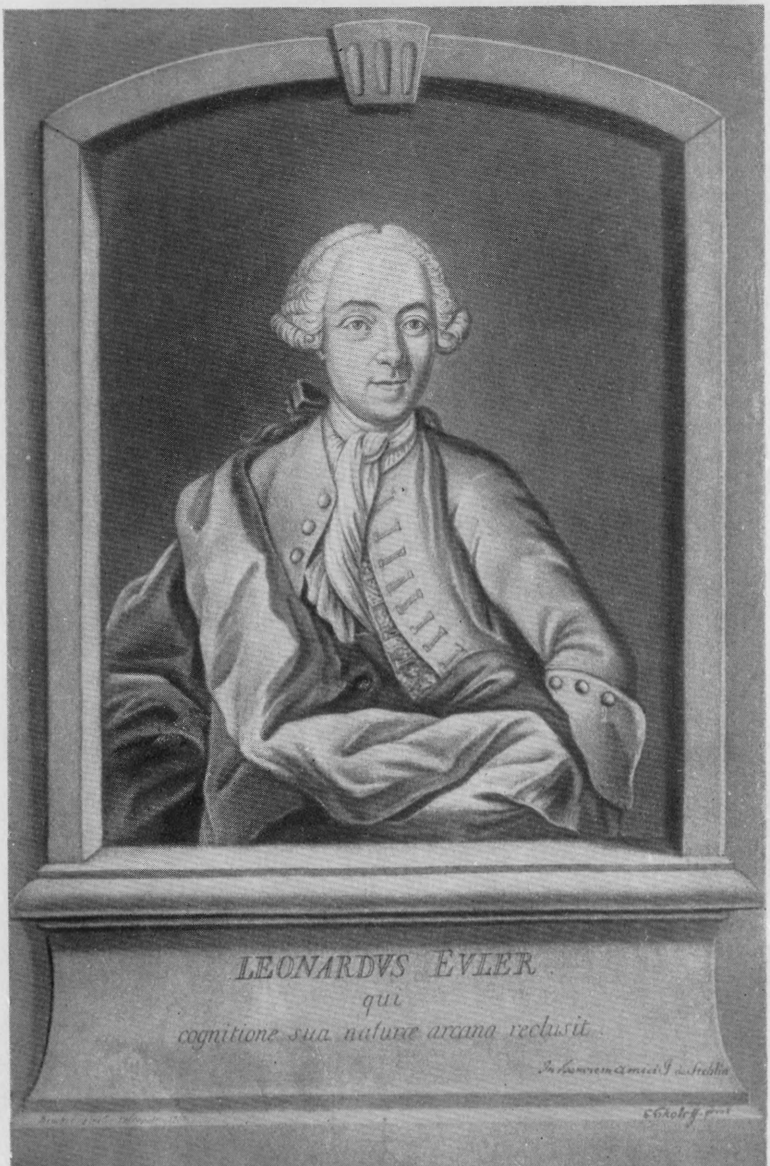
АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ПИСЬМА К УЧЁНЫМ


LEONARDVS EVLER
qui
cognitione sua naturæ arcana reclusit

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ПИСЬМА К УЧЕНЫМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА-ЛЕНИНГРАД
1963

СОСТАВИТЕЛИ:

Т. Н. КЛАДО, Ю. Х. КОПЕЛЕВИЧ, Т. А. ЛУКИНА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

Академика *В. И. СМИРНОВА*

Леонард Эйлер занимает исключительное место в истории физико-математических наук XVIII в. Его идеи и результаты исследований лежат в основе развития всей математики XIX в., а творчество охватывает самые разнообразные разделы математики, механики, астрономии и физики. Совершенно необычайной была продуктивность его работы. Собрание его сочинений, не доведенное еще до конца, будет содержать около 70 томов.

Представляет большой интерес проникнуть по возможности в лабораторию творчества этого выдающегося ученого и ближе познакомиться с его взглядами на науку. Много в этом отношении дает его обширная переписка. Эйлер был связан со всеми учеными того времени, и в его переписке отражается весь научный мир XVIII в.

Бóльшая часть переписки, главным образом с наиболее известными учеными XVIII в., уже напечатана. Настоящая книга содержит в основном неизвестные до сих пор письма Л. Эйлера. С изданием этого сборника почти все дошедшие до нас письма будут опубликованы. В связи со своеобразием стиля писем Л. Эйлера и терминологии XVIII в. представляется существенным наряду с переводами познакомить читателя и с подлинниками писем В сборник не вошла переписка, изданная в самое последнее время (со Стирлингом, Брюсом, Майером и деятелями Петербургской академии), а также некоторые случайные письма, не имеющие существенного научного значения.

Чрезвычайно ценными являются примечания к публикуемым письмами Их составление связано с большой и кропотливой работой. Кроме разъяснений научного текста писем, в них приведены существенные сведения, касающиеся адресатов, упоминаемых работ, а также материалы из ответных писем, не включенных в сборник.

Настоящая книга будет важным источником для тех, кто интересуется творчеством Л. Эйлера и историей науки XVIII в.

Академик В. И. Смирнов.

ОТ СОСТАВИТЕЛЕЙ

Значительную часть рукописного наследия Эйлера составляет его переписка, которая в основном находится в Архиве Академии наук СССР в Ленинграде. Отдельные письма хранятся в отечественных и зарубежных архивах — в Москве, Тарту, Берлине, Базеле и других городах.[1]

Вся сохранившаяся переписка Леонарда Эйлера составляет более двух с половиной тысяч писем, из них свыше 500 писем самого Эйлера, остальные — письма к нему. Публикация всей этой корреспонденции должна составить последние тома полного собрания сочинений Эйлера, издаваемого Швейцарским обществом естествоиспытателей. Переписка Эйлера с наиболее выдающимися его корреспондентами, например с Иоганном и Даниилом Бернулли, с Гольдбахом, Лагранжем и другими, публиковалась ранее или готовится к печати.

Кроме этих больших переписок, в Архиве Академии наук СССР сохранилось немало писем Леонарда Эйлера в черновиках и копиях, относящихся главным образом к первому периоду пребывания его в Петербурге (1727—1741 гг.). До настоящего времени эти письма были мало известны исследователям жизни и творчества Эйлера; между тем они несомненно имеют значение для характеристики научных интересов и связей как самого Эйлера, так и Петербургской Академии наук.

В настоящий сборник включены письма Л. Эйлера, хранящиеся в Архиве АН СССР и в Рукописном отделе библиотеки Тартуского университета, к различным ученым и другим лицам, связанным с деятельностью Петер-

---

[1] Подробно об этом см.: Ю. Х. Копелевич и Т. А. Красоткина. Эпистолярное наследие Леонарда Эйлера в архивах СССР. Вестник истории мировой культуры, № 3, 1957, стр. 108—114.

бургской и Берлинской академий. Писем Эйлера к деятелям Петербургской Академии наук включено немного, так как эта переписка на языке оригинала издается Берлинской Академией наук совместно с Академией наук СССР.[2] *Подавляющее большинство писем публикуется впервые. Ответные письма, количество которых от отдельных адресатов значительно больше, чем число сохранившихся писем Эйлера, не публикуются, но использованы в примечаниях.*

Письма в сборнике расположены в алфавитном порядке корреспондентов, а внутри каждой переписки — в хронологическом порядке. В письмах, датированных по старому стилю, в квадратных скобках указана дата по новому стилю. В иностранных текстах в основном сохранена орфография оригинала.

Сборник подготовлен под общей редакцией академика В. И. Смирнова. Переводы и примечания писем астрономического содержания редактировал чл.-корр. АН СССР М. Ф. Субботин, биологического — проф. Б. Е. Райков. В комментировании математических писем принял участие кандидат физико-математических наук Б. В. Русанов.

Составители приносят благодарность коллективу Архива АН СССР за помощь при работе над архивными материалами.

---

[2] Die Berliner und die Petersburger Academie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonard Eulers, T. 1—2. Berlin, 1959—1961.

БАЙИ

Байи, Жан Сильвен (Bailly, Jean Sylvain, 1736—1793) родился в Париже в 1736 г. Отец его занимал должность хранителя королевских картин. Молодой Байи обучался математике у Монкарвиля, дочь которого брала уроки живописи у Байи. Встреча у Монкарвиля с астрономом Лакайлем определила дальнейшую судьбу Байи: юноша понравился Лакайлю и под его руководством занялся астрономическими наблюдениями. В дальнейшем Байи выдвинулся своими вычислениями орбиты кометы 1762 г., вычислениями мест 515 зодиакальных звезд и другими исследованиями. В январе 1763 г. он был избран членом Парижской Академии и написал ряд работ о движении спутников Юпитера. Капитальным его трудом является «История астрономии» в пяти томах, охватывающая материал до 1781 г. Первый том в 1775 г. был послан Вольтеру, который дал о нем весьма положительный отзыв, но сделал при этом ряд критических замечаний. В 1776 г. Байи развил некоторые свои идеи в сочинении «Письма к Вольтеру о происхождении наук, особенно у народов Азии». В 1779 г. снова в форме писем к Вольтеру он издал «Письма о Платоновой Атлантиде и о древней истории Азии». Но Вольтер умер раньше, чем эта книга дошла до него.

В конце 1777 г. Байи познакомился с Франклином, который к тому времени приехал во Францию; вскоре они стали близкими друзьями. Вместе с Франклином и Лавуазье Байи участвовал в комиссии, созданной Академией для проверки опытов Месмера с его «животным магнетизмом». Комиссия высказалась отрицательно о модном тогда в обществе «месмеризме». В 1783 г. Байи был избран на место Трессана в члены Французской Академии и Академии надписей и литературы; до него членом всех трех академий[a] был только Фонтенель. Байи не был чужд и общественной деятельности: получили известность его донесения правительству о больнице Hôtel Dieu, где создались ужасные условия для больных. В результате больница была в корне преобразована. По докладу Байи состоялось перенесение парижской бойни за черту города. Энергичные общественные выступления Байи выдвинули его в первые ряды деятелей предреволюционного периода во Франции; он приобрел большую популярность и в 1789 г. был избран в Собрание нотаблей. Когда оно преобразовалось в Национальное собрание, последнее избрало

---

[a] Парижская Академия наук — одна из пяти Академий, составляющих Французский институт; в него входят еще Французская Академия, Академия надписей и литературы, Академия моральных и политических наук, Академия художеств. Членами нескольких Академий были лишь особо выдающиеся и разносторонние ученые.

Байи Жан Сильвен, 1736—1793.

Байи своим президентом, а затем он был назначен мэром Парижа, однако не пошел далее умеренно конституционных позиций. В 1793 г. Байи был обвинен в измене революции и казнен на эшафоте.

«История астрономии» Байи была переведена на русский язык Д. М. Перевощиковым.[6] В конце книги помещена биография Байи и некоторых других астрономов.

15 сентября 1766 г., Петербург

С.-Петербург, 15 сего сентября 1766

Милостивый государь,

Ваша работа о движении спутников Юпитера,[1] полученная мною только что из Берлина без относящихся к ней таблиц, тем более меня порадовала, что такие же исследования давно являются предметом моих занятий. Действительно, я уже 24 года назад составил свои первые лунные таблицы,[2] которые с тех пор были усовершенствованы покойным г. Майером в Геттингене. Тогда после многих попыток мне, наконец, удалось определить с помощью одной только теории все неравенства Луны, и я убедился, что эти же формулы могут служить для определения неравенств спутников Юпитера, зависящих от силы [притяжения] Солнца.

Также несколько лет назад я принял в расчет сплюснутую форму Юпитера, вследствие которой сила притяжения его не является в точности обратно пропорциональной квадрату расстояний.[3] Из Вашей работы я с удовольствием увидел, что мы с Вами вполне согласны в отношении обусловленного этим движения апсид спутников. Но исследование возмущений, зависящих от влияния спутников друг на друга, совершенно разочаровало меня в возможности довести этот вопрос до конца. Тем более я был удивлен, увидев, что у Вас хватило храбрости для выполнения такой задачи. Хотя мое теперешнее положение и не позволяет мне рассмотреть метод, которым Вы пользовались, однако мне кажется, как сознаетесь и Вы сами, что нужно еще очень много, чтобы как следует выразить неравенства в движении Юпитера, обусловленные действием Сатурна. Поскольку мне пришлось, может быть, первому работать над этим вопросом,

---

[6] Астрономия для незнающих математики, или полное обозрение сей науки в новейшем ее состоянии с присовокуплением жизнеописаний знаменитейших астрономов. Перевод с французского Д. Перевощикова, М., 1829.

я слишком хорошо знаком с его трудностями. Иррациональная формула, выражающая расстояние Юпитера от Сатурна, не может быть представлена достаточно сходящимся рядом,[4] и в этом состоит самое большое препятствие. Я сильно сомневаюсь, чтобы его можно было успешно преодолеть, пока не будет найден способ сделать эту формулу более удобной для вычислений. Вы, без сомнения, встретили те же трудности, потому что, по-видимому, Вы далеки и от усовершенствования теории самого Юпитера. Мне, однако, кажется, что определение взаимодействия спутников связано с теми же затруднениями, особенно если иметь в виду, что расстояние между двумя спутниками выражается такой же формулой, которая не может быть представлена в виде достаточно сходящегося ряда. Я еще не смог понять, почему, если Вам удалось преодолеть это затруднение в отношении спутников Юпитера, Вас может еще затруднять определение неравенств самого Юпитера.

Сейчас мне тем более интересно знать, каким образом г. Лагранж преодолел те же трудности в своей работе, получившей премию,[5] и так как я не имею оснований сомневаться в успешном его решении, то можно льстить себя надеждой, что теоретическая астрономия в настоящее время доведена до наивысшей степени совершенства.

Имею честь оставаться с совершеннейшим почтением, милостивый государь,

Ваш смиреннейший и покорнейший слуга

Л. Эйлер.

P. S. Так как Вы наверное часто будете видеть г. Лаланда, будьте столь добры попросить его от моего имени, чтобы он прислал мне при первой возможности премированный труд Лагранжа по этому вопросу, а также и те работы, которые получили accessit.[6] Кроме того, еще работу того же автора о либрации Луны.[7] Самой верной оказией будет, без сомнения, пересылка морем.

С.-Петербург, 15 сего сентября 1766

Monsieur,

Votre ouvrage sur le mouvement des Satellites de Jupiter, que je viens de recevoir de Berlin sans les tables qui y appartiennent, m'a été d'autant plus agréable que cette méme recherche a été depuis longtems le sujet de mes occupations. En effet il y a plus de 24 ans que j'avois composé mes premières tables lunaires qui depuis ce tems ont été perfectionnées par feu Mr Mayer de Göttingue où après bien des essais j'avois enfin reussi à determiner par la seule Théorie toutes les inégalités de la lune et j'ai bien vu que ces mêmes formules pouvaient servir à déterminer les inégalités des Satellites de Jupiter causées par la force du Soleil.

Il y a aussi plusieurs ans que j'ai tenu compte de la figure applatie du corps de Jupiter entant que la force attractive n'en est plus exactement proportionelle au carré renversé des distances et j'ai été bien aise de voir dans Votre ouvrage que nous nous sommes parfaitement bien rencontrés sur le mouvement des absides des Satellites qui en résulte. Mais la recherche des dérangements, que les Satellites se causent mutuellement, m'a tout à fait découragé de poursuivre cet objet, et j'ai été d'autant plus surpris de voir que Vous avez eu le courage de remplir cette tâche; quoique ma Situation présente ne m'ait pas encore permis d'examiner la methode dont Vous Vous êtes servi. Cependant il me semble que Vous convenez Vous même, Monsieur, qu'il s'en faut encore beaucoup que les inégalités causées dans le mouvement de Jupiter par l'action de Saturne soient déjà bien développées; comme j'ai eu occasion de travailler peut être le premier sur cette matière je n'en ai que trop éprouvé les difficultés. La formule irrationelle qui exprime la distance de Jupiter à Saturne ne pouvant être resolue dans une série convergente, y met sans doute les plus grands obstacles et je doute fort qu'on y puisse jamais réussir avant qu'on trouve moyen de rendre cette formule plus traitable dans le calcul. Vous aurez sans doute rencontré les mêmes difficultés, puisque vous paroissiez fort éloigné de perfectionner la Théorie de Jupiter même. Or il me semble, que l'action mutuelle des satellites est assujettie aux mêmes difficultés vu que la distance de deux Satellites est exprimée par une semblable formule, qui ne sauroit être résolue dans une série assez convergente, et je ne puis pas encore comprendre que si vous aviez reussi à surmonter cette difficulté à l'égard des Satellites de Jupiter, la détermination des inégalités de Jupiter même Vous pourroit encore embarasser.

Maintenant je suis d'autant plus curieux de quelle manière Mr la Grange a surmonté les même difficultés dans sa pièce qui a remporté le prix sur cette matière, et comme je ne saurois douter d'un heureux succès on peut bien se flatter que la théorie de l'Astronomie est à présent porté à son plus haut degré de Perfection.

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération, Monsieur,

Votre très humble et très obeissant serviteur

L. Euler.

P. S. Comme vous verrez sans doute souvent Mr de La Lande, ayez la bonté, Monsieur, de le prier en mon nom de m'envoyer à la première occasion qui se présentera la pièce victorieuse de M. de la Grange sur ce sujet avec celles qui ont eu *l'accessit*. De même aussi celle du même auteur sur la libration de la lune. La plus sûre occasion sera sans doute par mer.

Письмо печатается по копии (ААН, ф. 1, оп. 3, № 20, л. 161—161 об.).

[1] Работа Байи была озаглавлена: Essai sur la théorie des satellites de Jupiter, avec les tables de leur mouvements (Опыт теории спутников Юпитера с таблицами их движений) — Париж, 1766. Эта работа была представлена на соискание премии Парижской Академии, но премию получил Лагранж (см. прим. 5).

[2] Эйлер говорит о своих таблицах движения Луны, изданных в 1745 г.

[3] В 1762 г. Эйлер представил Петербургской Академии работу под заглавием «Considerationes de motu corporum coelestium» (Соображения о движении небесных тел), которая затем была напечатана в «Novi Commentarii Academiae sc. Petropolitanae» за 1764 год, вышедших в 1766 г.

[4] По современной терминологии ряд, о котором здесь идет речь, является сходящимся. Но Эйлер часто называл сходящимися только те ряды, у которых члены быстро убывают, т. е. быстро сходящиеся.

[5] Сочинение Лагранжа о движении спутников Юпитера, премированное Парижской Академией наук в 1766 г., было озаглавлено «Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter» (Исследование о неравенствах спутников Юпитера) — Pièces de prix de l'Acad. de sciences de Paris, année 1766.

[6] Почетный отзыв, который присуждался выдающимся работам, не получившим премии.

[7] Речь идет о работе Лагранжа «Théorie de la libration de la lune» (Теория либрации Луны), напечатанной в «Pièces de prix de l'Acad. de sciences de Paris, année 1766» (т. IX, 1764). Здесь Лагранж впервые применил принцип виртуальных скоростей.

БИЛЬФИНГЕРУ

Бильфингер, Георг Бернгард (Bülfinger, Georg Bernhard, 1693—1750) — профессор философии в Тюбингене; с 1725 по 1731 г.— профессор Петербургской Академии на Кафедре логики, метафизики и морали.

В публикуемых письмах Л. Эйлера подвергается критике труд учителя Бильфингера Х. Вольфа «Cosmologia Generalis» (Общая космология). Эйлер отвергает в них учение Вольфа о необходимости строго разграничивать метафизические и физические явления и настаивает на том, что метафизика должна основываться на физике. Он доказывает также, что телам присуща только сила инерции, вопреки теории Вольфа о якобы свойственных телам активных силах, возбуждающих движение тел. Из первого письма мы узнаем, что Эйлер написал обширное рассуждение на философские темы, затронутые в «Космологии», которое было послано Бильфингеру и до настоящего времени остается неизвестным. К счастью, этот пробел возмещен вторым письмом, где Эйлер повторил свои основные возражения, вызванные теорией Вольфа. На первое письмо Бильфингер прислал осторожный ответ, которым он постарался не обидеть Эйлера, но и никоим образом не затронуть Вольфа, что вполне понятно, так как он был ревностным сторонником теории Вольфа и его учеником. Второе письмо, по-видимому, осталось без ответа.

1

10 [21] июля 1738 г., Петербург

Знаменитому и славному мужу Г. Б. Бильфингеру шлет нижайший привет Леонард Эйлер.

Когда я не так давно прочитал «Космологию»[1] славнейшего Вольфа, изданную на латинском языке, меня так поразили в ней трудности, столь многочисленные, посылки, столь противоречащие истинным законам движения и самой природе, что я решил, по крайней мере для собственной пользы, внимательнейшим образом все это продумать снова и привести мои мысли в стройную систему.[2] Когда же я случайно упомянул об этом в раз-

Бильфингер Георг Бернгард, 1693—1750.

говоре с нашим знаменитым президентом, он приказал показать ему мои заметки;[3] прочитав их, он счел их достойными расследования — что́ именно скажут о них ученые, занимающие ведущее место в этой отрасли знания. Я же тотчас смиренно попросил, чтобы, кроме Тебя, славнейший муж, никому другому не посылались эти заметки,[4] которыми я отнюдь не хотел бы причинить вред кому бы то ни было, будучи уверен, что Ты, всегда относясь ко мне с величайшей благосклонностью, не посетуешь, если в моем исследовании я допущу некоторые преувеличения и выскажу по адресу славнейшего Вольфа упреки, более суровые, чем следовало бы. Итак, обращаюсь к Тебе, добрейший муж, с покорнейшей просьбой, если позволит Тебе Твоя исключительная занятость, соблаговоли просмотреть эти мои жалкие размышления и сообщи мне о них Твое проницательное суждение. Больше всего я хотел бы в этом деле, чтобы заметки эти, составленные с еще недостаточной последовательностью, были тщательно скрыты как от самого славнейшего Вольфа,[5] так и от его приверженцев[6] и я, таким образом, не вызвал бы ненависти этой многочисленной и достойной философской школы, не будучи нисколько виноват перед нею.

Прощай, славнейший муж, и по-прежнему будь ко мн благосклонным.

Петербург, 10 июля 1738.

Viro Illustri ac Excellentissimo G. B. Büllfingero.
S[alutem] p[lurimam] d[icit] L[eonhardus] E[uler].

Cum ante aliquod tempus Cosmologiam Celeb[errimi] Wolfii latino idiomate editam perlegissem, tot in ea mihi deprehendisse visus sum difficultates, verisque motus legibus et ipsi naturae corporum contrarias propositiones. ut ad meum saltem usum omnia de novo attentius evolvere, measque annotationes in ordinem redigere constituerim. Cum vero deinceps apud Illustris[simum] Praesidem nostrum hac de re forte mentionem fecissem, secum has annotationes meas communicari jussit; quibus perlectis eas dignas judicavit, ut quid Viri in hoc doctrinae genere Praestantissimi de iis sentiant, exploraretur. Ego vero continuo submisse rogavi, ne praeter Te, Vir Excellentissime, alii cuiquam hae annotationes quibus neminem omnino nullo modo laedere vellem, traderentur, certa spe fretus Te pro summo quo me antehac dignatus es favore, non aegre laturum si forte in examine meo cespitavero, atque Celeb[errimum] Wolfium durius subinde quam par erat refutavero. Ad Te igitur confugio, Vir Amplissime, etiam atque etiam rogans, ut si gravissima negotia id permittant, tenues has meditationes meas benevole perlustrare, atque acutissimum judicium Tuum de iis mihi largiri velis. Potissimum autem, quod in hoc negotio desidero, est, ut istae annotationes nondum satis digestae tam Celeb[errimum] Wolffium Ipsum quam Asseclas ejus studiose celentur, ne in odium hujus amplissimae pariter ac meritissimae Philosophorum Sectae innocens incurram.

Vale, Vir Excellentissime, pristinamque erga me benevolentiam conserva.

Dabam Petropoli, ad. d. 10 Jul. 1738.

Печатается по собственноручному черновику Эйлера (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 27, л. 46), тождественному с копией, писанной посторонней рукой (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 27, л. 45 и об.).

Помета: «Представлено 1738 июля 10».

Опубликовано на языке оригинала в кн.: Briefe von Christian Wolff aus den Jahren 1719—1753, СПб., 1860, № 147, стр. 232.

[1] Имеется в виду труд Х. Вольфа: Cosmologia generalis, methodo scientifica pertractata, qua ad solidam imprimis dei atque naturae cognitionem via sternitur (Общая космология, изложенная научным методом, открывающая путь к познанию бога и природы) — Франкфурт и Лейпциг, 1731.

[2] Свои мысли Эйлер изложил в работе «Animadversiones in celeberrimi Wolfii Cosmologiam latino idiomate editam» (Размышления по поводу «Космологии» славнейшего Вольфа, изданной на латинском языке). Эта работа, написанная на шести листах, была передана в Архив Академии наук 16 мая 1738 г., где канцелярист Мессер должен был снять с нее копию (Протоколы заседаний конференции имп. Академии наук, т. I, 16 V 1738, стр. 481—482), что было исполнено 14 июня 1738 г. (там же, 14 VI 1738, стр. 487). Эта копия до настоящего времени в Архиве АН СССР не обнаружена.

[3] Работа Эйлера была передана президенту Академии наук И.-А. Корфу 24 июня 1738 г. (там же, 24 VI 1738, стр. 488).

[4] 10 июля 1738 г. публикуемое письмо «Animadversiones Eulerianas in Cosmologiam Wolfii» по приказанию президента было передано Эйлером секретарю Конференции для отправления Бильфингеру (там же, 10 VII 1738, стр. 493).

[5] Как видно из публикуемого ниже письма Эйлера Вольфу (стр. 74), желание Эйлера не было исполнено и до Вольфа дошли слухи о критических замечаниях Эйлера по поводу его работ.

[6] Вольф был создателем философской школы, к которой, помимо Г.-Б. Бильфингера, принадлежали Л.-Ф. Тюммиг, Ф.-Х. Баумейстер, А.-Г. Баумгартен, М. Кнутцен и другие ученые.

2

3 [14] ноября 1738 г., Петербург

Знаменитому и славному мужу
шлет нижайший привет Леонард Эйлер.[1]

Мне было очень приятно узнать, славнейший муж, о благосклонности, с которой Ты встретил мое письмо и мои космологические размышления.[2] И теперь я с бо́льшим основанием могу надеяться на возможность поучиться у Тебя сложным умозрительным рассуждениям и, таким образом, прийти к пониманию истины. Поэтому я снова настойчиво прошу Тебя подвергнуть мои заметки внимательному рассмотрению, как только Ты получишь «Космологию» славнейшего Вольфа. Мне было бы, однако, весьма приятно, если бы можно было привести в согласие то, что́ мне в этом труде представляется противоречивым, так как перед этим сомнением я остановился, не будучи в состоянии прийти к определенному выводу. Вместе с тем я и теперь еще никак не могу заставить себя принять то, что славнейший Вольф говорит о силах элементов или простых субстанций, так как рассуждение этого мужа не только не приводит к нужному результату, но, если рассуждать правильно, доказывает совершенно противоположное. Ибо хотя я с легкостью, несмотря на его исключительную трудность, принял бы учение об элементах, требующее, чтобы метафизическая часть была тщательно отделена от физической, однако метафизическое учение должно основываться на физике, т. е. должно путем абстракции выводиться из явлений сложных субстанций; поэтому, сколько бы мы ни отделяли метафизические абстракции от физических, все же они ни в коем случае не могут прямо противоречить друг другу. Мне представляется в высшей степени парадоксальным, что, по словам славнейшего Вольфа, простые субстанции обладают [свойством] непрерывно менять свое состояние, в то время как сложным субстанциям или телам присуще свойство сохранять свое состояние неизменным: тут совершенно явное противоречие, когда славнейший Вольф в одном месте приписывает этим телам свойство изменять свое состояние, а в другом месте — сохранять его неизменным. Так что же, автор оказался вынужденным признать и то, и другое? Ибо если простые субстанции обладают свойством постоянно изменять свое состояние, то такое же свойство должно быть присуще телам. Далее, если рассматривать тела с физической стороны, уже никак нельзя отрицать, что тела имеют свойство сохранять свое состояние. Из этого противоречия следует, что то или другое суждение должно быть отвергнуто; отсюда или простые субстанции нужно признать лишенными свойства непрерывно изменять свое состояние, или следует отрицать свойство тел сохранять свое состояние неизменным, а это последнее не только не может быть доказано, но из всех явлений следует со всей очевидностью, что в телах есть только одно свойство, направленное на сохранение их состояния, из чего неизбежно следует вывод о совершенной недопустимости приписывать элементам тел свойство изменять свое состояние. Итак, первое, что мы замечаем в телах и можем продемонстрировать в качестве неизменного принципа, состоит в том, что всякое покоящееся тело, предоставленное самому себе и не подвергающееся воздействию внешних сил, будет стремиться пребывать в постоянном покое. Этому принципу подобен второй закон, согласно которому тело, приведенное в движение, сохраняет состояние равномерного прямолинейного движения. Из двух этих совместных законов следует, что всякое тело обладает силой или свойством сохранять свое состояние до тех пор, разумеется, пока оно предоставлено самому себе и пока внешние силы не мешают сохранению [этого] состояния. Когда же имеет место тот случай, что два или бóльшее количество тел не могут сохранить свое состояние без нарушения состояния других тел, что происходит при их столкновении, тогда с необходимостью должно быть изменено состояние обоих тел. Отсюда следует, что правила сообщения движения обусловлены столкновением тел и что эти правила, очевидно, могут быть выведены из одного первого принципа, согласно которому всякое тело стремится сохранить свое состояние. Таким образом, эти правила столь же обязательны, как и закон сохранения состояния. Поэтому движущееся тело, сталкиваясь с покоящимся, не сообщает ему никакой другой силы, кроме свойственной ему силы сохранять свое состояние, следовательно, движущимся телам нельзя приписывать никакой другой силы, кроме силы сохранять свое состояние. Таким образом, произведенные славнейшим Вольфом напрасные расследования, касающиеся сил, возбуждающих движение и активных, сами собой отпадают, как чистые выдумки.[3] Переходя затем к силам простых субстанций, я нахожу еще более достойным удивления, что славнейший Вольф выводит их из тех самых [свойств] тел, которые подтверждают не что иное, как силу сохранять свое состояние; при этом каждый может легко убедиться, насколько порочна аргументация, которой он пользуется для доказательства этих предположений. Умозаключение же об этом основывается на следующем: опыты показывают, что существует взаимное движение тел, а то, что способно приводить в движение тело, обладает силой; следовательно, всякое тело одарено силой. Поэтому в «Онтологии» [4] он дает такое определение силы: «Сила есть попытка непрерывно менять свое состояние»; основываясь на этом, он приписывает всем телам свойство непрерывно менять свое состояние. Далее, он утверждает, что в сложном не может быть никакой другой силы, кроме подобной или аналогичной той, которая наличествует в элементах [его], отсюда он делает вывод, что элементы тел обладают силой непрерывно изменять свое состояние. Порок этого умозаключения состоит в том, что слову «сила» дано превратное толкование: из того, что тела обладают силой сохранять свое состояние, выводится обратное, а именно, что тела обладают силой непрерывно изменять свое состояние. Что же касается остальной части умозаключения, то здесь прямо должно быть выведено противоположное свойство элементов тел. Ход рассуждения должен быть следующий: все явления доказывают, что в телах нет другой силы, кроме силы, направленной на сохранение их состояния; а поскольку в сложном теле не может быть другой силы, кроме подобной или аналогичной той, которая имеется в элементах, следует сделать вывод, что элементы тел обладают силой сохранять свое состояние. Поскольку это изречение согласуется с истиной, то бóльшая часть «Космологии» Вольфа, трактующая о силах элементов и о выводимой из этих сил разнородности элементов, полностью должна быть отвергнута. Кроме того, совершенно отпадает его учение о силах движущих и активных, хотя и основанное на правильном анализе явлений, и точно так же [его учение] о связях, существующих между законами движения, а такими теориями наполнена почти вся «Космология». Но обо всем этом я почтительно прошу и ожидаю Твоего, славнейший муж, авторитетного суждения.

Прощай, славнейший муж, и не лишай меня Твоей благосклонности.

Петербург, 3 ноября 1738.

Viro Illustri Atque Excellentissimo G. B. Bulfinger S[alutem] p[lurimam] d[icit] Leonhard Euler.

Tibi, Vir Excellentissime, non ingratas fuisse litteras atque animadversiones meas Cosmologicas, eo majore gaudio intellexi, quo magis a Te hujus modi arduis speculationibus erudiri atque ad veritatis cognitionem adduci spero: quamobrem Te denuo magnopere rogo, ut annotationes illas meas, cum Cel[eberrimi] Wolffii Cosmologiam acceperis, acutissimo Examini Tuo subjicere digneris. Si, quae mihi in hoc opere inter se pugnare videntur, in concordiam reduci possent, mihi quidem foret gratissimum, cum in hac dubitatione anceps haeream, neque quid certi statuam reperire possim. Interim nullo etiamnunc modo adduci possum, ut ea, quae Cel[eberrimus] Wolffius de viribus elementorum seu substantiarum simplicium profert, admittere queam, cum hujus Viri ratiocinium rem non solum non conficere, verum etiam, si recte instituatur, contrarium evincere videatur. Quamvis enim facile concedam in elementorum doctrina, quae utique est difficillima, metaphysicum a physico sollicite discerni oportere; metaphysicum tamen ex physico seu ex phaenomenis substantiarum compositarum per abstractionem elici debet; ex quo, quantumvis etiam abstractiones metaphysicae a physicis discrepent, tamen sibi inter se aperte contradicere neutiquam possunt. Substantias autem simplices vi esse praeditas statum suum continuo mutandi, dum substantiae compositae seu corpora vi gaudent in statu suo perseverandi mihi quidem summopere paradoxon videtur: maxime vero evidens est contradictio, quando Celeberrimus Wolfius alio loco corporibus ipsis tribuit vim statum suum mutandi, alio vero loco vim statum suum conservandi. At vero Auctor utrumque statuere cogitur;

nam si substantiae simplices vi gaudent statum suu
perpetuo mutandi, similem vim in corporibus inesse oport
deinde vero si corpora physice considerentur, negari o
nino nequit, quin corpora habeant vim in statu suo p
severandi, qua contradictione alterutram sententiam eve
necesse est; et hanc ob rem vel substantiae simplices
statum suum perpetuo mutandi carere censendae sunt, v
corporibus vis in statu suo permanendi concedi nequ
posterius autem non solum statui non potest, sed omn
phaenomena clarissime evincunt, in corporibus aliam vi
non inesse, nisi quae ad conservationem status sui tend
ex quo necessario concludendum est elementis corporu
vim statum suum mutandi nullo pacto tribui posse. Pr
mum autem quod de corporibus observamus, atque etia
per principium sufficientis rationis demonstrare valem
in hoc consistit omne corpus quiescens sibi relictum ne
a viribus externis sollicitatum in quiete perpetuo e
permansurum. Altera lex huic est similis, qua corpus
motu positum motum uniformiter indirectum continua
statuitur; ex quibus duabus legibus conjunctis sequit
omne corpus vi vel facultate esse praeditum in statu s
permanendi, quam diu scilicet sibi manet relictum n
a causis externis conservatio status impeditur. Quan
autem ejusmodi casus obtingit, ut duo plurave corpo
statum suum conservare nequeant, nisi reliquorum stat
turbetur, quod in collisione corporum contingit, t
utriusque corporis statum immutari necesse est; unde
gulae communicationis motus in collisione corporum exs
gunt, quae evidentissime ex solo priore principio, q
omne corpus in statu suo perseverare conatur, deriv
possunt, ita ut hae regulae aeque sint necessariae ac il
lex conservationis status. Quocirca corpus motum, qu
in quiescens incurrit, hoc ob nullam aliam vim mov
nisi quod vim habet statum suum conservandi, neque i
circo corporibus motis ullam aliam vim tribui conven
praeter vim conservationis sui status, ex quo Cel [eberrim
Wolfii inanes disquisitiones de viribus motricibus et act
vis tanquam mera figmenta concidunt. Sed ut revert
ad vires substantiarum simplicium, id maxime est mira
dum, quod Cel [eberrimus] Wolfius eas ex his ipsis phaen
menis corporum, quae nil aliud praeter vim in statu s
permanendi evincunt, elicuerit; quam vitiosa autem
ejus argumentatio his praemissis, quilibet facillime p

spiciet. Ipsius enim ratiocinium huc redit. Experientia constat, corpora se inter se movere; quod autem corpus movere potest, habet vim; ergo corpus omne vi est praeditum. Deinde in Ontologia vim ita definit, ut dicat «vim esse conatum statum suum perpetuo mutandi», ex quo corporibus omnibus vim tribuit statum suum perpetuo mutandi. Porro dicit in composito nullam vim inesse posse, nisi similis seu analoga insit vis in elementis, hincque concludit elementa corporum vi esse praedita statum perpetuo mutandi; cujus ratiocinii vitium in hac consistit, ut definitione vocis vis praepostere adhibita ex eo, quod corpora vi gaudent in statu suo permanendi, contrarium inferat, scilicet corpora vi gaudere statum suum perpetuo mutandi. Quod si autem reliqua ratiocinii pars admittatur, directe contraria proprietas elementis corporum tribui debebit; ratiocinium ita instituendo: omnia phaenomena evincunt in corporibus aliam vim non inesse, praeter status sui conservatricem: quia autem in composito vis inesse nequit nisi similis vel analoga vis insit in elementis, concludendum est elementa corporum vi esse praedita statum suum conservandi. Si autem haec sententia veritati est consentanea, tum maxima Cosmologiae Wolfianae pars, quae in viribus elementorum, ex iisque deducta elementorum dissimilitudine versatur, funditus evertitur. Praeterea vero ex phaenomenis recte perpensis ejus doctrina de viribus motricibus et activis, itemque de contingentia legum motus omnino corruit, quibus rebus universa fere Cosmologia continetur. Sed de his omnibus solidissimum Tuum judicium, Vir Excellentissime, omni reverentia expeto atque expecto. Vale, Vir Excellentissime, mihique favere perge.

Petropoli, d. 3. Novbr. 1738.

Печатается по копии (ААН, ф. 1, оп. 3, № 27, лл. 93—94 об.).

Пометы: «Представлено и прочитано 1738 ноября 3». «Г. Бильфингеру, личному советнику его светлости герцога Вюртембергского в Штуттгардте».

Опубликовано на языке оригинала в кн.: Briefe von Christian Wolff aus den Jahren 1719—1753, 1860, № 148, стр. 233—235.

[1] Чтение этого письма в Конференции 3 ноября 1738 г. Эйлер сопровождал дополнениями и разъяснениями непонятных мест (Протоколы, т. I, 3 XI 1738, стр. 514).

[2] Имеется в виду письмо Л. Эйлера Г.-Б. Бильфингеру от 10 июля 1738 г. и его работа «Animadversiones in celeberrimi Wolfii

Cosmologiam latino idiomate editam». На это письмо Г.-Б. Бильфингер ответил 15 августа 1738 г. следующее:

«Я получил Твои размышления относительно «Космологии» славнейшего Вольфа. Книгу я еще не видел, но заключаю из общих соображений, которые приходят в голову, что, по-видимому, многое, против чего Ты возражаешь, может быть приведено в порядок. Я позабочусь, чтобы мне прислали книгу. Мне хотелось бы, чтобы Ты понял, как мне было приятно, что Ты пожелал сделать меня участником Твоих размышлений, предпочтя меня другим ученым.

Учение об элементах представляет большие трудности как в отношении реального мира, так и в той части, которая относится к явлению; то, что́ в телах является физическим и что́ метафизическим, следует тщательно различать. Лейбниц называет тела упорядоченными явлениями; в этом выражении, по моему мнению заключено больше, чем обычно понимается.

Прими это письмо, хотя в нем еще не говорится о самом предмете, и будь по-прежнему ко мне благосклонным; жди от меня более подробного письма, которое я напишу, как только будет можно. Прощай.

Штуттгардт, 15 августа 1738 г». (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1, лл. 37—38 об.).

Более подробное письмо Бильфингера, о котором он здесь пишет, к сожалению, не найдено. Возможно, что оно и не существовало. Уклончивый характер ответа Бильфингера становится понятным, если вспомнить, что Бильфингер относился к Эйлеру с завистью (Пекарский, История имп. Академии наук в Петербурге, СПб., т. I, 1870, стр. 88), а Вольфу, рекомендовавшему его на службу в Петербургскую Академию, он был многим обязан, всегда оставался его учеником и в своих лекциях излагал вольфианскую метафизику, защищая Вольфа от нападок его противников.

[3] В «Космологии» Вольфа много внимания уделено спонтанно возникающим «активным силам», якобы свойственным телам, против чего главным образом направлена критика Эйлера. Вольф, например, утверждает, что активная сила тела, или сила деятельная, может быть определена наподобие субстанции (Vis activa corporis sive vis motrix concipi debet instar substantiae): Ch. W o l f f. Cosmologia, § 169, стр. 139.

[4] Здесь говорится о книге Вольфа: Philosophia prima, sive Ontologia (Начала философии, или онтология) — Halle, 1729.

БОННЕ

Бонне, Шарль (Bonnet, Charles, 1720—1793), знаменитый натуралист XVIII в., родился в 1720 г. в Женеве. Родители первоначально готовили сына к карьере юриста, однако склонности влекли его к естественным наукам. Начало занятий Бонне этими науками было связано со случайным обстоятельством: он заинтересовался насекомым, известным под названием муравьиного льва (formica leo); наблюдения привели Бонне к трудам французского энтомолога Реомюра, затем он познакомился с самим Реомюром и с увлечением занялся энтомологией. Уже в 20-летнем возрасте он сделал открытие о девственном размножении травяных тлей и сообщил об этом Реомюру. За это открытие Бонне был избран членом-корреспондентом Парижской Академии Наук.

В дальнейшем Бонне повторил и подтвердил опыты Трамблея над гидрой. Трамблей показал, что если разрезать гидру на части, каждая из них продолжает жить как самостоятельное животное. Бонне распространил эти опыты на животных более сложного строения (Traité d'insectologie, 1745). Бонне также работал в области ботаники. К сожалению, слабое зрение не дало ему возможности продолжать исследования с микроскопом, и он обратился к трудам философского характера. Из них наиболее известны «Contemplations de la nature» (1764) и «Palingénésie philosophique» (1770). В «Палингенезии», к которой и относится главным образом письмо Эйлера, Бонне пробует примирить учение об откровении с требованиями разума. Он проводит мысль о бесконечных превращениях и усовершенствовании каждого живого существа и всей природы. Человек обладает наибольшей способностью к усовершенствованию, и следует ожидать, что все его чувства будут развиваться до бесконечности, глаза приобретут свойства телескопов и микроскопов и т. д. Развивая свои идеи, Бонне уже покидает реальную почву и доходит до признания потустороннего мира, ангелов, архангелов и т. п. Человек, по мнению Бонне, состоит, как и животные, из души и тела; душа также материальна, но состоит из вещества особого рода. «Бог мог сотворить, — говорит он, — организованные машины, которых не может уничтожить огонь». Вещество этих организованных машин Бонне называет эфиром. Но «организованная машина» — это собственно не душа, а ее оболочка, с которой душа связана и после смерти. «Палингенезия» Бонне имела грандиозный успех не только во Франции, но и за ее пределами. Один из первых экземпляров книги Бонне послал Эйлеру с письмом от 13 августа 1762 г., ответом на которое и является письмо Эйлера от 22 октября того же года.

Бонне почти безвыездно жил в Женеве, г е и умер в возрасте 73 лет.

Биография Бонне вышла в русском переводе в издании «Плутарх для юношества» (12 частей, М., 1819—1822); статья Кювье о Бонне переведена в 1826 г. Перевощиковым.

1

18 июля 1761 г., Берлин

Милостивый государь,

Я очень сожалею, что из-за некоторых помех так долго не мог высказать Вам мою глубочайшую признательность за честь, которую Вы соблаговолили мне оказать, прислав мне Вашу превосходную работу о способностях души.[1] Меня очень тронуло это внимание, и я сразу же принес бы Вам мои смиреннейшие выражения благодарности, если бы у меня не возникли некоторые сомнения относительно принципов, служащих Вам основанием. Я подумал, что будет лучше, если я сообщу их одному другу, который будет иметь возможность изложить их Вам лично, одновременно заверив Вас в том, что я чувствую себя чрезвычайно Вам обязанным. Страх вступить в философские споры, которые обычно кончаются лишь порчей отношений, заставил меня избрать такой путь, причем я решил отказаться от него, если только мой друг сообщит мне, что эти сомнения представляются Вам лишенными оснований. Но мой друг, из страха ввязаться в такой спор, предпочел совсем отказаться от моего поручения, и я не ставил бы ему это в вину, если бы он передал Вам изъявления моего нижайшего почтения. Теперь я прошу у Вас прощения и сам выполняю долг: хочу засвидетельствовать Вам свою безграничную признательность. Ваши просьбы, обращенные к г. Формею, вместе с заявлением, которое Вы делаете в Вашем предисловии, придают мне решимость изложить Вам мои сомнения относительно первого принципа, служащего основой Вашей теории способностей души. Если только согласиться с принципом, что каждое ощущение связано с определенным нервным волокном, то, мне кажется, все остальное будет принято без каких-либо возражений, и если бы я мог убедиться в истинности этого принципа, я счел бы весь Ваш труд доказанным математически. Но я должен признаться, милостивый государь, что я был сначала

Бонне Шарль, 1720—1793.

неприятно поражен, когда Вы привели в защиту Вашего принципа взгляды г. де Мерана на распространение звука.[2] Ибо, хотя Вы не придаете этому силы доказательства, я охотно соглашусь, что если каждый звук связан с определенными частицами воздуха, то можно рассматривать это уже как неопровержимое доказательство того, что Природа действует вполне одинаково, когда передает к мозгу впечатления, произведенные на наши внешние органы чувств. Но поскольку я убежден, что это мнение де Мерана совершенно ошибочно и полно грубейших противоречий, Вы не удивитесь, что это же обстоятельство делает для меня весьма подозрительным и Ваш принцип. Когда г. де Меран высказал свое предположение, мы были еще очень далеки от истинной теории, которая углубила бы [представление] о колебаниях, распространяемых в упругой среде, а потому подобное предположение могло встретить одобрение, хотя даже слабый свет, пролитый Ньютоном на этот вопрос, коренным образом ему противоречил. Только несколько лет назад была найдена возможность разрешить этот трудный вопрос, и мы обязаны этим важным открытиям г. Лагранжу, талантливому туринскому математику.[3] Теперь уже нет сомнения, что все частицы воздуха[a] абсолютно безразличны по отношению ко всяким звукам, как бы различны они ни были, так что все звуки передаются и распространяются одними и теми же частицами воздуха и каждая частица воздуха одинаково способна воспринимать различные колебания, из которых состоят разнообразные звуки. Отсюда по принципу аналогии уже можно было бы вывести следствие, что наши ощущения распространяются до мозолистого тела, которое Вы считаете средоточием души: но этот аргумент был бы, конечно, весьма слабым, и я хочу выдвинуть его лишь тогда, когда лучше рассмотрю прямые доказательства Вашего принципа, приводимые Вами. Вы начали Ваши исследования с чувства обоняния. Вы предполагаете, что к носу Вашей статуи[4] подносят розу, и нет сомнения, что это действует на определенные нервы, которые и передают ощущение запаха розы в мозг. Розу убирают, а через некоторое время вновь подносят к статуе розу, и Вы говорите, не доказывая этого, что это опять подействует на те же самые нервы. Но разве

---

[a] *Далее неразборчиво.*

не возможно, что другое положение розы относительно носа возбудит другие нервы, и, несмотря на это, статуя примет это ощущение за предшествующее? Но это только *возможность*, и я не хочу настаивать на этом. Далее, Вы предполагаете, что той же статуе предлагают гвоздику, и утверждаете без всякого доказательства, что запах этого цветка действует на иные нервы, чем запах розы. Я не могу доказать противное, но как думали бы Вы опровергнуть того, кто сказал бы, что эти два запаха действуют на одни и те же нервы, но различным образом, и что именно это различие производит разные ощущения в мозгу? Чувство обоняния, мне кажется, не подходит для разрешения этих сомнений, потому что мы имеем весьма неясные представления о механизме этого чувства. Мы знаем лишь в общем, что нервы этого органа возбуждаются запахами — и ничего более. Возьмем лучше чувство зрения, механизм которого мы знаем гораздо лучше. Нам известно, что лучи от каждого видимого предмета дают в глубине глаза изображение, представляющее его подобие, и поскольку оно является более непосредственным объектом нашего ощущения, мы можем определить нервы, на которые оно действует. Это — те нервы, которые заканчиваются на сетчатке в том месте, где находится изображение. Другие нервы, заканчивающиеся в других частях сетчатки, не получают от него никакого впечатления. Предположим теперь, что наша статуя обладает одним только чувством зрения, и проделаем те же опыты, какие производили Вы с чувством обоняния. Пусть наша статуя откроет сначала лишь один глаз, чтобы не осложнять дело двумя изображениями. Предположим, ей подносят вишню, на определенном расстоянии и в определенном положении по отношению к глазу — это обстоятельства, которые необходимо принять во внимание. Тогда в некотором месте сетчатки получится изображение вишни. Нервы, заканчивающиеся в этом месте, будут возбуждены и дадут в душе ощущение вишни. Пусть затем вишня удалена, а через некоторое время ее подносят снова, но уже в несколько ином положении. Поскольку ее изображение упадет уже в иное место, чем в первом случае, им будут возбуждены другие нервы, однако наша статуя признает, что ощущение одно и то же. Если Вы скажете, что она рассматривала бы эти ощущения как различные, я отвечу, что, может быть, нашей статуе тысячу раз преподнесут одну и ту же вишню, но ее изображение никогда не упадет точно на одно и то же место сетчатки, а отсюда следует, что душа никогда не признала бы тождественности изображений. Но здесь я не собираюсь вступать в спор. Опыт решает это вполне ясно, как и в случае обоняния, и мы знаем, что, смотрим ли мы на одну и ту же вишню прямо или несколько вкось, мы так же хорошо убеждаемся в тождественности ощущения, как и в процессе обоняния, когда в несколько приемов к носу подносили одну и ту же розу. Теперь вместо вишни поднесем нашей статуе грушу точно в таком же положении, как ранее подносили вишню. Изображение груши упадет на тот же участок сетчатки, на котором ранее было изображение вишни, а следовательно, это вызовет возбуждение тех же нервов. Однако душа не преминет ясно отличить грушу от вишни. Все это, по-моему, доказывает с полной несомненностью, что одни и те же нервные волокна могут представлять весьма различные предметы, а один и тот же предмет может быть изображен весьма различными волокнами. И почему бы одно и то же волокно не могло передавать бесконечное множество различных впечатлений подобно тому, как одни и те же частицы воздуха передают различные звуки, и почему различные волокна не могли бы передавать одинаковые впечатления, как различные частицы воздуха передают одинаковые звуки? Исследование чувства зрения разъясняет нам также и то, каким образом нервные волокна этого чувства получают различные впечатления. Как струны, дающие различные звуки, колеблются более или менее быстро, так что каждый звук соответствует определенному числу колебаний за определенное время, так — мне кажется я это достаточно ясно доказал — различные цвета подобным же образом отличаются друг от друга. Например, предмет окрашен в красный цвет тогда, когда мельчайшие частицы на его поверхности находятся в таком состоянии натяжения, что если их приводят в колебание, они совершают известное число колебаний в секунду; при другом числе колебаний получились бы другие цвета. Я показал также, что одно только освещение способно привести в колебание мельчайшие частицы тела. Следовательно, если на сетчатке образуется красное изображение, окончания нервов колеблются определенное число раз в секунду и распространение этого колебательного движения вызывает в мозгу ощущение красного цвета. Те же волокна могут приходить в движение или более, или менее быстрое, чем данное, и тогда получилось бы ощущение другого цвета.

Вот основа тех возражений, которые я, милостивый государь, имею честь Вам представить в отношении принципа всей Вашей системы. Если мои возражения кажутся Вам достаточно убедительными, чтобы опровергнуть этот принцип, то, я не сомневаюсь, Вы найдете иные принципы, более согласные с истиной, и сумеете построить на них иную, новую теорию, которая будет, без сомнения, бесконечно более совершенной. В случае же, если мои возражения покажутся Вам слишком слабыми, то, сознаюсь, я не имею иных доказательств для их подкрепления, кроме тех, какие я только что привел, и это признание, по-моему, есть лучший способ избежать каких-либо споров. Однако мне было бы очень интересно знать, что Вы думаете по этому поводу, и я имею честь оставаться с совершеннейшим почтением, милостивый государь, Ваш смиреннейший и покорнейший слуга

Л. Эйлер.

Берлин, 18 июля 1761, г. Бонне, Женева.

Monsieur,

Je suis très faché qu'un certain contretems m'a arrété si long tems de Vous temoigner ma très parfaite reconnoissance de l'honneur, que Vous m'avés bien voulu faire en m'envoyant Votre Excellent ouvrage sur les facultés de l'Ame. Je fus très sensible à cette distinction et je Vous aurois presenté sur le champ mes très humbles remercimens si je n'avois trouvé quelques doutes sur les principes qui Vous servent de fondement, et j'ai cru mieux faire de les communiquer a un Ami qui seroit en etat de Vous les proposer de bouche en Vous assurant en meme tems de la plus grande obligation dont je Vous sens redevable. La crainte de m'engager dans une Dispute philosophique, qui n'aboutissent ordinairement qu' à aigrir les esprits, m'a determiné à prendre ce parti, bien resolu de m'en desister d'abord que mon ami m'auroit marqué, que ces doutes Vous paraissent destitués de fondement. Mais mon ami de peur de s'envelopper dans une semblable dispute a mieux aimé de supprimer toute ma commission et je ne saurois desaprouver cette demande pourvu qu'il se fut acquitté envers Vous de mes actions de grace les plus empressées. Maintenant je Vous en demande bien du pardon, et en m'acquittant moi meme du devoir, de Vous témoigner mon obligation infinie. Vos instances addressées à M^r Formey jointes à la Declaration que Vous faites dans Votre Preface m'inspirent le courage de Vous proposer mes difficultés sur le premier principe, qui sert de base à Votre Theorie sur les facultés de l'ame: Dès qu'on Vous accorde le principe que chaque sensation est appropriée à une certaine fibre nerveuse, il me semble que tout le reste se trouve à l'abri de toutes contradictions et si je me pouvois convaincre de la verité de ce principe, je regarderois Votre ouvrage tout entier comme geometriquement demontré. Or je Vous dois avouer, Monsieur, que je fus d'abord choqué, lorsque Vous allegués le sentiment de M. Demairans sur la propagation du son pour soutenir Votre principe. Car quoique Vous ne lui attribuiés pas la force d'une preuve, je conviens pourtant aisement, que chaque son étoit approprié à certaines particules de l'air, je regarderois cela déja comme une preuve incontestable, que la nature agit d'une maniere tout à fait semblable, en transmettant les impressions faites sur vos organes externes des sens jusqu'au cerveau. Mais reciproquement aussi, puisque je suis convaincu que ce sentiment de M. Demairan est tout à fait chimerique et rempli de contradictions les plus grossières, Vous ne serez pas surpris, que cette meme circonstance me rend Votre principe extremement suspect. Quand M^r De Mairan avança cette conjecture, on étoit encore fort eloigné de la veritable theorie qui sert à approfondir les agitations propagées par un milieu elastique, et partant une telle conjecture pouvoit alors bien trouver approbation, quoique les faibles lumières que Newton avoit deja données sur cette matière lui fussent absolument contraires. Ce n'est que depuis quelques ans, qu'on a trouvé moyen de developper cette matiere épineuse et c'est à M^r La Grange, Habile Geometre à Turin, qu'on est redevable de cette importante decouverte. Maintenant il n'y a plus de doute que toutes les particules de l'air, si[a] est qu'il y aura des differences, sont absolument indifferentes à l'egard de tous les sons,

---

[a] *Далее неразборчиво.*

quelque differens qu'ils soient, de sorte que tous les sons sont egalement transmis et propagés par les memes particules de l'air, et chaque particule de l'air est egalement susceptible de toutes les differentes vibrations, dont les divers sons sont formés. De là on pourroit dejà tirer par le principe de l'analogie cette conséquence, qu'il en est de meme par rapport aux nerfs, par lequels nos sensations sont propagés jusqu'au corps calleux que Vous regardés comme le siège de l'ame: mais cet argument seroit sans doute bien foible et je ne veux pas le faire valoir, que jusqu'à ce que j'aurois mieux examiné les preuves directes, que Vous donnés de Votre principe. Vous commencés Vos recherches par le seul sens de l'odorat. Vous supposés qu'on presente au nez de Votre statue une rose et il n'y a aucun doute que quelque nerfs n'en soient affectés, qui transmettent la sensation de l'odeur de rose jusqu'au cerveau. On òte la rose, et après quelque temps on lui présente de nouveau une rose, et Vous dites sans le prouver que les memes nerfs en sont affectés; ne seroit il pas possible, qu'une autre situation de la rose par rapport au nez, frappat d'autres nerfs, et que cela non obstant la statue prenne cette sensation pour la precedente; mais cela n'est qu'in *peut être* et je ne veux pas insister là dessus. Ensuite Vous supposës qu'on présente à la meme statue un oeillet, et Vous avancés d'abord sans aucune preuve que l'odeur de cette fleur agit sur d'autres nerfs que celle de la rose. Je ne saurois prouver le contraire, mais comment voudriés Vous refuter celui qui diroit que ces deux odeurs agissent sur les memes nerfs, mais d'une maniere differente, et que cette meme difference produisit dans le cerveau des sensations differentes. Le sens de l'odorat ne paroit pas propre à prononcer sur ces doutes, puisque nous n'avons qu'une connoissance très imparfaite du mecanisme de ce sens, nous ne savons qu'en gros que les nerfs de cet organe sont excités par les odeurs, et rien de plus. Prenons plutot le sens de la vüe, dont nous connoissons infiniment mieux le mecanisme: nous savons que les rayons de chaque objet visible peignent au fond de l'oeil une image, qui lui est semblable, laquelle etant un objet plus immediat de notre sensation, nous pouvons assigner les nerfs qui en sont affectés, ce sont ceux qui aboutissent dans la retine à l'endroit ou l'image est representée. Les autres nerfs qui aboutissent à d'autres points de la retine n'en reçoivent aucune impression. Accordons à présent à notre statue le seul sens de vüe, pour faire les memes experiences, que Vous faites pour l'odorat; que notre statue n'ouvre d'abord qu'un seul oeil pour ne nous point embrouiller par les deux images, qu'on lui présente une cerise, dans une certaine distance et situation par rapport à l'oeil, — ce sont des circonstances auxquelles il faut bien avoir egard. Alors sur un certain endroit de la retine, l'image de la cerise sera representée, les nerfs qui aboutissent à cet endroit, en seront affectés, et produisent dans l'ame la sensation d'une cerise. Qu'on ote la cerise, et aprés quelque tems qu'on la présente de nouveau, mais dans une situation un peu différente, et puisque son image tombera sur un autre endroit, qu'au premier cas, d'autres nerfs en seront affectés, et cependant notre statue reconnoitra, que c'est la meme sensation. Voudrés Vous dire, qu'elle les regarderoit comme différentes, je repliquerois, qu'on pourroit peut être mille fois presenter la meme cerise à notre statue, sans que son image tombat jamais precisement sur le meme endroit de la Retine, et de là il s'ensuivroit que l'ame ne reconnoitrait jamais l'identité de la sensation: mais ici il ne s'agit pas de disputer. L'experience decide ouvertement aussi bien que sur l'odorat; et nous savons, que soit que nous regardons la meme cerise directement ou plus on moins obliquement, nous reconnoissons aussi bien l'identité de la sensation, que dans le cas de l'odorat, ou l'on a presenté au nez la meme rose à differentes reprises. Mais maintenant au lieu d'une cerise presentons à notre statue une poire dans la meme situation precisement,qu'on lui avoit auparavant presenté la cerise, et l'image de la poire tombera sur le meme endroit de la retine, qu'auparavant celle de la cerise, et partant les memes nerfs en seront affectés: cependant l'ame ne manquera pas de bien distinguer la poire de la cerise. Tout cela me paroit prouver trés incontestablement, que les memes fibres nerveuses peuvent representer des objets très differens et que le meme objet peut etre representé par des fibres très differentes. Et pourquoi la meme fibre ne seroit elle pas susceptible d'une infinité d'impressions differentes tout comme les memes particules d'air transmettent une infinité de sons differens? et pourquoi de fibres differentes ne seroient elles pas susceptibles de semblables impressions, tout comme differentes particules d'air servent à transmettre des sons égaux? La consideration du sens de vüe nous peut aussi eclaircir sur la maniere dont les fibres nerveuses de ce sens reçoivent diverses impressions. Comme les cordes qui rendent differens sons sont ebranlées plus ou moins rapidement, chaque son étant approprié à un certain nombre de vibrations, qui s'achevent dans un certain tems, je crois avoir suffisament prouvé, que les differentes couleurs diffèrent entr'elles d'une manière semblable. Un corps est par exemple rouge, lorsque les moindres particules à son surface ont une telle tension, qu'étant ébranlées elle achevent un certain nombre de vibrations par seconde, et d'autres nombres causeront d'autres couleurs, et j'ai fait voir aussi que la seule illumination est capable d'agiter les moindres particules des corps. Donc lorsque sur la retine il se presente une image rouge, les bouts des nerfs y sont ebranlées un certain nombre des fois par seconde et la propagation de ce mouvement vibratoire excite dans le cerveau la sensation de la couleur rouge; or les memes fibres peuvent aussi recevoir un mouvement de vibration plus ou moins rapide et de là naitroit la sensation d'une autre couleur.

Voilà le fondement des objections, que j'ai l'honneur de Vous proposer, Monsieur, sur le principe de tout Votre Systeme. Si ces objections Vous paroissent asses fortes pour renverser le principe, je ne doute pas, que Vous ne trouviés moyen d'etablir d'autres principes plus conformes à la verité et d'y batir une autre nouvelle Theorie qui sera sans doute infiniment plus parfaite. Or en cas que mes objections Vous paroissent trop foibles, je Vous avoüe que je n'ai pas d'autres preuves pour les soutenir, que celles que je viens de proposer, et cet aveu me paroit le meilleur moyen pour prevenir toute dispute. Cependant je suis fort curieux d'apprendre, ce que Vous pensés la dessus, ayant l'honneur d'être avec la plus parfaite consideration, Monsieur, Votre très humble et très obeissant serviteur

L. Euler.

Berlin, le 18 de Juillet 1761, à M^r Bonnet à Geneve.

Печатается по фотокопии; оригинал хранится в Женеве.

Помета неизвестной рукой: «Это письмо пропущено в III т. моего „Recueil épistolaire"».

[1] Речь идет о работе Бонне: Essai analytique des facultés de l'âme (Аналитический опыт о способностях души) — Копенгаген, 1760, 1769; Женева, 1775.

[2] Де Меран Жан Жак (De Mairan, 1678—1771) — физик и математик. С 1718 г. — член Парижской Академии наук, где заменил Фонтенеля на посту непременного секретаря; с 1743 г. — член Французской Академии. Его теория о распространении звука опубликована в 1737 г. в Записках Парижской Академии (Mémoires de l'Académie de Paris, Discours sur la propagation du son).

[3] Здесь Эйлер имеет в виду работу Лагранжа «Recherches sur la propagation du son» (Исследования о распространении звука), напечатанную в 1759 г. в «Misc. Soc. Turin» (т. 1).

[4] В «Essai analytique» Бонне доказывает свою теорию распространения ощущений на примере постепенно оживающей статуи, которая приобретает одно за другим внешние чувства. Прежде всего он разбирает чувство обоняния. При этом Бонне утверждал, что к мозгу идет столько же нервных волокон, «сколько чувств может родиться в душе; запах гвоздики и запах розы передаются различными волокнами».

2

22 октября 1762 г., Берлин

Берлин, 22 сего октября 1762

Когда я, уважаемый и знаменитый собрат, получил письмо, которое Вы соблаговолили послать мне через г. Формея, я уже прочел с величайшей жадностью Ваш превосходный труд об организованных телах [1] и собирался выразить Вам за него мою самую искреннюю благодарность, свидетельствуя в то же время свое восхищение глубокими исследованиями, которые Вы так удачно провели. Я не ограничился главами, особо Вами рекомендованными, а прочитав Ваш труд с начала до конца, имел величайшее удовольствие познакомиться уже в начале с Вашими счастливыми предположениями, которые так хорошо оправдались впоследствии. Но я все же хотел бы, чтобы положение, которое Вы так детально развили о роли самца, было более согласно с опытом; по-моему, то, что Вы об этом говорите, служит [Вам] заменой математического доказательства. Далее, мне почти невозможно согласиться с тем, что семенная жидкость самца служит лишь питанием для развития зародыша, который весь целиком заключен в самке; и должен Вам сознаться, что Ваши доводы слишком расположили меня в пользу системы, которая отводит самцу более существенную роль. Вполне ли достоверно, что опыты г. Галлера [2] совершенно опровергли эту превосходную систему? Я не читал об этих опытах, но уверен, что им можно еще противопоставить хорошо обоснованные сомнения. Эти опыты, бесспорно, доказывают, что в оплодотворенном яйце все сосуды, заключенные в желтке, находятся в теснейшей связи с сосудами цыпленка и что даже оболочки желтка являются как бы продолжением оболочек внутренних органов зародыша. Да будет мне позволено рассмотреть следствия, которые выводит отсюда г. Галлер и с которыми Вы, по-видимому, согласитесь: говорят, что желток со всеми своими сосудами и оболочками существует уже до оплодотворения, а отсюда заключают, что зародыш, в силу своей тесной связи с желтком, также должен предсуществовать в желтке. Но не слишком ли поспешно такое заключение? Нельзя ли предположить, что все эти сосуды существовали в желтке, когда зародыша там еще не было, и что этот последний попадает туда лишь после оплодотворения, и что после этого, развиваясь, его сосуды соединяются с сосудами желтка путем своего рода прививки? Это представляется мне тем более возможным, что Вы доказали столькими опытами, что такое срастание и соединение путем прививки происходит часто и даже почти всегда в таких крайне тонких органах. И не служит ли это веским аргументом для доказательства того, что это соединение — лишь преходящее, а потому как бы случайное для зародыша, потому что длится лишь до тех пор, пока цыпленок нуждается в питании извне, и как только оно закончено — соединение нарушается. Итак, я не вижу, почему здесь хотят отвергнуть всякого рода прививку, которая, однако, так замечательно осуществляется в подобных же обстоятельствах. В силу этих причин я был бы еще очень далек от того, чтобы опровергнуть мнение, будто зародыш предсуществует весь целиком в яйце и семенная жидкость служит ему лишь в качестве первоначального питания, если бы я не видел, что Вы сами отказываетесь от этого мнения, доведя его до высшей степени правдоподобия. Но не случилось ли так, что авторитет г. Галлера оказал слишком большое влияние на Ваш ум; а может быть, у Вас есть более убедительные доказательства, которых я не смог уловить. Да и так ли нелепо допустить зародыши квази-раздельные, одна половина которых находится в яйце, а другая, находясь в семенной жидкости, прививается к ней при воспроизведении? В этом случае можно было бы сказать, что внутренности курицы находятся уже в яйце и тесно связаны с сосудами и оболочками желтка, а петух добавляет верхнюю часть, которая при известном положении — правда, оно должно быть особо удачным — прививается к нижней. Таким образом, объяснение мула стало бы гораздо более ясным и Вас уже не удивляли бы ни уши и голос [осла], ни хвост и туловище лошади. Ваши опыты с гидрами, а также с насекомыми заключают множество столь же странных вещей. Куриные лапы у гибрида утки с курицей соответствовали бы этой системе, как и форма Juma, и можно было бы легче понять невозможность воспроизведения слишком различных пород. Может быть, эта новая система хорошо соответствовала бы процессам, происходящим в растительном царстве; так что и в зерне предсуществует только корень, а остальная[а] часть вводится в него пыльцой тычинок, ибо я сознаюсь Вам, что объяснение ушей и голоса мула в другой системе представляется мне слишком натянутым, и я уверен, что если бы Вы не оставили своей первой системы, Ваше объяснение большинства явлений этого рода стало бы гораздо более [правдоподобным]. Но я должен признать свою слабость в подобных рассуждениях, мало мне знакомых. Здесь приходится охватывать в уме одновременно столько фактов, бóльшая часть которых мне почти что неизвестна, поэтому я предоставляю[б] эти вопросы всецело Вашему решению. Академия только что получила весьма подробное описание урода без головы, без сердца и без артерий — не означает ли это, что только туловище предсуществовало в материи, прививки же мужского зародыша хватило лишь на то, чтобы развить это туловище, а более[б] части вскоре разрушились, или прививка удалась лишь частично. Что касается задачи нашей Академии о воспроизведении,[3] то могу Вас уверить, что никто не разрешит ее лучше, чем Вы, и что мои коллеги из Физического класса, предложившие этот вопрос, будут такого же мнения. Но по этому поводу необходимо сообщить Вам об одном весьма существенном правиле, запрещающем нам допускать какое-либо сочинение, автор которого. .[в]

[а] *Далее неразборчиво.*
[б] *Далее пропуск.*
[в] *Конец отсутствует.*

Berlin, ce 22 octobre 1762

Lorsque je reçus, Monsieur mon illustre Confrère, la lettre que Vous m'aves bien voulu faire remettre par Mr Formey, j'avais dejà lu avec la plus grande avidité votre Excellent Ouvrage sur les corps organisés, et j'etois sur le point de Vous en presenter mes remercimens les plus empressés, et de Vous temoigner en meme tems mon admiration sur les profondes recherches que Vous y avés si heureusement developpées. Je ne me suis pas borné au chapitres, que Vous me recommandés principalement, mais ayant parcouru l'ouvrage d'un bout à l'autre j'ai eu la plus grande satisfaction d'y apprendre dès le commencement Vos conjectures heureuses qui ont été si bien confirmées dans la suite. Mais j'aurois surtout souhaité, que ce que Vous y avés si judicieusement developpé sur la concurrence du mâle fut trouvé mieux d'accord avec l'experience, ce que Vous en aviés amassées me parut tenir lieu d'une Demonstration Geometrique et encore il m'est presque impossible de me convaincre que la liqueur seminale masculine ne sert que de nourriture pour developper le germe, qui existe tout entier dans la femelle et je dois Vous avouer que Vos Raisons m'avoient trop prevenu en faveur du Systeme qui accorde au male une influence plus essentielle. Est il donc bien certain que les experiences de Mr de Haller ayent entierement renversé ce beau systeme? je n'ai pas lu ces experiences mais je doute pas qu'on leur pourroit encore opposer des doutes bien fondés. Ces experiences prouvent sans doute, que dans un oeuf fécondé tout les vaisseaux, qui se trouvent dans le jaune, sont dans la plus etroite liaison avec les vaisseaux du poulet, et que meme les enveloppes du jaune sont quasi une continuation de celles des intestins du foëtus. Qu'il me soit permis d'examiner les consequences que Mr de Haller en tire et que Vous semblés adopter: on dit que le jaune avec tous ses vaisseaux et enveloppes existe dejà avant la fecondation et de la on conclud, que le foetus à cause de cette droite liaison avec le jaune y doit necessairement aussi preexister dans le jaune. Mais cette conclusion ne seroit -t- elle pas un peu precipitée? Ne seroit il pas possible que tous ces vaisseaux existassent dans le jaune, sans que le germe s'y trouve deja et que celui-cy n'y parvienne qu'à la fecondation? Après quoy en se developpant ses vaisseaux s'unissent avec ceux du jaune par une espece de greffe, ce qui me paroit d'autant moins impossible, que Vous avez prouvé par tant d'autres experiences, qu'une telle jonction et union par greffe se fait si souvent et presque generalement dans de tels organes si extremement deliés. Ne seroit ce aussi un grand argument pour prouver que cette union n'est que passagere et partant quasi accidentelle au foetus puisqu'elle ne dure que tant que le poulet a besoin d'etre nourri de dehors, et que dès qu'il est achevé, cette union est detruite. Ainsi je ne vois pas, pourquoi on veut ici eloigner toute espece de greffe qui se trouve d'ailleurs si admirablement bien etablie dans de semblables circonstances; par ces raisons je serois encore fort eloigné d'embrasser le sentiment que le germe preexiste tout entier dans l'oeuf, et que la liqueur seminale ne lui sert qu'à fournir la premiere nourriture; sije ne voyois que Vous aves Vous meme abandonné ce sentiment, après l'avoir porté au plus haut degré de vraisemblance. Mais ne seroit il pas possible que l'autorité de M[r] de Haller ait eu un peu trop d'influence sur Votre Esprit; mais peut etre en avés Vous d'autres preuves plus convaincantes que je n'ai pu saisir. D'ailleur seroit il si absurde d'admettre des germes quasi divisés, dont une moitié se trouve dans l'oeuf, et que l'autre etant dans la liqueur seminale s'y greffe dans la generation; de là on pourroit dire que les intestins du poulet seroient dejà dans l'oeuf, et intimement liés avec les vaisseaux et enveloppes du jaune, et que le coq y introduise la partie superieure, qui dans une certaine situation à la verité très heureuse se greffe avec l'inferieure; de là l'explication du mulet deviendroit beaucoup plus lumineuse et Vous ne seriés plus en peine des oreilles et des organes de la voix[а] ni de la queüe et du corps de cheval. Vos experiences sur les polypes et d'autres insectes renferment bien des choses aussi etranges. Les pieds du coq du batard engendré d'un canard avec une poule seroient bien favorables à ce systeme de meme que la forme de Juma, et on comprendroit plus aisement l'impossibilité de generation dans les especes trop differentes. Peut etre ce nouveau systeme seroit il aussi bien d'accord avec le regne vegetal, et que dans les grains il n'y preexiste que la radicule, l'autre[б] y etant introduite par la poussiere

---

а *Следует «la voix de l'âne».*
б *Далее неразборчиво.*

des etamines: car je Vous avoue, que l'explication des oreilles et de la voix du mulet l'autre me parait trop forcée et je suis bien asseuré que si Vous n'aviės abandonné Votre premier systeme, Votre explication de la plupart de ces sortes de phenomenes seroit devenu beaucoup plus [suffis] ante. Mais je dois reconnoitre ma foiblesse dans cette espece de meditations qui me sont peu familieres, où l'on est obligé d'embrasser à la fois dans l'esprit tant de faits dont la plus grande partie m'est presque inconnue et je soumets ces idées entierement à Votre decision. L'Academie vient de recevoir une description bien detaillée d'un monstre humain sans tête, sans coeur, et *sans arteres*, ne soit ce que le tronc seul ait preexisté dans la mère et que la greffe du germe masculin n'a reussi que pour developper ce tronc les plus[в] ayant été detruites bientot après, ou bien la greffe n'a reussi qu'en partie. — Pour ce qui regarde la question de notre Academie sur la generation, J'ose Vous asseurer que Personne ne lui aura mieux satisfait que Vous, et que mes Collegues de la Classe de Physique qui ont proposé cette question, seront là dessus de meme avis: mais il faut que je Vous donne part là dessus d'une loi très essentielle qui nous defend d'admettre aucune piece, dont l'Auteur n'ait parfaitement. . .[г]

Печатается по фотокопии; оригинал хранится в Женеве.

[1] Имеется в виду книга Бонне: Considérations sur les corps organisés (Соображения об организованных телах) — Амстердам, Париж, 1762. В этом сочинении Бонне излагал систему так называемого преформизма, т. е. учения об образовании организмов путем простого увеличения первоначально заложенного зародыша, который уже заключает в себе все части организма; в зародыше они невидимы вследствие крайней малости и прозрачности. Таким образом, с точки зрения преформистов, какими были Бонне и Галлер (см. прим. 2), в природе нет истинного развития, т. е. образования нового. Эйлер возражал против теории преформизма.

[2] Галлер — швейцарский естествоиспытатель и поэт (1708—1777), производил многочисленные опыты, на основании которых стремился доказать, что, например, цыпленок, со всеми его органами, уже заранее предсуществует в зародыше.

[3] Задача (на 1762 г.) была сформулирована так: «Происходят ли все живые существа как животного, так и растительного царства из яйца, оплодотворенного зародышем (germe), или же из произ-

[в] *Далее пропуск.*
[г] *Конец отсутствует.*

водящей (prolifique) материи, аналогичной зародышу?». Ни одно из сочинений, присланных на конкурс, не было удостоено премии (Harnack, Geschichte der Kgl. Preuss. Berl. Academie, т. II, стр. 306, сноска).

3

21 июня 1763 г., Берлин

Милостивый государь и знаменитый собрат,

Я получил все письма, какими Вам угодно было меня почтить, и обязан Вам за них не менее, чем если бы сразу Вам это засвидетельствовал. Должен Вам признаться откровенно, что, будучи всегда занят исследованиями, требующими долгого времени, я почти не могу решиться писать письма, прерывая, таким образом, нить своих мыслей. Вот почему я уже много лет как отказался почти от всякой переписки. Но в отношении той чести, какую Вы соблаговолили оказать мне Вашими письмами, я не преминул бы сделать совершенно особое исключение, если бы не счел желательным выждать решения Академии по поводу Вашего превосходного «Traité sur les corps organisés» и, я надеюсь, Вы нимало не усомнитесь в моем горячем стремлении удовлетворить Вас по мере своих сил, если даже я не сообщал Вам об этом. Но вот теперь, милостивый государь, какое исключительное суждение Академия только что опубликовала по поводу Вашей работы, и я бесконечно счастлив сообщить Вам это известие, хотя можно предположить, что Вы уже знаете его из газет.[1]

Впрочем, имею честь заверить Вас, что я пребываю с самым глубоким почтением и всей возможной привязанностью, милостивый государь,

Ваш смиреннейший и покорнейший слуга

Л. Эйлер.

Берл[ин], 21 июня 1763.

Monsieur mon tres illustre Confrere,

J'ai bien reçu toutes les letres dont Vous m'aves bien voulu honorer et je ne Vous en ai moins d'obligations que si je Vous l'avois temoigné sur le champ. Je Vous dois avouer franchement, qu'etant toujours attaché à des recherches d'une longue haleine je ne me puis presque résoudre à ecrire des lettres, en interrompant le fil de mes idées, et c'est aussi la raison, que depuis plusieurs années j'ai renoncé presque à toute correspondance. Mais à l'égard à l'honneur, que Vous m'avés bien voulu temoigner en m'addressant Vos lettres, je n'aurois pas manqué de faire un exception très distinguée, si je n'avois jugé à propos d'attendre la résolution de l'Académie au sujet de Votre excellent Traité sur les corps organizés, et je me flattois, que Vous ne douterés nullement de mon zèle de Vous satisfaire de tout mon possible, quand meme je ne Vous en donnerois point avis. Voilà à present, Monsieur, quel jugement distingué l'Académie vient de publier á l'égard de Votre ouvrage, dont je suis infiniment ravi de Vous donner la nouvelle, quoiqu'il y ait à présumer, que Vous l'avés dejà apprise par les gazettes publiques.

D'ailleurs j'ai l'honneur de Vous assurer que je suis avec la plus respectueuse consideration et tout l'attachement possible Monsieur

Votre tres humble et tres obeissant serviteur

L. Euler.

Berl., le 21 de Juin, 1763.

Печатается по фотокопии; оригинал хранится в Женеве.

[1] В «Registres der Berliner Akad. d. Wissenschaften 1746—1766» (Протоколы Берлинской Академии наук) Э. Винтера на стр. 286 в выдержках из протокола заседания Физического класса от 21 мая 1763 г. читаем: «Г. директор Марграф доложил, что судьи класса не нашли среди присланных работ ни одной, которой можно было бы присудить премию. . .В общем собрании Академии будут выражены похвалы работе г. Бонне о воспроизведении, которая появилась за это время и которую автор представил Академии».

4

[Без даты, не ранее 1764 г.]

Г-ну Бонне в Женеве

Милостивый государь,

Уж очень давно я собирался поблагодарить Вас за чудесный подарок, каким Вам угодно было почтить меня, прислав свой превосходный труд «Contemplation de la nature».[1] Я сначала хотел рассмотреть его со всем вниманием, какого требует важность вопроса, но до сих пор у меня не было времени, чтобы развить свои размышления на эту тему. Вы не рассердитесь, милостивый государь, если я скажу Вам заранее, что я еще не убежден в основательности доводов, заставивших Вас оставить свою первую систему, в силу которой весь зародыш приписывался самцу, чтобы принять другую и утверждать, что зародыш целиком предсуществует в самке.

Прежде всего я согласен с Вами, что опыты г. Галлера наносят весьма сильный удар первой системе, даже в такой мере, что ее становится трудно защищать, хотя видные анатомы и уверяли меня, будто продолжение перепонок яичного желтка в перепонках внутренностей цыпленка является весьма слабым доказательством, и такое продолжение вполне может быть следствием простого соединения. Они даже внушили мне весьма сильные сомнения в отношении самих опытов г. Галлера, но я не буду на этом настаивать. Напротив, я придаю им всю ту силу, какой наделяете их Вы сами, и соглашаюсь с тем, что Ваша первая система полностью ими сокрушена. Но следует ли из этого прежде всего, что нужно принять вторую систему, которая помещает весь зародыш в яйцо самки? Это заключение представляется мне слишком поспешным; здесь упущено из виду, что нужно перечислить полностью все возможные случаи. Между тем Вы без труда согласитесь со мной, что существует фактически три случая:

1) Когда зародыш весь предсуществует в самце.

