядку, и так далее, вплоть до членов, в которых эта буква вовсе не содержится или не входит множителем, и которые следует поставить на последнем месте. Если в только что приведенном примере расположить члены по измерениям буквы a, то ход действий можно будет представить следующей схемой:

$$
\begin{array}{l}
a-b)\;a^3\begin{matrix}+2a^2c\\-a^2b\end{matrix}-3abc+b^2c\;(a^2+2ac-bc\\
\hline
\quad a^3-a^2b\\
\hline
\quad 0+2a^2c-3abc\\
\quad\;\;+2a^2c-2abc\\
\hline
\qquad\quad 0\quad -abc+b^2c\\
\qquad\qquad\;\; -abc+b^2c\\
\hline
\qquad\qquad\quad 0\qquad 0
\end{array}
$$

Как здесь видно, член a^3, или a в трех измерениях, занимает в делимом первое место; члены $2a^2c$ и $-a^2b$, в которых a имеет два измерения, занимают второе место и т. д. Делимое можно было бы записать еще в таком виде:

$$a^3\begin{matrix}+2c\\-b\end{matrix}\Bigg|\;a^2-3bca+b^2c.$$

Здесь члены, стоящие на втором месте, объединены посредством объединения множителей буквы, по измерениям которой расположена величина. Если бы члены были расположены по измерениям буквы b, то действия следовало бы вести по нижеследующей схеме, объяснение которой приведено непосредственно вслед за нею:

$$
\begin{array}{l|l}
cb^2 - (3ac + a^2)\,b + a^3 + 2a^2c & -b + a \\
\underline{cb^2 - bac} & \overline{-bc + 2ac + a^2} \\
0 \;- (2ac + a^2)\,b + a^3 + 2a^2c & \\
\underline{\quad - (2ac + a^2)\,b + 2a^2c + a^3} & \\
\qquad\quad 0 \qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Скажите: сколько раз $-b$ содержится в cb^2? Ответ будет: $-cb$. Записав поэтому в частном $-cb$, вычтите $(-b+a)\times(-cb)$, или $cb^2 - abc$. На втором месте получится в остатке $(-2ac - a^2)\,b$. Прибавьте, если хотите, к этому остатку величины, стоящие на последнем месте, т. е. $a^3 + 2a^2c$, и скажите снова: сколько раз $-b$ содержится в $(-2ac - a^2)b$? Ответ будет: $2ac + a^2$. Записав эти величины в частном, вычтите $-b + a$, умноженное на $2ac + a^2$, или $(-2ac - a^2)\,b + a^3 + 2a^2c$, и в остатке ничего не останется. Из этого ясно, что деление закончено и что частное, как и прежде, есть $-bc + 2ac + a^2$.

Чтобы разделить $a^2y^4 - a^2c^4 + y^2c^4 + y^6 - 2y^4c^2 - a^6 - 2a^4c^2 - a^4y^2$ на $y^2 - a^2 - c^2$, я располагаю величины по измерениям буквы y следующим образом: $y^6 + (a^2 - 2c^2)\,y^4 + (c^4 - a^4)\,y^2 - (a^2c^4 + a^6 + 2a^4c^2)$. Затем я произвожу деление, как это показано в приводимой схеме:

$$
\begin{array}{l|l}
y^6 + (a^2 - 2c^2)\,y^4 + (c^4 - a^4)\,y^2 - a^2c^4 - a^6 - 2a^4c^2 & y^2 - a^2 - c^2 \\
\underline{y^6 - (a^2 + c^2)\,y^4} & \overline{y^4 + (2a^2 - c^2)\,y^2 +} \\
0 + (2a^2 - c^2)\,y^4 & \qquad + a^4 + a^2c^2 \\
\underline{\quad + (2a^2 - c^2)\,y^4 - (2a^4 + a^2c^2 - c^4)\,y^2} & \\
\qquad 0 \qquad\quad + (a^4 + a^2c^2)\,y^2 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{+ (a^4 + a^2c^2)\,y^2 - a^6 - 2a^4c^2 - a^2c^4} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Здесь приведены еще другие примеры. Относительно них следует заметить, что если измерения буквы, по которым расположена величина, не всюду следуют в одной арифметической прогрессии, но в некоторых местах обрываются, то недостающие места отмечены знаком *.

$$\begin{array}{l|l} a^2 \quad * \quad - b^2 & a + b \\ \cline{2-2} \underline{a^2 + ab} & a - b \\ \quad 0 - ab & \\ \quad\quad \underline{- ab - b^2} & \\ \quad\quad\quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} y^4 \quad * \quad - 3\frac{1}{2}a^2y^2 + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4 & y^2 - 2ay + a^2 \\ \cline{2-2} \underline{y^4 - 2ay^3 + \quad a^2y^2} & y^2 + 2ay - \frac{1}{2}a^2 \\ 0 + 2ay^3 - 4\frac{1}{2}a^2y^2 & \\ \quad \underline{+ 2ay^3 - 4 \quad a^2y^2 + 2a^3y} & \\ \quad\quad 0 \quad - \frac{1}{2}a^2y^2 + a^3y & \\ \quad\quad\quad \underline{- \frac{1}{2}a^2y^2 + a^3y - \frac{1}{2}a^4} & \\ \quad\quad\quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} a^4 \quad * \quad * \quad * \quad\quad + b^4 & a^2 + ab\sqrt{2} + b^2 \\ \cline{2-2} \underline{a^4 + a^3b\sqrt{2} + a^2b^2} & a^2 - ab\sqrt{2} + b^2 \\ \quad - a^3b\sqrt{2} - a^2b^2 & \\ \quad \underline{- a^3b\sqrt{2} - 2a^2b^2 - ab^3\sqrt{2}} & \\ \quad\quad\quad + a^2b^2 + ab^3\sqrt{2} & \\ \quad\quad\quad \underline{+ a^2b^2 + ab^3\sqrt{2} + b^4} & \\ \quad\quad\quad\quad 0 \quad\quad 0 & \end{array}$$

Некоторые начинают деление с последних членов, но это приводит к тому же, что получится, если, обратив порядок членов, вы начнете с первых. Имеются еще другие способы деления, но достаточно знать наиболее легкий и удобный.

ОБ ИЗВЛЕЧЕНИИ КОРНЕЙ

Чтобы извлечь из числа квадратный корень, прежде всего следует поставить над его цифрами через одну, начиная с единиц, точки. Затем следует в частном или в корне [22] написать цифру, квадрат которой равен или ближайший по недостатку к цифрам или цифре, предшествующим первой точке. После вычитания этого квадрата остальные цифры корня будут последовательно найдены посредством деления остатка на удвоенную величину уже извлеченной части корня и вычитания всякий раз из остатка квадрата последней найденной цифры и ее удесятеренного произведения на названный делитель.

Так, чтобы извлечь корень из 99856, расставьте, как сказано, точки: $\dot{9}9\dot{8}5\dot{6}$. Затем найдите число, квадрат которого равен первой цифре 9, т. е. 3. Запишите его в частном и из 9 вычтите 3×3, или 9. В остатке будет 0, рядом с которым запишите для следующего действия цифры, предшествующие ближайшей точке, т. е. 98. Не обращая внимания на последнюю цифру 8, скажите: сколько раз удвоенное 3, или 6, содержится в первой цифре 9? Ответ: 1. Поэтому, записав в частном 1, отнимите от 98 произведение 1×61, или 61. В остатке будет 37, к чему присоедините последние цифры 56, так что получится 3756. С этим числом и нужно теперь провести действие. Итак, снова не обращая внимания на последнюю цифру, т. е. 6, скажите: сколько раз удвоенное 31, или 62, содержится в 375? (ответ легко сообразить по первым цифрам 6 и 37, посмотрев, сколько раз 6 содержится в 37). Ответ: 6. Записав в частном 6, вычтите 6×626, или 3756. В остатке получится 0, откуда видно, что действие закончено и что корень есть 316.

$$
\begin{array}{l}
\dot{9}\,9\dot{8}\,5\dot{6}\ (316 \\
9 \\
\hline
098 \\
\ \ 61 \\
\hline
\ \ 3756 \\
\ \ 3756 \\
\hline
\ \ \ \ 0
\end{array}
$$

Если вам нужно извлечь корень из 22178791, то, пометив прежде всего число точками, найдите число, квадрат которого (если он не может быть точно равен) будет ближайший по недостатку к 22 — цифрам перед первой точкой. При этом вы получите 4, ибо 5×5, или 25, больше, чем 22, а 4×4 — меньше. Следовательно, первой цифрой корня будет 4. Поэтому, записав в корне 4, вычтите из 22 квадрат 4×4, или 16, и к остатку припишите следующие цифры 17, что дает 617. При делении 617 на удвоенное 4 вы получите вторую цифру корня. Пренебрегая последней цифрой 7, скажите: сколько раз 8 содержится в 61? Ответ: 7. Запишите поэтому в частном 7 и от 617 отнимите произведение 7 на 87, или 609; останется 8. Присоедините к 8 две следующие цифры 87; вы получите 887, что при делении на удвоенное 47, или 94, даст вам третью цифру корня. Поэтому скажите: сколько раз 94 содержится в 88? Ответ: 0. Запишите поэтому в частном 0 и припишите две последние цифры 91. Вы получите 88791, что при делении на удвоенное 470, или 940, дает вам последнюю цифру корня. Итак, скажите: сколько раз 940 содержится в 8879? Ответ: 9. Запишите поэтому в частном 9 и вы получите в качестве корня 4709.

```
22 17 87 91 (4709,43637 и т. д.
16
——
 617
 609
————
   88791
   84681
   —————
    411000
    376736
    ——————
     3426400
     2825649
     ———————
      60075100
      56513196
      ————————
       356190400
       282566169
       —————————
        73624231
```

Но так как произведение 9×9409, или 84681, при вычитании из 88791 дает в остатке 4110, то это показывает, что 4709 не является точным корнем числа 22178791, но несколько меньше его. Если в этом и других подобных случаях вы хотите получить большее приближение к корню, то следует продолжать действие при помощи десятичных дробей, присоединяя к остатку при каждом действии по два нуля. Так, если к остатку 4110 присоединить два нуля, он превратится в 411000, что при делении на удвоенное 4709, или

9418, даст вам первую десятичную цифру, т. е. 4. Записав в частном 4, вычтите из числа 411000 произведение 4×94184, или 376736. В остатке будет 34264. Присоединив справа к этому числу еще два нуля, можно продолжать таким образом действия сколько угодно; в результате получится корень 4709,43637 и т. д.

Когда получена половина или более желательного числа цифр корня, остальные цифры можно получить при помощи одного деления. Так, если вы хотите в разбираемом примере извлечь корень с девятью цифрами, то можно, найдя первые пять цифр 4709,4, получить четыре последние, разделив остаток 34264 на удвоенное 4709,4.

Допустим, что требуется извлечь корень из 32976 с пятью цифрами. Поставив над цифрами точки, запишите в частном 1, ибо наибольшим квадратом, содержащимся в цифре 3, до первой точки, будет 1×1, или 1. Вычтя квадрат 1 из 3, вы получите в остатке 2. Записав рядом с 2 две следующие цифры, т. е. 29, найдите, сколько раз удвоенная 1, или 2, содержится в 22; при этом вы получите, что 2 содержится в 22 более десяти раз. Но делитель никогда нельзя брать равным десяти, а здесь его нельзя взять равным даже девяти, ибо произведение 9×29, или 261, больше, чем 229, из чего это произведение нужно было бы вычесть. Поэтому возьмите только 8 и, записав в частном 8, вычтите из 229 произведение 8×28, или 224. В остатке будет 5. Записав рядом с 5 цифры 76, найдите, сколько раз удвоенное 18, или 36, содержится в 57; вы получите 1. Записав поэтому в частном 1, вычтите из 576 произведение 1×361, или 361. В остатке получится 215. Наконец, чтобы получить остальные цифры, разделите число 215 на удвоенное 181, или 362, и вы найдете цифры 59, записав которые в частном, получите корень 181,59.

$\dot{3}\ 2\dot{9}\ 7\dot{6}$ (181,59
1
———
2) 229
224
———
36) 576
361
———
362) 215 (59 и т. д.

Таким же образом извлекаются корни из десятичных дробей. Так, корень из 329,76 есть 18,159; корень из 3,2976 есть 1,8159; корень из 0,032976 есть 0,18159 и т. д. А корень из 3297,6 есть 57,4247; корень из 32,976 есть 5,74247. Точно так же корень из 9,9856 есть 3,16, а корень из 0,99856 есть 0,999279 и т. д. Это видно из следующих схем:

3297,60 (57,4247 и т. д.	9,9856 (3,16	0,998560 (0,999279 и т. д.
25	9	81
10) 797	6) 98	18) 1885
749	61	1701
114) 4860	62) 3756	198) 18460
4576	3756	17901
1148) 284 (247	0	1198) 559 (279

Извлечение корня кубического и всех прочих я объединю в одном общем правиле, считаясь более с легкостью понимания дела, чем с быстротой вычислений. В противном случае мне пришлось бы слишком долго задержать внимание новичков на вещах, применяющихся редко.[23]

Чтобы извлечь из величины кубический корень, следует пометить точкой каждую третью цифру, начиная с единиц, чтобы извлечь корень пятой степени — каждую пятую цифру и т. д. Затем следует написать в частном цифру, степень которой (т. е. ее куб, если корень кубический, пятая степень, если корень пятой степени, и т. д.) равна или ближайшая по недостатку к цифре или цифрам перед первой точкой. Вычтя эту степень, вы получите следующую цифру корня, разделив остаток, к которому присоединена первая следующая цифра данного числа на частное, возведенное в непосредственно предшествующую степень и умноженное на показатель извлекаемого корня, т. е. в случае кубического корня разделив на утроенный квадрат частного, а в случае корня пятой степени — на упятеренную четвертую степень частного и т. д. Далее, вычитая снова степень найденного частного из данного числа, вы найдете третью цифру корня, разделив остаток, к которому присоединена первая следующая цифра данного числа на частное, возведенное в непосредственно предшествующую степень и умноженное на показатель извлекаемого корня, и т. д. до бесконечности.

Так, чтобы извлечь кубический корень из 13312053, следует прежде всего пометить, как указано, число точками, $1\dot{3}31\dot{2}05\dot{3}$. Затем нужно записать в частном число 2, куб которого 8 наиболее близок по недостатку к цифрам 13, стоящим перед первой точкой (ибо 13 не есть точный куб). Вычтя этот куб, вы получите в остатке 5, к чему присоедините 3, первую следующую цифру числа. Вы получите 53, что при делении на утроенный квадрат 2, или 12, даст в качестве второй цифры частного 4. Но так как куб частного 24, т. е. 13824, слишком велик, чтобы его можно было вычесть из цифр 13312, предшествующих второй точке, то в частном следует записать лишь 3. Помножьте теперь на отдельном листе бумаги или месте частное 23 на 23 и вы получите квадрат 529, что, будучи вновь умноженным на 23, даст куб 12167. Вычтите 12167 из 13312, остаток будет 1145. Присоедините к остатку 0 — первую следующую цифру данного числа и разделите 11450 на утроенный квадрат частного 23, т. е. найдите, сколько раз 3×529, или 1587, содержится в 11450, и вы получите третью цифру частного 7. Частное 237, умноженное на 237, даст квадрат, 56169, а этот квадрат, вновь помноженный на 237, дает куб, 13312053, что при вычитании из данного числа дает в остатке 0. Отсюда ясно, что искомый корень есть 237.

$1\dot{3}\,31\dot{2}\,05\dot{3}$ (237
вычтите куб 8
12) ост. 53 (4 или 3
вычтите куб 12167
1587) ост. 11450 (7
вычтите куб 13312053
Остается 0

Для извлечения корня пятой степени из 36430820 нужно пометить точкой каждую пятую цифру. В частном следует записать цифру 3, пятая степень которой 243 есть ближайшая по недостатку к 364, стоящим перед первой точкой. Вычтя эту пятую степень, 243, из 364, вы получите в остатке 121. Приписав к 121 первую следующую цифру числа, т. е. 3, и разделив 1213 на

$36\dot{4}\,3082\dot{0}$ (32,5
243
405) 1213 (2
33554432
5242880) 2876388,0 (5

упятеренную четвертую степень частного, т. е. найдя, сколько раз 5×81, или 405, содержится в 1213, вы получите в качестве второй цифры 2. Частное 32, трижды помноженное на самого себя, даст четвертую степень, 1048576, что, будучи вновь умножено на 32, даст пятую степень, 33554432, а последнее при вычитании из данного числа даст в остатке 2876388. Таким образом, 32 является целой частью корня, но не точным корнем. Поэтому, если вы хотите продолжать действия при помощи десятичных дробей, то нужно приписать к последнему остатку 0 и результат поделить на упятеренную четвертую степень частного, т. е. найти, сколько раз содержится в 2876388,0 число 5×1048576, или 5242880. Это даст 5, третью цифру, или первую десятичную долю корня. Вычтя из данного числа пятую степень частного 32,5 и разделив остаток на упятеренную четвертую степень этого числа, можно было бы найти четвертую цифру и т. д. до бесконечности.

Чтобы извлечь биквадратный корень, вы можете дважды извлечь квадратный корень, ибо $\sqrt[4]{}$ есть то же, что $\sqrt[2\times2]{}$. Если требуется извлечь кубо-кубический корень, вы можете сперва извлечь кубический корень, а из него затем квадратный, ибо $\sqrt[6]{}$ есть то же, что $\sqrt[3\times2]{}$ — по этой причине некоторые называли эти корни не кубо-кубическими, но квадратокубическими. Замечание это можно отнести ко всем корням, показатели которых не суть простые числа.

Извлечение корней из простых алгебраических величин — вещь очевидная из самого обозначения их. Так, $\sqrt{a^2}$ есть a; $\sqrt{a^2c^2}$ есть ac; $\sqrt{9a^2c^2}$ есть $3ac$ и $\sqrt{49a^4x^2}$ есть $7a^2x$. Далее, $\sqrt{\frac{a^4}{c^2}}$, или $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{c^2}}$, есть $\frac{a^2}{c}$; $\sqrt{\frac{a^4b^2}{c^2}}$ есть $\frac{a^2b}{c}$; $\sqrt{\frac{9a^2z^2}{25b^2}}$ есть $\frac{3az}{5b}$; $\sqrt{\frac{4}{9}}$ есть $\frac{2}{3}$; $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{27a^3}}$ есть $\frac{2b^2}{3a}$; $\sqrt[4]{a^2b^2}$ есть $\sqrt{ab}$.

Затем, $b\sqrt{a^2c^2}$, или b на $\sqrt{a^2c^2}$, есть b на ac, или abc; $3c\sqrt{\frac{9a^2z^2}{25b^2}}$ есть $3c\times\frac{3az}{5b}$, или $\frac{9acz}{5b}$; $\frac{a+3x}{c}\sqrt{\frac{4b^2x^4}{81a^2}}$ есть $\frac{a+3x}{c}\cdot\frac{2bx^2}{9a}$, или же $\frac{2abx^2+6bx^3}{9ac}$.

Я сказал, что все эти действия очевидны. Действительно, с первого взгляда ясно, что данные величины возникают при умножении корней на самих себя (так, a^2 получается из a на a, a^2c^2 — из ac на ac, $9a^2c^2$ — из $3ac$ на $3ac$ и т. д.). Если же величины — составные, то действие следует вести в том же порядке, что и в случае чисел. Так, чтобы извлечь квадратный корень из $a^2+2ab+b^2$, прежде всего запишите в частном корень из первого члена a^2, т. е. a, затем вычтите квадрат найденной величины a^2. Это даст в остатке $2ab+b^2$, что и послужит для определения остальной части корня. Теперь скажите: сколько раз удвоенное частное, или $2a$, содержится в первом члене остатка, т. е. в $2ab$? Я отвечаю: b. Запишите поэтому в частном b и вычтите произведение b на $2a+b$, или $2ab+b^2$. При этом ничего не останется, и это показывает, что действие закончено и что корень есть $a+b$.

$$\begin{array}{l|l}
a^2+2ab+b^2 & a+b \\
a^2 & \\
\hline
0+2ab+b^2 & \\
\quad\;\; 2ab+b^2 & \\
\hline
\quad\;\; 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

Чтобы извлечь корень из $a^4+6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4$, прежде всего запишите в частном корень первого члена a^4, т. е. a^2. Если вычесть его квадрат $a^2\times a^2$, или a^4, то останется $6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4$, что и послужит для определения остальной части корня. Скажите теперь: сколько раз $2a^2$ содержится в $6a^3b$? Ответ: $3ab$. Запишите поэтому в частном $3ab$. Вычтя произведение $3ab$ на $2a^2+3ab$, или $6a^3b+9a^2b^2$, вы получите еще для дальнейших действий в остатке $-4a^2b^2-12ab^3+4b^4$. Скажите поэтому снова: сколько раз удвоенное частное, т. е. $2a^2+6ab$, содержится в $-4a^2b^2-12ab^3$, или, что то же самое, сколько раз удвоенный первый член частного $2a$ содержится в $-4a^2b^2$, первом члене остатка? Ответ: $-2b^2$. Записав в частном $-2b^2$, вычтите произведение $-2b^2$ на $2a^2+6ab-2b^2$, или $-4a^2b^2-12ab^3+4b^4$; при этом ничего не останется, а отсюда следует, что корень есть $a^2+3ab-2b^2$.

$$\begin{array}{l|l}
a^4+6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4 & a^2+3ab-2b^2 \\
\underline{a^4} & \\
0 & \\
\quad \underline{6a^3b+9a^2b^2} & \\
\quad 0 \quad -4a^2b^2 & \\
\qquad \underline{-4a^2b^2-12ab^3+4b^4} & \\
\qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

Точно так же корень из величины $x^2-ax+\frac{a^2}{4}$ есть $x-\frac{a}{2}$, корень из y^4+4y^3-8y+4 есть y^2+2y-2, а корень из $16a^4-24a^2x^2+9x^4+12b^2x^2-16a^2b^2+4b^4$ есть $3x^2-4a^2+2b^2$. Это можно увидеть из приведенных ниже схем:

$$\begin{array}{l|l}
x^2-ax+\frac{a^2}{4} & x-\frac{1}{2}a \\
\underline{x^2} & \\
\underline{0-ax+\frac{a^2}{4}} & \\
\quad 0 \qquad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
y^4+4y^3*-8y+4 & y^2+2y-2 \\
\underline{y^4} & \\
\underline{0+4y^3+4y^2} & \\
\quad 0-4y^2 & \\
\quad \underline{-4y^2-8y+4} & \\
\quad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
9x^4-(24a^2-12b^2)x^2+16a^4-16a^2b^2+4b^4 & 3x^2-4a^2+2b^2 \\
\underline{9x^4} & \\
\underline{0-(24a^2-12b^2)x^2+16a^4-16a^2b^2+4b^2} & \\
\qquad 0 \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Чтобы извлечь кубический корень из $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, действие нужно вести следующим образом:

$$\begin{array}{l|l}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & a+b \\
\underline{a^3} & \\
0 & \\
3a^2) \quad \underline{0 \div 3a^2b\,(b} & \\
\qquad \underline{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} & \\
\qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Прежде всего, извлеките кубический корень из первого члена a^3, т. е. a, и запишите его в частном. Затем, вычтя его куб, a^3, скажите: сколько раз утроенный его квадрат, т. е. $3a^2$, содержится в первом члене остатка $3a^2b$? Ответ: b. Запишите поэтому в частном b; если отнять куб частного $a+b$, то в остатке будет 0. Значит, корень есть $a+b$.

Если извлечь таким же образом кубический корень из $z^6 + 6z^5 - 40z^3 + 96z - 64$, то получится $z^2 + 2z - 4$. Аналогичным образом поступают в случае корней более высокой степени.

О ПРИВЕДЕНИИ ДРОБЕЙ И РАДИКАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Для предшествующих действий полезно приведение дробных и радикальных величин к меньшим членам или общему наименованию.

О СОКРАЩЕНИИ ДРОБЕЙ [24]

Сокращение дробей производится путем деления числителей и знаменателей на общий наибольший делитель. Так, дробь $\frac{a^2c}{bc}$ при делении a^2c и bc на c приводится к более простой дроби $\frac{a^2}{b}$; $\frac{203}{667}$ при делении 203 и 667 на 29 приводится к более простой $\frac{7}{23}$, а $\frac{203}{667}\,\frac{a^2c}{bc}$ при делении на $29c$ приводится к $\frac{7a^2}{23b}$. Точно так же $\frac{6a^3-9ac^2}{6a^2+3ac^3}$ при делении на $3a$ превращается в $\frac{2a^2-3c^2}{2a+c}$, а $\frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{a^2-ab}$ при делении на $a-b$ превращается в $\frac{a^2+b^2}{a}$.

По этому методу можно по большей части упростить члены, возникающие при умножении и делении. Если, например, вам нужно $\frac{2ab^3}{3c^2d}$ умножить на $\frac{9ac^2}{bd^2}$ или разделить на $\frac{bd^2}{9ac^2}$, то получится $\frac{18a^2b^3c^2}{3bc^2d^3}$ и, посредством сокращения, $\frac{6a^2b^2}{d^3}$. Однако в подобных случаях лучше сокращать члены перед действием, путем их деления на общий наибольший делитель, чем делать это позднее.

Так, если в приведенном выше примере я поделю $2ab^3$ и bd^2 на общий делитель b, а $3c^2d$ и $9ac^2$ на общий делитель $3c^2$, то дробь $2ab^2$ нужно будет умножить на $\frac{3a}{d^2}$ или разделить на $\frac{d^2}{3a}$, и получится, как и раньше, $\frac{6a^2b^2}{d^3}$. Точно так же, $\frac{a^2}{c}$ на $\frac{c}{b}$ преобразуется в $\frac{a^2}{1}$, умноженное на $\frac{1}{b}$, или $\frac{a^2}{b}$; $\frac{a^2}{c}$, деленное на $\frac{b}{c}$, преобразуется в a^2, деленное на b, или $\frac{a^2}{b}$; $\frac{a^3-ax^2}{x^2}$ на $\frac{cx}{a^2+ax}$ преобразуется в $\frac{a-x}{x}$ на $\frac{c}{1}$, или $\frac{ac}{x}-c$; а 28, деленное на $\frac{7}{3}$, преобразуется в 4, деленное на $\frac{1}{3}$, или 12.

ОБ ОТЫСКАНИИ ДЕЛИТЕЛЕЙ

К этому разделу относится отыскание делителей, на которые может делиться какая-либо величина. Если величина простая, разделите ее на ее наименьший делитель, частное на его наименьший делитель и продолжайте так до тех пор, пока не останется уже неделимое частное. При этом вы получите все простые делители величины. Перемножая эти делители между собою попарно, по три, по четыре и т. д., вы найдете также все составные делители величины.

Если, например, нужно найти все делители числа 60, разделите его на 2, частное 30 на 2, частное 15 на 3, после чего останется неделимое частное 5. Следовательно, простые делители суть: $1, 2, 2, 3, 5$. Перемножая их попарно, вы получите делители: $4, 6, 10, 15$, перемножая по три: $12, 20, 30$, а перемножая все: 60.

Чтобы найти все делители величины $21ab^2$, разделите ее на 3, частное $7ab^2$ на 7, частное ab^2 на a и частное b^2 на b, после чего останется неделимое частное b. Таким образом, простые делители суть: $1, 3, 7, a, b, b$. Составные делители, получаемые из простых по два, будут: $21, 3a, 3b, 7a, 7b, ab, b^2$, по три: $21a, 21b, 3ab, 3b^2, 7ab, 7b^2, ab^2$; по четыре: $21ab, 21b^2, 3ab^2, 7ab^2$, по пять: $21ab^2$. Так же можно найти все делители $2ab^2 - 6a^2c$, которые суть: $1, 2, a, b^2 - 3ac, 2a, 2b^2 - 6ac, ab^2 - 3a^2c, 2ab^2 - 6a^2c$.

Если после деления величины на все ее простые делители она все еще остается составной и если вы подозреваете, что она содержит некоторый составной делитель, то расположите ее по измерениям какой-либо из входящих в нее букв и последовательно подставьте, вместо этой буквы, три или более члена арифметической прогрессии $3, 2, 1, 0, -1, -2$. Получившиеся величины, а также все их делители запишите сбоку от соответствующих им членов прогрессии; при этом каждый делитель нужно брать и с положительным и с отрицательным знаком. Затем составьте арифметические прогрессии из делителей всех чисел, переходя от больших членов к меньшим и следуя порядку членов прогрессии $3, 2, 1, 0, -1, -2$, — арифметические прогрессии, члены которых разнятся либо на единицу, либо на какое-нибудь число, которое делит высший член данной величины. Если встретится какая-либо такая прогрессия, то член ее, стоящий в одной строке с членом 0 первой прогрессии, поделенный на разность членов и соединенный своим знаком со взятой нами буквой, образует величину, на которую вам следует попробовать разделить данную величину.[25]

Допустим, например, что дана величина $x^3 - x^2 - 10x + 6$.

Я подставляю вместо x последовательно члены прогрессии $1, 0, -1$ и получаются числа: $-4, 6, 14$. Каждое из них вместе с его делителями я помещаю справа от соответствующего члена прогрессии $1, 0, -1$, как это показано ниже:

1	4	1, 2, 4,	$+4$
0	6	1, 2, 3, 6	$+3$
-1	14	1, 2, 7, 14	$+2$

Так как высший член x^3 делится лишь на единицу, то я разыскиваю среди делителей какую-либо прогрессию, члены которой разнятся между собой на единицу и (переходя от высших к низшим) убывают, как члены стоящей сбоку прогрессии $1, 0, -1$. Я нахожу лишь одну такую прогрессию, именно $4, 3, 2$. Поэтому я беру член $+3$, находящийся в той же строке, что и член 0 первой прогрессии $1, 0, -1$, и пробую делить на $x+3$; деление оказывается возможным, и я получаю в частном x^2-4x+2.

Допустим далее, что дана величина $6y^4-y^3-21y^2+3y+{}$ $+20$. Я последовательно подставляю вместо y числа $2, 1, 0,$ $-1, -2$ и получающиеся при этом числа $30, 7, 20, 3, 34$, а также все их делители, я записываю, как показано ниже:

2	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	$+10$
1	7	1, 7	$+7$
0	20	1, 2, 4, 5, 10, 20	$+4$
-1	3	1, 3	$+1$
-2	34	1, 2, 17, 34	-2

Среди делителей я нахожу убывающую арифметическую прогрессию $10, 7, 4, 1, -2$. Разность ее членов, т. е. 3, делит высший член данной величины $6y^4$. Поэтому я беру член $+4$, находящийся в той же строке, что и член 0 первой прогрессии, и, разделив его на разность членов, т. е. 3, прибавляю к букве y, а затем испытываю деление на $y+\frac{4}{3}$, или, что то же, на $3y+4$. Деление оказывается возможным, и я получаю в частном $2y^3-3y^2-3y+5$.

Если дана величина $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140a^2 + 64a + 30$, то действия расположатся следующим образ ом:

2	42	1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42	+3, +3, +7
1	23	1, 23	+1, −1, +1
0	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	−1, −5, −5
−1	297	1, 3, 9, 11, 27, 33, 99, 297	−3, −9, −11

Здесь получаются три прогрессии, члены которых — 1, — 5, — 5, при делении на соответствующие им разности, т. е. на 2, 4, 6, дают три подлежащих испытанию делителя, именно, $a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{5}{4}$ и $a - \frac{5}{6}$. Возможным оказывается деление на последний из них $a - \frac{5}{6}$, или $6a - 5$, причем в частном будет $4a^4 - 5a^3 + 4a^2 - 20a - 6$.

Если по этому методу не удастся найти делителя вообще или же делителя, делящего данную величину, то следует заключить, что последняя не имеет делителей первого измерения. Однако если данная величина выше трех измерений, то она может иметь делителя двух измерений. Если такой делитель у нее имеется, то найти его можно следующим способом.

Подставьте, как и ранее, в данную величину вместо буквы четыре или более членов прогрессии $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$. К квадратам членов этой прогрессии, умноженным на какой-либо числовой делитель высшего члена данной величины, поочередно прибавьте и из них вычтите все делители соответствующих возникающих при подстановках чисел; и эти суммы и разности также запишите с правой стороны. Затем выпишите сбоку все прогрессии, встречающиеся среди этих сумм и разностей. Предположим, что $\mp C$ есть член такой прогрессии, находящийся против члена 0 первой прогрессии, что $\mp B$ есть разность, возникающая при вычитании $\mp C$ из расположенного непосредственно над ним члена, находящегося напротив члена 1 первой прогрессии, и что A есть упомянутый ранее числовой делитель высшего члена, а l — буква данной величины. В таком случае нужно будет испытать деление на $Al^2 \pm Bl \pm C$.[26]

Допустим, например, что дана величина $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6$. Вместо x, я последовательно пишу $3, 2, 1, 0, -1, -2$. Возникающие при этом числа будут: $39, 6, 1, -6, -21, -26$. Каждое из них вместе со всеми его делителями я записываю в одной строке с соответствующим членом прогрессии.

Затем к квадратам членов первой прогрессии, умноженным на числовой делитель члена x^4, т. е. на единицу, другими словами, к членам $9, 4, 1, 0, 14$, я последовательно прибавляю или отнимаю от них все названные делители; получающиеся суммы и разности я также записываю в стороне. Далее я выписываю, как это следует, имеющиеся среди сумм и разностей прогрессии.

3	39	1, 3, 13, 39	9	—30, —4, 6, 8, 10, 12, 22, 48	—4	9
2	6	1, 2, 3, 6	4	—2, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10	—2	3
1	1	1	1	0, 1	0	0
0	—6	1, 2, 3, 6	0	—6, —3, —2, —1, 1, 2, 3, 6	2	—3
—1	—21	1, 3, 7, 21	1	—20, —6, —2, 0, 2, 4, 8, 22	4	—6
—2	—26	1, 2, 13, 26	4	—22, —9, 2, 3, 5, 6, 17, 30	6	—9

Числа 2 и -3, находящиеся напротив члена 0 прогрессии, стоящей в первом столбце, я последовательно принимаю за $\mp C$, а в качестве $\mp B$ беру соответственно разности 3 и -2, возникающие при вычитании -3 и 2 из выше стоящих членов 0 и 0. Наконец, за A я беру единицу и, вместо l, пишу x. Таким образом, мне нужно, вместо $Al^2 \pm Bl \pm C$, испытать два делителя $x^2 + 2x - 2$ и $x^2 - 3x + 3$, причем подходящими оказываются и тот и другой.

Если будет предложена величина $3y^5 - 6y^4 + y^3 - 8y^2 - 14y + 14$, то действия расположатся следующим образом. Прежде всего я, взяв в качестве A единицу, начинаю с того, что к квадратам членов прогрессии 2, 1, 0, -1 прибавляю, а также отнимаю от них делители. Но это не приводит к успеху. Поэтому я беру в качестве A другой числовой делитель высшего члена $3y^5$, т. е. число 3. Умножив квадраты членов прогрессии на 3 и прибавив к этим произведениям, т. е. 12, 3, 0, 3, а также отняв от них делители, я нахожу среди получающихся при этом членов две прогрессии: —7, —7, —7, —7 и 11, 5, —1, —7. Ради краткости, я оставил в стороне делители двух крайних членов: 170 и 190.

3	170		27		—7	17
2	38	1, 2, 19, 38	12	—26, —7, 10, 11, 13, 14, 31, 50	—7	11
1	10	1, 2, 5, 10	3	—7, —2, 1, 2, 4, 5, 8, 13	—7	5
0	14	1, 2, 7, 14	0	—14, —7, —2, —1, 1, 2, 7, 14	—7	— 1
—1	10	1, 2, 5, 10	3	—7, —2, 1, 2, 4, 5, 8, 13	—7	— 7
—2	190		12		—7	—13

Продолжив эти две прогрессии вверх и вниз, я беру крайние члены, т. е. —7 и 17 наверху и —7 и —13 внизу, и, вычитая их из чисел 27 и 12, находящихся против них в четвертом столбце, выясняю, не делят ли эти разности числа 170 и 190, находящиеся против них во втором столбце. И действительно, разность между 27 и —7, т. е. 34, делит 170, а разность 12 и —7, т. е. 19, делит 190. Далее, разность между 27 и 17, т. е. 10, делит 170, но разность между 12 и —13, т. е. 25, не делит 190. Поэтому последнюю прогрессию я отбрасываю. Первая прогрессия дает мне в качестве $\mp C$ число —7, в качестве $\mp B$ число 0, ибо члены прогрессии не разнятся между собой. Таким образом, подлежащий испытанию делитель $Al^2 \pm Bl \pm C$ будет $3y^2 + 7$. Деление оказывается возможным, и частное будет $y^3 - 2y^2 - 2y + 2$.

Если таким путем не удастся найти ни одного подходящего делителя, то следует заключить, что данная величина не имеет делителей двух измерений. Этот метод можно было бы распространить на определение делителей высших измерений, отыскивая среди названных ранее сумм и разностей не арифметические прогрессии, а некоторые другие прогрессии, первые, вторые, третьи и т. д., разности членов которых образуют арифметическую прогрессию. Однако начинающим на этом останавливаться не следует.

Если в данную величину входят две буквы и все члены ее — одинакового измерения, то поставьте на место одной из этих букв единицу, затем найдите по предыдущим правилам делитель получившейся величины и восполните недостающие измерения делителя, восстановив на месте единицы замененную вами букву.

Допустим, например, что дана величина $6y^4 - cy^3 - 21c^2y^2 + 3c^3y + 20c^4$, все члены которой четвертого измерения. Поставьте на месте c единицу; тогда величина превратится в $6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20$, делитель которой, согласно выше сказанному, есть $3y + 4$. Восполнив недостающее в последнем члене измерение соответствующим измерением c, вы получите искомый делитель $3y + 4c$. Если дана величина $x^4 - bx^3 - 5b^2x^2 + 12b^3x - 6b^4$, то, заменив b на единицу, я получаю $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6$, делителем чего является $x^2 + 2x - 2$. Я восполняю недостающие измерения делителя соответствующими измерениями b, и искомый делитель будет $x^2 + 2bx - 2b^2$.

Когда в данную величину входит три или более букв и все члены ее — одинакового измерения, делитель можно находить по предыдущим правилам, но быстрее действовать следующим образом. Найдите все делители всех членов, в которых отсутствует одна из букв; найдите также все делители всех членов, в которых отсутствует другая буква, а также всех членов, в которых отсутствуют третья, четвертая, пятая буквы,—если их будет столько. Переберите таким образом все буквы. Запишите все такие делители в одних строках с соответствующими буквами. Затем посмотрите, не повторяются ли в каком-либо ряду делителей, проходящем по всем строкам, все их части, содержащие только по одной букве, столько же раз, сколько имеется в данной величине букв без одной, и, аналогично, не повторяются ли части, содержащие по две буквы, столько же раз, сколько имеется в данной величине букв без двух.

Если это так, то все эти части, сложенные вместе с их знаками, составят искомый делитель.

Допустим, что данная величина есть $12x^3 - 14bx^2 + 9cx^2 - 12b^2x - 6bcx + 8c^2x + 8b^3 - 12b^2c - 4bc^2 + 6c^3$. Согласно предшествующим правилам, делители одного измерения для членов $8b^3 - 12b^2c - 4bc^2 + 6c^3$, не содержащих x, будут: $2b - 3c$ и $4b - 6c$. У членов $12x^3 + 9cx^2 + 8c^2x + 6c^3$, не содержащих b, единственным делителем является $4x + 3c$; у членов $12x^3 - 14bx^2 - 12b^2x + 8b^3$, не содержащих c, делители будут: $2x - b$ и $4x - 2b$. Я располагаю каждый из этих делителей, как показано здесь, в одной строке с соответствующей ему буквой

$$\begin{array}{c|l} x & 2b - 3c,\ 4b - 6c \\ b & 4x + 3c \\ c & 2x - b,\ 4x - 2b \end{array}$$

Так как в данную величину входят три буквы, а любая из частей делителей содержит лишь одну из букв, то нужно, чтобы в ряду делителей эти части повторялись по два раза. Части $4b$, $6c$, $2x$, b делителей $4b - 6c$ и $2x - b$ встречаются лишь по одному разу, их нет нигде, кроме делителя, частью которого они служат; поэтому эти делители я отбрасываю. Остается лишь три делителя $2b - 3c$, $4x + 3c$ и $4x - 2b$. Эти делители образуют ряд, проходящий по всем буквам x, b, c, и каждая из частей $2b$, $4x$, $3c$ повторяется в ряду дважды, как и должно было бы быть, и притом с теми же знаками, если только переменить знаки в делителе $2b - 3c$ и вместо него написать $-2b + 3c$ (ведь вы имеете право переменить знаки в любом делителе). Поэтому я беру по одной все части этих делителей вместе с их знаками, т. е. $2b$, $3c$, $4x$, и искомым делителем будет сумма $-2b + 3c + 4x$. Действительно, если вы разделите данную величину на эту сумму, то в частном получится $3x^2 - 2bx + 2c^2 - 4b$.

Допустим далее, что данная величина есть $12x^5 - 10ax^4 - 9bx^4 - 26a^2x^3 + 12abx^3 + 6b^2x^3 + 24a^3x^2 - 8a^2bx^2 - 8ab^2x^2 -$

$- 24b^3x^2 - 4a^3bx + 6a^2b^2x - 12ab^3x + 18b^4x + 12a^4b + 32a^2b^3 - 12b^5$. Я помещаю делители членов, в которых отсутствует x, в одной строке с x, делители членов, в которых отсутствует a, в одной строке с a, а делители членов, в которых отсутствует b, в одной строке с b, как вы можете увидеть ниже:

$$\begin{array}{c|l}
x & b, 2b, 4b, a^2 + 3b^2, 2a^2 + 6b^2, 4a^2 + 12b^2, b^2 - 3a^2 \\
 & 2b^2 - 6a^2, 4b^2 - 12a^2 \\
a & 4x^2 - 3bx + 2b^2, 12x^2 - 9bx + 6b^2 \\
b & x, 2x, 3x - 4a, 6x - 8a, 3x^2 - 4ax, 6x^2 - 8ax, 2x^2 + ax - 3a^2 \\
 & 4x^2 + 2ax - 6a^2
\end{array}$$

Затем я вижу, что следует отбросить все делители одного измерения, ибо простые делители $b, 2b, 4b, x, 2x$ и т. д., а также части составных $3x - 4a, 6x - 8a$ встречаются среди делителей по одному разу. В самом деле, в данную величину входят три буквы, а эти части содержат только по одной и потому должны были бы встречаться дважды.

Точно так же я отбрасываю делители двух измерений $a^2 + 3b^2, 2a^2 + 6b^2, 4a^2 + 12b^2, b^2 - 3a^2$ и $4b^2 - 12a^2$, ибо части этих делителей $a^2, 2a^2, 4a^2, b^2$ и $4b^2$ содержат каждая лишь одну букву, либо a, либо b, и встречаются не более чем по одному разу. Остающийся в одной строке с x делитель $2b^2 - 6a^2$ имеет две части, $2b^2$ и $6a^2$, каждая из которых также содержит лишь одну букву, но эти части встречаются дважды, именно часть $2b^2$ входит еще в делитель $4x^2 - 3bx + 2b^2$, а часть $6a^2$ повторяется в делителе $4x^2 - 2ax - 6a^2$. Кроме того, эти три делителя составляют ряд, который проходит через строки, соответствующие трем буквам x, a, b, и все их части $2b^2, 6a^2, 4x^2$, содержащие лишь по одной букве, повторяются здесь дважды, причем с теми же знаками, а другие части этих делителей, $3bx, 2ax$, содержащие по две буквы, встречаются по одному разу. Поэтому, сложив с их знаками все различные части этих трех делителей $2b^2, 6a^2, 4x^2, 3bx, 2ax$, мы получим искомый делитель $2b^2 - 6a^2 + 4x^2 - 3bx + 2ax$. Разделив на этот делитель данную величину, я нахожу в частном $3x^3 - 4ax^2 - 2a^2b - 6b^3$.

Если не все члены данной величины будут одинаково высокого измерения, то недостающие измерения следует восполнить измерениями какой-либо вспомогательной буквы. Найдя по предшествующим правилам делитель, следует затем опустить введенную букву.

Допустим, например, что данная величина есть $12x^3 - 14bx^2 + 9x^2 - 12b^2x - 6bx + 8x + 8b^3 - 12b^2 - 4b + 6$. Введите какую-либо букву, скажем c, и восполните при помощи ее измерений измерения данной величины так: $12x^3 - 14bx^2 + 9cx^2 - 12b^2x - 6bcx + 8c^2x + 8b^3 - 12b^2c - 4bc^2 + 6c^3$. Затем, найдя делитель этой новой величины $4x - 2b + 3c$, опустите c и вы получите искомый делитель $4x - 2b + 3$.

Иногда делители можно найти легче, чем по этим правилам. Если, например, какая-нибудь буква входит в данной величине лишь в одном измерении, то следует найти общий наибольший делитель членов, в которых имеется эта буква, и остальных членов, в которые она не входит. Этот общий делитель будет делить всю данную величину; а если не найдется такого общего делителя, то данная величина не имеет делителя. Допустим, например, что дана величина $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x + cx^3 - acx^2 - 8a^2cx + 6a^3c - 8a^4$. Найдите общий делитель членов $+cx^3 - acx^2 - 8a^2cx + 6a^3c$, в которых c имеет одно измерение, и остальных членов $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x^4 - 8a^4$. Этот общий делитель $x^2 + 2ax - 2a^2$ будет делить всю данную величину.

Общий наибольший делитель двух чисел — в случае если он не известен или не виден с первого взгляда — можно найти, вычитая последовательно меньшее из большего, а затем остаток — из последней вычтенной величины; искомым делителем окажется тот результат, после которого не будет уже остатка. Например, чтобы найти общий наибольший делитель чисел 203 и 667, отнимите трижды 203 от 667, затем трижды отнимите остаток 58 от 203 и дважды остаток 29 от 58, после чего остатка не получится. Это показывает, что искомый делитель есть 29.

Способ определения общего делителя составных буквенных величин таков же, как для чисел. Цель достигается путем вычитания одной величины или ее кратных из другой. При этом следует расположить обе эти величины и остаток по измерениям одной буквы, как было показано при делении, и всякий раз упрощать величины, деля их либо на все их простые делители, либо на делители, делящие все их члены, подобно простым делителям. Например, чтобы найти общий наибольший делитель числителя и знаменателя дроби

$$\frac{x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - ax^2 - 8a^2x + 6a^3},$$

умножьте знаменатель на x, чтобы сделать его первый член равным первому члену числителя, а затем вычтите его. В остатке получится $-2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$, а эту величину можно упростить, разделив ее на $-2a$, что даст $x^3 - 6a^2x + 4a^3$. Вычтите это из знаменателя, в остатке будет $-ax^2 - 2a^2x + 2a^3$. Разделите теперь получившуюся величину на $-a$, что даст $x^2 + 2ax - 2a^2$. Умножьте это частное на x, чтобы сделать его первый член равным первому члену последней вычтенной величины $x^3 - 6a^2x + 4a^3$, из которой теперь надлежит производить вычитание; проделав это, вы получите в остатке $-2ax^2 - 4a^2x + 4a^3$, что при делении на $-2a$ даст также $x^2 + 2ax - 2a^2$. Так как последняя величина совпадает с предыдущим остатком, то при вычитании ее из последнего ничего не останется, следовательно, этот остаток и есть искомый делитель. Разделив теперь числитель и знаменатель данной дроби на этот делитель, можно привести ее к более простой дроби $\frac{x^2 - 5ax + 4a^2}{x - 3a}$.

Аналогичным образом, если дана дробь

$$\frac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2}{9a^3b - 27a^2bc - 6abc^2 + 18bc^3},$$

то нужно начать с сокращения ее членов путем деления числителя на a^2, а знаменателя на $3b$. Если затем вычесть из $6a^3+15a^2b-4ac^2-10bc^2$ удвоенное $3a^3-9a^2c-2ac^2+6c^3$, то в остатке будет

$$(15b+18c)\,a^2-10bc^2-12c^3.$$

Эту величину можно упростить, разделив оба ее члена на $5b+6c$ (как если бы $5b+6c$ было простым делителем), что даст $3a^2-2c^2$. Умножьте последнюю величину на a и вычтите из $3a^3-9a^2c-2ac^2+6c^3$; в остатке будет $-9a^2c+6c^3$, что можно опять-таки упростить путем деления на $-3c$, что даст $3a^2-2c^2$, как и в предыдущем остатке. Поэтому искомый делитель есть $3a^2-2c^2$. Разделите обе части данной дроби на этот делитель и вы получите $\frac{2a^3+5a^2b}{3ab-9bc}$.

Если по этому методу общий делитель найти не удастся, то можно быть уверенным, что его вовсе не существует, если только он не получается из величин, которые служат для сокращения числителя и знаменателя. Например, расположив члены дроби

$$\frac{a^2d^2-c^2d^2-a^2c^2+c^4}{4a^2d-4acd-2ac^2+2c^3}$$

по измерениям буквы d, мы получим для числителя $(a^2-c^2)\,d^2-$ $-a^2c^2+c^4$, а для знаменателя $(4a^2-4ac)\,d-2ac^2+2c^3$. Прежде всего они должны быть сокращены путем деления каждого члена числителя на a^2-c^2, а каждого члена знаменателя на $2a-2c$, как если бы a^2-c^2 и $2a-2c$ были простыми величинами. Вместо числителя тогда будет d^2-c^2, а вместо знаменателя $2ad-c^2$. Полученные таким путем две величины не имеют общего делителя. Однако члены a^2-c^2 и $2a-2c$, служившие для сокращения числителя и знаменателя, имеют общий делитель $a-c$, при помощи которого можно привести данную дробь к дроби

$$\frac{ad^2+cd^2-ac^2-c^3}{4ad-2c^2}.$$

Если бы члены $a^2 - c^2$ и $2a - 2c$ не имели общего делителя, данная дробь была бы неприводимой.

Таков общий метод определения общих делителей. Однако чаще всего их находят быстрее, определяя все простые делители одного из двух членов дроби, т. е. такие, которые уже не могут делиться на другие величины, и затем проверяя, нет ли среди этих простых делителей каких-либо, которые делят нацело другой член. Например, чтобы сократить дробь

$$\frac{a^3 - a^2b + ab^2 - b^3}{a^2 - ab},$$

следует найти делители величины $a^2 - ab$, т. е. a и $a - b$, и затем испытать, не делят ли a или $a - b$ нацело $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$. Величина $a - b$ делит знаменатель нацело, и в частном получается $a^2 + b^2$. Таким образом, данная дробь приводится к $\frac{a^2 + b^2}{a}$.

О ПРИВЕДЕНИИ ДРОБЕЙ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ

Дроби приводятся к общему знаменателю посредством умножения членов каждой из дробей на знаменатель другой.

Так, если даны дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, то умножьте оба члена одной из них $\frac{a}{b}$ на d и оба члена другой $\frac{c}{d}$ на b; они превратятся в $\frac{ad}{bd}$ и $\frac{bc}{bd}$. Теперь эти две дроби имеют общий знаменатель bd. Точно так же a, или $\frac{a}{1}$ и $\frac{ab}{c}$ превращаются в $\frac{ac}{c}$ и $\frac{ab}{c}$. Если знаменатели имеют общий делитель, достаточно умножать в обратном порядке на частные. Так, дроби $\frac{a^3}{bc}$ и $\frac{a}{bd}$

могут быть приведены к дробям $\frac{a^3d}{bcd}$ и $\frac{a^3c}{bcd}$ путем умножения в обратном порядке на частные c и d, возникающие при делении знаменателей на общий делитель b.

Приведение к общему знаменателю по большей части применяется при сложении и вычитании дробей. Прежде чем складывать две дроби с различными знаменателями, их нужно привести к общему знаменателю. Так, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ путем этого приведения становится $\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$, или $\frac{ad+bc}{bd}$; $a+\frac{ab}{c}$ становится $\frac{ac+ab}{c}$; $\frac{a^3}{bc}-\frac{a^3}{bd}$ становится $\frac{a^3d-a^3c}{bcd}$, или $\frac{(d-c)\,a^3}{bcd}$; $\frac{c^4+x^4}{c^2-x^2}-c^2-x^2$ становится $\frac{2x^4}{c^2-x^2}$. Точно так же $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$ становится $\frac{14}{21}+\frac{15}{21}$, или $\frac{14+15}{21}$, т. е. $\frac{29}{21}$; $\frac{11}{6}-\frac{3}{4}$ становится $\frac{22}{12}-\frac{9}{12}$, или $\frac{13}{12}$; $\frac{3}{4}-\frac{5}{12}$ становится $\frac{9}{12}-\frac{5}{12}$, или $\frac{4}{12}$, т. е. $\frac{1}{3}$; $3\frac{4}{7}$, или $\frac{3}{1}+\frac{4}{7}$, становится $\frac{21}{7}+\frac{4}{7}$, или $\frac{25}{7}$; $25\frac{1}{2}$ становится $\frac{51}{2}$.

Когда дробей больше двух, они складываются последовательно. Например, если дано $\frac{a^2}{x}-a+\frac{2x^2}{3a}-\frac{ax}{a-x}$, начните с вычитания a из $\frac{a^2}{x}$, что даст в остатке $\frac{a^2-ax}{x}$; прибавьте к этому $\frac{2x^2}{3a}$ и вы получите $\frac{3a^3-3a^2x+2x^3}{3ax}$; наконец, из последней величины вычтите $\frac{ax}{a-x}$, и остаток будет $\frac{3a^4-6a^3x+2ax^3-2x^4}{3a^2x-3ax^2}$. Аналогично, если дано $3\frac{4}{7}-\frac{2}{3}$, то сперва найдите сумму $3\frac{4}{7}$, т. е. $\frac{25}{7}$, затем вычтите отсюда $\frac{2}{3}$; в остатке будет $\frac{61}{21}$.

О ПРИВЕДЕНИИ РАДИКАЛОВ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ [27]

Когда невозможно извлечь корень из всей радикальной величины, ее приводят, извлекая корень из какого-либо ее делителя.

Так, $\sqrt{a^2bc}$, если извлечь корень из делителя a^2, становится $a\sqrt{bc}$; $\sqrt{48}$, или $\sqrt{16\times 3}$, при извлечении корня из делителя 16 становится $4\sqrt{3}$; $\sqrt{48a^2bc}$ при извлечении корня из делителя $16a^2$ становится $4a\sqrt{3bc}$; $\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{c^2}}$, или $\sqrt{\frac{(a^2-4ab+4b^2)\,ab}{c^2}}$, при извлечении корня из делителя $\frac{a^2-4ab+4b^2}{c^2}$ становится $\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$; $\sqrt{\frac{a^2o^2m^2}{p^2z^2}+\frac{4a^2m^3}{pz^2}}$ при извлечении корня из делителя $\frac{a^2m^2}{p^2z^2}$ становится $\frac{am}{pz}\sqrt{o^2+4mp}$; $6\sqrt{\frac{75}{98}}$ или $6\sqrt{\frac{25}{49}\cdot\frac{3}{2}}$, при извлечении корня из делителя $\frac{25}{49}$ становится $6\cdot\frac{5}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, или же $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, или $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}$, или, извлекая затем корень из знаменателя, $\frac{15}{7}\sqrt{6}$. Точно так же $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, или $a\sqrt{\frac{ab}{a^2}}$, при извлечении корня из знаменателя a^2 становится $\sqrt{ab}$; $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$ при извлечении кубического корня из делителя $8a^3$ становится $2a\sqrt[3]{b+2a}$. Аналогично, $\sqrt[4]{a^3x}$ при извлечении квадратного корня из делителя a^2 становится $\sqrt{a}$ на $\sqrt[4]{ax}$, а при извлечении корня четвертой степени из делителя a^4 становится $a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$. Точно так же $\sqrt[6]{a^7x^5}$ заменяется на $a\sqrt[6]{ax^5}$, или на $xa\sqrt[6]{\frac{a}{x}}$, или еще на $\sqrt{ax}\sqrt[3]{a^2x}$.

Подобное приведение служит не только для сокращения радикальных величин, но также для их сложения и вычитания, если после приведения их к простейшему виду их радикалы будут одинаковые; в этом случае их складывать возможно, а в противном случае нельзя. Так, $\sqrt{48}+\sqrt{75}$ после приведения принимает вид $4\sqrt{3}+5\sqrt{3}$, или $9\sqrt{3}$; $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{16}{27}}$ приводится к $4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}$, или $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. Точно так же $\sqrt{\frac{4ab^3}{c^2}}+\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{c^2}}$ после извлечения рациональной части принимает вид $\frac{2b}{c}\sqrt{ab}+\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$, т. е. $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. Далее, $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}-\sqrt[3]{b^4+2ab^3}$ принимает вид $2a\sqrt[3]{b+2a}-b\sqrt[3]{b+2a}$, т. е. $(2a-b)\sqrt[3]{b+2a}$.

О ПРИВЕДЕНИИ РАДИКАЛОВ К ОБЩЕМУ ПОКАЗАТЕЛЮ[28]

При умножении или делении радикальных величин с различными показателями вам следует сперва привести их к общему показателю. Для этого показателем их общего радикала следует взять общее наименьшее кратное всех показателей радикалов, умножая при этом подрадикальные величины сами на себя столько раз без одного, во сколько раз увеличиваются показатели их корней. Например, $\sqrt[4]{ax}$ на $\sqrt[3]{a^2x}$ принимает вид $\sqrt[6]{a^3x^3}$ на $\sqrt[6]{a^4x^2}$, что дает $\sqrt[6]{a^7x^5}$; $\sqrt{a}$ на $\sqrt{ax}$ принимает вид $\sqrt[4]{a^2}$ на $\sqrt[4]{ax}$, что дает $\sqrt[4]{a^3x}$; $\sqrt{6}$ на $\sqrt{\frac{5}{6}}$ преобразуется в $\sqrt[4]{36}$ на $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$, что дает $\sqrt[4]{30}$. На том же основании $a\sqrt{bc}$ преобразуется в $\sqrt{a^2}$ на $\sqrt{bc}$, или в $\sqrt{a^2bc}$; $4a\sqrt{3bc}$ преобразуется в $\sqrt{16a^2}$ на $\sqrt{3bc}$, или в $\sqrt{48a^2bc}$; $2a\sqrt[3]{b+2a}$ преобразуется в $\sqrt[3]{8a^3}$ на $\sqrt[3]{b+2a}$, или в $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$; точно так же $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ становится $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{b^2}}$, или $\sqrt{\frac{ac}{b^2}}$, а $\frac{6ab^2}{\sqrt{18ab^3}}$ становится $\frac{\sqrt{36a^2b^4}}{\sqrt{18ab^3}}$, или $\sqrt{2ab}$, и т. д.

О ПРИВЕДЕНИИ РАДИКАЛОВ К БОЛЕЕ ПРОСТЫМ РАДИКАЛАМ ПОСРЕДСТВОМ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КОРНЕЙ

Корни величин, составленных из целых и квадратичных радикалов, следует извлекать следующим образом.

Допустим, что A означает бо̀льшую часть некоторой данной величины, а B — меньшую. Тогда $\frac{A+\sqrt{A^2-B^3}}{2}$ будет квадратом большей части корня, а $\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ квадратом меньшей, которую нужно прибавить к большей части со знаком B.[29]

Например, дана величина $3+\sqrt{8}$. Приняв 3 за A и $\sqrt{8}$ за B, мы получим, что $\sqrt{A^2-B^2}=1$; поэтому квадрат большей части корня будет $\frac{3+1}{2}$, или 2, а квадрат меньшей части $\frac{3-1}{2}$, или 1. Следовательно, корень данной величины есть $1+\sqrt{2}$.

Если вам нужно найти корень из $\sqrt{32}-\sqrt{24}$, то положите $A=\sqrt{32}$ и $B=\sqrt{24}$, тогда $\sqrt{A^2-B^2}$ будет $\sqrt{32-24}=\sqrt{8}$ и квадратами частей корня будут $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{8}}{2}$ и

$\frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2}$, т. е. $3\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$. Следовательно, корень есть $\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$.

Аналогично, если вам нужно извлечь корень из $a^2 + 2x\sqrt{a^2-x^2}$, то положите $A = a^2$ и $B = 2x\sqrt{a^2-x^2}$; вы получите, что $A^2 - B^2 = a^4 - 4a^2x^2 + 4x^4$, корень чего есть $a^2 - 2x^2$. Квадрат одной части будет поэтому $a^2 - x^2$, а квадрат другой x^2. Следовательно, корень будет $x + \sqrt{a^2-x^2}$. Допустим еще, что вам нужно извлечь квадратный корень из величины $a^2 + 5ax - 2a\sqrt{ax+4x^2}$. Положите $a^2 + 5ax = A$ и $2a\sqrt{ax+4x^2} = B$; тогда $A^2 - B^2 = a^4 + 6a^3x + 9a^2x^2$, корень чего есть $a^2 + 3ax$. Поэтому квадрат большей части корня будет $a^2 + 4ax$, квадрат меньшей части будет ax, а корень будет $\sqrt{a^2+4ax} - \sqrt{ax}$. Допустим, наконец, что вам дано $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}$. Если положить $6 + \sqrt{8} = A$ и $B = -\sqrt{12} - \sqrt{24}$, то $A^2 - B^2 = 8$. Значит, бóльшая часть корня есть $\sqrt{3+\sqrt{8}}$, т. е., как было найдено ранее, $1 + \sqrt{2}$, а меньшая часть корня есть $\sqrt{3}$. Следовательно, сам корень есть $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

В случае, когда имеется несколько радикальных членов такого рода, части корня могут быть найдены быстрее, если разделить произведение каких-нибудь двух радикалов на какой-либо третий, дающий в частном рациональное и целое число, ибо корень из удвоенного этого частного будет удвоенной частью искомого корня. Так, в последнем примере $\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{24}} = 2$, $\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 4$ и $\frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = 6$; следовательно, части корня будут, как и раньше, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

Существует также правило для извлечения более высоких корней из числовых величин, состоящих из двух частей, с соизмеримыми квадратами.

Допустим, что дана величина $A \pm B$, причем A бóльшая из них, и пусть показатель корня есть c. Найдите наименьшее число n, степень которого n^c нацело делится на $A^2 - B^2$, и обозначьте частное Q. Вычислите ближайшее к $\sqrt[c]{(A+B)\sqrt{Q}}$ целочисленное значение и обозначьте его r. Разделите $A\sqrt{Q}$ на его наибольший рациональный делитель, и пусть частное будет s. Возьмите ближайшее к $\dfrac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ целочисленное значение и обозначьте его t. В таком случае, если корень извлекается, то искомый корень будет $\dfrac{ts \pm \sqrt{t^2s^2-n}}{\sqrt[2c]{Q}}$.[30]

Допустим, например, что требуется извлечь кубический корень из $\sqrt{968}+25$. Здесь $A^2 - B^2 = 343$, делители чего суть 7, 7, 7. Следовательно, $n = 7$ и $Q = 1$. Далее, $(A+B)\sqrt{Q}$, или $\sqrt{968}+25$, если извлечь корень из первого члена, будет несколько больше, чем 56, ближайший кубический корень к чему есть 4. Значит $r = 4$. Далее, $A\sqrt{Q}$, или $\sqrt{968}$, по выделении рациональной части есть $22\sqrt{2}$. Радикальная часть этой величины $\sqrt{2}$ есть s, а ближайшее целочисленное значение к $\dfrac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, или $\dfrac{5\frac{3}{4}}{2\sqrt{2}}$, есть 2. Значит, $t = 2$. Наконец, $ts = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{t^2s^2-n}$ есть 1, а $\sqrt[2c]{Q}$, или $\sqrt[6]{1}$, есть 1. Следовательно, искомый корень есть $2\sqrt{2}+1$ при условии, что извлечение корня из данной величины возможно. Поэтому я проверяю путем умножения, равен ли куб $2\sqrt{2}+1$ числу $\sqrt{968}+25$, и убеждаюсь в том, что это действительно имеет место.

Допустим еще, что нужно извлечь кубический корень из $68-\sqrt{4374}$. Здесь $A^2 - B^2 = 250$, делителями чего являются

5, 5, 5, 2. Поэтому $n = 5 \times 2 = 10$ и $Q = 4$. Далее, ближайшее целочисленное значение к $\sqrt[c]{(A+B)\sqrt{Q}}$, или $\sqrt[3]{(68+\sqrt{4374})\cdot 2}$, есть $7 = r$. Затем, $A\sqrt{Q}$, или $68\sqrt{4}$, по выделении рациональной части дает $136\sqrt{1}$. Следовательно, $s = 1$ и $\dfrac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, или $\dfrac{7+\frac{10}{7}}{2}$, если взять ближайшее целое число, дает $t = 4$. Следовательно, $ts = 4$, $\sqrt{t^2s^2 - n} = \sqrt{6}$ и $\sqrt[2c]{Q} = \sqrt[6]{4}$, или $\sqrt[3]{2}$. Следовательно, подлежащий проверке корень есть $\dfrac{4-\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

При извлечении корня пятой степени из $29\sqrt{6} + 41\sqrt{3}$ мы получили бы $A^2 - B^2 = 3$, и, значит, $n = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$, $ts = \sqrt{6}$, $\sqrt{t^2s^2 - n} = \sqrt{3}$ и $\sqrt[2c]{Q} = \sqrt[10]{81}$, или $\sqrt[5]{9}$. Значит, подлежащий проверке корень есть $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

Если данная в такого рода задачах величина есть дробь или ее части имеют общий делитель, то следует по отдельности извлечь корни из числителя и знаменателя или соответственно из сомножителей. Например, чтобы извлечь корень кубический из $\sqrt{242} - 12\frac{1}{2}$, нужно сперва привести ее части к общему знаменателю, что даст $\dfrac{\sqrt{968}-25}{2}$. Извлекая затем по отдельности корень кубический из числителя и знаменателя, мы найдем $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt[3]{2}}$. Если вам нужно извлечь какой-либо корень из $\sqrt[3]{3993} + \sqrt[6]{17578125}$, разделите обе части на общий делитель $\sqrt[3]{3}$, что даст $11 + \sqrt{125}$. Таким образом, данная величина есть $(11+\sqrt{125})\sqrt[3]{3}$. Корень этой величины получится, если извлечь корни по отдельности из каждого сомножителя $\sqrt[3]{3}$ и $11+\sqrt{125}$.

О ФОРМЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения представляют собой собрания величин, либо равных между собой, либо равных все вместе нулю.[31] Уравнения рассматривают главным образом с двух точек зрения: либо как последние заключения, к которым приходят при решении задач, либо как средства, при помощи которых получают окончательные уравнения. Уравнение первого рода содержит, наряду с известными величинами, лишь одну неизвестную при условии, что задача — определенная и требует отыскания определенной вещи. Уравнения второго рода содержат несколько неизвестных величин, и их поэтому нужно сравнивать и комбинировать друг с другом так, чтобы из них получилось новое уравнение, содержащее, наряду с известными величинами, лишь одну искомую неизвестную. Чтобы легче найти эту неизвестную величину, содержащее ее уравнение чаще всего необходимо подвергать различным преобразованиям, пока оно не примет возможно более простого для него вида и не станет сходным с одной из нижеследующих формул, в которых, как вы видите, члены расположены по измерениям обозначающей неизвестную буквы x. Буквы p, q, r, s обозначают здесь другие, определенные и известные величины, по которым определяется и может быть найдена при помощи изложенных далее методов величина x

$x=p$	или	$x-p=0$
$x^2=px+q$		$x^2-px-q=0$
$x^3=px^2+qx+r$		$x^3-px^2-qx-r=0$
$x^4=px^3+qx^2+rx+s$		$x^4-px^3-qx^2-rx-s=0$
и т. д.		и т. д.

Члены уравнений следует располагать по этому образцу по изменениям неизвестной. На первом месте ставятся члены с высшим измерением неизвестной, т. е. x, x^2, x^3, x^4 и т. д., на втором — члены со следующим высшим измерением, т. е. p, px, px^2, px^3 и т. д. Знаки членов могут располагаться как угодно; некоторые из промежуточных членов могут иногда отсутствовать. Например, $x^3 * - b^2x + b^3 = 0$, или $x^3 = b^2x - b^3$, есть уравнение третьей степени; $z^4 \begin{array}{c|} +a \\ -b \end{array} z^3 * \begin{array}{c} +ab^3 \\ -b^4 \end{array} = 0$ — уравнение четвертой степени, ибо степень уравнения всегда оценивается по высшему измерению неизвестной, без учета известных величин, а также промежуточных членов.[32] Однако при отсутствии промежуточных членов уравнение весьма часто становится значительно проще, а иногда степень его может быть при этом понижена. Например, уравнение $x^4 = qx^2 + s$ можно рассматривать как уравнение второй степени, ибо оно может быть разложено на два уравнения второй степени. В самом деле, если положить $x^2 = y$ и соответственно подставить в уравнение y, вместо x^2, то, вместо данного, получится уравнение второй степени: $y^2 = qy + s$. После того как при помощи последнего уравнения будет найдено значение y, другое уравнение $x^2 = y$, также второй степени, даст x.

Таковы заключения, к которым надлежит приводить задачи. Однако, прежде чем я перейду к их решению, необходимо изложить методы преобразования уравнений, их приведения, а также методы получения из промежуточных уравнений уравнений окончательных. В нижеследующих правилах я сообщу способы приведения одного уравнения.

О ПРИВЕДЕНИИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Первое правило. Если в уравнении имеются взаимно уничтожающиеся величины или величины, которые можно объединить посредством сложения или вычитания, то число членов следует, таким образом, уменьшить.

Допустим, например, что у вас $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$. Отбросьте с обеих сторон $2x$ и прибавьте $3a$, получится $5b = 8a + x$. Далее, уравнение $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$, если отбросить равносильные величины $\frac{2ab}{a} - b = b$, принимает вид $bx = a^2$.

К этому правилу можно также отнести приведение членов уравнения, которое обыкновенно производится путем переноса членов с одной стороны на другую с противоположным знаком.

Например, чтобы найти x из уравнения $5b = 8a + x$, отнимите от обеих сторон $8a$, или, что то же самое, перенесите $8a$ с обратным знаком на другую сторону, что даст $5b - 8a = x$. Точно так же, чтобы найти y из уравнения $a^2 - 3ay = ab - b^2 + by$, перенесите $-3ay$ и $ab - b^2$ так, чтобы все члены, содержащие y, оказались на одной стороне, а прочие—на другой; при этом получится $a^2 - ab + b^2 = 3ay + by$. Вы получите отсюда y по приведенному далее пятому правилу, т. е. разделив обе стороны уравнения на $3a + b$, ибо тогда получится $\frac{a^2 - ab + b^2}{3a + b} = y$. Далее уравнение

$$abx + a^3 - a^2x = ab^2 - 2abx - x^3$$

после приведения и перестановки примет вид

$$x^3 = (a^2 - 3ab)\,x - a^3 + ab^2,$$

или

$$x^3 - (a^2 - 3ab)\,x + a^3 - ab^2 = 0.$$

Второе правило. Если все члены уравнения умножены на одну и ту же величину, то все их следует разделить на эту величину; а если они все разделены на одну и ту же величину, то все их следует помножить на эту величину.

Например, имея $15b^2 = 24ab + 3bx$, разделите все члены на b и вы получите $15b = 24a + 3x$; затем разделите на 3 и вы получите $5b = 8a + x$. Или же, имея $\frac{b^3}{ac} - \frac{b^2x}{c^2} = \frac{x^2}{c}$, умножьте все на c и получится $\frac{b^3}{a} - \frac{b^2x}{c} = x^2$.

Третье правило. Если в уравнении имеется неприводимая дробь, знаменатель которой содержит букву, по измерениям которой должно быть расположено уравнение, то все члены уравнения следует помножить на этот знаменатель или на какой-либо его делитель.

Так, если уравнение $\frac{ax}{a-x} + b = x$ нужно расположить по измерениям буквы x, то умножьте все его члены на $a - x$, знаменатель дроби $\frac{ax}{a-x}$, ибо видно, что в этом знаменателе находится x. Получится при этом $ax + ab - bx = ax - x^2$, или $ab - bx = -x^2$, а если переставить стороны, то $x^2 = bx - ab$. Если у вас

$$\frac{a^3 - ab^2}{2cy - c^2} = y - c$$

и члены нужно расположить по измерениям y, то, чтобы избавиться от y в знаменателе, умножьте все члены на знаменатель $2cy - c^2$ или по крайней мере на его делитель $2y - c$; получится

$$\frac{a^3 - ab^2}{c} = 2y^2 - 3cy + c^2$$

и после дальнейшего приведения

$$\frac{a^3 - ab^2}{c} - c^2 + 3cy = 2y^2.$$

Аналогично, $\frac{a^2}{x} - a = x$ по умножении всего на x преобразуется в $a^2 - ax = x^2$, а

$$\frac{a^2b^2}{cx^2} = \frac{x^2}{a+b-x},$$

будучи умножено сперва на x^2, а затем на $a+b-x$, преобразуется в

$$\frac{a^3b^2 + a^2b^3 - a^2b^2x}{c} = x^4.$$

Четвертое правило. Если та буква, по измерениям которой должно быть расположено уравнение, входит под неприводимым радикалом, то все остальные члены следует перенести с обратными знаками на другую сторону, а затем, в случае квадратного корня, умножить обе стороны уравнения самих на себя один раз, в случае кубического корня, умножить их самих на себя дважды и т. д.

Например, чтобы расположить уравнение $\sqrt{a^2 - ax} + a = x$ по измерениям буквы x, перенесите a на другую сторону, что даст $\sqrt{a^2 - ax} = x - a$. Возведя обе стороны в квадрат, вы получите $a^2 - ax = x^2 - 2ax + a^2$, или $0 = x^2 - ax$, т. е. $x = a$.[33] Допустим еще, что $\sqrt[3]{a^2x + 2ax^2 - x^3} - a + x = 0$. Если перенести $-a + x$, уравнение примет вид $\sqrt[3]{a^2x + 2ax^2 - x^3} = a - x$. Возведя обе стороны в куб, вы получите $a^2x + 2ax^2 - x^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$, или $x^2 = 4ax - a^2$.

Пусть, далее, $y = \sqrt{ay + y^2 - a\sqrt{ay - y^2}}$. Если возвести обе стороны в квадрат, то $y^2 = ay + y^2 - a\sqrt{ay - y^2}$. Если перенести надлежащим образом члены, то уравнение примет вид $ay = a\sqrt{ay - y^2}$, или $y = \sqrt{ay - y^2}$. Возведя обе стороны снова в квадрат, вы получите $y^2 = ay - y^2$, а после перестановки: $2y^2 = ay$, или $2y = a$.

Пятое правило. Если после приведения уравнения при помощи предыдущих правил и расположения его по измерениям одной из букв высшее измерение этой буквы окажется умноженным на некоторую известную величину, то все уравнение следует разделить на эту величину.

Так, $2y = a$ при делении на 2 примет вид $y = \frac{a}{2}$; $\frac{bx}{a} = a$ при делении на $\frac{b}{a}$ примет вид $x = \frac{a^2}{b}$. Далее,

$$(2ac - c^2)x^3 + (a^3 + a^2c)x^2 - (2a^3c - a^2c^2)x - a^3c^2 = 0$$

при делении на $2ac - c^2$ примет вид

$$x^3 + \frac{(a^3 + a^2c)x^2 - (2a^3c - a^2c^2)x - a^3c^2}{2ac - c^2} = 0,$$

или

$$x^3 + \frac{a^3 + a^2c}{2ac - c^2}x^2 - a^2x - \frac{a^3c}{2a - c} = 0.$$

Шестое правило. Иногда приведение можно осуществить, разделив уравнение на некоторую составную величину.

Например, уравнение

$$y^3 = (b - 2c)y^2 + 3bcy - b^2c$$

можно привести к $y^2 = -2cy + bc$, если сперва перенести все члены в одну сторону

$$y^3 + (2c - b)y^2 - 3bcy + b^2c = 0,$$

а затем разделить на $y - b$, как было показано в главе о делении, что даст $y^2 + 2cy - bc = 0$. Однако находить такие делители трудно; мы этим уже занимались.[34]

Седьмое правило. Иногда уравнение можно привести посредством извлечения из обеих сторон корня.

Пусть у вас $x^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$. Извлекая из обеих сторон квадратный корень, вы получите $x = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Если $x^2 + a^2 = 2ax + b^2$, то перенесите $2ax$. Уравнение при этом примет вид $x^2 - 2ax + a^2 = b^2$, и если из обеих сторон извлечь квадратный корень, то получится $x - a = +b$, или $-b$, или же $x = a \pm b$.

Если вам дано $x^2 = ax - b^2$, то прибавьте с каждой стороны $-ax + \frac{1}{4}a^2$, и уравнение примет вид $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$. Извлекая из обеих сторон квадратный корень, вы получите

$$x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2},$$

или

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

Вообще, если у вас $x^2 = \cdot px \cdot q$, то

$$x = \cdot \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} \cdot q},$$ [35]

где $\frac{p}{2}$ и q имеют те же знаки, что в первоначальном уравнении, но $\frac{p^2}{4}$ всегда должно быть положительным. Этот пример содержит правило, по которому все уравнения второй степени можно приводить к простым. Если, например, дано уравнение

$$y^2 = \frac{2x^2y}{a} + x^2$$

и требуется извлечь корень y, то нужно сравнить $\frac{2x^2}{a}$ с p и x^2 с q, т. е. написать $\frac{x^2}{a}$ вместо $\frac{p}{2}$ и $\frac{x^4}{a^2} + x^2$ вместо $\frac{1}{4}p^2 \cdot q$. При этом получится, что

$$y = \frac{x^2}{a} + \sqrt{\frac{x^4}{a^2} + x^2},$$

или

$$y = \frac{x^2}{a} - \sqrt{\frac{x^4}{a^2} + x^2}.$$

Точно так же уравнение

$$y^2 = ay - 2cy + a^2 - c^2,$$

если сравнить $a - 2c$ с p и $a^2 - c^2$ с q, даст

$$y = \frac{1}{2} a - c \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4} - ac.}$$

Биквадратное уравнение

$$x^4 = - a^2x^2 + ab^3,$$

в котором отсутствуют нечетные члены, по этому правилу приводится к уравнению

$$x^2 = - \frac{1}{2} a^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^4 + ab^3}.$$

Если вновь извлечь корень, то получается, что

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2} a^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^4 + ab^3}};$$

и т. д.

Таковы правила приведения одного уравнения. Если аналист достаточно ознакомится с их употреблением и будет знать, как расположить данное ему уравнение по одной из его букв и как найти значение этой буквы, если она входит лишь в одном измерении, или же значение ее высшей степени, если она входит в нескольких степенях, — если он сделает это, то для него не трудным окажется и сравнение между собой нескольких уравнений. Я покажу теперь, как производить это сравнение.

О ПРИВЕДЕНИИ ДВУХ ИЛИ БОЛЬШЕГО ЧИСЛА УРАВНЕНИЙ К ОДНОМУ С ЦЕЛЬЮ ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ВЕЛИЧИН

Если при решении задачи получается несколько выражающих состояние вопроса уравнений, каждое из которых содержит несколько неизвестных величин, то эти уравнения следует сравнивать между собой (попарно, если их более двух) и получать новые уравнения так, чтобы при каждом действии можно было исключить одну из неизвестных величин. Если, например, даны уравнения $2x=y+5$ и $x=y+2$, то, отнимая равные вещи от равных, мы получим, что $x=3$. Знайте же, что при помощи каждого уравнения можно исключить одну неизвестную величину, и, следовательно, если уравнений столько же, сколько неизвестных, то все уравнения могут быть в конце концов приведены к одному уравнению, в котором будет только одна неизвестная величина. Но если неизвестных будет на одну более, чем уравнений, то в последнем результирующем уравнении останутся две неизвестные; а если неизвестных более, чем уравнений, на две, то в последнем результирующем уравнении неизвестных останется три и т. д.

Иногда можно исключить две или большее число неизвестных при помощи только двух уравнений. Пусть, например, $ax-by=ab-az$ и $bx+by=b^2+az$. Сложив равные с равными, вы получите, что $ax+bx=ab+b^2$, где исключены две неизвестные y и z. Но подобные случаи свидетельствуют либо о скрытом дефекте в постановке вопроса, либо об ошибочности или недостаточной искусности вычислений. Метод исключения одной неизвестной при помощи каждого уравнения будет ясен из нижеследующего.

ИСКЛЮЧЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПУТЕМ СРАВНЕНИЯ ЕЕ ЗНАЧЕНИЙ

Если исключаемая величина входит в оба уравнения только в одном измерении, следует найти оба ее значения по уже изложенным правилам, а затем приравнять эти значения друг другу.

Допустим, что даны два уравнения $a+x=b+y$ и $2x+y=3b$ и нужно исключить y. Первое уравнение даст $a+x-b=y$, а второе $3b-2x=y$. Следовательно, $a+x-b=$ $=3b-2x$, или, по должном приведении, $x=\frac{4b-a}{3}$. Далее, $2x=y$ и $5+x=y$ дают $2x=5+x$, или $x=5$. Далее, $ax-2by=ab$ и $xy=b^2$ дают $\frac{ax-ab}{2b}(=y)=\frac{b^2}{x}$, или по должном приведении членов, $x^2-bx-\frac{2b^3}{a}=0$.

Точно так же $\frac{b^2x-aby}{a}=ab+xy$ и $bx+\frac{ay^2}{c}=2a^2$ при исключении x дают $\frac{a^2b+aby}{b^2-ay}(=x)=\frac{2a^2c-ay^2}{bc}$ и, после приведения,

$$y^3-\frac{b^2}{a}y^2-\frac{2a^2c+b^2c}{a}y+b^2c=0.$$

Наконец, $x+y-z=0$ и $ay=xz$ при исключении z дают $x+y(=z)=\frac{ay}{x}$, или $x^2+xy=ay$.

То же самое можно получить, вычитая одно значение неизвестной величины из другого и приравнивая остаток нулю. Так, если в первом примере вычесть $3b-2x$ из $a+x-b$, то останется $a+3x-4b=0$, или $x=\frac{4b-a}{3}$.

ИСКЛЮЧЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПУТЕМ ПОДСТАНОВКИ ЕЕ ЗНАЧЕНИЙ

Если исключаемая неизвестная величина входит хотя бы в одно уравнение лишь в первом измерении, то из этого уравнения следует выразить значение неизвестной и подставить его, вместо этой неизвестной, в другое уравнение. Пусть, например даны $xy^2=b^3$ и $x^2+y^2=by-ax$. Первое уравнение при исключении x даст, что $\frac{b^3}{y^2}=x$; я подставляю затем это значение, вместо x, во второе уравнение, получаю

$$\frac{b^6}{y^4}+y^2=by-\frac{ab^3}{y^2}$$

и после приведения

$$y^6-by^5+ab^3y^2+b^6=0.$$

Если $ay^2+a^2y=z^3$ и $yz-ay=az$, то, чтобы исключить y, нужно выразить его значение из второго уравнения, которое даст $y=\frac{az}{z-a}$. Поэтому я подставляю, вместо y, в первое уравнение $\frac{az}{z-a}$, получаю

$$\frac{a^3z^2}{(z-a)^2}+\frac{a^3z}{z-a}=z^3$$

и после приведения

$$z^4-2az^3+a^2z^2-2a^3z+a^4=0.$$

Аналогично, если $\frac{xy}{c}=z$ и $cy+zx=c^2$, то, чтобы исключить z, я подставляю, вместо z, во второе уравнение $\frac{xy}{c}$, что даст

$$cy+\frac{x^2y}{c}=c^2.$$

Человек, приобретший в подобных вычислениях навык, часто найдет более скорые приемы для исключения неизвестной. Допустим, что даны уравнения $ax=\frac{b^2x-b^3}{z}$ и $x=\frac{az}{x-b}$. Если равные умножить на равные, то получатся равные, т. е. $ax^2=ab^2$, или $x=b$.

Я, однако, предоставлю подобные частные случаи разобрать, если понадобится, самим учащимся.[36]

ИСКЛЮЧЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ВХОДЯЩЕЙ В КАЖДОЕ УРАВНЕНИЕ В НЕСКОЛЬКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Если исключаемая величина входит в оба уравнения более чем в одном измерении, следует найти из каждого уравнения значение ее высшей степени; а если уравнения — различных степеней, то уравнение с низшей степенью нужно помножить на исключаемую неизвестную или на ее квадрат, или на куб и т. д., так, чтобы оно приобрело ту же степень, что и другое уравнение. Затем следует приравнять между собой значения этих степеней. При этом получится новое уравнение, в котором высшая степень, или измерение, исключаемой неизвестной уменьшилось. Повторяя это действие, вы в конце концов исключите неизвестную.[37]

Если, например, $x^2+5x=3y^2$ и $2xy=3x^2+4$ и нужно исключить x, то первое уравнение даст $x^2=3y^2-5x$, а второе $\frac{2xy-4}{3}=x^2$. Я полагаю $3y^2-5x=\frac{2xy-4}{3}$, после чего x приводится лишь к одному измерению; теперь его можно исключить по правилам, изложенным ранее. Действительно, после должного приведения последнего уравнения получится $9y^2-15x=2xy-4$, или $x=\frac{9y^2+4}{2y+15}$. Я подставляю это значение x в одно из данных уравнений (например, в $x^2+5x=3y^2$) и получаю

$$\frac{81y^4+72y^2+16}{4y^2+60y+225}+\frac{45y^2+20}{2y+15}=3y^2.$$

Чтобы привести это уравнение, я умножаю на $4y^2+60y+225$ и получаю

$$81y^4+72y^2+16+90y^3+40y+675y^2+300=$$
$$=12y^4+180y^3+675y^2,$$

или

$$69y^4-90y^3+72y^2+40y+316=0.$$

Допустим еще, что вам даны $y^3=xy^2+3x$ и $y^2=x^2-xy-3$. Чтобы исключить y, я умножаю второе уравнение на y, после чего получится $y^3=x^2y-xy^2-3y$, где число измерений то же, что в первом уравнении. Приравнивая между собой значения y^3, я имею $xy^2+3x=x^2y-xy^2-3y$, где y входит в пониженном, втором, измерении. С помощью этого нового уравнения и более простого из двух первых $y^2=x^2-xy-3$ можно, пользуясь тем же приемом, что в предыдущем примере, полностью исключить y.

Имеются и другие, притом часто более короткие способы исключения. Допустим, что вы хотите из уравнений

$$y^2=\frac{2x^2y}{a}+x^2 \qquad \text{и} \qquad y^2=2xy+\frac{x^4}{a^2}$$

исключить y. Извлеките из каждого уравнения корень y, как было показано в правиле VII; получится

$$y=\frac{x^2}{a}+\sqrt{\frac{x^4}{a^2}+x^2} \qquad \text{и} \qquad y=x+\sqrt{x^2+\frac{x^4}{a^2}}.$$

Приравняв эти два значения y, вы получите

$$\frac{x^2}{a}+\sqrt{\frac{x^4}{a^2}+x^2}=x+\sqrt{x^2+\frac{x^4}{a^2}};$$

если отбросить с обеих сторон равные величины $\sqrt{x^2+\frac{x^4}{a^2}}$, то останется $\frac{x^2}{a}=x$, или $x^2=ax$, и $x=a$.

Чтобы исключить x из уравнений

$$x+y+\frac{y^2}{x}=20$$

и

$$x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}=140,$$

вычтите из обеих сторон первого уравнения y, что даст

$$x+\frac{y^2}{x}=20-y$$

и по возведении в квадрат

$$x^2+2y^2+\frac{y^4}{x^2}=400-40y+y^2.$$

Если отбросить с обеих сторон y^2, то останется

$$x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}=400-40y.$$

Так как $400-40y$ и 140 равны одним и тем же величинам, то $400-40y$ равно 140, или $y=6\frac{1}{2}$. Вы можете сократить вычисления таким образом для большинства уравнений.

Когда исключаемая величина имеет несколько измерений, требуемые для ее исключения из уравнений выкладки бывают иногда весьма утомительны. В этом случае труд значительно облегчается, если воспользоваться правилами, содержащимися в следующих примерах.

Первое правило. При исключении x из $ax^2+bx+c=0$ и $fx^2+gx+h=0$ получится

$$(ah-bg-2cf)\,ah+(bh-cg)\,bf+(ag^2+cf^2)\,c=0.$$

Второе правило. При исключении x из $ax^3+bx^2+cx+d=0$ и $fx^2+gx+h=0$ получится

$$(ah-bg-2cf)\,ah^2+(bh-cg-2df)\,bfh+(ch-dg)(ag^2+cf^2)+(3agh+bg^2+df^2)\,df=0.$$

Третье правило. При исключении x из $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ и $fx^2+gx+h=0$ получится

$$(ah-bg-2cf)\,ah^3+(bh-cg-2df)\,bfh^2+(ag^2+cf^2)(ch^2-dgh+eg^2-2efh)+(3agh+bg^2+df^2)dfh+(2ah^2+3bgh-dfg+ef^2)\,ef^2+(-bg-2ah)\,efg^2=0.$$

Четвертое правило. При исключении x из $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ и $fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$ получится

$$(ah - bg - 2cf)(adh^2 - achk) + (ak + bh - cg - 2df)\,bdfh + \\ + (-ak + bh + 2cg + 3df)\,a^2k^2 + \\ + (cdh - d^2g - c^2k + 2bdk)(ag^2 + cf^2) + \\ + (3agh + bg^2 + df^2 - 3afk)\,d^2f + (-3ak - bh + cg + df)\,bcfk + \\ + (bk - 2dg)\,b^2fk + (-b^2k - 3adh - cdf)\,agk = 0.$$

Например, чтобы исключить x из уравнений $x^2 + 5x - 3y^2 = 0$ и $3x^2 - 2xy + 4 = 0$, я соответственно подставляю в первом правиле, вместо a, b, c; f, g, h, величины $1, 5, -3y^2$; $3, -2y, 4$. При должном соблюдении знаков $+$ и $-$ получится

$$(4 + 10y + 18y^2) \times 4 + (20 - 6y^3) \times 15 + (4y^2 - 27y^2) \times (-3y^2) = 0,$$

или

$$16 + 40y + 72y^2 + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0.$$

Аналогично, чтобы исключить y из уравнений $y^3 - xy^2 - 3x = 0$ и $y^2 + xy - x^2 + 3 = 0$, я подставляю во втором правиле, вместо a, b, c, d; f, g, h, x, соответственные величины 1, $-x$, 0, $-3x$; $1, x, -x^2 + 3, y$ и получаю

$$(-x^2 + 3 + x^2)(x^4 - 6x^2 + 9) + (x^3 - 3x + 6x)(x^3 - 3x) + \\ + 3x^2 \times x^2 + (-3x^3 + 9x - 3x - x^3)(-3x) = 0.$$

Если отбросить лишние величины и произвести умножения, то вы получите

$$3x^4 - 18x^2 + 27 + x^6 - 9x^2 + 3x^4 + 12x^4 - 18x^2 = 0$$

и после приведения

$$x^6 + 18x^4 - 45x^2 + 27 = 0.$$

До сих пор мы говорили об исключении одной неизвестной величины из двух уравнений. Исключение нескольких неизвестных из нескольких уравнений производится постепенно.

Например, если вы хотите найти из уравнений $ax=yz$, $x+y=z$ и $5x=y+3z$ величину y, то начните с исключения одной из двух неизвестных x или z, допустим x. Для этого подставьте ее значение из первого уравнения $\frac{yz}{a}$ во второе и третье, что даст вам $\frac{yz}{a}+y=z$ и $\frac{5yz}{a}=y+3z$. Затем исключите из этих двух уравнений z, как это делалось ранее.

О МЕТОДЕ ИСКЛЮЧЕНИЯ ИЗ УРАВНЕНИЙ ЛЮБОГО ЧИСЛА РАДИКАЛОВ[38]

Здесь можно упомянуть о методе исключения иррациональных величин посредством приравнивания их каким-либо буквам. Если, например, вам дано уравнение

$$\sqrt{ay}-\sqrt{a^2-ay}=2a+\sqrt[3]{ay^2}$$

и вы положите $t=\sqrt{ay}$, $v=\sqrt{a^2-ay}$ и $x=\sqrt[3]{axy^2}$, то получите уравнения $t-v=2a+x$, $t^2=ay$, $v^2=a^2-ay$ и $x^3=ay^2$. Если из этих уравнений последовательно исключить t, v и x, то получится уравнение, совершенно свободное от иррациональностей.

О ПРИВЕДЕНИИ ВОПРОСА К УРАВНЕНИЮ

После того как учащийся несколько поупражнялся в преобразовании и приведении уравнений, ему следует испытать свое искусство в приведении вопросов к уравнению. Когда ставится какой-либо вопрос, искусство учащегося особенно требуется для того, чтобы выразить все условия вопроса посредством такого же числа уравнений. Для этого необходимо прежде всего выяснить, можно ли выразить все те предложения, в которых сформулирован вопрос, при помощи алгебраических членов, подобно тому как мы изображаем наши понятия при помощи латинских или греческих букв. Если это возможно (как бывает, когда вопрос относится к числам или отвлеченным величинам), то учащийся должен дать наименования нужным в вопросе известным и неизвестным величинам и выразить смысл вопроса, так сказать, на языке анализа. Переведенные таким образом на язык алгебраических членов условия дадут столько уравнений, сколько их требуется для решения.[39]

Допустим, например, что требуется найти три образующих непрерывную пропорцию числа, сумма которых есть 20, а сумма квадратов 140. Если назвать эти три искомых числа x, y, z, то вопрос будет переведен с обыкновенного языка на язык символических выражений следующим образом:

Вопрос, изложенный словесно	То же в символах
Ищутся три числа	$x,\ y,\ z$?
подчиненные следующим условиям:	
они образуют непрерывную пропорцию .	$x:y=y:z$, или $xz=y^2$
их сумма есть 20	$x+y+z=20$
а сумма их квадратов есть 140	$x^2+y^2+z^2=140$

Таким образом, вопрос сводится к уравнениям $xz=y^2$, $x+y+z=20$, $x^2+y^2+z^2=140$. При помощи этих уравнений и ранее изложенных правил следует найти значения x, y и z.

Заметьте, что решения вопросов (по большей части) тем быстрее и искуснее, чем меньше вы вводите неизвестных величин. Например, если в предложенном вопросе взять первую неизвестную равной x, а вторую равной y, то третьей пропорциональной будет $\frac{y^2}{x}$. Приняв ее за третье число, я выражаю вопрос при помощи уравнений следующим образом:

Вопрос, изложенный словесно	Символически
Ищутся три числа, образующие непрерывную пропорцию	$x,\ y,\ \frac{y^2}{x}$?
сумма которых есть 20	$x+y+\frac{y^2}{x}=20$
а сумма квадратов 140	$x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}=140$

Вы получите, таким образом, уравнения

$$x + y + \frac{y^2}{x} = 20$$

и

$$x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140,$$

посредством приведения которых можно определить x и y.

Возьмите другой пример. Некий торговец каждый год увеличивает на одну треть свое состояние, уменьшенное на сто фунтов, которые ежегодно затрачивает на свою семью. Через три года он обнаруживает, что его состояние удвоилось. Спрашивается, сколько у него было денег вначале. Чтобы решить вопрос, заметьте, что в нем содержатся в скрытом виде некоторые предложения, которые все должны быть выявлены и выражены.