2) Когда зародыш весь предсуществует в самке.

3) Когда зародыш предсуществует частью в самце, а частью в самке.

Предположим теперь, что опыты г. Галлера опровергают первый случай; тогда нужно заключить, что имеет место один из двух остальных, но еще не установлено, который из них осуществляется в природе. Я уже делал Вам однажды это возражение и увидел с удовольствием, что Вы над ним подумали в «Contemplation de la nature». Вы признаете там, что опыты г. Галлера отнюдь не опровергают третьего случая, и приводите другие доводы против него, или, вернее, Вы, как кажется, только сообщаете возражения, сделанные Вам Галлером, против третьего случая; но они мне представляются весьма слабыми и плохо вяжущимися со строгой логикой, которую Вы так заботливо соблюдаете всюду в других местах. Вы так часто делали важное замечание, — что природа хранит в тайне свои процессы, так что самый великий гений не сможет их угадать, какими бы глубокими ни казались его исследования. Позвольте же мне спросить Вас, не были ли Вы слишком податливы или слишком снисходительны, когда приняли упомянутые доводы и отбросили третий случай? По-моему, эти доводы по большей части таковы, что они опровергают всякую прививку, даже и у насекомых, а то, что в них относится к машине Марли,[2] которую нельзя привести в движение маленькой трубкой в один дюйм, по-моему, так плохо придумано, что уничтожает даже и то мнение, которое хотели доказать. Ибо если всякий зародыш существует целиком в яйце самки и все внутренности как бы распределены по всему желтку, тогда как сердце есть лишь как бы бесконечно малая машина, — разве это не является как раз случаем упомянутой машины Марли? Мне, таким образом, кажется, что Вам следовало бы привести более сильные доводы, прежде чем утверждать, что третий случай не может иметь места в Природе. А между тем отсутствие таких доводов и успех чудесных прививок и сращений, открытых Вами у насекомых, делают третий случай, с моей точки зрения, гораздо более вероятным и согласным с Природой, чем второй. Мне прежде всего кажется мало вероятным, чтобы Природа употребила такие сложные приспособления с единственной целью — дать зародышу первоначальное питание; далее, способность этого питания действовать главным образом на уши и голос мула представляется мне почти что смешной. Вы простите мне это выражение, а также и смелость, с какой я беру на себя сказать Вам, что, даже и по рассмотрении опытов г. Галлера, третий случай мне представляется наиболее вероятным. Согласно этим опытам, я утверждал бы, что внутренности цыпленка со всем, что к ним относится, включая даже и сердце, предсуществуют уже в яйце до оплодотворения, но циркуляция в них еще весьма слаба и является общей с циркуляцией курицы. При оплодотворении жидкость петуха дает голову со спинным хребтом и конечностями, которые соединяются с другой частью путем своего рода прививки. . .[a]

---

[a] *Конец отсутствует.*

A Monsieur Bonnet à Geneve

Monsieur,

Il y a bien longtems que j'ai differé de Vous remercier du beau présent dont Vous m'aves encore voulu honorer en m'envoyant Votre excellent ouvrage sur la Contemplation de la nature. Je l'ai voulu auparavant examiner avec toute l'attention, que l'importance du sujet demande et le tems m'a manqué jusqu'ici de developper mes reflexions là dessus. Vous ne seres pas faché, Monsieur, quand je Vous dis d'avance, que je ne suis pas encore convaincu de la solidite des raisons qui Vous ont porter à abandonner Votre premier systeme, qui etablissoit le germe tout entier dans le mâle pour embrasser l'autre et soutenir qui le germe préexiste tout entier dans la femelle.

Je Vous accorde d'abord, que les experiences de M[r] de Haller portent un coup très fort au premier systeme, et cela meme au point qu'on ne le sauroit plus soutenir, quoique d'habiles Anatomistes m'ayent asseuré que la continuation des membranes du jaune de l'oeuf avec celles des intestins du poulet etoit une preuve bien foible, et qu'une telle continuation pourroit très bien être l'effet d'une simple reunion: ils m'allegoient meme des doutes bien forts contre les experiences meme de M[r] de Haller, sur lesquels je ne vais pas insister: je donnerai plutot à ces experiences toute la force, que Vous leur accordés Vous meme, et je conviens que Votre premier systeme en est entierement renversé. Mais s'ensuit il de là d'abord, qu'il faut admettre l'autre système, qui met le germe tout entier dans l'oeuf de la femelle? Cette conclusion me paroit trop precipiteé par ce qu'on a negligé de faire un parfait denombrement des cas possibles, or Vous m'accorderés sans difficulté qu'il y a effectivement trois cas.

1°. Ou le germe préexiste tout entier dans le mâle.

2°. Ou le germe préexiste tout entier dans la femelle.

3°. Ou le germe préexiste en partie dans le mâle et en partie dans la femelle.

Posant maintenant, que les experiences de M[r] de Haller detruisent le premier cas, il en faut conclure que l'un ou l'autre des deux autres a lieu, mais il n'en est pas encore decidé lequel de ces deux cas est celui de la nature. Je Vous avois dejà autrefois fait cette objection et j'ai vu avec bien du plaisir, que Vous y avez reflechi dans la Contemplation de la nature. Vous y reconnoissés bïen, que les experiences de M^r de Haller ne renversent point le troisieme cas, et Vous allegués d'autres raisons pour l'ecarter, ou plutot il semble que Vous ne faites que rapporter les raisons, que M^r de Haller Vous a communiquées contre le troisieme cas, qui me paraissent bien foibles et peu conformes à la Logique vigoureuse, que Vous observés partout ailleurs si soigneusement. Vous aves si souvent fait cette importante remarque, que la nature est si cacheé dans ses operations, que le plus sublime genie ne sauroit jamais les deviner, quel que profondes que paroissent ses recherches. Permettés moi donc de Vous demander si Vous n'avés pas été trop facile ou trop complaisant à admettre les dites raisons et à rejetter le troisieme cas. A mon avis ces raisons sont par la plupart telles, que toute greffe meme dans les insectes en seroit egalement detruite, et ce qui y est dit de la machine de Marly, qui ne saurait etre mise en mouvement par um petit tuyau d'un pouce, me paroit si mal imaginé que meme le sentiment qu'on en veut etablir seroit detruit. Car si tout le germe existe tout entier dans l'oeuf de la femelle et que les intestins soient quasi etendus par toute l'etendue du jaune, pendant que le coeur n'est qu'une machine quasi infiniment petite n'est-ce pas aussi le cas de la machine mentionneé de Marly? Il me semble donc que Vous que eussies du alleguer des raisons beaucoup plus fortes, avant que de prononcer, que le troisieme cas ne sauroit avoir lieu dans la nature. Or le defaut de telles raisons, et le succès des merveilleuses greffes et emboitement, que Vous aves decouverts dans les insectes, me rendent le troisieme cas beaucoup plus probable et plus conforme à la nature, que le second. D'abord il me parait peu vraisemblable que la nature ait employé tant d'appareil dans la seule vue de fournir au germe la première nourriture; ensuite la faculté de cette nourriture d'agir principalement sur les oreilles et l'organe de voix de mulets me paroit presque ridicule. Vous me pardonneres cette expression, et en meme tems la liberté, que je prends de Vous dire, que meme après avoir examiné les experiences de M^r de Haller, le troisième cas me paroit le plus probable. Conformement à ces experiences, je voudrois établir que les intestins du poulet avec tout ce qui appartient meme avec le coeur, preexistent deja dans l'oeuf avant la fécondation, mais que la circulation n'y est que très foible et commune avec celle de la poule. Dans la fécondation la liqueur du coq y fournit la tête avec l' epine du dos et- les extremités, qui se joignent à l'autre partie par une espèce de greffe. . .

Печатается по фотокопии; оригинал хранится в Женеве.

[1] Первое издание «Contemplations de la nature» (Созерцание Природы) вышло в Амстердаме в 1764 г., поэтому письмо во всяком случае написано не ранее этого года. Эйлер возвращается в нем к вопросам, о которых он уже высказывался в предшествующих письмах.

[2] Имеется в виду машина для подъема воды из Сены, которая была устроена в 1682 г. в местечке Марли́-ле-Руа (12 км от Парижа) голландцем Раннекеном. При помощи сложной системы колес и насосов вода поднималась в большой резервуар на высоте 155 м и оттуда была проведена на расстояние 8 км в Версаль для питания его фонтанов.

5

[*Без даты, несколько ранее 27 января 1770 г.*]

Милостивый государь и глубокоуважаемый собрат,

Всего несколько недель назад я получил два экземпляра Вашей превосходной работы о палингенезисе; я ожидал ее с большим нетерпением после тех сведений, которые Вы мне любезно сообщили, почтив меня письмом от 30 августа 1769 г.[2] Вы можете не беспокоиться, милостивый государь, я слушал его чтение с жадным интересом и большим вниманием. Не могу выразить Вам удовольствия, какое получил мой ум от четырех последних частей этой превосходной работы; и так как я читал бо́льшую часть опубликованных трудов, относящихся к откровению, то могу Вам сказать, что Ваши размышления превосходят все, что я нашел в этих трудах, как по солидности, так и точности, с какой Вы изложили свои мысли. Но по поводу предыдущих частей Вы позволите мне откровенно признаться, что я не согласен с Вами по некоторым основным положениям Вашей теории, и так как Вы особо спрашиваете меня, что я о них думаю, то я возьму на себя смелость выразить свои мысли в следующих пунктах.

I. Ваш принцип о волокнах, присущих каждому отдельному чувству, мне представляется до некоторой степени сходным с фантазией некоего философа о бесконечном разнообразии молекул воздуха, отвечающих каждому отдельному звуку, тогда как в настоящее время доказано, что любая молекула воздуха может в одинаковой мере передавать любые звуки.

II. То же относится к различным цветам солнечного луча, которые не присущи тем или иным частицам тонкой материи, ибо все различие цветов зависит единственно от быстроты или частоты колебаний, возбуждаемых в эфире. Все частицы последнего способны передавать все виды различных цветных лучей. И весьма вероятно также, что различная преломляемость является естественным следствием различной быстроты колебаний. Если Вы пожелаете прочесть мою теорию света и цветов, то Вы в достаточной мере убедитесь в том, что я только что высказал.

III. Итак, если ни распространение звука, ни различные цвета не дают нам примеров отдельных молекул, приспособленных к определенной цели, то я с таким же правом не допускаю и существенного различия в животных волокнах, из которых каждое было бы приспособлено вызывать лишь одно ощущение. Но у меня есть еще один довод, непосредственно опровергающий эту гипотезу.

IV. Если бы вместо чувства обоняния,[3] которым Вы наделили статую в Вашем «Essai analytique», Вы придали ей чувство зрения, то заметили бы сначала, что одно и то же малое изображение, на какую бы часть сетчатки оно ни упало, вызывает всегда одно и то же ощущение, а различные малые изображения, если даже падают последовательно на одно и то же место сетчатки, вызывают и различные ощущения. Отсюда ясно, во-первых, что все эти зрительные волокна одинаково способны давать одно и то же ощущение и что одно и то же волокно способно дать последовательно все различные ощущения. А если согласиться с этим, то я не вижу, каким образом может устоять Ваше объяснение воспоминания.

V. Мне еще кажется, что в объяснении функций души Вы отводите слишком большое место организованной машине и слишком мало — самой душе. С тех пор как я потерял зрение, я имел немало случаев размышлять на эту тему. Когда я произвожу много вычислений в уме, я чувствую, что это меня утомляет, и замечаю, что моя душа работает над моей маленькой организованной машиной, чтобы как-то воспроизвести вычисления таким же способом, каким я их производил на доске или на бумаге.

Но я также вполне ясно вижу, что решение произвести эти вычисления и план, по которому я их выполняю, зависят единственно от моей души и что организованная машина не играет здесь никакой роли, поскольку она служит мне только орудием, тогда как сама душа полностью распоряжается тем, делать ли эти вычисления или нет, и по произволу изменяет их план.

VI. Это приводит меня далее к вопросу об оплодотворении яиц, и я здесь опять-таки не могу согласиться с Вами. Мне кажется вполне достоверным, что жизнь сообщается зародышу путем оплодотворения. Одним словом, я все еще и более чем когда-либо убежден в эпигенезисе,[4] и опыт г. Галлера, который Вас заставил отказаться от этого мнения, не производит на меня никакого впечатления. Я действительно легко соглашаюсь с тем, что кишечник и даже сердце существуют в яйце ранее оплодотворения. Однако наш талантливый анатом г. Вольф, повторив этот же опыт много раз самым тщательным образом и пользуясь превосходными микроскопами, вполне ясно доказал, что все выведенные Галлером заключения еще весьма неопределенны.[5]

VII. В последнем Вашем письме Вы, правда, приводите новое доказательство против эпигенезиса, утверждая, что было бы физически невозможно, чтобы два различных семени петуха и курицы сочетались так удачно, как того требует полное соединение; но, с Вашего разрешения, это же соображение противоречило бы также прививке гидр и вообще опыту, ибо на таком основании никакая большая рана не могла бы зарубцеваться, если бы не соединились полностью все отдельные сосуды и отдельные волокна, чего, безусловно, почти никогда не случается. Итак, я еще упорно держусь за эпигенезис, и он вовсе не затрудняет меня в объяснении ушей и олоса мула.

VIII. Что касается Ваших мыслей о чудесах, то разрешите мне задать Вам такой вопрос. Когда наш спаситель воскресил Лазаря, положим, что фарисеи сказали бы евреям: «*Не думайте, что этот человек воскресил Лазаря, а считайте, что его тело было уже заранее так создано творцом, что он воскрес в силу строения своего тела*» Думаете ли Вы, что если бы фарисеи это сказали, то наш спаситель ответил бы — «*вы правы*»? Я, во всяком случае, убежден, что такой преформизм был бы невозможен.

IX. Вот те мысли, которые у меня возникли, когда я слушал чтение Вашей книги; но я думаю, что мнения о ней читателей будут весьма различны. Те, кто верит в провидение или по крайней мере в бессмертие души, будут огорчены печальным состоянием душ после смерти до воскресения, потому что за это время душа едва ли сможет сохранить свою индивидуальность. Ведь даже когда организованная машина так надежно скрыта внутри головы, и то простой удар извне может привести ее в такое расстройство, что память полностью исчезает. Так каким же образом эта организованная машина могла бы сохраниться после смерти, где она будет подвергаться всем вредным действиям времени? Во всяком случае, каждое самое легкое прикосновение должно причинять душе живейшие страдания. Притом неверующие считают Вашу организованную машину явным доказательством в пользу материализма, потому что душа, как только она претерпит изменения, потеряет свою индивидуальность и тем самым перестанет существовать. Им кажется невозможным, чтобы эта организованная машина не подвергалась после смерти самым роковым изменениям.[6]

Я надеюсь, однако, что эти же неверующие, прочитав четыре последние части Вашего труда, отрекутся от своих заблуждений и поймут дух христианской религии, а Вы разрешите им не согласиться с Вашими мнениями о соединении души с телом. Прошу у Вас тысячу раз прощения, милостивый государь, что я осмелился так откровенно высказать Вам свои мысли; но могу Вас уверить, что все эти возражения нимало не уменьшают моего величайшего уважения, с которым я останусь навсегда,

милостивый государь и глубокоуважаемый коллега,

Ваш смиреннейший и покорнейший слуга. . .[7]

Monsieur et très honoré Confrère,

Il n'y a que quelques semaines, que j'ai reçu les deux exemplaires de votre excellent ouvrage sur la Palingénésie, que j'avois attendu avec beaucoup d'impatience, sur l'avis que vous m'en avez bien voulu donner, dans la lettre du 30 Août, 1769, dont vous m'avez honorée. Vous pouvez bien être assuré, Monsieur, que j'en ai entendu la lecture avec la plus grande avidité et toute l'attention possible. Je ne puis vous exprimer la satisfaction que les quatre dernières Parties de cet excellent ouvrage ont causé dans mon esprit, et comme j'ai lu la plupart des écrits qui ont été publiés sur la revélation, je vous dois avouer que vos refléxions surpassent tout ce que j'y ai trouvé, tant par leur solidité que la précision dont vous avez énoncé vos pensées. Mais à l'égard des parties precédentes vous me permettrez d'avouer franchement que je ne suis pas d'accord aves vous sur quelques articles essentiels de votre Théorie, et puisque vous me demandez exprès mon sentiment là dessus, je prendrai la liberté d'exposer mes idées dans les articles suivans,

1. Votre principe sur les fibres appropriées à chaque sensation me semble encore trop tenir à la chimère d'un certain Philosophe sur l'infinie variétè des molecules de l'air, appropriées à chaque son différent, vu qu'il est aujourd'hui démontré que chaque molécule d'air est également propre à transmettre tous les sons différents.

II. Il en est de même des différentes couleurs des rayons de lumière, qui ne sont pas appropriées à certaines particules d'une matière subtile; puisque toute la différence des couleurs dépend uniquement de la rapidité ou fréquence des vibrations causée dans l'ether, dont toutes les particules sont également propres à transmettre toutes les différentes espèces des rayons colorés. Et il est aussi très probable que la diverse refrangibilité est une suite naturelle de la différente rapidité des vibrations. Si vous vouliez bien lire, Monsieur, ma Théorie sur la lumière et les couleurs, vous seriez suffisamment convaincu de ce que je viens d'avancer.

III. Donc puisque ni la propagation du son, ni les différentes couleurs, ne nous fournissent point d'exemples de certaines molecules appropriées à un certain but, je ne sçaurois admettre non plus une si essentielle variété dans les fibres des animaux, dont chacune ne soit propre qu'à produire une seule sensation. Mais j'ai encore un autre argument, qui renverse directement cette hypothèse.

IV. Si au lieu l'odorat, que vous avez accordé à la statue dans votre Essai Analytique, vous l'aviez pourvu du sens de la vie, vous vous seriez d'abord aperçu que la même petite image, sur quelque point de la rétine elle ne tombe, produit toujours la même sensation; et que différentes petites images, quoiqu'elles tombent successivement sur le même point de la rétine, produisent aussi différentes sensations, d'où il est d'abord clair, que toutes les fibres visuelles les sont également propres à produire la même sensation et que la même fibre est capable de représenter successivement toutes les différentes sensations. Or cela posé je ne vois pas comment votre explication de la reminiscence puisse subsister.

V. D'ailleur il me semble, que dans l'explication des fonctions de l'âme, vous donnez trop à la machine organisée, et trop peu à l'âme même. Depuis que j'ai perdu la vue j'ai eu l'occasion de faire bien de reflections sur ce sujet. Quand je fais des longs calculs dans ma tête, je ne sens que trop que cela me fatigue et je m'apperçois bien, que mon âme travaille sur ma petite machine organisée, pour y quasi representer les calculs de la même manière, que j'ai fait autrefoy sur une table ou sur un papier. Mais je vois aussi tout clairement que la résolution de faire ces calculs et le plan dont je les exécute tiennent uniquement à mon âme et que la machine organisée n'y a aucun part, vu qu'elle ne me sert qu'au lieu d'un instrument, pendant que l'âme même est le maitre absolu de faire ces calculs on non, et d'en changer à son gré le plan.

VI. Cela me conduit à la fécondation des oeufs où je ne sçaurois être non plus de votre sentiment et il me semble très certain, que c'est la vie principalement qui est communiquée au germe par la fécondation. En un mot je suis encore convaincu plus que jamais de l'Epigénesie et l'expérience de Mr Haller qui vous a fait abandonner ce sentiment ne fait aucune impression sur moi, vu que je tombe aisement d'accord, que les intestins et meme le coeur préexistent dans l'oeuf avant la fécondation. Cependant notre habile Anatomiste Mr Wolff ayant repeté cette même expérience plusieurs fois avec tout le soin imaginable et avec de très excellents Microscopes a prouvé très clairement, que tout ce que Mr Haller en a conclu est encore fort équivoque.

VII. Vous apportez bien Monsieur dans votre dernier ouvrage une nouvelle preuve contre l'Epigénesie en soutenant qu'il serait physiquement impossible que deux différents germes du coq et de la poule se joignassent si heureusement qu'une parfaite union exige; mais avec votre permission cette même raison détruirait aussi la greffe des Polypes et meme l'expérience, car en vertu de cette raison jamais une grande blessure ne saurait être guérie à moins que tous les différents vaisseaux et toutes les différentes fibres ne soient parfaitement réunies, ce que n'arrive assurement presque jamais. Ainsi je me tiens encore obstinément à l'Epigénesie, qui ne me met dans aucun embarras pour expliquer les oreilles et l'organe de la voix du mulet.

VIII. Pour ce que regarde vos pensées sur les Miracles, permettez moi, Monsieur, que je vous propose cette question. Lorsque notre Sauveur a rescuscité Lazare, si les Pharisiens avoient dis aux Juifs «*Ne croyez pas que cet homme a rescuscité Lazare, mais croyez plutôt que son corps a été tellement préformé par le Créateur qu'il est rescuscité en vertu de la conformation de son corps*». Si les Pharisiens avoient dit cela, croyez vous Monsieur que notre Sauveur leur eût répondu: «*Vous avez raison*»? Pour moi je suis persuadé qu'une telle préformation auroit été impossible.

IX. Voilà les penseés qui me sont venues en écoutant la lecture de votre Livre, mais je crois que les jugements des Lecteurs seront fort différents là dessus. Ceux qui sont convaincus de la Révélation ou au moins de l'immortalité de l'âme seront peu contents du triste état des âmes après la mort jusques à la resurrection, puisque dans cet intervalle de temps l'âme ne sçauroit à peine conserver sa personnalité. Car si pendant que la machine organiseé est si soigneusement enfermeé dans le creux de la tête, un seul coup de dehors la peut tellement déranger que la mémoire périt entièrement; comment cette même machine organisée pourra se maintenir apres la mort, ou elle sera exposée à toutes les injures du temps? au moins chaque impression même la plus légère devra causer à l'âme les plus vives douleurs. Or les incrédules regardent votre machine organisée comme une preuve ouverte du Matérialisme, puisque aussitot qu'elle serait derangée, l'âme perdrait sa personnalité et partant aussi son existence; car il leur paroitra impossible, que cette machine organiseé puisse être après la mort à l'abri des plus funestes dérangemens.

Mais j'espère que ces mêmes incrédules après avoir lu les quatre dernières parties de votre ouvrage reviendront de leurs égaremens et embrassant les verités de la Réligion Chrétienne vous leur permettrez bien de s'écarter de vos sentiments sur l'union de l'âme avec le corps. Je vous demande encore Monsieur mille pardons de la liberté que j'ai prise en vous exposant si franchement mes pensées; mais je vous puis assurer que toutes ces objections ne diminuent en rien la plus haute estime avec laquelle je serais toujours

Monsieur et très honoré confrère,

Votre très humble et très obéissant Serviteur...

Печатается по копии (ААН, ф. 1, оп. 3, № 56, лл. 8—13).

Помета: «Оглашено в Академии 27 сего января 1770».

[1] Первое издание «Palingénesie philosophique ou idées sur l'état passé et l'état présent des êtres vivants» (Философская палингенезия, или мысли о прошлом и настоящем состоянии живых существ), в двух томах, вышло в Женеве в 1769 г.

[2] Это письмо сохранилось в ААН СССР (ф. 1, оп. 3, № 57, лл. 144—145 об.).

[3] В ответном письме (ААН, ф. 136, оп. 2, № 4, лл. 275—276 об.) Бонне, ссылаясь на § 35 своего «Essai analytique» (Аналитический опыт), подробно объясняет, почему для иллюстрации своей мысли он избрал именно чувство обоняния, а не зрения или иное чувство.

[4] Эпигенезис — учение Вольфа Каспара Фридриха (1733—1794) о том, что организованные тела образуются путем появления и развития новых частей, которые не заложены ранее (преформированы) в зародыше, — в отличие от теории Бонне и Галлера.

[5] К.-Ф. Вольф, приглашенный в 1766 г. в Петербургскую Академию, впервые установил в «Теории зарождения» (1759) и в диссертации «Образование кишечника у цыпленка», написанной уже в Петербурге в 1768 г., принципы эмбрионального развития органов из зародышевых листков или слоев. Бонне и Галлер, пользовавшиеся в ученом мире большим авторитетом, встретили учение Вольфа очень враждебно. Понадобилось много лет, чтобы оно получило признание в науке.

[6] Бонне ответил Эйлеру очень длинным (на 20 страницах) письмом от 5 II 1772 г. (ААН, ф. 1, оп. 3, № 58, лл. 194—203), вместе с которым послал ему второе издание своих «Recherches philosophiques». В письме он рассмотрел по пунктам все возражения Эйлера и ни с одним из них не согласился. Он даже заметил, хотя в очень почтительной форме, что Эйлер, вероятно, недостаточно внимательно прочитал его труд или, вернее, чтецы (Эйлер к тому времени уже потерял зрение) читали ему слишком быстро. Не согласен Бонне и с теорией света и цветов Эйлера и пишет по этому поводу: «. . .правда, я допускал начала „Оптики“ Ньютона. Вы живо оспариваете их в Ваших превосходных „Письмах к принцессе“ и называете их нелепыми. Не пигмею, каким являюсь я, вмешиваться в спор гигантов. Я преклоняюсь перед ними, отдаю им дань почтения и замолкаю. Пусть глубокомысленные англичане защищают великого Ньютона от нападок его знаменитого соперника». Под «соперником» Бонне подразумевает Эйлера.

[7] В Архиве Академии наук (ф. 1, оп. 3, № 56, лл. 8—13) имеется вариант этого письма, который был послан Эйлером адресату 12/23 III 1770 г., так как Эйлер опасался, что первое письмо утеряно.

ВЕГЕРСЛЕФУ

Вегерслеф, Фридерик (Weggersløff, Friedrick, 1702—1763) — датский морской офицер, с 1732 г. — старший лейтенант, с 1738 г.— капитан. Совершая путешествия в Индию и Китай, побывал также в России, где изучал гидротехнические сооружения в Кронштадте и Петербурге. Возможно, во время этой поездки познакомился с Эйлером. По возвращении на родину преподавал механику и гидростатику будущим морским офицерам. В 1742 г. назначен навигационным директором.

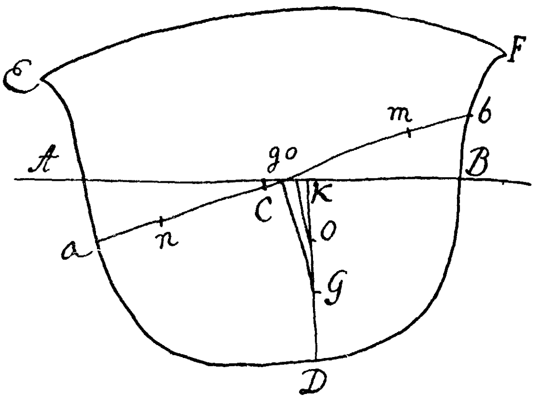
Переписка Эйлера с Вегерслефом началась, по-видимому, еще с 1734 г. Первое сохранившееся письмо Вегерслефа Эйлеру датировано 17 февраля 1735 г. (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 6, лл. 260—261). Оно является ответом на письмо Эйлера от 16 ноября. Ответы Эйлера на это письмо, а также на следующее письмо Вегерслефа от 16/27 марта (там же, л. 262) не сохранились. Первое упоминание о переписке с Вегерслефом в Протоколах Конференции Академии наук относится к 9 июня 1736 г., где есть запись об отсылке письма Вегерслефу в Копенгаген (Протоколы, т. 1, стр. 277). Это, по-видимому, и был ответ Эйлера на письмо от 16/27 марта. Насколько об этом можно судить по письмам Вегерслефа, в первых письмах Эйлера не рассматривались научные вопросы, они содержали лишь различные просьбы, касающиеся установления связей с различными английскими учеными, поскольку Вегерслеф в это время находился в Лондоне. Но уже в письме от 8 июня, по-видимому, в том письме, о котором идет речь в Протоколах, Эйлер излагает решение задачи на определение остойчивости корабля, как мы узнаем об этом из ответного письма Вегерслефа от 14 сентября 1736 г. (там же, л. 263): «I recieved Yours of the 8th of June, and am infinitely obliged for the solution of the proposition about the Stifness of bodys or ships in the Water. I shall at my return to Copenhagen make bold to desire the calculus from whence that solution is derived» (Я получил Ваше письмо от 8 июня и бесконечно благодарен за решение задачи об остойчивости тел или кораблей в воде. Как только я вернусь в Копенгаген, я возьму на себя смелость пожелать получить то вычисление, из которого это решение выведено).

1

20 июня [1 июля] 1737 г.; Петербург

Высокородный, высокочтимый господин капитан,
дорогой покровитель и друг,

Ваше письмо из Лондона от 7 февраля,[1] которым Вы меня почтили, я получил и ответил бы на него тотчас же, если бы не хотел дождаться обещанного письма от г. Стирлинга. Но, поскольку я до сих пор не получил письма из Лондона, я осмеливаюсь сейчас писать Вам в Копенгаген, согласно Вашему сообщению, в твердой



уверенности, что Вы в настоящее время находитесь в этом городе. Я уже имел честь написать Вам мою формулу, при помощи которой можно определить остойчивость плавающего тела, а сейчас я сообщу Вам основу этой формулы, тем более, что, как я заметил, Вы этим интересуетесь и прекрасно можете судить о ее ценности и пользе.

Чтобы определить остойчивость корабля или другого плавающего в воде тела, я представил себе весь вопрос следующим образом.

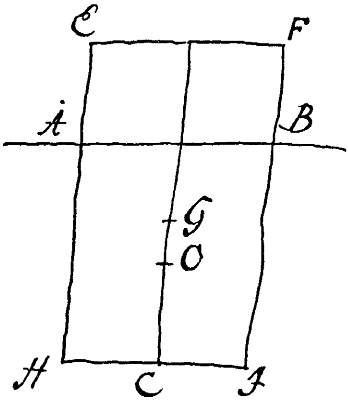
Пусть $EADBF$ — разрез покоящегося в воде корабля, ADB— его часть, погруженная в воду, и AB — уровень воды. Если G — центр тяжести всего корабля, а O обозначает центр величины, т. е. центр тяжести его объема, погруженного в воду, то, поскольку рассматривается состояние покоя корабля, прямая линия KOG будет вертикальной, или перпендикулярной к горизонтальной линии AB. Теперь предположим, что из этого состояния корабль наклоняется так, что ab будет служить уровнем воды, или горизонтальной линией. Затем, если корабль обладает некоторой остойчивостью, то он в большей или меньшей степени будет стремиться вернуться в прежнее положение в зависимости от того, велика или мала его остойчивость. В силу этого я оцениваю остойчивость корабля действием тех сил, которые возвращают его из состояния ab в состояние AB. Определяю я эту характеристику следующим образом.

Прежде всего, поскольку такое возвращение к первоначальному состоянию происходит путем поворота корабля вокруг его центра тяжести,[2] я прибегаю к помощи леммы, взятой из механики. Момент, необходимый для того, чтобы повернуть тело, равен приложенной силе, умноженной на плечо ее относительно центра тяжести. Поскольку теперь, после наклона корабля, ab есть горизонтальная линия, которая пересечет прежний уровень AB посредине в точке C, и поскольку я полагаю, что угол ACa бесконечно мал, то отрезки AC, aC, BC, bC могут рассматриваться как равные между собой. В таком состоянии корабль подвергается действию двух сил, а именно: силе собственного веса, направлением которой служит линия gG, проведенная вертикально вниз через центр тяжести корабля. Эта сила, однако, не в состоянии повернуть корабль и поставить его в прежнее положение, так как момент ее равен нулю. Вторая сила исходит от воды, которая поддерживает корабль; она равна весу корабля, направлена вертикально вверх и проходит через центр тяжести погруженной в воду части aDb. Однако $aDb = ADB + BCb - ACa$. Я буду исследовать каждую из этих частей и определять момент сил, приводящих корабль в прежнее положение. У части ADB центр тяжести теперь будет O, через который я провожу вертикальную линию Oo, и, таким образом, момент возникшей здесь силы пропорционален площади сечения ADB, умноженной на go. Если, далее, положить синус углов ACa или $BCb = dz$, то $go = GO \cdot dz$. Обозначим через p вес корабля, или поддерживающую силу воды. Момент силы, вызванной частью ADB и способной привести корабль в состояние равновесия, равен $p \cdot GO \cdot dz$. К сечению ADB нужно прибавить сектор BCb, а сектор ACa отнять, чтобы получить истинную, погруженную в воду площадь aDb; площадь сектора BCb равна $\frac{BC^2 \cdot dz}{2} = \frac{AB^2 \cdot dz}{8}$, а точка m лежит на вертикальной линии, проходящей через центр тяжести, так что $Cm = \frac{2}{3} CB = \frac{1}{3} AB$.[а] Возникающий при этом момент, в силу сказанного, равен $\frac{AB^2 gm\, dz}{8}$ и, как предшествующий, он приводит корабль в состояние равновесия ADB. Наконец, поскольку нужно учесть действие сектора ACa, площадь которого также равна $\frac{AB^2\, dz}{8}$, по-прежнему восстанавливающее корабль, то момент соответствующей силы равен $\frac{AB^2 gn\, dz}{8}$, при этом $Cn = \frac{2}{3} aC = \frac{1}{3} AB$.[б] Итак, из этих трех частей состоит весь момент, который приводит корабль в его прежнее состояние покоя, или, что то же самое, остойчивость корабля равна $p \cdot GO \cdot dz + \frac{AB^2\, dz}{8}(gm + gn) = p \cdot GO \cdot dz + \frac{AB^3\, dz}{12}$, или, поскольку мы полагали p пропорциональным ADB, а dz принимаем за постоянную, то восстанавливающий момент корабля можно охарактеризовать величиной $ADB \cdot GO + \frac{AB^3}{12}$. Этому выражению пропорциональна остойчивость корабля, т. е. способность сохранять свое состояние покоя. Таким же образом может быть оценена остойчивость любого плавающего в воде тела, свидетельствующая о степени устойчивости его положения равновесия. Из этой формулы мы видим, что чем больше расстояние GO и отрезок AB, тем остойчивее тело. Однако я здесь исходил из положения, что центр тяжести всего корабля G находится под центром тяжести подводного объема; отсюда ясно, что если точка G будет находиться над O, то отрезок GO должен считаться отрицательным, и в таких случаях, остойчивость будет пропорциональна выражению $\frac{AB^3}{12} - ADB \cdot GO$. При этом может случиться, что указанная разность равна нулю или даже является отрицательной, а в таких случаях корабль не будет обладать никакой

[а] *В копии* «$\frac{2}{3} CB$».

[б] *В копии* «$+\frac{2}{3} AC$».

остойчивостью и может быть опрокинут малейшей силой! Таким образом, из этого можно вывести полезное правило для постройки и погрузки кораблей: 1) корабли нужно делать по возможности шире вблизи уровня воды; 2) центр тяжести подводного объема [центр величины O] должен быть расположен как можно выше; 3) центр тяжести всего корабля должен быть спущен по возможности ниже, а это последнее достигается тем, что наиболее тяжелые грузы укладываются в самый низ. Сюда можно отнести и другое правило, касающееся погрузки, которое, правда, не вытекает из предыдущего, но соблюдение его тоже влияет на остойчивость, а именно — уменьшает раскачивающее действие волн. Это правило заключается в том, чтобы самые тяжелые грузы были как можно более удалены от центра тяжести корабля.



Я надеюсь, что как сама формула, так и ее доказательство встретят у Вас одобрение, ибо, как я себе это представляю, польза ее необычайно велика, особенно потому, что с ее помощью можно легко решить такие задачи, рассмотрение которых без этого очень трудно или даже невозможно. Правда, я ограничился здесь только плоской задачей, но этот метод может быть также применен и к действительным телам, и результат получается ненамного сложнее. Между тем формула, предложенная для плоской задачи, достаточна также для очень многих тел, если они устроены так, что могут быть приведены к плоскому случаю. Если бы я, например, пожелал исследовать остойчивость плавающего в воде деревянного параллелепипеда, то было бы достаточно рассмотреть одно лишь его поперечное сечение $EHIF$, часть которого $AHIB$ погружена в воду. Пусть $EH=FI=a$; $EF=HI=b$ и $AH=BI=c$; очевидно, $a:c$ равно отношению удельных весов воды и дерева. Отсюда $CG=\frac{1}{2}a$ и $CO=\frac{1}{2}c$, следовательно, $GO=\frac{a-c}{2}$. Площадь погруженной в воду части $ABC = bc$, а поскольку O находится под G, остойчивость этого параллелепипеда определится выражением $\frac{b^3}{12} - \frac{bc(a-c)}{2}$. Отсюда следует, что когда b^2 больше чем $bc(a-c)$, т. е. $EF^2 > 6EA \cdot AH$, тело в таком состоянии покоя будет обладать некоторой остойчивостью, а в противном случае тотчас же опрокинется. Если предположить, что эта фигура — квадрат, а именно $b = a$, то тогда должно быть $a^2 > 6ac - 6cc$ и тело должно плавать до уровня, определяемого AB. Отсюда следует, что или $\frac{a}{c} > 3 + \sqrt{3}$, или $\frac{a}{c} < 3 - \sqrt{3}$. Поскольку при этом a относится к c как удельный вес воды к удельному весу дерева, то если мы примем первый за 1000 для плавания тела при уровне воды AB, параллельном основанию HJ, удельный вес дерева должен быть больше 788 или меньше 211. Подобным образом я вычислил для многих других тел положение, в котором они могут плавать, и их остойчивость и провел в связи с этим опыты, которые всегда давали результаты, соответствующие этой формуле.

Если Вам угодно дальше проследить этот вопрос и исследовать, каким образом можно извлечь отсюда наибольшую пользу для практики, я прошу, чтобы Вы любезно сообщили мне Ваше мнение.

Остаюсь при этом с глубочайшим почтением Ваш, мой высокочтимый господин,

покорно преданный слуга

Л. Эйлер.

Петербург, 20 июня 1737.

Hochedelgebohrner Hochgeehrtester Herr Capitain
Hochgeschätzter Gönner und Freund,

Ew. Hochedelgebohrnen geehrtestes Schreiben von London d. 7 Febr. habe ich richtig erhalten und würde auch so gleich darauf geantwortet haben, wenn ich nicht vorher das versprochene Schreiben von H. Stirling hätte erwarten wollen. Weilen ich aber bisher keinen Brief aus London erhalten, so nehme die Freyheit gegenwärtigen an Dieselben, Dero Bericht gemäß, nach Coppenhagen zu addressiren, in der festen Zufersicht, daß sich Dieselben anjetzo an diesem Orte aufhalten werden. Wie ich schon die Ehre gehabt Ew. Hochedelgeb. meine Formul, vermittelst welcher die Festigkeit eines schwimmenden Cörpers bestimt werden kan, zu überschreiben, so werde bey dieser Gelegenheit das Fundament derselbigen Formul communiciren und das umsofiel mehr, weilen ich gemerkt, daß Dieselben darauff curieux sind, und auch von dem Werth und Nutzen derselben am besten urtheilen können.

Um die Festigkeit eines Schiffs oder eines andern im Wasser schwimmenden Cörpers zu bestimmen, habe ich mir die gantze Sache folgender Gestalt vorgestelt.

Es sey *EADBF* der Durchschnitt eines im Wasser ruhenden Schiffs, *ADB* der sich unter dem Wasser befindliche Theil, und *AB* der Niveau des Wassers. Weilen nun dieses der Ruhestand des Schiffs ist, so wird, wenn *G* das Centrum gravitatis des gantzen Schiffs, O aber das Centrum gravitatis oder magnitudinis des unter dem Wasser befindlichen Theils bedeutet, die gerade Linie *KOG* vertikal oder perpendicular auf die horizontal Linie *AB* fallen. Nun laßt uns setzen, daß das Schiff inclinirt werde, so daß *ab* der Niveau des Wassers oder die horizontal Linie wird, alsdenn wenn das Schiff einige Festigkeit hat, so wird sich dasselbe wiederum in die vorige Lage begeben entweder mit einer größern oder kleinern Gewalt, je nachdem seine Festigkeit groß oder klein ist. Derohalben setze ich die Festigkeit gleich der Gewalt, mit welcher sich das Schiff aus dem Stande *ab* in den Stand *AB* restituiren wird. Diese Gewalt aber determinire ich folgender Gestalt.

Erstlich weilen diese restitution durch eine Umdrehung des Schiffs umb sich selbst oder sein centrum gravitatis geschieht, so nehme ich aus der mechanic dieses Lemma zu Hülfe, daß die Gewalt einen Cörper umbzudrehen gleich sey der applicirten Krafft multiplicirt in das momentum derselben auf das Centrum gravitatis. Weilen nun nach geschehener inclination des Schiffs *ab* die horizontal Linie ist, welche die vorige *AB* in der Mitte in *C* durchschneiden wird, weilen ich setze daß der Wirbel[a] *ACa* unendlich klein ist, so daß *AC*, *aC*, *BC*, *bC* als unter sich gleich Länger können angesehen werden. In diesem Zustande wird das Schiff von zweyen Kräfften sollicitirt, nehmlich von seiner Schwere hinab, davon die Direction seyn wird die Linie *gG*, welche vertical durch das Cent-

[a] *Следует «Winkel».*

rum gravitatis des Schiffs G gezogen ist, diese Krafft aber hat keine Gewalt das Schiff umzudrehen und in vorigen Stand zu stellen, weilen das momentum davon nichts ist. Die zweite Krafft komt von dem Wasser her, durch welche das Schiff hieraufgestossen wird, und ist dem Gewichte des Schiffs gleich und die Direction derselben ist perpendicular und geht durch das centrum gravitatis des im Wasser befindlichen Theils aDb. Dieser Theil aber aDb ist gleich $ADB+BCb-ACa$, von deren jeglichen ich die Krafft das Schiff in die vorige Lage zu bringen untersuchen werde. Des Theils ADB centrum gravitatis ist nun O, wodurch ich die Vertical Linie Oo ziehe, und ist also das momentum der daher entstehenden Krafft gleich der Areae ADB multipliciret mit go. Wann man nun den sinum der Wirbel[6] ACa oder BCb setzt $=dz$, so ist $go=GO\cdot dz$ und so p das Gewicht des Schiffs oder die Drückung des Wassers bedeutet, so ist die Krafft das Schiff in statum aequilibrii zu bringen gleich $p\cdot G\cdot O\cdot dz$, welche nehmlich aus der Area ADB entspringt, zu der Area ADB aber muß die Area BCb hiezu, die Area aber ACa hieweg gethan werden, umb die wahre unter dem Wasser stehende Aream aDb zu bekommen, die Area aber BCb ist gleich $\frac{BC^2\cdot dz}{2}=\frac{AB^2\cdot dz}{8}$; und das centrum gravitatis davon, so dadurch eine vertical Linie gezogen wird, fält in m, das also ist $Cm=\frac{2}{3}CB=\frac{2}{3}CB$;[в] das daher entspringende momentum ist demnach $\frac{AB^2gm\,dz}{8}$, dadurch das Schiff gleichfalls wie vorher in den statum aequilibrii ADB getrieben wird. Endlich weilen die Area ACa so auch gleich ist $\frac{AB^2dz}{8}$ muß abgezogen werden, so wird durch die Gewalt derselben das Schiff gleichfalls wie vorher getrieben und ist das moment davon $=\frac{AB^2gn\,dz}{8}$ und ist $Cn=\frac{2}{3}aC=\frac{2}{3}AC$.[г] Aus diesen dreyen Stücken entsteht also die gantze Gewalt, wodurch das Schiff in seinen

---

[6] *Следует «Winkel».*

[в] *Следует* «$\frac{1}{3}AB$».

[г] *Следует* «$\frac{1}{3}AB$».

vorigen Ruhestand getrieben wird, oder welches gleich viel ist, die Festigkeit des Schiffs $= pGO \cdot dz + \frac{AB^2 dz}{8} \times$ $\times (gm + gn) = pGO \cdot dz + \frac{AB^3 \cdot dz}{12}$; oder weilen wir p für die Aream ADB gesetzt haben und dz constanz angenommen wird, so wird die Festigkeit des Schiffs seyn wie $ADB \cdot GO + \frac{AB^3}{12}$. Dieser expression also ist die Festigkeit eines Schiffs, mit welcher dasselbe in seinem Ruhestande verharret, proportionel, und kan daraus von einem jeglichen im Wasser schwimmenden Cörper bestimmt werden, wie steiff und fest dasselbe auf dem Wasser ruhe. Aus dieser Formul sieht man nun, daß je größer die distanz GO und je größer die Linie AB ist, je fester ein Cörper auf dem Wasser stehe; ich habe aber hier gesetzt, daß das centrum gravitatis G des gantzen Schiffs unter das centrum magnitudinis des unter dem Wasser befindlichen Theils falle; woraus erhellet, daß wenn der punct G über O falle, als dann die Linie GO negative müsse genommen werden, und in solchen Fällen die Festigkeit proportional sey dieser Formul $\frac{AB^3}{12} - ADB \cdot GO$, da es dann geschehen kan, daß diese Formul gleich nichts oder gar negativa wird, in welchen Fällen das Schiff gar keine Festigkeit haben, sondern von der geringsten Gewalt wird umgeworffen werden können, bey der Bauung und Beladung der Schiffe kan man also hieraus die vortheilhaffte Regel herleiten. 1. Daß die Schiffe bey dem Durchschnitt oder Niveau des Wassers so weit als möglich gemacht werden. 2. Daß das centrum magnitudinis des unter dem Wasser schwebenden Theils so hoch als möglich ist komme. 3. Daß das centrum gravitatis des gantzen Schiffs so tief hinab als möglich ist gebracht werde; welches letztere geschieht, wenn die schwersten Waaren so tieff als möglich gelegt werden. Hiezu kan noch eine andere Regel betreffend die Beladung gethan werden, welche zwar nicht aus dieser Regel folgt, aber auf eine andere Art auch zur Festigkeit erfordert wird, damit nehmlich das Schiff von den Wellen die kleinsten Stosse empfinde; diese Regel ist, daß die schwersten Waaren so weit als möglich von dem Centro gravitatis des Schiffs entfernet werden.

Ich hoffe sowohl diese Formul selbst als die Demonstration werden bey E. Hochedelgeb. approbation finden, weilen meines Bedünkens nach der Nutzen davon ungemein groß ist, insonderheit da dadurch solche Problemata, welche sonsten sehr schwer oder gar unmöglich fallen würden, leicht solvirt werden können. Ob ich gleich hier nur eine Fläche betrachtet habe, so kan doch diese methode ebenfals auf würkliche Cörper applicirt werden und komt die Formul nicht viel weitläufiger heraus. Inzwischen ist aber die gegebene Formul für superficies auch zu sehr vielen Cörpern sufficient, wann nehmlich dieselben so beschaffen sind, daß sie auf dem Durchschnitt allein konnen reducirt werden. Als wenn ich die Festigkeit eines hölzernen Parallelipipedi, so im Wasser schwimt, untersuchen wolte, würde genug seyn einen Durchschnitt davon zu betrachten, als $EHIF$, davon der Theil $AHIB$ im Wasser seyn soll. Es sey nun $EH = FI = a$; $EF = HI = b$ und $AH = BI = c$, nehmlich $a : c =$ die gravit. specif. des Wassers und Holtzes. Dennach wird seyn $CG = \frac{1}{2} a$ und $CO = \frac{1}{2} c$; und folglich $GO = \frac{a-c}{2}$. Der im Wasser befindliche Theil ACB ist $= bc$; und weil O unter G fält, so wird die Festigkeit dieser Parallelipipedi seyn, wie $\frac{b^3}{12} - \frac{bc(a-c)}{2}$. Woraus folgt, daß so lang b^2 größer ist als $bc(a-c)$, das ist $EF^2 > 6EA \cdot AH$, der Cörper in diesem Ruhestand einige Festigkeit habe, im Gegentheil aber gleich umfallen werde. Gesetzt diese Figur sey ein Quadrat nehmlich $b = a$, so muß $a^2 > 6ac - 6cc$, wenn der Cörper unter dem Niveau AB schwimmen soll; hieraus folgt entweder $\frac{a}{c} > 3 + \sqrt{3}$ oder $\frac{a}{c} < 3 - \sqrt{3}$. Weilen sich nun a zu c verhält wie die Schwehre des Wassers zur Schwehre des Holtzes, so muß, wann wir 1000 für die Schwehre des Wassers setzen, die Schwehre des Holtzes entweder grösser seyn als 788 oder kleiner als 211, wann der Cörper so schwimmen soll, daß der Durchschnitt des Wassers AB parallel seyn soll der Basi HI. Auf gleiche Art habe für vielerley andere Cörper die Lage, in welcher sie schwimmen können, nebst der Festigkeit ausgerechnet und darüber experimenta angestellt, welche immer dieser Formul gemäß ausgefallen sind.

Wenn Ew. Hochedelgeb. belieben dieser Sache weiter nachzudenken und zu untersuchen, wie man daraus auf die Praxin den grössten Nutzen schöpfen könte, so bitte mir Dero güttiges Urtheil darüber zu communiciren aus. Der ich inzwischen mit aller ersinnlichen Hochachtung verbleibe. Ew. Hochedelgeb. Meines Hochgeehrten Herrn

Gehorsamst verbundener Diener

L. Euler.

Petersburg, 20 Junii 1737.

Публикуется по копии, подписанной собственноручно Эйлером (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 22, лл. 184—187).

Помета: «Представлено в Академии наук 27 июня 1737 г.».

[1] Это письмо Вегерслефа не сохранилось.

[2] Эйлер выводит выражение для восстанавливающего момента плоской плавающей фигуры при малых отклонениях от положения равновесия, считая, что фигура при этом поворачивается относительно центра тяжести ее площади. Однако линия ab будет пересекать отрезок AB в средней точке лишь в том случае, когда перпендикуляр, опущенный из центра тяжести G на AB, делит эту линию пополам; только в этом случае и будет получаться формула, указанная Эйлером. Более естественно было бы рассматривать такие отклонения от положения равновесия, при которых остается постоянной площадь части фигуры, погруженной в воду. В этом случае фигура будет поворачиваться как раз около точки, лежащей посредине отрезка AB, и выражение для момента будет совпадать с указанным Эйлером. В ходе вывода Эйлер пишет, что площадь части фигуры, погруженной в воду, равна (а не пропорциональна) весу вытесненной воды. В действительности выражение для восстанавливающего момента будет отличаться от данного Эйлером выражения постоянным множителем, равным отношению веса вытесненной воды к упомянутой площади.

2

12 [23] апреля 1740 г., Петербург

Высокородный, высокочтимый господин,

Прежде всего я Вам покорнейше благодарен за превосходные и чрезвычайно полезные сведения и разъяснения, которые Вы соблаговолили мне любезно сообщить.[1] Я уже почерпнул из этого очень большую пользу и надеюсь извлечь еще значительно бóльшие выгоды, если я буду продолжать дальше практическое сочинение по навигации, насколько это вытекает из моей теории. Я чувствую себя далеко не в состоянии совершенно и основательно разъяснить эту науку, ибо, кроме многочисленных наблюдений, взятых из практики, большое число которых сообщили Вы, мне недостает еще очень важных положений в теории, которые я еще не уяснил себе отчасти из-за отсутствия достаточного познания явлений Природы, отчасти из-за слишком большой трудности вычисления.

Итак, я принялся за дело с намерением идти не дальше того, чему удовлетворяет моя теория; между тем, однако, я сознаю, что я придал этой теории значительно бо́льшую ясность, чем это было до сих пор. Ведь, по правде сказать, я не знаю ничего другого, что бы могло быть перенесено из математики в корабельное дело, как только то, что встречается там и сям в различных вычислениях о сопротивлении воды, но эта материя, по моему мнению, не только составляет самую незначительную часть этой науки, но и построена целиком и полностью на таких гипотезах, которые не могут согласоваться с действительностью. А именно, принято считать, что сопротивление воды оказывает такое же действие, как если бы бесконечное множество маленьких шариков, из которых, как это представляют, состоит вода, ударялись бы о плавающее в воде тело и тотчас же после удара полностью уничтожались бы. От первого легко можно отказаться, поскольку определение действия не покоится только на форме этих маленьких частиц воды, а второе и вовсе не имеет ничего общего с действительностью. Ибо, когда части воды, с которыми корабль уже столкнулся, не уничтожаются, то они должны или остаться стоять перед ним, или разойтись по сторонам; и то и другое привело бы к тому, что вода не могла бы больше свободно ударяться о корабль и, следовательно, никоим образом не могла бы свободно производить то действие, которое показано вычислением. Поэтому невозможно определить действие сопротивления, если мы предварительно не знаем, каким образом во всех происходящих случаях разошлась по сторонам вода, которая уже ударилась о корабль. Однако никто в таких расчетах не принимал во внимание то, что пространство позади корабля, продвигающегося вперед, должно снова заполняться водой и что здесь также возникает взаимодействие между кораблем и водой, изучение которого необходимо, чтобы определить сопротивление. А то, что некоторые хотели извлечь из теории, кроме сопротивления, оказывается или основанным на недостоверных принципах, или представляет только наблюдения, которые взяты из практики и, следовательно, хотя они сами по себе верны, не могут быть перенесены на теорию.

Что же касается моей теории, то я не могу с ее помощью на достовернейших принципах и самым точным образом определить остойчивость корабля. Однако польза ее состоит прежде всего в том, что она дает возможность установить, каким образом при проектировании корабля можно произвольно увеличивать или уменьшать его остойчивость. Кроме того, если из практики мы уже нашли, какова должна быть остойчивость корабля, то можно соответственно этому регулировать и все устройство корабля. Наоборот, если мы не в состоянии определить остойчивость, мы часто вынуждены отклоняться от конечной цели. Степень остойчивости может быть довольно точно определена из силы, которую должен выдержать корабль в море, но я считаю более целесообразным определить из практики наиболее приемлемую степень остойчивости по крайней мере для одного корабля, ибо из этого легко далее определить надлежащую остойчивость для всех кораблей такого же рода. Слишком малая остойчивость у корабля — несомненно, большой недостаток, а слишком большая остойчивость, по моему мнению, может быть вредна лишь постольку, поскольку она вызывает другие затруднения. Слишком остойчивые корабли обычно имели тот недостаток, что на них нельзя было быстро идти против ветра. Этот недостаток, по-видимому, происходит главным образом от того, что такие корабли слишком широки; от увеличения ширины остойчивость, правда, увеличивается, но способность идти против ветра уменьшается. Если же увеличить остойчивость другим способом, или тем, что будет спущен ниже центр тяжести, или уменьшена глубина корабля под водой, то можно добиться хороших результатов и без того, чтобы нанести ущерб другим требованиям. Моя цель в этой работе состоит целиком в том, что я прежде всего рассматриваю каждое отдельное требование, необходимое для корабля, и указываю, каким способом или какими различными способами оно могло быть удовлетворено. Когда все это известно, легко можно видеть, в какой степени одно требование противоречит другому. А когда мы знаем и это, необходимо исследовать, до какой степени допустимо отступить от соблюдения одного требования, чтобы не нанести слишком большого ущерба остальным, и из этого, наконец, возникнет практическая задача, какого вида нужно строить корабль, предназначенный для определенной цели, чтобы, насколько это возможно, удовлетворить каждому отдельному требованию; задача эта должна быть решена по методу максимумов и минимумов. При этом я, однако, не пользуюсь никакими специальными определениями, а сохраняю общие количества, для которых в каждом отдельном случае должны быть взяты из практики и подставлены надлежащие значения, как это принято во всех подобного рода теоретических изложениях. Особо следует при этом заметить, что нужно ясно видеть разницу между требованиями большой важности и другими требованиями, которые не так важны. Как Вы хорошо знаете, мы бы не выиграли, если бы для того, чтобы уменьшить боковую и килевую качку, захотели бы нанести ущерб остойчивости или хорошему ходу корабля. Я, однако, как уже сообщал в тех строках, которые имел честь написать Вам по этому вопросу, рассматриваю исключительно только это движение, пока еще абстрагировано от всех других обстоятельств, хотя они, может быть, заслуживают гораздо большего внимания. То, что Вы сообщаете о действии ветра на паруса, достойно особого внимания и убедительно показывает, насколько несовершенна существующая до сих пор теория о сопротивлении, оказываемом жидкостью твердому телу.

Покорнейше прошу Вас и далее проявлять доброту и дружбу и сообщать мне свои основательнейшие размышления по этому вопросу, ибо они осветят мне гораздо больше, чем все вместе взятое, что я могу найти об этом во всех книгах. Наконец, я имею Вам сообщить, что ее императорское величество милостиво назначила нашего господина президента его превосходительство г-на камергера фон Корфа своим посланником при дворе короля Дании. Он проникнут глубочайшим уважением к Вам и будет считать для себя особым удовольствием в будущем пересылать нашу корреспонденцию.

Остаюсь с глубочайшим уважением

Ваш покорно преданный слуга

Л. Эйлер.

Петербург, 12 апреля 1740.

Wohlgebohrner Hochgeehrtester Herr,

Zuforderst bin ich Denselben gehorsamst verbunden für die herrlichen und höchstnutzlichen Nachrichten und Erläuterungen, welche Ew: Wohlgeb. mir gütigst zu überschreiben beliebt haben. Ich habe daraus schon albereit sehr großen Nutzen geschöpfet und hoffe daher noch weit größere Vortheile zu ziehen, wenn ich der practischen Abhandlung von der Navigation, in so ferne meine Theorie dazu leitet, fortschreiten werde. Dann diese Wissenschaft ausführlich und vollkommen zu erklären, befinde ich mich bey weitem nicht im Stande, dann außer so vielen aus der Experienz gezogenen Observationen, wovon mir Ew. Wohlgeb. eine große Anzahl communicirt haben, mangeln mir noch sehr wichtige Sätze in der Theorie, über welche ich mich noch nicht theils wegen Mangel einer hinlänglichen Erkänntnis in natürlichen Sachen theils wegen alzugroßer Schwierigkeit des Calculi völlig habe eclairciren können. Ich habe mir also nichts weiter zu unternehmen vorgenommen, als wozu meine Theorie hinlänglich ist, inzwischen halte ich doch dafür, daß ich diese Theorie in ein weit großeres Licht gesetzet habe, als solches vorher geschehen ist. Dann die Wahrheit zu gestehen, so weiß ich nichts, was bisher aus der Mathesi zu dem Schiffwesen angebracht werden könnte, als was man hin und wieder von der Resistenz des Wassers ausgerechnet findet, welche Materie meines Erachtens nicht nur den geringsten Theil dieser Wissenschaft ausmachet, sondern noch gantz und gar auf solche Hypotheses gebauet ist, welche mit der Wahrheit nicht bestehen können. Man hat nehmlich angenommen, daß die Resistenz des Wassers eben denjenigen Effect thue, als wann unendlich viel kleine globuli, aus welchen man sich das Wasser als zusammengesetzt vorgestellet, an den im Wasser schwimmenden Körper stoßen und gleich nach dem Stoße völlig zernichtet werden. Hievon könte zwar das erstere leicht nachgegeben werden, weilen die Bestimmung des Effects nicht sonderlich auf der Figur dieser kleinen Theilchen des Wassers beruhet; das andere aber weichet gar zu sehr von der Wahrheit ab. Dann wann die Theile des Wassers, an welche das Schiff schon gestoßen, nicht annihilirt werden, so müssen dieselben entweder davor stehen bleiben oder auf den Seiten ablaufen, beydes verursachet, daß das volgende Wasser noch mehr frey auf das Schiff stoßen, und folglich den Effect, welchen der Calculus weiset, keineswegs frey ausüben kan. Derowegen kan man den Effect der Resistenz nicht bestimmen, wenn nicht vorher ausgemacht hat, welcher Gestalt das Wasser, welches schon an das Schiff gestoßen, auf den Seiten ablaufe, in allen vorkommenden Fällen. Aber dieses hat auch in dieser Ausrechnung niemand in Consideration gezogen, daß die Stelle hinter dem Schiff, wenn dasselbe fortgehet, wiederum mit Wasser angefüllt werde müsse, und daß auch daher eine Action zwischen den Schiff und dem Wasser entstehe, deren Erkänntnis zu Bestimmung der Resistenz unumbgänglich nöthig ist. Was aber außer der Resistenz einige aus der Theorie haben herleiten wollen, dasselbe ist entweder auf ungewiße Principia gegründet, oder es sind bloße Observationen, welche aus der Experienz gezogen worden und folglich, ohngeacht dieselben für sich gewiß sind, dennoch der Theorie nicht zugeeignet werden können.

Was nun meine Theorie anlanget, so kan ich durch Hülfe derselben in einem jeglichen Falle die Festigkeit des Schiffs (Stiffness) aus den gewißesten Principiis auf das genaueste bestimmen. Hievon bestehet nun erstlich der Nutzen darinnen, daß man weiß, welcher Gestalt man bey Anlegung eines Schiffes die Festigkeit nach belieben vermehren oder vermindern könne. Hernach wenn man aus der Experienz Schon gefunden, wie groß die Festigkeit eines Schiffs seyn musse, so kan man auch die gantze Anordnung des Schiffes darnach reguliren. Dahingegen wenn man die Größe der Festigkeit nicht zu bestimmen im Stande ist, man öfters von dem Endzweck abweichen müsse. Die Größe der Festigkeit könnte nun wohl aus der Gewalt, welche ein Schiff zur See auszustehen hat, zimlich genau bestimmet werden, allein ich halte für rathsamer, daß man durch die Experientz für ein Schiff zum wenigsten bestimme, wie eine große Festigkeit demselben am zuträglichsten sey; dann daraus ist es alsdenn leicht für alle Schiffe von gleicher Art die gehörige Festigkeit zu determiniren. Eine allzukleine Festigkeit ist ohne Zweifel an einem Schiffe ein großer Fehler, eine allzugroße Festigkeit kan aber meines Erachtens nur in so ferne schädlich seyn, als andere Schwierigkeiten damit verknüpfet sind. Schiffe, die allzufest sind, pflegen diesen Fehler zu haben, daß man mit denselben nicht wohl gegen den Wind avanciren kan; dieser Fehler scheint nun hauptsächlich daher zu entstehen, daß solche Schiffe zu breit sind; denn durch die Vergrößerung der Breite wird zwar die Festigkeit vermehret, die Fähigkeit aber gegen den Wind zu avanciren vermindert. Wann aber die Festigkeit auf eine andere Art vermehret wird, indem man entweder das Centrum gravitatis tiefer hinab bringet, oder die Tiefe des Schiffes unter dem Wasser kleiner macht, so könnte solches, ohne den andern Requisita Schaden zu thun, bewerkstelliget werden. Meine gantze Absicht in diesem Werk gehet dennach dahin, daß ich erstlich ins besondere ein jegliches requisitum, welches an einem Schiffe erfordert wird, betrachte, und anzeige, auf was für und auf wie vielerley Art dasselbe erhalten werden könne. Wann dieses alles bekannt ist, so wird man leicht sehen, in wie ferne die Erhaltung eines Requisiti den andern zuwieder sey: ist dieses bekannt, so muss man untersuchen, in wie ferne es zuträglish sey der Erfüllung eines Requisiti Abbruch zu thun, um den überigen keinen allzugrößen Schaden zuzufügen, und daraus wird endlich dieses Problema Practicum entstehen, welcher Gestalt man ein zu einem gewißen Endzweck bestimtes Schiff anordnen müsse, damit allen und jeglichen Requisitis ein so großes Genügen, als immer möglich ist, geschehe, welches Problema nach der Methodo maximorum et minimorum resolvirt werden muss. Ich bediene mich aber hierinnen keiner speciellen Bestimmungen, sondern behalte allgemeine und generale Quantitaeten, für welche in einem jeglichen Falle ihre gehörige Valores aus der Experientz genommen und substituirt werden müssen, wie in allen dergleichen theoretischen Propostitionen üblich ist. Insonderheit ist hiebey zu merken, daß man die Requisita von der größten Wichtigkeit wohl unterscheide von andern Requisitis, welche nicht so wichtig sind, also würde es ein schlechter Vortheil seyn, wann man um die Bewegung des Roulis und Tangage zu vermindern, der Festigkeit und Vortheilhaften Fahrt des Schiffes einige Abbruch thun wolte, wie Ew. Wohlgeb. sehr wohl erinnern. Ich habe aber, wie schon gemeldt, in dem jenigen, was ich Ew. Wohlgeb. über diesen Punkt zu schreiben die Ehre gehabt, nur allein auf diese Bewegung reflectirt und noch zur Zeit von allen übrigen Umständen, ohngeacht solche vielleicht weit größere Attention meritiren, abstrahirt. Was Ew. Wohlgeb. von der Würkung des Winds auf die Segel melden, verdienet eine besondere Attantion, und weiset genugsam, wie unzulänglich die bisherige Theorie von der Resistenz eines fluidi auf einen festen Cörper sey. Übrigens ersuche Ew. Wohlgeb. gehorsamst mir noch ferner die Güte und Freundschaft zu erweisen und mir Dero gründliche Gedanken über diese Materie zu communiciren, als welche mir weit mehr Licht geben, als alles, was ich darüber aus allen Büchern zusammen finden kan. Endlich habe ich Ew. Wohlgeb. zu berichten, daß Ihro Kayserl. Majestaet unsern Herrn Praesidenten des Herrn Cammer-Herrn von Korff Excellentz zu Dero Minister bey dem Königl. Dänischen Hofe allergnädigst ernennet haben. Derselbe hat albereit eine sehr große Hochachtung vor Ew. Wohlgeb. geschöpfet und wird sich ein besonderes Vergnügen machen unsere Correspondenz ins Künftige zu befördern. Ich verbleibe mit aller Hochachtung.

Ew. Wohlgeb. gehorsamst verbundenster Diener

L. Euler.

St.-Petersburg, d. 12 April 1740.

Публикуется по копии с собственноручной подписью Эйлера (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 30, лл. 38, 39 об).

[1] Из переписки Эйлера с Вегерслефом за период после июня 1737 г. и до настоящего письма сохранилось три письма Вегерслефа; от 22 мая 1738 г., 6 июня 1739 г. и 14 января 1740 г. (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 6, лл. 265—266, 267—268, 269—270). Они являются ответом на письма Эйлера от 20 июня 1737 г., 14 июня 1738 г. и 4 августа 1739 г. Последние два письма Эйлера не сохранились, и в «Протоколах» никаких упоминаний о переписке с Вегерслефом этого периода нет. Вопросы, относящиеся к теории корабля, подробно излагаются в последнем из упомянутых писем Вегерслефа, от 14 января 1740 г.

ВОЛЬФУ

Вольф, Христиан (Wolff, Christian, 1679—1754) — немецкий философ, последователь Лейбница, автор работ по философии, логике, психологии, физике.

В 1738 г. Эйлер в письмах к Бильфингеру[а] выступил с критикой философских теорий, развитых в «Космологии» Вольфа, высказав пожелание, чтобы об этом не сообщалось Вольфу и его ученикам. Однако Вольф узнал об этой критике и, вероятно, обиделся на Эйлера, так как письмо последнего Вольфу с объяснениями по этому поводу осталось без ответа. В Архиве АН СССР хранится только одно письмо Вольфа к Эйлеру, относящееся к 1727 г.,[б] хотя Вольф вел регулярную переписку с другими профессорами Петербургской Академии и с ее администрацией.[в] В своих письмах Вольф часто упоминал об Эйлере и почти всегда с раздражением. Так, в письме Г.-В. Крафту из Галле от 5 января 1743 г.[г] он в сочувственном тоне сообщает об отрицательной рецензии Мицлера, появившейся в Лейпциге, на книгу Эйлера «О музыке».[д] В письме И.-Д. Шумахеру из Марбурга от 6 мая 1748 г.[е] Вольф пишет, что Эйлер, не довольствуясь славой, заслуженной им в области математики, претендует на господство во всех науках, не имея для этого ни достаточной подготовленности, ни начитанности и принося этим большой вред Берлинской Академии наук.[ж] В этом же письме Вольф порицает Эйлера за поддержку, оказанную им «бесстыдному ябеднику по имени Юсти».[з] Свое негодование по адресу Эйлера, возглавившего оппо-

---

[а] См. выше, стр. 12—22.

[б] ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 6, л. 271.

[в] Briefe von Christian Wolff aus den Jahren 1719—1753 (Письма Христиана Вольфа 1719—1753 гг.) — СПб., 1860, 268 стр.

[г] Там же, стр. 138—139.

[д] Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae. СПб., 1739.

[е] Briefe von Christ. Wolff. . ., стр. 142—143.

[ж] Здесь имеется в виду открытое выступление Л. Эйлера против философской школы Лейбница—Вольфа в знаменитой дискуссии о монадах (С. Я. Лурье. Эйлер и его исчисление нулей, в сборнике «Леонард Эйлер». М.—Л., 1935, стр. 76—79).

[з] Юсти, Иоганн Генрих Готлоб (Johannes Heinrich Gottlob) — противник теории монад, получивший в 1745 г. премию Берлинской Академии наук за работу о монадах.

Вольф Христиан, 1679—1754.

зицию теории монад, Вольф излил в письмах к П.-Л.-М. Мопертюи.[и] Позднее, в письме И.-Д. Шумахеру из Галле от 12 мая 1753 г.,[к] Вольф с неодобрением отзывается об участии Л. Эйлера в споре голландского профессора Кёнига[л] с П.-Л.-М. Мопертюи на стороне последнего.

Количество примеров можно было бы увеличить, но уже из приведенных отзывов представляется вполне очевидным недоброжелательное отношение Вольфа к Эйлеру, которое первоначально, по-видимому, было вызвано смелой критикой со стороны Эйлера философских теорий Вольфа и которое Эйлер безуспешно пытался смягчить публикуемым письмом.

16 октября 1741 г., Берлин

С большим огорчением узнал я от знаменитого Яригия, что до Тебя, славнейший муж, дошел обо мне позорный слух, будто бы я не только полностью отвергаю Твои превосходные труды, но и стараюсь всеми силами уменьшить и совершенно ниспровергнуть заслуженную Тобою славу. Это мне весьма неприятно, так как я всегда стараюсь стоять в стороне от каких бы то ни было раздоров и отношусь с величайшим уважением ко всем представителям философии и литературы. Ибо, поскольку нужно создавать систему всеобщей философии, столь возвышенную и столь полезную для познания истины, всякий, принявший на себя труд тщательного исследования самых истоков истины и основ нашего познания, не только заслуживает величайших похвал за его ревностное старание, но достоин всяческой помощи и поддержки, даже если теории его весьма и весьма далеки от совершенства. Так, ученый мир воздает почести Декарту, Ньютону и Лейбницу за их бесчисленные открытия и также за то, что в исследовании проблем, которыми они пренебрегли или в которых они до сих пор не имели успеха, они подготовили правильный путь своим последователям. Твоя же постоянная рачительность, славнейший муж, отлично известна каждому, кому дороги истина и наука, и служит для него предметом восхищения и величайшей благодарности, ибо Ты совершил успешную попытку не только

[и] Письмо из Галле от 15 ноября 1746 г. (в кн. L'abbé A. Le Sueur. Maupertuis et ses correspondants — Мопертюи и его корреспонденты — Монтрей-сюр-мер, 1896, стр. 426—427) и письмо из Галле от 1 июля 1747 г. (там же, стр. 429—431).

[к] Briefe von Christian Wolff. . ., стр. 155—156.

[л] Кёниг выступил с критикой теории начала наименьшего действия, автором которой был Мопертюи.

возвести отдельные части философии к самым основам нашего знания, но показать их неразрывную связь; тем самым Ты весьма приумножил и укрепил науку вообще.

Я пишу Тебе это не для того, славнейший муж, чтобы похвалами, произнесенными по Твоему адресу, заслужить Твою благодарность, ибо знаю, что Ты глубоко чужд этому; напротив, цель моя — выяснить, для чего, по моему собственному мнению, следовало бы мне выступить с опровержением Твоего изданного труда, имевшего огромный успех.[1] Поэтому я настойчиво прошу Тебя и умоляю, если Ты поверил этой столь тревожащей меня молве, будь так добр, освободи меня от такого жестокого подозрения. Будь твердо убежден в том, что я отношусь к Тебе с глубоким уважением и почтительностью и что Твои творения я не только ценю, но и опираюсь на них в своей работе. Между тем я легко догадываюсь, что́ именно побудило моих недоброжелателей передать Тебе столь превратное обо мне мнение. В «Космологии» есть некоторые суждения, относительно которых я с Тобой совершенно не согласен; до сих пор я ни разу еще не дерзнул при случае выразить и обосновать мое мнение, а поскольку я отношусь с отвращением к любого рода раболепству, я откровенно поведаю Тебе, как обстоит дело, надеясь найти в Тебе самого справедливого судью. Исследуя любые явления, мы приходим к выводу, что во всяком теле не может быть никакой другой силы, кроме инерции, если только инерция может быть названа «силой»; ибо, если сила состоит в стремлении изменить состояние тела, инерция есть не меньше, чем сила, сохраняющая состояние покоя или простого [равномерного прямолинейного] движения. Однако из одной инерции я вывел не только общие правила сообщения движения, но и другие, значительно более сложные явления, полностью подтвержденные опытом. На основании этого я счел возможным сделать заключение, что в любом теле нет никакой другой действующей силы, кроме постоянного стремления сохранить свое состояние. Отсюда следует, что по аналогии и в элементах тел не может быть никаких других сил, кроме стремления сохранить свое состояние неизменным. Из этого Ты поймешь не только мое несогласие, но и причину несогласия и по своей справедливости не рассердишься на меня за это. Впрочем, поскольку по своей должности я далек от философии и сам не считаю себя достойным заниматься ею, я никогда не решился бы подвергнуть обсуждению мое мнение о силах тел, если бы это учение не было столь тесно связано с моими размышлениями в области механики. И когда я прежде занимался математикой, я никогда не разглашал и не высмеивал ошибки, случайно допущенные в Твоих «Элементах»,[2] но старался по возможности извинить их, считая, что «Элементы», содержащие все разделы математики, никогда не были бы опубликованы, если бы поставить себе целью полностью освободить их от каких-либо недочетов. И учащимся не следует бояться недостатков, когда они внимательно изучают эту науку и самой необходимостью вынуждены вскрывать ошибки и не без пользы для дела их исправлять. Так, по моему мнению, славнейший Сегнер, которого я не знаю, поступил нехорошо, решившись публично, оскорбив этим Тебя, подвергнуть осуждению ошибки в «Стереометрии»[3] и снискать таким образом себе сомнительную славу. Я никогда не одобрял этого низкого поступка, хотя и признаю, что эти спорные пункты нельзя защитить от его обвинения. Я еще прежде заметил многое, достойное критики, но считал, что не стоит упоминать об этом. Между тем, без всякого сомнения, труд, лишенный таких недостатков, станет более совершенным, чего, однако, мы не вправе ожидать так скоро; а также очень хотел бы, чтобы в последующем издании «Элементов» в анализе конечных было исправлено то, что Ты кратко изложил в комментариях о логарифмах мнимых величин. Ибо неправильное понимание этого предмета столь затрудняет некоторых любителей математики, что я не без большого труда смог направить их на истинный путь.

Это и другое, подобное этому, вероятно, многим несправедливым ценителям истины, считающим несогласие с Тобою — преступлением, показалось вполне достаточным основанием для распространения обо мне такого рода недостойных слухов. Ты же, великий муж, рассуди иначе, и поскольку для меня нет ничего дороже Твоей благосклонности, особенно в то время, когда мы оба служим одному и тому же королю,[4] великому покровителю наук, усиленно прошу Тебя, чтобы Ты по-прежнему считал меня достойным Твоего благоволения и вновь включил бы меня в число Твоих друзей.

Берлин, 16 октября 1741

Maximo cum dolore ex illustri Jarigio cognovi, tam ignominiosum de me rumorem ad Te, Vir Ampl[issime], esse delatum, quasi non solum eximia Tua scripta cuncta aspernarer, verum etiam omnibus viribus contenderem laudem atque gloriam, quae Tibi merito debetur, imminuere penitusque evertere. Quae calumnia eo majori me dolore affecit, quo magis me ab omni partium studio alienissimum semper praestare allaboro; atque Philosophiae ac bonaru[m] artium restauratores omnes insigni cultu et reverentia persequor. Cum enim universae philosophiae systema condere opus sit aeque arduum, ac ad veritatis cognitionem utilissimum, quisquis hoc in se suscipit onus, ut proprios veritatis fontes et genuina cognitionis nostrae fundamenta aperiat ac distincte proponat, ejus profecto studium non solum summopere est laudabile, sed etiam dignum, quod omnibus subsidiis atque adminiculis sustenteretur; licet a summo perfectionis gradu adhuc sit longissime remotum. Sic Cartesio, Newtono ac Leibnitzio orbis litteratus perpetuo plurimum debebit, tam quod innumerabiles veritates in medium attulerunt, quam, quod in iis ipsis rebus, quas vel neglexerint, vel in quibus adeo cespitaverint, viam certam praeparaverunt ulterius progrediendi. Tuam autem industriam, Vir Celeberrime, quisque, cui veritas ac scientiae argumentum curae cordique est, semper suspiciet, admirabitur, atque cum summa gratiarum actione agnoscet; quod non solum sinqulas philosophiae partes ad prima cognitionis nostrae principia revocare, sed etiam eas cum nexum indivulsum tam perspicue monstrare felicissimo successui sis conatus; quo ipso universam vero scientiam mirifice amplificasti et confirmasti. Non eo haec Tibi scribo, Vir Ampl[issime], quo Tui encomio gratiam apud Te inire studeam, a quo insinuationis genere Te alienissimum agnosco, sed ut declarem quo animo, meo ipso judicio, me affectum esse oporteat adversus opera Tua summo cum fructu publice edita. Quamobrem Te, Vir Celeb[errime], vehementer etiam atque etiam oro obsecroque, ut, si fama illa mihi tantopere infesta illam apud Te fecerit fidem, me pro summa humanitate a tam atroci suspicione liberes. Tibique firmiter persuadeas omni me cultu atque obsequio Tibi esse devinctissimum, Tuaque scripta non solum me maximi facere, rem etiam ex iis plurimum profecisse. Facile autem perspicio, quibus rebus malevoli homines permoti ad Te tam sinistrum de me judicium detulerint. Sunt nonnulla in Cosmologia dogmata, circa quae a Te penitus dissentio; atque adeo nonnunquam data occasione meam opinionem proponere et confirmare sum ausus: quia enim ab omni adulatione abhorreo, Tibi candide omnia uti gesta sunt narro, Te ipsum mihi aequissimum judicem promittens. Omnia scilicet phaenomena ad examen revocans deprehendi in corporibus omnibus aliam vim statui non posse praeter inertiam, si quidem inertia vis appellari queat; nam si vis consistit in conatu statum suum mutandi, inertia nil minus est quam vis, cum per inertiam omnia corpora in statu suo sive quietis sive motus uniformis indirectum perseverent. Atque ex sola inertia non solum regulas communicationis motus vulgares sed plurima alia multo magis complicata phaenomena elicui, experientiae omnino consentanea; ex mihi quidem jure concludere videor, in corporibus quibuscunque aliam vim actu non inesse, nisi conatum perpetuum in statu perseverandi. Hinc igitur per analogia elementis corporum praeter conatum in statu suo immutabiliter permanendi nullae aliae vires concipi poterunt: ex quo non solum dissensum meum, sed etiam rationem dissensus intelliges, mihique ob eam causam pro aequitate Tua minime succensebis. Ceterum cum neque munus meum a me philosophiam rejiciat, neque ipse me ei parem agnoscam, nunquam certe meam sententiam de viribus corporu[m] in discussu attigissem, nisi haec doctrina tam arcte cum meditationibus meis mechanicis esset connexa. Atque etsi mathesin jam pridem tracto, tamen nunquam sphalmata, quae forte in Elementis tuis deprehendi evulgavi vel exagitavi, quin potius pro viribus excusavi, negans unquam proditura esse Elementa omnes matheseos partes succincte complectentia, quae omnibus vitiis carerent: neque etiam tunc ullum damnum discentibus est metuendum, cum si hanc scientiam debita attentione tractent, necessario mendas ipsi detegere, et non sine fructu corrigere debeant. Ita meo judicio Clar[issimus] Segner, quem non novi, pessime se gessit, quod in Stereometria errores publice quasi in Tui contumeliam objicere, sibique lauscolam comparare sustinuerit: quod humile institutum nunquam probavi etsi negavi haec sphalmata contra eius accusationem defendi posse: pleraque autem multo ante animadverti, nec digna reputavi, quo[ru]m mentio injiciatur. Interim tamen procul dubio perfectius esset opus, si talibus naevis careret, cujusmodi autem non tam cito expectare possumus: ita ego quoque optarem ut, quae in posteriori Editione Elemento[ru]m in Analysi finito[ru]m de algorithmo quantitatu[m] imaginaria[ru]m breviter tantu[m] in Scholio exposuisti, emendaretur: iis enim nonnullos matheseos cultores tantopere seductos deprehendi, ut non sine multo labore eos in rectam viam reducere potuerim.[a] Haec atque similia alia apud complures iniquos veritatis aestimatores, qui a Te dissentire pro crimine reputant, fortasse abunde sufficere visa sunt, ut ejusmodi rumorem indignum de me spargerent. Tu autem, Vir Magnifice, aliter judicabis, et cum mihi Tua Benevolentia nil sit carius, praesertim hoc tempore, quo uterque eidem Regi, summo scientia[ru]m Protectori, servimus, id a Te enixe precor, ut me quoque Tuo favore dignum habere, atque in Tuam amicitiam recipere velis.

Dabam Berolini, d. 16 Oct. 1741.

Печатается по собственноручному черновику Эйлера (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1, лл. 71—72 об.).

Помета рукой Эйлера: «Письмо славнейшему Вольфу в Галле 16 октября 1741 г. от Эйлера».

[1] Имеется в виду «Космология» Вольфа, изданная в 1731 г.

[2] Речь идет о вышедшем в 1713 г. первом томе труда Вольфа: Elementa matheseos universae (Основы всеобщего познания) — Галле, 1713—1741; второе издание: т. I, Галле, 1730.

[3] Здесь говорится о V главе «De stereometria doliorum» (О стереометрии бочек) книги «Elementa Geometriae» (Основы геометрии), составляющей раздел труда Вольфа «Elementa matheseos universae» (т. I, Галле, 1713, стр. 207—214).

[4] Имеется в виду прусский король Фридрих II.

[a] *В черновике после слова* potuerim *зачеркнуто* certum quippe est esse $(1+\sqrt{3})^3 - 8$, per algorithmum autem

ГЕЙНЗИУСУ

Гейнзиус, Готфрид (Heinsius, Gottfried, 1709—1769). С 1736 по 1744 г. был экстраординарным членом Петербургской Академии наук; с 1744 г. — профессор математики в Лейпцигском университете. Опубликовал большое количество работ по астрономии в «Комментариях» и «Новых комментариях» Петербургской Академии наук.

1

11 августа 1742 г., Берлин

Высокоблагородный,
глубокоуважаемый господин профессор,

После того как я имел удовольствие полюбоваться недавно описанным инструментом для определения орбиты кометы, который Вы весьма существенно усовершенствовали с помощью удобного натяжения нити [1] (большие трудности представляет, однако, согласование между собой отрезков парабол, так как число их почти бесконечно, и, следовательно, процесс должен быть скучным и утомительным, поэтому я почти пропустил погружение в воду, во время которого хорошо заметна форма параболы; особенно дуги, разделенные промежутками, если не смотреть специально на параболу, определяли орбиту кометы), — после этого я, наконец, нашел арифметический способ довольно легкого решения этой задачи и переслал г-ну советнику Шумахеру как [описание самого] метода,[2] так и применение этого метода к последней комете,[3] для чего я воспользовался сообщенными мне английскими наблюдениями. Однако результат весьма отличается от того, который был мною получен с помощью этого же метода из наблюдений г-на Делиля, и я нахожусь в сомнении — которому из них доверять больше. Я убедился, что наблюдения кометы 1680 г., собранные Ньютоном, должны быть точны не только до минут, но даже

Гейнзиус Готфрид, 1709—1769.

до 5″; и если бы я мог получить такие наблюдения, я рискнул бы определить не только параболическую орбиту кометы, но также и ее истинную орбиту, т. е. эллиптическую или гиперболическую; с помощью метода, данного в прилагаемой статье, я нахожу приблизительную параболическую форму орбиты кометы; для того чтобы корригировать ее и найти истинную орбиту, должны быть привлечены четыре сколь возможно точнейших наблюдения, достаточно удаленные одно от другого. Только из них может быть найден истинный облик орбиты.

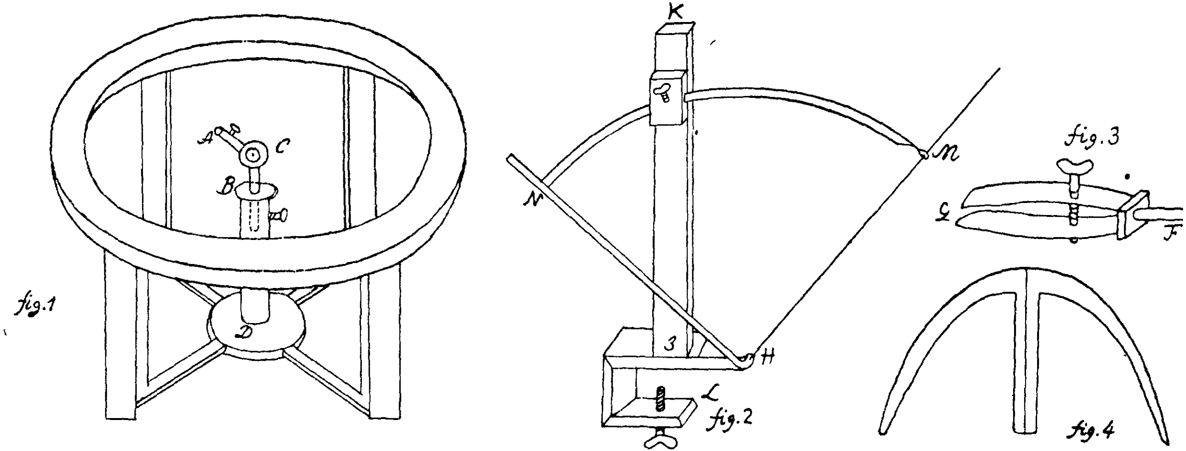
Орбита кометы определяется шестью величинами: I. Расстояние перигелия [4] от Солнца. II. Параметр,[5] или фокальная хорда орбиты, который в параболе в 4 раза больше, чем расстояние перигелия от Солнца; в эллипсе он, однако, меньше, а в гиперболе больше. III. Время, когда комета находится в перигелии. IV. Место [долгота] линии узлов или пересечения орбиты кометы с эклиптикой. V. Наклон орбиты к эклиптике и VI Расстояние перигелия от узла, или истинная аномалия узла. Из этих шести величин уже можно вычислить местонахождение кометы в любое время. Теперь эти 6 величин достаточно точно известны из найденной орбиты кометы, и на основании их я делаю 6 следующих произвольных гипотез [см. табл. на стр. 85].

Все буквы здесь — известные величины: a дано и притом в такого рода частях, что 100 000 составляют среднее расстояние Земли от Солнца. Каждая такая гипотеза отличается только на одну единицу от первоначально найденной орбиты.

Теперь я определяю истинную орбиту кометы с помощью следующих 6 величин:

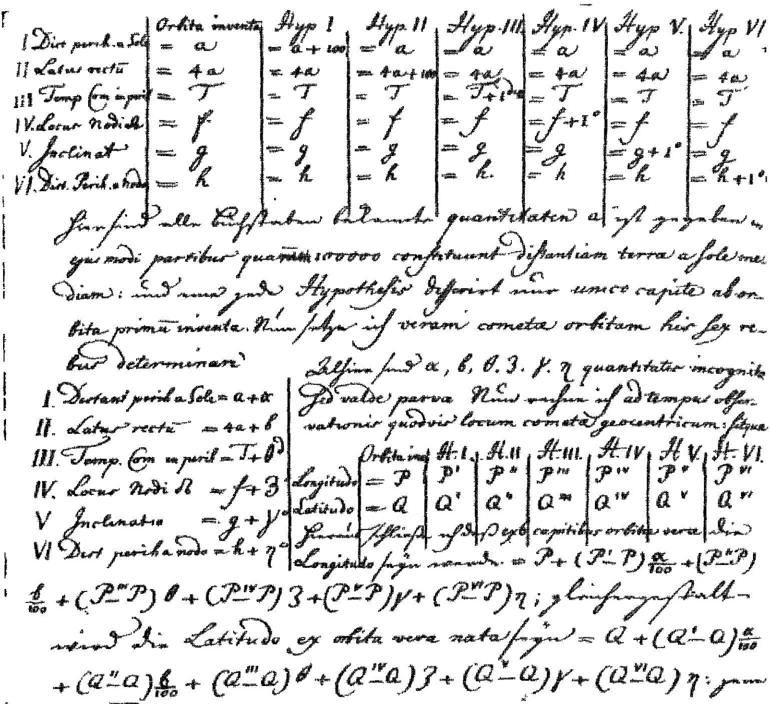
I.	Расстояние перигелия от Солнца	$= a + \alpha$.
II.	Параметр	$= 4a + \beta$.
III.	Время прохождения кометы через перигелий	$= T + \theta^d$.
IV.	Долгота угла ☊	$= f + \zeta^\circ$.
V.	Наклон	$= g + \gamma^\circ$.
VI.	Расстояние перигелия от узла	$= h + \eta^\circ$.

Здесь α, β, θ, ζ, γ, η — величины неизвестные, но весьма малые. Теперь я вычисляю для времени любого наблюдения геометрическое место кометы. Пусть найденная орбита будет [H — гипотеза]



Рисунки из письма Г. Гейнзиуса Л. Эйлеру от 30 VI 1742

	H. I	H. II	H. III	H. IV	H. V	H. VI
Долгота $= P$	P^{I}	P^{II}	P^{III}	P^{IV}	P^{V}	P^{VI}
Широта $= Q$	Q^{I}	Q^{II}	Q^{III}	Q^{IV}	Q^{V}	Q^{VI}



	Orbita inventa	Hyp. I	Hyp. II	Hyp. III	Hyp. IV	Hyp. V	Hyp. VI
I Dist. perih. a Sole	$= a$	$= a+100$	$= a$	$= a$	$= a$	$= a$	$= a$
II Latus rectum	$= 4a$	$= 4a$	$= 4a+100$	$= 4a$	$= 4a$	$= 4a$	$= 4a$
III Temp. [illegible]	$= T$	$= T$	$= T$	$= T+1^d$	$= T$	$= T$	$= T$
IV Locus Nodi	$= f$	$= f$	$= f$	$= f$	$= f+1°$	$= f$	$= f$
V Inclinat.	$= g$	$= g$	$= g$	$= g$	$= g$	$= g+1°$	$= g$
VI Dist. Perih. a Nodo	$= h$	$= h$	$= h$	$= h$	$= h$	$= h$	$= h+1°$

[illegible] quantitatem a [illegible] qui modo partibus quarum 100000 constituunt distantiam terrae a sole mediam: [illegible] Hypothesis differt uno capite ab orbita primum inventa. [illegible] verum cometae orbitam [illegible] determinari

I. Distant. perih. a Sole $= a+\alpha$
II. Latus rectum $= 4a+\mathfrak{b}$
III. Temp. [illegible] $= T+\theta^d$
IV. Locus Nodi $= f+\zeta$
V. Inclinatio $= g+\gamma$
VI. Dist. perih. a nodo $= h+\eta°$

Adsint [illegible] $\alpha, \mathfrak{b}, \theta, \zeta, \gamma, \eta$ quantitates incognitae sed valde parvae. [illegible] ad tempus observationis quodvis locum cometae geocentricum: [illegible]

	Orbita inv.	H. I	H. II	H. III	H. IV	H. V	H. VI
Longitudo	$= P$	P'	P''	P'''	P^{IV}	P^{V}	P^{VI}
Latitudo	$= Q$	Q'	Q''	Q'''	Q^{IV}	Q^{V}	Q^{VI}

[illegible] ex capitibus orbitae verae [illegible] Longitudo [illegible] $= P + (P'-P)\frac{\alpha}{100} + (P''-P)\frac{\mathfrak{b}}{100} + (P'''-P)\theta + (P^{\mathrm{IV}}-P)\zeta + (P^{\mathrm{V}}-P)\gamma + (P^{\mathrm{VI}}-P)\eta$; [illegible] Latitudo ex orbita vera nata [illegible] $= Q + (Q'-Q)\frac{\alpha}{100} + (Q''-Q)\frac{\mathfrak{b}}{100} + (Q'''-Q)\theta + (Q^{\mathrm{IV}}-Q)\zeta + (Q^{\mathrm{V}}-Q)\gamma + (Q^{\mathrm{VI}}-Q)\eta$; [illegible]

Отрывок из письма Л. Эйлера к Г. Гейнзиусу от 11 VIII 1742

Отсюда я делаю вывод, что на основании 6 гипотез в истинной орбите долгота должна быть равна

$$P+(P^{\mathrm{I}}-P)\frac{\alpha}{100}+(P^{\mathrm{II}}-P)\frac{\beta}{100}+(P^{\mathrm{III}}-P)\theta+$$

$$+(P^{\mathrm{IV}}-P)\zeta+(P^{\mathrm{V}}-P)\gamma+(P^{\mathrm{VI}}-P)\eta.$$

	Найденная орбита	Гип. I	Гип. II	Гип. III	Гип. IV	Гип. V	Гип. VI
I. Расстояние перигелия от Солнца	$=a$	$=a+100$	$=a$	$=a$	$=a$	$=a$	$=a$
II. Параметр	$=4a$	$=4a$	$=4a+100$	$=4a$	$=4a$	$=4a$	$=4a$
III. Время прохождения кометы через перигелий	$=T$	$=T$	$=T$	$=T+1^d$	$=T$	$=T$	$=T$
IV. Долгота узла ☊	$=f$	$=f$	$=f$	$=f$	$=f+1^\circ$	$=f$	$=f$
V. Наклон	$=g$	$=g$	$=g$	$=g$	$=g$	$=g+1^\circ$	$=g$
VI. Расстояние перигелия от узла . .	$=h$	$=h$	$=h$	$=h$	$=h$	$=h$	$=h+1^\circ$

	Orbita inventa	Hyp. I	Hyp. II	Hyp. III	Hyp. IV	Hyp. V	Hyp. VI
I. Dist [antia] Peri [helii] a Sole . . .	$=a$	$=a+100$	$=a$	$=a$	$=a$	$=a$	$=a$
II. Latus rectu [m]	$=4a$	$=4a$	$=4a+100$	$=4a$	$=4a$	$=4a$	$=4a$
III. Temp [us] Com [e tae] in Perih[elio]	$=T$	$=T$	$=T$	$=T+1^d$	$=T$	$=T$	$=T$
IV. Locus nodi ☊	$=f$	$=f$	$=f$	$=f$	$=f+1^\circ$	$=f$	$=f$
V. Inclinat [io]	$=g$	$=g$	$=g$	$=g$	$=g$	$=g+1^\circ$	$=g$
VI. Dist [antia] Perih [elii] a Nodo .	$=h$	$=h$	$=h$	$=h$	$=h$	$=h$	$=h+1^\circ$

Таким же образом широта определяется для истинной орбиты

$$Q+(Q^{\mathrm{I}}-Q)\frac{\alpha}{100}+(Q^{\mathrm{II}}-Q)\frac{\beta}{100}+(Q^{\mathrm{III}}-Q)\theta+$$

$$+(Q^{\mathrm{IV}}-Q)\zeta+(Q^{\mathrm{V}}-Q)\gamma+(Q^{\mathrm{VI}}-Q)\eta:$$

первое выражение я подставляю вместо наблюдавшейся долготы, а второе — вместо наблюдавшейся широты; таким образом, одно наблюдение дает два одинаковых уравнения — из четырех наблюдений получается 8 таких уравнений; однако два, выведенные из широты, должны быть опущены, так как двумя широтами все остальные уже определены, поскольку орбита кометы плоская.

Следовательно, 4 наблюдения дают 6 уравнений, из которых определяются неизвестные α, β, θ, ζ, γ и η, и, таким образом, становится ясной истинная орбита кометы, будет ли она параболой, гиперболой или эллипсом; следовательно, в последнем случае, найдя поперечную ось, можно найти период обращения кометы в ее орбите. Для этой цели, однако, наблюдения должны быть в высшей степени точными. Когда представится случай, я пришлю следующую статью,[6] в которой я покажу, каким образом на основании этих шести указанных величин можно вычислить геоцентрическое место кометы для любого времени. На этот раз я удовлетворюсь сообщением способа, с помощью которого можно найти параболическую орбиту кометы, близкую к истинной. Желая доказать полезность этого способа, я применил его к недавно появлявшимся кометам; я не настаиваю на результатах вычислений, они должны служить только для уяснения метода; причиною же того, что я не могу полностью доверять вычислению, является то обстоятельство, что г-н Делиль прислал мне все свои наблюдения и я с помощью того же самого метода получил совсем другой результат.

Л. Эйлер.

Берлин, 11 августа 1742.

Hochedelgebohrner,
Hochgelehrter Herr Professor,

Nachdem ich nemlich auf die letzt überschriebene Machine gefallen um die Orbitam Cometae practice zu bestimmen, welche Eu. Hochedelgeb. durch eine bequeme Aufspannung der Saiten ungemein perfectionirt haben: (nur scheinen die wirkl[ich] ausgeschnittenen Parabeln alzuviel Difficultaten mit sich zu führen, weilen die Anzahl derselben fast unendlich, und folglich der Gebrauch zu langwierig und beschwerlich seyn würde, dahero ich die Immersionem in aquam fast praeteriren wollte, in dem die genugsam bekannte Form einer Parabel, absonderlich aber die den Temporibus proportionirten Arcae auch ohne auf die Parabel zu sehen, die Orbitam Cometae bestimmen): seit der Zeit, sage ich, ich habe endlich einen arithmetischen Weg ausgefunden, dieses Problema ziemlich leicht zu solviren, und habe sowohl die Methode selbst, als die Application derselben auf den letzten Cometen, wozu dero mir communicirte englische Observationen employret habe, hie bey an H. Rath Schumacher überschicken wollen. Das Resultat aber ist sehr verschieden von denjenigen, welches ich durch eben diese Methode aus H^n De L'Isles Observationen herausgebracht, und ich bin ungeweiß, welchen mehr zu trauen ist. In den Observationen, welche der Newton über den Cometen A. 1680 gesammelt hat, habe ich gesehen, das dieselben nicht nur auf Minuten, sondern sogar auf 5″ exact gewesen seyn müßen: und wann ich solche observationes bekommen könnte, getrauete ich mir nicht nur die Orbitam Cometae parabolicam, sondern auch die Orbitam veram das ist ellipticam oder hyperbolicam zu bestimmen; durch die in beygehender Piece gegebene methode finde ich die Orbitam Cometae parabolicam vero proximam um welche zu corrigiren und die Orbitam veram heraus zu bringen, werden 4 Observationes exactissimae quantum fieri potest a se invicem remotae erfordert. Aus denselben kan nun folgender Gestalt die Orbita vera gefunden werden. Die Orbita eines Cometen wird aus 6 Stücke bestimmt. I. Der Distantia perih[elii] a Sole. II. Dem Parametro oder Latere recto Orbitae, welches in Parabola 4 mahl so groß ist als die Distantia Perihelii a Sole, in Ellipsi aber kleiner und in hyperbola größer. III. Der Zeit da der Comet im Perihelio gewesen. IV. Dem Loco

Lineae Nodorum seu intersectione Orbitae Cometae et Ecliptícae. V. Der Inclinatio Orbitae ab Ecliptica und VI. Der Distantia Perihelii a nodo seu nodi anomalia vera. Aus diesen 6 Stücken kan nun ad quodvis tempus locus Cometae ausgerechnet werden. Nun sind diese 6 Stücke ex Orbita Cometae inventa proxime bekannt, und nach denselben mache ich noch 6 Hypotheses arbitrarias.[a]

Hier sind alle Buchstaben bekannte quantitaten. a ist gegeben und in ejus modi partibus quantum 100 000 constituunt Distantiam Terrae a Sole mediam; und eine jede Hypothesis differirt nur unico capite ab Orbitaprimu[m] inventa.

Nun setze ich veram Cometae Orbitam his sex rebus determinari:

I. Distant[ia] perih[elii] a Sole . . . . $=a+\alpha$.
II. Latus rectu[m] . . . . $=4a+\beta$.
III. Temp. Com[etae] in perih[elii] . . . $=T+\theta^{d}$.
IV. Locus Nodi ☊ . . . . $=f+\zeta^{\circ}$.
V. Inclinatio . . . . $=g+\gamma^{\circ}$.
VI. Dist[antia] Perih[elii] a Nodo . . . $=h+\eta^{\circ}$.

Alhier sind α, β, θ, ζ, γ, η quantitates incognitae, sed valde parvae. Nun rechne ich ad tempus Observationis quodvis locum Cometae geometricum. Sitque Orbita inv[enta]

		H. I	H. II	H. III	H. IV	H. V	H. VI
Longitudo	$=P$	P^{I}	P^{II}	P^{III}	P^{IV}	P^{V}	VI
Latitudo	$=Q$	Q^{I}	Q^{II}	Q^{III}	Q^{IV}	Q^{V}	Q^{VI}

Hieraus schließe ich daß ex 6 capitibus Orbitae verae die Longitudo seyn werde

$$=P+(P^{I}-P)\frac{\alpha}{100}+(P^{II}-P)\quad\frac{\beta}{100}+(P^{III}-P)\theta+$$

$$+(P^{IV}-P)\zeta+(P^{V}-P)\gamma+(P^{IV}-P)\eta.$$

Gleichergestalt wird die Latitudo ex orbita vera nata seyn=

$$=Q+(Q^{I}-Q)\frac{\alpha}{100}+(Q^{II}-Q)\frac{\beta}{100}+(Q^{III}-Q)\theta+$$

$$+(Q^{IV}-Q)\zeta+(Q^{V}-Q)\gamma+(Q^{VI}-Q)\eta:$$

jene Expression setze ich gleich der Longitudini hoc tem-

[a] См. табл. на стр. 85.

pore observatae und diese der Latitudini observatae; und also giebt eine Observation zwey dergleichen Aequationen; dahero aus 4 Observationen 8 solche Aequationen entspringen: es müßen aber zwey so aus Latitudinibus herrühren ausgelassen werden, weilen aus zwey Latitudinibus die übrigen alle schon determiniret werden; propterea quod Orbita Cometae est plana. Also geben 4 Observationen 6 Aequationen, aus welchen die incognitae α, β, θ, ζ, γ et η bestimmet werden u[nd] daraus erhellet die vera Cometae Orbita, sie mag eine Parabola, Hyperbola oder Ellipsis seyn; im letzten Fall also wan[n] man den axem transversum gefunden, so kan man das tempus periodicum Cometae in Orbita sua bestimmen. Zu diesem Ende aber müßen die Observationes im höchsten Grad accurat seyn. Ich werde aber bey einer andern Gelegenheit nächsten eine Piece einschicken und darinn zeigen, wie man aus diesen gemeldeten 6 Stücken ad quodvis tempus locum Cometae geocentricum ausrechnen könne. Vor dieses mahl will ich mich begnügen die Methode communicirt zu haben, durch welche man die orbitam Cometae parabolicam proxime veram finden kann. Um den Usum zu weisen, habe ich die Methode auf den jungst erschienen Cometen appliciret; ich stehe aber nicht für den Calculum selbst, sondern derselbe soll nur zur Erläuterung der Methode dienen, daß ich dem Calculo aber nicht alzusicher trauen kan, ist die Ursache, weil mir H^r De l'Isle alle seine Observationes zugesandt, und ich aus denselben durch eben diese Methode ein gantz anderes Facit gefunden.

L. Euler.

Berlin, d. 11. Aug[ust] 1742.

Печатается по копии, написанной писарской рукой (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 1, лл. 136—137 об.).

Пометы: «Представлено в конференции 13 августа 1742». «Соответствует оригиналу — Г. Гейнзиус». «Г-ну Гейнзиусу, профессору и члену императорской Академии наук в Петербурге».

[1] Здесь говорится об усовершенствованном Гейнзиусом инструменте для астрономических наблюдений, подробное описание которого вместе с четырьмя рисунками дано в письме Г. Гейнзиуса от 30 июня 1742 г. Л. Эйлеру (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1, лл. 147—148). Рисунки приведены на стр. 83.

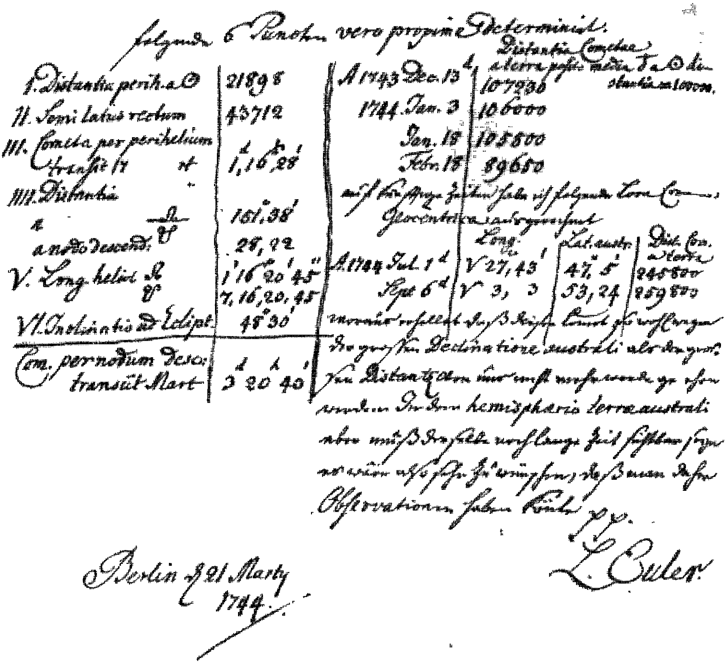
[2] Имеется в виду письмо Л. Эйлера И.-Д. Шумахеру от 11 августа 1742 г. (Briefwechsel, т. II, Берлин, 1961, стр. 59—60).

[3] Речь идет о комете, появившейся в марте 1742 г.

4 Перигелий — наименьшее расстояние кометы от Солнца.

5 Термин «параметр» Эйлер употребляет со значением, которое принято в математике. В современной астрономической литературе параметром называется половина этой величины.

6 Речь идет о работе Л. Эйлера: Determinatio orbitae cometae qui mense Martio hujus anni 1742 potissimum fuit observatus (Определение орбиты кометы, наблюдавшейся в марте этого 1742 года) — Miscellanea Berolinensia, 7, 1743, 1—9 + (7) стр.+1 таблица.



Berlin d. 21 Marty 1744

L. Euler

Отрывок из письма Л. Эйлера к Г. Гейнзиусу от 21 III 1744

2

21 марта 1744 г., Берлин

Высокоблагородный, глубокоуважаемый господин профессор,

Последнее время я был так занят недавно появившейся кометой,[1] что не мог и подумать о том, чтобы писать письма; теперь же я полностью закончил работу над теорией ее движения, основанной на некоторых наблюдениях, присланных мне из Парижа; остается только отдать в печать все мое вычисление вместе с теорией в форме рассуждения.[2] Присланные мне наблюдения, переведенные на среднее берлинское время, таковы (новый стиль):

			Долгота кометы	Широта северная
a.	1743 дек.	13°8ʰ40′	0.28°26′13″	15°11′ 0″
b.	1744 янв.	3 6 17	0.14 11 10	17 32 50
	1744 янв.	7 5 53	0.12 3 10	17 51 30
c.	1744 янв.	18 7 57	0.6 57 15	18 37 5

Следующее выведено по сопоставлению с масштабом.

	1744 февр.	18 6 43	11 19 57 0	19 10 56

Для одного метода я использовал из парижских [наблюдений] [3] те, которые отмечены буквами *a*, *b*, *c*, и результат проверил с помощью местных наблюдений. Несмотря на то, что движение геоцентрическое было обратным, тем не менее гелиоцентрическое было прямым и комета шла к своему перигелию. Орбита весьма близко определяется следующими шестью величинами:

I. Расстояние перигелия от Солнца . . 21 898.
II. Полупараметр . . . . 43 712.
III. Комета проходит через перигелий . .
1744, март . . . . $1^d16^h28^m$.
IV. Расстояние перигелия:
от восходящего узла ☊ . . . . . . 151°38′,
от нисходящего узла ☋ . . . . 28°22′.
V. Долгота: ☊ . . . . 1^s 16°20′45″,[4]
☋ . . . . 7 16 20 45 .
VI. Наклон орбиты к эклиптике . . . . 48°30′.
[VII] Комета проходит через нисходящий
узел в марте . . . . $3^d20^h40^m$.

Расстояние кометы от Земли, если принять среднее расстояние ♁ от ☉ равным 100 000,

1743 г.	дек.	13^d	107 230
1744 г.	янв.	3	106 000
	февр.	18	89 650

На будущее время я вычислял следующие геометрические места кометы:

	Долгота	Шир. южн.	Расстояние кометы от Земли
1744 июля	$1^d27^\circ43'$	$47^\circ\ 5'$	245 800
сент.	$6^d\ 3^\circ\ 3'$	$53^\circ24'$	259 800

Таким образом, становится очевидным, что эту комету я уже больше не буду наблюдать скорее вследствие большого южного склонения, чем из-за большого расстояния. В южном полушарии Земли она должна быть видимой еще в течение долгого времени; поэтому было бы крайне желательно получить оттуда наблюдения.

Л. Эйлер.

Берлин, 21 марта 1744 г.

Hochedelgebohrner,
Hochgeehrter Herr Professor.

Die letzt erschiene Comet hat mich seit einiger Zeit der massen beschäftiget daß ich an kein Briefe schreiben habe gedenken können, nunmehr aber habe ich die Theorie desselben Laufes aus einigen Observationen, welche mir aus Paris zugeschickt worden, völlig zu Ende gebracht, nur werde nächstens meine ganze Rechnung nebst meiner Theorie alhier in Form einer Dissertation drucken lassen. Die Observationen, welche mir zugeschickt worden sind, voran auf die berliner miltere Zeit reducirt nachfolgende (St. nov.):

		Long. Cometae	Lat. boreal.
a. 1743 Dec.	$13^\circ8^h40'$	$0.28^\circ26'13''$	$15^\circ11'\ 0''$
b. 1744 Jan.	3 6 17	0.14 11 10	17 32 50
1744 Jan.	7 5 53	0.12 3 10	17 51 30
c. 1744 Jan.	18 7 57	0.6 57 15	18 37 5

Folgende ist hier aus der Convinctione mit dem Maßstab gezogen worden:

1744 Febr.	18 6 43	11 19 57.0	19 10 56

Aus den Parisischen habe ich zu einer Methode die, welche mit den Buchstaben *a*, *b*, *c* bemerkt sind, gebraucht und Resultat durch die hiesige ajoustirt. Ungeacht[et] der Motus geocentricus retrogradus war, so war doch der heliocentrirus directus und der Comet gieng zu seinem Perihelio.

Die Orbita wird durch folgende 6 Puncten vero proxime determinirt:

I.	Distantia Perih. a ☉	21 898.
II.	Semilatus rectum	43 712.
III.	Cometa per perihelium transit 1744 mart	$1^d 16^h 28^m$.
IV.	Distantia Perihelii:	
	a Nodo ascend. ☊	151°38′,
	a Nodo descend. ☋	28°22′.
V.	Long. helioe. ☊	1^s 16°20′45″,
	☋	7 16 20 45 .
VI.	Inclinatio ad Eclipt.	48°30′.

Com[eta] per Nodum desc. transit. Mart . $3^d 20^h 40^m$.

Distantia Cometae a Terra posito media ♁ a ☉, distantia = 100 000

A 1743	Dec.	13^d	. . . . . 107 230
1744	Jan.	3	. . . . . 106 000
	Febr.	18	. . . . . 89 650.

Auf künftige Zeiten habe ich folgende Loca cometae Geometrica ausgerechnet:

		Long.	Lat. austr.	Dist. Cometae a Terra
A 1744 Jul.	1^d	27°43′	47° 5′	245 800.
Sept.	6^d	3° 3′	53°24′	259 800.

o

Woraus erhellet, daß dieser Comet sowohl wegen der grossen Declinatione australi als der großen Distanz von mir nicht mehr werde gesehen werden. In dem Hemisphaerio Terrae australi aber muß derselbe noch lange Zeit sichtbar seyn; es wäre also sehr zu wünschen, daß man daher Observationen haben könnte.

L. Euler.

Berlin, d. 21 Marty 1744.

Печатается по копии (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 1, л. 187 и об.).

Пометы: «Г-ну проф. Гейнзиусу». «Представлено 1744 апреля 6».

[1] Речь идет о комете, появившейся в начале 1744 г. В Петербурге наблюдения кометы производились начиная с 5 января 1744 г. В результате наблюдений Г. Гейнзиус написал работу: Beschreibung des im Anfang des Jahres 1744 erschienen Cometen nebst einigen darüber angestellten Betrachtungen (Описание в начале 1744 года явившейся кометы вместе с некоторыми сделанными о ней рассуждениями), переведенную на русский язык М. В. Ломоносовым (М. В. Ломоносов. Полное собрание сочинений, т. IV. М.—Л., 1955, стр. 9—110).

[2] Здесь говорится о книге Л. Эйлера: Theoria motuum planetarum et cometarum continens methodum facilem ex aliquot observationibus orbitas cum planetarum tum cometarum determinandi (Теория движения комет и планет, содержащая легкий способ определения орбит как планет, так и комет на основании некоторых наблюдений) — Берлин, 1744.

[3] См. письмо А. Клеро Л. Эйлеру (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1, лл. 320—322).

[4] *s* (signum) — в XVIII в. так обозначали дугу в 30°.

3

26 мая 1744 г., Берлин

Высокоблагородный,
глубокоуважаемый господин профессор,

Несмотря на то что я так давно не получал от Вас писем, я все же не могу пропустить случая сообщить Вам следующие наблюдения последней кометы, которые г. Кассини был так добр прислать мне. Ибо, когда недавно г. Клеро сообщил Академии то, что я написал ему о движении этой кометы,[1] все были очень довольны, особенно же г. Кассини, чему тем более следует удивляться, так как он до сих пор не соглашался с теорией комет, принадлежащей Ньютону. Поскольку, однако, движение этой кометы происходило таким образом, что оно не может быть объяснено с помощью какой-либо другой теории, я полагаю, что вследствие этого г. Кассини будет вынужден покориться истине. Я хотел бы иметь эти наблюдения в самом начале, так как тогда было бы совсем легко определить орбиту значительно точнее, чем я это сделал, и, может быть, я даже смог бы с помощью их установить эллиптический характер орбиты. Впрочем, я до такой степени утомлен вычислениями, связанными с этой кометой, что не могу решиться на то, чтобы проделать эту работу сначала. Я не думаю также, что при теперешних обстоятельствах Вы нашли бы в этом большое удовольствие. Все же эти наблюдения по парижскому времени суть следующие:[2]

				Долгота	Широта
1743 дек.	21^d	6^h58^m	♈	22°23′ 0″	16°18′57″
	30	5 54		16 29 38	17 12 55
1744 янв.	1	5 41		15 19 35	17 23 23
	3	5 28		14 11 18	17 32 39
	4	5 21		13 38 11	17 37 27
	5	5 14		13 5 57	17 42 16
	6	5 8		12 34 44	17 46 20
	7	5 2		12 3 12	17 51 23
	8	4 55		11 33 8	17 55 50
	10	9 42		10 24 34	18 5 14
	11	9 11		9 58 40	18 9 35
	12	9 11		9 31 15	18 13 26
	13	7 52		9 5 30	18 17 4
	16	8 43		7 45 15	18 30 26
	17	7 41		7 20 58	18 34 22
	18	7 0		6 56 46	18 38 2
Февр.	1	7 55		1 9 54	19 34 0
	3	7 49		0 18 26	19 42 53
	7	7 55	♓	28 16 22	19 53 54
	10	7 17		26 32 1	19 56 23
	11	5 47		25 52 41	19 57 35
	12	5 51		25 12 45	19 56 4
	13	5 39		24 28 25	19 53 15
	15	6 46		22 46 47	19 44 15
	16	6 19		21 54 54	19 36 0
	17	6 30		20 55 51	19 23 0
	18	6 3		19 54 0	19 10 30
	23	5 34		13 12 44	16 41 3
	24	5 47		11 36 30	15 48 4
	25	5 22		9 52 46	14 39 7
	29	18 44		2 31 59	6 28 21

К сему имею честь уверить Вас, что я остаюсь с совершенным почтением

Ваш покорный слуга
Л. Эйлер.

Берлин, 26 мая 1744.

Hochedelgebohrner,
Hochgeehrtester Herr Professor,

Ungeacht [et] ich schon so lange Zeit von Eur Hochedelgeb. keine Briefe erhalten, so kan ich doch diese Gelegenheit nicht vorbey lassen denselben nachfolgende Observationen über den letzten Cometen zu communiciren, welche der H. Cassini die Güte gehabt mir zuzuschicken. Denn da jungstens der H. Clairaut dasjenige, was ich ihm über den Lauf dieses Cometen zugeschrieben hatte, der Academie vorlegte, so war damit jederman sehr wohl zufrieden, insonderheit, aber der Hr Cassini, welcher um so viel mehr zu bewundern, da derselbe bisher der newtonianischen Theorie von dem Cometen nicht hat beystimmen wollen. Da aber der Lauf dieses Cometen so beschaffen gewesen, dass derselbe ohnmöglich durch eine andere Theorie erkläret worden kan, so glaube ich, daß der Hr Cassini dadurch bewegt worden, der Wahrheit beyzupflichten. Ich hätte wünschen mögen diese Observationen gleich anfänglich gehabt zu haben, indem es daraus leicht gewesen wäre, die Orbitam weit genauer zu bestimmen, als ich habe thun können und vielleicht könnte so gar daraus die species ellipsis bestimmt werden. Ich habe mich aber an diesem Cometen schon so müde gerechnet, daß ich mich nicht entschließen kan diese Arbeit von neuem zu übernehmen. Ich glaube auch nicht, daß Eu. Hochedelgeb. bey den jetzigen Umständen dazu viel Lust haben werden; unterdessen sind die Observationen tempore apparente parisino folgende:

			Longitudo	Latitudo
1743 Dec.	21^d	$6^h 58^m$	♈ $22°23'\ 0''$	$16°18'57''$
	30	5 54	16 29 38	17 12 55
1744 Jan.	1	5 41	15 19 35	17 23 23
	3	5 28	14 11 18	17 32 39
	4	5 21	13 38 11	17 37 27

	5	5	14		13	5	57	17	42	16
	6	5	8		12	34	44	17	46	20
	7	5	2		12	3	12	17	51	23
	8	4	55		11	33	8	17	55	50
	10	9	42		10	24	34	18	5	14
	11	9	11		9	58	40	18	9	35
	12	9	11		9	31	15	18	13	26
	13	7	52		9	5	30	18	17	4
	16	8	43		7	45	15	18	30	26
	17	7	41		7	20	58	18	34	22
	18	7	0		6	56	46	18	38	2
Febr.	1	7	55		1	9	54	19	34	0
	3	7	49		0	18	26	19	42	53
	7	7	55	♓	28	16	22	19	53	54
	10	7	17		26	32	1	19	56	23
	11	5	47		25	52	41	19	57	35
	12	5	51		25	12	45	19	56	4
	13	5	39		24	28	25	19	53	15
	15	6	46		22	46	47	19	44	15
	16	6	19		21	54	54	19	36	0
	17	6	30		20	55	51	19	23	0
	18	6	3		19	54	0	19	10	30
	23	5	34		13	12	44	16	41	3
	24	5	47		11	36	30	15	48	4
	25	5	22		9	52	46	14	39	7
	29	18	44		2	31	59	6	28	21

Hiemit habe die Ehre Eu. Hochedelgeb. zu versichern, dass ich mit der vollkommensten Hochachtung bin

Eu. Hochedelgeb. ergebenster Diener

L. Euler.

Berlin, d. 26 May 1744.

Печатается по копии, написанной писарской рукой (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 1, лл. 192—193).

Пометы: «Г-ну Гейнзиусу, профессору астрономии, члену императорской Академии наук в Петербурге». «Представлено 1744 мая 28».

В ответном письме от 9 июня 1744 г. (н. с.) Гейнзиус благодарит Эйлера за присланные парижские наблюдения и сообщает о своем намерении возвратиться в Германию (ААН СССР, ф. 136 оп. 2, № 1, л. 348 и об.).

[1] См. письмо А. Клеро Л. Эйлеру (ААН СССР, стр. 136 оп. 2, № 1, л. 343).

[2] Приведенные ниже наблюдения даются в соответствии с еще сохранявшимся в XVIII в. делением эклиптики на 12 частей, по 30° в каждой. Первая часть обозначалась знаком Овна (♈), последняя — знаком Рыб (♓).

4

6 мая 1751 г., Берлин

Высокоблагородный господин,
глубокоуважаемый господин профессор,

Давно уже следовало мне благодарить Вас за повторенное Вами по случаю моего проезда через Саксонию уверение в Вашей ко мне драгоценной и высокоценимой дружбе,[1] но, поскольку не было ничего особенного, что́ я, кроме этого, мог бы сообщить Вам, и я считал, что В совершенно убеждены в моей полнейшей преданности, я задержал мой ответ, чтобы присоединить к нему некоторые размышления. Таким образом, я признаю себя крайне обязанным Вам за многочисленные проявления Вашей искренней дружбы. Поскольку я уже давно посвятил себя исследованию движения Луны, я пользуюсь этим случаем, чтобы известить Вас, что я теперь вполне согласен с г. Клеро и считаю, что высказанная Ньютоном гипотеза притяжения является достаточной для того, чтобы объяснить движение апогея Луны, несмотря на то, что в этом вопросе у г. Клеро, пожалуй, не было более сильного противника, чем я. Он способен производить удивительно сложные вычисления, необходимые для этой цели, и я должен признаться, что хотя я был в этом вопросе предшественником г. Клеро, у меня не хватило терпения, чтобы пуститься в столь пространные вычисления. Однако важность самого вопроса, удостоенного к тому же Петербургской Академией быть предложенным ученому миру для исследования на премию,[2] тем более поощрила меня приняться за эту тяжелую работу, что его сиятельству г. президенту угодно было привлечь меня к рассмотрению присланных статей.[3] Между тем я едва ли смог бы высказать мое суждение об этом, если бы предварительно сам, своими методами, не изучил тщательно всей проблемы. Итак, до сих пор решение этого вопроса было лишь поверхностным, движение апогея Луны было найдено вдвое меньшим по сравнению с тем, каким оно является в действительности. Таково, однако, только непосредственное действие сил, побуждающих Луну к движению ее апогея. Однако все неравенства ее движения также нечто присоединяют к движению апогея, вследствие чего движение апогея, следующее из теории, нельзя определить, прежде чем не будут выявлены на основании теории все неравенства движения. Поскольку до сих пор все, за исключением г. Клеро, теоретическое движение апогея хотели выводить раньше неравенств движения, хотя оно зависит от этих последних, то неудивительно, что они не достигли цели; вместе с тем представляется очевидным, что все те, которые движение апогея Луны прежде пытались выводить из теории Ньютона, как это делает Уольмслей и римские комментаторы, грубо ошибались в этом вопросе. Поэтому г. Клеро одному принадлежит честь этого важного открытия, а Петербургская Академия заслуживает величайшего восхваления, поскольку она одна предложила столь важный вопрос, который теперь полностью разрешен, так что относительно него не остается уже ни малейшего сомнения.[4]

Теоремы, сообщенные в моих «Основах стереометрии»,[5] которые я тогда мог доказать только методом индукции, я недавно доказал полностью. Светлейшему господину фельдмаршалу графу фон Шметтау еще не удалось полностью осуществить его намерений относительно географии Германии,[6] его болезненное состояние до сих пор препятствует дальнейшему продолжению [работы].

С нижайшим приветом от всей моей семьи имею честь пребыть с совершенным уважением

Ваш покорный слуга

Л. Эйлер.

Берлин, 6 мая 1751.

P. S. Податель этого письма — г. Районар из Базеля, мой достойный земляк, который был здесь в течение некоторого времени и теперь предполагает вернуться в Базель; осмеливаюсь рекомендовать Вам его наилучшим образом.

Hochedelgebohrner Herr,
Hochgeehrtester Herr Professor,

Eur. Hochedelgeb. erneuerte Versicherung, dero hochschätzbaren und theuren Freundschaft bey Gelegenheit meiner Reise durch Sachsen hätte schon längst meine schuldigste Danksagung erfordet, weil ich aber außerdem nicht sonderlicher zu berichten von mir kann und ich glaube, dass Eu. Hochedelgeb. von meiner vollkommensten Begebenheit gäntzlich versichert sind, so habe um so viel wenige Bedenkengetragen meinen Antwort aufzuschieben. Eu. Hochedelgeb. erkenne ich mich allso für so vielfältigen Proben dero aufrichtigen Freundschaft gehorsamst verbunden; und nach dem ich seit geraumer Zeit mich widmen in die Untersuchung über den Lauf des Mondes verkehrt habe, so ergreife ich diese Gelegenheit Eur. Hochedelgeb. die Nachricht zu geben, dass ich nun auch vollig dem H. Clairaut beystimme, und die Hypothesin Attractionis Newtonianam für hinlänglich halte den motum apogei Lunae erklären, ungeacht [et] vielleicht hierinn der H. Clairaut keinen stärkeren Wiedersächer gehabt hat als mich. Er kann erstaunlich verwirrte Rechnungen, welche er zu diesem Ende entwickeln mußte, und ich muß gestehen, daß wofür ich mich hierinn den H. Clairaut zum Vorgänger geha t hätte, ich die Geduld nicht gehabt haben würde mich in so verlaufige Rechnungen einzulassen. Allein die Wichtigkeit der Frage selbst, da dieselbe von der Kajserl. Academie zu Petersburg gewürdiget worden der gelehrthen Welt mit einem Preiß zu Untersuchung vorgelegt zu werden, hat mich um so viel mehr zu dieser schwehren Arbeit aufgemuntert, da es dero H. Praesidenten Hochgröss. Excellenz gefallen, mich mit zu Beurtheilung der eingeschickten Abhandlungen zu ziehen; und ich mich wohl im Stande gewesen sey würde darüber mein Urtheil zu füllen, wenn ich nicht vorher die gantze Sach selbst nach meiner Art genau untersucht hatte. So viel ist nun gewiß dass kann man diese Frage nur oben hinerläget, der motus apogei Lunae nur halb so groß gefunden wird, als er in der That ist. Dieser ist ursachlich nur der unmittelbarer effectus der virium Lunam sollicitantium auf den motum apogei. Allein alle motus inaequalitates selbst tragen auch etwas zum motu apogei bey, dargestellt dass man den motum apogei, der aus der Theorie folgt, nicht bestimmen kan, ehe man alle motus inaequalitates aus der Theorie herausgebracht hat. Weil nun bisher alle außer dem H. Clairaut aus der Theorie den motum apogei vor den inaequalitatibus motus haben herausbringen wollen, weil diese von jenen dependire, so ist es kein Wunder, daß sie des Zieles verfehlet; und es ist auch gewiß, dass alle, welche vorgegeben den motum apogei Lunae aus der newtonianischen Theorie herausgebracht zu haben, als machen Walmesley und die Commentatores Romani, sich in diesen Stück gröblich verstossen. Darum gebührt dem H. Clairaut allein die Ehre dieser wichtigen Erfindung, und die Academie von Petersburg kan sich vielleicht allein rühmen, eine so wichtige Frage aufgegeben zu haben, welche zugleich vollig ist erörtet werden, so daß kein zweifel mehr darüber zurückbleibt.

Die gemeldeten propositionen in meinen Fundamentis Stereometriae, welche ich damals nicht anders als per inductionem demonstriren konnte, habe ich seit der Zeit vollkommen beweisen.

Den H. Feldmarschall Grafen von Schmettau Excellenz haben Ihren Vorsatz wegen der Geographie von Deutschland noch nicht ganz führen lassen, allein sein kränklicher Zustand hat ihm bischer an weiteren Fortsetzung desselben verhindert.

Nächst ergebenstem Compliment von allen den meinigen habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu verharren.

Eu. Hochedelgebohren Gehorsamster Diener L. Euler.

Berlin, d. 6 May 1751.

P. S. Uberbringer dieses ist H. Raillard aus Basel, mein sehr werther Landsman, der sich einige Zeit hier aufgehalten und nun nach Basel zurückzukehren gedenket, denselben nehme die Freyheit E. Hochedelgeb. bestens zu recommendiren.

Печатается по собственноручному черновику (Рукописное собрание Фундаментальной библиотеки Тартуского университета, Morgensterni Ep. Phil., т. V, № 45, лл. 74—75).

[1] Речь идет о письме Г. Гейнзиуса Л. Эйлеру от 23 сентября 1750 г., в котором Гейнзиус приглашал Эйлера остановиться у него (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 3, л. 168).

[2] Здесь имеется в виду задача, предложенная Петербургской Академией наук на конкурс 1751 г., об установлении соответствия между данными наблюдений движения Луны и теорией Ньютона. Тему для задачи дал Л. Эйлер (См. письмо Л. Эйлера И.-Д. Шу-

махеру от 4/15 июля 1749 г., — Briefwechsel, т. II, Берлин, 1961, стр. 171—173).

[3] К. Г. Разумовский просил Л. Эйлера взять на себя рассмотрение статей, присылаемых на конкурс (см. письмо Л. Эйлера К. Г. Разумовскому от 15/26 января 1751 г., — Briefwechsel, т. II, Берлин, 1861, стр. 229—230).

[4] На конкурс, объявленный Петербургской Академией, были присланы четыре работы; премия в 100 червонцев была присуждена Алексису Клеро, о чем было объявлено в торжественном Академическом собрании 6 сентября 1751 г.

Работа Клеро была напечатана в Петербурге: Pièce qui ce remporté le prix de l'Académie Imperiale des sciences de St.-Pétersbourg, proposé en 1750 sur la question: si toutes les inégalités, qu'on a observé dans le mouvement de la Lune, s'accordent avec la théorie Newtonienne ou non? (Статья, получившая премию Петербургской императорской Академии наук, предложившей в 1750 г. вопрос: согласны ли все неравенства, которые наблюдаются в движении Луны, с теорией Ньютона или нет?) — Петербург, 1752.

В этой работе впервые было установлено, что закон Ньютона достаточен для объяснения всех неравенств в движении Луны. Кроме того, Клеро объяснил здесь причину несоответствия между наблюдавшимся и вычисленным движением лунного перигея, отмеченного еще Ньютоном (Проф. Н. И. Идельсон. Алексис Клод Клеро и Петербургская Академия наук. Вестник Академии наук СССР, 1947, № 5, стр. 119).

[5] Речь идет о работах Л. Эйлера по стереометрии, содержание которых он впервые изложил в письме к Гольдбаху в 1750 г. (Fuss, Correspondance Mathématique, т. I, стр. 536—539). Работы были представлены в Конференции 6 апреля 1752 г. (Протоколы, т. II, стр. 268) и опубликованы в 1758 г.: Elementa doctrinae solidorum (Основы учения о твердых телах) — Novi Commentarii Academiae Sc. Petropolitanae (1752—1753), т. IV, стр. 109—140; Demonstratio nonnularum insignium proprietatum, quibus solida hederis planis inclusa est (Доказательство некоторых важных особенностей, свойственных твердым телам, находящимся на плоскости) — там же, стр. 140—160.

В письме от 23 сентября 1750 г. Гейнзиус благодарит Эйлера за сообщенные ему работы по стереометрии и выражает уверенность, что намерение Эйлера дальше работать над этой темой послужит истинной пользе стереометрии (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 3, л. 169).

[6] Здесь говорится о градусных измерениях в Германии, предпринятых фельдмаршалом графом Самуэлем фон Шметтау, который хотел измерить меридиан от Балтийского моря до Средиземного, что, конечно, было очень трудно осуществить. В 1751 г. он производил градусные измерения между Вейссенштейном (Wilhelmshöhe) у Касселя и Брокеном. Эти работы были прерваны смертью Шметтау, последовавшей в Берлине 18 августа 1751 г.

В письме от 23 сентября 1750 г. Гейнзиус выражает сожаление, что работа графа Шметтау прервана (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 3, л. 168 об.); в письме от 16 сентября 1751 г., которым Гейнзиус ответил на публикуемое письмо, сообщается о смерти графа Шметтау (там же, лл. 230 об.—231).

5

13 февраля 1753 г., Берлин.

Высокоблагородный господин,
глубокоуважаемый господин профессор,

Вы можете доставить господину советнику Шумахеру большое удовольствие, если соблаговолите прислать ему несколько экземпляров «Диатрибы» г. Вольтера, подвергнутой здесь сожжению.[1] Господин Шумахер очень настойчиво меня об этом просил, однако продажа этого произведения здесь совершенно запрещена; поскольку мне сообщили, что оно получено в Лейпциге, я покорнейше прошу Вас прислать по почте два экземпляра г. советнику.

Между прочим скоро будет готова моя статья о движении и неравенствах Луны,[2] печатавшаяся по просьбе императорской Академии; в ближайшем времени я буду иметь честь преподнести Вам один экземпляр, так как я должен ждать из Москвы разрешения на их рассылку.

С нижайшим приветом от всей моей семьи имею честь пребыть с совершенным уважением

Ваш покорный слуга
Л. Эйлер.

Берлин, 13 февраля 1753.

Hochedelgebohrener Herr,
Hochgeehrtester Herr Professor,

Eu. Hochedelgeb. können dem H. Rath Schumacher einen gantz besondern Gefallen erweisen, wann dieselben einige Exemplare von der Mr de Voltaire Diatribe, die hier verbrannt worden, an Ihn uberschicken wollten. Der H. Sch[umacher] hat mich sehr inständig darum ersuchet, es ist aber der Verkauf dieser Charteque hier gäntzlich verboten; da man mich nun versichert, dass dieselbe in Leipzig zu bekommen, so bitte Eu. Hochedelgeb. gehorsamst 2 Exemplare mit der Post an dem H. Rath zu schicken.

Sonsten ist kurzlich hier meine Abhandlung de Motu et inaequalitatibus Lunae fertig worden, welche die Kaiserl. Academie hier hat drucken lassen; wovon ich nächstens die Ehre haben werde Eu Hochedelgeb. ein Exemplar zu praesentiren, weil ich vorher die Ordres wegen der Bekanntmachung aus Moscau erwarten muß.

Nach gehorsamster Empfehlung aller der meinigen habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu verharren.

Eu. Hochedelgebh. Gehorsamster Diener

L. Euler.

Berlin, d. 13 Febr. 1753.

Печатается по собственноручному черновику (Рукописное собрание Фундаментальной библиотеки Тартуского университета, Morgensterni Ep. Phil., т. V, № 46, лл. 76—77).

Помета: «Г-ну Гейнзиусу, профессору математики и члену Петербургской императорской Академии наук, в Лейпциге».

[1] Речь идет о памфлете Вольтера «Diatribe d'Akakia médecin du pape» (1752), направленном против президента Берлинской Академии П.-Л.-М. Мопертюи. Вольтер принял сторону С. Кёнига в споре об открытии Мопертюи закона наименьшего действия. По приказанию прусского короля памфлет был сожжен в Берлине (см. письмо Л. Эйлера И.-Д. Шумахеру от 30 декабря 1752 г. — Briefwechsel, т. II, Берлин, 1961, стр. 297—298).

[2] Здесь говорится об издании «Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitates» (Теория движения Луны, содержащая все его неправильности) — Берлин, 1753, которое было напечатано в Берлине за счет Петербургской Академии наук.

6

11 декабря 1757 г., Берлин

Высокоблагородный господин,
глубокоуважаемый господин профессор,

Поскольку сношения между Россией и Берлином все еще затруднены,[1] а Петербургская Академия потребовала у меня некоторых резюме к Вашим печатающимся статьям,[2] то я не нашел более простого средства, чем переслать их Вам с Вашим братом, исключительной любезностью которого я не могу нахвалиться как в отношении корреспонденции, так и в некоторых расчетах. Затем покорнейше прошу Вас отправить вложенное письмо по почте в Петербург. Вы можете быть уверены, что расходы, как бы велики они ни были, будут своевременно возмещены Вашему брату Петербургской Академией. Если Вам угодно по этому случаю самому написать Вашему брату, то будьте добры обернуть эти [материалы] в новую обложку с тем же самым адресом. Впрочем, покорнейше прошу Вас любезно извинить мне мою смелость, вызванную теперешними военными обстоятельствами, с которой я покорнейше поручаю себя Вашему дружескому вниманию и имею честь пребыть с глубоким уважением

Ваш покорный слуга

Л. Эйлер.

Берлин, 11 декабря 1757.

Hochedelgebohrener Herr,
Hochgeehrtester Herr Professor,

Da die Correspondenz zwischen hier und Russland noch gestörret ist, die St-Petersburgische Academie aber von mir einige Beiträge zu Ihren unter dem Press befindlichen Commentarien verlanget hat, so finde ich keinen sicheren Weg, als dieselben Eur. Hochedelgeb. zu übersenden; dieselben stehen mit dero Herrn Bruder, dessen gantz besondere Freundschaft ich nicht genug rühmen kann im Correspondenz und ohne zweifel auch in einiger Rechnung. Daher ersuche Eur. Hochedelgeb. gehorsamst die Inlage mit der Post nach St-Petersburg zu schicken, und versichert zu sein, daß die Unkoste so hoch sich dieselben auch belaufen mögen, von der Kaiserl. Academie dero H. Bruder richtig werden erstattet werden. Wollten Eur. Hochedelgebh. bey dieser Gelegenheit auch selbst an dero H. Bruder schreiben, so belieben dieselben um noch eine neue Umschlag mit gleicher Adresse zu machen. Inzwischen bitte Eur. Hochedelgeb. gehorsamst diese meine Freiheit, wozu [mich die][a] gegenwärtige kriegerische Umstände nöthigen, gütigst zu entschuldigen, der ich mich zu dero hochschätzbaren Freundschaft ergebenst empfehle, und mit der willkommensten Hochachtung zu verharren die Ehre habe

Eur. Hochedelgebohren gehorsamster Diener

L. Euler.

Berlin, d. 11 Dec. 1757.

Печатается по собственноручному черновику (Рукописное собрание Фундаментальной библиотеки Тартуского университета, Morgensterni, Ep. Phil., т. I, № 44).

---

[a] *Запачкано печатью.*

[1] Имеются в виду затруднения, вызванные войной, которую вели Пруссия и Англия из-за Силезии с Австрией, Саксонией, Францией, Швецией и Россией (так называемая семилетняя война 1756—1763 гг.).

[2] Речь идет, по-видимому, о работе Г. Гейнзиуса «Observationes Lipsiae habitae an. 1749 stil. nov.» (Наблюдения, произведенные в Лейпциге в 1749 г. по новому стилю) — Novi Commentarii Academiae Sc. Petropolitanae, т. IV (1752—1753), 1758, стр. 477—494. В работе излагаются результаты метеорологических наблюдений, а также наблюдений солнечного и лунного затмений.

7

12 июня 1764 г., Берлин

Высокоблагородный господин,
глубокоуважаемый господин профессор,
драгоценный друг и благодетель,

Мне очень жаль, что мое предыдущее письмо[1] причинило Вам беспокойство разыскивать пакет, посланный мне уже в январе; моя небрежность была причиной того, что я своевременно не известил Вас о получении его; итак, теперь я имею честь сообщить Вам, что я во-время получил письмо. В нем, однако, находился только один оттиск из X тома «Новых комментариев», присланный мне для составления извлечений из содержащихся в нем статей, которые будут помещены в начале тома. Там были также отдельные небольшие статьи, присланные на конкурс,[2] и работы г. профессора Цейгера.[3] Господин проф. Миллер сообщил мне также совершенно определенно, что в Петербурге забыли написать адреса на экземплярах VII и VIII томов, предназначенных для подарков, поэтому я осмеливаюсь повторить мою просьбу, и поскольку для г. проф. Формея и Г. проф. Гебенштрейта также предназначено по одному экземпляру, то я прошу Вас сделать мне величайшее одолжение, любезно приказав переслать им эти книги.

В прежние времена Петербургская Академия имела обыкновение присылать также один экземпляр «Комментариев» здешней Академии, но поскольку эта любезность была прекращена в связи с войной, то я не знаю, должен ли этот обычай быть возобновлен или нет. Следовательно, если об этом будет дан соответствующий указ, то этот экземпляр может быть прислан вместе с двумя остальными экземплярами. Теперь в Петербурге думают уже об XI томе, так как IX был готов больше чем год тому назад, и я не знаю, почему он не прислан одновременно с VII и VIII томами.

Я узнал из «Gelehrter Zeitung»,[4] что в «Acta Eruditorum» было опубликовано графом Фаньяно доказательство одной теоремы,[5] предложенной в 1754 г., но при этом не было сообщено, решил ли он также связанную с этой теоремой задачу.[6] Мои исследования по этому вопросу опубликованы в VII томе «Комментариев»,[7] и я считаю себя бесконечно обязанным за весьма похвальный отзыв о них в «Leipziger Gelehrten Zeitung». В самом деле, это совершенно новая область анализа, с помощью которой я пришел к этому открытию; но повод к этому, как я уже сообщал, дал упомянутый граф Фаньяно. Путь, которым я пришел к этому, действительно, очень сложный и я не думал тогда, что может быть более короткий и естественный путь; но только недавно мне удалось вывести относящиеся к этому особые интегрирования из одного общего основного положения, на котором в то же время основывается все интегральное исчисление. Это дает еще одно прекрасное добавление к моему трактату об этой части анализа, который, вероятно, скоро будет издан Брауншвейгским сиротским домом.

В Петербурге теперь есть превосходный мастер по имени Пачекко, испанец, рекомендованный мною Академии,[8] который может изготовлять английские телескопы отличного качества[a]. . . на пробу он изготовил один в 10 д; этот телескоп ничем не отличается от лучших 18-дюймовых. Теперь он работает над одним таким большим 15-футовым инструментом; если это ему удастся, то этим будет превзойдено все, что было сделано до сих пор. Я считаю, однако, что эти приборы с простыми стеклами можно еще значительно усовершенствовать: после того как г. Цейгер нашел, каким образом можно сколь угодно увеличить способность стекла рассеивать лучи, для этого, пожалуй, никто не будет более подходящим, чем только что упомянутый Пачекко, если сообщить ему необходимые теоретические сведения.

---

[a] *Далее пропуск.*

Вся моя семья свидетельствует Вам свое глубокое уважение; имею честь пребыть с совершенным почтением

Ваш покорный слуга

Л. Эйлер.

Берлин, 12 июня 1764.

Hochedelgebohrner Herr,
Hochgelehrtester Herr Professor,
Hochwerthester Freund und Gönner,

Es ist mir sehr leid, dass mein voriges Schreiben Eur. Hochedelgeb. die Mühe verursachet, den an nicht schon in Januario abschickte Paquet nachzuforschen, und es ist eine Nachlässigkeit von mir, das ich mich zugleich Eu. Hochedelgeb. von dem richtigen Empfang desselben Nachricht gegeben: allso habe ich nun die Ehre zu melden, dass ich dasselbe zu rechten Zeit wohl erhalten. Es befand sich darinn aber nichts anders als ein Abdruck von dem X Tomo Novum Comment., welcher mir zugeschickt worden um aus den darum enthaltenen Schriften die Auszugen so zu Anfang einer jeden Tomi gesetzt werden zu verfertigen. Dabey waren auch noch einige kleine Abhandlungen, als Preißschriften, und die von H. Prof. Zeiher; der H. Prof. Müller hat mir auch ausdrücklich gemeldet, daß man in Petersburg vergessen auf die Praesent. Exemplaren von VII und VIII Tomo die Adressen zu setzen, dahero nehme ich die Freyheit meine Bitte zu wiederholen, und da fürden H. Prof. Formey auch ein Exemplar bestimmt ist, so ersuche Eu. Hochedelgeb. wie auch den H. Prof. Hebenstreit denen meine gehorsamste Empfehlung zu machen bitte, diese zwey Exemplaria gütigst überschicken zu lassen.

In vorigen Zeiten pflegte die Petersburgische Academie auch an die hiesige Academie ein Exemplar der «Commen[tarien]» zu schicken, weil aber diese Höfflichkeit durch den Krieg unterbrochen werde, so weiß ich nicht, ob diese Gelegenheit wieder aufkommen soll oder nicht? Sollte allso darüber inzwischen eine Verorderung aufzulaufen seyn, so könnte dieser Exemplar mit den beyden übrigen mitgeschickt werden. Nun wird in Petersburg schon an dem XI^{ten} Tomo gedenkt, denn IX ist schon vor mehr als einem Jahr fertig gewesen, und ich weiß nicht, warum derselbe nicht zugleich mit dem VII und VIII herausgeschickt worden.

Aus der «Gelehrten Zeitung» habe ich gesehen, dass in den «Actis Eruditorum» von dem Grafen Fagnano eine Demonstration über das von eine A. 1754 vorgelegte Theorema gegeben worden, es wird aber nicht gemeldet, ob er auch der damit verknüpften Problema aufgelöst habe? Meine Untersuchungen über diese Materie stehen in VII Tomo «Comment[arien]», und ich erkenne mich für das denselben in der «Leipziger Gelehrten Zeitung» beygelegte große Lob unendlich verpflichtet. Es ist allerdings eine gantz neue Sache in der Analysi, wodurch ich auf diese Entdeckung geführet worden; wozu aber der obgedachte Graf Fagnano, wie ich gemeldet, den ersten Grund geleget hat. Der Weg, auf welchem ich dachin gekommen, ist allerdings sehr krum, und ich dachte damals nicht dass ein kürzerer und natürlicherer dahin leiten könnte, allein erst kürzlich ist es mir gelungen, die darinn vorkommenden besonderen Integrationen aus einem allgemeinen Grundsatz, worauf zugleich der gantze Calculus integralis beruhet, herzuleiten. Dieser gibt noch eine schöne Zusatz zu meinem Tract[at] über diesen Theil der Analysis, welcher vermuthlich bald von dem Braunschweigischen Waisenhaus wird verlegt werden.

In Petersburg hat man nun einen vortrefflichen Künstler Nahmens Pacecco, einen Spanier, den ich der Academie verschaffet, welcher die Englische Telescopen in der grössten Vollkommenheit verfertigen im Stande, wie er dann da. . .[a] gleich zur Probe einer von 10 Holl gemacht, das dem besten 18 Holl gleich kommt. Nun arbeitet er an einem solchen großen Instrumen[ten] 15 Futh, welches, wann es ihm gelingt, alles was man bissher gehabt weit uber[treff]en muß. Ich glaube aber, daß man diese Sache mit blossen Gläsern noch höher weit bringen konnen: nachdem H. Zeiher gefunden, wie in dem Glaß das Vermögen die Strahlen zu zerstreuen nach beliebe vermehrt werden kan, wozu vielleicht niemand geschickter seyn wird, als eben gedachter Pacecco, wann ihm das nötige aus der Theorie mitgetheilen wird.

---

[a] *Далее пропуск.*

Mein gantzes Haus lässt sich Eu. Hochedelgeb, auf das imständigte Empfehlen und ich habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu sein

Eu. Hochedelgebohren Gehorsamster Diener

L. Euler.

Berl., d. 12 Iunii 1764.

Печатается по собственноручному черновику (Рукописное собрание Фундаментальной библиотеки Тартуского университета, Morgensterni Ep. Phil., т. V, № 47, лл. 78—79 об.).

Помета: «Г-ну Гейнзиусу, профессору математики и члену императорской Академии наук, в Лейпциге».

[1] Здесь говорится о ненайденном письме Л. Эйлера от 29 мая 1764 г., о котором упоминает Гейнзиус в своем ответном письме от 6 июня 1764 г. (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 4, л. 366; см. Briefwechsel, т. I, стр. 238—239 и 241—242).

[2] Речь идет о статьях, присланных на конкурс, объявленный Петербургской академией на премию 1766 г. (Протоколы, т. II, стр. 505).

[3] Здесь говорится о работах проф. Цейгера: Termometrum punctis constantibus gandentium emendatio (Исправление термометров с постоянными точками) — Novi Commentarii Academiae Sc. Petropolitanae, т. IX, стр. 314—315; Descriptio duplicis microscopii solaris apparatus (Описание двойного солнечного микроскопа)— там же, т. X, стр. 299—300.

[4] В Лейпцигской газете приводилось сообщение о статьях, опубликованных в «Nova Acta Eruditorum» за сентябрь 1762 г., где упоминалась статья архидьякона де Фаньяно (Neue Zeitungen von gelehrten Sachen, 1764, 14 May, стр. 312).

[5] Речь идет о предложенной Эйлером теореме: Theorema, ad cujus demonstrationem Geometrae invitantur (Теорема, доказать которую предлагается геометрам) — Nova Acta Eruditorum, т. XXIII, январь 1754, стр. 90. Доказательство этой теоремы приведено в работах архидьякона Иоанна Франциска де Тускис де Фаньяно, сына итальянского математика Жюля Карла де Фаньяно: Demonstratio theorematis Actis Lipsiensibus propositi ad Annum 1754 Mense Januar. pag. 40 (Доказательство теоремы, предложенной в «Лейпцигских Актах» 1754, январь, стр. 40) — Nova Acta Eruditorum, XXXI, сентябрь 1762, стр. 458—466.

При доказательстве этой теоремы де Фаньяно ссылается на труды своего отца: Theorema, ex quo deducitur Nova Mensura Arcuum Ellipticorum, Hyperbolicorum et Cycloidalium (Теорема, из которой выводится новый способ измерения эллиптических, гиперболических и циклоидных дуг) — «Diarium Eruditorum Italiae», XXVI, Венеция, 1716, № VI, и Productiones mathematicae (Математические исследования) — т. II, Пиза, 1750.

[6] Здесь говорится о предложенной Эйлером задаче: Problema, ad cujus solutionem Geometrae invitanur (Задача, решить которую предлагается геометрам) — там же, т. XXIII, 1754, стр. 40.

[7] Речь идет о работе Л. Эйлера: Demonstratio theorematis et solutio problematis in «Actus Eruditorum» Lipsiensibus propositorum (Доказательство теоремы и решение задачи, предложенной в лейпцигских «Acta Eruditorum») — Novi Commentarii Academiae Sc. Petropolitanae, т. VII (1758—1759), 1761, стр. 128—162.

[8] Имеется в виду Рафаэль Пачекко, испанец, рекомендованный Петербургской Академии наук русским послом в Берлине князем Долгоруким и Л. Эйлером. Пачекко явился в Академическое собрание 23 января 1764 г. (Протоколы, т. II, стр. 510). Представленные им работы были даны на отзыв проф. Цейгеру и Эпинусу, которые отозвались о них с большой похвалой (там же, стр. 514).

ДЕЛИЛЮ

Делиль, Иосиф Николай (De L'Isle, Joseph Nicolas, 1688—1768) родился в Париже 4 апреля 1688 г. С ранних лет Делиль интересовался астрономией, с 1720 г. работал в обсерватории знаменитого астронома Кассини. В 1724 г. совершил поездку в Англию, где познакомился с Ньютоном и Галлеем. Хотя Делиль пользовался в ученом мире большой известностью и за свои статьи по астрономии был уже в 26-летнем возрасте избран адъюнктом Парижской Академии, однако материально он не был достаточно обеспечен и с радостью принял приглашение в Петербург, куда прибыл в феврале 1726 г. — несколько ранее Эйлера. Брат его Вильгельм, королевский географ, член Парижской Академии, был лично известен Петру I, и, возможно, это сыграло роль в приглашении Иосифа Николая в Петербург.

В России Делиль сразу взялся за астрономические наблюдения и вел их с большим усердием и точностью. Впоследствии Лаланд, ознакомившись с журналами наблюдений Делиля, был изумлен его работой.

Ученый мир тепло встретил Делиля. Вначале он был в хороших отношениях и с Шумахером, но затем решительно стал на сторону его врагов и сразу по вступлении в управление Академией барона Корфа стал жаловаться ему на академическую канцелярию; от него поступали жалобы и Разумовскому, когда тот вступил на пост президента Академии. Среди академиков он нажил много врагов и в 1747 г. был вынужден покинуть Россию. В 1752 г. он опубликовал сведения о Камчатской экспедиции, которые Россия держала в тайне, и это вызвало окончательный разрыв его с Академией. Делиля обвиняли в том, что он увез с собой во Францию материалы своих наблюдений (вопрос об этом поднимался уже в 1735 г.), и академикам было запрещено поддерживать с ним какие-либо отношения. Письмо Эйлера относится еще к тому времени, когда Делиль был в России.

Кроме астрономических работ, Делиль предложил особый способ черчения географических карт, по которому были составлены первые карты атласа России. Эйлер посвятил этому способу (проекции Делиля) статью, напечатанную в «Acta Academiae Sc. Petropolitanaě» (1777). Лаланд в своей «Astronomie» (1792, I, 184) так отозвался о Делиле: «Никто более него не трудился над историею и всеми отраслями астрономии; никто не содействовал ее успехам своими разысканиями, перепискою, наблюдениями и своими учениками, в числе которых я желаю, чтобы и меня считали. Я всегда изумлялся удивительному множеству сделанных Делилем наблюдений и вычислений; ни у кого не было более обширной литературной переписки, и никто не сумел собрать более богатой коллекции книг, карт и астрономических наблюдений». Часть этих коллекций осталась в Париже, часть передана в Пулковскую обсерваторию (См.: Пекарский. История имп. Академии наук в Петербурге. СПб., 1870, стр. 145).

1

15 февраля 1746 г., Берлин

Господин Гауде взял на себя издание тома моих сочинений и приступил к нему уже давно, но он так занят печатанием первого тома «Mémoires Академии», что не может заниматься моими работами, пока этот том не будет закончен. Я надеюсь, милостивый государь, что Вы ничего не имеете против этого сборника,[1] ибо, кроме нескольких статей по анализу и механике, там есть и статьи по астрономии и физике, большей частью довольно интересные: новая теория света и цветов, сильно отличающаяся от теории Ньютона и вполне согласующаяся со всеми явлениями, связанными с движением Земли. Я уже имел честь сообщить Вам, что пользуюсь здесь новым уравнением для Луны, но мне кажется, что я открыл одно еще более важное обстоятельство, а именно: что период обращения Земли не постоянен, а мало-помалу уменьшается.[2] Действительно, чтобы удовлетворить наблюдениям настоящего века, нужно, как следует из всех вычислений, предположить год более коротким, чем в таблицах Кассини; наблюдения прошлого века, XVI и особенно XV, безусловно, требуют большей продолжительности года; наблюдения же Птолемея, на первый взгляд, опровергают это заключение, потому что если сравнить их с позднейшими, то год оказывается на одну минуту короче; поэтому Кассини и другие астрономы не пожелали пользоваться наблюдениями Птолемея при определении года. По-моему, я удачно разрешил это затруднение, предположив, что наблюдения Птолемея достаточно правильны, но что мы ошибаемся в приведении времени, указанного им по Юлианскому календарю. Хронологи, которые делали это приведение, основываются на одном только месте у Цензорина,[3] откуда они выводят разность между Египетским и Юлианским календарем; хотя у того же автора мы находим другое место, из которого следует заключить, что время, указанное у Птолемея, отстает на один день. Кроме того, у Диона[4] и других авторов мы читаем, что римские жрецы в это время не вполне строго соблюдали правила и иногда позволяли себе увеличить или уменьшить год на один день. Это соображение вместе с доводами, которые нам дает астрономия, по моему мнению, вполне могут служить доказательством того, что данные наблюдений Птолемея нужно сдвинуть назад на один день; тогда можно видеть вполне ясно, что дни уменьшались довольно правильно; я подтверждаю это еще и продолжительностью года в 365 дней 5 часов 55 мин., выведенной Птолемеем из наблюдений своих и Гиппарха, хотя я и нимало не сомневаюсь, что эта длина преувеличена, особенно если мы подразумеваем средний тропический год. Из всего этого я заключил, что средний тропический год уменьшается ежегодно на 35^{IV} и что в 1700 г. он был равен 365 дн. 5 ч. $47'$ $56''$ $24'''$.[a] Это уменьшение года является следствием сопротивления эфира, как я подробно объяснил в одной работе, которая появится в сборнике моих статей;[5] я в ней показал, что если эфир оказывает сопротивление, то время обращения планет, как и их эксцентриситеты, должно уменьшаться и что это уменьшение должно быть тем более значительно, чем больше время обращения и эксцентриситет. Поэтому для комет этот эффект должен быть весьма велик, и это действительно следует из таблиц Галлея, из которых, повидимому, можно заключить, что комета 1682 г. уже наблюдалась до этого два раза, так как время между 1-м и 2-м ее появлением на целый год длиннее времени между 2-м и 3-м. Далее, Галлей точно так же нашел, что когда-то Луна обращалась [вокруг Земли] медленнее, чем теперь; эти причины вместе с той, какую я открыл в движении Земли, полностью меня убеждают, что эфир оказывает и планетам, и кометам небольшое сопротивление, поэтому время их обращения становится постепенно все короче. В моих солнечных таблицах,[6] которыми пользуются здесь, я учел это обстоятельство, добавив специальную табличку с указанием, сколько следует прибавить к средней долготе, найденной посредством обычных таблиц для каждого данного времени; такая же поправка будет необходима для Луны, но я еще не имел времени закончить ее точное определение. Я узнал, что Вы пред-

---

[a] *В копии* 47^{II} 56^{III} 24^{IV}.

полагаете представить мне Ваши соображения о моих лунных таблицах, один экземпляр которых я послал в Петербург.[7] Я уже имел честь сообщить Вам, что они еще нуждаются в поправке, которая должна быть получена из наблюдений, и что в них еще недостает таблички, озаглавленной: «Из двойного расстояния Луны от Солнца вычтите двойную эксцентрическую аномалию Луны». В настоящее время я заканчиваю эти поправки, для которых использовал множество наблюдений над затмениями; во-первых, пользуясь таблицами средних движений по Кассини, нужно всегда прибавлять к средней долготе Луны 1′ 30″, из долготы апогея нужно вычитать 13′ 30″ и, наконец, из средней долготы восходящего узла всегда вычитать 3′0″. Далее, мои таблицы уравнений нуждаются в следующих поправках.

I. Уравнения моей первой таблицы нужно уменьшить на их 3/200 часть, так что наибольшее уравнение будет 0° 12′ 2″.

II. Уравнения 2-й таблицы, вычисленной мною для горизонтального параллакса Солнца 12″30‴, также слишком велики, и из них нужно вычесть их четвертую часть, или, точнее, 245/1000, так что наибольшее уравнение будет 9′ 44″, откуда следует, что горизонтальный параллакс Солнца не превышает 9″30‴; я полагаю, что это также наиболее надежный способ для определения горизонтального параллакса Солнца.

III. Уравнения моей 3-й таблицы не требуют никаких изменений.

IV. Но уравнения IV и V таблиц должны быть уменьшены на их 3/200 часть, так что наибольшая величина IV таблицы будет равна 1°14′0″.

V. Таблицы VI и VII должны быть уменьшены на 1/4.

VI. Остается, следовательно, только таблица VIII, где аргументом служит двойное расстояние Луны от Солнца минус двойная эксцентрическая аномалия. Заглавия в этой таблице будут те же, что и для таблицы II; уравнения будут пропорциональны синусам аргументов, и наибольшее уравнение, соответствующее III sign.[8] 0°, будет 8′ 30″, уравнение наибольшего расстояния будет 118°, что отвечает 0^s0, и этого достаточно для построения указанной таблицы, где нужно только уменьшить уравнения таблицы II, исправив их, как я указал выше, еще на их восьмую часть. После внесения всех поправок я осмелился бы утверждать с почти полной уверенностью, что мои таблицы никогда не разойдутся с наблюдениями более чем на минуту, тогда как таблицы Кассини и Брента, озаглавленные «Astronomical Tables of the luminaries» (Астрономические таблицы для светил), крайне сложны и содержат уравнения очень странные и лишенные всякого основания, так что требуется не менее дня для выполнения вычисления только для одного положения Луны.

Берлин, 15 февраля 1746.