Словесно	Алгебраически
У торговца имеется состояние...	x
из которого он в первый год затрачивает 100 фунтов	$x - 100$
Остаток он увеличивает на одну треть	$x - 100 + \frac{x - 100}{3}$, или $\frac{4x - 400}{3}$
Во второй год он опять тратит 100 фунтов	$\frac{4x - 400}{3} - 100$, или $\frac{4x - 700}{3}$
и остаток увеличивает на одну треть	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$, или $\frac{16x - 2800}{9}$
В третий год он опять тратит 100 фунтов	$\frac{16x - 2800}{9} - 100$, или $\frac{16x - 3700}{9}$
и остаток также увеличивает на одну треть	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$, или $\frac{64x - 14\,800}{27}$
причем оказывается вдвое богаче, чем был вначале	$\frac{64x - 14\,800}{27} = 2x$

Таким образом, вопрос выражается уравнением $\frac{64x-14800}{27}=2x$, приведя которое вы найдете x. Умножьте уравнение на 27 и вы получите $64x-14\,800=54x$; вычтите из обеих сторон $54x$ и останется $10x-14\,800=0$, или $10x=14\,800$; разделив на 10, вы найдете, что $x=1480$. Таким образом, состояние торговца вначале, а также его последующая прибыль или доход были равны 1480 ф.

Вы видите, что для решения вопросов, относящихся лишь к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно только перевести задачу с латинского или иного языка на язык алгебры, т. е. выразить ее при помощи знаков, пригодных для изображения наших понятий об отношениях величин. Иногда может показаться, что слова, выражающие содержание вопроса, не могут быть переведены на язык алгебры; но это бывает легко сделать, произведя небольшие изменения, а также придерживаясь более смысла слов, чем их буквы. В языках различных народов также имеются свои особые выражения, идиомы, и если они встречаются, то переводить их на другой язык нужно не буквально, но по смыслу. Для иллюстрации такого рода задач и ознакомления со способом приведения их к уравнениям, а также учитывая, что искусства гораздо легче изучать при помощи примеров, чем при помощи предписаний, я считаю нужным привести здесь решения следующих задач.

Задача I

Даны сумма двух чисел a и разность их квадратов b; найти числа.

Допустим, что x есть меньшее число, другое будет $a-x$. Квадраты их будут соответственно x^2 и $a^2-2ax+x^2$. Разность этих квадратов a^2-2ax, по предположению, есть b. Следовательно, $a^2-2ax=b$ и, после приведения, $a^2-b=2ax$, или $\frac{a^2-b}{2a}\left(=\frac{a}{2}-\frac{b}{2a}\right)=x$.

Например, если сумма чисел, или a, есть 8, а разность квадратов b есть 16, то $\frac{1}{2}a - \frac{b}{2a}$ $(=4-1)$ будет $=3=x$ и $a-x=5$. Поэтому искомые числа суть 3 и 5.

Задача II

Найти три величины x, y и z по данным суммам их любых пар.

Допустим, что сумма двух величин x и y есть a, сумма x и z есть b, а сумма y и z есть c. Таким образом, для определения трех величин x, y и z имеются три уравнения $x+y=a$, $x+z=b$, $y+z=c$. Чтобы исключить из трех неизвестных две, например y и z, вычтите x из обеих сторон первого и второго уравнения. Вы получите $y=a-x$ и $z=b-x$. Подставьте эти значения y и z в третье уравнение $y+z=c$, это даст $a-x+b-x=c$. Приведя это уравнение, вы получите $x=\frac{a+b-c}{2}$. После того как x найдено, уравнения $y=a-x$ и $z=b-x$ дадут значения y и z.

Пример. Сумма y и x есть 9, сумма x и z есть 10, а сумма y и z есть 13. Напишите в значениях x, y и z число 9 вместо a, 10 вместо b и 13 вместо c. Тогда $a+b-c=6$ и, значит, $x\left(=\frac{a+b-c}{2}\right)=3$, $y(=a-x)=6$ и $z(=b-x)=7$.

Задача III

Разделить данную величину на произвольное число частей так, чтобы бóльшие части превосходили наименьшую на данные разности.

Допустим, что величину a требуется разделить на четыре части и что x есть первая и наименьшая из частей, b избыток второй над первой, c избыток третьей и d избыток четвертой. Значит, вторая часть будет $x+b$, третья $x+c$, а четвертая $x+d$. Сумма всех этих частей $4x+b+c+d$ должна быть равна целой линии a. Вычтите из обеих сторон $b+c+d$, останется $4x=a-b-c-d$, или $x=\frac{a-b-c-d}{4}$.

Пример. Линию в 20 футов нужно разделить на четыре части так, чтобы избыток второй над первой был 2 фута, избыток третьей 3 фута и, наконец, избыток четвертой 7 футов. Эти четыре части будут: $x\left(=\frac{a-b-c-d}{4}\right.$, или $\left.\frac{20-2-3-7}{4}\right)=2$, $x+b=4$, $x+c=5$, $x+d=9$.

Таким же способом можно разделить при этих условиях величину на большее число частей.

Задача IV

Некто желает распределить между бедными деньги. Если бы у него было на восемь динариев больше, то он мог бы дать каждому по три, но он раздает лишь по два, и у него еще остается три. Сколько было бедных?

Допустим, что число бедных есть x. Чтобы раздать $3x$ динариев, недостает восьми динариев, значит этот человек имеет $3x-8$ динариев. Из этих денег он раздает $2x$ динариев, и значит, остаток после раздачи $x-8$ есть три динария. Следовательно, $x-8=3$, или $x=11$.

Задача V

Два почтальона A и B находятся друг от друга на расстоянии в 59 миль. Утром они отправляются друг другу навстречу. A проходит в два часа 7 миль, B — в три часа 8 миль, но B выходит часом позднее, чем A. Сколько миль пройдет A до встречи с B?

Обозначьте искомый путь x, тогда путь, который пройдет B, будет $59-x$. Так как A проходит 7 миль в два часа, то x миль он пройдет за $\frac{2x}{7}$ часов, ибо 7 миль : 2 часам $=$ $=x$ миль : $\frac{2x}{7}$ часам. Точно так же, так как B проходит 8 миль за 3 часа, то свой путь $59-x$ он пройдет за $\frac{177-3x}{8}$ часов. Далее, так как разность этих времен составляет 1 час, то чтобы их уравнять, прибавьте к меньшему, т. е. к $\frac{177-3x}{8}$, эту разность. Таким образом, вы получите уравнение $1+\frac{177-3x}{8}=\frac{2x}{7}$. После приведения вы найдете, что $x=35$. Действительно, если это уравнение умножить на 8, оно примет вид $185-3x=\frac{16x}{7}$. Умножив затем все на 7, вы получите $1295-21x=16x$, или $1295=37x$. Наконец, разделив на 37, вы найдете, что $x=35$. Таким образом, A должен пройти до встречи с B расстояние в 35 миль.

Та же задача в более общем виде. Даны скорости тел A и B, движущихся к одному месту, а также разность моментов времени и расстояние между местами отправления. Требуется определить место встречи.

Предположим скорость тела A такой, что оно проходит за время f пространство c, а скорость тела B такой, что оно проходит за время g пространство d; предположим также, что расстояние между отправными пунктами есть e, а разность моментов отправления h.

Первый случай. Пусть оба тела движутся в одном направлении и пусть A в начале движения находится дальше от места, к которому оба они стремятся. Обозначьте это расстояние x и вычтите его из расстояния e, тогда $x-e$ будет расстоянием B от места, к которому оно стремится. Так как A проходит пространство c за время f, то время, которое оно употребит, чтобы пройти x, будет $\frac{fx}{c}$, ибо пространство c относится ко времени f, как пространство x ко времени $\frac{fx}{c}$. А так как B проходит пространство d за время g, то пространство $x-e$ оно пройдет за время $\frac{gx-ge}{d}$. И так как разность этих времен положена равной h, то, чтобы уравнять их, прибавьте h к меньшему времени, т. е., если первым начинает двигаться B, то к $\frac{fx}{c}$. Это даст вам уравнение $\frac{fx}{c}+h=\frac{gx-ge}{d}$, из которого после приведения получится, что $\frac{cge+cdh}{cg-df}=x$. Если первым начинает двигаться A, то h нужно прибавить к $\frac{gx-ge}{d}$. Вы получите $\frac{fx}{c}=h+\frac{gx-ge}{d}$ и после приведения $\frac{cge-cdh}{cg-df}=x$.

Второй случай. Если движущиеся тела направляются друг другу навстречу и начальное расстояние тела A от места встречи, как и ранее, есть x, то начальное расстояние B от того же места будет $e-x$, время, употребляемое A на прохождение пространства x, будет $\frac{fx}{c}$, а время, употребляемое B для прохождения пространства $e-x$, будет $\frac{ge-gx}{d}$. Прибавьте к меньшему из этих времен, как и ранее, разность h. Другими словами, если первым начинает двигаться B, прибавьте h к $\frac{fx}{c}$; вы получите $\frac{fx}{c}+h=\frac{ge-gx}{d}$ и, после приведения, $\frac{cge-cdh}{cg+df}=x$. Если же первым начинает двигаться A, прибавьте h ко времени $\frac{ge-gx}{d}$, и ваше уравнение будет $\frac{fx}{c}=$ $=h+\frac{ge-gx}{d}$, что после приведения даст $\frac{cge+cdh}{cg+df}=x$.

Пример I. Допустим, что солнце каждый день проходит один градус, а луна—13 и что в некоторое время солнце находилось в начале созвездия Рака, а луна спустя три дня была в начале созвездия Овна. Спрашивается, где произойдет их первое соединение? Ответ: в $10\frac{3}{4}$ градусе созвездия Рака. Действительно, оба тела движутся в одном направлении, а так как движение луны нужно отсчитывать лишь после того, как солнце перемещалось уже в течение трех дней, и луна дальше от места соединения, чем солнце, то луну следует принять за A, а солнце за B, и длина пути, который пройдет луна, будет $\frac{cge + cdh}{cg - df}$. Если вы подставите сюда 13 вместо c, 1 вместо f, d и g, 90 вместо e и 3 вместо h, то получите $\frac{13\times1\times90+13\times1\times3}{13\times1-1\times1}$, т. е. $\frac{1209}{12}$, или $100\frac{3}{4}$ градуса. Отсчитайте эти сто и три четверти градуса от начала созвездия Овна и вы получите $10\frac{3}{4}$ градуса созвездия Рака.

Пример II. Допустим, что два почтальона A и B, находящиеся утром на расстоянии друг от друга в 59 миль, отправляются навстречу друг другу, что A проходит за 2 часа 7 миль, а B за 3 часа 8 миль и что B отправляется в путь часом позднее, чем A. Спрашивается, какое расстояние пройдет A до встречи с B? Ответ: 35 миль. Действительно, так как они идут навстречу друг другу и A выходит первым, то длина пути A будет $\frac{cge + cdh}{cg + df}$; написав здесь 7 вместо c, 2 вместо f, 8 вместо d, 3 вместо g, 59 вместо e и 1 вместо h, мы получим $\frac{7\times3\times59 + 7\times8\times1}{7\times3+8\times2}$, т. е. $\frac{1295}{37}$, или 35.[40]

Задача VI

Дана мощность некоторого действующего агента; определить, сколько таких действующих агентов произведет за данное время b данный эффект a.

Допустим, что мощность действующего агента такова, что за данное время d он может произвести эффект c. Время d относится ко времени b, как эффект c, который агент может произвести за время d, к эффекту, который он может произвести за время b и который поэтому будет равен $\frac{bc}{d}$. Далее, эффект одного агента $\frac{bc}{d}$ относится к эффекту их всех a, как этот отдельный агент ко всем агентам; потому число агентов будет $\frac{ad}{bc}$.[41]

Пример. Если писец может за 8 дней написать 15 листов, сколько понадобится писцов, чтобы написать 405 листов за 9 дней? Ответ: 24. В самом деле, если поставить 8 вместо d, 15 вместо c, 405 вместо a и 9 вместо b, то число $\frac{ad}{bc}$ будет $\frac{405\times 8}{9\times 15}$, т. е. $\frac{3240}{135}$, или 24.

Задача VII

Даны силы нескольких действующих агентов, определить время x, в которое все они вместе произведут данный эффект d.

Допустим, что силы агентов A, B, C таковы, что за времена e, f, g они производят соответственно эффекты a, b, c. За время x эти агенты произведут соответственно эффекты $\frac{ax}{e}$, $\frac{bx}{f}$, $\frac{cx}{g}$; значит, $\frac{ax}{e}+\frac{bx}{f}+\frac{cx}{g}=d$, откуда путем приведения мы получим $x=\dfrac{d}{\frac{a}{e}+\frac{b}{f}+\frac{c}{g}}$.

Пример. Трое рабочих могут выполнить некоторую работу, при этом A может выполнить ее один раз за 3 недели, B три раза за 8 недель, а C пять раз за 12 недель. Спрашивается, в какое время они смогут выполнить эту работу все вместе? Здесь силы агентов A, B, C производят за времена 3, 8, 12 соответственно эффекты 1, 3, 5 и требуется определить, в какое время соединенные их усилия произведут один эффект. Напишите поэтому вместо a, b, c; d; e, f, g числа 1, 3, 5; 1; 3, 8, 12. При этом получится, что время, за которое трое рабочих вместе произведут работу, $x=\dfrac{1}{\frac{1}{3}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}}$, или $\frac{8}{9}$ одной недели, т. е. 5 дней и 4 часа считая в неделе 6 рабочих дней и в каждом дне 12 часов).

Задача VIII

Даны различные смеси двух или большего числа веществ, и из них требуется составить новую смесь, в которой эти вещества находились бы в данных отношениях.

Допустим, что данное количество одной смеси есть $dA + eB + fC$, то же количество другой смеси $gA + hB + kC$ и то же количество третьей $lA + mB + nC$. Здесь A, B, C обозначают смешиваемые вещества, а d, e, f, g, h и т. д. доли, в которых эти вещества входят в каждую смесь. Допустим, что из трех смесей требуется составить новую смесь $pA + qB + rC$ и что числа, на которые нужно умножить соответственно три данные смеси, чтобы сумма их составила $pA + qB + rC$, суть x, y, z. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} dxA + exB + fxC \\ + gyA + hyB + kyC \\ + lzA + mzB + nzC \end{aligned}\right\} = pA + qB + rC.$$

Приравняем члены, полагая $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$ и $fx + ky + nz = r$. Путем приведения мы получим

$$x = \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - hy - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}.$$

Далее, из уравнений

$$\frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - hy - mz}{e}$$

и

$$\frac{q - hy - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}$$

мы путем приведения получим, что

$$\frac{ep - dq + dmz - elz}{eg - dh} (= y) = \frac{fg - er + enz - fmz}{fh - ek}.$$

Положим для краткости $\alpha = ep - dq$, $\beta = dm - el$, $\gamma = eg - dh$, $\delta = fq - er$, $\zeta = en - fm$ и $\theta = fh - ek$. Тогда

$$\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{\delta + \zeta z}{\theta}$$

и после приведения

$$z = \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta}.$$

Найдя z, положите

$$y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma}$$

и

$$x = \frac{p - gy - lz}{d}.$$

Пример. Даны три металлических сплава. Один фунт первого сплава содержит 12 унций серебра, 1 унцию меди и 3 унции олова. Фунт второго сплава содержит 1 унцию серебра, 12 унций меди и 3 унции олова. Фунт третьего сплава содержит 14 унций меди, 2 унции олова и вовсе не содержит серебра. Из этих трех сплавов нужно составить новый, фунт которого содержал бы 4 унции серебра, 9 унций меди и 3 унции олова. Напишите вместо d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r соответственно 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3. Тогда: $\alpha(= ep - dq = 1 \times 4 - 12 \times 9) = -104$, $\beta(= dm - el = 12 \times 14 - 1 \times 0) = 168$, $\gamma = -143$, $\delta = 24$, $\zeta = -40$ и $\theta = 33$. Поэтому

$$z\left(= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{-3432 + 3432}{5720 - 5544}\right) = 0,$$

$$y\left(= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-104 + 0}{-143}\right) = \frac{8}{11},$$

$$x\left(= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{4 - \frac{8}{11}}{12}\right) = \frac{3}{11}.$$

Значит, если взять $\frac{8}{11}$ фунта второго сплава и $\frac{3}{11}$ фунта первого, не беря ничего от третьего, то получится фунт сплава, содержащий четыре унции серебра, девять меди и три олова.

Задача IX

Известны цены нескольких смесей из одних и тех же веществ и пропорции смешанных веществ. Определить цену каждого из смешанных веществ.

Обозначим вещества A, B, C, и пусть цена смеси $dA + gB + lC$ будет p, цена смеси $eA + hB + mC$ будет q, а цена смеси $fA + kB + nC$ будет r. Требуется определить цены x, y, z веществ A, B и C. Поставьте вместо веществ A, B, C их цены x, y, z и вы получите уравнения $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$ и $fx + ky + nz = r$. Действуя так же, как в предыдущей задаче, вы также получите из этих уравнений, что

$$z = \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta}, \quad y = \frac{\alpha + \beta\zeta}{\gamma} \quad \text{и} \quad x = \frac{p - gy - lz}{d}.$$

Пример. Некто покупает 40 мер пшеницы, 24 ячменя и 20 овса за 15 фунтов 12 шиллингов. Затем он производит вторую закупку тех же сортов в 26 мер пшеницы, 30 мер ячменя и 50 овса за 16 фунтов. Наконец, он делает третью закупку тех же сортов в 24 меры пшеницы, 120 ячменя и 100 овса за 34 фунта. Спрашивается цена меры каждого рода зерновых. Ответ: мера пшеницы стоила ему 5 шиллингов, мера ячменя 3 шиллинга, а мера овса 2 шиллинга. В самом деле, подставьте вместо d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, r соответственно 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, 34 и вы получите:

$$\alpha\left(= ep - dq = 26 \times 15\tfrac{3}{5} - 40 \times 16\right) = -234\tfrac{2}{5},$$

$\beta\,(= dm - el = 40 \times 50 - 26 \times 20) = 1480$, $\gamma = -576$, $\delta = -500$,

$\zeta = 1400$ и $\theta = 2400$. Значит,

$$z\left(=\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta}=\frac{562\,560-288\,000}{-806\,400+3\,552\,000}=\frac{274\,560}{2\,745\,600}\right)=\frac{1}{10},$$

$$y\left(=\frac{\alpha+\beta z}{\gamma}=\frac{-234\frac{2}{5}+148}{-576}\right)=\frac{1}{20},$$

$$x\left(=\frac{p-gy-lz}{d}=\frac{15\frac{3}{5}-\frac{18}{5}-2}{40}\right)=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, мера пшеницы стоила $\frac{1}{4}$ фунта, или 5 шиллингов, мера ячменя $\frac{3}{20}$ фунта, или 3 шиллинга, и мера овса $\frac{1}{10}$ фунта, или 2 шиллинга.

Задача X

Даны удельные веса смеси и каждого из составляющих ее веществ; определить пропорцию, в которой участвуют смешиваемые вещества.

Допустим, что удельный вес смеси $A+B$ есть e; удельный вес A есть a, а удельный вес B есть b. Так как абсолютная тяжесть, или вес, тела равняется произведению из его объема на его удельный вес, то вес A есть aA, вес B есть bB и вес смеси $A+B$ есть $eA+eB$. Следовательно, $aA+bB=$ $=eA+eB$, откуда $aA-eA=eB-bB$, или $(e-b):(a-e)=$ $=A:B$.

Пример. Примем тяжесть, или удельный вес, золота за 19, серебра за $10\frac{1}{3}$, а короны царя Гиерона за 17. Тогда $10:3\,[(e-b):(a-e)=A:B)]=$ объем золота в короне: объем серебра, или же $190:31$ $\left[=19\times10:10\frac{1}{3}\times3=\right.$

$= a \times (e - b) : b \times (a - e)\Big]$ = вес золота в короне к весу серебра и $221 : 31$ = вес короны к весу серебра.

Задача XI

a быков поедают луг b за время c; d быков поедают пастбище e того же качества за время f; трава растет равномерно. Спрашивается, сколько быков съедят пастбище g того же качества за время h?

Если a быков за время c поедают пастбище b, то в силу пропорциональности пастбище e за то же время c съедят $\frac{ae}{b}$ быков, а за время f его съедят $\frac{ec}{bf}a$ быков, а за время h его съедят $\frac{ce}{bh}a$ быков — в предположении, что по истечении времени c трава расти перестанет. Но так как трава растет, то луг e за время f съедят d быков.

Значит, травы, которая выросла на лугу e за время $f - c$, оказалось бы достаточно, чтобы прокормить в течение времени f число быков $d - \frac{cea}{bf}$, т. е. чтобы прокормить в течение времени h число быков $\frac{df}{h} - \frac{ace}{bh}$. В силу пропорциональности, травы, которая выросла бы на этом лугу за время $h - c$, оказалось бы достаточно, чтобы прокормить в течение времени h число быков $\left(\frac{h-c}{f-c}\right)\left(\frac{df}{h} - \frac{ace}{bh}\right)$, или $\frac{bdfh - aceh - bdcf + aec^2}{bfh - bch}$.

Прибавьте это приращение к числу быков $\frac{ace}{bh}$ и получится $\frac{bdfh - aceh - bcdf + acef}{bfh - bch}$, что представляет собой число быков, достаточное, чтобы съесть за время h луг e. В силу пропорциональности луг g сможет за то же время прокормить $\frac{bdfgh - acegh - bcdgf + acefg}{befh - bceh}$ быков.

Пример. 12 быков съедают $3\frac{1}{3}$ югера [42] пастбища за 4 недели; 21 бык съедает 10 югеров такого же пастбища за

9 недель; сколько быков съедят траву на 24 югерах за 18 недель? Ответ: 36. Это число получится, если подставить в выражение $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$ вместо букв a, b, c, d, e, f, g и h соответственно числа 12, $3\frac{1}{3}$, 4, 21, 10, 9, 24 и 18. Быть может, решение получится не менее быстро, если провести его с самого начала в том же порядке, что и предыдущее буквенное решение. Именно, если 12 быков за 4 недели поедают $3\frac{1}{3}$ югера, то в силу пропорциональности 36 быков за 4 недели, либо 16 быков за 9 недель, либо 8 быков за 18 недель поедят 10 югеров травы, предполагая, что трава перестает расти. Но так как трава растет, то 21 бык за 9 недель съест лишь 10 югеров травы; значит, трава, которая выросла на 10 югерах за последующие 5 недель, сможет прокормить в течение 9 недель избыток 21 быка над 16 быками, или 5 быков, либо, что то же самое, $\frac{5}{2}$ быков в течение 18 недель. Прирост травы за 14 недель (избыток 18 над первыми 4) сможет аналогичным образом прокормить 7 быков в течение 18 недель, ибо 5 недель : 14 неделям $= \frac{5}{2}$ быков : : 7 быкам. Прибавьте поэтому этих 7 быков, которых сможет прокормить один лишь прирост травы, к 8, которых прокормила бы трава без прироста по истечении четырех первых недель; сумма будет 15 быков. Наконец, если 10 югеров могут прокормить 15 быков в течение 18 недель, то в силу пропорциональности 24 югера смогут прокормить за это же время 36 быков.

Задача XII

Даны величины и количества движения двух совершенно упругих шаров, которые движутся по одной прямой и соударяются. Определить их движения после отражения.

Решение этого вопроса зависит от следующих условий: каждое тело испытывает противодействие, равное действию, оказанному им на другое тело, и они удаляются друг от друга после отражения с той же скоростью или быстротой, с какой встретились перед ударом. Приняв это, допустим, что скорости тел A и B суть соответственно a и b; тогда их количества движения будут aA и bB (ибо количества движения тел равны произведениям их масс на их скорости). Допустим, что оба тела движутся в одном направлении и что A, двигаясь быстрее, следует за B. Положим уменьшение количества движения aA и приращение количества движения bB вследствие удара равным x. Тогда после отражения соответственные количества движения будут $aA - x$ и $bB + x$, а скорости $\frac{aA - x}{A}$ и $\frac{bB + x}{B}$. Разность этих скоростей должна быть равна разности скоростей до отражения, т. е. $a - b$. Таким образом, получается уравнение

$$\frac{bB + x}{B} - \frac{aA - x}{A} = a - b,$$

откуда после приведения

$$x = \frac{2aAB - 2bAB}{A + B}.$$

Если подставить это значение x в выражения скоростей $\frac{aA - x}{A}$ и $\frac{bB + x}{B}$, то скорость A после отражения будет $\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$, а скорость B будет $\frac{2aA - bA + bB}{A + B}$.

Если тела движутся друг другу навстречу, то нужно всюду переменить знак b и скорости A и B после отражения окажутся соответственно равными $\frac{aA - aB - 2bB}{A + B}$ и $\frac{2aA + bA - bB}{A + B}$. В случае, если какая-либо из этих скоростей получится отрицательной, то это значит, что движение после отражения будет происходить в направлении, противоположном тому, какое имело до отражения A. То же следует иметь в виду относительно движения A в предыдущем случае. [43]

Пример. Допустим, что однородные тела A, весом в 3 фунта, и B, весом в 9 фунтов, движутся в одном направлении, имея соответственно 8 степеней скорости и 2 степени скорости. Напишите в таком случае вместо A, a, B, b числа 3, 8, 9, 2, и $\frac{aA-aB+2bB}{A+B}$ будет -1, а $\frac{2aA-bA+bB}{A+B}$ будет 5. Таким образом, после отражения A пойдет в обратном направлении с одной степенью скорости, а B будет продолжать движение с 5 степенями скорости.

Задача XIII

Найти три составляющих непрерывную пропорцию числа, у которых сумма равна 20, а сумма квадратов 140.

Положите первое из этих чисел равным x, а второе y тогда третье будет $\frac{y^2}{x}$. Поэтому

$$x+y+\frac{y^2}{x}=20 \quad \text{и} \quad x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}=140.$$

После приведения первое уравнение примет вид

$$x^2+(y-20)x+y^2=0,$$

а второе

$$x^4+(y^2-140)x^2+y^4=0.$$

Для исключения x подставьте в третье правило вместо a, b, c, d, e, f, g, h соответственно $1, 0$, y^2-140, 0, y^4; 1, $y-20$ и y^2. При этом получится

$$(-y^2+280)y^6+(2y^2-40y+260)\times(260y^4-40y^5)+$$
$$+3y^4\times y^4+(-2y^2)\times(y^6-40y^5+400y^4)=0$$

и после перемножения,

$$1\,600y^6-20\,800y^5-67\,600y^4=0.$$

Приведение затем даст

$$4y^2 - 52y + 169 = 0,$$

а извлечение корня

$$2y - 13 = 0,$$

или $y = 6\frac{1}{2}$. То же самое мы нашли более коротко ранее, применив другой прием, который, однако, не столь общий, как настоящий. [44] Наконец, чтобы найти x, подставьте в уравнение

$$x^2 + (y - 20)x + y^2 = 0$$

вместо y число $6\frac{1}{2}$. Вы получите

$$x^2 - 13\frac{1}{2}x + 42\frac{1}{4} = 0,$$

или

$$x^2 = 13\frac{1}{2}x - 42\frac{1}{4},$$

откуда, извлекая корень, найдете, что

$$x = 6\frac{3}{4} \pm \sqrt{3\frac{5}{16}}.$$

Таким образом, бо̀льшим из трех искомых чисел является $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$, а меньшим $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$. Дело в том, что x обозначает одинаково любое из двух крайних чисел: отсюда и получаются для x два значения; и если одно из этих значений принять за x, то другое будет $\frac{y^2}{x}$.

Решение той же задачи другим способом. Предположив, как и ранее, что искомые числа суть x, y и $\frac{y^2}{x}$, вы получите

$$x + y + \frac{y^2}{x} = 20,$$

или

$$x^2 = (20 - y)x - y^2,$$

а извлекая корень, найдете, что первое число

$$x = 10 - \frac{1}{2}y + \sqrt{100 - 10y - \frac{3}{4}y^2}.$$

Если из 20 вычесть y и найденное значение x, то разность даст третье число

$$\frac{y^2}{x} = 10 - \frac{1}{2}y - \sqrt{100 - 10y - \frac{1}{4}y^2}.$$

Сумма квадратов этих трех чисел есть $400 - 40y$, и значит,

$$400 - 40y = 140,$$

или $y = 6\frac{1}{2}$. Найдя таким образом среднее число $6\frac{1}{2}$, подставьте его вместо y в первое и третье числа, найденные ранее; тогда первое число будет $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$, а третье $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$, как было уже найдено прежде.

Задача XIV

Найти четыре числа, составляющие непрерывную пропорцию, причем сумма двух средних равна 12, а сумма двух крайних 20.

Допустим, что второе из этих чисел есть x, тогда третье будет $12 - x$; первым будет $\frac{x^2}{12 - x}$ и четвертым $\frac{144 - 24x + x^2}{x}$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{12 - x} + \frac{144 - 24x + x^2}{x} = 20.$$

После приведения получим

$$x^2 = 12x - 30\frac{6}{7},$$

или $x = 6 + \sqrt{5\frac{1}{7}}$. Найдя это число, мы получим все прочие при помощи предшествующих выражений.

Задача XV

Найти четыре числа, составляющие непрерывную пропорцию, причем сумма их есть a, а сумма квадратов b.

По большей части неизвестные величины следует определять непосредственно. Однако, если какие-либо две из этих неизвестных неопределенны (ambiguae), т. е. к ним равно подходят одни и те же условия (таковы в этой задаче две средние и две крайние из четырех пропорциональных величин), то лучше всего искать другие, свободные от неопределенности величины, которые позволяют определить эти две неизвестные, как, например, их сумму или разность, или произведение. Положим поэтому сумму двух средних чисел равной s, а их произведение r; тогда сумма крайних будет $a - s$, а произведение их в силу пропорциональности опять-таки r. Чтобы найти при помощи этих величин наши четыре числа, положите первое число равным x, а второе равным y; тогда третье будет $s - y$, а четвертое $a - s - x$. Произведение средних будет

$$sy - y^2 = r.$$

Следовательно, одно среднее число будет

$$y = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - r},$$

а другое

$$s - y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - r}.$$

Далее, произведение крайних есть

$$ax - sx - x^2 = r$$

и, значит, одно крайнее есть

$$x = \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{s^2 - 2as + a^2}{4} - r},$$

а другое

$$a - s - x = \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{s^2 - 2as + a^2}{4} - r}.$$

Сумма квадратов этих четырех чисел есть $2s^2 - 2as + a^2 - 4r$, что равно b. Значит,

$$r = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}as + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b.$$

Подставив вместо r его значение, мы получим для четырех чисел следующие значения:

$$\text{Два средних} \begin{cases} \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}a^2}, \\ \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}a^2}. \end{cases}$$

$$\text{Два крайних} \begin{cases} \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2}, \\ \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2}. \end{cases}$$

Теперь остается определить значение s. Напишите для сокращения вместо этих выражений

$$\frac{1}{2}s + p \qquad \frac{a-s}{2} + q$$

и

$$\frac{1}{2}s - p \qquad \frac{a-s}{2} - q$$

и положите произведение второго и четвертого равным квадрату третьего, поскольку это условие вопроса еще удовлетворено не было. Вы получите тогда, что

$$\frac{as-s^2}{4}-\frac{1}{2}qs+\frac{pa-ps}{2}-pq=\frac{1}{4}s^2-ps+p^2.$$

Положите также произведение первого и третьего равным квадрату второго и вы получите, что

$$\frac{as-s^2}{4}+\frac{1}{2}qs+\frac{-pa+ps}{2}-pq=\frac{1}{4}s^2+ps+p^2.$$

Вычтите первое из этих уравнений из второго и останется

$$qs-pa+ps=2ps,$$

или

$$qs=pa+ps.$$

Восстановите теперь вместо p его значение

$$\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}a^2},$$

а вместо q его значение $\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2}$. Это даст, что

$$s\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2}=(a+s)\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}a^2}.$$

Возведя обе стороны в квадрат, вы найдете, что

$$s^2=-\frac{b}{a}s+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b$$

и

$$s=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b}.$$

Найдя s, вы получите четыре искомых числа из найденного ранее.

Задача XVI

В течение пяти лет должна выплачиваться ежегодная пенсия в a фунтов. Эта пенсия выкупается за наличную сумму c. Найти рост на 100 фунтов в год.

Допустим, что годовой рост на сумму x составляет $1-x$. Это означает, что выплачиваемая через год сумма 1 стóит наличными x. Тогда, по пропорции, выплачиваемая через год сумма a стоит наличными ax, а при выплате через два года она стоит ax^2, при выплате через три года она стоит наличными ax^3, при выплате через четыре года она стоит ax^4 и при выплате через пять лет она стоит ax^5. Сложите эти пять чисел и вы получите

$$ax^5+ax^4+ax^3+ax^2+ax=c,$$

или

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x=\frac{c}{a},$$

т. е. уравнение пятой степени. Определив из него x по правилам, которые будут изложены в дальнейшем, положите $x:1=100:y$; годичный рост на 100 фунтов будет $y-100$. [45]

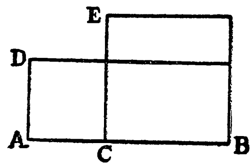
Мы привели достаточно примеров на вопросы, в которых рассматриваются лишь отношения величин, а не положения линий. Теперь мы перейдем к решению геометрических задач.

КАК ПРИВОДЯТСЯ К УРАВНЕНИЯМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Геометрические вопросы иногда можно приводить к уравнениям так же легко и по тем же законам, какие были указаны в случае отвлеченных величин. Если, например, требуется разделить прямую AB в C в среднем и крайнем отношении (фиг. 5), т. е. разделить ее так, чтобы квадрат BE большей части был равен прямоугольнику BD из всей линии и меньшей части, то положите $AB=a$ и $BC=x$, тогда AC будет равно $a-x$ и $x^2=a(a-x)$. Приведя это уравнение, мы получим, что

$$x=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{5}{4}a^2}.$$

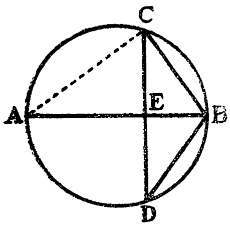
Однако чаще геометрические вопросы настолько зависят от разнообразных положений и сложных взаимоотношений линий, что для приведения их к алгебраическим членам требуются большая изобретательность и ловкость. И хотя в подобных случаях трудно дать общие предписания и каждый должен в них следовать указаниям собственного разума, я попытаюсь все же указать путь начинающим. Вам следует знать, что вопросы, касающиеся одних и тех же линий, отнесенных некоторым определенным образом друг к другу, можно ставить по-разному, принимая различные величины за Quaesita, или искомые вещи, и за Data, или данные вещи. Впрочем, как бы ни были выбраны в вопросе данные и неизвестные, решение его будет проводиться при помощи одних и тех же аналитических приемов. Единственное различие будет состоять в выборе букв или имен, при помощи которых мы различаем линии данные от линий неизвестных.



Фиг. 5.

Допустим, например, что стоит вопрос о вписанном в круг равнобедренном треугольнике CBD (фиг. 6), стороны BC, BD и основание CD которого сравниваются с диаметром круга AB. Вопрос при этом можно поставить либо об определении диаметра по данным сторонам и основанию, либо об определении основания по данным сторонам и диаметру, либо же, наконец, об определении сторон по данным основанию и диаметру. Но какой бы из этих вопросов ни был поставлен, к уравнению он будет приведен при помощи одного и того же аналитического приема.

Если требуется найти диаметр, то я полагаю $AB=x$, $CD=a$ и BC или $BD=b$. Если провести AC, то из подобия треугольников ABC и CBE получится $AB:BC=BC:BE$, или $x:b=$ $=b:BE$, откуда $BE=\frac{b^2}{x}$. Далее, $CE=\frac{1}{2}CD$, или $\frac{1}{2}a$, и так как угол CEB прямой, то



Фиг. 6.

$$\overline{CE}^2+\overline{BE}^2=\overline{BC}^2,$$

т. е.

$$\frac{1}{4}a^2+\frac{b^4}{x^2}=b^2.$$

Приведение этого уравнения и даст искомую величину x.

Если требуется найти основание, то следует положить $AB=c$, $CD=x$ и BC или $BD=b$. Если провести AC, то из подобия треугольников ABC и CBE получится $AB:BC=$ $=BC:BE$, или $c:b=b:BE$, откуда $BE=\frac{b^2}{c}$. Далее, $CE=$ $=\frac{1}{2}CD$, или $\frac{x}{2}$, и так как угол CEB прямой, то

$$\overline{CE}^2+\overline{BE}^2+\overline{BC}^2,$$

т. е.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{b^4}{c^2}=b^2.$$

Приведение этого уравнения и даст искомую величину x.

Если же требуется найти сторону BC или BD, то следует положить $AB=c$, $CD=a$ и BC или $BD=x$. Если провести, как и ранее, AC, то из подобия треугольников ABC и CBE получится $AB:BC=BC:BE$, или $c:x=x:BE$, откуда $BE=\frac{x^2}{c}$. Далее, $CE=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}a$, и так как угол CEB прямой, то

$$\overline{CE}^2+\overline{BE}^2=\overline{BC}^2,$$

т. е.

$$\frac{1}{4}a^2+\frac{x^4}{c^2}=x^2.$$

Приведение этого уравнения и даст искомую величину, т. е. x.

Вы видите, таким образом, что во всех случаях вычисление, приводящее вас к уравнению, совершенно одинаково и дает одно и то же уравнение, и различие состоит только в том, что я обозначаю линии разными буквами в зависимости от того, что принимаю разные данные и искомые. Правда, в зависимости от выбора данных и искомых возникает различие в способе приведения найденного уравнения. В самом деле, приведение уравнения

$$\frac{1}{4}a^2+\frac{b^4}{x^2}=b^2$$

с целью получить $x=\frac{2b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$, как значение AB, отличается от приведения уравнения

$$\frac{1}{4}x^2+\frac{b^4}{c^2}=b^2$$

с целью получить $x=\frac{2b}{c}\sqrt{c^2-b^2}$, как значение CD, и весьма отличается от приведения уравнения

$$\frac{1}{4}a^2+\frac{x^4}{c^2}=x^2$$

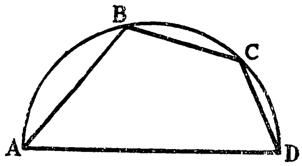
с целью получить

$$x=\sqrt{\frac{1}{2}c^2\pm\frac{1}{2}c\sqrt{c^2-a^2}},$$

как значение BC или CD (ведь нужно по-разному приводить уравнение $\frac{1}{4}a^2+\frac{b^4}{c^2}=b^2$, чтобы найти c, или a, или b). Но в способе получения этих уравнений разницы не было.

Поэтому аналисты и рекомендуют нам не проводить различия между величинами данными и искомыми. Так как всякому выбору данных и искомых величин соответствует одно и то же вычисление, то для более правильного суждения о способах их вычисления нам удобно представлять их и сравнивать, не проводя между ними различия. Иначе говоря, удобно представлять себе, что в вопросе речь идет о таких данных и искомых величинах, при выборе которых, как вы думаете, вам будет легче всего справиться с уравнением.

Поэтому, если вам предложена какая-нибудь задача, сравните между собой входящие в нее величины и, не проводя различия между данными и искомыми, рассмотрите, как они зависят друг от друга, с тем чтобы уяснить себе, какие из величин, если их принять за данные, дадут при помощи синтеза остальные величины. Для этого нет необходимости сразу же узнать, как можно алгебраически вывести одни величины из других, — достаточно общего представления о том, что одни величины могут быть как-либо выведены из других благодаря прямой связи между ними.



Фиг. 7.

Допустим, например, что в поставленном вопросе речь идет о диаметре AD и трех вписанных в полукруг линиях AB, BC и CD и об отыскании BC по остальным линиям, которые считаются данными (фиг. 7). С первого взгляда и на основании прямых связей видно, что диаметр AD определяет полукруг, а затем, что вписанные линии AB и CD определяют точки B и C, а следовательно, и искомую величину BC. Однако не столь ясно, ка́к можно путем анализа найти BC по этим данным величинам. То же самое имело бы место, если бы требовалось найти AB или CD по данным другим величинам.

Если требуется определить по данным величинам AB, BC и CD диаметр AD, то очевидно также, что при помощи синтеза это сделать нельзя, ибо расстояние между точками A и D зависит от углов B и C, а эти углы зависят от круга, в который должны быть вписаны данные линии, круг же этот не задан, поскольку не известен его диаметр. Таким образом, суть дела требует не синтетического определения диаметра AD, но того, чтобы его приняли за данный, с тем чтобы затем от него обратно перейти к данным величинам.

После того как вы полностью разберете различные способы, которыми можно выразить участвующие в вопросе члены, примените какой-либо синтетический прием, приняв в качестве данных линий те, переход от которых к остальным линиям представляется весьма легким, а обратный переход к которым представляется весьма трудным. Хотя вычисление можно вести по-разному, но его следует начинать с этих линий; и его проще произвести, допустив, что в вопросе заданы именно эти линии и что ищется некоторая величина, которую легко получить из них, чем решая вопрос в том виде, в каком он действительно предложен.

Допустим, что в приведенном примере ищется по остальным данным величинам диаметр AD. Я замечаю, что найти его синтетически нельзя, но что если бы он был дан, то рассуждения непосредственным образом привели бы от него к другим величинам. Поэтому я рассматриваю AD как данную линию и начинаю вычисления так, как если бы он был действительно дан, а искомыми были некоторые другие величины, например, какие-либо из данных линий AB, BC или CD.

Проводя вычисления и переходя от величин, принятых за данные, к остальным, в соответствии со взаимоотношениями линий, мы всегда получим таким образом уравнение между двумя значениями какой-либо одной величины. При этом либо одно из значений будет буквой, принятой в начале действий для обозначения или наименования этой величины, а другое — ее значением, найденным при вычислении, либо же оба эти значения будут найдены при помощи различным образом проведенных вычислений.

После того как вы произведете такое общее сравнение членов, участвующих в вопросе, потребуются еще бо́льшие искусство и изобретательность для разыскания специальных связей и взаимоотношений между линиями, которые приспособят их к вычислению. Дело в том, что вещи, которые могут показаться человеку, недостаточно глубоко их продумавшему, непосредственно связанными друг с другом тесной зависимостью, нередко, когда мы стремимся выразить эту зависимость алгебраически, приводят к запутанным и окольным действиям и в результате заставляют нас начать рассуждения заново и проводить вычисления постепенно. Это можно увидеть, определяя BC по AD, AB и CD. Вы должны применять лишь те предложения или правила, которые можно выразить при помощи алгебраических членов, каковы, в частности, акс. 19, предл. 4 кн. 6 и предл. 47 первой книги Эвклида. [46]

Таким образом, во-первых, в вычислениях помогают сложение и вычитание линий, пользуясь которыми вы можете по значениям частей найти значение целого или же по значению целого и одной части получить значение другой части.

Во-вторых, вычисления производятся на основании пропорциональности линий. Как и ранее, мы принимаем, что произведение средних членов, поделенное на один из крайних, дает значение другого крайнего, или, что то же самое, если даны все четыре пропорциональные величины, то произведения крайних и средних между собой равны. Пропорциональность линий получается главным образом из подобия треугольников. А так как это подобие распознается по равенству углов треугольников, то аналист должен, в частности, быть сведущим в сравнении углов и, следовательно, быть знакомым с предл. 5, 13, 15, 29 и 32 первой книги Эвклида, предл. 4, 5, 6, 7 и 8 шестой книги и предл. 20, 21, 22, 27 и 31 третьей книги его „Начал“. К этому можно добавить предл. 3 шестой книги, в котором из пропорциональности сторон выводится равенство углов и обратно. Иногда к тому же приводят предл. 36 и 37 третьей книги.[47]

В-третьих, вычисления производят при помощи сложения или вычитания квадратов. А именно, если в прямоугольных треугольниках сложить квадраты двух меньших сторон, то получается квадрат наибольшей стороны, а если из квадрата наибольшей стороны вычесть квадрат одной из меньших, то получится квадрат другой.

На этих-то немногочисленных основаниях покоится все искусство применения анализа к прямолинейной геометрии (если речь идет о поверхностях, к ним следует присоединить предл. 1 книги 6 „Начал", а если вопрос трактует о телах, то еще некоторые предложения книг 11 и 12 Эвклида).[48] Более того, все трудности, встречающиеся в задачах, могут быть приведены только к составлению линий из частей и подобию треугольников. Поэтому нет необходимости применять другие теоремы, ибо все они могут быть сведены к названным двум вещам и, значит, к решениям, которые можно получить из последних. В качестве примера я привожу задачу, в которой требуется провести высоту к основанию косоугольного треугольника, и решаю ее без помощи предл. 47 первой книги Эвклида. [49] Однако, хотя и полезно знать простейшие принципы, от которых зависят решения задач, и хотя задачи можно решать при помощи одних таких принципов, тем не менее для скорости иногда целесообразно применять не только 47-е предложение первой книги Эвклида, которое употребляется очень часто, но и ряд других теорем.

Например, если на основание косоугольного треугольника опущена высота и (для алгебраических вычислений) нужно найти отрезки основания, то полезно знать, что разность квадратов сторон равна удвоенному произведению основания на расстояние высоты от середины основания.

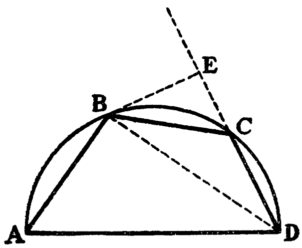
Если угол при вершине треугольника разделен пополам, то полезно знать не только то, что основание при этом делится на части, пропорциональные сторонам, но и то, что разность произведения сторон и произведения отрезков основания равна квадрату линии, делящей угол пополам. [50]

В задачах относительно фигур, вписанных в круг, часто полезна теорема о том, что во всяком вписанном в круг четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противолежащих сторон.

Аналист может владеть про запас, а также пользоваться рядом таких теорем. Однако применять их он должен умеренно, если может с равной легкостью или с незначительно большим трудом вывести решение из более простых вычислительных начал. Поэтому он должен обратить особое внимание на три предложенных нами принципа, как на более известные, более простые и более общие и хотя немногочисленные, но достаточные для всех задач, и должен стремиться приводить все трудности к этим принципам, прежде чем пользоваться какими-либо другими теоремами.

Однако для того чтобы эти теоремы могли служить для решения задач, нередко нужно бывает производить дополнительные построения. По большей части нужно бывает продолжать некоторые линии до пересечения с другими или на определенную длину, либо проводить из какой-нибудь замечательной точки линии, параллельные или перпендикулярные к другим, либо соединять какие-либо замечательные точки, а также производить различные иные построения в соответствии с условиями задачи и с применяемыми в ее решении теоремами. Например, если две непересекающиеся линии образуют с третьей данные углы, то может случиться, что они пересекутся или встретятся при продолжении и образуют треугольник, в котором будут известны углы, а значит, и отношения сторон. Если некоторый угол дан или равен другому, мы часто дополняем его до треугольника, заданного по виду или подобного другому треугольнику, для чего продолжаем некоторые линии на чертеже или же проводим линию, стягивающую угол. Когда треугольник — косоугольный, мы часто разбиваем его на два прямоугольных треугольника, проводя высоту. Если речь идет о многосторонниках, мы разбиваем их при помощи диагоналей на треугольники и так далее. При этом мы всегда стремимся к тому, чтобы разложить чертеж на данные или подобные, или прямоугольные треугольники.

Так, в предложенном ранее примере (фиг. 8) я провожу диагональ BD и разбиваю трапецию $ABCD$ на два треугольника, один прямоугольный ABD и другой косоугольный BCD. Затем я разбиваю косоугольный треугольник на два прямоугольных, опуская высоту из какого-нибудь из его углов B, C или D на противоположную сторону, скажем, опуская ее из угла B на сторону CD, продолженную до E так, чтобы она встретилась с перпендикуляром BE. Так как сумма углов BAD и BCD равна двум прямым (22-е предл. 3-й книги „Начал"), как и сумма углов BCE и BCD, то я замечаю, что углы BAD и BCE равны, а следовательно, треугольники BCE и BAD подобны. Теперь я вижу (рассматривая AD, AB и BC как данные, а DC как искомую), что вычисление можно провести следующим образом. Так как треугольник ABD прямоугольный, то линии AD и AB дадут вам BD. Линии AD, AB, BD и BC, в силу подобия треугольников ABD и CEB, дадут BE и CE. Так как треугольник BED прямоугольный, то BD и BE дадут ED, а $ED - EC$ даст CD. Таким путем мы получим уравнение между найденным по изложенному способу значением CD и алгебраической буквой, которой эту величину обозначили.



Фиг. 8

Мы можем также начать вычисление, исходя из других оснований, или по крайней мере вести его далее иными путями к тому же самому заключению, с тем чтобы получить в результате два значения одной величины, которые можно будет приравнять друг другу (и по большей части это лучше, чем продолжать дело слишком далеко в одном направлении). Так, линии AD, AB и BC дают BD, BE и CE, как и раньше; далее, $CD+CE$ даст ED и, наконец, так как треугольник BED прямоугольный, BD и ED дают BE. Вы вполне можете также вести вычисление, разыскивая значения тех величин, между которыми существует какая-нибудь другая известная зависимость, а затем выражая эту зависимость при помощи уравнения. Например, так как из предл. 12 второй книги „Начал“ ясно, что между линиями BD, DC, BC и CE существует зависимость

$$\overline{BD}^2-\overline{BC}^2-\overline{CD}^2=2\,\overline{CD}\times\overline{CE},$$

то я нахожу $\overline{BD}^2$ по данным AD и AB, и CE по данным AD, AB и BC.[51] Наконец, принимая CD, я беру

$$\overline{BD}^2-\overline{BC}^2-\overline{CD}^2=2\,CD\times CE.$$

Руководствуясь такими рассуждениями и следуя этими путями, вы должны всегда одновременно внимательно наблюдать за ходом анализа и за построением в соответствии с ним чертежа.

Теперь, я полагаю, понятно, чтó имеют в виду геометры, советуя вам рассматривать искомое как уже сделанное. Не проводя различия между известными и неизвестными величинами, вы можете для начала вычисления принять за данные любые из них, как если бы всё уже было действительно известно на основании некоторого предшествующего решения и вам нужно было заниматься не решением задачи, но лишь проверкой этого решения. Например, хотя на самом деле ищется, быть может, AD, но в первом из трех описанных выше способов вычисления я принимаю за искомую величину CD, как если бы хотел проверить, совпадает ли это значение CD, найденное при помощи AD, с его уже ранее известной величиной. В двух последних способах я также ставил своей целью не разыскать некоторую величину, но как-либо вывести из отношений между линиями уравнение. С этой целью я рассматриваю все линии AD, AB, BC и BD как известные линии и действую, как если бы вопрос был уже решен и нужно было лишь выяснить, удовлетворяют ли эти линии условиям вопроса и согласуются ли они с уравнениями, которые следуют из взаимоотношений между линиями. Руководясь подобными рассуждениями, я именно так приступаю к делу, но затем, придя к уравнению, я изменяю метод и стараюсь найти искомую величину посредством приведения и решения этого уравнения. Наконец, мы также часто принимаем в качестве известных больше величин, чем их имеется в условиях вопроса. Замечательный пример такого рода вы встретите в 55-й из приведенных далее задач, где я принял за известные не только величины a, b и c, входящие в уравнение

$$a^2 + bx + cx^2 = y^2,$$

определяющее коническое сечение, но также и другие линии r, s, t, v, о которых в постановке задачи непосредственно вовсе не упоминается. Дело в том, что вы можете вводить любые величины, при помощи которых удастся получить уравнения. Нужно только следить за тем, чтобы при этом получилось столько же уравнений, сколько вами было действительно введено неизвестных.

После того как вы продумали метод вычисления и составили чертеж, дайте названия величинам, входящим в вычисление (т. е. тем, которые приняты за данные и из которых должны быть выведены значения остальных, пока вы не придете, наконец, к уравнению). При этом следует брать те линии, которые включают все условия задачи и представляются для дела более подходящими, чем другие, позволяя легче (насколько вы можете судить) получить заключение; но брать их следует не более, чем нужно для вашей цели. Именно, не давайте отдельных названий величинам, которые можно назвать при помощи уже данных имен. Так, в случае линии и ее частей или трех сторон прямоугольного треугольника, или трех или четырех пропорциональных какую-нибудь из менее важных величин мы оставляем без названия, ибо ее значение можно вывести из названий остальных. Например, если в ранее приведенном вопросе я положу $AD = x$ (фиг. 8) и $AB = a$, то BD я не обозначу новой буквой, ибо она является третьей стороной прямоугольного треугольника ABD и, следовательно, ее значение есть $\sqrt{x^2 - a^2}$. Если, далее, я положу $BC = b$, то, так как из подобия треугольников DAB, BCE следует пропорция $AD : AB = BC : CE$, три члена которой AD, AB и BC уже названы, я оставляю без названия четвертый CE и вместо него применяю значение $\frac{ab}{x}$, вытекающее из указанной пропорциональности. Наконец, если DC названа c, то я не дам названия DE, ибо ее значение $c + \frac{ab}{x}$ получается по значениям ее частей DC и CE, или c и $\frac{ab}{x}$.[52]

На основании всего мною сказанного задача уже почти приведена к уравнению. В самом деле, после того как главные линии были обозначены при помощи принятых букв, остается лишь, в соответствии с избранным методом, выводить из этих букв значения остальных линий, пока мы не придем в результате к уравнению. Так в нашем примере мне остается лишь, пользуясь прямоугольными треугольниками BCE и BDE, выразить двумя способами значение BE.

Именно,

$$\overline{BC}^2 - \overline{CE}^2 \ (\text{или } b^2 - \frac{a^2 b^2}{x^2}) = \overline{BE}^2,$$

а также

$$\overline{BD}^2 - \overline{DE}^2 \ (\text{или } x^2 - a^2 - c^2 - \frac{2abc}{x} - \frac{a^2 b^2}{x^2}) = \overline{BE}^2.$$

Отсюда, отбрасывая с обеих сторон $-\frac{a^2b^2}{x^2}$, я получаю уравнение

$$b^2 = x^2 - a^2 - c^2 - \frac{2abc}{x},$$

которое после приведения примет вид

$$x^3 = (a^2 + b^2 + c^2)x + 2abc.$$

Для решения этой задачи я привел несколько способов, отличающихся друг от друга незначительно. Тот способ, который опирается на предл. 12 второй книги „Начал“, является несколько более изящным, и поэтому мы применим здесь и его. Положите соответственно $AD = x$, $AB = a$, $BC = b$ и $CD = c$. Тогда $\overline{BD}^2 = x^2 - a^2$ и $CE = \frac{ab}{x}$, как и выше. Подставьте эти значения в теорему $\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2CD \times \times CE$ и вы получите

$$x^2 - a^2 - b^2 - c^2 = \frac{2abc}{x},$$

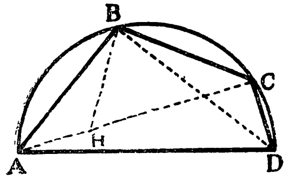
а после приведения, как и ранее,

$$x^3 = (a^2 + b^2 + c^2)x + 2abc.$$

Чтобы показать, сколь велико здесь бывает разнообразие решений, а также, что искусному геометру не очень трудно их обнаружить, я счел подходящим привести другие способы решения той же задачи. Если, проведя диагональ BD, вы, вместо того, чтобы, как ранее, опустить из точки B перпендикуляр BE на сторону DC, опустите перпендикуляр из точки D на сторону BC или из точки C на сторону BD, так что косоугольный треугольник BCD разобьется как-либо на два прямоугольных треугольника, то вы сумеете притти к уравнению почти такими же путями, какие я уже описал выше. Однако имеются и другие приемы, сильно отличающиеся от предыдущих.

Если, например (фиг. 9), провести две диагонали AC и BD и принять AD и AB за известные, то будет дана BD;

если же принять за известные AD и CD, то будет дана AC. Вы получите затем уравнение при помощи теоремы о вписанных в кругах четырехугольниках, гласящей, что $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$. Сохранив за линиями AD, AB, BC, CD данные им ранее обозначения x, a, b, c, мы получим $BD = \sqrt{x^2 - a^2}$ и $AC = \sqrt{x^2 - c^2}$ (по 47-му предл. 1-й кн. „Начал"), а подставив буквенные значения этих линий в только что упомянутую теорему, найдем, что



Фиг. 9

$$bx + ac = \sqrt{x^2 - a^2} \times \sqrt{x^2 - c^2}.$$

Возведя стороны этого уравнения в квадрат и проделав приведения, вы вновь получите

$$x^3 = (a^2 + b^2 + c^2)\,x + 2abc.$$

Для того чтобы показать еще, что решения, найденные при помощи указанной теоремы, могут быть получены на основании одного подобия треугольников, восстановите к BC перпендикуляр BH, пересекающий AC в H. При этом треугольники BCH и BDA будут подобными, ибо каждый из них имеет прямой угол при B, а углы при C и D равны (предл. 21 кн. 3 „Начал"). Подобными окажутся также треугольники BCD и BHA, ибо у них равны углы при B (это будет ясно, если отнять от каждого из двух прямых углов общий угол DBH), а также углы при D и при A (предл. 21 кн. 3 „Начал"). Поэтому в силу пропорции $BD : AD = BC : HC$ будет дана линия HC, а в силу пропорции $BD : CD = AB : AH$ будет дана линия AH. Так как еще $AH + HC = AC$, то вы и получите уравнение. Сохраняя прежние названия линий x, a, b, c, а также имея значения линий AC и BD, т. е. $\sqrt{x^2 - c^2}$ и $\sqrt{x^2 - a^2}$, вы получите из первой пропорции, что

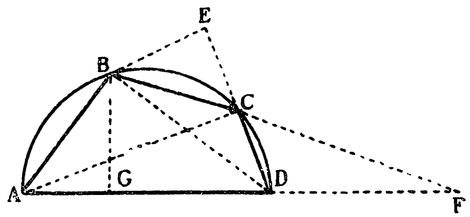
$$HC = \frac{bx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

а из второй, что

$$AH = \frac{ac}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Поскольку $AH + HC = AC$, вы найдете отсюда, что

$$\frac{bx + ac}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - c^2},$$



Фиг. 10

а это уравнение (после умножения на $\sqrt{x^2 - a^2}$ и возведения в квадрат) примет вид, уже не раз полученный на предыдущих страницах.

Чтобы еще яснее показать, какое здесь может быть получено множество решений, продолжите BC и AD до их пересечения в F (фиг. 10). Треугольники ABF и CDF будут подобными, так как у них общий угол при F и равны углы ABF и CDF (поскольку они дополняют угол CDA до двух прямых, на основании предл. 13 кн. 1 и предл. 22 кн. 3 „Начал"). Если бы кроме четырех членов, от которых зависит вопрос, была дана еще линия AF, мы нашли бы CF из пропорции $AB : AF = CD : CF$. Тогда $AF - AD$ дала бы DF, а пропорция $CD : DF = AB : BF$ дала бы BF, откуда (поскольку $BF - CF = BC$) и получилось бы уравнение. Но так как мы приняли две неизвестные величины AD и DF заданные, то нужно найти еще другое уравнение. Для этого я опускаю из точки B на AF перпендикуляр BG и из пропорции $AD : AB = AB : AG$ получаю AG. Затем, по теореме предл. 13 кн. 2 „Начал", я имею также $\overline{BF}^2 + 2AF \times AG = \overline{AB}^2 + \overline{AF}^2$, откуда и получаю второе уравнение. Сохраняя прежние обозначения a, b, c, x и положив $AF = y$, вы (следуя указанным путем) найдете, что $CF = \frac{cy}{c}$,

$DF = y - x$ и $BF = \frac{a(y-x)}{c}$. Отсюда следует первое уравнение

$$\frac{a(y-x)}{c} - \frac{cy}{a} = b.$$

Так как, с другой стороны, $AG = \frac{a^2}{x}$, то второе уравнение будет

$$\frac{a^2y^2 - 2a^2xy + a^2x^2}{c^2} + \frac{2a^2y}{x} = a^2 + y^2.$$

После приведения эти два уравнения дадут искомое уравнение. Из первого уравнения

$$y = \frac{abc + a^2x}{a^2 - c^2},$$

и если это значение y подставить во второе уравнение, то после должных приведений получится, как и ранее,

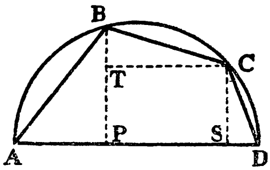
$$x^3 = (a^2 + b^2 + c^2)x + 2abc.$$

Если продолжить до пересечения между собою AB и DC, то решение будет в основном таким же, разве только, быть может, несколько легче. Поэтому я лучше предложу другой образец решения задачи, выведенный из совершенно отличного источника. Я, именно, определю двояким образом площадь предложенного четырехугольника. С этой целью я провожу диагональ BD и разбиваю четырехугольник на два треугольника. Затем, сохраняя прежние обозначения x, a, b, c, я нахожу, что $BD = \sqrt{x^2 - a^2}$, а значит, площадь треугольника ABD есть $\frac{1}{2}a \times \sqrt{x^2 - a^2}$ $(= \frac{1}{2} AB \times BD)$. Далее, опустив перпендикуляр BE на CD, вы (в силу подобия треугольников ABD и BCE) получаете $AD : BD = BC : BE$ и, следовательно, $BE = \frac{b}{x}\sqrt{x^2 - a^2}$. Поэтому площадь треугольника BCD будет $\frac{bc}{2x}\sqrt{x^2 - a^2}$ $(= \frac{1}{2} CD \times BE)$. Складывая эти площади, мы получим всю площадь четырехугольника $\frac{ax+bc}{2x}\sqrt{x^2-a^2}$. Аналогичным образом, проведя диагональ AC, определив площади треугольников ACD и ABC и сложив их, мы получим другое выражение для площади четырехугольника, именно: $\frac{cx+ba}{2x}\sqrt{x^2-c^2}$. Приравнивая эти площади и умножая обе на $2x$, мы получим

$$(ax+bc)\sqrt{x^2-a^2}=(cx+ab)\sqrt{x^2-c^2}.$$

По возведении в квадрат и делении на a^2x-c^2x это уравнение приведется к уже неоднократно найденному нами виду

$$x^3=(a^2+b^2+c^2)x+2\,abc.$$

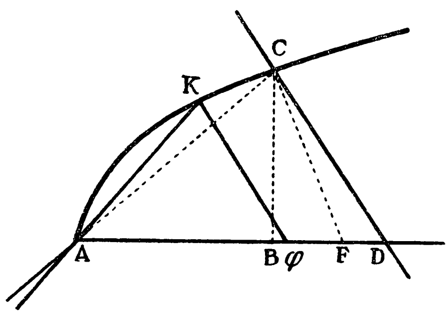


Фиг. 11

Отсюда видно, как велико может быть многообразие решений, а также и то, что одни способы бывают значительно изящнее, чем другие. Поэтому, если вы при решении выбрали первоначально метод, плохо пригодный для вычисления, то следует вновь рассмотреть зависимости между линиями, с тем чтобы напасть на наиболее подходящий и изящный путь решения. Дело в том, что приемы, которые приходят на ум первыми, нередко могут при пользовании ими вызывать серьезные затруднения. Например, в разобранной нами задаче было бы равно легко напасть, как и на какой-либо из примененных способов, на следующий прием. Опустим на AD перпендикуляры BP и CS и на BP перпендикуляр CT; фигура тогда разобьется на прямоугольные треугольники (фиг. 11). Можно заметить, что AD и AB дадут AP; AD и CD дадут DS; $AD-AP-DS$ даст PS или TC. Кроме того, AB и AP дают BP; CD и DS дают CS или TP, а $BP-TP$ даст BT. Наконец, BT и TC дадут BC, а отсюда получится уравнение.

Но если кто-нибудь попытается вычислять таким способом, он встретится с более длинными и сложными алгебраическими членами, чем в прежних решениях, и привести их к заключительному уравнению ему будет труднее.

Вот что можно сказать о решении задач прямолинейной геометрии. Быть может, уместно еще отметить, что если в условия вопроса входят углы или же выраженные углами положения линий, то вместо углов следует применять линии или же их отношения, которые можно вывести по данным углам при помощи тригонометрического исчисления, либо же, зная которые, можно, наоборот, найти при помощи того же исчисления искомые углы. Мы увидим некоторые примеры этого в последующем.



Фиг. 12

Что касается геометрии кривых линий, то мы их характеризуем либо как описанные местным движением прямых, либо с помощью уравнений, выражающих в неопределенной форме взаимоотношения прямых линий, которые расположены по некоторому известному закону и которые заканчиваются на кривых.[53] Древние делали то же самое менее удобно, употребляя сечения тел. Вычисления, связанные с кривыми, описанными по первому способу, производятся так же, как было изложено ранее. Допустим, например, что кривая AKC (фиг. 12) описана вершиной K наугольника $AK\varphi$, одна из сторон которого AK свободно скользит, проходя через данную по положению точку A, между тем как другая сторона $K\varphi$, определенной длины, движется вдоль данной по положению прямой AD. Требуется найти точку C пересечения этой кривой с некоторой данной по положению прямой CD. Я провожу прямые AC, CF, которые изображают наугольник в искомом положении, и, рассматривая взаимоотношение линий (но не проводя различия между данным и искомым и не касаясь связи линий с кривой), замечаю, что имеется синтетическая зависимость между другими линиями и CF и какой-либо из четырех линий BC, BF, AF и AC. Поэтому я беру две из них, полагая, скажем, $CF = a$ и $CB = x$, и начинаю теперь вычисление. Так как угол CBF прямой, а линии BF, BC и AB образуют непрерывную пропорцию $BF : BC = BC : AB$, я получаю, что $BF = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $AB = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. С другой стороны, так как дано положение CD, то дана и AD, которую я обозначаю через b. Отношение BC к BD также дано, и я полагаю его равным отношению d к e. Тогда $BD = \frac{ex}{d}$ и $AB = b - \frac{ex}{d}$ и, таким образом,

$$b - \frac{ex}{d} = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Возводя обе стороны уравнения в квадрат и умножая на $a^2 - x^2$, мы приведем его к виду

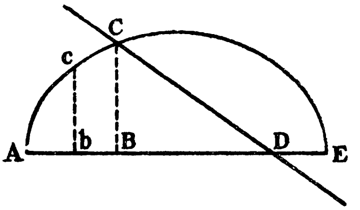
$$x^4 = \frac{2\,bdex^3 - (b^2 d^2 - a^2 e^2)\,x^2 - 2\,a^2 bdex + a^2 b^2 d^2}{d^2 + e^2}.$$

Наконец, отсюда при помощи правил, которые будут преподаны далее, по данным величинам a, b, d, e можно будет найти значение x. Прямая, проведенная параллельно AD на расстоянии x, или BC, пересечет CD в искомой точке C.[54]

Если для характеристики кривых линий употребляются не геометрические описания, а уравнения, то вычисления будут настолько легче и короче, насколько позволит определение этих уравнений. Допустим, например, что ищется пересечение C данного эллипса ACE с данной по положению прямой линией CD (фиг. 13). Чтобы охарактеризовать эллипс, я выбираю какое-нибудь известное, принадлежащее ему уравнение, например

$$rx - \frac{r}{q}x^2 = y^2,$$

где x выражает общим образом произвольную часть оси, скажем, Ab или AB, а y — перпендикуляр bc или BC, заканчивающийся на кривой; r и q определяются заданным видом эллипса. Так как дано положение CD, то дана будет и AD, которую мы обозначим a; тогда BD будет $a - x$. Угол ADC также дан, а значит дано и отношение BD к BC, которое я полагаю равным $1:e$. Поэтому $BC\,(y) = ea - ex$, а квадрат его, $e^2, a^2 - 2e^2\,ax + e^2x^2$, будет равен $rx - \frac{r}{q}x^2$. После приведения мы в результате получим



Фиг. 13

$$x^2 = \frac{2\,ae^2\,x + rx - a^2\,e^2}{e^2 + \frac{r}{q}},$$

или

$$x = \frac{ae^2 + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{r^2}{4e^2} - \frac{a^2 r}{q}}}{e^2 + \frac{r}{q}}.$$

В случае если кривая характеризуется посредством геометрического описания или как сечение тела, на их основании можно получить и уравнение, определяющее природу этой кривой. Поэтому все трудности в задачах о кривых могут быть приведены к их уравнениям.

Так, если в первом примере (фиг. 12) обозначить AB через x и BC через y, то третья пропорциональная BF будет $\frac{y^2}{x}$, а ее квадрат в сумме с квадратом BC даст квадрат CF, т. е.

$$\frac{y^4}{x^2} + y^2 = a^2,$$

или

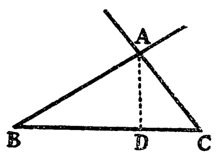
$$y^4 + x^2 y^2 = a^2 x^2.$$

Таково уравнение, при помощи которого определяется для каждой длины AB основания соответствующая точка C кривой AKC, а следовательно, и сама кривая. При помощи этого уравнения вы, таким образом, можете получать решения задач, относящихся к этой кривой.

Если вид кривой не задан, но требуется его определить, вы можете взять любое уравнение, которое может выразить общим образом природу этой кривой. Допустив, что это уравнение характеризует эту кривую как данное, вы, на основании принятого допущения, сможете получить как-либо уравнения, при помощи которых удастся в конце концов определить эти допущения. Примеры такого рода встретятся в некоторых последующих задачах, которые я собрал здесь для лучшего пояснения изложенного учения и для упражнения учащихся. К разбору этих задач я теперь и перехожу.

Задача I

Дана конечная прямая BC, в концах которой проведены под данными углами ABC, ACB две прямые BA, CA. Найти высоту AD их точки пересечения A над данной линией BC (фиг. 14).



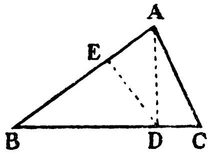
Фиг. 14

Положите $BC = a$ и $AD = y$. Так как угол ABD дан, то дано будет (по таблице синусов или тангенсов) отношение между линиями AD и BD, которое положите равным d к e. Итак $d : e = AD(y) : BD$, откуда $BD = \frac{ey}{d}$. Точно так же, поскольку дан угол ACD, будет дано и отношение между AD и CD, которое положите равным d к f, так что $DC = \frac{fy}{d}$. Но $BD + DC = BC$, т. е.

$\frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$. Приведя это уравнение посредством умножения обеих сторон на d и деления на $e + f$, вы получите $y = \frac{ad}{e+f}$.

Задача II

Даны стороны AB, AC и основание BC треугольника ABC и из вершины угла A на основание опущена высота AD. Найти отрезки основания BD и DC (фиг. 15).



Фиг. 15

Положим $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$ и $BD = x$, тогда DC будет $c - x$. Так как

$$\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 (a^2 - x^2) = AD^2$$

и

$$\overline{AC}^2 - \overline{DC}^2 (b^2 - c^2 + 2cx - x^2) = AD^2,$$

то вы получите, что

$$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2,$$

и после приведения

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

С целью показать, что все трудности всех задач могут быть разрешены на основании одной лишь пропорциональности линий и без помощи 47-го предл. первой кн. „Начал" (хотя и более окольным путем), я считаю уместным привести здесь еще другое решение той же задачи.

Опустите из точки D на сторону BA перпендикуляр DE. Сохранив за линиями их обозначения, вы получите $AB : BD = BD : BE$, или же $a : x = x : \frac{x^2}{a}$ и $BA - BE \left(a - \frac{x^2}{a}\right) = EA$. Точно так же $EA : AD = AD : AB$, откуда

$$EA \times AB (a^2 - x^2) = AD^2.$$

Из треугольника ACD вы получите снова

$$\overline{AD}^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2,$$

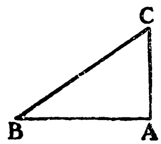
откуда, как и прежде, найдете

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

Задача III

Даны периметр и площадь прямоугольного треугольника ABC. Найти гипотенузу BC (фиг. 16).

Положите периметр равным a, площадь равной b^2, $BC = x$ и $AC = y$. Тогда $AB = \sqrt{x^2 - y^2}$ и, значит, периметр $(BC + AC + AB)$ будет $x + y + \sqrt{x^2 - y^2}$, а площадь $\left(\frac{1}{2} AC \times AB\right)$ будет $\frac{1}{2} y \sqrt{x^2 - y^2}$. Поэтому



Фиг. 16

$$x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = a$$

и

$$\frac{1}{2} y \sqrt{x^2 - y^2} = b^2.$$

Из последнего уравнения

$$\sqrt{x^2 - y^2} = \frac{2b^2}{y}.$$

Чтобы избавиться в первом уравнении от радикала, я поэтому пишу в нем $\frac{2b^2}{y}$ вместо $\sqrt{x^2 - y^2}$ и получаю

$$x + y + \frac{2b^2}{y} = a,$$

или после умножения на y и приведения

$$y^2 = ay - xy - 2b^2.$$

Далее я вычитаю из обеих сторон первого уравнения $x+y$, что приводит его к виду

$$\sqrt{x^2-y^2}=a-x-y.$$

Для освобождения от радикала я возвожу в квадрат и получаю

$$x^2-y^2=a^2-2ax+x^2-2ay+2xy+y^2,$$

что после приведения и деления на 2 дает

$$y^2=ay+ax-xy-\frac{a^2}{2}.$$

Наконец, если приравнять два значения y^2, то получится

$$ay+ax-xy-\frac{a^2}{2}=ay-xy-2b^2,$$

что приводится к

$$ax-\frac{a^2}{2}=-2b^2,$$

откуда

$$x=\frac{a}{2}-\frac{2b^2}{a}.$$

Другое решение. Положим половину периметра равной a, площадь равной b^2 и $BC=x$, тогда $AC+AB=2a-x$.

Так как $x^2(\overline{BC}^2)=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$ и $4b^2=2AB\times AC$, то

$$x^2+4b^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2AB\times AC=(AB+AC)^2=(2a-x)^2.$$

Значит,

$$x^2+4b^2=4a^2-4ax+x^2,$$

откуда

$$x=a-\frac{b^2}{a}.$$

Задача IV

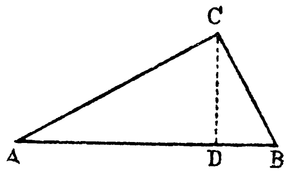
Даны периметр и высота прямоугольного треугольника. Найти треугольник (фиг. 17).

Допустим, что в треугольнике ABC прямой угол есть C и CD есть высота, опущенная на основание AB.[55] Положим $AB+AC+BC=a$ и $CD=b$. Если взять основание $AB=x$, то сумма сторон будет $a-x$. Предположим, что разность тех же сторон есть y, тогда бо̀льшая сторона $AC = \frac{a-x+y}{2}$, а меньшая $BC = \frac{a-x-y}{2}$. По свойству прямоугольного треугольника $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$, т. е.

$$\frac{a^2-2ax+x^2+y^2}{2}=x^2.$$

Кроме того, $AB{:}AC = BC{:}DC$, т. е. $AB\times DC = AC\times BC$, или

$$bx = \frac{a^2-2ax+x^2-y^2}{4}.$$



Фиг. 17

Из первого уравнения

$$y^2 = x^2+2ax-a^2,$$

а из второго

$$y^2 = x^2-2ax+a^2-4bx;$$

следовательно,

$$x^2+2ax-a^2 = x^2-2ax+a^2-4bx,$$

что приводится к

$$4ax+4bx = 2a^2,$$

откуда

$$x = \frac{a^2}{2a+2b}.$$

Геометрически это означает: в каждом прямоугольном треугольнике сумма периметра и высоты относится к периметру, как половина периметра к основанию.

Если из a вычесть $2x$, то в остатке получится $\frac{ab}{a+b}$, избыток сторон над основанием. Это в свою очередь означает, что в каждом прямоугольном треугольнике сумма периметра и высоты относится к периметру, как высота к избытку сторон над основанием.

Задача V

Даны основание прямоугольного треугольника AB и сумма высоты и сторон $CA+CB+CD$. Найти треугольник.

Положим $CA+CB+CD=a$, $AB=b$, $CD=x$, тогда $CA+CB=a-x$.

Положите $AC-CB=y$, тогда $AC=\frac{a-x+y}{2}$ и $CB=\frac{a-x-y}{2}$.

Далее, $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$, или

$$\frac{a^2-2ax+x^2+y^2}{2}=b^2.$$

Кроме того, $AC\times CB=AB\times CD$, или

$$\frac{a^2-2ax+x^2-y^2}{4}=bx.$$

Сравнивая эти уравнения, вы получите

$$2b^2-a^2+2ax-x^2=y^2=a^2-2ax+x^2-4bx,$$

и после приведения

$$x^2=2ax+2bx-a^2+b^2,$$

откуда

$$x=a+b-\sqrt{2ab+2b^2}.$$

Геометрически это означает: если из суммы периметра и высоты прямоугольного треугольника вычесть среднюю пропорциональную между этой суммой и удвоенным основанием, то разность представляет собой высоту.

Другое решение. Положим $CA+CB+CD=a$, $AB=b$ и $AC=x$; тогда $BC=\sqrt{b^2-x^2}$, $CD=\dfrac{x\sqrt{b^2-x^2}}{b}$ и $x+CB+CD=a$, или $CB+CD=a-x$. Следовательно,

$$\frac{b+x}{b}\sqrt{b^2-x^2}=a-x\,.$$

Возводя обе стороны в квадрат и умножая на b^2, мы получим

$$-x^4-2bx^3+2b^3x+b^4=a^2b^2-2ab^2x+b^2x^2.$$

Переставляя члены уравнения и располагая их по порядку, будем иметь

$$x^4+2bx^3+(3b^2+2ab)x^2+(2b^3+2ab^2)x+(b^4+2ab^3+a^2b^2)=$$
$$=(2b^2+2ab)x^2+(4b^3+4ab^2)x+2b^4+2ab^3.$$

Извлекая корень из обеих сторон, мы получим

$$x^2+bx+b^2+ab=(x+b)\sqrt{2ab+2b^2},$$

а вновь извлекая корень, найдем, что

$$x=-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab}\pm$$
$$\pm\sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab}-\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{2}ab}.$$

Фиг. 18

Геометрическое построение. Положите (фиг. 18) $AB=\frac{1}{2}b$, $CB=\frac{1}{2}a$, $CD=\frac{1}{2}AB$. Возьмите AE средней пропорциональной между b и AC, а EF средней пропорциональной между b и DE и отложите EF с обеих сторон от точки E. Линии BF, BF будут двумя сторонами треугольника.

Задача VI

В прямоугольном треугольнике ABC даны сумма сторон $AC + BC$ и высота CD. Найти треугольник (фиг. 17).

Положим $AC + BC = a$, $CD = b$, $AC = x$. Тогда $BC = a - x$ и $AB = \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}$. Кроме того, $CD : AC = CB : AB$ и, значит, $AB = \frac{ax - x^2}{b}$. Следовательно,

$$ax - x^2 = b\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}$$

и, возводя обе стороны в квадрат и располагая по порядку,

$$x^4 - 2ax^3 + (a^2 - 2b^2)x^2 + 2ab^2x - a^2b^2 = 0.$$

Прибавьте с обеих сторон по $a^2b^2 + b^4$ и вы получите

$$x^4 - 2ax^3 + (a^2 - 2b^2)x^2 + 2ab^2x + b^4 = a^2b^2 + b^4.$$

Извлекая корень из обеих сторон, вы найдете

$$x^2 - ax - b^2 = -b\sqrt{a^2 + b^2},$$

а извлекая корень снова,

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Геометрическое построение. Положите $AB = BC = \frac{1}{2}a$ (фиг. 19). Восстановите в C перпендикуляр $CD = b$, продолжите CD до E так, чтобы $DE = DA$, и возьмите среднюю пропорциональную CF между CD и CE. Далее, из центра F опишите радиусом BC круг GH, который пересечет прямую BC в G и H. Линии BG и BH будут двумя сторонами треугольника.

Другое решение. Положим $AC + BC = a$, $AC - BC = y$, $AB = x$ и $DC = b$ (фиг. 17). Тогда $AC = \frac{a+y}{2}$, $BC = \frac{a-y}{2}$, $\frac{a^2+y^2}{2} = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 = x^2$, а $\frac{a^2-y^2}{4b} = \frac{AC \times BC}{DC} = AB = x$. Поэтому

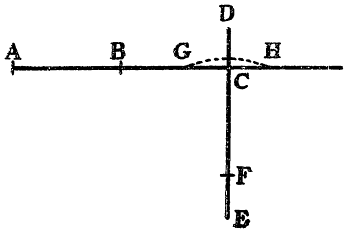
$$2x^2 - a^2 = y^2 = a^2 - 4bx$$

и

$$x^2 + 2bx = a^2.$$

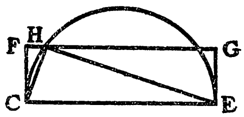
Извлечение корня даст

$$x = -b + \sqrt{b^2 + a^2}.$$



Фиг. 19

Поэтому в приведенном построении CE есть гипотенуза искомого треугольника HCE. Вот как можно быстро построить треугольник в этой и предыдущей задачах по данным основанию и высоте. Постройте прямоугольник CG (фиг. 20), сторона которого CE есть основание треугольника, а сторона CF — высота. На CE опишите полукруг, который пересечет противоположную сторону FG в H. Проведите прямые CH и EH. Искомый треугольник будет CEH.



Фиг. 20

Задача VII

В прямоугольном треугольнике даны сумма сторон и сумма высоты и основания. Найти треугольник (фиг. 17).

Положим, что сумма сторон AC и CB есть a, сумма основания AB и высоты CD есть b, сторона $AC = x$, основание $AB = y$. Тогда $BC = a - x$, $CD = b - y$,

$$a^2 - 2ax + 2x^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 = y^2,$$

$$ax - x^2 = AC \times BC = AB \times CD = by - y^2 = by - a^2 + 2ax - 2x^2$$

и

$$by = a^2 - ax + x^2.$$

Возведем $a^2 - ax + x^2$ в квадрат и $a^4 - 2a^3x + 3a^2x^2 - 2ax^3 + x^4$ приравняем b^2y^2, т. е. $a^2b^2 - 2ab^2x + 2b^2x^2$. Располагая затем члены уравнения по порядку, мы получим

$$x^4 - 2ax^3 + (3a^2 - 2b^2)x^2 + (2ab^2 - 2a^3)x + a^4 - a^2b^2 = 0.$$

Прибавьте с обеих сторон по $b^4 - a^2b^2$; тогда уравнение примет вид

$$x^4 - 2ax^3 + (3a^2 - 2b^2)x^2 + (2ab^2 - 2a^3)x + a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = \\ = b^4 - a^2b^2.$$

Извлечение из обеих сторон квадратного корня даст

$$x^2 - ax + a^2 - b^2 = -b\sqrt{b^2 - a^2},$$

а последующее извлечение корня

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2 - b\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

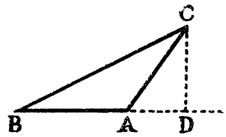
Геометрическое построение. Возьмите среднюю пропорциональную R между $b + a$ и $b - a$, среднюю пропорциональную S между R и $b - R$ и среднюю пропорциональную T между $\frac{1}{2}a + S$ и $\frac{1}{2}a - S$. Тогда стороны треугольника будут $\frac{1}{2}a + T$ и $\frac{1}{2}a - T$.

Задача VIII

Даны площадь, периметр и один из углов A какого-либо треугольника ABC. Определите все остальное (фиг. 21).

Положим периметр $= a$, площадь $= b^2$. Из вершины какого-либо неизвестного угла, например из C, опустите высоту CD на противолежащую сторону AB. Так как угол A дан, то будет известно отношение AC к CD, которое положите равным отношению d к e. Положите, далее, $AC = x$, тогда $CD = \frac{ex}{d}$. Если разделить удвоенную площадь на CD, то получится $AB = \frac{2b^2d}{ex}$. Прибавьте к этому AD, т. е. $\sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2}$, или же $\frac{x}{d}\sqrt{d^2 - e^2}$, и вы получите

$$BD = \frac{2b^2d}{ex} + \frac{x}{d}\sqrt{d^2-e^2}.$$



Фиг. 21

К квадрату BD прибавьте $\overline{CD}^2$; получится

$$\overline{BC}^2 = \frac{4b^4d^2}{e^2x^2} + x^2 + \frac{4b^2}{e}\sqrt{d^2 - e^2}.$$

Вычтите, далее, из периметра AC и AB, разность будет

$$BC = a - x - \frac{2b^2d}{ex}.$$

Квадрат $a - x - 2\frac{b^2d}{ex}$, т. е. $a^2 - 2ax + x^2 - 4\frac{ab^2d}{ex} + \frac{4b^2d}{e} + \frac{4b^4d^2}{e^2x^2}$, приравняйте ранее найденному квадрату; тогда, отбрасывая равные члены, вы получите

$$\frac{4b^2}{e}\sqrt{d^2 - e^2} = a^2 - 2ax - \frac{4ab^2d}{ex} + \frac{4b^2d}{e}.$$

Если обозначить данные члены $a^2 + \frac{4b^2d}{e} - \frac{4b^2}{e}\sqrt{d^2 - e^2}$ через $4af$, то после приведения получится

$$x^2 = 2fx - 2\frac{b^2d}{e},$$

откуда

$$x = f \pm \sqrt{f^2 - \frac{2b^2d}{e}}.$$

Мы пришли бы к тому же уравнению, определяя сторону AB, ибо стороны AB и AC совершенно равноправны относительно всех условий задачи. Поэтому, если принять, что AC есть $f - \sqrt{f^2 - \frac{2b^2d}{e}}$, то AB будет $f + \sqrt{f^2 - \frac{2b^2d}{e}}$ и обратно. Если вычесть сумму двух сторон $2f$ из периметра a, то разность даст третью сторону $BC = a - 2f$.

Задача IX

Даны высота, основание и сумма сторон; найти треугольник (фиг. 21).

Положим высоту $CD = a$, половину основания AB равной b, полусумму сторон $= c$ и их полуразность $= z$. Бо́льшая сторона, например BC, будет $c + z$, а меньшая, AC, будет $c - z$.

Вычтя $\overline{CD}^2$ из $\overline{BC}^2$, вы получите, что

$$BD = \sqrt{c^2 + 2cz + z^2 - a^2},$$

а вычтя $\overline{CD}^2$ из $\overline{AC}^2$, получите

$$AD = \sqrt{c^2 - 2cz + z^2 - a^2}.$$

Теперь вычтите AB из BD, тогда

$$AD = \sqrt{c^2 + 2cz + z^2 - a^2} - 2b.$$

Возведя в квадрат оба значения AD и расположив члены по порядку, вы будете иметь

$$b^2 + cz = b\sqrt{c^2 + 2cz + z^2 - a^2}.$$

Наконец, снова возведя в квадрат и расположив по порядку, вы получите

$$c^2z^2 - b^2z^2 = b^2c^2 - b^2a^2 - b^4,$$

откуда

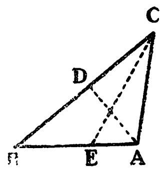
$$z = b\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2 - b^2}}.$$

Стороны теперь будут известны.

Задача X

Даны основание AB, сумма сторон $AC + BC$ и угол C. Определить стороны (фиг. 22).

Положите основание $= a$, полусумму сторон $= b$ и их полуразность $= x$. Бо̀льшая сторона BC будет $b + x$, а меньшая AC будет $b - x$. Из вершины какого-либо неизвестного угла, скажем из A, опустите высоту AD на противолежащую сторону BC. Так как угол C дан, то будет известно отношение AC к CD; положим его равным отношению d к e; тогда $CD = \frac{eb - ex}{d}$. Вместе с тем, согласно предл. 13 второй кн. „Начал“,



Фиг. 22

$\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{2BC}$, или же $\frac{2b^2 + 2x^2 - a^2}{2b + 2x} = CD$. Таким образом, вы получаете уравнение между значениями CD, а приведение этого уравнения даст

$$x = \sqrt{\frac{da^2 + 2eb^2 - 2db^2}{2d + 2e}}.$$

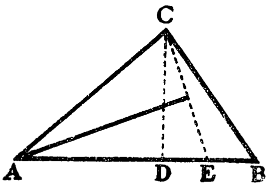
Стороны теперь будут известны.

Вывод будет проще, если мы станем искать углы при основании. Действительно, если провести биссектрису CE данного угла C, пересекающую основание в точке E, то $AB : (AC + BC) = AE : AC = \sin ACE : \sin CEA$. Вычтя из угла AEC и из его дополнения BEC половину угла C, вы получите углы ABC и BAC. [56]

Задача XI

Даны стороны треугольника, найти углы (фиг. 23).

Положим стороны треугольника $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$ и допустим, что ищется угол A. Опустите на AB высоту CD, противолежащую углу A. Прежде всего вы имеете $b^2 - c^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = (AD + BD) \times (AD - BD) = AB \times (2AD - AB) = 2AD \times a - a^2$,



Фиг: 23

т. е. $b^2 - c^2 = 2AD \times a - a^2$.

Следовательно, $AD = \frac{1}{2} a + \frac{b^2 - c^2}{2a}$.

Это дает первую теорему:

I. AB относится к $AC + BC$, как $AC - BC$ к четвертой пропорциональной $N \cdot AD = \frac{AB + N}{2}$. Далее, AC относится к AD, как радиус к косинусу угла A.

Кроме того,

$$\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2} =$$

$$= \frac{(a + b + c) \times (a + b - c) \times (a - b + c) \times (-a + b + c)}{4a^2}.$$

Умножая здесь корни из числителя и знаменателя на b, мы получим и вторую теорему:

II. $2ab$ относится к средней пропорциональной между $(a + b + c) \times (a + b - c)$ и $(a - b + c) \times (-a + b + c)$, как радиус к синусу угла A.

Отложите на AB прямую $AE = AC$ и проведите CE; угол ECD будет равен тогда половине угла A. Вычтите AD из AE; разность

$$DE = b - \frac{1}{2} a - \frac{(b^2 - c^2)}{2a} = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a} =$$

$$= \frac{(c + a - b) \times (c - a + b)}{2a}$$

и, следовательно,

$$\overline{DE}^2 = \frac{(c+a-b)\times(c+a-b)\times(c-a+b)\times(c-a+b)}{4a^2}.$$

Это дает III и IV теоремы:

III. $2ab$ относится к $(c+a-b)\times(c-a+b)$, как AC к DE и как радиус к синус-верзусу угла A.

IV. Средняя пропорциональная между $a+b+c$ и $a+b-c$ относится к средней пропорциональной между $c+a-b$ и $c-a+b$ (как CD к DE и) как радиус к тангенсу половины угла A или же как котангенс половины угла A к радиусу.

Кроме того,

$$\overline{CE}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{2ab^2+bc^2-ba^2-b^3}{a} =$$

$$= \frac{b}{a}(c+a-b)\times(c-a+b).$$

Это дает V и VI теоремы:

V. Средняя пропорциональная между $2a$ и $2b$ относится к средней пропорциональной между $c+a-b$ и $c-a+b$, или же 1 относится к средней пропорциональной между $\frac{c+a-b}{2a}$ и $\frac{c-a+b}{2b}$ (как AC к $\frac{1}{2}CE$ или CE к DE и) как радиус к синусу половины угла A.

VI. Средняя пропорциональная между $2a$ и $2b$ относится к средней пропорциональной между $a+b+c$ и $a+b-c$ (как CE к CD и) как радиус к косинусу половины угла A.

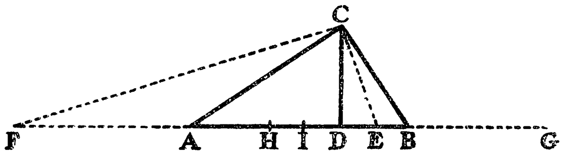
Если кроме углов требуется найти площадь треугольника, то нужно умножить $\overline{CD}^2$ на $\frac{\overline{AB}^2}{4}$ и искомая площадь будет равна квадратному корню из этого произведения,[57] т. е.

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\times(a+b-c)\times(a-b+c)\times(-a+b+c)}.$$

Задача XII

Даны стороны и основание некоторого прямолинейного треугольника; найти отрезки основания, высоту, площадь и углы (фиг. 24).

Допустим, что в треугольнике ABC даны стороны AC, BC и основание AB. Разделите AB в I пополам и (продолжив ее в обе стороны) отложите на ней AF и AE, равные каждая AC, и BG и BH, равные каждая BC. Проведите CE и CF,



Фиг. 24

и из точки C опустите на основание высоту CD. Тогда $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = (AD + BD) \times (AD - BD) = AB \times 2DI$. Значит, $DI = \dfrac{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2AB}$. Далее, $2AB : (AC + BC) = (AC - BC) : DI$. При помощи этой теоремы определяются отрезки основания.

Вычтите DI из IE, т. е. из $AC - \frac{1}{2}AB$; разность

$$DE = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 + 2AC \times AB - \overline{AB}^2}{2AB},$$

или

$$= \frac{(BC + AC - AB) \times (BC - AC + AB)}{2AB},$$

или

$$= \frac{EH \times EG}{2AB}.$$

Из FE или $2AC$ вычтите DE: разность

$$FD = \frac{\overline{AC}^2 + 2AC \times AB + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2AB},$$

или

$$=\frac{(AC+AB+BC)\times(AC+AB-BC)}{2AB},$$

или

$$=\frac{FG\times FH}{2AB}.$$

Так как CD есть средняя пропорциональная между DE и DF, CE — средняя пропорциональная между DE и EF, а CF — средняя пропорциональная между FD и FE, то

$$CD=\frac{\sqrt{FG\times FH\times HE\times EG}}{2AB},$$

$$CE=\sqrt{\frac{AC\times HE\times EG}{AB}}$$

и

$$CF=\sqrt{\frac{AC\times FG\times FH}{AB}}.$$

Умножьте $\frac{AB}{2}$ на CD и вы получите площадь

$$\frac{1}{4}\sqrt{FG\times FH\times HE\times EG}.$$

Угол A можно определить при помощи ряда теорем:

I. $2AB\times AC:HE\times EG=AC:DE=$ радиус : синус-верзусу угла A.[58]

II. $2AB\times AC\times FG:FH=AC:FD=$ радиус : косинус-верзусу A.

III. $2AB\times AC:\sqrt{FG\times FH\times HE\times EG}=AC:CD=$ радиус : синусу A.

IV. $\sqrt{FG\times FH}:\sqrt{HE\times EG}=CF:CE=$ радиус : тангенсу $\frac{A}{2}$.

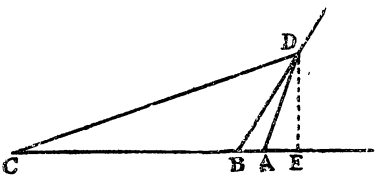
V. $\sqrt{HE\times EG}:\sqrt{FG\times FH}=CE:CF=$ радиус : котангенсу половины $\frac{A}{2}$.

VI. $2\sqrt{AB\times AC}:\sqrt{HE\times EG} = FE : CE =$ радиус : синусу $\frac{A}{2}$.

VII. $2\sqrt{AB\times AC}:\sqrt{FG\times FH} = FE : FC =$ радиус : косинусу $\frac{A}{2}$.

Задача XIII

Вставить данную прямую CD в данный угол CBD так, чтобы прямая DA, проведенная из ее конца D в данную точку A на продолжении прямой CB, образовала угол ADC, равный углу ABD (фиг. 25).