Mr Haudé a entrepris d'imprimer un volume de mes dissertations et il avait déjà commencé il y a longtems, mais l'impression du 1. Tome des Mémoires de l'Académie l'occupe tant, qu'il n'est pas en état de continuer mes ouvrages, avant que celui-ci sera achevé. J'espère, Monsieur, que ce recueil ne Vous sera pas désagréable, car outre quelques pièces de l'Analyse et de la Mechanique, il y a plusieurs de l'Astronomie et de Physique, pour la plupart assés intéressantes: comme une nouvelle Théorie de la lumiere et des couleurs, bien différente de celle de Newton, et qui satisfait parfaitement à tous les phénomènes sur le mouvement de la terre, j'ai déjà eu l'honneur de vous marquer, que j'emploie une nouvelle equation lunaire: mais je crois y avoir découvert une circonstance beaucoup plus importante qui est, que le temps périodique de la terre n'est pas constant, mais qu'il diminue tant soit peu. Car pour satisfaire aux observations de ce siècle, tous les calculs conviennent qu'il faut supposer l'année un peu plus courte, que selon les tables de Cassini, or les observations du siècle passé et du XVI et surtout celle du XV siècle demandent absolument une plus grande dureé d'un an: et les observations de Ptolémée, qui semblent renverser cette conclusion, parcequ'en les comparant avec les modernes, on trouve l'année plus courte d'une minute: ce qui est la raison, que Cassini et les autres Astronomes n'ont pas voulu faire usage des Observations de Ptolémée dans la détermination de l'année. Or je crois d'avoir assez heureusement resolu cette difficulté en soutenant, que les Observations de Ptolémée sont assez bonnes, mais que nous nous trompons dans la réduction des temps marqués par lui au Calendrier Julien. Les Chronologiens qui ont fait cette réduction, se fondent sur un seul passage de Censorin d'où l'on tire la réduction de l'Almanach Egyptien au Julien: quoiqu'il se trouve dans le même Auteur un autre passage, d'où l'on doit conclure, que les temps marqués par Ptolémée soient d'un jour plus reculés. Outre cela on trouve dans Dion et autres Auteurs, que les Prêtres Romains ne suivoient pas dans ce temps lá exactement les règles, et qu'ils usoient encore quelquefois de la liberté d'ajouter ou de retrancher un jour de l'année. Cette considération jointe aux raisons, que nous fournit l'Astronomie, me semble tenir lieu d'une démonstration, qu'il faut reculer les observations de Ptolémee d'un entier jour, alors on voit assez clairement, que les années ont été diminuées assez régulièrement: ce qui se confirme encore davantage par la quantité de l'année de 365 j. 5h. 55 m. que Ptolémée a conclu de ses observations avec celle de Hipparch, quoique je ne doute nullement, que cette quantité ne soit trop grande, surtout si nous entendons l'année tropich moyenne. De tout cela j'ai conclu que la quantité d'une année tropique moyenne diminue chaque année de 35^{IV} et qu'elle étoit A. $1700=365^{j}5^{h}\ 47''56'''24^{IV}$.[a] Cette diminution de l'année est l'effet de la résistance de l'Ether, comme j'ai expliqué tout au long dans une pièce qui paraîtra dans le recueil de mes pièces où j'ai fait voir, que si l'Ether a une résistance, les temps périodiques des planètes doivent diminuer, aussi bien que leurs excentricités, et que cette diminution doit être plus considérable, plus le temps périodique et l'excentricité sera grande. Dans les Comètes il faut donc que cet effet soit fort considérable, et cela se trouve actuellement dans les tables des Comètes de Halley, par laquelle il paroit, que la Comète de 1682 a été observeé déja deux fois auparavant: or le temps entre la 1re et la 2de apparition surpassoit celui entre la 2de et la troisième d'une année entière. Ensuite Halley avait aussi trouvé, que la lune ne faisait pas ses révolutions autrefois si vite que maintenant: ces raisons jointes à celle que je viens de découvrir dans le mouvement de la terre, me persuadent absolument, que l'Ether oppose une petite résistance aux planètes et aux comètes, et que les temps périodiques en deviennent continuellement plus courts. Dans mes tables solaires, dont on se sert ici, j'ai eu égard à cette circonstance, ayant ajouté une table particulière qui mar-

---

[a] *Следует* «$47'56''24'''$».

que combien il faut ajouter à la longitude moyenne trouvée par la table ordinaire pour chaque temps, une pareille correction sera aussi nécessaire dans la lune, mais je n'en ai pu encore parvenir à bout, de la déterminer exactement. J'ai appris, que Vous me communiquerez vos refléxions sur mes tables lunaires, dont j'ai envoyé un Exemplaire à Petersbourg. J'ai eu déjà l'honneur de Vous marquer, qu'elles ont besoin encore d'une émendation qu'on doit tirer des observations et qu'il y manque encore une table, dont le titre est De la double distance de la lune au soleil otez la double anomalie excentrique de la lune. A présent je viens d'achever ces corrections y ayant employé quantité d'observations d'eclipses: par lesquelles premièrement en se servant des tables des moyens mouvements de Cassini, il faut constamment ajouter à la longitude moyenne de la lune 1′30″, de la longitude de l'Apogeé il faut soustraire 13′30″ et enfin de la longitude moyenne du noeud ôter toujours 3′0″. Ensuite mes tables d'equations ont besoin des corrections suivantes:

I. Les équations de ma première table doivent être diminuées de leur $\frac{3}{200}$ partie et ainsi la plus grande équation deviendra 0° 12′2″.

II. Les équations de la 2de Table que j'avais dressée sur la parallaxe horizontale du Soleil de 12″30‴ sont aussi trop grandes, et il en faut retrancher leur quatrième partie, ou plus exactement $\frac{245}{1000}$: et ainsi la plus grande équation sera 9′44″, d'on il s'ensuit que la parallaxe horizontale du Soleil n'est que 9″30‴ et je crois que c'est encore le plus sûr chemin de connaître la parallaxe horizontale du Soleil.

III. Les équations de ma 3me table ne demandent aucun changement.

IV. Mais celles de la IV et de la V doivent être diminuées de leur partie $\frac{3}{200}$, de sorte que la plus grande équation de la table IV devient 1°14′0″.

V. Les tables VI et VII doivent etre diminuées de leur $\frac{1}{4}$

VI. Il ne reste donc que la table VIII dont l'argument est la double distance de la lune au soleil moins de la double anomalie excentrique. Les titres de cette table seront les mêmes que ceux de la II. Table; les Equations sont proportionnelles aux Sinus des arguments, et la plus grande équation qui répond à III Sign. 0°, sera 8′30″, l'équation de la distance la plus grande sera 118 répondant à 0^s0, ce qui suffira pour construire cette table, où on n'a qu'à diminuer les équations de la II. Table, après les avoir corrigées comme j'ai marqué cy dessus, de leur huitième partie. Après avoir fait toutes ces corrections, j'oserois presque assurer, qu'alors mes tables ne s'écarteront jamais plus d'une minute des observations, au lieu que celles de Cassini et celles de Brendt (dont le titre est Astronomical Tables of the luminaries) sont si embarassées, et contiennent des équations si bizarres et destituées de tout fondement, qu'un homme achevera à peine dans un jour le calcul pour une seule place de la lune.

Berlin, ce 15 Févr. 1746.

Печатается по выдержке из письма, заверенной Делилем (ААН, ф. 1, оп. 3, № 35, лл. 15—16 об.).

[1] Речь идет о сборнике статей Эйлера, озаглавленном «Opuscula varii argumenti», изданном в 1746 г. в Берлине у издателей Шпенсра и Гауде.

[2] Эйлер и в других письмах, например к К. Ветштейну (см. эту переписку, ААН, ф. 136, оп. 2, № 22), не раз возвращается к мысли об уменьшении времени обращения планет вокруг Солнца, с которой он связывал идею о сотворении мира.

[3] Цензорин — римский историк и грамматик, живший в III в. н. э. У него имеется книга «De die natali», в которой говорится о влиянии созвездий на жизнь человека и содержатся сведения по астрономии и древним календарям.

[4] Дион (Дион Кассий) — греческий историк, род. около 160 г. н. э., умер около 235 г. Написал историю Рима в 80 книгах.

[5] «De relaxatione motus planetarum» в сборнике «Opuscula varii argumenti» (Небольшие статьи по разным вопросам) — см. прим. 1.

В издании «Ежемесячные сочинения, к пользе и увеселению служащие» за июль 1757 г. была помещена статья академика Эпинуса «Размышление о возврате комет с кратким известием о ныне явившейся комете». На основании точных вычислений Эпинус указывает, что комета Галлея находилась ближе всего к Солнцу в 1531 г. — 24 VIII, в 1607 г. — 26 X, а в 1682 г. — 14 IX. Первое обращение окончилось, следовательно, за 76 лет 82 дня, а второе — за 74 года 341 день, т. е. второе на один год 106 дней короче первого. Приписывая это сокращение времени оборота кометы вокруг Солнца влиянию планет, особенно Сатурна и Юпитера, Эпинус, однако, приводит и причину, указанную Эйлером: «. . .бесконечные небесные пространства чаятельно не совсем пусты, но наполнены некоторой чрезвычайно тонкою текущею материею. Сия будет чинить движению небесных тел некое сопротивление, а особливо сокращать периодические ее времена. Господин Эйлер действия сего сопротивления исследовал со свойственной ему глубокой смотреливостью и доказал, что сия перемена при планетах весьма мала быть должна, но при кометах для очень продолговатых их путей бывает весьма великою».

Точка зрения Эйлера, таким образом, находила признание у некоторых ученых того времени. В действительности, и влияние планет не всегда изменяет время обращения комет в одну сторону — оно может и удлиняться; Клеро объяснил движение комет одним только законом тяготения и предсказал следующее появление кометы Галлея в апреле 1759 г., что блестяще оправдалось: ошибка составила всего около месяца. «Впервые в истории человечества люди начали ожидать комету . . .и комета приходит, на восторг народа, во славу Ньютона и Клеро!». Работа Клеро была напечатана в Петербурге в 1752 г. (Н. И. Идельсон. Закон всемирного тяготения и теория движения луны. Сб. «Исаак Ньютон». Академия наук СССР, 1943, стр. 194—195).

[6] Tabula astronomicae solis et lunae, Opusc. var. arg. 1, 1746.

[7] Novae et correctae tabulae ad locae lunae computanda. Berolini aere Michaelis 1745.

[8] См. прим. 4 ко второму письму Эйлера Гейнзиусу (стр. 94 настоящего издания).

2

5 марта 1746 г., Берлин

Недавно г. Мопертюи приглашен г. графом Подевиль в нашу Академию в качестве президента, и я надеюсь, что его попечениями Академия вскоре будет поставлена на должную высоту. Господин де Кондамин опубликовал свое путешествие по р. Амазонке, а г. Бугер работает в настоящее время над печатанием произведенных ими определений географических пунктов.[1] Судя по письмам, сообщенным мне г. де Мопертюи, эти академики уже получили градус меридиана на экваторе равным 56 720 туазам,[2] что подтверждает с несомненностью сплюснутость Земли. Сравнение этого градуса с градусом, измеренным на полярном круге, дает диаметр экватора 3 282 487 туазов, а длину оси между полюсами Земли 3 266 295 туазов. Г. Лемоннье, являющийся в настоящее время пенсионером Парижской Академии, очень занят вопросом об аберрации неподвижных звезд, зависящей от нутации земной оси: для этой цели он установил на церкви Св. Сульпиция 100-футовый телескоп. Он нашел, что звезды попеременно то приближаются к полюсу, то удаляются от него на 37″ на протяжении 9 лет.[3]

Берлин, 5 марта 1746.

Mr de Maupertuis a été dernièrement introduit dans notre Académie en qualité de président, par Mr le Comte Podevils; et j'espère que par ses soins l'Académie sera bientôt mise sur un bon pied. Mr de Condamine vient de publier son voyage sur la rivière d'Amazones, et Mr Bouguer travaille actuellement à publier une description de leurs observations géographiques. Par des lettres, que Mr Maupertuis m'a communiquées, il paroit que vos Académiciens ont trouvé un degré de Méridien sous l'Equateur de 56 720 Toises, ce qui confirme indubitablement la figure applatie de la terre. La comparaison de ce degré avec celui, qui a été mesuré sous le cercle polaire, donne le diamètre de l'Equateur — 3 282 487 toises et la longueur de l'axe, qui passe par les poles de la terre, =3 266 295 toises. Mr le Monnier qui est à présent pensionnaire de l'Académie de Paris est fort occupé à découvrir l'aberration des étoiles fixes, qui vient de la nutation de l'axe de la terre: et pour cette fin il a fixé une lunette de 100 pieds à l'église de St. Sulpice. Il a trouvé que les étoiles s'approchent et s'éloignent alternativement de 37″ du pole dans l'espace de 9 ans.

Berlin, ce 5 mars 1746.

Печатается по выдержке, заверенной Делилем (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 35, л. 17).

[1] Подразумеваются наблюдения экспедиции по определению длины градуса меридиана под экватором в Перу, 1735—1744 гг.; в ней участвовали Ла Кондамин, Бугер, Годен и Уллоа.

[2] Туаз равен 1949 м.

[3] Наблюдения Лемонньe изданы Парижской Академией под названием «Institutions astronomiques ou Recueil des Observations» (Основы астрономии или сборник наблюдений) — Париж, 1746.

КАРСТЕНУ

Карстен Венцеслав Иоганн Густав (Karsten, Wenzeslaus Johannes Gustav, 1732—1787), с 1755 г. — приват-доцент по кафедре математики университета в Ростоке. С этого же года началась переписка Карстена с Эпинусом, его учителем, через которого он и познакомился с Эйлером. Вскоре Карстен стал профессором математики. С 1760 по 1778 г. он преподает во вновь основанном университете в Бютцове. В 1778 г. он переезжает в Галле, где и работает в университете до конца своих дней.

Начало переписки Карстена с Эйлером относится к 1758 г. Письма касаются в основном математических проблем, а также вопроса об издании книги Эйлера «Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum» (Теория движения плотных или твердых тел). Ниже публикуется одно письмо Эйлера, хранящееся в фундаментальной библиотеке Тартуского университета. Существует еще 21 письмо Эйлера Карстену, хранящееся в семейном архиве Карстена; 14 из них опубликовал Г. Карстен из Киля,[а] указав, что ответных писем В.-И.-Г. Карстена он, к сожалению, не имеет. Эти письма хранятся в Архиве АН СССР.[б]

13 мая 1762 г., Берлин

Высокоблагородный господин,
глубокоуважаемый господин профессор,

Беру на себя смелость покорнейше просить Вас о небольшом одолжении. В Ростоке Коппе издал «Описание Китая» Дюгальда.[1] Г. проф. Миллер, секретарь Российской императорской Академии в Петербурге, интересуется этим трудом, 1-ю и 3-ю части которого он просит прислать ему в Петербург с первым кораблем; расчет он прикажет произвести через контору гг. Кремпина и Эшенбаха; во всяком случае за уплату я ручаюсь. Поэтому прошу Вас благосклонно взять на себя это возло-

[а] G. K a r s t e n. Briefe von Leonhard Euler und von J.-A. Euler an Wenzeslaus J. G. Karsten (Письма Л. Эйлера и И.-А. Эйлера В.-И.-Г. Карстену) — Allgemeine Monatschrift für Wissenschaft und Literatur, 1854, стр. 325—349.

[б] ААН, ф. 136, оп. 2, № 4, лл. 78—357.

женное на меня поручение и послать в Росток распоряжение относительно этих двух книг.

Как обстоит дело с моей работой?[2] Достаточно ли уже велика подписка, чтобы можно было начать печатание? Я очень сомневаюсь в этом, отчасти потому, что подписчиков, вероятно, очень мало,[3] а кроме того, даже из этих немногих любителей большинство сохранили за собой свободу взять или не взять книгу, когда она будет готова. Таким образом, Вы можете сами решать, следует ли еще подождать увеличения подписки или нужно отослать рукопись обратно; в последнем случае я искренне сожалею о вызванных этим издержках издателя.[4]

Имею честь пребыть с глубоким уважением

Ваш покорный слуга

Л. Эйлер.

Берлин, 13 мая 1762.

Hochedelgebohrener Herr,
Hochgeehrtester Herr Professor,

Eur Hochedelgeb. nehme ich die Freyheit um eine kleine Gefälligkeit gantz ergebenst zu ersuchen. In Rostock hat Koppe des Du Halde Beschreibung von China verlegt. Von diesem Werk verlangt der H. Prof. Müller, Secretarius der Russischen Kaiserl. Academie in Petersburg, den I^{ten}und 3ten Theil, welchen er bittet mit dem ersten Schiffen an ihn nach Petersburg zu überschicken und wird die Bezahlung da nebst durch H. Krempin und Eschenbachs Comtoir bezahlen lassen, in allem Fall stehe ich für die Bezahlung. Dahero ersuche Eur Hochedelgebh. gehorsamst diese mir aufgetragene Commission gütigst zu übernehmen, und in Rostock die Ordnung diesen 2 Bücher zu besorgen zu lassen.

Wie steht es mit meinem Werk? Sind noch nicht so viel Subscriptionen eingelaufen, daß der Druck angefangen werden kann? Ich zweifle sehr darum, da theils die Subscription scheint in wenig Hände gekommen, und von den wenig Liebhabern die meisten sich die Freyheit vorbehalten wollen das Werk, wann es fertig sein wird, zu nehmen oder nicht. Eur. Hochedelgebh. überlassen allso selbst zu beurtheilen, ob man noch länger auf mehreren Subscriptionen warten oder wird das M[anu]s[cri]pt zurück schicken sein, in welchen letzten Fall ich die von dem H. Verleger darauf gewendeten Unkosten recht herzlich bedauere.

Ich habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu sein

Eur Hochedelgebh. gehorsamster Diener

L. Euler.

Berlin, d. 13^{t} May 1762.

Печатается по собственноручному черновику (Рукописное собрание Фундаментальной библиотеки Тартуского университета, Morgensterni Ep. Phil., т. II, № 62).

Помета: «Г. Карстену, профессору математики в Бютцове».

[1] Речь идет о труде французского ученого, иезуита Дюгальда Жана Батиста (Du Halde, Jean Baptiste, 1674—1743). (См.: Briefwechsel, т. I, Берлин, 1959, стр. 186).

[2] Имеется в виду работа Л. Эйлера: Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis stabilita et ad omnes motus, qui in hujusmodi corpora cadere possunt, accomodata (Теория движения твердых тел, изложенная от самых основ нашего познания и приспособленная ко всем движениям, свойственным этого рода телам) — Изд. А.-Ф. Рёзе, Росток и Грейфсвальд, 1765. Подписка на это издание продолжалась несколько лет. В.-И.-Г. Карстен, наблюдавший за проведением подписки, в написанном им к этой книге предисловии отмечает, что труд был закончен Эйлером еще в 1760 г. и рукопись прислана Карстену в начале 1761 г.: «Opus Euleri nostri jam A[nno] 1760 consummatum et a cel. Auctore initio A[nni] 1761 ad me transmissum erat. . .».

В письме Карстену от 25 декабря 1762 г. Эйлер сообщает, что издатель Рёзе (A.-F. Röse) решил печатать его труд, хотя имеется только 30 подписчиков, но он боится, что издатель понесет убыток (там же, стр. 339).

[3] Это сомнение впервые было высказано Эйлером в письме Карстену от 19 января 1762 г., где он пишет, что количество подписчиков установлено в 100 человек, но что едва ли найдется столько желающих подписаться: «. . . в Германии не найдется и половины». В этом же письме Эйлер сообщает о том, что объявление о подписке он послал в Россию, но еще не получил ответа (Allgemeine Monatschrift für Wissenschaft und Literatur, 1854, стр. 337—338).

[4] Вопрос об убытках, которые может понести издатель, все время тревожил Эйлера. В письме Карстену от 25 декабря 1762 г. он пишет, что печатание будет стоить очень дорого, поэтому он не может брать от Рёзе денег, но хотел бы получить от него 20 экземпляров, чтобы подарить людям, не имеющим возможности их купить (там же, стр. 339—340).

В письме к Карстену от 13 июля 1765 г. Эйлер благодарит Карстена и Рёзе за заботы по изданию книги (там же, стр. 340). Этот труд А.-Ф. Рёзе переиздал в Грейфсвальде в 1790 г.

КНУТЦЕНУ

Кнутцен, Мартин (Knutzen, Martin, 1713—1751) — профессор логики и метафизики в Кенигсберге. Переписка его с Л. Эйлером началась 2 сентября 1741 г. и завершилась письмом Эйлера от 7 января 1751. В настоящее время известны 74 письма Кнутцена Эйлеру, из которых 72 хранятся в ААН СССР и 2 — в Фундаментальной библиотеке Тартуского университета.

1

16 октября 1741 г., Берлин

Я помню, что несколько лет тому назад я видел в Петербурге один присланный Тобою специмен о магнетизме;[1] но, поскольку я тогда был занят другими делами, а изложение Твое показалось мне недостаточно ясным, я не смог вполне понять Твою мысль и необыкновенные явления, объясняемые теорией. Тем не менее это пошло на пользу моему славнейшему коллеге, профессору Крафту, который сообщил Тебе ответ Академии.[2] А так как в ближайшее время королевская Парижская Академия присудит премию в 2500 ливров тому, кто с наибольшим успехом изложит теорию магнетизма,[3] я не сомневаюсь, что Ты также пошлешь в Лютецию [4] свои размышления; при этом не могу скрыть от Тебя, что и я, насколько это в моих силах, потрудился над исследованием этого предмета;[5] но попытка дала малые результаты, ибо чем больше я размышлял, тем менее оказывался способным анализировать эти необыкновенные явления. Впрочем, я до сих пор не мог ничего узнать о наклонении и склонении магнитной стрелки на экваторе, наблюдавшихся недавно французскими астрономами,[6] так как знаменитый Мопертюи еще до моего приезда [7] возвратился во Францию.[8] Поправка к показаниям барометров, о которой Ты упоминаешь,[9] славнейший муж, без всякого исключения окажется еще большей, если только само стекло не будет расширяться или сжиматься под действием теплоты или холода; это явление барометрам не свойственно, в термометрах же часто имеет место. Поэтому я опасаюсь, что своей поправкой Ты внесешь в показания барометров новое отклонение, которого в них теперь нет. Существенное неудобство барометров состоит в том, что ртуть не всегда сохраняет один и тот же удельный вес, под действием тепла становится легче, а под действием холода тяжелее, вследствие чего ртутный столб, измеряющий упругость воздуха, становится больше или меньше. Отсюда следует, что неудобство можно было бы исключить, если бы было известно, при каком градусе тепла, на какую часть своего объема ртуть сжимается или расширяется. Вообще же термометры, изготовленные нашим славнейшим Делилем,[10] всегда показывают правильно, ибо весь объем ртути, содержащийся в термометре и заполняющий его при кипении воды, делится на 10 000 частей, соответствующих такому же количеству градусов на трубке. Следовательно, таким образом, термометр при любой погоде аккуратно показывает, на какую часть сжимается ртуть, т. е. если n будет число градусов, которое показывает этот термометр в данное время, то следует заключить, что объем ртути, который она занимает в кипящей воде, сжимается на часть $\frac{n}{10000}$. Отсюда удельный вес ртути при этой температуре относится к тому же самому удельному весу в кипящей воде как $\frac{10000}{10000-n}$ к 1. Следовательно, если в это время наблюдаемая высота ртутного столба в барометре будет равна a, то $\frac{10000}{10000-n}\cdot a$ даст высоту барометра, которую достигнет ртуть, если будет иметь тот же самый удельный вес, какой она имеет в кипящей воде. Таким образом, всегда будет можно измерить упругость воздуха с помощью ртутного столба с таким же удельным весом, который он имеет в кипящей воде. Правда, и здесь наблюдается ошибка, вызванная расширением и сжатием стекла, так как емкость шарика и трубки в термометре при холодной погоде становится меньше, чем она была в состоянии кипящей воды; при этом ртуть в трубке будет доведена до большей высоты, если это нужно, и потому число n станет меньше, и таким способом будет найдена меньшая мера упругости воздуха, которая тем более отклонится от истинной, чем холоднее погода. Отсюда Ты легко можешь понять, в каком направлении нужно работать, чтобы мы всегда могли указать правильную меру упругости воздуха.

То, что Ты замечаешь относительно постоянных разностей, которым соответствует ряд степеней натуральных чисел, во всяком случае вполне справедливо, но я не могу с точностью указать, в какой именно книге я впервые сказал об этом. Впрочем, я уже давно обратил на это внимание, хотя и не помню, что именно я тогда нашел. Ибо как другие ученые, так и я часто многими способами доказывали, что если в каком-нибудь ряде общий член или тот, который от начала занимает место x, будет равен X и в этом выражении X величина x будет измерения n. т. е. наибольшая степень самого x будет x^n, тогда разности порядка n будут постоянными, и притом эти постоянные разности будут равны $\frac{d^nX}{dx^n}$. Так, в ряде квадратов, где $X=x^2$, вторые разности постоянны и равны $\frac{ddX^2}{dx^2}=1\cdot 2$; для любых степеней, если $X=x^n$, следует взять дифференциал порядка n самого x^n, который, будучи разделен на dx^n, даст следующую величину постоянной разности: $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1$. Точно так же для ряда треугольных чисел, в котором $X=\frac{(x+1)x}{2}$[a], вторые разности постоянны и равны $\frac{ddX}{dx^2}$; но $dX=xdx+\frac{dx}{2}$ и $ddX=dx^2$ (*N. B.* При последующих дифференцированиях dx принимается за постоянную), откуда будет $\frac{ddX}{dx^2}=1$; так что вторые разности все равны 1. Вообще, если общий член $X=Ax^n+bx^{n-1}+Cx^{n-2}+Dx^{n-3}$ и т. д., то разности порядка n будут постоянными и равными $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots nA$.

Memini me ante aliquod annos Petropoli videre specimen aliquod a Te missum de magnete; sed quia tum temporis aliis distrahebar negotiis, atque explicatio Tua non satis evoluta videbatur, mentem Tuam et quemadmodum praecipua phaenomena ex Theoria derivares, non satis

[a] *В черновике* xxxx.

distincte perspicere potui; hocquidem Celeb [errimo] Collegae meo Professori Krafft usu venisse arbitror, qui ad Te responsum Academiae exoravit. Cum vero proximo anno Academia Regia Parisina praemium 2500 libr. illi sit adjudicatura, qui felicissimo successu theoriam Magnetis exposuerit, non dubito, quin Meditationes Tuas jam Lutetiam miseris, neque autem te celare possum, me quoque pro viribus hoc argumentum investigasse; at vero tam irrito conatu, ut quo magis essem meditatus, eo minus me praecipuis saltem phaenomenis satis facturum perspexerim. Ceterum de inclinatione et declinatione acus magneticae sub aequatore ab Astronomis Gallis nuper observatis nihil adhuc scire potui: illustris enim Maupertuis jam ante adventum meum in Galliam est reversurus.

Emendatio Barometrorum, cujus mentionem facis, Vir Celeberrime, omni exceptione major videretur, si modo ipsum vitrum per calorem ac frigus non expanderetur et constringeretur; qui effectus Barometris non obest, in termo[me]tris vero maximi momenti reperitur: quare vereor ne per correctionem Tuam in barometra novam anomaliam introducas, a qua aliquin sunt libera. Praecipuum enim barometrorum incommodum in hoc versatur, quod Mercurius non perpetuo eandem gravitatem specificam retineat, sed calore levior, frigore autem gravior evadat, ex quo Columna mercurialis elasticitatem aeris metiens justo vel major vel minor existit. Huic ergo incommodo remedium afferetur si quovis caloris gradu innotesceret, quanta voluminis sui parte Mercurius sese contrahat vel expandat. Hoc autem Thermometra a Celeberrimo De Lislio nostro elaborata perpetuo dilucide ostendunt: totum enim Mercurii in Thermometro contenti volumen, quod in aqua ebulliente occupat, in 10000 partes dividit, quae singulae in tubo totidem gradus constituunt. Hujus modi ergo thermometrum quavis tempestate accurate ostendit, quanta sui parte Mercurius sese contraxerit, scilicet si n sit numerus graduum, quem istud thermometrum dato tempore prae se fert, concludendum est volumen Mercurii, quod in aqua ebulliente occupaverat, se se contraxisse sui parte $\frac{n}{10000}$. Erit ergo gravitas specifica Mercurii hoc caloris gradu ad ejusdem gravitatem specificam in aqua ebulliente ut $\frac{10000}{10000-n}$ ad 1.

Quod si ergo hoc tempore altitudo Columnae mercurialis in barometro observata fuerit $= a$, tum $\frac{10\,000}{10\,000 - n} \cdot a$ dabit altitudinem barometri, ad quam Mercurius haereret, si eandem haberet gravitatem specificam, quam in aqua ebulliente occupaverat. Hoc quoque modo perpetuo elasticitatem aeris metiri licebit per Columnam mercurialem, eadem gravitate specifica quam scilicet in aqua ebulliente obtinebit, praeditam. Verum tamen et hic sese immiscet error ex vitri expansione et contractione oriundum, cum enim capacitas bullae atque etiam tubi in thermometro tempestate frigida minor fiat, quam erat in statu aquae bullientis, Mercurius in thermometro ad majorem altitudinem, quam par est, erit constitutus, ideoque numerus n justo erit minor, atque hac methodo justo minor mensura elasticitatis aeris proveniet, quae ex eo magis veritate decedet, quo frigidior fuerit tempestas. Ex his igitur intelliges, in quo adhuc elaborandum sit, ut perpetuo justam elateris aeris mensuram indicare valeamus.

Quae de differentiis constantibus, ad quas tandem series potestatum numerorum naturalium revocantur, annotasti, sunt utique veritati maxime consentanea, neque positive indicare possum, in quonam libro eadem primum animadverterim. Erant autem mihi jam pridem notissima, nec tamen a me inventa recordor. Namque tam ab aliis, quam a me saepius ac pluribus modis est demonstratum, si seriei cujuspiam terminus generalis, seu is qui a primo numerando x locis distat, fuerit $= X$, atque in hac expressione X quantitas x obtineat n dimensiones seu maxima ipsius x potestas sit x^n tum differentias ordinis n fore constantes, atque adeo singulas has differentias constantes fore $= \frac{d^n X}{dx^n}$. Sic in serie quadratorum, ubi $X = x^2$ differentiae secundae sunt constantes, et aequales $\frac{ddX^2}{dx^2} = 1 \cdot 2$ et pro quibus vis potestatibus, si $X = x^n$ capi debet differentiale gradus n ipsius x^n, quod divisum per dx^n dabit $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1$ pro differentia constante. Sic etiam seriei numerorum trigonalium, in qua est $X = \frac{xxxx}{2}$[a] differentiae secundae erunt constantes, et

[a] *Следует* $(x+1)x$.

$\frac{ddX}{dx^2}$; at est $dX = xdx + \frac{dx}{2}$, et $ddX = dx^2$ (*N.B.* In differentiationibus ulterioribus dx pro constante habetur) unde fit $\frac{ddX}{dx^2} = 1$; ita ut differentiae secundae sint omnes $= 1$. Generaliter vero si fuerit terminus generalis $X = Ax^n + bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + \text{etc.}$ erunt differentiae ordinis n constantes atque aequales $1.2.3.4..,nA$.

Печатается по собственноручному черновику (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 2, лл. 60—61). Обращения и подписи нет.

Помета: «Письмо к славнейшему проф. Кнутцену 16 октября 1741 г. от Эйлера».

[1] Речь идет о трактате Кнутцена: Specimen novae s[eu] emendatioris Theoriae magneticae, quo vim attractricis aliarumque magnetis proprietatum rationes physico-mechanicae explicantur (Изложение новой или исправленной теории магнетизма, с помощью которой объясняется физико-механическими причинами сила притяжения и другие свойства магнита) — ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 1, лл. 93—97.

Помета: «Представлено 8 января 1739 г.».

Трактат был прислан вместе с письмом президенту и членам Петербургской Академии наук (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 1, лл. 82—83 об. — копия и 84—85 — оригинал).

Письмо было прочитано в Конференции Х. Гольдбахом и передано на отзыв Л. Эйлеру (Протоколы, т. I, стр. 526). 22 января 1739 г. Х. Гольдбах представил и прочитал в Конференции ответное письмо Кнутцену и отзыв Л. Эйлера, озаглавленный: Judicium de theoria magnetis, a Clar[issimo] M. Kuntzio nuper cum Academia communicata (Отзыв о теории магнита, недавно сообщенный славнейшим М. Кнутценом Академии) — Протоколы, т. I, стр. 530.

[2] Отзыв Г.-В. Крафта представлен Х. Гольдбахом в Конференцию 7 мая 1739 г. и озаглавлен: Dubia contra Prof. Kuntzii Examen virium magneticarum (Сомнения, вызванные исследованием магнетических сил, выполненным проф. Кнутценом) — Протоколы, т. I, стр. 549. 24 мая трактат Кнутцена был передан Х. Гольдбахом в Архив Академии (Протоколы, т. I, стр. 551).

[3] Тема о магнетизме была предложена Парижской Академией наук на премию 1743 г.

[4] Лютеция — старинное название Парижа.

[5] За работы о магнетизме Эйлер получил премии Парижской академии: в 1743 г. — полную премию за статью De observatione Inclinationis magneticae dissertatio (Рассуждение о наблюдении магнитного наклонения) — Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie Royale des sciènces depuis leur fondation jusqu'à présent, т, V, Париж, 1752, № IX, стр. 63—96. В этом же году — $1/3$ премии за статью: Dissertatio de magnete (Рассуждение о магните) — там же, № X, стр. 1—47.

[6] В письме от 2 сентября 1741 г. Кнутцен просил Эйлера узнать у Мопертюи о наблюдениях Перуанской экспедиции относительно отклонений магнитной стрелки (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1, л. 62). См. письмо к Делилю, стр. 120 настоящего издания.

7 Л. Эйлер приехал в Берлин в июле 1741 г.

8 Мопертюи, недовольный жалованием, которое назначил ему прусский король, 31 мая 1741 г. возвратился во Францию. См.: P. Brunet. Maupertuis. Etude biographique (Мопертюи. Биографический этюд) — Париж, 1929, стр. 94.

9 В письме от 2 сентября 1741 г. Кнутцен пишет, что статья Бильфингера: Dissertatio de Thermometris et eorum emendatione (Рассуждение о термометрах и их улучшении) — Commentarii Academiae Sc. Petropolitanae, III, 1732, стр. 196—213 — навела его на мысль о возможности внесения поправок в показания барометров (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1, л. 61 об.).

10 Здесь говорится о предложенном Ж.-Н. Делилем в 1731 г. ртутном термометре, исходной точкой которого была точка кипения воды. От нее в сторону понижения температуры шла шкала; один градус был равен 1/10000 объема ртути, заключавшейся в термометре при температуре кипения воды. В тающем льде термометр показывал 150°.

2

2 февраля 1751 г., Берлин

Славнейшему и знаменитейшему мужу
Мартину Кнутцену
шлет нижайший привет Леонард Эйлер.

Дружба Твоя ко мне никогда не прекращалась: приношу Тебе величайшую благодарность за сердечное поздравление, которое Ты прислал мне в начале этого года. Да совершит всемогущий бог, чтобы новый год щедро одарил Тебя всем, что бы ни относилось к Твоему благосостоянию как в этой, так и в будущей жизни.

С тех пор, как я получил Твое письмо, я еще не видел славнейшего Рейнбека. Расспросив о нем, я узнал, что он еще здесь, и купил для Тебя книги; я не сомневаюсь, что он уже раньше написал Тебе и что он удовлетворит Тебя во всем, чего Ты ждешь от него. Светлейший граф Шметтау теперь тяжело болен, и это, вероятно, является причиной того, что в течение долгого времени Ты еще не получил ответа на письмо. Что касается того, дорогой друг, что Ты уверен теперь в получении должности,[1] которой Твои недоброжелатели хотели лишить Тебя, я узнал с большой радостью [о благополучном разрешении этого вопроса] и от души поздравляю Тебя с этим. Прощай, славнейший муж, и продолжай оставаться ко мне благосклонным.

Берлин, 2 февраля 1751.

Viro Clarissimo atque Excellentissimo Martino Knutzen S[alutem] p[lurimam] d[icit] Leonh. Euler.

Cum mihi amicitia Tua nihil caruit: maximas Tibi habeo gratias pro sincera gratulatione, qua me sub hujus anni initium Divinae Providentiae commendare voluisti. Faxit Deus O. M. ut ista temporis progressio Tibi omnia quaecunque ad salutem cum in hac tum futura vita pertinent, largiter afferat.

Cl[arissimum] Reinbeckium ex eo tempore, quo litteras Tuas accepi, non vidi. Percunctatione autem facta certior sum factus, ipsum adhuc hic degere, librosque pro Te coemisse, unde non dubito, quin ad Te jam pridem scripserit, Tibique in omnibus, quae expectaturus satis fecit. Illustr[issimus] Comes a Schmettau graviter hoc tempore aegrotavit, quod fortasse in causa est, si ad litteras illas Tuas magni momenti nondum responsum tuleris. Te, Vir Amicissime, in expectatione muneris, qua Te malevoli homines privare sunt conati, esse confirmatum maximo gaudio cognovi de quo Tibi ex animo gratulor. Vale, Vir excelentissime, mihique favere perge.

Dabam Berolini, d. 2. Febr. 1751.

Печатается по собственноручному черновику (Рукописное собрание Фундаментальной библиотеки Тартуского университета Morgensterni Ep. Phil., т. 11, № 59).

[1] Речь идет о назначении М. Кнутцена директором Королевской библиотеки. В письме от 7 января 1751 г. Кнутцен пишет, что король отклонил прошение Гана (Hahn) о предоставлении ему этого места и обещал назначить директором библиотеки Кнутцена.

КЮНУ

Кюн, Генрих (Kühn, Heinrich, 1690—1769) — профессор математики в Данцигской гимназии, один из основателей Данцигского ученого общества. В 1735 г. был избран иностранным членом Петербургской Академии наук. Основные работы, благодаря которым он получил известность, относятся к области физики, физической географии и высшей математики.

В настоящее время известно 21 письмо Г. Кюна Л. Эйлеру (с 22 X 1737 по 9 III 1754), из которых 19 хранятся в ААН СССР, а 2 — в Фундаментальной библиотеке Тартуского университета. Кроме того, из записей в «Протоколах» Конференции и из текстов писем видно, что имелось еще большое количество их писем друг другу, местонахождение которых до сих пор неизвестно. В 1735—1742 гг. Эйлер вел переписку с Г. Кюном через данцигского бургомистра К.-Л.-Г. Элера (см. стр. 282 и след. настоящего издания). Наиболее значительные научные проблемы, затронутые в переписке Л. Эйлера с Г. Кюном, освещены в книге: В. Н. Молодший. Основы учения о числе в XVIII веке. М., 1953, стр. 84—164, 173. См. также: Briefwechsel, т. II, стр. 15—17.

[Февраль 1742 г., Берлин] [1]

Славнейшему мужу Генриху Кюну
шлет нижайший привет Леонард Эйлер.

Поскольку в отношении проблем, разрешение которых основывается на опыте, мы не должны чрезмерно полагаться на одно только рассуждение, Ты поймешь, что я не мог с легкостью согласиться с допущенным Тобою величайшим несоответствием в исследовании поверхности Земли и моря, даже если бы мне можно было совершенно отбросить противоречивые физические рассуждения.[2] Ибо если тщательно проведенные наблюдения обнаруживают столько неровностей на поверхности Земли, было бы опрометчиво не принимать эти данные опыта во внимание. Следовательно, ради рассуждений, приведенных Тобою, славнейший муж, я легко могу допустить бо́льшую деформацию земной поверхности, чем кто-либо мог предположить до настоящего времени;

однако то самое столь чрезмерное отклонение от уровня, которое Ты установил в России и особенно в океане, представляется мне едва ли возможным, так как оно еще недостаточно доказано опытным путем; и в этом вопросе я воздержусь от высказывания моего суждения до тех пор, пока тщательнейшим образом не будут произведены наблюдения над уровнем рек. Ибо, когда Ты хочешь сделать какие-либо выводы на основании градусных измерений, мне это представляется порочным, поскольку эти измерения не согласуются даже с гипотезой о схождении направлений [силы] притяжения, о чем я скажу после, и вообще из них ничего не вытекает. Впрочем, как Ты мог убедиться из измерений, произведенных Пикаром и Кассини,[3] во Франции со всей определенностью установлено, что градус меридиана в северной Франции меньше, чем в южной, хотя, однако, славнейший Мопертюи, повторив наблюдения Пикара, нашел тот же самый градус бо́льшим, так что, согласно Твоей теории, северная Франция должна бы быть более возвышенной, чем южная и даже средняя.[4]

Далее Ты приводишь рассуждения, славнейший муж, согласно которым все направления силы притяжения должны сходиться в одной точке и в центре Земли; причину к принятию такой гипотезы Ты ищешь как в простоте, к которой Природа постоянно стремится, так и в законе достаточного основания: первое к этому вопросу совершенно не имеет отношения, другое же, думается мне, могло быть здесь применено по ошибке. Ибо мы наблюдаем, что Природа крайне редко следует простоте и правильности геометрических фигур; так, например, небесные тела движутся неравномерно и не по кругу, да и само Твое рассуждение относительно столь неправильной фигуры Земли сильно противоречит этому принципу. Вследствие этого я предпочел бы скорее усмотреть какую-нибудь другую закономерность в схождении направлений силы притяжения, нежели ту, которая в отношении геометрии представляется самой простой. Что касается принципа достаточного основания, с помощью которого совсем не раскрывается причина, почему направления силы притяжения соединяются скорее в одном месте, чем в другом, то этот принцип, если он в исследовании Природы не применяется с величайшей осторожностью, может привести к ужасным ошибкам. Итак, мы видим, что это все до такой степени противоречиво, что никоим образом не может быть установлена какая-либо закономерность; если и остается какое-нибудь значение этого принципа, она только тогда может иметь место, если Земля совсем перестанет двигаться и будет пребывать в совершенном покое. Но поскольку Земля имеет не только годовое движение, но также и суточное, вокруг собственной оси, то отсюда возникает очень сложный вопрос, почему это схождение [направлений притяжения] в различных местах оказывается различным. Ибо если без суточного движения отдельные направления силы притяжения сходятся в одной точке, то при вращательном движении эта закономерность должна была бы сильно нарушаться возникающей при этом центробежной силой.

Если учитывать все это, то вопрос о фигуре Земли следует рассматривать двояким образом; прежде всего должна быть определена фигура, которую будет иметь Земля, если все возвышения выше уровня будут убраны, а все углубления ниже уровня будут наполнены; или, что равносильно этому, если все твердые части размягчатся; эту фигуру я ради ясности называю первоначальной; Ты, славнейший муж, считаешь ее сферической, я предпочитаю рассматривать ее как неопределенную. Эту фигуру мы легко сможем определить, если представим себе такую внешнюю поверхность Земли, к которой направления силы тяжести повсюду будут перпендикулярными. Однако, какова бы ни была эта первоначальная фигура Земли, необходимо исследовать (а это уже вторая часть вопроса), насколько истинная фигура Земли, о которой идет речь, отличается от первоначальной, т. е. насколько отдельные области возвышаются над первоначальной фигурой или насколько они ниже ее; тогда Ты легко убедишься, что Твой метод весьма пригоден для этого последнего исследования, и пригоден настолько, что с помощью одного этого метода может быть разрешен весь вопрос. Ибо когда Ты с помощью течения рек определяешь, насколько та или иная область более или менее поднята над уровнем, если эта операция будет проделана на всем земном шаре, то мы узнаем с достоверностью, насколько истинная фигура Земли отличается от первоначальной, первоначальная же фигура Земли по-прежнему будет оставаться неизвестной. Впрочем, как мне представляется, для исследования ее существует три способа, из которых первый основывается на законах механики; следуя ему, Гюйгенс и Ньютон наделили Землю сферической фигурой, сплюснутой у полюсов; их аргументация, по моему мнению, столь убедительна, что я не преминул бы с ней согласиться, даже зная, что она не приводит к истинной величине отношения между осью Земли и диаметром экватора; об этом предмете славнейший Клеро недавно написал блестящий трактат,[5] который я, однако, еще не видел. Второй способ состоит в измерении градусов меридиана; им пользовался Кассини, и недавно к нему присоединились французские математики; этот способ был бы более точным, если бы измерения производились на одном и том же уровне, иначе говоря, на первоначальной фигуре, но поскольку различные области весьма отклоняются от первоначальной фигуры, то этот способ мало пригоден для разрешения вопроса. Третий же способ, думается, наиболее пригоден для обеих частей исследования и состоит в точнейшем наблюдении параллакса Луны; этот способ требует, однако, сложной подготовительной работы и не дает быстрого решения вопроса.

Мое рассуждение о всякого рода машинах, как простых, так и сложных, и об устройстве их таким образом, чтобы достигнуть наилучшего результата при заданных силах и времени, Ты скоро увидишь в петербургских «Комментариях»;[6] если не ошибаюсь, оно уже напечатано в Париже среди сочинений, получивших в прошлом году премию королевской Академии па вопрос о наиболее удобной машине для поднимания якоря;[7] среди этих сочинений мое отличается надписью: «В землю вонзался, прижатый. . .».[8]

Отсюда Ты можешь узнать правила для установления такого состояния машин, когда груз уравновешивается действующей силой, и правила для установления самого движения, сообщающего скорость грузу, а это и есть самое главное. Ибо всегда может так случиться, что с помощью меньшей силы, если она применяется наиболее рационально, в одно и то же время можно достигнуть большего, чем с помощью большей силы, приложенной менее удачно. Но было бы слишком долго излагать все детали этой теории, поэтому я заканчиваю, всячески стремясь к Твоей постоянной дружбе.

Viro Celeberrimo Henrico Kuhn
S[alutem] p[lurimam] d[icit] Leonhardus Euler.

Quem admodum in rebus, quae ab experientia pendent, soli rationi nimium tribuere debemus; ita me non difficilem non invenis, ce[pisti] in agnoscenda superficiei terrae marisque summa inaequalitate; etiamsi rationes physicas contra pugnantes nondum penitus evertere valeam. Si enim observationes maxima cura institutas tantam in superficie terrae inaequalitatem ostendant, temerarium esset experientiae obluctari. Ob rationes igitur a Te, Vir Celeb[errime], allegatas facile maiorem difformitatem terraenae superficiei concedo, quam quisquam adhuc est suspicatus; illam ipsam vero tam enormem a libella aberrationem, quam cum in Russia, tum praecipue in Oceano statuis, quia per experimenta nondum satis est demonstrata, vix magis quam possibilem existimo; atq[ue] in hoc negotio, quoad diligentissimae observationes circa libramen fluviorum fuerint institutae, iudicium meum suspendo. Ex ipsis enim graduum dimensionibus in hac re quicquam decidere velle, mihi quidem petitio principii videtur: cum inde nisi hypothesis circa concurrentiam directionum gravitatis fingatur, de qua post sententiam meam dicam, nihil omnino sequatur. Ceterum dimensionibus a Picardo et Cassino in Gallia institutis ita firmiter adhaerere videris, ut gradum meridiani in Gallia boreali minorem assumas quam in meridionali, cum tamen Celeb[errimus] Maupertuis repetitis Picardii operationibus eundem gradum majorem invenerit, ita ut secundum tua principia Gallia borealis magis elevata esse deberet, quam australis atque etiam media.

Rationes deinceps affers, Vir Celeb[errime], propter quas directiones gravitatis omnes in unico puncto seu centro terrae concurrere censeri debeant, hujusque hypothesis momentum cum in simplicitate, quam natura constanter affectat, tum in principio rationis sufficientis quaeris; quorum prius in hoc negotio prorsus non, hoc vero perperam mihi quidem adhiberi posse videtur. Videmus enim naturam rarissime figurarum geometricarum simplicitatem ac regularitatem sequi, sicque corpora coelestia nec motu uniformi neque in circulis moventur. Atque tua ipsa sententia circa tam inaequabilem terrae figuram huic principio maxime refragatur. Quam ob rationem equidem mallem quamlibet aliam legem in convergentia directionum gravitatis statuere, quam eam, quae in geometria videatur simplicissima. Quod ad principium rationis sufficientis attinet, quo nulla pateat ratio cur directiones gravitatis in uno loco magis convergant, quam in alio, nisi id in scrutatione naturae maxima circumspectione adhibeatur, in horrendos errores se duceret. Videmus enim omnia tantopere inter se discrepare, ut nusquam ne convergentia quidem aequalis statui queat, sin autem huic principio ulla vis relinqueretur, ea tum demum locum obtinere posset, si terra omni motu privaretur, et in perfecta quiete versaretur. At cum terra non solum motu annuo, sed etiam diurno circa proprium axem revolvatur, gravissima ratio hinc nascitur cur illa convergentia in diversis locis sit adversa. Si enim ante motum diurnum singulae gravitatis directiones ad unicum punctum retendissent per motum vertiginis hincque natam vim centrifigam ista regularitas vehementer perturbari debuisset.

His perpensis quaestio de figura terrae bipartita erit constituenda: primo scilicet definiri debet figura, quam terra habitura esset, si omnes elevationes supra libellam tollerentur, omnesque cavitates infra eam replerentur; vel quod eodem redit, si partes solidae o[mn]es colliquescerent hanc figuram distinctionis gratia vocabo primitivam; quam Tu, Vir Celeb[errime], sphaericam statuis, ego vero tanquam incognitam spectare malo. Istam figuram facillime concipere poterimus, si superficiem terrae circumscriptam imaginemur, ad quam directiones gravitatis ubique fuerint normales. Quaecunque autem sit haec terrae figura primitiva, investigandum est, quae est quaestionis altera pars, quantum vera terrae figura, quam actu habet, a primitiva discrepet: hoc est quantum sungulae regiones vel supra figuram primitivam emineant, vel infra tam sint depressae; tam facile perspicies methodum tuam tantum ad hanc posteriorem disquisitionem pertinere; et ita quidem eo pertinet, ut sola totum negotium absolvat. Dum enim ope libraminis fluviorum determinas, quantum alia regio supra libellam magis minusve sit elevata, si haec operatio ubique terrarum institueretur; certo congnosceremus, quantum vera terrae figura a primitiva discrepasseret; figura autem primitiva nihilo minus maneret incognita. Ad hanc investigandam tres quantum mihi quidem constat, patent viae, quarum prima ex legibus mechanicis est petita, quam Hugenius et Newtonus secuti terrae figuram sphaeruiclicam ad polos compressam tribuerunt, quae argumenta tanti apud me sunt momenti, ut ei assentiri non dubitem, etsi veram rationem inter terrae axem et diametrum aequatoris definiri non posse agnosco; hac de re Celeb[errimus] Clairaut nuperrime excellentem tractatum scripsit, quem autem nondum vidi. Secunda via in dimensione graduum meridiani consistit, quam Cassinus et nuper Mathematici galli sunt ingressi, quae plus haberet certitudinis, si dimensiones in eadem libella seu in figura primitiva institueretur: nunc autem si regiones diversae tantopere a figura primitiva abhorrent, tunc vix ullum commodum ad quaestionem decidendum nascitur. Tertia via videtur quidem pro utraque quaestionis parte maxime accomodata et constat in accuratissima observatione parallaxis lunae; quae autem complurimas praeparationes requirat, tam cito decisionem non largietur.

Theoriam meam diiudicandi omnis generis machinas tam simplices quam compositas, easque ita disponendi, ut a datis viribus dato tempore promtissimus effectus producatur, videbis cum aliquando in commentario Petropolitano tum vero ni fallor jam est Parisiis impressa, inter dissertationes quae anno elapso apud Academiam Regiam praemium sunt nactae, cum quaestio esset de aptissima machina ad Ancoras attolendas, inter quas dissertationes mea distinguitur inscriptione: «Pressa momordit humum, superas» etc. Hinc perspicies regulas ad huc receptas tantum ad eum machinarum statum, quo onus cum vi sollicitante in aequilibrio consistit pertinere, ac perperam ad ipsum motum onerisque promovendi celeritatem, in qua cardo rei vertitur, adhiberi. Fieri enim utique potest, ut a minori vi si maxime convenienter applicetur eodem tempore plus praestetur, quam a majori minus congrue applicata. Sed nimis prolixum foret omnia momenta huius theoriae commemorare, quam ob rem finio, Tuam sempiternam amicitiam mihi summopere expetens. Vale.

Печатается по собственноручному черновику (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 2, лл. 161—163 об.).

[1] Это письмо датируется по содержанию, главным образом на основании упоминания Л. Эйлера о присуждении ему «в прошлом

году» премии Парижской Академии. Основанием для уточнения даты служат также некоторые письма Г. Кюна и К.-Л.-Г. Элера Л. Эйлеру. Так, в письме от 3 III 1742 г. Г. Кюн отвечает на замечания Л. Эйлера к его рассуждениям о фигуре Земли, а К.-Л.-Г. Элер также пишет об отзыве Эйлера относительно этой гипотезы Кюна (terminus ante quem).

[2] Письмо является отзывом на трактат «Meditations sur l'origine des fontaines» (Размышления о происхождении источников), присланный Кюном в Петербургскую Академию вместе с письмом Г.-В. Крафту от 28 октября 1741 г. Это письмо, трактат и другие материалы, присланные Кюном, были представлены в Конференции 20 ноября 1741 г. (Протоколы, т. I, стр. 707). Трактат Кюна, представленный им также и в Бордо, в 1741 г. получил премию Научного общества в Бордо и там же был опубликован.

[3] Здесь говорится о градусных измерениях Пикара и Кассини во Франции в 1741 г.

[4] См. прим. 4 к 1-му письму Эйлера Мопертюи (стр. 174 настоящего издания).

[5] Речь идет о работе Клеро: Théorie de la Figure de la terre (Теория фигуры Земли) — Париж, 1743.

[6] Имеется в виду работа: De machinarum tam simplicium quam compositarum usu maxime lucroso (О наиболее выгодном использовании машин как простых, так и сложных) — Commentarii Academiae Sc. Petropolitanae, т. X, стр. 67—94.

[7] Трактат Эйлера получил $1/4$ часть премии Парижской Академии в 1741 г. и был опубликован в Париже: Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie royale de sciences en MDCCXLII — Париж, 1745.

По этому вопросу Эйлер переписывался с Д. Бернулли.

[8] Здесь говорится о стихотворном девизе, под которым работа Эйлера была представлена на конкурс Парижской Академии: «Pressa momordit humum, superas. . .» (В землю вонзался прижатый. . .).

ЛАКАЙЛЮ

Лакайль, Николя Луи (La Caille, Nicolas Louis de, 1713—1762) — французский астроном. С 1739 по 1740 г. он занимался производством градусного измерения от Дюнкерка до Перпиньяна, в 1750—1753 гг. производил градусные измерения на мысе Доброй Надежды.

Переписка его с Эйлером касается главным образом градусных измерений и основанных на них теорий относительно формы Земли. Переписка началась публикуемым письмом Эйлера от 26 августа 1755 г. В ААН СССР хранятся также письма Лакайля Эйлеру из Парижа от 8 октября 1755 г. (ф. 136, оп. 2, № 3, лл. 549—550); 30 июля 1758 г. (ф. 136, оп. 2, № 4, лл. 76—77) и 7 марта 1758 г. (ф. 136, оп. 2, № 4, л. 66—67),

26 августа 1755 г., Берлин

Милостивый государь,

Мне очень жаль, что моя работа по сфероидической тригонометрии [1] причинила Вам столько огорчения в отношении произведенного во Франции измерения градуса меридиана; [2] следует отметить, что мне было совершенно неизвестно Ваше энергичное участие в этом деле.[3] Я задался целью исследовать, каким образом произведенные до настоящего времени четыре градусных измерения [4] могут быть согласованы с гипотезой об эллипсоидальной форме Земли,[5] которая, будучи весьма простой, казалась мне наиболее соответствующей истине, и хотя я отнюдь не намерен был рассматривать ее как доказанную истину, тем не менее она представлялась мне настолько вероятной, что не следовало, по моему мнению, отказываться от нее. Прежде всего я должен чистосердечно Вам признаться, что если бы два из этих четырех градусных измерений противоречили эллипсоидальной гипотезе, я вынужден был бы сразу отвергнуть ее. Но, поскольку три градусных измерения: у полярного круга,[6] в Перу [7] и у мыса [Доброй Надежды] [8] — удивительным образом согласовались между собой, это показалось мне столь убедительно подтверждающим данную гипотезу, что еще более укрепило мое нежелание от нее отказаться, хотя у меня не было, впрочем, никакого основания для того, чтобы заподозрить правильность градусного измерения во Франции. Ибо если бы Земля не была эллиптической, то форма ее должна была бы быть весьма причудливой, чтобы три градусных измерения могли вполне согласоваться с эллиптической гипотезой, в то время как четвертое от нее совершенно отклоняется. Можно без преувеличения сказать, милостивый государь, что именно Ваше основополагающее измерение у мыса побудило меня закончить мое вычисление, значительно изменив величины градуса во Франции;[9] я убежден, что меньшее изменение не могло бы согласоваться с моей гипотезой. Итак, когда я таким образом нахожу для отношения между осью Земли и диаметром ее экватора величину, полученную Ньютоном, то я рассматриваю это соответствие как чисто случайное: ибо я очень далек от мысли об однородности Земли и уже в нескольких случаях доказал обратное. Между тем неоднородность вполне могла бы быть такой, что она произвела бы совершенно такую же форму, как и однородность, но во множестве вариантов; но следствием из этого была бы разница в долготе маятника; таким образом, эти два явления, длина маятника и величина градуса, не зависят одно от другого; я думаю, что, согласно гипотезе притяжения, Земля могла бы иметь форму какого-нибудь эллипсоида, между тем как изменения маятника дают здесь основание для установления другого закона. Но я рассмотрел этот вопрос независимо от всякой теории, принимая лишь гипотезу эллипсоида, которую я не считаю, однако, доказанной, хотя величина градуса мыса делает ее для меня более вероятной. Таким образом, если градус во Франции действительно таков, что неизбежные ошибки при современных измерениях и при наблюдениях неба безусловно не могут достигать 100 туазов, я не стану отрицать, что нужно совершенно отказаться от эллипсоидальной гипотезы, и хотя я чувствую к этому отвращение по указанным причинам, я первый соглашусь с предположением, высказанным об этом Вами, милостивый государь, и другими учеными, производившими эти измерения: ибо, что касается меня, я всегда буду бесконечно далек от того, чтобы высказывать суждение о нынешних измерениях, и я покорно прошу Вас извинить меня за то, что я сохраняю верность эллипсоидальной гипотезе, подкрепленной Вашими собственными работами на мысе. Итак, если предположить, что четыре измерения одинаково правильны, можно принять два решения: или нужно допустить, что два полушария Земли не равны между собою, или, в случае, если бы они были равны, нужно было бы признать, что Земля имеет форму совсем неправильную. Возможно, первое предположение одержит верх над вторым, так как я припоминаю, что г. Майер, искусный астроном из Геттингена, превосходные лунные таблицы [10] которого мы все знаем, сообщил мне о некоторых явлениях в движении Луны, по-видимому, доказывающих, что центр тяжести Земли не находится в середине ее оси. Но если признать, что два полушария одинаковы, можно было бы согласовать это с четырьмя измеренными градусами, приняв на высоте полюса, равной φ, величину градуса меридиана, равную $\gamma\left(1+\frac{p}{a}\times\right.$ $\left.\times\sin\varphi^2+\frac{q}{a}\sin\varphi^4+\frac{v}{a}\sin\varphi^6\right)$, где γ означает градус при экваторе, равный 56 750 туазам, а значения остальных букв будут: $a=3\,251\,360$; $\frac{p}{a}=0.0405$; $\frac{q}{a}=0.1165$; $\frac{v}{a}=+0.1013$. Отсюда следовало бы отношение оси к диаметру экватора как 107 к 108; следовательно, форма Земли оказалась бы весьма неправильной, потому что градусы меридиана увеличились бы от экватора до широты 31°, от нее они уменьшились бы до 45°, а потом увеличивались бы постепенно до полюса, где градус экватора был бы 58 180 туазов. Сказать Вам правду, милостивый государь, я совсем не хотел бы принять эту точку зрения и предпочел бы лучше признать себя побежденным, согласясь, что два полушария Земли не равны между собой. Тогда для нашего полушария, исключив градус мыса, мы удовлетворили бы измеренным величинам трех остальных градусов, допустив, что величина градуса на широте φ равна $56\,750\,(1+0.00333\sin\varphi^2+$ $+0.01280\sin\varphi^4)$ туазов, откуда отношение между половиной оси этого полушария и половиной диаметра экватора было бы 187 к 188; но другое полушарие было бы более сплющенным, как этого требуют замечания г. Майера, насколько я припоминаю.

В заключение я хочу еще раз подчеркнуть, милостивый государь, что я не принимаю никакого участия в оценке правильности измерений, из которых выведены величины этих градусов, и я готов повторить это заявление перед целым миром; поскольку у меня нет другого намерения, как только приобрести Вашу драгоценную дружбу, которой я буду всегда дорожить, имею честь пребывать с глубочайшим уважением, милостивый государь,

Вашим покорным и преданным слугой

Л. Эйлер.

Берлин, 26 августа 1755.

Monsieur,

Je suis très fâché que mon mémoire sur la Trigonométrie sphéroïdique Vous ait causé tant de chagrin par rapport au degré du méridien mesuré en France, auquel je ne savois pas absolument, que vous avés tant de part. Je m'étois proposé d'examiner comment les quatre degrés actuellement mesurés s'accordoient avéc l'hypothèse elliptique de la figure de la terre qui étant la plus simple me paroissoit la plus conforme à la verité; non que je la regardasse comme une verité demontrée, mais pourtant si probable, qu'il ne faut pas s'en écarter sans des besoins très pressans et je Vous avoue d'abord franchement, que si deux de ces quatre degrés avoient été contraires à l'hypothèse elliptique, je n'aurois pas balancé de rejeter d'abord cette hypothèse. Mais puisque les trois degrés du Cercle polaire, du Perou et du Cap s'accordoient si admirablement bien, cela me parut si bien établir cette hypothèse, que je trouvois encore plus de répugnance à l'abandonner quoique je n'aye d'ailleurs la moindre raison de soupçonner le degré de France. Car si la terre n'étoit pas elliptique, il faudroit que sa figure fût bien bizarre pour qu'elle donnât les trois autres degrés si bien d'accord avec l'hypothèse elliptique, pendant que le quatrième s'en écarte si entièrement. C'est donc principalement Votre importante mesure du Cap, Monsieur, qui m'a engagé à achever mon calcul en apportant un si grand changement au degré de France et je ne crois pas qu'un moindre auroit été suffisant pour satisfaire à mon hypothèse. Or quand je trouve par ce moyen le rapport de Newton entre l'axe de la terre et le diamètre de son équateur je regarde cet accord comme un pur hazard: car je suis si éloigné de croire la terre homogène, que j'ai déjà eu quelques occasions demontré le contraire. Cependant la hétérogénéité pourroit bien être telle, qu'elle produisit la même figure que l'homogénéité, et cela d'une infinité de manières différentes; mais il en resulteroit une différence dans la longueur du pendule: de sorte que ces deux phénomènes de la longueur du pendule et de la grandeur des degrés ne sont pas dependans l'un de l'autre: et je crois que selon l'hypothèse de l'attraction la figure de la terre pourroit être une ellipse quelconque, pendant que les variations du pendule suivroient une autre loix quelconque. Mais j'ai envisagé cette question independamment de toute Théorie, n'ayant adopté que l'hypothèse elliptique, que je ne crois pas cependant demontrée, mais que le degré du Cap m'a rendu plus probable. Or si le degré de France est juste à un tel point, que les erreurs inévitables dans les mesures actuelles et les observations celestes ne savoient pas absolument monter à 100 toises, je ne disconviens point, qu'il ne faut abandonner entièrement l'hypothèse elliptique, et quoique je sente pour cela bien de la repugnance par les dites raisons, je serai le premier d'adopter ce sentiment, des que Vous, Monsieur, et les autres, que ont fait ces mesures, l'auront etabli: car pour moi je serai toujours infiniment eloigné de poster un jugement des mesures actuelles, et je Vous supplie très humblement de me pardonner celui, que l'attachement pour l'hypothése elliptique confirmé par vos propres travaux au Cap m'a annexé. Or supposant les quatre mesures également justes il y a deux partis à prendre: ou il faut supposer les deux hémisphères de la terre inégaux entr'eux, ou en cas qu'ils soient égaux, il faudroit donner à la terre une figure bien irrégulière. Peut être que le premier l'emporteroit sur l'autre car je me souviens que M^{r} Meyer, cet habile Astronome de Göttingue auquels nous sommes redévables des plus parfaites Tables de la Lune, m'a porté de quelques phénomènes dans le mouvement de la Lune, qui semblent prouver, que le centre de gravité de la terre ne ce trouve pas du milieu de son axe. Mais si l'on vouloit que les deux hémisphères fussent semblables, on pourroit satisfaire aux quatre degrés mesurés en supposant à la hauteur du pole $= \varphi$, la grandeur du degré du méridien $=$ $\gamma\left(1+\frac{p}{a}\sin\varphi^2+\frac{q}{a}.\sin\varphi^4+\frac{v}{a}\sin\varphi^6\right)$, ou γ marqueroit le degré sous l'équateur=56 750 toises, et les valeurs des autres lettres seroient $a=3\,251\,360$; $\frac{p}{a}=0.0405$; $\frac{q}{a}=0.1165$; $\frac{v}{a}=+0.1013$, de là remetteroit le rapport de l'axe au diamètre de l'équateur comme 107 a 108; or la figure de la terre seroit fort irrégulière; car les degrés du méridien croîtroient depuis l'équateur jusqu'à la latitude de 31°, de là ils diminueroient jusqu'à 45°, or delà il croîtroient de rechef jusqu'au pole, où le degré de l'équateur seroit 58 180 toises. Pour vous dire la vérité, Monsieur, j'aurois bien de la repugnance à embrasser ce sentiment, et j'aimerois mieux me déclarer pour vaincu et croire les deux hémisphères de la terre inégaux entr' eux. Alors pour notre hémisphère en excluant le degré du Cap on satisfesoit aux trois autres degrés en supposant sa grandeur du degré à la latitude $\varphi=56\,750(1+0.00333 \sin \varphi^2+0.01280 \sin \varphi^4)$ toises: d'où le rapport entre le demiaxe de cet hémisphère et le demidiamètre de l'équateur seroit 187 à 188; mais l'autre hémisphère seroit plus applati: comme les remarques de Mr Meyer l'exigent, autant que je me souviens. Au reste je vous proteste encore, Monsieur, que je ne prend aucune part au jugement sur la justesse des mesures, d'où la grandeur de ces degrés a été conclue et je suis prêt a déclarer cette protestation devant tout le monde; n'ayant rien plus à coeur que de m'acquérir Votre precieuse amitié que je ne manquerai pas de cultiver de tout mon possible, ayant l'honneur d'être avec la plus haute estime, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur

L. Euler.

Berlin, le 26 Août 1755.

Печатается по собственноручному черновику (Рукописное собрание Фундаментальной библиотеки Тартуского университета. Morgensterni Ep. Phil., т. II, № 60).

[1] Здесь говорится о работе Л. Эйлера: Elemens de la trigonométrie sphéroidique tirés de la méthode des plus grands et plus petits (Элементы сфероидической тригонометрии, установленные на основании метода бесконечно больших и бесконечно малых величин) — Mémoires de l'Académie de sciences de Berlin, 9, (1753), 1755, стр. 258—293.

[2] Речь идет о градусных измерениях, производившихся во Франции в 1740 г. между Парижем и Амьеном с целью изучения размеров и формы Земли. Результаты этих измерений Эйлер подверг сомнению (см. статью, прим. 1 к настоящему письму), что побу-

дило Лакайля вступить с ним в полемику: Eclaircissements sur les erreurs qu'on peut attribuer à la mesure du degré en France, entre Paris et Amiens (Разъяснение по поводу ошибок, наличие которых можно предположить в измерении градуса меридиана во Франции, между Парижем и Амьеном) — Mémoires de l'Académie de Berlin, 1754, стр. 342 и сл.; Sur la précision des mesures géodésiques faites en 1740 pour déterminer la distance de Paris à Amiens (О точности геодезических измерений, произведенных в 1740 г. для определения расстояния между Парижем и Амьеном) — Mémoires de l'Académie de Sciences de Paris, 1755, стр. 86 и сл.

[3] Имеется в виду участие Н.-Л. Лакайля в большом градусном измерении от Дюнкерка до Перпиньяна, произведенном во Франции в 1739—1740 гг.

[4] Были произведены градусные измерения в Лапландии, Перу, во Франции и на мысе Доброй Надежды.

[5] Ньютон показал в своих «Principia» (1687), что необходимым следствием закона всемирного тяготения является эллипсоидальная, сжатая у полюса форма Земли. Так как из господствовавшей ранее теории вихрей Декарта (1630) вытекала продолговатая форма земных меридианов, то одной из самых актуальных задач, которая должна была решить спор между ньютонианцами и картезианцами, в начале XVIII в. была задача об истинной фигуре Земли. Для ее решения были произведены измерения градуса меридиана на различных широтах, позволяющие найти форму меридиана.

[6] Здесь говорится об измерении дуги меридиана в Лапландии, проведенном в 1736—1737 гг. экспедицией Парижской Академии наук под руководством П.-Л.-М. Мопертюи. Экспедиция измерила небольшую дугу меридиана, причем измерение было произведено не очень точно.

[7] Речь идет об измерении дуги меридиана во время Перуанской экспедиции 1735—1742 гг., организованной Парижской Академией наук под руководством П. Бугера и при участии Ш. Кондамина и Л. Годена. Экспедиция измерила дугу меридиана от 0°2′30″ с. ш. до 3°4′30″ ю. ш.

[8] В 1751—1753 гг. аббатом де Лакайлем были произведены измерения дуги меридиана в южной Африке, на мысе Доброй Надежды, на о-вах Бурбоне и Иль-де-Франс: Diverses observations astronomiques et physiques faites au cap de Bonne-Espérance pendant les années 1751 et 1752 et partie 1753 (Различные астрономические и физические наблюдения, произведенные на мысе Доброй Надежды в 1751—1752 гг. и части 1753 г.) — Mémoires de l'Académie des Sciences, Париж, 1751, стр. 663 и сл.

[9] В результате вычислений (см. прим. 1 к настоящему письму) Эйлер установил, что при измерении градуса у полярного круга была допущена ошибка в 27 туазов, на мысе Доброй Надежды — в 43 туаза, в Перу — в 15 туазов и во Франции — в 125 туазов.

[10] Речь идет о таблицах, составленных геттингенским астрономом Тобиасом Майером, по которым можно было с большой точностью предвычислять место Луны. При составлении этих таблиц Майер воспользовался теорией движения Луны, опубликованной Эйлером в 1753 г.

ЛОВИЦУ

Ловиц, Георг Мориц (Lowitz, Georg Moriz, 1722—1774). С деятельностью нюрнбергского астронома Ловица Эйлер познакомился еще в сороковые годы из переписки с И.-М. Францем, одним из деятелей Гомановского бюро ландкарт, где сотрудничал тогда молодой Ловиц. С октября 1745 г. Ловиц начал переписку с Эйлером, обсуждая с ним главным образом вопросы прикладной астрономии. В ААН СССР сохранилось 9 писем Ловица Эйлеру, относящихся к 1745—1767 гг., т. е. до их встречи в Петербурге. Из писем Эйлера к Ловицу известно лишь одно публикуемое здесь письмо. Кроме того, одно письмо Эйлера, опубликованное без даты и адресата (Göttingische Zeitungen von gelehrten Sachen auf das Jahr 1750, s. 475—477) и посвященное вопросу изображения звезд на небесном глобусе, вероятно, также было адресовано Ловицу.

Начиная с 1754 г. Эйлер не раз писал в Петербургскую Академию о Ловице и предлагал его кандидатуру на вакантную должность по астрономии (см.: Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonard Eulers, т. I, Берлин, 1959, стр. 58, 59, 61, 64, 67, 71, 156, 166, 167, 169, 172). 26 июля 1767 г. Ловиц обратился к Эйлеру с объяснением, почему он в свое время отклонил предложение о переезде в Петербург, и просил вновь рекомендовать его Петербургской Академии (черновик, ААН СССР, разр. I, оп. 86, № 2, лл. 3—4). 10/21 августа того же года вопрос о приглашении Ловица обсуждался в Конференции Петербургской Академии, а 22 X/2 XI Ловиц уже упоминается в Конференции среди лиц, назначенных для предстоящих наблюдений прохождения Венеры через диск Солнца (Протоколы, т. II, стр. 609, 622). В Петербург Ловиц приехал весной 1768 г. и 18/29 апреля был представлен Конференции (Протоколы, т. II, стр. 636).

Публикуемое письмо печатается по черновику, написанному, очевидно, под диктовку Эйлера неизвестной рукой (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 27, лл. 1, 2). Поскольку данное письмо в отношении орфографии написано крайне небрежно, в нем дается современная орфография.

21 августа 1767 г., Петербург

Высокородный господин,
высокопочтенный господин профессор,

Ваше письмо, которым Вы меня почтили, я получил к большому своему удовольствию, ибо оно прибыло в такое удачное время, когда тотчас же можно было составить требуемое приглашение, которое Вы, очевидно, и получили с предыдущей почтой. Я поздравляю Вас от всего сердца и считаю нужным дать Вам по этому поводу еще некоторые разъяснения. Вы хотели, правда, получить приличное место вне Академии, но Вы сами, как только приедете сюда, убедитесь, что это было бы совсем неразумно и что под покровительством Академии Вы будете в состоянии сослужить государству значительно более полезную службу, чем если бы Вы относились к какому-либо из департаментов. От академических лекций и обязательного представления латинских статей в наши «Комментарии» Вы будете полностью освобождены, а если Вы в своих работах сделаете важные открытия, Вы сможете представить статьи об этом на немецком языке. Первая работа, которая будет Вам поручена, заключается в предстоящем наблюдении прохождения Венеры через Солнце, для чего здесь уже сделаны все необходимые приготовления. Ее императорское величество всемилостивейше приказала, чтобы наблюдение производилось из восьми различных мест Российского осударства, частично на севере, частично на юге.

Кроме этой важной экспедиции, у Вас будет достаточно возможностей применить с пользой для государства Ваше исключительное мастерство. Скоро, возможно, начнут приводить в исполнение давно задуманный, но до сих пор не осуществленный проект канала, соединяющего течение Дона с Волгой у Царицына. И для улучшения географии еще будет предпринято много важных экспедиций. При этом, само собой разумеется, Вам, помимо Вашего жалованья, будут отдельно оплачиваться все издержки. При всех работах такого рода Вам будут приданы несколько молодых людей, и Вам, очевидно, не представит никакого труда провести с ними необходимые для этой цели занятия. А поскольку Вы можете быть готовы к отъезду уже в октябре этого года и, возможно, даже в начале октября, поездка морем тогда еще совершенно безопасна и Вы сможете совершить путешествие через Любек со всеми удобствами. Ваш приезд будет большой радостью для всей Академии и в особенности для меня, и я постараюсь оказывать Вам все возможные услуги и самое дружеское расположение.

От души желаю Вам счастливого путешествия и имею честь быть с глубочайшим уважением

Ваш покорнейший слуга

Л. Эйлер.

Петербург, 21 августа 1767.

I

Hochedelgebohrner Herr,
Hochgeehrtester Herr Professor,

Euer Hochedelgebohr. geehrtes Schreiben habe ich mit der größten Freude erhalten, da dasselbe zu einer so gewünscheten Zeit eingelauffen, daß sogleich die verlangte Vocation hat ausgefertiget werden können, welche Dieselben mit der vorigten Post werden erhalten haben. Ich gratulire dazu von ganzen Herzen und hälte vor nöthig Euer Hochedelgebohr. darüber noch einige Erläuterungen zu geben. Dieselben wünschten zwar außer der Academie eine anständige Stelle zu erhalten, allein Dieselben werden bald nach ihrer Ankunft alhier erkennen, daß solches gar nicht ratsam gewesen wäre und daß Dieselben unter der Protection der Academie weit nutzlichere Dienste dem Reiche zu leisten im Stande sein weden, zu was für Departaments Dieselben auch immer gehören mögen. Euer Hochedl. werden demnach von den academischen Lectionen und der Verbindlichkeit lateinische Aufsätze in unsere Commentarios zu liefern gänzlich freigesprochen, und wann Dieselben bei Dero Unternemungen wichtige Entdeckungen machen, so können die Aufsätze darüber in deutscher Sprache übergeben werden. Die erste Arbeit, so Denselben aufgetragen wird, bestehet in der künftigen Beobachtung des Durchgangs der Venus durch die Sonne, wozu hier schon alle nöthigen Anstalten gemacht werden, indem Ihro Käiserliche Majestät allergnädigst befohlen, daß diese Beobachtung an acht verschiedenen Orten des russischen Reichs teilweise gegen Norden teils gegen Süden angestellt werden soll.

Außer dieser wichtigen Expedition wird es Euer Hochedl. an Gelegenheit nicht fehlen Dero ganz besondere Geschicklichkeit zum Nutzen des Reichs anzuwenden und es könnte vielleicht die Vollendung des schon längst in Vorschlag, aber noch nicht zu Stand gebrachten Kanal den Donstrom mit der Wolga zu Zarizin zu Vereinigen, bald aufgetragen werden und zur Verbesserung der Geographie sollen auch noch viele wichtige Expeditionen unternommen werden, wobei es sich von selbsten verstehet, daß Denselben außer Dero Pension alle Unkösten besonders werden bezahlet werden. Bei allen dergleichen Arbeiten werden Denselben auch einige junge Leute zugegeben werden, und Ew. Hochedl. werden wohl keine Schwierigkeiten machen denselben den dazu benöthigten Unterricht zu erteilen. Da Euer Hochedelgeb. noch künftigen Oktober und vielleicht zu Anfang desselben sich schon zur Abreise werden fertig machen können, so ist die Schiffahrt als dann noch ganz sicher, und Dieselben werden die Reise über Lubec mit aller Bequemlichkeit anstellen können. Dero Ankunft alhier wird bey der ganzen Academie und besonders bey mir eine ganz ausnehmende Freude erwecken, und ich werde mir angelegen sein lassen Denselben alle mögliche Gefälligkeit und Freundschaft zu erweisen, der ich nach herzlicher Anwünschung einer glücklichen Reise mit der größten Hochachtung die Ehre habe zu sein Euer Hochedelgeb.

ganz ergebenster Diener

L. Euler.

St.-Petersburg, den 21 August 1767.

МАРИНОНИ

Маринони, Джиованни Джакобо (Marinoni, Giovanni Jacobo, 1670—1755) — итальянский математик и инженер. Уже в начале XVIII в. был известен своими значительными астрономическими и картографическими работами в Италии и Австрии. С 1730 г. Маринони поселяется в Вене и получает от австрийского императора Леопольда I звание придворного астронома. Здесь он руководит постройкой обсерватории. Вскоре Маринони вступает в переписку с Петербургской Академией, куда посылает свои астрономические наблюдения и различные сочинения в течение почти 20 лет. 11 октября 1746 г. избран почетным членом Петербургской Академии.

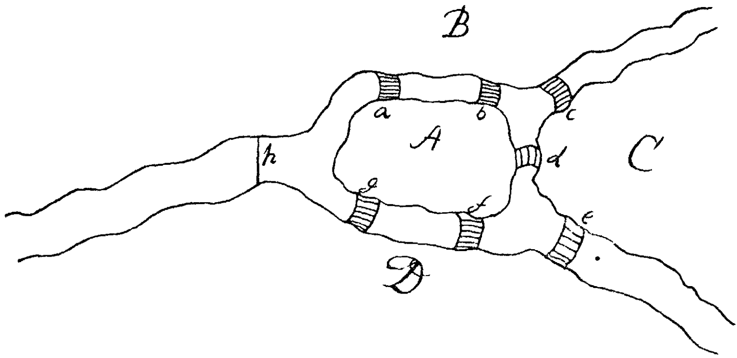
1

13[24] марта 1736 г., Петербург

Мужу знаменитому и славному Маринони
шлет большой привет Л. Эйлер.

Я чрезвычайно благодарен славному маркизу Полени, что он, как только удостоил меня своего покровительства и дружбы, сделал также и Тебя, славный муж, моим благосклонным покровителем. Тем более я обязан Тебе за письмо, которым Ты меня почтил,[1] ибо сам я не осмелился бы побеспокоить письмом столь великого мужа. Итак, я с благодарностью пользуюсь данной мне столь удобной возможностью и высоко ценю благосклонность, которой Ты удостоил меня. Ведь для меня нет ничего более желанного, чем вступить с Тобой, славный муж, в переписку, от которой я не только надеюсь получить огромную пользу, но и жду от Тебя основательнейших отзывов о различных моих размышлениях. И Ты чрезвычайно обязал бы как нашего славного директора барона Корфа, так и всю нашу Академию, если бы соблаговолил завязать и со мной такую же переписку, какую Ты начал вести с нашим славным Делилем.[2] Итак, полагаясь на проявленную Тобой чрезвычайную ко мне доброжелательность, я осмеливаюсь послать тебе некоторые свои скромные размышления и очень прошу Тебя принять их благосклонно и сообщить свое мнение о них.

Некогда мне была предложена задача об острове, расположенном в городе Кенигсберге и окруженном рекой, через которую перекинуто семь мостов.[3] Спрашивается, может ли кто-нибудь непрерывно обойти их, проходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что никто еще до сих пор не смог



это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно. Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне, однако, достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство. Поэтому мне пришла в голову мысль, не относится ли она случайно к геометрии положения, которую в свое время исследовал Лейбниц. Итак, после долгих размышлений, я нашел легкое правило, основанное на вполне убедительном доказательстве, с помощью которого можно во всех задачах такого рода тотчас же определить, может ли быть совершен такой обход через какое угодно число и как угодно расположенных мостов или не может. Кенигсбергские же мосты расположены так, что их можно представить на следующем рисунке, на котором A обозначает остров, а B, C, и D — части континента, отделенные друг от друга рукавами реки. Семь мостов обозначены буквами a, b, c, d, e, f, g.

Итак, вопрос состоит в том, чтобы определить, можно ли обойти все эти семь мостов, проходя через каждый только однажды, или нельзя. Мое правило приводит к следующему решению этого вопроса. Прежде всего нужно по-смотреть, сколько есть участков, разделенных водой, — таких, у которых нет другого перехода с одного на другой, кроме как через мост. В данном примере таких участков четыре, $ABCD$. Далее нужно различать, является ли число мостов, ведущих к этим отдельным участкам, четным или нечетным. Так, в нашем случае к участку A ведут пять мостов, а к остальным — по три моста, т. е. число мостов, ведущих к отдельным участкам, нечетное, а этого одного уже достаточно для решения задачи. Когда это определено, применяем следующее правило: если бы число мостов, ведущих к каждому отдельному участку, было четным, то тогда обход, о котором идет речь, был бы возможен и в то же время можно было бы начать этот обход с любого участка. Если же из этих чисел два были бы нечетные, ибо только одно быть нечетным не может, то и тогда мог бы совершиться переход, как это предписано, но только начало обхода непременно должно быть взято от одного из тех двух участков, к которым ведёт нечетное число мостов. Если бы, наконец, было больше двух участков, к которым ведет нечетное число мостов, то тогда такое движение вообще невозможно. Итак, поскольку в предложенном примере к четырем участкам число мостов нечетное, мы тщетно искали бы такой обход. А вот если бы в h прибавить еще восьмой мост, то тогда было бы только два участка, а именно A и C, к которым ведет нечетное число мостов, и поэтому требуемый обход мог бы совершиться, если бы только начало обхода было взято от A или C. Если бы можно было привести здесь другие, более серьезные задачи, этот метод мог бы принести еще бóльшую пользу и им не следовало бы пренебрегать.

Славному г. Гольдбаху я передал Твой привет, как Ты об этом просил, и он в свою очередь шлет через меня свой большой привет.[a]

Будь здоров и сохраняй свою прежнюю ко мне благосклонность.