Фиг. 25

Положите $CD=a$, $AB=b$, $BD=x$; тогда $BD:BA=CD:AD$ и $AD=\frac{ab}{x}$. Опустите перпендикуляр DE; тогда

$$BE=\frac{\overline{DB}^2-\overline{AD}^2+\overline{BA}^2}{2BA}=\frac{x^2-\frac{a^2b^2}{x^2}+b^2}{2b}.$$

Так как угол DBA дан, положите $BD:BE=b:e$, что даст второе значение $BE=\frac{ex}{b}$. Следовательно,

$$x^2-\frac{a^2b^2}{x^2}+b^2=2ex,$$

откуда

$$x^4-2ex^3+b^2x^2-a^2b^2=0.$$

Задача XIV

Найти треугольник ABC, три стороны которого AB, AC, BC и высота CD образуют арифметическую прогрессию (фиг. 26).

Положите $AC = a$, $BC = x$; тогда $DC = 2x - a$ и $AB = 2a - x$. Далее,

$$AD = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{4ax - 4x^2}$$

и

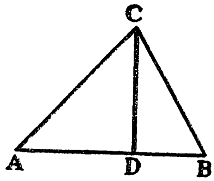
$$BD = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}.$$

Таким образом, с другой стороны,

$$AB = \sqrt{4ax - 4x^2} + \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2},$$

и, значит,

$$2a - x = \sqrt{4ax - 4x^2} + \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2},$$



Фиг. 26

или

$$2a - x - \sqrt{4ax - 4x^2} = \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}.$$

Возведя обе стороны в квадрат, мы получим

$$4a^2 - 3x^2 - (4a - 2x) \times \sqrt{4ax - 4x^2} = 4ax - 3x^2 - a^2,$$

или же

$$5a^2 - 4ax = (4a - 2x)\sqrt{4ax - 4x^2}.$$

Снова возведя обе стороны в квадрат и расположив члены по порядку, мы получим

$$16x^4 - 80ax^3 + 144a^3x^2 - 104a^3x + 25a^4 = 0.$$

После деления на $2x - a$ это уравнение примет вид

$$8x^3 - 36ax^2 + 54a^2x - 25a^3 = 0.$$

Решив его, мы выразим значение x через a, которое можно выбрать произвольно. Зная a и x, постройте треугольник со сторонами $2a - x$, a и x; высота, опущенная в нем на сторону $2a - x$, будет равна $2x - a$.

Действия несколько упростятся, если я положу разность сторон равной d, а высоту равной x; результирующее уравнение при этом будет

$$x^3 = 24d^2x + 48d^3.$$

Задача XV

Найти треугольник ABC, три стороны которого AB, AC, BC и высота CD образуют геометрическую прогрессию (фиг. 26).

Положите $AC=x$ и $BC=a$, тогда $AB=\frac{x^2}{a}$ и $CD=\frac{a^2}{x}$. Далее,

$$AD=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{x^2-\frac{a^4}{x^2}}$$

и

$$BD=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{DC}^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^4}{x^2}}.$$

Значит,

$$\frac{x^2}{a}(=AB)=\sqrt{x^2-\frac{a^4}{x^2}}+\sqrt{a^2-\frac{a^4}{x^2}},$$

или же

$$\frac{x^2}{a}-\sqrt{a^2-\frac{a^4}{x^2}}=\sqrt{x^2-\frac{a^4}{x^2}}.$$

Возведя обе стороны в квадрат, мы получим

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{2x^2}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^4}{x^2}}+a^2-\frac{a^4}{x^2}=x^2-\frac{a^4}{x^2},$$

или

$$x^4-a^2x^2+a^4=2a^2x\sqrt{x^2-a^2}.$$

Снова возводя обе стороны в квадрат, будем иметь

$$x^8-2a^2x^6+3a^4x^4-2a^6x^2+a^8=4a^4x^4-4a^6x^2,$$

или

$$x^8-2a^2x^6-a^4x^4+2a^6x^2+a^8=0.$$

Разделите это уравнение на $x^4-a^2x^2-a^4$; это даст $x^4-a^2x^2-a^4$. Следовательно,

$$x^4=a^2x^2+a^4.$$

Извлекая корень, мы получим

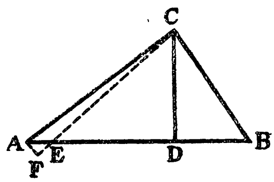
$$x^2=\frac{1}{2}a^2+\sqrt{\frac{5}{4}a^4}$$

и

$$x=a\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}.$$

Итак, выберите длину a или BC произвольно и положите $BC:AC=AC:AB=1:\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}$. В построенном по этим сторонам треугольнике ABC высота DC будет находиться в требуемом отношении к стороне BC.

Другое решение. Так как $AB:AC=BC:CD$, то я утверждаю, что угол ACB — прямой (фиг. 27). Если вы это отрицаете, то, проведя CE, постройте прямой угол ECB. Тогда (предл. 8 кн. 6 „Начал") треугольники BCE и DBC будут подобными и, значит, $BE:EC=BC:CD$, а значит, $BE:EC=AB:AC$. Опустите на CE перпендикуляр AF; тогда, в силу параллельности линий AF и CB, $BE:EC=AF:EF=AB:FC$.



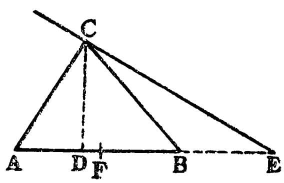
Фиг. 27

Следовательно, согласно предл. 9 кн. 5 „Начал", $AC=FC$, т. е. гипотенуза прямоугольного треугольника равна одной из его сторон, что противоречит предл. 19 кн. 1 „Начал".[59] Значит, угол ECB не может быть прямым, и, следовательно, таковым должен быть угол ACB. Поэтому $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$. Но $\overline{AC}^2=AB\times BC$ и, значит, $AB\times BC+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$. Извлекая отсюда корень, вы найдете, что $AB=\frac{BC}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}\overline{BC}^2}$. Положите поэтому $BC:AB=1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и возьмите AC средней пропорциональной между BC и AB. Если построить по этим сторонам треугольник, то линии AB, AC, BC, DC будут непрерывно пропорциональными.

Задача XVI

Построить на данном основании AB треугольник ABC, вершина которого C лежит на данной по положению прямой CE и основание которого есть среднее арифметическое сторон (фиг. 28).

Разделите основание AB пополам в F, продолжите его до пересечения в точке E с данной по положению прямой EC и опустите на основание высоту CD. Если положить $AB=a$, $FE=b$ и $BC-AB=x$, то $BC=a+x$, $AC=$ $=a-x$ и, согласно предл. 13 кн. 2 „Начал“,



Фиг. 28

$$BD=\frac{\overline{BC}^2-\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}{2AB}=2x+\frac{a}{2}.$$

Следовательно, $FD=2x$, $DE=b+2x$ и $CD=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{DB}^2}=$ $=\sqrt{\frac{3}{4}a^2-3x^2}$. Так как положения прямых CE и AB заданы, то данными являются также угол CED и, значит, отношение DE к CD. Если положить это отношение равным d к e, то получится пропорция $d:e=(b+2x):\sqrt{\frac{3}{4}a^2-3x^2}$.

Составив произведения крайних и средних членов, мы получим уравнение

$$eb+2ex=d\sqrt{\frac{3}{4}a^2-3x^2},$$

а возведя его стороны в квадрат и расположив члены по порядку, будем иметь

$$x^2 = \frac{\frac{3}{4}d^2a^2 - e^2b^2 - 4e^2bx}{4e^2 + 3d^2}.$$

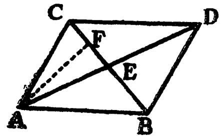
Извлекая отсюда корень, мы найдем

$$x = \frac{-2e^2b + d\sqrt{3e^2a^2 - 3e^2b^2 + \frac{9}{4}d^2a^2}}{4e^2 + 3d^2}.$$

Когда дано будет x, то будут даны также $BC = a + x$ и $AC = a - x$.

Задача XVII

Даны стороны AB, BD, DC и AC, а также одна из диагоналей BC некоторого параллелограма. Найти другую диагональ AD (фиг. 29).



Фиг. 29

Допустим, что точка пересечения обеих диагоналей есть E. Опустите на диагональ BC перпендикуляр AF; тогда, согласно предл. 13 кн. 2 „Начал“, $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{2BC} = CF$ и вместе с тем $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2}{2EC} = CF$. Так как $EC = \frac{1}{2}BC$ и $AE = \frac{1}{2}AD$, то

$$\frac{\overline{AC}^2 - \frac{1}{4}\overline{AD}^2 + \frac{1}{4}\overline{BC}^2}{BC} = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{2BC}.$$

После приведения мы получим

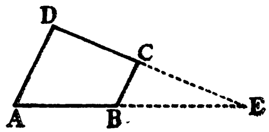
$$AD = \sqrt{2\overline{AC}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}.$$

Отсюда между прочим видно, что во всяком параллелограме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей.

Задача XVIII

Даны углы, площадь и периметр четырехугольника $ABCD$. Найти стороны (фиг. 30).

Продолжите какие-либо две стороны, скажем AB и DC, до пересечения в точке E и положите $AB = x$ и $BC = y$. Так как все углы даны, то даны отношения BC к CE и BE, которые мы положим равными отношениям d к e и к f. Тогда $CE = \frac{ey}{d}$ и $BE = \frac{fy}{d}$, а значит, $AE = x + \frac{fy}{d}$. По той же причине даны также отношения AE к AD и к DE, которые мы положим равными отношениям g к d и h к d. Тогда $AD = \frac{dx + fy}{g}$ и $ED = \frac{dx + fy}{h}$.



Фиг. 30

Поэтому

$$CD = \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d},$$

и, значит, сумма всех сторон есть $x + y + \frac{dx + fy}{g} + \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}$. Так как эта сумма дана, то обозначьте ее a. Для сокращения замените данную величину $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{h}$ через $\frac{p}{r}$, а данную величину $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h} - \frac{e}{d}$ через $\frac{q}{r}$. Тогда вы получите уравнение

$$\frac{px + qy}{r} = a.$$

Кроме того, так как даны все углы, то дано и отношение $\overline{BC}^2$ к треугольнику BCE, которое я полагаю равным m к n; тогда треугольник $BCE = \frac{ny^2}{m}$. Дано также отношение $\overline{AE}^2$ к треугольнику ADE, которое я полагаю равным m

к d, тогда треугольник $ADE = \frac{d^2x^2 + 2dfxy + f^2y^2}{dm}$. Поскольку площадь AC, представляющая собой разность этих двух треугольников, дана, мы положим ее равной b^2. Следовательно,

$$\frac{d^2x^2 + 2dfxy + f^2y^2 - dny^2}{dm} = b^2.$$

Теперь вы имеете два уравнения, приведение которых позволит всё определить. Действительно, из первого уравнения $x = \frac{ra - qy}{p}$, и если это значение x подставить во второе уравнение, то оно примет вид

$$\frac{dr^2a^2 - 2dqray + dq^2y^2}{p^2m} + \frac{2afry - 2fqy^2}{pm} + \frac{f^2y^2 - dny^2}{dm} = b^2.$$

Заменяя для сокращения данную величину $\frac{dq^2}{p^2} - \frac{2fq}{p} - \frac{f^2}{d} - n$ через s, данную величину $\frac{adqr}{p^2} - \frac{afr}{p}$ через st и, наконец, данную величину $b^2m - \frac{dr^2a^2}{p^2}$ через stv, мы получим, что

$$y^2 = 2ty + tv,$$

или что

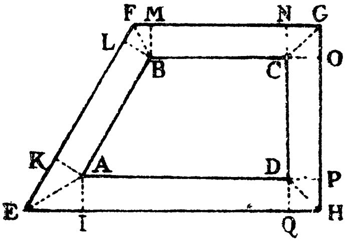
$$y = t + \sqrt{t^2 + tv}.$$

Задача XIX

Окружить пруд $ABCD$ дорожкой $ABCDEFGH$ данной площади и одинаковой повсюду ширины (фиг. 31).

Допустим, что ширина дорожки есть x, а ее площадь a^2 Опустите из точек A, B, C, D на линии EF, FG, GH, HE перпендикуляры AK, BL, BM, CN, CO, DP, DQ, AI. Дорожка разделится на четыре четырехугольника KI, LM, NO, PQ и четыре прямоугольника AL, BN, CP, DI, которые все имеют ширину x и длины, равные длинам сторон данного четырехугольника. Положим сумму сторон $AB + BC + CD + DA = b$, тогда сумма прямоугольников будет bx.

Проведите затем линии AE, BF, CG, DH и так как $AI = AK$, то угол $AEI =$ углу $AEK = \frac{1}{2} IEK = \frac{1}{2} DAB$. Таким образом, угол AEI дан и, значит, дано отношение AI к EI, которое я полагаю равным d к e; тогда $IE = \frac{ex}{d}$. Умножьте IE на $\frac{1}{2} AI$, или $\frac{1}{2} x$, площадь треугольника



Фиг. 31

AEI будет $\frac{ex^2}{2d}$. В силу равенства углов и сторон треугольники AEK и AEI равны и, значит, четырехугольник $IK = 2$ треугольникам $AEI = \frac{ex^2}{d}$. Положив $BL{:}LF = d{:}f$, $CN{:}NG = d:g$ и $DP:PH = d:h$ (ибо все эти отношения даны, поскольку даны углы B, C, D), вы найдете аналогичным образом, что четырехугольник $LM = \frac{fx^2}{d}$, $NO = \frac{gx^2}{d}$ и $PQ = \frac{hx^2}{d}$. Следовательно, сумма четырех четырехугольников $IK + LM + NO + PQ$ равна $\frac{ex^2}{d} + \frac{fx^2}{d} + \frac{gx^2}{d} + \frac{hx^2}{d}$, или же, если положить $e + f + g + h = p$, равна $\frac{px^2}{d}$. Значит, общая площадь дорожки

$$\frac{px^2}{d} + bx = a^2.$$

Если поделить все члены этого уравнения на $\frac{p}{d}$ и извлечь его корень, то

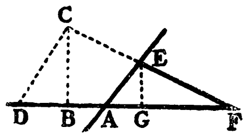
$$x = \frac{-db + \sqrt{b^2d^2 + 4a^2pd}}{2p}.$$

Найдя таким образом ширину дорожки, ее легко описать.[60]

Задача XX

Из данной точки C провести прямую CF, образующую вместе с двумя другими данными по положению прямыми AE, AF [61] треугольник AEF данной величины (фиг. 32).

Проведите CD параллельно AE и опустите на AF перпендикуляры CB и EG. Положите $AD = a$, $CB = b$, $AF = x$ и площадь треугольника AEF равной c^2. В силу пропорций $DF : AF = (DC : AE) = CB : EG$, или же $(a + x) : x = b : \frac{bx}{a+x}$, величина $EG = \frac{bx}{a+x}$. Умножьте это на $\frac{1}{2} AF$ и вы получите величину площади треугольника AEF, равной c^2, в виде $\frac{bx^2}{2a + 2x}$. Если расположить члены по порядку, уравнение примет вид



Фиг. 32

$$x^2 = \frac{2c^2x + 2c^2a}{b},$$

откуда

$$x = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 2c^2ab}}{b}.$$

Точно так же можно провести через данную точку прямую линию, которая делит в данном отношении какой-либо треугольник или четырехугольник.

Задача XXI

На данной прямой DF определить такую точку C, что разность прямых AC и BC, проведенных из нее к двум другим данным по положению точкам A и B, есть величина данная (фиг. 33).

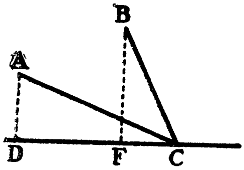
Опустите из данных точек на данную прямую перпендикуляры AD и BF и положите $AD = a$, $BF = b$, $DF = c$, $DC = x$; тогда $AC = \sqrt{a^2 + x^2}$, $FC = x - c$ и $BC = \sqrt{b^2 + x^2 - 2cx + c^2}$.

Допустим, что AC есть бо́льшая из двух прямых, а BC — меньшая, и положим их разность равной d; тогда

$$\sqrt{a^2 + x^2} - d = \sqrt{b^2 + x^2 - 2cx + c^2}.$$

Возводя обе стороны в квадрат, мы получим

$$a^2 + x^2 + d^2 - 2d\sqrt{a^2 + x^2} = b^2 + x^2 - 2cx + c^2.$$



Фиг. 33

Проделав приведения и положив для сокращения данное $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2e^2$, мы далее будем иметь

$$e^2 + cx = d\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Вновь возводя обе стороны в квадрат, мы получим

$$e^4 + 2ce^2x + c^2x^2 = d^2a^2 + d^2x^2$$

и после приведения уравнения

$$x^2 = \frac{2e^2cx + e^4 - a^2d^2}{d^2 - c^2},$$

откуда

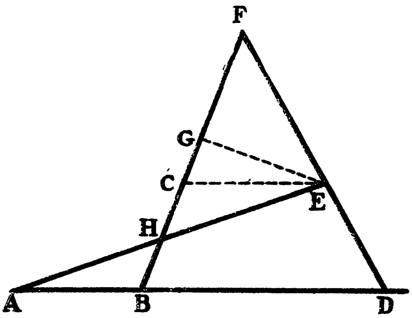
$$x = \frac{e^2c + \sqrt{e^4d^2 - a^2d^4 + a^2d^2c^2}}{d^2 - c^2}.$$

Аналогично решается задача, в которой даны сумма линий AC и BC или же сумма или разность их квадратов, или их отношение, или произведение или угол между ними, а также задача, в которой вместо прямой DC применяется окружность круга или какая-нибудь другая кривая; при этом (особенно в последнем случае) вычисление относится к прямой, соединяющей точки A и B.

Задача XXII

Даны по положению три прямые AD, AE, BF; требуется провести четвертую прямую DF так, чтобы ее части DE, EF, заключенные между первыми прямыми, имели данные длины (фиг. 34).

Опустите на BF перпендикуляр EG и проведите CE параллельно AD. Три данные по положению прямые пересекаются в A, B и H. Положите $AB=a$, $BH=b$, $AH=c$, $ED=d$, $EF=e$ и $HE=x$. Из подобия треугольников ABH, ECH имеем $AH:AB=HE:CE$, откуда $CE=\frac{ax}{c}$ и $AH:HB=$ $=HE:HC$, откуда $HC=\frac{bx}{c}$. Сложите HB и HC и вы получите $BC=\frac{bc+bx}{c}$. Далее, из подобия треугольников FEC и FDB следует, что $ED:CB=FE:FC$, откуда $FC=\frac{ebx+ebc}{dc}$. Наконец, в силу предл. 12 и 13 кн. 2 „Начал“



Фиг. 34

$$\frac{\overline{EC}^2-\overline{EF}^2}{2FC}+\frac{1}{2}FC=(CG)=\frac{\overline{HE}^2-\overline{EC}^2}{2CH}-\frac{1}{2}CH,$$

т. е.

$$\frac{\frac{a^2x^2}{c^2}-e^2}{\frac{2ebx+2ebc}{dc}}+\frac{ebx+ebc}{2dc}=\frac{x^2-\frac{a^2x^2}{c^2}}{\frac{2bx}{c}}-\frac{bx}{2c},$$

или

$$\frac{a^2dx^2-e^2dc^2}{ebx+ebc}+\frac{ebx}{d}+\frac{ebc}{d}=\frac{c^2x-a^2x-b^2x}{b}.$$

Положите здесь для сокращения $\frac{c^2 - a^2 - b^2}{b} - \frac{eb}{d} = m$ и вы получите

$$\frac{a^2dx^2 - e^2dc^2}{ebx + ebc} + \frac{ebc}{d} = mx.$$

Если умножить все члены на $c + x$, то будет

$$\frac{a^2dx^2 - e^2dc^2}{eb} + \frac{ebcx + ebc^2}{d} = mx^2 + mcx.$$

Замените еще $\frac{a^2d}{eb} - m$ на p, $mc - \frac{ebc}{d}$ на $2pq$ и $\frac{-ebc^2}{d} + \frac{e^2dc^2}{eb}$ на pr^2; тогда

$$x^2 = 2qx + r^2$$

и

$$x = q \pm \sqrt{q^2 + r^2}.$$

Найдя x, или HE, проведите EC параллельно AB, затем возьмите $FC : BC = e : d$ и проведите FED,— она и удовлетворит условиям вопроса.

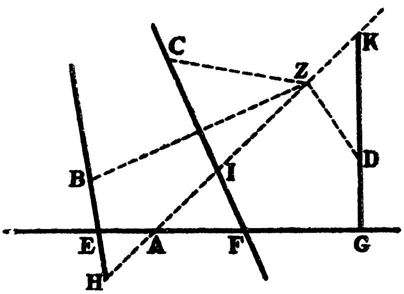
Задача XXIII

Требуется определить точку Z, обладающую тем свойством, что если из нее провести к четырем данным по положению прямым FA, EB, FC, GD под данными углами четыре прямые ZA, ZB, ZC и ZD, то даны будут прямоугольник из двух прямых ZA и ZB, а также сумма двух других ZC и ZD (фиг. 35).

Выберите одну из данных по положению линий, скажем FA, и одну из незаданных своим положением, именно линию ZA, проведенную к FA; по длинам этих линий можно определить точку Z. Продолжите остальные данные по положению прямые до пересечения с выбранными, также продолженными в случае нужды, как видно на чертеже. Положите $EA = x$ и $AZ = y$. Так как углы треугольника AEH даны, то дано отношение AE к AH; положим его равным p к q, тогда $AH = \frac{qx}{p}$.

Если прибавить AZ к AH, то $ZH = y + \frac{qx}{p}$. Так как углы треугольника HZB даны, то дано отношение HZ к ZB; положим его равным n к p, тогда $ZB = \frac{py + qx}{n}$.

Если, кроме того, данную EF обозначить a, то AF будет $a - x$. Так как углы треугольника AFI даны, то мы положим отношение AF к AI равным p к r, что даст $AI = \frac{ra - rx}{p}$. Вычтите AI из AZ, разность будет $IZ = y - \frac{ra - rx}{p}$. Так как углы треугольника ICZ даны, то положим отношение IZ к ZC равным отношению m к p, тогда $ZC = \frac{py - ra + rx}{m}$.



Фиг. 35

Аналогичным образом, если вы положите $EG = b$, $AG : AK = l : s$ и $ZK : ZD = p : l$, то найдете, что $ZD = \frac{sb - sx - ly}{p}$.

Далее, согласно условиям вопроса, сумма прямых ZC и ZD равна некоторой данной величине, скажем f, т. е.

$$\frac{py - ra + rx}{m} + \frac{sb - sx - ly}{p} = f.$$

Прямоугольник из двух других прямых также должен быть равен некоторой данной величине, скажем g^2, т. е.

$$\frac{py^2 + qxy}{n} = g^2.$$

Таким образом, для определения x и y вы получаете два уравнения. Из последнего уравнения

$$x = \frac{ng^2 - py^2}{qy},$$

а если подставить это значение x в первое уравнение, то оно примет вид

$$\frac{py - ra}{m} + \frac{rng^2 - rpy^2}{mqy} + \frac{bs - ly}{p} - \frac{sng^2 - spy^2}{pgy} = f,$$

или после приведения

$$y^2 = \frac{apqry - bmqsy + fmqy + g^2mns - g^2npr}{p^2q - p^2r - mlq + mps}.$$

Полагая для сокращения

$$\frac{apqr - bmqs + fmpq}{p^2q - p^2r - mlq + mps} = 2h$$

и

$$\frac{g^2mns - g^2npr}{p^2q - p^2r - mlq + mps} = k^2,$$

вы получите

$$y^2 = 2hy + k^2,$$

или

$$y = h \pm \sqrt{h^2 + k^2}.$$

Найдя при помощи этого уравнения y, мы получим x из уравнения

$$x = \frac{ng^2 - py^2}{qy},$$

и этого будет достаточно для определения точки Z.

Таким же путем можно определить положение точки, обладающей тем свойством, что если провести от нее к большему или меньшему числу заданных по положению прямых другие прямые, то сумма или разность, или произведение одних из этих прямых будут даны, или будут равны сумме или разности, или произведению остальных, либо же будут удовлетворять каким-либо иным данным условиям. [62]

Задача XXIV

Вставить в прямой угол EAF прямую EF данной величины так, чтобы она прошла через данную точку C, одинаково удаленную от сторон прямого угла (фиг. 36).

Дополните квадрат $ABCD$ и разделите точкой G линию EF пополам. Положите затем CB или $CD = a$, EG или $FG = b$ и $CG = x$; тогда $CE = x - b$ и $CF = x + b$. Так как $\overline{CF}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{BF}^2$, то $BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$. Наконец, в силу подобия треугольников CDE и FBC, $CE : CD = CF : BF$, или же $(x - b) : a = (x + b) : \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$, откуда

$$ax + ab = (x - b)\sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}.$$

Возводя обе стороны этого уравнения в квадрат и располагая члены по порядку, вы получите

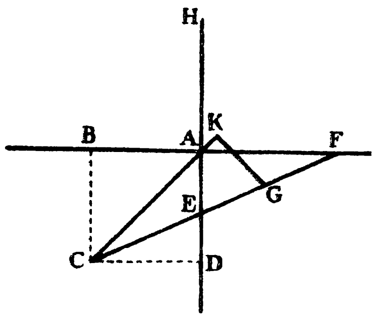
$$x^4 = (2a^2 + 2b^2)x^2 + 2a^2b^2 - b^4.$$

Если извлечь корень, как в квадратном уравнении, то

$$x^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}$$

и, значит,

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}}.$$



Фиг. 36

Найденное таким образом значение x, или CG, дает CE или CF, а с помощью той или иной из этих двух прямых определяется точка E или точка F, удовлетворяющая условию задачи.

Другое решение. Положите $CE = x$, $CD = a$ и $EF = b$; тогда $CF = x + b$ и $BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$. Далее, так как $CE : CD = CF : BF$, или $x : a = (x + b) : \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$, то

$$ax + ab = x\sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}.$$

Возводя обе стороны в квадрат и упорядочив члены, мы получим

$$x^4 + 2bx^3 + (b^2 - 2a^2)\,x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0.$$

Корень этого уравнения четвертой степени найти труднее, чем в предыдущем случае. Его можно, однако, отыскать следующим путем. Возьмите

$$x^4 + 2bx^3 + (b^2 - 2a^2)\,x^2 - 2a^2bx + a^4 = a^2b^2 + a^4;$$

извлекая из обеих сторон корень, вы найдете, что

$$x^2 + bx - a^2 = \pm a\sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Мне представляется здесь удобный случай привести правило выбора членов для вычисления.

Если какие-либо два члена настолько подобны или сходны в отношении к другим членам вопроса, что, применяя любой из них, вы получите совершенно сходные уравнения, или же, что, применяя их оба, вы получите конечное уравнение, в котором они обладают одинаковыми измерениями и одинаковой формой, отличаясь, быть может, лишь знаками $+$ и $-$ (увидеть это легко), то лучше всего не применять ни одного из них, а взять вместо них третий член, который находится в одинаковом отношении к ним обоим, например их полусумму или их полуразность, или, быть может, среднюю пропорциональную, или, наконец, любую другую величину, которая находится с ними в одинаковом отношении и не имеет себе подобных.

Например, я замечаю, что в предыдущей задаче линия EF находится в одинаковом отношении к AB и AD (это будет очевидно, если вы проведете линию EF в углу BAH) и, значит, у меня нет никаких оснований предполагать, что в качестве искомой неизвестной удобнее взять ED, чем BF, или AE удобнее, чем AF, или же CE удобнее, чем CF. Поэтому в первом решении я выбрал, вместо порождающих указанную неопределенность точек E и F, промежуточную точку G, находящуюся в одинаковом отношении к обеим линиям AB и AD. Я не стал затем для определения искомой величины опускать из этой точки G перпендикуляр на AF, ибо я мог бы с таким же основанием опустить его на AD. Поэтому я не опустил его ни на CB, ни на CD, но принял за искомую величину CG, для которой не имеется подобной; таким образом, я получил уравнение четвертой степени без нечетных степеней.

Заметив, что точка G лежит на окружности круга, описанного из центра A радиусом GE, я мог бы также опустить перпендикуляр GK на диагональ AC и искать AK или CK, имеющие одинаковое отношение к AB и AD. Это привело бы меня к уравнению второй степени

$$y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2,$$

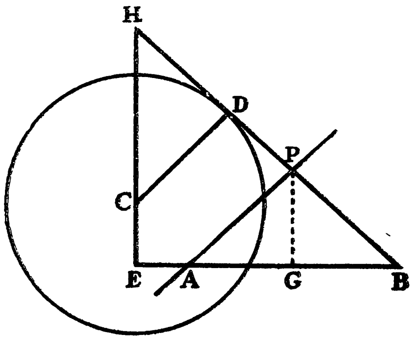
в котором $y = AK$, $e = AC$ и $b = EG$. Найдя таким ooразом AK, следует восстановить перпендикуляр KG; через его точку встречи G с названной окружностью и пройдет CF[63].

Именно этому правилу я следовал в задачах IX и X, в которых требовалось определить две сходные стороны AC и BC треугольника. Именно, вместо того чтобы искать ту или другую из этих сторон, я определял их полуразность. Польза этого правила станет еще очевиднее в задаче XXVIII.

Задача XXV

Из центра C радиусом CD описан круг; требуется провести к этому кругу касательную BD так, чтобы ее часть PB, заключенная между данными по положению прямыми AP и AB, имела данную длину (фиг. 37).

Опустите из центра на одну из данных по положению прямых, скажем на AB, перпендикуляр CE и продолжите последний до пересечения с касательной DB в точке H. Опустите также на AB перпендикуляр PG и положите $EA = a$, $EC = b$, $CD = c$, $BP = d$ и $PG = x$. В силу подобия треугольников PGB и CDH вы получите $GB(\sqrt{d^2-x^2}):PB=CD:CH$, откуда $CH=\dfrac{cd}{\sqrt{d^2-x^2}}$. Сложите CE с CH и вы получите $EH=b+\dfrac{cd}{\sqrt{d^2-x^2}}$. Далее, $PG:GB=EH:BE$, откуда $BE=\dfrac{b}{x}\sqrt{d^2-x^2}+\dfrac{cd}{x}$. Кроме того, так как угол PAG дан, то дано также отношение PG к AG и если положить это отношение равным e к f, то $AG=\dfrac{fx}{e}$. Сложите EA, AG и BG и вы получите, наконец, что $EB=a+\dfrac{fx}{e}+\sqrt{d^2-x^2}$. Поэтому



Фиг. 37

$$a+\frac{fx}{e}+\sqrt{d^2-x^2}=\frac{b}{x}\sqrt{d^2-x^2}+\frac{cd}{x},$$

или, переставляя члены,

$$a+\frac{fx}{e}-\frac{cd}{x}=\frac{b-x}{x}\sqrt{d^2-x^2}.$$

Возведя обе стороны в квадрат, вы получите

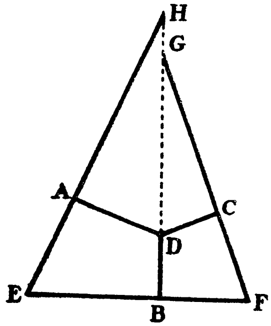
$$a^2+\frac{2afx}{e}-\frac{2acd}{x}+\frac{f^2x^2}{e^2}-\frac{2cdf}{e}+\frac{c^2d^2}{x^2}=$$
$$=\frac{b^2d^2}{x^2}-b^2-\frac{2bd^2}{x}+2bx+d^2-x^2,$$

и после должных приведений

$$x^4+\frac{(2aef-2be^2)\,x^3+(a^2e^2+b^2e^2-d^2e^2-2cdef)\,x^2}{e^2+f^2}+$$
$$+\frac{(2bd^2e^2-2acde^2)\,x+c^2d^2e^2-b^2d^2e^2}{e^2+f^2}=0.$$

Задача XXVI

Даны по положению три прямые AE, BF, CF; требуется найти точку D, обладающую тем свойством, что если из нее опустить на эти прямые перпендикуляры DA, DB, DC, то эти перпендикуляры будут между собой в данном отношении (фиг. 38).



Фиг. 38

Продолжите одну из данных по положению прямых, а также опущенный на нее перпендикуляр, скажем прямую BF и перпендикуляр BD, до пересечения их с прямыми AE и FC. Пусть BF пересечет их в точках E и F, а BD в точках G и H. Положите $EB = x$ и $EF = a$, тогда $BF = a - x$. Так как прямые EF, EA и FC даны по положению, то даны также углы E и F и, значит, отношения сторон треугольников EBH и FBG. Положим, что отношение EB к BH есть d к e, тогда

$$BH = \frac{ex}{d}$$

и

$$EH = \sqrt{\overline{EB}^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{x^2 + \frac{e^2x^2}{d^2}} = \frac{x}{d}\sqrt{d^2 + e^2}.$$

Предположим еще, что BF относится к BG, как d к f, тогда

$$BG = \frac{fa - fx}{d}$$

и

$$FG = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2} = \sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + \frac{f^2a^2 - 2f^2ax + f^2x^2}{d^2}},$$

т. е.

$$FG = \frac{a - x}{d}\sqrt{d^2 + f^2}.$$

Положите далее $BD = y$, тогда $HD = \frac{ex}{d} - y$ и $GD = \frac{fa - fx}{d} - y$. Далее, $AD : HD = BE : HE = d : \sqrt{d^2 + e^2}$ и $DG : GD = BF : FG = d : \sqrt{d^2 + f^2}$. Поэтому $AD = \frac{ex - dy}{\sqrt{d^2 + e^2}}$, а $DC = \frac{fa - fx - dy}{\sqrt{d^2 + f^2}}$. Наконец, так как даны отношения линий BD, AD, DC, то примем, что $BD : AD = \sqrt{d^2 + e^2} : (h - d)$, тогда

$$\frac{hy - dy}{\sqrt{d^2 + e^2}} (= AD) = \frac{ex - dy}{\sqrt{d^2 + e^2}},$$

откуда $hy = ex$. Положим еще, что $BD : DC = \sqrt{d^2 + f^2} : (k - d)$, тогда

$$\frac{ky - dy}{\sqrt{d^2 + f^2}} (= DC) = \frac{fa - fx - dy}{\sqrt{d^2 + f^2}},$$

откуда $ky = fa - fx$. Поэтому

$$\frac{ex}{h} (= y) = \frac{fa - fx}{k}$$

и после приведения

$$x = \frac{fha}{ek + fh}.$$

Возьмите поэтому

$$EB : EF = h : \left(\frac{ek}{f} + h\right)$$

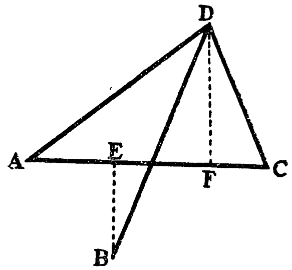
и затем

$$BD : EB = e : h$$

и вы получите искомую точку D.

Задача XXVII

Найти точку D, обладающую тем свойством, что проведенные из нее к трем данным точкам A, B, C три прямые DA, DB, DC находятся между собою в данном отношении (фиг. 39).



Фиг. 39.

Соедините какие-либо две из трех данных точек, например A и C, прямой и из третьей точки B, а также из искомой точки D опустите на AC перпендикуляры BE и DF. Положите $AE = a$, $AC = b$, $EB = c$, $AF = x$ и $FD = y$.

Тогда $\overline{AD}^2 = x^2 + y^2$, $FC = b - x$, $\overline{CD}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{FD}^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, $EF = x - a$ и $\overline{BD}^2 = \overline{EF}^2 + (EB + FD)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + c^2 + 2cy + y^2$. Так как AD и CD находятся в данном отношении, положим его равным отношению d к e; тогда $CD = \frac{e}{d}\sqrt{x^2 + y^2}$. Так как AD находится в данном отношении также к BD, положим его равным отношению d к f; тогда $BD = \frac{f}{d}\sqrt{x^2 + y^2}$. Следовательно,

$$\frac{e^2x^2 + e^2y^2}{d^2} \left(= \overline{CD}^2\right) = b^2 - 2bx + x^2 + y^2,$$

и

$$\frac{f^2x^2 + f^2y^2}{d^2} \left(= \overline{BD}^2\right) = x^2 - 2ax + a^2 + c^2 + 2cy + y^2.$$

Если положить здесь для сокращения $\frac{d^2 - e^2}{d} = p$ и $\frac{d^2 - f^2}{d} = q$, то получится

$$b^2 - 2bx + \frac{px^2}{d} + \frac{p}{d}y^2 = 0$$

и
$$a^2 + c^2 - 2ax + 2cy + \frac{q}{d} x^2 + \frac{q}{d} y^2 = 0.$$

Из первого уравнения следует, что

$$\frac{2bqx - b^2q}{p} = \frac{q}{d} x^2 + \frac{q}{d} y^2.$$

Второе уравнение, если в него подставить вместо $\frac{q}{d} x^2 + \frac{q}{d} y^2$ его значение $\frac{2bqx - b^2q}{p}$, примет вид

$$\frac{2bqx - b^2q}{p} + a^2 + c^2 - 2ax + 2cy = 0.$$

Положите еще для сокращения $m = a - \frac{bq}{p}$ и $2cn = \frac{b^2q}{p} - a^2 - c^2$ и вы получите

$$2mx + 2cn = 2cy,$$

что после деления членов на $2c$ даст

$$\frac{mx}{c} + n = y.$$

Подставьте в уравнение

$$b^2 - 2bx + \frac{p}{d} x^2 + \frac{p}{d} y^2 = 0$$

вместо y^2 квадрат $\frac{mx}{c} + n$ и вы получите, что

$$b^2 - 2bx + \frac{p}{d} x^2 + \frac{pm^2}{dc^2} x^2 + \frac{2pmn}{dc} x + \frac{pn^2}{d} = 0.$$

Если, наконец, для сокращения вы положите здесь $\frac{p}{d} + \frac{pm^2}{dc^2} = \frac{b}{r}$, $b - \frac{pmn}{dc} = \frac{sb}{r}$ и $b^2 + \frac{pn^2}{d} = \frac{tb^2}{r}$, то получится

$$x^2 = 2sx - tb,$$

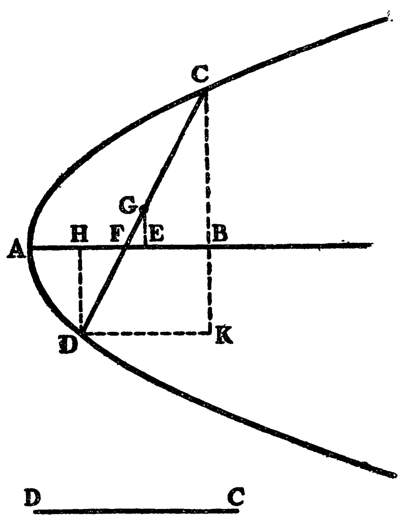
а извлекая корень,

$$x = s \pm \sqrt{s^2 - tb}.$$

После того как x будет найден, уравнение $\frac{mx}{c} + n = y$ даст y. А по данным x и y, т. е. AF и FD, определится и искомая точка D.

Задача XXVIII

Вписать в данное коническое сечение DAC прямую DC данной длины так, чтобы она прошла через данную по положению точку G (фиг. 40).



Фиг. 40

Допустим, что ось кривой есть AF. Опустите на ось из точек D, G и C перпендикуляры DH, GE и CB. Для определения положения прямой DC можно было бы заняться нахождением точек C или D. Однако эти точки расположены столь сходно, что при определении каждой из них действия будут одинаковыми как в случае, если я стану искать линии CG, CB или AB, так и в случае, если я стану искать аналогичные линии DG, DH или AH. Поэтому я займусь поисками третьей точки, которая находится в одинаковом отношении к двум первым и вместе с тем определяет их положения. Как я вижу, такой точкой является F.

Положите поэтому $AE = a$, $EG = b$, $DC = c$, $FE = z$. Так как отношение между AB и BC выражается уравнением, которое определяет кривую и которое я считаю данным, то положите $AB = x$ и $BC = y$; тогда FB будет $x - a + z$. А так как $GE : EF = CB : BF$, то $BF = \frac{yz}{b}$. Поэтому

$$x - a + z = \frac{yz}{b}.$$

Установив это, исключите x при помощи уравнения кривой. Если, например, коническое сечение есть парабола с уравнением $rx = y^2$, то $x = \frac{y^2}{r}$ и получается

$$\frac{y^2}{r} - a + z = \frac{yz}{b}.$$

Извлечение корня дает, что

$$y = \frac{rz}{2b} \pm \sqrt{\frac{r^2z^2}{4b^2} + ar - rz},$$

откуда ясно, что $\sqrt{\frac{r^2z^2}{b^2} + 4ar - 4rz}$ есть разность двух значений y, т. е. линий $+BC$ и $-DH$. Следовательно, если из точки D опустить на CB перпендикуляр DK, то эта разность будет равна CK. Но $FG : GE = DC : CK$, т. е. $\sqrt{b^2 + z^2} : b = c : \sqrt{\frac{r^2z^2}{b^2} + 4ar - 4rz}$. Если перемножить квадраты средних членов пропорции, а также ее крайних членов и привести произведения в порядок, то получится, что

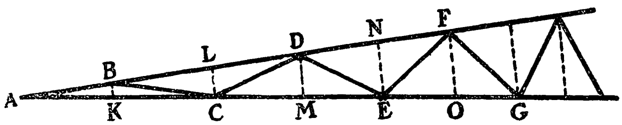
$$z^4 = \frac{4b^2rz^3 - (4ab^2r + b^2r^2)\,z^2 + 4b^4rz - 4ab^4r + b^4c^2}{r^2}.$$

Это—уравнение четвертой степени; оно достигло бы восьмой степени, если бы я стал искать CG, или CB, или AB.

Задача XXIX

Умножить или разделить данный угол на данное число (фиг. 41).

Впишите в какой-либо угол FAG линии AB, BC, CD, DE и т. д. одинаковой длины; при этом треугольники ABC, BCD, CDE, DEF и т. д. будут равнобедренными. Согласно предл. 32 кн. 1 „Начал", угол CBD будет равен уг. $A+$уг. $ACB =$ $= 2$ уг. A, уг. $DCE =$ уг. $A +$ уг. $ADC = 3$ уг. A,



Фиг. 41

уг. $EDF =$ уг. $A +$ уг. $AED = 4$ уг. A и уг. $FEG =$ уг. $A +$ $+$ уг. $AFE = 5$ уг. A и т. д. Если рассматривать прямые AB, BC, CD и т. д. как радиусы равных кругов, то перпендикуляры BK, CL, DM и т. д., опущенные на AC, BD, CE и т. д., будут синусами этих углов, а AK, BL, CM, DN и т. д. будут их косинусами; а если рассматривать AB как диаметр, то прямые AK, BL, CM и т. д. будут хордами. Положите $AB = 2r$ и $A = x$ и далее действуйте следующим образом:

$$AB : AK = AC : AL,$$

$$2r : x = 2x : \frac{x^2}{r}.$$

Значит,

$$\left\{\begin{matrix} AL - AB \\ \dfrac{x^2}{r} - 2r \end{matrix}\right\} = BL. \text{ Это дает удвоение.}$$

$$AB : AK = AD(2\,AL - AB) : AM,$$

$$2r : x = \left(\frac{2x^2}{r} - 2r\right) : \left(\frac{x^3}{r^2} - x\right).$$

Значит,

$$\left\{\begin{matrix} AM - AC \\ \dfrac{x^3}{r^2} - 3x \end{matrix}\right\} = CM. \text{ Это дает утроение.}$$

$$AB : AK = AE\,(2\,AM - AC) : AN,$$

$$2\,r : x = \left(\frac{2\,x^3}{r^2} - 4\,x\right) : \left(\frac{x^4}{r^2} - \frac{2\,x^2}{r}\right).$$

Значит,

$$\left\{\begin{matrix} AN - AD \\ \dfrac{x^4}{r^3} - \dfrac{4\,x^2}{r} + 2\,r \end{matrix}\right\} = DN. \text{ Это дает учетверение.}$$

$$AB : AK = AF\,(2AN - AD) : AO,$$

$$2\,r : x = \left(\frac{2\,x^4}{r^3} - \frac{6\,x^2}{r} + 2x\right) : \left(\frac{x^5}{r^4} - \frac{3\,x^3}{r^2} + x\right).$$

Значит,

$$\left\{\begin{matrix} AO - AE \\ \dfrac{x^5}{r^4} - \dfrac{5\,x^3}{r^2} + 5\,x \end{matrix}\right\} = EO. \text{ Это дает упятерение.}$$

И т. д. Если, наоборот, вы хотите угол разделить на некоторое число частей, то подставьте q вместо BL, CM, DN и т. д. и вы получите для деления пополам

$$x^2 - 2\,r^2 = qr,$$

для деления на три части

$$x^3 - 3\,r^2\,x = qr^2,$$

для деления на четыре части

$$x^4 - 4\,r^2\,x^2 + 2\,r^4 = qr^3,$$

для деления на пять частей

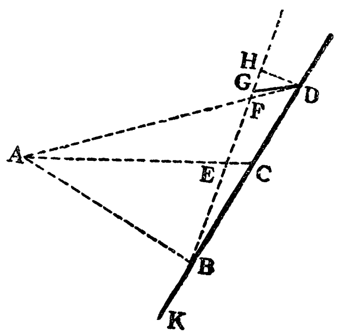
$$x^5 - 5\,r^2\,x^3 + 5\,r^4\,x = qr^4$$

и т. д.[64].

Задача XXX

Определить по трем наблюдениям траекторию кометы, равномерно движущейся по прямой BD (фиг. 42).

Допустим, что точка A есть глаз наблюдателя, B есть местоположение кометы при первом наблюдении, C — при втором и D — при третьем; требуется определить наклон линии BD к линии AB. Углы BAD, BAC известны из наблюдений; следовательно, если перпендикулярно к AB провести линию BH, пересекающую AC и AD в E и в F и принять AB за данную, то даны будут BE и BF, которые в отношении радиуса AB являются тангенсами этих углов. Положите $AB = a$, $BE = b$ и $BF = c$. По промежуткам между наблюдениями известно отношение BC к BD; допустим, что оно равно отношению b к e. Если провести DG параллельно AC, то в этом же отношении будут BE и BG, и если положить $BE = b$, то BG будет равно e, а $GF = e - c$. Далее, если опустить на BG перпендикуляр DH, то в силу того, что треугольники ABF и DHF подобны и рассекаются подобные образом линиями AE и DG, имеет место пропорция



Фиг. 42

$$FE : AB = FG : HD, \text{ или же } (c - b) : a = (e - c) : \frac{ae - ac}{c - b},$$

так что $HD = \dfrac{ae - ac}{c - b}$. Кроме того, $FE : FB = FG : FH$, или $(c - b) : c = (e - c) : \dfrac{ce - c^2}{c - b}$, так что $FH = \dfrac{ce - c^2}{c - b}$. Сложите BF или c с FH и вы получите $BH = \dfrac{ce - cb}{c - b}$. Поэтому $\dfrac{ce - cb}{c - b}$ относится к $\dfrac{ae - ac}{c - b}$ (или $ce - cb$ относится к $ae - ac$, или $\dfrac{ce - cb}{e - c}$

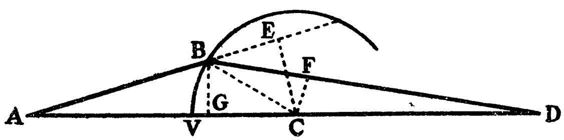
относится к a), как BH к BD, т. е. как тангенс угла HDB или ABK к радиусу. Так как мы приняли радиус равным a, то $\frac{ce-cb}{e-c}$ будет тангенсом угла ABK, и, значит, если составить пропорцию, то $e-c$ относится к $e-b$ (или GF к GE), как c (или тангенс угла BAF) к тангенсу угла ABK.

Поэтому вы можете сказать, что время между первым и вторым наблюдениями относится ко времени между первым и третьим, как тангенс угла BAE к четвертой пропорциональной.

Затем, разность между этой четвертой пропорциональной и тангенсом угла BAF относится к разности между той же четвертой пропорциональной и тангенсом угла BAE, как тангенс угла BAF к тангенсу угла ABK.[65]

Задача XXXI

Из светящейся точки на преломляющую сферическую поверхность падают расходящиеся лучи. Определить точку пересечения каждого преломленного луча с осью сферы, проходящей через эту светящуюся точку (фиг. 43).



Фиг. 43

Допустим, что A есть светящаяся точка, BV — сфера, ось сферы есть AD, центр C, а вершина V. Положим, что AB есть падающий луч, а BD преломленный. Опустим на эти лучи перпендикуляры CE и CF и на AD перпендикуляр BG. Проведя еще BC, положите $AC = a$, VC или $BC = r$, $CG = x$ и $CD = z$; тогда $AG = a - x$, $BG = \sqrt{r^2 - x^2}$, $AB = \sqrt{a^2 - 2ax + r^2}$. Из подобия треугольников ABG и ACE имеем, что $CE =$

$= \frac{a\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - 2ax + r^2}}$. Далее, $GD = z + x$, $BD = \sqrt{z^2 + 2zx + r^2}$, а из подобия треугольников DBG и DCF имеем $CF = \frac{z\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{z^2 + 2zx + r^2}}$. Так как известно, кроме того, отношение синусов угла падения и угла преломления и, следовательно, отношение CE к CF, которое мы примем равным a к f, то

$$\frac{fa\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - 2ax + r^2}} = \frac{az\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{z^2 + 2zx + r^2}}.$$

Перемножая накрест и деля на $a\sqrt{r^2 - x^2}$, получим

$$f\sqrt{z^2 + 2zx + r^2} = z\sqrt{a^2 - 2ax + r^2},$$

а возводя в квадрат и приводя члены в порядок,

$$z^2 = \frac{2f^2xz + f^2r^2}{a^2 - 2ax + r^2 - f^2}.$$

Положите, наконец, p вместо данного $\frac{f^2}{a}$ и q вместо данного $a + \frac{r^2}{a} - p$; тогда

$$z^2 = \frac{2pxz - pr^2}{q - 2x},$$

откуда

$$z = \frac{px + \sqrt{p^2x^2 - 2pr^2x + pqr^2}}{q - 2x}.$$

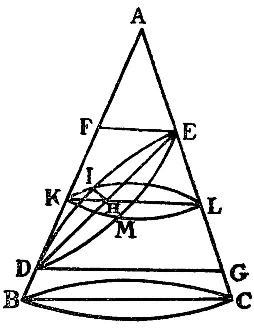
Таким образом найдена z, т. е. длина CD и, следовательно, искомая точка D пересечения преломленного луча BD с осью. Ч. т. с.

Я предполагал здесь, что падающие лучи расходятся и попадают в более плотную среду. Изменяя то, что подлежит изменению, легко было бы решить задачу для случая, в котором лучи сходятся или попадают из более плотной среды в более разреженную.[66]

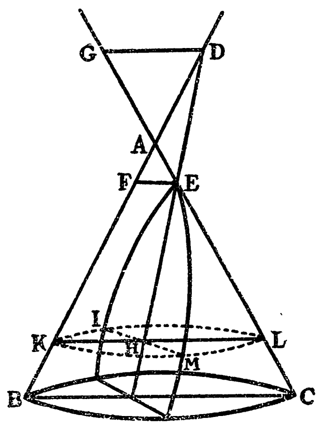
Задача XXXII

Определить фигуру пересечения конуса с какой-либо плоскостью (фиг. 44 и 45).

Допустим, что ABC есть конус, опирающийся на круговое основание BC, IEM — искомое сечение, $KILM$ — некоторое другое сечение, параллельное основанию и пересекающееся с первым сечением по IH, а ABC — третье сечение, перпенди-



Фиг. 44



Фиг. 45

кулярное к первым двум и рассекающее их пополам по EH и KL, а конус рассекающее по треугольнику ABC. Продолжите EH до пересечения с AK в D и, проведя EF и DG параллельно KL до пересечения с AB и AC в F и в G, положите $EF = a$, $DG = b$, $ED = c$, $EH = x$ и $HI = y$. В силу подобия треугольников EHL и EDG, $ED : DG = EH : HL$, так что $HL = \frac{bx}{c}$, а в силу подобия треугольников DEF и DHK, $DE : EF = DH$ ($c - x$ на первом чертеже и $c + x$ на втором) $: HK$, так что $HK = \frac{ac \mp ax}{c}$. Наконец, так как сечение KIL

параллельно основанию и, значит, представляет собой круг, то $HK \times HL = \overline{HI}^2$, т. е.

$$\frac{ab}{c} x \mp \frac{ab}{c^2} x^2 = y^2.$$

Это уравнение выражает отношение между $EH\,(x)$ и $HI\,(y)$, т. е. между осью и ординатой сечения EIM. Так как в случае первого чертежа это уравнение характеризует эллипс, а в случае второго — гиперболу, то ясно, что это сечение будет эллиптическое или гиперболическое.

Если ED, будучи параллельной AK, ее нигде не пересекает, то $HK = EF\,(a)$ и, следовательно,

$$\frac{ab}{c} x\,(HK \times HL) = y^2,$$

а это уравнение характеризует параболу.[67]

Задача XXXIII

Прямая XY вращается на расстоянии CD вокруг оси AB, имея данный наклон к плоскости DCB, и порождаемое при этом вращении тело $PQRVTS$ пересекается какой-либо плоскостью $INQLK$. Определить, какова будет при этом фигура сечения (фиг. 46).

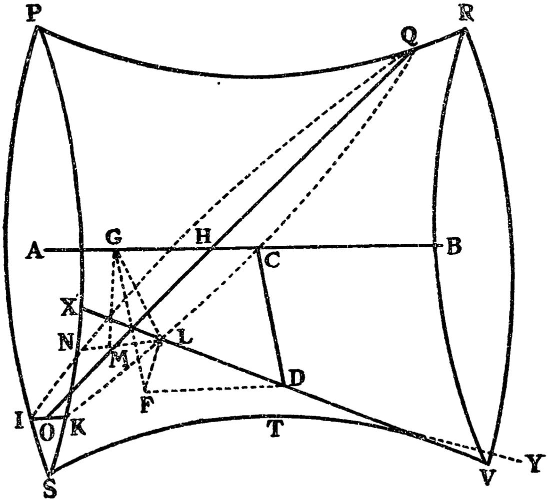
Допустим, что наклон оси AB к плоскости сечения есть BHQ или GHO, а L — какая-либо точка пересечения прямой XY с той же плоскостью. Проведите DF параллельно AB, опустите на AB, DF и HO перпендикуляры LG, LF и LM и проведите MG и FG. Положите $CD = a$, $CH = b$, $MH = x$ и $ML = y$. Так как угол GHO дан, то примем, что $MH : HG = d : e$; тогда $\frac{ex}{d} = HG$ и $b + \frac{ex}{d} = GC$ или FD. Кроме того, так как дан угол LDF (т. е. наклон прямой XY к плоскости $GCDF$), то примем, что $FD : FL = g : h$, тогда $FL = \frac{hb}{g} + \frac{hex}{dg}$.

Прибавьте к квадрату FL квадрат FG или DC, или a^2, и вы получите, что

$$\overline{GL}^2 = a^2 + \frac{b^2 h^2}{g^2} + \frac{2\,beh^2 x}{dg^2} + \frac{e^2 h^2 x^2}{d^2 g^2}.$$

Из $\overline{GL}^2$ вычтите $\overline{MG}^2$ $\left(\overline{MH}^2 - \overline{GH}^2, \text{ или } x^2 - \frac{e^2 x^2}{d^2}\right)$, разность будет

$$\frac{a^2g^2 + b^2h^2}{g^2} + \frac{2\,beh^2}{dg^2}\,x + \frac{h^2e^2 - d^2g^2 + e^2g^2}{d^2g^2}\,x^2 \,(= \overline{ML}^2) = y^2.$$

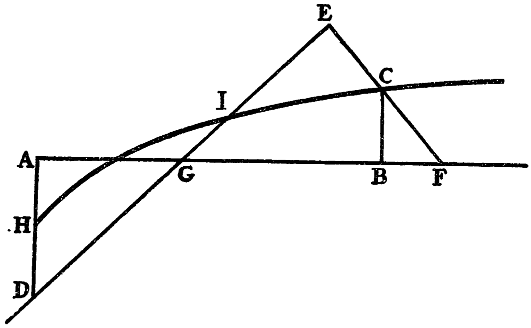


Фиг. 46

Это уравнение и выражает отношение между x и y, т. е. отношение между осью MH сечения и его ординатой ML. Так как x и y входят в этом уравнении не более чем в двух измерениях, то ясно, что фигура $INQLK$ есть коническое сечение. Если угол MHG больше угла LDF, то фигура будет эллипсом, если он меньше, то гиперболой, а если эти углы равны, то параболой или же (если, кроме того, совпадают точки C и H) параллелограмом.[68]

Задача XXXIV

Восстановим к прямой AF перпендикуляр AD данной длины и допустим, что одна из сторон ED наугольника DEF постоянно проходит через точку D, между тем как другая сторона EF, равная AD, скользит вдоль AF. Найти кривую HIC, которую описывает точка C, середина стороны EF (фиг. 47).



Фиг. 47

Положите EC или $CF = a$, перпендикуляр $CB = y$ и $AB = x$. В силу подобия треугольников FBC и FEG, $BF\,(\sqrt{a^2 - y^2}) : (BC + CF)$ (т. е. $y + a$) $= EF\,(2a) : (EG + GF)$ (т. е. $AG + GF$) или AF. Следовательно,

$$\frac{2ay + 2a^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} \; (= AF = AB + BF) = x + \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Умножая на $\sqrt{a^2 - y^2}$, имеем

$$2ay + 2a^2 = a^2 - y^2 + x\sqrt{a^2 - y^2},$$

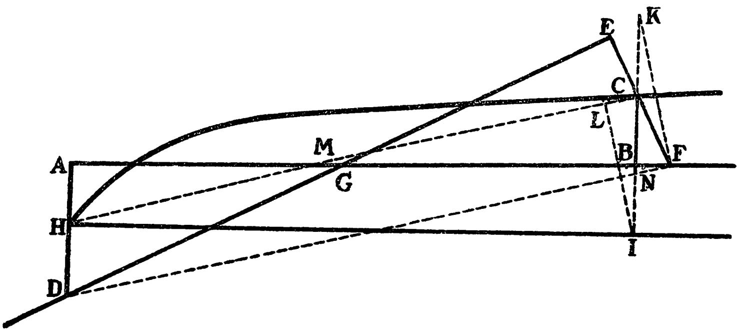
или же

$$2ay + a^2 + y^2 = x\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Деля затем обе стороны на $\sqrt{a + y}$, возводя в квадрат и упорядочивая, вы получите

$$y^3 + 3ay^2 + (3a^2 + x^2)\,y + a^3 - ax^2 = 0.$$

Другое решение. Продолжите BC в обе стороны на BI и CK, равные CF, и проведите KF, HI, HC и DF (фиг. 48). Прямые HC и DF пересекут AF и KI в M и в N. Опустите на HC перпендикуляр IL, тогда угол $K = \frac{1}{2} BCF = \frac{1}{2} FGE = GFD = AMH = MHI = CIL$. Прямоугольные треугольники KBF, FBN, HLI и ILC будут поэтому



Фиг. 48

подобными. Положите $FC = a$, $HI = x$ и $IC = y$ и вы получите, что $BN(2a - y) : BK(y) = LC : LH = \overline{CI}^2 (y^2) : \overline{HI}^2 (x^2)$. Следовательно,

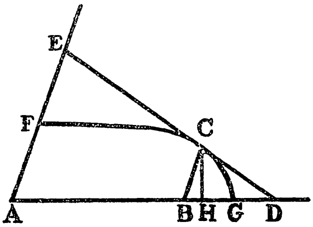
$$2ax^2 - yx^2 = y^3.$$

Из этого уравнения легко увидеть, что эта кривая является циссоидой древних математиков и что образующий круг имеет центр A и радиус AH.[69]

Задача XXXV

Прямая ED данной длины, стягивая данный угол EAD, движется так, что концы ее D и E постоянно касаются сторон угла AD и AE. Найти кривую FCG, которую описывает какая-либо данная точка C прямой ED (фиг. 49).

Из данной точки C проведите параллельно EA прямую CB и положите $AB = x, BC = y, CE = a, CD = b$. Из подобия треугольников DCB, DEA следует, что $EC : AB = CD : DB$, т. е. $a : x = b : BD$, так что $BD = \frac{bx}{a}$. Опустите затем перпендикуляр CH. Так как угол DAE или DBC дан, то известно отношение сторон прямоугольного треугольника BCH. Положим поэтому, что $BC : BH = a : e$; тогда $BH = \frac{ey}{a}$. Вычтите BH из BD, разность будет $DH = \frac{bx - ey}{a}$. Далее, в треугольнике BCH с прямым углом BHC, $\overline{BC}^2 - \overline{BH}^2 = \overline{CH}^2$, или же $y^2 - \frac{e^2 y^2}{a^2} = \overline{CH}^2$. Точно так же в треугольнике CDH с прямым углом CHD, $\overline{CD}^2 - \overline{CH}^2 = \overline{HD}^2$ и, значит,



Фиг. 49

$$b^2 - y^2 + \frac{e^2 y^2}{a^2} \; (= \overline{DH}^2) = \left(\frac{bx - ey}{a}\right)^2 = \frac{b^2 x^2 - 2\,bexy + e^2y^2}{a^2},$$

и после приведения

$$y^2 = \frac{2\,be}{a^2}\,xy + \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}.$$

Так как в этом уравнении неизвестные величины восходят только до двух измерений, то ясно, что кривая есть коническое сечение. Извлекая, далее, корень, вы получите, что

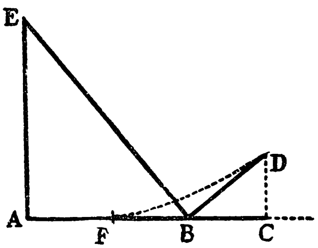
$$y = \frac{bex \pm \sqrt{e^2x^2 - a^2x^2 + a^4}}{a^2}.$$

Коэффициент при x^2 под радикалом есть $e^2 - a^2$, и так как $a : e = BC : BH$ и BC обязательно больше, чем BH, ибо гипотенуза прямоугольного треугольника больше его стороны, то a больше e и $e^2 - a^2$ есть величина отрицательная. Следовательно, кривая есть эллипс.[70]

Задача XXXVI

Наугольник EBD движется так, что одна из его сторон EB постоянно стягивает прямой угол EAB, а конец D другой стороны BD описывает некоторую кривую FD. Найти кривую FD, которую описывает точка D (фиг. 50).

Опустите из точки D перпендикуляр DC на сторону AC. Положив $AC = x$, $DC = y$, $EB = a$ и $BD = b$, вы получите из прямоугольного при C треугольника BDC, что $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DC}^2 = b^2 - y^2$. Следовательно, $BC = \sqrt{b^2 - y^2}$ и $AB = x - \sqrt{b^2 - y^2}$. Кроме того, в силу подобия треугольников BEA и DBC, $BD : DC = BE : AB$, т. е. $b : y = a : (x - \sqrt{b^2 - y^2})$. Следовательно,



Фиг. 50

$$bx - b\sqrt{b^2 - y^2} = ay,$$

или

$$bx - ay = b\sqrt{b^2 - y^2}.$$

Возводя обе стороны в квадрат и проделав должные приведения, вы получите, что

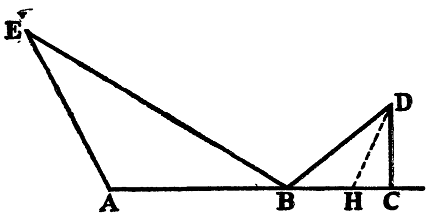
$$y^2 = \frac{2\,abxy + b^4 - b^2x^2}{a^2 + b^2},$$

а извлекая корень, найдете, что

$$y = \frac{abx \pm b^2\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}}{a^2 + b^2}.$$

Отсюда очевидно, что кривая вновь является эллипсом.

Так обстоит дело, когда углы EBD и EAB прямые. Если же эти углы будут какой-либо другой величины, однако оставаясь равными между собой, то вы можете поступить следующим образом. Опустите, как и раньше, перпендикуляр DC на AC и проведите DH так, чтобы она составила угол DHA, равный углу HAE, который я взял, скажем, тупым (фиг. 51). Положите $EB = a$, $BD = b$, $AH = x$ и $HD = y$. В силу подобия треугольников EAB, BHD вы получите, что $BD : DH = BE : AB$, т. е. $b : y = a : AB$, так что $AB = \frac{ay}{b}$. Вычтите AB из AH; разность будет $BH = x - \frac{ay}{b}$. Далее, так как все углы треугольника DHC даны, то даны также отношения сторон. Положите поэтому, что HD находится в каком-либо известном отношении к HC, например в отношении b к e. Так как $DH = y$, то $HC = \frac{ey}{b}$ и $HB \times HC = \frac{exy}{b} - \frac{aey^2}{b^2}$. Наконец, в силу предл. 12 кн. 2 „Начал“, из треугольника BHD следует, что $\overline{BD}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{DH}^2 + 2BH \times HC$, т. е.



Фиг. 51

$$b^2 = x^2 - \frac{2axy}{b} + \frac{a^2y^2}{b^2} + y^2 + \frac{2exy}{b} - \frac{2aey^2}{b^2}.$$

Извлекая корень, вы найдете, что

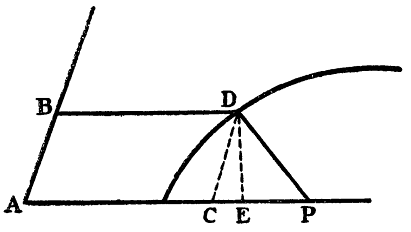
$$x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{e^2y^2 - b^2y^2 + b^4}}{b},$$

и так как b больше e, то $e^2 - b^2$ есть величина отрицательная. Поэтому ясно, что кривая есть опять-таки эллипс.

Задача XXXVII

Внутри данного угла PAB произвольно проведены прямые PD и BD, находящиеся в данном отношении, с тем условием, что BD всегда параллельна AP, а PD всегда заканчивается в данной по положению точке P прямой AP. Найти геометрическое место точек D (фиг. 52).

Проведите CD параллельно AB и DE перпендикулярно AP. Положите $AP = a$, $CP = x$ и $CD = y$, и пусть, далее, отношение BD к DP есть d к e. Тогда AC или $BD = a - x$ и $PD = \frac{ea - ex}{d}$. Далее, так как угол DCE дан, положим отношение CD к CE равным d к f, откуда $CE = \frac{fy}{d}$ и $EP = x - \frac{fy}{d}$. Так как углы при E прямые, то $\overline{CD}^2 - \overline{CE}^2 = \overline{DE}^2 = \overline{DP}^2 - \overline{EP}^2$, т. е.



Фиг. 52

$$y^2 - \frac{f^2y^2}{d^2} = \frac{e^2a^2 - 2ae^2x + e^2x^2}{d^2} - x^2 + \frac{2fxy}{d} - \frac{f^2y^2}{d^2}.$$

Отбросив с обеих сторон по $-\frac{f^2y^2}{d^2}$ и должным образом упорядочив члены, вы получите, что

$$y^2 = \frac{2fxy}{d} + \frac{e^2a^2 - 2e^2ax + e^2x^2 - d^2x^2}{d^2},$$

а извлекая корень, найдете, что

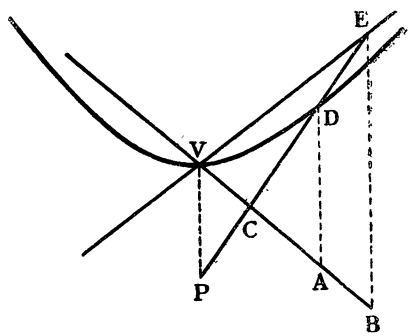
$$y = \frac{fx \pm \sqrt{e^2a^2 - 2e^2ax + (e^2 - d^2 + f^2)x^2}}{d}.$$

Поскольку x и y восходят в полученном уравнении только до двух измерений, то геометрическое место точек D есть коническое сечение, а именно гипербола, парабола или эллипс в зависимости от того, будет ли $e^2 - d^2 + f^2$, т. е. коэффициент при x^2 в этом уравнении, больше нуля, равен нулю или меньше нуля.[71]

Задача XXXVIII

Прямая PE, вращающаяся вокруг данного по положению полюса P, пересекает две данные по положению прямые VE и VC в точках C и E, и отрезок CE делится в данном отношении на части CD и DE. Найти место точек D (фиг. 53).

Проведите VP и параллельно этой прямой DA и EB, пересекающие VC в A и в B. Положите $VP = a$, $VA = x$ и $AD = y$. Так как отношение CD к DE дано, то дано также отношение CD к CE и, следовательно, отношение DA к BE. Положите это отношение равным d к e, тогда $EB = \frac{ey}{d}$. Кроме того, поскольку дан угол EVB, то дано также отношение EB к VB. Положите это отношение равным e к f; тогда $VB = \frac{fy}{d}$. Наконец, в силу подобия треугольников CEB, CDA, CPV, $EB:CB = DA:CA = VP:VC$ и, componendo, $(EB + VP):(CB + VC) = (DA + VP):(CA + VC)$, т. е. $\left(\frac{ey}{d} + a\right) : \frac{fy}{d} = (y + a) : x$.[72]



Фиг. 53

Перемножая средние и крайние члены, вы получите

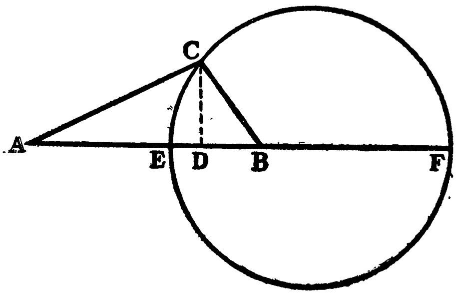
$$exy + adx = fy^2 + fay.$$

Так как неопределенные величины x и y восходят в этом уравнении только до двух измерений, то кривая VD, на которой всегда лежит точка D, есть коническое сечение, а именно гипербола, ибо одна из двух неопределенных величин x имеет лишь одно измерение и в члене exy входит умноженная на другую неопределенную y.[73]

Задача XXXIX

Из двух данных по положению точек A и B проведены к третьей точке C две прямые AC, BC, находящиеся между собой в каком-либо данном отношении. Найти геометрическое место точек пересечения C (фиг. 54).

Проведите прямую AB и опустите на нее перпендикуляр CD. Положите $AB = a$, $AD = x$ и $DC = y$; тогда $AC = \sqrt{x^2 + y^2}$, $BD = a - x$ и $BC = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2}$.



Фиг. 54

Так как отношение AC к BC дано, положим его равным d к e. Перемножив средние и крайние члены, вы получите

$$e\sqrt{x^2 + y^2} = d\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2}$$

и после приведения

$$y = \sqrt{\frac{d^2a^2 - 2d^2ax}{e^2 - d^2} - x^2}.$$

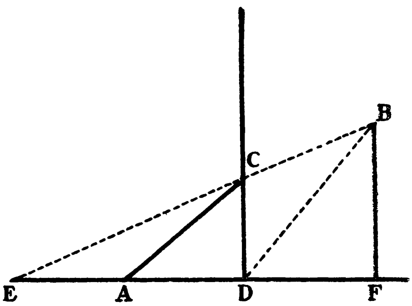
Так как x^2 входит здесь отрицательным и имеет коэффициентом лишь единицу, а угол ADC прямой, то ясно, что кривая, на которой лежит точка C, есть круг. Если на прямой AB взять точки E и F так, чтобы $d : e = AE : BE = AF : BF$, то EF будет диаметром этого круга.

Обращая эту теорему, вы увидите, что если на продолженном диаметре какого-либо круга EF даны какие-либо две точки A и B, для которых $AE : AF = BE : BF$, и из этих двух точек провести к любой точке C окружности прямые AC, BC, то AC к BC будет находиться в данном отношении AE к BE.[74]

Задача XL

Светящаяся точка A отбрасывает лучи на преломляющую плоскую поверхность CD. Найти луч AC, преломление которого CB попадет в данную точку B (фиг. 55).

Опустите из светящейся точки перпендикуляр AD на преломляющую плоскость. Допустим, что преломленный луч BC пересечется с продолженной в обе стороны прямой AD в точке E, а опущенный на эту прямую из точки B перпендикуляр — в точке F. Проведите BD и положите $AD = a$, $DB = b$, $BF = c$ и $DC = x$. Положите, далее, отношение синуса падения к синусу преломления, или, что то же самое, синуса угла CAD к синусу угла CED, равным d к e. EC и AC будут, как известно, в том же отношении, а так как $AC = \sqrt{a^2 + x^2}$,



Фиг. 55

то $EC = \frac{d}{e}\sqrt{a^2 + x^2}$. Кроме того, $ED = \sqrt{\overline{EC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{\frac{d^2a^2 + d^2x^2}{e^2} - x^2}$ и $DF = \sqrt{b^2 - c^2}$, следовательно $EF = \sqrt{b^2 - c^2} + \sqrt{\frac{d^2a^2 + d^2x^2}{e^2} - x^2}$. Наконец, в силу подобия треугольников ECD, EBF, $ED:DC = EF:FB$, а если перемножить значения крайних и средних членов, то

$$c\sqrt{\frac{d^2a^2 + d^2x^2}{e^2} - x^2} = x\sqrt{b^2 - c^2} + x\sqrt{\frac{d^2a^2 + d^2x^2}{e^2} - x^2},$$

или

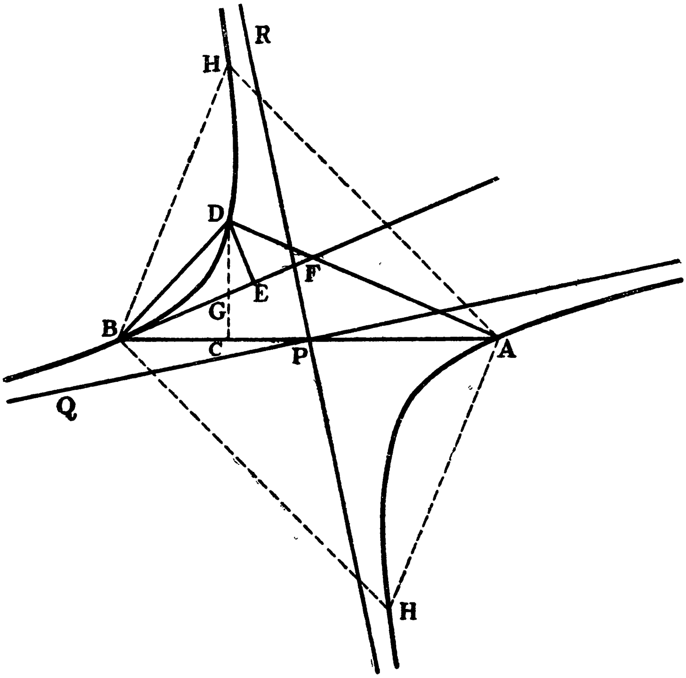
$$(c - x)\sqrt{\frac{d^2a^2 + d^2x^2}{e^2} - x^2} = x\sqrt{b^2 - c^2}.$$

Возводя в квадрат обе стороны и расположив члены должным образом, вы получите

$$x^4 - 2cx^3 + \frac{(d^2c^2 + d^2a^2 - e^2b^2)\,x^2 - 2d^2a^2cx + d^2a^2c^2}{d^2 - e^2} = 0.$$ [75]

Задача XLI

Найти геометрическое место вершин D треугольника, у которого даны основание AB и разность прилегающих к основанию углов DAB, DBA (фиг. 56).



Фиг. 56

В случае, когда дан угол при вершине, или, что то же самое, дана сумма двух углов при основании, геометрическое место вершин, как учит нас Эвклид (кн. 3, предл. 29), есть окружность. Мы предлагаем найти здесь геометрическое место вершин, когда дана разность углов при основании. Допустим, что угол DBA больше угла DAB, что данная разность их есть угол ABF и что прямая BF пересекает AD в F. Опустим из точки D перпендикуляры DE на BF и DC на AB; DC пересечет BF в точке G. Положим $AB = a$, $AC = x$ и $CD = y$, тогда $BC = a - x$. Так как в треугольнике BCG даны все углы, то дано и отношение сторон BC и CG. Положим его равным d к a, тогда $CG = \frac{a^2 - ax}{d}$. Вычтите из DC или y величину CG, разность будет $DG = \frac{dy - a^2 + ax}{d}$. Кроме того, в силу подобия треугольников BGC, DGE, $BG : BC = DG : DE$. Но в треугольнике BGC мы имеем, что $a : d = GC : BC$. Следовательно, $a^2 : d^2 = \overline{GC}^2 : \overline{BC}^2$ и, componendo, $(a^2 + d^2) : d^2 = \overline{BG}^2 : \overline{BC}^2$ и, после извлечения корней, $\sqrt{a^2 + d^2} : d\,(= BG : BC) = DG : DE$. Поэтому $DE = \frac{dy - a^2 + ax}{\sqrt{a^2 + d^2}}$. С другой стороны, так как угол ABF есть разность углов BAD и ABD и, значит, углы BAD и FBD равны, то прямоугольные треугольники DAC и DBE подобны и стороны их пропорциональны, т. е. $DA : DC = DB : DE$. Но $DC = y$, $DA\,(= \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{DC}^2}) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $DB\,(= \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{BC}^2}) =$ $= \sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}$, и мы нашли ранее, что

$$DE = \frac{dy - a^2 + ax}{\sqrt{a^2 + d^2}}.$$

Поэтому

$$\sqrt{x^2 + y^2} : y = \sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2} : \frac{dy - a^2 + ax}{\sqrt{a^2 + d^2}}.$$

Перемножая квадраты крайних и средних членов, мы получим

$$a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 + y^4 =$$

$$= \frac{d^2x^2y^2 + d^2y^4 - 2a^2dx^2y - 2a^2dy^3 + 2adyx^3}{a^2 + d^2} +$$

$$+ \frac{2adxy^3 \quad a^4x^2 + a^4y^2 - 2a^3x^3 - 2a^3xy^2 + a^2x^4 + a^2x^2y^2}{a^2 + d^2}.$$

Умножьте все члены на $a^2 + d^2$ и расположите произведения в должном порядке, тогда получится, что

$$x^4 + \left(\frac{2dy}{a} - 2a\right)x^3 + (a^2 - 2dy)x^2 + \left(\frac{2dy^3}{a} + \frac{2d^2y^2}{a}\right)x -$$

$$-d^2y^2 - 2dy^3 - y^4 = 0.$$

Разделите это уравнение на $x^2 - ax + dy + y^2 = 0$ и в частном будет $x^2 + \left(\frac{2dy}{a} - a\right)x - y^2 - dy = 0$. Таким образом, для решения этой задачи получается два уравнения. Первое уравнение

$$x^2 - ax + dy + y^2 = 0$$

принадлежит кругу, и им будет геометрическое место точек D в случае, когда угол DBF находится с другой стороны от прямой BF, чем на чертеже, а угол ABF равен сумме углов DAB и DBA при основании, так что дан угол ADB при вершине.

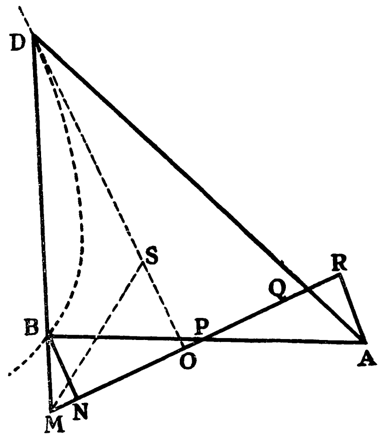
Второе уравнение

$$x^2 + \left(\frac{2dy}{a} - a\right)x - y^2 - dy = 0$$

принадлежит гиперболе, которая и является геометрическим местом точек D, когда угол FBD занимает именно то положение относительно прямой BF, какое указано на чертеже, причем угол ABF есть разность углов DAB и DBA при основании. Вот как определить эту гиперболу: разделите AB пополам в P, проведите PQ, образующую угол BPQ, равный половине угла ABF. Через точку P проведите PR перпендикулярно к PQ. Прямые PQ и PR будут асимптотами этой гиперболы, а точка B одной из ее точек.

Отсюда вытекает следующая теорема: Если в прямоугольной гиперболе провести какой-либо диаметр AB и из концов этого диаметра провести к каким-либо двум точкам гиперболы, D и H, прямые AD, BD и AH, BH, то эти прямые образуют в концах диаметра равные углы DAH, DBH.

Более короткое решение. В задаче XXIV я привел правило наиболее подходящего выбора членов, служащих при вычислительном решении задач, в тех случаях, когда этот выбор оказывается связанным с некоторой неопределенностью. В настоящей задаче разность углов при основании безразлична в отношении того или другого из этих углов. При построении чертежа ее в равной мере можно прибавить к меньшему углу DAB, проводя из A прямую, параллельную BF, или же вычесть из большего угла DBA, проводя прямую BF. Поэтому я ее не прибавляю и не вычитаю, но прибавляю половину ее к одному из углов и вычитаю половину ее из другого. Так как, далее, неясно, применять ли в качестве абсциссы, к которой приложена ордината DC, отрезок AC или же отрезок BC, то я не употребляю ни того, ни другого. Вместо этого я делю BA пополам в P и применяю PC. Или же еще, я провожу MPQ, образующую с обеих сторон углы APQ, BPM, равные каждый полуразности углов при основании, и поэтому образующую равные углы DQP, DMP с прямыми DA, DM (фиг. 57).



Фиг. 57

Опустив на MQ перпендикуляры AR, BN, DO, я выбираю за ординату DO, а за абсциссу PO. Таким образом, я полагаю $PO = x$, $DO = y$, AR или $BN = b$ и PR или $PN = c$. В силу подобия треугольников BNM и DOM, $BN : DO = MN : MO$. Dividendo, получим $(DO - BN)\,(y - b) : DO\,(y) = (MO - MN)\,(ON$ или $c - x) : MO$. Значит, $MO = \frac{cy - xy}{y - b}$. Точно так же из подобия треугольников ARQ, DOQ имеем: $AR : DO = RQ : QO$ и, componendo, $(DO + AR)\,(y + b) : DO\,(y) = (QO + QR)\,(OR$ или $x + c) : QO$. Значит, $QO = \frac{cy + xy}{y + b}$. Наконец, в силу равенства углов DMQ и DQM, MO равно QO и, значит,

$$\frac{cy - xy}{y - b} = \frac{cy + xy}{y + b}.$$

Разделите все на y и помножьте на знаменателей; получится

$$cy + cb - yx - bx = cy - cb + yx - bx,$$

или же

$$cb = xy,$$

т. е. особенно известное уравнение гиперболы.

Впрочем геометрическое место точек D можно было бы найти без алгебраического вычисления. В самом деле, мы нашли выше, что $(DO - BN) : ON = DO : MO\,(OQ) = (DO + AR) : OR$, т. е. $(DO - BN) : (DO + BN) = ON : OR$. Mixtim, мы получим $DO : BN = \frac{ON + OR}{2}\,(NP) : \frac{OR - ON}{2}\,(OP)$, и, следовательно, $DO \times OP = BN \times NP$.

Задача XLII

Найти геометрическое место вершин треугольников с данным основанием при условии, что один из углов при основании отличается от удвоенного другого на данный угол.

Допустим, что этот треугольник (см. последний чертеж в предыдущей задаче) есть ABD, AB—его основание, разделенное пополам в точке P, APQ или BPM — третья часть данного угла, т. е. треть угла, на который DBA превосходит удвоенный угол DAB; угол DMQ будет вдвое больше угла DQM. Опустите на PM перпендикуляры AR, BN, DO и разделите угол DMQ пополам прямой MS, пересекающей DO в S. Треугольники DOQ, SOM будут подобными и, следовательно, $OQ:OM=OD:OS$ и, dividendo, $(OQ-OM):OM=$ $=(OD-OS):OS=DS:OS=$ („Начала", 6; 3) $=DM:OM$. Значит („Начала", 5; 9), $OQ-OM=DM$. Положите теперь $PO=x$, $OD=y$, AR или $BN=b$ и PR или $PN=c$. Как и в предыдущей задаче, вы получите при этом, что $OM=\frac{cy-xy}{y-b}$ и $OQ=\frac{cy+xy}{y+b}$. Следовательно, $OQ-OM=\frac{-2bcy+2xy^2}{y^2-b^2}$. С другой стороны, $\overline{DO}^2+\overline{OM}^2=\overline{DM}^2$, или

$$y^2+\frac{c^2y^2-2cxy^2+x^2y^2}{y^2-2by+b^2}=\frac{4b^2c^2y^2-8bcxy^3+4x^2y^4}{y^4-2b^2y^2+b^4}.$$

Произведя должные приведения, вы получите в результате

$$y^4+(c^2-2b^2-2cx-3x^2)y^2+(2bx^2+4bcx+2bc^2)y+$$
$$+b^4-3b^2c^2-2b^2cx+b^2x^2=0.$$

Разделив все на $y-b$, вы приведете уравнение к виду

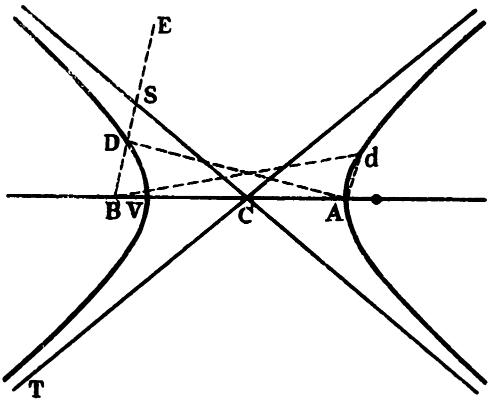
$$y^3+by^2-(b^2-c^2+2cx+3x^2)y-b^3+$$
$$+3bc^2+2bcx-bx^2=0.$$

Таким образом, точка D лежит на кривой третьего измерения, которая, однако, превращается в гиперболу, если угол BPM исчезает или обращается в нуль, или, что то же самое, когда один из углов при основании DBA вдвое больше другого

DAB. Действительно, в этом случае BN, или b, исчезает, и уравнение принимает вид

$$y^2 = 3x^2 + 2cx - c^2.$$

Из построения этого уравнения вытекает следующая теорема (фиг. 58). Опишите гиперболу DV с центром C и с асимптотами CS, CT, образующими угол SCT в 120°, и пусть полуоси гиперболы будут CV, CA. Продолжите CV до B так, чтобы $VB = VC$, и из точек A и B проведите какие-либо прямые BD, AD, пересекающиеся на гиперболе. Тогда угол BAD будет равен половине угла ABD и трети угла ADE, образуемого прямой AD с продолженной BD. Сказанное относится к гиперболе, проходящей через точку V. Если же из тех же самых точек A и B провести прямые Ad, Bd, пересекающиеся на противолежащей гиперболе, проходящей через A,[76] то из двух внешних углов треугольника на основании тот, который прилежит к B, будет вдвое больше прилежащего к A.



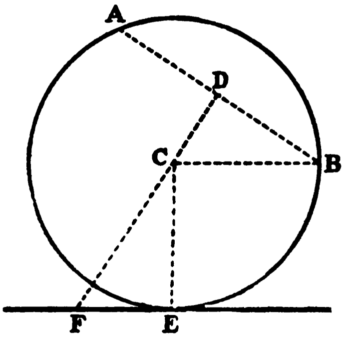
Фиг. 58

Задача XLIII

Описать круг, проходящий через две данные точки и касающийся данной по положению прямой (фиг. 59).

Допустим, что данные точки суть A и B, а данная по положению прямая EF и что требуется провести через эти точки круг ABE, одновременно касающийся прямой EF. Проведите прямую AB и разделите пополам ее в точке D.

В точке D восстановите перпендикуляр DF, который пересечет прямую EF в точке F. Центр круга будет лежать где-либо на последней проведенной прямой DF, предположим — в точке C. Проведите прямую CB и из точки C опустите на FE перпендикуляр CE. E будет точкой касания, а прямые CB, CE будут между собой равны, как радиусы искомого круга. Так как точки A, B, D и F даны, то положите $DB = a$, $DF = b$ и для определения центра круга займитесь отысканием DC, которую назовите x. Так как угол D в треугольнике CDB прямой, то $\sqrt{\overline{DB}^2 + \overline{CD}^2}$ или $\sqrt{a^2 + x^2} = CB$. Далее, $DF - DC$ или $b - x = CF$. В прямоугольном треугольнике CFE все углы даны, и, значит, дано также отношение сторон CF и CE. Если положить это отношение равным d к e, то $CE = \frac{e}{d} \times CF$, т. е. $CE = \frac{be - ex}{d}$. Положите прямые CB и CE, как радиусы искомого круга, равными друг другу и вы получите уравнение



Фиг. 59

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{be - ex}{d}.$$

Возведя обе стороны в квадрат и умножив на d^2, вы получите

$$a^2d^2 + d^2x^2 = b^2e^2 - 2be^2x + e^2x^2$$

или

$$x^2 = \frac{-2e^2bx - a^2d^2 + e^2b^2}{d^2 - e^2},$$

а извлекая корень, найдете, что

$$x = \frac{-be^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}.$$

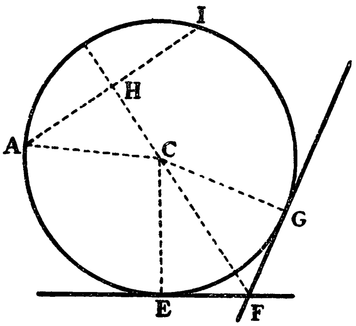
Таким образом, найдены длина DC, а значит, и центр C, из которого надлежит описать круг, проходящий через точки A и B и касающийся прямой FE.

Задача XLIV

Описать круг, проходящий через данную точку и касающийся двух данных по положению прямых (фиг. 60).

N.B. Эта задача решается, как и задача XLIII, ибо, поскольку дана точка A, то дана также и другая точка B.[77]

Допустим, что данная точка есть A, две данные по положению прямые суть EF, FG и AEG есть искомый круг, касающийся обеих прямых и проходящий через точку A.



Фиг. 60

Разделите прямой FC пополам угол EFG; центр круга будет лежать на этой прямой. Допустив, что центр этого круга есть C, опустите из него на EF и FG перпендикуляры CE, CG, тогда E и G будут точками касания. Так как в треугольниках CEF, CGF углы при E и при G прямые, а каждый из углов при F есть половина угла EFG, то все углы этих двух треугольников даны, а значит, дано отношение сторон CF и CE или CG. Положите это отношение равным d к e. Если для определения центра искомого круга C положить $CF = x$, то CE или $CG = \frac{ex}{d}$. Опустите, далее, на FC перпендикуляр AH. Так как точка A дана, то даны будут и прямые AH и FH. Обозначьте эти прямые соответственно a и b. Если из FH, или b, вычесть FC, или x, то разность будет $CH = b - x$. Прибавьте к квадрату этой разности

$b^2 - 2bx + x^2$ квадрат AH, или a^2; тогда, на основании предл. 47 кн. 1 „Начал", сумма $a^2 + b^2 - 2bx + x^2$ будет равна AC^2, ибо, по предположению, угол AHC прямой. Приравняйте теперь между собой два радиуса круга AC и CG, т. е. составьте равенство между их значениями или между их квадратами, и вы получите уравнение

$$a^2 + b^2 - 2bx + x^2 = \frac{e^2x^2}{d^2}.$$

Вычтите с обеих сторон по x^2 и перемените все знаки, тогда

$$-a^2 - b^2 + 2bx = x^2 - \frac{e^2x^2}{d^2}.$$

Умножьте все на d^2 и разделите на $d^2 - e^2$, получится

$$x^2 = \frac{2bd^2x - a^2d^2 - b^2d^2}{d^2 - e^2}.$$

Если извлечь корень, то

$$x = \frac{bd^2 - d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}.$$

Таким образом, длина FC, а значит, и точка C, центр искомого круга, найдены.

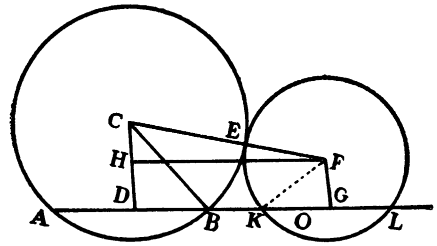
Если из b или HF вычесть найденное значение x, или FC, то разность $HC = \frac{-be^2 + d\sqrt{b^2e^2 + a^2e^2 - a^2d^2}}{d^2 - e^2}$. Это уравнение совпадает с тем, которое мы получили в предыдущей задаче для определения длины DC.

Задача XLV

Описать круг, проходящий через две данные точки и касающийся другого данного по положению круга (фиг. 61, ср. задачу XXI).

Допустим, что две данные точки суть A и B, EK есть данный по величине и положению круг, F — его центр,

ABE — искомый круг, проходящий через точки A и B и касающийся другого круга, и что C есть центр искомого круга. Проведите продолженную прямую AB и опустите на нее перпендикуляры CD, FG; затем проведите CF, которая пересечет оба круга в точке касания E. Проведите также параллельно DG прямую FH, которая пересечет CD в H. Проделав эти построения, положите AD или $DB = a$, DG или $HF = b$, $FG = c$, EF (радиус данного круга) $= d$ и $DC = x$. Тогда $CH\,(= CD - FG) = x - c$, $\overline{CF}^2\,(= \overline{CH}^2 + \overline{FH}^2) = x^2 - 2cx + c^2 + b^2$, $CB^2\,(= \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2) = x^2 + a^2$ и, значит, CB, или $CE = \sqrt{x^2 + a^2}$. Прибавьте к CE линию EF и вы получите $CF = d + \sqrt{x^2 + a^2}$, квадрат чего $d^2 + 2d\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 + x^2$ равен найденному прежде значению того же $\overline{CF}^2$, т. е. $x^2 - 2cx + c^2 + b^2$. Если отбросить с обеих сторон по x^2, то получится, что



Фиг. 61

$$d^2 + a^2 + 2d\sqrt{x^2 + a^2} = c^2 + b^2 - 2cx.$$

Вычтите еще $a^2 + d^2$, уравнение примет вид

$$2d\sqrt{a^2 + x^2} = c^2 + b^2 - a^2 - d^2 - 2cx.$$

Положите для сокращения $c^2 + b^2 - d^2 - a^2 = 2g^2$ и вы получите

$$2d\sqrt{a^2 + x^2} = 2g^2 - 2cx,$$

или

$$d\sqrt{a^2 + x^2} = g^2 - cx.$$

Возведение обеих сторон в квадрат даст

$$d^2a^2 + d^2x^2 = g^4 - 2g^2cx + c^2x^2.$$

Вычтите с обеих сторон d^2a^2 и c^2x^2; при этом останется

$$d^2x^2 - c^2x^2 = g^4 - d^2a^2 - 2g^2cx.$$

Если разделить еще стороны уравнения на $d^2 - c^2$, то вы получите

$$x^2 = \frac{g^4 - d^2a^2 - 2g^2cx}{d^2 - c^2}.$$

Извлечение неявного корня x [78] даст

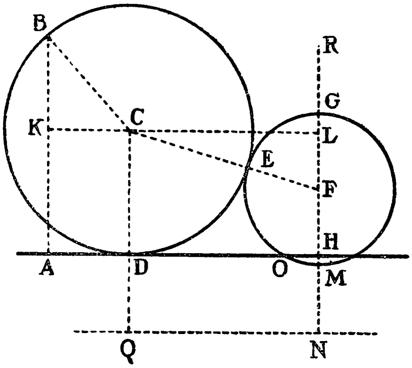
$$x = \frac{-g^2c + \sqrt{g^4d^2 - d^4a^2 + d^2a^2c^2}}{d^2 - c^2}.$$

Узнав таким образом x, или длину DC, разделите прямую AB пополам в точке D и восстановите в этой точке перпендикуляр $DC = \dfrac{-g^2c + d\sqrt{g^4 - a^2d^2 + a^2c^2}}{d^2 - c^2}$. Затем из центра C опишите круг ABE, проходящий через точку A или B; этот круг будет касаться другого круга EK и пройдет через обе точки A и B. Ч. т. с. [79].

Задача XLVI

Описать круг, проходящий через данную точку и касающийся данного по величине и положению круга, а также данной по положению прямой (фиг. 62).

Допустим, что искомый круг есть BD, его центр C, точка, через которую он должен пройти, B, прямая, которой он должен коснуться, AD, точка касания D, круг, которого он должен коснуться, GEM, центр последнего F и его точка касания E. Проведите прямые CB, CD, CF. Прямая CD будет перпендикулярна к AD, а CF пересечет оба круга в точке касания E. Продолжите CD до Q так, чтобы $DQ = EF$, и через Q проведите QN параллельно AD. Наконец, из точек B и F опустите на AD и QN перпендикуляры BA, FN и из точки C опустите на AB и FN перпендикуляры CK, CL. Так как $BC = CD$ или AK, то $BK = BA - AK = BA - BC$, и поэтому $\overline{BK}^2 = \overline{BA}^2 - 2BA \times BC + \overline{BC}^2$. Если из $\overline{BC}^2$ вычесть $\overline{BK}^2$, разность даст квадрат CK и, значит, $AB(2BC - AB) = \overline{CK}^2$; аналогично $FN(2FC - FN) = \overline{CL}^2$. Следовательно, $2BC = \frac{\overline{CK}^2}{AB} + AB$ и $2FC = \frac{\overline{CL}^2}{FN} + FN$. Если вы вместо AB, CK, FN, KL и CL напишете соответственно a, y, b, c и $c - y$, то получите, что $BC = \frac{y^2}{2a} + \frac{1}{2}a$ и $FC = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} + \frac{1}{2}b$. Вычтите BC из FC; разность будет $FE = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{2}a$. Если, далее, вы обозначите точки пересечения продолженной FN с прямой AD и кругом GEM буквами H, G и M и на продолженной HG возьмете $HR = AB$, то, поскольку $HN (= DQ = EF) = GF$, вы, прибавив с обеих сторон по FH, получите, что $FN = GH$. Значит, $AB - FN (= HR - GH) = GR$, $AB - FN + 2EF = a - b + 2EF = RM$ и $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + EF = \frac{1}{2}RM$. Но мы нашли ранее, что $EF = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{2}a$.



Фиг. 62

Подставив в предыдущее уравнение это значение EF, вы получите, что $\frac{1}{2}RM = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} - \frac{y^2}{2a}$. Обозначьте RM через d и вы получите

$$d = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{b} - \frac{y^2}{a}.$$

Умножьте все члены на a и b, будет

$$abd = ac^2 - 2acy + ay^2 - by^2.$$

Вычитая из обеих сторон по $ac^2 - 2acy$, вы получите

$$ay^2 - by^2 = abd - ac^2 + 2acy,$$

а поделив на $a - b$,

$$y^2 = \frac{2acy}{a-b} + \frac{abd - ac^2}{a-b}.$$

Извлечение корня даст

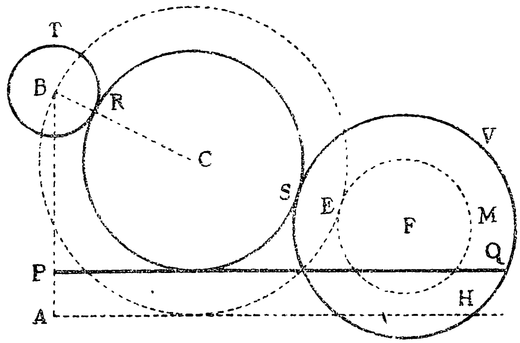
$$y = \frac{ac}{a-b} \pm \sqrt{\frac{a^2bd - ab^2d + abc^2}{a-b}}.$$

Этот результат можно написать короче, положив $c : b = d : e$ и $(a - b) : a = c : f$; тогда

$$y^2 = fe - fc + 2fy,$$

или

$$y = f \pm \\ \pm \sqrt{f^2 + fe - fc}.$$



Фиг. 63

Найдя y, или KC, или AD, отложите $AD = f \pm \sqrt{f^2 + fe - fc}$, в точке D восстановите перпендикуляр $DC (= BC) = \frac{\overline{CK}^2}{2AB} + \frac{1}{2} AB$ и из центра C опишите радиусом CB или CD круг BDE. Этот круг, пройдя через данную точку B, коснется прямой AD в D и круга GEM в E. Ч. т. с.

На основании этого можно также описать круг, касающийся двух данных кругов и данной по положению прямой.

Действительно, пусть данные два круга суть RT, SV, их центры B, F, а данная по положению прямая PQ (фиг. 63).

Опишите из центра F радиусом, равным $FS-BR$, круг EM. Из точки B опустите на прямую PQ перпендикуляр PB и продолжите его до A так, чтобы $PA=BR$. Через точку A параллельно PQ проведите AH и опишите круг, который, проходя через точку B, касается прямой AH и круга EM. Допустим, что центр описанного нами круга есть C. Проведите прямую BC, которая пересечет круг TR в R. Из построения ясно, что круг RS, описанный из того же центра C радиусом CR, будет касаться кругов RT, SV и прямой PQ.[80]

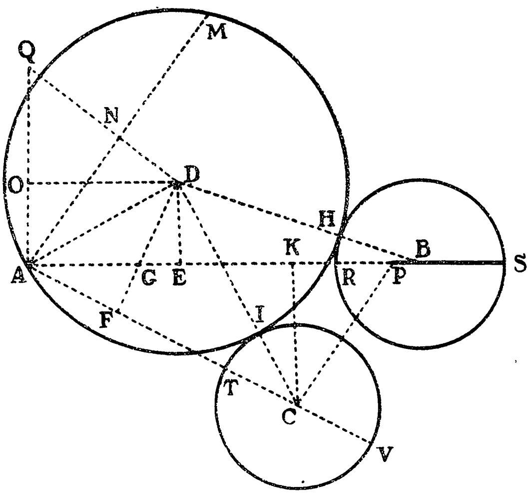
Задача XLVII

Описать круг, проходящий через данную точку и касающийся двух других кругов, данных по величине и положению (фиг. 64).

Допустим, что данная точка есть A, два данных по величине и положению круга суть TIV и RHS, их центры C и B, искомый круг AIH, его центр D, а точки касания суть I и H. Проведите прямые AB, AC, AD и DB. Допустим, что продолженная AB пересекает круг RHS в точках R и S, а продолженная AC пересекает круг TIV в T и V. Из точки D опустите на AB перпендикуляр DE и на AC перпендикуляр DF, который пересечет AB в G, а из точки C опустите на AB перпендикуляр CK. Из треугольника ADB на основании предл. 13 кн. 2 „Начал" имеем: $\overline{AD}^2-\overline{DB}^2+\overline{AB}^2=2AE\times AB$. Но $DB=AD+BR$, следовательно $\overline{DB}^2=\overline{AD}^2+2AD\times BR+\overline{BR}^2$. Вычтите это из $\overline{AD}^2+\overline{AB}^2$ и вы получите, что $\overline{AB}^2-2AD\times BR-\overline{BR}^2=2AE\times AB$. Но $\overline{AB}^2-\overline{BR}^2=(AB+BR)\times(AB-BR)=AR\times AS$. Следовательно, $AR\times AS-2AD\times BR=2AE\times AB$ и

$$\frac{AR\times AS-2AE\times AB}{BR}=2AD.$$

Рассуждая подобным же образом, вы получите из треугольника ADC, что $2AD = \frac{AT \times AV - 2AC \times AF}{TC}$. Следовательно, $\frac{AR \times AS - 2AB \times AE}{BR} = \frac{AT \times AV - 2AC \times AF}{TC}$ и $\frac{2AC \times AF}{TC} = \frac{AT \times AV}{TC} - \frac{AR \times AS}{BR} + \frac{2AB \times AE}{BR}$ и $AF = \frac{CT}{2AC}\left(\frac{AT \times AV}{TC} - \frac{AR \times AS}{BR} + \frac{2AB \times AE}{BR}\right)$. Но так как $AK : AC = AF : AG$, то



Фиг. 64

$AG = \frac{CT}{2AK}\left(\frac{AT \times AV}{TC} - \frac{AR \times AS}{BR} + \frac{2AB \times AE}{BR}\right)$. Если это вычесть из AE или $\frac{AE \times 2AK}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$, то разность будет $GE = \frac{CT}{2AK}\left(\frac{AE \times 2AK}{CT} + \frac{AR \times AS}{BR} - \frac{AT \times AV}{TC} - \frac{2AB \times AE}{BR}\right)$. А так как $CK : AK = GE : DE$, то $DE = \frac{CT}{2CK}\left(\frac{AE \times 2AK}{CT} + \frac{AR \times AS}{BR} - \right.$

$-\frac{AT\times AV}{TC}-\frac{2AB\times AE}{BR}\Big)$. Отложите на AB линию AP, относящуюся к AB, как CT к BR; тогда $\frac{2AP\times AE}{CT}=\frac{2AB\times AE}{BR}$ и, следовательно, $\frac{2PK\times AE}{CT}=\frac{2AB\times AE}{BR}-\frac{2AK\times AE}{CT}$, а $DE=$ $=\frac{CT}{2CK}\left(\frac{AR\times AS}{BR}-\frac{AT\times AV}{TC}-\frac{2PK\times AE}{CT}\right)$. Восстановите к AB перпендикуляр $AQ=\frac{CT}{2CK}\left(\frac{AR\times AS}{BR}-\frac{AT\times AV}{TC}\right)$ и отложите на нем $QO=\frac{PK\times AE}{CK}$; AO при этом будет равно DE.

Проведите прямые OD, DQ и CP; треугольники DOQ, CKP будут подобными, ибо в них углы при O и при K прямые, а стороны пропорциональны ($CK : PK = AE$ или $DO : QO$). Таким образом, углы OQD, KPC равны и, значит, QD перпендикулярно к PC. Следовательно, если параллельно PC провести AN, пересекающую QD в N, то угол ANQ будет прямой и треугольники AQN, PCK будут подобные. Поэтому $PC : CK =$ $= AQ : AN$. А так как $AQ=\frac{CT}{2CK}\left(\frac{AR\times AS}{BR}-\frac{AT\times AV}{CT}\right)$, то $AN=\frac{CT}{2PC}\left(\frac{AR\times AS}{BR}-\frac{AT\times AV}{CT}\right)$. Продолжите AN до M так, чтобы $NM = AN$, тогда AD будет равно DM и, значит, круг пройдет через точку M.

Точка M, таким образом, дана и поэтому без дальнейшего анализа получается следующее решение задачи.

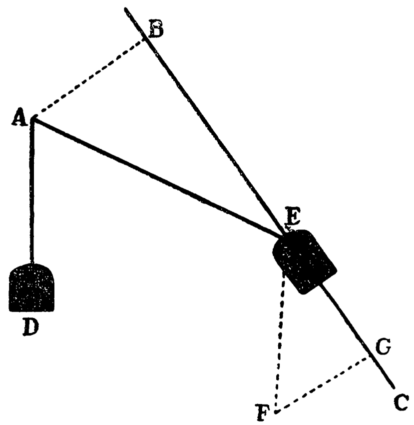
Отложите на AB линию AP, которая относится к AB, как CT к BR, проведите CP и параллельно ей AM, взяв $AM : \left(\frac{AR\times AS}{BR}-\frac{AT\times AV}{TC}\right)=CT : PC$. Затем при помощи задачи XLV опишите через точки A и M круг $AIHM$, касающийся одного из кругов TIV, RHS; этот круг будет касаться обоих названных кругов. Ч. т. с.

На основании этого можно также описать круг, касающийся трех кругов, данных по величине и положению.

Допустим, что радиусы данных кругов суть A, B, C, а центры D, E, F. Из центров E и F радиусами, равными соответственно $B \pm A$, $C \pm A$, опишите два круга, а также третий, касающийся их обоих и проходящий через точку D. Допустим, что радиус третьего круга есть G, а центр его H. Круг, описанный из того же центра H радиусом $G \pm A$, будет, как и требуется, касаться трех данных кругов. [81]

Задача XLVIII

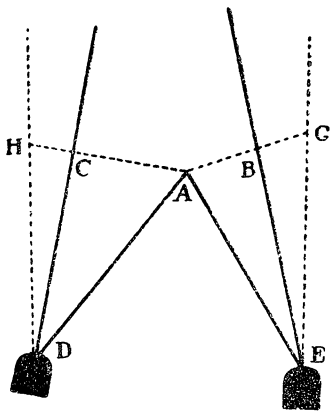
К концам нити DAE, которая скользит около закрепленного гвоздя A, подвешены два веса D и E, один из которых E скользит по наклонной линии BG. Найти место веса E, когда оба веса находятся в равновесии (фиг. 65).



Фиг. 65

Допустите, что задача решена и проведите EF параллельно AD, взяв EF в таком отношении к AE, в каком вес E находится к весу D. Из точек A и F опустите на прямую BG перпендикуляры AB, FG. Так как, по предположению, веса относятся, как линии AE и EF, то выразите эти веса при помощи названных линий, т. е. вес D линией AE и вес E линией EF. Под действием силы собственного веса EF тело E устремляется к F, а под действием наклонной силы EG — к G. Прямая сила AE веса D увлекает то же тело E к A, а наклонная сила BE увлекает его к B. Так как веса поддерживают друг друга в равновесии, то сила, которая увлекает вес E в направлении к B, должна быть равна противоположной силе, под действием которой он устремляется в направлении к G, т. е. BE должна быть равна EG. По предположению отношение AE к EF дано, а так как угол FEG дан, то дано и отношение FE к EG, которой равна BE. Следовательно, дано отношение AE к BE. Длина AB также дана, а поэтому легко найти треугольник ABE и определить точку E. Действительно, положите $AB = a$, $BE = x$, тогда $AE = \sqrt{a^2 + x^2}$. Положите, далее, что AE находится к BE в данном отношении d к e, тогда

$$e\sqrt{a^2 + x^2} = dx.$$



Фиг. 66

Возведя обе стороны уравнения в квадрат и проделав приведение, вы получите, что

$$a^2e^2 = d^2x^2 - e^2x^2,$$

или

$$x = \frac{ae}{\sqrt{d^2 - e^2}}.$$

Таким образом, длина BE, определяющая местонахождение веса E, найдена. Ч. т. с.

Если оба веса опускаются по наклонным линиям, то вычисление можно провести следующим образом. Допустим, что две данные по положению наклонные, вдоль которых опускаются веса D и E, суть CD и BE (фиг. 66). Опустите на эти наклонные из неподвижной точки A перпендикуляры AC, AB и примите, что прямые EG и DH, проходящие в местах этих весов перпендикулярно горизонту, пересекают названные перпендикуляры в точках G и H. Сила, понуждающая опускаться вес E по перпендикуляру, т. е. полная тяжесть E, относится к силе, понуждающей его опускаться по наклонной BE, как GE к BE; а сила, которая понуждает его опускаться по наклонной BE, относится к силе, которая понуждает его опускаться по линии AE, т. е. к силе, с которой натягивается нить AE, как BE к AE. Поэтому тяжесть E относится к натяжению нити AE, как GE к AE. На этом же основании тяжесть D относится к натяжению нити AD, как HD к AD. Положим длину всей нити $DA + AE = c$, ее часть $AE = x$; другая часть DA будет тогда $c - x$. Прежде всего имеем $\overline{AE}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BE}^2$ и $\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{DC}^2$. Положим еще $AB = a$ и $AC = b$; тогда $BE = \sqrt{x^2 - a^2}$ и $CD = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 - b^2}$. Далее, так как треугольники BEG, CDH даны по виду, то положите, что $BE : EG = f : E$ и что $CD : DH = f : g$; тогда

$$EG = \frac{E}{f}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{и} \quad DH = \frac{g}{f}\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 - b^2}.$$

Так как $GE : AE =$ вес E : натяжение AE и $HD : AD =$ вес D: натяжение AD и эти натяжения равны, то вы получите, что $\dfrac{Ex}{\frac{E}{f}\sqrt{x^2 - a^2}} =$ натяжению $AE =$ натяжению $AD = \dfrac{Dc - Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 - b^2}}$.

После приведения это уравнение примет вид

$$gx\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 - b^2} = (Dc - Dx)\sqrt{x^2 - a^2},$$

или же

$$(g^2 - D^2)x^4 + (2D^2c - 2g^2c)x^3 + (g^2c^2 - g^2b^2 - D^2c^2 + D^2a^2)x^2 - 2D^2ca^2x + D^2c^2a^2 = 0.$$

Если вы хотите получить случай, в котором эту задачу можно построить при помощи линейки и циркуля, то положите, что вес D относится к весу E, как отношение $\dfrac{BE}{EG}$

к отношению $\frac{CD}{DH}$, при этом $g = D$. Предыдущее уравнение в этом случае заменится таким:

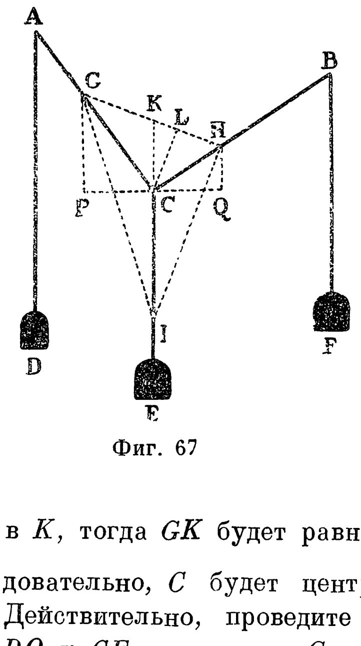
$$(a^2 - b^2)\,x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{ac}{a+b}.$$

Задача XLIX

К веревке $DACBF$, которая скользит около двух закрепленных гвоздей A и B, подвешены три веса D, E и F, D и F — на концах веревки и E — в промежуточной точке C, находящейся между гвоздями. Требуется по данным весам и положениям гвоздей найти положение точки C, в которой подвешен средний вес так, что все веса находятся в равновесии (фиг. 67).



Фиг. 67

Так как натяжение нити AC равно натяжению нити AD, а натяжение нити BC равно натяжению нити BF, то натяжения веревок, или нитей AC, CB, CE, относятся, как веса D, F, E. Возьмите части нитей CG, CH, CI в отношении тех же весов и постройте треугольник GHI. Продолжите IC до пересечения с GH в K, тогда GK будет равна KH и CK равна $\frac{1}{2}\,CI$, а следовательно, C будет центром тяжести треугольника GHI. Действительно, проведите через точку C перпендикуляр PQ к CE, а из точек G и H опустите на PQ перпендикуляры GP, HQ. Если силу, с которой нить AC благодаря силе веса D увлекает точку C в направлении к A, выразить линией GC, то сила, с которой эта нить будет увлекать ту же точку в направлении к P, выразится линией PC, а сила, с которой она увлекает ее в направлении к K, выразится линией GP. Аналогично, силы, с которыми нить BC благодаря весу F увлекает ту же точку C в направлениях к точкам B, Q и K, будут соответственно выражены линиями CH, CQ и QH, а сила, с которой нить CE благодаря весу E увлекает точку C в направлении к E, будет выражена линией CI. Так как точка C поддерживается в равновесии равными силами, то сумма тех сил, с которыми нити AC, BC совместно увлекают точку C в направлении к K, будет равна противоположной силе, с которой нить CE увлекает ее в направлении к E, т. е. сумма $GP+HQ$ будет равна CI; а сила, с которой нить AC увлекает точку C в направлении к P, будет равна противоположной силе, с которой нить BC увлекает ее в направлении к Q, т. е. линия PC равна CQ. Поскольку прямые GP, HQ, CK параллельны, то $GK=KH$ и $CK\left(=\frac{GP+HQ}{2}\right)=\frac{1}{2}CI$, что и требовалось доказать. Таким образом, остается определить треугольник GCH, у которого даны стороны GC и HC, а также линия CK, проведенная из вершины C к середине основания. Опустите для этого из вершины C на основание GH перпендикуляр CL, — это дает

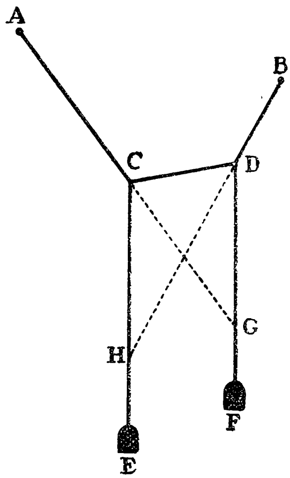
$$\frac{\overline{CG}^2-\overline{CH}^2}{2GH}=KL=\frac{\overline{GG}^2-\overline{CK}^2-\overline{GK}^2}{2GK}.$$

Вместо $2GK$ напишите GH; тогда, отбросив общий делитель GH и приведя члены в порядок, вы получите $2\overline{GK}^2=$ $=\overline{GC}^2-2\overline{CK}^2+\overline{CH}^2$, или же $GK=\sqrt{\frac{1}{2}\overline{GC}^2-\overline{CK}^2+\frac{1}{2}\overline{CH}^2}$.

Когда GK или KH будут найдены, даны будут также углы GCK, KCH или же DAC, FBC. Поэтому проведете из точек

A и B прямые AC, BC так, чтобы получились данные углы DAC и FBC; эти прямые AC, BC пересекутся в искомой точке C.

Следует заметить, что однородные вопросы не всегда следует решать по отдельности — особенно с помощью алгебры. По большей части решение одного такого вопроса позволит вам вывести решение и других. Например, так обстоит дело со следующим вопросом.



Фиг. 68

Нить $ACDB$ разделена на данные части AC, CD, DB; ее концы закреплены в двух данных по положению гвоздях A и B; в точках деления C и D подвешены два веса E и F. По данным весу F и положениям точек C и D требуется найти вес E (фиг. 68).

Решение этой задачи можно легко получить из решения предыдущей. Продолжите линии AC, BD до пересечения с линиями DF, CE в G и H; вес E будет относиться к весу F, как GD к CH. Отсюда между прочим видно, как с помощью одних нитей можно изготовить весы, которые позволяют определить вес любого тела E по данному весу F.

Задача L

В колодец падает камень; определить глубину колодца по звуку от удара камня о его дно. [82]

Обозначим глубину колодца x. Если падающий камень, двигаясь равномерно ускоренно, проходит данное пространство a за данное время b, а звук, двигаясь равномерно, проходит то же данное пространство a за данное время d, то камень опустится на глубину x за время $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, а звук, который производит камень при ударе о дно колодца, пройдет то же пространство x за время $\frac{dx}{a}$. В самом деле, пространства, пройденные падающими тяжелыми телами, относятся, как квадраты времен их падения; или же корни квадратные из пройденных пространств, т. е. $\sqrt{x}$ и $\sqrt{a}$, относятся, как самые времена. А при распространении звука пространства x и a относятся, как времена, потребные для их прохождения. Сумма этих времен $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ и $\frac{dx}{a}$ есть время, протекшее от начала падения камня до возврата звука. Это время можно узнать из наблюдения. Положите это время равным t, тогда

$$b\sqrt{\frac{x}{a}}+\frac{dx}{a}=t$$

и

$$b\sqrt{\frac{x}{a}}=t-\frac{dx}{a}.$$

Возведя обе стороны в квадрат, вы получите

$$\frac{b^2x}{a}=t^2-\frac{2dtx}{a}+\frac{d^2x^2}{a^2},$$

а приведение даст

$$x^2=\frac{2adt+ab^2}{d^2}x-\frac{a^2t^2}{d^2}.$$

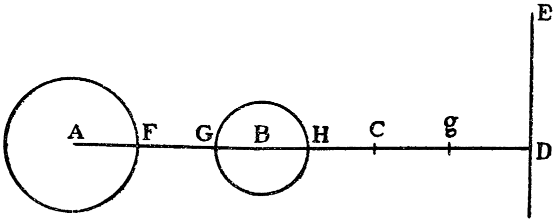
Извлекая корень, вы найдете, что

$$x=\frac{adt+\frac{1}{2}ab^2}{d^2}-\frac{ab}{2d^2}\sqrt{b^2+4dt}.$$

Задача LI

Даны шар A, положение стены DE и BD — расстояние центра шара B от стены. Центр шара A находится на перпендикулярной к стене и продолженной за B прямой BD.

Допустим, что шар A равномерно движется в направлении к D в пустом абсолютном пространстве, в котором не действует тяготение, пока не ударяется о другой покоящийся шар B, и что шар B после отражения от стены встречается с шаром A в данной точке C. Определить массу шара B (фиг. 69).



Фиг. 69

Допустим, что скорость шара A до отражения есть a. На основании задачи XII (стр. 94) его скорость после отражения будет $= \frac{aA - aB}{A + B}$, а скорость шара B после отражения будет $= \frac{2aA}{A + B}$. Поэтому скорость шара A будет относиться к скорости шара B, как $A - B$ к $2A$. Отложите на GD величину $gD = GH$, т. е. диаметру шара B; тогда эти скорости будут относиться, как GC к $Gg + gC$. В самом деле, когда шар A ударится о шар B, точка G на поверхности шара B будет двигаться по линии AD и, прежде чем шар B ударится о стену, пройдет пространство Gg, а после его отражения от стены пройдет пространство gC; таким образом, точка G пройдет все пространство $Gg + gC$ в то самое время, в какое точка F шара A пройдет пространство GC, так что оба шара смогут вновь встретиться и соудариться в данной точке C. Так как промежутки BC и BD даны, положите $BC = m$, $BD + DC = n$ и $BG = x$; тогда $GC = m + x$ и $Gg + gC = GD + DC - 2gD = BG + BD + DC - 2GH = x + n - 4x = n - 3x$. Выше вы нашли, что

$A-B$ относится к $2A$, как скорость шара A к скорости шара B, а скорость шара A относится к скорости шара B, как GC к $Gg+gC$; значит, $A-B$ относится к $2A$, как GC к $Gg+gC$, а так как $GC=m+x$ и $Gg+gC=n-3x$, то $A-B$ относится к $2A$, как $m+x$ к $n-3x$. Далее, шар A относится к шару B, как куб его радиуса AF к кубу другого радиуса GB. Следовательно, если вы положите радиус $AF=s$, эти два шара будут относиться между собой, как s^3 к x^3. Таким образом, $(s^3-x^3):2s^3$ $(=(A-B):2A)=$ $=(m+x):(n-3x)$. Составляя произведения крайних и средних, вы получите уравнение

$$s^3n-3s^3x-nx^3+3x^4=2ms^3+2s^3x$$

и после приведения

$$3x^4-nx^3-5s^3x+s^3n-2s^3m=0.$$

Построение этого уравнения даст полудиаметр x шара B, а если дан x, то будет дан и шар B. Ч. т. с.[83]

Заметьте, однако, что если точка C лежит с другой стороны от шара B, то нужно переменить знак величины $2m$ и написать

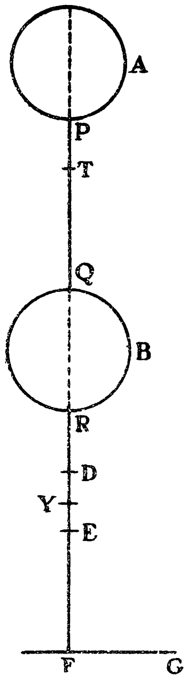
$$3x^4-nx^3-5s^3x+s^3n+2s^3m=0.$$

Если бы дан был шар B, а искомым являлся шар A при том же условии, что после отражения оба шара встретятся в C, то вопрос был бы легче. В самом деле, в этом случае в последнем уравнении данным был бы x, а искомой являлась бы s. Приводя должным образом уравнение, я бы перенес на другую сторону уравнения члены $-5s^3x+s^3n-$ $-2s^3m$, разделил обе стороны на $5x-n+2m$ и получил, что

$$s^3=\frac{3x^4-nx^3}{5x-n+2m}.$$

Найти отсюда s можно путем простого извлечения кубического корня.

Если бы даны были оба шара и вам нужно было бы найти точку C, в которой оба они встретятся после отражения, то, так как вы ранее имели, что $A-B$ относится к $2A$, как GC к $Gg+gC$, то, invertendo и componendo, вы получите, что $3A-B$ относится к $A-B$, как $2Gg$ к искомому расстоянию GC.



Фиг. 70

Задача LII

Два шара A и B соединены тонкой нитью PQ, и шар B подвешен к шару A. Предоставьте шару A падать так, что оба шара начнут падать вместе вдоль вертикали PQ под действием одной лишь силы тяжести. Тогда нижний шар B после отражения кверху от основания или горизонтальной плоскости FG встретится с падающим верхним шаром A в некоторой точке D. Найти, с какой высоты PF должен падать верхний шар A, чтобы произвести такое действие, если даны длина нити PQ и расстояние DF точки D от основания (фиг. 70).

Допустим, что длина нити PQ есть a. Отложите на перпендикуляре $PQRF$ от точки F кверху FE, равную диаметру QR нижнего шара, так что в момент, когда нижняя точка R этого шара попадет на основание в точку F, его верхняя точка Q будет занимать положение E. Пусть ED будет расстояние, которое пройдет этот шар при подъеме после отражения от основания, прежде чем встретится в точке D с падающим верхним шаром A. Так как расстояние DF точки D от основания и диаметр нижнего шара EF даны, то дана будет также их разность DE. Положим $DE=b$, а высоту RF или QE, которую пройдет при падении нижний шар, прежде чем коснется основания, положим равной x, поскольку она неизвестная. Найдя x и прибавив к нему EF и PQ, вы получите высоту PF, с которой должен падать верхний шар, чтобы произвести требуемое действие.

Так как $PQ = a$ и $QE = x$, то $PE = a + x$. Вычтите DE или b из PE, разность будет $PD = a + x - b$. Но время падения шара A пропорционально корню из описанного им при падении пространства или же $\sqrt{a + x - b}$, время падения другого шара B пропорционально корню из пространства, описанного при его падении, или же $\sqrt{x}$, а время подъема шара B пропорционально разности $\sqrt{x}$ и корня из пространства, которое он прошел бы, падая лишь из Q в D. В самом деле, эта разность пропорциональна времени падения из D в E, которое равно времени подъема из E в D. Разность этих корней есть $\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Таким образом, общее время падения и подъема шара B будет пропорционально $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. А так как это время равно времени падения верхнего шара, то

$$\sqrt{a + x - b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}.$$

Возведя стороны этого уравнения в квадрат, вы получите

$$a + x - b = 5x - b - 4\sqrt{x^2 - bx},$$

или

$$a = 4x - 4\sqrt{x^2 - bx}.$$

Приведя это уравнение к виду

$$4x - a = 4\sqrt{x^2 - bx}$$

и вновь возведя в квадрат стороны, вы найдете, что

$$16x^2 - 8ax + a^2 = 16x^2 - 16bx,$$

или

$$a^2 = 8ax - 16bx.$$

Разделив все на $8a - 16b$, вы получите, что

$$x = \frac{a^2}{8a - 16b}.$$

Поэтому возьмите $(8a - 16b) : a = a : x$ и вы будете иметь x или QE. Ч. т. с.

Если по данному QE вам нужно найти длину нити PQ или a, то это же уравнение

$$a^2 = 8ax - 16bx$$

после извлечения неявного квадратного корня даст, что

$$a = 4x - \sqrt{16x^2 - 16bx}.$$

Поэтому, если вы возьмете QY средней пропорциональной между QD и QE, то $PQ = 4EY$. Действительно, эта средняя пропорциональная есть $\sqrt{x(x-b)}$, или $\sqrt{x^2 - bx}$, и если ее вычесть из x или QE, то разность будет EY, учетверенное кратное которой есть $4x - 4\sqrt{x^2 - bx}$, т. е. значение a.

Если по данным величинам QE или x и длине нити PQ или a требуется найти точку D, в которой падающий верхний шар встретится с нижним, то расстояние DE, или b, этой точки от данной точки E получится из предыдущего уравнения

$$a^2 = 8ax - 16bx$$

путем переноса a^2 и $16bx$ на другие стороны уравнения с обратными знаками и деления всего на $16x$. При этом получится

$$b = \frac{8ax - a^2}{16x}.$$

Возьмите поэтому $16x : (8x - a) = a : b$ и вы будете иметь b, или DE.

До сих пор я предполагал, что соединенные тонкой нитью шары начинают падать совместно. Допустим, что они не связаны нитью и начинают падать в различное время, так что, например, верхний шар A отпускают первым и он опускается на пространство PT, прежде чем начинает падать второй шар. Требуется по данным расстояниям PT, QP и DE найти высоту, с которой должен быть отпущен верхний шар, чтобы он упал на нижний в точке D. Положите $PQ=a$, $DE=b$, $PT=c$ и $QE=x$; тогда, как и ранее, $PD=a+x-b$. Времена, в течение которых верхний шар при падении опишет пространства PT и TD, а нижний шар, сперва падая, а затем поднимаясь, опишет сумму пространств $QE+ED$, будут пропорциональны соответственно $\sqrt{PT}$, $\sqrt{PD}-\sqrt{PT}$ и $2\sqrt{QE}-\sqrt{QD}$, т. е. $\sqrt{c}$, $\sqrt{a+x-b}-\sqrt{c}$ и $2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. Но так как пространства TD и $QE+ED$ проходятся одновременно, то последние два времени равны. Следовательно,

$$\sqrt{a+x-b}-\sqrt{c}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$$

и после возведения сторон в квадрат

$$a+c-2\sqrt{ca+cx-bc}=4x-4\sqrt{x^2-bx}\,.$$

Положите $a+c=e$ и $a-b=f$, и после должного приведения получится

$$4x-e+2\sqrt{cf+cx}=4\sqrt{x^2-bx},$$

а после возведения в квадрат

$$e^2-8ex+16x^2+4cf+4cx+(16x-4e)\sqrt{cf+cx}=$$
$$=16x^2-16bx.$$

Отбросив с обеих сторон $16x^2$ и написав m вместо e^2+4cf, а также n вместо $8e-16b-4c$, вы с помощью должного приведения найдете

$$(16x-4e)\sqrt{cf+cx}=nx-m.$$

Возведя стороны в квадрат, вы получите

$$256cfx^2+256cx^3-128cefx-128cex^2+16ce^2f+16ce^2x=$$
$$=n^2x^2-2mnx+m^2$$

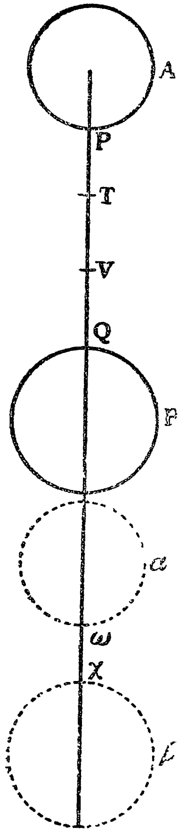
и, расположив уравнение по порядку,

$$256cx^3+(256cf-128ce-n^2)x^2-$$
$$-(128cef-16ce^2-2mn)x+16ce^2f-m^2=0.$$

Построение этого уравнения даст x или QE, и если вы к QE прибавите данные расстояния PQ и EF, то получите искомую высоту PF.

Задача LIII

Два покоившиеся шара, верхний шар A и нижний шар B, начинают падать в различные моменты времени; нижний шар начинает падать в момент, когда верхний уже прошел при падении пространство PT. Найти места α и β, которые будут занимать падающие шары, когда промежуток или расстояние между ними $\omega\chi$ будет равно данной величине (фиг. 71).



Фиг. 71

Так как расстояния PT, PQ и $\omega\chi$ даны, назовите первое a, второе b и третье c, а пространство $P\omega$, которое описывает падая верхний шар, прежде чем попадет в искомое место α, обозначьте x. Времена, в течение которых верхний шар опишет пространства PT, $P\omega$, $T\omega$ и нижний шар — пространство $Q\chi$, будут пропорциональны соответственно $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\omega}$, $\sqrt{P\omega}-\sqrt{PT}$ и $\sqrt{Q\chi}$. Так как шары проходят пространства $T\omega$ и $Q\chi$, падая совместно, то последние два времени равны, т. е. $\sqrt{P\omega}-\sqrt{PT}=\sqrt{Q\chi}$. Мы положили $P\omega=x$ и $PT=a$; если к $P\omega$ прибавить $\omega\chi$, или c, и из суммы вычесть PQ, или b, то $Q\chi = x + c - b$. Подставив эти значения, вы получите

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{x+c-b}$$

и по возведении обеих сторон уравнения в квадрат

$$x + a - 2\sqrt{ax} = x + c - b.$$

Если с обеих сторон отбросить x и расположить уравнение по порядку, то вы получите

$$a + b - c = 2\sqrt{ax}.$$

После возведения сторон в квадрат, квадрат $a + b - c$ будет равен $4ax$, и этот квадрат, деленный на $4a$, будет равен x, или же $4a$ будет относиться к $a + b - c$, как $a + b - c$ к x. Когда x, или $P\omega$, будет найдено, то будет дано и искомое место α верхнего шара. А так как расстояние между местами известно, то дано будет и место β нижнего шара.

Если вам нужно найти точку, в которой падающий верхний шар упадет на нижний, то, положив расстояние $\omega\chi = 0$ или же отбросив c, скажите: $4a$ относится к $a + b$, как $a + b$ к x, или $P\omega$; точка ω и будет искомой.

Наоборот, пусть эта точка, ω или χ, в которой верхний шар упадет на нижний, дана и пусть вам нужно найти место T, занимавшееся нижней точкой P верхнего падающего шара в момент начала падения нижнего шара. Так как $4a$ относится к $a + b$, как $a + b$ к x, или, перемножая средние и крайние,

$$4ax = a^2 + 2ab + b^2,$$

или, приводя уравнение в должный порядок,

$$a^2 = 4ax - 2ab - b^2,$$

то извлеките квадратный корень и вы получите, что

$$a = 2x - b - 2\sqrt{x^2 - bx}.$$

Поэтому возьмите $V\omega$, среднюю пропорциональную между $P\omega$ и $Q\omega$, и от V отложите $VT = VQ$; T и будет искомой точкой. В самом деле, $V\omega = \sqrt{P\omega \times Q\omega}$, т. е. $= \sqrt{x(x-b)}$, или $= \sqrt{x^2 - bx}$; и если из $2x - b$, или $2P\omega - PQ$, т. е. из $PQ + 2Q\omega$, вычесть удвоенное кратное этой величины, то останется $PQ - 2VQ$, или $PV - VQ$, т. е. PT.

После падения верхнего шара на нижний движение нижнего при их соударении ускоряется, а верхнего замедляется, и пусть, наконец, требуется найти места, в которых они при падении окажутся на взаимном расстоянии, равном данной прямой линии. Прежде всего вы должны найти место, в котором верхний шар упадет на нижний. Затем по известным величинам шаров и по их скоростям в месте их встречи вам нужно будет, так же как в задаче XII, найти их скорости непосредственно после отражения. После этого вам нужно будет найти наивысшие места, на которые поднялись бы шары с этими скоростями, если бы они направлены были кверху. Таким образом будут найдены пространства, которые опишут шары, падая в течение данного времени после отражения, а также разность этих пространств. Наоборот, считая известной эту разность, вы могли бы аналитическим путем возвратиться к пространствам, описанным при падении.

Фиг. 72

Допустим, например, что верхний шар падает на нижний в точке ω и что после отражения скорость верхнего книзу такова, что, будучи направлена кверху, могла бы заставить этот шар подняться на расстояние ωN, а скорость нижнего шара книзу такова, что, будучи направлена кверху, могла бы заставить нижний шар подняться на расстояние ωM (фиг. 72). Тогда времена, в течение которых верхний шар, наоборот, опустится на пространства $N\omega$, Ng, а нижний шар — на пространства $M\omega$, MH, будут соответственно пропорциональны $\sqrt{N\omega}$,

$\sqrt{NG}$, $\sqrt{M\omega}$, $\sqrt{MH}$; поэтому времена, за которые верхний шар пройдет пространство ωG, а нижний — пространство ωH, будут находиться между собой в отношении $\sqrt{NG} - \sqrt{N\omega}$ к $\sqrt{MH} - \sqrt{M\omega}$. Положите эти времена равными, тогда $\sqrt{NG} - \sqrt{N\omega} = \sqrt{MH} - \sqrt{M\omega}$; так как, кроме того, дано расстояние GH, то положите $\omega G + GH = \omega H$. Приведение этих двух уравнений даст решение задачи. Если $M\omega = a$, $N\omega = b$, $GH = c$ и $\omega G = x$, то из последнего уравнения вы получите $\omega H = x + c$. Прибавьте $M\omega$, и у вас будет $MH = a + c + x$. Прибавьте $N\omega$ к ωG и вы будете иметь $NG = b + x$. Найдя это, вы из первого уравнения получите, что

$$\sqrt{b+x} - \sqrt{b} = \sqrt{a+c+x} - \sqrt{a}.$$

Напишите e вместо $a + c$ и $\sqrt{f}$ вместо $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{b+x} = \sqrt{e+x} - \sqrt{f},$$

а после возведения сторон в квадрат — вид

$$b + x = e + x + f - 2\sqrt{ef + fx},$$

или же

$$e + f - b = 2\sqrt{ef + fx}.$$

Напишите g вместо $e + f - b$; вы получите тогда

$$g = 2\sqrt{ef + fx}$$

и после возведения сторон в квадрат

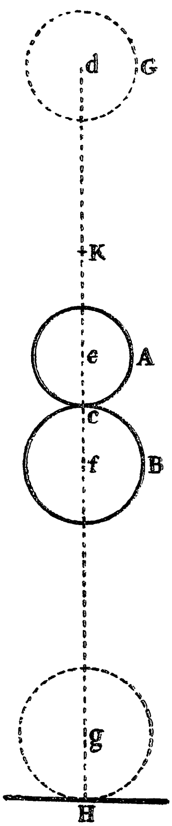
$$g^2 = 4ef + 4fx$$

и при помощи приведения

$$x = \frac{g^2}{4f} - e.$$

Задача LIV

Даны два шара A и B, верхний из которых A, падая с высоты G, ударяется о нижний B, отскакивающий кверху от основания H. При отражении эти шары расходятся, так что шар A в силу этого отражения возвращается на свою первоначальную высоту G, а нижний шар B в то же самое время возвращается к основанию H. Затем шар A падает снова и вновь ударяется о шар B, вновь отскакивающий обратно от основания; и таким образом шары непрестанно отскакивают друг от друга и возвращаются на те же самые места. По данным величинам шаров, положению основания и месту G, из которого падает верхний шар, найти место соударения обоих шаров (фиг. 73).



Фиг. 73

Положим, что e есть центр шара A, f — центр шара B, d — центр места G, в котором шар A находится на наибольшей высоте, g — центр места, в котором шар B падает на основание, a — полудиаметр шара A, b — полудиаметр шара B, c — точка касания обоих шаров при соударении и H — точка касания нижнего шара и основания. Скорость шара A в месте его падения на шар B будет та же, которая порождается при его падении с высоты de, и, следовательно, будет пропорциональна $\sqrt{de}$. Для того чтобы шар A вновь поднялся на прежнее место G, он должен отразиться с той же скоростью кверху. А для того чтобы шар B мог возвратиться к основанию за то же время, в течение которого он от основания поднимался, он должен отразиться с той же скоростью книзу, с какой он поднимался. Для того же, чтобы имело место и то и другое, количества движения шаров при отражении должны быть равны. Но количества движения составляются совместно из скоростей и величин, и, следовательно, произведение массы и скорости одного шара будет равно произведению массы и скорости другого. Поэтому если произведение массы и скорости одного шара разделить на массу другого шара, то вы получите скорость этого другого как раз перед отражением и после него или же в конце подъема и в начале спуска. Следовательно, эта скорость будет пропорциональна $\frac{A\sqrt{de}}{B}$, а так как шары относятся, как кубы их радиусов, то она будет пропорциональна $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Но квадрат этой скорости относится к квадрату скорости шара A непосредственно перед отражением, как высота, на которую поднялся бы с этой скоростью шар B, если бы ему не помешала встреча с упавшим на него шаром A, относится к высоте de, с которой опустился шар A. Таким образом, $\frac{A^2}{B^2}\,de$ относится к de, или же A^2 к B^2, или a^6 к b^6, как эта первая высота к x, где через x обозначена вторая высота de. Значит, эта высота, т. е. та, на которую поднялся бы B, если бы перед ним не встретилось препятствия, есть $\frac{a^6}{b^6}x$. Допустим, что эта высота есть fK. К fK прибавьте fg, или $dH-de-ef-gH$, т. е. $p-x$, где через p обозначена данная величина $dH-ef-gH$, а x есть неизвестная de, и вы получите, что $Kg=\frac{a^6}{b^6}x+p-x$. Поэтому если бы шар B упал на основание из K, т. е. если бы он прошел пространство Kg, которое описал бы при падении его центр, то скорость его была бы пропорциональна $\sqrt{\frac{a^6x}{b^6}+p-x}$. Но этот шар падает на основание из места Bcf в то самое время, в какое шар A поднимается из места ACe до его наибольшей высоты d или же падает из точки d к месту Ace. Так как скорости падающих тел увеличиваются за равные времена на равные приращения, то скорость шара B при падении на основание увеличится на столько же, на сколько скорость, которую приобретает шар A, падая за то же время из d в e, или же которую он теряет, поднимаясь из e в d. Поэтому прибавьте к скорости, которую имеет шар B в месте Bcf, скорость, которую имеет шар A в месте Ace, — эта сумма, пропорциональная $\sqrt{de} + \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, или же $\sqrt{x} + \frac{a^3\sqrt{x}}{b^3}$, будет скоростью шара B при падении на основание. Значит, $\sqrt{x} + \frac{a^3\sqrt{x}}{b^3}$ равен $\sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x}$. Вместо $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$ напишите $\frac{r}{s}$ и вместо $\frac{a^6 - b^6}{b^6}$ напишите $\frac{rt}{s^2}$; тогда уравнение примет вид

$$\frac{r}{s}\sqrt{x} = \sqrt{\frac{rtx}{s^2} + p},$$

а после возведения сторон в квадрат

$$\frac{r^2 x}{s^2} = \frac{rtx}{s^2} + p.$$

Вычтите из обеих сторон $\frac{rt}{s^2}x$, умножьте все на s^2 и разделите на $r^2 - rt$; тогда

$$x = \frac{s^2 p}{r^2 - rt}.$$

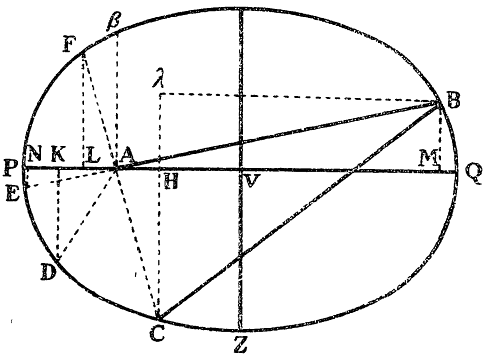
Уравнение это было бы проще, если бы я обозначил $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$ через $\frac{p}{s}$, ибо тогда получилось бы

$$x = \frac{s^2}{p - t}.$$

Поэтому, взяв отношение $p - t$ к s равным отношению s к x, вы получите x, или ed; а если вы к этому прибавите ec, то получите dc, а также точку c, в которой сталкиваются шары. Ч. т. с.

Задача LV

В некотором месте на земле в точках A, B и C воткнуты перпендикулярно к плоскости горизонта три шеста. Шест в точке A имеет шесть футов, шест в B восемнадцать, а шест в C восемь. Линия AB имеет длину в тридцать три фута. В некий день года конец тени шеста A проходит через точки B и C, конец тени шеста B проходит через A и C, а конец тени шеста C проходит через точку A. Найти склонение солнца и высоту полюса, или же день и место, где произошло сказанное (фиг. 74).



Фиг. 74

Так как тень каждого шеста описывает коническое сечение, или же сечение светящегося конуса, вершина которого совпадает с верхушкой шеста, то я приму, что $BCDEF$ есть именно такая кривая (будь то гипербола, парабола или эллипс), описанная в этот день тенью шеста A. Я приму, далее, что AD, AE, AF суть тени шеста A, а BC, BA и CA суть соответственно тени шестов B и C. Я предположу еще, что PAQ есть линия меридиана или ось этой кривой и что ординатами ее являются перпендикуляры к оси BM, CH, DK, EN и FL. Эти ординаты я обозначу неопределенным образом [84] буквой y, а отсекаемые части оси AM, AH, AK, AN и AL я обозначу буквой x. Наконец, я приму, что отношение между x и y (т. е. природа кривой) выражается уравнением

$$a^2 \perp bx \perp cx^2 = y^2,$$

где величины a^2, b, c я буду считать известными, поскольку они будут найдены путем анализа. Неизвестные величины я взял только до двух измерений, ибо уравнение должно выражать коническое сечение. Нечетные измерения y я опустил потому, что y есть ордината относительно оси. Неопределенные знаки при b и c я отметил символом $\perp$, которым пользуюсь безразлично для $+$ и $-$; для обратных знаков я применяю противоположный символ $\top$ [85]. Но при квадрате a^2 я взял положительный знак, так как вогнутая часть кривой обязательно содержит шест A, отбрасывающий свои тени в противоположные стороны (C и F, D и E). Поэтому если вы в точке A восстановите перпендикуляр $A\beta$, то он где-либо встретит кривую, скажем в β, т. е. ордината y при x, равной нулю, будет все же действительной. Отсюда следует, что ее квадрат, который в этом случае есть a^2, будет положительный.

Таким образом, очевидно, что принятое нами уравнение $a^2 \perp bx \perp cx^2 = y^2$ не содержит лишних членов и вместе с тем содержит их не меньше, чем требуется, чтобы оно могло удовлетворить всем условиям этой задачи, и что оно будет выражать гиперболу, эллипс или параболу в соответствии с тем, как определятся значения a^2, b, c (которые, быть может, окажутся и равными нулю). Нижеследующий анализ выявит, каковы эти значения и какие знаки будут иметь b и c и, значит, какова природа этой кривой.

Первая часть анализа. Так как тени пропорциональны высотам шестов, то $BC : AD = AB : AE$ $(= 18 : 6) = 3 : 1$ и $CA : AF = (8 : 6) = 4 : 3$. Обозначим $AM = r$, $BM = s$, $AH = t$ и $HC = \perp v$. Так как треугольники AMB, ANE подобны, а также подобны треугольники AHC и ALF, то $AN = -\frac{r}{3}$, $NE = -\frac{s}{3}$, $AL = \frac{-3t}{4}$ и $LF = \top \frac{3v}{4}$. Я придал этим величинам знаки, обратные знакам AM, MB, AH, HC, ибо они направлены в противоположные стороны либо относительно точки A, из которой они проведены, либо относительно оси PQ, к которой приложены. Если в принятое уравнение $a^2 \pm bx \pm cx^2 = y^2$ вместо x и y соответственно подставить эти значения, то мы получим:

подставляя r и s, $\quad a^2 \pm br \pm cr^2 = s^2$,

подставляя $-\frac{r}{3}$ и $-\frac{s}{3}$, $\quad a^2 \mp \frac{br}{3} \pm \frac{1}{9} cr^2 = \frac{1}{9} s^2$,

подставляя t и $\pm v$, $\quad a^2 \pm bt \pm ct^2 = v^2$,

подставляя $-\frac{3}{4} t$ и $\mp \frac{3}{4} v$, $\quad a^2 \mp \frac{3}{4} bt \pm \frac{9}{16} ct^2 = \frac{9}{16} v^2$.

Если для определения r из первого и второго уравнений исключить s^2, то мы найдем, что $r = \frac{2a^2}{\pm b}$, откуда ясно, что $\pm b$ положительно. Исключая затем для получения t из третьего и четвертого уравнений v^2, мы найдем, что $t = \frac{a^2}{3b}$. А если подставить в первое уравнение r вместо $\frac{2a^2}{b}$, а в третье t вместо $\frac{a^2}{3b}$, то получится

$$3a^2 \pm \frac{4a^4c}{b^2} = s^2$$

и

$$\frac{4}{3} a^2 \pm \frac{a^4c}{9b^2} = v^2.$$

Если затем на CH опустить перпендикуляр $B\lambda$, то $BC : AD$ $(= 3:1) = B\lambda : AK = C\lambda : DK$. И так как $B\lambda$ $(= AM - AH = r - t) = \frac{5a^2}{3b}$, то $AK = \frac{5a^2}{9b}$, или же $= -\frac{5a^2}{9b}$. Далее, $C\lambda (= CH \pm BM = v \pm s) = \sqrt{\frac{4a^3}{3} \pm \frac{a^4c}{9b^2}} \pm \sqrt{3a^2 \pm \frac{4a^4c}{b^2}}$ и поэтому $DK \left(= \frac{1}{3} C\lambda\right) = \sqrt{\frac{4a^2}{27} \pm \frac{a^4c}{81b^2}} \pm \sqrt{\frac{a^2}{3} \pm \frac{4a^4c}{9b^2}}$.

Подставив эти величины соответственно вместо AK и DK, или же x и y, в уравнение

$$a^2 + bx \pm cx^2 = y^2,$$

вы получите

$$\frac{4a^2}{9} \pm \frac{25a^4c}{81b^2} = \frac{13}{27}a^2 \pm \frac{37a^4c}{81b^2} \pm 2\sqrt{\frac{4a^2}{27} \pm \frac{a^4c}{81b^2}} \times \sqrt{\frac{a^2}{3} \pm \frac{4a^4c}{9b^2}}$$

и после приведения

$$-b^2 \mp 4a^2c = \pm 2\sqrt{36b^4 \pm 51a^2b^2c + 4a^4c^2}.$$

Возведя обе стороны в квадрат и вновь проделав приведение, вы будете иметь

$$0 = 143b^4 \pm 196a^2b^2c,$$

или

$$\pm c = -\frac{143b^2}{196a^2}.$$

Отсюда ясно, что c должно быть отрицательно и, следовательно, принятое уравнение

$$a^2 \pm bx \pm cx^2 = y^2$$

должно иметь вид

$$a^2 + bx - cx^2 = y^2.$$

Таким образом, выражаемая им кривая есть эллипс. Центр его и обе оси находятся следующим образом. Если положить $y = 0$, как это имеет место в вершинах фигуры P и Q, то вы получите

$$a^2 + bx = cx^2$$

и, извлекая корень,

$$x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{a^2}{c}} = \begin{Bmatrix} AQ \\ AP \end{Bmatrix}.$$

Значит, если взять $AV = \dfrac{b}{2c}$, то V будет центром эллипса, а

VQ, или $VP\left(=\sqrt{\frac{b^2}{4c^2}+\frac{a^2}{c}}\right)$, большой полуосью. Далее, если в уравнение

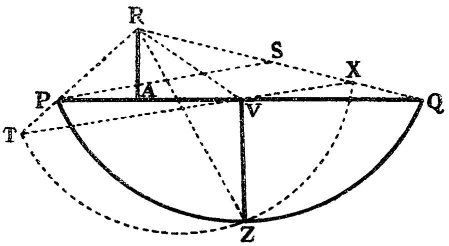
$$a^2+bx-cx^2=y^2$$

подставить вместо x значение AV или $\frac{b}{2c}$, то получится

$$a^2+\frac{b^2}{4c}=y^2.$$

Поэтому квадрат малой полуоси $\overline{VZ}^2=a^2+\frac{b^2}{4c}$. Наконец, если в уже найденные значения AV, VQ, VZ подставить вместо c его значение $\frac{143b^2}{196a^2}$, то вы найдете, что

$$AV=\frac{98a^2}{143b},\quad VQ=\frac{112a^2\sqrt{3}}{143b}\text{ и } VZ=\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}.$$



Фиг. 75

Вторая часть анализа. Допустим, что шест, стоящий в точке A, есть AR, что RPQ есть меридиональная плоскость, а $RPZQ$ — светящийся конус с вершиной в R (фиг. 75). Пусть далее TXZ представляет собой плоскость, сечение которой с горизонтальной плоскостью есть VZ, а сечение с меридиональной плоскостью есть TVX, и пусть это сечение TVX направлено перпендикулярно к оси мира или конуса. Плоскость TXZ будет перпендикулярна к той же оси и пересечет конус по окружности круга TZX, которая будет всюду на одинаковом расстоянии, вроде RX, RZ, RT, от вершины конуса R. Следовательно, если провести PS параллельно TX, то в силу равенства величин RX, RT вы получите $RS=$ $=PR$, а в силу равенства величин PV, VQ получите также

$SX = XQ$, откуда следует, что RX или $RZ = \left(\frac{RS+RQ}{2}\right) = \frac{RP+RQ}{2}$. Проведите, наконец, RV. Так как VZ перпендикулярна к плоскости RPQ (ибо есть сечение двух плоскостей, перпендикулярных к этой плоскости), то треугольник RVZ прямоугольный при V.

Положив $RA = d$, $AV = e$, VP или $VQ = f$ и $VZ = g$, вы получите, что $AP = f - e$ и $RP = \sqrt{f^2 - 2ef + e^2 + d^2}$. Далее, $AQ = f + e$ и $RQ = \sqrt{f^2 + 2fe + e^2 + d^2}$. Следовательно, $RZ = \frac{RP+RQ}{2} = \frac{\sqrt{f^2 - 2fe + e^2 + d^2} + \sqrt{f^2 + 2fe + c^2 + d^2}}{2}$, квадрат чего $\frac{d^2+e^2+f^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{f^4 - 2e^2f^2 + e^4 + 2d^2f^2 + 2d^2e^2 + d^4}$ равен $(\overline{RV}^2 + \overline{VZ}^2 = \overline{RA}^2 + \overline{AV}^2 + \overline{VZ}^2 =) d^2 + e^2 + g^2$. Произведя приведения, вы получите

$$\sqrt{f^4 - 2e^2f^2 + e^4 + 2d^2f^2 + 2d^2e^2 + d^4} = d^2 + e^2 - f^2 + 2g^2,$$

а возведя стороны в квадрат и проделав приведения,

$$d^2f^2 = d^2g^2 + e^2g^2 - f^2g^2 + g^4,$$

или же

$$\frac{d^2f^2}{g^2} = d^2 + e^2 - f^2 + g^2.$$

Наконец, если вместо d, e, f и g подставить соответственно 6, $\frac{98a^2}{143b}$, $\frac{112a^2\sqrt{3}}{143b}$ и $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ (значения AR, AV, VQ и VZ), то получится

$$36 - \frac{196a^4}{143b^2} + \frac{192a^2}{143} = \frac{36 \times 14 \times 14a^2}{143b^2}$$

и после приведения

$$\frac{49a^4 + 36 \times 49a^2}{48a^2 + 1287} = b^2.$$

На фиг. 74 $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=\overline{AB}^2$, т. е. $r^2+s^2=33^2$. Но уже было найдено, что $r=\frac{2a^2}{b}$ и $s^2=3a^2-\frac{4a^4c}{b^2}$; поэтому $r^2=\frac{4a^4}{b^2}$ и $\left(\text{если вместо } c \text{ подставить } \frac{143b^2}{196a^2}\right)$ $s^2=\frac{4a^2}{49}$. Значит, $\frac{4a^4}{b^2}+\frac{4a^2}{49}=33^2$ и после приведения $\frac{4\times 49a^4}{53361-4a^2}=b^2$. Записав равенство между обоими значениями b^2 и разделив обе стороны уравнения на 49, вы получите

$$\frac{a^4+36a^2}{48a^2+1287}=\frac{4a^4}{53361-4a^2},$$

а перемножив стороны накрест, расположив все по порядку и разделив на 49, вы найдете, что

$$4a^4=981a^2+39204.$$

Корень этого уравнения

$$a^2=\frac{981+\sqrt{1589625}}{8}=280,2254144.$$

Выше было найдено, что

$$\frac{4\times 49a^4}{53361-4a^2}=b^2,$$

или

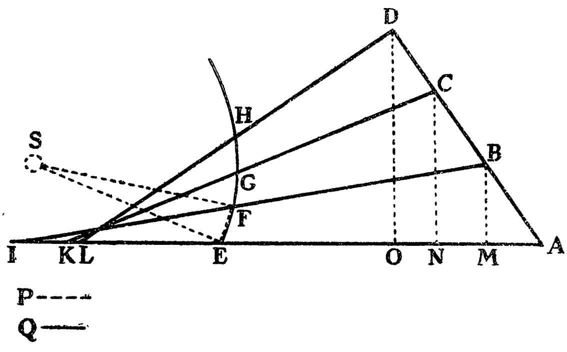
$$\frac{14a^2}{\sqrt{53361-4a^2}}=b.$$

Поэтому AV $\left(\frac{98a^2}{143b}\right)$ есть $\frac{7\sqrt{53361-4a^2}}{143}$, а VP, или VQ $\left(\frac{112a^2\sqrt{3}}{143b}\right)$, есть $\frac{8\sqrt{160083-12a^2}}{143}$. Подставив вместо a^2 число 280,2254144 и выражая члены в десятичных дробях, вы получите, что $AV=11{,}188297$, а VP или $VQ=22{,}147085$. Следовательно, $AP\ (=VP-AV)=10{,}958788$ и $AQ\ (=AV+VQ)=33{,}335382$.

Наконец, если принять за радиус $\frac{1}{6} AR$ или 1, то $\frac{1}{6} AQ$, или 5,555897, будет тангенсом угла ARQ в 79° 47′ 48″, а $\frac{1}{6} AP$, или 1,826465, будет тангенсом угла ARP в 61° 17′ 57″. Полусумма этих углов 70° 32′ 52″ есть дополнение к склонению солнца, а их полуразность 9° 14′ 56″ есть дополнение к широте места. Таким образом, искомое склонение солнца было 19° 27′ 8″, а широта места — 80° 45′ 4″.[86]

Задача LVI

Комета движется по небу равномерно и прямолинейно. Определить — в согласии с гипотезой Коперника — ее расстояние от земли, направление и скорость ее движения по ее четырем положениям, известным из наблюдения (фиг. 76).



Фиг. 76

Из местоположений центра кометы при четырех наблюдениях опустите по перпендикуляру на плоскость эклиптики; пусть основания этих перпендикуляров на этой плоскости суть A, B, C, D. Проведите через эти точки прямую AD. Эта прямая и линия, которую описывает при своем движении комета, будут разделены перпендикулярами в одинаковом отношении, так что AB будет относиться к AC, как время между первым и вторым наблюдениями ко времени между первым и третьим, а AB к AD, как время между первым и вторым наблюдениями ко времени между первым и четвертым. Таким образом, наблюдения дают нам отношения между линиями AB, AC, AD.

Положим далее, что место солнца на той же плоскости эклиптики есть S, дуга эклиптики, по которой движется земля, EH, а четыре места, в которых находилась земля во времена каждого из наблюдений, E, F, G, H; E — первое место, F — второе, G — третье и H — четвертое. Проведите AE, BF, CG, DH и продолжите их до пересечения трех последних с первой в I, K и L, а именно BF в I, CG в K и DH в L. Углы AIB, AKC, ALD будут разностями наблюденных долгот кометы; AIB — разностью долгот для первого и второго местоположений кометы, AKC — разностью долгот для первого и третьего местоположений, а ALD — разностью долгот для первого и четвертого местоположений. Таким образом, углы AIB, AKC, ALD известны из наблюдений.

Проведите SE, SF, EF. Так как точки S, E, F даны и дан угол ESF, то угол SEF также будет дан. Равным образом дан угол SEA, который является разностью долготы кометы и солнца во время первого наблюдения; а если вы прибавите его дополнение до двух прямых, т. е. угол SEI к углу SEF, то будет дан угол IEF. Значит, в треугольнике IEF даны углы и сторона EF, и, следовательно, дана сторона IE. В силу аналогичного рассуждения будут даны также KE и LE. Таким образом, четыре линии AI, BI, CK, DL даны по положению и, значит, задача сводится к следующей: даны по положению четыре прямые, найти пятую, которая делится этими четырьмя в данном отношении.[87]

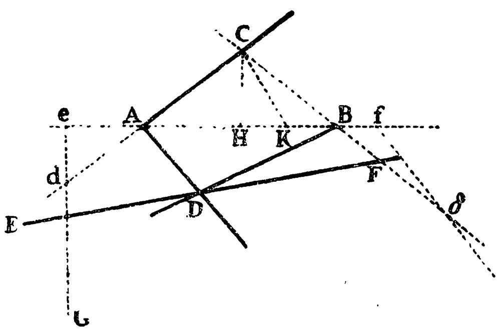
Если опустить на AI перпендикуляры BM, CN, DO, то будет дано отношение BM к MI, так как угол AIB дан. Далее, BM находится к CN в данном отношении BA к CA, и так как угол CKN дан, то дано и отношение CN к KN. Таким образом, дано также отношение BM к KN, а значит, и отношение BM к $MI - KN$, т. е. к $MN + IK$. Положите, что P относится к IK, как AB к BC; так как MA находится в том же отношении к MN, то в том же, т. е. в данном, отношении будет $P + MA$ к $IK + MN$. Значит, дано отношение BM к $P + MA$. Если взять Q в отношении к IL, равном отношению AB к BD, то в силу аналогичного рассуждения будет дано отношение BM к $Q + MA$, а следовательно, будет также дано отношение BM к разности $P + MA$ и $Q + MA$. Но эта разность, т. е. $P - Q$ или $Q - P$ дана и, значит, дана BM. А раз дана BM, то даны будут также $P + MA$ и MI, а затем MA, ME, AE и угол EAB.

Найдя эти величины, восстановите в точке A перпендикуляр к плоскости эклиптики, отношение которого к линии EA равно отношению тангенса широты кометы к радиусу при первом наблюдении. Конец этого перпендикуляра представит собой место центра кометы при первом наблюдении. Значит, будет дано расстояние кометы от земли во время этого наблюдения. Если вы также восстановите в точке B перпендикуляр, отношение которого к линии BF равно отношению тангенса широты кометы к радиусу при втором наблюдении, то вы получите место центра кометы при втором наблюдении. Линия, проведенная из первого места ко второму, представляет собой путь, по которому движется комета по небу.

Задача LVII

Данный угол CAD вращается вокруг данной по положению вершины A, а данный угол CBD — вокруг также данной по положению вершины B, при условии, что стороны AD, BD всегда пересекаются на данной по положению прямой EF. Найти кривую, которую описывает C — точка пересечения двух других сторон AC, BC (фиг. 77).

Продолжите CA до d, так чтобы было $Ad = AD$, продолжите также CB до δ, так чтобы было $BD = B\delta$. Возьмите угол Ade равным углу ADE, а угол $B\delta f$ равным углу BDF и продолжите в обе стороны AB до пересечения с de в e и с δf в f. Продолжите также ed до G, так чтобы было $dG=\delta f$, а из точки C проведите к AB линию CH параллельно ed и CK параллельно $f\delta$. Если представить себе, что линии eG, $f\delta$ остаются неподвижными, когда углы CAD, CBD движутся вокруг полюсов A и B согласно предписанному закону, то Gd всегда будет равно $f\delta$ и вид треугольника CHK будет дан. Положите поэтому $Ae=a$, $eG=b$, $Bf=c$, $AB=m$, $BK=x$ и $CK=y$. Тогда $BK:CK=$ $=Bf:\delta f$ и, значит, $f\delta=\frac{cy}{x}=Gd$. Вычтите это из Ge, останется $ed=b-\frac{cy}{x}$.



Фиг. 77

Так как вид треугольника CKH дан, положите $CK:CH=d:e$ и $CH:HK=e:f$; тогда $CH=\frac{ey}{d}$ и $HK=\frac{fy}{d}$, а значит, $AH=m-x-\frac{fy}{d}$. Кроме того, $AH:HC=Ae:ed$, т. е. $\left(m-x-\frac{fy}{d}\right):\frac{ey}{d}=$ $=a:\left(b-\frac{cy}{x}\right)$. Поэтому, перемножая крайние и средние, вы получите

$$mb-\frac{mcy}{x}-bx+cy-\frac{bfy}{d}+\frac{cfy^2}{dx}=\frac{aey}{d}.$$

Умножьте все члены на dx, затем расположите по порядку; получится

$$fcy^2+(dc-ae-bf)yx-dcmy-bdx^2+bdmx=0.$$

Так как неизвестные величины x и y восходят здесь лишь до двух измерений, то ясно, что кривая, которую описывает точка C, есть коническое сечение. Положите $\frac{ae+bf-dc}{c}=2p$ и вы получите

$$y^2=\frac{2p}{f}\cdot xy+\frac{dm}{f}\cdot y+\frac{bd}{fc}\cdot x^2-\frac{bdm}{fc}\cdot x$$

и, извлекая квадратный корень,

$$y=\frac{px}{f}+\frac{dm}{2f}\pm\sqrt{\frac{p^2x^2}{f^2}+\frac{bdx^2}{fc}+\frac{pdmx}{f^2}-\frac{bdmx}{fc}+\frac{d^2m^2}{4f^2}}\,.$$

Из этого мы заключаем, что кривая является гиперболой, если $\frac{bd}{fc}$ положительно или же отрицательно и меньше, чем $\frac{p^2}{f^2}$. Она будет параболой, если $\frac{bd}{fc}$ отрицательно и равно $\frac{p^2}{p^2}$, и кругом или эллипсом, если $\frac{bd}{fc}$ отрицательно и больше, чем $\frac{p^2}{f^2}$.[88] Ч. т. н.[89]

Задача LVIII

Описать параболу, проходящую через четыре данные точки (фиг. 78).

Допустим, что эти данные точки суть A, B, C, D. Проведите AB и разделите ее пополам в E. Через E проведите прямую EV и примите ее за диаметр параболы, причем точка V будет вершиной. Проведите AC и параллельно AB проведите DG, которая пересечет AC в G. Положите $AB=a$, $AC=b$, $AG=c$ и $GD=d$. На AC возьмите AP произвольной длины; через P проведите PQ параллельно AB и, предположив, что Q есть точка параболы, положите $AP=x$ и $PQ=y$. Затем возьмите какое-нибудь уравнение параболы, определяющее отношение между AP и PQ, например уравнение

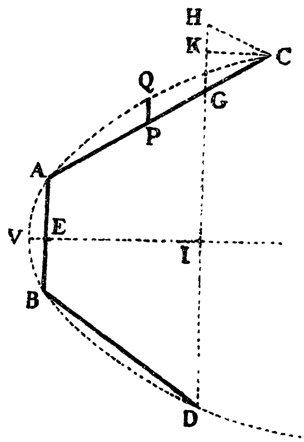
$$y=e+fx\pm\sqrt{g^2+hx}.$$

Если положить AP или $x=0$, точка P попадет в A и PQ, или y, будет $=0$, а также $=-AB$. Написав в принятом уравнении 0 вместо x, вы получите, что

$$y=e\pm\sqrt{g^2},\ \text{т. е. } y=e\pm g.$$

Большее из этих двух значений y, т. е. $e+g=0$, а меньшее $e-g=-AB=-a$. Следовательно, $e=-g$, а $e-g$, т. е. $-2g=-a$, или $g=\frac{1}{2}a$. Таким образом, вместо принятого уравнения вы получите следующее:

$$y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+hx}.$$



Фиг. 78

Далее, если взять AP или $x=AC$, так что точка P попадет в C, то вы опять получите, что $PQ=0$. Напишите поэтому в последнем уравнении AC или b вместо x, а вместо y напишите 0. У вас тогда будет

$$0=-\frac{1}{2}a+fb\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+bh},$$

или же

$$\frac{1}{2}a-fb=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+bh},$$

а по возведении сторон в квадрат

$$-afb+f^2b^2=bh,\ \text{или } f^2b-fa=h.$$

Таким образом, вместо принятого уравнения будет такое:

$$y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+f^2bx-fax}.$$

Далее, если взять AP, или $x=AG$, или c, то PQ, или $y=-GD=-d$. Напишите поэтому в последнем уравнении c вместо x и $-d$ вместо y и вы получите, что

$$-d=-\frac{1}{2}a+fc\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+f^2bc-fac}\,,$$

или

$$\frac{1}{2}a-d-fc=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+f^2bc-fac}\,,$$

а возведя стороны в квадрат,

$$-ad-fac+d^2+2dcf+c^2f^2=f^2bc-fac.$$

Приведя и расположив уравнение по порядку, вы будете иметь

$$f^2=\frac{2d}{b-c}f+\frac{d^2-ad}{bc-c^2}\,.$$

Вместо $b-c$, т. е. GC, напишите k; это уравнение примет тогда вид

$$f^2=\frac{2d}{k}f+\frac{d^2-ad}{kc}\,.$$

Извлечение корня даст, что

$$f=\frac{d}{k}\pm\sqrt{\frac{d^2c+d^2k-adk}{ck^2}}\,.$$

Когда вы определите таким образом f, уравнение

$$y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+f^2bx-fax}$$

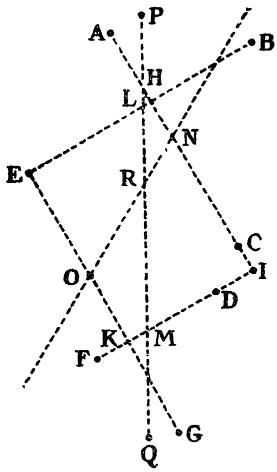
будет полностью определено, а при помощи его построения будет также определена и парабола.

Построение таково: параллельно BD проведите CH, пересекающую DG в H. Возьмите среднюю пропорциональную DK между DG и DH и параллельно CK проведите EI, делящую AB пополам в E и встречающую DG в I. Затем продолжите IE до V так, чтобы $EV:EI=\overline{EB}^2:(\overline{DI}^2-\overline{EB}^2)$, тогда V будет вершиной, VE диаметром, а $\frac{\overline{BE}^2}{VE}$ прямой стороной искомой параболы.[90]

Задача LIX

Описать коническое сечение, проходящее через пять данных точек (фиг. 79).

Допустим, что эти точки суть A, B, C, D, E. Проведите AC, BE, которые взаимно пересекутся в H. Параллельно BE проведите DI, которая встретит AC в I, а параллельно AC проведите EK, которая встретит продолженную DI в K. Продолжите ID до F и EK до G так, чтобы $AH \times HC : BH \times HE = AI \times IC : FI \times ID = EK \times KG : FK \times KD$.[91] При этом, как известно, точки F и G будут принадлежать коническому сечению.[92]



Фиг. 79

Вы должны, однако, иметь в виду, что в зависимости от того, окажется ли точка H между точками A, C и B, E или вне их, точка I должна попасть либо между точками A, C и D, F, либо вне их, а точка K — между точками D, F и E, G или же вне их. Но если точка H окажется между двумя точками A, C и вне двух других B, E или же между этими двумя B, E и вне двух других A, C, то точка I должна будет попасть между двумя из точек A, C и F, D и вне двух других из них и точно так же точка K должна будет попасть между двумя из точек D, F и E, G и вне двух других из них. Это произойдет, если взять IF, KG с той или с другой стороны от точек I, K, смотря по условиям задачи. Найдя точки F и G, разделите AC и EG пополам в N и O и BE и FD в L и M. Проведите NO, LM, которые взаимно пересекутся в R; LM и NO будут диаметрами конического сечения, точка R его центром, а BL, FM ординатами к диаметру LM. Продолжите, если понадобится, LM в обе стороны до

P и Q так, чтобы было $\overline{BL}^2 : \overline{FM}^2 = PL \times LQ : PM \times MQ$;[93] точки P и Q будут вершинами конического сечения, а PQ его поперечной стороной.[94] Возьмите $PL \times LQ : \overline{LB}^2 = PQ : T$, и T будет прямой стороной. Поскольку все это известно, известна и фигура.

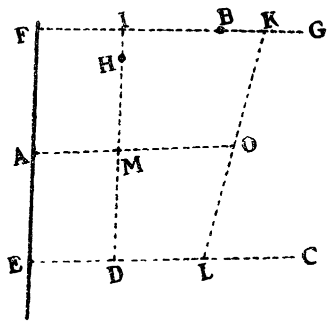
Нам остается лишь показать, как продолжить LM в обе стороны до P и Q, чтобы $\overline{BL}^2$ могла : $\overline{FM}^2 = PL \times LQ : PM \times \times MQ$. Прежде всего, $PL \times LQ$ есть $(PR - LR) \times (PR + LR)$, ибо PL есть $PR - RL$ и LQ есть $RQ + RL$, или $PR + RL$. Далее, $(PR - RL) \times (PR + RL)$ при умножении преобразуется в $\overline{PR}^2 - \overline{RL}^2$. Точно так же $PM \times MQ$ есть $(PR + RM) \times \times (PR - RM)$ или $\overline{PR}^2 - \overline{RM}^2$. Следовательно, $\overline{BL}^2 : \overline{FM}^2 = = (\overline{PR}^2 - \overline{RL}^2) : (\overline{PR}^2 - \overline{RM}^2)$ и, dividendo, $(\overline{BL}^2 - \overline{FM}^2) : : \overline{FM}^2 = (\overline{RM}^2 - \overline{RL}^2) : (\overline{PR}^2 - \overline{RM}^2)$. Так как $\overline{BL}^2 - \overline{FM}^2$, $\overline{FM}^2$ и $\overline{RM}^2 - \overline{RL}^2$ даны, то дана будет и $\overline{PR}^2 - \overline{RM}^2$. Прибавьте данную величину $\overline{RM}^2$, тогда дана будет сумма $\overline{PR}^2$ и, следовательно, ее корень, которому равна QR.[95]

Задача LX

Описать коническое сечение, проходящее через четыре данные точки и в одной из этих точек касающееся данной по положению прямой (фиг. 80).

Допустим, что четыре данные точки суть A, B, C, D, а данная по положению прямая — AE и что коническое сечение касается ее в точке A. Соедините какие-либо две из точек, например D, C, и пусть продолженная, если понадобится, DC встречает касательную прямую в E. Через четвертую точку B параллельно DC проведите BF, которая встретит ту же касательную в F. Проведите также параллельно касательной линию DI, которая встречает BF в I. На продолженных, если понадобится, прямых FB, DI возьмите FG, HI такой длины, чтобы могло быть $\overline{AE}^2 : CE \times ED =$

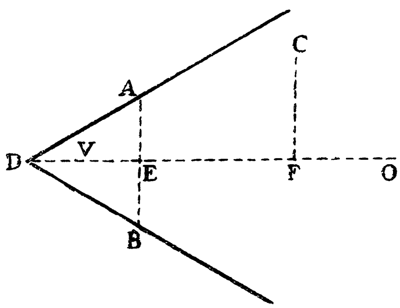
$=\overline{AF}^2 : BF \times FG = DI \times IH = BI \times IG$. Точки G и H будут, как известно, принадлежать коническому сечению, если только вы возьмете FG, IH с подходящей стороны от точек F и I, согласно правилу, указанному в предыдущей задаче. Разделите BG, DC, DH пополам в K, L и M. Проведите KL, MA, которые взаимно пересекаются в O, и O будет центром, A вершиной и HM ординатой к полудиаметру AO. Поскольку все это известно, известна и фигура.[96]



Фиг. 80

Задача LXI

Описать коническое сечение, проходящее через три данные точки и касающееся в двух из этих точек заданных по положению прямых (фиг. 81).



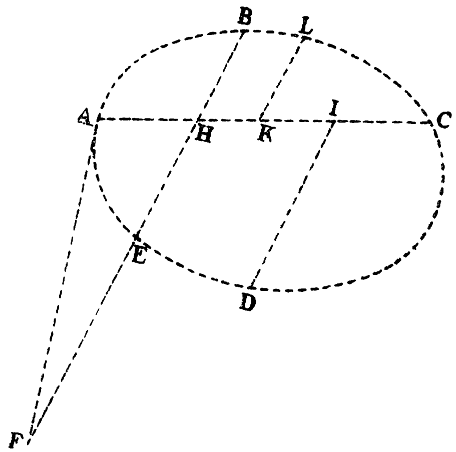
Фиг. 81

Допустим, что данные точки суть A, B, C, касательные в точках A и B суть AD и BD и что пересечение этих касательных есть D. Разделите AB пополам в точке E и проведите DE, которую продолжите до ее встречи в F с прямой CF, проведенной параллельно AB. DF будет диаметром, а AE и CF ординатами к этому диаметру. Продолжите DF до O и на DO возьмите OV равной средней пропорциональной между DO и EO, с тем условием, чтобы $\overline{AE}^2 : \overline{CF}^2 = VE \times (VO + OE) : VF \times (VO + OF)$; тогда V будет вершиной, а O центром фигуры. Поскольку все это будет известно, известна будет и фигура. Но $VE = VO - OE$ и, следовательно, $VE \times (VO + OE) = (VO - OE) \times (VO + OE) = \overline{VO}^2 - \overline{OE}^2$. Кроме того, так как VO есть средняя пропорциональная между DO и EO, то $\overline{VO}^2 = DO \times OE$ и, значит, $\overline{VO}^2 - \overline{OE}^2 = DO \times \times OE - \overline{OE}^2 = DE \times EO$. При помощи такого же рассуждения вы найдете, что $VF \times (VO + OF) = \overline{VO}^2 - \overline{OF}^2 = DO \times OE - \overline{OF}^2$ и, значит, $\overline{AE}^2 : \overline{CF}^2 = DE \times EO : (DO \times OE - \overline{OF}^2)$. Кроме того, $\overline{OF}^2 = \overline{EO}^2 - 2FE \times EO + \overline{FE}^2$. Поэтому $DO \times OE - - \overline{OF}^2 = DO \times OE - \overline{OE}^2 + 2FE \times EO - \overline{FE}^2 = DE \times EO + + 2FE \times EO - \overline{FE}^2$ и $\overline{AE}^2 : \overline{CF}^2 = DE \times EO : (DE \times EO + + 2FE \times EO - \overline{FE}^2) = DE : \left(DE + 2FE - \frac{\overline{FE}^2}{EO}\right)$. Таким образом, $DE + 2EF - \frac{\overline{FE}^2}{EO}$ дана. Вычтите из этой данной величины $DE + 2FE$, останется данная величина $\frac{\overline{FE}^2}{EO}$. Обозначьте ее N, тогда $\frac{\overline{FE}^2}{N} = EO$ и, значит, будет дана EO. А раз дана EO, то дана также и VO — средняя пропорциональная между DO и EO.[97]

Таким путем при помощи некоторых теорем Аполлония можно довольно быстро решить эти задачи. Но они могут быть решены и без этих теорем, при помощи одной алгебры. Допустим, что предложена первая из трех последних задач, в которой требуется провести коническое сечение через пять данных точек A, B, C, D, E (фиг. 82). Соедините какие-нибудь две из этих точек, скажем A и C, и затем какие-либо две другие, B и E, прямыми, пересекающимися в H. Параллельно BE проведите DI, встречающую AC в I, а также какую-либо другую прямую KL, встречающую AC в K и коническое сечение в L. Предположите, что коническое сечение дано, так что если точка K будет известна, то одновременно известна будет и точка L. Положите $AK = x$ и $KL = y$ и, чтобы выразить отношение между x и y, возьмите уравнение, общим образом характеризующее конические сечения, скажем уравнение

$$a + bx + cx^2 + dy + exy + y^2 = 0.$$

Здесь a, b, c, d, e обозначают определенные величины вместе с их знаками, а x и y — величины неопределенные. Если мы сможем найти определенные величины a, b, c, d, e, коническое сечение будет известно. Представим себе для этого, что точка L последовательно попадает в точки A, C, B, E, D, и посмотрим, что из этого следует. Если L попадает в A, то AK и KL, т. е. x и y, будут равны 0; тогда все члены уравнения, кроме a, уничтожатся и останется $a = 0$. Значит, в этом уравнении a следует откинуть, а остальные члены $bx + cx^2 + dy + exy + y^2$ будут $= 0$. Если, далее, L попадает в C, то AK или $x = AC$ и LK или $y = 0$. Положите поэтому $AC = f$; подставив f вместо x и 0 вместо y в уравнение кривой



Фиг. 82

$$bx + cx^2 + dy + exy + y^2 = 0,$$

вы приведете его к виду

$$bf + cf^2 = 0,$$

или же

$$b = -cf.$$

Если в этом уравнении написать $-cf$ вместо b, то оно примет вид

$$-cfx + cx^2 + dy + exy + y^2 = 0.$$

Если, далее, точка L попадет в точку B, то AK или $x=AH$ и KL или $y=BH$. Положите поэтому $AH=g$ и $BH=h$ и напишите затем в уравнении g вместо x и h вместо y; тогда уравнение $-cfx+cx^2$ и т. д. примет вид

$$-cfg+cg^2+dh+egh+h^2=0.$$

Но если точка L попадает в E, то $AK=AH$, или $x=g$, и KL или $y=HE$. Поэтому вместо HE напишите $-k$ с отрицательным знаком, ибо HE лежит с противоположной стороны от линии AC; и если подставить g вместо x и $-k$ вместо y, то уравнение $-cfx+cx^2$ и т. д. примет вид

$$-cfg+cg^2-dk-egk+k^2=0.$$

Вычтите это из предыдущего уравнения $-cfg+cg^2+dh+$ $+egh+h^2$ и останется

$$dh+egh+h^2+dk+egk-k^2=0.$$

Разделите это на $h+k$, получится

$$d+eg+h-k=0.$$

Умножьте это на h и произведение вычтите из

$$-cfg+cg^2+dh+egh+h^2=0,$$

останется

$$-cfg+cg^2+hk=0,$$

или

$$c=\frac{hk}{-g^2+fg}.$$

Наконец, если точка L попадет в точку D, то AK или $x=AI$ и KL или $y=ID$. Напишите поэтому m вместо AI и n вместо ID и подставьте также m и n вместо x и y; тогда уравнение $-cfx+cx^2$ и т. д. примет вид

$$-cfm+cm^2+dn+emn+n^2=0.$$

Разделите это на n и вы получите

$$\frac{-cfm+cm^2}{n}+d+em+n=0.$$

Вычтите $d+eg+h-k=0$, останется

$$\frac{-cfm+cm^2}{n}+em-eg+n-h+k=0,$$

или

$$\frac{cm^2-cfm}{n}+n-h+k=eg-em.$$

Но так как точки A, B, C, D, E даны, то даны AC, AH, AI, BH, EH, DI, т. е. f, g, m, h, k, n. Значит, уравнение

$$c=\frac{hk}{fg-g^2}$$

дает c. А если дано c, то уравнение

$$\frac{cm^2-cfm}{n}+n-h+k=eg-em$$

даст $eg-em$. Разделите эту данную величину на также данную величину $g-m$ и вы получите e как данную. После того как это найдено, уравнение

$$d+eg+h-k=0, \quad \text{или} \quad d=k-h-eg$$

даст d. Раз известны эти величины, то вместе с тем определяется уравнение

$$cfx=cx^2+dy+exy+y^2,$$

выражающее искомое коническое сечение. А при помощи метода Декарта по этому уравнению определяется и коническое сечение.[98]

Если даны четыре точки A, B, C, E и положение прямой AF, касающейся конического сечения в одной из этих точек A, коническое сечение можно определить легче следующим образом. Найдя, как и выше, уравнения

$$cfx = cx^2 + dy + exy + y^2,$$
$$d = k - h - eg \quad \text{и} \quad c = \frac{hk}{fg - g^2},$$

представьте себе, что касательная AF встречает прямую EH в F и затем, что точка L движется по периметру фигуры CDE, пока не попадет в точку A. Последнее отношение LK к AK будет равно отношению FH к AH, как это будет очевидно для всякого, кто рассмотрит чертеж.[99] Положите $FH = p$ и в этом случае, когда LK и AK находятся в состоянии исчезновения, вы получите, что $p : g = y : x$, или $\frac{gy}{p} = x$. Напишите поэтому в уравнении

$$cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$$

вместо x величину $\frac{gy}{p}$; получится

$$\frac{cfgy}{p} = \frac{cg^2y^2}{p^2} + dy + \frac{egy^2}{p} + y^2.$$

Разделите все на y и получится

$$\frac{cfg}{p} = \frac{cg^2y}{p^2} + d + \frac{egy}{p} + y.$$

Так как мы предположили, что точка L попала в точку A, а значит, что KL или y бесконечно мал или нуль, то откиньте все члены, в которые входит множителем y, после чего останется $\frac{cfg}{p} = d$. Поэтому положите $c = \frac{hk}{fg - g^2}$, затем $d = \frac{cfg}{p}$ и, наконец, $e = \frac{k - h - d}{g}$. После того как c, d и e найдены, уравнение

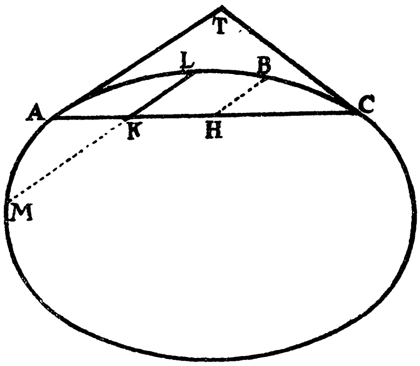
$$cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$$

определит собой коническое сечение.[100]

Если, наконец, даны лишь три точки A, B, C, а также положение двух прямых AT, CT, которые касаются конического сечения в двух из этих точек A и C (фиг. 83), то, как и ранее, получится уравнение конического сечения

$$cfx = cx^2 + dy + exy + y^2.$$

Если предположить затем, что ордината KL параллельна касательной AT и продолжена до встречи с коническим сечением еще в точке M, и представить себе, что эта линия LM приближается к касательной AT до совпадения с нею в A, то последнее отношение линий KL к KM будет отношением равенства, как это будет ясно для всякого, кто рассмотрит чертеж.[101] Так как в этом случае KL и KM равны, т. е. равны два значения y (одно положительное KL, а другое отрицательное KM), то те члены уравнения



Фиг. 83

$$cfx = cx^2 + dy + exy + y^2,$$

в которых y имеет нечетное измерение, т. е. $dy + exy$, должны в сравнении с членом y^2, в котором y имеет четное измерение, исчезнуть. В противном случае два значения y, из которых одно положительное, а другое отрицательное, не могли бы быть равными. Далее, в этом случае AK или x бесконечно меньше, чем LK или y, и, значит, член exy бесконечно меньше, чем y^2.[102] Следовательно, как бесконечно меньший, его можно считать за ничто. Однако член dy не исчезнет, как это должно быть, в сравнении с y^2, но будет гораздо больше последнего, если только не допустить, что d есть ничто. Поэтому член dy следует откинуть;

в результате в качестве уравнения конического сечения останется

$$cfx = cx^2 + exy + y^2.$$

Представим себе теперь, что касательные AT, CT взаимно пересекаются в точке T и что точка L приближается к точке C до совпадения с нею. Тогда последнее отношение KL к KC будет равно отношению AT к AC. Мы обозначили KL через y, AK через x и AC через f, значит KC будет $f - x$. Положите $AT = g$, тогда последнее отношение y к $f - x$ будет то же, что g к f. Уравнение

$$cfx = cx^2 + exy + y^2,$$

если из обеих сторон вычесть cx^2, принимает вид

$$cfx - cx^2 = exy + y^2,$$

или

$$(f - x)\,cx = y\,(ex + y).$$

Таким образом, $y:(f - x) = cx:(ex + y)$ и, следовательно, $g:f = cx:(ex + y)$. Но когда точка L попадает в точку C, y обращается в ничто. Значит, $g:f = cx:ex$. Разделите последнее отношение на x и вы получите, что $g:f = c:e$, откуда $\frac{cf}{g} = e$. Таким образом, если в уравнении

$$cfx = cx^2 + exy + y^2$$

вы вместо e напишете $\frac{cf}{g}$, то оно примет вид уравнения конического сечения

$$cfx = cx^2 + \frac{cf}{g}xy + y^2.$$

Наконец, через данную точку B, через которую должно пройти коническое сечение, проведите параллельно KL или AT прямую BH, встречающую AC в H, и представьте себе, что LK движется к BH до совпадения с нею. В этом случае

AH будет $=x$ и $BH=y$. Обозначьте поэтому данную величину $AH=m$ и данную $BH=x$ и затем в уравнении

$$cfx=cx^2+\frac{cf}{g}xy+y^2$$

напишите m и n вместо x и y; вы получите тогда

$$cfm=cm^2+\frac{cf}{g}mn+n^2.$$

Вычтите с обеих сторон $cm^2+\frac{cf}{g}mn$; тогда

$$cfm-cm^2-\frac{cf}{g}mn=n^2.$$

Положите $f-m-\frac{fn}{g}=s$ и вы получите, что $csm=n^2$. Разделите каждую сторону уравнения на sm, получится $c=\frac{n^2}{sm}$. После нахождения c будет определено и уравнение конического сечения

$$cfx=cx^2+\frac{cf}{g}xy+y^2.$$

Согласно методу Декарта, коническое сечение тогда является данным и его можно описать.

Я занимался до сих пор решением ряда задач, ибо при изучении наук примеры полезнее правил. Поэтому-то я отвел им так много места. Решения некоторых из них, встретившихся мне попутно, пока я излагал остальные, я дал без помощи алгебры, — при этом я хотел показать, что в иных задачах, на первый взгляд представляющихся трудными, не всегда следует прибегать к алгебре. Теперь пришло время изложить решение уравнений. Ведь после того как задача приведена к уравнению, вы должны извлечь корни этого уравнения, которые и суть величины, удовлетворяющие задаче.

КАК СЛЕДУЕТ РЕШАТЬ УРАВНЕНИЯ

Когда при решении вопроса вы пришли к уравнению и это уравнение должным образом приведено и упорядочено и когда изображенные в нем буквами и принятые за данные величины действительно заданы в числах, то вместо букв следует подставить эти числа и вы получите численное уравнение, корень которого по извлечении и даст ответ на вопрос. Так, например, при делении угла на пять равных частей я, приняв r за радиус круга, q за хорду дополнения к предложенному углу до прямого и x за хорду дополнения пятой части этого угла, пришел к уравнению

$$x^5 - 5r^2x^3 + 5r^4x - r^4q = 0.$$ [103]

В частных случаях радиус r задан в числах, как и линия q, стягивающая дополнение к данному углу; например, если радиус есть 10 и хорда есть 3, я подставляю в уравнение вместо r и q эти числа и при этом получается численное уравнение

$$x^5 - 500\,x^3 + 50000\,x - 30000 = 0.$$

Извлечение корня из этого уравнения и даст x или же линию, стягивающую дополнение к пятой части данного угла.

О ПРИРОДЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ

Корень уравнения есть число, которое, будучи подставленным в уравнение вместо обозначающей его буквы или вида, приводит к исчезновению всех членов.

Например, единица есть корень уравнения

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0,$$

ибо, если написать ее вместо x, то она даст $1-1-19+49-30$, т. е. ничто. Но у одного и того же уравнения может быть более корней. Так, если в этом же уравнении

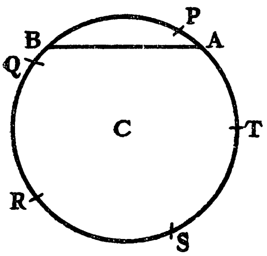
$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$$

вы вместо x напишете число 2, а вместо степеней x такие же степени 2, то это даст $16-8-76+98-30$, т. е. ничто. Далее, если вместо x вы напишете число 3 или отрицательное число -5, то в обоих случаях получится ничто. В этих четырех случаях положительные и отрицательные члены взаимно уничтожаются. Так как каждое из этих чисел, будучи написанным в уравнении, удовлетворяет условию, наложенному на x, делая все члены уравнения, взятые вместе, равными нулю, то каждое из них будет корнем уравнения.

Для того чтобы вы не удивлялись тому, что одно и то же уравнение может иметь несколько корней, вам следует знать, что одна и та же задача может иметь более чем одно решение.

Если, например, ищется пересечение двух данных кругов, то таких пересечений имеется два, и, следовательно, вопрос допускает два ответа. Поэтому уравнение, определяющее пересечение, будет иметь два корня, благодаря чему оно и определяет оба пересечения, если только в данных условиях нет ничего такого, благодаря чему в ответе определяется только одно пересечение.