Л. Эйлер.

Петербург, 13 марта 1736.

---

[a] *В черновике далее слова* Причину же, что он не получает писем от Тебя, славный муж, он приписывает почте, по нерадивости которой, он подозревает, затерялось или Твое письмо, или письмо, которое он послал Тебе.

Viro Illustri et Celeberrimo Marinonio
S. P. D. Leonh. Euler.

Maximas Cel. March. Poleno habeo gratias, quod cum vix illius favorem et amicitiam essem consecutus, Te quoque, Vir Celeb., is mihi fautorem et patronum comparaverit. [а]Eo autem magis Tibi me Tuis honoratissimis litteris devinxisti, quominus ausus fuissem ipse tantum virum per litteras compellare.[а] Gratissimo igitur[б] animo amplector [в]hanc mihi opportunissime oblatam occasionem[в] atque favorem, quo me honorare es dignatus, summa veneratione colo. Nihil enim mihi optatius accidere potuisset, quam a te, Vir Celeb., ad litterarum commercium admitti, quo non solum plurimum proficere spero, sed etiam ad meas qualescunque meditationes[г] a te solidissima judicia[г] mihi promitto.[д] Gratissimum porro quoque facies opus tum Illustrissimo[д] Praefecto nostro Libero Baroni a Korff tum toti Academiae, si ut commercium epistolicum cum Celeb. Delislio nostro coepisti, idem quoque mecum instituere volueris. Tua igitur summa, quam erga me es testatus, benevolentia fretus non dubito tenues[е] quasdam meditationes Tecum communicare, quas ut benevole accipias, Tuumque[ж] de iis judicium feras,[з] etiam atque etiam rogo. Quaestio mihi aliquando proponebatur circa insulam in urbe Regiomonti sitam fluvio septem pontibus trajecto cinctam, atque quaerebatur,[и] num quis [к]continuo cursu per singulos pontes[к] semel tantum[л] ambulare queat, [м]simulque perhibebatur tum id neminem adhuc praestitisse tum neminem, quod fieri nequeat, demonstrasse.[м] Quae quaestio etsi erat vulgaris, tamen mihi [н]attentione non

---

[а–а] *В черновике* Tantum Virum per litteras ipse compellare tanti Viri amicitiam ipse quaerere.

[б] *В черновике* ergo

[в–в] *В черновике* hanc occasionem, opportunissime mihi oblatam

[г–г] *В черновике* solidissimum tuum iudicium

[д–д] *В черновике* Gratissimum quoque erit tum Illustrissimo

[е] *Напечатано по черновику. В копии ошибочно* tenuas

[ж] *Напечатано по черновику. В копии* tuum

[з] *В черновике* perscribas

[и] *В черновике* Quaerebaturque

[к–к] *В черновике* per singulos pontes continuo cursu

[л] *В черновике* tantum *отсутствует.*

[м–м] *В черновике* sumilque perhibebatur neminem adhuc hac lege cursum instituere potuisse.

[н–н] *В черновике* non inelegans videbatur et maxime contemplatu digna, indigna videbatur,[н] eo quod eam solvendam neque geometria neque algebra essent idoneae, [о]neque etiam ars combinatoria sufficeret.[о] Quam ob rem in mentem mihi venit, num ea forte ad geometriam situs, quam quondam Leibnitius tantopere desideraverat,[п] pertineret. Cum igitur hac de re diu mecum cogitassem,[р] facilem adeptus sum regulam firmissima demonstratione munitam, qua in omnibus hujusmodi quaestionibus statim discernere licet, utrum hujusmodi cursus per quotvis et quomodocunque sitos pontes institui queat, an secus? Situs autem[с] pontium regiomontanorum ita se habet, uti in hac figura[т] repraesentatur, in qua A insulam, B vero C et D continentis[у] partes fluvii ramis a se invicem diremtas[ф] designant. Septem vero pontes indicati sunt litteris a, b, c, d, e, f, g.[х] Quaestio igitur in hoc consistit, ut determinetur, utrum per omnes hos septem pontes per unumquemque semel non plus ambulari possit nec ne? Cujus quaestionis regula mea sequentem subministrat solutionem.[ц] Ante omnia est videndum, quot sint regiones aqua disjunctae a quarum[ч] una ad aliam, nisi per pontem transitus non datur, uti in hoc exemplo hujusmodi [ш]sunt quatuor regiones $ACBD$.[ш] Deinde [щ]est dispiciendum, utrum numerus pontium in singulas has regiones conducentium sit par an impar.[щ] [ы]Sic in nostro casu ad regionem A quinque pontes, ad reliquas vero singulas tres pontes ducunt,[ы] ideoque[э] numerus pon-

---

[о–о] *В черновике* neque... sufficeret *отсутствует.*

[п] *В черновике* desideravit,

[р] *В черновике* essem meditatus,

[с] *В черновике* autem *отсутствует.*

[т] *В черновике* in figura

[у] *Напечатано по черновику. В копии* fluvi

[ф] *В черновике* discerptas

[х] *В черновике* septem... a, b, c, d, e, f, g *отсутствует.*

[ц] *В черновике вместо* Quaestio igitur... subministrat solutionem *написано* Ad solvendam nunc quaestionem utrum per omnes hos septem pontes, per unumquemque semel non plus, ambulari possit, an non;

[ч] *В копии ошибочно* aquarum. *В черновике* a quarum... non datur *отсутствует.*

[ш–ш] *В черновике* sunt 4 hujusmodi regiones, quas litteris A, B, C, D, notavi.

[щ–щ] *В черновике* videndum est quot pontes in unamquamque regionem conducant seu potius utrum numerus pontium eo ducentium sit par an impar.

[ы–ы] *В черновике* Sic in nostro exemplo ad A quinque pontes, ad reliquas vero regiones B, C, et D singulas tres pontes conducunt.

[э] *В черновике* seu

tium ad singulas ducentium est impar, [ю]quod solum[ю] ad quaestionem, decidendam sufficit. [я]His vero definitis sequentes adhibeantur canones.[я] Si pontium ad singulas regiones ducentium numeri omnes fuerint pares, tum cursus desideratus [а]fieri poterit[а] simulque [б]cursus initium in qualibet regione sumi. Sin autem [в]ex illis numeris duo[в] fuerint impares, unicus enim non potest esse impar,[г] tum transitus quidem uti jubetur[д] fieri poterit, at initium cursus ex altera earum[е] regionum, ad quas ducentium pontium numerus est impar, necessario est sumendum. Si denique plures duabus fuerint regiones, ad quas pontes numero impares deducunt, tum talis cursus omnino[ж] non datur.[ж] Cum igitur[з] in exemplo proposito[з] ad quatuor regiones pontium[и] numeri sint impares, frustra talis cursus investigatur. Atsi octavus pons in h adderetur, tum duae tantum forent regiones puta A et C, ad quas pontes numero impares deducerent, atque idcirco desideratus cursus fieri posset, si modo initium cursus vel in A vel in C acciperetur. [к]Si forte aliae magis seriae quaestiones huc reduci possent, majorem utilitatem ista methodus offerre posset, minus foret spernenda.[к] Celeb. D. Goldbach Tuo[л] nomine uti mandasti salutem significavi, qui vicissim per me te plurimum salutat.[м]

Vale igitur Vir Celeb. meque uti coepisti favore tuo comlpecti perge.

L. Euler.

Dabam Petropoli, ad d. 13 Mart. 1736.

[ю–ю] *В черновике* solum

[я–я] *В черновике* His autem factis regulas inveni sequentes.

[а–а] *В черновике* institui potest

[б–б] *В черновике* initium cursus in quavis

[в–в] *В черновике* duo ex illis numeris

[г] *В черновике* unicus. . . impar, tum *отсутствует.*

[д] *В черновике* uti jubetur *отсутствует.*

[е] *В черновике* earum *отсутствует.*

[ж–ж] *В черновике* inveni nequit.

[з–з] *В черновике* in nostro exemplo

[и] *В черновике* pontium ducentium

[к–к] *В черновике* Huc fortasse aliae magis seriae quaestiones reduci poterunt, quae etiamsi aliis methodis difficillimae viderentur, tamen ope istius regulae facillime resolvi possent.

[л] *Напечатано по черновику. В копии* suo

[м] *В черновике далее слова* causamque, quod a Te Vir Celebr. litteras non acceperit, tabullariis adscribit, quorum incuria vel Tuas vel ipsius ad Te datas litteras interiisse suspicatur.

Публикуется по копии, проверенной и подписанной Эйлером (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 22, лл. 17—18 об.). Письмо представлено в Конференции 12 марта 1736 г. В фонде Эйлера (ф. 136, оп. 2, № 1, лл. 74, 75) имеется также черновик этого письма. Разночтения черновика и копии приведены в сносках.

Помета: «Представлено 12 марта 1736 в Петербургскую Академию наук».

[1] Письмо Маринони Эйлеру от 16 XII 1735 хранится в Фундаментальной библиотеке Тартуского университета, в рукописном собрании Моргенштерна, Morgensterni Ep., Phil., т. II, № 150.

[2] Переписка Маринони и Делиля началась, по-видимому, в 1733 г. 26 октября этого года Делиль читал в Конференции присланную ему Маринони статью об определении долготы Вены (Протоколы, т. I, стр. 70). 17 октября 1735 г. Делиль представил в Конференции письмо Маринони с наблюдениями лунного затмения 1 октября этого года. Позднее Маринони переписывался также с Х. Гольдбахом.

[3] Задача о кенигсбергских мостах разбирается в письме Эйлера к Элеру от 3 апреля 1736 г. (см. стр. 330 настоящего издания).

2

12 [23] июля 1740 г., Петербург

Почтеннейшему мужу Дж.-Дж. Маринони
шлет большой привет Леонард Эйлер.

Я получил любезно посланное Тобою,[1] глубокоуважаемый муж, опровержение контроверсии Лейстнера [2] вместе с наблюдениями солнечного затмения, произведенными в [1738] [3] году, и приношу Тебе глубочайшую благодарность за то, что Ты так великодушно соблаговолил послать их мне. Я не сомневаюсь, что Лейстнер, после того как высказано в высшей степени авторитетное мнение и приведены столь основательные доводы, наконец признает свои грубейшие ошибки и покорно успокоится. Я прочитал также с огромным удовольствием сочинения славного Миковини,[4] преисполненные огромной учености, в которых он не только остро обличает отвратительнейшие ошибки Лейстнера и очень искусно вскрывает основное зерно вопроса, но также собственным вычислением, с помощью ряда Лейбница, которым из тангенса определяется дуга круга, подтверждает пределы квадратуры круга, данные Лудольфом ван Цейленом. Данный ряд приносит в этом отношении большую помощь, однако, если не применить особых сокращений, извлечения корней сильно увеличат работу. Ибо, если предположить, что радиус круга равен 1 и если взять тангенс, равный t, то соответствующая дуга будет равна $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} +$ и т. д.[5] С помощью этого ряда можно тем легче и проще определить дугу, чем меньше будет принят тангенс t; так, если предположить $t = \frac{1}{10}$, можно без особого труда выразить длину дуги с каким угодно числом знаков, между тем, однако, отсюда ничего нельзя заключить для определения отношения, в котором находится вся периферия к диаметру, ибо дуга, тангенс которой равен $\frac{1}{10}$, не находится ни в каком обозначаемом отношении ко всей периферии. Поэтому, если мы хотим приспособить этот ряд, чтобы извлечь из него пользу, мы должны подставить вместо t не только тангенс очень маленькой дуги, но также и такого рода дугу, которая находится в известном отношении ко всей периферии. Здесь мы, однако, тотчас же наталкиваемся на то огромное неудобство, что не существует рационального тангенса, меньшего, чем радиус, тангенса, которому соответствовала бы дуга, соизмеримая всей периферии. Из иррациональных же наиболее удобным кажется тангенс 30 градусов, который равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Им пользовался не только славнейший Миковини, но и до него англичанин Шарф и даже Ланьи, который с его помощью, приложив поразительный труд, получил выражение периферии до 127 числа знаков. Однако легко понять, насколько затрудняет вычисление иррациональность тангенса. Прежде всего огромную трудность создает уже извлечение корня из 3 или $\frac{1}{3}$ для такого множества знаков. Затем, хотя одно извлечение корня достаточно для всех членов, развертывание отдельных членов ряда, поскольку знаки этого корня не идут с определенной закономерностью, требует много времени, что не произошло бы, если бы был взят рациональный тангенс. В-третьих, ряд сходится не надлежащим образом, ибо, если предположить, что тангенс равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$, дуга будет равна $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\frac{1}{3^4\cdot 9}-\text{и т. д.}\right)$ и члены этого ряда убывают примерно в три раза. Поэтому, если отсюда мы хотим получить периферию, выраженную с точностью до 100 знаков, нужно было бы взять более чем 210 членов. Взвесив эти неудобства, я стал размышлять над тем, нельзя ли из рациональных тангенсов узнать отношение периферии к диаметру. Я пришел к заключению, что это возможно, если соединяются две или более таких дуг, тангенсы которых рациональны. Так, дугу 45°, тангенс которой равен 1, можно рассечь на две дуги, из которых тангенс одной будет $\frac{1}{2}$, другой $\frac{1}{3}$; каждую из этих двух дуг можно довольно легко исследовать с помощью этого ряда, а когда мы их найдем, сумма их даст дугу 45°. Итак, эта дуга 45°, или восьмая часть всей периферии, будет равна следующим двум рядам вместе взятым

$$+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4^2\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 4^3\cdot 7}+\frac{1}{2\cdot 4^4\cdot 9}-$$

$$-\frac{1}{2\cdot 4^5\cdot 11}+\text{и т. д.}$$

$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 9\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 9^2\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 9^3\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9^4\cdot 9}-$$

$$-\frac{1}{3\cdot 9^5\cdot 11}+\text{и т. д.}$$ [6]

Хотя при таком способе мы суммируем два ряда, однако труд вычисления по многим причинам будет значительно легче и короче, чем тот, которого требовал приведенный выше ряд, происходящий из тангенса, равного $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Во-первых, оба ряда сходятся гораздо быстрее, чем тот, первый, — в четыре раза, второй — в девять раз. Чтобы найти выражение с точностью до 100 знаков, достаточно взять 167 членов первого ряда, второго же 105. Далее можно таким способом тотчас же начинать вычисление, и не нужно предварительно извлекать квадратный корень для такого множества знаков, а ведь этот труд, несомненно, требует почти столько же времени, сколько развертывание ста членов из этих моих рядов, и уже по одному этому большее число членов, которые должны быть взяты при моем методе, более чем компенсируется. В-третьих, что приносит наибольшее облегчение, отдельные члены моих рядов развертываются очень легко и быстро; так, будет $\frac{1}{2}=0.5000$ и т. д. и $\frac{1}{3}=0.3333$ и т. д., в то время как у того ряда, происходящего из тангенса, равного $\frac{1}{\sqrt{3}}$, уже первый член требует много времени хотя бы на то, чтобы его написать. А во многих последующих членах моих рядов, когда они развертываются, тотчас же можно наблюдать сокращение знаков, что в членах того ряда никогда не происходит. Этот метод, возможно, встретит одобрение у славнейшего Миковини, которому, если это Тебе, почтеннейший муж, покажется удобным, Ты можешь его сообщить.

Я имею, кроме того, еще многие другие ряды, достаточно удобные для выражения в десятичных дробях отношения периферии к диаметру. Если, допустим, четверть периферии равна q, при предположении, что радиус равен 1, то я нашел, что

$$\mathrm{I}\,q=\begin{cases}\frac{1}{1}+\frac{1}{3\cdot 2}-\frac{1}{5\cdot 2^2}-\frac{1}{7\cdot 2^3}+\frac{1}{9\cdot 2^4}+\frac{1}{11\cdot 2^5}-\text{ и т. д.}\\ +\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}-\frac{1}{11\cdot 2^{11}}+\\ \qquad +\text{ и т. д.}\end{cases}$$

$$\mathrm{II}\,q=\begin{cases}+1+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{5\cdot 2^6}-\frac{1}{7\cdot 2^9}+\frac{1}{9\cdot 2^{12}}+\frac{1}{11\cdot 2^{15}}-\\ \qquad -\text{ и т. д.}\\ +\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^7}-\frac{1}{5\cdot 2^{12}}-\frac{1}{7\cdot 2^{17}}+\frac{1}{9\cdot 2^{22}}+\\ \qquad +\frac{1}{11\cdot 2^{27}}-\text{ и т. д.}\\ +\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^8}+\frac{1}{5\cdot 2^{14}}-\frac{1}{7\cdot 2^{20}}+\frac{1}{9\cdot 2^{26}}-\\ \qquad -\frac{1}{11\cdot 2^{32}}+\text{ и т. д.}\\ +\frac{1}{2^5}-\frac{1}{3\cdot 2^{15}}+\frac{1}{5\cdot 2^{25}}-\frac{1}{7\cdot 2^{35}}+\frac{1}{9\cdot 2^{45}}-\\ \qquad -\frac{1}{11\cdot 2^{55}}+\text{ и т. д.}\end{cases}$$

В этих рядах не встречаются другие степени, кроме двойных, поэтому развертывание будет довольно легкое.

$$\text{III } q = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{3 \cdot 2} + \dfrac{1}{5 \cdot 2^4} - \dfrac{1}{7 \cdot 2^6} - \dfrac{1}{9 \cdot 2^7} - \dfrac{1}{11 \cdot 2^{10}} + \\ \qquad + \dfrac{1}{13 \cdot 2^{12}} + \dfrac{1}{15 \cdot 2^{13}} + \text{ и т. д.} \\ \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{3 \cdot 5^3} + \dfrac{2}{5 \cdot 5^5} - \dfrac{2}{7 \cdot 5^7} + \dfrac{2}{9 \cdot 5^9} - \dfrac{1}{11 \cdot 5^{11}} + \\ \qquad + \dfrac{1}{13 \cdot 5^{13}} - \dfrac{1}{15 \cdot 5^{15}} + \text{ и т. д.}^{7} \end{cases}$$

Это нетрудно вычислить, так как сюда входят степени только двух и пяти. Впрочем, я полагаю, что славнейший Миковини в своем первом письме к Тебе не обратил внимания на то, что данное им доказательство несоизмеримости периферии с прямой линией совершенно не достигает цели; ведь из него не только следует, что круг не может быть сравним с прямой линией, но даже вообще никакая кривая линия не будет спрямляемой, а ведь спрямления столь многочисленных кривых линий показывают другое.

Будь здоров, глубокоуважаемый муж, и сохрани свою благосклонность ко мне.

Л. Эйлер.

Петербург, 12 июля 1740.

Viro amplissimo J. J. Marinonio
S. P. D. Leonhard Euler.

Accepi, Vir amplissime, ex humanitate Tua decisionem controversiae Leistnerianae una cum observationibus Ecclipsis Solaris anno praeterito factis, maximasque Tibi habeo gratias, quod utrumque mecum tam benevole communicare voluisti. Neque amplius dubito, quin Leistnerus cum ob summam judicii auctoritatem tum etiam ob gravissimas rationes expositas maximos suos errores tandem agnoscat atque submisse acquiescat. Perlegi etiam summa cum voluptate scripta Clarissimi Micovini ingenti eruditione repleta, in quibus non solum foedissimos Leistneri errores acerrime perstringit et quaestionis momentum doctissime enucleat, verum etiam quadraturae circuli limites a Ludolfo a Ceulen datos proprio calculo per seriem

Leibnitianam, qua arcus circuli ex tangente definitur, confirmat. Affert quidem ista series in hoc negotio maximum subsidium, verumtamen, nisi peculiaria compendia adhibeantur, radicis extractiones laborem vehementer multiplicant. Nam posito curculi radio $=1$, si tangens capiatur $=t$, erit utique arcus respondens $=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+$ etc., hujusque seriei ope eo facilius et expeditius arcus potest definiri, quo minor accipiatur tangens t; ita si t ponatur $=\frac{1}{10}$, levi labore longitudo arcus ad quotcunque figuras exhiberi posset, interim tamen inde nihil ad rationem, quam peripheria tota ad diametrum tenet, definiendam concludere licet, eo quod arcus, cujus tangens est $=\frac{1}{10}$, ad totam peripheriam nullam teneat rationem assignabilem. Quam ob rem si hanc seriem ad utilitatem accomodare velimus, pro t non solum tangentem arcus exigui substituere debemus, sed etiam ejusmodi arcus, qui ad totam peripheriam cognitam teneat rationem, hic autem statim occurrit ingens incommodum, ut nulla tangens radio minor existat rationalis, cui respondeat arcus toti peripheriae commensurabilis. Ex irrationalibus vero aptissima videtur tangens 30 graduum, quae est $=\frac{1}{\sqrt{3}}$, qua non solum Clarissimus Micovinus est usus, sed ante eum jam Sharpius Anglus et adeo Lagny, qui ejus ope stupendo labore expressionem peripheriae ad 127 figuras produxit. Facile autem intelligitur, quantus labor ob irrationalitatem tangentis ad calculum accedat, primo enim jam insignem parit difficultatem extractio radicis ex 3 vel $\frac{1}{3}$ ad tot figuras, deinde etsi unica radicis extractio ad omnes terminos sufficit, tamen evolutio singulorum seriei terminorum ob figuras istius radicis nullo ordine progredientes multum temporis requiret, quod non eveniret, si tangens rationalis acciperetur. Tertio quoque series non admodum convergit, nam posita tengente $=\frac{1}{\sqrt{3}}$ sit arcus $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\frac{1}{3^4\cdot 9}-\text{etc.}\right)$, cujus seriei termini tantum in tripla fere ratione decrescunt Quare si hinc peripheria ad centum figuras expressa desi deretur, terminos plus quam 210 accipere opporteret. His incommodis perpensis in id sum meditatus, an non ex tengentibus rationalibus ratio peripheriae ad diametrum cognosci queat; hocque ita fieri posse deprehendi, si duo pluresve ejusmodi arcus, quorum tangentes sint rationales, conjungantur. Ita arcus 45°, cujus tangens est $=1$, in duos arcus secari potest, quorum alterius tangens est $=\frac{1}{2}$, alterius $=\frac{1}{3}$; horum igitur binorum arcuum uterque satis expedite per seriem illam poterit investigari, quibus inventis summa eorum dabit arcum 45°. Erit itaque arcus 45° seu octans totius peripheriae his duabus seriebus simul sumtis aequalis

$$+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot4\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4^2\cdot5}-\frac{1}{2\cdot4^3\cdot7}+\frac{1}{2\cdot4^4\cdot9}-$$
$$-\frac{1}{2\cdot4^5\cdot11}+\text{etc.}$$

$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot9\cdot3}+\frac{1}{3\cdot9^2\cdot5}-\frac{1}{3\cdot9^3\cdot7}+\frac{1}{3\cdot9^4\cdot9}-$$
$$-\frac{1}{3\cdot9^5\cdot11}+\text{etc.}$$

Quamquam autem hoc modo duae series summandae occurrunt, tamen labor calculi ob plures rationes multo facilior et brevior erit, quam ille, quem superior series ex tangente $\frac{1}{\sqrt{3}}$ nata postulabat. Primo enim utraque series multo citius convergit, quam illa prior, scilicet in ratione quadrupla, et posterior in ratione noncupla, atque ut expressio ad 100 figuras exacta inveniatur, sufficiet prioris seriei terminos 167, posterioris vero 105 assumsisse. Deinde hoc modo calculus statim incipi potest, neque ante opus est radicem quadratam ad totidem figuras extrahere, qui labor certe tantumdem fere temporis requirit, quam evolutio centum terminorum ex his meis seriebus, quo ipso major terminorum numerus, qui mea methodo sumi debent, plus quam compensatur. Tertio, quod maximum afferet adiumentum, singuli mearum serierum termini admodum facile et cito evolvuntur, sic erit $\frac{1}{2}$ 0.5000 etc. et $\frac{1}{3}=0.3333$ etc. cum in illa serie ex tangente $\frac{1}{\sqrt{3}}$ orta jam primus terminus tantum, ut scribatur, multum temporis requirat. Tum vero etiam in plurimis sequentibus terminis mearum serierum, dum evolvuntur, statim revolutio in figaris observabitur, quod in terminis illius seriei nunquam contingit. Atque haec methodus fortasse Clarissimo Micovino non displicebit, quam ideo, si Tibi, Vir amplissime, commodum videbitur, cum ipso communicare poteris.

Habeo praeterea alias complures series satis idoneas ad rationem peripheriae ad diametrum in fractionibus decimalibus exprimendam. Sit nempe quadrans peripheriae q posito radio 1, inveni esse

$$\mathrm{I}\, q = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{1} + \frac{1}{3\cdot 2} - \frac{1}{5\cdot 2^2} - \frac{1}{7\cdot 2^3} + \frac{1}{9\cdot 2^4} + \\ &\qquad + \frac{1}{11\cdot 2^5} - \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \\ &\qquad - \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

$$\mathrm{II}\ q = \left\{ \begin{aligned} &+1 + \frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^6} - \frac{1}{7\cdot 2^9} + \frac{1}{9\cdot 2^{12}} + \\ &\qquad + \frac{1}{11\cdot 2^{15}} - \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^7} - \frac{1}{5\cdot 2^{12}} - \frac{1}{7\cdot 2^{17}} + \frac{1}{9\cdot 2^{22}} + \\ &\qquad + \frac{1}{11\cdot 2^{27}} - \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3\cdot 2^8} + \frac{1}{5\cdot 2^{14}} - \frac{1}{7\cdot 2^{20}} + \frac{1}{9\cdot 2^{26}} - \\ &\qquad - \frac{1}{11\cdot 2^{32}} + \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{2^5} - \frac{1}{3\cdot 2^{15}} + \frac{1}{5\cdot 2^{25}} - \frac{1}{7\cdot 2^{35}} + \frac{1}{9\cdot 2^{45}} - \\ &\qquad - \frac{1}{11\cdot 2^{55}} + \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

in quibus seriebus aliae praeter binarii potestetes non occurrunt, quamobrem evolutio satis erit expedita

$$
\text{III } q = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{3\cdot 2} + \dfrac{1}{5\cdot 2^4} - \dfrac{1}{7\cdot 2^6} - \dfrac{1}{9\cdot 2^7} - \dfrac{1}{11\cdot 2^{10}} + \\ \qquad + \dfrac{1}{13\cdot 2^{12}} + \dfrac{1}{15\cdot 2^{13}} + \text{etc.} \\ \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{3\cdot 5^3} + \dfrac{2}{5\cdot 5^5} - \dfrac{2}{7\cdot 5^7} + \dfrac{2}{9\cdot 5^9} - \\ \qquad - \dfrac{1}{11\cdot 5^{11}} + \dfrac{1}{13\cdot 5^{13}} - \dfrac{1}{15\cdot 5^{15}} + \text{etc.} \end{cases}
$$

quae ob potestates binarii et quinarii non difficulter expedietur. Ceterum credo Clariss. Micovinum in sua ad Te data epistola priori non animadvertisse demonstrationem, quam dedit ad incommensurabilitatem peripheriae cum linea recta evincendam, negotium prorsus non conficere, ex ea enim non solum sequeretur, circulum cum linea recta comparari non posse, sed etiam nullam omnino lineam curvam futuram esse rectificabilem, id quod tot innumerabilium linearum curvarum rectificationes aliter ostendunt.

Vale vir Amplissime mihique favere perge.

L. Euler.

Dabam Petropoli, d. 12 Julii 1740.

Публикуется по копии, подписанной Эйлером (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 30, лл. 60—62).

[1] За период между письмами Эйлера от 13 III 1736 и 12 VII 1740 сохранилось единственное письмо Маринони от 12 IX 1736 (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 21, лл. 140, 141). В этом письме он с большой похвалой отзывается о данном Эйлером анализе задачи с семью кенигсбергскими мостами. Маринони выражает пожелание, чтобы кто-нибудь из представителей школы Бернулли, в частности Эйлер, взял на себя труд создания полного и исчерпывающего курса анализа. О переписке Эйлера и Маринони в течение следующих четырех лет мы не имеем никаких сведений, в Протоколах об этом также нет записей. Однако данное письмо Эйлера от 12 июля 1740 г. по содержанию не производит впечатления письма, написанного после четырехлетнего перерыва в переписке.

[2] Ротмистр Иосиф Игнатий Карл Лейстнêр из Вены в 1737 г. издал сочинение о квадратуре круга и в ноябре того же года прислал это сочинение в Петербургскую Академию, где оно обсуждалось на заседании Конференции. С тех пор, в течение двух лет, Академия вела переписку с Лейстнером, который продолжал посылать свои статьи о квадратуре круга, а также и по другим математическим вопросам, несмотря на резко отрицательную оценку его первого сочинения. Наконец, осенью 1739 г. Эйлер основательно изучил все эти сочинения и написал статью: Bedenken über des Rittmeister Leistner's Schrifften die Quadraturam circuli betreffend (Соображения о сочинениях ротмистра Лейстнера отно-

сительно квадратуры круга) — Протоколы, т. I стр. 440—442, 577, 580. Статья эта хранится среди рукописей Эйлера (ААН СССР, ф. 136, оп. 1, № 169). См. А. П. Юшкевич. Л. Эйлер о квадратуре круга. Историко-математические исследования, вып. X, М., 1957, стр. 169—210.

[3] В марте 1738 г. Маринони прислал в Петербургскую Академию свое сочинение: «Anmerkungen über den ohnlängst in Wien zum öffentlichen Druck beförderten Beweis der Erfindungen der Quadratur des Circuls» (Замечания к недавно опубликованному доказательству открытия квадратуры круга). Вместе с письмом Гольдбаху от 4 октября 1738 г. Маринони прислал наблюдения солнечного затмения, произведенные в Вене 15 августа 1738 г. (Протоколы, т. I, стр. 463, 506).

[4] Венгерский математик Миковини изложил возражения Лейстнеру в диссертации, написанной в форме письма к Маринони и изданной в Вене в 1739 г. под названием: «Epistola ad. . . D. Jo. Jac. Marinonium. . . occasione quaestionis de quadratura circuli nuper perperam motae et falso definitae a D. Jo. Ign. Car. Leistnero, qua Diametri ad Peripheriam ratio Leistneriana repellitur, genuina in seriebus infinitis exhibetur, deque theoria cum praxi cognatione et utili ac necessaria connexione edisseritur. Cum Nucleo controversiae de quadratura circuli» (Письмо к. . . г. Я. Марипони. . . по вопросу о квадратуре круга, недавно неудачно поставленному и ложно решенному г. Иос. Игн. Кар. Лейстнером; опровергается лейстнерово отношение диаметра к окружности и излагается истинное отношение в бесконечных рядах. Ставится также вопрос о полезной и необходимой связи этой теории с практикой и вскрывается сущность спора о квадратуре круга).

[5] Это известный ряд для $\operatorname{arctg} t$. Эйлер далее имеет в виду использование этой формулы для приближенного вычисления числа π. Для лучшей сходимости ряда нужно брать t по возможности более малым, но таким, чтобы через $\operatorname{arctg} t$ было удобно определить π.

[6] Написанные ряды дают выражение

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

[7] Действительно, обозначив $s_1(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3\cdot 2}-\frac{x^5}{5\cdot 2^2}+\cdots$, найдем

$s_1(x)=2\int\limits_0^x\frac{x^2+2}{x^4+2^2}\,dx$, откуда в случае I

$$q=s_1(1)+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=2\int\limits_0^1\frac{x^2+2}{x^4+2^2}\,dx+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=$$

$$=\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Точно так же в случае II

$$q = 8\int_0^1 \frac{x^2+2^5}{x^4+2^{10}}\,dx + 8\int_0^1 \frac{x^2+2^3}{x^4+2^6}\,dx + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2^3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2^5} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1}{2^5} + \operatorname{arctg}\frac{2^3}{2^5-1} + 2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2^3} + \operatorname{arctg}\frac{2^2}{2^3-1}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{287}{984} + 2\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{287}{984}+\frac{24}{7}}{1-\frac{41}{41}} = \frac{\pi}{2}.$$

В случае III

$$q = 4\int_0^1 \frac{x^4+8x^2+16}{x^6+2^6}\,dx + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} =$$

$$= 2\left[\operatorname{arctg}(1+\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}(\sqrt{3}-1) + \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right] =$$

$$= 2\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) = 2\operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{2}.$$

МОПЕРТЮИ

Мопертюи, Пьер Луи (Maupertuis, Pierre Louis, 1698—1759) — французский физик, член Парижской Академии наук с 1723 г. Основные его работы относятся к области физики, астрономии, геодезии. В 1741—1756 гг. работал в Берлинской Академии наук, с 1745 по 1753 г. был ее президентом.

20 мая 1738 г. Мопертюи написал Эйлеру первое письмо,[а] которое послужило началом их знакомства и дружбы. Из Петербурга Эйлер послал Мопертюи три публикуемых ниже письма; после отъезда Эйлера в Берлин переписка их прекратилась до 1752 г.; в период между 1752 и 1759 гг. Эйлер написал Мопертюи из Берлина 14 писем.[б]

Из писем Мопертюи к Эйлеру в настоящее время известно только два письма: от 20 мая 1738 г. и от 14 августа 1740 г.,[в] которым Мопертюи извещает Эйлера о присуждении ему четвертой части премии Парижской Академии за 1740 г.

1

23 ноября [4 декабря] 1738 г., Петербург

Славнейший муж,

Твое драгоценное письмо[1] вместе с превосходным Твоим трудом «О фигуре Земли» [2] переданы мне знаменитым нашим президентом; [3] за это, а также за оказанную мне честь приношу Тебе величайшую благодарность.

Что касается меня, то я, зная о славе Твоего имени и о величайших Твоих научных заслугах,[4] давно уже был охвачен желанием не только познакомиться с Тобой, но и стать Твоим другом. Еще до получения Твоего письма большую надежду на осуществление моего желания вселяло в меня единодушное мнение нашей Академии, что

[а] ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 26, л. 54.

[б] L' a b b é A. Le Sueur. Maupertuis et ces correspondants (Мопертюи и его корреспонденты) — Монтрей-сюр-мер, 1896, стр. 144—179.

[в] ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 26, л. 47—48 (оригинал) и л. 124 (копия).

Ты должен стать ее членом.[5] Теперь же я тем больше радуюсь, что Ты сам, славнейший муж, предлагаешь мне дружбу, приятнее которой для меня ничего быть не может, за что я выражаю Тебе мою признательность и прошу Тебя включить меня в число Твоих друзей, каковую милость я всеми силами постараюсь заслужить. Если, как Ты пишешь, Ты одобряешь мою «Механику»,[6] что для меня имеет большее значение, чем мнение ста других людей, то я прежде всего желал бы, чтобы Ты сообщил мне свои замечания, если они у Тебя есть, так как я питаю величайшую надежду, что благодаря Тебе я смогу многое сделать в этой области знания. Не выразить никакими словами, до какой степени восхищает меня Твой присланный мне труд, так как он наполнен не только точнейшими наблюдениями и опытами, но и весьма основательными суждениями, и, что самое важное, вопрос о фигуре Земли, до последнего времени столь волновавший [умы ученых], теперь полностью разрешен,[7] а отсюда следует, что разность между расстоянием центра Земли от полюса и расстоянием центра от экватора вдвое больше, чем утверждал Ньютон. Таким образом, хотя Ньютон считал, что Земля состоит из однородного вещества, теперь установлено, что вещество Земли не однородное, но что около центра оно более плотное. Если допустить, что вещество, из которого состоит планета, однородно, то, поскольку естественный вес, производимый силой притяжения, у экватора планеты уменьшается центробежной силой, возникающей от суточного движения, на часть $\frac{1}{k}$, я с помощью вычислений нашел, что отношение оси планеты к диаметру экватора будет как 1 к $1+\frac{5}{4(k+2)}+\frac{25(k+6)}{8(k+2)(28k^2+107k+82)}+$ + и т. д. — отношение, которому Ньютон уделил столько внимания из-за трудности вычислений.

Следовательно, когда k есть число весьма большое, это отношение совпадает с таким: $4k+8$ к $4k+13$, откуда для Земли, принимая $k=289$, следует отношение оси Земли к диаметру экватора как 233 к 234, вместо чего Ньютон нашел 229 к 230. А поскольку это отношение основано на предположении, что планета состоит из однородного вещества, то будет очень ценным исследовать отношение веса на полюсе и на экваторе и найти

Мопертюи Пьер Луи, 1698—1759.

таким образом отношение между осью планеты и диаметром экватора, если принять, что планета состоит из неоднородного вещества, чтобы можно было потом, сопоставив это отношение с найденным из опыта, узнать строение Земли.

Прошу приветствовать от моего имени славнейших мужей Клеро и Лемоннье, которые приобрели столь большую известность своими работами в этой области знания.[8] Прошу Тебя продолжать быть ко мне благосклонным, славнейший муж,

преданный Тебе

Л. Эйлер.

Петербург, 23 ноября 1738.

Vir Celeberrime,

Litterae Tuae humanissimae una cum excellenti Opere Tuo de figura Terrae ab Illustrissimo Praeside nostro mihi sunt redditae; pro quibus pariter ac pro honore, quo me es dignatus, maximas ago gratias.

Ego vero ob nominis Tui Celebritatem atque insignia in scientias merita jam pridem desiderio flagravi non solum in Tui notitiam perveniendi, sed etiam amicitiam Tuam ambiendi, cujus quidem voti compos ut fierem, non exiguam spem jam ante Tuas Litteras acceptas mihi fecerat unanimis Academiae nostrae consensus de Te tanquam Membro recipiendo. Nunc autem eo magis gaudio sum affectus, quod Tute, Vir Celeberrime, amicitiam ultro offers, qua mihi nihil gratius accidere potuisset, quam ob rem debitas Tibi persolvo gratias, etiam atque rogans ut me in numerum amicorum Tuorum recipere non dedigneris, quem favorem omnibus viribus mereri annitar. Si opus meum Mechanicum Tibi probatur, uti scribis, id quidem plus me commovet, quam centum aliorum suffragia, imprimisque desiderarem, ut annotationes Tuas, si quas fecisti, mecum communicare velles, ingenti spe fretus me per Te in hoc scientiae genere plurimum proficere posse. Quantopere autem mihi Opus Tuum mihi missum placuerit, verbis vix exprimere possum, cum id non solum accuratissimis observationibus et experimentis, sed etiam solidissimis judiciis sit refectum; atque quod praecipuum est, quaestio de figura Terrae adhuc tantopere agitata absolutissime sit decisa, ex qua quippe constat, differentiam inter distantiam centri terrae a polo et distantiam centri ab aequatore fere duplo esse majorem, quam Neutonus assignavit. Quare cum Neutonus terram tanquam ex materia uniformi constantem assumserit, sequitur materiam terrae non esse uniformem, sed circa centrum densiorem. In hypothesi autem materiae in quoque planeta uniformis, si gravitas naturalis ab attractione orta sub aequatore planetae ob vim centrifugam a motu diurno ortam diminuatur sui parte $\frac{1}{k}$ inveni calculo subducto fore rationem axis planetae ad diametrum aequatoris ut 1 ad $1+\frac{5}{4(k+2)}+\frac{25(k+6)}{8(k+2)(28k^2+107k+82)}+\text{etc.}$ cujusmodi rationem Newtonus calculi prolixitate impeditus tantum aestimatione dedit. Quando ergo k est numerus valde magnus, illa ratio proxime congruet cum hoc $4k+8$ ad $4k+13$, ex qua pro terra, ponendo $k=289$, prodit ratio axis terrae ad diametrum aequatoris ut 233 ad 234, cujus loco Neutonus invenit 229 ad 230. Quemadmodum autem haec ratio ex hypothesi materiae uniformis, quae planeta constet, consequitur, ita operis pretium foret investigare rationem gravitatis tum sub polo tum sub aequatore, indeque rationem inter axem planetae et diametrum aequatoris, si planeta ex materia difformi constare ponatur, quo deinceps ex hac ratione per experimenta definita status materiae, ex qua terra est composita, colligi queat.

Viris Clariss[imis] Clairaut et Le Monnier, quorum fama in hisce studiis jam tantum inclaruit, rogo ut meo nomine salutem plurimam dicas, atque uti Ipse coepisti favere pergas, Vir Celeberrime,

Tui Observantissimus

L. Euler

Petropoli, d. 23 Novbr. 1738.

Печатается по копии (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 27, лл. 103—104).

Пометы: «Соответствует оригиналу — Тидеман». «Г-ну Мопертюи, члену королевской Академии в Париже, члену академий Петербурга, Лондона и пр., в Париже».

[1] Речь идет о письме Мопертюи Л. Эйлеру от 20 мая 1738 г.: «Прочитав блестящий труд о механике, изданный Вами, я горячо радуюсь тому, что получил возможность засвидетельст-

вовать Вам свое восхищение и уважение; я счастлив тем, что труд, который я имею честь Вам презентовать, доставил мне такой случай: однако по отношению к такому знаменитому ученому я не мог бы ограничиться только теми чувствами, которые его труды внушают всему миру, но хотел бы удостоиться также его дружбы. Позвольте мне, милостивый государь, надеяться на эту честь, которую я постараюсь заслужить.

Из Парижа, 20 мая 1738 г.».

[2] Имеется в виду книга Мопертюи: La figure de la terre (О фигуре Земли) — Париж, 1738.

[3] Президентом Петербургской Академии был в то время И.-А. Корф.

[4] Речь идет об участии Мопертюи в Лапландской экспедиции 1736—1738 гг., организованной Парижской Академией наук для проведения градусных измерений.

[5] Мопертюи был избран почетным членом Петербургской Академии 28 августа 1738 г. (Протоколы, т. I, стр. 496, запись 1 сентября 1738 г.). Диплом об избрании был послан Мопертюи через Кантемира 21 ноября 1738 г. (Протоколы, т. I, стр. 519, запись 21 ноября 1738 г.).

[6] Mechanica sive motus scientia analytice exposita (Механика или учение о движении, изложенное аналитически) — т. 1, СПб., 1736.

[7] На основании экспериментальных данных, полученных во время Лапландской экспедиции, Мопертюи впервые сформулировал доказательство гипотезы Ньютона о сплюснутости Земли у полюсов.

[8] Здесь говорится о работах Клеро и Лемонnье в области градусных измерений и определения фигуры Земли.

2

19 февраля [1 марта] 1740 г., Петербург

Милостивый государь,

Я весьма признателен Вам за статьи, которые Вы соблаговолили мне послать.[1] Я их еще не получил; они должны были остаться в Гамбурге с частью багажа господина посла [2] и прибудут не раньше середины мая. Я огорчен этой задержкой, так как охвачен нетерпением увидеть среди других статью знаменитой маркизы,[3] которая соизволила почтить меня, выступив моим конкурентом.[4] Этой честью, за которую я ее благодарю, она сама исполнила все, на что только я мог надеяться, и, согласно суждению такого большого знатока, каким являетесь Вы, милостивый, государь, назвавший ее Аталантой, я не буду гордиться тем, что получил золотые яблоки.[5] Как только мне доставят пакет, я не премину передать остальные экземпляры, один его сиятельству г. барону де Корфу, а другой г. Делилю. Имею честь пребыть с глубоким уважением, милостивый государь,

Ваш покорный и преданный слуга

Леон[ард] Эйлер.

С.-Петербург, 19 февраля 1740.

Monsieur,

Je vous suis très sensiblement obligé des Recueils de Pièces que vous avez eu la bonte de m'envoyer. Je ne les ai pas encore reçues; elles doivent être restées à Hambourg avec le reste des Equipages de Mr L'Ambassadeur, qui ne pourront arriver que vers le mois de Mai prochain. Je suis fâché de ce contretemps, par l'impatience que j'ai de voir entr' autres la Pièce de l'illustre Marquise qui a daigné m'honorer de sa concurrence. Cet honneur dont je prends la liberté de La remercier, me satisfait par Lui même au delà de tout ce que je puis espérer et après le jugement d'un aussi grand Connoisseur que vous l'étes, Monsieur, qui l'appellés une Atalante, je n'irai pas me flatter d'avoir eu des pommes d'or. Au reste je ne manquerai pas, dès que j'aurai reçu le paquet, de remettre les deux Exemplaires restans, l'un à S. Exce Mr le Baron Korff et l'autre à Mr De L'Isle. J'ai l'honneur d'être avec un entier dévouement, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur

Leonh. Euler.

St.-Pétersbourg, ce 19 Févr. 1740.

Печатается по копии, написанной неизвестной рукой (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 30, л. 23).

Пометы: «Представлено 18 февраля 1740». «Г-ну де Мопертюи».

1 По-видимому, здесь говорится о копиях статей, присланных на конкурс Парижской Академии 1738 г.

2 Имеется в виду граф Алексей Петрович Бестужев (1693—1768), который был послом в Дании с 1720 по 1731 г., затем в Гамбурге с 1731 по 1734 г.; с 1734 по 1740 г. — снова в Дании. 25 марта 1740 г. по представлению Бирона он в чине действительного тайного советника был отозван в Петербург. На его место в Копенгагене назначен И.-А. Корф.

3 Маркиза дю Шатле Габриэль Эмилия (см. стр. 275 настоящего издания).

4 Эйлер говорит здесь о задаче, предложенной на премию Парижской Академией в 1738 г.: De la nature et de la propagation

du feu (О природе и распространении огня). Дю Шатле прислала на конкурс статью, которая была напечатана в 1744 г.: Dissertation sur la nature et la propagation du feu (Сочинение о природе и распространении огня) — Париж, 1744. Премия была присуждена Л. Эйлеру за работу: Dissertation de igne, in qua ejus natura et proprietates explicantur: occasione quaestionis, cum praemio annexo, ab illustrissima academia scientiarum regia Parisina pro anno 1738 propositae, ejusdem academiae judicio aeque admissa (Рассуждение об огне, в котором объясняются природа и свойства огня, по случаю связанного с премией вопроса, предложенного знаменитой королевской Парижской Академией наук на 1738 г., представленное на справедливый суд этой Академии) — Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie royale des sciences en MDCCXXXVIII, Париж, 1739, стр. 1—19.

[5] Аталанта — в древнегреческой мифологии аркадская охотница, ненавидевшая мужчин. Когда отец ее потребовал, чтобы она избрала себе мужа, она согласилась выйти замуж за того, кто победит ее в беге; однако во время состязания она пронзала копьем юношей, которые ее обгоняли. В мифе об Аталанте упоминается о золотых яблоках, с помощью которых она была побеждена. Афродита дала Меланьону золотые яблоки, которые тот бросал во время состязания. Аталанта их подбирала и поэтому оказалась побежденной. Здесь это выражение употреблено фигурально; имеется в виду денежная премия, назначенная Парижской Академией наук.

3

[После мая 1740 г.],[1] *Петербург*

Славнейший муж,

Многие причины побуждают меня поздравить Тебя, ибо Ты не только произвел в отдаленных областях измерения Земли [2] с такой изобретательностью и точностью, что ни у кого уже не будет сомнения в величине градуса меридиана и в характере изменения [градуса], но и истинную фигуру Земли, относительно которой весь мир до сих пор не имел определенного мнения, определил с такой ясностью,[3] что теперь нам можно будет перейти уже к исследованию внутреннего строения Земли. Величайшей наградой столь удачно исполненных Тобою работ является милостивое приглашение великого короля Прусского; [4] под покровительством короля Ты восстановишь Академию, которая должна быть постоянным украшением всего германского народа. Среди столь трудных дел Ты, славнейший муж, нашел время оказать мне такие услуги, что я не знаю, как смогу должным образом отблагодарить Тебя, ибо я получил от Тебя в подарок обе изданные Тобою книги «О фигуре Земли», которые постоянно будут мне напоминать, сколь многим я Тебе обязан. Надеюсь, впрочем, что я в скором времени лично смогу засвидетельствовать Тебе мою признательность, так как могущественный король прусский удостоил и меня приглашения в Берлинскую Академию,[5] доставив мне этим приглашением величайшую радость, ибо теперь я смогу употребить все свои силы на то, чтобы оказаться достойным столь великого благодеяния милостивейшего короля и служить славной королевской Академии; последнее будет для меня тем легче, если я смогу, славнейший муж, пользоваться Твоей желанной для меня благосклонностью. Поэтому усиленно прошу Тебя рекомендовать меня великодушному властителю и господину. Пусть Твоя дружба и благоволение ко мне пребудут неизменными.

Прощай, славнейший муж.

Твой покорный. . .

Петербург.

Vir Celeberrime,

Complures sunt causae, quae me ad gratulationem Tibi faciendam impellunt; mensuram enim terram non solum in tam dissessis regionibus tanta sollertia atque accuratione perfecisti, ut nemini de vera graduum meridiani quantitate et varietate dubium reliqueris, sed etiam veram terrae figuram, circa quam totus orbis adhuc ambiguus haerebat, tam dilucide determinasti, ut etiam internam terrae indolem nobis quodammodo cognoscere liceat. Ad hac accedit laborum felicissime a Te exantlatorum summus fructus, gratiosissima Maximi Borussorum Regis Vocatio, qua sub tanti Principis auspiciis Academiam instaurare debes, toti nationi germanicae perpetuo decori habendam. Inter tot autem gravissima negotia me Tibi, Vir Celeberrime, tantopere devinxisti, nesciam quomodo Tibi debitas gratias exsolvere possim, accepi enim Tua munificentia ambos libros, quos de Figura Terrae edidisti, qui me quantum Tibi debeam, perpetuo commonefaciunt. Spero autem propediem fore, ut Tibi gratum meum animum coram testari possim, cum Potentissimus Rex Borussiae me quoque ad Academiam Berolinensiam appellare sit dignatus, qua vocatione mihi certe ad summum felicitatis fastigium pertingere videor; quamobrem nunc jam omnes vires in id unice intendo ut me tanta Clementissimi Regis gratia dignum praestare, atque inclutae Academiae Regiae pro viribus servire queam, id quod eo facilius est qui potero, si mihi Tua, Vir Celeberrime, exoptatissima consuetudine, uti licebit. Quamobrem Te vehementer etiam atque etiam rogo, ut me Celsissimi Principi ac Domino commendare, Tuamque mihi amicitiam largiri velis. Vale atque favere perge,

Vir Celeberrime,
Tui Observantissimo. . .

Dabam Petropoli.

Печатается по собственноручной копии (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1, л. 67 и об.).

Пометы: «Г-ну Мопертюи. От Эйлера».

[1] Датируется по содержанию.

[2] См. прим. 4 к 1-му письму.

[3] См. прим. 7 к 1-му письму.

[4] Мысль об организации Берлинской Академии и приглашении Мопертюи была подана Фридриху II Вольтером в июне 1738 г. Приглашение, о котором говорится в письме, последовало в мае 1740 г.: P. Brunet. Maupertuis. Etude biographique (Мопертюи. Биографический этюд) — Париж, 1929, стр. 76—78.

[5] Переписка о переходе Эйлера в Берлинскую Академию наук началась вскоре после 16 III 1740, когда был заключен новый контракт Петербургской Академии с Эйлером. В феврале 1741 г. Эйлер обратился в Академию с просьбой об увольнении; 20 мая этого же года он получил увольнение из Академии (Пекарский, т. I, стр. 256—257).

НОДЕ

Ноде, Филипп (Naudé, Philippe, 1684—1745) — один из виднейших математиков в Берлине в первой половине XVIII в. Его отец, тоже Филипп, известный математик и протестантский теолог, в 1687 г., спасаясь от религиозных преследований, покинул Францию и занял место профессора математики в гимназии в Иоахимштале; он преподавал в Академии художеств, с 1701 г. был членом Берлинской Академии наук. Ноде-сын пошел по стопам отца. Он также преподавал математику в иоахимштальской гимназии и в Академии художеств. В 1714 г. избран членом Берлинской Академии, в 1738 г. — членом Лондонского королевского общества. О связях Ноде с Петербургской Академией впервые упоминается в протоколе Конференции от 30 мая 1740 г. (Протоколы, т. I, стр. 613); из этой протокольной записи видно, что Ноде сначала переписывался с Гейнзиусом и уже в письмах к нему затрагивал вопросы, касающиеся работ Эйлера.

[12/23] сентября 1740 г., Петербург.

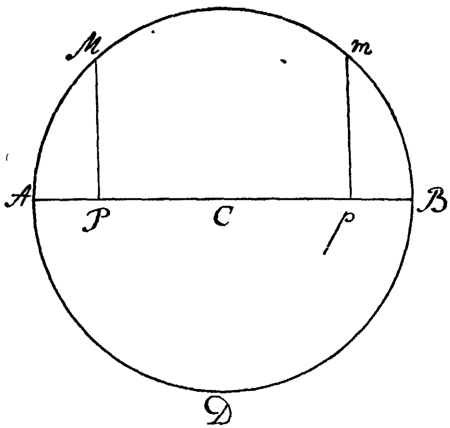
Мужу славнейшему Филиппу Ноде
шлет большой привет Леонард Эйлер.

Твое любезное письмо,[1] славнейший муж, я смог прочитать лишь с большим опозданием из-за слабости зрения, которой я страдал несколько недель,[2] но теперь, когда я, немного восстановив свои силы, с огромным удовольствием прочитал Твое столь дорогое мне письмо, я приношу Тебе глубочайшую благодарность за прекрасное свидетельство Твоего благоволения ко мне. Ведь уже тогда, когда славный Гейнзиус отослал Тебе копию моего письма к славному Стирлингу,[3] я послал бы Тебе более подробное изложение моего способа, которым я пользовался для нахождения сумм рядов $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}$ и т. д., когда n — четное число, но я боялся обременить Тебя, зная, что Ты так занят и ведешь переписку со столь многими выдающимися людьми. Теперь, в ответ на Твое столь любезное предложение,[4] славный муж, я с величайшим удовольствием пользуюсь случаем более подробно изложить Тебе мой метод в целом.

Я рассмотрел следующее уравнение:

$$y = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \ldots 7}$$

и т. д., которое в круге, радиус которого равен 1, содержит соотношение между любой дугой s и ее синусом y. Из него можно определить как по данной дуге s ее синус y, так и по данному синусу y соответствующую ему дугу s.



Известно, однако, что одному и тому же синусу y соответствуют бесчисленные дуги круга, так что каждая из них, подставленная на место s, будет удовлетворять предложенному уравнению. Отсюда это уравнение, если рассматривать s как неизвестную, будет допускать бесконечное множество корней, что связано также с бесконечным числом измерений неизвестной s, ибо всякое уравнение имеет число корней, равное числу измерений неизвестного.[5] Однако все эти корни предложенного уравнения выясняются из природы круга и даже могут быть указаны, если известна квадратура круга. Проведем в круге, радиус которого $AC = BC = 1$, синус, равный y, что можно сделать двумя способами, взяв как $PM = y$, так и $pm = y$; при таких условиях все дуги, которые берут начало в A и заканчиваются или в M или в m, будут иметь тот же синус y и поэтому могут быть подставлены вместо неизвестной s. Положим полупериферию этого круга $AMmB = \pi$, так, чтобы $1 : \pi$ было равно отношению диаметра ко всей периферии, и пусть дуга $AM = \frac{m}{n}\pi$; дуга AMm при этом будет равна $\pi - \frac{m}{n}\pi$; дуга $AMmBDAM = 2\pi + \frac{m}{n}\pi$; дуга $AMmBDAMm = 3\pi - \frac{m}{n}\pi$ и т. д.

У всех этих дуг один и тот же синус y. Кроме того, если продвигаться от A в противоположную сторону, получатся отрицательные дуги

$$ADBm = -\pi - \frac{m}{n}\pi; \quad ADBmM = -2\pi + \frac{m}{n}\pi;$$

$$ADBmMADBm = -3\pi - \frac{m}{n}\pi \text{ и т. д.}$$

Таким образом, все дуги, как положительные, так и отрицательные, которые имеют один и тот же синус y, будут

$$+\frac{m}{n}\pi + \frac{n-m}{n}\pi + \frac{2n+m}{n}\pi + \frac{3n-m}{n}\pi + \frac{4n+m}{n}\pi + \text{ и т. д.}$$

$$-\frac{n-m}{n}\pi - \frac{2n+m}{n}\pi - \frac{3n-m}{n}\pi - \frac{4n+m}{n}\pi - \frac{5n-m}{n}\pi -$$

и т. д. Все они дают значения s, удовлетворяющие предложенному уравнению

$$0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3y} - \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y} +$$

$$+ \frac{s^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7y} - \text{ и т. д.},$$

так что мы получим все корни этого уравнения или значения s. Пусть эти значения ради краткости будут a, b, c, d, e, f и т. д., чтобы вычисление с биномами не было запутанным и слишком пространным и чтобы не создавало трудностей разнообразие обозначений. Итак, делители этого уравнения будут $1 - \frac{s}{a}$; $1 - \frac{s}{b}$; $1 - \frac{s}{c}$; $1 - \frac{s}{d}$ и т. д.; отсюда, когда все делители известны, будет

$$1-\frac{s}{y}+\frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3y}-\frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y}+\frac{s}{1\cdot 2\ldots 7y}-\text{ и т. д.},$$

$$\left(1-\frac{s}{a}\right)\left(1-\frac{s}{b}\right)\left(1-\frac{s}{c}\right)\left(1-\frac{s}{d}\right)\text{ и т. д.}$$

Если эти множители, действительно, перемножить между собой, необходимо, чтобы коэффициенты при отдельных степенях s были равны коэффициентам при тех же степенях s в уравнении. Из умножения, однако, получится коэффициент при $-s=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+$ и т. д., и этот ряд назовем равным α. Тогда коэффициент при $+s^2$ будет сумма [произведений] множителей из двух членов ряда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+$ и т. д., взятых по два, которую положим равной β. В-третьих, сумма [произведений] множителей членов по три, которую обозначим через γ, будет коэффициент при $-s^3$; в-четвертых, коэффициент члена $+s^4$ будет суммой [произведений] множителей членов ряда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+$ и т. д. по четыре, которая пусть будет равна δ, и т. д. Отсюда получится произведение из бесконечного числа указанных множителей

$$1-\alpha s+\beta s^2-\gamma s^3+\delta s^4-\varepsilon s^5+\text{ и т. д.}$$

Поскольку оно должно быть равно выражению

$$1-\frac{s}{y}+\frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3y}-\frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4y}+\frac{s^7}{1\cdot 2\ldots 7y}-\text{ и т. д.},$$

то будет

$$\alpha=\frac{1}{y};\ \beta=0;\ \gamma=\frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3y};\ \delta=0;$$

$$\varepsilon=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y};\ \zeta=0;$$

$$\eta=\frac{-1}{1\cdot 2\ldots 7y};\ \theta=0;\ \iota=\frac{1}{1\cdot 2\ldots 9y}\text{ и т. д.}$$

Итак, если подставить вместо a, b, c и т. д. должные значения, мы получим такой ряд членов:

$$\frac{n}{m\pi}+\frac{n}{(n-m)\pi}-\frac{n}{(n+m)\pi}-\frac{n}{(2n-m)\pi}+$$

$$+\frac{n}{(2n+m)\pi}+\frac{n}{(3n-m)\pi}-\text{ и т. д.,}$$

сумма этих членов будет $\alpha=\frac{1}{y}$; сумма [произведений] множителей по два $\beta=0$; сумма [произведений] множителей по три $\gamma=\frac{1}{6y}$; сумма [произведений] множителей по четыре $\delta=0$; сумма [произведений] множителей по пять равна $\frac{+1}{120y}$; сумма по шесть — 0 и т. д., а y есть синус дуги $\frac{m}{n}\pi$ при предположении, что полный синус равен 1, так чтобы после указания значений чисел m и n геометрически выводилось значение y. Однако прежде чем мы приспособим это для нахождения сумм отдельных степеней, следует более подробно исследовать первый ряд, а именно $\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}+\frac{1}{5n-m}-$ — и т. д. $=\frac{\pi}{ny}$. Предположим, что $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ или $\frac{m}{n}\pi=90^\circ$, так что $y=1$; тогда будет $\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+$ и т. д. или $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ и т. д., а это есть ряд Лейбница. Если предположить $\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$ или $\frac{m}{n}\pi=60^\circ$, так что $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, будет $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$ и т. д. Предположим $\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$ или $\frac{m}{n}\pi=45^\circ$, будет $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-$ и т. д. Такой ряд, если я не ошибаюсь, первый выдвинул Ньютон. Таким образом можно представить и многие другие подобные ряды, суммы которых могут быть выражены через квадратуру круга π; сами по себе они весьма изящны и могут служить для доказательства правильности метода. Суммы же степеней членов ряда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+$

$+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+$ и т. д. могут быть выведены из полученных сумм [произведений] множителей по два, по три, по четыре и т. д. с помощью теорем, достаточно известных и неоднократно доказанных. Ведь если мы будем иметь конечное или бесконечное число величин $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+$ $+\frac{1}{d}+$ и т. д., и их сумма будет равна α, сумма [произведений] множителей по два — β, сумма [произведений] множителей по три — γ, сумма [произведений] множителей по четыре — δ, сумма [произведений] множителей по пять — ε и т. д., и если мы обозначим ряды степеней следующим образом

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\text{ и т. д.}=A,$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\text{ и т. д.}=B,$$

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\text{ и т. д.}=C,$$

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}+\frac{1}{d^4}+\text{ и т. д.}=D\text{ и т. д.},$$

то будет $A=\alpha$; $B=\alpha A-2\beta$; $C=\alpha B-\beta A+3\gamma$; $D=\alpha C-\beta B+\gamma A-4\delta$ и т. д., и если значения α, β, γ и т. д. определены, то будет

$$A=\frac{1}{y};\ B=\frac{1}{y}A=\frac{1}{y^2};\ C=\frac{B}{y}-\frac{1}{2y}=\frac{1}{y^3}-\frac{1}{2y};$$
$$D=\frac{C}{y}-\frac{A}{6y}=\frac{1}{y^4}-\frac{2}{3y^2};\ E=\frac{D}{y}-\frac{B}{6y}+\frac{1}{24y}=$$
$$=\frac{1}{y^5}-\frac{5}{6y^3}+\frac{1}{24y}\text{ и т. д.}$$

Из них, если подставить вместо a, b, c и т. д. должные значения, получатся следующие суммы рядов для степеней:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+$$
$$+\frac{1}{3n+m}-\text{ и т. д.}=\frac{\pi}{ny},$$

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(n-m)^2}+\frac{1}{(n+m)^2}+\frac{1}{(2n-m)^2}+$$

$$+\frac{1}{(2n+m)^2}+\frac{1}{(3m-n)^2}+\text{и т. д.}=\frac{\pi^2}{nnyy},$$

$$\frac{1}{m^3}+\frac{1}{(n-m)^3}-\frac{1}{(n+m)^3}-\frac{1}{(2n-m)^3}+\frac{1}{(2n+m)^3}+$$
$$+\frac{1}{(3n-m)^3}+\text{и т. д.}=\frac{\pi^3}{n^3}\left(\frac{1}{y^3}-\frac{1}{2y}\right),$$

$$\frac{1}{m^4}+\frac{1}{(n-m)^4}+\frac{1}{(n+m)^4}+\frac{1}{(2n-m)^4}+\text{и т. д.}=$$
$$=\frac{\pi^4}{n^4}\left(\frac{1}{y^4}-\frac{2}{3y^2}\right),$$

$$\frac{1}{m^5}+\frac{1}{(n-m)^5}-\frac{1}{(n+m)^5}-\frac{1}{(2n-m)^5}+\text{и т. д.}=$$
$$=\frac{\pi^5}{n^5}\left(\frac{1}{y^5}-\frac{5}{6y^3}+\frac{1}{24y}\right).$$

Из этих общих сумм вытекают те ряды, суммы которых я выразил раньше. Ибо при условии $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, при $y=1$ и учитывая, что каждый член встречается дважды, мы будем иметь следующие ряды:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{и т. д.}=\frac{\pi}{4}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{и т. д.}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\text{и т. д.}=\frac{\pi^3}{32}$$

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{и т. д.}=\frac{\pi^4}{96}$$

$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\text{и т. д.}=\frac{5\pi^5}{1536}\text{ и т. д.}$$

В этих рядах имеются только нечетные числа, но для четных степеней могут быть введены также и четные числа, ибо ведь вообще $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{и т. д.}=\frac{2^n}{2^n-1}\left(1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\text{и т. д.}\right)$.

С помощью этой леммы можно вычислить суммы ряда $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+$ и т. д. в случаях, когда n — четное число, и получатся следующие суммы, которые ради краткости [мы запишем в виде $\alpha\pi^2$, $\beta\pi^4\ldots$]

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{и т. д.}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\cdot1\cdot\pi^2=\alpha\pi^2,$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{и т. д.}=\frac{2^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4=\beta\pi^4,$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{и т. д.}=\frac{2^4}{1\cdot2\cdot3\ldots7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6=\gamma\pi^6,$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\text{и т. д.}=\frac{2^6}{1\cdot2\cdot3\ldots9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8=\delta\pi^8,$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\text{и т. д.}=\frac{2^8}{1\cdot2\cdot3\ldots11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10}=\varepsilon\pi^{10},$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{10}}{1\cdot2\cdot3\ldots13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12}=\zeta\pi^{12},$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{12}}{1\cdot2\cdot3\ldots15}\cdot35\pi^{14}=\eta\pi^{14},$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{14}}{1\cdot2\cdot3\ldots17}\cdot\frac{3617}{15}\pi^{16},$$

$$1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{16}}{1\cdot2\cdot3\ldots19}\cdot\frac{43867}{21}\pi^{18},$$

$$1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{18}}{1\cdot2\cdot3\ldots21}\cdot\frac{1222277}{55}\pi^{20},$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{20}}{1\cdot2\cdot3\ldots23}\cdot\frac{854513}{3}\pi^{22},$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{22}}{1\cdot2\cdot3\ldots25}\cdot\frac{1181820455}{273}\pi^{24},$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{24}}{1\cdot2\cdot3\ldots27}\cdot76977927\cdot\pi^{26}.$$

До сих пор эти суммы я фактически получал с помощью расчетов и пользовался при этом особым законом последовательного вычисления величин α, β, γ, δ и т. д., зависящим от первого [числа], но так гораздо легче можно определить каждый отдельный коэффициент, а именно

$$\alpha=\frac{1}{6};\quad \beta=\frac{2\alpha^2}{5};\quad \gamma=\frac{4\alpha\beta}{7};\quad \delta=\frac{4\alpha\gamma+2\beta\beta}{9};$$

$$\varepsilon=\frac{4\alpha\delta+\alpha\beta\gamma}{11};\quad \zeta=\frac{4\alpha\varepsilon+4\beta\delta+2\gamma\gamma}{13};$$

$$\eta=\frac{4\alpha\zeta+4\beta\varepsilon+\alpha\gamma\delta}{15}\ \text{и т. д.}$$

Этот закон легко устанавливается, если подумать о форме квадрата ряда $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+$ и т. д., взятого дважды, которая будет

$$\begin{aligned}2\alpha^2+4\alpha\beta x+4\alpha\gamma+4\alpha\delta+4\alpha\varepsilon\\ +2\beta\beta x^2+4\beta\gamma x^3+4\beta\delta x^4+\text{ и т. д.}\\ +2\gamma\gamma.^6\end{aligned}$$

Итак, перед Тобой, славный муж, не только мой метод, которым я пришел к суммам степеней такого рода, но также и закон, достаточно разработанный, по которому можно получить суммы каких угодно степеней из предшествующих. Этот же самый закон следования открыл мне путь к нахождению суммы ряда $\frac{1}{1+n}+\frac{1}{4+n}+\frac{1}{9+n}+$ и т. д. (у которого знаменатели суть квадраты, увеличенные на данное число n), и это, быть может, понравится Тебе не меньше, чем предыдущее. Пусть сумма того ряда, которую я ищу, будет S, так что $S=\frac{1}{1+n}+\frac{1}{4+n}+\frac{1}{9+n}+\frac{1}{16+n}+\frac{1}{25+n}+$ и т. д.; разложим отдельные члены в бесконечную геометрическую прогрессию с помощью деления и получим (согласно вышеуказанной формуле)

$$\begin{aligned}S&=1\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{ и т. д.}\right)=+\alpha\pi^2\\ &-n\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{ и т. д.}\right)\quad -\beta n\pi^4\\ &+n^2\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{ и т. д.}\right)\quad +\gamma n^2\pi^6\\ &-n^3\left(1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\text{ и т. д.}\right)\quad -\delta n^3\pi^8\\ &+n^4\left(1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\text{ и т. д.}\right)\quad +\varepsilon n^4\pi^{10}\\ &-n^5\left(1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\text{ и т. д.}\right)\quad -\zeta n^5\pi^{12}\text{ и т. д.};\end{aligned}$$

отсюда $nS=\alpha n\pi^2-\beta n^2\pi^4+\gamma n^3\pi^6-\delta n^4\pi^8+$ и т. д., и, если предположить, что $n\pi^2=z^2$, то $nS=\alpha z^2-\beta z^4+\gamma z^6-\delta z^8+\varepsilon z^{10}-$ и т. д. Берем двойной квадрат этого ряда

$$\begin{aligned}2n^2S^2=2\alpha^2z^4-4\alpha\beta z^6+4\alpha\gamma z^8-4\alpha\delta z^{10}+4\alpha\varepsilon\\ +2\beta\beta\quad -4\beta\gamma\quad +4\beta\delta z^{12}-\text{ и т. д.}\\ +2\gamma\gamma\end{aligned}$$

А так как по вышеизложенному закону будет $2\alpha^2 = 5\beta$; $4\alpha\beta = 7\gamma$; $4\alpha\gamma + 2\beta\beta = 9\delta$ и т. д., мы получим следующее уравнение:

$$2n^2S^2 = 5\beta z^4 - 7\gamma z^6 + 9\delta z^8 - 11\varepsilon z^{10} + \text{ и т. д.},$$

которое, умноженное на dz и интегрированное, даст $\int 2n^2S^2dz = \beta z^5 - \gamma z^7 + \delta z^9 - \varepsilon z^{11} +$ и т. д., и так как $nS = \alpha z^2 - \beta z^4 + \gamma z^6 - \delta z^8 +$ и т. д., то $\alpha z^3 - nSz = \beta z^5 - \gamma z^7 + \delta z^9 -$ и т. д. $= \int 2n^2S^2dz$, так что найдено следующее уравнение: $\alpha z^3 - nSz = \int 2n^2S^2dz$, и его дифференцирование в силу $\alpha = \frac{1}{6}$ даст $\frac{1}{2}zzdz - nSdz - nzdS = 2n^2S^2dz$.

Это уравнение, приведенное и интегрированное, если вместо z подставить его значение $\pi\sqrt{n}$, даст значение искомой суммы S. Однако должна быть произведена двойная операция в зависимости от того, положительное или отрицательное число n. В случае, когда n есть положительное число, если обозначить через e сумму ряда $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} +$ и т. д., то сумма ряда $\frac{1}{1+n} + \frac{1}{4+n} + \frac{1}{9+n} + \frac{1}{16+n} +$ и т. д. будет равна $\frac{\pi\sqrt{n+1}}{2n} + \frac{\pi}{(e^{2\pi\sqrt{n}} - 1)}$.

В случае же, когда n есть отрицательное число, если выражение $\widetilde{\text{tag}}\cdot A\pi\sqrt{n}$ обозначает тангенс дуги $\pi\sqrt{n}$ в круге радиуса, равного 1, то сумма ряда $\frac{1}{1-n} + \frac{1}{4-n} + \frac{1}{9-n} + \frac{1}{16-n} +$ и т. д. будет $\frac{1}{2n} - \frac{\pi\sqrt{n}}{2n\cdot\widetilde{\text{tag}}\cdot A\pi\sqrt{n}}$.

Хотя сумма этого последнего ряда, рассматриваемая в целом, зависит от квадратуры круга и от значения n, она, однако, в бесчисленном множестве случаев может быть определена абсолютно, что происходит, если при обозначении через i какого-либо нечетного числа будет $n = \frac{ii}{4}$. Тогда, так как $\widetilde{\text{tag}}\cdot A\frac{i\pi}{2}$ бесконечен, то член

$\frac{\pi\sqrt{n}}{2n\cdot \text{tāg}\cdot A\pi\sqrt{n}}$ выпадает. Итак, отсюда получим $\frac{4}{4-ii}+$ $+\frac{4}{16-ii}+\frac{4}{36-ii}+\frac{4}{64-ii}+$ и т. д. $=\frac{2}{ii}$, $\frac{1}{4-ii}+$ $+\frac{1}{16-ii}+\frac{1}{36-ii}+\frac{1}{64-ii}+$ и т. д. $=\frac{1}{2ii}$.

Поэтому можно утверждать, что сумма ряда $\frac{1}{4-n}+$ $+\frac{1}{16-n}+\frac{1}{36-n}+\frac{1}{64-n}+$ и т. д. будет равна $\frac{1}{2n}$ всякий раз, когда n будет целое нечетное число, равное полному квадрату. Во всех остальных случаях сумма будет или больше или меньше $\frac{1}{2n}$, что представляет весьма любопытный парадокс. Но я боюсь, как бы я, продолжая рассуждать об этом, не злоупотребил Твоим терпением.

Итак, перехожу к остальным разделам Твоего любезного письма. Прежде всего, что касается построения ряда всех тех чисел 1, 6, 35, 204 и т. д., квадраты которых одновременно являются треугольными числами, то Ты, славный муж, несомненно можешь по Твоему методу найти все его члены, но, как Ты и сам указываешь, не без огромных трудностей. Так и должно быть при полном решении такого рода вопросов методом, отличным от Диофантова, ибо ведь он дает только рациональные числа, удовлетворяющие [условиям задачи], из которых те, что являются целыми, очень трудно различать, если не прибегнуть к особому приему; я, однако, дал такого рода метод в VI томе наших «Комментариев», который уже опубликован; [7] я нашел, что если у этого ряда два смежных члена будут A, B, следующий будет $6A-B$. Если же мы пожелали бы охватить все эти числа одной общей формулой, она будет равна $\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$, а это выражение, если за n принять любое целое число, даст рациональное целое число, квадрат которого будет треугольным числом.[8]

Решение второй задачи, которую Ты получил из Данцига,[9] следующее. Допустим, весь сосуд содержит n мер, а за каждую минуту через отверстие вытекает одна мера, и если вначале сосуд был наполнен чистым вином, то сверху постепенно вливается столько же воды, сколько вытекает через отверстие, причем вино и вода постоянно перемешаны равномерно по всему сосуду. Я ищу состояние вытекшей жидкости за x минут и предполагаю, что тогда в сосуде уже находилось y мер воды, так что вина еще оставалось $n-y$ мер; по истечении времени $x+dx$ количество воды в сосуде будет $y+dy$ мер, а вина $n-y-dy$ мер. А поскольку за время $1'$ вытекает одна мера, за время dx вытечет dx жидкости, в которой будет часть $\frac{ydx}{n}$ воды и остальная часть $\frac{(n-y)\,dx}{n}$ вина; втечет же, с другой стороны, за истекшее время dx количество воды dx, и количество воды, находящейся в сосуде, будет $y=\frac{ydx}{n}+dx=y+\frac{(n-y)\,dx}{n}$, количество же вина равно $n-y-\frac{(n-y)\,dx}{n}$. По природе дифференциального исчисления количество воды равно $y+dy$, откуда должно быть $y+\frac{(n-y)\,dx}{n}=y+dy$; отсюда получается $dx=\frac{ndy}{n-y}$ и интегрированием $x=n\mathrm{l}\frac{n}{n-y}$ или, если предположить, что по истечении времени x минут в сосуде останется z мер вина, будет $x=n\,\mathrm{l}\frac{n}{z}$, где l обозначает гиперболический логарифм. Если мы уже положили для данного времени x количество оставшегося в сосуде вина z, то нужно перейти от логарифмов к числам, откуда, если e будет то число, гиперболический логарифм которого равен 1, то будет $e^{\frac{x}{n}}=\frac{n}{z}$.

Из этого уравнения получим $z=n\,l^{-\frac{x}{n}}$ или через ряд $z=n-x+\frac{xx}{2n}-\frac{x^3}{6n^2}+\frac{x^4}{24n^3}-$ и т. д. Итак, в предложенном случае, в котором $n=10$ мер и $x=10$ минут, будет $z=10\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\text{ и т. д.}\right)=3\frac{67879}{100000}$ мер. Столько вина останется в сосуде по истечении десяти минут. Впрочем, следует заметить, что все вино не может вытечь из сосуда, если только не за бесконечно большее время. Кроме того, очень верно Твое, славный муж, наблюдение, что если x и n возрастают или убывают в одинаковом отношении, то тогда отношение z к n остается то же самое.

Задачи Твои, славный муж, о разбиении чисел чрезвычайно понравились мне из-за их изящества и полезности для познания свойств чисел,[10] и я тем более очень хотел бы видеть полное изложение этого вопроса, поскольку сам я тоже уже напал на такую же задачу, но не мог найти достаточно удобного и легкого решения, какого я желал. В связи с выражением $(1+nx)(1+n^2x)$ [а]$(1+n^3x)$[а] $(1+n^4x)(1+n^5x)$ и т. д. я пришел к первой задаче.

Ведь если действительно перемножить между собой эти множители, получится следующее выражение:

$$\begin{gathered}1+x(n^1+n^2+n^3+n^4+n^5+n^6+n^7+n^8+\text{ и т. д.}),\\ +x^2(n^3+n^4+2n^5+2n^6+3n^7+3n^8+4n^9+\\ +4n^{10}+5n^{11}+\text{ и т. д.}),\\ +x^3(n^6+n^7+2n^8+3n^9+4n^{10}+5n^{11}+7n^{12}+\\ +8n^{13}+10n^{14}+\text{ и т. д.}),\\ +x^4(n^{10}+n^{11}+2n^{12}+3n^{13}+5n^{14}+6n^{15}+9n^{16}+\\ +11n^{17}+15n^{18}+\text{ и т. д.}).\end{gathered}$$

Об этом выражении надо сказать следующее: в ряде, стоящем множителем при x^2, коэффициент любого члена, который является степенью n, показывает, сколькими способами показатель степени может быть разбит на две неравные части. Далее, в ряде, стоящем множителем при x^3, любой коэффициент показывает, сколькими способами показатель степени n может быть разбит на три неравные части, и т. д. Кроме того, ясно, что ряд, на который умножается x, получается, если разделить n на $1-n$; далее, ряд при xx образуется из разделения n^3 на $(1-n)(1-nn)$; в-третьих, ряд при x^3 образован из деления степени n^6 на $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)$ и т. д. Затем для вывода последующих рядов из предыдущих я нашел правило. Пусть у меня такая форма обозначения: $(A)^{(p)}$ означает число, показывающее, сколькими способами число A может быть разбито на p частей; при этом

$$(A)^{(p)}=(A-p)^{(p)}-(A-p)^{(p-1)},$$

где прежде всего следует отметить, что если $p=1$, то $(A)^{(p)}=1$; во-вторых, если $A=\frac{p(p+1)}{2}$, то $(A)^{(p)}=1$, и,

[а–а] *Выражение* $(1+n^3x)$ *в копии пропущено.*

в-третьих, если $A < \frac{p(p+1)}{2}$, то $(A)^{(p)} = 0$; с помощью этого правила может быть без труда решен любой относящийся сюда вопрос; однако этот метод страдает тем неудобством, что необходимо, чтобы сначала были решены все более простые случаи. Так, я нашел, что число 50 может быть разложено на 7 частей (не равных между собой) 522 способами. Если же подобным образом выражение $\frac{1}{(1-nx)(1-n^2x)(1-n^3x) \text{ и т. д.}}$ развернуть последовательным делением, получится следующее выражение:

$$\begin{gathered}1 + x(n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7 + n^8 + n^9 + \text{ и т. д.}),\\ + x^2(n^2 + n^3 + 2n^4 + 2n^5 + 3n^6 + 3n^7 + 4n^8 +\\ + 4n^9 + 5n^{10} + \text{ и т. д.}),\\ + x^3(n^3 + n^4 + 2n^5 + 3n^6 + 4n^7 + 5n^8 + 7n^9 +\\ + 8n^{10} + 10n^{11} + \text{ и т. д.}),\\ + x^4(n^4 + n^5 + 2n^6 + 3n^7 + 5n^8 + 6n^9 + 9n^{10} +\\ + 11n^{11} + 15n^{12} + \text{ и т. д.}) \text{ и т. д.},\end{gathered}$$

где коэффициент любого члена показывает, сколькими способами соответствующий показатель степени n может быть разбит на такое число равных или неравных частей, которое совпадает с показателем соответствующей степени x. Об этом разбиении я заметил также, что если $(A)^{(p)}$ обозначает число, показывающее, сколькими способами A может быть разбито на p частей, то

$$(A)^{(p)} = (A-p)^{(p)} + (A-1)^{(p-1)}.$$ [11]

Однако я надеюсь, что об этом смогу более глубоко осведомиться у Тебя. Относительно наиболее вместительной фигуры, которая может быть заключена в прямых линиях, [12] это есть фигура, вписываемая в круг. Доказательство этого дал несколько лет тому назад наш адъюнкт Мула.[13] Оно появится в IX томе наших «Комментариев».

Осталось лишь сообщить, что я очень хотел бы послать Тебе, славный муж, мое сочинение о теории музыки,[14] если мне представится удобный случай, которого я буду ждать. Отсюда было послано большое количество экземпляров в Лейпциг к книготорговцу Шустеру. Возможно, Ты мог бы легче получить оттуда. Будь здоров и сохрани свою благосклонность ко мне.

Петербург, канун сентябрьских Ид 1740 ст. ст.

Viro Clarissimo Philippo Naudeo
S. P. D. Leonhard Euler.