Допустим, например, что требуется найти пятую часть AP дуги APB (фиг. 84). Хотя вы при этом, может статься, обратите внимание только на дугу APB, но уравнение, при помощи которого будет решаться вопрос, определит пятую часть всех дуг, заканчивающихся в точках A и B, т. е. пятую часть дуг ASB, $APBSAPB$, $ASBPASB$ и $APBSAPBSAPB$, точно так же как и пятую часть дуги APB. Если вы разделите всю окружность на пять равных частей PQ, QR, RS, ST, TP, то эти пятые части будут соответственно AT, AQ, ATS, AQR. Поэтому, разыскивая пятые части всех дуг, стягиваемых прямой AB, нужно для определения всех случаев разделить окружность в пяти точках P, Q, R, S, T и, следовательно, уравнение, определяющее все случаи, будет иметь пять корней. Дело в том, что пятые части каждой из этих дуг зависят от одних и тех же данных и находятся посредством вычислений одинакового рода. Поэтому, будете ли вы искать пятую часть дуги APB, или же пятую часть дуги ASB, или пятую часть какой-нибудь другой из этих дуг, вы всякий раз придете к одному и тому же уравнению. Таким образом, если бы уравнение, при помощи которого определяется пятая часть дуги APB, имело не более одного корня, то, поскольку при нахождении пятой части дуги ASB получилось бы то же самое уравнение, отсюда следовало бы, что эта бо̀льшая дуга имеет такую же пятую часть, как и предыдущая меньшая дуга, ибо стягивающая ее линия или хорда выражается тем же самым корнем уравнения.



Фиг. 84

Поэтому необходимо, чтобы во всякой задаче дающее ответ уравнение имело столько же корней, сколько имеется различных случаев для искомой величины, зависящих от одних и тех же данных и определяемых посредством одного и того же метода рассуждения. [104]

Уравнение может иметь столько же корней, сколько оно имеет измерений, но не более. [105]

Так, уравнение

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$$

имеет четыре корня 1, 2, 3 и —5, но больше корней не имеет. В самом деле, как мы уже сказали, каждое из этих чисел при подстановке его в уравнение вместо x приводит ко взаимному уничтожению всех членов, а других чисел, кроме этих, при подстановке которых произойдет такое уничтожение, не существует.

Впрочем число и природа корней лучше уясняются из способа образования уравнения.

Если, например, мы желаем узнать, как образуется уравнение, корни которого суть 1, 2, 3 и —5, то нужно предположить, что x обозначает множественным образом эти числа, т. е. что $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = -5$, или, что то же самое, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$ и $x + 5 = 0$. Если перемножить $x - 1$ и $x - 2$, то получится уравнение

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

имеющее два измерения и два корня 1 и 2. Если умножить это уравнение на $x - 3$, то получится уравнение

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$$

имеющее три измерения и корня; а это уравнение, умноженное еще на $x + 5$, даст вышенаписанное уравнение

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0.$$

Раз это уравнение образовано путем взаимного перемножения четырех множителей $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ и $x + 5$, то при обращении в ничто одного из этих множителей ничем становится и произведение их всех. Если же ни один из множителей не есть нуль, то и произведение их не может быть нулем. Следовательно, $x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30$ может быть, как это нужно, $= 0$ только в четырех случаях: когда $x - 1 = 0$, или $x - 2 = 0$, или $x - 3 = 0$, или, наконец, $x + 5 = 0$. Таким образом, значениями x или же корнями уравнения могут быть только числа 1, 2, 3 и —5. Таким же образом вы должны судить обо всех уравнениях. Дело в том, что мы можем представить себе, что все они образуются при помощи такого перемножения, хотя обыкновенно бывает весьма трудно отделить одни множители от других: это ведь есть то же самое, что решить уравнение и извлечь его корни. Ведь если известны корни, то известны и множители. [106]

Корни бывают двух видов: положительные, каковыми были в приведенном примере 1, 2, 3, и отрицательные, каковым было —5. И часто некоторые из них бывают невозможными.[107]

Например, два корня уравнения

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0,$$

которые суть $a + \sqrt{a^2 - b^2}$ и $a - \sqrt{a^2 - b^2}$, — действительные, если a^2 больше, чем b^2; но если a^2 меньше, чем b^2, то они становятся невозможными, ибо $a^2 - b^2$ есть тогда величина отрицательная, а квадратный корень из отрицательной величины невозможен. Ведь всякий возможный корень, будь то положительный или отрицательный, при умножении на самого себя дает положительный квадрат. Таким образом, корень, дающий отрицательный квадрат, невозможен. При помощи подобного же рассуждения вы можете притти к заключению, что уравнение

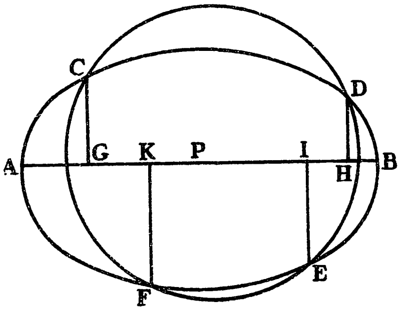
$$x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = 0$$

имеет один действительный корень 2 и два невозможных: $1 + \sqrt{-2}$ и $1 - \sqrt{-2}$. Действительно, если написать в уравнении вместо x какой-нибудь из трех корней, 2, $1 + \sqrt{-2}$, $1 - \sqrt{-2}$, то все члены взаимно уничтожатся. Но $1 + \sqrt{-2}$ и $1 - \sqrt{-2}$ — числа невозможные, ибо в них предполагается извлечение квадратного корня из отрицательного числа -2.

Корням уравнений часто надлежит быть невозможными, иначе они выражали бы как возможные те частые случаи задач, которые невозможны. [108]

Допустим, например, что вам нужно определить пересечение прямой и круга. Обозначьте радиус круга и расстояние прямой от его центра при помощи двух букв. Если, получив уравнение, определяющее пересечение, вы вместо буквы, обозначающей расстояние прямой от центра, подставите число меньшее, чем радиус, то пересечение будет возможно. Но если это число будет больше, чем радиус, то пересечение окажется невозможным. И для того чтобы два корня уравнения, определяющего оба пересечения, могли правильно выражать суть дела, они должны бывать как возможными, так и невозможными.

Положим далее, что круг $CDEF$ и эллипс $ACBF$ взаимно пересекаются в точках C, D, E, F (фиг. 85), что на данную по положению прямую AB опущены перпендикуляры CG, DH, EI, FK и что, разыскивая длину какого-нибудь из этих перпендикуляров, вы, наконец, пришли к некоторому уравнению. Когда круг пересекает эллипс в четырех точках, это уравнение будет иметь четыре действительных корня, которыми и будут эти четыре перпендикуляра. Но если при неизменном центре круга радиус его будет уменьшаться вплоть до совпадения точек E и F, то круг под конец будет касаться эллипса и те два корня

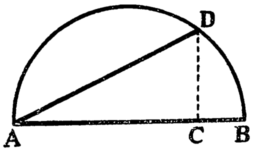


Фиг. 85

уравнения, которые выражали два совпавшие теперь перпендикуляра EI и FK, станут равными. А если круг будет уменьшаться еще далее, так что он уже не будет более касаться эллипса в точках E, F, но лишь пересекать его в других двух точках C и D, то из четырех корней уравнения те два, которые выражают перпендикуляры EI, FK, ставшие теперь невозможными, также станут вместе с этими перпендикулярами невозможными. Таким же образом во всех уравнениях при увеличении или уменьшении их членов два неравных корня сперва становятся равными, а затем невозможными. Поэтому число невозможных корней всегда бывает четным. [109]

Бывают, однако, случаи, в которых корни уравнений возможны, когда из чертежа видно, что они невозможны, — но это обусловливается некоторым ограничением в чертеже, которое не относится к уравнению.

Если, например, в полукруге ADB, в котором даны диаметр AB и хорда AD и опущен перпендикуляр DC, ищется отрезок диаметра AC, то вы найдете, что $AC = \frac{\overline{AD}^2}{AB}$ (фиг. 86).



Фиг. 86

Это уравнение дает в качестве AC действительную величину и тогда, когда вписанная линия AD больше диаметра AB; но, согласно чертежу, AC в этом случае становится невозможной. Действительно, мы предполагаем, что на чертеже линия AD вписана в круг и, значит, не может быть больше диаметра круга; между тем в уравнении ничто не зависит от этого условия. Уравнение получается лишь из того условия относительно линий, что AB, AD и AC непрерывно пропорциональны. И так как уравнение не содержит всех условий чертежа, то нет необходимости в том, чтобы оно было связано границами всех условий. То, что входит в чертеж, сверх того, что имеется в уравнении, может налагать ограничения на первый, но не на последнее. Поэтому, когда уравнения нечетных измерений и, следовательно, их корни не могут быть все невозможными, чертежи часто налагают ограничения на величины, от которых зависят все корни, — границы, которые они не могут превосходить, если держаться условий чертежей.

Среди действительных корней положительные и отрицательные корни лежат по разные стороны или направлены противоположным образом.

Так, например, разыскивая на предпоследнем чертеже перпендикуляр CG, вы придете к уравнению с двумя положительными корнями, CG и DH, направленными от точек C и D в одну сторону, и с двумя отрицательными корнями, EI и FK, направленными из точек E и F в противоположную сторону. Допустим еще, что на линии AB, на которую опущены эти перпендикуляры, взята какая-либо точка P, что ищется часть PG прямой AB, простирающаяся от точки P к одному из этих перпендикуляров, скажем к CG, и что мы пришли к уравнению с четырьмя корнями PG, PH, PI и PK. Искомая величина PG, а также те, которые направлены от точки P в ту же сторону, что PG (как PK), будут положительными; а те, которые направлены в противоположную сторону (каковы PH и PI), будут отрицательными.

Если среди корней уравнения не имеется невозможных, то по знакам членов уравнения можно узнать число его положительных, а также отрицательных корней. Именно, положительных корней будет столько, сколько в последовательности знаков имеется перемен знаков от $+$ к $-$ и от $-$ к $+$; остальные корни будут отрицательными. [110]

В уравнении

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$$

знаки членов следуют в таком порядке: $+ - - + -$ Перемена знаков от первого $+$ ко второму $-$, от третьего $-$ к четвертому $+$ и от четвертого $+$ к пятому $-$ показывает, что имеется три положительных корня и что, следовательно, четвертый корень отрицательный. Однако это правило не имеет силы, когда некоторые из корней невозможны, если только не рассматривать эти невозможные корни, которые не являются ни положительными, ни отрицательными, как неопределенные по знаку. Так, знаки в уравнении

$$x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$$

показывают, что оно имеет один положительный корень и два отрицательных. Положите $x = 2p$, или $x - 2p = 0$, и умножьте первое уравнение на $x - 2p = 0$. При этом добавится еще один положительный корень, и вы получите уравнение

$$x^4 - px^3 + p^2x^2 - (6p^3 + q)x + 2pq = 0,$$

которое должно иметь два положительных и два отрицательных корня. Между тем если вы рассмотрите перемены знаков, то видно, что оно имеет четыре положительных корня. Таким образом, здесь имеются два невозможных корня, которые в силу своей неопределенности в первом случае казались отрицательными, а в последнем — положительными.[111]

Впрочем число невозможных корней можно обычно узнать по следующему правилу.

Составьте последовательность дробей, знаменатели которых образуют прогрессию 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. до числа, совпадающего с числом измерений уравнения, а числители — ту же последовательность чисел, только в обратном порядке. Разделите каждую последующую дробь на ей предшествующую. Поместите возникающие при этом дроби над промежуточными членами уравнения. Затем возведите каждый промежуточный член[112] в квадрат и умножьте последний на дробь, стоящую над этим же членом. Если это произведение будет больше, чем произведение двух соседних членов, то поставьте под этим членом знак $+$, а если меньше, то знак $-$. Под первым и последним членами поставьте знак $+$. Невозможных корней будет столько же, сколько имеется перемен от $+$ к $-$ и от $-$ к $+$ в последовательности подписанных знаков.[113]

Так, если вам дано уравнение

$$x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0,$$

то я делю вторую из дробей последовательности $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$, т. е. $\frac{2}{2}$, на первую $\frac{3}{1}$ и третью $\frac{1}{3}$ на вторую $\frac{2}{2}$ и помещаю возникающие при этом дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}$ над промежуточными членами уравнения:

$$\underset{+}{x^3} + \underset{-}{\overset{\frac{1}{3}}{px^2}} + \underset{+}{\overset{\frac{1}{3}}{3p^2x}} - \underset{+}{q} = 0.$$

Далее, так как квадрат второго члена px^2, умноженный на стоящую над ним дробь $\frac{1}{3}$, т. е. $\frac{p^2x^4}{3}$, меньше, чем $3p^2x^4$, т. е. произведение первого члена x^3 на третий $3p^2x$, то под членом px^2 я ставлю знак —. Но так как $9p^4x^2$ (квадрат третьего члена $3p^2x$), умноженный на стоящую над ним дробь $\frac{1}{3}$, больше нуля и, значит, еще больше отрицательного произведения второго члена px^2 на четвертый $-q$, то под третьим членом я ставлю знак +. Затем я ставлю знак + под первым членом x^3 и под последним $-q$. Подписанные знаки образуют последовательность + — + +, в которой имеются две перемены, одна от + к — и другая от — к +, а это указывает на наличие двух невозможных корней. Аналогичным образом уравнение

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ x^3 & -\,4x^2 & +\,4x & -\,6 = 0 \\ + & + & - & + \end{array}$$

имеет два невозможных корня. Уравнение

$$x^4-6x^2-3x-2=0$$

также имеет их два. В самом деле, последовательность дробей $\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ при делении второй на первую, третьей на вторую и, наконец, четвертой на третью дает последовательность $\frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{3}{8}$, которую нужно поместить над промежуточными членами уравнения. Если умножить квадрат второго члена, который здесь равен нулю, на дробь $\frac{3}{8}$, стоящую над этим вторым членом, то это дает нуль, который, однако, больше, чем отрицательное произведение $-6x^6$ из соседних членов x^4 и $-6x^2$. Поэтому под недостающим членом я подписываю знак +. В остальном я продолжаю, как в предыдущем примере, и получаю последовательность подписанных знаков $+ + + - +$, в которой имеются две перемены, указывающие на два невозможных корня.

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{8} & & \frac{4}{9} & & \frac{3}{8} & & \\ x^4 & * & - & 6x^2 & - & 3x & - & 2 = 0. \\ + & + & & + & & - & & + \end{array}$$

Таким же путем можно обнаружить два невозможных корня в уравнении

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0,$$

а именно:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \frac{2}{5} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{5} & & \\ x^5 & - & 4x^4 & + & 4x^3 & - & 2x^2 & - & 5x & - & 4 = 0. \\ + & & + & & - & & + & & + & & + \end{array}$$

Если недостает двух или большего числа членов подряд, то под первым отсутствующим членом следует поставить знак $-$, под вторым знак $+$, под третьим знак $-$ и т. д., все время меняя знаки, за исключением того случая, когда члены, соседние с отсутствующими членами с обеих сторон, имеют противоположные знаки. В этом случае под последним из недостающих членов всегда следует ставить знак $+$. Например:

$$\begin{array}{cccccccc} x^5 & + & ax^4 & * & * & * & + & a^5 = 0 \\ + & & + & - & + & - & & + \end{array}$$

и

$$\begin{array}{cccccccc} x^5 & + & ax^4 & * & * & * & - & a^5 = 0. \\ + & & + & - & + & + & & + \end{array}$$

Первое из этих уравнений имеет четыре невозможных корня, а второе два. Уравнение

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & \frac{3}{7} & & \frac{5}{9} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{5} & \frac{5}{9} & \frac{3}{7} & \\ x^7 & - & 2x^6 & + & 3x^5 & - & 2x^4 & + & x^3 & * & * & -3 = 0 \\ + & & - & & + & & - & & + & - & + & + \end{array}$$

имеет шесть невозможных корней.

На этом основании можно выяснить также, принадлежат ли воображаемые корни к положительным или отрицательным.

Именно, по знакам членов, стоящих над меняющимися подписанными знаками, видно, что невозможных положительных корней будет столько же, сколько имеется перемен знака у первых, а отрицательных, — сколько имеется повторений. Так, например, в уравнении

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & -4x^4 & +4x^3 & -2x^2 & -5x & -4=0 \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

между подписанными знаками меняющиеся суть $+\ -\ +$, откуда видно, что имеются два невозможных корня, а так как члены над этими знаками суть $-4x^4+4x^3-2x^2$ со знаками $-\ +\ -$, то две перемены в них показывают, что имеется два положительных корня; следовательно, среди положительных корней два будут невозможными. Так как знаки всех членов уравнения суть $+\ -\ +\ -\ -\ -$, то три перемены в них показывают, что имеется три положительных корня, а два других корня — отрицательные. Но среди положительных корней имеются два невозможных, откуда следует, что уравнение имеет один истинный положительный корень, два отрицательных и два невозможных. Но если бы уравнение было

$$\begin{array}{cccccc} x^5 & -4x^4 & -4x^3 & -2x^2 & -5x & -4=0, \\ + & + & - & - & + & + \end{array}$$

то отсутствие перемены в знаках — и — у членов $-4x^4-$ $-4x^3$, стоящих над первыми меняющимися подписанными членами $+\ -$, показало бы, что невозможным является один из отрицательных корней. А из отсутствия перемены в знаках — и — у членов $-2x^2-5x$, стоящих над последними меняющимися подписанными знаками $-\ +$, видно, что невозможным является еще один отрицательный корень. Поскольку в знаках уравнения $+\ -\ -\ -\ -\ -$ имеется лишь одна перемена, то имеется также один положительный корень, а остальные четыре отрицательные. Отсюда следует, что имеется один положительный корень, два отрицательных и два невозможных. Так обстоит дело, когда невозможных корней не больше, чем это обнаруживается при помощи предыдущего правила. Однако их может быть и больше, хотя это случается и редко.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ УРАВНЕНИЙ

Все положительные корни какого-либо уравнения можно преобразовать в отрицательные, а отрицательные в положительные. Для этого нужно лишь переменить знаки чередующихся членов.[114]

Так, три положительных корня уравнения

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0$$

преобразуются в отрицательные, а два отрицательных корня в положительные, если только переменить следующим образом знаки второго, четвертого и шестого членов

$$x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Последнее уравнение имеет те же корни, что и предыдущее, с тем отличием, что его положительные корни были в первом уравнении отрицательными, а отрицательные — положительными; при этом два невозможных корня, которые в первом уравнении заключались среди положительных, во втором заключаются среди отрицательных, так что если эти два корня откинуть, то останется только один действительно отрицательный корень.

Имеются также и другие преобразования уравнений, применяющиеся в различных случаях. Именно мы можем предположить, что корень уравнения как-либо составлен из известной и неизвестной величин, и затем подставить в уравнение вместо него ту новую величину, которую предположили ему равной. Например, мы можем предположить, что корень равен сумме или разности какой-либо известной и неизвестной величины.[115] Таким путем мы можем увеличивать или уменьшать корни уравнения на эту известную величину или вычитать их из нее и преобразовывать таким образом некоторые, прежде отрицательные корни в положительные, или некоторые положительные в отрицательные, а также преобразовывать все корни в положительные или все в отрицательные. Например, если я хочу увеличить корни уравнения

$$x^4-x^3-19x^2+49x-30=0$$

на единицу, то полагаю, что $x+1=y$, или $x=y-1$, и затем вместо x записываю в уравнении $y-1$, а вместо квадрата, куба или четвертой степени x—такие же степени $y-1$. Я это делаю следующим образом:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 & y^4-4y^3+6y^2-4y+1 \\
-x^3 & \qquad -y^3+3y^2-3y+1 \\
-19x^2 & \qquad\qquad -19y^2+38y-19 \\
+49x & \qquad\qquad\qquad +49y-49 \\
-30 & \qquad\qquad\qquad\qquad -30 \\
\hline
\text{Сумма} & y^4-5y^3-10y^2+80y-96=0
\end{array}$$

Корни получившегося уравнения

$$y^4-5y^3-10y^2+80y-96=0$$

будут 2, 3, 4, —4 и каждый из них на единицу больше, чем соответствующий ему прежний корень 1, 2, 3, —5.

Если в предложенное уравнение вместо x я подставлю $y+1\frac{1}{2}$, то получится уравнение

$$y^4+5y^3-10y^2-\frac{5}{4}y+\frac{39}{16}=0,$$

в котором имеются два положительных корня $\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{2}$ и два отрицательных $-\frac{1}{2}$ и $-6\frac{1}{2}$. Если вместо x написать $y-6$, то получится уравнение с корнями 7, 8, 9, 1, которые все положительные, а если вместо x написать $y+4$, то корни уменьшатся на 4 и будут -3, -2, -1, -9, т. е. все станут отрицательными.

Если некоторые корни невозможные, то, увеличивая или уменьшая их таким образом, их иногда бывает легче обнаружить, чем ранее. Например, предшествующее правило не обнаруживает невозможных корней в уравнении

$$x^3 - 3a^2x - 3a^3 = 0.$$

Но если вы увеличите корни на величину a, написав $y - a$ вместо x, то, применяя это правило к возникающему теперь уравнению

$$y^3 - 3ay^2 - a^3 = 0,$$

вы сможете найти у него два невозможных корня.

При помощи этого же действия вы можете также удалять вторые члены уравнений. Это получится, если вы подставите вместо корня данного уравнения разность между величиной, которую вы приняли за корень нового уравнения, и коэффициентом второго члена данного уравнения, поделенным на число измерений его высшего члена.

Например, если предложено уравнение

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0,$$

то из буквы, которую я принял для обозначения нового корня, скажем из y, я вычитаю коэффициент второго члена, т. е. -4, поделенный на число измерений уравнения, т. е. на 3, и разность $y + \frac{4}{3}$ подставляю вместо x. Получается

$$\begin{array}{rrrr}
y^3 & +\,4y^2 & +\,\frac{16}{3}y & +\,\frac{64}{27} \\
 & -\,4y^2 & -\,\frac{32}{3}y & -\,\frac{64}{9} \\
 & & +\,4y & +\,\frac{16}{3} \\
 & & & -\,6 \\
\hline
y^3 & * & -\,\frac{4}{3}y & -\,\frac{146}{27} = 0
\end{array}$$

При помощи того же метода можно также удалить третий член уравнения. Допустим, что предложено уравнение

$$x^4-3x^3+3x^2-5x-2=0$$

и положим $x=y-e$. Если подставить $y-e$ вместо x, то возникает уравнение

$$y^4-(4e+3)y^3+(6e^2+9e+3)y^2-(4e^3+9e^2+6e+5)y+\\ +e^4+3e^3+3e^2+5e-2=0.$$

Третий член этого уравнения есть $6e^2+9e+3$, умноженное на y^2, и вы достигнете цели, если $6e^2+9e+3$ обратится в нуль. Для того чтобы найти, какое число следует подставить вместо e в настоящем случае, допустим, что эта величина действительно есть нуль. Это дает нам квадратное уравнение

$$6e^2+9e+3=0,$$

которое после деления на 6 принимает вид

$$e^2+\frac{3}{2}e+\frac{1}{2}=0,$$

или

$$e^2=-\frac{3}{2}e-\frac{1}{2}.$$

Извлекая корень, мы получим, что

$$e=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}},\ \text{т. е.}=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}},$$

$$\text{т. е.}=-\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}.$$

Таким образом, $e=-\frac{1}{2}$ или $e=-1$. Следовательно, $y-e$ будет $y+\frac{1}{2}$ либо $y+1$. Так как вместо x мы написали $y-e$, то, чтобы в возникающем уравнении отсутствовал третий член, вместо $y-e$ в качестве x нужно будет написать $y+\frac{1}{2}$ или $y+1$. И произойдет это в обоих случаях. Именно, если вместо x вы напишете $y+\frac{1}{2}$, то получится уравнение

$$y^4-y^3-\frac{15}{4}y-\frac{65}{16}=0,$$

а если вы напишете $y+1$, то уравнение

$$y^4+y^3-4y-6=0.$$

Корни уравнений можно также умножать и делить на данные числа; таким образом, можно уменьшать члены уравнений, а также избавляться иногда от дробей и радикалов.[116] Допустим, например, что дано уравнение

$$y^3-\frac{4}{3}y-\frac{146}{27}=0.$$

Чтобы избавиться от дробей, я полагаю $y=\frac{1}{3}z$ и, подставляя $\frac{1}{3}z$ вместо y, получаю новое уравнение

$$\frac{z^3}{27}-\frac{12z}{27}-\frac{146}{27}=0,$$

или, откинув общий знаменатель членов,

$$z^3-12z-146=0.$$

Корни нового уравнения втрое больше прежних. Чтобы уменьшить члены этого уравнения, напишите $2v$ вместо z; при этом получится

$$8v^3-24v-146=0;$$

по делении на 8 вы получите

$$v^3-3v-18\frac{1}{4}=0.$$

Корни этого уравнения представляют собой половины корней предыдущего уравнения. Если, наконец, найдя v, вы положите $2v=z$, $\frac{1}{3}z=y$ и $y+\frac{4}{3}=x$, то получите корень x первоначально данного уравнения

$$x^3-4x^2+4x-6=0.$$

Аналогично, чтобы избавиться от радикала $\sqrt{3}$ в уравнении

$$x^3-2x+\sqrt{3}=0,$$

я вместо x пишу $y\sqrt{3}$ и получаю уравнение

$$3y^3\sqrt{3}-2y\sqrt{3}+\sqrt{3}=0,$$

которое после деления всех членов на $\sqrt{3}$ принимает вид

$$3y^3-2y+1=0.$$

Корни уравнений можно также преобразовывать в другие, обратные им. Таким путем уравнение можно иногда привести к более удобному виду.

Так, если в последнем уравнении

$$3y^3-2y+1=0$$

вместо y написать $\frac{1}{z}$, то оно примет вид

$$\frac{3}{z^3}-\frac{2}{z}+1=0,$$

или, если все члены умножить на z^3 и изменить порядок членов,

$$z^3-2z^2+3=0.$$

При помощи этого приема можно также удалить из уравнения предпоследний член, — именно, если сперва освободились от второго члена, как вы это видели в предшествующем примере. Если же вы хотите освободиться от предпредпоследнего члена, то это можно сделать, предварительно уничтожив третий член. Кроме того, наименьший корень можно таким путем преобразовывать в наибольший, а наибольший в наименьший, что сможет принести некоторую пользу в последующем. Так, например, если в уравнении

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0,$$

корни которого суть 3, 2, 1, -5, написать $\frac{1}{y}$ вместо x, то получится уравнение

$$\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{y^2} + \frac{49}{y} - 30 = 0.$$

Если умножить все его члены на y^4, разделить на 30 и переменить знаки, то оно примет вид

$$y^4 - \frac{49}{30}y^3 + \frac{19}{30}y^2 + \frac{1}{30}y - \frac{1}{30} = 0,$$

причем корнями будут $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{1}{5}$. Наибольший из положительных корней 3 превратился теперь в наименьший $\frac{1}{3}$, а наименьший, т. е. 1, стал теперь наибольшим; отрицательный же корень -5, который был наиболее далек от нуля, стал теперь к нулю ближайшим.

Существуют еще и другие преобразования уравнений, но все они могут быть проведены аналогично преобразованию, которое мы уже показали, когда удаляли из уравнения третий член.

Из способа образования уравнений ясно, что коэффициент второго члена, взятый с обратным знаком, равен сумме всех корней с их собственными знаками, коэффициент третьего члена равен сумме произведений всех корней, взятых по два, коэффициент четвертого члена, взятый с обратным знаком, равен сумме произведений всех корней, взятых по три, коэффициент пятого равен сумме произведений всех корней, взятых по четыре, и т. д. до бесконечности.[117]

Положим $x=a, x=b, x=-c, x=d$ и т. д. или же $x-a=0$, $x-b=0$, $x+c=0$, $x-d=0$. Перемножая последовательно эти уравнения, мы можем образовывать уравнения, как было показано ранее. Если умножить $x-a$ на $x-b$, то получится уравнение

$$x^2-(a+b)x+ab=0,$$

в котором коэффициент второго члена с обратным знаком, т. е. $a+b$, есть сумма двух корней a и b, а коэффициент третьего члена ab равен единственному наличному их произведению. Если полученное уравнение умножить затем на $x+c$, то получится кубическое уравнение

$$x^3-(a+b-c)x^2+(ab-ac-bc)x+abc=0,$$

в котором коэффициент второго члена с обратным знаком, т. е. $a+b-c$, есть сумма корней a, b и $-c$; коэффициент третьего члена $ab-ac-bc$ есть сумма произведений корней, взятых по два: a и b, a и $-c$, b и $-c$, а коэффициент четвертого члена с обратным знаком $-abc$ есть единственное наличное произведение, образуемое последовательным перемножением всех корней, a на b, на $-c$. Если умножить это кубическое уравнение на $x-d$, то получится уравнение четвертой степени

$$x^4-(a+b-c+d)x^3+(ab-ac-bc+ad+bd-cd)x^2+$$
$$+(abc-abd+bcd+acd)x-abcd=0,$$

в котором коэффициент второго члена с обратным знаком, т. е. $a+b-c+d$, есть сумма всех корней, коэффициент третьего члена $ab-ac-bc+ad+bd-cd$ есть сумма произведений всех корней по два, коэффициент четвертого члена с обратным знаком $-abc+abd-bcd-acd$ есть сумма произведений всех корней по три, а коэффициент пятого члена $-abcd$ есть единственное наличное произведение всех корней.

Из этого мы прежде всего заключаем, что во всяком уравнении, не содержащем ни дробей, ни иррациональностей, все его рациональные корни и их произведения по два или по три и т. д. содержатся среди целых делителей его последнего члена. Поэтому, если установлено, что ни один из делителей последнего члена не является ни корнем уравнения, ни произведением двух или большего числа корней, то ясно также, что все корни уравнения и их произведения по два или по три и т. д. являются иррациональными.

Допустим теперь, что коэффициенты членов какого-либо уравнения с обратными знаками обозначены p, q, r, s, t, v, т. е. коэффициент второго есть $-p$, третьего $-q$, четвертого $-r$, пятого $-s$ и т. д. Правильно соблюдая знаки членов, положите $p=a$, $pa+2q=b$, $pb+qa+3r=c$, $pc+qb+ra+4s=d$, $pd+qc+rb+sa+5t=e$, $pe+qd+rc+sb+ta+6v=f$ и т. д. до бесконечности, следуя тому же порядку. Тогда a будет сумма корней, b сумма квадратов каждого из корней, c сумма кубов, d сумма четвертых степеней, e сумма пятых степеней, f сумма шестых степеней, и т. д.[118] Например, в уравнении

$$x^4-x^3-19x^2+49x-30=0,$$

в котором коэффициент второго члена есть -1, третьего -19, четвертого $+49$, пятого -30, вы должны положить $p=1$, $q=19$, $r=-49$, $s=30$. Отсюда получится, что $a=(p=)1$, $b=(pa+2q=1+38=)39$, $c=(pb+qa+3r=39+19-147=)-89$, $d=(pc+qb+ra+4s=-89+741-49+120=)723$. Таким образом, сумма корней есть 1, сумма квадратов корней есть 39, сумма кубов есть -89, а сумма четвертых степеней есть 723. Действительно, корни этого уравнения суть 1, 2, 3, -5 и их сумма $1+2+3-5$ есть 1; сумма квадратов $1+4+9+25$ есть 39, сумма кубов $1+8+27-125$ есть -89, а сумма четвертых степеней $1+16+81+625$ есть 723.

О ПРЕДЕЛАХ УРАВНЕНИЙ

На основании предыдущего получаются пределы, в которых заключаются корни уравнения, если среди них нет невозможных. В самом деле, раз квадраты всех корней положительны, то сумма квадратов будет также положительна и, значит, больше, чем квадрат наибольшего корня. По той же причине сумма четвертых степеней всех корней будет больше четвертой степени наибольшего корня, а сумма шестых степеней больше шестой степени наибольшего корня.[119]

Поэтому если вы пожелаете найти предел, которого не может превзойти ни один корень, то отыщите сумму квадратов корней и извлеките из нее квадратный корень. Этот квадратный корень будет больше, чем наибольший корень уравнения. Вы подойдете к значению наибольшего корня ближе, если найдете сумму четвертых степеней и извлечете из нее корень четвертой степени, и еще ближе, если найдете сумму шестых степеней и извлечете из нее корень шестой степени, и т. д. до бесконечности.[120]

Так, например, квадратный корень из сумм квадратов корней предыдущего уравнения есть $\sqrt{39}$, или приблизительно $6\frac{1}{2}$, и $6\frac{1}{2}$ дальше от нуля, чем любой из корней 1, 2, 3, -5. Но корень четвертой степени из суммы четвертых степеней корней, т. е. $\sqrt[4]{723}$, или приблизительно $5\frac{1}{4}$, ближе к наиболее удаленному от нуля корню -5.

Если вы составите среднюю пропорциональную между суммой квадратов корней и суммой четвертых степеней, то она будет несколько больше суммы кубов корней, взятых с положительными знаками. Поэтому полусумма этой средней пропорциональной и найденной, как указывалось, суммы кубов с их знаками будет больше суммы кубов положительных корней, а их полуразность будет больше суммы кубов отрицательных корней.

Следовательно, наибольший из положительных корней будет меньше, чем кубический корень из этой полусуммы, а наибольший из отрицательных корней будет меньше, чем кубический корень из этой полуразности.

Например, в предыдущем уравнении средняя пропорциональная между суммой квадратов корней 39 и суммой их четвертых степеней 723 есть приблизительно 168. Сумма кубов с их знаками, как мы нашли выше, была -89. Полусумма 168 и -89 есть $39\frac{1}{2}$, а полуразность $128\frac{1}{2}$. Кубический корень из $39\frac{1}{2}$, равный приблизительно $3\frac{1}{2}$, больше наибольшего положительного корня 3. Кубический корень из $128\frac{1}{2}$, равный приблизительно $5\frac{1}{21}$, больше, чем отрицательный корень -5. Из этого примера видно, насколько близко можно подойти к корню, когда имеется только один положительный корень или же только один отрицательный. Но вы можете приблизиться к корню еще более, найдя среднюю пропорциональную между суммой четвертых степеней корней и суммой шестых степеней и извлекши корни пятой степени из полусуммы и полуразности этой величины и суммы пятых степеней корней. Дело в том, что корень пятой степени из полусуммы снова будет превосходить наибольший положительный корень, но уже на меньший избыток, чем прежде, а корень пятой степени из полуразности будет превосходить наибольший отрицательный корень также уже на меньший избыток, чем прежде. Увеличивая или уменьшая все корни уравнения, любой из них можно сделать наименьшим, а затем преобразовать этот наименьший в наибольший, а после этого все корни, кроме наибольшего, можно сделать отрицательными. Отсюда ясно, как можно приближенно найти какой угодно корень.[121]

Если все корни уравнения, кроме двух, отрицательные, то эти два корня можно найти следующим путем.

Найдя по предыдущему методу сумму кубов этих двух корней, а также сумму пятых и сумму седьмых степеней всех корней, отыщите среднюю пропорциональную между двумя последними. Эта средняя пропорциональная будет приблизительно равна разности суммы шестых степеней положительных корней и суммы шестых степеней отрицательных корней; поэтому полусумма этой средней пропорциональной и суммы шестых степеней всех корней будет суммой шестых степеней положительных корней, а их полуразность — суммой шестых степеней отрицательных корней. Имея, таким образом, и сумму кубов и сумму шестых степеней двух положительных корней, вычтите из удвоенной последней суммы квадрат первой суммы; квадратный корень из разности будет разностью кубов двух корней. А имея сумму и разность кубов, вы будете иметь и самые кубы. Извлеките из них кубические корни и вы получите приближенные значения двух положительных корней уравнения. Если вы проведете аналогичные действия над более высокими степенями, то получите корни с еще лучшим приближением. Однако этот способ нахождения пределов — менее употребительный в силу трудности вычислений; кроме того, он распространяется лишь на уравнения, не содержащие невозможных корней. Поэтому я приведу теперь другой метод нахождения пределов корней, более легкий и распространяющийся на любые уравнения.

Помножьте каждый член уравнения на число его измерений и разделите произведение на корень уравнения. Каждый из получившихся членов снова помножьте затем на число, которое на единицу меньше, чем прежде, и произведение разделите на корень уравнения. Продолжайте таким образом, всякий раз умножая на числа, которые на единицу меньше, чем прежде, и деля произведение на корень, пока не исчезнут все члены,— не считая последнего,— знаки которых отличны от знака первого или высшего члена. Число, которое, будучи подставленным вместо корня в получающиеся члены, сообщает суммам членов, возникавших всякий раз при умножении, тот же знак, который имеет первый или высший член уравнения,— число это будет больше любого из положительных корней.[122]

Если, например, предложено уравнение

$$x^5-2x^4-10x^3+30x^2+63x-120=0,$$

то я прежде всего умножаю члены следующим образом:

$$\overset{5}{x^5}-\overset{4}{2x^4}-\overset{3}{10x^3}+\overset{2}{30x^2}+\overset{1}{63x}-\overset{0}{120}.$$

Получившиеся при этом и поделенные на x члены я умножаю вновь следующим образом:

$$\overset{4}{5x^4}-\overset{3}{8x^3}-\overset{2}{30x^2}+\overset{1}{60x}+\overset{0}{63}.$$

Если снова поделить получившиеся члены на x, то получится $20x^3-24x^2-60x+60$. Для сокращения их я делю на наибольший общий делитель 4; при этом вы получите $5x^3-6x^2-15x+15$. Умножив это опять на прогрессию 3, 2, 1, 0 и поделив на x, я получаю $15x^2-12x-15$, а вновь разделив на 3, $5x^2-4x-5$. Умножив это на прогрессию 2, 1, 0 и разделив на $2x$, я получаю $5x-2$. Так как высший член уравнения x^5 положителен, то я теперь выясняю, какое число, будучи написано в этих произведениях вместо x, обратит их все в положительные числа. Если испытать 1, то вы получите, что $5x-2=3$, т. е. положительно, но $5x^2-4x-5$ обратится в -4, число отрицательное. Следовательно, предел корней больше 1. Поэтому я испытываю какое-либо большее число, например 2. Подставляя 2 вместо x в результаты, я получаю, что

$$\begin{aligned}
&5x-2=8,\\
&5x^2-4x-5=7,\\
&5x^3-6x^2-15x+15=1,\\
&5x^4-8x^3-30x^2+60x+63=79,\\
&x^5-2x^4-10x^3+30x^2+63x-120=46.
\end{aligned}$$

Так как все получившиеся числа 8, 7, 1, 79, 46 — положительные, то число 2 будет больше наибольшего из положительных корней. Аналогично, если бы я хотел найти предел отрицательных корней, то я бы испытал отрицательные числа, или, что сводится к тому же, переменил бы знаки всех членов через один и испытал положительные числа. Если переменить знаки всех членов через один, то величины, в которые нужно подставлять числа, примут вид

$$\begin{aligned}
&5x + 2,\\
&5x^2 + 4x - 5,\\
&5x^3 + 6x^2 - 15x - 15,\\
&5x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 60x + 63,\\
&x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 63x + 120.
\end{aligned}$$

Среди этих величин я выбираю какую-либо, в которой видимо преобладают отрицательные члены, например $5x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 60x + 63$, и вместо x подставляю в нее числа 1 и 2, что дает отрицательные числа —14 и —33. Значит, предел больше, чем —2. Если же подставить число 3, то получится положительное число 234. Подставляя вместо x число 3 в другие величины, я, как это можно сразу заметить, всякий раз получаю положительные числа. Следовательно, число —3 больше всех отрицательных корней.[123] Таким образом, пределы, между которыми заключены все корни, суть 2 и —3.

Знание этих пределов полезно и для приведения уравнений при помощи рациональных корней и для извлечения его иррациональных корней; не располагая им, мы иногда могли бы искать корни за этими пределами. Так, например, если я хочу найти рациональные корни последнего уравнения (если они имеются), то на основании сказанного ранее ясно, что они могут находиться лишь среди делителей последнего члена уравнения, который в данном случае есть 120. Если при подстановке каждого из этих делителей в уравнение вместо x ни один не приведет к исчезновению всех членов, то несомненно будет, что уравнение имеет только иррациональные корни. Но последний член 120 имеет большое число делителей, именно: 1, —1, 2, —2, 3, —3, 4, —4, 5, —5, 6, —6, 8, —8, 10, —10, 12, —12, 15, —15, 20, —20, 24, —24, 30, —30, 40, —40, 60, —60, 120 и —120. Испытание всех этих делителей было бы докучливым делом. Зная, однако, что корни заключаются между 2 и —3, мы избавляемся от этого труда, ибо теперь оказывается нужным испытывать лишь те делители, которые лежат между этими пределами, т. е. делители 1, —1 и —2. Если ни один из них не является корнем, то несомненно, что уравнение имеет лишь иррациональные корни.

ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

До сих пор я излагал способы приведения уравнений, обладающих рациональными делителями. Однако, прежде чем сделать вывод, что уравнение четырех, шести или большего числа измерений неприводимо, мы должны испытать, не может ли оно быть приведено при помощи какого-либо иррационального делителя, или, что то же самое, вы должны посмотреть, нельзя ли так разделить уравнение на две равные части, чтобы из каждой из них вы могли извлечь корень. А это можно сделать при помощи следующего метода. [124]

Расположите уравнение по измерениям какой-либо буквы так, чтобы его члены, соединенные присущими им знаками, были все вместе равны нулю и чтобы высший член имел положительный знак. Затем, если уравнение — квадратное (ибо, аналогии ради, мы присоединим и этот случай), вычтите из обеих сторон низший член и прибавьте четверть квадрата коэффициента среднего члена.

Так, если дано уравнение

$$x^2 - ax - b = 0,$$

вычтите из обеих сторон $-b$ и прибавьте $\frac{1}{4}a^2$. Получится

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = b + \frac{1}{4}a^2;$$

если извлечь из обеих сторон корень, то вы получите, что

$$x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2} \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}.$$

Если уравнение имеет четыре измерения и есть, скажем,

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

где p, q, r, s обозначают коэффициенты членов уравнения с присущими им знаками, то положите

$$q - \frac{1}{4}p^2 = \alpha, \quad r - \frac{1}{2}\alpha p = \beta, \quad s - \frac{1}{4}\alpha^2 = \zeta.$$

Затем обозначьте через n какой-либо целый общий делитель β и 2ζ, который не является квадратом и который должен быть нечетным и при делении на 4 давать в остатке 1, если какое-либо из двух чисел p и r нечетное. Обозначьте также через k какой-либо делитель величины $\frac{\beta}{n}$, если p — четное, или же половину нечетного делителя, если p — нечетное, или еще — нуль, если делимое β есть нуль. Вычтите получающееся частное из $\frac{1}{2}pk$ и половину остатка обозначьте l. Положите $\frac{\alpha + nk^2}{2} = Q$ и посмотрите, делится ли $Q^2 - s$ на n и будет ли корень из этого частного рациональным и равным l. Если это случится, прибавьте с обеих сторон уравнения по $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$; извлекая из обеих сторон корень, вы получите, что

$$x^2 + \frac{1}{2}px + Q = (kx + l)\sqrt{n}.$$

Пример. Допустим, что предложено уравнение

$$x^4 + 12x - 17 = 0.$$

Так как p и q в нем отсутствуют, $r = 12$ и $s = -17$, то при подстановке этих чисел вы получите, что $\alpha = 0$, $\beta = 12$ и $\zeta = -17$. Единственный общий делитель β и 2ζ, или 12 и -34, есть 2, т. е. n будет 2. Далее, $\frac{\beta}{n} = 6$ и в качестве k нужно последовательно испытать делители 6, т. е. 1, 2, 3 и 6, а в качестве l нужно испытать соответственно -3, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$. С другой стороны, Q равно $\frac{\alpha + nk^2}{2}$, т. е. k^2. Далее, $\sqrt{\frac{Q^2 - s}{n}}$, т. е. $\sqrt{\frac{Q^2 + 17}{2}}$, должен быть равен l. Если вместо k взять четные числа 2 и 6, то Q соответственно будет 4 и 36 и $Q^2 - s$ будет нечетным числом и, следовательно, не может делиться на n или 2. Значит, числа 2 и 6 следует откинуть. Если же вместо k взять 1 и 3, то Q будет 1 и 9, а $Q^2 - s$ будет соответственно 18 и 98. Оба эти числа делятся на n, и корни из частных извлекаются. Эти корни суть ± 3 и ± 7; но только корень -3 равен одному из значений l. Поэтому я полагаю $k = 1$, $l = -3$ и $Q = 1$ и прибавляю к обеим сторонам уравнения величину $n^2k^2x^2 + 2nklx + nl^2$, т. е. $2x^2 - 12x + 18$, что дает

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 - 12x + 18$$

и после извлечения квадратного корня

$$x^2 + 1 = x\sqrt{2} - 3\sqrt{2}.$$

Если вы желаете избежать также извлечения корня, положите

$$x^2 + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n}\,(kx + l);$$

тогда вы найдете, как и ранее, что

$$x^2 + 1 = \pm\sqrt{2}\,(x - 3).$$

Вновь извлекая корень из этого уравнения, вы получите, что

$$x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \mp 3\sqrt{2}},$$

т. е., в соответствии с различными знаками,

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$$

и

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{3\sqrt{2} - \frac{1}{2}},$$

а также

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$$

и

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}.$$

Таковы четыре корня предложенного уравнения

$$x^4 + 12x - 17 = 0.$$

Однако два последних из них — невозможные.

Допустим, что предложено уравнение

$$x^4 - 6x^3 - 58x^2 - 114x - 11 = 0.$$

Если вместо p, q, r и s написать соответственно -6, -58, -114 и -11, то $-67 = \alpha$, $-315 = \beta$ и $-1133\frac{1}{4} = \zeta$. Единственным общим делителем чисел β и 2ζ, или -315 и $-\frac{4533}{2}$, является 3. Таким образом, n здесь есть 3 и делители $\frac{\beta}{n}$, или -105, суть числа 3, 5, 7, 15, 21, 35 и 105, которые и следует поэтому испытать в качестве k. Я испытываю сперва 3 и, разделив $\frac{\beta}{n}$ на k, или -105 на 3, вычитаю получившееся частное -35 из $\frac{1}{2}pk$, или из -3×3. Остаток будет 26, половина чего 13 должна быть равна l. Но $\frac{\alpha+nk^2}{2}$, или $\frac{-67+27}{2}$, т. е. -20 равно Q, значит, Q^2-s будет 411, что делится на n или 3; однако корень из частного 137 не извлекается. Поэтому я отбрасываю 3 и в качестве k испытываю 5. Частное от деления $\frac{\beta}{n}$ на k, или -105 на 5, теперь есть -21, что после вычитания из $\frac{1}{2}pk$, или из -3×5, дает в остатке 6, половина чего 3 и будет l. Значит, Q, или $\frac{\alpha+nk^2}{2}$, т. е. $\frac{-67+75}{2}$, есть число 4 и Q^2-s, или $16+11$, делится на n. Корень из частного, равного 9, т. е. 3, совпадает с l. Отсюда я заключаю, что $l=3$, $k=5$, $Q=4$ и $n=3$. Если прибавить к обеим сторонам уравнения $nk^2x^2+2nklx+nl^2$, или $75x^2+90x+27$, то можно будет из каждой стороны извлечь корень и получится, что

$$x^2+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}(kx+l),$$

или же, что

$$x^2-3x+4=\pm\sqrt{3}(5x+3).$$

Если корень извлечь вторично, то мы найдем, что

$$x=\frac{3\pm 5\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt{17\pm\frac{21\sqrt{3}}{2}}.$$

Точно так же, если предложено уравнение

$$x^4-9x^3+15x^2-27x+9=0$$

и вместо p, q, r, s написать соответственно -9, $+15$, -27 и $+9$, то $-5\frac{1}{4}=\alpha$, $-50\frac{5}{8}=\beta$ и $2\frac{7}{64}=\zeta$. Общие делители

β и 2ζ, или $-\frac{405}{8}$ и $\frac{135}{32}$, суть 3, 5, 9, 15, 27, 45 и 135. Но 9 есть квадрат, а числа 3, 15, 27, 135 при делении на 4 не дают в остатке единицы, как то требуется в силу нечетности числа p. Поэтому я отбрасываю все эти числа и в качестве n остается испытать только 5 и 45. Возьмем сперва $n=5$. В качестве k нужно будет испытать половины нечетных делителей $\frac{\beta}{n}$, или $-\frac{81}{8}$, т. е. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$. Если взять k равным $\frac{1}{2}$, то частное $-\frac{81}{4}$, возникающее при делении $\frac{\beta}{n}$ на k, после вычитания из $\frac{1}{2}pk$, или $-\frac{9}{4}$, в качестве $2l$ дает в остатке 18. Далее, $\frac{\alpha+nk^2}{2}=-2$ будет Q, и Q^2-s, или -5, действительно, делится на n, или 5. Однако корень из отрицательного частного -1 невозможен, между тем как он должен был бы быть 9. Отсюда я заключаю, что k не может быть $\frac{1}{2}$, и поэтому проверяю, не будет ли оно равно $\frac{3}{2}$. Частное от деления $\frac{\beta}{n}$ на k, или $-\frac{81}{8}$ на $\frac{3}{2}$, т. е. -27, я вычитаю из $\frac{1}{2}pk$, или $-\frac{27}{4}$, и в остатке получаю 0. Таким образом, теперь l будет равно 0. При этом $\frac{\alpha+nk^2}{2}=3=Q$ и Q^2-s есть нуль. Вместе с тем и значение l, равное корню из Q^2-s, деленного на n, оказывается равным нулю. Таким образом, эти величины совпадают, и я заключаю, что $n=5$, $k=\frac{3}{2}$, $l=0$ и $Q=3$. Поэтому если к обеим сторонам предложенного уравнения прибавить члены $nk^2x^2+2nlkx+nl^2$, т. е. $\frac{45x^2}{4}$, и извлечь из обеих сторон квадратный корень, то получится, что

$$x^2+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\,(kx+l),$$

т. е.

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 3 = \frac{3}{2}\sqrt{5x}.$$

При помощи этого же метода приводятся также буквенные уравнения. Если, например,

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$$

и если вместо p, q, r и s подставить соответственно $-2a$, $2a^2 - c^2$, $-2a^3$ и $+a^4$, то вы получите, что $\alpha = a^2 - c^2$, $\beta = -ac^2 - a^3$ и $\zeta = \frac{3}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^2c^2 - \frac{1}{4}c^4$. Общий делитель величин β и 2ζ есть $a^2 + c^2$, что и будет, следовательно, n, а $\frac{\beta}{n}$, или $-a$, имеет делителями 1 и a. Но так как n имеет два измерения, а $k\sqrt{n}$ должно иметь не более одного, то k не будет иметь измерений, значит, оно не может быть a. Положим поэтому k равным 1 и, разделив $\frac{\beta}{n}$ на k, вычтем частное $-a$ из $\frac{1}{2}pk$, или $-a$; в качестве значения l получится нуль. Далее, $\frac{\alpha + nk^2}{2}$, или a^2, есть Q и $Q^2 - s$, или $a^4 - a^4$, есть 0; таким образом, для l снова получится значение нуль. Это показывает, что величины n, k, l и Q найдены правильно. Если к обеим сторонам предложенного уравнения прибавить члены $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, т. е. $a^2x^2 + c^2x^2$, то корень из обеих сторон извлечется и извлечение корня даст, что

$$x^2 + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n}(kx + l),$$

т. е.

$$x^2 - ax + a^2 = \pm x\sqrt{a^2 + c^2}.$$

Извлекая корень снова, вы получите, что

$$x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}a^2 \pm \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Я применял до сих пор правило к извлечению иррациональных корней, но его можно употреблять и для извлечения рациональных корней, если в качестве величины n взять единицу. Таким образом вы можете исследовать, не имеет ли уравнение, свободное от дробных или иррациональных членов, рационального или иррационального делителя двух измерений. Если, например, предложено уравнение

$$x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6 = 0,$$

то, подставляя вместо p, q, r и s соответственно числа -1, -5, $+12$ и -6, вы найдете, что $\alpha = 5\frac{1}{4}$, $\beta = 9\frac{3}{8}$. Если положить $n = 1$, то делители $\frac{\beta}{n}$, или $\frac{75}{8}$, суть 1, 3, 5, 15, 25, 75, и так как p нечетное, то в качестве k следует испытать их половины. Если в качестве k мы испытаем $\frac{5}{2}$, то вы получите, что $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = -5$, а половина этого $-\frac{5}{2} = l$. Далее, $\frac{\alpha + nk^2}{2} = \frac{1}{2} = Q$ и $\frac{Q^2 - s}{n} = 6\frac{1}{4}$, корень из чего совпадает с l.

Отсюда я заключаю, что величины n, k, l, Q найдены правильно и что если к обеим сторонам уравнения прибавить члены $nk^2x^2 + 2nklx + nl^2$, т. е. $6\frac{1}{4}x^2 - 12\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{4}$, то корень из каждой стороны извлечется. При этом извлечении получится, что

$$x^2 + \frac{1}{2}px + Q = \pm\sqrt{n}\,(kx + l),$$

т. е.

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \pm 1 \times \left(2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}\right),$$

или

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

и

$$x^2+2x-2=0.$$

Таким образом, предложенное уравнение четвертой степени делится на эти два квадратных уравнения. Однако рациональные делители такого рода можно быстрее находить по другому способу, изложенному ранее.

Если величина $\frac{\beta}{n}$ имеет много делителей, так что испытать их все в качестве k было бы делом трудным, то число испытываемых делителей можно быстро уменьшить, найдя все делители величины $\alpha s-\frac{1}{4}r^2$. Дело в том, что величина Q должна быть равна какому-либо из этих делителей или же половине какого-нибудь нечетного делителя. Так, в последнем примере $\alpha s-\frac{1}{4}r^2$ есть $-\frac{9}{2}$, и какой-либо из ее делителей, 1, 3, 9, или какая-либо из их половин, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, и должна быть равна Q. Поэтому, испытывая в качестве k только половины делителей величины $\frac{\beta}{n}$, т. е. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{2}$ и $\frac{75}{2}$, я откидываю все те, которые не обращают $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nk^2$, или $-\frac{21}{8}+\frac{1}{2}k^2$, т. е. Q, в одно из чисел 1, 3, 9; $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. Но если вместо k написать $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$ и т. д., то для Q получатся соответственно числа $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{51}{2}$ и т. д., из которых среди названных чисел 1, 3, 9; $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$ встречаются только $-\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$. Отбрасывая поэтому все прочие, я полагаю $k=\frac{3}{2}$ и $Q=-\frac{3}{2}$, или же $k=\frac{5}{2}$ и $Q=\frac{1}{2}$. Эти два случая и нужно исследовать. Относительно уравнений четырех измерений сказано уже достаточно.

Если требуется привести уравнение шести измерений

$$x^6+px^5+qx^4+rx^3+sx^2+tx+v=0,$$

то положите

$$q-\frac{1}{4}p^2=\alpha, \qquad r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta, \qquad s-\frac{1}{2}p\beta=\gamma,$$

$$\gamma-\frac{1}{4}\alpha^2=\zeta, \qquad t-\frac{1}{2}\alpha\beta=\eta, \qquad v-\frac{1}{4}\beta^2=\theta,$$

$$\zeta\theta-\frac{1}{4}\eta^2=\lambda.$$

Затем возьмите в качестве n какой-либо целый общий делитель величин 2ζ, η, 2θ, не являющийся квадратным числом и не делящийся на квадратное число, а также дающий при делении на 4 в остатке единицу, если какая-либо из величин p, r, t нечетная. Если p четное, то в качестве k возьмите какой-либо целый делитель величины $\frac{\lambda}{2n^2}$; если p нечетное, то — половину какого-либо нечетного делителя; если же λ есть нуль, то — нуль. В качестве Q возьмите величину $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nk^2$. В качестве l возьмите какой-либо делитель величины $\frac{Qr-Q^2p-t}{n}$, если Q целое, и половину какого-либо нечетного делителя, если Q есть дробь со знаменателем 2, или, наконец, нуль, если величина $\frac{Qr-Q^2p-t}{n}$ есть нуль. Положите $R=\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}Qp+nkl$. Затем испытайте, делится ли R^2-v на n и извлекается ли из частного корень и, кроме того, будет ли этот корень равен как величине $\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}$, так и величине $\frac{Q^2+pR-nl^2-s}{2nk}$. Если все это будет иметь место, то обозначьте этот корень m, а вместо предложенного уравнения напишите такое:

$$x^3+\frac{1}{2}px^2+Qx+R=\pm\sqrt{n}\,(kx^2+lx+m).$$

В самом деле, если возвести в квадрат обе стороны этого уравнения и перенести все члены в одну сторону, то из него получится предложенное уравнение. Если же в рассматриваемом случае все эти вещи не будут иметь места, то приведение будет невозможно, если только заранее было выяснено, что уравнение не приводится при помощи рациональных делителей.

Допустим, например, что предложено уравнение

$$x^6-2ax^5+2b^2x^4+2ab^2x^3-(2a^2b^2-2a^3b+4ab^3)\,x^2+ \\ +3a^2b^4-a^4b^2=0.$$

Если вместо p, q, r, s, t и v написать соответственно $-2a$, $+2b^2$, $+2ab^2$, $-2a^2b^2+2a^3b-4ab^3$, 0 и $3a^2b^4-a^4b^2$, то:

$$\alpha=2b^2-a^2,\quad \beta=4ab^2-a^3,\quad \gamma=2a^3b+2a^2b^2-4ab^3-a^4,$$

$$\zeta=-b^4+2a^3b+3a^2b^2-4ab^3-\frac{5}{4}a^4,$$

$$\eta=-\frac{1}{2}a^5+3a^3b^2-4ab^4,\quad \theta=-a^2b^4+a^4b^2-\frac{1}{4}a^6.$$

Величины 2ζ, η и 2θ имеют общим делителем a^2-2b^2 или $2b^2-a^2$, смотря по тому, будет ли больше a^2 или $2b^2$. Допустим, что a^2 больше, чем $2b^2$, тогда, поскольку n всегда должно быть положительным, $a^2-2b^2=n$. Далее $\frac{\zeta}{n}$ есть $-\frac{5}{4}a^2+2ab+\frac{1}{2}b^2$, $\frac{\eta}{n}$ есть $-\frac{1}{2}a^3+2ab^2$ и $\frac{\theta}{n}$ есть $-\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^2b^2$; следовательно, $\frac{\zeta}{2n}\times\frac{\theta}{n}-\frac{\eta^2}{8n^2}$, или $\frac{\lambda}{2n^2}$, есть $\frac{1}{8}a^6-\frac{1}{4}a^5b-\frac{1}{8}a^4b^2+\frac{1}{2}a^3b^3-\frac{3}{8}a^2b^4$, делители чего суть 1, a, a^2. Но так как $\sqrt{n}\,k$ не может иметь более одного измерения, а $\sqrt{n}$ —одного измерения, то k не будет иметь измерений и, следовательно, может быть только числом. Поэтому я отбрасываю a и a^2, и в качестве k остается только 1. С другой стороны, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nk^2$ дает для Q значение 0, и $\frac{Qr - Q^2p - t}{n}$ также есть 0; следовательно, l, которое должно быть одним из делителей последней величины, будет 0. Наконец, $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}pQ + nkl$ дает для R значение ab^2. Величина $R^2 - v$ есть $-a^2b^4 + a^4b^2$, что делится на n, или $a^2 - 2b^2$; частное будет a^2b^2 и из него можно извлечь корень, равный ab. Если взять этот корень с отрицательным знаком, т. е. взять $-ab$, то он не будет неравным неопределенной величине $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$, или $\frac{0}{0}$, и будет равным определенной величине $\frac{Q^2 + pR - nl^2 - s}{2nl}$. Поэтому этот корень $-ab$ будет m и вместо предложенного уравнения можно написать

$$x^3 + \frac{1}{2}px^2 + Qx + R = \sqrt{n}(kx^2 + lx + m),$$

т. е.

$$x^3 - ax^2 + ab^2 = \sqrt{a^2 - 2b^2}(x^2 - ab).$$

Правильность этого вывода вы можете проверить, возведя в квадрат стороны уравнения и перенеся все члены в одну сторону. В самом деле, эти действия приведут к уравнению

$$x^6 - 2ax^5 + 2b^2x^4 + 2ab^2x^3 - 2a^2b^2x^2 +$$
$$+ 2a^3bx^2 - 4ab^3x^2 + 3a^2b^4 - a^4b^2 = 0,$$

которое и требовалось привести.

Если уравнение будет восьми измерений,

$$x^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + vx^2 + wx + z = 0,$$

то положите

$$\alpha = q - \frac{1}{4}p^2, \quad \beta = r - \frac{1}{2}\alpha p, \quad \gamma = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{2}\alpha^2,$$

$$\delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta, \quad \varepsilon = v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2,$$

$$\zeta = w - \frac{1}{2}\beta\gamma \quad \text{и} \quad \eta = z - \frac{1}{4}\gamma^2$$

и затем найдите общий делитель величин 2δ, 2ε, 2ζ, 8η, который является целым неквадратным числом, не делящимся на квадрат, а также дающим при делении на 4 в остатке единицу, если какая-либо из чередующихся величин p, r, t, w — нечетная. Если такого общего делителя не имеется, то уравнение, наверное, не может быть приведено при помощи извлечения иррационального квадратного корня; и если оно не может быть приведено таким образом, то вряд ли найдется общий делитель всех этих четырех величин. Рассмотренные до сих пор операции представляли собой исследование вопроса о приводимости или неприводимости уравнения. Так как, однако, подобные приведения возможны бывают редко, то такое исследование по большей части проводится в конце.

Аналогичным образом можно установить неприводимость уравнения десяти, двенадцати или большего числа измерений.

Если, например,

$$x^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx^6 + tx^5 + vx^4 +$$
$$+ ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

то положите

$$\alpha = q - \frac{1}{4}p^2, \quad \beta = r - \frac{1}{2}p\alpha, \quad \gamma = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha^2,$$

$$\delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta, \quad \varepsilon = v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2,$$

$$\zeta = a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma, \quad \eta = b - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma^2,$$

$$\theta = c - \frac{1}{2}\gamma\delta \quad \text{и} \quad \varkappa = d - \frac{1}{4}\delta^2.$$

Далее, найдите такой общий делитель пяти величин 2ε, 2ζ, 8μ, 4θ, $8\varkappa$, который был бы целым и неквадратным числом, при делении на 4 дающим в остатке 1, если какая-либо из величин p, r, t, a, c — нечетная.

Если дано уравнение двенадцати измерений

$$x^{12} + px^{11} + qx^{10} + rx^9 + sx^8 + tx^7 + vx^6 + ax^5 + \\ + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0,$$

то положите

$$\alpha = q - \frac{1}{4}p^2, \quad \beta = r - \frac{1}{2}p\alpha, \quad \gamma = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha^2,$$

$$\delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta, \quad \varepsilon = v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta^2,$$

$$\zeta = a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma, \quad \eta = b - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma^2,$$

$$\theta = c - \frac{1}{2}\beta\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta, \quad \varkappa = d - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon - \frac{1}{4}\delta^2,$$

$$\lambda = e - \frac{1}{2}\delta\varepsilon \quad \text{и} \quad \mu = f - \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Затем вы должны будете найти целый и неквадратный общий делитель шести величин 2ζ, 8η, 4θ, $8\varkappa$, 4λ, 8μ, дающий при делении на 4 в остатке единицу, если какая-либо из величин p, r, t, a, c, e — нечетная.

Таким образом вы можете продолжать без конца и в случае, когда такой общий делитель не найдется, предложенное уравнение всегда будет неприводимо при помощи извлечения иррационального квадратного корня. Если же такой делитель n будет найден и будет иметься надежда на последующее приведение, то его можно попробовать провести, следуя этапам действий, которые мы покажем на примере уравнения восьми измерений.

Найдите квадратное число, при умножении на n дающее такое произведение, которое в сумме с последним членом z уравнения, взятым со своим знаком, представляет собой квадратное число. Это быстрее всего осуществить следующим образом: последовательно прибавляйте к z, если n число четное, или к $4z$, если n нечетное, величины $n, 3n, 5n, 7n, 9n, 11n$ и т. д., — до тех пор, пока сумма не окажется равной какому-либо числу из таблицы квадратных чисел, которая, как я предполагаю, имеется у вас под руками. Если такое квадратное число не встретится раньше, чем квадратный корень из этой суммы, увеличенный на квадратный корень избытка этой же суммы над последним членом уравнения, окажется вчетверо больше, нежели наибольший из коэффициентов предложенного уравнения p, q, r, s, t, v и т. д., то продолжать испытание дальше будет незачем, ибо тогда уравнение приведено быть не может. Но если такое квадратное число встретится, то при n четном мы обозначим его корень S, а при n нечетном $2S$ и положим $\sqrt{\frac{S^2-z}{n}}=h$. При этом, если n четное, S и h должны быть целые числа, а если n нечетное, S и h могут быть дробями со знаменателем 2. И если одно из них есть дробь, то дробью должно быть и другое. То же самое следует сказать о находимых далее числах R и m, Q и l, P и k. Все числа S и h, которые можно будет найти в указанных пределах, должны быть занесены в таблицу.

В качестве k нужно затем последовательно испытать все числа, для которых $nk \pm \frac{1}{2}p$ не больше учетверенного наибольшего коэффициента уравнения. Во всех случаях положите $\frac{nk^2 \pm \alpha}{2} = Q$. После этого в качестве l последовательно испытайте все числа, для которых $nl \pm Q$ не больше учетверенного наибольшего коэффициента уравнения. При каждом испытании берите $\frac{-npk^2+2\beta}{4}+nkl=R$. Наконец, в качестве m вы должны последовательно испытать все числа, для которых $nm\pm R$ не больше учетверенного наибольшего коэффициента уравнения; при этом вы должны всякий раз следить за тем, будет ли, при условиях $s-Q^2-pR+nl^2=2H$ и $H+$ $+nkm=S$, число S являться одним из чисел, занесенных ранее в качестве S в таблицу, а также за тем, будет ли другое, связанное с этим S число, занесенное в ту же самую таблицу в качестве h, равно трем величинам $\frac{2RS-w}{2mn}$, $\frac{2QS+R^2-v-m^2n}{2nl}$ и $\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}$. Если встретится случай, в котором все это выполняется, то вместо данного уравнения вы должны написать такое:

$$x^4+\frac{1}{2}px^3+Qx^2+Rx+S=\sqrt{n}\,(kx^3+lx^2+mx+h).$$

Допустим, например, что предложено уравнение

$$x^8+4x^7-x^6-10x^5+5x^4-5x^3-10x^2-10x-5=0.$$

Тогда

$$q-\frac{1}{4}p^2=-1-4=-5=\alpha,$$

$$r-\frac{1}{2}p\alpha=-10+10=0=\beta,$$

$$s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha^2=5-\frac{25}{4}=-\frac{5}{4}=\gamma,$$

$$t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=-5+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}=\delta,$$

$$v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta^2=-10-\frac{25}{8}=-\frac{105}{8}=\varepsilon,$$

$$w-\frac{1}{2}\beta\gamma=-10=\zeta,$$

$$z-\frac{1}{4}\gamma^2=-5-\frac{25}{64}=-\frac{345}{64}=\eta.$$

Таким образом, $2\delta, 2\varepsilon, 2\zeta, 8\eta$ суть соответственно $-5, \frac{-105}{4}$, -20 и $\frac{-345}{8}$. Их общий делитель есть 5, что при делении на 4 дает в остатке 1, как и должно быть при нечетности коэффициента s.

Найдя таким образом общий делитель n, или 5, что подает надежду привести уравнение, я, поскольку этот делитель нечетный, последовательно прибавляю к $4z$, или к -20, числа $n, 3n, 5n, 7n, 9n$ и т. д., или 5, 15, 25, 35, 45 и т. д., и получаю $-15, 0, 25, 60, 105, 160, 225, 300, 385, 480$, 585, 700, 825, 960, 1105, 1260, 1425, 1600. Квадратами здесь являются лишь числа 0, 25, 225 и 1600.

Поэтому я беру половины корней этих чисел $0, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, 20$ и заношу в таблицу в качестве значений S; в качестве h я заношу соответственно значения $\sqrt{\frac{S^2-z}{n}}$, т. е. $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 9$. Однако, поскольку $S+nh$ при S, равном 20, и h, равном 9 дает 65 — число, которое больше учетверенного наибольшего коэффициента уравнения, я отбрасываю 20 и 9 и в таблицу заношу только остальные числа

$$\begin{array}{c|c} h & 1,\ {}^3/_2,\ {}^7/_2 \\ \hline S & 0,\ {}^5/_2,\ {}^{15}/_2 \end{array}.$$

Затем я испытываю в качестве k все числа, для которых $\frac{1}{2}p \pm nk$, или $2 \pm 5k$, не больше, чем 40 (учетверенный наибольший коэффициент уравнения), т. е. числа $-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, и в качестве Q беру $\frac{nk^2+\alpha}{2}$, или $\frac{5k^2-5}{2}$, т. е. соответственно числа $\frac{315}{2}, 120, \frac{175}{2}, 60, \frac{75}{2}, 20, \frac{15}{2}, 0, \frac{-5}{2}, 0, \frac{15}{2}, 20, \frac{75}{2}, 60, \frac{175}{2}, 120$. Но так как $Q \pm nl$, и тем более Q, не должно превосходить 40, то я замечаю, что должен отбросить $\frac{315}{2}$, 120, $\frac{175}{2}$ и 60, а также соответствующие им $-8, -7, -6, -5, 5, 6, 7$. Значит, в качестве k нужно испытать только числа $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, а в качестве Q — соответственно лишь числа $\frac{75}{2}, 20, \frac{15}{2}, 0, \frac{-5}{2}, 0, \frac{15}{2}, 20, \frac{75}{2}$. Испытаем -1 в качестве k и 0 в качестве Q. В этом случае в качестве l нужно последовательно испытать все числа, для которых $Q \pm nl$ не больше 40, т. е. все числа между 10 и -10, а в качестве R нужно соответственно испытать числа $\frac{2\beta - npk^2}{4} + nkl$, или $-5-5l$, т. е. $-55, -50, -45, -40, -35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$, среди которых можно отбросить три первых и последнее, ибо они больше сорока.

Испробуем в качестве l число -2 и в качестве R число 5. В этом случае в качестве m нужно будет испытать все числа, для которых $R \pm nm$, или $5 \pm 5m$, не более 40, т. е. числа между $+7$ и -9. Затем, полагая $s - Q^2 - pR + nl^2$, т. е. $5 - 20 + 20$, или $5 = 2H$, нужно будет посмотреть, может ли $H + nkm$, или $\frac{5}{2} - 5m$, быть $= S$, т. е. найдется ли среди чисел $-\frac{65}{2}, -\frac{55}{2}, -\frac{45}{2}, -\frac{35}{2}, -\frac{25}{2}, -\frac{15}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}, \frac{25}{2}, \frac{35}{2}, \frac{45}{2}, \frac{55}{2}, \frac{65}{2}, \frac{75}{2}, \frac{85}{2}$ какое-нибудь, равное одному из чисел $0, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{15}{2}$, занесенных ранее в таблицу в качестве S. Таких чисел мы здесь обнаруживаем четыре, а именно $-\frac{15}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}$, которым соответствуют числа $\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{7}{2}$, записанные в той же таблице в качестве h, а также числа $2, 1, 0, -1$, подставляемые вместо m. Если мы в качестве S испытаем $-\frac{5}{2}$, в качестве m —

число 1 и в качестве h — числа $\pm\frac{3}{2}$, то вы получите, что

$$\frac{2RS-w}{2mn}=-\frac{-25+10}{10}=-\frac{3}{2},$$

и

$$\frac{2QS+R^2-v-nm^2}{2nl}=\frac{25+10-5}{-20}=-\frac{3}{2},$$

и

$$\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}=\frac{-10+5+20}{-10}=-\frac{3}{2}.$$

Так как во всех этих случаях получается $-\frac{3}{2}$, или h, то я заключаю, что все числа найдены правильно. Следовательно, вместо предложенного уравнения вы должны написать

$$x^4+\frac{1}{2}px^3+Qx^2+Rx+S=\sqrt{n}\,(kx^3+lx^2+mx+h),$$

т. е.

$$x^4+2x^3+5x-2\frac{1}{2}=\sqrt{5}\,\left(-x^3-2x^2+x-1\frac{1}{2}\right).$$

Действительно, если возвести обе стороны этого уравнения в квадрат, то получится первоначально предложенное уравнение восьми измерений.

Если бы при испытании всех чисел ни в одном случае все указанные значения h не совпали, то это свидетельствовало бы о том, что при помощи извлечения иррационального квадратного корня уравнение привести нельзя.

Здесь можно было бы кое-что рассказать относительно сокращения этих вычислений, но я оставлю это в стороне ради краткости, учитывая весьма малую полезность столь громоздких приведений. Я скорее желал показать самую возможность последних, чем практически удобные приемы. Таковы приведения уравнений при помощи извлечения иррационального квадратного корня.

Я мог бы теперь присоединить изложение приведения уравнений при помощи извлечения иррационального кубического корня. Однако они редко бывают полезны и краткости ради я пройду мимо них.

Однако если бы я совсем оставил в стороне некоторые общеизвестные приведения кубических уравнений, то читатель, пожалуй, смог бы усмотреть в этом пробел. Допустим поэтому, что предложено кубическое уравнение

$$x^3 * + qx + r = 0,$$

в котором отсутствует второй член (из сказанного нами ранее ясно, что всякое кубическое уравнение может быть приведено к такому виду). Положим $x = a + b$. Тогда

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ (т. е. } x^3) + qx + r = 0.$$

Положим еще, что

$$3a^2b + 3ab^2 \text{ (т. е. } 3abx) + qx = 0,$$

тогда

$$a^3 + b^3 + r = 0.$$

Из предшествовавшего уравнения $b = -\frac{q}{3a}$ и, если возвести в куб, $b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}$. Поэтому из последнего уравнения

$$a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0,$$

или

$$a^6 + ra^3 = \frac{q^3}{27}.$$

Извлечение неявного квадратного корня даст

$$a^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}}.$$

Извлеките кубический корень и вы получите a. Но выше вы имели, что $b = -\frac{q}{3a}$ и $x = a + b$. Значит, корнем предложенного уравнения является $a - \frac{q}{3a}$. [125]

Пусть, например, предложено уравнение

$$y^3 - 6y^2 + 6y + 12 = 0.$$

Для уничтожения второго члена положите $x + 2 = y$; получится

$$x^3 * - 6x + 8 = 0.$$

Здесь $q = -6$, $r = 8$, $\frac{1}{4} r^2 = 16$, $\frac{q^3}{27} = -8$, $a^3 = -4 \pm \sqrt{8}$, $a - \frac{q}{3a} = x$ и $x + 2 = y$. Следовательно,

$$y = 2 + \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}}.$$

Таким путем можно извлекать корни всех кубических уравнений при положительном q или же, если q отрицательно, при условии, что $\frac{q^3}{27}$ не больше, чем $\frac{1}{4} r^2$, т. е. когда два корня уравнения невозможные. Но если q отрицательно и вместе с тем $\frac{q^3}{27}$ больше, чем $\frac{1}{4} r^2$, то $\sqrt{\frac{1}{4} r^2 - \frac{q^3}{27}}$ становится невозможной величиной, и в этом случае корень уравнения, x или y, представляется невозможным; между тем в этом случае имеются три возможных корня. Все они подобны относительно коэффициентов уравнения p и q и обозначаются безразличным образом буквами x и y. Следовательно, все они должны были бы извлекаться при помощи того же закона и выражаться таким же образом, как извлекается или выражается какой-либо из них; однако все три невозможно выразить при помощи приведенного закона. Величина $a - \frac{q}{3a^2}$, обозначающая x, не может быть многозначной; в силу этого, очевидно, невозможно предположение, что в случае, когда x трехзначный, он может быть равен двучлену $a-\frac{q}{3a}$ или $a+b$, сумма кубов членов которого равна r, а утроенное произведение $3ab=q$. Неудивительно, что из невозможного предположения последовало и невозможное заключение.[126]

Существует еще другой способ выразить эти корни. Вычтите из a^3+b^3+r, т. е. из нуля, a^3+r, или $\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}$. При этом останется

$$b^3=-\frac{1}{2}r\mp\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}.$$

Поэтому

$$a=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}}$$

и

$$b=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}},$$

или

$$a=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}}$$

и

$$b=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}}.$$

Следовательно, их сумма

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{\frac{1}{4}r^2+\frac{q^3}{27}}}=x.$$

При помощи корней кубического уравнения можно также извлечь и выразить корни уравнений четвертой степени.

Прежде всего вы должны удалить второй член уравнения. Допустим, что получившееся при этом уравнение есть

$$x^4 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Предположите, что это уравнение возникло от перемножения двух уравнений

$$x^2 + ex + f = 0$$

и

$$x^2 - ex + g = 0,$$

т. е. что оно совпадает с уравнением

$$x^4 * + (f + g - e^2)\,x^2 + (eg - ef)\,x + fg = 0.$$

Сравнивая члены, вы получите

$$f + g - e^2 = q, \qquad eg - ef = r \qquad \text{и} \qquad fg = s.$$

Таким образом,

$$q + e^2 = f + g, \qquad \frac{r}{e} = g - f,$$

$$\frac{q + e^2 + \frac{r}{e}}{2} = g, \qquad \frac{q + e^2 - \frac{r}{e}}{2} = f, \qquad \frac{q^2 + 2e^2q + e^4 - \frac{r^2}{e^2}}{4} (= fg) = s$$

и после приведений

$$e^6 + 2qe^4 + (q^2 - 4s)\,e^2 - r^2 = 0.$$

Напишите y вместо e^2 и вы получите кубическое уравнение

$$y^3 + 2qy^2 + (q^2 - 4s)\,y - r^2 = 0,$$

из которого можно удалить второй член и затем извлечь корень либо по предыдущему правилу, либо как-нибудь иначе. Найдя этот корень, вы должны будете пойти обратным путем, полагая

$$\sqrt{y} = e, \qquad \frac{q + e^2 - \frac{r}{e}}{2} = f, \qquad \frac{q + e^2 + \frac{r}{e}}{2} = g.$$

Извлечение корней двух уравнений

$$x^2+ex+f=0 \quad \text{и} \quad x^2-ex+g=0$$

даст четыре корня уравнений четвертой степени

$$x^4+qx^2+rx+s=0,$$

а именно

$$x=-\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}e^2-f} \quad \text{и} \quad x=\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}e^2-g}.$$ [127]

При этом заметьте, что если четыре корня уравнения четвертой степени — возможные, то возможными будут и три корня кубического уравнения

$$y^3+2qy^2+(q^2-4s)y-r^2=0,$$

и, следовательно, их нельзя будет извлечь при помощи предыдущего правила. Замечу, что если, удалив каким-либо образом промежуточные члены уравнения пяти или более измерений, мы превратим его неявные корни в явные, то выражение для корней будет невозможным во всех случаях, когда возможными являются более чем один корень у уравнения нечетного измерения или более чем два корня у уравнения четного измерения, которое нельзя привести при помощи ранее изложенного метода путем извлечения иррационального квадратного корня. [128]

Изложенные правила приведения уравнения четвертой степени предложил г. Декарт. Допустим, например, что дано уравнение

$$x^4-x^3-5x^2+12x-6=0,$$

приведением которого мы уже занимались ранее. Удалите второй член, положив $v+\frac{1}{4}=x$; при этом получится

$$v^4-\frac{43v^2}{8}+\frac{75v}{8}-\frac{851}{256}=0.$$

Чтобы избавиться от дробей, напишите $\frac{1}{4}z$ вместо v, тогда

$$z^4-86z^2+600z-851=0.$$

Здесь $-86=q$, $600=r$ и $-851=s$. Подставляя равносильные значения в уравнение

$$y^3+2qy^2+(q^2-4s)y-r^2=0,$$

вы приведете его к виду

$$y^3-172y^2+10\,800y-360\,000=0.$$

Испытывая все делители последнего члена $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$ и т. д. до 100, вы найдете в конце концов, что $y=100$. Это же, впрочем, можно было бы найти значительно быстрее, применив метод, изложенный ранее. Найдя $y=100$, мы получим, что e есть корень из y, т. е. 10, и $\dfrac{q+e^2-\frac{r}{e}}{2}$, т. е. $\dfrac{-86+100-60}{2}$ или $-23=f$, и $\dfrac{q+e^2+\frac{r}{e}}{2}$ или $37=g$. Значит, уравнения

$$x^2+ex+f=0 \qquad \text{и} \qquad x^2-ex+g=0,$$

после замены x на z и подстановки равносильных величин, примут вид

$$z^2+10z-23=0 \qquad \text{и} \qquad z^2-10z+37=0.$$

Если вместо $\frac{z}{4}$ восстановить теперь v, то эти уравнения преобразуются в

$$v^2+2\frac{1}{2}v-\frac{23}{16}=0 \qquad \text{и} \qquad v^2-2\frac{1}{2}v+\frac{37}{16}=0.$$

Восстановите далее $x-\frac{1}{4}$ вместо v и вы получите

$$x^2+2x-2=0 \qquad \text{и} \qquad x^2-3x+3=0.$$

Четыре корня этих двух уравнений, $x=-1\pm\sqrt{3}$ и $x=1\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$, совпадают с четырьмя корнями предложенного ранее (стр. 48) уравнения

$$x^4-x^3-5x^2+12x-6=0.$$

Впрочем, их было бы легче найти при помощи разъясненного ранее метода отыскания делителей. [129]

ЛИНЕЙНОЕ ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

До сих пор я излагал свойства, преобразования, пределы и способы приведения всех видов уравнений. Я не всегда присоединял доказательства, ибо они представлялись слишком легкими, а иногда не могли быть изложены без докучливых длиннот. Теперь остается лишь показать, как можно извлечь численным образом корни уравнений, уже приведенных к наиболее удобному виду. Главная трудность состоит здесь в определении двух или трех первых цифр корня, а это удобнее всего можно сделать при помощи геометрического или же механического построения уравнения. Поэтому я присоединю здесь некоторые построения этого рода. [130]

Мы знаем от Паппа, что древние сперва тщетно пытались произвести трисекцию угла и найти две средние пропорциональные при помощи прямой линии и круга. Затем они стали привлекать к рассмотрению некоторые другие линии, как конхоиду, циссоиду и конические сечения, и решать указанные задачи при помощи этих линий. Наконец, тщательнее изучив вопрос и включив конические сечения в геометрию, они разделили задачи на три рода, именно на плоские задачи, которые, ведя свое начало от линий на плоскости, могут быть решены при помощи прямой и круга, на телесные задачи, которые решаются при помощи линий, берущих начало из рассмотрения тела, именно конуса, и на линейные задачи, для решения которых требуются более сложные линии. Согласно этому различению, для решения телесных задач мы не должны применять никаких линий, кроме конических сечений, особенно раз в геометрию должны быть включены только прямые, круг и конические сечения. Однако современные геометры пошли вперед значительно дальше, включили в геометрию все линии, которые можно выразить уравнениями, и разделили эти линии на роды в соответствии с измерениями их уравнений. При этом они установили закон, согласно которому вы не должны строить задачу при помощи линии высшего рода, если ее можно построить при помощи линии низшего рода.

Я одобряю, что при рассмотрении линий и исследовании их свойств их разделяют на роды, согласно измерениям определяющих их уравнений. Однако геометрической кривая является не в силу уравнения, но благодаря ее описанию. Круг является геометрической линией не потому, что может быть выражен уравнением, но потому, что описание его является постулатом. Выбор наших линий для построения задач определяется не простотой уравнения, но легкостью описания линий. В самом деле, уравнение параболы проще, чем уравнение круга, а между тем круг предпочитают параболе, ибо построение его проще. Если рассматривать круг и конические сечения с точки зрения измерений их уравнений, то они относятся к одному порядку; однако при построении задач круг к ним не причисляют, но в силу простоты его описания низводят к низшему порядку, именно к тому же, к которому принадлежит прямая линия.

Поэтому оказывается подходящим построение при помощи круга и тех задач, которые можно построить при помощи прямой. Однако ошибочно строить при помощи конических сечений то, что можно построить при помощи круга. Таким образом, вы должны либо установить, что закон об измерениях уравнений следует соблюдать и для круга и вместе с тем отбросить как порочное различение между плоскими и телесными задачами, либо же вы должны допустить, что для линий высших родов этот закон не нужно соблюдать так строго, но что некоторые такие линии из-за большей простоты их описания можно предпочесть в сравнении с другими линиями того же порядка и при построении задач отнести к линиям низших порядков. Из построений, в равной мере являющихся геометрическими, всегда следует отдать предпочтение простейшему. Этот закон не допускает исключений. Но алгебраические выражения ничего не добавляют к простоте построений. Здесь следует принимать во внимание только описания линий, и лишь их имели в виду те геометры, которые объединили круг с прямой линией. И в зависимости от легкости или трудности описания линии оказывается легким или трудным построение.

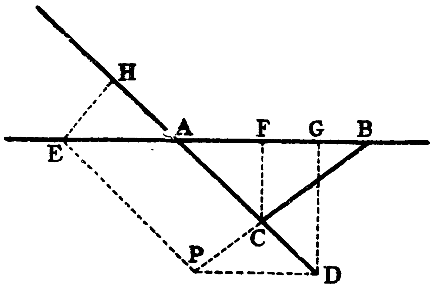
Таким образом, природе дела чуждо устанавливать законы построений, исходя из чего-либо иного. Следовательно, мы либо должны вместе с древними исключить из геометрии все линии, кроме прямой, круга и, может быть, конических сечений, либо же принять их все, в соответствии с простотой их описания. Если бы в геометрию включена была трохоида,[131] то при ее помощи мы могли бы разделить угол в данном отношении. Станете ли вы упрекать тех, кто применит эту линию для деления угла в отношении двух чисел, упрекать на том основании, что эта кривая не определяется уравнением и что применять должно лишь те линии, которые определяются уравнениями? Если бы дело обстояло так, то для деления угла, например, на 10001 часть мы должны были бы применить кривую, определяемую уравнением более ста измерений и которую не мог бы ни описать, ни, еще менее, уразуметь ни один смертный. И кто не нашел бы нелепым, если бы этой линии отдали предпочтение перед трохоидой, которая представляет собой хорошо известную линию, легко описываемую посредством движения колеса или круга. Таким образом, либо трохоиду вовсе не следует включать в геометрию, либо же при построении задач ее следует предпочесть всем линиям, описание которых труднее. То же самое относится и к другим кривым.

По этой причине мы одобряем приемы трисекции угла при помощи конхоиды, которые Архимед в его „Леммах“ и Папп в его „Собраниях“ предпочли открытиям, сделанным в этом вопросе всеми другими геометрами.[132] Повторяю, либо мы должны исключить из геометрии все линии, кроме круга и прямой, либо допустить их все, в соответствии с простотой их описания. А в этом отношении конхоида не уступает ни одной линии, кроме круга.

Уравнения суть выражения арифметических вычислений, и они, собственно говоря, не имеют места в геометрии, за исключением тех случаев, когда можно сказать, что одни действительно геометрические величины (т. е. линии, поверхности, тела и пропорции) равны другим. Умножения, деления и тому подобные вычисления введены были в геометрию недавно и при этом неосторожно и в противоречии с основной целью этой науки. Всякий, кто рассмотрит построения задач при помощи прямой и круга, найденные первыми геометрами, легко увидит, что геометрия была изобретена для того, чтобы мы, проводя линии, могли с удобством избегать утомительных вычислений. Поэтому не следует смешивать эти две науки. Древние столь тщательно отличали их друг от друга, что никогда не вводили в геометрию арифметические термины. Современные ученые, смешивая обе науки, утратили простоту, в которой состоит все изящество геометрии.[133] Арифметически проще то, что определяется при помощи более простых уравнений, геометрически же проще то, что определяется при помощи более простого проведения линий; и в геометрии следует считать лучшим то, что наиболее просто с геометрической точки зрения. Поэтому меня не следует упрекать, если я вместе с князем математиков Архимедом и другими древними применяю для построения телесных задач конхоиду. Впрочем, если кто-либо думает иначе, то пусть он имеет в виду, что я забочусь здесь не о геометрическом построении, но о каком-либо приеме, при помощи которого мог бы кратчайшим путем найти численное значение корней уравнений. С этой целью я предпошлю здесь в качестве леммы одну задачу.

Между двумя данными прямыми AB, AC вставить прямую BC данной длины так, чтобы при продолжении она прошла через данную точку P (фиг. 87).

Если прямая BC вращается вокруг полюса P, а конец C одновременно движется вдоль прямой AC, то другой ее конец B описывает конхоиду древних. Допустим, что конхоида пересекает линию AB в точке B. Проведите PB, ее часть BC и будет прямой, которую требовалось провести. Линию BC можно было бы провести по тому же правилу и в случае, если бы вместо прямой AC взята была какая-либо кривая.



Фиг. 87

Если кому-либо не нравится это построение при помощи конхоиды, то его можно заменить другим — при помощи конического сечения. Проведите из точки P к прямым AD, AE прямые PD, PE, образующие параллелограм $EADP$, и из точек C и D опустите на прямую AB перпендикуляры CF, DG; из точки E также опустите перпендикуляр EH на AC, продолженную за A. Положив $AD = a$, $PD = b$, $BC = c$, $AG = d$, $AB = x$ и $AC = y$, вы получите, что $AD : AG = AC : AF$ и, значит, $AF = \frac{dy}{a}$. Далее, $AB : AC = PD : CD$, или же $x : y = b : (a - y)$; таким образом получается уравнение

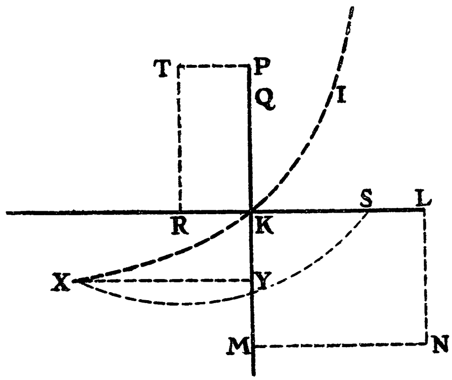
$$by = ax - xy,$$

выражающее гиперболу. Затем на основании 13 предл. 2 кн. „Начал“, $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2FA \times AB$, т. е.

$$c^2 = y^2 + x^2 - \frac{2dxy}{a}.$$

Помножьте обе стороны первого уравнения на $\frac{2d}{a}$ и вычтите произведения из обеих сторон второго уравнения; в остатке получится

$$c^2 - \frac{2bdy}{a} = y^2 + x^2 - 2dx,$$



Фиг. 88

т. е. уравнение, выражающее круг, при условии, что x и y образуют друг с другом прямые углы. Таким образом, если вы при помощи этих уравнений построите гиперболу и круг, то их пересечение даст вам x и y, или AB и AC, которые определят положение прямой BC. Эти прямые получаются следующим образом (фиг. 88).

Проведите две прямые линии, KL, равную AD, и KM, равную PD, так, чтобы они образовали прямой угол MKL. Дополните параллелограм $KLMN$ и через точку K опишите гиперболу IKX, имеющую асимптотами LN, MN. На продолжении KM за точку K возьмите KP, равную AG, и KQ, равную BC. На продолжении KL за точку K возьмите KR, равную AH, и RS, равную RQ. Дополните параллелограм $PKRT$ и из центра T радиусом TS опишите круг. Допустим, что этот круг пересечет гиперболу в точке X. Опустите на KP перпендикуляр XY, тогда XY будет равен

AC, а KY будет равен AB. Эти две линии, AC и AB, или же одна из них вместе с точкой P определяют искомое положение прямой BC. Я не стану здесь заниматься доказательством этого построения и разбором различных его случаев, соответствующих различным случаям задачи.

Я сказал, что вы можете решить задачу при помощи такого построения, если вы считаете это подходящим. Но это решение слишком сложно, чтобы оно могло служить для каких-либо применений. Это — чистое умозрение, но геометрические умозрения обладают изяществом лишь в той мере, в какой и простотой, и заслуживают похвалы лишь в той мере, в какой могут оказаться полезными. Поэтому я предпочитаю построение при помощи конхоиды как более простое и не менее геометрическое, а также находящее специальное употребление при решении предложенных нами уравнений. Предпослав, таким образом, эту лемму, мы перейдем к нижеследующему геометрическому построению кубических задач и задач четвертой степени (которые могут быть приведены к кубическим).

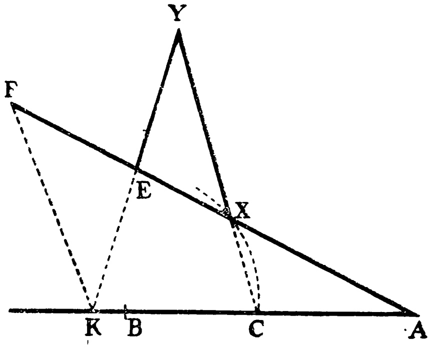
Допустим, что предложено кубическое уравнение

$$x^3 + qx + r = 0,$$

в котором отсутствует второй член, коэффициент третьего члена обозначен со своим знаком $+q$ и коэффициент четвертого обозначен $+r$ (фиг. 89, 90, 91).

Проведите какую-либо прямую KA и обозначьте ее n. Продолжив KA в обе стороны, возьмите $KB = \frac{q}{n}$ с той же стороны, что и KA, если у вас будет $+q$, и с обратной стороны в противном случае. Разделите AB в точке C пополам и из K, как центра, радиусом KC опишите круг CX. Впишите в этот круг прямую CX, равную $\frac{r}{n^2}$, и продолжите ее в обе стороны. Проведите AX, также продолжив ее в обе стороны. Наконец, между линиями CX и AX впишите прямую

EY длины, равной CA, так, чтобы при продолжении она могла пройти через точку K. Корнем уравнения тогда будет XY. При $+r$ те из корней, которые направлены от X к C, положительны, а те, которые направлены в обратную сторону, отрицательны; но если у вас будет $-r$, то дело будет обстоять наоборот.



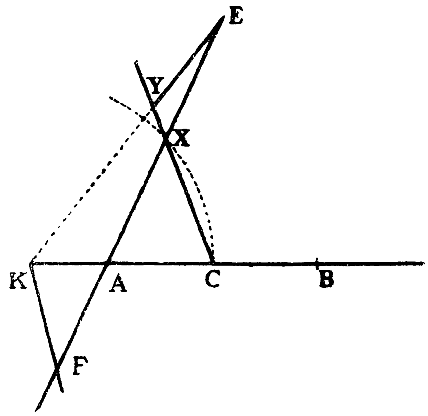
Фиг. 89

Доказательство

Для доказательства я предпошлю следующие леммы:

Лемма I

YX относится к AK, как CX к KE. Действительно, проведите KF параллельно CX. Из подобных треугольников ACX, AKF и EYX, EFK следует, что AC относится к AK, как CX к KF, и YX относится к YE, или AC, как KF к KE. Сложение отношений дает, что YX относится к AK, как CX к KE.[134] Ч. т. д.



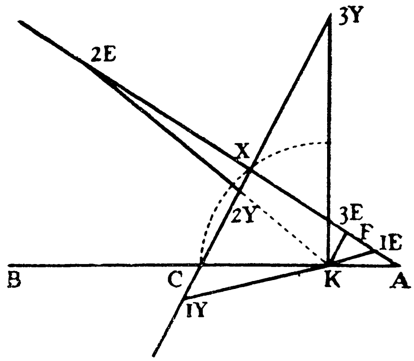
Фиг. 90

Лемма II

YX относится к AK, как CY к $AK + KE$. Действительно, componendo получаем, что YX относится к AK, как $YX+CX$ (т. е. CY) к $AK + KE$. Ч. т. д.