Litteras Tuas humanissimas, Vir Clarissime, tardius mihi perlegere licuit, ob visus imbecillitatem, qua ab aliquot jam hebdomadis laboraveram; nunc vero recuperatis paulisper viribus, cum epistolam tuam mihi longe gratissimam summa cum voluptate perlustravi, tum Tibi pro eximiis benevolentiae erga me testimoniis maximas ago gratias. Equidem jam tum, cum clar. Heinsius Tebi apographum litterarum mearum ad Clar. Stirlingium datarum mitteret, Tibi pleniorem methodi meae, qua ad summas serierum $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+$ etc. existente n numero pari inveniendas sum usus, explicationem misissem, nisi veritus essem, ne Tibi in commercio cum tot praestantissimis viris colendo tantopere occupato molestus forem. Nunc igitur a te, Vir Celeb., tam humaniter invitatus summo gaudio arripio occasionem universam meam methodum Tibi fusius exponendi.

Consideravi scilicet hanc aequationem $y=s-\frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}+$ $+\frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{s^7}{1\ldots 7}$ etc., quae in circulo, cujus radius$=1$, continet relationem inter arcum quemcunque s suumque sinum rectum y; ex eaque proinde tam ex dato arcu s ejus sinus y, quam ex dato sinu y ejus arcus respondens s definiri poterit. Constat autem eidem sinui recto y innumerabiles arcus circulares respondere, quorum propterea unusquisque loco s substitutus aequationi propositae satisfaciet; ex qua ista aequatio, si quidem s tanquam incognita spectetur, infinitas admittet radices, id quod etiam infinitus incognitae s dimensionum numerus testatur; cum omnis aequatio tot habeat radices, guot incognitae sint dimensiones. Omnes autem hae radices propositae aequationis ex natura circuli innotescunt, atque adeo concessa circuli quadratura assignari possunt. Applicetur enim in circulo, cujus radius $AC=BC=1$, sinus rectus$=y$, id quod duplici modo fieri potest, sumendo cum

$PM = y$, tum $pm = y$; his positis omnes jam arcus initium in A sumentes, et qui vel in M vel in m terminantur, eundem habebunt sinum y; ideoque in locum incognitae s substitui poterunt. Ponatur hujus circuli semiperipheria $AMmB = \pi$, ita ut sit $1 : \pi$ ut diameter ad totam peripheriam, sitque arcus $AM = \frac{m}{n}\pi$; erit arcus $AMm = \pi - \frac{m}{n}\pi$; arcus $AMmBDAM = 2\pi + \frac{m}{n}\pi$; arcus $AMmBDAMm = 3\pi - \frac{m}{n}\pi$ etc. quorum arcuum omnium idem est sinus y. Praeterea vero ex A progrediendo in oppositam regionem prodibunt arcus negativi

$$ADBm = -\pi - \frac{m}{n}\pi; \quad ADBm\,M = -2\pi + \frac{m}{n}\pi;$$

$$ADBm\,MADBm = -3\pi - \frac{m}{n}\pi, \text{ etc.}$$

Hinc itaque omnes arcus tam affirmativi quam negativi, qui conveniunt eidem sinui y erunt

$$+\frac{m}{n}\pi + \frac{n-m}{n}\pi + \frac{2n+m}{n}\pi + \frac{3n-m}{n}\pi + \frac{4n+m}{n}\pi + \text{etc.},$$

$$-\frac{n-m}{n}\pi - \frac{2n+m}{n}\pi - \frac{3n-m}{n}\pi - \frac{4n+m}{n}\pi -$$

$$-\frac{5n-m}{n}\pi - \text{etc.},$$

qui omnes idoneos ipsius s valores exhibent pro aequatione proposita

$$0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3y} - \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5y} +$$

$$+ \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7y} - \text{etc.}$$

ita ut hujus aequationis omnes habeantur radices seu valores ipsius s. Sint hi valores brevitatis gratia a, b, c, d, e, f, etc., ut calculus illis binomiis nec confusus nec nimis prolixux evadat; neque signorum diversitas difficultatem afferat. Erunt igitur istius aequationis divisores

$$1 - \frac{s}{a}; \quad 1 - \frac{s}{b}; \quad 1 - \frac{s}{c}; \quad 1 - \frac{s}{d} \text{ etc.};$$

Hinque ob omnes divisores cognitos erit

$$1-\frac{s}{y}+\frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3y}-\frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y}+\frac{s^7}{1\cdot 2\ldots 7y}-\text{etc.}=$$

$$=\left(1-\frac{s}{a}\right)\left(1-\frac{s}{b}\right)\left(1-\frac{s}{c}\right)\left(1-\frac{s}{d}\right)\text{etc.}$$

Quodsi ergo hi factores actu in se multiplicentur, coefficientes singularum ipsius s potestatum aequales necesse est ut fiant coefficientibus earum potestatum ipsius s in aequatione. Ex multiplicatione autem oritur coefficiens ipsius $-s=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\text{etc.}$ quam seriem vocamus $=\alpha$. Tum vero coefficiens ipsius $+s^2$ erit summa factorum ex binis terminis istius seriei $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\text{etc.}$ quam ponamus $=\beta$. Tertio summa factorum ex ternis terminis, quae sit $=\gamma$, erit coefficiens ipsius $-s^3$, quarto coefficiens termini $+s^4$ erit summa factorum ex quaternis terminis seriei $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\text{etc.}$ quae sit $=\delta$. etc. Ex his jam nascetur productum ex infinitis illis factoribus $=1-\alpha s+\beta s^2-\gamma s^3+\delta s^4-\varepsilon s^5+\text{etc.}$ quod cum aequale esse debeat expressioni $1-\frac{s}{y}+\frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3y}-$ $-\frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4y}+\frac{s^7}{1\cdot 2\ldots 7y}-\text{etc.}$ fiet $\alpha=\frac{1}{y}$; $\beta=0$; $\gamma=$ $=\frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3y}$; $\delta=0$; $\varepsilon=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y}$; $\zeta+0$; $\eta=\frac{-1}{1\cdot 2\ldots 7y}$; $\theta=0$; $\iota=\frac{1}{1\cdot 2\ldots 9y}$; etc.

Substitutis ergo loco a, b, c, etc. valoribus debitis habebimus hanc terminorum seriem; $\frac{n}{m\pi}+\frac{n}{(n-m)\pi}-$ $-\frac{n}{(n+m)\pi}-\frac{n}{(2n-m)\pi}+\frac{n}{(2n+m)\pi}+\frac{n}{(3n-m)\pi}-\text{etc.}$, quorum terminorum summa erit $\alpha=\frac{1}{y}$; summa factorum ex binis $\beta=0$; summa factorum ex ternis $\gamma=\frac{1}{6y}$; summa factorum ex quaternis $\delta=0$; summa factorum ex quinis $=\frac{+1}{120y}$ summa ex senis $=0$, etc. estque y sinus arcus $\frac{m}{n}\pi$, posito sinu toto $=1$, ita ut definitis numeris

m et n valor ipsius y geometrice innotescat. Antequam autem haec ad summas singularum potestatum inveniendas accommodemus, juvabit primam seriem distinctius evolvi, quae est $\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+$ $+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}+\frac{1}{5n-m}-\text{etc.}=$ $=\frac{\pi}{ny}$. Ponamus esse $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ seu $\frac{m}{n}\pi=90^\circ$, ita ut sit $y=1$, fiet $\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+$ $+\text{etc.}$ seu $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ ets. quae est series Leibnitiana. Si ponatur $\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$ seu $\frac{m}{n}\pi=60^\circ$, ita ut sit $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ erit $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+$ $+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$ etc. Ponatur $\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$ seu $\frac{m}{n}\pi=45^\circ$, fiet $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ atque $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\text{etc.}$ quam seriem Newtonus primum protulit ni fallor; hocque pacto complures aliae series concinnae exhiberi possunt, quarum summae per quadraturam circuli π assignari queant; quae cum ipsae sunt elegantes, tum etiam ad methodi bonitatem evincendam inserviunt. Summae autem potestatum terminorum seriei $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\text{etc.}$ erui possunt ex cognitis summis factorum ex binis, ternis, quaternis, etc. ope theorematum, satis notorum ac passim demonstratorum. Quodsi enim habeantur quantitates numero sive finitae sive infinitae $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\text{etc.}$, earum summa sit $=\alpha$, summa factorum ex binis $=\beta$, summa factorum ex ternis $=\gamma$, summa factorum ex quaternis $=\delta$; summa factorum ex quinis $=\varepsilon$ etc., atque potestatum series ponantur ut sequitur

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\text{etc.}=A,$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\text{etc.}=B,$$

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}+\text{etc.}=C,$$

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}+\frac{1}{d^4}+\text{etc.}=D \text{ etc.}$$

erit $A=\alpha$; $B=\alpha A-2\beta$; $C=\alpha B-\beta A+3\gamma$; $D=\alpha C-$ $-\beta B+\gamma A-4\delta$; etc. atque ob valores α, β, γ etc. cognitos fiet $A=\frac{1}{y}$; $B=\frac{1}{y}A=\frac{1}{y^2}$; $C=\frac{B}{y}-\frac{1}{2y}=\frac{1}{y^3}-\frac{1}{2y}$; $D=\frac{C}{y}-\frac{A}{6y}=\frac{1}{y^4}-\frac{2}{3y^2}$; $E=\frac{D}{y}-\frac{B}{6y}+\frac{1}{24y}=\frac{1}{y^5}-\frac{5}{6y^3}+$ $+\frac{1}{24y}$ etc. Ex quibus restitutis loco a, b, c, etc.; valoribus debitis nascentur sequentes serierum potestatum summationes

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+$$
$$+\frac{1}{3n+m}-\text{etc.}=\frac{\pi}{ny},$$

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(n-m)^2}+\frac{1}{(n+m)^2}+\frac{1}{(2n-m)^2}+\frac{1}{(2n+m)^2}+$$
$$+\frac{1}{(3n-m)^2}+\text{etc.}=\frac{\pi^2}{nnyy},$$

$$\frac{1}{m^3}+\frac{1}{(n-m)^3}-\frac{1}{(n+m)^3}-\frac{1}{(2n-m)^3}+\frac{1}{(2n+m)^3}+$$
$$+\frac{1}{(3n-m)^3}+\text{etc.}=\frac{\pi^3}{n^3}\left(\frac{1}{y^3}-\frac{2}{2y}\right),$$

$$\frac{1}{m^4}+\frac{1}{(n-m)^4}+\frac{1}{(n+m)^4}+\frac{1}{(2n-m)^4}+\text{etc}=$$
$$=\frac{\pi^4}{n^4}\left(\frac{1}{y^4}-\frac{2}{3y^2}\right),$$

$$\frac{1}{m^5}+\frac{1}{(n-m)^5}-\frac{1}{(n+m)^5}-\frac{1}{(2n-m)^5}+\text{etc.}=$$
$$=\frac{\pi^5}{n^5}\left(\frac{1}{y^5}-\frac{5}{6y^3}+\frac{1}{24y}\right).$$

Atque ex his generalibus summationibus sponte derivantur series illae, quarum summas ante exhibueram.

Nam facto $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, quo casu sit $y=1$, habebimus has series, ob singulos terminos bis occurentes

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc.}=\frac{\pi}{4}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\text{etc.}=\frac{\pi^3}{32}$$

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}=\frac{\pi^4}{96}$$

$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\text{etc.}=\frac{5\pi^5}{1536}\ \text{etc.}$$

In his quidem seriebus numeri tantum impares insunt, at pro potestatibus paribus numeri quoque pares introduci possunt, est enim generaliter $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+$ $+\text{etc.}=\frac{2^n}{2^n-1}\left(1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\text{etc.}\right)$.

Ope hujus lemmatis assignari poterunt summae seriei $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\text{etc.}$ casibus, quibus n est numerus par, prodeunt vero sequentes summae.

Brevitatis ergo

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{ect.}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1\cdot\pi^2=\alpha\pi^2,$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{etc.}=\frac{2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi^4=\beta\pi^4,$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{etc.}=\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 7}\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi^6=\gamma\pi^6,$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\text{etc.}=\frac{2^6}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8=\delta\pi^8,$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\text{etc.}=\frac{2^8}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10}=\varepsilon\pi^{10},$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\text{etc.}=\frac{2^{10}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12}=\zeta\pi^{12},$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\text{ect.}=\frac{2^{12}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 15}\cdot 35\pi^{14}=\eta\pi^{14},$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\text{etc.}=\frac{2^{14}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 17}\cdot\frac{3617}{15}\,\pi^{16},$$

$$1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\text{etc.}=\frac{2^{16}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 19}\cdot\frac{43867}{21}\,\pi^{18},$$

$$1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\text{etc.}=\frac{2^{18}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 21}\cdot\frac{1222277}{55}\,\pi^{20},$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\text{etc.}=\frac{2^{20}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 23}\cdot\frac{854513}{3}\,\pi^{22},$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\text{etc.}=\frac{2^{22}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 25}\cdot\frac{1181820455}{273}\,\pi^{24},$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{2^{26}}+\text{etc.}=\frac{2^{24}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 27}\cdot 76\,977\,927\cdot\pi^{26}.$$

Hucusque has summas actu per calculum computavi, usus vero sum in hoc negotio peculiari progressionis litterarum α, β, γ, δ, etc. lege a priori quidem pendente, sed quae longe facilius determinationem uniuscujusque coefficientis praebeat; Est nempe $\alpha=\frac{1}{6}$; $\beta=\frac{2\alpha^2}{5}$; $\gamma=\frac{4\alpha\beta}{7}$; $\delta=\frac{4\alpha\gamma+2\beta\beta}{9}$; $\varepsilon=\frac{4\alpha\delta+\alpha\beta\gamma}{11}$; $\zeta=\frac{4\alpha\varepsilon+4\beta\delta+2\gamma\gamma}{13}$; $\eta=\frac{4\alpha\zeta+4\beta\varepsilon+\alpha\gamma\delta}{15}$ etc., quae lex facile patet, si modo consideretur forma quadrati hujus seriei $\alpha+\beta x+\gamma x^2+$ $+\delta x^3+$etc. bis sumpti, quae erit

$$\begin{aligned}2\alpha^2+4\alpha\beta\,x+4\alpha\gamma&+4\alpha\delta+4\alpha\varepsilon+\\ +2\beta\beta x^2&+4\beta\gamma x^3+4\beta\delta x^4+\text{etc.}\\ &\qquad\qquad+2\gamma\gamma.\end{aligned}$$

En igitur, Vir Celeberrime, non solum methodum meam, qua ad hujusmodi potestatum summas perveni, verum etiam legem satis succinctam, qua summas quantarumvis potestatum ex praecedentibus reperire liceat. Haec vero ipsa lex progressionis viam mihi patefecit ad summam hujus seriei $\frac{1}{1+n}+\frac{1}{4+n}+\frac{1}{9+n}+$ etc. (cujus terminorum denominatores sunt quadrata dato numero n aucta) investigandam, quae res tibi fartasse non minus, quam praecedens placebit. Sit istius seriei summa, quam quaero S, ita ut sit $S=\frac{1}{1+n}+\frac{1}{4+n}+\frac{1}{9+n}+\frac{1}{16+n}+$ $+\frac{1}{25+n}+$etc., resolvantur singuli termini in progressionem geometricam infinitam ope divisionis, ac habebitur (per hyp. pag. praeced.).

$$S = 1\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.}\right) = \alpha\pi^2$$

$$-n\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}\right) - \beta n\pi^4$$

$$+n^2\left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.}\right) + \gamma n^2\pi^6$$

$$-n^3\left(1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{etc.}\right) - \delta n^3\pi^8$$

$$+n^4\left(1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \text{etc.}\right) + \varepsilon n^4\pi^{10}$$

$$-n^5\left(1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} = \text{etc.}\right) + \zeta n^5\pi^{12} \text{ etc.}$$

eritque $nS = \alpha n\pi^2 - \beta n^2\pi^4 + \gamma n^3\pi^6 - \delta n^4\pi^8 + \text{etc.}$ atque posito $n\pi^2 = z^2$, erit $nS = \alpha z^2 - \beta z^4 + \gamma z^6 - \delta z^8 + \varepsilon z^{10} - \text{etc.}$ Sumatur hujus seriei quadratum bis, eritque

$$\begin{aligned}2n^2S^2 = 2\alpha^2 z^4 - 4\alpha\beta z^6 &+ 4\alpha\gamma z^8 - 4\alpha\delta z^{10} + 4\alpha\varepsilon \\ &+ 2\beta\beta \quad\; - 4\beta\gamma \quad\; + 4\beta\delta z^{12} - \text{etc.} \\ &+ 2\gamma\gamma\end{aligned}$$

Cum autem per legem ante traditam sit $2\alpha^2 = 5\beta$. $4\alpha\beta + 7\gamma$; $4\alpha\gamma + 2\beta\beta = 9\delta$ ect., habebitur ista aequatio

$$2n^2S^2 = 5\beta z^4 - 7\gamma z^6 + 9\delta z^8 - 11\varepsilon z^{10} + \text{etc.}$$

quae multiplicata per dz et integrata dabit $\int 2n^2S^2dz = \beta z^5 - \gamma z^7 + \delta z^9 - \varepsilon z^{11} + \text{etc.}$, at quia est $nS = \alpha z^2 - \beta z^4 + \gamma z^6 - \delta z^8 + \text{etc.}$ erit $\alpha z^3 - nSz = \beta z^5 - \gamma z^7 + \delta z^9 - \text{etc.} = \int 2n^2S^2dz$, ita ut inventa sit haec aequatio $\alpha z^3 - nSz = \int 2n^2S^2dz$, quae differentia ob $\alpha = \frac{1}{6}$ dabit $\frac{1}{2}zzdz - nSdz - nzdS = 2n^2S^2dz$, quae aequatio reducta atque integrata, si loco z suus valor $\pi\sqrt{n}$ restituatur, dabit valorem ipsius summae quaesitae S. Duplex autem operatio institui debet, prout n sit vel numerus affirmativus vel negativus. Casu quidem, quo n est numerus affirmativus, si scribatur e pro summa hujus seriei $1+\frac{1}{1}+$ $+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+$ etc. erit hujus seriei $\frac{1}{1+n}+\frac{1}{4+n}+\frac{1}{9+n}+\frac{1}{16+n}+$ etc. summa $\frac{\pi\sqrt{n}+1}{2n}+$ $+\frac{\pi}{(e^{2\pi\sqrt{n}}-1)}$.

Casu autem, quo n est numerus negativus, si scriptio $\tilde{\text{tag}}\cdot A\pi\sqrt{n}$ denotet tangentem arcus $\pi\sqrt{n}$ in circulo radii $=1$ sumti, erit seriei hujus $\frac{1}{1-n}+\frac{1}{4-n}+\frac{1}{9-n}+$ $+\frac{1}{16-n}+$ etc. summa $\frac{1}{2n}-\frac{\pi\sqrt{n}}{2n\cdot\tilde{\text{tag}}\cdot A\pi\sqrt{n}}$.

Quanquam hujus ultimae seriei summa in genere spectata a circuli quadratura seu a valore ipsius n pendet, tamen innumerabilibus casibus ea absolute assignari potest, id quod evenit, si denotante i numerum quemcunque imparem fuerit $n=\frac{ii}{4}$, tum enim ob $\tilde{\text{tag}}\cdot A\frac{i\pi}{2}$ infinitum terminus $\frac{\pi\sqrt{n}}{2n\cdot\tilde{\text{tag}}\cdot A\pi\sqrt{n}}$ evanescit. Hinc itaque erit $\frac{4}{4-ii}+\frac{4}{16-ii}+\frac{4}{36-ii}+\frac{4}{64-ii}+$ etc. $=\frac{2}{ii}$ seu $\frac{1}{4-ii}+\frac{1}{16-ii}+\frac{1}{36-ii}+\frac{1}{64-ii}+$ etc. $\frac{1}{2ii}$; quam ob rem affirmare licet summam hujus seriei $\frac{1}{4-n}+$ $+\frac{1}{16-n}+\frac{1}{36-n}+\frac{1}{64-n}+$ etc. esse $\frac{1}{2n}$, quoties sit n numerus integer impar, quadraturae reliquis vero omnibus casibus summa vel major erit vel minor quam $\frac{1}{2n}$, quod est paradoxon certe non inelegans. Verum hisce speculationibus vereor, ne tua patientia abutar, pergo igitur ad reliqua acceptissimae epistolae tuae capita. Ac primo quidem, quod attinet ad seriem omnium illorum numerorum 1, 6, 35, 204, etc., quorum quadrati simul sint numeri trigonales, formandam, illius sine dubio Tua methodo, vir Celeb., omnes terminos reperire posses, verum uti ipse indicas non sine summa molestia. Uti autem convenit in hujusmodi quaestionibus perfecte solvendis methodo diversa a Diophantea, quippe quae numeros tantum rationales satisfacientes largitur, ex quibus illi, qui sunt integri, si non peculiaris modus adhibeatur, molestissime discernuntur; dedi autem ego hujusmodi methodum in Comm. nostr. Tom VI, qui jam publici juris est factus, qua inveni, si illius seriei bini termini contigui fuerint A, B, sequentem futurum esse $6A-B$. Quodsi autem omnes hosce numeros una formula generali complecti velimus, ea erit $=\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$, haec enim expressio, si pro n sumatur numerus integer quicunque, dabit numerum rationalem integrum, cujus quadratum erit numerus trigonalis. Alterius problematis, quod Gedano accepisti, haec est solutio. Contineat totum vas n mensuras, singulisque minutis per orificium effluat una mensura, et cum initio puro vino vas esset repletum, affluat continuo desuper tantundem aquae, quantum per orificium effluit, perpetuo autem per totum vas vinum cum aqua aequabiliter sit permixtum. Quaero jam statum fluidi elapsis x minutis primis, ac ponam tum in vase jam inesse y aquae mensuras, ita ut vini adhuc supersint $n-y$ mensurae: elapso ergo tempore $x+dx$, aquae quantitas in vase erit $y+dy$ mens., vini vero $n-y-dy$ mens. At cum tempore $1'$ effluat una mensura, tempore dx effluet dx liquidi, cujus portio $\frac{ydx}{n}$ erit aqua, at reliqua portio $\frac{(n-y)\,dx}{n}$ vinum; contra vero affluet aquae copia dx, quare elapso insuper tempusculo dx aquae in vase existentis copia erit $y=\frac{ydx}{n}+dx=y+\frac{(n-y)\,dx}{n}$, vini vero copia $=n-y-\frac{(n-y)\,dx}{n}$. At per calculi differentialis naturam aquae copia est $y+dy$, unde fieri oportet $y+\frac{(n-y)\,dx}{n}=y+dy$; ex quo prodit $dx=\frac{ndy}{n-y}$, et integrando $x=n\mathrm{l}\frac{n}{n-y}$, vel si vini tempore x min. elapso, in vase residui ponatur z mens., erit $x=n\mathrm{l}\frac{n}{z}$, ubi l denotat logarithmum hyperbolicum. Quodsi jam ad datum tempus x desideretur vini quantitas in vase residua z, sumi debent logarithmorum numeri, unde, si e sit ille numerus, cujus logarithmus hyperbolicus est $=1$, fiet

$e^{\frac{x}{n}}=\frac{n}{z}$, ex qua aequatione obtinetur $z=ne^{-\frac{x}{n}}$ seu per seriem $z=n-x+\frac{xx}{2n}-\frac{x^3}{6n^2}+\frac{x^4}{24n^3}-$etc. In casu ergo proposito, quo est $n=10$ mens. et $x=10$ min., fięt $z=10\left(\frac{1}{2}-\right.$ $\left.-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}+\text{etc.}\right)=3\,\frac{67879}{100000}$ mens., tantum igitur vini elapsis decem minutis in vase supererit. Ceterum notandum est omne vinum ex vase efluere non posse, nisi tempore elapso infinite magno. Praeterea observatio Tua, Vir Celeb., est certissima; quod si scilicet x et n in eadem ratione sive crescant sive decrescant, tum rationem z ad n eandem manere debere. Problemata Tua, Vir Celeberrime, de partitione numerorum, cum propter ipsorum elegantiam et utilitatem ad cognoscendas numerorum proprietates mirifice mihi placuerunt, eoque magis absolutam hac de re explanationem videre cuperem, quod ego quoque jam antehac in eadem problemata incidi, neque vero ad satis concinnam atque expeditam solutionem, qualem desideraveram, pertingere potui. Equidem occasione hujus formulae $(1+nx)(1+n^2x)$[a] $(1+n^4x)(1+n^5x)$ etc. ad prius problema perveni, quodsi enim hi factores actu in se invicem multiplicentur, prodit ista expressio

$$\begin{gathered}1+x(n^1+n^2+n^3+n^4+n^5+n^6+n^7+n^8+\text{etc.}),\\ +x^2(n^3+n^4+2n^5+2n^6+3n^7+3n^8+4n^9+4n^{10}+\\ +5n^{11}+\text{etc.}),\\ +x^3(n^6+n^7+2n^8+3n^9+4n^{10}+5n^{11}+7n^{12}+\\ +8n^{13}+10n^{14}+\text{etc.}),\\ +x^4(n^{10}+n^{11}+2n^{12}+3n^{13}+5n^{14}+6n^{15}+9n^{16}+\\ +11n^{17}+15n^{18}+\text{etc.})\end{gathered}$$

de qua expressione notandum est; in serie x^2 multiplicante, cujusvis termini, qui est potestas ipsius n, coefficientem indicare, quot modis exponens potestatis in duas partes inaequales distribui possit. Deinde in serie x^3 multiplicante quilibet coefficiens indicat, quot modis exponens potestatis ipsius n adjunctae in ternas partes inaequales partiri queat et ita porro. Praeterea patet seriem, per quam x

[a] *Здесь Эйлером или копиистом пропущено* $(1-n^3x)$.

multiplicatur, oriri, si n dividatur per $1-n$; deinde seriem ipsius xx oriri ex divisione ipsius n^3 per $(1-n)(1-nn)$; tertio seriem ipsius x^3 esse quotum ex divisione potestatis n^6 per divisorem $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)$ ortum, et ita porro. Deinceps etiam ad series sequentes ex antecedentibus eruendas inveni hanc regulam. Denotet mihi ista notandi forma $(A)^{(p)}$ numerum indicantem, quot modis numerus A in p partes inaequales dispertiri queat; eritque $(A)^{(p)}=(A-p)^{(p)}-(A-p)^{(p-1)}$, ubi notandum est primo, si sit $p=1$, fore $(A)^{(p)}=1$; secundo, si sit $A=\frac{p(p+1)}{2}$, fore $(A)^{(p)}=1$ et tertio, si sit $A<\frac{p(p+1)}{2}$, esse $(A)^{(p)}=0$; cujus regulae ope non difficulter quaevis huc pertinens quaestio resolvi potest; at hoc laborat ista methodus incommodo, quod ante omnes casus simpliciores resolvisse oporteat. Sic inveni numerum 50 in septem partes (singulas inter se inaequales) resolvi posse 522 modis. Quodsi vero simili modo haec expressio $\frac{1}{(1-nx)(1-n^2x)(n-n^3x)\text{ etc.}}$ etc. per continuam divisionem evolvatur, prodibit ista expressio,

$$\begin{gathered}1+x(n+n^2+n^3+n^4+n^5+n^6+n^7+n^8+n^9+\text{etc.}),\\ +x^2(n^2+n^3+2n^4+2n^5+3n^6+3n^7+4n^8+4n^9+\\ +5n^{10}+\text{etc.}),\\ +x^3(n^3+n^4+2n^5+3n^6+4n^7+5n^8+7n^9+8n^{10}+\\ +10n^{11}+\text{etc.}),\\ +x^4(n^4+n^5+2n^6+3n^7+5n^8+6n^9+9n^{10}+\\ +11n^{11}+15n^{12}+\text{etc.})\text{ etc.}\end{gathered}$$

ubi coefficiens cujusvis termini indicat, quot modis exponens adjunctae potestatis ipsius n in tot partes tam aequales quam inaequales distribui possit, quot exponens respondentis potestatis ipsius x continet unitates. De hac distributione observavi quoque, si $(A)^{(p)}$ denótet numerum indicantem, quot modis numerus A in p partes distribui queat, fore $(A)^{(p)}=(A-p)^{(p)}+(A-1)^{(p-1)}$ his autem de rebus profundius abs te erudiri spero. Quod spectat ad figuram capacissimam, quae lineis rectis includi queat, eam esse circulo inscriptibilem, demonstrationem quoque hic ante aliquot annos dedit Clar. Adjunctus noster Moula, quae in Commentar. Tomo IX comparebit. Quod reliquum est, perquam cuperem Tibi, Vir Celeber., opusculum meum de Theoria Musicae mittere, si occasio mihi offeretur idonea, qualem expectabo; Lipsiam autem hinc ad Bibliopolam Schusterum magna exemplarium copia est transmissa, unde fortasse facilius accipere poteris. Vale mihique favere perge.

Dabam Petropoli, pridie Iduum $\frac{12}{\text{Sept.}}$ A MDCCXXXX st. vet.

Публикуется по копии (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 30, лл. 65—73 об.).

Помета: «Соответствует оригиналу. Л. Эйлер». Его же рукой надписана цифра «12» на дате. «Зачитано 1 декабря 1740».

[1] Первое письмо Ноде Эйлеру от 29 августа 1740 г. (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 29, лл. 133—135).

[2] Судя по протоколам Конференции, Эйлер отсутствовал на заседаниях 22 августа и 1 сентября 1740 г., очевидно, по болезни. В других протоколах за август нет списка присутствовавших.

[3] Речь идет о письме Эйлера к Стирлингу от 27 июля 1738 г. Читано в Конференции 25 сентября 1740 г. (Протоколы, т. I, стр. 503). Опубликовано: Т. А. Красоткина. Переписка Л. Эйлера и Дж. Стирлинга. Историко-математические исследования, вып. X, 1957, стр. 133—151. По поводу упоминаемой здесь копии в протоколе Конференции от 3 июня 1740 г. (Протоколы, т. I, стр. 614) записано следующее: «Профессору Эйлеру была передана на просмотр копия его письма к г-ну Стирлингу, отосланного в сентябре 1738 года. Поскольку он нашел там отрывок, где речь идет о рядах, что очень интересует г-на Ноде, по его желанию сделана выдержка из письма».

[4] Ноде в своем письме от 29 августа выражает чрезвычайное восхищение гением Эйлера и его успехами в математике и далее пишет: «. . . но я, будучи неизвестен Тебе, не осмеливался отнимать у Тебя досуг своим письмом; мною руководил почти благоговейный страх, как бы я не похитил преступно у Тебя, славнейший муж, время, которое Ты так деятельно и так плодотворно тратишь на обогащение математического мира своими всегда новыми, удивительными, гениальными открытиями, но я вынужден, наконец, прервать свое молчание, ибо вижу, что с удивительной Твоей одаренностью сочетается равная ей доброта, и я не могу дальше сдерживать себя, чтобы не написать Тебе это письмо: лучше показаться Тебе назойливым, чем неблагодарным».

[5] Тот факт, что всякое уравнение степени n имеет n корней, не распространяется на уравнения «бесконечной степени»; так, например, уравнение $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 0$ вовсе не имеет корней.

[6] См. прим. 3 к 4-му письму Эйлера Полени (стр. 235 настоящего издания).

[7] Речь идет, очевидно, о статье: De solutione problematum Diophantaeorum per numeros integros (О решении Диофантовых

задач в целых числах) — Commentarii Academiae Sc. Petropolitanae, 6, (1732/33), 1738, стр. 175—188.

[8] См. прим. 14 к 4-му письму Эйлера Элеру (стр. 369 настоящего издания).

[9] Из письма Ноде от 29 августа 1740 г. видно, что эти задачи присланы ему из Данцига молодым математиком Иоганном Кисом. Задачи сформулированы следующим образом.

1) Продолжить и найти общий член такого ряда, который начинается числами 1, 6, 35 и имеет такое свойство, что содержит все целые числа, квадраты которых являются треугольными числами.

2) Из сосуда, содержащего десять мер вина, вытекает одна мера в минуту, но сколько вытекает, столько же непрерывно поступает воды, так что сосуд постоянно сохраняет то же количество жидкости. Найти отношение между количеством вина и воды в сосуде по истечении 10 минут при условии, что вода и вино тотчас же равномерно перемешиваются.

[10] Ноде в том же письме сообщает Эйлеру следующие задачи на разбиение чисел.

Имеется некоторая сумма денег b. Найти, сколькими различными способами она может быть распределена между лицами числом c, так чтобы их части все были не равны между собой, но все состояли бы только из целых чисел.

Каковы абсолютно все или все из всех способы, которыми 50 талеров могут быть распределены между 7 лицами, причем всегда в целых числах, т. е. сколькими совершенно различными способами это может происходить, будут ли все их части неравны между собой, или среди них будет какое-то определенное число равных частей, или, наконец, число их равных частей также будет варьировать каким-либо образом.

[11] Более подробно о разбиении чисел на слагаемые см.: Л. Эйлер. Введение в анализ бесконечно малых, т. I. М.—Л., 1936, гл. XVI.

[12] Эта теорема, как мы читаем в том же письме, была доказана Ноде в его последней статье в «Miscellanea». В письме Эйлеру от 29 августа 1740 г. Ноде формулирует теорему так:

«Дано любое количество любых прямых линий. Если с постоянно теми же самыми прямыми строить сколько угодно различных прямолинейных фигур, то я утверждаю, что самым большим из всех таких многоугольников будет тот, который вписывается в круг, или тот, через углы которого может быть проведен круг».

[13] Статья Мула является, очевидно, единственным его печатным сочинением: De maximis in figuris rectilineis (О максимумах в прямолинейных фигурах) — Commentarii Academiae Sc. Petropolitanae, IX, (1737) 1744, стр. 138—159.

[14] Издано в Петербурге в 1739 г. под заглавием: «Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae» (Опыт новой теории музыки, ясно изложенной на основании точнейших принципов гармонии).

ПОЛЕНИ

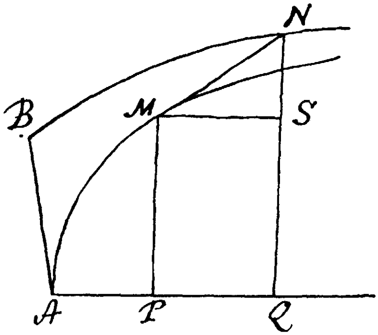
Полени, Джиованни (Poleni, Giovanni, 1683—1751) — итальянский математик и археолог, профессор астрономии, затем философии и с 1717 г. — математики в Падуе. Почетный член Петербургской Академии со времени ее основания. Состоял в научной переписке с Христианом Гольдбахом и другими членами Академии.

1

[Июнь 1735 г.], Петербург [1]

Мужу славнейшему Джиованни Полени
шлет большой привет Леонард Эйлер.

Славный Гольдбах любезно передал мне тетрадь писем,[2] которые Ты, славный муж, ему прислал. Я прочитал с огромным удовольствием эту тетрадь, в которой трактуются вещи столь различные и столь глубокого содержания. Но особенно мне понравилось то, что Ты написал нашему покойному Герману об органическом описании трактрисы и логарифмической [кривой]. Ведь хотя логарифмическая кривая хорошо известна и употребима, никто до сих пор не дал ее описания непрерывным движением, а этот способ описания кривых бесспорно должен быть предпочтен всем другим. Итак, Ты добился столь легким и точным описанием этих кривых, что создалась возможность так же легко решить многие трансцендентные задачи, как и алгебраические, причем не только на плоскости — ведь есть основания сомневаться, какое построение, сделанное с помощью параболы или трактрисы, надо считать более легким. Я же полагаю очень удобным построение дифференциальных уравнений, если их решение сводится на тянущее движение. Ты, славный муж, в этом письме рассматриваешь только трактрису Гюйгенса, имеющую в основании прямую линию, но уже из самого характера описания я понимаю, что если лишь немногое изменить в инструменте, можно так же легко описывать другие трактрисы, имеющие в основании кривые линии. А какую пользу приносят такого рода трактрисы, построенные на кривых линиях, в решении дифференциальных уравнений, не допускающих отделения переменных, может достаточно ясно показать уравнение $ds + ssdz = Zdz$ (где Z обозначает любую функцию z), предложенное славным графом Риккати и столь серьезно занимавшее геометров. Я же нашел недавно построение [решения] этого уравнения с помощью тянущего движения на некоторой кривой линии и надеюсь, что это построение понравится и Тебе, и славному Риккати.



Уже несколько лет тому назад я дал построение этого не так широко распространенного уравнения $ds + s^2dz = az^mdz$ и поместил его в Лейпцигских «Актах».[3] В то время мне еще не удалось решить и построить решение уравнения $ds + ssdz = Zdz$. Теперь же я нашел следующее построение [решения] этого уравнения, достигаемое с помощью тянущего движения, при котором, если взять любое значение z в уравнении $ds + s^2dz = Zdz$, мы получим значение s. Построим кривую BN на оси AQ так, чтобы, если взята абсцисса $AQ = 2b\int dz\sqrt{Z}$, то ордината будет $QN = \frac{b}{2}]Z$. Далее, проводя нить $BA = b$ на кривой BN, опишем трактрису AM. Она будет иметь такое свойство, что если из любой точки N кривой BN провести к трактрисе прямую $NM = b$, она будет касательной к трактрисе. Отсюда мы узнаем для каждой точки N угол MNQ; если положим тангенс половины $MNQ = q$ и полный синус $= 1$, то, как я доказываю, $s = q\sqrt{Z}$ или таким же образом будет $s = \frac{Z(MN - Ns)}{MN + Ns}$.

В этом построении, я полагаю, Ты, славный муж, не найдешь недостатков, если построение кривой BN достигается с помощью логарифмов, другой же, AM — с помощью тянущего движения: для того и другого Ты оказал огромную помощь. Итак, если имеется уравнение $ds + s^2dz = a^2z^{2n}dz$, которое предложил для решения славный граф Риккати, то $Z = a^2z^{2n}$, и поэтому кривая BN переходит в логарифмическую, к подкасательной которой длина нити AB должна относиться как $n+1$ к n. Таким образом, одной логарифмической [кривой] могут быть построены [решения] для всех случаев этого уравнения при изменении длины нити. При этом следует заметить, что всякий раз, когда длина нити есть какая-то часть половины логарифмической подкасательной, для $2n$ получаются те самые случаи, в которых это уравнение допускает отделение переменных.[4]

Будь здоров.

Петербург.

Viro Celeberrimo Joanni Poleno
S. P. D. Leonardus Eulerus.

Quem epistolarum tuarum Vir Celeb. fasciculum Celeb. Goldbachio transmisisti, eum benevole is mecum communicavit. Perlegi igitur istum librum summa cum voluptate, eo quod tam variae tamque profundae indaginis res in eo pertractentur. Praecipue autem mihi placuerunt, quae ad Hermannum nostrum beate defunctum de organica tractoriae et logarithmicae descriptione perscripseras. Quamvis enim logarithmica curva sit tam nota atque usitata, tamen a nemine adhuc ejus descriptio per motum continuum est exhibitus, qui curvarum delineandarum modus aliis omnibus sine dubio longe est praeferendus. Effecisti igitur tam facili et exacta harum curvarum descriptione, ut plurima transcendentia problemata aeque facile resolvi queant, ac algebraica, quin etiam ac plana; namque merito dubitare licet, utrum constructio per parabolam an per tractoriam facta sit pro faciliori habenda. Quamobrem quasque aequationes differentiales commodissime construi judico, si earum resolutio ad motum tractorium perducatur. Consideras quidem tantum in hac epistola, Vir Cel., tractoriam Hygenianam lineam rectam pro basi habentem, sed jam ex ipsa descriptionis ratione intelligo, paucis in instrumento mutandis aeque facile alias tractorias lineas carvas pro basibus habentes describi posse. Hujusmodi vero tractoriae super lineis curvis formatae quantam utilitatem habeant in aequationibus differentialibus, quae variabilium separationem non admittunt, construendis, aequatio $ds+ssdz=Zdz$ (denotante Z functionem ipsius z quamcunque) a Cel. Com. Riccato proposita et a geometris tantopere exagitata abunde declarare potest. Inveni enim nuper istius aequationis constructionem ope motus tractorii super quadam linea curva, quam constructionem neque Tibi neque Celeb. Riccato displicere confido. Dedi quidem ante aliquot annos hujus non tam late patentis aequationis $ds+s^2dz=az^{2n}dz$ constructionem Act. Lips. insertam; eo vero tempore aequationem $ds+ssdz=Zdz$ resolvere et construere non licebat. Nunc vero hujus aequationis sequentem inveni constructionem per motum tractorium efficiendam, qua sumto pro lubitu valore ipsius z in aequatione $ds+s^2ds=Zdz$ valor ipsius s exhibetur. Construatur scilicet curva BN super axe AQ hac lege, ut sumta abscissa $AQ=2b\int dz\sqrt{Z}$ sit applicata $QN=\frac{b}{2}lZ$. Tum filo $BA=b$ super curva BN protrahendo describatur tractoria AM. Cujus ergo haec erit proprietas, ut si ex quovis curvae BN puncto N ad tractoriam ducatur recta $NM=b$, ea futura sit tangens tractoriae. Innotescet ergo pro quovis puncto N angulus MNQ, cujus dimidiae partis, si tangens ponatur $=q$, posito sinu toto $=1$, dico fore $s=q\sqrt{Z}$. Vel etiam hoc modo erit $s=$ $=\frac{Z(MN-Ns)}{MN+Ns}$. In qua constructione nihil Te, Vir Celeb., desideraturum existimo, si quidem curvae BN constructio per logarithmos, alterius vero AM per motum tractorium conficitur, ad quorum utrumque Tu maximum adjumentum attulisti. Si ergo proponatur ista aequatio $ds+s^2dz=a^2z^{2n}dz$, quam Cl. com. Riccati proposuit resolvendam, fiet $Z=a^2z^{2n}$ atque ideo carva BN abit in logarithmicam ipsam, ad cujus subtangentem se habere debet longitudo fili AB uti $n+1$ ad n; unica ergo logarithmica omnes casus hujus aequationis longitudine fili tantum mutanda construi poterunt. Animadverti hic autem convenit, quoties longitudo fili fuerit pars aliquota dimidiae subtangentis logarithmicae, tum eos ipsos loco $2n$ prodire casus, in quibus haec aequatio indeterminatarum separationem admittere inventa est.

Vale.

Petropoli.[a]

[a] *В копии* Petropoli, d. a. 1735.

Публикуется по подлиннику (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 19, лл. 57, 58 об.). К подлиннику приложена копия, проверенная и подписанная Эйлером (там же, лл. 59, 60 об.).

Помета: «Представлено в Ординарном собрании Академии наук 30 июня 1735.».

[1] Оригинал письма не датирован, в копии указан только год. Судя по помете на письме и по Протоколам заседаний Конференции Академии наук, письмо было представлено в Конференцию 30 июня (Протоколы, т. I, стр. 212).

[2] «Epistolarum mathematicarum fasciculus» (Тетрадь математических писем) — так озаглавлено сочинение Полени, опубликованное в Падуе в 1729 г.

[3] Речь идет, очевидно, о статье: Constructio aequationum quarundam differentialium, quae indeterminatarum separationem non admittunt (Построение некоторых дифференциальных уравнений, которые не допускают отделения переменных) — Nova acta eruditorum, Лейпциг, 1733, стр. 369—373.

[4] Действительно, пусть координаты точки M будут $X(z)$, $Y(z)$. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &\left(2b\int_0^z \sqrt{Z}\,dz - X\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\ln Z - Y\right)^2 = b^2 \\ &\left(2b\int_0^z \sqrt{Z}\,dz - X\right)dY = \left(\frac{b}{2}\ln Z - Y\right)dX \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Обозначим

$$\frac{b}{2}\ln Z - Y = u(z), \quad \text{так что} \quad \frac{bZ'}{2Z}\,dz - dY = du.$$

Из соотношений (1) найдем $\sqrt{b^2-u^2}\,dY = u\,dX$, $\sqrt{b^2-u^2}\times\times\left(2b\sqrt{Z}\,dz - dX\right) + u\,du = 0$, отсюда имеем $2b\sqrt{Z}\sqrt{b^2-u^2}\,dz - -\frac{b^2-u^2}{u}\,dY + u\,du = 0$, и значит $\frac{du}{dz} = \frac{Z'(b^2-u^2)}{2bZ} - \frac{2u\sqrt{Z}}{b}\sqrt{b^2-u^2}$.

Тангенс половины угла MNQ определяется из формулы $q = \sqrt{\frac{b-u}{b+u}}$, так что $s = \sqrt{Z}\sqrt{\frac{b-u}{b+u}}$.

Продифференцировав это выражение для s по z и подставив вместо $\frac{du}{dz}$ найденное выше выражение, получим $s' + s^2 = Z$. Если $Z = z^{2n}$, то координаты x, y кривой BN будут $x = 2b\frac{z^{n+1}}{n+1}$, $y = \frac{nb}{n+1}\ln\frac{n+1}{2b}x$. Говоря о подкасательной, Эйлер, по-видимому, имел в виду отрезок оси y от точки пересечения с ней касательной к данной линии до точки, имеющей ординату точки касания. Тогда, действительно, длина l указанного отрезка будет $l = xy_x' \cdot \frac{1}{x} = \frac{n}{n+1} b$, так что $\frac{b}{l} = \frac{n+1}{n}$. Если $b = \frac{l}{2m}$ (m — целое), то $2n = \frac{-4m}{2n-1}$, и в этом случае уравнение Риккати интегрируется в элементарных функциях.

Опасаясь, что Полени не получил это письмо, Эйлер 18 октября 1735 г. послал второе письмо (копия письма — ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 19, лл, 76, 77). Поскольку второе письмо почти полностью повторяет первое, оно здесь не публикуется.

2

13 [24] марта 1736 г., Петербург

Мужу знаменитейшему и славнейшему
Джиованни Полени
шлет большой привет Леонард Эйлер.

Письмо Твое,[1] славный муж, свидетельствующее о величайшей Твоей ко мне благосклонности, посланное через славного Маринони, я получил и полагаю, что это следует отнести за счет Твоей исключительной доброты, что Ты удостоил внимания мои скромные заметки к Твоему способу описания трактрис. Вместе с тем, однако, я очень огорчен, что Ты с некоторого времени болен, и от всей души желаю, чтобы это письмо застало Тебя уже совершенно здоровым. Я чрезвычайно рад, что мое построение [решения] уравнения Риккати с помощью тянущего движения понравилось Тебе, но тем более я осмеливаюсь просить Тебя, чтобы Ты, исследовав начертание трактрисы на криволинейных основаниях, привел бы его к высшему совершенству. Во всяком случае одной логарифмической [кривой] достаточно для построения [решения] уравнения $dy = y^2dx + ax^n dx$. Но если ты опишешь трактрисы на каком-либо данном криволинейном основании, то с их помощью мы получим также построение такого более общего уравнения $dy = y^2dx + Xdx$, в котором я полагаю X данным любым образом через x и постоянные.

Итак, поскольку Ты принял столь благосклонно то, что я написал Тебе в первый раз, я надеюсь, что не навлеку на себя Твое недовольство, если передам на Твой справедливый суд также некоторые другие мои размышления. Таким образом, я начинаю со степеней с четными показателями гармонической прогрессии $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ и т. д. или с рядов следующего вида $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}$ и т. д., где n обозначает любое четное число. Суммы всех этих рядов — я нашел это особым способом, — зависят от квадратуры круга; это свойство кажется мне тем более удивительным, что оно никем из исследователей природы таких рядов до сих пор не было замечено и что обычными способами суммирования ряда его никак невозможно исследовать. Предположив отношение периферии к диаметру как $p:1$, я нашел следующие суммы рядов такого рода, продолженных до бесконечности:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{и т. д.}=\frac{p^2}{6},$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{и т. д.}=\frac{p^4}{90},$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\text{и т. д.}=\frac{p^6}{945},$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\text{и т. д.}=\frac{p^8}{9450},$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\text{и т. д.}=\frac{p^{10}}{93555},$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\text{и т. д.}=\frac{691p^{12}}{638512875}.$$ [2]

Суммы же этих рядов наиболее приближенно я могу выразить другим способом; сумму обратного ряда квадратов я нашел равной 1.64493406684822643б4, сумму же обратного ряда биквадратов — равной 1.0823232337110824; корень квадратный первой из них, умноженной на шесть, даст $3.141592653589+mp$. Это вытекает из универсального, изобретенного мною способа суммирования ряда, заключающегося в следующем: пусть будет какой-либо ряд $a^1+b^2+c^3...X^x$, в котором X обозначает член ряда, соответствующий номеру x и, кроме того, он предполагается данным через x и постоянные. Предположим S

равным сумме этого ряда от первого члена до x включительно. Я утверждаю, что при предположении dx постоянным будет

$$S=\int Xdx+\frac{X}{1\cdot 2}+\frac{dX}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2dx}-\frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6dx^3}+$$
$$+\frac{d^5X}{1\cdot 2\ldots 7\cdot 6dx^5}-\frac{3d^7X}{1\cdot 2\ldots 9\cdot 10dx^7}+\frac{5d^9X}{1\cdot 2\ldots 11\cdot 6dx^9}-$$
$$-\frac{691d^{11}X}{1\cdot 2\ldots 13\cdot 210dx^{11}}+\frac{35d^{13}X}{1\cdot 2\ldots 15\cdot 2dx^{13}}-$$
$$-\frac{3617d^{15}X}{1\cdot 2\ldots 17\cdot 30dx^{15}}+\text{и т. д.},$$

где интегрированием Xdx следует прибавить такую постоянную, которая сделала бы $S=0$ при предположении $X=0$. С помощью этого ряда можно просуммировать любое число членов гармонического ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+$ $+\frac{1}{4}+$и т. д.; я нашел сумму 1 000 000 членов, равную 14.3927267228657236. Она очень мала, в то время как сумма ряда, продолженного до бесконечности, будет бесконечно велика. Однако выражение S принесло бы большую и даже величайшую пользу, если бы можно было легким способом получить числовые коэффициенты или выразить общий член ряда, в который они входят. Но над этим я долго трудился, и все напрасно.[3]

Далее, встречается также такая задача, в которой нужно исследовать природу кривой, отсекающей одинаковые дуги от бесконечного числа эллипсов, построенных на одной и той же поперечной оси. Построить такую кривую соответствующим спрямлением эллипсов легко, но тем труднее найти уравнение, выражающее ее природу. Между тем я напал на особый способ решения задач такого рода и нашел для кривой, отсекающей от таких эллипсов одинаковые дуги, дифференциальное уравнение второй степени, которое, однако, никоим образом не может быть приведено к более простому.[4] Недавно я принялся за астрономическую задачу определения орбиты планеты по трем данным гелиоцентрическим положениям, которая, правда, уже была решена несколькими астрономами, но никогда не решалась в соответствии с взглядами Ньютона: одни полагали орбиты круглыми, другие, следуя Сету Уорду, приняли равномерное угловое движение вокруг одного из фокусов эллипса; я же решил ее в пределах самой гипотезы Ньютона и привел вычисления к столь доступной форме, чтобы можно было без особого труда и за короткое время определить по трем данным гелиоцентрическим положениям планет как положение линии абсид, так и эксцентриситет.

Славному Делилю я передал Твой привет, как Ты приказал, и он в свою очередь велел также Тебя горячо приветствовать, и то же самое славный г-н Гольдбах. Кроме того, Гольдбах утверждает, что он писал Тебе, и предполагает, что письмо, возможно, затерялось.

Будь здоров, славный муж, и будь по-прежнему ко мне благосклонен.

Петербург, 13 марта 1736.

Viro Illustrissimo et Celeberrimo Johanni Poleno
S. P. D. Leonhard Euler.

Litteras tuas, Vir Celeb., summum erga me testificantes favorem[а] a Cel. Marinonio mihi transmissas accepi. Tuaeque eximiae humanitati tribuendum esse censeo,[б] quod leves meas annotationes ad tuum tractorias describendi modum attentione fueris dignatus. Interim autem vehementer doleo te jam [в]ab aliquot mensibus[в] aegrotare atque ex animo opto, ut istae te litterae penitus restitutum inveniant. Constructionem interea[г] meam aequationis Riccatianae ope motus tractorii Tibi placuisse maximopere gaudeo, eoque minus te rogare dubito, ut illam exquisita tractoriarum super basibus curvilineis delineatione ad summam perfectionem perducere velis. Sola utique logarithmica sufficit ad aequationem $dy=y^2\ dx+ax^n\ dx$ consruendam. Sed si super qualibet curvilinea basi data tractorias pescripseris, earum beneficio quoque istius latius quoque[д] latius patentis aequationis $dy=y^2dx+X\ dx$, in qua X quomodocunque per x et constantes dari pono, constructio habebitur. Cum igitur quae prima vice ad te perscripsi tam benevole acceperis, non aegre te laturum confido, si alias quo-

---

[а] *В черновике* favorem testificantes
[б] *В черновике* tribuo
[в—в] *В черновике* ab aliquo tempore
[г] *В черновике* praeterea
[д] *В черновике второе* quoque *отсутствует.*

que qualescunque meas meditationes profundo tuo iudicio submisero. Initium itaque facio de potestatibus parium exponentium progressionis harmonicae $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ $+$ etc., seu seriebus hac forma contentis $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+$ $+\frac{1}{4^n}+$ etc. significante n numerum quemcunque parem, quarum serierum[е] omnium summas peculiari via inveni a circuli quadratura pendere. Quae proprietas mihi eo magis miranda videtur, tum quod ea a nemine adhuc, qui naturam harum serierum est perscrutatus, fuerit observata, tum quod consuetis series summandi methodis nequaquam[ж] investigari queat. Posita autem [з]p ad 1 ratione peripheriae ad diametrum[з] huiusmodi serierum in infinitum continuatarum summas inveni sequentes[и]

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}=\frac{p^2}{6},$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{etc.}=\frac{p^4}{90},$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\text{etc.}=\frac{p^6}{945},$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\text{etc.}=\frac{p^8}{9450},$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\text{etc.}=\frac{p^{10}}{93\,555},$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\text{etc.}=\frac{691p^{12}}{638\,512\,875}.$$

Summas autem harum serierum alia methodo proxime possum exhibere, uti summam seriei reciprocae quadratorum inveni $=1.6449340668482264364$ summam vero seriei reciprocae biquadratorum 1.0823232337110824 — quarum illius sexies sumtae radix quadrata dat $3.141592653589+mp$. Fluunt haec ex universali, quam excogitavi, methodo series summandi, quae ita se habet: sit series quaecunque $a^1+b^2+c^3\ldots X^x$, in qua X denotat terminum seriei exponenti x respondentem, ideoque per x et constantes dari ponitur. Ponatur S aequale summae illius seriei a primo

---

е *В черновике* serierum *отсутствует.*

ж *В черновике* neutiquam

з—з *В черновике* peripheriae ad diametrum ratione $p:1$

и *Здесь черновик кончается.*

termino usque ad X exclusive, dico posito dx constante fore

$$S=\int Xdx+\frac{X}{1\cdot 2}+\frac{dX}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2dx}-\frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6dx^3}+$$
$$+\frac{d^5X}{1\cdot 2\ldots 7\cdot 6dx^5}-\frac{3d^7X}{1\cdot 2\ldots 9\cdot 10dx^7}+\frac{5d^9X}{1\cdot 2\ldots 11\cdot 6dx^9}-$$
$$-\frac{691d^{11}X}{1\cdot 2\ldots 13\cdot 210dx^{11}}+\frac{35d^{13}X}{1\cdot 2\ldots 15\cdot 2dx^{13}}-$$
$$-\frac{3617d^{15}X}{1\cdot 2\ldots 17\cdot 30dx^{15}}+\text{etc.}$$

Ubi integratione ipsius Xdx talis constans est addenda, quae faciat $S=0$ posito $X=0$. Ope huius seriei progressionis harmonicae $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ etc. quotquot libuerit termini in unam summam possunt colligi, inveni vero summam 1 000 000 terminorum esse 14.392726722865723 6 quae est satis exigua, cum seriei in infinitum continuatae summa sit infinite magna. Illa autem expressio ipsius S multo majorem imo maximam offerret utilitatem, si coefficientes numerales modo facili possent produci vel seriei, quam constituunt, terminus generalis exhiberi, sed in hoc quaerendo diu frustra desudavi.

Problema porro etiam occurrit, quo natura curvae querebatur, quae ab infinitis ellipsibus super eodem axe transverso constitutis arcus aequales abscidat; quae quidem curva concessa ellipsium rectificatione constructu est facillima, sed aequatio ejus naturam exprimens eo difficilior inventu, interim tamen in singularem incidi methodum hujusmodi problemata solvendi, et pro curva ab illis ellipsibus aequales arcus abscindente inveni aequationem differentialem secundi gradus, quae autem nullo modo ad simpliciorem potest reduci. Nuper vero astronomicum aggressus sum problema de orbita planetae determinanda ex datis tribus locis heliocentricis, quod quidem jam a nonnullis Astronomicis [к] est solutum, sed nusquam secundum mentem Neutoni; alii enim orbitas circulares posuerunt, alli vero Sethum Wardum secuti motum angularem circa alterum focum ellipsis aequabilem assumserunt; ego vero in ipsa hypothesi Newtoniana resolvi et calculum ad tam tractabilem formam reduxi, ut facili opera et brevi temporis spatio ex tribus datis planetae heliocentricis locis tam

[к] *Следует «Astronomis»*

positio lineae absidum quam excentricitas possit definiri. Cl. Delislio Tuo nomine uti imperasti salutem nunciavi, qui vicissim te plurimum salvere jussit, pariter ac Cl. D. Goldbach. Affirmat praeterea D. Goldbach se tibi scripsisse, litteras autem fortassis interiise arbitratur.

Vale, Vir Celeb., Tuoque erga me concepto favore completere.

L. Euler.

Petropoli, d. 13 Mart 1736.

Публикуется по копии, проверенной и подписанной Эйлером (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 22, лл. 19, 20). Сохранился также неполный черновик этого письма, написанный рукой Эйлера (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 2, л. 239). Разночтения черновика указаны в сносках.

Помета рукой Эйлера: «С оригиналом сличил Л. Эйлер».

[1] Первое письмо Полени Эйлеру написано 1 февраля 1736 г. (оригинал — ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 21, лл. 16, 17 об.).

[2] Более подробно о нахождении сумм указанных рядов см. письмо Л. Эйлера Стирлингу (Историко-математические исследования, вып. X, М., 1957, стр. 133—151).

[3] О формуле, дающей выражение суммы и первых членов ряда (формула Эйлера—Маклорена), и ее вариантах см. вышеупомянутое письмо Стирлингу и примечания к нему. Там Эйлер уже отмечает известную связь между коэффициентами в указанной формуле и суммами рядов обратных степеней целых чисел.

[4] Эта задача рассматривается в сочинении Эйлера: Solutio problematum rectificationem ellipsis requirentium (Решение задач, относящихся к спрямлению эллипса) — Commentarii Academiae Sc. Petropolitanae, т. VIII, (1736) 1741, стр. 86—98.

3

23 ноября [4 декабря] 1738 г., Петербург [1]

Мужу знаменитейшему и славнейшему
Джиованни Полени
шлет большой привет Леонард Эйлер.

Так как я узнал из Твоего письма к славному Гольдбаху,[2] что мое последнее письмо к Тебе, знаменитый муж, погибло, мне кажется, следует прежде всего переписать сюда его копию.

Их Твоего письма, знаменитейший муж, посланного мне первого сентября,[3] я не без прискорбия узнал, что к Тебе еще не вполне вернулось прежнее здоровье, и я от души желаю, чтобы Ты восстановил его как можно скорее.

Поскольку, как видно из письма, Ты уже придумал способ описания трактрис, у которых основания суть окружности,[4] то Ты без труда сделаешь то же самое для любых криволинейных оснований, а такие трактрисы достойны всяческого внимания не только из-за большой пользы их при решении уравнений, которые без этого решить очень трудно, но также из-за весьма важных и удивительных свойств. Инструмент же, приспособленный для точного их описания, должен обладать следующими свойствами. Во-первых, поверхность, на которой совершается описание, должна быть не совершенно гладкой, но умеренно шероховатой с той целью, чтобы описывающая точка в любой момент утратила уже приобретенное движение; ведь если это не произойдет, описывающая точка продвигалась бы не в направлении ведущей нити или прута, а продолжала бы уже однажды сообщенное ей движение, и в этом случае описанная кривая значительно отличалась бы от трактрисы. Во-вторых, движение самой нити или прута, наоборот, не должно быть задерживаемо никаким трением. Вместе с тем необходимо, чтобы масса нити или прута в отношении их оконечности, которая закреплена на стержне, была бы как можно меньше, чтобы центр тяжести прута падал на самую описывающую точку и чтобы не какая-либо другая точка этой трости, а только центр тяжести приобрел бы то движение, которое требуется для описания трактрисы. В-третьих, тянущее движение должно происходить очень медленно, чтобы описывающая точка скорее теряла прежнее движение и в каждый момент приводилась бы в движение заново, как будто из состояния покоя. Наконец, особенно важно, чтобы точка, описывающая трактрису, так прочно закреплялась на своем месте, что она от тянущего движения, направленного перпендикулярно нити, оставалась бы неподвижной, а от косого тянущего движения продвигалась бы по направлению самой нити. При соблюдении этих условий нет никаких сомнений в том, что будут проведены правильные трактрисы.

Что суммы всех рядов такого рода $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} +$ и т. д., в которых n есть целое четное число, зависят от квадратуры круга, едва ли можно доказать другим способом, кроме того, которым пользуюсь я сам. Я ведь предвижу, что сначала нужно сильно расширить границы анализа, прежде чем можно будет прийти к этому. Я же натолкнулся на это суммирование, рассматривая уравнение $0=s-\frac{s^3}{6}+\frac{s^5}{120}-\frac{s^7}{5040}+$ и т. д. Корни этого уравнения есть все дуги в круге с радиусом, равным 1, у которых синус равен 0. Поэтому, если полупериферию обозначить через p, значения самого s будут 0, p, $2p$, $3p$ $4p$ и т. д., и то же самое отрицательные $-p$, $-2p$, $-3p$ и т. д. Итак, поскольку апостериорно будут определены все корни этого уравнения в бесконечном числе, из них мы узнаем простые множители и, следовательно, после деления на s будет

$$1-\frac{s^2}{6}+\frac{s^4}{120}-\frac{s^6}{5040}+\text{ и т. д.}=\left(1-\frac{s}{p}{}^{\text{a}}\right)\left(1+\frac{s}{p}{}^{\text{a}}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{s}{2p}\right)\left(1+\frac{s}{2p}\right)\left(1-\frac{s}{3p}\right)\text{ и т. д.}=\left(1-\frac{ss}{pp}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{ss}{4pp}\right)\left(1-\frac{ss}{9p^2}\right)\left(1-\frac{ss}{16p^2}\right)\text{ и т. д.}$$

Когда все множители даны, мы получим коэффициенты отдельных членов по способу Гарриота, следовательно, $\frac{1}{6}=\frac{1}{pp}+\frac{1}{4pp}+\frac{1}{9p^2}+\frac{1}{16p^2}+$ и т. д. или $\frac{pp}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ и т. д. Далее, коэффициент $\frac{1}{120}$ при s^4 будет сумма [произведений] множителей из пар [членов] ряда $\frac{1}{pp}+\frac{1}{4pp}+\frac{1}{9pp}$ и т. д., а сумма множителей пар равна половине квадрата всего ряда минус половина квадратов отдельных членов, откуда будет $\frac{1}{120}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{36}-\frac{1}{2p^4}\cdot\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\text{ и т. д.}\right)$ и $\frac{p^4}{90}=$ $=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+$ и т. д. Таким образом можно продолжать, сколько будет угодно.[5]

Поскольку мне удалось решить задачу, в которой требуется определить по трем данным гелиоцентрическим положениям планеты вид и положение орбиты, и удалось приспособить ее для легкого использования на практике,[6] я попытался также решить эту задачу для геоцен-

---

[a] *В копии* $\frac{s}{6}$

трических положений, предположив, что орбита Земли познана в совершенстве, но я был вынужден оставить это из-за чрезвычайной трудности вычисления. Однако эта задача, если бы было найдено простое решение, несомненно, принесла бы огромную пользу для определения орбит как планет, так и комет, когда гелиоцентрические положения отсутствуют. Но в этом деле большие неудобства создают широты, которые обязательно должны быть введены в расчет, ибо одни долготы для этой цели недостаточны. Хотя орбита планеты, приведенная к плоскости эклиптики, остается эллипсом, Солнце, однако, больше не будет находиться в одном из его фокусов, и поэтому движение долготы планет, совершаемое в плоскости эклиптики, не будет подчиняться общим законам. Задачу же об измерении эллиптических площадей я решил до такой степени просто, что по данной средней аномалии планеты очень легко можно найти ее истинную аномалию. А это подвело меня к решению другой, значительно более трудной задачи об определении орбит. Но все это я не излагаю более подробно, поскольку скоро выйдет в свет том наших «Комментариев», в котором содержится мое очень полное изложение этого вопроса.

Я полагаю, что Ты, славный муж, теперь уже получил два тома, которые я написал по механике;[7] очень прошу Тебя, чтобы Ты удостоил меня чести — прочитал их, и написал бы мне о них свое основательнейшее мнение; теперь я занят главным образом тем, чтобы написать сочинение по навигации,[8] где я исследую ту ее часть, которая углубляется в механику и гидростатику. Я надеюсь весьма преуспеть в этом деле, если бы Ты был так любезен поделиться со мной своими размышлениями. Будь здоров, знаменитейший муж, и сохрани ко мне свою благосклонность.[9]

Л. Эйлер.

Петербург, 23 ноября 1738.

Viro Illustrissimo ac Celeberrimo Johanni Poleno
S. P. D. Leonh. Euler.

Cum litteras meas postremas ad Te, Vir Illustris, datas periise cognovissem ex ultimis tuis ad Celeb. Goldbachium missis litteris, apographum earum ante omnia huc transscribere visum est.

Ex litteris Tuis, Vir Illustr., Kal. Sept. ad me datis non sine dolore cognovi, Te nondum pristinam valetudinem penitus recuperasse, cui ut restituaris quam citissime ex animo opto.

Cum uti scribis methodum jam excogitaveris tractorias describendi, quarum bases sint circulares, non difficulter idem praestabis pro basibus quibuscunque curvilineis, quae tractoriae non solum propter insignem usum, quem habent in construendis aequationibus tractatu alias difficillimis, sed etiam ob insignes et admirabiles proprietates, attentione omnino sund dignae. Machinam autem ad eas accurate describendas aptam, ut mihi quidem videtur, sequentibus proprietatibus praeditam esse oportet. Primo planum, super quo descriptio absolvitur, non politum, sed modice asperum esse debet, eum in finem, ut punctum describens motum jam conceptum quovis momento a frictione amittat, nisi enim hoc fiat, punctum describens non in directione fili seu virgae trahentis promoveretur, sed simul motum jam impressum sequeretur, quo casu curva descripta a tractoria multum aberraret. Deinde vero a contrario motus ipsius virgae seu fili nulli frictioni debet esse obnoxius, atque simul necesse est, ut moles fili seu virgae respectu extremitatis illius, quae stilo est munita, sit quam minima, ut centrum gravitatis virgae in ipsum punctum describens incidat; non enim quod libet hujus virgae punctum sed solum gravitatis centrum eum accipit motum, qui ad tractorias describendas requiritur. Tertio autem motus tractorius tardissime institui debet, quo punctum describens motum pristinum eo citius amittat ac quovis momento de novo et quasi ex quiete ad motum sollicitetur. Denique praecipue requiritur, ut punctum describens tractoriam tam firmiter in loco suo inhaereat, ut a tractione ad fili directionem normali immotum maneat, a tractione obliqua vero secundum ipsius fili directionem promoveatur. Hisce circumstantiis observatis dubium erit nullum, quin legitimae tractoriae sint producturae.

Quod summae omnium huiusmodi serierum $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+$ etc., in quibus sit n numerus par, a quadratura circuli pendeant, id alio modo praeter eum, quo ipse usus sum, demonstrari posse vix spero. Jam enim praevideo limites analyseos ante valde extendi debere, quam eo pervenire liceat. Ego vero ad istas summationes pertigi considerans hanc aequationem $0 = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \frac{s^7}{5040} +$ etc., cujus aequationis radices sunt omnes illi arcus in circulo, cujus radius est $=1$, quorum idem est sinus rectus $=0$; quare si semiperipheria dicatur p, valores ipsius s erunt 0, p, $2p$, $3p$, $4p$ etc. itemque hi negativi $-p$, $-2p$, $-3p$ etc. Cum igitur istius aequationis infintae radices omnes a posteriori innotescant, ex iis factores simplices cognoscentur, erit scilicet per s diviso

$$1 - \frac{s^2}{6} + \frac{s^4}{120} - \frac{s^6}{5040} + \text{etc.} = \left(1 - \frac{s}{6}^{a}\right)\left(1 + \frac{s}{6}^{a}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{s}{2p}\right)\left(1 + \frac{s}{2p}\right)\left(1 - \frac{s}{3p}\right)\text{etc.} = \left(1 - \frac{ss}{pp}\right)\left(1 - \frac{ss}{4pp}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{ss}{9p^2}\right)\left(1 - \frac{ss}{16p^2}\right) \text{etc.}$$

Datis autem factoribus omnibus habebuntur singulorum terminorum coefficientes methodo Harriotti, scilicet erit $\frac{1}{6} = \frac{1}{pp} + \frac{1}{4pp} + \frac{1}{9p^2} + \frac{1}{16p^2} +$ etc. seu $\frac{pp}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. Porro coefficiens $\frac{1}{120}$ ipsius s^4 erit summa factorum ex binis hujus seriei $\frac{1}{pp} + \frac{1}{4pp} + \frac{1}{9pp} +$ etc., at summa factorum ex binis aequatur semissi quadrati totius seriei minutae dimidiis quadratis singulorum terminorum, unde sit $\frac{1}{120} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} - \frac{1}{2p^4}\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \text{etc.}\right)$ atque $\frac{p^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} +$ etc.; hoc pacto quousque libuerit progredi licet.

Quemadmodum problema, quo ex datis tribus planetae locis heliocentricis orbitae species et positio postulatur, expedire atque ad usum facilem accomodare mihi licuit, ita idem problema tentavi pro locis geometricis [б] posita terrae orbita perfecte cognita at ob nimiam calculi difficultatem id deserere coactus fui. Sed esset profecto hoc problema, si commode solveretur, maximae utilitatis, tam

---

[a] *Следует* «$\frac{s}{p}$».
[б] *Следует* «*geocentricis*».

ad planetarum quam cometarum orbitas definiendas, ubi loca heliocentrica desunt. Sed in hoc negotio latitudines maximam pariunt molestiam, quae necessario in computum ingredi debent, ob longitudines solas ad hunc finem insufficientes. Quamvis enim orbita planetae ad planum Eclipticae reducta maneat ellipsis, tamen Sol non amplius in ejus alterutro foco versabitur, ex quo motus longitudinis planetarum in plano Ecclipticae factus leges generales non sequetur. Problema autem mensurae arearum ellipticarum tam facile resolvi, ut ex data planetae Anomalia media ejus Anomalia vera expeditissime inveniri queat; haec enim ipsa solutio me ad alterius problematis multo difficilioris de orbitarum determinatione manuduxit. Sed haec omnia amplius non expono, cum brevi ille Comment. nostrorum Tomus lucem sit aspecturus, in quo haec materia a me plenissime est pertractata.

Ceterum Te Vir Celeb. nunc quidem accepisse arbitror bina Volumina, quae de Mechanica conscripsi, quae ut legere mihique de iis judicium Tuum solidissimum perscribere digneris, etiam atque etiam rogo; nunc enim in eo sum potissimum occupatus, ut opus parem de navigatione, in quo eam tantum partem, quae in Mechanicam et Hydrostaticam incurrit, excutio, quo in negotio mirifice me profecturum spero, si Tuas meditationes mecum communicare volueris. Vale Vir Illustrissime mihique favere perge.

L. Euler.

Dabam Petropoli, d. 23 Novembr. 1738.

Публикуется по копии, подписанной Эйлером (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 27, лл. 100—102).

[1] В Архиве Академии наук хранится неоконченный черновик письма Л. Эйлера, относящегося к периоду от ноября 1736 до середины 1738 г. (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 2, лл. 240, 241). Видимо, не надеясь на то, что адресат получил это письмо, 23 ноября 1738 г. Эйлер пишет следующее письмо, почти целиком повторяя текст предыдущего. В связи с этим в настоящем издании приводится письмо только от 23 ноября 1738 г., как более полное.

[2] В 1737 и 1738 гг. Эйлер, по-видимому, не получал писем от Полени; Гольдбаху же Полени писал несколько раз в течение этого времени. В Протоколах Конференции Академии наук имеется запись о письмах Полени Гольдбаху от февраля и августа 1737 г., от июля 1738 г. (Протоколы, т. I, стр. 410, 431, 506).

[3] Оригинал и копия письма Полени от 1 сентября 1736 г. хранятся в Архиве АН СССР (ф. 1, оп. 3, № 21, лл. 132—133 об., 136—137). Представлено и читано Эйлером в заседании Конференции Академии наук 8 ноября 1736 г. (Протоколы, т. I, стр. 328).

[4] Об этом Полени пишет Эйлеру следующее: «Первый инструмент, который я изобрел и сконструировал для описания трактрис с криволинейным основанием, — Ты побудил меня заняться этими трактрисами, — состоит из линейки, снабженной, как его называют, заостренным бегунком, чтобы можно было этой линейкой описать круг по любому данному радиусу. К концу этой линейки присоединена другая, подвижная по кругу, и она имеет колесико, расположенное так, как я предлагал это в другом месте для описания простой трактрисы. Итак, пока первая линейка описывает окружность, это колесико обозначает трактрису, у которой касательные между нею и окружностью постоянны».

[5] Рассуждения Эйлера здесь не вполне строги, однако конечный результат получается верный. Разложение функции $\frac{\sin s}{s}$, о котором говорит Эйлер, имеет вид $\frac{\sin s}{s} = \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{s}{k\pi}\right) e^{\frac{s}{k\pi}}$. Штрих означает, что в произведении отсутствует член при $k = 0$. После группировки членов получим $\frac{\sin s}{s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2\pi^2}\right)$.

[6] Астрономические исследования Эйлера, относящиеся к этому времени, изложены им в трех статьях: De motu planetarum et orbitarum determinatione (О движении планет и определении орбит), Orbitae solaris determinatio (Определение солнечной орбиты) и Solutio problematum quorundam astronomicorum (Решение некоторых астрономических задач) — Commentarii Academiae sc. Petropolitanae, т. VII, (1734/35) 1740, стр. 67—85, 86—96, 97—98.

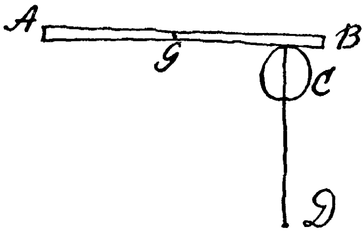
[7] Известное двухтомное сочинение Эйлера «Mechanica sive motus scientia analytice exposita» (Механика или наука о движении, изложенная аналитически) — опубликовано в Петербурге в 1736 г.

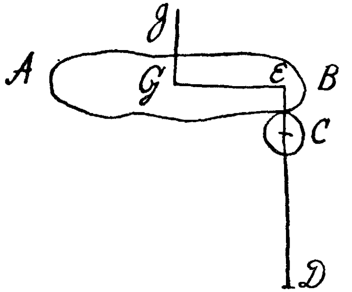
[8] Большая монография Эйлера по навигации, начатая им по поручению Академии еще в 1737 г., была закончена уже во время пребывания в Берлине и опубликована в двух частях: Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus, pars prior, complectans theoriam universam de situ ac motu corporum aquae innatantium (Морская наука, или трактат о постройке и вождении судов, часть первая, содержащая общую теорию о положении и движении тел, плавающих на воде) и Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus, pars posterior, in qua rationes ac praecepta navium construendarum et gubernandarum fusius exponuntur (Морская наука, или трактат о постройке и вождении судов, часть вторая, в которой подробнее излагаются принципы и руководства по судостроению и судовождению) — СПб., 1749.

В русском переводе в том же году была опубликована только вводная часть под заглавием: Письмо Леонарда Эйлера из Берлина 25-го Генваря 1749 года президенту Академии наук графу Кириллу Григорьевичу Разумовскому с изложением содержания написанного по поручению Академии сочинения: «Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus».

[9] Приводим конец непубликуемого черновика (см. прим. 1, стр. 224), который не был воспроизведен Эйлером в письме от 23 ноября 1738 г.

«Славный Дан. Бернулли недавно предложил мне задачу — определить закон передачи движения, когда два тела сталкиваются между собой так, что прямая, соединяющая их центры тяжести, не проходит через точку соприкосновения. Ведь известные правила не имеют места, если прямая, соединяющая центры тяжести тел,





не проходит через точку соприкосновения, а также если она в точке соприкосновения не есть нормаль. В частности, он предложил такой случай, когда шар C, движущийся с данной скоростью в направлении DC, прямо наталкивается на неподвижную палку AB. Он сообщает, что по решению этой задачи возникли разногласия между ним и его отцом. Я нашел следующее решение этого вопроса».

Такая задача предложена Эйлеру Даниилом Бернулли в письме от 12 сентября 1736 г. (ААН СССР, ф.136, оп. 2, № 7, лл. 20, 21). Опубликовано с сокращениями в «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIeme siècle» (изд. П. Фусом, т. II, СПб., 1843, стр. 433—435).

Задача об упругом столкновении тел легко решается методами теоретической механики.

4

24 сентября [5 октября] 1739 г., Петербург

Мужу знаменитейшему и превосходнейшему
Джиованни Полени
шлет большой привет Леонард Эйлер.

Письмо Твое, знаменитейший муж, посланное мне в мартовские Календы [первого марта] этого года,[1] я получил, но то письмо, в котором, как Ты сообщаешь, содержалось описание некоего особого приспособления для вычерчивания трактрис на круглом основании, не дошло до меня, о чем я очень сожалею. Я узнал, что Ты ревностно трудился в поисках удобного описания такого рода кривых, которые могут найти широкое применение при решении уравнений, где переменные не отделяются друг от друга и даже не могут быть найдены привычными способами. Такая работа принесет огромную пользу анализу. Поэтому я очень прошу Тебя, славный муж, чтобы Ты соблаговолил сообщать мне Твои глубокие размышления и открытия в этой области, а поскольку до сих пор в наших «Комментариях» еще не помещено ничего из Твоих сочинений, Ты весьма обяжешь нашу Академию, если пожелаешь некоторыми своими диссертациями пополнить и украсить наши сочинения, издаваемые ежегодно.

С большой радостью я узнал, что Тебе понравилось мое суммирование ряда $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+$ и т. д., всякий раз, когда n есть целое положительное четное число. Я открыл также следующий закон, согласно которому следуют одна за другой суммы этих рядов; предположим, что периферия круга равна π при диаметре 1; в случае, когда $n=2$, сумма ряда будет $\alpha\pi^2$; в случае, когда $n=4$, сумма равна $\beta\pi^4$; в случае, когда $n=6$, сумма — $\gamma\pi^6$, так что $\alpha\pi^2$, $\beta\pi^4$, $\gamma\pi^6$, $\delta\pi^8$, $\varepsilon\pi^{10}$ и т. д. выражают суммы ряда, если n будет последовательно равно показателю π. Количество же α, β, γ, δ и т. д. последовательно определяется следующим образом: $\alpha=\frac{1}{6}$; $\beta=\frac{2\alpha^2}{5}$; $\gamma=2\frac{2\alpha\beta}{7}$; $\delta=\frac{2}{9}(2\alpha\gamma+\beta^2)$; $\varepsilon=\frac{2}{11}(2\alpha\delta+2\beta\gamma)$; $\zeta=\frac{2}{13}(2\alpha\varepsilon+2\beta\delta+\gamma^2)$ и т. д. Эту последовательность можно проследить из формы квадрата ряда $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+$ и т. д.[2] Отсюда я сумел определить сумму ряда $\frac{1}{1+n}+\frac{1}{4+n}+\frac{1}{9+n}+\frac{1}{16+n}+$ $+\frac{1}{25+n}+$ и т. д., которую я нашел равной $\frac{\pi\sqrt{n}-1}{2n}+$ $+\frac{\pi\sqrt{n}}{\left(e^{2\pi\sqrt{n}}-1\right)n}$, где e обозначает число, логарифм которого равен 1, или $e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+$ и т. д. Если же n было бы отрицательным числом, то тогда это выражение, поскольку $\sqrt{n}$ — мнимое количество, станет бесполезным, однако я нашел, что сумма этого ряда $\frac{1}{1-n}+\frac{1}{4-n}+\frac{1}{9-n}+\frac{1}{16-n}+$ и т. д. равна $\frac{1}{2n}-\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\cdot\cot A\pi\sqrt{n}$, где $\cot A\pi\sqrt{n}$ у меня обозначает котангенс дуги $\pi\sqrt{n}$ круга, радиус которого равен 1; между тем любопытно, что оба эти выражения в случае, когда $n=0$, переходят в $\frac{\pi\pi}{6}$, хотя ни в том, ни в другом не встречается квадрат π. Из последней формулы понятно, что всякий раз, когда n — число такого рода, что дуга $\pi\sqrt{n}$ будет или 90°, или 3·90°, или 5·90° и т. д., а котангенс всех этих дуг равен 0, сумма будет $\frac{1}{2n}$. Это получится, если n, или $\frac{1}{4}$, или $\frac{9}{4}$, или $\frac{25}{4}$, или в общем виде $\frac{(2i+1)^2}{4}$, где i обозначает любое число, поэтому сумма ряда $\frac{4}{4-(2i+1)^2}+\frac{4}{16-(2i+1)^2}+\frac{4}{36-(2i+1)^2}+\frac{4}{64-(2i+1)^2}+$ и т. д. будет $\frac{2}{(2i+1)^2}$.[3]

В настоящее время в печати находится седьмой том наших «Комментариев», шестой же и другие, если какихнибудь у Тебя, славный муж, еще недостает, будут посланы с первой оказией. Недавно вышло также ботаническое сочинение славного Аммана[4] о растениях, произрастающих искони в этой империи и мало изученных, и еще написанное мною небольшое сочинение по теории музыки, в котором я, как мне кажется, привел к определенным законам все, что происходит в музыке, изложив от самых основ. Я позабочусь, чтобы экземпляры этих книг дошли до Тебя. В томе же VII «Комментариев» имеется моя диссертация,[5] относящаяся к астрономии, в которой я показываю, как по трем данным гелиоцентрическим положениям планет и периодам обращения определить эксцентриситет орбиты и положение апсид. Этот способ, поскольку Ты, славный муж, желаешь скорее его узнать, я коротко изложу. Во-первых, если предположить, что эксцентриситет или отношение поперечной оси орбиты к расстоянию фокусов $1:v$, средняя аномалия планеты равна x, истинная или уравненная аномалия z и аномалия эксцентра, согласно Кеплеру, равна P, то $x=P+v\sin A\cdot P$. Следовательно, синус дуги или угла P должен быть преобразован в дугу или должна быть исследована дуга, которая будет равна синусу дуги P; эта дуга, умноженная на v и прибавленная к эксцентрической аномалии P, даст среднюю аномалию, соответствующую x. Любой же синус может быть легко преобразован в дугу следующим способом: от логарифма синуса, взятого из обыкновенных таблиц, вычисляется постоянный логарифм 4.6855749 и по остаточному логарифму из таблиц натуральных чисел мы ищем соответствующее число, которое даст дугу, равную тому синусу и выраженную в секундах. Из той же эксцентрической аномалии P мы находим истинную аномалию z абсолютно геометрически из уравнения $\cos A \cdot z = \frac{v + \cos A \cdot P}{1 + v \cos A \cdot P}$; но хотя этот способ геометрический, я, по своему обыкновению, предпочитаю ему другой путь $z = P - v \sin A \cdot P + \frac{v^2}{4} \sin A \times$ $\times\, 2P - \frac{v^3}{12} (\sin A \cdot 3P + 3\sin A \cdot P) + \frac{v^4}{32} (\sin A \cdot 4P +$ $+\, 4 \sin A \cdot 2P) - \frac{v^5}{80} (\sin A \cdot 5P + 5\sin A \cdot 3P + 10 \sin A \cdot P)$ и т. д. Даже для самого большого эксцентриситета, какой имеет Меркурий, достаточно получить только три первых члена этого выражения. Если же мы теперь имеем три гелиоцентрических положения какой-нибудь планеты, положим для первого положения среднюю аномалию, равную x, для второго $x + m$, а для третьего $x + n$, то m и n, поскольку период обращения дан, будут данными количествами или углами. Подобным же образом пусть будет истинная аномалия первого наблюдения z, второго $z + f$ и третьего $z + g$, дуги же или углы f и g будут даны из самих наблюдений. Далее, пусть эксцентрическая аномалия для первого наблюдения будет P, для второго — Q и для третьего — R, эксцентриситет же или отношение поперечной оси орбиты планеты к расстоянию фокусов будет $1 : v$. При таком предположении пусть будет $\frac{m + f}{2} = M$ и $\frac{n + g}{2} = N$ и будет приближенно тангенс аномалии эксцентра первого положения или $\operatorname{tag} A \cdot P = \frac{(m - M) \sin A \cdot N - (n - N) \sin A \cdot M}{m - M\, S\mathrm{vers} A \cdot N - (n - N)\, S\mathrm{vers}\, A \cdot M} \times$ $\times \sin \mathrm{tot}$. Когда таким образом ближайшее значение самого P найдено, то будет также приближенно $Q = P + M$, $R = P + N$ и $v = \frac{m - M}{\sin A \cdot Q - \sin A \cdot P}$, где, если m и M выразить в секундах, синусы дуг Q и P, выраженные в виде дуг в секундах, нужно преобразовать по ранее изложенному способу. Найдя эти почти истинные значения, мы получим еще более точные данные следующим образом. Возьмем $M = M - \frac{v^2}{8}(\sin A \cdot 2Q - \sin A \cdot 2P)$ и $N = N - \frac{v^2}{8}(\sin A \cdot 2R - \sin A \cdot 2P)$. Эти более истинные значения для M и N, представленные в уравнение $\operatorname{tag} A \cdot P \frac{(m - M)\sin A \cdot N - (n - N)\sin A \cdot M}{(m - M)\operatorname{Svers} A \cdot N - (n - N)\operatorname{Svers} A \cdot M}$ дадут эксцентрическую аномалию P так близко, что она не будет нуждаться ни в какой поправке. Когда мы нашли таким образом эксцентрическую аномалию первого наблюдения P, то с применением более истинных значений букв M и N достаточно точно будет $Q = P + M$ и $R = P + N$, отсюда $v = \frac{m - M}{\sin A \cdot Q - \sin A \cdot P}$ или $v = \frac{n - N}{\sin A \cdot R - \sin A \cdot P}$; из этого мы узнаем эксцентриситет орбиты. Далее, средняя аномалия первого наблюденного положения $x = P + v \sin A \cdot P$; его же истинная аномалия $z = P - v \sin A \cdot P + \frac{v^2}{4} \sin A \cdot 2P - \frac{v^3}{12}(\sin A \times 3P + 3 \sin A \cdot P)$, из которой можно определить положение линии апсид. Пользуясь этим методом, из наблюдений Флемстида, которые сам он использует для обоснования теории Солнца, я нашел, что для Гринвичской обсерватории в начале 1701 г., по старому стилю, положение апогея Солнца было $3S7°5'54''$, среднее же движение Солнца $9S20°44'30''$, эксцентриситет $\frac{1674}{100000}$ и наибольшее уравнение центра $1°55'77''$.

Прошу Тебя благосклонно принять это мое слишком пространное письмо и сохранить ко мне прежнее расположение. Будь здоров.

Л. Эйлер.

Петербург, VIIII день[6] до $\frac{\text{24 сент.}}{\text{Октяб. Календ.}}$ 1739.

Viro Illustrissimo atque Excellentissimo Joanni Poleno
S. P. D. Leonhardus Euler.

Litteras Tuas, Vir Illustrissime, Kál. Martiis hujus anni ad me datas accepi, verum illae litterae, quibus uti significas descriptio peculiliaris cujusdam organi deliniandi tractorias super basi circulari continebatur, mihi non sunt redditae, id quod non mediocriter doleo. Cognovi autem Te diligenter laborasse in commoda hujusmodi curvarum descriptione, quarum summus usus esse queat in construendis aequationibus, in quibus variabiles a se invicem separari atque adeo consuetis methodis construi nequeant, quod opus Analysi maximam afferet utilitatem. Quamobrem Te, Vir Celeb., etiam atque etiam rogo ut sublimes hac de re meditationes atque inventiones tuas nobiscum communicare velis, quoniam enim adhuc de Tuis scriptis nihil in Comment. nostris est insertum, magnopere Academiam nostram Tibi devincies, si nonnullis dissertationibus Tuis opera nostra, quae quotannis eduntur, augere atque exornare volueris.

Summationem meam seriei $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+$ etc. quoties n est numerus integer affirmativus par, Tibi non displicuisse summa cum voluptate intellexi. Detexi autem sequentem legem, secundum quam summae harum serierum progrediuntur; posita scilicet peripheria circuli $=\pi$ existente diametro $=1$, erit seriei casu quo $n=2$ summa $=\alpha\pi^2$, casu quo $n=4$ summa $=\beta\pi^4$, casu quo $n=6$ summa $=\gamma\pi^6$: ita ut $\alpha\pi^2$, $\beta\pi^4$, $\gamma\pi^6$, $\delta\pi^8$, $\varepsilon\pi^{10}$, etc. exprimant summas seriei, si fuerit successive $n=$ exponenti ipsius π. Unciae vero α, β, γ, δ, etc. sequentem tenent progressionem, ut sit $\alpha=\frac{1}{6}$; $\beta=\frac{2\alpha^2}{5}$; $\gamma=2\frac{2\alpha\beta}{7}$; $\delta=\frac{2}{9}\times(2\alpha\gamma+\beta^2)$; $\varepsilon=\frac{2}{11}(2\alpha\delta+2\beta\gamma)$; $\zeta=\frac{2}{13}(2\alpha\varepsilon+2\beta\delta+\gamma^2)$ etc. quae progressio ex forma quadrati seriei $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+$ etc. perspicitur. Hinc autem mihi licuit summam hujus seriri $\frac{1}{1+n}+\frac{1}{4+n}+\frac{1}{9+n}+\frac{1}{16+n}+\frac{1}{25+n}+$ etc. assignare, quam inveni esse $\frac{\pi\sqrt{n}-1}{2n}+\frac{\pi\sqrt{n}}{(e^{2\pi\sqrt{n}}-1)}$, denotante e numerum cujus logarithmus est $=1$ seu $e=1+$

$+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+$ etc. Quodsi autem n fuerit numerus negativus, tum ista expressio ob $\sqrt{n}$ quantitatem imaginariam fiet inutilis, inveni autem hujus seriei $\frac{1}{1-n}+\frac{1}{4-n}+\frac{1}{9-n}+\frac{1}{16-n}+$ etc. summan esse $\frac{1}{2n}-\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\cdot \cot A\pi\sqrt{n}$, ubi $\cot A\pi\sqrt{n}$ mihi significat cotangentem arcus $\pi\sqrt{n}$ in circulo, cujus radius $=1$, accepti; interim mirum est utramque hanc expressionem casu, quo $n=0$, abire in $\frac{\pi\pi}{6}$, cum tamen in neutra quadratum ipsius π occurrat. Ex posteriori autem formula intelligitur, quoties n sit ejusmodi numerus, ut arcus $\pi\sqrt{n}$ fiat vel 90°, vel 3·90°, vel 5·90° vel etc., quorum arcuum omnium cotangens est $=0$, tum summam fore $\frac{1}{2n}$. Evenit vero hoc, si fuerit n vel $\frac{1}{4}$ vel $\frac{9}{4}$ vel $\frac{25}{4}$ vel generatim $\frac{(2i+1)^2}{4}$, denotante i numerum integrum quemcunque, hanc ob rem hujus seriei $\frac{4}{4-(2i+1)^2}+\frac{4}{16-(2i+1)^2}+$ $+\frac{4}{36-(2i+1)^2}+\frac{4}{64-(2i+1)^2}+$ etc. summam fore $\frac{2}{(2i+1)^2}$ intelligitur.

Nunc sub prelo versatur Comment. nostrorum Tomus septimus, sextus autem et, si qui alii Tibi adhuc desunt, Vir Celeberrime, prima oblata occasione mittentur, prodiit etiam nuper Clariss. Ammani opus Botanicum de plantis in Imperio hoc sponte nascentibus minusque cognitis, itemque opusculum a me conscriptum de Theoria musica, in quo mihi videor omnia, quae in musica occurrunt, ad certas leges revocasse, atque ex ipsis principiis exposuisse, quorum librorum exemplaria, ut ad Te perveniant, curabo. In Tomo autem Comment. VII continetur demum dissertatio mea ad Astronomiam spectans, in qua ex datis tribus planetae locis heliocentricis una cum tempore periodico definire doceo orbitae excentricitatem ac positionem absidum, quam methodum, quia videre cupis, Vir excelentissime, breviter explicabo. Primo si excentricitas seu ratio axis transversi orbitae ad focorum distantiam ponatur $=1:v$ atque planetae anomalia media sit $=x$, anomalia vero[a] seu coaequata $=z$, et anomalia eccentri secundum Keplerum $=P$: erit $x=P+v \sin A \cdot P$. Scilicet sinus arcus seu anguli P in arcum debet transmutari sive arcus investigari qui sit aequalis sinui arcus P, isque arcus per v multiplicatus et ad anomaliam excentri P additus dabit anomaliam mediam x respondentem. Sequenti autem modo quilibet sinus in arcum expedite poterit transmutari: a logarithmo sinus ex tabulis vulgaribus desumto subtrahatur logarithmus constans hic 4.6855749 et logarithmo residuo ex tabulis numerorum naturalium quaeratur numerus respondens, qui numerus dabit arcum sinui illi aequalem in minutis secundis expressum. Ex eadem vero anomalia excentri P reperietur anomalia vera z absolute gemetrice ex aequatione hac $\cos A \cdot z = \frac{v \cos A \cdot P}{1+v \cos A \cdot P}$; sed quanquam haec methodus est geometrica, tamen ei ad institutum meum antefero hanc alteram expeditiorem $z=P-$ $-v \sin A \cdot P+\frac{v^2}{4} \sin A \cdot 2P-\frac{v^3}{12}(\sin A \cdot 3P+3 \sin A \cdot P)+$ $+\frac{v^4}{32}(\sin A \cdot 4P+4 \sin A \cdot 2P)-\frac{v^5}{80}(\sin A \cdot 5P+5 \sin A \times$ $\times 3P+10 \sin A \cdot P)$ etc. cujus expressionis sufficit tres tantum priores terminos accipere etiam pro maxima excentricitate, qualem habet Mercurius. Quodsi nunc tria habeantur alicujus planetae loca heliocentrica, ponatur pro loco primo anomalia media $=x$, pro secundo $=x+m$, ac pro tertio $=x+n$ erunt m et n ob tempus periodicum datum quantitates seu anguli dati. Simili modo sit anomalia vera primae observationis $=z$, secundae $=z+$ $+f$ et tertiae $=z+g$, dabuntur autem arcus seu anguli f et g ex ipsis observationibus. Denique sit anomalia excentri pro prima observatione $=P$, pro secunda $=Q$ et pro tertia $=R$; excentricitas autem seu ratio axis transversi orbitae planetae ad focorum distantiam sit $1:v$.

His positis fiat $\frac{m+f}{2}=M$ et $\frac{n+g}{2}=N$, eritque proxime anomaliae excentri primi loci tangens seu tag $A \times$ $\times P=\frac{(m-M) \sin A \cdot N-(n-N) \sin A \cdot M}{m-M \text{ Svers } A \cdot N-(n-N) \text{ Svers } A \cdot M}$ sin tot. Invento autem hoc modo proximo ipsius P valore erit pariter proxime $Q=P+M$ et $R=P+N$; atque $v=\frac{m-M}{\sin A \cdot Q-\sin A \cdot P}$, ubi si m et M experimantur in minutis sedundis, sinus

[a] *Следует «vera».*

etiam arcuum Q et P in arcus per minuta secunda expressos sunt transmutandi methodo ante exposita. Inventis autem his valoribus prope veris, propiores hos modo obtinebuntur. Sumatur $M = M - \frac{v^2}{8}(\sin A \cdot 2Q - \sin A \cdot 2P)$ et $N = N - \frac{v^2}{8}(\sin A \cdot 2R - \sin A \cdot 2P)$, hique veriores valores pro M et N in aequatione $\operatorname{tag} A \cdot P = \frac{(m-M)\sin A \cdot N - (n-N)\sin A \cdot M}{(m-M)\operatorname{Svers} A \cdot N - (n-N)\operatorname{Svers} A \cdot M}$ substituti dabunt anomaliam excentri P vero tam prope, ut ea nulla amplius correctione indigeat. Inventa autem hac ratione anomalia excentri primae observationis P, erit adhibitis verioribus valoribus litterarum M et N satis exacte $Q = P + M$ et $R = P + N$. Hincque $v = \frac{m - M}{\sin A \cdot Q - \sin A \cdot P}$ seu $v = \frac{n - N}{\sin A \cdot R - \sin A \cdot P}$; unde excentricitas orbitae innotescit. Deinde vero erit primi loci observati anomalia media $x = P + v \sin A \cdot P$; ejusdemque anomalia vera $z = P - v \sin A \cdot P + \frac{v^2}{4}\sin A \cdot 2P - \frac{v^3}{12}(\sin A \cdot 3P + 3\sin A \cdot P)$, ex qua positio lineae absidum definietur.

Methodo hac utens ex observationibus Flamstedii, quas ipse ad Theoriam solis stabiliendam adhibet, inveni pro observatorio Grenovicensi styloque veteri fuisse initio A 1701 locum Apogaei solis 3S7°5′54″, motumque solis medium 9S 20°44′30″, excentricitas autem prodiit $\frac{1674}{100\,000}$ atque aequatio maxima 1°55′77″. Has igitur aliquanto prolixiores litteras oro atque obsecro ut benevole accipias mihique favere pergas. Vale.

L. Euler.

Petropoli, VIIII $\frac{\text{24 sept}}{\text{Calend. Octob.}}$ MDCCXXXVIIII.

Публикуется по копии, подписанной Эйлером (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 27, лл. 193—195).

[1] Письмо Полени написано 1 марта 1739 г. (оригинал — ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 26, лл. 25, 26; копия — там же, лл. 33, 34).

[2] Действительно, обозначим для краткости $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_2$ и т. д. Если $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^{k-1}$, то Эйлер утверждает, что

$$F^2=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}a_k(2_k+1)\,x^{k-2},\ \text{т. е. } F^2=\frac{1}{x^{3/2}}\frac{d}{dx}\left\{x^{3/2}(F-a_1)\right\}.$$

Полагая $Z=\frac{1}{i\sqrt{x}}$ $(i=\sqrt{-1})$, $F=\frac{1}{x^{3/2}2i}\cdot v\left(\frac{1}{i\sqrt{x}}\right)$, получим для $v(z)$ уравнение Риккати $v_z^1+v^2=\frac{1}{z^4}$, решение которого с учетом того, что $F(0)=a_1=\frac{1}{6}$, будет $v=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\frac{e^{\frac{1}{z}}+e^{-\frac{1}{z}}}{e^{\frac{1}{z}}-e^{-\frac{1}{z}}}$, откуда $F(x)=\frac{1}{2x}(1-\sqrt{x}\operatorname{ctg}\sqrt{x})$. Пользуясь известным разложением $z\operatorname{ctg}z=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^nB_n}{(2n)!}z^{2n}$ (B_n — числа Бернулли), найдем $F(x)=$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n}{2(2n)!}x^{n-1}$, т. е. $a_n=\frac{2^{2n}B_n}{2(2n)!}$. Суммы вида $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}$, о которых говорит Эйлер, имеют вид $\frac{2^{2n}B_n\pi^{2n}}{2(2n)!}$, т. е. $a_n\cdot\pi^{2n}$, как и указывает Эйлер. Коэффициенты в формуле Эйлера—Маклорена имеют вид $\frac{2a_n}{2^{2n}}$. Эйлер отметил это в 3-м письме к Стирлингу (см. прим. 2 ко 2-му письму к Полени, стр. 218 настоящего издания).

[3] Указанные ряды легко получаются из другого разложения для $\operatorname{ctg}\pi z$: $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)=\frac{1}{z}+2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-k^2}$. См. об этом также прим. 7 к письму Эйлера Ноде (стр. 205 настоящего издания).

[4] Речь идет о сочинении Аммана: Stirpium rariorum in Imperio Rutheno sponte provenientium icones et descriptiones collectae. Instar supplementi ad Commentar. Acad. Scient. Imper., 1739 (Собрание рисунков и описаний редких растений, искони произрастающих в Российской империи. Вместо приложения к Комментариям имп. Акад. наук, 1739).

[5] Эйлер имеет в виду свою статью: De motu planetarum et orbitarum determinatione (О движении планет и определении орбиты) — Commentarii Acad. Sc. Petropolitanae, VII, (1734/35) 1740, стр. 67—85.

[6] Здесь, по-видимому, переписчиком допущена ошибка, так как 24 сентября должен быть не VIIII, а VIII день до октябрьских Календ. (Надпись «24 sept» сделана рукой Эйлера).

5

12 [23] апреля 1740 г., Петербург

Мужу знаменитейшему и славнейшему
Джиованни Полени
шлет большой привет Леонард Эйлер.

Твое последнее письмо, посланное в канун декабрьских Нон прошлого года,[1] пришло ко мне довольно скоро, из чего я могу заключить, что этот путь посылки сюда писем через Вену, которым Ты, знаменитейший муж, воспользовался, будет самый надежный из всех. Я чрезвычайно сожалею о пропаже многих Твоих писем, заключавших в себе глубочайшие мысли. Твои «Витрувианские опыты» [2] еще не прибыли к нам, но все-таки я очень Тебе благодарен, что Ты соблаговолил мне послать экземпляр этой книги. Я, однако, надеюсь, что они не пропали совсем, а быть может, прибудут к нам ближайшей весной.

Наш славный Делиль недавно отправился отсюда к устью реки Оби, по поручению нашей августейшей императрицы, чтобы там наблюдать прохождение Меркурия через Солнце, которое произойдет 2 мая и по всей Европе не будет видно. Кроме того, ему предложено произвести другие наблюдения, относящиеся как к географии, так и к естественной истории, и главным образом он обещал мне тщательно исследовать явления морских течений у берегов Ледовитого океана, ибо, когда я в связи с задачей на эту тему, предложенной Парижской Академией, занялся поисками причины морского прилива и отлива,[3] я открыл много особенных явлений, которые должны происходить в полярных областях, поэтому нынешнее путешествие славного Делиля послужит мне к тому, чтобы или подтвердить мою теорию, или опровергнуть ее. Ведь из моей теории, которая полностью удовлетворяет всем до сего времени изученным явлениям, следует, что в областях, соседних с обоими полюсами, ежедневно должен происходить только один прилив и один отлив, поскольку Луна в течение 24 часов не пересекает горизонт. Происходит ли это так или нет, я смогу узнать из наблюдений славного Делиля.

Я очень рад тому, что Ты, знаменитейший муж, одобряешь мою «Механику». Но совсем другая участь постигла ее в Англии, где некий математик по имени Робинс[4] яростно обрушился на нее и пытался полностью опровергнуть все принципы, на которых она основана. А больше всего он негодует на меня за то, что я отважился трактовать науку о движении аналитически, и именно с помощью того анализа, который так ненавистен англичанам, в то время как великий Ньютон пользовался в этом деле синтезом. Хотя я легко мог бы ответить этому противнику, но мои хорошие друзья посоветовали мне лучше обойти молчанием эти нападки.

В настоящее время я закончил диссертацию, которую начал уже давно, об определении орбит планет из наблюденных геоцентрических положений,[5] и с ее помощью я исправил сначала солнечные таблицы, а затем также таблицы Меркурия; однако, поскольку я не вполне полагаюсь на наблюдения, которыми пользовался, я не знаю, насколько можно доверять поправкам. Метод мой состоит в следующем: я беру какие-нибудь астрономические таблицы, которые бы не отклонялись чрезмерно от истины, и из них или, скорее, из самих данных, на которых построены эти таблицы, вычисляю для времени наблюдения как геоцентрическую долготу планеты, так и широту, которые, если их сравнить с наблюдением, показывают расхождение таблиц и наблюдения. Затем, рассматривая таблицы как ошибочные, я принимаю, что для их сопоставления с истиной нужно, во-первых, к эксцентриситету, указанному в таблицах, прибавлять какую-то небольшую дробь, которую я обозначаю дифференциальным выражением dk; во-вторых, к долготе афелия прибавлять угол dp, в-третьих, к долготе восходящего узла — угол dq, в-четвертых, к наклонности орбиты — угол dn и, наконец, в-пятых, к средней аномалии, какую дают таблицы для каждого времени, постоянно прибавлять угол dm. Далее, введя эти поправки, хотя до сих пор неизвестные, я, прибегнув к помощи дифференциального исчисления, снова определяю вычислением геоцентрическую долготу и широту планеты и делаю их равными наблюденной долготе и широте, откуда получаю два уравнения следующего вида: $df=Adk+Bdp+Cdq+$ $+Ddn+Edm$ и $dq=\alpha dk+\beta dp+\gamma dq+\delta dn+\varepsilon dm$, где df обозначает разницу между долготой наблюденной и найденной по таблицам, а dq — разницу между широтой наблюденной и найденной по таблицам. Итак, три наблюдения, обработанные таким образом, дадут шесть уравнений, из которых можно будет определить значения дифференциальных выражений dk, dp, dq, dn и dm. Когда они будут известны, можно легко создать правильные астрономические таблицы. Однако, занимаясь этим, я вскоре понял, что не следует упускать из виду ту поправку наблюдений, которая обычно выводится из конечной скорости движения света. Астрономические таблицы ведь составляются так, что они показывают на каждый момент времени положение планеты, в котором она была бы видна, если бы свет доходил до нас мгновенно, а не то, в каком она находится в действительности. Поэтому в одной из предыдущих диссертаций я тщательно исследовал явления, происходящие от распространения света, с конечной скоростью,[6] и изложил способ, с помощью которого из любого наблюденного положения какой-либо звезды я могу найти то положение на небе, в котором была бы видна звезда, если бы свет распространялся мгновенно. Я пользовался при этом тем наблюдением, которым установлено, что лучи света доходят от Солнца до нас за 8 минут. Отсюда, если принимать параллакс Солнца $10''$, следует, что лучи света проходят в одну секунду примерно 43 полудиаметра Земли. Таким образом, происходит двойная аберрация звезд, из которых одна проистекает от суточного движения Земли, другая — от годового движения. Я нашел, однако, первую аберрацию настолько незначительной, что она никогда не достигает секунды. Поэтому я исследовал только разницу, происходящую от годового движения Земли. Итак, прежде всего, наблюдая Солнце, я нашел, что к наблюденной долготе Солнца нужно постоянно прибавлять $20''$, чтобы получить истинное положение Солнца, в котором оно оказалось бы, если бы посылало к нам лучи мгновенно. Далее, я убедился, что неподвижные звезды нуждаются в одной поправке, а планеты в другой. Для неподвижных звезд я вывел этот способ [поправки] наблюденных положений. Ведь для неподвижных звезд нужно поправлять как наблюденную долготу, так и широту. Поправку широты можно найти так. От гелиоцентрической долготы Земли или от положения в эклиптике, противостоящего Солнцу, нужно вычесть наблюденную долготу звезды и, если в остатке дуга будет меньше 6 знаков, уменьшать наблюденную широту; и наоборот, если в остатке дуга превышает 6 знаков, нужно ее увеличивать; а насколько нужно ее уменьшать или увеличивать, определяется так.

Берется логарифм синуса этой остаточной дуги, к нему прибавляется логарифм синуса наблюденной широты и от суммы этих логарифмов вычитается постоянный логарифм 18.7057289. Полученному в остатке логарифму по таблице логарифмов натуральных чисел мы находим соответствующее число, дающее искомую поправку в секундах, которую нужно или прибавить к наблюденной широте, или отнять от нее. Например, если долгота Земли на ее орбите была $1S25°42'35''$, а какой-нибудь неподвижной звезды наблюденная широта $75°\ 17'\ 48''$ и долгота $5S\ 13°\ 20'\ 55''$, мы находим поправку широты так:

от долготы Земли или ☍ Солнца	$1S25°42'35''$
вычитается долгота неподвижной звезды	$5S13°\ 20'\ 55''$
остаточная дуга	$8S12°\ 21'\ 40''$.

Эта остаточная дуга, поскольку она больше чем 6 знаков, означает, что наблюденную широту нужно увеличить на поправку. Теперь берется

логарифм синуса остаточной дуги	9.9790862
прибавляется логарифм синуса наблюденной широты	9.9855400
	19.9646262
вычитается	18.7057289
	1.2588973

Этому логарифму соответствует число $18\frac{9}{60}$, которое показывает, что к наблюденной широте нужно прибавить $18''\ 9'''$, чтобы получилась истинная широта звезды, на которой она была бы видна, если бы свет доходил до нас мгновенно, поэтому в данном случае истинная широта звезды будет $75°18'6''9'''$. Если же наблюдается звезда, ближайшая к полюсу эклиптики, так, чтобы ее расстояние от полюса едва превышало одну минуту, тогда это правило нуждается в некотором дополнении, которое описывать здесь было бы слишком долго.

Итак, я перехожу к поправке долготы. Здесь опять наблюденная долгота звезды вычитается от долготы Земли или от противолежащего положения Солнца и берется косинус остаточной дуги; если он положительный, нужно уменьшать наблюденную долготу, если же он отрицательный, нужно ее увеличивать. Чтобы получить поправку, которую нужно или прибавлять, или вычитать, берем логарифм косинуса той же остаточной дуги, к нему прибавляем постоянный логарифм 1.2942710 и от суммы вычитаем логарифм косинуса наблюденной широты. Число, соответствующее остаточному логарифму, даст поправку, выраженную в секундах, которую нужно прибавить или отнять, как упомянуто выше. Так как в данном примере остаточная дуга $8S12°21'40''$ имеет отрицательный косинус, нужно увеличить наблюденную долготу на поправку, которую мы найдем следующим образом:

log косинуса	$8S12°21'40'' = 9.4814666$
прибавляется	1.2942710
	10.7757376
вычитается log косинуса наблюденной широты	9.4045158
	1.3712218

Отсюда уравнение дает $23''30'''$, которые нужно прибавить, так что истинная долгота будет $3S13°21'18''30'''$. Эта поправка опять-таки должна быть несколько изменена, если звезда будет очень близко к полюсу эклиптики.

Из этого видно, что если наблюденная широта звезды будет наименьшей, то тогда поправка широты почти исчезает, и поэтому те неподвижные звезды, которые ближе всего к эклиптике в отношении наблюденной широты, не будут нуждаться в какой-либо поправке. Это особенно нужно иметь в виду относительно планет, для которых достаточно поправить только наблюденную долготу. Но для планет, поскольку они имеют собственное движение, нужно применить другую поправку, и притом особую для каждой планеты. Она устанавливается так. От положения Земли на эклиптике или противостояния Солнца вычитается наблюденная геоцентрическая долгота планеты, берется косинус остаточного угла, который будет равен m. Затем от гелиоцентрической долготы планеты вычитается наблюденная геоцентрическая долгота, и косинус остаточной дуги принимается за q. Поправка, которую нужно прибавить к наблюденной долготе, будет такой угол, что его синус равен $-\frac{r}{c}m + \frac{s}{c}q$: это выражение, если оно отрицательное, показывает, что его значение нужно вычесть. Дробь $\frac{r}{c}$ всегда имеет одно и то же значение, $\log \frac{c}{r} = 4.0201540$. Другая же дробь $\frac{s}{c}$ имеет для каждой планеты особое значение, а именно:

$$\text{для Сатурна } \log \frac{c}{s} = 4.5098840,$$

$$\text{для Юпитера } \log \frac{c}{s} = 4.3782022,$$

$$\text{для Марса } \log \frac{c}{s} = 4.1116465,$$

$$\text{для Венеры } \log \frac{c}{s} = 3.9498222,$$

$$\text{для Меркурия } \log \frac{c}{s} = 3.8140656.$$

Отсюда видно, что если мы хотим из наблюденных геоцентрических положений планет заключить что-нибудь для обоснования теории, ни в коем случае нельзя пренебрегать этой поправкой, происходящей от распространения света [с конечной скоростью]; ведь истинная долгота планеты, т. е. та, на которой она была бы видна, если бы свет доходил до нас мгновенно, будет то больше, чем наблюденная, то меньше, и разница у Меркурия может превысить минуту. Ведь если Меркурий наблюдается в верхнем соединении с Солнцем, его наблюденная долгота должна быть увеличена на 51″20‴, в нижнем же соединении нужно вычесть от наблюденной долготы 11″ 58‴, из чего в разности долгот, если пренебречь этой поправкой, будет допущена ошибка в 63″18‴. Поэтому, если не применять в наблюдениях эту поправку, никогда нельзя было бы создать такие астрономические таблицы, которые согласовались бы с наблюдениями. Для неподвижных же звезд эта поправка также весьма необходима, ибо, кроме изменения долготы, происходящего от прецессии равноденствий, одна и та же неподвижная звезда, расположенная на эклиптике, в одно время, как это видно, продвигается по долготе на 40″ больше, чем в другое время. Неподвижные же звезды, отдаленные от эклиптики, в течение одного года, как мы наблюдаем, описывают эллипс, у которого полуось, взятая по долготе, будет иметь для синуса $\frac{r}{c} \cdot \frac{\square \sin \text{полного}}{\cos \text{широты}}$, полуось же, взятая по широте, для синуса будет иметь $\frac{r}{c} \sin$ широты. Отсюда неподвижная звезда, отстоящая от эклиптики на 45°, в течение одного года опишет на небе эллипс, ось которого, взятая по долготе, будет 55″42‴ и ось по широте 27″51‴. Из этого видно, что если пренебречь этой поправкой, то о долготе какой-нибудь неподвижной звезды мы могли бы тем меньше установить что-либо определенное, чем больше звезда была бы удалена от эклиптики. Итак, надежнейшим способом исследования этой вариации неподвижных звезд является способ, при котором дважды в течение года наблюдается долгота какой-нибудь неподвижной звезды, достаточно отдаленной от эклиптики, например на 80° (слишком близкие к полюсу эклиптики не следует брать по причинам, приведенным выше), один раз в противостоянии Солнца и затем так близко около соединения, как это только возможно. Ведь если эта теория правильна, то разница между такими двумя наблюденными долготами должна быть 3′45″, а такую разницу легко можно было бы наблюдать. Если же наблюдалась бы разница бóльшая или меньшая, то тогда в таком же отношении следовало бы увеличить или уменьшить вышеописанные поправки. Эти поправки, как было уже указано, я сначала строил на той гипотезе, по которой предполагается, что лучи от Солнца доходят до нас за 8′, а потом я приспособил вычисление к системе Коперника. После этого я исследовал также, какого рода произошли бы явления, если бы мы по системе Птолемея или Тихо приписывали Земле покой, а всем звездам суточное обращение. И хотя на первый взгляд мне показалось, что все должно быть подобным образом, когда я всмотрелся глубже, то понял, что здесь должна иметь место очень большая разница. Ибо я могу доказать, согласно системе Птолемея или Тихо, что ни одна звезда, которая отстоит от нас более чем в тридцать раз дальше Солнца, не может быть видна, так что применяемая поправка будет мнимой. Из этого, что особенно достойно внимания, следует, что если свет не распространяется мгновенно на какие угодно большие расстояния, ни система Птолемея, ни система Тихо, ни какая-либо другая система мира, в которой Земле приписывается покой, не может иметь места. И это мне кажется до сих пор самым убедительным доказательством в подтверждение истинности системы Коперника.

Когда я недавно занимался рядами, то натолкнулся на очень удобные ряды, которые выражают логарифмы синусов и косинусов любого угла; они показались мне тем более достойными внимания, что я не помню, чтобы мне когда-либо приходилось видеть такого рода ряды для нахождения логарифмов синусов и косинусов. Возьмем любой предложенный угол, который относится к прямому углу, или к 90°, как m к n, или пусть предложенный угол будет равен $\frac{m}{n}90°$. Я утверждаю, что логарифм его синуса будет равен[7]

$$\log(2n+m)+\mathrm{l}\,(2n-m)+\mathrm{l}\,m-3\,\mathrm{l}\,n.$$

$$\begin{aligned}
&+9.59405988570219027\\
-\frac{m^2}{n^2}&\cdot 0.07002282660590191\\
-\frac{m^4}{n^4}&\cdot 0.00111726644166184\\
-\frac{m^6}{n^6}&\cdot 0.00003922914645391\\
-\frac{m^8}{n^8}&\cdot 0.00000172927079836\\
-\frac{m^{10}}{n^{10}}&\cdot 0.00000008436298629\\
-\frac{m^{12}}{n^{12}}&\cdot 0.00000000434871550\\
-\frac{m^{14}}{n^{14}}&\cdot 0.00000000023193121\\
-\frac{m^{16}}{n^{16}}&\cdot 0.00000000001265907\\
-\frac{m^{18}}{n^{18}}&\cdot 0.00000000000070268\\
-\frac{m^{20}}{n^{20}}&\cdot 0.00000000000003951\\
-\frac{m^{22}}{n^{22}}&\cdot 0.00000000000000224\\
-\frac{m^{24}}{n^{24}}&\cdot 0.00000000000000013
\end{aligned}$$

а log косинуса этого угла будет равен $l(n+m)+$ $+l(n-m)-2\,l\,n$

$$+10.000000000000000$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot 0.101494859341892$$
$$-\frac{m^4}{n^4}\cdot 0.003187294065451$$
$$-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0.000209485800017$$
$$-\frac{m^8}{n^8}\cdot 0.000016848348597$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0.000001480193986$$
$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0.000000136502272$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0.000000012981715$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0.000000001261471$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0.000000000124567$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0.000000000012456$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0.000000000001258$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0.000000000000128$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0.000000000000013$$

Отсюда, если бы мы пожелали найти логарифмы синуса и косинуса угла 9°, то, как следует из предыдущего $m=1$, $n=10$, вычисляя сначала логарифм синуса, получим:

		Вычитаемые члены
$l(2n+m)=$	1.322219294733919	0.000700228266059
$l(2n-m)=$	1.278753600952828	111726644
	2.600972895686748	39229
$-3\,l\,n=$	-3	17
	(—1)600972895686748	0.000700340031951

$$
\begin{array}{r}
9.594059885702190 \\
\hline
9.195032781388938 \\
0.000700340031951 \\
\hline
\mathrm{l}\sin 9^\circ = 9.194332441356987 \\
\begin{array}{l}\mathrm{l}\,(n+m) \\ \mathrm{l}\,(n-m)\end{array} 1.995635194597549 \\
2 \\
\hline
(-1)995635194597549 \\
+10 \\
\hline
9.995635194597549 \\
0.001015267532479 \\
\hline
\mathrm{l}\cos 9^\circ = 9.994619927065070
\end{array}
$$

Вычитаемые члены

$$
\begin{array}{r}
0.001014948593419 \\
318729406 \\
209485 \\
168 \\
\hline
0.001015267532479
\end{array}
$$

Этим способом можно было бы значительно легче вычислить таблицы логарифмов синусов и косинусов, чем это сделано.

Однако я боюсь, знаменитейший муж, не слишком ли я злоупотребляю Твоим терпением, посылая такое пространное письмо. Очень прошу Тебя извинить мне эту пространность. Твоя глубочайшая ученость явилась причиной того, что я никак не мог не подвергнуть Твоему проницательному суду эти мои размышления, каковы бы они ни были. Что касается листов, которых у Тебя недостает в третьем томе «Комментариев», я позабочусь, чтобы они были посланы Тебе при первом удобном случае вместе с остальными нашими книгами, которые для Тебя предназначаются. Славный Гольдбах просил передать Тебе большой привет. Между прочим, я должен сообщить Тебе, славный муж, что наша Академия в ближайшие дни лишится своего знаменитейшего президента барона Корфа, так как он назначен е. и. в. посланником в Данию. Об этой утрате мы все глубоко сожалеем, ибо этому достойнейшему президенту весьма многим обязана как Академия в целом, так и отдельные ее члены. Будь здоров, знаменитейший муж. От души желаю, чтобы Ты пребывал в здравии и благополучии и сохранял свою благосклонность ко мне.

Петербург, 12 апреля 1740 г. ст. стиля.

Viro Illustrissimo atque Celeberimo Joanni Poleno
S. P. D. Leonhardus Euler.

Litterae tuae postremae pridie Non. Dec. anni praeteriti datae satis mature mihi sunt redditae, ex quo suspicor istam viam per Vindebonam litteras huc mittendi, qua usus es, Vir Illustrissime, omnium fore tutissimam. Praeter complures autem litteras tuas, quae interierunt, acutissimis meditationibus refertas summopere doleo, Exercitationes Tuas vitruvianas ad nos nondum esse perlatas; interim tamen gratias Tibi ago maximas, quod mihi earum exemplum destinare volueris: spero autem eas prorsus non periisse, sed proximo vere fortasse ad nos adventum iri. Celeb. de L. Isle noster nuper hinc ad ostia Fluvii Oby est profectus, ex Mandato Augustissimae Nostrae Imperatricis, ut ibi transitum Mercurii per solem, qui 2 die May continget atque per totam Europam inconspicuus erit, contempletur. Praeterea vero ipsi est propositum, alias observationes cum ad geographiam tum ad scientiam naturalem spectantes instituere, imprimis autem mihi promisit phaenomena aestus maris ad littora maris glacialis accurate investigare, cum enim occasione quaestionis ob Academia Parisina de hoc argumento praepositae in fluxus et refluxus marini causam inquisivissem, multa singularia phaenomena detexi, quae in regionibus polaribus evenire debeant; quamobrem ista Celeb. De L'Islii profectio mihi inserviet, vel ad theoriam meam confirmandam vel evertendam. Secundum theoriam enim meam, quae quidem omnibus phaenomenis adhuc cognitis ex asse satis facit, sequitur in regionibus polo alterutri vicinis quotidie unum tantum fluxum unumque refluxum contingere debere, quandoquidem luna tempore 24 horarum ad horizontem non appellit, quod utrum eveniat an non ex Celeb. De L'Islii observationibus experiri potero. Mechanicam meam Tibi, Vir Illustrissime, probari magnopere gaudeo, longe diversam autem sortem ea nacta est in Anglia, ubi Mathematicus quidem nomine Robins in eam vehementer invexit atque omnia principia, quibus nititur, funditus evertere conatus est. Ideo autem mihi potissimum succenset, quod istam de motu scientiam analytice, et quidem per eam anslysin, quae Anglis tantopere est infensa, tractare ausus sim, cum tamen summus Newtonus in hoc negotio synthesi sit usus. Quamvis autem isti adversario facile respondere possem, tamen amici optimi mihi suaserunt has objectiones silentio potius praeterire.

Absolvi nunc demum dissertationem, quam jam ante aliquod tempus inchoaveram, de orbitarum planetarum determinatione per loca geocentrica observata, atque ejus ope primum tabulas solares tum vero etiam tabulas mercurii correxi; quoniam autem de observationibus, quibus sum usus, non omnino certus sum, nescio quantopere correctionibus sit fidendum. Methodus mea autem ita se habet: assumo tabulas astronomicas quascunque, quae a veritate enormiter non aberrent, ex iisque vel potius ex ipsis datis, quibus tabulae sunt superstructae, supputo ad tempus observationis tam longitudinem quam latitudinem planetae geocentricam, quae cum observatione collatae monstrabunt discrimen tabularum et observationis. Deinde tabulas tanquam erroneas spectans, assumo ad eas cum veritate conciliandas primum excentricitatem in tabulis positam fractione aliqua minima, quam experessione differentiali dk indico, augeri debere: secundo longitudinem aphelii angulo dp, tertio longitudinem nodi ascendentis angulo dq, quarto inclinationem orbitae angulo dn, ac quinto denique anomaliam mediam, quam tabulae ad quodvis tempus praebent, constanter angulo dm augeri oportere. Deinceps his correctionibus introductis etsi adhuc incognitis calculo differentiali in subsidium vocato iterum longitudinem et latitudinem planetae geocentricam calculo definio, hasque longitudini et latitudini observatae aequales facio, unde duas obtineo aequationes hujus formae:

$$df = Adk + Bdp + Cdq + Ddn + Edm \text{ et}$$
$$dq = \alpha dk + \beta dp + \gamma dq + \delta dn + \varepsilon dm$$

ubi df discrimen longitudinis observatae et per tabulas inventae, dq vero discrimen inter latitudinem observatam et per tabulas inventam denotat. Tres itaque observationes hoc modo tractatae sex istiusmodi suppeditabunt aequationes, ex quibus valores differentialium dk, dp, dq, dn, et dm determinare licebit. His autem cognitis tabulae astronomicae correctae facile confici poterunt. In hoc vero negotio mox intellexi eam observationum correctionem, quae ex motu luminis successivo peti solet, minime praeteriri debere, tabulas enim astronomicas ejusmodi constitui convenit, quae ad quodvis tempus locum planetae monstrent, in quo conspicuus foret, si lumen in instanti ad nos pertingeret, non eum, in quo actu deprehenditur. Hanc ob rem in praecedente aliqua dissertatione phaenomena a successiva propagatione oriunda diligentius indagavi methodumque exposui, cujus ope ex quovis observato alicujus sideris loco eum in coelo locum invenire possum, in quo sidus spectaretur, si lumen in instanti propagaretur. Utor autem in hac re illa observatione, qua radii lucis tempore 8 minutorum primorum a sole ad nos pertingere deprehensi sunt, ex quo assumpta solis parallaxi 10″ sequitur radios lucis uno minuto secundo 43 circiter semidiametros terrae percurrere. Hinc duplex oritur siderum aberratio, quarum altera a motu terrae diurno, altera a motu annuo proficiscitur, inveni autem priorem aberrationem tam exiguam esse, ut nunquam ad minutum secundum assurgat; ex quo solam differentiam ex motu terrae annuo ortam investigavi. Primo igitur solem contemplatus inveni perpetuo longitudinem solis observatam 20″ augendam esse, ut obtineatur verus locus solis, in quo appareret, si radios in instanti ad nos transmitteret. Deinde comperi alia correctione stellas fixas, alia planetas indigere, pro stellis fixis hunc modum loca observata colligendi[a] elicui. Pro stellis fixis autem tam longitudo quam latitudo observata corrigi debet, correctio latitudinis ita invenietur. A longitudine terrae heliocentrica seu a loco in Ecliptica soli opposito subtrahatur longitudo stellae observata, et si arcus residuus fuerit 6 signis minor, latitudo observata debet diminui, contra autem, si ille arcus residuus 6 signa superet, debet augeri. Quantum autem vel diminui vel augeri debeat, ita reperitur. Sumatur illius residui arcus logarithmus sinus ad eumque addatur logarithmus sinus latitudinis observatae et a summa horum logarithmorum subtrahatur constanter iste logarithmus 18.7057289, residui logarithmi quaeratur ex tabula logarithmorum numerorum naturalium numerus conveniens, qui dabit correctionem quaesitam in minutis secundis vel addendam vel auferendam a latitudine observata. Sic si dum longitudo terrae in sua orbita erat $1S25°42'35''$, stellae fixae alicujus observata sit latitudo $75°17'48''$ et longitudo $5S13°20'55''$. correctio latitudinis ita invenietur:

[a] *Следует «corrigendi».*

a longitudine terrae seu ☍ solis	$1S25°42'35''$
subtrahatur longitudo stellae fixae	$5S13°20'55''$
arcus residuus	$8S12°21'40''$

Hic arcus residuus, quia major est 6 signis, indicat latitudinem observatam per correctionem esse augendam. Nunc sumatur

arcus residui logarithmus sinus	= 9.9790862
addatur log. sinus latitudinis observatae	= 9.9855400
	19.9646262
subtrahatur	18.7057289
	1.2588973

huic logarithmo respondet numerus $18\frac{9}{60}$, qui indicat ad latitudinem observatam addi debere $18''9'''$, ut prodeat vera stellae latitudo, in qua cerneretur, si lumen in instanti ad nos perveniret, quare hoc casu vera stellae latitudo erit $75°18'6''9'''$. Quodsi autem stella polo eclipticae praxima observetur, ita ut ejus distantia a polo unum minutum primum vix superet, tum ista regula adjectione aliqua habet opus; quam describere hic nimis foret prolixum. Ad longitudinis igitur correctionem progredior. Hic iterum longitudo stellae observata subtrahatur a longitudine terrae seu a loco solis opposito, et residui arcus sumatur cosinus, qui si fuerit affirmativus, longitudo observata diminui, sin autem sit negativus, augeri debebit, at correctio sive addenda sive subtrahenda reperitur, sumendo illius arcus residui cosinus logarithmum, ad eumque constanter addendo hunc logarithmum 1.2942710, atque a summa subtrahendo logarithmum cosinus latitudinis observatae; logarithmi enim remanentis numerus conveniens dabit correctionem in minutis secundis expressam vel addendam vel subtrahendam, prouti est monitum. Ita in exemplo dato, quia arcus residuus $8S12°21'40''$ cosinum habet negativum, longitudo observata augeri debet correctione sic invenienda:

log cosinus	$8S12°21'40''$	= 9.4814666
addatur		1.2942710
		10.7757376
Subtrahatur log cosinus latitudinis obs.		= 9.4045158
		1.3712218

Hinc aequatio prodit $23''30'''$ addenda, ita ut longitudo vera sit $= 3S13^\circ 21'18''30'''$. Haec correctio iterum aliquantulum debet immutari, si stella fuerit polo eclipticae proxima.

Ex his perspicitur, si latitudo stellae observata fuerit quam minima, tunc correctionem latitudinis fere evanescere, et hanc ob rem eae stellae fixae, quae eclipticae sunt proximae, ratione latitudinis observatae nulla correctione egebunt. Quod praecipue de planetis est tenendum, pro quibus sufficiet longitudinem observatam tantum correxisse. Pro planetis autem, quia motum habent proprium, alia correctio et peculiaris debet adhiberi pro quolibet planeta. Haec autem ita instituetur. A loco terrae in ecliptica seu oppositione solis subtrahatur longitudo planetae geocentrica observata, anguli residui sumatur cosinus, qui sit $= m$. Porro a longitudine planetae heliocentrica subtrahatur longitudo geocentrica observata et arcus residui cosinus ponatur q; erit correctio ad longitudinem observatam addenda, tantus angulus, ut ejus sinus sit $= -\frac{r}{c}m + \frac{s}{c}q$; quae expressio, si fuerit negativa, indicat ejus valorem subtrahi debere. At fractio $\frac{r}{c}$ perpetuo eundem retinet valorem estque $\log\frac{c}{r} = 4.0201540$, altera vero fractio $\frac{s}{c}$ pro unoquoque planeta peculiarem induit valorem, est nempe

pro Saturno $\log\frac{c}{s} = 4.5098840$,

pro Jove $\log\frac{c}{s} = 4.3782022$,

pro Marte $\log\frac{c}{s} = 4.1116465$,

pro Venere $\log\frac{c}{s} = 3.9498222$,

pro Mercurio $\log\frac{c}{s} = 3.8140656$.

Hinc apparet, si ex locis planetarum geocentricis observatis quicquam ad theoriam stabiliendam concludere velimus, hanc correctionem a prapagatione lucis oriundam nullo modo negligi posse; modo enim vera planetae longitudo, in qua scilicet conspiceretur, si lumen in instanti ad nos perveniret, major erit quam observata, modo minor, atque discrimen in Mercurio ultra minutum primum exsurgere potest.

Quodsi enim Mercurius in conjunctione superiore cum sole observetur, ejus logitudo observata augeri debet 51″20‴, in conjunctione inferiore autem a longitudine observata subtrahi debet 11″58‴, ex quo in longitudinum differentia, neglecta hac correctione, error committetur 63″18‴. Quare nisi ista correctio in observationibus adhibeatur, nequidem tabulae astronomicae excogitari possent, quae cum observationibus consentirent. Pro stellis fixis autem ista correctio quoque est maxime necessaria, nam praeter mutationem longitudinis a praecessione aequinoctiorum ortam, eadem stella fixa in ecliptica sita uno tempore 40″ in longitudine magis promota conspicietur, quam alio tempore. Stellae fixae autem ab ecliptica remotae intervallo unius anni in coelo ellipsin describere cernuntur, cujus semiaxis secundum longitudinem sumtus pro sinu habebit $\frac{r}{c} \cdot \frac{\square \text{sin totius}}{\text{cosin latitudinis}}$. Semiaxis autem secundum latitudinem sumtus pro sinu habebit $\frac{r}{c} \cdot \text{sin}$ latitudinis. Hinc stella fixa ab ecliptica 45° distans intervallo unius anni in coelo ellipsin describet, cujus axis secundum longitudinem sumtus erit=55″42‴ et axis secundum latitudinem=27′51‴, unde manifestum est eo minus certi quidquam de longitudine stellae alicujus fixae statui posse, neglecta ista correctione, quo magis stella ab ecliptica fuerit remota. Tutissimus igitur modus hanc ipsam variationem stellarum fixarum per observationes explorandi erit, si stellae alicujus fixae ab ecliptica satis remotae veluti 80° (polo eclipticae enim nimis propinquas accipere non licet ob rationes supra allegatas) per annum bis longitudo observetur, primum in oppositione solis et deinde tam prope circa conjunctionem quam fieri potest; si enim haec theoria sit vera, discrimen inter has binas longitudines observatas prodire deberet 3′45″, tanta autem differentia facile observari poterit. Quod si autem discrimen vel majus vel minus observaretur, tum in eadem ratione omnes correctiones supra descriptae vel augeri vel diminui deberent. Has vero correctiones ut jam indicavi, illi primum hypothesi saperstruxi, qua radii a sole ad nos tempore 8′ pervenire ponuntur; deinde vero ad systema Copernicanum calculum accomodavi. Postmodum autem quoque investigavi, cujusmodi phaenomena essent oritura, si secundum systema vel Ptolemaicum vel Tychonicum terrae quies, sideribus autem cunctis revolutio quotidiana tribuatur. Quanquam autem primo intuitu mihi videbantur omnia similia esse debere, tamen re penitus inspecta maximum deprehendi discrimen locum habere debere. Demonstrare enim possum secundum systema Ptolemaicum vel Tychonicum nullum etiam sidus, quod plus quam tricies sole a nobis distet, conspicuum esse posse, eo quod correctio adhibenda fiat imaginaria. Ex quo, quod maxime notatu dignum est, manifesto sequitur, si lumen non in instanti per quantumvis magna intervalla propagetur, neque systema Ptolomaicum, neque Tychonicum, neque ullum aliud mundi systema, in quo terrae quies tribuitur, locum habere posse, atque hoc mihi quidem firmissimum adhuc videtur argamentum ad veritatem systematis Copernicani evincendam.

In seriebus nuper occupato mihi obtulerunt se satis commodae series, quae exprimunt logarithmos sinuum et cosinuum cujusvis anguli, quae mihi ideo notatu dignae sunt visae, quod non memini unquam ejusmodi series ad inveniendos logarithmos sinuum et cosinuum vidisse. Sit angulus propositus quicunque, qui se habeat ad angulum rectum seu 90° ut m ad n, seu sit angulus propositus $\frac{m}{n}$ 90 graduum, dico foıe ejus logarithmum sinus $= \log(2n+m) + \mathrm{l}(2n-m) + \mathrm{l}\, m - 3\,\mathrm{l}\, n$.

$$
\begin{aligned}
&+9.5940598857021902 7\\
&-\frac{m^2}{n^2}\cdot 0.0700228266059019 1\\
&-\frac{m^4}{n^4}\cdot 0.0011172664416618 4\\
&-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0.0000392291464539 1\\
&-\frac{m^8}{n^8}\cdot 0.0000017292707983 6\\
&-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0.0000000843629862 9\\
&-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0.0000000043487155 0\\
&-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0.0000000002319312 1
\end{aligned}
$$

$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0.00000000001265907$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0.00000000000070268$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0.00000000000003951$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0.00000000000000224$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0.00000000000000013$$

At hujus anguli log cosinus erit $= \mathrm{l}(n+m)+\mathrm{l}(n-m)-$ $-2\,\mathrm{l}\,n$

$$+10.000000000000000$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot 0.101494859341892$$
$$-\frac{m^4}{n^4}\cdot 0.003187294065451$$
$$-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0.000209485800017$$
$$-\frac{m^8}{n^8}\cdot 0.000016848348597$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\ 0.000001480193986$$
$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0.000000136502272$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0.000000012981715$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0.000000001261471$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0.000000000124567$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0.000000000012456$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0.000000000001258$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0.000000000000128$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0.000000000000013.$$

Quod si hinc logarithmos sinus et cosinus angali 9° quaerere velimus, erit primum pro logarithmo sinus calculus ut sequitur: $m=1$; $n=10$

$$\begin{array}{rl}
\mathrm{l}\,(2n+m) = & 1.322219294733919 \\
\mathrm{l}\,(2n-m) = & 1.278753600952828 \\
\hline
 & 2.600972895686748 \\
-3\,\mathrm{l}\,n = & -3 \\
\hline
 & (-1)600972895686748 \\
 & 9.594059885702190 \\
\hline
 & 9.195032781388938 \\
 & 0.000700340031951 \\
\hline
\mathrm{l} \sin 9^\circ = & 9.194332441356987
\end{array}$$

termini subtrahendi

$$\begin{array}{r}
0.000700228266059 \\
111726644 \\
39229 \\
17 \\
\hline
0.000700340031951
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\begin{array}{l}\mathrm{l}\,(n+m) \\ \mathrm{l}\,(n-m)\end{array} & 1.995635194597549 \\
 & 2 \\
\hline
 & (-1)995635194597549 \\
 & +10 \\
\hline
 & 9.995635194597549 \\
 & 0.001015267532479 \\
\hline
\mathrm{l} \cos 9^\circ = & 9.994619927065070
\end{array}$$

termini subtrahendi

$$\begin{array}{r}
0.001014948593419 \\
318729406 \\
209485 \\
168 \\
\hline
0.001015267532479
\end{array}$$

Hac ergo methodo tabulae logarithmorum sinuum et cosinuum multo expeditius computari potuissent, quam factum est. Verum tam prolixa epistola vereor, Vir Illustrissime, ne patientia tua nimium abutar, quam ob rem etiam atque etiam rogo ut mihi hanc prolixitatem condones, summaeque Tui existimationi tribuas, ob quam haec mea qualiacunque meditata acutissimo judicio tuo non submittere von potui. Quod denique attinet ad folia quae Tibi in Comment. Tomo tertio desunt, curabo, ut ea Tibi quam primum id commode fieri poterit cum reliquis libris nostris, qui tibi destinantur, mittantur. Celeb. Goldbachius vicissim Te plurimum salutare jussit. Ceterum Tibi, Vir Celeberrime, nunciare debeo, Academiam nostram Praesidem Illustrissimum Baronem Korffium propediem esse amisuram, cum is a S. I. Majestate ad Legationem in Daniam sit denominatus, quam jacturam nos omnes summopere dolemus ob maxima hujus dignissimi Praesidis cum in universam Academiam tum etiam in singula membra merita.

Vale, Vir Illustrissime, atque ut valetudine utaris secunda ex animo opto mihique favere pergas.

Dabam Petropoli, April. d. 12 A. 1740 st. vet.

Публикуется по копии, проверенной и подписанной Эйлером (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 30, лл. 44—49).

Помета: «С оригиналом совпадает. Л. Эйлер».

[1] Письмо Полени написано 4 декабря 1739 г. (оригинал — ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 28, лл. 185—186 об., копия — там же, лл. 181, 182).

[2] Exercitationes vitruvianae seu commentarius criticus de Vitruvii architectura (Витрувианские опыты, или критический комментарий к архитектуре Витрувия) — Венеция, 1739.

[3] Имеется в виду сочинение Эйлера «Inquisitio physica in causam fluxus et reflexus maris» (Физическое исследование о морском приливе и отливе), получившее премию Парижской Академии на конкурсе 1740 г. (см. письмо к Фонтенелю, стр. 271 настоящего издания).

[4] Бенджамен Робинс — английский математик, автор трактата по артиллерии «New principles of Gunnery» (Новые принципы артиллерии), 1742. Этот трактат Эйлер перевел на немецкий язык и издал со своими примечаниями (1745). Критика «Механики» Эйлера изложена в статье Робинса: Remerks on Eulers Treatise on motion (Замечания к трактату Эйлера о движении) — Лондон, 1739.

[5] Статья Эйлера: Emendatio tabularum astronomicarum per loca planetarum geocentrica (Исправление астрономических таблиц при помощи геоцентрических положений планет) помещена: Commentarii Academiae Sc. Petropolitanae, XII (1740), 1750, стр. 109—221.

[6] Статья озаглавлена: Explicatio phaenomenorum quae a motu lucis successivo oriuntur (Объяснение явлений, которые происходят от движения света с конечной скоростью) — там же, т. XI (1739), 1750, стр. 150—193.

[7] О рядах для $\ln \sin \frac{m}{n}\frac{\pi}{2}$, $\ln \cos \frac{u}{n}\frac{\pi}{2}$ см. письмо 7-е (стр. 257 настоящего издания), где Эйлер приводит вывод этих рядов из разложения $\sin z$, $\cos z$ в бесконечное произведение.

6

6 [17] мая 1740 г., Петербург

Мужу славнейшему и знаменитейшему
Джиованни Полени
шлет большой привет Леонард Эйлер.

Хотя я, кажется, нашел очень удобную возможность пересылки предназначенных Тебе книг нашей Академии, однако пакет, который я могу Тебе, знаменитейший муж, передать, должен быть таким компактным и настолько небольших размеров, что я не имею возможности послать Тебе ничего, кроме VI тома «Комментариев» и недостающих у Тебя листов III тома. А мне бы очень хотелось, чтобы до Тебя дошли мои размышления по теории музыки, изданные недавно, и чтобы я мог скорее узнать Твое основательнейшее суждение об этом. Но теперь я вынужден отложить эту посылку на другое время. Между тем я очень сожалею, что мы не имеем здесь никакого другого пути послать Тебе что-нибудь, кроме как через Вену, в чем нам великодушно предлагает свое содействие известный королевский посланник маркиз де Ботта всякий раз, как он посылает особого курьера к представляемому им двору. Но и тогда нужно, чтобы пакет был как можно менее объемистый. Поэтому очень прошу Тебя, знаменитейший муж, чтобы Ты не ставил в вину ни Академии, ни мне, если наши сочинения слишком поздно попадают в Твои руки, я смею Тебя заверить, что, зная огромную Твою ученость, я не упущу никакой возможности, чтобы засвидетельствовать Тебе мою преданность и почтение. Так как я уже несколько раньше ответил на Твое последнее любезнейшее письмо и сообщил Тебе о назначении посланником нашего президента Корфа, я не имею больше о чем написать Тебе, кроме лишь того, что е. и. в. милостивейше соблаговолила назначить президентом Академии славнейшего статского советника и кавалера Бреверна. Будь здоров и сохрани свою благосклонность ко мне.

Л. Эйлер.

Петербург, 6 мая 1740.

Viro Celeberimo atque Illustrissimo Iohanni Poleno
S. P. D. Leonhardus Euler.

Etsi occasionem mihi nactus esse visus sum satis idoneam Academiae nostrae libros Tibi destinatos mittendi, tamen volumen Tibi, Vir Illustrissime, tradendum tam compactum parvaeque molis esse oportet, ut praeter Tomum Comment. VI foliaque, quae Tibi Tomo III deerant, nihil amplius mittere queam. Optassem autem praecipue, ut meditationes meas de Theoria Musices nuper editae ad te deferrentur, quo Tuum hac de re iudicium solodissimum mihi citius expetere possem; verum nunc quidem cogor istam expeditionem in aliud tempus differre. Doleo interim vehementer nobis hic non aliam viam ad Te quicquam mittendo patere, nisi per Vindebonam, quo in negotio suam nobis largiter operam Illustrissimus Legatus Caesareus Marchio de Botta quoties Cursorem extraordinarium ad suam Aulam oblegat; verum etiam tum fasciculos minime spissos esse oportet. Quamobrem Te, Vir Illustrissime, vehementer etiam atque etiam rogo, ut, si opuscula nostra tardius ad manus Tuas perveniant, culpam neque Academiae neque mihi tribuas, quin potius tibi persuadeas, me ob summam Tui existimationem nihil esse praetermissurum, quo quidem meum erga Te officium atque obsequium testari possem. Quoniam jam ante aliquod tempus ad Tuas litteras postremas gratissimas respondi, Tibique Legationem Praesidis Nostri a Korff nunciavi, praeterea nihil scribendum habeo, nisi S. Imp. Majestati placuerit Illustrissimum Consiliarium Status et Equitem a Brevern Academiae Praesidem clementissime constituere. Vale mihique favere perge.

L. Euler.

Petropoli, 6 Maij 1740.

Публикуется по копии, подписанной Эйлером (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 30, л. 55).

7

[27 ноября 1740 г.], Петербург

Мужу знаменитейшему и превосходнейшему
Джиованни Полени
шлет большой привет Леонард Эйлер.

Твое последнее письмо,[1] посланное через Вену, пришло ко мне довольно быстро, из чего я заключаю, что этот путь наиболее надежный для нашей переписки. Из Твоих «Витрувианских опытов» до нас не только ничего не дошло, но мы даже не получили ни малейшего известия из Голландии; об этой потере мы очень сожалеем. О путешествии славного Делиля к устью реки Оби, поскольку он еще не возвратился, я ничего не могу Тебе, знаменитейший муж, сообщить, кроме того, что прохождение Меркурия на Солнце, ради чего главным образом он туда и поехал, он не видел из-за облачного неба. И наблюдений над морскими течениями я также не жду, потому что он был вынужден провести все лето в областях России, отдаленных от моря, где он направил все свое усердие на обогащение географии.

Я полагаю, что главная причина, почему астрономические таблицы, как Ты заметил, все больше и больше расходятся с небом, заключается в неправильном определении периодов обращения; ведь если бы последние соответствовали истине, то ошибки таблиц, как бы они ни были велики, всегда оставались бы для отдельных обращений одни и те же. А я тоже видел, что и славный Галлей в своих таблицах для Меркурия определяет период обращения этой планеты совсем иначе, чем это обычно устанавливается в других таблицах. Однако я в своей диссертации о поправке астрономических таблиц принимаю, что периоды обращения планет определены правильно, и показываю, как из трех очень тщательно наблюденных геоцентрических положений планеты исправить только те ошибки, которые могли быть допущены I в средней аномалии для данной эпохи, II в эксцентриситете орбиты, III в положении афелия, IV в положении узлов, V в наклонности орбиты к эклиптике. Я могу, однако, исправить подобным образом также ошибку в периоде обращения, если такая была бы допущена, но здесь вряд ли можно ожидать большой точности, если наблюдения не отстоят друг от друга на очень большой промежуток времени. А если бы мы имели очень точные наблюдения такого рода, то тогда можно было бы определять периоды обращения и без моего способа.

Диссертации о последовательном движении света, какие были изданы, я все изучил,[2] но ведь в моем сочинении я не рассматриваю ничего другого, кроме скорости света. Я взял за основу одно положение, что свет доходит от Солнца до нас за данное время и, таким образом, имеет определенную скорость. Исходя из этого я исследовал далее, каким образом каждый объект, покоящийся или движущийся, должен представиться смотрящему, точно так же или покоящемуся, или движущемуся, и насколько это изображение должно отклоняться от того изображения, какое было бы, если бы свет доходил до нас мгновенно. В правилах же, примененных для вычисления, я принял, что свет распространяется от Солнца до нас за 8′, но из самих наблюдений, при их сравнении с этими правилами, можно заключить, правильно ли это принятое время $8'$, или оно нуждается в поправке.

В рядах для нахождения логарифмов синусов и косинусов, о которых я Тебе, знаменитейший муж, написал, весьма трудно описать закон для числовых коэффициентов и еще много труднее продолжать их дальше. Однако эти ряды достаточны для нахождения логарифмов с точностью более чем до 12 знаков. Но это мое построение весьма отличается от метода Крэга,[3] ибо он переносит общепринятое правило нахождения логарифмов с помощью рядов на синусы углов; он учит определять логарифмы синусов из самих синусов чрезвычайно трудным способом, и ему нужны отдельные значения синусов, нахождение которых само по себе весьма трудоемкое занятие. Я же определяю логарифмы синусов не из самих синусов, а из углов и из данного отношения, в котором находится предложенный угол к прямому углу, и показываю, как из одного только этого отношения, не определяя синуса, найти логарифмы синуса и косинуса; одновременно я получаю обычные логарифмы без умножения на 0.43429 и т. д. Различие между моим правилом и правилом Крэга будет видно яснее из основы, которой пользовался каждый из нас. А именно Крэг перенес обычное правило, по которому выражается логарифм любого числа с помощью ряда, на нахождение логарифмов синусов, я же вывел свой метод из следующей теоремы.

Предположив, что полный синус равен 1, берем угол, который относится к прямому углу как n к m, или угол $\frac{m}{n}90^\circ$. Косинус этого угла будет равен $\frac{nn-mm}{nn}\times$ $\times\frac{9nn-mm}{9nn}\cdot\frac{25nn-mm}{25nn}\cdot\frac{49nn-mm}{49nn}\cdot\frac{81nn-mm}{81nn}$ и т. д. Это выражение, состоящее из бесконечного числа множителей, правда, менее удобно для нахождения самих косинусов углов, но для нахождения логарифмов косинусов оно имеет огромное значение, ибо мы тут же получаем

$$\log\cos\frac{m}{n}90^\circ = \mathrm{l}\left(1-\frac{mm}{nn}\right)+\mathrm{l}\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)+$$
$$+\mathrm{l}\left(1-\frac{mm}{25nn}\right)+\mathrm{l}\left(1-\frac{mm}{49nn}\right)+\text{и т. д.}$$

Такой ряд логарифмов максимально сходится. Если же эти отдельные логарифмы обычным образом обратить в ряды, получится

$$\log\cos\frac{m}{n}90^\circ = -\frac{m^2}{n^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{ и т. д.}\right),$$
$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{ и т. д.}\right),$$
$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\text{ и т. д.}\right),$$
$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\text{ и т. д.}\right).$$

Суммы же этих отдельных рядов как точные, так и приближенные, я уже нашел. Итак, подставив суммы, [выраженные] в десятичных дробях, и помножив их на 0.4342944819 и т. д., так чтобы логарифм полного синуса был равен 10.000000, я получил ряды, о которых Тебе писал и с помощью которых из одного только отношения $\frac{m}{n}$ может быть полностью решена задача.

За присланную нам диссертацию приносим глубочайшую благодарность. Она будет помещена в VIII томе,[4] в разделе астрономических наблюдений. Этот том будет скоро напечатан. Я приложу все старания, чтобы Твоя диссертация была отпечатана чисто. Я не сомневаюсь, что Ты теперь уже получил изданные за это время тома наших «Комментариев», которые мы послали Тебе через Вену.

Будь здоров, знаменитейший муж, и сохрани свою благосклонность ко мне.

Петербург, V до декабрьских Календ 1740 г.

Viro Illustrissimo atque Excellentissimo
Joanni Poleno
S. P. D. Leonhardus Euler.

Litterae Tuae postremae per Vindobonam missae satis cito ad nos pervenerunt, ex quo hanc viam ad nostrum commercium tutissimam judico; de Exercitationibus Tuis Vitruvianis non solum nihil ad nos pervenit, sed etiam ne levissimum quidem indicium ex Hollandia accepimus, quam iacturam maxime dolemus. De Itinere Celeb. De L'Isle ad ostia fluvii Oby, quia nondam revertit, nihil aliud

Tibi, Vir Illustrissime, nunciare possum, nisi ipsum Mercurium in Sole, quam ob causam potissimum hinc erat profectus, non vidisse, coelo nubilo impeditum. Neque vero etiam observationes circa aestum maris expecto, eo quod aestatem totam in provinciis Imperii a mari remotis commorari est coactus, ubi ad geographiae incrementum omne studium impendit. Praecipuam causam, cur Tabulae Astronomicae magis magisque a coelo, uti observasti, dissentiant, in temporibus periodicis non recte definitis situm esse arbitror, haec enim, si veritati essent consentanea, errores tabularum quantumvis enormes perpetuo in singulis revolutionibus iidem manere deberent. Atque etiam vidi Celeb. Halleium in suis pro mercurio tabulis tempus periodicum hujus planetae longe aliter definire, ac in reliquis tabulis statui solet. Equidem in mea dissertatione de correctione tabularum astronomicarum recte definita esse tempora periodica planetarum assumo, ac tantum errores qui I in anomalia media ad datam epocham, II in excentricitate orbitae, III in loco aphelii, IV in loco nodorum et V in iclinatione orbitae ad eclipticam commissii esse possunt, ex tribus locis geocentricis exactissime observatis corrigere doceo. Possem vero etiam errorem in tempore periodico, si quis esset commissus, simili modo eruere, verum hinc parum certitudinis expectari posset, nisi observationes longissimo temporis intervallo a se invicem distarent. At si ejusmodi observationes accuratissimae haberentur, sine mea methodo tempora periodica determinare licebit.

Dissertationes, quae de motu luminis successivo sunt editae, maximam quidem partem evolvi; at in meo scripto praeter lucis celeritatem nil aliud sum contemplatus. Unicum scilicet posui principium hoc, lumen dato tempore ex sole ad nos pervenire, hincque determinatam habere celeritatem. Ex hoc deinceps investigavi, quemadmodum quodvis obiectum sive quiescens sive motum spectatori pariter sive quiescenti sive moto aparere debeat, et quantum haec apparitio discrepare debeat ab ea, qua quodque objectum cerneretur, si lumen in instanti ad nos pertingeret. In regulis quidem pro calculo traditis assumsi lumen a sole ad nos tempore 8′ propagari, verum ex ipsis observationibus cum his regulis comparatis decidi potest, utrum hoc 8′ tempus recte sit assumptum an correctione indigeat.

In seriebus, quas Tibi, Vir Illustrissime, pro logarithmis siuum et cosinuum inveniendis perscripsi, difficile utique est legem coefficientium numeralium describere multoque difficilius eos ulterius continuare; sufficiunt autem hae series ad logarithmos ultra 12 figuras inveniendos. Ceterum hoc meum institutum maxime discrepat a Craigii methodo, quippe qui vulgarem regulam logarithmos per series inveniendi transfert ad sinus angulorum; atque logarithmos sinuum ex ipsis sinibus modo summopere operoso definire docet, opus enim ipsi est singulis potestatibus sinuum, quarum inventio per se maxime est operosa. Ego vero logarithmos sinuum non ex sinibus ipsis, sed ex angulis determino, atque ex data ratione, quam angulus propositus ad angulum rectum tenet, sola sine cognito sinu, logarithmos sinus et cosinus investigare doceo, atque simul logarithmos vulgares elicio sine multiplicatione per 0.43429 etc. Discrimen autem inter regulam meam et Craigianam clarius patebit ex fundamento, quo uterque usi sumus, Craigius nempe transtulit regulam vulgarem, qua cujusvis numeri logarithmus per seriem exprimitur, ad logarithmorum sinuum inventionem; ego vero meum methodum ex sequenti theoremate deduxi.

Posito sinu toto $=1$, capiaturque angulus, qui sit ad angulum rectum ut n ad m, seu angulus $\frac{m}{n}\,90^\circ$, erit hujus anguli cosinus $=\frac{nn-mm}{nn}\cdot\frac{9nn-mm}{9nn}\cdot\frac{25nn-mm}{25nn}\cdot\frac{49nn-mm}{49nn}\times\times\frac{81nn-mm}{81nn}$ etc. quae expressio ex infinitis constans factoribus, minus quidem est idonea ad ipsos cosinus angulorum inveniendos, verum ad inventionem logarithmorum cosinuum maximam affert utilitatem, habetur enim statim

$$\log\cos=\frac{m}{n}\,90^\circ=\mathrm{l}\left(1-\frac{mm}{nn}\right)+\mathrm{l}\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)+$$
$$+\mathrm{l}\left(1-\frac{mm}{25nn}\right)+\mathrm{l}\left(1-\frac{mm}{49nn}\right)+\text{etc.},$$

quae logarithmorum series maxime convergit. Quodsi jam hi singuli logarithmi more consulto in series convertantur, prodibit

$$\log\cos\frac{m}{n}\,90^\circ=-\frac{m^2}{n^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}\right),$$
$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}\right),$$

$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\text{etc.}\right),$$
$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\text{etc.}\right).$$

Harum autem singularum serierum summas tam veras quam proximas jam dudum inveneram, summis igitur in fractionibus decimalibus substitutis, iisque per 0.4342944819 etc. multiplicatis, atque faciendo, ut logarithmus sinus totius fiat $+$ 10.000000, series Tibi perscriptas obtinui, quarum ope ex sola ratione $\frac{m}{n}$ totum negotium absolvi potest. Ceterum pro Dissertatione nobiscum communicata gratias agimus maximas, inseretur ea Tomo VIII, in locum Observationum Astronomicarum, qui brevi typis absolvetur, ut autem nitide excudatur Dissertatio Tua, omnem curam adhibebo. Non dubito quin nunc jam acceperis Tomos nostros Comment. interea editos, quos jam dudum per Vindibanam expedivimus.

Vale Vir Illustrissime mihique favere perge.

Dabam Petrop., d. V. Calend. Decembr. A. MDCCXXXX.

Публикуется по копии (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 30, л. 94—96).

1 Имеется в виду письмо Полени от 12 августа 1740 г. (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 29, лл. 101, 102).

2 В письме от 12 августа Полени указывает на статью Якоба Филиппа Маральди в «Memoires de l'Academie Royale des Sciences» за 1707 г. (стр. 25—32) «Sur la seconde inégalité du mouvement des Satellites de Jupiter et sur l'hypothèse du mouvement successif de la lumiere» (О втором неравенстве движения спутников Юпитера и о гипотезе последовательного движения света), а также на диссертацию Евстафия Манфреди «De annuis inerrantium stellarum aberrationibus» (О годовых отклонениях блуждающих звезд) — Болонья, 1729.

3 В том же письме Полени высказывает предположение, что Эйлеру осталось неизвестным сочинение английского физика Джона Крэга «De calculo fluentium libri duo» (Две книги о вычислении флюэнт), опубликованное в Лондоне в 1718 г.

4 В VIII томе «Commentarii Academiae Sc. Petropolitanae», (1736) 1741, раздел «Observationes astronomicae et meteorologicae» (стр. 439—452) целиком занят статьями Полени, в которых сообщается о наблюдении северного сияния в Падуе 29 марта 1739 г. и других астрономических наблюдениях.

8

[10 марта 1742 г.], *Берлин*

Мужу знаменитейшему и превосходнейшему Полени шлет большой привет Леонард Эйлер.

Твое любезное письмо от IV дня до майских Календ [1] прошлого года дошло до меня так поздно, что я получил его только три дня тому назад. Такая задержка не удивляет меня, ибо связь между нашими государствами полностью прервана, и тем более еще потому, что я прошлым летом, повинуясь милостивейшему приглашению е. в. нашего короля, оставил Петербург и переехал сюда.[2] По тем же причинам я не знаю, как скоро дойдет до Тебя, знаменитый муж, это мое письмо. Между тем я очень сожалею, что так долго был лишен общения с Тобой, которое до сих пор приносило мне большую пользу. Поэтому не взыщи за мою неаккуратность в переписке, хотя можно усмотреть небрежность уже хотя бы в том, что я Тебе отсюда, из Берлина, еще не написал. До того, как я получил Твое письмо, я не мог найти достаточно безопасного пути, которым мое письмо надежно пришло бы к Тебе, ибо провинции, через которые письму предстояло пройти, были терзаемы войной и опустошениями.[3] О пропаже Твоих сочинений, которые Ты предназначал для меня, я глубоко сожалею и чрезвычайно благодарен Тебе за то, что Ты решил не только снова послать мне этот подарок,[4] но даже увеличить его, и теперь у меня нет большего желания, чем каким-либо образом засвидетельствовать Тебе мою глубочайшую признательность.

В Петербургской Академии после смены власти ожидаются большие перемены и даже приведение ее в прежнее цветущее состояние, в то время как она уже более года находилась в упадке. После VI тома «Комментариев» вышли в свет VII и VIII, которые я уже в прошлом году сам привез с собой из Петербурга. В то время в типографии был уже отпечатан математический класс IX тома, однако этот том и сейчас еще не готов. До своего отъезда я оставил также X, XI и XII тома [5] уже приведенными в порядок и готовыми к печати: эта забота ведь возлагалась на меня. Но и сейчас я еще не вижу, чтобы там спешили печатать эти тома, и за это примутся нескоро, если августейшая императрица не поддержит Академию большим и щедрым подарком. В прошлом году вместе со мной простился с Академией славный г. Дювернуа, который теперь пребывает в герцогстве Вюртембергском, а позднее скончался славный доктор Амман, профессор ботаники. Отсюда Ты поймешь, что число членов этой Академии значительно сократилось.

Из Архангельска я получил наблюдения над морским течением, произведенные, правда, только в течение двух лет.[6] Они довольно близко согласуются с теорией. Но так как в этих полярных областях морское течение сильно сдерживается и сбивается окружающей сушей, не следует даже и ожидать полного соответствия теории, хотя бы и самой истинной, и практики.