Лемма III

$KE - BK$ относится к YX, как YX к AK. Действительно (12 предл. кн. 2 „Начал“), $\overline{YK}^2 - \overline{CK}^2 = \overline{CY}^2 - CY \times CX = CY \times YX$. Значит, если придать теореме вид пропорции, CY относится к $YK - CK$, как $YK + CK$ к YX. Но $YK - CK = YK - YE + CA - CK = KE - BK$, а $YK + CK = YK - YE + CA + CK = KE + AK$. Поэтому CY относится к $KE - BK$, как $KE + AK$ к YX. Но, согласно лемме II, CY относится к $KE + AK$, как YX к AK. Тогда, в силу равенств, YX относится к $KE - BK$, как AK к YX, или $KE - BK$ относится к YX, как YX к AK. Ч. т. д.



Фиг. 91

Предпослав это, мы докажем теорему следующим образом. В первой лемме мы имели, что YX относится к AK, как CX к KE, откуда $KE \times YX = AK \times CX$. В третьей лемме мы доказали, что $KE - BK$ относится к YX, как YX к AK. Если умножить члены первого отношения на YX, то получится, что $KE \times YX - BK \times YX$ относится к YX^2, как YX к AK, т. е. $AK \times CX - BK \times YX$ относится к YX^2, как YX к AK. Перемножая крайние и средние, мы получим, что $\overline{AK}^2 \times XC - AK \times BK \times YX = \overline{YX}^3$. Наконец, подставив обратно вместо YX, AK, BK и CX соответственно x, n, $\frac{q}{n}$ и $\frac{r}{n^2}$, мы получим уравнение

$$r - qx = x^3.$$

Ч. т. д. Нет нужды рассказывать вам о рассмотрении перемен в знаках, ибо они определяются в соответствии с различными случаями задачи.

Допустим теперь, что предложено уравнение

$$x^3 + px^2 + r = 0,$$

в котором отсутствует третий член. Для его построения, выбрав n, отложите на какой-либо прямой линии две длины $AK = \frac{r}{n^2}$ и $KB = p$, причем отложите их в одну сторону, если r и p имеют одинаковые знаки, и в противоположные стороны — в противном случае. Разделите BA в C пополам и из K, как центра, радиусом CK опишите круг. Впишите в круг $CX = n$ и продолжите ее в обе стороны. Затем проведите AX и также продолжите ее в обе стороны. Наконец, между линиями CX и AX впишите линию $EY = CA$, так чтобы при продолжении она могла пройти через точку K. Тогда корнем уравнения будет KE. При $+r$ корни будут положительными, если точка Y окажется с той же стороны от X, что и точка C, и отрицательными, если точка Y окажется с обратной стороны от X; но если у вас будет $-r$, то дело будет обстоять наоборот.

Для доказательства этого предложения обратитесь к чертежам и леммам предыдущего предложения; тогда вы найдете, что доказательство таково.

Согласно I лемме, YX относится к AK, как CX к KE, или же $YX \times KE = AK \times CX$. По III лемме $KE - KB$ относится к YX, как YX к AK, или (беря KB в противоположном направлении) $KE + KB$ относится к YX, как YX к AK. Поэтому $KE + KB$, умноженное на KE, относится к $YX \times KE$ (или $AK \times CX$), как YX к AK, или как CX к KE. Значит, если помножить на самих себя крайние и средние, то $\overline{KE}^3 + KB \times \overline{KE}^2 = AK \times \overline{CX}^2$. Если вместо KE, KB, AK, CX подставить указанные выше значения, то получится

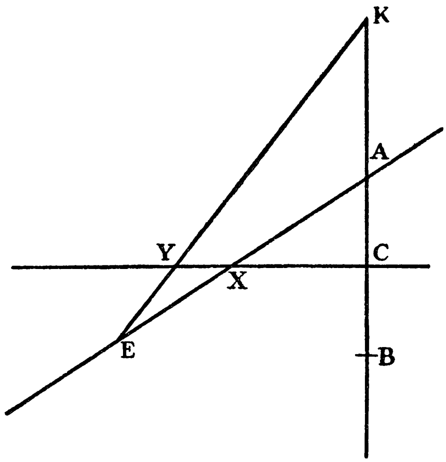
$$x^3 + px^2 = r.$$

Допустим теперь, что предложено уравнение трех измерений вида

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

в котором имеются все члены и одни корни которого положительные, а другие отрицательные (фиг. 92).

Предположим сперва, что q отрицательно. Отложите на какой-либо прямой, скажем KB, две длины $KA=\frac{r}{q}$ и $KB=p$, причем отложите их в одну сторону, если p и $\frac{r}{q}$ имеют различные знаки, и в разные стороны от точки K, если знаки p и $\frac{r}{q}$ одинаковые. Разделите AB в C пополам и восстановите в этой точке перпендикуляр CX, равный квадратному корню из q. Затем, неопределенно продолжив в обе стороны линии AX и CX, впишите между ними прямую $EY=AC$ так, чтобы она могла при продолжении пройти через K. Тогда KE будет корнем уравнения, положительным, если точка X окажется между A и E, и отрицательным, если точка E окажется с той же стороны от X, что и A.



Фиг. 92

Если же q положительно, то вы должны взять на линии KB две длины, $KA=\sqrt{-\frac{r}{p}}$ и $KB=\frac{q}{KA}$, и отложить их с одной стороны от точки K, если $\sqrt{-\frac{r}{p}}$ и $\frac{q}{KA}$ имеют различные знаки, и по разные стороны, если их знаки — одинаковой природы. BA нужно снова разделить в C пополам, восстановить в этой точке перпендикуляр CX, равный p, а между неопределенно продолженными в обе стороны линиями AX и CX нужно, так же как и ранее, вписать прямую EY, равную AC и расположенную так, чтобы она прошла через точку K. Тогда XY будет корнем уравнения, отрицательным, если точка X окажется между A и E, и положительным, если точка Y окажется с той же стороны от X, что и C.

Доказательство для первого случая. На основании первой леммы KE относится к CX, как AK к YX и (componendo) как $KE + AK$, т. е. $KY + KC$, к $CX + YX$, т. е. CY. Но в прямоугольном треугольнике KCY мы имеем, что $\overline{YC}^2 = \overline{YK}^2 - \overline{KC}^2 = (KY + KC) \times (KY - KC)$ и, составляя из равных членов пропорцию, что $KY + KC$ относится к CY, как CY к $KY - KC$, или же, что $KE + AK$ относится к CY, как CY к $EK - KB$. Так как в этом же отношении находилось KE к XC, то удвоение даст, что $\overline{KE}^2$ относится к $\overline{CX}^2$, как $KE + AK$ к $KE - KB$.[134] Перемножив крайние и средние, мы получим, что $\overline{KE}^3 - KB \times \overline{KE}^2 = \overline{CX}^2 \times KE + \overline{CX}^2 \times AK$, а подставив прежние значения, найдем, что

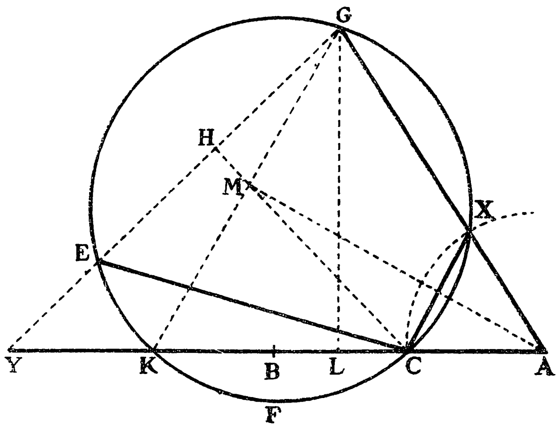
$$x^3 - px^2 = qx + r.$$

Доказательство для второго случая. На основании первой леммы KE относится к CX, как AK к YX; перемножая крайние и средние, найдем, что $KE \times YX = CX \times AK$. Замените в предыдущем случае $CX \times AK$ на $KE \times YX$, тогда $\overline{KE}^3 - KB \times \overline{KE}^2 = \overline{CX}^2 \times KE + CX \times KE \times YX$, и если все поделить на KE, то $\overline{KE}^2 - KB \times KE = \overline{CX}^2 + CX \times YX$. Умножив затем все на AK, вы получите $AK \times \overline{KE}^2 - AK \times KB \times KE = AK \times \overline{CX}^2 + AK \times CX \times YX$. Замените снова $CX \times AK$ на равное ему $KE \times YX$; тогда $AK \times KE^2 - AK \times KB \times KE = EK \times YX \times CX + KE \times \overline{YX}^2$. Разделив все на KE, вы найдете, что $AK \times KE - AK \times KB = YX \times CX + \overline{YX}^2$. Если все умножить на YX, то получится, что $AK \times KE \times YX - AK \times KB \times YX = \overline{YX}^2 \times CX + \overline{YX}^3$. В первом члене я вместо $KE \times YX$ ставлю $CX \times AK$; тогда $CX \times \overline{AK}^2 - AK \times KB \times YX = CX \times \overline{YX}^2 + \overline{YX}^3$, или, что то же самое, $\overline{YX}^3 + CX \times \overline{YX}^2 + AK \times KB \times YX - CX \times \overline{AK}^2 = 0$.

Если вместо YX, CX, AK и KB подставить их значения x, p, $\sqrt{-\frac{r}{p}}$, $q\sqrt{-\frac{p}{r}}$, то получится

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

т. е. уравнение, которое требовалось построить.



Фиг. 93

Эти уравнения можно также решить, проведя через данную точку прямую линию так, чтобы часть ее, заключенная между данными по положению другой прямой и кругом, имела данную длину (фиг. 93).

В самом деле, допустим, что предложено кубическое уравнение

$$x^3 + qx + r = 0,$$

в котором отсутствует второй член.

Проведите произвольную прямую линию KA и обозначьте ее n. На продолженной в обе стороны KA возьмите $KB = \frac{q}{n}$ и отложите ее от K в направлении к A, если q отрицательно, и в противоположную сторону в противном случае.

Разделите BA пополам в C и из центра A опишите радиусом AC круг CX. Впишите в этот круг прямую $CX=\frac{r}{n^2}$ и через точки K, C и X опишите круг $KCXG$. Проведите AX и продолжите ее до пересечения с только что описанным кругом $KCXG$ в точке G. Наконец, впишите между этим кругом $KCXG$ и продолженной в обе стороны прямой KC прямую линию $EY=AC$ так, чтобы при продолжении она прошла через точку G. Линия EC будет одним из корней уравнения. Если r отрицательно, то корни, которые попадут на больший сегмент круга KGC, будут положительными, а корни, которые попадут на меньший сегмент KFC, будут отрицательными; если r будет положительно, то дело будет обстоять наоборот.

Для доказательства этого построения мы предпошлем следующие леммы.

Лемма I

В предположениях построения, CE относится к KA, как $CE+CX$ к AY и как CX к KA.

Действительно, если провести прямую KG, то, в силу подобия треугольников ACX и AKG, AC относится к AK, как CX относится к KG. Треугольники EYC, KGY также подобны, ибо у них есть общий угол при Y, а углы G и C находятся в одном и том же сегменте $EGCK$ круга KGC и, следовательно, равны. Поэтому CE относится к EY, как KG к KY, т. е. CE относится к AC, как KG к KY, ибо EY и AC по предположению равны. Сравнивая это с предыдущей пропорцией, мы, складывая отношения, получаем, что CE относится к KA, как CX к KY, и, alternando, CE относится к CX, как KA к KY. Поэтому, componendo, $CE+CX$ относится к CX, как $KA+KY$ к KY, т. е. как AY к KY, и, alternando, $CE+CX$ относится к AY, как CX к KY, т. е. как CE к KA. Ч. т. д.

Лемма II

Если на прямую линию GY опустить перпендикуляр CH, то прямоугольник $2HE \times EY$ будет равен прямоугольнику $CE \times CX$.

В самом деле, если опустить на линию AY перпендикуляр GL, то треугольники GLK, EHC будут подобны, ибо у них прямые углы при L и H, а углы при K и E находятся в одном и том же сегменте $CKEG$ круга CGK и, следовательно, равны. Значит, KG относится к KL, как EC к EH. Далее, если опустить из точки A на линию KG перпендикуляр AM, то, в силу равенства AK и AG, KG разделится в точке M пополам. Треугольники KAM, KGL, имея общий угол при K и прямые углы при M и L, будут подобны, и, значит, AK относится к KM, как KG к KL. Но AK относится к KM, как $2AK$ к $2KM$, или KG, и (в силу подобия треугольников AKG и ACX) как $2AC$ к CX, а также как $2EY$ к CX (ибо $AC=EY$). Поэтому $2EY$ относится к CX, как KG к KL. Но KG относится к KL, как EC к EH, и, значит, $2EY$ относится к CX, как EC к EH; следовательно (если помножить на самих себя крайние и средние), прямоугольник $2EH \times EY$ равен $EC \times CX$. Ч. т. д.

Мы рассматривали здесь линии AK и AG как равные. Действительно, прямоугольник $CA \times AK$ равен прямоугольнику $AX \times AG$ (по следствию из 36 предл. 3 кн. „Начал“), и поэтому CA относится к AX, как AG к AK. Но XA и CA, по предположению, равны, и, следовательно, $AG=AK$.

Лемма III

Если оставить всё попрежнему, то три линии BY, CE, KA будут в непрерывной пропорции.

В самом деле (согласно 12 предл. 2 кн. „Начал“), $\overline{CY}^2 = \overline{EY}^2 + \overline{CE}^2 + 2EY \times EH$. Если из обеих сторон вычесть $\overline{EY}^2$, то $\overline{CY}^2 - \overline{EY}^2 = \overline{CE}^2 + 2EY \times EH$. Но $2EY \times EH =$

$=CE\times CX$ (лемма II), и если с обеих сторон прибавить по $\overline{CE}^2$, то $\overline{CE}^2+2EY\times EH=\overline{CE}^2+CE\times CX$. Значит, $\overline{CY}^2-\overline{EY}^2=$ $=\overline{CE}^2+CE\times CX$, т. е. $(CY+EY)\times(CY-EY)=\overline{CE}^2+$ $+CE\times CX$.

Разлагая равные прямоугольники на пропорциональные стороны, мы получим, что $CE+CX$ относится к $CY+EY$, как $CY-EY$ к CE. Так как три линии EY, CA и CB равны, то $CY+EY=CY+CA=AY$ и $CY-EY=CY-CB=BY$. Напишите AY вместо $CY+EY$ и BY вместо $CY-EY$; тогда $CE+CX$ относится к YA, как BY к CE. Но (на основании леммы I) CE относится к AK, как $CE+CX$ к AY; поэтому CE относится к KA, как BY к CE, т. е. три линии BY, CE и KA непрерывно пропорциональны. Ч. т. д.

При помощи этих трех лемм мы можем теперь доказать построение предыдущей задачи.

Согласно лемме I, CE относится к KA, как CX к KY, значит, $KA\times CX=CE\times KY$. Если разделить обе стороны на CE, то $\frac{KA\times CX}{CE}=KY$. Прибавьте к этим равным сторонам BK; тогда $BK+\frac{KA\times CX}{CE}=BY$. Значит (согласно лемме III), $BK+\frac{KA\times CX}{CE}$ относится к CE, как CE к KA. Поэтому, если перемножить крайние и средние, то $\overline{CE}^2=\frac{\overline{AK}^2\times CX}{CE}+$ $+AK\times BK$, а если обе стороны умножить на CE, то $\overline{CE}^3=$ $=KB\times KA\times CE+KA^2\times CX$. Корень уравнения x мы называли CE, затем мы имели, что $KA=n$, $KB=\frac{q}{n}$ и $CX=\frac{r}{n^2}$. Если подставить все это вместо CE, KA, KB и CX, то получится

$$x^3=qx+r \qquad \text{или} \qquad x^3-qx-r=0,$$

т. е. уравнение, которое требовалось построить. Когда q и r отрицательны, то KA и KB берутся с одной стороны от точки K и положительный корень находится в большем сегменте CGK. Это и есть один из случаев построения, которое требовалось доказать.

Отложите теперь KB в противоположную сторону, т. е. измените его знак или знак $\frac{q}{n}$, или, что то же самое, знак члена q, и тогда получится построение уравнения

$$x^3 + qx - r = 0.$$

Это — второй случай. В этих случаях CX и положительный корень CE оказываются с одной стороны от линии AK. Если CX и отрицательный корень оказываются с одной стороны при изменении знака CX, или $\frac{r}{n^2}$, или (что то же самое) знака r, то получается третий случай

$$x^3 + qx + r = 0,$$

в котором все корни отрицательные. Если переменить теперь знак KB, или $\frac{q}{n}$, или же только q, то получается четвертый случай

$$x^3 - qx + r = 0.$$

Построения для всех этих случаев можно получить и подробно доказать, пользуясь тем же приемом, что и в первом случае. Доказав один случай, мы считаем достаточным лишь слегка коснуться других. Они доказываются буквально так же, меняется только положение линий.

Допустим теперь, что требуется построить кубическое уравнение

$$x^3 + px^2 + r = 0,$$

в котором отсутствует третий член.

Взяв на той же фигуре n произвольной длины, отложите на неопределенно продолженной прямой AY отрезки $KA = \frac{r}{n^2}$

и $KB = p$, причем с одной стороны от точки K, если знаки членов p и r одинаковые, и с противоположных сторон в противном случае. Разделите BA пополам в C и из центра A радиусом AC опишите круг CX. Впишите в этот круг прямую CX, равную линии n выбранной длины. Проведите AX и продолжите ее до G так, чтобы AG равнялось AK, и через точки K, C, X, G опишите круг. Наконец, между этим кругом и продолженной в обе стороны прямой KC впишите прямую $EY = AC$ так, чтобы при продолжении она могла пройти через точку G. Прямая KY будет одним из корней уравнения. Если r положительно, то корни, оказывающиеся с той же стороны от точки K, что и точка A, являются положительными, если же r отрицательно, то положительные корни оказываются с противоположной стороны. Если положительные корни лежат с одной стороны, то отрицательные лежат с другой стороны.

Это построение доказывается при помощи трех последних лемм следующим образом.

Согласно третьей лемме, BY, CE, KA находятся в непрерывной пропорции, а, согласно лемме I, CE относится к KA, как CX к KY. Поэтому BY относится к CE, как CX к KY. Далее, $BY = KY - KB$, значит, $KY - KB$ относится к CE, как CX к KY. Но, согласно предл. 1 кн. 6 „Начал", $KY - KB$ относится к CE, как $(KY - KB) \times KY$ к $CE \times KY$, а из пропорции CE относится к KA, как CX к KY, следует, что $CE \times KY = KA \times CX$. Поэтому $(KY - KB) \times KY$ относится к $KA \times CX$ (как $KY - KB$ к CE, т. е.), как CX к KY. Если перемножить крайние и средние, то $(KY - KB) \times \overline{KY}^2$ станет $= KA \times \overline{CX}^2$, т. е. $\overline{KY}^3 - KB \times \overline{KY}^2 = AK \times \overline{CX}^2$. Но при построении KY являлось корнем уравнения x, KB было $= p$, $KA = \frac{r}{n^2}$ и $CX = n$. Запишите поэтому вместо KY, KB, KA и CX соответственно x, p, $\frac{r}{n^2}$ и n и вы получите, что

$$x^3 - px^2 = r \qquad \text{или} \qquad x^3 - px^2 - r = 0.$$

Это построение можно расчленить на четыре случая уравнений

$$x^3-px^2-r=0, \qquad x^3-px^2+r=0,$$
$$x^2+px^2-r=0, \qquad x^3+px^2+r=0.$$

Я уже доказал первый случай; остальные доказываются точно так же; нужно лишь изменять положение линий. Именно, подобно тому как, откладывая KA и KB в одну сторону от точки K, а положительный корень KY в противоположную сторону, мы получили уравнение $\overline{KY}^3-KB\times\overline{KY}^2=KA\times\overline{CX}^2$, или

$$x^3-px^2-r=0,$$

подобно этому, откладывая KB в противоположную сторону от K и рассуждая аналогично, мы получим $\overline{KY}^3+$ $+KB\times\overline{KY}^2=KA\times\overline{CX}^2$, или

$$x^3+px^2-r=0.$$

Изменяя в этих двух случаях положение положительного корня KY и беря его с другой стороны от точки K и рассуждая аналогично, вы придете к двум другим случаям, а именно, $\overline{KY}^3+KB\times\overline{KY}^2=-KA\times\overline{CX}^2$, или

$$x^3+px^2+r=0,$$

и $\overline{KY}^3-KB\times\overline{KY}^2=-KA\times\overline{CX}^2$, или

$$x^3-px^2+r=0.$$

А это и будут все случаи, которые требовалось доказать.

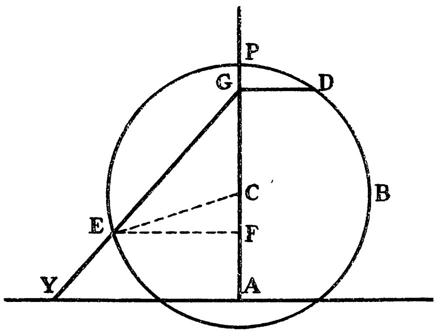
Допустим теперь, что предложено кубическое уравнение

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

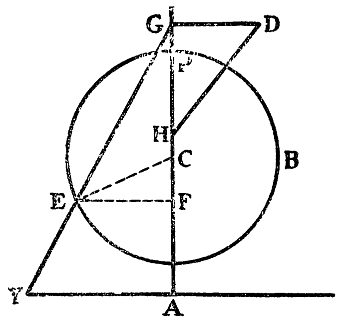
в котором налицо все члены (кроме, может быть, третьего).

Строится оно следующим образом. Возьмите n произвольной длины (фиг. 94). Проведите прямую $GC=\frac{n}{2}$ и в точке

G восстановите перпендикуляр $GD=\sqrt{\frac{r}{p}}$. Затем, если p и r имеют различные знаки, то из центра C опишите радиусом CD круг PBE. Если же p и r имеют одинаковые знаки, то из центра D радиусом, равным GC, опишите мысленно круг [135], который пересечет прямую GA в H (фиг. 95), а затем из центра C радиусом, равным GH, опишите круг PBE. Если величина $-\frac{q}{n}-\frac{r}{np}$ положительная (при правильном соблюдении знаков чисел p; q, r в уравнении, которое тре-



Фиг. 94



Фиг. 95

буется построить), то отложите $GA=-\frac{q}{n}-\frac{r}{np}$ с той же стороны от точки G, что и C; в противном случае отложите GA с другой стороны от точки G. В точке A восстановите перпендикуляр AY и между ним и уже описанным кругом PBE впишите прямую линию EY, равную p, так, чтобы она могла при продолжении пройти через точку G. Если это сделать, то линия EG будет одним из корней уравнения, которое требовалось построить. При положительном p эти корни будут положительными, если точка E окажется между G и Y, и отрицательными, если точка E окажется во-вне; если же p отрицательно, дело будет обстоять наоборот.

Для доказательства этого построения мы предпошлем следующие леммы.

Лемма I

Опустим на AG перпендикуляр EF и проведем прямую EC, тогда $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2=\overline{EC}^2+2GC\times GF$.

В самом деле (по предл. 12 кн. 2 „Начал"), $\overline{EG}^2=\overline{EC}^2+\overline{GC}^2+2GC\times CF$. Прибавим к обеим сторонам по $\overline{GC}^2$, тогда $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2=\overline{EC}^2+2\overline{GC}^2+2GC\times CF$. Но $2\overline{GC}^2+2GC\times CF=2GC\,(GC+CF)$, т. е. $2GC\times GF$. Следовательно, $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2=\overline{EC}^2+2GC\times GF$. Ч. т. д.

Лемма II

В первом случае построения, когда круг PBE проходит через точку D, $\overline{EG}^2-\overline{GD}^2=2GC\times GF$.

В самом деле, согласно первой лемме, $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2=\overline{EC}^2+2GC\times GF$, и если из обеих сторон вычесть по $\overline{GC}^2$, то $\overline{EG}^2=\overline{EC}^2-\overline{GC}^2+2GC\times GF$. Но $\overline{EC}^2-\overline{GC}^2=\overline{CD}^2-\overline{GC}^2=\overline{GD}^2$. Поэтому $\overline{EG}^2=\overline{GD}^2+2GC\times GF$, и если из обеих сторон вычесть $\overline{GD}^2$, то $\overline{EG}^2-\overline{GD}^2=2GC\times GF$. Ч. т. д.

Лемма III

Во втором случае построения, когда круг PBE не проходит через точку D, $\overline{EG}^2+\overline{GD}^2=2GC\times GF$.

В самом деле, согласно первой лемме, $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2=\overline{EC}^2+2GC\times GF$. Вычтя из обеих сторон по $\overline{EC}^2$, вы получите $\overline{EG}^2+\overline{GC}^2-\overline{EC}^2=2GC\times GF$. Но $GC=DH$ и $EC=CP=GH$. Значит, $\overline{GC}^2-\overline{EC}^2=\overline{DH}^2-\overline{GH}^2=\overline{GD}^2$ и, следовательно, $\overline{EG}^2+\overline{GD}^2=2GC\times GF$. Ч. т. д.

Лемма IV

$GY \times 2CG \times GF = 2CG \times AG \times GE$. В самом деле, из подобия треугольников GEF, GYA имеем: GF относится к GE, как AG к GY, т. е. (по предл. 1 кн. 6 „Начал“) как $2CG \times AG$ к $2CG : GY$. Перемножая крайние и средние, мы получим $2CG \times GY \times GF = 2CG \times AG \times GE$. Ч. т. д.

Построение задачи можно доказать при помощи этих лемм следующим образом.

В первом случае $\overline{EG}^2 - \overline{GD}^2 = 2GC \times GF$ (согласно лемме II). Если умножить все на GY, то $\overline{EG}^2 \times GY - \overline{GD}^2 \times GY = 2GC \times GF \times GY =$ (согласно лемме IV) $= 2CG \times AG \times GE$. Напишите $EG + EY$ вместо GY и вы получите, что $\overline{EG}^3 + EY \times \overline{EG}^2 - \overline{GD}^2 \times EG - \overline{GD}^2 \times EY = 2GC \times AG \times EG$, или же $\overline{EG}^3 + EY \times \overline{EG}^2 - (\overline{GD}^2 + 2CG \times AG) \times EG - \overline{GD}^2 \times EY = 0$.

Во втором случае $\overline{EG}^2 + \overline{GD}^2 = 2GC \times GF$ (согласно лемме III). Если умножить все на GY, то $\overline{EG}^2 \times GY + \overline{GD}^2 \times GY = 2CG \times GF \times GY =$ (согласно лемме IV) $= 2CG \times AG \times GE$. Значит, $\overline{EG}^2 \times GY + \overline{GD}^2 \times GY = 2CG \times AG \times GE$. Напишите $GE + EY$ вместо GY и вы получите, что $\overline{EG}^3 + EY \times \overline{EG}^2 + (\overline{GD}^2 - 2GC \times AG) \times EG + \overline{GD}^2 \times EY = 0$.

В первом случае, когда знаки чисел p и r различные, корень уравнения EG был обозначен x и $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2CG = n$ и $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$. Во втором случае, в котором изменяется знак либо p, либо r, $GA = -\frac{q}{n} + \frac{r}{np}$. Положим поэтому $EG = x$, $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY = p$, $2CG = n$ и $GA = -\frac{q}{n} \mp \frac{r}{np}$.

Тогда в первом случае

$$x^3 + px^2 + \left(q + \frac{r}{p} - \frac{r}{p}\right) x - r = 0,$$

т. е.

$$x^3+px^2+qx-r=0,$$

а во втором случае

$$x^3+px^2+\left(\frac{r}{p}+q-\frac{r}{p}\right)x+r=0,$$

т. е.

$$x^3+px^2+qx+r=0.$$

Таким образом, в обоих случаях EG есть настоящее значение корня x. Ч. т. д.

Однако в каждом из обоих случаев можно выделить его частные случаи. Именно, первый случай разделяется на следующие:

$$x^3+px^2+qx-r=0, \qquad x^3+px^2-qx-r=0,$$
$$x^3-px^2+qx+r=0, \qquad x^3-px^2-qx+r=0,$$
$$x^3+px^2-r=0 \quad \text{и} \quad x^3-px^2+r=0;$$

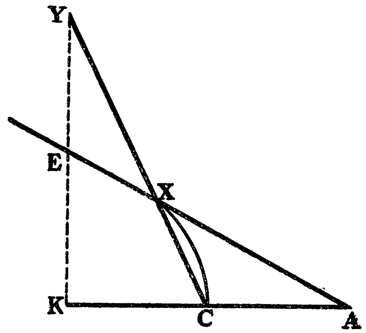
а второй на следующие:

$$x^3+px^2+qx+r=0, \qquad x^3+px^2-qx+r=0,$$
$$x^3-px^2+qx-r=0, \qquad x^3-px^2-qx-r=0,$$
$$x^3+px^2+r=0 \quad \text{и} \quad x^3-px^2-r=0.$$

Доказательство всех этих случаев можно провести в тех же самых выражениях, что и двух уже доказанных, изменяя только положение линий.

Таковы главные построения задач при помощи вписания прямой линии данной длины между данными по положению кругом и прямой, с тем условием, чтобы продолженная вписанная прямая могла пройти через данную точку. Вписать такую прямую можно посредством описания конхоиды древних, для которой точка, через которую должна пройти данная прямая, является полюсом, другая, данная по положению прямая — направляющей, или асимптотой, а длина вставляемой линии — интервалом. В самом деле, эта конхоида пересечет круг в точке E, через которую нужно провести вписываемую прямую. На практике достаточно провести прямую между данными по положению кругом и прямой при помощи какого-либо механического приема.

Заметьте, что в этих построениях величина n — неопределенная и ее можно выбирать произвольно, с тем чтобы удобнее приспособить построение к различным частным задачам. Мы приведем примеры этого при определении двух средних пропорциональных, а также в трисекции угла.



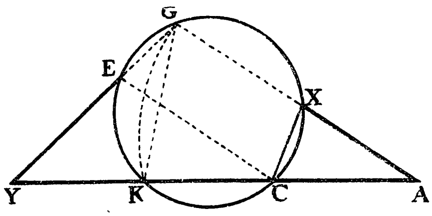
Фиг. 96

Требуется найти две средних пропорциональных x и y между a и b. Так как величины a, x, y, b находятся в непрерывной пропорции, то a^2 относится к x^2, как x к b, и, значит, $x^3 = a^2b$, или $x^3 - a^2b = 0$. В этом уравнении отсутствуют коэффициенты p и q, а вместо r стоит $-a^2b$. Поэтому в первой форме построений, в которой между двумя данными по положению прямыми EX и YC проводится прямая EY, направленная к данной точке K, и принято, что прямая $CX = \frac{r}{n^2}$, т. е. $= \frac{-a^2b}{n^2}$, я полагаю n равным a, и тогда $CX = -b$. Отсюда вытекает следующее построение (фиг. 96).

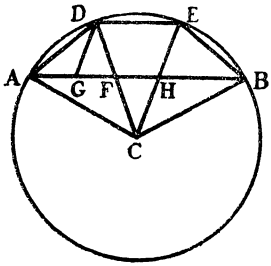
Я провожу прямую $KA = a$, которую делю пополам в C, и из центра K радиусом KC описываю круг XC, в который вписываю прямую $CX = b$. Между неопределенно продолженными прямыми AX и CX я вставляю $EY = CA$, так чтобы при продолжении EY могла пройти через точку K. Линии KA, XY, KE, CX будут непрерывно пропорциональны, т. е. XY и KE будут двумя средними пропорциональными между a и b. Это построение известно.

В другой форме построений, в которой направленная к данной точке G прямая EY вписана между данными по положению кругом $GECX$ и прямой AK и $CX=\frac{r}{n^2}$, т. е. (в настоящей задаче)$=\frac{-a^2b}{n^2}$, я полагаю, как и прежде, $n=a$, что дает $CX=b$. Остальное делается следующим образом (фиг. 97).

Я провожу прямую $KA=a$, делю ее пополам в C и из центра A радиусом AK описываю круг KG, в который вписываю прямую $KG=2b$, причем образуется равнобедренный



Фиг. 97



Фиг. 98

треугольник AKG. Затем я описываю через точки C, K, G круг и между его окружностью и продолженной прямой AK вставляю прямую $EY=CK$, направленную к точке G. Проделав это, мы получим, что AK, EC, KY, $\frac{1}{2}KG$ непрерывно пропорциональны, т. е. EC и KY являются двумя средними пропорциональными между данными величинами a и b.

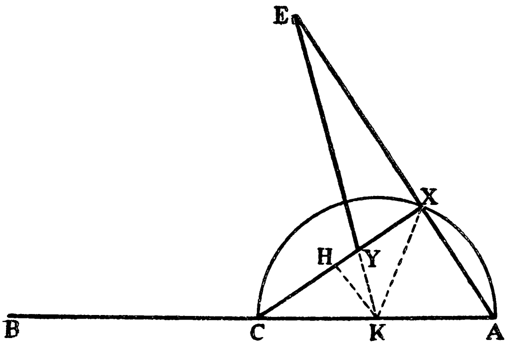
Допустим теперь, что требуется разделить угол на три равные части. Пусть этот угол есть ACB, а его искомые части суть ACD, ECD и ECB (фиг. 98).

Опишем из центра C радиусом CA круг $ADEB$, пересекающий прямые CA, CD, CE, CB в A, D, E, B. Проведите AD, DE, EB и AB, пересекающую прямые CD, CE в F и H. Затем параллельно CE проведите DG, пересекающую AB в G. В силу подобия треугольников CAD, ADF и DFG линии CA, AD, DF и FG будут непрерывно пропорциональны.

Поэтому, если положить $AC=a$ и $AD=x$, то DF будет равно $\frac{x^2}{a}$ и $FG=\frac{x^3}{a^2}$. С другой стороны, $AB=BH+HG+FA-GF=$ $=3AD-GF=3x-\frac{x^3}{a^2}$. Положим $AB=b$, тогда $b=3x-\frac{x^3}{a^2}$, или же

$$x^3-3a^2x+a^2b=0.$$

В этом уравнении отсутствует второй коэффициент p, а вместо q и r мы имеем $-3a^2$ и $+a^2b$. Таким образом, в первой форме построений, в которой p было $=0$, $KA=n$, $KB=\frac{q}{n}$ и $CX=\frac{r}{n^2}$, в случае этой задачи будет $KB=-\frac{3a^2}{n}$ и $CX=\frac{a^2b}{n^2}$.

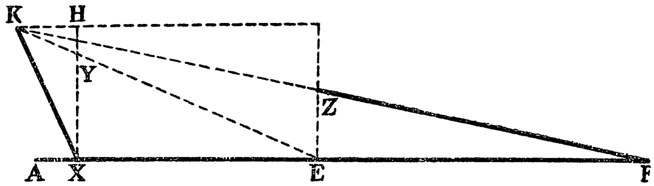


Фиг. 99

Для того чтобы эти величины оказались возможно проще, я полагаю $n=a$, и тогда $KB=-3a$ и $CX=b$. Отсюда вытекает следующее построение задачи.

Проведите линию $KA=a$ и с противоположной стороны возьмите $KB=3a$ (фиг. 99). Разделите BA в C пополам и из центра K радиусом KC опишите круг, а в него впишите прямую $CX=b$. Проведя неопределенно продолженную прямую AX, впишите между нею и CX прямую $EY=AC$ так, чтобы при продолжении она прошла через точку K. Тогда XY будет $=x$. Именно (см. предыдущий чертеж), так как круг $ADEB=$кругу CXA, хорда $AB=$хорде CX, а также равны части хорд BH и XY, то будут равны углы ACB и CKX, а также углы BCH и XKY. Следовательно, угол XKY будет третьей частью угла CKX. Таким образом, мы найдем третью часть XKY какого-либо данного угла CKX, если между неопределенно продолженными хордами CX и AX впишем прямую EY = диаметру круга AC, так чтобы она была направлена к центру круга K.

Отсюда следует, что если из центра круга K опустить на хорду CX перпендикуляр KH, то угол HKY будет третью угла HKX. Поэтому, если дан некоторый угол HKX, то третью часть его HKY можно найти, опустив из какой-либо



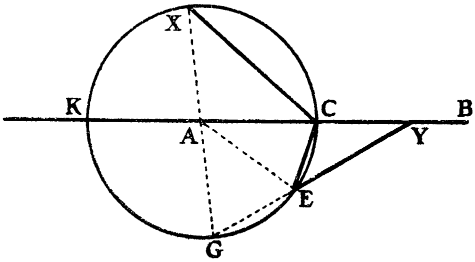
Фиг. 100

точки X одной из сторон KX на другую сторону HK перпендикуляр HX, проведя XE параллельно HK и вписав между XH и XE прямую $EY=2XK$ так, чтобы при продолжении она могла пройти через точку K. Это можно сделать еще следующим образом.

Допустим, что дан угол AXK (фиг. 100). К одной из его сторон, скажем, AX, восстановите перпендикуляр XH и из какой-либо точки K другой стороны XK проведите прямую KE, часть которой EY (лежащая между продолженной стороной AX и перпендикуляром XH) равна удвоенной стороне XK. Угол KEA будет тогда третью данного угла AXK. Если затем восстановить перпендикуляр EZ и провести KF так, чтобы ее часть ZF, лежащая между EF и EZ, была равна удвоенной KE, то угол KFA будет третью угла KEA. Таким образом вы можете продолжать трисекцию некоторого угла без конца. Этот метод содержится в предл. 32 кн. 4 Паппа.

Если вы хотите употребить для трисекции угла другую форму построений, в которой прямая вписывается между другой прямой и кругом, то здесь KB будет $\frac{q}{n}$ и $CX=\frac{r}{n^2}$, т. е., в случае разбираемой сейчас задачи, $KB=\frac{-3a^2}{n}$ и $CX=\frac{a^2b}{n^2}$. Если положить $n=a$, то $KB=-3a$ и $CX=b$. Отсюда вытекает следующее построение.

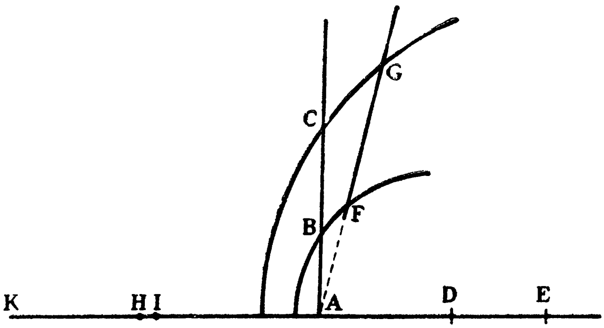
Проведите из точки K в одну сторону две прямые $KA=a$ и $KB=3a$ (фиг. 101). Разделите AB пополам в C и из центра A радиусом AC опишите круг, в который впишите прямую $CX=$ $=b$. Проведите AX и продолжите ее до нового пересечения с кругом в G. Затем между неопределенно продолженной прямой KC и этим кругом впишите прямую $EY=AC$, проходящую через точку G. Если провести прямую EC, то она будет равна искомой величине x, стягивающей треть данного угла KAG.



Фиг. 101

Это построение вытекает из приведенной ранее формы, но лучше получить его следующим образом. Так как круги $ADEB$ и KXG равны и равны хорды CX и AB, то равны углы CAX или KAG и ACB, значит, CE есть хорда третьей части KAG. Таким образом, если дан некоторый угол KAG, то для отыскания его третьей части CAE между кругом KCG и неопределенно продолженной стороной угла KA следует вписать прямую EY, равную полудиаметру AG круга и направленную к точке G. Так учил делить угол на три равные части Архимед (Леммы, 8). Эти построения можно было бы объяснить легче, чем это сделано мною здесь. Я, однако, желал здесь показать, как из уже разъясненных общих построений задач мы можем вывести простейшие построения частных задач.

Кроме указанных построений, мы могли бы привести много других. Например, если вы хотите найти две средние пропорциональные между a и b, то проведите прямую $AK=b$ и перпендикулярно к ней $AB=a$ (фиг. 102). Разделите AK пополам в I и на AK отложите AH, равную расстоянию (subtensa) BI, а на продолженной AB отложите AC, равную расстоянию BH. Затем возьмите на линии AK, по другую сторону от точки A, линию AD произвольной длины и рав-

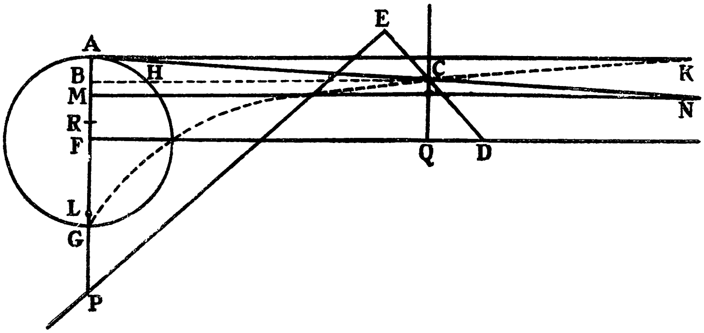


Фиг. 102

ную ей DE. Из центров D и E опишите радиусами DB и EC два круга BF и CG и вставьте между последними прямую FG, равную прямой AI и направленную к точке A. Тогда AF будет первой из двух искомых средних пропорциональных.

Древние учили тому, как находятся две средние пропорциональные при помощи циссоиды; однако, насколько мне известно, никто не дал хорошего способа описания этой кривой от руки. Допустим, что AG есть диаметр и F центр образующего круга циссоиды (фиг. 103). Восстановите в точке F перпендикуляр FD и продолжите его без конца. Продолжите FG до точки P так, чтобы FP была равна диаметру круга. Пусть прямой наугольник PED движется так, чтобы сторона EP всегда проходила через точку P, а конец D

другой стороны ED, равной диаметру AG или FP, всегда двигался по линии FD. В таком случае, как уже было показано, точка C, середина стороны ED, опишет требуемую циссоиду GCK.[136] Поэтому, если требуется найти две средние пропорциональные между двумя величинами a и b, то положите $AM = a$ и восстановите перпендикуляр $MN = b$. Проведите AN и заставьте наугольник PED двигаться, как было только что показано, до тех пор, пока его точка C не



Фиг. 103

попадет на прямую AN. Опустите на AP перпендикуляр CB и возьмите отношения t к BH и v к BG равными отношению MN к BC; так как AB, BH, BG, BC будут непрерывно пропорциональны, то непрерывно пропорциональны будут также a, t, v, b.

Применяя этот наугольник, можно построить и другие телесные задачи.

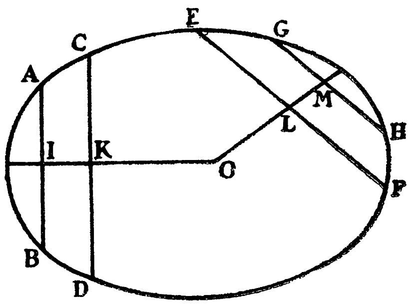
Допустим, например, что предложено кубическое уравнение

$$x^3 \pm px^2 + qx - r = 0,$$

в котором q всегда положительно, r отрицательно, а p может иметь любой знак. Положите $AG = \frac{r}{q}$, разделите ее пополам в F и возьмите FR и $GL = \frac{p}{2}$, причем в сторону к A если у вас будет $+p$, и в сторону к P в противном случае. Далее, восстановите перпендикуляр FD и отложите на нем $FQ = \sqrt{q}$. Восстановите также к FD перпендикуляр QC. На стороне ED наугольника возьмите ED и EC, соответственно равные AG и AR, и приложите сторону наугольника на чертеже так, чтобы точка D попала на прямую FD, а точка C на прямую QC. Если вы дополните параллелограм BQ, то LB и будет искомым корнем уравнения x.

До сих пор я излагал построение телесных задач при помощи средств, механическое применение которых особенно легко и быстро. Так и древние, разработав метод решения этих задач при помощи построения телесных мест, пришли к мысли, что построения при помощи конических сечений бесполезны из-за трудности их описания, и занялись поисками более легких построений посредством конхоиды, циссоиды, натяжения нитей и различных механических приложений фигур, отдавая, как мы узнаем от Паппа, предпочтение полезным, хотя и механическим средствам, а не бесполезным умозрительным спекуляциям в области геометрии. Так, сам великий Архимед пренебрег трисекцией угла при помощи конических сечений, которые применяли до него другие геометры, и в своих „Леммах“ показал, как разделить угол на три части по уже изложенному нами методу. И если уже древние предпочли строить задачи при помощи фигур, в их время не допускавшихся в геометрии, то в еще большей мере следует отдать предпочтение этим фигурам ныне, когда многие допускают их в геометрию, так же как и конические сечения.

Впрочем, я не согласен с той новой категорией геометров, которые включают в геометрию все фигуры. Их правило, согласно которому при построении задач все линии допускаются в порядке возрастания числа измерений определяющих их уравнений, произвольно и лишено геометрического основания. Более того, оно ложно. Ведь, согласно этому правилу, круг следует объединить с коническими сечениями, а между тем все геометры объединяют его с прямой линией. А поскольку правило это неустойчиво, постольку отпадает основание для того, чтобы допускать в геометрию все аналитические линии в известном порядке. Я полагаю, что к плоской геометрии следует относить лишь прямую и круг, по крайней мере, до тех пор, пока не найдут какой-либо способ различать линии, согласно которому прямая и круговая линии могли бы быть объединены вместе и отделены от всех других. Но даже и тогда число линий в настоящей плоской геометрии не увеличилось бы. Ведь плоскими являются все фигуры, допускаемые в плоской геометрии, т. е. те, относительно которых геометры требуют, чтобы они описывались на плоскости. А всякая плоская задача есть та, которую можно построить с помощью плоских фигур. Таким образом, если в плоскую геометрию будут включены конические сечения и другие более сложные фигуры, то все телесные и сверхтелесные задачи, которые можно построить при помощи этих фигур, окажутся плоскими задачами. А ведь все плоские задачи — одинакового порядка. Прямая линия аналитически проще, чем круг, однако задачи, которые строятся с помощью одних прямых, принадлежат тому же порядку, что и задачи, которые строятся при помощи кругов. Если постулировать эти вещи, то круг приводится к тому же порядку, что и прямая. Если постулировать аналогичным образом, что эллипс описывается на плоскости, то он, гораздо меньше отличаясь от круга, чем круг от прямой, еще скорее приведется к тому же порядку, что и круг. Если кто-либо, рассматривая эллипс, встретится с какой-либо телесной задачей и построит ее при помощи этого же эллипса и круга, то задача будет считаться плоской, ибо было предположено, что эллипс описан на плоскости и что для построения нужно лишь еще описать круг. По той же причине и всякая плоская задача может быть построена при помощи данного эллипса. Например, если требуется найти центр O данного эллипса $ADFG$ (фиг. 104), я проведу две параллели AB, CD, пересекающие эллипс в A, B, C, D, затем две другие параллели EF, GH, пересекающие эллипс в E, F, G, H, разделю их пополам в I, K, L, M и проведу IK, LM до их пересечения в O. Это — действительное построение плоской задачи при помощи эллипса. При этом неважно ни то, что эллипс аналитически выражается уравнением двух измерений, ни то, что он геометрически порождается как сечение телесной фигуры. Предположение, согласно которому эллипс рассматривается как уже описанный на плоскости, приводит все телесные задачи, строящиеся при его помощи, к порядку плоских, а также к заключению, что при его помощи справедливо можно строить и все плоские задачи. Таково ведь условие постулата; то, что можно предположить сделанным, дозволяется рассматривать как уже сделанное и данное. Таким образом, если принять тот постулат, что эллипс описан на плоскости, то все задачи, которые можно построить при помощи эллипса, можно будет отнести к порядку плоских и все плоские задачи можно будет строить при помощи эллипса.



Фиг. 104

Таким образом, необходимо либо смешать друг с другом плоские и телесные задачи, либо исключить из плоской геометрии все линии, кроме прямой и круга, если только в условии построения некоторой задачи не задана будет как-либо какая-нибудь другая линия. Несомненно, однако, что никто не допустит смешения порядков задач. Таким образом, из плоской геометрии должны быть исключены конические сечения, а также все прочие фигуры, за исключением прямой, круга, а также тех, которые могут оказаться данными в условиях задач. Таким образом, все эти описания конических сечений на плоскости, которые так нравятся современным геометрам, чужды геометрии. Тем не менее, конические сечения не должны быть исключены из геометрии. В самом деле, хотя они не описываются геометрически на плоскости, но порождаются на плоской поверхности геометрического тела. Конус образуется геометрически и пересекается геометрической плоскостью. Получающийся при этом сегмент конуса есть геометрическая фигура и занимает в телесной геометрии то же место, какое сегмент круга в плоской геометрии; значит, основание этого конического сегмента, называемое коническим сечением, есть геометрическая фигура.

Таким образом, коническое сечение допускается в геометрии постольку, поскольку оно есть поверхность тела; но геометрическим оно является лишь потому, что порождается при пересечении тела, отчего в прежние времена оно и допускалось только в телесной геометрии. Однако такое образование конических сечений трудно и обычно бесполезно для практики, которой особенно должна служить геометрия. Поэтому древние прибегали к различным механическим описаниям фигур на плоскости. По их примеру и мы разработали предыдущие построения. Допустим, что эти построения — механические; тогда механическими являются построения при помощи конических сечений, описанных на плоскости (как это обыкновенно делают теперь). Допустим, что построения при помощи данных конических сечений — геометрические; тогда и построения при помощи всяких других данных фигур являются геометрическими и принадлежат к тому же порядку, что и построения плоских задач. Нет основания предпочесть в геометрии конические сечения другим фигурам, за исключением разве того, что они возникают при сечении конуса; вообще они бесполезны в практике решения задач. Но, для того чтобы не пренебречь полностью построениями при помощи конических сечений, будет уместно сказать кое-что и о них, причем мы рассмотрим также некий удобный способ описания от руки.

Среди конических сечений эллипс является самым простым, наиболее известным и наиболее родственным кругу, и его легче других описать на плоскости от руки. Многие отдают предпочтение перед эллипсом параболе вследствие простоты выражающего ее уравнения. Но в силу того же основания параболу следовало бы предпочесть самому кругу, а этого никогда не делают. Поэтому рассуждение, опирающееся на простоту уравнения, не выдерживает критики. Современные геометры слишком увлекаются умозрительными спекуляциями относительно уравнений. Простота уравнений имеет аналитическое значение. Мы же говорим здесь о синтетическом построении, а законы построения вовсе не диктуются анализом. Анализ приводит к построению, но оно не будет подлинным построением, прежде чем не освободится от анализа. Пока в построении остается хотя бы малейший след анализа, оно еще не есть подлинное построение. Построение само по себе совершенно и свободно от примеси аналитических спекуляций. Простота фигур зависит от простоты их образования и представления. Не уравнение, а (геометрическое или механическое) описание порождает фигуру и делает более легким ее представление. Поэтому мы отведем первое место эллипсу и покажем, как строить уравнения при помощи него. [137]

Допустим, что предложено кубическое уравнение

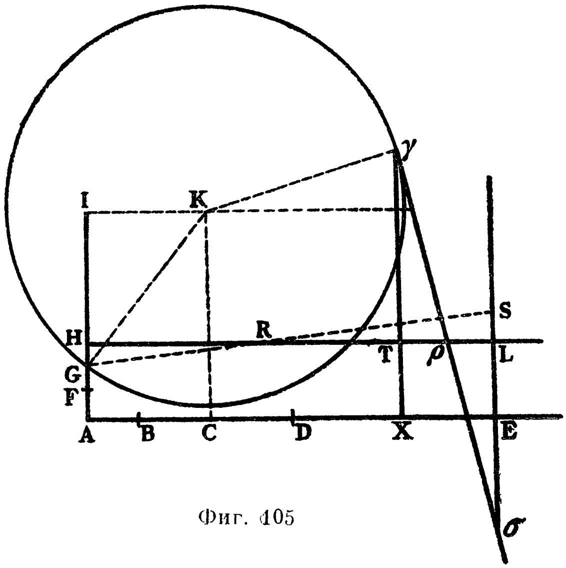
$$x^3 = px^2 + qx + r,$$

в котором p, q, r обозначают данные коэффициенты членов уравнения с их знаками $+$ и $-$, причем могут отсутствовать как один из коэффициентов p и q, так и оба вместе.

Мы получим сейчас построения всех кубических уравнений при помощи следующей единой операции.

Отложите в одну сторону от точки B на какой-нибудь данной прямой какие-либо две прямые BC и BE, а также BD, среднюю пропорциональную между BC и BE (фиг. 105). Обозначьте BC через n и отложите на той же прямой

$BA = \frac{q}{n}$, причем в сторону точки C, если у вас будет $-q$, и в противоположную сторону в противном случае. Восстановите в точке A перпендикуляр AI и отложите на нем $AF = p$, $FG = AF$, $FI = \frac{r}{n^2}$, а также FH, относящуюся к FI, как BC к BE. Если p и r имеют одинаковые знаки, то FH и FI должны быть отложены в одну сторону от точки F, к точке G, а если p и r имеют различные знаки, то —



Фиг. 105

в направлении к точке A. Дополните параллелограмы $IACK$ и $HAEL$ и из центра K опишите радиусом KG круг. На линии HL с той или другой стороны от точки H возьмите линию HR, относящуюся к HL, как BD к BE. Проведите GR, пересекающую EL в S. Пусть линия GRS движется так, что ее точка R постоянно находится на прямой HL, а точка S на прямой EL, пока ее третья точка G, описывая эллипс, не встретит круг, как это видно в положении $\gamma\rho\sigma$. Корнем уравнения будет половина перпендикуляра γX, опущенного на AE из точки встречи γ. Конец G или γ линейки GRS, или $\gamma\rho\sigma$, может встретить круг в таком числе точек, сколько имеется возможных корней. Если r положительно, то корни, расположенные относительно EA с той же стороны, что и линия FI, проведенная от точки F, будут положительными, а те корни, которые расположены относительно EA в противоположную сторону, будут отрицательными; если же r отрицательно, то наоборот.

Это построение доказывается при помощи следующих лемм.

Лемма I

В предположениях построения $2AC \times AX - \overline{AX}^2 = \overline{\gamma X}^2 - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$.

В самом деле, очевидно, что $\overline{K\gamma}^2 - \overline{CX}^2 = (\gamma X - AI)^2$. Но $\overline{K\gamma}^2 = \overline{GI}^2 + \overline{AC}^2$ и $\overline{CX}^2 = (AX - AC)^2$, т. е. $= \overline{AX}^2 - 2\,AX \times AC + \overline{AC}^2$. Значит, их разность есть $\overline{GI}^2 + 2AX \times AC - \overline{AX}^2 = (\gamma X - AI)^2 = \overline{\gamma X}^2 - 2\,AI \times \gamma X + \overline{AI}^2$. Вычтите из обеих сторон по $\overline{GI}^2$, останется $2AC \times AX - \overline{AX}^2 = \overline{\gamma X}^2 - 2AI \times \gamma X + \overline{AI}^2 - \overline{GI}^2$. Но (согласно предл. 4 кн. 2 „Начал") $\overline{AI}^2 = \overline{AG}^2 + 2\,AG \times GI + \overline{GI}^2$ и, следовательно, $\overline{AI}^2 - \overline{GI}^2 = \overline{AG}^2 + 2\,AG \times GI$, т. е. $= 2AG\left(\frac{AG}{2} + GI\right)$, или $= 2AG \times FI$. Поэтому, наконец, $2\,AC \times AX - \overline{AX}^2 = \overline{\gamma X}^2 - 2\,AI \times \gamma X + 2\,AG \times FI$. Ч. т. д.

Лемма II

При прежних построениях $2AE \times AX - \overline{AX}^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{X\gamma}^2 - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$.

Известно, что при указанном выше движении линейки $\gamma\rho\sigma$ точка γ описывает эллипс, центр которого есть L, а две оси совпадают с прямыми LE и LH. Та ось, которая лежит на LE, равна $2\gamma\rho$, или $2GR$, а другая, лежащая на LH, равна $2\gamma\sigma$, или $2GS$. Отношение их между собою будет то же, что линии HR к линии HL, или же линии BD к линии BE. Поэтому поперечная сторона относится к главной прямой стороне, как BE к BC, или как FI к FH. Так как γT есть ордината к HL, то по природе эллипса $\overline{GS}^2 - \overline{LT}^2 = \frac{FI}{FH} \times \overline{T\gamma}^2$. Но $LT = AE - AX$ и $T\gamma = X\gamma - AH$. Подставим квадраты этих величин вместо $\overline{LT}^2$ и $\overline{T\gamma}^2$; тогда $\overline{GS}^2 - \overline{AE}^2 + 2AE \times AX - \overline{AX}^2 = \frac{FI}{FH} \times (\overline{X\gamma}^2 - 2\,AH \times X\gamma + \overline{AH}^2)$. Но $\overline{GS}^2 - \overline{AE}^2 = (GH + LS)^2$, ибо GS есть гипотенуза прямоугольного треугольника, стороны которого равны AE и $GH + LS$. Далее (в силу подобия треугольников RGH и RSL), LS относится к GH, как LR к HR, и, componendo, $GH + LS$ относится к GH, как HL к HR, и, возводя отношения в квадрат, $(GH + LS)^2$ относится к $\overline{GH}^2$, как $\overline{HL}^2$ к $\overline{HR}^2$, т. е. (по построению) как $\overline{BE}^2$ к $\overline{BD}^2$, т. е. как BE к BC, или как FI к FH. Таким образом, $(GH + LS)^2 = \frac{FI}{FH}\overline{GH}^2$. Значит, $\overline{GS}^2 - \overline{AE}^2 = \frac{FI}{FH}\overline{GH}^2$ и $\frac{FI}{FH} \times \overline{GH}^2 + 2\,AE \times AX - \overline{AX}^2 = \frac{FI}{FH} \times (\overline{X\gamma}^2 - 2AH \times X\gamma + \overline{AH}^2)$. Вычтите из обеих сторон по $\frac{FI}{FH} \times \overline{GH}^2$, останется $2\,AE \times AX - \overline{AX}^2 = \frac{FI}{FH}(\overline{X\gamma}^2 - 2\,AH \times X\gamma + \overline{AH}^2 - \overline{GH}^2)$. Но $AH = AG + GH$, значит, $\overline{AH}^2 = \overline{AG}^2 + 2\,AG \times GH + \overline{GH}^2$. Если из обеих сторон вычесть по $\overline{GH}^2$, то в остатке будет $\overline{AH}^2 - \overline{GH}^2 = \overline{AG}^2 + 2AG \times GH$, или $\overline{AH}^2 - \overline{GH}^2 = 2AG \times \left(\frac{AG}{2} + GH\right) = 2AG \times FH$. Таким образом, $2AE \times AX - \overline{AX}^2 = \frac{FI}{FH} \times (\overline{X\gamma}^2 - 2AH \times X\gamma + 2AG \times FH)$, т. е. $= \frac{FI}{FH} \times \overline{X\gamma}^2 - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$. Ч. т. д.

Лемма III

В прежних предположениях AX относится к $X\gamma - AG$, как $X\gamma$ к $2BC$.

В самом деле, если из величин, равных во второй лемме, вычесть величины, равные в первой, то в остатке будет $2CE \times AX = \frac{HI}{FH}\, \overline{X\gamma}^2 - \frac{2FI}{FH}\, AH \times X\gamma + 2AI \times X\gamma$. Если обе стороны умножить на FH, то $2FH \times CE \times AX = HI \times \overline{X\gamma}^2 - 2FI \times \times AH \times X\gamma + 2AI \times FH \times X\gamma$. Но $AI = HI + AH$, значит, $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2FI \times AH - 2FH \times AH - 2FH \times IH$. Далее, $2FI \times AH - 2FH \times AH = 2AH \times HI$ и $2AH \times HI - - 2FH \times HI = 2HI \times AF$. Значит, $2FI \times AH - 2FH \times AI = = 2HI \times AF$ и $2FH \times CE \times AX = HI \times \overline{X\gamma}^2 - 2HI \times AF \times X\gamma$. Таким образом, HI относится к FH, как $2CE \times AX$ к $\overline{X\gamma}^2 - 2AF \times X\gamma$. Но, по построению, HI относится к FH, как CE к BC, и, значит, как $2CE \times AX$ к $2BC \times AX$. Таким образом, $2BC \times AX = \overline{X\gamma}^2 - 2AF \times X\gamma$ (по предл. 9 кн. 5 „Начал"). Но так как прямоугольники равны, то стороны пропорциональны и AX относится к $X\gamma - 2AF$ (т. е. $X\gamma - - AG$), как $X\gamma$ к $2BC$. Ч. т. д.

Лемма IV

Все в тех же предположениях $2FI$ относится к $AX - - 2AB$, как $X\gamma$ к $2BC$.

В самом деле, если из величин, равных в третьей лемме, т. е. $2BC \times AX = \overline{X\gamma}^2 - 2AF \times X\gamma$, вычесть величины, равные в первой лемме, то в остатке будет $-2AB \times AX + \overline{AX}^2 = = 2FI \times X\gamma - 2AG \times FI$, т. е. $AX \times (AX - 2AB) = = 2FI \times (X\gamma - AG)$. Но так как прямоугольники равны, то стороны пропорциональны и $2FI$ относится к $AX - 2AB$, как AX к $X\gamma - AG$, т. е. (согласно третьей лемме), как $X\gamma$ к $2BC$. Ч. т. д.

Наконец, построение задачи доказывается при помощи этих лемм следующим образом.

По четвертой лемме, $X\gamma$ относится к $2BC$, как $2FI$ к $AX - 2AB$, т. е. (по предл. 1 кн. 6 „Начал") как $2BC \times 2FI$ к $2BC \times (AX - 2AB)$, или к $2BC \times AX - 2BC \times 2AB$. Но, по третьей лемме, AX относится к $X\gamma - 2AF$, как $X\gamma$ к $2BC$, или же $2BC \times AX = \overline{X\gamma}^2 - 2AF \times X\gamma$, и, значит, $X\gamma$ относится к $2BC$, как $2BC \times 2FI$ к $\overline{X\gamma}^2 - 2AF \times X\gamma - 2BC \times 2AB$. Если перемножить крайние и средние, то $\overline{X\gamma}^3 - 2AF \times \overline{X\gamma}^2 - 4BC \times AB \times X\gamma = 8\overline{BC}^2 \times FI$. Если к обеим сторонам прибавить по $2AF \times \overline{X\gamma}^2 + 4BC \times AB \times X\gamma$, то $\overline{X\gamma}^3 = 2AF \times \overline{X\gamma}^2 + 4BC \times AB \times X\gamma + 8\overline{BC}^2 \times FI$. Но в построении, которое требуется доказать, $\frac{1}{2}X\gamma$ была равна корню уравнения x, $AF = p$, $BC = n$, $AB = \frac{q}{n}$ и $FI = \frac{r}{n^2}$. Таким образом, $BC \times AB = q$ и $\overline{BC}^2 \times FI = r$. Если подставить все это, то получится, что

$$x^3 = px^2 + qx + r.$$

Ч. т. д.

Следствие. Если положить линии AF и AB равными нулю, то, по третьей и четвертой леммам, $2FI$ будет относиться к AX, как AX к $X\gamma$ и как $X\gamma$ к $2BC$. Из этого вытекает способ отыскания двух средних пропорциональных между какими-либо двумя данными величинами FI и BC.

Поучение. Я изложил пока только метод построения кубического уравнения при помощи эллипса, но правило это более общего характера и распространяется на все конические сечения без различия. В самом деле, если вы желаете вместо эллипса применить гиперболу, то отложите линии BC и BE в разные стороны от точки B. Точки A, F, G, H, I, K, L и R определяются попрежнему, с тем лишь отличием, что линия FH должна быть отложена от F в сторону, противоположную I, что HR следует отложить не на HL, а по обе стороны от точки H на линии AI, и что вместо прямой

GRS следует провести две другие прямые, идущие от точки L к двум точкам R, R и служащие асимптотами гиперболы. Опишите гиперболу, проходящую через точку G и имеющую асимптоты LR, LR, и из центра K опишите радиусом KG круг. Половины перпендикуляров, опущенных из точек пересечения гиперболы с кругом на прямую AE, будут корнями предложенного уравнения. Все это доказывается, как и раньше, если только надлежащим образом изменять знаки $+$ и $-$.

Если же вы станете применять параболу, то точка E удалится на бесконечное расстояние и, таким образом, ее брать не нужно, а точка H совпадет с точкой F. При этом через точки G и A нужно будет описать параболу с осью HL и главной прямой стороной BC; вершина ее будет находиться относительно точки F с той же стороны, с какой точка B расположена относительно точки C.

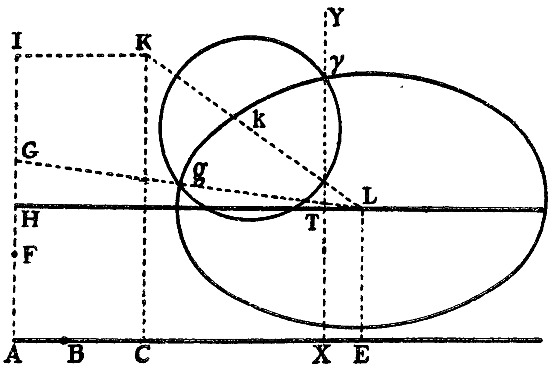
С точки зрения аналитической простоты построения при помощи параболы — простейшие из всех. За ними следуют построения при помощи гиперболы, а построения при помощи эллипса занимают третье место. Но если при описании фигур считаться с простотой их вычерчивания, то этот порядок нужно изменить.

Относительно этих построений следует заметить, что вид эллипса и гиперболы определяется отношением главной прямой стороны к поперечной стороне, а это отношение есть отношение линий BC и BE, и поэтому его можно считать известным. Но у параболы имеется только один вид: парабола получается, если взять BE бесконечной длины. Таким образом, всякое кубическое уравнение можно построить при помощи конического сечения любого данного вида. А для того чтобы преобразовать фигуры, данные по виду, в фигуры, данные по величине, нужно увеличить или уменьшить в данном отношении все линии, при помощи которых фигуры задаются по виду.[138] Таким образом, мы можем построить все кубические уравнения при помощи любого данного конического сечения. Более подробно это можно объяснить следующим образом.

Требуется построить какое-либо кубическое уравнение

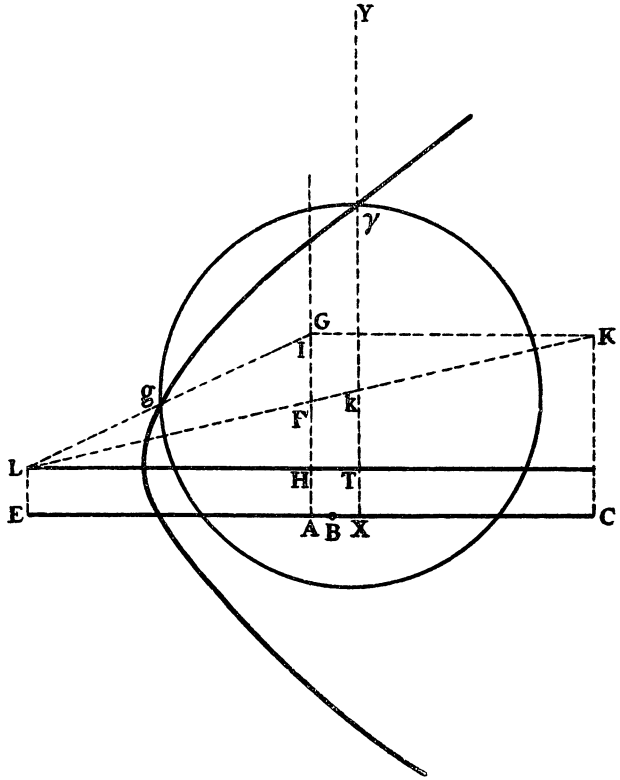
$$x^3 = px^2 \pm qx \pm r$$

при помощи некоторого данного конического сечения (фиг. 106, 107).



Фиг. 106

Из какой-либо точки B на бесконечной прямой BCE отложите две длины BC и BE, причем в одну сторону, если коническое сечение есть эллипс, и в противоположные стороны, если оно есть гипербола. Отношение BC к BE возьмите равным отношению главной прямой стороны данного сечения к его поперечной стороне. Обозначьте BC через n и отложите $BA = \frac{q}{n}$ в сторону C, если q отрицательно, и в противоположную сторону, если оно положительно. Восстановите в точке A перпендикуляр AI, на котором возьмите $AF = p$, $FG = AF$ и $FI = \frac{r}{n^2}$. Если p и r имеют одинаковые знаки, то отложите FI в сторону G, а если они имеют различные знаки, то в сторону A. Затем возьмите FH, относящуюся к FI, как BC к BE, и если сечение есть эллипс, то отложите FH от точки F в сторону к I, а если оно есть гипербола, то в противоположную сторону. Дополните па-



Фиг. 107

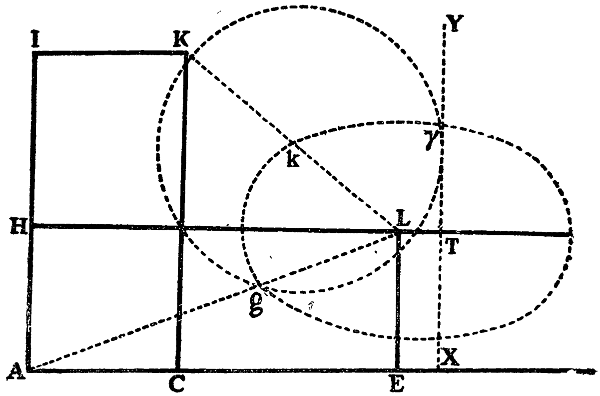
раллелограмы $IACK$, $HAEL$ и перенесите все эти уже описанные линии на данное коническое сечение, или, что то же самое, опишите около них коническое сечение, с тем чтобы его ось, или главный поперечный диаметр, совпала с прямой LH и его центр попал в точку L. Сделав все это, проведите прямую KL, а также GL, пересекающую коническое сечение в g. Затем на LK отложите Lk, относящуюся к LK, как Lg к LG, и из центра k опишите радиусом kg круг. Из точек, в которых круг пересекает данную кривую, опустите на линию LH перпендикуляры, одним из которых пусть будет γT. Наконец, в сторону γ отложите TY, относящуюся к $T\gamma$, как LG к Lg. При продолжении TY пересечет AB в точке X. Тогда $\frac{1}{2}XY$ будет одним из корней данного уравнения. При положительном r корни, лежащие относительно BA с той же стороны, с какой FI расположена относительно F, будут положительными, а корни, лежащие с другой стороны, будут отрицательными; при r отрицательном дело будет обстоять наоборот.

Так строят кубические уравнения при помощи данных эллипсов и гипербол. Если же дана парабола, то линию BC нужно взять равной ее прямой стороне. Затем, найдя, как выше, точки A, F, G, I и K, нужно из центра K описать радиусом KG круг и так приложить параболу к уже сделанному чертежу (или чертеж к параболе), чтобы она прошла через точки A и G, ее ось прошла через точку F параллельно AC и чтобы вершина ее оказалась с той же стороны относительно F, с какой B расположена относительно C. Если, сделав это, опустить из точек пересечения параболы с кругом перпендикуляры на линию BC, то половины этих перпендикуляров будут равны корням уравнения, которые требовалось построить.

Заметьте, что когда отсутствует второй член уравнения и поэтому прямая сторона параболы есть число 2, наше построение совпадает с тем, которое дал в своей „Геометрии“ Декарт, только с тем отличием, что здесь все линии вдвое больше, чем у него.[139]

Таково общее правило построений. Но когда ставятся частные задачи, мы должны стараться найти наиболее простые формы построений. Дело в том, что остается неопределенной величина n, подходящий выбор которой позволяет по большей части упростить уравнение. Я приведу один пример.

Допустим, что дан эллипс и что требуется найти две средние пропорциональные между данными линиями a и b. Положим, что первая из них есть x. Тогда непрерывно пропорциональными будут $a, x, \frac{x^2}{a}, b$, и уравнение, которое нужно построить, есть $ab=\frac{x^3}{a}$, или $x^3=a^2b$. Здесь отсутствуют члены p и q, а член $r=a^2b$. Таким образом, BA и AF равны нулю и $FI=\frac{a^2b}{n^2}$. Чтобы возможно упростить последний член, положим $n=a$, тогда $FI=b$. Построение в этом случае будет таково.



Фиг. 108

От какой-либо точки A отложите на бесконечной прямой AE линию $AC=a$ (фиг. 108). С той же стороны от точки A возьмите AE так, чтобы отношение AC к AE было равно отношению главной прямой стороны эллипса к поперечной стороне. На перпендикуляре AI возьмите $AI=b$ и AH, относящуюся к AI, как AC к AE. Дополните параллелограмы $IACK$, $HAEL$.

и проведите LA и LK. Приложите к этому чертежу данный эллипс, и он пересечет прямую AL в точке g. Возьмите отношение Lk к LK равным Lg к LA. Из центра k опишите радиусом kg круг, который пересечет эллипс в γ. Опустите на AE перпендикуляр γX, который пересечет HL в T, и продолжите его до Y так, чтобы TY относилась к $T\gamma$, как LA к Lg. Тогда $\frac{1}{2}XY$ будет равна x, первой из двух средних пропорциональных. Ч. т. с.[140]

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПОСЛЕСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

„Всеобщая арифметика“ Ньютона издана была впервые в 1707 г. по авторской записи его лекций, читанных в Кембридже в 1673—1683 гг., а затем неоднократно переиздавалась с различными комментариями и дополнениями других авторов. Настоящий перевод выполнен с издания 1732 г. и сверен с английским переводом в издании 1728 г. Английский перевод, сделанный известным математиком Рефсоном еще при жизни Ньютона, помог мне облегчить язык русского перевода; в ряде случаев я ввел в русский перевод отдельные обороты английского издания, уточняющие смысл оригинального текста.

Чертежи [1] взяты из издания Кастильона 1761 г., но в настоящем переводе они помещены в соответствующих местах текста, а не сгруппированы в таблицах, как в старинных изданиях.

Обозначения Ньютона хотя и незначительно, но все же отличались от нынешних. Для удобства советских читателей почти все формулы записаны в символах нашего времени, а отклонения от оригинала оговорены в примечаниях. От этого правила пришлось отступить лишь в нескольких случаях, в которых применение современных нам записей потребовало бы нарушения текста Ньютона. Кроме того, опять-таки для облегчения чтения книги, значительная часть математических выражений набрана отдельной строкой,— в изданиях XVIII в. формулы и уравнения обыкновенно так не выделялись. Наконец, нужно отметить, что в некоторых позднейших изданиях текст Ньютона был дополнительно разбит на главы и параграфы. Я такой разбивки не производил.

---

[1] Кроме №№ 17 и 86, имеющихся в некоторых других изданиях.

Начиная с У. Уистона, подготовившего к печати первое издание алгебраических лекций Ньютона, каждый ее издатель снабжал книгу предисловием. Эти предисловия не представляют ни математического, ни сколько-нибудь значительного исторического интереса и в русском переводе опущены. Точно так же не включены в русское издание различные дополнения и комментарии. Занимая скромное место в первом издании, к которому Уистон приложил только восполнявшую некоторую неполноту труда Ньютона статью Э. Галлея о численном решении уравнений, эти дополнения в позднейших изданиях „Всеобщей арифметики“ чрезвычайно разрослись. Читатель может судить об этом хотя бы по описанию содержания издания Кастильона, приведенному ниже. Весь этот дополнительный материал, имевший большую ценность для лиц, изучавших в XVIII в. алгебру по книге Ньютона, по своему научному значению совершенно не сравним с основным текстом „Всеобщей арифметики“. Краткие сведения о нем приведены в примечаниях и статье переводчика.

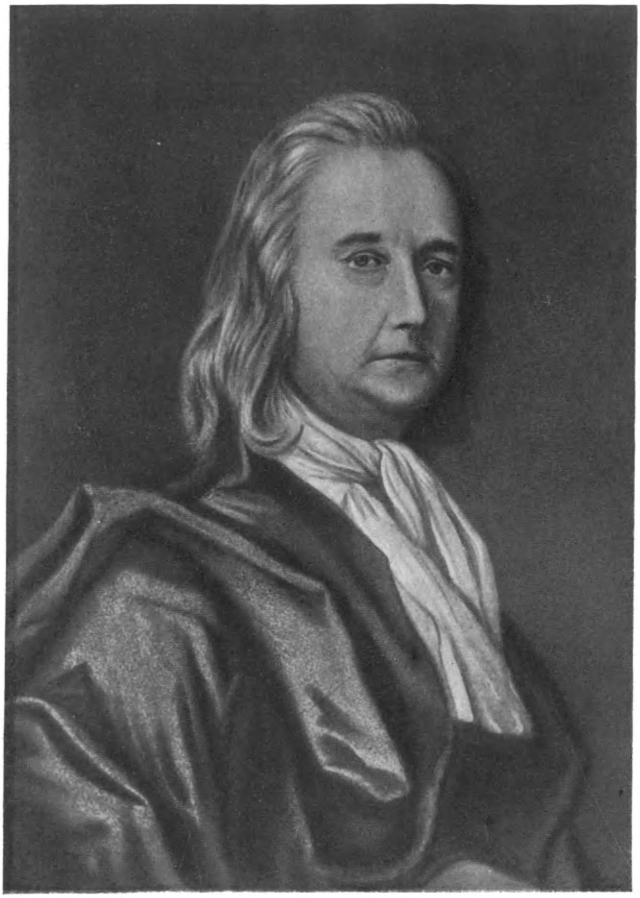
Примечания переводчика, помещенные в конце книги, имеют главной целью ознакомить читателя с историей развития того или иного понятия, метода или теоремы и отделить результаты, принадлежавшие Ньютону, от достижений его предшественников, а вместе с тем наметить вехи последующего их развития. Опущенные Ньютоном выводы теорем не приводятся, в противном случае примечания разрослись бы до размеров отдельного тома и превратились бы в руководство по алгебре. Вместо этого сделаны ссылки на соответствующую литературу. Общая характеристика и оценка „Всеобщей арифметики“ даны в статье переводчика, приложенной далее.

Ниже приведен список латинских изданий „Всеобщей арифметики“ и ее английских и французского переводов.

1) Arithmetica universalis, sive de compositione et resolutione arithmetica liber. Cui accessit Halleiana aequationum radices arithmetice inveniendi methodus. In usum juventutis Academiae. — Cantabrigiae, 1707. 8vo. Это — издание У. Уистона.

2) То же. Editio secunda, in qua multa immutantur et emendantur, nonnulla adduntur. Londini, 1722. 8vo. Издание это подготовил под наблюдением Ньютона Мэчин.

3) То же. Lugduni Batavorum, 1732. 4to. Издатель, В. с'Гравезанд снабдил текст Ньютона примечаниями и при-



ИСААК НЬЮТОН (1706 г.)
Портрет работы Вильяма Ганди (младшего)

ложил ряд статей по алгебре, большей частью из Philosophical Transactions: E. Halley. Methodus nova accurata et facilis inveniendi radices aequationum quarumcunque generaliter sine praevia reductione; Его же. De constructione problematum solidorum sive aequationum tertiae vel quartae potestatis, unica data parabola ac circulo efficienda, dissertatiuncula; Его же. De numero radicum in aequationibus solidis ac biquadraticis, sive tertiae ac quartae potestatis, earumque limitibus, tractatulus; J. Colson. Aequationum cubicarum et biquadraticum tum geometrica et mechanica resolutio universalis; A. De-Moivre. Aequationum quarundam potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, et superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro cubicis, quae vocantur Cardani, resolutio analytica; C. Mac-Laurin. Epistola de aequationibus in quibus dantur radices impossibiles; Его же. Epistola secunda; G. Campbell. Methodus determinandi numerum radicum impossibilium in aequationibus affectis.

4) Arithmetica universalis... perpetuis commentariis illustrata et aucta a J. A. Lecchi. Mediolanensi, 1732. 8vo.

5) Arithmetica universalis... Cum commentario Johannis Castillionei. 2 тома. Amstelodami, 1761. 4to. Кастильон снабдил это издание многочисленными примечаниями и пояснениями. Во II томе, кроме статей, приложенных в издании с'Гравезанда, добавлены еще: G. F. Baermann. Demonstratio theorematis de potentiis radicum; A. G. Kaestner. Demonstratio theorematis Harriotti (т. е. правила знаков Декарта); R. J. Boscovich. Observatio in problema LVI.

6) Arithmetica universalis summi Newtoni, contracta, illustrata et locupletata; praeeunte logica analytica a Godef. Ant. Décoré. Lugduni Batavorum, 1761. 8vo.

7) Isaaci Newtoni Opera quae exstant omnia. Commentariis illustravit Samuel Horsley. 5 томов. Londini, 1779—1785. 4to; „Всеобщая арифметика“ помещена в первом томе этого издания.

8) Universal arithmetick: or, a treatise of arithmetical composition and resolution. To which is added Dr. Halley's Method of finding the roots of equations arithmetically. Written in latin by sir Isaac Newton, and translated by the late Mr. Ralphson, and revised and corrected by Mr. Cunn. London, 1720. 8vo.

9) То же. The second edition, very much corrected. Lon-

don, 1728. 8vo. Этот перевод исправлен в соответствии с исправленным латинским изданием 1722 г.

10) Universal arithmetick и т. д., to which is added a treatise upon the measures of ratios by James Maguire. The whole illustrated and explained in a series of notes by Theaker Wilder. London, 1769. 8vo.

Это—третье издание перевода Рефсона. Издатель, преподаватель Дублинского университета Уильдер, заменил статью Галлея посвященными приближенному вычислению корней уравнений разделами „Алгебры“ Маклорена. В статье Мегира (также преподавателя университета в Дублине) изложено было учение о логарифмах.

11) Arithmétique universelle de Newton, traduite avec des notes explicatives par N. Beaudeux. 2 тома. Paris, An X.— 1802. 4to.

Издания пп. 1, 2, 4, 6, 8 мне были недоступны. Они указаны по книге George J. Gray. A bibliography of the works of sir Isaac Newton. Cambridge, 1907.

А. П. ЮШКЕВИЧ

О „ВСЕОБЩЕЙ АРИФМЕТИКЕ“ И. НЬЮТОНА

I

Среди трудов Исаака Ньютона „Всеобщая арифметика“ пользуется сравнительно меньшей известностью. Немеркнущую мировую славу великому геометру принесли прежде всего его „Математические начала натуральной философии“ и „Оптика“, а затем созданное им параллельно с Лейбницем исчисление бесконечно малых. Между тем лекции Ньютона по алгебре, изданные в 1707 г. под названием „Arithmetica universalis“, до сих пор заслуживают пристального внимания и историков науки и широких кругов читателей, особенно педагогов, заслуживают не только потому, что читаны были они Ньютоном, но и в силу той исключительно крупной роли, которую они сыграли в развитии алгебры как науки и как предмета школьного преподавания.

Чтобы правильно оценить историческое место „Всеобщей арифметики“, необходимо несколько осветить непосредственно предшествовавшие им труды по алгебре, традицию которых Ньютон во многом продолжил, но во многом и преодолел, сообщив новое направление дальнейшим исследованиям.

Алгебра — одна из древнейших математических наук. Решением квадратных уравнений и простейших задач, приводящихся к неполным кубическим уравнениям, занимались еще ученые древнего Вавилона за две тысячи лет до н. э.

Мы не будем, однако, задерживаться на ряде важных этапов истории алгебры древности и средних веков: на „геометрической алгебре“ эпохи расцвета античной науки, на зачатках символической алгебры Диофанта, на блестящих построениях корней кубических уравнений арабоязычных математиков, на первых шагах средневековых европейских алгебраистов. Мы несколько остановимся лишь на краткой характеристике успехов алгебры в XVI в., в котором математические исследования с особенной силой устремились как раз на совершенствование алгебраических методов.

Самое начало XVI в. отмечено было открытием Сципионом дель-Ферро числового решения кубического уравнения типа $x^3+px=q$. Решение это было вновь найдено в 1535 г. Николаем Тарталья, который одновременно нашел и правила решения уравнений $x^3+q=px$ и $x^3=px+q$. Правила Тарталья были опубликованы в 1545 г. Джироламо Кардано вместе с найденным самим Кардано приемом приведения полного кубического уравнения к уравнению, не содержащему члена второй степени, а также с решением уравнения четвертой степени, найденным Лодовико Феррари. Было бы трудно переоценить значение этих фундаментальных открытий: и огромное впечатление, которое они произвели на современных им ученых, внушив им уверенность в необычайной мощи алгебраических методов, и важность ряда связанных с ними проблем, например, „неприводимого случая“ кубического уравнения, в котором заведомо действительный корень выражается через квадратные корни из отрицательных чисел.

Другим существенным фактором развития алгебры явилось открытие математиками XV и XVI вв. обобщения действия возведения в степень на случай дробных и отрицательных показателей. И теория уравнений, и это обобщение, и изучение прогрессий содействовали расширению понятия о числе, введению чисел отрицательных и мнимых. Наконец, немалые успехи достигнуты были в построении алгебраической символики. Частью путем сокращения научных терминов, частью путем изобретения специальных знаков в алгебру введено было большое количество конкурировавших между собой символов ряда действий, равенства, нескольких первых (целых и положительных) степеней неизвестной величины.

В результате всех этих достижений, как правильно заметил в свое время И. Ю. Тимченко, „у ученых XVI в., внимательно изучавших сочинения древних, сложилось твердое убеждение в том, что должна существовать общая, не известная еще наука, обнимающая и остроумные измышления новейших алгебраистов и глубокие геометрические изыскания древности“.[1] Первый опыт построения такой науки, соединяющей эффективность алгебраических методов со строгостью античной геометрии, предпринял на рубеже XVI и XVII вв. Франсуа Виет. Целью Виета было создание аналитического искусства, которое позволило бы „хорошо производить математические открытия“, фактически главным образом решать задачи геометрии. Принципиальной заслугой Виета явилось при этом первое построение алгорифма алгебры как науки об общих величинах. Слабость анализа древних он усматривал в том, что они употребляли лишь конкретные числа. Новая, „гораздо более счастливая и могучая“ алгебра изучает общие величины. Когда величины выражены числами, они составляют предмет „числовой логистики“. Но числовая логистика подчиняется „видовой“, символической логистике, или алгебре. Предметом logisticae speciosae являются геометрические, а также псевдогеометрические величины — скаляры, образующие восходящую шкалу — лестницу. Эти ступеньки-скаляры суть сторона, квадрат, куб, квадрато-квадрат, квадрато-куб и т. д., и им соответствует лестница родов: длина или ширина, площадь, объем, площаде-площадь, площадь-объем и т. д. Операции над скалярами, родственные, но отнюдь не тождественные с число-

[1] Фл. Кэджори, „История элементарной математики“. Пер. под ред., с примеч. и добавл. И. Ю. Тимченко. Одесса, 1917, стр. 390—391.

выми действиями, бывают четырех родов. Из них сложение и вычитание обязательно подчиняются „закону однородности“, который дозволяет складывать, вычитать и приравнивать лишь величины одного рода. Умножению чисел соответствует проведение величины B к величине A (ductio B in A), порождающее величину нового рода, размерность которой как бы есть сумма размерностей B и A; так, провести ширину к длине значит образовать из них прямоугольник. Приложение A к B (applicatio A ad B), соответствующее делению чисел, означает образование величины с размерностью, равной разности размерностей A и B.

Чтобы сообщить операциям видовой логистики желательную общность, Виет ввел новую символику для скаляров, предложив представлять их при помощи „видов или форм вещей, например элементов алфавита“ (per species seu rerum formas, ut pote per alphabetica elementa). В этом отношении, правда, у него были некоторые предшественники. Но, во-первых, никто из них не подчеркнул с такой принципиальностью роли этой символики и, во-вторых, не применил буквенного обозначения для величин, принятых за данные. Виет систематически различил символы для величин неизвестных и данных. „Данные величины, — писал он, — должны отличаться от искомых неизвестных тем, что неизвестные величины будут обозначены буквой A или другой гласной E, I, O, а данные — буквами B, D или другими согласными“. Введение буквенных коэффициентов положило начало развитию оперативного механизма алгебраических преобразований.

Кроме этих, весьма общих и именно благодаря своей общности богатых последствиями идей Виету принадлежал и ряд важных частных открытий в алгебре. В несколько более сложной, чем нынешняя, форме он установил зависимости между корнями и коэффициентами уравнения,[1] показал, как

[1] Эта сложность связана была с тем, что Виет признавал только положительные корни уравнений.

строить уравнения, корни которых так или иначе зависят от корней заданного уравнения (отличаются от них на данное слагаемое или множитель или обратны по отношению к ним), дал тригонометрическое решение кубического уравнения в неприводимом случае и т. д. Вместе с тем, тесно примкнув к античной геометрической традиции, Виет весьма ограничил возможности своего аналитического искусства. В его шкале не нашли места дробные степени; принцип однородности требовал введения вспомогательных множителей, отягощавших весь аппарат формул; Виет не признавал не только мнимых, но и отрицательных чисел; его символика обозначений степеней была неудобна для распространения ни на высшие, ни на дробные и отрицательные степени и т. д. Несмотря на глубину его теории лестницы величин (в некотором смысле ее идеи нашли своеобразное продолжение, например, в алгебре векторов), между видовой и числовой логистиками существовал глубокий разрыв. Сильно геометризованная еще общая алгебра отставала от задач, стоявших перед числовой алгеброй. Новая радикальная реформа алгебры выпала на долю Рене Декарта.[1]

II

Открытия Декарта, сделанные в 1619—1630 гг., были изложены в его знаменитой „Геометрии", опубликованной в 1637 г. в качестве третьего приложения к философскому трактату „Рассуждение о методе". Общие методологические и математические идеи Декарта развивались в тесной взаимосвязи. Математика должна была стать универсальным приемом изучения материального мира, его пространственных форм и наблюдаемых в нем движений. „Должна, — писал Декарт, — существовать некая общая наука, объясняющая все,

[1] О Виете см. M. Marie. Histoire des sciences mathématiques et physiques. Paris, 1884, т. III, стр. 6—19, 27—65.

относящееся к порядку и мере, не входя в исследование никаких частных предметов, и эта наука должна называться... старым, уже вошедшим в употребление именем всеобщей математики (mathesis universalis), ибо она содержит в себе все то, благодаря чему другие науки называются частями математики". [1]

Основным предметом всеобщей математики должны были служить отвлеченные отношения величин и пропорции, равенства этих отношений; поэтому было необходимо разработать общий прием изучения отношений. Вместе с тем, поскольку исследование пространственных форм и движения опирается на геометрию, необходимо было реформировать и самую геометрию, синтетические приемы которой не обладали требуемой универсальностью и единством. Такой общий прием Декарт усмотрел в алгебре и поэтому непосредственной целью его явились преобразование алгебры в универсальную математику и алгебраизация методов геометрии.

В качестве простейшего элемента новой алгебры, который позволил бы выражать величины и их взаимоотношения, Декарт выбрал отрезок и обозначающую его символически букву. „Приняв во внимание, — говорил он, — что для лучшего познания их (отношений) мне потребуется иногда рассматривать эти пропорции каждую в отдельности, а иногда только удержать их в памяти или обнять многие разом, я полагал, что для лучшего рассмотрения в частностях должен их предполагать в линиях, так как не находил ничего более простого и ясного, что мог бы более отчетливо представить моему воображению и моим чувствам. А чтобы удержать и обнять многие разом, требовалось, чтобы я изъяснил их возможно кратчайшими знаками; и таким образом я позаимствовал лучшее и из геометрического анализа и из алгебры и исправлял все недостатки одного при помощи другого". [2]

---

[1] Р. Декарт. „Правила для руководства ума". М., 1936, стр. 64—65.

[2] Descartes. Oeuvres. Publiées par Ch. Adam et P. Tannery. Paris, 1897—1910, т. VI, стр. 20.

В результате алгебра Декарта оказалась линейной алгеброй, исчислением отрезков. Вместе с тем положено было начало арифметизации геометрии.

Свою „Геометрию" Декарт начинает с замечания, что все задачи геометрии легко приводятся к такому виду, что для их построения требуется лишь знать длины некоторых прямых отрезков, и после этого разъясняет, как арифметическое исчисление относится к геометрическим построениям: „Подобно тому, как вся арифметика состоит только в четырех или пяти действиях, именно в сложении, вычитании, умножении, делении и извлечении корней . . . , подобно этому в геометрии, чтобы подготовить искомые линии к определению, нужно только прибавить к этим линиям или отнять от них другие; или же нужно, имея линию, которую я, дабы удобнее установить более тесную связь с числами, назову единицей и которая обыкновенно может быть выбрана произвольно, и имея еще две другие линии, — найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как другая к единице, а это то же самое, что умножение; или же найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как единица к другой, а это то же самое, что деление; или, наконец, найти одну или же две, или несколько средних пропорциональных между единицей и какой-либо другой линией, а это то же самое, что извлечь квадратный или же кубический и т. д. корень. С целью быть более понятным, я без опасений введу эти арифметические термины в геометрию".[1] Слабость античных математиков Декарт видел именно в их опасении применять в геометрии арифметические термины. Изложенная идея имеет принципиальное значение в математике Декарта. С одной стороны, здесь перебрасывался мост между алгеброй и геометрией. С другой стороны, самый фундамент всеобщей математики оставался еще геометрическим: основные операции ее сводились к

[1] Р. Декарт, „Геометрия". М., 1938, стр. 12—13.

сложениям или вычислениям отрезков и к построению различных пропорциональных отрезков, т. е. к античной теории отношений, подробно изложенной в V книге „Начал“ Эвклида.[1]

Сведе́ние отношений величин к отношениям отрезков, а не прямо к числам связано было с неразвитостью понятия о числе. Хотя европейские математики уже давно оперировали с любыми положительными числами, как рациональными, так и иррациональными, но под числом понимали еще, согласно античной традиции, лишь целое число, лишь собрание единиц. Это подчеркнул в своих пояснениях к латинскому изданию „Геометрии“ последователь Декарта Флоримон Дебон. Указав, что произвольные отношения величин общим образом следует рассматривать при помощи отрезков, он говорил: „Этого не дают числа, которые не в состоянии выразить отношения, имеющиеся между несоизмеримыми количествами“.[2] Но вместе с тем Декарт открывал и путь к новому общему определению произвольного положительного числа, наводя на мысль, что для „более тесной связи с числами“ доста́точно понимать под числом просто отношение любого отрезка к единичному.

Введя в самые основания алгебры геометрическую величину — отрезок, Декарт, однако, в отличие от Виета, не построил лестницы скаляров. Под произведениями, степенями и корнями величин он понимал опять-таки отрезки, вводя нужное число раз множителем или делителем подразумеваемую единицу. Так, „если нужно извлечь кубический корень из $aabb - b$, то следует представить себе, что величина $aabb$ поделена один раз на единицу, а другая величина b два раза умножена на нее“.[3] Благодаря этому отпадала необхо-

[1] По существу эта теория не связана была с геометрическим представлением величин, но математики XVII в. рассматривали ее лишь в связи с геометрическими приложениями.

[2] «Geometria», 1695, ч. I, стр. 107.

[3] „Геометрия“, стр. 13.

димость в приписывании дополнительных коэффициентов и чрезвычайно упрощалась запись алгебраических выражений.

Геометрия выступила и в другом, решающем пункте декартовой всеобщей математики. Всякая поддающаяся общему методу исследования задача приводится к алгебраическому уравнению, но как решить последнее? Общим приемом решения уравнений для Декарта служило построение их корней при помощи пересечения кривых. Прием этот, употреблявшийся еще античными математиками и особенно развитый Омаром Хайямом, [1] имел в глазах автора „Геометрии" основоположное значение. Именно в связи с ним Декарт дал первую, еще несовершенную классификацию кривых. Он прежде всего разделил плоские кривые на геометрические и механические (по терминологии Лейбница — алгебраические и трансцендентные) в соответствии с тем, могут ли они или нет быть выражены в созданной им системе координат уравнением, под которым он понимал уравнение алгебраическое. [2] Геометрические кривые он в свою очередь разбил на роды, объединяя в n-й род кривые $2n-1$ и $2n$-го порядков (терминология Ньютона).[3] При этом Декарт выставил в качестве правила, что для построения корней уравнения следует использовать кривые возможно низшей степени. „Хотя, — писал он, — в геометрию должны быть допущены все кривые линии, которые можно описать посредством какого-либо правильного движения, но это вовсе не значит, что для построения всякой задачи дозволительно без различия воспользоваться любой, первой попавшейся кривой. Необходимо всегда стараться выбрать наиболее простую кривую, позволяющую решить эту задачу. Нужно также

[1] О Хайяме и взаимоотношении его идей с идеями Декарта см. мою статью „Омар Хайям и его алгебра". Тр. Ин-та истории естествознания, т. II, М., 1948. Декарт, впрочем, не знал работ Хайяма.

[2] „Геометрия", стр. 29—33.

[3] Это было связано с единым решением (построением) уравнений 4 и 3-й степеней, а также 6 и 5-й степеней.

заметить, что под наиболее простыми кривыми не следует понимать только те, которые проще всего описать, или те, которые дают наиболее легкое построение или доказательство предложенной задачи, но в особенности те, которые принадлежат к простейшему роду, позволяющему определить искомую величину".[1]

Таким образом, геометрические построения играли в декартовой математике глубоко принципиальную роль, хотя в целом его линейная алгебра и была подобна, изоморфна, числовой. Самое изложение основных положений алгебры у Декарта, данное в третьей книге его труда, ничем, однако, не напоминало об исчислении отрезков и с точки зрения внешней формы было почти вполне сходно с нашим: символика его отличалась от нынешней в незначительных деталях. Как и мы, он обозначал неизвестные величины последними строчными буквами латинского алфавита, а известные — начальными; для (целых положительных) степеней ввел удобное современное обозначение. У него был лишь иной знак равенства, а отрицательные буквенные коэффициенты обозначались приставкой знака минуса.

В третьей книге „Геометрии" Декарт развил учение об алгебраических уравнениях. Я отмечу здесь некоторые наиболее важные пункты. Изложение теории уравнений Декарт начинает с замечания, что их лучше записывать с правой частью, равной нулю, а не в форме равенства между группами членов с положительными коэффициентами. Это было важное нововведение, послужившее основой для общих теорем о связях корней и коэффициентов, о правилах знаков для определения числа корней того или иного вида и т. д. Затем рассматривается составление уравнений при помощи перемножения двучленов вида $x - a$ и на этой основе высказывается теорема о том, что число корней уравнения равно его степени. Корни при этом бывают иногда „ложные",

[1] „Геометрия", стр. 74.

меньшие, чем ничто,[1] а иногда даже просто воображаемые (imaginaires, мнимые). Попутно обнаруживается делимость многочленов на разность $x-a$, где a — корень многочлена. Далее сообщались известное правило знаков Декарта, прием уничтожения второго члена в уравнении, способы преобразования корней уравнения, превращение всех действительных корней в положительные, опирающееся на примерную оценку границ корней, новое решение уравнения четвертой степени. Разумеется, наиболее сложные теоремы лишь иллюстрировались примерами и доказательства их, при тогдашнем уровне наук немыслимые, не приводились. В заключение давалось решение уравнения четвертой степени,

$$x^4 = \pm px^2 + qx + r$$

при помощи пересечения параболы $y=x^2$ и окружности

$$\left(x-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{p+1}{2}\right)^2 = R^2,$$

где

$$R^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 + r,$$

а также уравнения шестой степени

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + u = 0$$

при помощи кривой третьего порядка

$$nxy - y^3 + \frac{py^2}{2} + \frac{ty}{2\sqrt{u}} - \sqrt{u} = 0$$

и окружности

$$x^2 + y^2 - 2\frac{m}{n^2}y = \frac{t^2}{4n^2u} - \frac{s}{n^2} - \frac{p\sqrt{u}}{n^2},$$

[1] Декарт, однако, толкует отрицательные корни при помощи направленных ординат. Я еще вернусь к этому вопросу далее.

где

$$n=\sqrt{\frac{t}{\sqrt{u}}+q-\frac{p^2}{4}}\,, \qquad m=\frac{r}{2}+\sqrt{u}+\frac{pt}{4\sqrt{u}}\,.$$[1]

„Геометрия“ Декарта оказала огромное влияние на развитие математики и не только в своей алгебраической части.[2] Особенную известность приобрели ее латинские издания, дополненные обширными комментариями и оригинальными добавлениями нескольких ученых. Возникла целая школа математиков-картезианцев, разрабатывавших далее алгебру и аналитическую геометрию. Мы отметим здесь хотя бы работы Дебона о границах действительных корней некоторых уравнений 2, 3 и 4-й степеней, правило Иоганна Гудде отыскания кратных корней и несколько позднейшие исследования Мишеля Ролля о границах корней, опиравшиеся на открытое им предложение, которое в современной терминологии можно передать словами: между двумя корнями производной имеется не более одного корня данного многочлена, а также на знание верхней границы действительных корней, в наших учебниках носящей имя Маклорена. Однако, как это нередко

---

[1] Здесь не место останавливаться подробнее на аналитико-геометрической стороне труда Декарта, а также на его взаимоотношениях с некоторыми предшественниками и современниками. У Декарта можно заметить некоторую тенденцию еще более освободить алгебру от подчинения геометрии и построить правила буквенного исчисления непосредственно, без связи с исчислением отрезков. Подробнее см. в моей статье „Декарт и математика“, приложенной к русскому переводу его „Геометрии“. Уравнение указанной кривой третьего порядка (так называемого трезубца Ньютона) Декарт в несколько ином виде приводит во второй книге (стр. 47), где дается и способ ее описания.

[2] „Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому же *стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, зачатки которого вскоре были заложены и которое было в целом завершено, а не открыто Ньютоном и Лейбницем“ Ф. Энгельс, „Диалектика природы“. К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. XIV, М.—Л., 1931, стр. 426—427.

бывает, более глубокое развитие алгебра Декарта получила не у его прямых последователей, а в трудах Ньютона, преодолевшего имеющиеся в ней слабые стороны.

III

В то время как развивалась декартова всеобщая математика, английские ученые разрабатывали алгебру в ином идейном плане, хотя и в тесной связи с алгеброй картезианцев.

Первым большим английским трудом по алгебре явилась «Практика аналитического искусства» (Artis analyticae praxis) Томаса Герриота, вышедшая посмертно в 1631 г. Герриот во многом примыкал еще к Виету: в разделении логистики на видовую и числовую, в терминологии, в отказе от пользования отрицательными числами. Он, однако, усовершенствовал символику алгебры далее, записывая степени неизвестной *a* в виде *aa*, *aaa*, *aaaa* и т. п., введя современные знаки неравенства. Он ранее Декарта нашел прием составления уравнений путем перемножения линейных двучленов. Одновременно с книгой Герриота вышел в свет и „Ключ к математике" Уильяма Оутреда („Arithmeticae in numeris et speciebus institutio, quae ... totius mathematicae quasi clavis est"), который неоднократно переиздавался впоследствии и получил высокую оценку Валлиса, Ньютона и философа Локка. В этом сочинении уже более отчетливо проявились черты алгебраической английской школы, основными из которых явились арифметическое построение алгебры и более практический подход к математике вообще.

Буквенное исчисление Оутред развивает не на геометрической основе, а параллельно с арифметическими действиями и самую алгебру называет уже не „логистикой", но „видовой арифметикой". „Эта видовая арифметика, — писал он в первой главе „Ключа к математике", — более подходит для аналитического искусства (при помощи которого искомое находится, когда его рассматривают как данное), чем числовая", и затем пояснял, что в числовой арифметике получаемые при вычислениях числа как бы не оставляют никакого следа произведенных операций, между тем как в видовой ход действий сохраняется все время на глазах, что и сообщает ей должную общность.[1] С самого начала на видное место выдвинуты были десятичные дроби и действия над ними, которые Оутред попутно усовершенствовал в целях упрощения вычислений (приближенное умножение десятичных дробей). Постоянное внимание к практике вычислений и меньший интерес к строгому обоснованию видовой арифметики проявился во многих разделах книги Оутреда. Так, в главе 6 свойства пропорций разъяснялись на числовых примерах, следующие главы посвящены были действиям над дробями, причем Оутред замечал, что „единицу (или какое-либо целое) можно в уме представить себе делимой на любое число частей".[2] В главе 12 приводились формулы степени двучлена до 10-й, а в главе 14 рассказывалось об извлечении корней и т. д. В главе 16 Оутред дал краткое изложение приемов выражения задач при помощи уравнений, сходное со знаменитыми советами в одном из первых разделов „Геометрии" Декарта и отличное лишь в том отношении, что Оутред говорил здесь о величинах, а Декарт — о линиях (выражающих величины).[3]

---

[1] Я пользуюсь четвертым, дополненным и исправленным изданием сочинений Оутреда — Guilelmi Oughtred. Clavis mathematicae. . ., Oxoniae, 1667, стр. 4.

[2] Цит. соч., стр. 25.

[3] „Желая решить какую-нибудь задачу, следует сперва ее рассматривать как уже решенную и дать названия всем линиям, которые представляются необходимыми для ее построения, притом неизвестным так же, как и известным. Затем, не проводя никакого различия между этими известными и неизвестными линиями, нужно обозреть трудность, следуя тому порядку, который показывает наиболее естественным образом, как они взаимно зависят друг от друга, до тех пор, пока не будет найдено средство выразить одну и ту же величину двояким образом: это то, что называется уравнением, ибо члены, полученные одним из

С еще большей определенностью проявились указанные черты английской математики в работах Джона Валлиса, который посвятил алгебре два больших сочинения: „Всеобщую математику или полный курс арифметики“ 1657 г. [1] и ее продолжение — „Исторический и практический трактат по алгебре“, изданный по-английски в 1685 г. и в дополненном виде по-латыни в 1693 г. („De algebra tractatus historicus et practicus“). Валлис прежде всего разделяет математические науки на чистые и смешанные. Чистая математика изучает количество как таковое, как отвлеченное от качеств предмета (quantitatem absolute consideratam . . . , prout a materia abstrahitur), смешанная же, в которую входят астрономия, перспектива, механика, музыка, мореплавание и пр., исследует количество, наделенное свойствами, присущими предмету. Чистая математика в свою очередь подразделяется на арифметику, предметом которой является дискретное число, как множество (multitudo), как собрание единиц, и на геометрию — науку об измеримых непрерывных величинах. Кроме этого определения арифметики и геометрии по содержанию, Валлис дает затем их определения по назначению, различая теоретическую, умозрительную математику, с одной стороны, и практическую,—с другой. Практическая геометрия, наука о том, как хорошо измерять, подчинена теоретической (speculativa);[2] практическая арифметика, наука

этих двух способов, равны членам, полученным другим“ („Геометрия“, стр. 14).

[1] Интересно полное название этого сочинения: „Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum; tam philologice quam mathematice traditum, arithmeticam tum numerosam, tum speciosam sive symbolicam complectens, sive calculum geometricum; tam etiam rationum proportionumve traditionem, logarithmorum item doctrinam, aliisque“.

[2] J. Wallis. Opera mathematica, t. I, Oxoniae, 1695, стр. 18—19. Аналогичное определение геометрии дал еще Пьер де-ла-Раме: „Геометрия есть искусство хорошо измерять“ (P. Rami, Geometriae, lib. XXVII, Basileae, 1569, стр. 1). Точно так же арифметика, по Раме, это наука хорошо считать (или вычислять; doctrina bene numerandi).

о том, как хорошо вычислять (numerandi), также подчинена теоретической арифметике. Однако из всего дальнейшего изложения Валлиса ясно, что в своем построении курса алгебры и его отдельных разделов он руководствовался больше потребностями научной и педагогической практики.

Казалось бы, поскольку геометрия имеет дело с более общей и несводимой к числу категорией величин, чем арифметика, она и должна была бы занять ведущее место в математике и лечь в основу теоретического фундамента общей арифметики, как это еще отчасти имело место в универсальной математике Декарта. Валлис, однако, неоднократно подчеркивает арифметический характер общей алгебры и ее преимущества перед геометрией. Дело в том, что предмет арифметики чище и отвлеченнее, чем у геометрии, и ее рассуждения обладают большей общностью (speculationes habet magis universales), в силу чего арифметика равно приложима и к геометрии и к другим дисциплинам. [1] Говоря об одном из важнейших действий алгебры — о возведении в степень, Валлис замечает, что „алгебраические степени (potestates) лучше объясняются при помощи арифметических степеней (gradus), чем при помощи геометрических измерений“ (в смысле размерности), и при этом совершенно отчетливо характеризует алгебру, как арифметическую науку. „Ибо,— говорит он,— всеобщая алгебра является поистине арифметической, а не геометрической и разъясняется скорее при помощи начал арифметических, а не геометрических. Хотя в геометрии многое находится или уясняется из алгебраических начал, но отсюда не следует, что алгебра геометрична или же опирается на геометрические начала, . . . наоборот, скорее геометрия подчинена общей арифметике“. [2] Эту же

[1] „Opera mathematica“, т. I, стр. 18—19.

[2] Среди недостатков геометрических измерений Валлис отмечает также, что действительных размерностей имеется только три и что пользование ими требует соблюдения закона однородности. См. цит. соч., стр. 55—56.

мысль высказывает Валлис в предисловии к „Трактату о конических сечениях, изложенных по новому методу“ (De sectionibus conicis nova methodo expositis tractatus, 1655), предупреждая, что доказательства в нем имеют арифметико-алгебраический характер, а не основываются на линиях, ибо арифметические доказательства „не менее научны (scientificae), более ясны, а также проще и обладают большей общностью“.[1]

Эти тенденции арифметического построения алгебры и ее приложения к задачам практики Валлис провел в обоих рассматриваемых сочинениях весьма последовательно и в случае необходимости даже за счет полной математической строгости. Во „Всеобщей математике“ он уделил много места действиям над десятичными дробями, логарифмам, различным тройным правилам, правилу товарищества, в „Алгебре“ — логарифмам, извлечению корней, правилу смешения, приближенному решению алгебраических уравнений и т. д. В 23 главе „Всеобщей математики“ он перевел на язык алгебраических формул теоремы 2 книги „Начал“ Эвклида, в которой ряд алгебраических тождеств был выражен при помощи соотношений между площадями. С особенной яркостью отразилась та же тенденция на учении об отношениях и пропорциях. Трудную теорию равенства отношений произвольных однородных величин, изложенную в 5 книге „Начал“ Эвклида, Валлис заменил более доступной для юношества и более непосредственно выражающей, по его мнению, природу дела. Он предлагает понимать под отношением просто частное и непосредственно переносит в 29 и 35 главах „Всеобщей математики“ свойства целочисленных отношений на общие величины. Примерно так же, между прочим, поступали и другие математики того времени, например А. Такэ в его „Теории и практике арифметики“ (Arithmeticae theoria et praxis, 1656).[2]

[1] Цит. соч., т. I, стр. 296.

[2] Критические замечания Такэ и Валлиса насчет определения равенств отношений у Эвклида почти совпадают (см. Wallis. Цит. соч.,

Построение общей арифметики, претендовавшей на первенство перед геометрией, требовало, однако, существенного обобщения понятия о числе. Валлис традиционно определил число как собрание единиц, но в действительности трактовал это понятие шире. „Дробные числа, — писал он,— не суть числа в собственном смысле (proprie dicti)“, они отвечают не на вопрос: сколько (например, сколько часов, quot horae), но на вопрос: какое количество? (quantum horae), и относятся скорее к категории непрерывных величин“.[1] Но арифметика, подражая геометрии с ее бесконечной делимостью величин, „предполагает, что единица или единое, как некое целое, делима на любое число частей“, вычисление с которыми носит уже чисто арифметический характер.[2] По существу Валлис имел в виду, что над дробями можно производить те же операции, что и над целыми числами; с полной отчетливостью эта мысль выступила в его трактовке иррациональных чисел. И иррациональные числа „не могут быть выражены при помощи истинных (veris) чисел, но они пригодны (sunt tamen capaces) для арифметических действий, как сложения, вычитания, умножения, деления и т. д.“. При этом хотя слово „число“ на этот случай Валлис не распространил, но он подчеркнул возможность неограниченного приближения к значению „глухих корней“, т. е. иррациональностей: для них „нам достаточно удовлетворяться приближениями (которые по уже изложенному способу можно получить сколь угодно близкими к истинному значению)“.[3]

Если в трактовке дробей и иррациональностей, реальное истолкование которых было ясно без особых комментариев, у Валлиса проступала идея „принципа перманентности“,

стр. 184 и A. Tacquet. Цит. соч., Amstelodami, 1704, стр. 128). Но Такэ строил свою теорию отношений на основе приближения величин их десятичными долями.

[1] Wallis. Цит. соч., стр. 26—27.

[2] Цит. соч., стр. 210.

[3] „Opera mathematica“, т. II. Oxoniae, 1693, стр. 117.

отчетливо сформулированного в XIX в., то в подходе к числам отрицательным, а также мнимым Валлис счел важным особенно оттенить возможность действительной интерпретации этих понятий. При сохранении все того же смысла за словом „число" вычитание большего числа из меньшего, разумеется, невозможно. Валлис вновь говорит и в этом случае о допущении в математике особого рода количеств, которые во „Всеобщей математике" он назвал даже воображаемыми (imaginariae). Это слово — воображаемый, мнимый — не должно, однако, вводить нас в заблуждение. Было бы ошибочно приписывать Валлису понимание отрицательных чисел как чистых фикций. Отрицательные числа — это, конечно, создания нашего разума, но как бы они ни назывались,— это абстракции некоторых отношений действительности, а, как выразился Валлис в одном месте, „одно дело абстрагировать, а другое отрицать" (aliud enim est abstrahere, aliud negare). [1] Допущение отрицательных чисел, как меньших 0, не только не бесполезно и не абсурдно, но служит для обозначения не менее действительной (realem) величины, чем применение положительных чисел; только выражаемая отрицательным числом величина „подлежит интерпретации в смысле, противоположном предположенному" (sed sensu suppositioni contrario interpretandam). [2] При этом Валлис предлагает ряд толкований взаимоотношения между положительными и отрицательными числами на примерах движения в противоположные стороны, теплоты, тяжести и т. п. [3] В „Алгебре" отрицательные и положительные величины назывались уже действительными (reales) и как воображаемые им противополагались квадратные корни из отрицательных чисел. Но и для этой категории чисел Валлис стремился найти реальную

[1] „Opera mathematica", т. I, стр. 21.

[2] „Opera mathematica", т. II, стр. 286.

[3] „Opera mathematica", т. I, стр. 70—71, и т. III, стр. 286. Геометрическое истолкование отрицательных чисел восходило к А. Жирару (1629), Декарту и его последователям.

интерпретацию. Первое значение мнимых величин Валлис усматривал в том, что они показывают невозможность соответствующей задачи и указывают, как следует видоизменить ее постановку, чтобы решение оказалось возможным и действительным. [1] Кроме того, он предложил толковать мнимости, как стороны квадратов с отрицательной площадью, скажем, утраченного участка площади, или же как отрезок, средний пропорциональный между расположенными на одной прямой по разные стороны от начала положительным и отрицательным отрезками. [2]

Таковы были общие алгебраические воззрения Валлиса. По содержанию его алгебраический трактат содержал богатейший фактический материал, особенно в латинском издании, в которое включены были краткие изложения основных математических открытий Ньютона. Из всего этого материала в данной связи необходимо лишь отметить (еще ранее опубликованное им в 1657 г.) построение кубического уравнения при помощи прямой и открытой Валлисом кубической параболы $x=y^3$. Против этого построения, указывал Валлис, могут возразить, что в нем используется линия более сложная, т. е. высшей степени, чем коническое сечение. Это возражение не смущало Валлиса: „зато, — отвечал он,— в качестве второй линии применяется не окружность, но более простая прямая". [3]

От труда Декарта, от сочинений Оутреда и Валлиса путь развития алгебры вел непосредственно ко „Всеобщей арифметике" Ньютона.

---

[1] „Opera mathematica", т. II, стр. 287 и сл. В этом отношении весьма любопытны геометрические задачи, в которых наличие мнимых решений указывает на необходимость перехода от окружности к гиперболе и т. п.

[2] Цит. соч., гл. 57. Идеи Валлиса были возрождены в середине XVIII в. Г. Кюном. Валлис, впрочем, не остановился на вопросе об истолковании комплексного числа. Как известно, современная интерпретация комплексных чисел была предложена Г. Весселем (1799) и Ж. Арганом (1806). Нет у Валлиса и анализа операций, производимых над числами.

[3] Цит. соч., стр. 297.

IV

В годы студенчества, в 1663—1664 гг., Ньютон изучил „Начала" Эвклида, „Геометрию" Декарта (в латинском издании, т. е. со всеми комментариями), труды Виета, руководства Оутреда и Валлиса. Античная геометрия произвела на него глубочайшее впечатление. Ей, несомненно, он отдавал искреннее предпочтение, находя в ее синтетических приемах изящество, которого не усматривал в новой алгебре и, видимо, даже в собственном методе флюксий и флюент. Ньютон был действительно замечательным геометром, о чем свидетельствуют многочисленные вспомогательные предложения о конических сечениях в „Математических началах", найденные им чисто синтетическим путем, а также его работы по теории кривых третьего порядка. [1] Как высоко он ни ставил аналитическую геометрию и сколь крупные открытия ни произвел он в этой области, он не считал эту дисциплину подлинной геометрией. На полях „Геометрии" Декарта он сделал даже категорическую пометку: „Неверно, неверно, это не геометрия (error, error, non est geometria)"; для него это было только приложение алгебры к решению геометрических задач, часто полезное, порой, быть может, даже необходимое, но по самому существу своему чуждое духу истинно геометрических доказательств. [2]

---

[1] См. статью Н. А. Глаголева „Ньютон, как геометр" в сборнике „Московский университет—памяти Исаака Ньютона" (М., 1946). Ср. L. T. More. „Isaac Newton. A biography". N. Y.—London. 1934. Стр. 33—37.

[2] Отмечу, что и Лейбниц считал внесение в геометрию алгебры и координатного метода чужеродным геометрии и недостаточным. В 1679 г. он писал Гюйгенсу: „Я еще недоволен алгеброй в том отношении, что она в области геометрии не доставляет ни кратчайших путей, ни наиболее красивых построений". Но Лейбниц искал в геометрии новых путей и мечтал об особом символическом геометрическом исчислении: „Нам нужен еще иной, чисто геометрический или линейный анализ, непосредственно выражающий для нас положение, как алгебра выражает величину" (см. „Успехи математических наук", 1948, т. III, в. 1, стр. 198—199). Мечты Лейбница были реализованы лишь в XIX в. Грасманом, Гамильтоном и др.

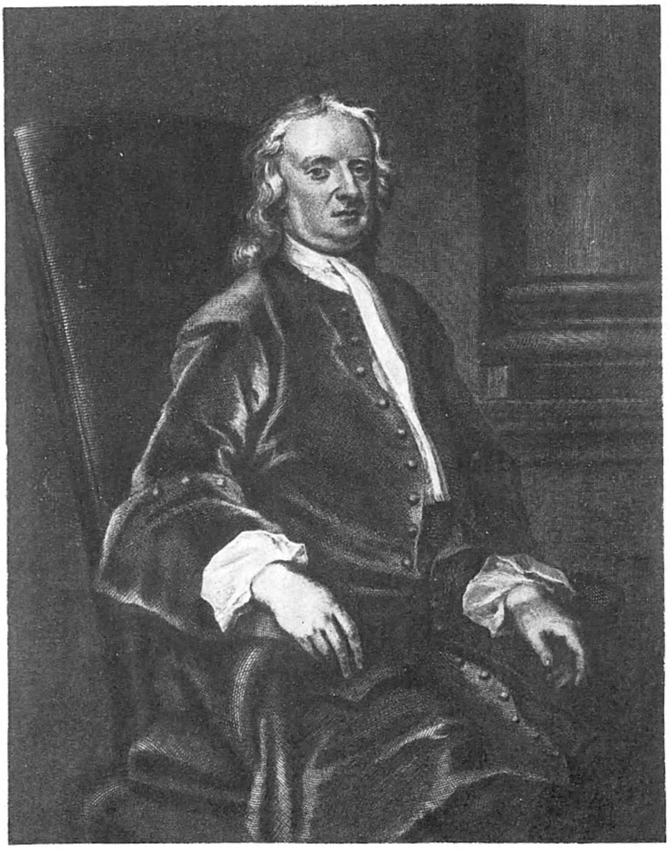
Девид Грегори сообщает, что Ньютон как-то сказал ему: „алгебра — это анализ сапожников в математике (of the bunglers in mathematics)“.[1] В какой-то мере это шутливое замечание согласовалось с восхищением Ньютона перед античной математикой. Но по существу эта фраза отнюдь не выражала подлинного отношения великого ученого к алгебре и ее методам. Его работы по исчислению бесконечно малых, открытие им общей биномиальной формулы, тесно примыкавшее к исследованиям Валлиса, его глубоко практический подход к математике в целом,— все это исключает возможность рассматривать Ньютона как противника алгебры. Он мог восхищаться красотой синтетических доказательств и даже противопоставлять иногда найденные им замечательно изящные геометрические построения длинным и сложным выкладкам новой геометрии, [2] но вместе с тем он хорошо сознавал значение и мощь алгебраических методов исследования самых разнообразных проблем. Он прямо доказал это рядом первостепенной важности алгебраических открытий.

Первые крупные алгебраические исследования Ньютон произвел еще в ранней молодости, между 1665 и 1670 годами. К этому времени относятся его работы по распространению

---

[1] H. W. Turnbull. The mathematical discoveries of Newton. London — Glasgow, 1945, стр. 48.

[2] Интересно в этом отношении сопоставить решение задачи Паппа о четырех прямых у Ньютона и у Декарта, для которого эта задача послужила пробным камнем силы его аналитического метода в геометрии. (В этой задаче даны четыре прямые и ищется геометрическое место точек, для которых отношение произведения отрезков, проведенных под данными углами к двум из этих прямых, к произведению отрезков до двух других данных прямых имеет постоянную величину; геометрическое место есть коническое сечение.) Решение Ньютона во много раз короче декартова и заканчивается словами: „Такое решение, как приведенное выше, т. е. исполняемое геометрическим синтезом, а не вычислением, и изыскивалось древними“ (см. „Математические начала натуральной философии“. Пер. А. Н. Крылова в Собрании трудов академика А. Н. Крылова, т. VI, М.—Л., 1936, стр. 121—122).



ИСААК НЬЮТОН

Портрет работы Вандербанка, относится к последним годам жизни И. Ньютона действия извлечения корня на алгебраические многочлены и обобщению правила возведения двучлена на случай произвольного показателя, изложенное в письмах к Ольденбургу 1676 г. К этому же времени относятся и широко применяемый до сих пор способ Ньютона численного решения уравнений и так называемый параллелограм Ньютона, служивший для разложения y, заданного уравнением $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — алгебраический многочлен, в ряд по дробным степеням x.[1] Я не буду касаться истории этих открытий, не включенных во „Всеобщую арифметику" Ньютона. Замечу лишь, что попытки строгого доказательства формулы бинома, принадлежавшие Эйлеру и другим крупнейшим математикам XVIII в., успешно завершены были только Гауссом в работе о гипергеометрическом ряде в 1811 г., что численный способ решения уравнений Ньютона разрабатывали далее Галлей,[2] Лагранж, Мурайль, Фурье (и от него иной раз отправляются в своих исследованиях современные математики) и что исследование и применение метода параллелограма Ньютона, начатое Стирлингом, де-Гюа и Крамером, продолжается до наших дней.[3]

В 1669—1672 гг. Ньютон, по поручению Коллинса, занялся подготовкой латинского издания голландской „Алгебры" Г. Кинкгейзена (1660), а в связи с этим стал задумываться

---

[1] См. И. Ньютон. „Математические работы". Пер. Д. Д. Мордухай-Болтовского, М.— Л., 1937, стр. 9—13, 34—35, 218, 233—235.

[2] В современных обозначениях поправка h к приближенному значению a корня уравнения $f(x) = 0$ находится из разложения $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \ldots = 0$ по приближению $f(a) + hf'(a) = 0$ (далее процесс итерируется). Галлей находил поправку, пренебрегая членами со степенями h выше второй, т. е. из квадратного уравнения. Работа Галлея (1694) была приложена к первому же изданию „Всеобщей арифметики" для восполнения отсутствовавшего в ней метода численного решения уравнений.

[3] См. работу Н. Г. Чеботарева „Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики" в сборнике „Исаак Ньютон" под ред. академика С. И. Вавилова, М.— Л., 1943.

над изданием собственного руководства по алгебре.[1] Из этого плана, однако, ничего не вышло; Ньютон занялся другими работами. Но в 1673—1683 гг. Ньютону пришлось читать в Кембриджском университете курс лекций по алгебре. Согласно уставу, рукопись его лекций была сдана на хранение в университетскую библиотеку, откуда извлек ее заменивший Ньютона в 1702 г. в должности профессора в Кембридже Уильям Уистон (1667—1752), который и выпустил в свет первое латинское издание — „Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica liber". Cantabrigiae, 1707.[2]

V

Хотя во «Всеобщей арифметике» Ньютон не упоминает почти ни одного автора и только два-три раза мельком называет имя Декарта,[3] нетрудно видеть, что его сочинение составлено было с учетом работ всех его виднейших предшественников. Влияние Декарта сказалось во многом: в символике, почти полностью (если только исключить знак пропорции Оутреда и знак равенства Рекорда) картезианской,[4]

---

[1] См. L. T. More. Цит. соч., стр. 143—149.

[2] В настоящее время затруднительно точно установить, вышло ли это издание в свет с разрешения Ньютона или без его согласия, как это утверждал Био. Уистон в своих воспоминаниях утверждал, что издание состоялось с согласия автора. Действительно, вряд ли друг Ньютона решился бы на такой шаг вопреки его воле, да и университетские власти не могли бы разрешить публикацию лекций без разрешения автора. Д. Грегори писал, что Ньютон дал согласие, но с неохотой. См. L. T. More. Цит. соч., стр. 528—529, и H. W. Turnbull. Цит. соч., стр. 48—49.

[3] В этом отношении сочинение Ньютона представляет собой прямую противоположность „Алгебре" Валлиса, содержавшей огромное количество исторических сведений (порой весьма ценных, но в целом весьма односторонне направленных на защиту мнимого приоритета англичан во всех открытиях в алгебре XVII в. и против Декарта).

[4] Ньютон несколько усовершенствовал символику Декарта, применив запись произвольных показателей степени; он также нередко по-

в огромном удельном весе геометрических приложений, в употреблении геометрического построения корней уравнений, в некоторой мере в самой структуре сочинения, наконец, во многих частностях изложения. Но общие идейные установки Ньютона продолжали линию развития английской алгебраической школы. Ньютон со всей решительностью перестраивал алгебру на арифметической основе и применяемые в алгебре геометрические методы подчинил непосредственно практическим, вычислительным целям. При этом, не предназначая своих лекций к печати, он, как мы увидим, с необычайной для него резкостью вступил в полемику с Декартом.[1]

Содержание „Всеобщей арифметики" вкратце таково. Ньютон начинает с разъяснения основных понятий алгебры и ее знакоположения, знакомит с десятичными дробями, подробно описывает, как следует производить действия сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения корней, действия над дробями и радикалами, над числами и буквенными выражениями.[2] Затем он переходит к отысканию линейных и квадратичных делителей алгебраических многочленов, излагает решение простейших видов уравнений и прием исключения неизвестных из уравнений нескольких первых степеней. За этим следуют большой раздел, посвященный составлению уравнений и решению арифметических и геометрических задач, занимающий немногим менее половины всей книги, и, наконец, общая теория уравнений и геометрическое построение их корней. Доказательства теорем и правил Ньютон почти

нимал под буквенным коэффициентом, перед которым стоит знак +, произвольное действительное число.

[1] На отношение Ньютона к Декарту отчасти могла повлиять враждебность к последнему Валлиса, но в целом у Ньютона оно определялось принципиальными разногласиями, а не шовинистическими побуждениями.

[2] В этой части изложение Ньютона интересно сопоставить с приложенными к латинскому изданию „Геометрии" Декарта краткими „Principia matheseos universalis sive introductio ad geometriae methodut, Renati Des Cartes" Фр. Скаутена.

не приводил, „ибо,— как писал он,— они представлялись слишком легкими, а иногда не могли быть изложены без докучливых длиннот“ (стр. 295).[1] Если учесть, что доказать некоторые его теоремы не удалось полностью ни одному математику XVIII в., а некоторые были до конца исследованы только в середине прошлого века, то можно усомниться в том, что и Ньютон располагал полными доказательствами всех обнаруженных им положений. Отсутствие доказательств должны были восполнить примеры и задачи, а также общие методические указания, позволявшие слушателю или читателю овладеть практическим применением теоретического аппарата.[2]

Первой и, может быть, наиболее важной общей чертой алгебры Ньютона был, как сказано, ее арифметический характер. С указания на это Ньютон и начинает свой труд. „Вычисления,— пишет он,— производятся либо при помощи чисел, как в обыкновенной арифметике, либо при помощи видов [т. е. символов.— *А. Ю.*], как в алгебре. Оба приема основаны на одинаковых принципах и ведут к одной цели, причем арифметика — путем определенным и частным, алгебра же — путем неопределенным и всеобщим ... Однако все действия арифметики столь необходимы в алгебре, что они лишь совместно образуют полную науку вычислений, и поэтому я буду излагать их обе вместе“ (стр. 7).[3] Ньютон при этом тщательно отделяет алгебру от геометрии как таковой и далее, в другом месте книги, явно споря с Декартом, возражает против их смешения. „Умножения, деления и тому подобные

---

[1] Ссылки на страницы настоящего перевода приведены в тексте в скобках.—Интересно отметить, что и „Перечисление кривых третьего порядка“ не содержало ни одного доказательства.

[2] Свое отношение к задачам Ньютон выразил в следующих словах: „Я занимался до сих пор решением ряда задач, ибо при изучении наук примеры полезнее правил. Поэтому-то я отвел им так много места“ (стр. 243).

[3] Ср. аналогичное место в начале „Метода флюксий“ (И. Ньютон, „Математические работы“, стр. 25—26).

вычисления введены были в геометрию недавно и при этом неосторожно и в противоречии с основной целью этой науки. Всякий, кто рассмотрит построения задач при помощи прямой и круга, найденные первыми геометрами, легко увидит, что геометрия была изобретена для того, чтобы мы, проводя линии, могли с удобством избегать утомительных вычислений. Поэтому не следует смешивать эти две науки. Древние столь тщательно отличали их друг от друга, что никогда не вводили в геометрию арифметические термины. Современные ученые, смешивая обе науки, утратили простоту, в которой состоит все изящество геометрии" (стр. 298). Последовательно провести эту мысль о полном разделении геометрии и алгебры Ньютон, разумеется, вообще не мог. Но дальнейшее изложение всего непосредственно алгебраического материала было в его сочинении действительно чисто арифметическим.

Фундаментальной важности фактом в этой арифметизации алгебры явилось новое определение действительного числа, к которому приближались, но которого не достигли ни Декарт, ни Валлис. Ньютон объединяет целые, дробные и иррациональные количества в одну категорию чисел: „Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное (surdus). Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей" (стр. 8). Здесь несущественно, что это определение числа не было подвергнуто Ньютоном дальнейшему логическому анализу и что он не построил общей теории чисел-отношений. Прежде всего необходимо было для новой математики дать единую концепцию действительного числа как базы и алгебры и исчисления бесконечно малых. Ньютон в этом отношении сделал шаг вперед огромного значения, и уже делом многих последующих поколений явилась разработка более строгой теории дробей и действительных чисел вообще, разработка, которая была в основном завершена лишь во второй половине XIX в. Дедекиндом, Кантором и другими.

На первых же страницах «Всеобщей арифметики» Ньютон вводит также и отрицательные величины как меньшие, чем ничто, толкуя их в общепринятом в математике XVII в. духе.[1] Мнимые величины он вводит значительно позднее, в связи с решением уравнений, причем, примыкая к Валлису, значение их видит в том, что они являются свидетельством невозможности задачи. С характерным для Ньютона обращением к внематематической практике в тех случаях, когда оказывается трудным дать чисто математическое объяснение какого-либо понятия, он обосновывал необходимость мнимых величин в духе Валлиса: „корням уравнений часто надлежит быть невозможными, иначе они выражали бы как возможные те частые случаи задач, которые невозможны" (стр. 248).

Основные операции арифметики Ньютон обобщает на базе нового понимания числа. Так, умножение в собственном смысле слова относится к целым числам, при помощи его находится число, во столько раз большее множимого, во сколько множитель превосходит единицу. Это определение переносится соответственным образом на аналогичную операцию над произвольными числами: „Но за отсутствием более подходящего слова умножением называют также действие над дробными или иррациональными числами, с помощью которого ищут новую величину, находящуюся со множимым в том же отношении (каково бы оно ни было), какое множитель имеет к единице" (стр. 10). Это же относится и к делению. Правило знаков при умножении и делении Ньютон сообщал без всякого обоснования.

Выше было сказано, что в декартовой алгебре геометрические построения имели принципиальное значение, как общее средство построения корней уравнений. Ньютон и в этом

[1] Не следует смущаться тем обстоятельством, что Ньютон говорит при этом об отрицательных величинах, а не о числах. Слова „величина" и „число" нередко употреблялись им в одном и том же смысле.

пункте, не порывая с картезианской традицией полностью, отходит от нее весьма далеко. Было бы, конечно, неверно сказать, что в математике Декарта не имелось практических устремлений. Наоборот, всеобщая математика Декарта должна была служить общим методом миропознания. Декарт только сузил границы этой всеобщей математики, полагая, что другого общего математического метода, кроме алгебраического, не существует; за это его жестоко и справедливо критиковал Лейбниц. Декарта и его последователей интересовала, однако, более, так сказать, принципиальная сторона дела. Для Декарта, в общем, достаточен был прием геометрического построения корня уравнения, к которому приведена задача; в этом своего рода доказательстве существования для него и заключалось решение задачи. Ньютон понимал под решением эффективное вычисление искомых чисел с требуемой степенью точности, этого требовала вся практика разрабатывавшихся им проблем математического естествознания. Для этой цели геометрическое построение корней служить не могло, но оно могло быть удобным приемом для начала вычислений, которые затем надлежало продолжить при помощи предложенных самим же Ньютоном приближенных методов. Ньютон и низводит геометрическое построение корней на уровень вспомогательного приема, предъявляя к нему только требования возможно большей простоты и удобства.

Изложив общую теорию уравнений, Ньютон писал: „Теперь остается лишь показать, как можно извлечь численным образом корни уравнений, уже приведенных к наиболее удобному виду. Главная трудность состоит здесь в определении двух или трех первых цифр корня, а это удобнее всего можно сделать при помощи геометрического или же механического построения уравнения“ (стр. 295).[1] В согласии с важностью указанной задачи Ньютон отвел немало

[1] Эта роль отчасти сохраняется за построением корней и в настоящее время.

места различным приемам построения корней и предложил некоторые новые, но особенный интерес вызывает в этой связи спор с Декартом относительно выбора кривых, применяемых при построении уравнений. Декарт, как мы видели, считал нужным выбирать кривые возможно низшей степени, а трансцендентные кривые из своей геометрии он исключил целиком как неподдающиеся алгебраическим способам исследования. Ньютон понимает под простейшими кривыми не линии низшего порядка, но линии, которые удобнее вычертить при помощи какого-либо прибора. „Из построений, — говорит он, — в равной мере являющихся геометрическими, всегда следует отдать предпочтение простейшему. Этот закон не допускает исключений. Но алгебраические выражения ничего не добавляют к простоте построений. Здесь следует принимать во внимание только описания линий... Если бы в геометрию включена была трохоида [циклоида, — *А. Ю.*], то при ее помощи мы могли бы разделить угол в данном отношении. Станете ли вы упрекать тех, кто применит эту линию для деления угла в отношении двух чисел, упрекать на том основании, что эта кривая не определяется уравнением и что применять должно лишь те линии, которые определяются уравнениями? Если бы дело обстояло так, то для деления угла, например, на 10001 часть мы должны были бы применить кривую, определяемую уравнением более ста измерений и которую не мог бы ни описать, ни, еще менее, уразуметь ни один смертный. И кто не нашел бы нелепым, если бы этой линии отдали предпочтение перед трохоидой, которая представляет собой хорошо известную линию, легко описываемую посредством движения колеса или круга?“ (стр. 297).[1]

Так в двух существеннейших пунктах алгебры Ньютон противопоставил свою арифметическую алгебру линейной

[1] Ср. также замечательные высказывания на стр. 301 и 325, столь характерные для практического, утилитарного подхода Ньютона к математике.

алгебре Декарта. Алгебра Ньютона уже не претендовала на роль „всеобщей математики“, она должна была быть лишь „всеобщей арифметикой“, что и было отражено в самом заглавии его сочинения.

Основной целью этой всеобщей арифметики являлось в конечном итоге численное решение приводящихся к алгебраическим уравнениям задач. Уделив большое место общим советам относительно того, как составляются уравнения (стр. 79—82), и на множестве примеров показав, как эти советы осуществлять на практике, Ньютон концентрирует далее свое внимание именно на указанной цели. Ей подчиняется и с нею связывается весь собственно алгебраический материал книги: и подготовительные правила действий, в том числе над десятичными дробями, и приемы выделения линейных и квадратичных множителей многочлена, и введение симметрических функций, в частности степенных сумм корней, и правила знаков, и геометрическое построение уравнений. В этом отношении Ньютон опять-таки отчасти продолжил, а отчасти преодолел традиции картезианской алгебры, алгебры построения корней-отрезков и, как мы увидим, на долгое время предопределил пути дальнейшего развития алгебры.

VI

В этой краткой характеристике „Всеобщей арифметики“ Ньютона нет возможности перечислить все содержащиеся в ней новые результаты. Я остановлюсь на некоторых более выдающихся.

Прежде всего следует отметить постановку Ньютоном проблемы приводимости алгебраического уравнения, т. е. представления целой рациональной функции с рациональными коэффициентами в виде произведения двух или большего числа аналогичных функций. Ньютон дал прием отыскания линейных множителей, основанный на подстановке вместо аргумента членов арифметической прогрессии, и сделал первые шаги в исследовании более общего случая (стр. 45 и сл.).

В исследовании корней алгебраического уравнения Ньютон получил целый ряд новых интересных теорем, а также обобщил работы некоторых своих предшественников. Основное внимание его при этом, как было только что сказано, было сосредоточено на вычислении корней уравнения.

Определив корень уравнения как „число, которое, будучи подставленным в уравнение вместо обозначающей его буквы или вида, приводит к исчезновению всех членов“ (стр. 244), Ньютон в знакомом нам уже реалистическом стиле разъясняет причину множественности корней уравнения. Он берет задачу, в которой требуется найти пятую часть некоторой дуги окружности, и показывает, что для того, чтобы найти пятые части всех дуг, стягиваемых хордой, определяемой концами данной дуги, окружность следует разделить в пяти точках. Пятые части каждой из дуг, зависящие от одних и тех же данных, определяются из одного и того же уравнения, и последнее поэтому должно иметь пять корней, и вообще „необходимо, чтобы во всякой задаче дающее ответ уравнение имело столько же корней, сколько имеется различных случаев для искомой величины, зависящих от одних и тех же данных и определяемых посредством одного и того же метода рассуждения“ (стр. 246).

После этого Ньютон формулирует теорему о том, что число действительных корней уравнения не превосходит его степени (известную еще Декарту и Жирару). Рассматривая в одном примере случай, в котором два неравных корня при изменении коэффициентов сливаются в один — кратный, а затем переходят в мнимые, он устанавливает четность числа мнимых корней (стр. 249),[1] а затем анализирует некоторые примеры, в которых действительные корни уравнения не соответствуют условиям задачи. Далее он приводит правило знаков Декарта, отмечая его недостаточность при наличии мнимых корней, а следом за ним формулирует открытое им самим правило определения числа мнимых корней, согласно которо-

[1] На это указал еще Валлис в «Алгебре» (цит. изд., стр. 303).

му это число для уравнения n-й степени обычно бывает равно (и, во всяком случае, не меньше) числу перемен знаков в ряду

$$a_0^2, \quad \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{2}a_1^2 - a_0a_2, \quad \frac{2}{n-1}\cdot\frac{n-2}{3}a_2^2 - a_1a_3, \quad \ldots,$$
$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{n}a_{n-1}^2 - a_{n-2}a_n, \quad a_n^2$$

(стр. 251—252). Далее устанавливаются связи между элементарными симметрическими функциями корней и коэффициентами уравнения, по существу бывшие известными еще Виету, и непосредственно вслед за этим сообщаются классические рекуррентные формулы для степенных сумм корней s_k

$$s_k + a_1s_{k-1} + a_2s_{k-2} + \ldots + ka_k = 0$$

(стр. 264),[1] которые затем Ньютон использует для определения границ и приближенного вычисления действительных корней. Он именно устанавливает, что в случае, если все корни действительные, то $\sqrt[2k]{s_{2k}}$ превосходит наибольший по модулю действительный корень и что вместе с тем последовательность $\sqrt[2k]{s_{2k}}$ при $k\to\infty$ стремится к названной величине. Тут же он дает лучшее приближение для наибольшего положительного корня в виде $\sqrt[2k+1]{\frac{\sqrt{s_{2k}s_{2k+2}}+s_{2k+1}}{2}}$ и аналогичное приближение для наименьшего отрицательного корня (стр. 265 и сл.). К этому примыкает другое правило определения верхней границы положительных корней, которое в современной форме можно выразить так: верхней границей положительных корней уравнения может служить любое число a, при подстановке которого в левую часть уравнения и во все ее не равные тождественно нулю производные получаются положительные числа (стр. 267).

Приведя некоторые частные правила для отыскания

[1] Явные формулы для первых четырех степенных сумм дал Жирар (1629).

делителей целого многочлена, обладающих коэффициентами с квадратичными иррациональностями (это было связано с решением уравнения четвертой степени путем разложения на квадратичные трехчлены), Ньютон в заключение дает ряд приемов построения уравнений 3 и 4-й степени при помощи пересечения кривых, среди которых оригинальными были построение при помощи конхоиды (стр. 299 и сл.), с приложением к задачам об определении двух средних пропорциональных и о трисекции угла, а также при помощи циссоиды, для которой он предложил удобный способ механического построения (стр. 323 и сл.).

VII

Уже упоминалось, что почти половину текста „Всеобщей арифметики" составляли задачи. Эта черта книги Ньютона отличала ее от всех прежних серьезных руководств по алгебре, и собрание задач в ней представляет особенный интерес по необычайному их обилию и разнообразию, да и само по себе.

Задачи для своих лекций Ньютон подбирал очень тщательно и из различных источников. Здесь можно встретить примеры из Декарта, Скаутена, Оутреда, Валлиса, из работ самого Ньютона по геометрии, астрономии, механике, оптике, наконец, многочисленные оригинальные вопросы. Задачи, сперва более простые, а затем все усложняющиеся, были разделены на две группы: меньшую арифметическую и значительно большую геометрического содержания.

В первой группе задач следует отметить задачи о месте встречи двух спутников (V), общую задачу на тройное правило (VI), на смеси (VIII) и пр., известную задачу о быках, поедающих произрастающую на пастбище траву (XI), на определение движения соударяющихся упругих шаров (XII), на определение процентов некоторой ренты, выкупаемой досрочно за некоторую наличную сумму (XVI).

Еще разнообразнее задачи второй категории. Они начинаются с нескольких задач, в которых по тем или иным элементам треугольника находятся другие элементы, причем попутно Ньютон сообщает важные новые формулы плоской тригонометрии, среди них формулу, позднее найденную Молльвейде (XI и XII). Затем следует несколько десятков задач аналитической геометрии, алгебраическое решение которых, а также нередко присоединяемое геометрическое построение проводятся Ньютоном с большим искусством и изяществом. Любопытны задачи на вставки отрезков данной длины между данными линиями (XXIV и XXVIII), на определение прямолинейной траектории кометы по трем наблюдениям (XXX), на определение точки пересечения луча с осью преломляющей сферы (XXXI) и т. д. В XXXII задаче Ньютон с чрезвычайной простотой вывел уравнение кривой пересечения конуса с плоскостью, а в следующей — уравнение кривой пересечения с плоскостью однополостного гиперболоида вращения, открытого Валлисом. В задаче XXXV исследована была кривая, описываемая произвольной точкой отрезка, скользящего по сторонам данного угла (эллипс), в задаче XXXVII — кривая, определяемая постоянством отношения расстояний любой ее точки от данной прямой и от данной точки (коническое сечение); задача XXXIX посвящена кривой (окружности Аполлония), определяемой постоянством отношения расстояний любой ее точки от двух заданных точек. В задачах XLIII—XLVII речь идет об определении окружностей, заданных условиями касания с другими окружностями или прямыми и прохождением через данные точки, в том числе окружности, касающейся трех данных кругов. В задачах XLVIII и XLIX решаются вопросы о равновесии двух или трех грузов, подвешенных на нити, скользящей около одной или двух точек. В известной задаче L требуется определить глубину колодца по звуку от удара камня о его дно. Задачи LI — LIV посвящены теории удара. Наконец, в последних пяти задачах (LVII—LXI) даются построение и алгебраическое решение нескольких проблем, синтетически исследованных в „Математических началах“, — об определении кривой, описываемой точкой пересечения пары сторон двух данных углов, вращающихся вокруг своих вершин, при условии, что точка пересечения другой пары сторон скользит по прямой (коническое сечение), а также об определении конического сечения, проходящего через пять данных точек или же через четыре или три данные точки и касающегося в одной или в двух из них соответственно одной или двух данных прямых. Стоит отметить, что при решении последних двух задач Ньютону пришлось применить для определения положения касательных методы исчисления бесконечно малых. Для историка математики не лишено интереса обратить внимание на то, как Ньютон свободно оперирует при этом для отыскания последних отношений, т. е. пределов, отбрасыванием бесконечно малых величин, рассматриваемых как нули (стр. 240).

Я подробно перечислил содержание целого ряда задач не только в силу их общего интереса, но и для того, чтобы наглядно продемонстрировать их действительно необыкновенное богатство и разнообразие. Ньютон на этих задачах демонстрировал перед своими слушателями широкую применимость и силу алгебраического метода, хотя и предупреждал, что „в иных задачах, на первый взгляд представляющихся трудными, не всегда следует прибегать к алгебре“ (стр. 243).

Не меньший интерес, чем самые задачи, представляют методические советы Ньютона относительно приемов решения задач, особенно геометрических, и практическое применение этих советов. Вопрос о способах решения задач геометрии живо занимал и Декарта, о чем говорилось уже ранее; краткие указания приводил и Оутред.[1] Ньютон посвятил этой столь важной для изучающих математику проблеме очень много внимания. „И хотя, — писал он, — в подобных случаях трудно дать общие предписания и каждый должен в них следовать указаниям собственного разума, я попытаюсь все же указать путь начинающим“ (стр. 103). Ньютон не ограничивается при

[1] Декарт высказал некоторые интересные мысли о методе решения геометрических задач при помощи алгебры в письмах 1643 г. к принцессе Елизавете. См. его „Oeuvres“, т. IV, Paris, 1901, стр. 37 — 42, 45 — 50.

этом только общими советами насчет того, что нужно обозначить данные и искомые линии буквами, выяснить их взаимозависимость и т. п., но и дает ряд конкретных указаний, иллюстрируя их немедленно типичными примерами. „После того, — говорит он, — как вы полностью разберете различные способы, которыми можно выразить участвующие в вопросе члены, примените какой-либо синтетический прием, приняв в качестве данных линий те, переход от которых к остальным линиям представляется весьма легким, а обратный переход к которым представляется весьма трудным. Хотя вычисление можно вести по-разному, но его следует начинать с этих линий и его проще произвести, допустив, что в вопросе заданы именно эти линии и что ищется некоторая величина, которую легко получить из них, чем решая вопрос в том виде, в каком он действительно предложен“ (стр. 107). Опираясь опять-таки на примеры, он предупреждает, что „...вещи, которые могут показаться человеку, недостаточно глубоко их продумавшему, непосредственно связанными друг с другом тесной зависимостью, нередко, когда мы стремимся выразить эту зависимость алгебраически, приводят к запутанным и окольным действиям и в результате заставляют вас начать рассуждения заново и проводить вычисления постепенно“ (стр. 108). Вслед за тем Ньютон приводит основные, необходимые для решения задач теоремы геометрии (главным образом подобие треугольников и соотношения между квадратами сторон и т. д. в треугольнике), указывая, что применять другие теоремы следует с умеренностью, если возможно „...с равной легкостью или с незначительно большим трудом вывести решение из более простых вычислительных начал“ (стр. 110). Для большей ясности Ньютон при этом решает одни и те же задачи различными способами, чтобы показать читателю действительное значение его советов.[1] Последующие задачи Ньютон также нередко решает несколькими способами.

[1] Следует отметить, что попутно Ньютон излагает основные приемы и идеи аналитической геометрии.

Ценные методические указания Ньютон приводит и при разборе отдельных задач. Так, в задаче XXIV дается правило выбора неизвестных: „Если какие-либо два члена настолько подобны или сходны в отношении к другим членам вопроса, что, применяя любой из них, вы получите совершенно сходные уравнения или же, что, применяя их оба, вы получите конечное уравнение, в котором они обладают одинаковыми измерениями и одинаковой формой, отличаясь, быть может, лишь знаками + и — (увидеть это легко), то лучше всего не применять ни одного из них, а взять... другую величину, которая находится с ними в одинаковом отношении и не имеет себе подобных“ (стр. 156). Этим правилом он руководствовался и при решении ряда других задач.

Методические указания Ньютона чрезвычайно ценны по своему содержанию. Многое в них сохраняет значение и ныне и с пользой может быть использовано в педагогической практике. Вместе с тем мы видим из них, что автор „Всеобщей арифметики“ был не только гениальным ученым, но и замечательным педагогом.[1]

VIII

Как мы видели, во „Всеобщей арифметике“ Ньютона были охвачены почти все основные проблемы алгебры той эпохи. В свои лекции Ньютон не включил лишь применение формулы бинома и численных методов решения уравнений,[2] а вне

[1] Интересно отметить, что охарактеризованными здесь идеями руководствовался А. Дебов (A. Desboves) при составлении одного из разделов своих «Questions d'algèbre élémentaire» (Paris, 1887). Методическим идеям Ньютона посвящена работа L. Conte «Sul modo di mettere in equazione le questioni geometriche (Dall' Arithmetica universalis di I. Newton)» в Periodico di matematiche, 1947.

[2] Последнее придавало несомненную незавершенность труду и по этой причине, как упоминалось, уже к первому изданию его Уистон приложил статью Галлея о численном решении уравнений.

поля зрения его остались только два вопроса: об общем способе решения систем линейных уравнений и о разрешимости в радикалах уравнений выше 4-й степени.[1] Идейное богатство „Всеобщей арифметики", насыщенность ее новыми теоретическими результатами и обилие столь удачно подобранных задач быстро снискали ей популярность, о которой свидетельствуют прежде всего многочисленные переиздания. Вслед за изданием 1707 г. вышло новое в 1722 г.;[2] в 1720 и 1728 гг. появились английские переводы известного математика Дж. Рефсона; латинские издания повторялись в 1732, 1761 гг. и позднее; Н. Боде перевел ее в 1802 г. на французский. Книга в равной мере служила и источником вдохновения для ученых и руководством для специализировавшейся в области математики молодежи.

Проследить влияние алгебраических открытий Ньютона на последующее развитие алгебры значило бы написать полную историю этой науки по крайней мере до эпохи Галуа, а в некоторых ее направлениях и до наших дней. Эта задача не может быть решена в рамках настоящей статьи. Мне придется ограничиться лишь несколькими краткими замечаниями о поистине огромном влиянии „Всеобщей арифметики" Ньютона на алгебру XVIII столетия.

Прежде всего следует отметить, что все последующие сочинения трактуют уже алгебру как арифметическую дисцип-

---

[1] Ньютон привел способы решения простейших систем линейных уравнений путем подстановки и сравнений, а также результаты, возникающие при исключении неизвестной из некоторых уравнений высших степеней (стр. 75 и сл.), но общей задачи решения системы линейных уравнений не коснулся. Лейбниц, с его постоянным интересом к созданию новых алгорифмов, в письме к Лопиталю от 1693 г. и в некоторых рукописных заметках заложил первые основы теории определителей. См. «Успехи математических наук», 1948, т. III, в. 1, стр. 197.

[2] Это издание, подготовленное Мечином, было существенно исправлено и дополнено, несомненно, под наблюдением самого Ньютона. О личных причинах, побудивших Ньютона поручить подготовку 2-го издания Мечину, а не Уистону, см. L. T. More, Цит. соч., стр. 529.

лину. При этом из курсов алгебры быстро исчезают обширные разделы геометрических приложений, переходящие в сочинения по аналитической геометрии. Если в пространном и оригинальном комментарии ко „Всеобщей арифметике“, каким являлась алгебра одного из лучших учеников Ньютона — Колина Маклорена („A treatise of algebra in three parts“, London, 1748), они занимали еще видное место, так же как и геометрическое построение корней уравнений, то в „Началах алгебры“ А. Клеро („Eléments d'algebre“, Paris, 1746) и в классической „Универсальной арифметике“ Л. Эйлера, вышедшей впервые в русском издании в Петербурге в 1768 — 1769 гг., все изложение носило уже чисто арифметический характер.[1] Ньютоново определение действительного числа приобретает в связи с этим широкое распространение. Так, Эйлер на первых же страницах своего руководства говорит, что „число не иное что, как содержание [т. е. отношение. — *А. Ю.*] одного количества к другому, которое берется за единицу“.[2] С еще большей силой подчеркнул свою идейную близость к Ньютону выдающийся деятель русского математического просвещения XVIII в., ученик Эйлера, академик С. К. Котельников. В предисловии к своему учебнику арифметики Котельников писал: „В порядке расположения вещей несколько от других писателей отступлено, ибо сей порядок показался натуральнее и сходственнее с понятием, какое я себе о числе представил и какое предложил в сей книжке. Образ, в котором я себе число воображаю, есть нютонов.

[1] В предисловии к своему руководству Клеро между прочим писал: „Мне представлялось, что выпустить в свет целостный трактат по чистой алгебре значило дать начинающим средство особенно в ней укрепиться и что они лишь выиграют, занявшись приложением алгебры к геометрии лишь после того, как аналитические действия не будут уже представлять для них никакой трудности“ (изд. Paris, 1760, стр. XVIII — XIX).

[2] Л. Эйлер. „Универсальная арифметика“. Пер. П. Иноходцева и И. Юдина, т. I, СПб., 1787, стр. 3.

Оное представляется, как некоторое содержание двух количеств; и поистине, ежели рассудить в тонкость, то невозможно никакого вообразить себе ясно количества, не поняв прежде его содержания к другому того же рода, которого величина от частого употребления и обращения в глазах наших твердо и ясно в уме начерталася".[1] В этой связи Котельников предпослал объяснению действий умножения и деления изложение теории отношений и пропорций. Так же поступали и некоторые другие математики XVIII в., например А. Зегнер и другой ученик Эйлера — академик С. Я. Румовский в „Сокращении математики части первой, содержащей начальные основания арифметики" (СПб., 1760).

В связи с арифметизацией алгебры все более видное место начинают занимать и обойденные в общем Ньютоном вопросы о сущности отрицательных чисел. Математики XVIII в. — Маклорен, Н. Саундерсон, Эйлер, А. Кестнер, Н. Е. Муравьев, Даламбер, Л. Карно и многие другие — посвятили немало усилий разъяснению природы отрицательных чисел и попыткам обоснования правил действий над ними.[2] Кестнер, между прочим один из первых, если не первый, указал на соотно-

---

[1] С. К. Котельников. „Первых оснований мафиматических наук часть первая, содержащая в себе арифметику". СПб., 1766, стр. 3.

[2] Первые сведения по алгебре на русском языке приведены были в „Арифметике" Л. Ф. Магницкого (М., 1703), во многом опиравшегося на „Всеобщую математику" Валлиса и более ранних алгебраистов. У Магницкого, однако, изложение доведено было лишь до решения квадратных уравнений. Первым большим и специально алгебраическим русским учебником было „Начальное основание математики" Н. Е. Муравьева (СПб., 1752). Из алгебраических открытий Ньютона Муравьев включил в свой курс общую формулу бинома (стр. 97 — 117) и численный метод приближенного вычисления корней (стр. 302 — 305). Эти же вещи, а также правило параллелограма Ньютона подробно изложены были в „Новой алгебре, содержащей в себе не только простую аналитику, но также дифференциальное, интегральное и вариационное исчисление" А. Барсова (М., 1797, главы 1—3).

сительный характер положительных и отрицательных чисел,[1] но подлинную ясность в эту проблему удалось внести только в XIX в., так же как и в вопрос об арифметизации понятия об иррациональном числе.

В этой общей тенденции арифметизации алгебры XVIII в. влияние Ньютона отразилось в первую очередь. Но кроме того, и это еще важнее, оно сказалось и на разработке специальных математических вопросов. Немалую роль при этом сыграло то обстоятельство, что ряд теорем „Всеобщей арифметики“ Ньютон привел без доказательства. Уже самое изучение этой книги требовало пояснений. Пояснением и доказательством ее предложений и правил занялось множество математиков, а ее издания все более и более обрастали дополнительными статьями и мемуарами, по объему в своей совокупности чуть ли не превосходившими основной текст. Я не буду задерживаться на комментариях Дж. Кольсона, с'Гравезанда, Дж. Кастильона, которым по большей части удалось лишь весьма неполно, хотя и весьма пространно осветить отдельные детали великого творения Ньютона. Среди прямых комментаторов его алгебры первое место безусловно принадлежало уже названному Маклорену, который в своих университетских лекциях в основном следовал за Ньютоном и „Трактат по алгебре“ которого имел прямой целью

[1] „Противоположенные величины суть величины одного рода, кои рассуждаются под такими условиями, что одна из них уменьшает другую, например имущество и долги, шествие вперед и отступление назад. Одна из сих величин, взятая по произволению, называется положительною, противоположенная оной—отрицательною“ (А. Г. Кестнер. „Начальные основания математики“, ч. I. СПб., 1792, стр. 69; оригинал вышел впервые в 1759 г.).

Вообще говоря, все попытки доказательства правил умножения отрицательных чисел были основаны на молчаливом переносе свойств действий над положительными числами, особенно распределительного свойства умножения. Подобные рассуждения математиков XVIII в., не имея внутренней логической ценности, подготовили, однако, почву для анализа проблемы в XIX в.

снабдить доказательствами и развить далее содержание „Всеобщей арифметики“. В некоторых случаях Маклорену это удалось неплохо, но в целом он еще не очень далеко ушел по намеченному им самим пути. Главная работа по дальнейшему развитию алгебры проделана была не столько учеными, стремившимися дать комментарии ко „Всеобщей арифметике“ в целом, сколько математиками, разрабатывавшими те или иные специальные вопросы алгебры.

Проблемой приводимости, сдвинутой с места Ньютоном, занимались после Маклорена и Дж. Кемпбелла многие математики, но подлинные успехи достигнуты были в этой области лишь в XIX в. Г. Эйзенштейном, Л. Кронекером (метод которого отчасти родственен ньютонову)[1] и др. Правила знаков Декарта и Ньютона изучены были детальнее А. Кестнером, Ж. П. де-Гюа, Маклореном, Лагранжем, и работы их были завершены в XIX в. Ф. Д. Бюданом, Ж. Фурье и Ж. Ш. Штурмом.[2] Численные методы решения алгебраических уравнений развиты были далее Д. Бернулли, Л. Эйлером, Э. Варингом, Ж. Лагранжем, Ж. Фурье, внесшим существенные уточнения в вопрос об условиях применимости метода Ньютона, Н. И. Лобачевским, Ж. Данделеном, К. Греффе и др. Проблемой исключения в XVIII в. успешно занимались Безу и Л. Эйлер. Столь важная в алгебре теория симметрических функций развита была Ж. Лагранжем и Э. Варингом и т. д. Повторяю, было бы чрезвычайно затруднительно указать в алгебре XVIII в. те области, в исследовании которых развитие открытий Ньютона не сыграло большой роли, за исключением разве лишь теории определителей и общей проблемы разрешимости уравнения в радикалах. И, опять-таки за немногими исключениями, работы алгебраистов XVIII в.

[1] См. „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“, т. I, Leipzig, 1898—1904, стр. 239.

[2] Полное исследование правила знаков Ньютона удалось, в частности, только в 60-е годы XIX в. Дж. Сильвестеру („Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,“ т. I, стр. 415).

направлены были, как и у Ньютона, к единой цели — установлению характера корней уравнений и их конкретному вычислению. Теорема Штурма об определении числа комплексных, положительных и отрицательных корней алгебраического уравнения и остроумный метод Лобачевского приближенного вычисления всех его корней[1] подвели в 30-е годы XIX в. в известном смысле итог этому направлению алгебраических исследований. В это же примерно время работы Абеля и Галуа положили начало новому развитию алгебры, которое было лишь отчасти намечено в конце XVIII в. Лагранжем и П. Руффини.

„Всеобщая арифметика" оказала существенное влияние и на эволюцию учебников алгебры. Многочисленные задачи ее были широко использованы и в алгебре и в аналитической геометрии; из них и сейчас можно было бы почерпнуть интересный материал. Вместе с тем последующие составители алгебраических руководств пошли далее. В курсы алгебры вновь стали включать логарифмы, теория которых была существенно переработана Эйлером (между прочим и в его „Универсальной арифметике"), теорему о биноме, теорию пропорций и прогрессии; важные методические изменения были внесены и в расположение материала. Из курса средней школы удалены

[1] В предисловии к своему труду „Алгебра или вычисление конечных" (Казань, 1834) Лобачевский писал: „Алгебра будет та же наука, которую Ньютон назвал *Общая Арифметика*, чтобы отличить от Арифметики на числах и которую столько же справедливо можно назвать *вычисление конечных*, в противоположность с дифференциальным или вычислением бесконечно малых, где являются неоспоримо новые начала, под каким бы видом ни старались их представлять, желая соблюсти строгость эту существенную принадлежность всякого Математического учения.... Решение уравнений составляло всегда главный предмет алгебры".

Любопытно отметить, между прочим, некоторое родство центральной идеи метода Лобачевского с Ньютоновым приемом вычисления наибольшего по модулю действительного корня с помощью степенных сумм.

были элементы общей теории уравнений и т. д. Прообразом большинства руководств по алгебре XIX в. явилась „Универсальная арифметика" Эйлера, а в России, кроме того, ее сокращенное изложение, написанное академиком Н. И. Фусом и выдержавшее в начале XIX в. несколько изданий.

Изучать алгебру по сочинению Ньютона в настоящее время, разумеется, было бы неправильно, так же как нельзя было бы рекомендовать изучать анализ по его „Методу флюксий" и небесную механику по „Математическим началам". Но даже из данного здесь краткого обзора видно, что алгебра Ньютона заслуживает серьезного внимания читателей и в наше время. С. И. Вавилов совершенно правильно отмечает в своей биографии Ньютона, что „чтение его „Универсальной арифметики", составившейся из лекций в Кембридже, . . . доставит и теперь глубокое удовольствие всякому геометру и любителю математики".[1] А для педагогов ознакомление с этим классическим руководством, от которого, так же как и от „Геометрии" Декарта, ведет начало современная алгебра, представляет особенно живой интерес.

[1] С. И. Вавилов. „Исаак Ньютон". М.— Л., 1943, стр. 173.

ПРИМЕЧАНИЯ К ПЕРЕВОДУ „ВСЕОБЩЕЙ АРИФМЕТИКИ“

(Составлены А. П. Юшкевичем)

[1] (к стр. 7). Синтез (compositio) и анализ (resolutio) Ньютон понимает в классическом смысле этих слов. Папп Александрийский (конец III в.) кратко разъясняет эти понятия следующим образом:

„Анализ есть путь, которым мы приходим от искомого, допущенного как данное, посредством последовательного заключения к тому, что допускается в синтезе. Ибо при анализе мы допускаем, что искомое как бы уже дано, рассматриваем то, из чего это искомое следует, затем то, что предшествует этому новому положению, и продолжаем отступать подобным же образом, пока не натолкнемся на нечто, уже известное или содержащееся в числе принятых начал; такого рода рассуждения представляющие как бы некоторое распутывание, мы называем разрешением (анализом). При синтезе же, наоборот, то, что при анализе мы сделали последним, то именно предпосылаем мы, как уже совершившееся, и то, что ему предшествовало, мы располагаем в естественном порядке и, соединяя одно с другим, наконец, выполняем построение искомого — это и называем мы составлением (синтезом)“. См. примечания И. Ю. Тимченко к „Истории элементарной математики“ Ф. Кеджори (изд. 2, Одесса, 1917), стр. 338—340, а также Г. Г. Цейтен. „История математики в древности и в средние века“, пер. П. С. Юшкевича (изд. 2, М. — Л., 1938), стр. 71—78.

По Ньютону, в числовой арифметике идут путем синтеза, от данных величин к искомым, в алгебре — путем анализа. Ср. также рассуждения Ньютона на стр. 112 и сл. настоящего перевода.

[2] (к стр. 7). Термин species (вид) восходит к Фр. Виету (1540—1603). Во „Введении в аналитическое искусство“ (In artem analyticen isagoge, 1591) Виет различал числовой счет (logistica numerosa) от видового счета (logistica speciosa), который изучает величины „при помощи видов

или форм вещей, например элементов алфавита". При этом объектом видовой алгебры Виета служили не числа, но геометрические или же псевдогеометрические разнородные величины, составляющие некоторый восходящий ряд: длина, площадь, тело, площаде-площадь, площаде-тело и т. д. Эти величины Виет называл скалярами-ступеньками образуемой ими лестницы — шкалы. Для того чтобы изучение величин в алгебре приобрело общность, к которой стремился Виет, он ввел обозначения их прописными буквами латинского алфавита. Данные величины он обозначал согласными буквами B, D, . . . , а искомые — гласными A, E, . . .

Р. Декарт (1596—1650) в „Геометрии" 1637 г. отказался от разнородности общих алгебраических величин, рассматривая их все как прямолинейные отрезки; Ньютон трактует алгебраические величины как числа. Слово species в дальнейшем переводится по большей части „буква".

[3] (к стр. 8). Здесь Ньютон полностью и явно порывает с классической традицией, согласно которой числами являются лишь множества единиц. Вместе с тем он попрежнему именует иррациональное число „глухим" или „немым" (surdus). Этот термин возник в европейской литературе как перевод арабского слова, в свою очередь передавшего греческое ἄλογος (невыразимый, немой, не имеющий отношения). Наряду с термином surdus в средние века употреблялся и термин irrationalis. Декарт, как позднее и Ньютон, говорил о „немых" числах — nombres sours.

Математики XVII в. еще до Ньютона подходили к признанию принципиального равноправия иррациональных чисел с рациональными. Так, Дж. Валлис (1616—1703), понимая еще под числом множество единиц, говорил, что над „глухими корнями" можно производить арифметические действия точно так же, как над числами в собственном смысле слова, и подчеркивал, что приближения к значениям таких корней можно получать сколь угодно близкие. Впрочем Валлис и рациональные дроби не считал настоящими числами, хотя и вполне реальными понятиями.

Ньютоново определение числа как отношения получило широкое распространение в XVIII в., в том числе в руководствах Л. Эйлера (1707—1783), академика С. К. Котельникова (1723—1806) и многих других. Попытки более четко связать понятие об иррациональном числе с понятием о числе рациональном появляются во второй половине XVIII в. Так, А. Г. Кестнер (1719—1800) рассматривал иррациональное число как предел рациональных чисел; в России за ним последовал П. А. Рахманов (ум. 1813); на этой же точке зрения стоял О. Коши (1789—1857). Однако еще Ж. Даламбер (1717—1783) и акад. С. Е. Гурьев

(1764—1813) отрицали существование чисел, выражающих отношения несоизмеримых отрезков. Строгая теория иррациональных чисел создана была во второй половине XIX в. Р. Дедекиндом (1831—1916), К. Вейерштрассом (1815—1897) и Г. Кантором (1845—1918).

4 (к стр. 9). Несистематическое употребление десятичных дробей встречается у различных математиков XVI в. Со всей силой подчеркнули их пользу С. Стевин (1548—1620) в сочинении „La Disme", т. е. „Десятая часть" (1585), а также Виет в 1579 г. Английские математики XVII в. У. Оутред (1574—1660), Валлис и другие в своих курсах арифметики и алгебры уделили десятичным дробям особенно видное место. Ньютон последовал в этом отношении их примеру; так же поступали и авторы многих руководств XVIII в. Стевин записывал десятичные дроби в виде: 89⓪ 4① 6② (наше 89,46); Виет отделял дробную часть от целой вертикальной чертой. Более или менее сходные обозначения применяли и другие авторы. Б. Питиск (1561—1613) в 1612 г. писал .05176381; в то же время десятичную точку применял Дж. Непер (1550—1617). У. Оутред в 1631 г. писал 2⌊5; Г. Бриггс (1556—1630) в 1624 г. употреблял запятую; некоторые ставили запятую сверху и т. д. Уистон в первом издании „Всеобщей арифметики" 1707 г. обычно применял запятую, но иногда и точку с запятой. См. Fl. Cajory. A history of mathematical notations. Chicago, 1928, т. I, стр. 314—335.

5 (к стр. 9). Буквенное обозначение величин в алгебре восходит к древним грекам и несистематически встречалось в средние века. Принципиальное значение такой символики со всей силой выявил Виет, впервые применивший буквенное обозначение для коэффициентов алгебраических выражений. Ньютон употребляет символику Декарта („Геометрия", 1637). Подробности см. Cajory. Цит. соч., т. I, стр. 379—384.

6 (к стр. 9). Отрицательные числа появились у индусских математиков, выражавших их словом, соответствующим нашему „долгу" (в противоположность положительным числам — „имуществу"); индусам была известна и двузначность квадратного корня. В средневековой европейской математике отрицательные числа появляются в XV в., но еще в XVI—XVII вв. многие крупные ученые не признают отрицательных корней уравнений, как, например, Виет. Т. Герриот (1560—1621) даже пытался доказать, что алгебраические уравнения могут иметь лишь положительные решения. Немецкий алгебраист М. Штифель (1487?—1567) в „Arithmetica integra" (1544) рассматривал отрицательные числа как воображаемые, как numeri ficti, существующие лишь в нашем представлении и тем не менее весьма полезные в математике (так же расценивал Штифель и отвлеченные дроби). Алгебра, писал он, „ввиду неограниченности запаса своих средств обычно пользуется и тем, что существует, и тем, что представляется как существующее. Ибо подобно тому, как

выше единицы полагаются целые числа, а ниже единицы представляются (finguntur) доли единицы..., так и выше 0 полагаются единица и числа и ниже 0 представляются единица и числа“. Этого требует целостность арифметики. В качестве примера замечательных свойств таких воображаемых чисел Штифель приводит сопоставление арифметической и геометрической прогрессий —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3 и, соответственно, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 (Ф. Кеджори. Цит. соч., стр. 325, 442—445). Такую же „прагматическую“ позицию занимал в 1539—1545 гг. Дж. Кардано (1501—1576), именуя отрицательные числа то numeri ficti, то minus purum (чистый минус) впротивовес открытым им minus sophisticum, позднее названным мнимыми числами. Кардано употреблял также термины radices verae (настоящие корни) и radices falsae или fictae (ложные или придуманные). Дж. Валлис в 1657 г. рассматривал отрицательные числа как воображаемые (imaginaria), но не абсурдные; в 1685 г. он их вместе с положительными числами называл действительными (real) в противоположность мнимым (imaginary).

Ра́звитие теории алгебраических уравнений понуждало математиков применять отрицательные числа сперва в качестве удобных вспомогательных идеальных понятий, реальный смысл которых отрицался, поскольку алгебраисты, опиравшиеся на геометрические аналогии, не располагали еще интерпретацией этой категории чисел. Крупный шаг вперед сделал А. Жирар (1595 (?) — 1632), в „Invention nouvelle en l'algebre“ (1629) указавший, что „решение с помощью минуса (par moins) объясняется в геометрии возвращением вспять (en rétrogradant) и минус отступает там, где плюс ведет вперед“. Декарт, независимо от Жирара и одновременно с ним, геометрически истолковал отрицательные корни как отрезки ординат, расположенные по другую сторону оси абсцисс, чем отрезки, изображающие положительные корни. Не относя отрицательные числа, „меньше чем ничто“, к роду воображаемых, т. е. мнимых, он все же называл их ложными (fausses). Фактически отрицательные числа получили равноправие с положительными именно в „Геометрии“ Декарта. Подробно остановился на вопросе о толковании отрицательных чисел Валлис. Важно иметь в виду, что когда математики XVII в., тот же Валлис, говорили о „фиктивности“ или ложности отрицательных чисел, они часто хотели сказать, что это понятие не совпадает с традиционным определением числа, а вовсе не то, что оно не отражает определенной стороны действительных явлений.

Вместе с тем Декарт и многие другие ученые XVII в. нередко допускали ошибки в теории отрицательных чисел и толковали собственно об их абсолютных значениях. Ряд свойств отрицательных чисел вызывал серьезные недоумения или недоразумения у крупнейших математиков. Так, Валлис из неравенств... $3 > 2 > 1 > 0 > -1 > -2 > -3\ldots$ получал $\ldots \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3}\ldots$ и отсюда заключал, что отрицательные числа больше бесконечности. Г. В. Лейбниц (1646—1716), исследуя парадокс $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$ (первый член первого отношения больше второго, а первый член второго отношения меньше второго члена), приходил к выводу, что оба эти отношения лишь воображаемые и что выражение „—1 меньше нуля" лишь „терпимо истинное" (toleranter vera).

Обсуждение природы отрицательных чисел продолжалось в XVIII в. и в нем участвовали К. Маклорен (1698—1746), Л. Эйлер, Даламбер, Кестнер и др. Кестнер уже отметил соотносительность положительного и отрицательного чисел, называя их противоположными количествами и подчеркивая, что по существу безразлично, какое из таких двух количеств именовать положительным и какое отрицательным. Но еще в самом конце этого века Л. Карно (1753—1823) писал, что „гораздо труднее вразумительно объяснить, что такое изолированное отрицательное количество, чем понять, что такое бесконечно-малое количество, потому что последнее... есть количество действительное, в то время как первое является фиктивным понятием (être de raison), ибо его можно получить лишь путем невыполнимого действия" („Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых", пер. Н. М. Соловьева, М., 1933, стр. 230 и сл.). Строгая трактовка теории отрицательных чисел дана была на основе работ Г. Грассмана (1809—1877), У. Гамильтона (1805—1865) и других ученых XIX в.

Знаки + и — появились в печати в 1489 г. у И. Видмана; термины numerus negativus и numerus positivus встречаются с XVI в.

[7] (к стр 9). Обозначение $\pm$ ввели Жирар и (1626) Оутред (1631). Декарт в „Геометрии" употреблял в этом случае перед буквой точку; имелись и другие обозначения.

В английских изданиях „Всеобщей арифметики" Ньютона в задаче LV употребляются в смысле $\pm$ и $\mp$ знаки $\perp$ и $\top$.

[8] (к стр. 11). Здесь Ньютон следует за Декартом, который в самом начале „Геометрии" вводит умножение, деление, возведение в степень и извлечение корней из линий на основе эвклидова учения о подобии и, следовательно, эвклидовой теории пропорций. Однако Ньютон подчеркивает условный характер этой арифметической терминологии в применении к геометрическим операциям (ср. прим. 9, 130, 133).

Нужно отметить, что Ньютон, как и Декарт, по традиции обычно говорит „линия", „прямая" там, где мы сказали бы „отрезок". Четкое терминологическое отличие прямой, луча и отрезка провел Я. Штейнер (1796—1863). Ср. прим. 61.

[9] (к стр. 12). Виет проводил принципиальное различие между родственными действиями числовой и видовой логистики. В logistica speciosa умножение в обычном смысле слова (multiplicatio) заменяется на „проведение“ величины A к величине B (ductio A in B; ducere); оно порождает скаляр высшего рода, размерность которого складывается из размерностей A и B. „Приложение“ A к B (applicatio A ad B) порождает величину, размерность которой есть разность размерностей A и B. Складывать, вычитать и приравнивать друг к другу в видовой логистике можно было скаляры одного рода (закон однородности). Это требовало введения в уравнения дополнительных буквенных коэффициентов; по закону однородности, — если применить современные обозначения, — нельзя написать $x^3 + \frac{1}{x} - 2y$, но $x^3 + \frac{a^4}{x} - 2b^2y$ и т. п. Декарт (и за ним Ньютон) понимает под a^2, b^3 и т. д. „лишь сами простые линии, хотя, чтобы пользоваться наименованиями, употребительными в алгебре“, называет их квадратами, кубами и т. д. Для этого нужно лишь „повсюду, где имеется слишком много или слишком мало измерений,... подразумевать единицу“, т. е. представлять себе величины умноженными или деленными должное число раз на линейную единицу („Геометрия“, рус. пер., М., 1938, стр. 13). Закон однородности тогда не влечет за собой усложнения выражений. Ср. мою статью и примечания в русском издании „Геометрии“ Декарта (М., 1938).

Термины multiplicare, multiplicatio встречаются с I в., producere, productum — с XIII в. (Joh. Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik, т. II, 1921, стр. 77, 78).

[10] (к стр. 12). Термин коэффициент возник из longitudo coefficiens (содействующая длина) Виета. В выражении $(A+B)^2+D(A+B)$ Виет назвал так множитель D, сообщающий второму члену требуемую законом однородности размерность (ср. M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig, 1899, т. II, стр. 632).

Декарт говорил об „известной величине“ в члене уравнения (например, la quantité connue de ce second membre). Г. Лопиталь (1661—1704) писал „умножающая величина“ (la quantié qui multiplie). В оригинале „Всеобщей арифметики“ коэффициенты называются numeri praefixi, „предстоящие числа“; в других случаях они именуются „членами“ уравнения, „известными величинами“ в членах, изредка — коэффициентами. Термин коэффициент в нашем смысле слова употребляли Оутред, Валлис, автор распространенного учебника „Mundus mathematicus“ (1674) К. Ф. Дешаль (1621—1678) и другие.

[11] (к стр. 12). Знак косого креста применялся средневековыми матема-

тиками до XVII в. в весьма разнообразных задачах (правило двух ложных положений, деление дробей и т. д.). Как символ умножения двух величин его употребил впервые У. Оутред (1631). Лейбниц (1698) предложил обозначать умножение при помощи точки, чтобы не смешивать похожие знаки x и $\times$. Запись величин рядом друг с другом обозначала их произведение еще в некоторых рукописях XV в. (см. Cajory. Цит. соч., т. I, стр. 250—268).

Объединение составных величин при помощи различных символов восходит к концу XV в. Горизонтальную черту подписывал в 1484 г. под многочленным выражением Н. Шюке. Т. Герриот в 1631 г. объединял надписанной вслед за символом $\surd$ горизонтальной фигурной скобкой подрадикальные выражения; Декарт в „Геометрии" применял аналогично горизонтальную черту. Фр. ван-Скаутен (1615—1660) в 1646 г. употребил горизонтальную черту и при перемножении составных величин; Ньютон пользовался ею еще в 1676 г., причем употреблял в случае нужды несколько таких надписанных друг над другом черточек, например:

$$\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y+17=0$$

означало у него

$$\{[(y-4)\,y+5]\,y-12\}\,y+17=0.$$

Скобки появляются в XVI в., например в рукописях Штифеля круглые скобки, в книгах Виета — фигурные, как односторонние, так и двусторонние. Широкое применение скобки получили уже в начале XVIII в., особенно благодаря Лейбницу и Эйлеру. Квадратные скобки встречаются с 1709 г. (см. Cajory. Цит. соч., т. I, стр. 384—404). В настоящем переводе дается современная запись скобок.

[12] (к стр. 13). В терминологии, восходящей к Виету, а через него к древним, приложить прямоугольник к его основанию значит найти его высоту. Ср. прим. 9.

[13] (к стр. 13). Запись дробей при помощи горизонтальной черты, отделяющей числитель от знаменателя, восходит к арабам; ею систематически пользовался Леонардо Пизанский ок. 1202 г. Запись делителя слева от делимого и разделение их скобкой) встречается у М. Штифеля (1544) и У. Оутреда (1631). Двоеточие в качестве символа деления ввел Лейбниц в 1684 г.

[14] (к стр. 14). Одной из важнейших задач, которые пришлось решать математикам при создании символической алгебры, была выработка обозначений для степеней величин. Диофант (III в.) пользовался для обозначения неизвестной знаком ς, а для ее степеней сокращениями соответствующих греческих терминов. Так, квадрат (δύναμις — состоя-

ние, сила, потенция) он обозначал δ^{υ}, куб (κύβος) — $\varkappa^{\upsilon}$, четвертую степень — $\delta^{\upsilon}\,\delta^{\upsilon}$, пятую — $\delta^{\upsilon}\,\varkappa^{\upsilon}$ и шестую — $\varkappa^{\upsilon}\,\varkappa^{\upsilon}$. Математики средневековой Европы долго называли неизвестную вещью, res (по-итальянски cosa, откуда старонемецкое название алгебры Coss, косс), квадрат неизвестной — quadratus или census (состояние, сила), куб — cubus. Постепенно, вместо этих терминов, входят в употребление их сокращения; параллельно появляются и другие обозначения степеней. Так, Виет, наряду с записями A cubus $+$ B plano 3 in A (т. е. $A^3 + 3BA$, где B — площадь) в видовой логистике, применяет в числовой логистике сокращения N (numerus, число), Q, C и их комбинации; например: 65 C — 1 QQ aequatur 1, 481, 544 означает по нашей записи: $65x^3 - x^4 = 1481544$, при этом будет 1 N 57, т. е. $x = 57$. Немецкие коссисты применяли особую систему значков для степеней неизвестной; впрочем Штифель иногда обозначал степени различных неизвестных, выписывая нужное число раз основание степени в виде $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}\mathfrak{B}, \ldots$ и т. п. Аналогичное обозначение систематически применял в „Artis analyticae praxis“ (1631) Герриот, обозначавший целые положительные степени неизвестной $a, aa, aaa, \ldots$ У. Оутред в 1631 г. писал сокращенно A, Aq, Ac, Aqq, Aqc и т. д. Дж. Юм (1636) писал вместо AAA уже A^{III}. Современная запись вроде $y^3. y^4$ (но yy, а не y^2) встречается в рукописях Декарта ок. 1629 г. и неизменно применялась им в „Геометрии“ 1637 г. Запись aa или xx, наряду с a^2 и x^2, сохранилась вплоть до К. Гаусса (1777—1855), который указывал, что aa занимает не больше места, чем a^2. Валлис в „De sectionibus conicis“ (1655) применял декартово обозначение степеней, но позднее, например в „Algebra“ 1865 г., возвратился из националистических побуждений к символике Герриота.

Идея об отрицательных и дробных степенях имелась у Шюке, Стевина и др. Валлис в 1655 г. применял к таким степеням термин „показатель“ (index). Ньютон в письме от 13-VI-1676 г. к Ольденбургу распространил декартово обозначение степеней и на эти случаи: „Как алгебристы вместо $aa, aaa, aaaa$ и т. д. пишут a^2, a^3, a^4 и т. д., так я вместо $\sqrt{a}, \sqrt{a^3}, \sqrt{c\,a^5}$ пишу $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{5}{3}}$ и вместо $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{aaa}$ и т. д. пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} и т. д.“ В том же письме он в формуле бинома пишет $\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}}$, а в письме от 24-X-1676 г. к Ольденбургу и $\overline{x\sqrt{2} + x\sqrt{7}}\,\Big|^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}$.

Мнимые показатели ввел в употребление Эйлер (письмо к Иог. Бернулли от 18-X-1740 г.).

Следует упомянуть еще, что у Декарта буквы, обозначавшие коэффициенты, сами по себе считались положительными величинами, и для обозначения отрицательного коэффициента он ставил перед буквой минус, а для неопределенного по знаку коэффициента точку. В 1657 г. Иог. Гудде (1628—1704) обозначал буквенным коэффициентом с предшествующим знаком $+$ как положительные, так и отрицательные числа.

Употребление геометрических терминов измерение (dimensio), квадрато-квадрат, квадрато-куб и т. п. — традиция, восходящая к древним грекам. Валлис подчеркивал неудобство такой quasi-геометрической терминологии, говоря, что „алгебраические степени (potestates) лучше объясняются при помощи арифметических степеней (gradus), чем при помощи геометрических измерений“ (1657). Слово степень (degré, gradus) широко употреблял и Декарт. Термин exponens употреблял при сопоставлении геометрической и арифметической прогрессии М. Штишель. Термин dignitas восходит к Н. Тарталья (1500—1557), potestas — к Виету. См. Tropfke. Цит. соч., т. II, стр. 39—48, 104—134; Cajory. Цит. соч., т. I, стр. 335—360.

[15] (к стр. 15). Знак корня $\surd$, постепенно вытеснивший полное или сокращенное обозначение его Radix, R применявшееся итальянскими, а затем и другими математиками с XIII в., возник у немецких косситов в конце XV в. Вначале квадратный корень обозначали точкой, ставившейся впереди подкоренного выражения, биквадратный — двумя точками, кубический — тремя. Хр. Рудольф в 1525 г. писал для квадратного корня $\surd$, для кубического $\surd\!\surd\!\surd$, а для корня четвертой степени W. Затем стали писать для кубического корня $\surd C$, для корня четвертой или пятой степени $\surd 4$ и $\surd 5$, ставя затем скобку или горизонтальную черту [Декарт. „Геометрия“ и переписка; например $\sqrt[3]{20+\sqrt[3]{392}}$ у него обозначается $\surd 3)\, 20+\surd 392$. Валлис писал вместо нашего $\sqrt[3]{R^2}$ еще $\surd^3 R^2$. Современную запись ввел А. Жирар (1629). См. Cajory. Цит. соч., т. I, стр. 360—379].

В переводе далее всюду запись современная.

[16] (к стр. 15). Большинство математиков еще в XVI в. выражали равенство полным или сокращенным словом „равно“. Современный знак $=$ принадлежит Р. Рекорду (1510—1558), говорившему, что две вещи не могут быть более равными, чем две равных параллельных прямых (1557). Рекорд лишь писал его значительно более удлиненным. В широкий обиход этот символ попал благодаря Оутреду и Валлису. У Виета знак $a = b$ обозначает разность между большей и меньшей из величин a, b; у Декарта в переписке $=$ означало $\pm$, но иногда и равенство (вообще же Декарт обозначал равенство символом ∞). См. Cajory. Цит. соч., т. I, стр. 297—307.

[17] (к стр. 16). Для обозначения арифметической и геометрической пропорции в средние века был предложен ряд обозначений Декарт (рукописи, переписка) писал $a \mid b \parallel c \mid d$ или $a \mid b \mid c \mid d$. Ньютон пользовался широко распространенной символикой У. Оутреда (1631). В 1651 г. Уинг предложил в качестве знака отношения двоеточие и писал пропорции в виде $A:B: :C:D$; также писал их Лейбниц и многие другие, но Лейбниц же в 1708 г. ввел обозначение $a:b = c:d$, перестав различать равенство отношений от равенства величин. См. Cajory. Цит. соч., т. I, стр. 278—279.

В дальнейшем пропорции записаны по-современному; в связи с этим записи типа $a.b::c.d = \frac{bc}{a}$ всюду разбиты на такие: $a:b = c:d$, откуда $d = \frac{bc}{a}$.

[18] (к стр. 19). Мы бы сказали уменьшить на „абсолютное значение отрицательной величины“. Ньютон не имеет специального термина для этого понятия, поэтому несколькими строками далее он говорит о случае, „когда отрицательная величина превосходит положительную“.

[19] (к стр. 20). Звездочка обозначает отсутствие соответствующего члена. Этот символ употреблял при записи уравнений Декарт (1637); он применялся и в XVIII в.

[20] (к стр. 20). У Ньютона стоит: „цифру или 0“. Слово цифра возникло из арабского термина «sifra» (пустое, нуль) и первоначально имело смысл нуля. В английской речи слово cipher сохранило двойное значение и по сие время. У Л. Ф. Магницкого (1669—1739) в „Арифметике“ 1703 г. нуль также называется «цифрою или пичем».

[21] (к стр. 32). Расположение многочленов при делении по убывающим степеням буквы в общем случае рекомендовал, повидимому, впервые Ньютон.

[22] (к стр. 35). Мы видели, что (вслед за древними и средневековыми математиками) Ньютон рассматривал корни как некоторые средние пропорциональные. Например, если $x = \sqrt{a}$, то он определяется из пропорции $1:x = x:a$, если $x_1 = \sqrt[n]{a}$, то $1:x_1 = x_1:x_2 = \ldots = x_{n-1}:a$. В связи с этим извлечение корня рассматривалось как вид деления. Декарт, например, в 1628 г. писал: „Что касается таких делений, в которых делитель не дан, а только обозначен некоторым отношением, как, например, когда говорят, что нужно извлечь квадратный или кубический и т. д. корень, то заметим, что в этих случаях делитель и все остальные члены нужно представлять как линии, образующие ряд непрерывно пропорциональных, из которых первой является единица и

последней делимая величина" („Правила для руководства ума", М., 1936, стр. 171). Скаутен в комментариях к латинским изданиям „Геометрии" также трактует извлечение корней как вид деления.

[23] (к стр. 38). Правила извлечения корней высших степеней, основанные на знании, как выразились бы мы, биномиальных коэффициентов, известны были уже М. Штифелю (1544). См. М. Cantor. Цит. соч., т. II, стр. 433, а также стр. 403.

[24] (к стр. 43). Сокращение дробей у Ньютона называется reductio fractionum ad minimos terminos.

[25] (к стр. 45). Ж. Пелетье (1517—1582) заметил в 1558 г., что корень алгебраического уравнения с коэффициентом 1 при старшем члене есть делитель свободного члена. Это было известно и Декарту, который обосновал на этом правило отыскания целых корней путем деления левой части уравнения на разности $x - a$, где a — делитель свободного члена („Геометрия", стр. 86). Ньютон здесь обобщает задачу, разыскивая для многочлена с целыми коэффициентами целые линейные делители вида $p + qx$.

Доказательства своего правила Ньютон, как и в большинстве случаев, не приводит. Николай I Бернулли (1687—1759) в 1708 г. сообщил доказательство, опубликованное в 1745 г. Доказательство это распространялось и на отыскание квадратичных делителей вида $p + qx + rx^2$. Приведем его краткое изложение для случая линейных делителей.

Следует подчеркнуть, что Ньютон не утверждает, будто найденные таким образом двучлены $x + \frac{p}{q}$ обязательно делят многочлен $f(x)$, но то, что линейные делители могут быть только среди этих двучленов. Ср. М. Cantor. Цит. соч., Leipzig, 1900, т. III, стр. 397—399.

Способ Декарта для разыскания линейных множителей еще ранее Ньютона был несколько усовершенствован Я. ван-Вессенером в приложении к латинскому изданию „Геометрии" Декарта от 1659 г. (см. Cantor. Цит. соч., 1899, т. II, стр. 798). Иог. Гудде в одном из приложений к латинскому изданию „Геометрии" Декарта (De reductione aequationum) сообщил известный способ разыскания кратных корней уравнения.

Об отыскании рациональных корней алгебраического уравнения см. также: А. К. Сушкевич. Основы высшей алгебры. М., 1932.

[26] (к стр. 48). Обоснованием метода Ньютона для случая квадратичных и линейных множителей занимались, кроме Николая I Бернулли, К. Маклорен (1698—1746) в „A treatise of algebra" 1748 г. ч. II, гл. VII) и многие другие ученые. Проблема приводимости алгебраического уравнения, т. е. возможности представления целой рациональной

функции $f(x)$ с рациональными коэффициентами в форме произведения двух аналогичных функций $\varphi(x)\psi(x)$, постепенно становится одной из центральных проблем высшей алгебры. Ею занимались Л. Эйлер, Э. Варинг (1734—1798), Лагранж (1736—1813), К. Гаусс (уравнение деления круга $x^n - 1 = 0$), петербургский академик Ф. Т. Шуберт (1758—1825), Ф. Эйзенштейн (1823—1852), нашедший в 1850 г. важный критерий неприводимости, Л. Кронекер (1823—1891).

Прием разложения приводимого уравнения с целыми коэффициентами изложен в цит. курсе А. К. Сушкевича. См. также „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“, Leipzig, 1898—1904, т. I стр. 238—240.

[27] (к стр. 58). У Ньютона De reductione radicalium ad minimos terminos.

[28] (к стр. 59). У Ньютона De reductione radicalium ad eandem denominationem.

[29] (к стр. 60). Ньютон приводит здесь формулы преобразования

$$\sqrt{A \pm B} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}},$$

которые вошли затем почти во все учебники алгебры; у Маклорена этим и родственным преобразованиям посвящена гл. XIV, ч. 1. Такие преобразования были изучены еще Эвклидом в X кн. „Начал“ для случая соизмеримых в квадрате A и B в связи с классификацией квадратичных иррациональностей, возникающих в задачах, приводящихся к так называемым ныне биквадратным уравнениям.

[30] (к стр. 62). Интерес к рассматриваемому здесь Ньютоном преобравованию $\sqrt[c]{A \pm B}$, где A и B соизмеримы в квадрате, возник в связи с известной формулой для корня кубического уравнения. Представлением $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}$ в виде $a + \sqrt{b}$ занимались еще М. Штифель (1544) и А. Жирар (1629) (см. М. Cantor. Цит. соч., т. III, стр. 446, 789, 797). Эта же проблема занимала Декарта и его последователей. Фр. Скаутен кратко исследовал вопрос о преобразовании корня нечетной степени из $A \pm \sqrt{B}$ в одном из приложений к латинскому изданию „Геометрии“. У Скаутена, между прочим, Ньютон заимствовал первый пример с $\sqrt[3]{25 + \sqrt{968}}$ („Geometria“, 1695, ч. I, стр. 391—394). Валлис посвятил преобразованию кубического корня из такого бинома 47 гл. „Алгебры“, причем сослался на Скаутена. Маклорен в «Алгебре» (ч. I, гл. 14) обосновывает правило Ньютона; подробное

изложение выкладок Маклорена приведено у M. Cantor (Цит. соч., т. III, стр. 590—591). Для случая, когда A или B — мнимые, задачей извлечения корня произвольной степени занялся А. де-Муавр (1667—1754), открывший (1707 и след. годы) формулу, из которой легко получается так называемая ныне формула Муавра, в нынешнем виде приведенная впервые Эйлером во „Введении в анализ“ (1748 г. Ср. M. Cantor. Цит. соч., т. III, стр. 646.

[31] (к стр. 64). Декарт в III кн. „Геометрии„ определяет уравнения, как „суммы, составленные из нескольких членов, которые частью известны, а частью не известны и из которых одни равны другим, или же, лучше, которые, рассматриваемые все вместе, равны ничему; ибо уравнения часто удобнее рассматривать именно последним образом“ („Геометрия“ стр. 75). Систематическая запись уравнения в этой форме — дело Декарта; до того уравнения приводились к форме, в которой с обеих сторон знака равенства стоят члены с положительными коэффициентами.

[32] (к стр. 65). Приведенная форма записи составного коэффициента уравнения столбиком (обведенным еще фигурной скобкой) употреблялась и Декартом; при других буквенных обозначениях ее применял и Виет В настоящем переводе далее запись коэффициентов — современная и звездочки, отмечающие отсутствующие члены, обычно опущены.

[33] (к стр. 68). Как видно, Ньютон не учитывает здесь и далее корень $x = 0$, а также не говорит ничего о появлении новых корней при освобождении от радикалов.

[34] (к стр. 69). Ньютон не оговаривает, что при этой операции утрачивается корень $y = b$, хотя и знает это.

[35] (к стр. 70). О точке, как знаке $\pm$, см. прим. 14.

[36] (к стр. 74). Предлагая для решения систем уравнений способы подстановки и сравнения, Ньютон не выделил особо линейных систем и прошел мимо случаев неопределенных и несовместных систем, а также мимо общего правила решения линейных систем. Лейбниц в письме к Г. Лопиталю (1661—1704) от 28 - IV - 1693 г. и в отдельных рукописных заметках сформулировал правило исключения неизвестных из $n + 1$ линейного уравнения с n неизвестными, соответствующее образованию определителя. Он пользовался при этом своеобразной двойной индексацией коэффициентов (вместо нынешнего $a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0$ он писал $10 + 11\,x + 12\,y = 0$) и особым знаком для выражения, ныне называемого определителем. Лейбниц знал и так называемое правило Крамера для вычисления неизвестных в случае определенной системы. Маклорен в 12 гл. 1 ч. „Алгебры“ привел закон составления числителя и знаменателя дробей, выражающих неизвестные в линейных системах с 2 и 3 неизвестными, и указал на его распространение для случая 4

неизвестных. Г. Крамер (1704—1752) опубликовал свое правило в 1750 г.; о рукописях Лейбница он, повидимому, не знал.

Слово определитель (детерминант — determinans) ввел в смысле дискриминанта квадратичной формы К. Гаусс (1801); О. Коши в 1815 г. применил этот термин в нынешнем смысле. Современный знак определителя предложил в 1841 г. А. Кэли (1821—1895), современную двойную индексацию коэффициентов ввел в 1835 г. К. Якоби (1804—1851).

См. отрывки из математических работ Лейбница в „Успехах математических наук", 1948, т. III, в. 1 (23).

[37] (к стр. 75). Метод исключения (exterminatio) неизвестных из нелинейных систем, предлагаемый Ньютоном, родственен приему, ранее предложенному Ферма. Ньютон лишь начинает с исключения высших степеней, между тем как Ферма пользовался исключением свободных членов. Сходный прием опубликовал в латинском издании «Геометрии» Декарта (1659) Иог. Гудде. См. M. Cantor. Цит. соч., т. II, стр. 804—805, и Г. Цейтен. „История математики в XVI—XVII вв.," пер. П. Новикова под ред. М. Я. Выгодского, М.— Л., 1938, стр. 203.

Проблемой исключения и составлением результантов занимались также Лейбниц, Крамер, Эйлер („Введение в анализ", т. II, гл. 19, 1748), Э. Бэзу (1730—1783) в 1766 и 1779 гг., Лагранж и др.; при этом выяснилась связь с симметрическими функциями корней.

Теорему о числе общих решений двух уравнений $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ степени m и соответственно n, которой занимались Маклорен и Эйлер, более удовлетворительно доказал Безу.

Ньютон, обойдя вопрос о результанте для линейных систем, составляет далее таблицы результантов для ряда уравнений 2, 3 и 4-й степени с одной неизвестной. Термин „результант" ввел в 1776 г. Лаплас.

[38] (к стр. 79). Ньютон называет здесь, в заголовке, иррациональности quantitates surdae, а в тексте вслед за Ферма и Виетом, asymmetriae. Предлагаемый им метод принадлежит Ферма (см. M. Cantor. Цит. соч, т. II, стр. 804).

[39] (к стр. 80). Эти советы интересно сопоставить с весьма сходными указаниями Декарта в разделе I ч. „Геометрии", озаглавленном „Как следует получать уравнения, служащие для решения задач" (русск. пер., стр. 14—15), и советами Оутреда (G. Oughtred. Clavis mathematicae, 4 изд., Oxoniae, 1667, стр. 50).

[40] (к стр. 87). Задачи, подобные V, неоднократно решались арифметиками и до Ньютона. В виде классической задачи о курьерах она вошла затем во множество учебников алгебры, вплоть до А. Киселева, как образец исследования положительного, отрицательного, нулевого, бесконечного и неопределенного решения уравнения первой степени.

Как видно, Ньютон разбирает вопрос далеко не столь общим образом и избегает даже отрицательного решения. Ср. прим. 43.

41 (к стр. 88). В VI—VII задачах Ньютон алгебраически обосновывает тройное правило, являвшееся центральным пунктом арифметических руководств вплоть до XIX в. В следующих задачах он также трактует различные задачи на смеси и сплавы и, в частности, задачу о короне Гиерона, решенную Архимедом (287—212) и встречавшуюся во множестве руководств XVI—XVII вв.

42 (к стр. 93). Югер (jugerum) — римская мера площади в 240×120 фут².

43 (к стр. 96). Изучение удара двух тел сыграло большую роль в развитии механики XVII в. Начало исследованию законов удара положил Г. Галилей (1564—1642); Декарт в 1644 г. выдвинул во многом ошибочную теорию удара. В 1668 г. Лондонское Королевское Общество поставило задачу разработать строгую теорию удара и в течение года получило сообщения Дж. Валлиса, К. Рена (1632—1723) и X. Гюйгенса (1629—1695). Валлис рассмотрел при этом удар неупругих тел (случай упругих тел он изучил несколько позднее), а Рен и Гюйгенс сформулировали основные законы удара упругих тел. Ньютон посвящает удару несколько страниц „Поучения“ к его законам движения в „Математических началах натуральной философии“. В XII задаче „Всеобщей арифметики“ Ньютон алгебраически выводит формулы для скоростей, приобретаемых упругими шарами после соударения (в „Началах“ этих формул нет). Эти же формулы в других обозначениях приведены в 12 гл. 3 части „Механики или геометрического трактата о движении“ (Mechanica sive de motus tractatus geometricus) Валлиса (см. его „Opera“, т. I, стр. 1029—1031).

По истории вопроса см.: Ф. Розенбергер. „История физики“. Пер. под ред. И. Семенова, перераб. В. С. Гохманом, М.— Л., 1933, ч. II, стр. 122—123, 180—182; Э. Мах. „Механика“. Пер. Г. А. Котляра под ред. Н. А. Гезехуса, СПб., 1909, стр. 271—289, J. F. Scott. The mathematical work of John Wallis, London, 1938, стр. 91—126.

См. также: И. Ньютон. „Математические начала натуральной философии“. Пер. А. Н. Крылова в „Собрании трудов академика А. Н. Крылова“. М.— Л., 1936, т. VII, стр. 51—54.

Интересно отметить, что, в противоположность задаче V, где скорости берутся лишь положительные, в настоящей задаче Ньютон рассматривает направленные скорости со знаками.

44 (к стр. 97). Ср. стр. 76—77 и 80—81 настоящего перевода.

45 (к стр. 102). А. Клеро (1713—1765) в своих „Eléments d'algèbre“ 1746 г. подходит к квадратным уравнениям, ставя задачу, сходную с настоящей: „Некто поместил капитал a в убыточное предприятие и

желал выйти из него в первый же год, но, упустив случай и оказавшись в состоянии это осуществить лишь во втором, или в третьем или вообще n-ом году, нашел, что капитал стал на b меньше, чем в конце первого года. Каков процент его потери в год?" При $n = 2$ возникает квадратное уравнение $a\left(1-\frac{x}{100}\right)^2 = a\left(1-\frac{x}{100}\right) - b$, где x — процент (изд. 1760 г., стр. 108). За этим у Клеро следует известная задача о двух источниках света, в которой один из корней квадратного уравнения — отрицательный (там же, стр. 119).

[46] (к стр. 108). Здесь и далее Ньютон ссылается на издание „Начал„ Барроу (Euclidis elementorum libri XV breviter demonstrati, opera I. Barrow. Londini, 1659). В аксиоме 19 этого издания утверждается, что целое равно сумме всех своих частей. Предл. 47 кн. I содержит так называемую теорему Пифагора. В предл. 4 кн. VI говорится о том, что в равноугольных треугольниках стороны, противолежащие равным углам, между собою пропорциональны.

Интересно отметить, что У. Оутред в 18 гл. „Ключа к математике" советовал аналистам всегда помнить ряд геометрических теорем; список рекомендуемых им предложений „Начал" Эвклида значительно обширнее, чем у Ньютона. См. 4-е издание „Clavis mathematicae", Oxoniae, 1667, стр. 67—73.

[47] (к· стр. 109). Вот краткое содержание соответствующих теорем „Начал".

I, 5: в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

I, 13: о сумме смежных углов.

I, 15: о равенстве вертикальных углов.

I, 29: о свойствах углов, образуемых прямой, пересекающей две параллельные прямые.

I, 32: о сумме углов треугольника и о равенстве внешнего угла сумме внутренних, с ним не смежных.

VI, 4: см. прим. (46).

VI, 5—7: о различных случаях подобия треугольников.

VI, 8: высота, опущенная в прямоугольном треугольнике на гипотенузу, делит его на два треугольника, подобных целому и подобных между собою.

III, 20, 21, 27: о свойствах вписанных и центральных углов в круге.

III, 22: о сумме противолежащих углов во вписанном в круг четырехугольнике.

III, 31: об угле, вписанном в полуокружность.

III, 36: о равенстве произведения отрезков секущей и ее внешней части квадрату касательной, проведенной к окружности из той же точки.

III, 37: если из точки вне окружности проведены к ней секущая и другая прямая, оканчивающаяся на окружности, и если произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату названной прямой, то последняя касается окружности.

VI, 3: речь идет о том, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные другим сторонам.

[48] (к стр. 109). VI, 1: площади треугольников или параллелограмов с равными высотами относятся, как их основания.

[49] (к стр. 109). См. следующую затем в тексте первую из геометрических задач.

[50] (к стр. 110). В переводе сохранена терминология Ньютона, который не употребляет слов „биссектриса", „катеты" и т. п.

Теорему о квадрате биссектрисы легко доказать, если вокруг треугольника ABC описать окружность, продолжить биссектрису AD до ее пересечения с окружностью, точку пересечения E соединить с двумя другими вершинами и воспользоваться подобием треугольников ABD и AEC, а также теоремой о произведении отрезков хорд, проходящих через данную точку.

Далее Ньютон рекомендует пользование так называемой теоремой К. Птолемея (100—178), лежавшей в основе исчисления хорд, которое заменяло древним тригонометрию.

Известный комментатор Эвклида Р. Симсон (1687—1768) ввел впоследствии в свои издания „Начал" (1758 и ряд переизданий) и теорему о квадрате биссектрисы и теорему Птолемея.

[51] (к стр. 112). II, 12: о квадрате стороны треугольника, лежащей против тупого угла.

II, 13: о квадрате стороны треугольника, лежащей против острого угла.

[52] (к стр. 114). Здесь Ньютон очень подробно развивает те краткие советы, которые предлагал для составления уравнений в геометрических задачах Декарт („Геометрия", русск. пер., стр. 14). Ср. прим. 39.

[53] (к стр. 120). Любопытно, что Ньютон не упоминает здесь имени Декарта, как основателя применяемого им метода! Лишь в конце задачи LXI он все же ссылается на Декарта. См. стр. 243 настоящего перевода.

[54] (к стр. 121). Ньютон ни здесь, ни в других задачах не пользуется уравнением прямой, как не пользовался им и Декарт (хотя оба они, конечно, знали, что линейное уравнение принадлежит прямой). И здесь и в других задачах Ньютон определяет положение прямой какой-либо ее точкой и углом с прямой, служащей осью, причем фактически задает тангенс этого угла, хотя и не употребляет тригонометрических

символов и терминов. Уравнение прямой имелось в рукописном мемуаре Ферма, составленном до 1634 г. и опубликованном в 1679 г. (русск. пер. в „Геометрии“ Декарта, стр. 138—139). В печати оно встречается впервые в статьях Дебона и Скаутена в латинских изданиях „Геометрии“ Дектара 1649 и соответственно 1659 гг.

Ньютон не вводит явным образом вторую ось координат (он не сделал этого и в „Перечислении кривых третьего порядка“, составленном не позднее 1676 г. и опубликованном в 1704 г., хотя на чертежах там нарисованы обе оси). См. также прим. 67.

Уравнение кривой, о которой идет речь в тексте, Ньютон выводит несколько далее. Это — так называемая каппа-кривая, придуманная учеником Декарта Г. ван-Гутшовеном.

[55] (к стр. 127). Ньютон (как и Декарт) понимает всегда под основанием прямоугольного треугольника гипотенузу, а под его сторонами — катеты.

Термин гипотенуза („натянутая под“, т. е. под прямым углом) встречается в этом смысле еще у Эвклида. Позднейшие математики рисовали обыкновенно прямоугольный треугольник так, что одна из сторон, содержащая прямой угол, была горизонтальной и ее называли основанием; вторую из этих сторон называли катетом (по-гречески — отвес). Обе эти стороны названы были катетами в XVII в. На чертежах Ньютона гипотенуза расположена горизонтально, с чем и связана, вероятпо, его терминология. Замечу попутно, что ряд аналогичных задач на треугольники решил в 19 гл. „Ключа к математике“ Оутред (в частности, VI задача Ньютона совпадает с 10 задачей Оутреда).

[56] (к стр. 135). Для обозначения тригонометрических линий в XVI—XVII вв. был предложен целый ряд сокращений употребительных терминов, а также специальных символов. Историю их см. у C a j o r y. Цит. соч., т. II, стр. 142—179. Термин „синус“ (впадина, изгиб, пазуха) появился в XII в. как перевод арабского слова, в свою очередь бывшего переводом индусского термина для полухорды. Линию косинуса, также примененную впервые индусами, долгое время называли sinus complementi т. е. синусом дополнепия; термин cosinus ввели Э. Гунтер (1581—1626) и Дж. Ньютон (1622?—1678); Дж. Ньютон ввел также слово cotangens вместо употребительного ранее tangens complementi. Линии тангенса и котангенса начали применять арабские математики (Абуль Вафа, 940—998); слово tangens (касающийся) предложил Т. Финк (1561—1656).

Ньютон писал тригонометрические соотношения в форме пропорций; в значительной мере это было связано с тем, что тригонометрические линии тогда еще рассматривались в круге произвольного радиуса R, называвшегося полным синусом, sinus totus (аналитической трактовкой тригонометрических функций и почти вполне современной символикой мы обязаны Эйлеру). В переводе запись следует англ. изд. 1728 г.

В X задаче Ньютон получает, в современных обозначениях, что

$$\frac{c}{a+b}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin CEA}.$$

Так как $\sphericalangle CEA=90^\circ-\frac{1}{2}(A-B)$, то $\sin CEA=\cos\frac{A-B}{2}$; таким образом, Ньютон фактически устанавливает одну из так называемых формул К. Мольвейде (1774—1825), опубликованную Мольвейде в 1808 г.

[57] (к стр. 137). В XI задаче выводится ряд важных тригонометрических формул. Если несколько изменить обозначения Ньютона, положив $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, и взять $R=1$, то во II теореме он (впервые) приводит формулу

$$\sin A=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc},$$

где $2s=a+b+c$. В теоремах IV, V, VI Ньютон сообщает почти современный вид известным уже ранее формулам для функций половин углов, которые мы пишем в форме

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};$$

далее он выводит так называемую формулу Герона (между I в. до н. э. и III в. н. э.). Ср. A. v. Braunmühl, „Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie“, ч. I, Leipzig, 1900 (по именному указателю).

[58] (к стр. 139). Синус-верзус A это $R(1-\cos A)$. Линию синус верзуса также ввели индусы. Термин этот появился в переводной европейской литературе в XII в.

[59] (к стр. 143). I, 19: в треугольнике против большего угла лежит бо̀льшая сторона.

V, 9: из $A:C=B:C$, а также из $C:B=C:A$ следует, что $A=B$.

[60] (к стр. 148). Эта задача весьма сходна с задачей Скаутена в "Трактате о получении геометрических доказательств с помощью алгебраического искусства" (Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis etc.) приложенном к латинскому изданию „Геометрии" Декарта (изд. 1695 г., т. II, стр. 398—399).

[61] (к стр. 149). Термин „прямая" или „данная прямая" обозначал у Ньютона отрезок. Говоря о „прямой, данной по положению", Ньютон имеет в виду прямую, заданную только положением, т. е. неопределенной длины.

[62] (к стр. 154). Задача XXIII весьма напоминает восходящую к Аполлонию и Эвклиду задачу Паппа (конец III в.), к решению которой Декарт прежде всего применил свой аналитико-геометрический метод. В задаче Паппа требовалось определить геометрическое место точек M, обладающих тем свойством, что произведение отрезков d_1, d_2, проведенных из точки M под заданными углами к двум данным прямым l_1, l_2, находится в данном отношении λ к проведению отрезков d_3, d_4, проведенных из точки M под заданными углами к другим двум прямым l_3, l_4 Декарт применяет косоугольные координаты, выбирая за оси одну из данных линий и одну из не заданных, выводит уравнение и, опираясь на теоремы Аполлония, показывает, что искомое место есть коническое сечение. Задача XXIII Ньютона — определенная. Если уравнения четырех данных прямых записать в виде

$$f_i = a_i x + b_i y + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

то отрезки d_i отличаются от f_i лишь постоянными множителями (Ньютон и получает линейные выражения для d_i). Уравнения задачи будут

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) = m,$$

$$(a_3 + \lambda a_4) x + (b_3 + \lambda b_4) y + (c_3 + \lambda c_4) = n.$$

Ср. русск. пер. „Геометрии" Декарта, стр. 18—26, 36—44.

Задачу Паппа — Декарта Ньютон рассмотрел в „Математических началах", где привел ее чисто геометрическое решение и исследование. "Такое решение,— писал он,— как приведенное выше, т. е. исполняемое геометрическим синтезом, а не вычислением, и изыскивалось древними". Как известно, в "Началах„ Ньютон стремился все изложение построить на геометрических основах и в принципе он предпочитал алгебраической трактовке задач их чисто геометрические доказательства. В приведенной фразе Ньютон в скрытом виде полемизирует с Декартом (см. „Математические начала натуральной философии", рус. пер., стр. 121—122). Ср. стр. 295 и след. и 325 и след. настоящего перевода.

[63] (к стр. 157). Задачи на „вставки“ (т. е. на проведение между двумя данными линиями отрезка данной длины, который сам или продолжение которого проходит через данную точку) занимали видное место в античной математике. К „вставкам“ сводились разнообразные проблемы, не поддающиеся решению при помощи циркуля и линейки, например трисекция угла; возможно, что в течение некоторого времени построения посредством вставок считались равноправными с построениями посредством циркуля и линейки; вставку легко механически производить при помощи линейки, на которой нанесен отрезок данной длины. Вставками пользовались среди других геометров Архимед и Аполлоний (265?—170); со вставкой связано определение конхоиды Никомеда (ок. 180 до н. э.). См. Г. Цейтен. „История математики в древности и в средние века“. Пер. П. С. Юшкевича, М.— Л., 1938, стр. 63—65.

К трисекции угла и решению кубического уравнения в неприводимом случае вставку применил позднее Виет (Г. Цейтен. „История математики в XVI—XVII вв.“, стр. 130—132). Вставками занимались и многие другие математики той эпохи. Ньютон применяет вставки далее при построении уравнений высших степеней.

Задача XXIV Ньютона решается, как видно, при помощи циркуля и линейки, и такое решение ее было известно еще в древности, в частности Паппу. В новое время ею занимались А. Жирар, Р. Декарт, М. Гетальди (1566—1627) и X. Гюйгенс. Жирар (1629) привел задачу к уравнению четвертой степени и между прочим показал, как связан выбор знаков перед радикалами, входящими в корни уравнения, с положением отрезка (Г. Цейтен, ч. II, стр. 123). Декарт в „Геометрии“ (русск. пер., стр. 93—94) выбирает за неизвестную отрезок, соответствующий на чертеже Ньютона отрезку DE, получает полное уравнение четвертой степени и показывает, что оно распадается на два уравнения второй степени. Попутно Декарт замечает, что если бы за неизвестные были взяты некоторые другие отрезки (например, CE), то соответствующие уравнения четвертой степени привести было бы легче. „Я указываю на это с целью предупредить вас, что... когда, решая ее (задачу.— *А. Ю.*) одним путем, приходишь к очень сложному уравнению, то решая ее другим путем, можно обыкновенно притти к более простому уравнению“. Такое более простое решение дал в латинском издании „Геометрии“ Скаутен (изд. 1695 г., ч. I, стр. 315—317).

Ньютон весьма детально развивает в связи с этим общие соображения о наиболее выгодном выборе неизвестной и рекомендует выбирать такую величину, равноправной с которой в отношении к другим величинам, входящим в задачу, не имеется. В качестве неизвестной он поэтому принимает в первом решении CG, а в конце задачи еще $AK = y$

Квадратное относительно y уравнение получается, если провести AG, из подобия треугольников KGC и KAG.

$$CK \cdot AK = GK^2 = AG^2 - AK^2,$$

т. е.

$$(e + y)\,y = b^2 - y^2.$$

Ср. также XV из арифметических задач Ньютона (стр. 99).

[64] (к стр. 166). Формулы Ньютона сразу принимают современный вид, если заменить x на $\cos A$ и положить $2r = 1$.

Выражения для хорд n-кратных дуг для нескольких первых значений n привел еще Виет, использовавший их для вычисления таблиц синусов, а также (при $n=3$) для тригонометрического решения кубического уравнения в так называемом неприводимом случае (см. Цейтен, ч. II, 129—130). Этой задачей занимались также Оутред и Валлис, в 1685 г. исследовавший уравнения деления угла до $n = 7$.

В письме Ньютона к Лейбницу от 13-VI-1676 г. приводится выражение хорды n-кратной дуги окружности диаметра d через хорду x однократной дуги

$$nx + \frac{1 - nn}{2 \times 3\,dd}\,xxA + \frac{9 - nn}{4 \times 5\,dd}\,xxB + \frac{25 - nn}{6 \times 7\,dd}\,xxC + , \ldots ,$$

где $A, B, C, \ldots$ означает всякий раз весь предыдущий член. При $d = 2$, $x = 2\sin\varphi$ получается известная формула $\sin n\varphi = n\sin\varphi - \frac{n(n^2-1)}{3!}\sin^3\varphi + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{5!}\sin^5\varphi - \ldots$ Ньютон указывал, что „когда n число нечетное, ряд перестает быть бесконечным и обращается в ряд, который получается при помощи обыкновенной алгебры в случае умножения данного угла на это число n“. В письме к Лейбницу от 24-X-1676 г. Ньютон „для построения таблицы синусов, от которой зависят все тригонометрические вопросы“, дает правило последовательного вычисления синусов и косинусов кратных углов (общие формулы он не выписывает); при этом используется почти тот же чертеж, что и в настоящей XXIX задаче. См. И. Ньютон. „Математические работы“. Пер. Д. Д. Мордухай-Болтовского, М.— Л., 1937, стр. 224, 249—250.

Разложения $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ вывел также Я. Бернулли (1654—1705) в 1702 г., а $\operatorname{tg} n\varphi$ — Я. Германн (1678—1733) в 1706 г. В дальнейшем разложения для $\cos nx$ и $\sin nx$ сыграли большую роль в теории комплексных величин и теории рядов (А. Муавр, Л. Эйлер).

[65] (к стр. 168). Эта интересная аналитико-геометрическая задача на определение наклона прямой линии представляет собой упрощенный вариант гораздо более трудной и весьма важной задачи астрономии, решаемой Ньютоном в „Математических началах". „Определить по заданным трем наблюдениям орбиту кометы, движущейся по параболе" (см. „Математические начала натуральной философии", стр. 610—611, 616—621). Стоит отметить, что с теорией кометных движений связаны были у Ньютона решение задачи о проведении параболической кривой $y = a_0 + a_1 x + \ldots a_{n-1} x^{n-1}$ через n заданных на плоскости точек (там же, стр. 608—610), которую он предлагал использовать для приближенного вычисления площадей, а также его известные интерполяционные формулы (см. „Математические работы", стр. 210—217).

Задача об определении расстояния кометы от Земли была поставлена перед Валлисом в 1661 или 1662 г. К. Реном. Валлис сообщил свое решение в „Алгебре", сведя вопрос к геометрической задаче об определении прямой, которую четыре данные прямые делят на части в определенных отношениях („Opera", т. II, Oxoniae, 1693, гл. 105). См. далее прим. 87 к задаче LVI.

[66] (к стр. 169). Ряд аналогичных задач Ньютон решил в „Лекциях по оптике", читанных в 1669—1671 гг., но изданных посмертно (перевод, комментарий и редакция академика С. И. Вавилова, изд. АН СССР, 1946; см. раздел 4).

[67] (к стр. 171). Теория конических сечений получила детальное развитие в "Конических сечениях" Аполлония. В 13 предл. 1 кн. этого труда Аполлоний показал, что замкнутое сечение косоугольного конуса плоскостью обладает следующим свойством: квадрат полухорды, параллельной прямой, по которой пересекаются плоскость основания с секущей плоскостью, равен прямоугольнику, построенному на „прямой стороне" и отрезке диаметра между вершиной сечения и этой полухордой, уменьшенному на прямоугольник, одна из сторон которого есть тот же отрезок диаметра, а другая относится к первой, как прямая сторона к диаметру (прямая сторона, по-латыни latus rectum, численно равна нашему удвоенному параметру). Это сечение называется эллипсом. Приведенное свойство лежит в основе дальнейших исследований, относящихся к эллипсу; в частности, оно распространяется на любые диаметры и сопряженные с ними хорды. Если за начало координат взять левую вершину диаметра, принятого за ось Ox, направление (сопряженных) хорд взять за направление ординат, обозначить прямую сторону l и длину диаметра d, то мы сейчас же находим уравнение эллипса, отнесенного к вершине

$$y^2 = lx - \frac{l}{d} x^2.$$

В предл. 11 и 12 Аполлоний вывел аналогичные свойства других сечений, параболического и гиперболического, которые мы выражаем соответственно уравнениями

$$y^2 = lx \quad \text{и} \quad y^2 = lx + \frac{l}{d}x^2.$$

(Ср. Г. Вилейтнер „Хрестоматия по истории математики", М.— Л., 1936. Пер. П. С. Юшкевича и А. П. Юшкевича, стр. 124—130; Г. Цейтен, ч. I, стр. 135—139).

Ферма и Декарт, закладывая основания аналитической геометрии (термин этот — позднейшего происхождения), отправлялись от "Конических сечений" Аполлония. Уравнения второй степени, получаемые Ферма, представляют собой перевод при помощи символики Виета некоторых свойств, „симптомов" конических сечений; декартов анализ уравнения геометрического места точек, удовлетворяющих условию задачи Паппа в случае четырех прямых, также приводится в конце концов к аналогичному переводу („Геометрия", русск. изд., стр. 37—44, 139—146). Последующие авторы прежде всего распространили метод Декарта на рассмотрение отдельных форм уравнений, не изученных в его „Геометрии", и на решение некоторых задач. Важный шаг вперед сделал Дж. Валлис в „Tractatus de sectionibus conicis, nova methodo expositis", 1655. Во второй части этого сочинения Валлис ставит своей целью аналитический вывод разнообразных свойств конических сечений, как более общий и ясный, но не менее научный. Для этого он заново определяет параболу, эллипс и гиперболу, уже не стереометрически, а как кривые на плоскости, „в соответствии с их абсолютной природой" и независимо от их происхождения — из пересечения конуса или как-либо иначе. „Параболой, — писал он,— я называю кривую, квадраты ординат (ordinatim-applicatarum) которой пропорциональны отрезкам диаметра (interceptis — diametris)". Эллипс он определяет как кривую, квадраты ординат которой пропорциональны произведениям отрезков, отсекаемых ординатами на диаметре (свойство это было известно Аполлонию и как раз его использовал Ферма); затем он относит эллипс к вершине. В результате, обозначая ординаты трех кривых p, e, h, а абсциссу одинаково d, Валлис получает уравнения

$$p^2 = ld, \qquad e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2, \qquad h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2.$$

Показав, что определенные таким образом линии совпадают с сечениями конуса, Валлис затем исследует некоторые свойства кривых, не прибегая более к теории конических сечений Аполлония. Кроме того, он рассматривает кривые с уравнениями типа $y^n = a^{n-1}x$ при четном и нечетном n и первый вводит в употребление отрицательные абсциссы (а не только отрицательные ординаты, как это сделал уже Декарт). Достаточно полное и не зависящее от „Конических сечений“ Аполлония аналитическое построение теории кривых второго порядка дал во втором томе „Введения в анализ“ (Introductio in analysin infinitorum, 1748) Эйлер (см. W a l l i s. Opera, т. I, стр. 296, 319; H. W i e l e i t n e r. Geschichte der Mathematik, ч. II, Leipzig, 1921, гл. I, § 2—3).

В XXXII задаче Ньютон с большой простотой показывает, что сечения конуса характеризуются все теми же уравнениями относительно вершины. Утверждая, что эти уравнения принадлежат эллипсу, гиперболе и параболе, он, повидимому, принимает валлисовы определения названных линий.

Относительно терминологии Ньютона в аналитической геометрии нужно заметить следующее. Аполлоний, говоря об отрезках диаметра конического сечения между вершиной и сопряженной хордой, именовал их „отсекаемыми на диаметре по порядку проведенными“ прямыми. В латинском издании 1566 г. аполлониевых „Конических сечений“ Ф. Коммандино (1509—1575) эти обороты речи переведены были ordinatim applicatae, т. е. „по порядку приложенные“, и quae ab ipsis ex diametro ad verticem' abscinduntur. Декарт писал в „Геометрии“ segmens de diamètre и appliquée par ordre, в письмах иногда он употреблял и слово ordonuée. Позднее ординату называли то ordonnée, то appliquée, и лишь в XVIII в. прочно укоренился первый термин. Слово abscissa в смысле отрезка употреблял Б. Кавальери (1591?—1647), в современном смысле — Г. Лейбниц в письмах к Ольденбургу от 26/X и 1/XI 1675 г. Лейбниц систематически применял термины „абсцисса“ и „ордината“ и ввел в 1692 г. слово coordinatae, подчеркнув тем самым равноправие абсцисс и ординат. Ньютон чаще писал ordinatim applicata; во „Всеобщей арифметике“ употребляются оба слова — „ордината“ и „абсцисса“,— но наряду с этим абсцисса называется и „неопределенной линией“, к которой приложена или приставлена ордината, и „отсекаемой частью оси“.

Начало координат долгое время называли principium либо initium abcsissarum; слово origine в 1679 г. употребил Ф. Лагир (1640—1718); слово „ось“ — в 1670 г. И. Барроу (1630—1677).

[68] (к стр. 172). Поверхность, о которой идет речь в XXXIII задаче, есть однополостный гиперболоид вращения. Древним из поверхностей второго порядка были известны, не считая конуса и цилиндра, „сфероиды“ и „коноиды“—эллипсоиды, параболоиды и двухполостные гиперболоиды вращений, рассматриваемые, правда, не как поверхности, но как тела. Ферма установил наличие общих поверхностей последних типов, которые он называл «косыми», scalenos, а также гиперболических

и параболических цилиндров. Валлис в 1670 г. ввел однополостный гиперболоид вращения, „гиперболический цилиндроид", и исследовал некоторые его сечения.

Общие идеи аналитического исследования пространственных фигур намечены были Декартом и Ферма весьма бегло. Первое уравнение поверхности — параболоида вращения — вывел в 1679 г. Ф. Лагир. А. Паран (1666—1716) вывел в 1700 г. уравнение сферической поверхности. Подлинные основания аналитической геометрии в пространстве заложены были А. Клеро в 1731 г., а общее, хотя и не полное исследование поверхностей 2-го порядка провел впервые Эйлер в 1748 г.

Плоскость $IKLQ$ Ньютон предполагает перпендикулярной к плоскости сечения GHM.

[69] (к стр. 174). Циссоида — кривая, примененная Диоклом (ок. 180 до н. э.) к задаче об удвоении куба, определяется следующим образом. В круге проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD и в конце D второго из них касательная DF. От точки A откладываются на окружности произвольные, но равные дуги AG и AE, проводится GH параллельно AB и прямая CE; место точек M пересечения GH и CE есть циссоида. Точки циссоиды получаются и при откладывании на CF в направлении к C отрезков $FM = CE$, вместе с тем $CM = EF$ (при нанесении отрезков $FM' = CE$ в обратную сторону получается кривая, называемая „сопровождающей циссоиды").

Древние рассматривали лишь часть кривой внутри круга. В XVII в. замечена была бесконечность ветвей; об этом, например, говорит Роберваль (1602—1675) в письме к Ферма в 1640 в. Циссоида явилась одной из кривых, к которым прежде всего приложены были новые методы исчисления бесконечно малых. Касательную к ней построили Роберваль и Ферма; Гюйгенс и Ферма определили площадь между кривой и асимптотой; Ньютон в „Методе флюксий" (1671 г., опубл. 1736 г.) произвел ее спрямление. Уравнение циссоиды в декартовых координатах было опубликовано в „Анализе бесконечно малых" Лопиталя (1697) в виде $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$.

В XXXIV задаче Ньютон дает способ „органического" описания циссоиды путем непрерывного движения точки некоторого прибора (ср. прим. 89). В „Перечислении кривых третьего порядка" Ньютона циссоида входит в группу семи „дефективных гипербол, имеющих диаметр" и вид ее имеет № 42 („Математические работы", стр. 202). Далее, в конце настоящего сочинения (стр. 323) Ньютон применяет циссоиду к построению двух средних пропорциональных (к которому сводится задача об удвоении куба). Циссоида встречается также в „Лекциях по оптике" Ньютона в связи с изучением преломления лучей плоскостями (см. „Лекции по оптике". Пер. академика С. И. Вавилова, изд. АН СССР, 1946, стр. 87).

[70] (к стр. 176). Это предложение было известно по крайней мере Проклу (V в.). Ф. ван-Скаутен в 1656—1657 гг. доказал более общую аналогичную теорему о кривой, которую описывает точка, жестко связанная с отрезком, концы которого движутся по двум прямым. В следующей, XXXVI, задаче Ньютон тоже дает некоторое обобщение того же предложения. Как известно, задача XXXV вошла в позднейшие задачники по аналитической геометрии.

[71] (к стр. 179). Постоянство отношения расстояний точки конического сечения от фокуса и директрисы, о котором идет речь в XXXVII задаче, известно было Паппу. В дошедших до нас сочинениях Аполлония это свойство не упоминается.

[72] (к стр. 179). Для обозначения различных производных пропорций переводчики эвклидовых „Начал" на латинский язык употребляли следующие термины. Если

$$a : b = c : d,$$

то составление пропорций

$a : c = b : d$	называлось	permutando, alternando
$b : a = d : c$	„	invertendo
$\left.\begin{array}{l}(a+b) : b = (c+d) : d \\ (a+c) : c = (b+d) : d\end{array}\right\}$	„	componendo
$\left.\begin{array}{l}(a-b) : b = (c-d) : d \\ (a-c) : c = (b-d) : d\end{array}\right\}$	„	dividendo
$\left.\begin{array}{l}a : (a \pm b) = c : (c \pm d) \\ a : (a \pm c) = b : (b \pm d)\end{array}\right\}$	„	convertendo
$\left.\begin{array}{l}(a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d) \\ (a+c) : (a-c) = (b+d) : (b-d)\end{array}\right\}$	„	mixtim

В настоящем переводе сохранены латинские термины, для которых не имело смысла придумывать особые русские словообразования.

[73] (к стр. 180). Уравнения типа $xy + ax + by = c$ рассмотрел еще Ферма в своем рукописном мемуаре по аналитической геометрии, а затем Дебон в 1639 г. (комментарии к латинскому изданию „Геометрии" Декарта 1649 г.; сам Декарт прошел мимо этого случая; ср. русск. пер. „Геометрии", стр. 218—219).

Термин „неопределенные" (indeterminatae), вместо позднейшего „переменные", применял и Декарт.

74 (к стр. 180). Задачу об окружности Аполлония аналитико-геометрически решил Дебон в лат. изд. „Геометрии" Декарта 1649 г. (изд. 1695 г., стр. 123—126).

75 (к стр. 182). Эта задача была рассмотрена также в „Лекциях по оптике" Ньютона. Решение там основано на вставке в прямой угол некоторого отрезка, проходящего через данную точку (ср. прим. 63 к задаче XXIV), причем указывается, что Барроу решил эту задачу на вставку с помощью пересечения гиперболы и круга (см. И. Ньютон. „Лекции по оптике". Пер. академика С. И. Вавилова, стр. 76—77).

76 (к стр. 188). Там, где мы говорим о „ветвях" гиперболы, Ньютон, следуя Аполлонию, говорит о „противолежащих гиперболах", хотя обе ветви рассматриваются как принадлежащие одной линии.

77 (к стр. 190). Ньютон, очевидно, имеет в виду, что в условиях задачи XLIV можно считать известной и точку B, симметричную с точкой A относительно биссектрисы FC угла EFG и на его чертеже обозначенную буквой I.

78 (к стр. 193). Термином „неявный корень" переведено radix affecta, англ. affected root. В других работах Ньютон говорит и aequatio affecta. Думаю, что такой перевод, предложенный еще Д. Д. Мордухай-Болтовским (см. И. Ньютон. „Математические работы", стр. 274), более удачно передает смысл понятия, чем дословный (affectus — наделенный, находящийся в некотором состоянии). Точнее говоря, aequatio affecta есть уравнение, содержащее несколько степеней неизвестной; уравнение, вроде $x^n = a$, к этой категории не относится. Академик В. Я. Буняковский в своем известном „Лексиконе чистой и прикладной математики" (СПб., 1839, т. I, стр. 12) переводил этот термин через „многочленное уравнение". Ср. Wallis. Opera, т. II, стр. 128.

79 (к стр. 193). Ч. т. с. — что требовалось сделать (quod erat faciendum). В „Началах" Эвклида доказательство теоремы заканчивалось словами „что требовалось доказать" (лат. — quod erat demonstrandum), решение задачи — словами: что требовалось сделать.

80 (к стр. 196). Эта задача восходит к Аполлонию. См. M. Cantor. Цит. соч., т. I, стр. 345.

81 (к стр. 199). Задача Аполлония о соприкасающихся кругах неоднократно привлекала внимание математиков XVII — XVIII вв. Ею занимались, в частности, Ф. Виет, И. Г. Ламберт (1728 — 1777), Л. Эйлер, академик Н. И. Фусс (1755 — 1826). Декарт дал аналитическое решение этой задачи для случая внешнего касания в письмах к принцессе Елизавете 1643 г. (См. его „Oeuvres", т. IV, Paris, 1901, стр. 37—42, 45—50). Ферма обобщил эту задачу на случай четырех шаров. Ряд родственных задач был поставлен и решен также Г. Крамером, Д. Ф. Кастильоном (1708—1791), Лагранжем, Д. Ф. Мальфатти

(1731—1807), а также Ж. Жергонном (1771—1859) и многими математиками XIX в. См. Cantor. Цит. соч., т. IV, стр. 378—380, H. Wieleitner. Geschichte der Mathematik, Berlin u. Leipzig, 1923, ч. II, стр. 142—143. Ср. также 3 следствие из XVI леммы кн. I „Математических начал" Ньютона и примечание к ней А. Н. Крылова (стр. 112—113). См. также Р. Курант и Г. Роббинс. „Что такое математика". Гостехиздат, 1947, стр. 184 и 229.

[82] (к стр. 204). Эта знаменитая задача получила широкое распространение в руководствах по алгебре, особенно благодаря „Универсальной арифметике" Л. Эйлера (СПб., 1768—1769).

[83] (к стр. 207). Построение уравнения означает построение отрезков, равных его корням, при помощи пересечения кривых. Ньютон посвятил построению уравнений последний раздел „Всеобщей арифметики".

[84] (к стр. 219). Неопределенным образом — indefinite. Ср. прим. 73.

[85] (к стр. 220). Ср. прим. 7.

[86] (к стр. 226). В некоторых изданиях „Всеобщей арифметики" в условии задачи LV расстояние $AB = 30$ ф., а в решении $AB = 33$ ф. Задача эта была рассмотрена в одном сочинении Я. Вессенера (1640). Подробный разбор ее привел Ф. Скаутен (лат. изд. „Геометрии" Декарта, 1695, т. I, стр. 369 и сл.).

[87] (к стр. 227). Синтетическое построение этой задачи Ньютон дал в „Математических началах" (русск. пер., стр. 147—149). При этом он указал, что другие решения этой же задачи нашли Рен и Валлис. Ср. выше прим. 65.

[88] (к стр. 230). Разумеется, при сравнении величин $\frac{bd}{fc}$ и $\frac{p^2}{f^2}$ Ньютон имеет в виду абсолютное значение $\frac{bd}{fc}$.

[89] (к стр. 230). Задача LVII и следующие были синтетически решены Ньютоном в IV и V отделах I кн. „Математических начал". Вопрос об определении конических сечений по пяти условиям, включавшим прохождения через данные точки и касания с данными прямыми, интересовал еще Б. Паскаля (1623—1662). Насколько далеко продвинулся он в этом направлении, мы не знаем, но, как известно, при помощи теоремы Паскаля о вписанном в коническое сечение шестиугольнике подобные построения получаются довольно просто (Ср. B. Pascal. Oeuvres complètes. Paris, 1858, т. II, стр. 354—357, 639). Ньютон, по его собственным словам, подошел к этим задачам, исследуя вопрос об определении по трем наблюдениям орбиты кометы, движущейся по параболе („Математические начала", стр. 616), но затем нашел другое, несколько более простое решение этой астрономической проблемы.

По содержанию задача LVII совпадает с XXI леммой I кн. „Математических начал" (стр. 124—126), вновь высказанной Ньютоном в отделе об органическом описании кривых „Перечисления кривых третьего порядка" (опубл. в 1704 г.). Доказательства всех теорем об описании конических сечений по пяти элементам в „Математических началах" носили чисто геометрический характер; по существу в них кривая второго порядка рассматривалась как место точек пересечения соответственных лучей двух проективных пучков (Я. Штейнер, 1832), и, несомненно, что Ньютон отчетливо представлял себе проективные зависимости фигур.

В „Перечислении кривых третьего порядка" Ньютон распространил этот прием органического описания линий на (уникурсальные) кривые высшего порядка. Он именно сообщил без доказательства, что если точка пересечения P двух сторон AP, BP вращающихся вокруг полюсов A и B углов PAD и PBD движется по коническому сечению, проходящему через полюс A, то точка пересечения D двух других сторон AD, BD описывает, вообще говоря, кривую третьего порядка, проходящую через полюс B и в A имеющую двойную точку; если же коническое сечение, пробегаемое точкой P, расположено произвольно, то точка D, вообще говоря, описывает кривую четвертого порядка („Математические работы", стр. 207).

Дальнейшее развитие эти идеи Ньютона получили прежде всего у К. Маклорена, особенно в его „Geometria organica, sive descriptio linearum universalis" (1720). Маклорен доказал также приведенные предложения Ньютона, высказанные им в „Перечислении кривых третьего порядка" без доказательства. Подробнее M. Cantor. Цит. соч., т. III, стр. 435 и сл., 787 и сл.; М. Шаль. „История геометрии". М., 1883, стр. 181—186.

Аналитический разбор LVII задачи произвел независимо от Ньютона Г. Лопиталь в „Traité analytique des sections coniques" (1707).

Термин „органическое описание" (т. е. описание непрерывным движением) встречался еще до Ньютона, например у Ф. Скаутена, одно из сочинений которого называлось „Organica conicarum sectionum in plano descriptio" (1650).

[90] (к стр. 232). Термином „прямая сторона" переведено латинское latus rectum, в свою очередь бывшее переводом соответствующего греческого термина Аполлония. Latus rectum — это наш удвоенный параметр. Самое слово „параметр" ввел в учение о конических сечениях в 1631 г. Кл. Мидорж (1585—1647), его параметр был равен удвоенному нашему. Ср. прим. 67 и 94.

[91] (к стр. 233). В оригинале произведения $AH \times HC$ и т. п. обозначены AHC (прямоугольники на AH и HC!).

[92] (к стр. 233). Предложения о произведениях отрезков параллельных секущих и хорд конических сечений, на которые здесь опирается Ньютон, известны были из „Конических сечений“ Аполлония. Ср. И. Ньютон. „Математические начала“, кн. I, леммы XVII—XVIII (стр. 116—119).

[93] (к стр. 234). Стоящие в оригинале здесь и в других местах записи, вроде BLq, FMq, заменены в переводе современными $\overline{BL}^2$, $\overline{FM}^2$.

[94] (к стр. 234). Термином „поперечная сторона“ переведено латинское latus transversum, означающее диаметр конического сечения. Термин этот восходит к Аполлонию.

[95] (к стр. 234). Геометрическое построение точек конического сечения, проходящего через пять различных точек, приводится в предл. XXII кн. I „Математических начал“ (стр. 126—128). Ньютон сообщает там два способа решения задачи. Один опирается на „органическое описание“ конического сечения (лемма XXI), другой — на теоремы о произведениях отрезков секущих и хорд и о свойствах вписанного в коническое сечение четырехугольника (к числу которых относится и лемма XIX о задаче Аполлония — Паппа, ср. прим. 62). Ср. также „Перечисление кривых третьего порядка“ („Математические работы“, стр. 207).

Аналитико-геометрический разбор задачи LIX Ньютон приводит несколько далее.

[96] (к стр. 235). Два способа геометрического решения этой задачи изложены в „Математических началах“ (кн. I, предл. XXIII, стр. 128—130). Аналитико-геометрический разбор ее Ньютон дает несколько далее.

[97] (к стр. 236). Эта задача решается в предл. XXIV кн. I „Математических начал“ (стр. 130—131).

[98] (к стр. 239). Разбирая задачу Аполлония — Паппа о геометрическом месте к четырем прямым (ср. прим. 62), Декарт получает в косоугольных координатах уравнение

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}.$$

Затем он приводит его к виду

$$y = \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}$$

и довольно подробно исследует, учитывая знаки постоянных величин. Опираясь на теоремы Аполлония, Декарт показывает, что рассматриваемое уравнение принадлежит тому или иному виду конических сечений. Последователи Декарта несколько дополнили его анализ (см. „Геометрию" Декарта, стр. 37—44). В дальнейшем развитии исследование кривых второго порядка принимает все более аналитический характер и освобождается от употребления предложений Аполлония. Однако современную форму исследование общего уравнения кривой второго порядка (с использованием дискриминанта старших членов и т. п.) приобрело лишь в работах начала и середины XIX в. у Ж. Б. Био (1774—1862), Ж. Г. Гарнье (1766—1840), Ю. Плюкера (1801—1868) и др.

[99] (к стр. 240). Говоря о „последнем отношении *LK* к *AK*", Ньютон имеет в виду предел отношения *LK* к *AK* и указывает здесь, что предел отношения приращения ординаты к приращению абсциссы равен отношению ординаты к подкасательной (и в косоугольной системе координат). Далее фактически вычисляется значение производной в начале координат.

[100] (к стр. 240). Вычисления Ньютона представляют немалый интерес для характеристики его отношения к принципам математического анализа. В ранних работах 1665—1671 гг., в которых Ньютон закладывал основания нового исчисления флюксий и флюент, он обращался с бесконечно малыми так же, как многие другие математики этой эпохи и как это несколько позднее делали Лейбниц и его ученики. Бесконечно малые слагаемые просто отбрасывались в суммах, содержавших слагаемые конечные; высшими бесконечно малыми слагаемыми пренебрегали в сравнении с низшими. Впоследствии, особенно в I отделе I кн. „Математических начал" и во введении к „Трактату о квадратуре кривых" (опубл. в 1704 г.), Ньютон стремился построить анализ при помощи метода первых или последних отношений и сумм зарождающихся или исчезающих величин, т. е. метода пределов (malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas et rationes, primasque nascentium, id est ad limites summarum et rationum deducere).

Непосредственное применение неделимых Кавальери, прямое отбрасывание бесконечно малых Ньютон теперь объявляет нестрогими. Величины рассматриваются как текущие, флюенты; основной задачей анализа становится изучение взаимных связей между флюентами и флюксиями — скоростями их изменения (причем аргументом служит некая универсальная переменная, подобная абстрактному времени). Приращения флюент, необходимые для вычисления флюксий (т. е. наших производных), принимаются не за конечные частицы и не за актуально бесконечно малые, но за едва зарождающиеся начала конечных величин (principia jam-jam nascentia finitarum magnitudinum); Ньютон называл их „моментами“. Ньютону не удалось до конца преодолеть логические затруднения, связанные с вопросом о последнем отношении исчезающих величин в самое мгновение их исчезновения. Он, очевидно, представлял себе, вообще говоря, переменную как непрерывную величину, монотонно стремящуюся к своему пределу и достигающую этого предела. Весьма характерно для Ньютона было обращение к механическим аналогиям в важнейших пунктах рассуждений: последнее отношение исчезающих величин также должно существовать, как существует последняя скорость (velocitas ultima) движущегося тела в мгновение его остановки. Понятие скорости (как и предела) при этом не определялось (см. об этом в моих статьях к книге Л. Карно „Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых“ и в „Трудах Института истории естествознания“, 1947, т. I, стр. 440—443). Вместе с тем Ньютон никогда на практике не отказывался от традиционной формы пользования бесконечно малыми, даже в период подготовки „Математических начал“ и „Трактата о квадратуре кривых“ (хотя в „Трактате“ Ньютон говорил лишь о весьма малой — admodum parva — величине). Идея о пределе фактически еще привлекалась если не исключительно, то главным образом для уяснения и оформления принципов анализа, а не для его действительного развития; необходимые предельные переходы производились чаще всего при помощи простого откидывания бесконечно малых. Из данного места „Всеобщей арифметики“ видно, что перед своими слушателями Ньютон, наряду с „последними отношениями“, прагматически употреблял и отбрасывание бесконечно малых, которые, кстати, трактовал даже просто как нули (эту концепцию развил позже Эйлер).

[101] (к стр. 241). Утверждение, что $\lim \dfrac{KL}{KM} = 1$, вытекает также из 1 и 2 следствий VII леммы I отдела „Математических начал“ (стр. 60—61), в которой говорится о том, что предел отношения дуги, хорды и соответствующего отрезка касательной равен единице. Если воспользоваться чертежом настоящего перевода, то Ньютон доказывает там, что предел отношения KL, отрезка хорды, параллельной касательной AT и пересекаемой какой-либо прямой AK, к дуге AL равен единице и что два таких отрезка KL и $K'L$, соответствующих различным прямым AK, AK', имеют предельное отношение, равное 1.

[102] (к стр. 241). В самом деле, в $\triangle ALK$ (черт. 83) угол при A стремится к углу $\measuredangle TAK$, а угол при L стремится к нулю.

[103] (к стр. 244). Ср. задачу XXIX, в которой было выве,'но это уравнение.

[104] (к стр. 246). Эта оригинальная мотивировка множественности корней уравнения была весьма характерна для Ньютона, неизменно

искавшего реальные прообразы математических соотношений и свойств. Ср. далее прим. 107.

[105] (к стр. 246). Теорема о числе корней алгебраического уравнения была впервые высказана в „Invention nouvelle en l'algebre“ А. Жирара (1629). Декарт в „Геометрии“ указывает, что „всякое уравнение может иметь столько же различных корней или же значений неизвестной, сколько последняя имеет измерений“; присоединяя, кроме действительных корней, еще мнимые, он говорит: „всегда можно вообразить себе у каждого уравнения столько корней, сколько я сказал, но иногда не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням“ („Геометрия“, стр. 76, 85). Ньютон в данном месте имеет в виду действительные корни. К формулировке Декарта он добавляет, что число корней алгебраического уравнения не превосходит его степени.

Вопрос о существовании корня у всякого алгебраического уравнения привлекал внимание многих математиков XVIII в. Сперва его удалось решить, не считая уравнений низших степеней, для ряда частных уравнений: двучленных, уравнений нечетной степени. Строгое доказательство основной теоремы алгебры не удалось ни Эйлеру, ни Даламберу, ни Лагранжу; такое доказательство опубликовал впервые К. Гаусс (1799). См. также следующее примечание.

[106] (к стр. 247). Составление уравнения по его корням путем перемножения линейных двучленов открыл Т. Герриот („Artis analyticae praxis“, 1631); этот же прием употреблял и Декарт в „Геометрии“, повидимому независимо от Герриота („Геометрия“, стр. 227). Несомненно, что такой способ образования уравнений внушал математикам XVII — XVIII вв. особенную уверенность в том, что число корней алгебраического уравнения равно его степени.

[107] (к стр. 247). Ньютон называет наши мнимые корни impossibiles.

Мнимые величины были открыты в середине XVI в. Древние с ними не встречались; их охраняли от этого так называемые диоризмы, ограничения, наложенные на условия задачи, при которых могли получаться только действительные (и положительные) решения. Индусы говорили, что отрицательные числа не могут быть квадратными. Введение мнимых величин связано было с решением кубических уравнений в радикалах. В „неприводимом случае“ кубического уравнения, когда все три корня его действительные, в так называемой формуле Кардано под знаком квадратного радикала оказывается отрицательная величина.

Открытие это было сделано Дж. Кардано (1545). Кардано же и Р. Бомбелли (1572) разработали ряд важнейших правил действий над числами вида $\sqrt{-n}$. Бомбелли показал при этом на частном примере, что в неприводимом случае формула Кардано приводится к сумме двух чисел $a+b\sqrt{-1}$ и $a-b\sqrt{-1}$.

Мнимые числа, которые Кардано называл софистическими (minus sophisticum), не получили признания у многих выдающихся математиков, например Виета. Жирар, напротив, настаивал на их использовании, ибо лишь с их помощью можно придать ряду теорем алгебры общий характер. „Могут сказать,— писал он, — для чего служат эти невозможные (impossibles) решения. Отвечаю: для трех вещей,— для верности общего правила, потому что других решений нет, и в силу своей полезности" (M. Cantor. Цит. соч., т. II, стр. 788). Декарт называл такие числа воображаемыми, мнимыми (imaginaires) и указывал, что если при построении корней уравнения при помощи двух подходящих кривых последние не пересекаются, то это означает, что все корни — воображаемые („Геометрия", стр. 85, 98). Для математиков той эпохи не было вполне ясно, исчерпывается ли область мнимых корней числами вида $a+b\sqrt{-1}$. Это было связано с недостаточной разработанностью даже всех элементарных действий над комплексными числами.

Вопрос о самой форме различных мыслимых мнимостей оставался долгое время нерешенным, хотя еще Валлис высказал мнение, что мнимые корни алгебраических уравнений связаны с извлечением квадратных корней из отрицательных чисел („Opera", т. II, стр. 303). Н. Бернулли (1687—1759) в 1743 г. сообщил Эйлеру, что, по его мнению, всякий мнимый корень уравнения имеет вид $p+q\sqrt{-1}$. В 1746 г. Клеро в „Началах алгебры" показал, что мнимые корни уравнения четвертой степени действительно имеют указанный вид. Даламбер в том же году сделал попытку доказать, что всякое алгебраическое выражение, составленное из любого числа величин $a+b\sqrt{-1}$, само имеет вид $A+B\sqrt{-1}$. Вопрос о возведении в мнимую степень и общую проблему логарифмирования удовлетворительно решил Эйлер в 1740—1749 гг.; впрочем связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией еще в 1714 г. обнаружил Р. Котес (1682—1716).

На протяжении XVIII в. математики получили при помощи мнимых чисел немало смущавших их парадоксов (логарифмирование, дифференцирование и т. д.). И хотя в применении этих чисел, особенно в анализе, были достигнуты существенные успехи Муавром, Даламбером и другими, они долгое время рассматривались чисто формально и по существу даже как бессмысленные фикции, допустимые в математике в силу необъяснимой и чудесной своей полезности. В середине XVII в. Скаутен в латинском издании „Геометрии“ Декарта писал: „Истинные и ложные корни какого-либо уравнения всегда действительны или же существуют, т. е. обозначают какую-либо величину или же нехватку величины, и значение их можно выразить арифметически или геометрически; но воображаемые не таковы“ (изд. 1695 г., стр. 287). И почти 150 лет спустя в том же духе высказывался Л. Карно: „Никто ведь не сомневается в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя они представляют собой только алгебраические формы и иероглифы нелепых количеств“ („Размышления“, стр. 255).

Первая попытка геометрической интерпретации чисто мнимых чисел была сделана Дж. Валлисом, который еще в 1673 г. указал в одном письме, что $\sqrt{-n^2}$ можно рассматривать как среднюю пропорциональную между отрезками n и $-n$, а позднее в „Алгебре“ 1685 г. писал: „Допустим, что мы выгадываем у моря 10 акров, но теряем —20. Наш выигрыш должен быть — 10 акров, или —1600 квадратных перчей. Допустим, что эта отрицательная площадь, 1600 квадратных перчей, имеет форму квадрата; не должно ли предположить, что этот предполагаемый квадрат имеет сторону? А если так, то какова будет эта сторона? Мы не можем сказать, что она есть 40 или —40, но скорее, что она есть $\sqrt{-1600}$, или $40\sqrt{-1}$, где $\sqrt{\ }$ обозначает среднюю пропорциональную между положительным и отрицательным количеством“. Вместе с тем Валлис видел пользу мнимостей и „невозможных уравнений“ в том, что они указывают на невозможность вопроса, а также на то, как следует видоизменить вопрос для того, чтобы он стал возможным („Opera“, т. II, стр. 287 и сл.). Несколько подробнее, но не с бо̀льшим успехом идея валлисовой интерпретации мнимостей развита была в одной работе 1750—1751 гг. Г. Кюна (1690—1769). Современная геометрическая интерпретация комплексных чисел предложена была в 1799 г. К. Весселем (1745—1818) и в 1806 г. Ж. Арганом (1768—1822). Теория комплексных чисел (термин Гаусса) развита была Гауссом и Коши, которые являются также творцами теории функций комплексного переменного. Дальнейшие обобщения понятия о числе в этом направлении начаты были У. Гамильтоном и Г. Грассманом. Символ i ввел Эйлер.

108 (к стр. 248). Эта же идея имелась у Валлиса. См. предыдущее примечание. Характерно, что и здесь Ньютон ищет если не реальное истолкование мнимостей как таковых, то реальное объяснение их роли в решении математических задач.

[109] (к стр. 249). Четность числа мнимых корней отметил Валлис („Opera", т. II, стр. 303). Эйлер в одном письме 1742 г. указал, что мнимые корни всякого алгебраического многочлена с действительными коэффициентами всегда встречаются сопряженными парами, так что такой многочлен раскладывается на действительные линейные и квадратичные множители (также Даламбер в статье 1746 г.). Ср. прим. 124.

Числа $a + bi$, $a - bi$ назвал „сопряженными" Коши.

[110] (к стр. 251). Это правило принадлежит Декарту, который сформулировал его в словах: „истинных корней может быть столько, сколько раз в нем [уравнении. — *А. Ю.*] изменяются знаки + и —, а ложных — сколько раз встречаются подряд два знака + или дважды знаки —" („Геометрия", стр. 77). Декарт знал, что при наличии мнимых корней правило его должно формулироваться в условной форме („может быть"); однако некоторые современники и среди них Валлис („Opera", т. II, стр. 211) поняли утверждение Декарта в абсолютном смысле и обвинили его в ошибке (ср. Oeuvres des Descartes, publiées par Ch. Adam et P. Tannery, т. V, стр. 397). Скаутен в латинском издании „Геометрии" также подчеркивал, что Декарт заранее ограничивает применение правила уравнениями с действительными корнями (изд. 1695 г., ч. I, стр. 297). Доказательство правила для этого случая сообщил Ж. П. де-Гюа де-Мальв (1712—1785) в 1741 г.; занимались им также И. А. Зегнер (1704—1777), А. Г. Кестнер и многие другие, а мимоходом наметил идею его доказательства еще Лейбниц в 1707 г. Общее исследование правила Декарта провел в 1828 г. Гаусс. В более полной формулировке правило Декарта гласит: число положительных корней алгебраического уравнения равно или на четное число меньше числа перемен знака в ряду его коэффициентов (коэффициенты, равные нулю, не считаются).

[111] (к стр. 252). При общем подходе математиков XVIII в. к мнимым корням неудивительно отнесение последних к категориям положительных и отрицательных корней в соответствии с условиями, при которых правило знаков приобретает общий характер (хотя Ньютон знал, что мнимые величины ни положительны, ни отрицательны).

Ср. стр. 255 настоящего перевода.

[112] (к стр. 252). Ясно, что правило можно формулировать не для членов, но для коэффициентов. См. следующее примечание.

[113] (к стр. 252). Как пришел Ньютон к изложенному здесь правилу определения числа комплексных корней, совершенно не известно. Формулирует правило Ньютон с осторожностью, говоря, что оно обычно дает число мнимых корней (verum quot radices impossibiles sunt cognosci ferè potest per hanc regulam; в англ. переводе: but you may know

almost by this Rule how many Roots are impossible). Действительно, уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

имеет по меньшей мере столько комплексных корней, сколько есть перемен знака в ряду

$$a_0^2,\quad \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{1}\,a_1^2 - a_2a_0,\qquad \frac{2}{n-1}\cdot\frac{n-2}{2}\,a_2^2 - a_1a_3,\ \ldots,$$
$$\frac{n-1}{1}\,\frac{1}{n}\,a_{n-1}^2 - a_{n-2}\,a_n,\quad a_n^2.$$

Далее Ньютон разбирает случаи, когда некоторые из коэффициентов равны нулю, а затем указывает, что комплексных корней может быть и больше, чем дает его правило.

Правило знаков Ньютона пытались доказать Дж. Кемпбелл (в 1728 г.), Маклорен и др.; Лагранж выяснил причину его недостаточности; но лишь Дж. Сильвестеру (1814—1897) удалось разъяснить его полностью, доказав в 1866 г. некоторую более общую теорему (см. „Encyclopädie der mathematischen Wissenchaften", т. I, стр. 415; Д. Граве. „Элементы высшей алгебры". Киев, 1914, стр. 381—383).

Правила Декарта и Ньютона положили начало не только попыткам их доказательства, но и целому ряду новых исследований. Важным этапом в развитии этого вопроса явилась теорема Ф. Д. Бюдана (опубл. в 1822 г.) и Ж. Б. Фурье (1768—1830, опубл. в 1831 г.) о том, что число действительных корней $f(x)=0$ между a и b ($a<b$) равно или на четное число меньше, чем число утраченных перемен знака в ряду $f(x), f'(x), f''(x) \ldots, f^{(n)}(x)$ при переходе от $x=a$ к $x=b$ (n — степень уравнения). Полное решение о числе действительных корней алгебраического уравнения дано было в 1829—1835 гг. Ж. Ш. Штурмом (1803—1855). Теорему Штурма см.: А. К. Сушкевич. „Основы высшей алгебры".

114 (к стр. 256). Это правило сообщено было в „Геометрии" Декарта (стр. 78).

115 (к стр. 256). Ср. Декарт. „Геометрия", стр. 78 и 81. Прием этот употребил еще Виет, а до него Кардано, которому он служил для преобразования полного кубического уравнения в уравнение, не содержащее члена второй степени (1545 г.). Виет исключал таким же образом второй член из уравнений высших степеней (M. Cantor. Цит. соч., т. II, стр. 637).

116 (к стр. 260). Ср. Декарт. „Геометрия", стр. 83—84. Прием

этот был известен Виету, как и применяемое несколько далее Ньютоном преобразование $y = \frac{1}{z}$.

Говоря об уменьшении „членов“, Ньютон имел в виду уменьшение коэффициентов (по абсолютной величине).

[117] (к стр. 263). Зависимости между коэффициентами и симметрическими функциями (положительных) корней алгебраического уравнения, частично известные еще Кардано, были установлены Виетом (M. Cantor. Цит. соч., т. II, стр. 639).

[118] (к стр. 264). Формулы, выражающие первые четыре степенные суммы корней алгебраического уравнения любой степени (с коэффициентом 1 при старшем члене) через коэффициенты, привел в 1629 г. А. Жирар (M. Cantor. Цит. соч., т. II, стр. 789). Ньютон дает общее рекуррентное соотношение, которое можно записать в более современных обозначениях так:

$$s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \ldots + n a_n = 0.$$

Доказаны были формулы Ньютона Маклореном в его „Алгебре“, а затем и рядом других математиков, в том числе Эйлером и Лагранжем. Э. Варинг (1734—1798) в 1762 г. выразил степенные суммы s_n явно через коэффициенты и обратно. Ньютон применяет затем степенные суммы для численного решения уравнений.

[119] (к стр. 265). Вопрос о пределах действительных корней был поставлен в „Геометрии“ Декарта. В латинском издании этого труда исследованию границ корней уравнений 2, 3 и 4-й степени посвящена была статья Дебона „De limitibus aequationum“. Дебон рассмотрел большое число частных случаев в зависимости от знаков коэффициентов и отсутствия тех или иных членов. Например, для положительного корня уравнения $x^2 - lx + m^2 = 0$ из $m^2 = lx - x^2$ следует, что $l > x$, а из $x^2 = lx - m^2$, что $x > \frac{m^2}{l}$, и т. п. М. Ролль (1652—1719) в 1690—1692 гг. установил, что между двумя соседними корнями уравнения, которое в нашей символике запишется $f'(x) = 0$, может заключаться не более чем один корень уравнения $f(x) = 0$. Вместе с тем он нашел, что верхней границей действительных корней уравнения $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ является число $\left|\frac{a_m}{a_0}\right| + 1$, где a_m — наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент уравнения (эту же границу привел затем Маклорен в V гл. II ч. своей „Алгебры“). На этой основе Ролль разработал свой метод отделения действительных корней

алгебраических уравнений (С. А. Яновская. „Мишель Ролль как критик анализа бесконечно малых". Труды Института истории естествознания, т. I, М., 1947, стр. 329—331). Ньютон задает верхнюю границу действительных корней формулой

$$|x| < \sqrt[2n]{s_{2n}}, \qquad s_{2n} = \sum x^{2n}.$$

[120] (к стр. 265). Здесь Ньютон приводит способ приближенного определения наибольшего по абсолютной величине действительного корня как предела последовательности $\sqrt[2n]{s_{2n}}$ при $n \to \infty$, а затем дает приближения для наибольшего положительного и наименьшего отрицательного корней, комбинируя средние арифметические и средние геометрические последовательных степенных сумм. Ньютон указывает при этом, что способ применим к уравнениям с действительными корнями.

Во „Всеобщей арифметике" не изложен другой изобретенный Ньютоном метод численного решения уравнений. Этот метод описан был в „Анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов" (ок. 1669 г., опубл. в 1711 г.; кратко изложен также в 94 гл. „Алгебры" Валлиса 1685 г.) на классическом примере уравнения $y^3 - 2y - 5 = 0$. Ньютон начинает с приближенного значения корня 2, полагая $y = 2 + p$, подставляет $2 + p$ в данное уравнение и, пренебрегая в силу их малости степенями p выше первой, приближенно получает $p = 0{,}1$. Далее берется $p = 0{,}1 + q$ и $0{,}1 + q$ подставляется в уравнение относительно p, которое, если снова отбросить степени q выше первой, приводится к $11{,}23\,q + 0{,}061 = 0$, откуда приближенно $q = -0{,}0054$. Полагая $-0{,}0054 + r = q$, Ньютон находит еще $r = -0{,}00004853$, так что $y = 2{,}09455147$. Этот же метод в несколько иной форме был найден также Дж. Рефсоном (1647—1715), опубликовавшим его в 1690 г. Э. Галлей (1656—1724) в 1694 г. предложил уточнение того же приема, состоявшее в том, что для определения поправок использовались не линейные, а квадратные уравнения (см. примечание 141). В настоящее время для численного решения уравнения $f(x) = 0$ по методу Ньютона при первом приближении $x = x_0$ следующие приближения вычисляются на основании итерационной формулы $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. В таком виде метод Ньютона при помощи ряда Тейлора был изложен Л. Эйлером в 9 гл. 2 ч. „Оснований дифференциального исчисления" (Institutiones calculi differentialis) в 1755 г. Некоторые дефекты метода Ньютона были отмечены еще Галлеем, а затем Лагранжем (1798); более точно исследовали условия его применимости Ж. Р. Мурайль в 1768 г. и Ж. Б. Фурье (1768—1830) в „Analyse des équations determinés“ (1831) и Коши. Ж. П. Данделен (1794—1847) в 1826 г. предложил комбинировать методы Ньютона и ложного положения, с тем чтобы на каждом шагу вычислений получать и верхний и нижний пределы корня.

Приближенное вычисление корней из чисел и корней уравнений восходит к весьма давним временам. Общий громоздкий прием численного решения уравнений предложил в 1600 г. Виет. В XVIII в. был предложен ряд новых методов, среди них: метод рекуррентных рядов, который опубликовал в 1732 г., отправляясь от замечаний Ньютона о применении к решению уравнений степенных сумм корней, Дан. Бернулли (1700—1782) и который затем был детальнее исследован Эйлером (1748) и Лагранжем (1798), метод разложения корня в непрерывные дроби Лагранжа (1769), ряд приемов Эйлера, И. Г. Ламберта (1728—1777) и др. В XIX в. метод Виета был усовершенствован в 1804 г. П. Руффини (1765—1822) и в 1819 г. В. Горнером. Замечательный метод вычисления всех действительных и комплексных корней алгебраического уравнения, основанный на составлении уравнения, корни которого суть 2^n-ые степени корней заданного уравнения, разработали независимо друг от друга Данделен (1826), Н. И. Лобачевский (1793—1856; „Алгебра или вычисление конечных“, 1834) и К. Г. Греффе (1799—1873; 1837).

См. И. Ньютон. „Математические сочинения“, стр. 9—11; M. Cantor. Цит. соч., т. II, стр. 640—641; H. Wieleitner. Цит. соч., ч. I, гл. II, § 2; Э. Уиттекер и Г. Робинсон. „Математическая обработка результатов наблюдений“. Пер. под ред. Н. М. Гюнтера, М.—Л., 1933, гл. VI.

Следует отметить, что в связи с проблемой интегрирования неявно заданных функций Ньютон разработал также более общий прием разложения в ряд по положительным или отрицательным степеням аргумента x функции y, определяемой алгебраическим многочленом $f(x, y)=0$. Об этом приеме, опирающемся на так называемое правило параллелограма Ньютона, см. его „Математические сочинения“, стр. 11 и сл., 32 и сл., а также статью Н. Г. Чеботарева „Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики“ в сборнике „Исаак Ньютон“ под ред. С. И. Вавилова. М.—Л., 1943.

[121] (к стр. 266). Замечание Ньютона, что при помощи указанных им преобразований корней любой (неизвестный) действительный корень можно сделать наименьшим, непонятно.

[122] (к стр. 268). Это — известное правило Ньютона: если в алгебраическом уравнении $f(x)=0$ при $a>0$, $f(x)$ и все ее производные, не равные тождественно нулю, положительны, то за верхний предел положительных корней можно взять число a.

Другие методы отделения корней предложили Варинг (1762) и Лагранж (1798), использовав с этой целью уравнение, корни которого суть квадраты разности корней данного уравнения. См. „Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften", т. I, стр. 408.

Интересно, что Ньютон в своем правиле рекомендует вычислять производные до той, у которой все коэффициенты окажутся одного знака.

[123] (к стр. 269). Т. е. 3 больше абсолютной величины отрицательных корней.

[124] (к стр. 270). Изложенные далее способы разложения многочленов высших четных степеней на квадратичные множители носят, вообще говоря, частный характер и на практике значения не имеют, как это указывает и сам Ньютон. Исторически они связаны были с методом решения уравнения четвертой степени, предложенным Декартом (см. прим. 127). Некоторые приемы Ньютона были проанализированы Маклореном в VII гл. II ч. „Алгебры". Ср. прим. 109.

[125] (к стр. 290). Задачи, приводящиеся к кубическим уравнениям, встречаются еще в вавилонских клинописных текстах; при этом отыскание (целых) решений совершалось путем проб. Античные математики решали подобные задачи при помощи пересечения конических сечений; так же поступали и арабы, которые сделали крупный шаг вперед, произведя классификацию и дав обстоятельный анализ типов кубических уравнений, имеющих положительные корни (Омар Хайям, ок. 1040— ок. 1115). В связи с составлением тригонометрических таблиц арабы нашли также прием приближенного решения кубических уравнений. Правило решения кубического уравнения $x^3 + px = q$ в радикалах открыл, но не обнародовал С. дель-Ферро (1465—1526); около 1535 г. Н. Тарталья (1500—1557) вновь нашел это правило, а также правило для уравнений $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$. Опубликованы были эти правила Кардано в 1545 г.; Кардано же свел общее кубическое уравнение к указанным типам. Прием решения во „Всеобщей арифметике" совпадает с предложенным И. Гудде и опубликованным в 1659 г. во 2-м латинском издании „Геометрии" Декарта.

[126] (к стр. 291). Рассматриваемый здесь неприводимый случай, casus irreducibilis, кубического уравнения встретился Кардано. Р. Бомбелли разъяснил на числовом примере, что действительный корень в этом случае представляется как сумма двух сопряженных комплексных чисел (1572 г.). Виет (опубл. в 1593 и 1615 гг.) получил решение в неприводимом случае, сведя задачу к трисекции угла и применив тригонометрическое соотношение $(2 \cos\varphi)^3 - 3(2 \cos\varphi) = 2 \cos^3\varphi$. А. Клеро в „Началах алгебры" 1746 г. представил все три корня в виде бесконечных рядов с действительными членами. Попытки математиков

получить для этого случая выражение корня в радикалах и в действительной форме оставались безуспешными, и лишь В. Молламе в 1890 г. доказал, что такое выражение невозможно (см. „Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften", т. I, стр. 518).

Рассуждения Ньютона о том, что в неприводимом случае три действительных корня вообще не могут быть выражены так называемой формулой Кардано, ибо величина $a - \frac{q}{3a}$, т. е. $a + b$, не может быть многозначной, ошибочны. Кубический корень, из отличного от нуля числа, имеет три значения (если одно есть k, то другие будут $k\alpha_1$ и $k\alpha_2$, где α_1 и $\alpha_2 = \alpha_1^2$ суть мнимые кубические корни из 1); таким образом, a и b имеют по три значения, а их сумма $a + b$ — девять, из которых, однако, лишь три дают корни уравнения, так как $ab = -\frac{q}{3}$. Ср. прим. 30.

[127] (к стр. 293). Уравнение четвертой степени впервые решил по способу, носящему его имя, Л. Феррари (1522—1565; опубл. в 1545 г.). Метод решения, излагаемый Ньютоном, принадлежит Декарту („Геометрия", стр. 89). Декарт не привел, однако, вывода, который сообщил в латинском издании „Геометрии" Скаутен. Вывод Ньютона совпадает с доказательством Скаутена.

[128] (к стр. 293). Математики XVII в., и особенно Э. В. Чирнгауз (1651—1708), пытались путем тех или иных преобразований, позволяющих уничтожить промежуточные коэффициенты, свести решение алгебраических уравнений высших степеней к решению двучленного уравнения; это позволило бы, в случае успеха, выразить корни в радикалах. Чирнгаузу это фактически удалось провести для кубического уравнения. Лейбниц выразил сомнение в пригодности такого метода для уравнений выше четвертой степени (M. Cantor. Цит. соч., т. III, стр. 111—117).

Так как уравнение $x^{2n} = a$ может иметь не более двух действительных корней, а уравнение $x^{2n+1} = a$ имеет один действительный корень, то Ньютон, рассуждая, видимо, так же, как в неприводимом случае, приходит к заключению, что выражение действительных корней исходного уравнения будет, вообще говоря, невозможным. Об осуществимости идеи Чирнгауза, он, однако, мнения своего не высказал.

Исследование общего двучленного уравнения, т. е. извлечения корня n-ой степени из числа, привел, как указывалось уже, А. Муавр; важное разложение на множители $x^n \pm a^n$ получил ученик Ньютона Р. Котес (1714). Именно он нашел геометрическую теорему, равносильную утверждению, что $x^n \pm a^n$ раскладывается в произведение линейных (не более двух) и квадратичных множителей с действительными коэффициентами. См. L. Mathiessen. Grundzüge der antiken uud modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig, 1878, стр. 203—211. Изучение случаев разрешимости уравнения $x^n - 1 = 0$ в квадратичных радикалах далеко продвинул вперед Гаусс (1796).

129 (к стр. 295). См. стр. 48 настоящего перевода.

130 (к стр. 295). На нескольких следующих страницах Ньютон явным образом полемизирует с Декартом. Во II и III книгах „Геометрии" Декарт утверждал, что в геометрию должны быть включены и к построению задач должны привлекаться любые линии, которые „описаны непрерывным движением или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими, ибо этим путем всегда можно точно узнать их меру" (стр. 30). Все точки таких линий „обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии" (стр. 33). Таким образом, Декарт, который видел в алгебре единственный общий метод математического исследования, считал допустимыми в геометрии кривые, которые он сам именовал геометрическими и которые Лейбниц позднее назвал алгебраическими. Остальные линии (по терминологии Декарта — механические и по терминологии Лейбница — трансцендентные) Декарт из геометрии исключил. Эту концепцию Декарта подвергли критике за ее ограниченность и Лейбниц (см., например, „Новые опыты о человеческом разуме", пер. П. С. Юшкевича, М., 1936, стр. 433) и Ньютон. Впрочем позднейшая аналитическая геометрия действительно развивалась как геометрия алгебраических кривых.

Для того чтобы „охватить совокупность" всех алгебраических кривых и для облегчения выбора подходящих линий при построении той или иной задачи Декарт впервые предложил их систематическую классификацию по „родам". Опираясь на то, что уравнение четвертой степени приводится к кубическому, и на единый метод построения корней уравнений пятой и шестой степени, Декарт в своей классификации объединил линии степеней $2n$ и $2n-1$ в n-й род (стр. 33). Ньютон в „Перечислении кривых третьего порядка" установил современную классификацию по порядкам, исходя из числа пересечений линии с прямой („Математические работы", стр. 194).

Принципом выбора кривой для построения задач у Декарта служила ее „простота", под которой он понимал возможно низший ее род, а не удобство ее построения. „Необходимо, — писал он, — всегда стараться выбирать наиболее простую кривую, позволяющую решить эту задачу. Нужно также заметить, что под наиболее простыми кривыми не следует понимать только те, которые проще всего описать, или те, которые дают наиболее легкое построение или доказательство предложенной задачи, но в особенности те, которые принадлежат к простейшему роду, позволяющему определить искомую величину" (стр. 74). Ньютон далее решительно полемизирует с этим принципом.

Валлис еще раньше, в 1657 г., дал решение кубического уравнения при помощи пересечения открытой им кубической параболы $y = x^3$ и прямой. Предусматривая возражение, что он применил линию более сложную, чем коническое сечение, Валлис парировал этот упрек тем, что зато второй кривой у него служит не окружность, а более простая линия — прямая („Opera", т. II, стр. 297).

[131] (к стр 297). Трохоида (от τροχος — колесо), или циклоида, была открыта Г. Галилеем (1564—1642) в конце XVI в.; он же ввел термин „циклоида". В истории исчисления бесконечно малых изучение циклоиды сыграло исключительно большую роль. Квадратуру ее определили Роберваль (1634), попутно открывший синусоиду, Декарт, Ферма, Торричелли; они же построили касательную к ней. Спрямление ее удалось ок. 1657 г. К. Рену, Ферма и Гейрету. Б. Паскаль (1623—1662) посвятил ей ряд работ (объемы различных тел вращения, центры тяжести). Около 1665 г. X. Гюйгенс открыл ее таутохронность, а работая над практическим использованием этого свойства для часов с маятником, создал теорию эволют. В 1696 г. Ив. Бернулли поставил задачу о брахистохроне, кривой скорейшего спуска; Ньютон, Лейбниц, братья Бернулли и Лопиталь в том же году доказали, что брахистохроной служит циклоида.

[132] (к стр. 298). В VIII предложении „Лемм" Архимед решил задачу о делении угла на три равные части при помощи вставки отрезка между прямой и кругом (ср. прим. 63). Он показал, что для трисекции угла ACB (C — центр круга) достаточно вставить между продолжением диаметра AD и окружностью отрезок EF, равный радиусу и при продолжении проходящий через точку B (см. настоящий перевод, стр. 322).

Изобретение конхоиды (от κογχη — раковина) принадлежит, видимо, Никомеду (ок. 180 г. до н. э.). Конхоида возникает, если из данного полюса A проводить прямые, пересекающие данную прямую CD в точках N, и на продолжении AN откладывать отрезки данной длины NM; геометрическое место точек M и будет конхоидой. Если $NM = b$ и расстояние CD от полюса есть a, то уравнения конхоиды можно записать в виде: $(x-a)^2(x^2+y^2)-b^2x^2=0$ или $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$. Со второй ветвью кривой (соответствующей отложению отрезков NM в направлении к полюсу) математики XVII в. были несомненно знакомы; известна ли она была древним, установить в точности невозможно. Конхоида служила в XVII в. одним из любимых объектов применения методов исчисления бесконечно малых. Касательную к ней провели около 1636 г. Декарт, Роберваль и Ферма; Гюйгенс в 1653 г. определил точки перегиба и т. д.

По некоторым указаниям к трисекции угла конхоиду применил сам Никомед, хотя Папп говорит, что это было его, Паппа, открытие (см. M. Cantor. Цит. соч., т. I, стр. 353—354, и настоящий перевод, стр. 319 и сл.).

Невозможность трисекции угла в общем случае с помощью циркуля и линейки доказал впервые инженер П. Л. Ванцель (1814—1848) („Journal des mathématiques", 1837, т. II). Убеждение в этом высказал еще Декарт („Геометрия", стр. 104—105).

133 (к стр. 298). Здесь Ньютон вновь вступает в полемику с Декартом, который, показав в самом начале своей „Геометрии", как можно заменить простейшие геометрические построения операциями арифметики, писал: „С целью быть более понятным я без опасений введу эти арифметические термины в геометрию" (стр. 12), и затем сводил решение задач геометрии к решению уравнений. Декарт, в частности, указывает, что все „плоские" задачи, требующие циркуля и линейки, сводятся к построению корней квадратных уравнений. Приведя эти построения, он критикует древних математиков, не обладавших „истинным" общим методом исследования задач обыкновенной геометрии (стр. 17—18).

134 (к стр. 302 и 306). В античной математике нынешние произведения отношений назывались сложными отношениями, удвоение отношений соответствует нашему возведению в квадрат и т. п.

Ср. Ф. Кеджори. Цит. соч., стр. 402—406 (прибавление И. Ю. Тимченко, который, между прочим, отметил, что математики XVII в. ясно понимали связь между теорией сложных отношений и теорией логарифмов).

135 (к стр. 314). Этот круг на чертеже не изображен, и Ньютон его именует „скрытый круг".

136 (к стр. 324). См. выше задачу XXXIV и прим. 69.

137 (к стр. 329). Декарт для построения уравнений 4 и 3-й степени пользуется неизменной параболой $y = x^2$ и окружностью

$$\left(x-\frac{q}{2}\right)^2+\left(y-\frac{p+1}{2}\right)^2=R^2,$$

где

$$R^2=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{2}\right)^2+r.$$

Затем Декарт применяет эти построения к задачам о нахождении двух средних пропорциональных и о трисекции угла („Геометрия“, стр. 95—100).

Построение при помощи параболы Декарт считает „в некотором отношении... простейшим“. Ньютон несколько далее (стр. 335) указывает, что это построение — простейшее с точки зрения алгебры, но не с точки зрения удобства вычерчивания. Он приводит затем построение кубического уравнения при помощи конических сечений и, в частности, построение, совпадающее с данным Декартом.

Выше упоминалось, что построения различных типов кубических уравнений при помощи конических сечений известны были арабам и систематизированы в XI в. Омаром Хайямом. Но Хайям не дал единого метода решения любого кубического уравнения; кроме того, его анализ был неполным. Сочинение Хайяма в XVII в. европейским ученым знакомо не было. Одновременно с Декартом построение уравнений 4 и 3-й степени дал Ферма, также с помощью параболы и круга („Геометрия“ Декарта, стр. 151 и сл.). Позднее, около 1660 г., Ферма указал, что для решения уравнения степени mn достаточно взять две кривые — одну m-й степени и другую n-й (M. Cantor. Цит. соч., т. II, стр. 819). Занимались этими задачами также Валлис (применявший кубическую параболу и прямую), Скаутен, Галлей, Лопиталь и др.

[138] (к стр. 335). Следует отметить, что Ньютон был знаком не только с подобным преобразованием фигур, но и с коллинеарным („Математические начала“, кн. I, отд. V, лемма XXII, стр. 131—134; ср. Н. А. Глаголев. „Ньютон как геометр“. Сб. „Московский университет — памяти Исаака Ньютона“, М., 1946, стр. 72).

[139] (к стр. 338). См. русский перевод „Геометрии“ Декарта, стр. 95 и след.

[140] (к стр. 339). Построению корней уравнений высших степеней Ньютон посвятил небольшой VII раздел „Перечисления кривых третьего порядка“. Указав там, что „в геометрии кривые употребляются для решения задач при помощи их точек пересечения“, он дает указания относительно решения уравнения 9-й степени при помощи раз навсегда вычерченной кубической параболы $y = x^3$ и кривой третьего порядка

$$y^3 + bxy^2 + cy^2 + dx^2y + exy + fx^3 + gx^2 + hx + k = 0,$$

а также при помощи некоторых других кривых. Ньютон намечает там и приемы построения уравнений 12-й и высших степеней („Математические работы“, стр. 208—209). Декарт в „Геометрии“ дал графическое решение уравнения 6-й степени (стр. 105—111) при помощи окружности и кривой третьего порядка (так называемого трезубца Ньютона) для которой привел способ механического описания.

Г. Крамер в 1750 г. подробно изложил построение корней при помощи прямой $y = a$ и параболической кривой $y = bx + cx^2 + \ldots + px^n$. Построениями этого рода занимались и другие математики XVIII и отчасти XIX в.

Выдвинув в качестве основной задачи алгебры численное решение уравнений и сохранив за построением корней роль вспомогательного приема для определения нескольких первых цифр корня, Ньютон в своих лекциях не привел, однако, способа дальнейшего уточнения значений искомого корня (ср. прим. 120).

Подготовляя к печати 1-е издание „Всеобщей арифметики", У. Уистон поэтому присоединил к труду Ньютона мемуар известного астронома и математика Э. Галлея, озаглавленный „Новый, точный и легкий метод общего определения корней любых уравнений без их предварительного приведения" (опубл. в 1694 г.). Мемуар Галлея представлял собою статью размером приблизительно в один печатный лист. Упомянув о кратком изложении метода Ньютона в „Алгебре" Валлиса и о методе Рефсона, Галлей, отправляясь от одной работы 1692 г. Т. Ф. де Ланьи (1660—1734), прежде всего привел некоторые приближенные формулы для извлечения корней. Так, например,

$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{ab}{3a^3 + b} \quad \left[\text{или } \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b}{3a}}\right].$$

Эти формулы Ланьи, известные Галлею только по сообщению одного знакомого, Галлей вывел с помощью приема, родственного ньютонову решению уравнения $y^3 - 2y - 5 = 0$. Именно, полагая $(a + e)^3 = a^3 + b$ и при малом e отбрасывая сперва обе высшие степени, Галлей получил, что $e = \frac{b}{3a^2}$, а затем, отбрасывая только e^3, что

$$e = \frac{b}{3a^2 + 3ae} = \frac{b}{3a^2 + 3a\dfrac{b}{3a^2}} = \frac{ab}{3a^3 + b},$$

откуда и получилось первое приближение — с недостатком (при $b > 0$). С другой стороны, решение уравнения $3a^2e + 3ae^2 = b$ давало, что

$$e = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b}{3a}},$$

откуда следовало второе приближение — с избытком.

Аналогично Галлей вывел рациональные и иррациональные (квадратичные) приближения для нескольких следующих показателей корня. Этот прием Галлей распространил далее на алгебраические уравнения.

Способ Галлея можно коротко изложить следующим образом. Для решения алгебраического уравнения $f(z)=0$ с помощью известного приближенного значения корня a, причем $z=a+e$, величина $a+e$ подставляется в уравнение, $f(a+e)$ раскладывается по степеням e:

$$0=f(a+e)=f(a)+se+te^2+\ldots\ldots$$

и e затем определяется из квадратного уравнения

$$te^2+se+f(a)=0.$$

Далее Галлей указывал, как выбирать знак при радикале в выражении для e и приводил ряд примеров.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе 7

О значении некоторых терминов и знаков 8
О сложении 17
О вычитании 21
Об умножении 23
О делении 27
Об извлечении корней 35
О приведении дробей и радикальных величин 43
О сокращении дробей 43
Об отыскании делителей 44
О приведении дробей к общему знаменателю 56
О приведении радикалов к простейшему виду 58
О приведении радикалов к общему показателю 59
О приведении радикалов к более простым радикалам посредством извлечения корней 60
О форме уравнения 64
О приведении одного уравнения 66
О приведении двух или большего числа уравнений к одному с целью исключения неизвестных величин 72
Исключение неизвестной величины путем сравнения ее значений 72
Исключение неизвестной величины путем подстановки ее значений 73
Исключение неизвестной величины, входящей в каждое уравнение в нескольких измерениях 75

О методе исключения из уравнений любого числа радикалов . . 79
О приведении вопроса к уравнению 79
Как приводятся к уравнениям геометрические вопросы 102
Как следует решать уравнения 244
О природе корней уравнения 244
О преобразованиях уравнений 256
О пределах уравнений 265
Приведение уравнений при помощи иррациональных делителей . 270
Линейное построение уравнений 295

Приложения

Послесловие переводчика 343
А. П. Юшкевич. О „Всеобщей арифметике“ И. Ньютона 347
Примечания к переводу „Всеобщей арифметики“ 392

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР

*

Редактор Издательства *А. З. Рывкин*
Технический редактор *Н. П. Аузан*
Корректор *Н. Н. Морозов*

*

РИСО АН СССР № 3477. А-11814.
Издат. № 1670. Тип. заказ № 1208.
Подп. к печ. 24.XI 1948 г. Формат бум.
$70 \times 90^1/_{16}$. Печ. л. $27^3/_4$ + 2 вкл. Уч.-изд. 26.
Тираж 5000. Цена в переплете 25 руб.

2-я типография Издательства
Академии Наук СССР.
Москва, Шубинский пер., д. 10

И. НЬЮТОН

ВСЕОБЩАЯ АРИФМЕ-
ТИКА

ВСЕОБЩАЯ АРИФМЕТИКА

ИСААК НЬЮТОН

25 руб.