Изменяется ли период вращения планет вокруг Солнца и время их обращения вокруг своей оси с течением времени или нет? Мне это, по справедливости, кажется сомнительным. Ведь если бы я даже, обращаясь к законам движения, предположил, что эти движения постоянно ослабляются, то поскольку самая мера времени, которой мы пользуемся, подверглась бы таким же переменам, мы не могли бы вообще уловить какого-либо изменения в последовательности явлений. Поэтому, если и происходит какое-то ослабление такого рода движения, мы могли бы почувствовать не столько самое это ослабление, сколько его неравенство у различных тел.[7] Между тем, однако, наиболее надежным и верным путем к раскрытию этого неравенства мне кажется именно тот путь, которым в действительности пользуются астрономы и принимают равное время отдельных оборотов, а затем исследуют, расходятся ли явления с этой гипотезой или нет. Ведь подобным же образом астрономы, принимая, что планеты обращаются по кругу равномерным движением, поняли, что они обращаются не по кругу и не равномерно. Итак, я вполне одобряю принятый метод, по которому периоды как обращения планет [вокруг Солнца], так и вращения их [вокруг оси] принимаются за одинаковые до тех пор, пока не станет очевидным противоположное. И астрономия, кажется, до сих пор не доведена еще до такой степени совершенства, чтобы из расхождений между теорией, построенной на упомянутой гипотезе, и наблюдениями можно было бы делать вывод о какой-то аберрации. Ведь, во-первых, многие наблюдения, и особенно старейшие, не сделаны с той тщательностью, которая требуется для данной цели. Во-вторых, астрономические таблицы еще далеки от той точности, чтобы они могли считаться совершенными, если даже гипотеза и будет соответствовать истине. Ведь каково бы ни было неравенство в периодах вращения, оно, однако, столь мало, что за незначительный промежуток времени его даже невозможно почувствовать. Поэтому сначала следовало бы сделать астрономические таблицы столь точными, чтобы они полностью были согласованы с движением планет хотя бы на незначительный промежуток времени, а потом уже можно будет из их расхождений делать выводы о противоположном. А насколько до сих пор таблицы еще далеки от этой степени совершенства, Ты, славный муж, увидишь лучше, чем я, если подумаешь о достоверности как в периодах вращения, так и в положении афелиев и узлов, а также об эксцентриситете и наклоне орбит к плоскости эклиптики. Прежде всего, однако, в этом деле следует принять в расчет распространение света [с конечной скоростью], ибо даже самые совершенные таблицы должны расходиться с наблюдениями, если сначала не внести поправки в наблюденные положения с учетом этого обстоятельства. Доходит ли до нас свет от Солнца за 8′, имеют ли все световые лучи везде одну и ту же скорость — пусть эти вопросы пока остаются открытыми; по моему мнению, однако, это нельзя будет определить более удобно, чем если мы сначала примем скорость за постоянную и имеющую определенную величину, допустим 8′, и из этой гипотезы будем определять явления. После этого, если мы сравним тщательнейшие наблюдения с этой теорией, будет ясно, соответствует ли гипотеза истине или нет. И тогда нужно будет принятую скорость в 8′ увеличить или уменьшить.[8] Во всем этом деле, однако, я полагаю, мой метод исправления астрономических таблиц путем тщательнейших наблюдений геоцентрических положений планет принесет огромную пользу.

За то, что Ты известил меня об издании новых книг по математике, прими мою глубочайшую благодарность. Я охотно ответил бы Тебе тем же, если бы в этих странах вышло в свет что-нибудь достойное внимания.[9] Тебя, славный муж, я очень прошу сохранять в будущем и постоянно ту благосклонность и дружбу, какую Ты питал ко мне до сих пор. Будь здоров.

Берлин, VI день до мартовских Ид 1742.

Viro Illustrissimo atque Excellentissimo M. Poleno
S. P. D. Leonhardus Euler.

Tam sero ad me pervenerunt litterae tuae acceptissimae IV Kal. Maii anni elapsi datae, ut eas ante hoc triduum demum acceperim, quam retardationem cum propter commercium inter vestras regiones ac nostras prorsus sublatum, tum ideo maxime non magnopere miror, quod praeterita aestate Clementissimae vocationi Regis nostri O. M. morem gerens, Petropoli profectus huc me contuli atque ob easdem causas nescio quam cito hae litterae ad Te, Vir Illustrissime, sint perventurae. Summopere interim doleo, tam diu me commercio tuo, ex quo athuc uberrimos cepi fructus, caruisse. Hanc ob rem noli negligentiam in scribendo meam accusare, etiamsi in hoc ipso negligentia videri posset, quod tibi hinc Berolino nondum scripserim. Antequam tuas litteras accepissem, neque enim adhuc viam satis tutam reperire potui, qua meae litterae certo ad te penetrarent; tantopere provinciae, per quas litteris est transeundum, bello ac depraedationibus perturbantur. Jacturam operum tuorum, quae mihi destinaveras, Vir Illustrissime, summopere doleo, quod etiam idem munus denuo ad me expedire, sed etiam augere constitueris, maximas quidem habeo gratias; nihilque magis mihi nunc est in votis, quam ut hoc etiam loco quomodocunque gratissimum animum tibi testificari possim. Academia Petropolitana post mutatum Imperium insignem quoque mutationem, atque adeo restaurationem in pristinum statum florentem expectat, cum plus anno iam caruisset. Post Comment. volum. VI iam in lucem prodiere VII et VIII, quae quidem iam elapso anno ipse Petropoli mecum asportavi. Tum temporis noni Tomi Classis matematica iam erat typis expressa, neque tamen etiam nunc hoc volumen est absolutum, ante abitum meum quoque Tomos X, XI et XII in ordinem redactos ac prelo paratos reliqui, quippe quae cura mihi erat demandata; verum etiam tamen nondum video impressionem horum tomorum maturari, neque hoc tam cito eveniet, nisi Augustissima Imperatrix insigni munificentia Academiam recreet. Praeterito anno simul mecum Academiae valedixit Clar. D. Duvernoy, qui nunc in Wirtembergico Ducatu commoratus; post vero Clar. Doctor Ammanus Botanicae professor est mortuus, ex quo numerum sociorum istius Academiae vehementer diminutum intelliges.

Archangelopoli accepi observationes circa aestum maris at per biduum tantum factas, quae cum theoria satis prope consentiebant. Quoniam enim in his regionibus polaribus fluxus maris a terra continente magnopere impeditus ac perturbatus, perfectus consensus theoriae etsi verissimae cum experientia ne expectari quidem potest.

Utrum cum tempora periodica planetarum circa solem tum ipsorum revolutiones circa proprios axes ullam cursu temporis patiantur mutationem nec ne? Jure mihi quidem dubitandum videtur. Atque adeo leges motus consulens crederem hos motus continuo debelitari; ubi quidem ante omnia est notandum, quod si omnes motus in eadem ratione retardarentur, quoniam ipsa temporis mensura, qua utimur, similem subit variationem, nos nullam omnino alterationem in successione phaenomenorum percipere posse. Quam ob rem si ulla eiusmodi motus debilitatio evenit, non tam ipsam quam inaequalitatem eius in diversis corporibus sentire poterimus. Interim tamen tutissima simulque certissima via ad istam inaequalitatem detegendam mihi quidem videtur ea ipsa, qua Astronomi actu utuntur atque singularum revolutionum tempora aequalia assumunt investigaturi, utrum tandem phaenomena ab hac hypothesi dis sentiant nec ne? Simili enim modo Astronomi planetas in circulis motu uniformi revolvi assumentes intellexerunt eos neque in circulis neque uniformiter moveri. Maxime igitur probo modum receptum, quo singulorum planetarum tempora tam periodica quam vertiginis eiusdem durationis tantisper statuuntur, quoad contrarium fiat manifestum. Neque vero adhuc astronomia ad eundem perfectionis gradum perducta videtur, ut ex dissensu theoriae memorata hypothesi superstructae ob observationibus ullam aberrationem concludere valeamus. Primo enim pleraeque observationes ac praecipuae antiquissimae non tanta cura sunt factae, quanta ad hoc institutum requiritur. Deinde vero plurimum abest, quo minus tabulae Astronomicae ita sint accuratae, ut eae perfectae censeri possent, si quidem hypothesis veritati esset consentanea. Quamvis enim inaequalitas in temporibus periodicis inesset, tamen ea tam est exigua, ut in temporis spatio non nimis magno neutiquam sentiri queat. Quocirca tabulae Astronomicae ante tam accuratae esse deberent, ut cum motibus planetarum per spatium temporis saltem non nimis magnum perfecte consentirent, quam ex earum dissensu contrarium concludere liceret. Quantum vero tabulae adhuc ab isto perfectionis gradu absint, Tute, Vir Illust., me melius inspicies, si in certitudinem cum in temporibus periodicis, tum in locis apheliorum et nodorum, tum in excentricitate et inclinatione orbitarum ad planum eclipticae perpendes. Imprimis autem in hoc negotio propagationis lucis ratio erit habenda, qua fit ut tabulae etiam perfectissimae ab observationibus dissentire debeant, nisi ante loca observata hoc nomine corrigantur. Utrum autem lumen 8′ a sole ad nos perveniat, atque an radiorum lucis omnium ubique eadem sit celeritas, sub iudice lis sit, quae commodius meo quidem iudicio dirimi non poterit, quam si eam primo constantem ac datae magnitudinis puta 8′ assumamus, atque ex hac hypothesi phaenomena definiamus. Quo facto si observationes accuratissimae cum isthac theoria comparentur, patebit, utrum hypothesis sit veritati consentanea, nec ne? Et num celeritas 8′ assumpta augeri diminuive debeat. In hoc autem universo negotio arbitror meam methodum tabulas astronomicas per loca planetarum geocentrica diligentissime observata emendandi ingentem utilitatem esse allaturam.

Quod mihi editionem novorum operum ad mathesin spectantium nunciaveris, maximas tibi habeo gratias, libenterque par pari referrem, si in his regionibus quiquam notatu dignum in lucem prodiisset. Te igitur, Vir Illustr., etiam atque etiam rogo, ut mihi benevolentiam atque amicitiam, qua me adhuc es complexus, in posterum quoque constanter conservare velis.

Vale.

Dabam Berolini, VI Iduum Mart. MDCCXLII.

Публикуется по черновику, написанному рукой Эйлера (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 2, лл. 237—238).

[1] Имеется в виду письмо Полени от 28 апреля 1741 г. (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 2, лл. 257—258 об.).

[2] В июне 1741 г. Эйлер покинул Петербург и переехал в Берлин.

[3] С 1740 по 1748 г. шла война между Пруссией и Австрией «за австрийское наследство».

[4] В вышеупомянутом письме Полени сообщает, что вместо книг, пропавших по пути через Голландию, он намерен послать другие, при этом к первой и второй частям «Витрувианских исследований» он присоединит еще третью, а также диссертацию «De institutionibus experimentalis Mechanicae Philosophiae» (Об основах экспериментальной философии механики).

[5] VII том «Комментариев», содержащий сочинения за 1734—1735 годы, вышел в свет в 1740 г., VIII том, содержащий сочинения

за 1736 г., — в начале 1741 г. Следующие три тома опубликованы с интервалами в три года, в 1744, 1747 и 1750 гг.

[6] Наблюдения из Архангельска Эйлер получил, вероятно, от своего родственника Г.-А. Кайзера. В юности Кайзер был учеником-живописцем в Петербургской Академии, женился на дочери Г. Гзелля (сестре жены Эйлера) и в 1729 г. вступил на службу в русский флот. В 1739 г., когда Кайзер принимал командование фрегатом в Белом море в чине лейтенанта, Академия наук составила для него инструкцию по наблюдению приливов и отливов. Экземпляр инструкции, написанный рукой Эйлера, под названием «Nöthige Erinnerungen, welche bey Beobachtungen der Ebbe und Fluth des Meers in Acht zu nehmen» (Необходимые сведения, которые нужно иметь в виду при наблюдении прилива и отлива), хранится в Архиве АН СССР (ф. 136, оп. 1, № 121, лл. 1—3 об.). Инструкция представлялась в Конференции 17 апреля 1740 (Протоколы, т. I, стр. 605).

[7] Полени в письме Эйлеру от 28 апреля также выражает сомнение по этому поводу. Высказав согласие с мнениями Эйлера, что несовершенство астрономических таблиц проистекает от неточного определения периодов вращения, он далее восклицает: «Но что, если периоды вращения не постоянны, а подвержены изменениям? Что, если вращения нашей Земли вокруг своей оси неравны, и поэтому сутки, измерение которых производится от одного полного оборота Земли, обладают некоторым неравенством? Однако я не хотел бы, чтобы Ты подумал, будто я тяготею к пирронизму»). Иными словами, Полени опасается, чтобы Эйлер не истолковал это как проявление скептицизма в Астрономии (Пиррон из Элиды, 365—275 г. до н. э. — основатель школы скептиков в Греции).

[8] Полени в том же письме выражает мнение, что положение о продолжительности движения света от Солнца до нас (8′) нуждается в поправке и что труды Брадлея, Манфреди и Эйлера дают уже достаточно материала для новых выводов.

ФОНТЕНЕЛЮ

Де Фонтенель, Бернар Ле Бовье (Fontenelle, Bernard le Bovier de, 1657—1757) — французский писатель и ученый, член французской Академии наук с 1691 г. и непременный секретарь ее (1699—1741 гг.).

2 октября 1739 г., Петербург

Милостивый государь,

Я имел честь послать Вам 14 июля ст. ст. сочинение о морских приливах и отливах[1] под девизом:

«Берег зачем обнажается морем, вдаль уходящим,
Волны морские зачем после вздымает прилив,
Вами к тому побужден, природу я вопрошаю:
Как далеко от Земли скрытая тайна лежит?
К Солнцу я и Луне обратиться ныне дерзаю;
Полюс небесный о том, звезды дадут мне ответ» —

с просьбой прислать в получении его расписку господину камергеру де Корфу, президенту императорской Академии наук в Петербурге. Но, прождав напрасно до настоящего времени Вашего ответа, я нахожусь в неведении относительно того, что именно пропало на почте: мое сочинение или Ваш ответ. Покорнейше прошу Вас, милостивый государь, разъяснить мне это возможно скорее. В случае, если мое сочинение пропало, я пришлю Вам еще одну копию моего наброска об этом предмете, ибо, поскольку я совершенно не виноват в этом неприятном происшествии, я надеюсь, что славная королевская Академия не откажется снова принять от меня указанное сочинение, чтобы эта статья могла участвовать в конкурсе вместе с другими,[2] особенно в виду подлинных свидетельств, которые я представлю в мое оправдание. В заключ ие прошу Вас также, милостивый государь, прислать мне объявление, опубликованное в этом году королевской Академией относительно темы о вороте,[3] а также сообщить мне о причинах, побудивших Академию предложить тот же самый вопрос на 1741 г.

Имею честь пребывать с глубоким уважением, милостивый государь,

Ваш покорный и преданный слуга

Леонард Эйлер,

профессор императорской Академии наук в Петербурге.

Ст.-Петербург, 2 октября 1739 г.

Monsieur,

J'eus[а] l'honneur de Vous adresser le 14 Juillet v. st. une pièce sur le Flux et le Reflux de la Mer portant pour Devise:

Cur nunc declivi nudentur littora ponto,[б]
   Adversis tumeat nunc maris unda fretis;
Dum vestro monitu naturam consulo rerum:
   Quam procul a terris abdita causa latet?
In Solem Lunamque feror, si plauditis auso;
   Sidera sublimi vertice summa petam.

Vous ayant prie[в] d'en envoyer le Récépissé à Monsieur le Chambellan de Korff, Président de l'Académie Impériale de Sciences à Pétersbourg. Mais après avoir attendu en vain jusqu' à présent[г] Votre Reponse, je ne scai pas si c'est ma pièce, ou[д] Votre Lettre[д] qui s'est perdue à la Poste. Je vous prie donc très humblement, Monsieur, de m'éclaircir là dessus au plutôt. Au cas que ma pièce soit[е] perdue je[ж] Vous enverrai encore une copie de mon broul-

---

а *В черновике зачеркнуто* j'ai eu

б *В черновике последующие строки девиза отсутствуют.*

в *В черновике* prié, Monsieur,

г *В черновике зачеркнуто* des avis de Vous, Monsieur,

д–д *В черновике* Votre Reponse. *Далее зачеркнуто* s'est perdue à la poste ou votre Reponse. C'est pourquoi, Monsieur.

е *В черновике* elle même soit

ж *В черновике зачеркнуто* ferai cependent *и* nette lon[з] [и]sur cette matière,[и] car [к]comme je n'ai nulle part à ce fâcheux accident, j'espere[к] que l'Illustre Académie Royale ne me refusera pas [л]de recevoir encore la dite pièce,[л] pour la faire entrer en concurrence avec les autres surtout à l'egard [м]des preuves[м] authentiques que j'y joindrai pour ma justification. Au reste[н] je vous prie aussi, Monsieur, de m'envoier le Billet de l'Académie Royale, qui a été publié cette année an sujet du Cabestan, et des raisons qui ont determiné, l'Académie de remettre cette même question à l'an[о] 1741.

J'ai l'honneur d'être avec beaucoup de respect, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur[п]

Leonhard Euler

Professeur de l'Académie Impériale des Sciences à Pétersbourg.

St.-Pétersbourg, le 2 Octob[re] 1739.

Печатается по копии (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 27, л. 197 и об.), тождественной с другой копией (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 27, л. 198 и об.), с указанием в сносках разночтений по собственноручному черновику Эйлера (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 44).

Собственноручная помета Эйлера: «Соответствует оригиналу. Л. Эйлер» (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 27, л. 197 об.). «Г-ну Фонтенелю в Париж».

[1] Речь идет о статье Л. Эйлера: «Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris. A D. D. Euler, Mathematicarum Professore, e societate Academiae Imperialis Sancti Peterburgiensis» (Физическое исследование причины морских приливов и отливов г-на Эйлера, профессора математики, из общества Санкт-Петербургской императорской Академии наук).

Статья была представлена Эйлером в Конференции 31 октября 1739 г. (Протоколы, т. I, стр. 578, запись 31 октября 1739 г.) и после получения премии Парижской Академии была напечатана: Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie Royale de Sciences en MDCCXL, Париж, 1741, стр. 235—350.

[з] *В черновике зачеркнуто* pour la envoier alors.

[и—и] *В черновике слова* sur cette matiére *отсутствуют.*

[к—к] *В черновике эта фраза написана сверху над зачеркнутой* Je ne suis pas en aucune maniére coupable de ce cas fâcheux, je ne dout pas

[л—л] *В черновике* d'une reçue de ma pièce,

[м—м] *В черновике* des fortes temoignages.

[н] *В черновике слова* au reste *отсутствуют.*

[о] *В черновике* à l'Année.

[п] *На этом черновик обрывается.*

[2] Статья Эйлера была допущена к участию в конкурсе Парижской Академии 1740 г. и получила четвертую часть премии. Одновременно были удостоены премии работы Антуана Кавальери — иезуита, профессора математики Университета в Кагоре: Dissertation sur la cause physique du Flux et du Reflux de la Mer (Рассуждение о физической причине приливов и отливов моря) — Recueil des pièces qui ont remporté les prix. . ., стр. 3—51; Даниила Бернулли, который был в то время профессором ботаники и анатомии в Базеле: Traité sur le Flux et Reflux de la Mer (Трактат о морских приливах и отливах) — там же, стр. 53—191; Маклорена — профессора математики Эдинбургской Академии: De causa physica Fluxus et Refluxus Maris (О физической причине морских приливов и отливов) — там же, стр. 193—234.

[3] На эту тему Эйлер написал сочинение «Dissertation sur la meilleure construction du cabestan» (Рассуждение о наилучшем устройстве ворота), получившее в 1741 г. четвертую часть премии Парижской Академии. Это сочинение опубликовано: Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie royale des sciences en MDCCXLI, Париж, 1745, стр. 29—87.

ШАТЛЕ

Дю Шатле, Габриэль Эмилия (Gabrielle Emilie du Châtelet, 1706—1749) — одна из замечательных французских женщин, знаменитая своей ученостью. Она была близка к Вольтеру, который высоко ценил ее ум и разносторонние знания.

В 1740 г. маркиза дю Шатле написала книгу «Institutions de physique» (Основы физики), вышедшую в Париже. Книга была издана анонимно, в форме писем неизвестного автора своему сыну. Ее-то и имел в виду Эйлер в первом письме. Книга содержит теорию познания и заканчивается главами о покое и движении, о силе тяжести и т. п. Э. дю Шатле выступает в этой книге как сторонница учения Декарта и Лейбница, тогда как Вольтер был убежденным ньютонианцем и много сделал для распространения учения Ньютона во Франции. Но он отдавал должное уму и знаниям Э. дю Шатле и в посвящении ко 2-му изданию своих «Элементов философии Ньютона» писал: «Потомство будет с изумлением смотреть на Вас. . .». Это было, правда, уже после того, как дю Шатле, очевидно под влиянием Вольтера, перевела на французский язык «Principia» Ньютона; Вольтер называет ее: «. . . обширный и могучий ум, бессмертная Эмилия, ученица Ньютона и истины» (Вольтер, Сборник документов и материалов, 1948; Сборник «Исаак Ньютон». Под ред. С. И. Вавилова. АН СССР, М.—Л., 1943).

1

[Без даты]

Милостивая государыня,

Честь, которой Вы меня удостоили, прислав мне свои превосходные работы, повергает меня в крайнее смущение, и я не знаю, как выразить Вам свою благодарность. Читая Ваши «Institutions Physiques», я в равной мере восхищался ясностью, с какой Вы излагаете эту науку, и той легкостью, с какой Вы объясняете самые трудные вещи, относящиеся к движению, которые остаются очень сложными даже тогда, когда есть возможность пользоваться вычислениями. Но особое удовольствие доставила мне глава о гипотезах, где Вы так твердо и основательно боретесь с некоторыми английскими философами, которые желали вовсе изгнать гипотезы из физики;[1] а по моему мнению, они являются единственным способом, в результате которого можно прийти к достоверному познанию физических причин. Часто, когда с англичанами заходила речь об этих вопросах, я был в затруднении, как найти убедительные доводы в пользу применения гипотез, но мне никогда не удавалось изложить свои идеи с такой ясностью, как это сделали Вы. Я уважаю г. Мушенбрека, как очень крупного физика, и я много пользовался его опытами, но способ его рассуждения вызывает во мне столь сильное отвращение, что я с трудом решаюсь читать его рассуждения об явлениях Природы.[2]

Этот великий человек прямо-таки выходит из себя, когда говорит о тонкой материи, которую иные применяют для объяснения многих явлений; правда, существование такой материи нельзя доказать никаким опытом, но, с другой стороны, абсолютно отрицать существование всякой материи, в которой нельзя убедиться никакими ощущениями, это хуже всех других гипотез, какие делались до сих пор. Этот принцип заводит автора так далеко, что он нимало не колеблется приписать действия магнита духу или, по крайней мере, бестелесному веществу. Но мне кажется, что мы были бы гораздо более вправе требовать опытов для доказательства существования этих бестелесных веществ, чем существования тонкой материи, которая сама по себе столь вероятна, что я не решился бы в ней сомневаться. Впрочем, я надеюсь, что большинство этих людей изменят свою точку зрения, прочитав Ваше превосходное сочинение о гипотезах; я не сомневаюсь, что и г-н де Меран будет полностью убежден основательными доводами, которые Вы противопоставили его столь бездоказательным взглядам на силу тел.[3] В общем мне очень жаль, что этот вопрос уже так давно является поводом к ожесточенному спору, из-за которого математика в большой мере потеряла свою репутацию. И мне кажется, что, если бы рассмотреть этот вопрос до его истинных источников, он не представил бы никаких затруднений. Разрешите же мне, милостивая государыня, изложить Вам свои мысли по этому поводу. Я начинаю с первого принципа механики, что каждое тело само по себе сохраняет свое состояние покоя или

Дю Шатле Габриэль Эмилия, 1706—1749.

движения. Этому свойству вполне можно дать название силы, если только не утверждать, что всякая сила есть стремление к изменению состояния, как утверждает г. Вольф. Итак, всякое тело обладает. . .[4]

Madame,

L'honneur dont Vous me daignez, en me communiquant Vos excellens ouvrages, me met dans une si grande confusion, que je ne sais pas Vous exprimer ma reconnaissance. En lisant vos Institutions Physiques, j'ai également admiré la clarté, avec laquelle Vous traitez cette science, que la facilité, avec laquelle Vous expliquez les choses les plus difficiles sur le mouvement, qui sont même assez embarassantes, quand il est permis de se servir du calcul. Mais surtout le Chapitre sur les hypotheses m'a fait le plus grand plaisir, voyant, que Vous combattez, Madame, si fortement et si solidement quelques Philosophes Anglois, qui ont voulu bannir tout à fait les hypothèses de la Physique qui sont pourtant à mon avis le seul moyen de parvenir à une connoissance certaine des causes physiques. J'ai été souvent en peine, lorsque le Discours rouloit sur cette matière avec des Anglois, de trouver des raisons convainquantes, pour bien faire voir l'utilité des hypothèses, mais je n'ai jamais pu devélopper mes idées sur ce sujet d'une manière si claire, que Vous. J'estime Mr Muschenbroeck comme un très grand physicien et j'ai beaucoup profité de ses expériences, mais sa manière de raisonner me fait un si grand dégoût, qu'à peine je me puis resoudre à lire ses raisonnements, qu'il fait sur les phénomènes de la nature.

Ce grand homme se met entièrement en colère, quand il parle de quelque matière subtile que d'autres emploient pour expliquer plusieurs phenomènes: il est vrai qu'on ne peut pas faire voir l'existence d'une telle matière par aucune expérience, mais d'un autre coté nier absolument l'existence de toute matière, comme il fait, dont on ne se peut appercevoir par les sens, c'est bien pire, qu'aucune hypothèse, qu'on a fait jusqu'à present. Ce principe porte même cet Auteur si loin, qu'il ne doute pas d'attribuer les effets de l'aimant à un esprit, ou du moins à une substance incorporelle. Mais il me semble qu'on seroit bien plus en droit d'exiger des expériences pour prouver l'existence de ces substances incorporelles plustôt que celle d'une matière subtile, qui est d'elle meme si probable, que je n'en sçaurois douter. Mais j'espère qu'une bonne partie de ces gens changeront bientot leur sentiment aprés avoir lu Votre admirable dissertation sur les hypotheses: et je ne doute nullement, que M[r] Demairan ne soit entierement convaincu par les solides raisons que Vous avez opposées à ses idées si mal fondées sur la force des corps. Au reste je plains fort, que cette matière ait été déjà si longtems le sujet d'une dispute si forte, par laquelle la mathématique a perdu beaucoup de sa réputation. Et il me semble, que si l'on vouloit examiner cette matière depuis sa source véritable, on n'y trouveroit la moindre difficulté. Agréez donc Madame, que je Vous présente mes pensées la dessus. Je commence par le premier principe de la Mecanique que tout corps par lui même demeure dans son état ou de repos ou de mouvement. A cette propriété on peut bien donner le nom de force, quand on ne dit pas que toute force est une tendance de changer l'état, comme fait M[r] Wolf. Tout corps est donc pourvu. . .

Печатается по черновику (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1, л. 206—206 об.).

[1] Ньютон был противником гипотез в естествознании. В «Общих поучениях» во 2-м издании «Начал» он говорит: «Причину этих свойств тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю. Все, что не выводится из явлений, должно называться гипотезой, гипотезам же метафизическим, механическим, скрытым не место в натуральной философии» (см. Сб. «Исаак Ньютон». Под ред. С. И. Вавилова, АН СССР, М.—Л., 1943, стр. 361—391). Многие английские философы, идя еще дальше Ньютона, стремились совсем изгнать из естествознания всякие предположения, ограничиваясь формальным описанием явления. Эйлер решительно восставал против этого направления.

[2] В 1717 г. Мушенбрек приехал из Голландии в Лондон. Некоторое время он занимался у Ньютона, был его горячим сторонником и распространял его учение в Голландии.

[3] Дорту де Меран, Жан Жак (Dortous de Mairan, Jean Jacques, 1678—1771) — французский физик, астроном. Первым из французских ученых был избран иностранным членом Петербургской Академии наук (в 1734 г.). Меран был убежденным сторонником Ньютона и выступал против Декарта; на этой почве он сблизился с Вольтером. Он также вел переписку с членами Петербургской Академии — Ж. Н. Делилем и А. Н. Гришовым.

[4] В Архиве АН СССР сохранилось письмо маркизы дю Шатле, датированное 30 мая 1744 г. из Сирэ. В нем она подробно останавливается на своем споре с де Мераном и полемизирует с Эй-

лером по некоторым вопросам, относящимся к этому спору и к принципу живых сил (ААН, ф. 136, оп. 2, № 1, лл. 345—346 об.).

2

19 февраля 1740 г., Петербург

Г-же маркизе дю Шатле

Милостивая государыня,

Хотя я еще не получил сочинения,[1] которое Вы были так добры передать г. де Мопертюи для меня, но не могу не позволить себе сразу же поблагодарить Вас за столь лестное отличие. Для меня, милостивая государыня, крайне почетно работать на одном поприще с особой, которая является одним из самых редких украшений своего пола, благодаря тому блеску, каким Вы озарили даже самые возвышенные науки, в которые Вы внесли величие Вашего таланта.[2] Я чувствую, что уже это одно могло бы выдвинуть меня так, как я не мог бы рассчитывать на основании своих скромных познаний. Если же я все-таки имел бы право считать, что достиг чего-либо в этом отношении, то это было бы лишь вследствие той чести, которую они [a] мне доставили, и ради того, чтобы быть в состоянии восхищаться Вами, как человек, понимающий дело. Я с нетерпением жду Вашего труда, чтобы воздать Вам должное; все, кто любит науки, должны считать для себя за честь и радость воздавать Вам это должное.

Примите, милостивая государыня, искреннее выражение глубокого почтения, с каким имею честь оставаться, милостивая государыня, Ваш смиреннейший и покорнейший слуга

Леонард Эйлер.

С. Петербург, 19 сего февраля 1740.

A Madame la Marquise du Châtelet

Madame,

Quoique je n'aye pas encore reçu la Pièce que Vous avez eu la bonté de remettre à Mr de Maupertuis pour moi, je ne puis différer de prendre la liberté de Vous remercier d'une distinction aussi avantageuse. Il m'est bien glorieux, Ma-

[a] Здесь мысль Эйлера неясна.

dame, de me voir en lice avec une personne qui fait un des plus rares ornemens de son Sexe, par le Lustre que Vous avez bien voulu répandre sur les sciences les plus relevées, en y portant la Sublimité de Votre génie. Cela seul, je le sens bien, est capable de me donner un Relief que je n'oserois espérer de mes faibles lumières. Si j'avais cependont lieu de me féliciter de quelque chose à cet égard, ce seroit uniquement à cause de l'honneur qu'elles [a] viennent de me procurer et pour être en état, Madame, de Vous admirer avec connaissance de cause. Il me tarde beaucoup de recevoir Votre ouvrage pour Vous rendre ce tribut que tous ceux qui aiment les sciences doivent se faire un honneur et un plaisir de Vous rendre.

Agréez, Madame, la sincerité du profond respect avec equel j'ai l'honneur d'être, Madame,

Votre très humble et très obéissant serviteur

Leonhard Euler.

St.-Pétersbourg, ce 19 Févr. 1740.

Печатается по черновику (ААН, ф. 1, оп. 3, № 30, лл. 20—21).

[1] Имеется в виду сочинение «Institutions de physique».

[2] Дю Шатле написала также сочинение «Sur la nature et la propagation du feu» (буквально — О природе и распространении огня, но имеется в виду света) на премию Парижской Академии наук, объявленную на 1738 г. Премию получил Л. Эйлер, но работа дю Шатле была напечатана, как одна из работ, заслуживающих внимания. Может быть, Эйлер и имеет это в виду, как «работу на одном поприще».

ЭЛЕРУ

Элер, Карл Леонард Готлиб (Ehler, Carl Leonhard Gottlieb) — бургомистр города Данцига, друг Л. Эйлера, живо интересовавшийся проблемами математики, в частности вопросом о природе отрицательных и мнимых величин. По его предложению Эйлер вступил в переписку с данцигским преподавателем математики Г. Кюном. Известны 14 писем Элера Леонарду Эйлеру, написанные между 8 апреля 1735 г. и 19 декабря 1742 г. Все они хранятся в Архиве Академии наук СССР.

1 [1]

[Июнь 1735 г., Петербург] [2]

[I]

Что касается моей первой задачи,[3] то мое решение, с которым отлично совпадает решение преславного знаменитого доктора Кюна,[4] в общих выражениях имеет такой вид.

Пусть емкость сосуда a единиц; [из него] в одну минуту вытекает b единиц. Предположим, что после n минут оставшееся количество вина в сосуде будет x единиц; количество воды будет $a-x$ единиц. Далее, после $n+dn$ минут останется $x+dx$ вина. Следовательно, в промежуток времени dn вытекло dx вина. А так как в одну минуту вытекает b единиц жидкости, то в промежуток времени dn вытечет bdn жидкости, часть которой $\frac{x}{a}$ будет вино. Итак, в действительности, в промежуток времени dn вытечет вина $\frac{bxdn}{a}$, что следует принять равным dx, откуда получится $adx+bxdn=0$; при интегрировании это уравнение даст $lx=C-\frac{bn}{a}$; отсюда определяется константа C, так как если $n=0$, то получится $x=a$.

Следовательно, будет $1x = 1a - \frac{bn}{a}$. Если число, гипер болический логарифм которого равен 1, обозначить e, то будет $x = ae^{-\frac{bn}{a}}$. Значение x удобнее определить с помощью ряда, и тогда будет $x = a - \frac{nb}{1} + \frac{n^2b^2}{1\cdot 2\cdot a} - \frac{n^3b^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^2} +$ и т. д., а такой ряд может быть обычным образом выведен из дифференциального уравнения.

В частном предложенном случае $a = 10$, $n = 10$ и $b = 1$, $x = 10\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right.$ и т. д.), что является тем самым и рядом знаменитого Кюна, и приблизительно дает 3.6788 единиц.[5]

II

Теорема, предложенная мною для доказательства, не новая; если не ошибаюсь, о ней говорилось еще у Ферма́, но без доказательства, из одной индукции.[6] Не думаю, чтобы с помощью метода преславного знаменитого Кюна, которым я прежде также пользовался, можно было достигнуть удовлетворительных результатов. Но я хочу сообщить совсем другой способ доказательства, найденный мною случайно. Поскольку $n+1$ есть простое число (исключая 2), то n будет четное число. Поэтому, если разлагать 2^n или $(1+1)^n$, так что получится $1 + \frac{n}{1} + \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}$ и т. д., то число этих членов будет $n+1$ или нечетное. Следовательно, если отнять первый член, то будет

$$2^n - 1 = \frac{n}{1} + \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot n-1\cdot n-2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \text{ и т. д.};$$

число членов этого ряда будет поэтому четным.

Об этом ряде следует также заметить, что любой его член, очевидно, может рассматриваться как целое число; поэтому сумма двух членов его есть целое число, я объединяю по два члена, так как число членов четное, и тогда буду иметь

$$2^n - 1 = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n+1)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} \text{ и т. д.}$$

Поскольку каждый член есть целое число, то знаменатель каждого делит числителя. Но так как $n+1$, простое число, является множителем в отдельных числителях, то и после деления оно останется множителем, так что весь ряд, а также 2^n-1, будет иметь множителем $n+1$, если $n+1$ — простое число; если же $n+1$ не будет простое число, то оно должно делиться на знаменатель, так что соответствующий член уже нельзя будет разделить на $n+1$, что и требовалось доказать.

П р и с о в о к у п л е н и е I. Поскольку n — четное число, то или $2^{\frac{n}{2}}-1$, или $2^{\frac{n}{2}}+1$ делится на $n+1$ — простое число; здесь представляется трудным исследовать, применимо ли деление в том или другом случае. Впрочем, я наблюдал, что если подставить m вместо $\frac{n}{2}$, то всегда 2^m+1 делится на $2m+1$, если только $m = 4i+1$, или $m=4i+2$, если i обозначает какое-нибудь целое число, и 2^m-1 может быть разделено на $2m+1$, если $m=4i$ или $m=4i-1$; разумеется, надо принять, что $2m+1$ — простое число.

Для того чтобы найти совершенные числа,[7] полезно исследовать, в каких случаях 2^m-1 будет простое число, ибо когда оно будет таковым, тогда $2^{m-1}(2^m-1)$ будет совершенное число. Представляется вполне очевидным, что если m не является простым числом, 2^m-1 не может быть простым [числом]; однако не всегда, если m — простое число, то 2^m-1 также является [простым]; в случае, когда $m=11$, $2^{11}-1$ имеет делитель 23, что, как я вижу, славнейший Вольф не сказал даже в последнем издании,[8] когда он характеризовал $2^{10}(2^{11}-1)$ как совершенное число. Итак, с помощью вышеупомянутого указания могут быть определены многие случаи, в которых 2^m-1 не есть простое число, даже если m является таковым. Отсюда, очевидно, следует, что 2^m-1 не является простым числом, если m будет равно или 11, или 23, или 83, или 131, или 179, или 191, или 239 и т. д. Ибо в этих случаях делителем будет $2m+1$. За исключением этих случаев и многие другие допускают существование делителей, ибо могут быть разделены $2^{29}-1$ на 1103; $2^{37}-1$ на 223; $2^{43}-1$ на 431; $2^{73}-1$ на 439 и т. д. Отметив эти случаи, укажем, что будут получаться [совершенные] числа, если в $2^{m-1}(2^m-1)$ вместо m берется число из следующих: 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 41, 47.

Занимаясь этим, я доказал, что теорема Ферма́, в которой он утверждает, что формула $2^{2^n}+1$ всегда дает простое число, неправильна: $2^{2^5}+1$ или $2^{32}+1$ делятся на 641.

Впрочем, предложив эту теорему, я имею в виду другие, более общие степени; так, предположим, что n простое число, в этом случае, если разделить степень всякого числа с показателем $n-1$ на n, то останется 0 или единица, так что если a^6 разделить на 7, то в остатке получится 0 или 1. А также степень любого числа с показателем $n^{m-1}(n-1)$, разделенная на n^m, дает в остатке 0 или 1. Наконец, вообще если m, n, p, q и т. д. будут неравные простые числа и A будет наименьшее общее кратное чисел $m-1$, $n-1$, $p-1$, $q-1$ и т. д., я утверждаю, что степень любого числа с показателем A, т. е. a^A, разделенная на m, n, p, q и т. д., даст в остатке 0 или 1, если a не может быть разделено ни на m, ни на n, ни на p и т. д.[9] Так что если $m=3$, $n=5$, то $A=4$, и поэтому a^4, деленное на 15, даст в остатке 0 или 1, если a не имеет с 15 общих делителей ни 3, ни 5. Или a^4-1 всегда может быть разделено на 15, если оно не имеет делителей 3 и 5.

III

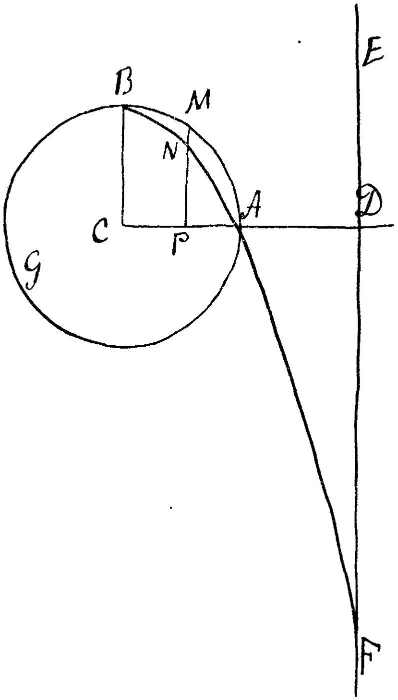
Более всего я несогласен с размышлениями славнейшего мужа относительно моей четвертой задачи. Ибо я не принимаю различие, которое славнейший муж установил в отношении знаков, и не могу согласиться с его теорией мнимых величин.[10] Что касается знаков, то их следует рассматривать не [произвольно], а в соответствии с вернейшими правилами; если бы [эти правила] допускали исключения, то весь анализ покоился бы на шатком фундаменте: ведь если бы было сомнение в том, что $-a\times-a$ дает $+a^2$, то мы не могли бы быть уверены в результатах умножения вообще. Если бы $-a$, умноженное на $-a$, не давало бы $+a^2$, то $b^2-2ab+a^2$ не было бы квадратом величины $b-a$. Если славнейший муж отрицает, что $\sqrt{a^2}$ будет как $+a$, так и $-a$, он будет также отрицать, что квадратное уравнение имеет два корня.

Действительно, уравнение $x^2 = 2bx - b^2 + a^2$ имеет два корня: $b + a$ и $b - a$, которые не были бы найдены, если бы не принять за $\sqrt{a^2}$ как $-a$, так и $+a$. Поэтому я совершенно не понимаю, к чему нарушать принятые правила, которые, по моему мнению, являются вернейшими; мне представляется, что, напротив, не только не вытекает ничего нелепого из того, что $-a \times -a$ дает $+a^2$, но я убежден, что из противоположного последовали бы величайшие нелепости. Итак, я хотел бы, чтобы славнейший муж представил определенный случай, в котором это допущение приводило бы к абсурду; что касается меня, то мне никогда не встречался случай такого рода, так что не было нужды в допущении исключения из принятых правил. Я видел, что при вычислении куба выражения $-1 + \sqrt{-3}$ славнейший муж вместо $(-1)^2$ берет (-1); если это возможно, я прошу, чтобы он рассмотрел, какое несоответствие отсюда следует. Далее, в том же самом действии славнейший муж в одном месте поставил $+(-3)$ вместо $+3 \times (-1)$ и, наконец, прямо -3, в другом же месте он берет $+3$ вместо $+3 \times (-1)$; мне непонятно, каким образом это может быть согласовано между собою. Для того же, чтобы доказать правильность принятых правил и подкрепить мое утверждение, что 8 является кубом величины $-1 \pm \sqrt{-3}$, я прежде всего спрашиваю славнейшего мужа, разве корень уравнения $x^3 - 8 = 0$ не имеет такого свойства, что его куб равен 8, и если это уравнение будет иметь много корней, разве отдельные его корни не обладают тем же самым свойством, ибо если любое выражение, будучи поставлено вместо x, дает $x^3 - 8 = 0$, то оно — корень этого уравнения, куб этого корня есть 8. Затем я спрашиваю, если один корень будет известен, то разве нельзя с помощью деления правильно определить остальные корни; если же это допускается, то, поскольку один корень есть 2, и, если разделить $x^3 - 8$ на $x - 2$, получится $x^2 + 2x + 4$; приравняв это выражение к нулю, мы, конечно, получим остальные корни: $x = -1 + \sqrt{-3}$ и $x = -1 - \sqrt{-3}$. Если это так, то славнейший муж тотчас должен признать, что $x^2 + 2x + 4 = 0$, если вместо x подставить $-1 + \sqrt{-3}$, поскольку это выражение является корнем того же самого уравнения. Но если [выражение] $-1+\sqrt{-3}$, поставленное вместо x, приведет к исчезновению x^2+2x+4, то тогда исчезнет также $(x-2)(x^2+2x+4)$ или x^3-8. Итак, поскольку при подстановке $-1+\sqrt{-3}$ вместо x получается $x^3-8=0$, тогда $(-1+\sqrt{-3})^3=8$, что я и утверждал и что обычно дают правила умножения. Ибо $(-1+\sqrt{-3})$, трижды умноженное на самое себя, даст, как видно из следующего:

$$
\begin{array}{r}
-1+\sqrt{-3} \\
-1+\sqrt{-3} \\
\hline
+1-\sqrt{-3}-3= \\
-\sqrt{-3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
-1+\sqrt{-3} \\
-2-2\sqrt{-3} \\
\hline
+2-2\sqrt{-3}-2-3=8 \\
\qquad\qquad +2\sqrt{-3}
\end{array}.
$$

Основываясь на сказанном, я не вижу оснований для сомнения по этому поводу, так как из этого сомнения следует, что $-1+\sqrt{-3}=2$, что во всяком случае нелепо. Правильное же заключение будет такое: $-1+\sqrt{-3}=\sqrt[3]{8}$; а поскольку любое число имеет три кубических корня, то и само число 8 имеет три корня: 2, $-1+\sqrt{-3}$, $-1-\sqrt{-3}$, из которых один равен $-1+\sqrt{-3}$. Таким же образом будет $x+1=0$, если принять, что $x=-1$; следовательно, в этом же случае будет $(x-1)(x+1)=0$ или $x^2=1$. Следовательно, -1, подставленная вместо x, даст $+1$ вместо x^2; потому что из уравнения $(-1)^2=(+1)^2$ не следует $-1=+1$, но следует $-1=\sqrt{+1}$, что во всяком случае имеет место, ибо $+1$ имеет два квадратных корня, из которых один действительно равен -1. Кроме того, славнейший муж не может отрицать, что $\left(-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}\right)^5=4^5$, ибо любое число имеет пять различных корней пятой степени.

Определение мнимых величин, предложенное славнейшим мужем, является совершенно новым и не соответствует понятию мнимых величин;[11] оно пригодно только для отрицательных величин. Очевидно, преславный знаменитый доктор спутал мнимые величины с отрицательными, когда он опровергал возможность различия между корнями ложными и мнимыми. Я же берусь доказать не только на словах, но и на деле, что существуют величины мнимые и отрицательные и что между ними имеется различие, ибо когда такого рода величины: $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{-5}$ и т. д. — считаются мнимыми, необходимо исследовать, что́ означают такие формулы, если мы хотим создать себе представление об этого рода формулах.



Итак, пусть $AMBGN$ будет окружность, описанная из центра C, радиус которой CA или CB примем равным единице. Из свойства круга следует, что если принять $Cp = x$, $pM = y$, то $y^2 = 1 - x^2$ или $y = \sqrt{(1 - xx)}$. Из этого уравнения, если взять любую абсциссу Cp, может быть определена длина перпендикуляра pM, восставленного из точки p до пересечения с окружностью. Если $Cp = x = 0$, то находим $CB = 1$ и если $Cp = CA = 1$, то находим $x = 0$; если теперь принять $x = 2 = CD$, то значение y, найденное из уравнения $y = \sqrt{(1 - xx)}$, даст длину DE до пересечения с окружностью. А так как CD больше CA, то перпендикуляр DE нигде не сможет пересечь [окружность] и DE не будет равно ни 0, ни ∞, ни какой-нибудь другой действительной величине. Итак, поскольку DE не имеет никакого значения, которое может быть определено, то его величина называется мнимой и противополагается действительным величинам. Вычисление же для DE дает $\sqrt{(1 - 4)} = \sqrt{-3}$, откуда следует, что $\sqrt{-3}$ выражает мнимую величину, или величину такого рода, которая не может быть представлена. И сколько бы раз ни встречалось выражение такого рода, всегда следует считать, что то выражение, которое определено из формулы, не является действительным или не может соответствовать [чему-нибудь].

И в самом деле, $\sqrt{-3}$ не есть отрицательная величина, ибо отрицательные величины являются действительными, и всегда то, что ими выражено, может быть с чем-то сопоставлено. Что же касается того, что квадрат $\sqrt{-3}$ или третья пропорциональная к 1 и $\sqrt{-3}$ есть действительная величина, я доказываю таким образом: построим новую кривую BNA такого свойства, чтобы ее аппликата pN была третьей пропорциональной к радиусу круга и соответствовала аппликате круга pM; если обозначить pN через z, то будет $z=1-xx$; из этого уравнения мы находим, что кривая BNA является параболой с осью BC, причем параметр $BC=1$. Итак, поскольку повсюду pN есть третья пропорциональная, соответствующая радиусу, равному 1, и аппликате круга pM, то DF также будет третья пропорциональная, соответствующая радиусу, равному 1, и мнимой длине DE', или будет $AC:DE'=DE':DF$. Из природы же параболы, если подставить 2 вместо x, то в уравнении $z=1-xx$ мы найдем $DF=z=-3$, и как из этого выражения, так и из фигуры параболы, и без того известной, представляется очевидным, что $DE=3$ и обращена вниз. Отсюда следует, что отрицательные величины, как -3, могут быть указаны, и вместе с тем средняя пропорциональная между 1 и -3, которая, как показано выше, есть $\sqrt{-3}$, не может быть указана.

Следовательно, между отрицательными и мнимыми величинами есть величайшее различие, и их без надобности не следует перемножать. Итак, правила, принятые до сих пор, вполне соответствуют истине, а также и все то, что основывается на них; правила эти совершенно не нуждаются в каком-либо исключении. Впрочем, как я заметил выше, $-10-6\sqrt{-3}$ неправильно выведено из возведения в куб $-1+\sqrt{-3}$, так как в одном месте славнейший муж вместо $+3\times(-1)$ поставил -3, а в другом $+3$. А если бы можно было производить действия таким образом, то я для куба величины $-1+\sqrt{4}$ вывел бы $11+\sqrt{4}$ по способу, принятому славнейшим мужем.

Пусть будет $a=+(-1)$ и $b=+\sqrt{(+4)}$.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=+(-1)^3+3\times(-1)^2\times \sqrt{(+4)}+3\,(-1)^{-1}\times(+4)+(+4)\times\sqrt{(+4)}=+(-1)+$$

$$+(-3)\sqrt{(+4)}+3\times(+4)+(+4)\sqrt{(+4)}=$$
$$=-1-3\sqrt{(+4)}+(+12)+4\sqrt{(+4)}=$$
$$=-1+12+1\sqrt{(+4)}=11+\sqrt{4}.$$

Следовательно, по этому новому методу получится $(-1+\sqrt{4})^3=(+1)^3=11+\sqrt{4}=13$ или $1=13$; если же действовать согласно принятым правилам, то такие нелепости не получаются. Итак, поскольку можно признать правильным, что $11+\sqrt{4}$ есть куб выражения $-1+\sqrt{4}$, то тогда я считаю правильным утверждение, что $-10-6\sqrt{-3}$ есть куб выражения $-1+\sqrt{-3}$.

IV

Далее, преславный знаменитый доктор Кюн в решении моей первой предложенной ему задачи высказал пожелание, чтобы были установлены особые правила для различных случаев ложного делителя. Итак, поскольку славнейший муж не удовлетворился аналогией, что истинный делитель так относится к ложному делителю, как частное ложное к частному истинному, то я предложу другое решение, которое, может быть, покажется ему удовлетворительным. Пусть A — делимое, p — истинный делитель, x — ложный делитель и z — ложное частное, откуда z выражается через x, и приняв x за переменную, а dx за постоянную, можно найти дифференциалы любого порядка от z. Приняв это, я утверждаю, что истинное частное будет

$$z+\frac{(p-x)\,dz}{1\cdot dx}+\frac{(p-x)^2\,ddz}{1\cdot 2\cdot dx^2}+\frac{(p-x)^3\,d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}+$$
$$+\frac{(p-x)^4d^4z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot dx^4}+\text{и т. д.}$$

Это есть не только общая формула всех четырех видов алгорифма, но она подходит также для любого сопоставления вычислений, который будет желательным для славнейшего мужа. Ибо поскольку $z=\frac{A}{x}$, то будет $dz=\frac{-A\,dx}{x^2}$; $ddz=\frac{2A\,dx^2}{x^3}$; $d^3z=\frac{-2\cdot 3\cdot A\,dx^3}{x^4}$ и т. д., и истинное частное будет равно $z\Big(1+\frac{(x-p)}{x}+$

$+\frac{(x-p)^2}{x^2}+\frac{(x-p)^3}{x^3}+\frac{(x-p)^4}{x^4}+$ и т. д.) — формула, в которой значение дифференциалов невелико. В примере, приведенном славнейшим мужем (где тó, что у него x, я принимаю c), нужно разделить $A=a^3$, делитель истинный или данный $p=a^2+c^2$; делитель ложный $x=a^2$; так что частное ложное равно a; тогда по моему правилу истинное частное будет равно $a\left(1-\frac{cc}{aa}+\frac{c^4}{a^4}-\frac{c^6}{a^6}+\text{и т. д.}\right)=a-\frac{c^2}{a}+\frac{c^4}{a^3}-\frac{c^6}{a^5}+$ и т. д. Если ложный делитель x будет $a^2+2ac+c^2$, то ложное частное $z=\frac{a^3}{(a+c)^2}$ и $x-p=2ac$. Следовательно, отсюда будет истинное частное $\frac{a^3}{(a+c)^2}\left(1+\frac{2ac}{(a+c)^2}+\frac{4a^2c^2}{(a+c)^4}+\frac{8a^3c^3}{(a+c)^6}+\text{и т. д.}\right)$. Если ложный делитель будет $\frac{a^2}{c^2}=x$ и ложное частное $z=ac^2$, то $x-p=\frac{a^2-a^2c^2-c^4}{cc}$, истинное частное равно $ac^2\left(1+\frac{a^2-a^2c^2-c^4}{a^2}+\frac{(a^2-a^2c^2-c^4)^2}{a^4}+\text{и т. д.}\right)$. Все сокращается так, что получается истинное частное, равное $\frac{A}{p}$ или $\frac{xz}{p}$, как я ответил раньше, ибо ряды, которые получаются таким образом или другими способами, вместо $\frac{A}{p}$, могут суммироваться и имеют сумму $\frac{xz}{p}$, поэтому я не считаю правильным тó, что славнейший муж выдвигает в качестве проблемы.[12]

V

Относительно моей общей формулы, данной для Sn^m, я высказал сожаление, что в особых случаях ее можно применять с трудом; этим обстоятельством, по-видимому, и объясняется пожелание славнейшего мужа об ее упрощении. Поэтому я вступил на другой путь и в самом общем виде исследовал формулу суммирования для ряда с данным общим членом.[13] Пусть T — общий член любого ряда, x — его указатель или индекс; формула суммирования или сумма всех членов от первого до T включительно пусть будет S. Поскольку T дано через x и постоянные величины, пусть будет x переменная величина, тогда я принимаю dx за постоянную величину.

Установив это, я утверждаю, что $S=\alpha\int Tdx+\beta T+$ $+\frac{\gamma\delta T}{dx}+\frac{\delta ddT}{dx^2}+\frac{\varepsilon d^3T}{dx^3}+$ и т. д., где α, β, γ, δ и т. д. имеют следующие значения:

$$\alpha=1,$$
$$\beta=\frac{\alpha}{2},$$
$$\gamma=\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2\cdot3},$$
$$\delta=\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2\cdot3}+\frac{\alpha}{2\cdot3\cdot4},$$
$$\varepsilon=\frac{\delta}{2}-\frac{\gamma}{2\cdot3}+\frac{\beta}{2\cdot3\cdot4}-\frac{\alpha}{2\cdot3\cdot4\cdot5} \text{ и т. д.}$$

Из этих условий последовательность коэффициентов α, β, γ, δ и т. д. может быть продолжена насколько угодно; мы найдем следующие значения:

$$\alpha=+1;\ \beta=+\frac{1}{1\cdot2};\ \gamma=+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot2};\ \delta=0;$$

$$\varepsilon=-\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6};\ \zeta=0;\ \eta=+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot6};$$

$$\theta=0;\ \iota=-\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10};\ \varkappa=0;$$

$$\lambda=+\frac{5}{1\cdot2\ldots11\cdot6};\ \mu=0;\ \nu=\frac{691}{1\cdot2\cdot3\ldots,1\cdot3\cdot2\cdot10};$$

$$\xi=0;\ \eta=+\frac{35}{1\cdot2\ldots15\cdot2};\ \rho=0;\ \sigma=-\frac{3617}{1\cdot2\cdot3\ldots17\cdot30};$$
$$\tau=0 \text{ и т. д.}$$

Следовательно, сумма ряда будет

$$S=\int Tdx+\frac{T}{1\cdot2}+\frac{dT}{1\cdot2\cdot3\cdot2dx}-\frac{d^3T}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6dx^3}+$$
$$+\frac{d^5T}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot6dx^5}-\frac{3d^7T}{1\cdot2\ldots9\cdot10dx^7}+$$
$$+\frac{5d^9T}{1\cdot2\ldots11\cdot6dx^9}-\frac{691d^{11}T}{1\cdot2\ldots13\cdot2\cdot10dx^{11}} \text{ и т. д.}$$

По этой формуле легко можно найти сумму, если дан какой-нибудь общий член; при этом члены, в которых

x отсутствует, опускаются, так как сумма должна исчезнуть, если принять $x=0$; это становится ясным из-за постоянной, которая должна прибавляться или вычитаться при интегрировании Tdx.

Если общий член будет x^3-x^2+x, т. е. ряд, который нужно суммировать $1+6+21+52+$ и т. д., то будет

$$T=x^3-x^2+x \text{ и } \int T\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2} \text{ и } \frac{dT}{dx}=3x^2-2x+1,$$

где 1 по принятому правилу остается без внимания. Далее $\frac{ddT}{dx^2}=6x-2$, где -2 опускается, и $\frac{d^3T}{dx^3}=6$, где 6 также отбрасывается, так как отдельные члены должны быть приведены к x; все дифференциалы более высоких порядков исчезнут. Следовательно, будет

$$S=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{1\cdot 2}-\frac{2x}{1\cdot 2}=$$
$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x,$$

что и является формулой суммирования предложенного ряда. Пусть теперь нужно суммировать ряд $1+2^{10}+$ $+3^{10}+4^{10}$ и т. д., общий член которого T есть x^{10}; поэтому

$$\int T\,dx=\frac{1}{11}x^{11};\ \frac{dT}{dx}=10x^9;\ \frac{ddT}{dx^2}=10\cdot 9x^8;$$
$$\frac{d^3T}{x^3}=10\cdot 9\times 8\cdot x^7 \text{ и т. д.}$$

Отсюда находим формулу суммирования этой последовательности

$$Sx^{10}=\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{10}}{2}+\frac{5x^9}{6}-x^7+x^5-\frac{x^3}{2}+\frac{5x}{6c},$$

и вообще определяется сумма ряда

$$1+2^n+3^n+\ldots x^n+\ldots \quad \text{или} \quad Sx^n=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^n}{2}+$$
$$+\frac{nx^{n-1}}{2\cdot 6}-\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{2\cdot 3\cdot 4\ldots 30}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 42}-$$
$$-\frac{n(n-1)\ldots(n-6)x^{n-7}}{2\cdot 3\ldots 8\cdot 30}+\frac{n(n-1)\ldots(n-8)5x^{n-9}}{2\cdot 3\ldots 10\cdot 66}-$$

$$-\frac{n(n-1)\ldots(n-10)\,691x^{n-11}}{2\cdot 3\ldots 12\cdot 2730}+\frac{n(n-1)(n-11)\,7x^{n-13}}{2\cdot 3\ldots 14\cdot 6}-$$
$$-\frac{n(n-1)\ldots(n-14)\,3617x^{n-15}}{2\cdot 3\ldots 16\cdot 510}+\text{и т. д.}$$

Сомневаюсь, чтобы могло быть предложено что-нибудь более простое и легкое, чем это выражение; я подозреваю, что формула славнейшего мужа совпадает с этой моей формулой. Но отсюда нельзя исключить то обстоятельство, что закон следования коэффициентов $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $-\frac{1}{30}$, $+\frac{5}{66}$ и т. д. неизвестен, получаются же эти дроби из ряда $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, последовательное вычисление членов которого мы знаем. Поэтому моя общая формула может быть применена очень широко; с помощью этой формулы я легко нашел, что сумма 1 000 000 членов ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ и т. д. будет 14.3927267228657236, сумма же ряда, продолженного до бесконечности, как известно, бесконечна; сумму ряда, составленного из квадратов обратных величин $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ и т. д., продолженного до бесконечности, я определил с помощью этой же самой формулы — 1.64493405684822б4; сумма ряда, состоящего из кубов обратных величин $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}$ и т. д., бесконечно продолженного, есть 1.197531985674193; другим способом эти решения трудно было бы получить.

Наконец, поскольку славнейший муж не упоминает о моих решениях остальных задач, я думаю, что он ими удовлетворен.

Quod ad primum meum problema attinet, mea solutio, cum qua Cl[arissimi] D[ig]n[issimi] Doct[oris] Kuhni solutio egregie convenit, ita se habet in generalibus symbolis.

Sit capacitas vasis a mensurarum, effluant singulis minutis b mensurae. Jam post n minuta sit vini quantitas in vase residua x mensurarum; eritque aquae quantitas $a-x$ mensurarum. Porro post $n+dn$ minuta supererit vini quantitas $x+dx$. Effluxit ergo tempusculo dn vini quantitas dx. At cum uno minuto b liquidi mensurae effluant, tempusculo dn effluet liquidi quantitas bdn, cujus pars $\frac{x}{a}$ erit vinum. Revera ergo tempusculo dn effluet vinum $\frac{bxdn}{a}$, quod ipsi dx aequale est ponendum, unde orietur $adx + bxdn = 0$, quae aequatio integrata dat $\mathrm{l}\,x = C - \frac{bn}{a}$; costansque C ex hoc determinatur, quod si $n = 0$, fiat $x = a$; erit ergo $\mathrm{l}\,x = \mathrm{l}\,a - \frac{bn}{a}$. Atque si numerus, cujus logarithmus hyperbolicus est $= 1$, dicatur e, erit $x = ae^{-\frac{bn}{a}}$. Per seriem autem valor ipsius x commodius determinabitur, erit enim $x = a - \frac{nb}{1} + \frac{n^2b^2}{1 \cdot 2a} - \frac{n^3b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^2} +$ etc., quae quidam series statim ex aequatione differentiali modo consueto elici potuisset.

In casu proposito speciali est $a = 10$, $n = 10$ et $b = 1$. Unde erit $x = 10\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ etc.}\right)$, quae est ipsa et D[ignissimi] Kuhnii series, et quam proxime dat 3.6788 mensuras.

II

Theorema, quod demonstrandum proposui, non est novum, sed ni fallor jam a Fermatio assertum, at sine demonstratione, ex sola inductione. Neque existimo, hac Cl[arissimi] D[ignissimi] Kuhnii methodo qua eadem jam pridem sum quoque usus, quicquam profici posse. Communicabo vero longe differentem demonstrandi rationem, in quam forte incidi. Cum $n + 1$ sit numerus primus (excepto 2), erit n numerus par. Atque ideo si 2^n seu $(1 + 1)^n$ evolvatur, ut prodeat $1 + \frac{n}{1} + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$ etc., erit horum terminorum numerus $n + 1$ seu impar. Demto ergo primo termino erit $2^n - 1 = \frac{n}{1} + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} +$ etc., cujus seriei terminorum numerus erit ideoque par.

De hac autem serie notandum est quemvis terminum etiamsi videatur tractus esse numerum integrum; et hanc ob rem binorum quorumque summa erit numerus integer, conjungo ergo binos terminos, quia numerus terminorum est par, et habebo $2^n - 1 = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} +$

$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+$ etc. Quia autem quisque terminus est numerus integer, numeratorem cujusque denominator metietur. At cum $n+1$, numerus primus, sit factor in singulis numeratoribus, hic quoque post divisionem manebit factor, ita ut tota series, et ideo 2^n-1, sit factorem habitura $n+1$, si $n+1$ fuerit numerus primus; sin autem $n+1$ non fuerit primus, is alicubi per denominatorem re ipsa dividatur necesse est, ita ut ille terminus non amplius per $n+1$ dividi queat, q[uod] e[st] d[emonstrandum].

Coroll[arium] I. Quia n est numerus par, vel $2^{\frac{n}{2}}-1$, vel $2^{\frac{n}{2}}+1$ divisibile erit per $n+1$ — numerum primum; quibus autem in casibus vel hic vel ille divisionem admittat, difficile investigatu videtur. Observavi autem posito m loco $\frac{n}{2}$, semper dividi posse 2^m+1 per $2m+1$ quoties fuerit vel $m=4i+1$, vel $m=4i+2$, denotante i numerum integrum quemcunque. At 2^m-1 dividi potest per $2m+1$, si fuerit vel $m=4i$, vel $m=4i-1$. Posito scilicet quod 2^m+1 sit numerus primus.

Ad numeros perfectos inveniendos utile est investigare, quibus in casibus 2^m-1 sit numerus primus, quoties enim fuerit talis, erit $2^{m-1}(2^m-1)$ numerus perfectus. Manifestum autem est, nisi m sit numerus primus, 2^m-1 non posse esse primum; neque vero si m est primus, semper quoque 2^m-1 est talis; uti casu quo $m=11$ divisorem $2^{11}-1$ habet 23, quod Cl[arissimum] Wolfium ne ultima editione quidem animadvertisse observo, dum $2^{10}(2^{11}-1)$ pro numero perfecto habet. Hac igitur observatione multi casus possunt definiri, quibus 2^m-1 non est numerus primus, etiam si m fuerit talis. Scilicet hinc colligitur 2^m-1 non esse primum, si fuerit m vel 11, vel 23, vel 83, vel 131, vel 179, vel 191, vel 239 etc. His enim casibus divisor erit 2^m+1. Praeter hos vero casus multi alii admittunt divisores, dividi enim possunt $2^{29}-1$ per 1103; $2^{37}-1$ per 223; $2^{43}-1$ per 431; $2^{73}-1$ per 439 и т. д. His igitur casibus notatis, habebuntur numeri perfecti,[a] si in $2^{m-1}(2^m-1)$ loco m sumatur numerus sequentium 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 41, 47.

[a] *В копии* Primi.

In his versatus, deprehendi theorema hoc Fermatii, quo statuit hanc formam $2^{2^n}+1$ semper dare numerum primum, esse falsum: habet enim $2^{2^5}+1$ seu $2^{32}+1$ divisorem 641.

Ceterum hoc theoremate proposito, alia habeo latius potentia;[б] ut si n fuerit numerus primus omnis potentia exponentis $n-1$ si per n dividatur, vel 0 vel 1 relinquit; ut a^6 per 7 divisum est, 0 vel 1 relinquet. Atque omnis potentia exponentis $n^{m-1}(n-1)$ per n^m divisa vel 0 vel 1 relinquit. Generalissime tandem si m, n, p, q etc., fuerint numeri primi inaequales atque A[в] sit minimus communis dividuus numerorum $m-1$, $n-1$, $p-1$, $q-1$ etc. dico omnem potentiam exponentis A ut a^A per m, n, p, q etc. divisam vel 0, vel 1 relinquere nisi a dividi possit, vel per m, vel n, vel p etc. Ut si $m=3$, $n=5$, erit $A=4$, ideoque a^4 per 15 divisum, vel 0 vel 1 relinquet, nisi a cum 15 divisorem vel 3 vel 5 communem habuerit. Seu a^4-1 semper dividi poterit per 15, nisi a vel 3 vel 5 habuerit divisorem.

III

In iis, quae Vir Cl[arissimus] circa problema meum quartum meditatus est, me maxime habet dissentientem. Non enim capio distinctionem, quam Vir Cl[arissimus] ratione signorum stabilit neque eius quantitatum imaginariarum ideam percipere possum. Quod enim ad signa attinet, ea non ex arbitrio nostro sunt tractanda, sed juxta regulas certissimas, quae si paterentur exceptiones tota analysis caduco niteretur fundamento; si enim dubium esset an $-a\times-a$ daret $+a^2$, de nulla multiplicatione certi esse possemus. Quodsi enim $-a$ per $-a$ multiplicatum non daret $+a^2$, certe hujus quantitatis $b-a$ non foret quadratum $b^2-2ab+a^2$. Atque si Vir Cl[arissimus] neget $\sqrt{a^2}$ tam esse $+a$ quam $-a$, negare quoque debebit ullam aequationem quadratam duas habere radices. Haec certe aequatio $x^2=2bx-b^2+a^2$ duas habet radices: $b+a$ et $b-a$, quae autem non proveniunt, nisi pro $\sqrt{a^2}$ tam $-a$ quam $+a$ accipiatur. Praeterea plane non video, cur vim regularum receptarum, quae meo judicio certissimae sunt, infringere velimus; ego quidem non solum nihil absurdi ex hoc, quod $-a\times-a$ faciat $+a^2$, fluere

[б] *В незаверенной копии* patentia.
[в] *В незаверенной копии* a.

existimo, sed ex contrario maxima absurda consequi certissimus sum. Vellem igitur ut Vir Cl[arissimus] casum determinatum produceret, in quo ista assumtio ad absurdum deduceret; mihi quidem nunquam hujus modi casus occurrit, quo in regulis receptis exceptione ulla opus fuisset.[г] Vidi in sumendo cubo formulae $-1+\sqrt{-3}$ virum Cl[arissimum] pro $(-1)^2$ sumere (-1), quod si licet, rogo consideret quanta inconvenientia inde sit[д] consecutura.

Porro in eadem operatione uno loco substituit Vir Cl[arissimus] loco $+3\times(-1)$ hoc $+(-3)$ atque tandem -3 recte, alio vero loco pro $+3\times(-1)$ sumit $+3$, quae quomodo inter se conciliari possint non intelligo. Quo autem regularum receptarum veritatem ostendam et assertionem meam, quod 8 sit cubus hujus quantitatis $-1\pm\sqrt{-3}$ confirmem, quaero primo Virum Cl[arissimum], annon radix ex hac aequatione $x^3-8=0$ hanc habeat proprietatem, ut ejus cubus sit $=8$, et si haec aequatio plures habuerit radices, annon singulae eadem proprietate sint praeditae, quidquid enim loco x substitutam dat $x^3-8=0$, id est radix hujus aequationis, cujus cubus est 8.

Deinde quaero num ope divisionis, si una radix fuerit cognita, recte eliciantur reliquae radices; hoc autem concesso quia una radix est 2, si dividatur x^3-8 per $x-2$, prodibit x^2+2x+4; quod positum $=0$, dabit reliquas radices nempe $x=-1+\sqrt{-3}$ et $x=-1-\sqrt{-3}$. Quidquid autem sit concedet saltem Vir Cl[arissimus] fore $x^2+2x+{}$ $+4=0$, si loco x ponatur $-1+\sqrt{-3}$, quia hic valor est radix ejusdem aequationis. Quare si $-1+\sqrt{-3}$, loco x positum, evanescere faciat x^2+2x+4, faciet quoque evanescere $(x-2)(x^2+2x+4)$ seu x^3-8. Cum igitur posito $-1+\sqrt{-3}$ loco x fiat $x^3-8=0$, erit $(-1+\sqrt{-3})^3=8$, uti asserebam et uti regulae multiplicationis consulte dant. Nam $(-1+\sqrt{-3})$, ter in se ductum, dat ut sequitur:

$$\begin{array}{c} -1+\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +1-\sqrt{-3}-3= \\ -\sqrt{-3} \end{array} \qquad \begin{array}{c} -1+\sqrt{-3} \\ -2-2\sqrt{-3} \\ \hline +2-2\sqrt{-3}-2(-3)=8 \\ +2\sqrt{-3} \end{array}.$$

[г] *В незаверенной копии* fuisse.
[д] *В копии* sint.

Hanc ob rem non video quo jure de hoc dubitari possit neque ex hoc sequitur fore $-1+\sqrt{-3}=2$ quod utique esset absurdum. Hoc vero recte concluditur esse: $-1+\sqrt{-3}=\sqrt[3]{8}$; at quia quilibet numerus tres habet radices cubicas, et ipsius 8 sunt tres radices: 2, $-1+\sqrt{-3}$, $-1-\sqrt{-3}$, quarum uni utique $-1+\sqrt{-3}$ aequatur. Simili modo fiet $x+1=0$, si ponatur $x=-1$; eadem ergo positione fiet $(x-1)(x+1)=0$ seu $x^2=1$. Ergo -1, pro x substitutum, dabit $+1$ loco x^2; neque propterea sequitur ex hoc aequatione $(-1)^2=(+1)^2$ ista $-1=+1$; sed hoc sequitur esse $-1=\sqrt{+1}$, quod utique est, nam $+1$ duas habet radices quadratas, quarum alterutri -1 certe aequatur. Atque non negare poterit Vir Cl[arissimus] esse $(-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5}})^5=4^5$; quilibet enim numerus quinque habet differentes radices potestatis quintae.

Definitio quantitatum imaginarium, quam profert Vir Clarissimus, nova prorsus est neque ideae quantitatum imaginariarum convenit; sed in quantitates tantum negativas competit. Videtur autem Cl[arissimus] D[ig]n[issimus] Doct[or] quantitates imaginarias cum negativis confundere, dum negat dari radices falsas ab imaginariis distinctas. Ostendam autem ego non verbis tantum sed re ipsa, quod sint quantitates imaginariae et negativae, et quae inter eas intercedat differentia, cum enim hujusmodi quantitates: $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{-5}$ etc pro imaginariis habeantur, inquirendum est quid hujusmodi formulae significent, si ideam nobis hujusmodi formularum formare velimus.

Sit igitur *AMBGN*[e] circulus centro *C* descriptus, cujus radius *CA* seu *CB* ponatur $=1$. Natura autem circuli in hoc consistit ut positus $Cp=x$, $pM=y$, sit $y^2=1-x^2$, seu $y=\sqrt{(1-xx)}$. Ex hac nimirum aequatione sumta pro lubitu abscissa *Cp* invenitur longitudo perpendicularis *pM* ex *p* erectae, donec circuli peripheriae occurrat. Nempe si $Cp=x=0$, invenitur $CB=1$ et si $Cp=CA=1$, reperitur $x=0$; si nunc sumatur $x=2=CD$, valor ipsius y, ex aequatione $y=\sqrt{(1-xx)}$

[e] *В незаверенной копии чертеж отсутствует.*

inventus, dabit longitudinem DE donec peripheriae circuli occurrat. At quia $CD > CA$, perpendiculum DE nusquam circulum secare potest, neque erit $DE=0$, neque ∞, neque cuiquam quantitati reali. Cum igitur DE nullum habeat assignabilem valorem, ejus quantitas vocatur imaginaria et opponitur quantitatibus realibus. Calculus vero pro DE dat $\sqrt{(1-4)}=\sqrt{-3}$, ex quo consequitur $\sqrt{-3}$ exprimere quantitatem imaginariam, seu hujusmodi quantitatem, quae exhiberi nequit. Atque quoties hujusmodi expressio occurrit, toties concedendum est id quod ex formula indicatur non esse reale seu assignari non posse. At vero $\sqrt{-3}$ non est quantitas negativa, negativae enim quantitates sunt reales, et semper id, quod per eas indicatur, assignari potest. Quod autem quadratum ipsius $\sqrt{-3}$ seu tertia proportionalis ad 1 et $\sqrt{-3}$ sit quantitas realis, ita ostendo: construatur nova curva BNA hujus indolis, ut ejus applicata pN sit tertia proportionalis ad radium circuli et applicatam circuli pM; erit si haec pN z, dicatur $z=1-xx$,[ж] ex qua aequatione patet curvam BNA esse parabolam ad axem BC, parametro $BC=1$ descriptam. Cum igitur ubique sit pN tertia proportionalis ad radium 1 et applicatam circuli respondentem pM, erit quoque DE tertia proportionalis ad radium 1 et longitudinem imaginariam DE', seu erit $AC:DE'=DE':DF$. Ex natura autem parabolae posito 2 loco x in aequatione $z=1-xx$ invenitur $DF=z=-3$, atque tam ex hac expressione, quam ex figura parabolae alias cognita, manifestum est esse $DE=3$ et deorsum vergere. Ex quo intelligitur quantitates negativas, ut -3, esse assignabiles atque simul medium proportionalem inter 1 et -3, quae, ut ostensum, est $\sqrt{-3}$, non esse assignabilem. Maximum ergo est discrimen inter quantitates negativas et imaginarias neque entia praeter necessitatem sunt multiplicata. Maximi igitur veritati consentaneae sunt regulae hactenus receptae et omnia, quae ex iis deducuntur, neque unquam hae regulae exceptione habent opus. Ceterum jam supra ostendi $-10-6\sqrt{-3}$ non legitime ex cubatione $-1+\sqrt{-3}$ esse productum, quia uno loco pro $+3x(-1)$ ponit Vir Cl[arissimus] -3, alio loco $+3$. Atque si eadem ratione operari

---

ж *В копии* $z=\frac{y^2}{1}=1-xx$

licet, ego pro cubo hujus quantitatis $-1+\sqrt{4}$ producerem $11+\sqrt{4}$ modo a Viro Cl[arissimo] usurpato.

$$\text{Fiat } a=+(-1) \text{ et } b=+\sqrt{(+4)}.$$

$$\begin{gathered}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=+(-1)^3+3\times(-1)^2\times \\ \times\sqrt{(+4)}+3(-1)^{-1}\times(+4)+(+4)\times\sqrt{(+4)}=+(-1)+ \\ +(-3)\sqrt{(+4)}+3\times(+4)+(+4)\sqrt{(+4)}= \\ =-1-3\sqrt{(+4)}+(+12)+4\sqrt{(+4)}= \\ =-1+12+1\sqrt{(+4)}=11+\sqrt{4}.\end{gathered}$$

Foret ergo juxta hanc novam operandi methodum $(-1+\sqrt{4})^3=(+1)^3=11+\sqrt{4}=13$, seu $1=13$; talia autem absurda regulae receptae non praebent. Quam certum igitur est $11+\sqrt{4}$ esse cubum ipsius $-1+\sqrt{4}$, tam certum esse puto $-10-6\sqrt{-3}$ esse cubum ipsius $-1+\sqrt{3}$.

IV

Deinceps Cl[arissimus] D[ignissimus] Doct[or] Kuhn in mea primi a se propositi problematis solutione desiderat regulas speciales pro variis divisoris falsi conditionibus. Quia ergo Vir Cl[arissimus] non contentus est analogia ut divisor verus ad divisorem falsum ita quotus falsus ad quotum verum aliam dabo solutionem, quae forte ipsius desiderio satisfaciet. Sit divisor verus p dividendus A, divisor falsus x et quotus falsus z, ubi ergo z per x dabitur, positoque x variabili et dx constante, differentialia cujusque gradus ipsius z exhiberi poterunt. His positis dico quotum verum fore $=z+\frac{(p-x)\,dz}{1\cdot dx}+\frac{(p-x)^2\,ddz}{1\cdot 2\cdot dx^2}+$ $+\frac{(p-x)^3\,d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}+\frac{(p-x)^4\,d^4z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot dx^4}+$ etc. Quae est formula generalis non solum omnibus quattuor algorithmi speciebus, sed cuicunque componendi rationi conveniens, qualis ab Viro Cl[arissimo] desideratur. Quia autem $z=\frac{A}{x}$, erit $dz=\frac{-A\,dx}{x^2}$; $ddz=\frac{2A\,dx^2}{x^3}$, $d^3z=\frac{-2\cdot 3\cdot A\,dx^3}{x^4}$ etc., eritque quotus verus $=z\ \Big(1+\frac{(x-p)}{x}+\frac{(x-p)^2}{x^2}+\frac{(x-p)^3}{x^3}+$ $+\frac{(x-p)^4}{x^4}+\text{etc.}\Big)$, in qua formula non amplius insunt differentialia. In exemplo a Viro Cl[arissimo] dato (ubi quod ipsi est x loco c) est dividendus $A = a^3$, divisor verus seu datus $p = a^2 + c^2$; divisor falsus $x = a^2$; ita ut sit quotus falsus $= a$; erit per regulam meam quotus verus $= a \left(1 - \frac{cc}{aa} + \frac{c^4}{a^4} - \frac{c^6}{a^6} + \text{etc}\right) = a - \frac{c^2}{a} + \frac{c^4}{a^3} - \frac{c^6}{a^5} + \text{etc}$. Si divisor falsus x fuerit $a^2 + 2ac + c^2$, erit quotus falsus $z = \frac{a^3}{(a+c)^2}$ et $x - p = 2ac$, hinc ergo erit quotus verus $=$ $= \frac{a^3}{(a+c)^2} \left(1 + \frac{2ac}{(a+c)^2} + \frac{4a^2c^2}{(a+c)^4} + \frac{8a^3c^3}{(a+c)^6} + \text{etc}\right)$. Si divisor falsus fuerit $\frac{a^2}{c^2} = x$ et quotus falsus $z = ac^2$, erit ob $x - p = \frac{a^2 - a^2c^2 - c^4}{cc}$ quotus verus $= ac^2 \left(1 + \frac{a^2 - a^2c^2 - c^4}{a^2} + \right.$ $\left. + \frac{(a^2 - a^2c^2 - c^4)^2}{a^4} + \text{etc}\right)$.

Omnia autem eo recidunt, ut proveniat quotus verus $=$ $= \frac{A}{p}$ seu $= \frac{xz}{p}$ ut ante respondi, series enim, quae hoc aliisque modis loco $\frac{A}{p}$ dantur, sunt summabiles summamque habent $\frac{xz}{p}$; nondum ergo recte capio, quid Vir Cl[arissimus] problemate intendat.

V

In formula mea generali pro Sn^m data ego potissimum desidero, quod difficulter in casibus specialibus formula evolvatur atque huc quoque recidere videtur Viri Cl[arissimo] desideratum. Hanc ob rem aliam viam sum ingressus, et generalissime ex termino generali seriei dato investigavi terminum summatorium. Sit seriei cujuscunque terminus generalis T seu is, cujus exponens seu index est x; terminus summatorius vero seu summa omnium terminorum a primo usque ad T inclusive sit S. Quia T per x et quantitates constantes dari ponitur, considero x ut variabilem quantitatem ponoque dx constans. His positis dico fore $S = \alpha \int T dx + \beta T + \frac{\gamma \delta T}{dx} + \frac{\delta ddT}{dx^2} + \frac{\varepsilon d^3T}{dx^3} +$ $+$ etc., ubi α, β, γ, δ etc valores habent ut sequitur:

$\alpha = 1$,

$\beta = \frac{\alpha}{2}$,

$$\gamma=\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2\cdot3},$$

$$\delta=\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{2\cdot3}+\frac{\alpha}{2\cdot3\cdot4},$$

$$\varepsilon=\frac{\delta}{2}-\frac{\gamma}{2\cdot3}+\frac{\beta}{2\cdot3\cdot4}-\frac{\alpha}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$$ etc. Ex qua conditione series coefficientium α, β, γ, δ etc quousque libuerit, continuari potest; invenitur autem ut sequitur:

$$\alpha=+1;\ \beta=+\frac{1}{1\cdot2};\ \gamma=+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot2};\ \delta=0;$$

$$\varepsilon=-\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6};$$

$$\zeta=0;\ \eta=+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot6};\ \theta=0;$$

$$\iota=-\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10};\ \varkappa=0;$$

$$\lambda=+\frac{5}{1\cdot2\ldots11\cdot6};\ \mu=0;\ \nu=\frac{691}{1\cdot2\cdot3\ldots1\cdot3\cdot2\cdot10};$$

$$\xi=0;\ \eta=+\frac{35}{1\cdot2\ldots15\cdot2};\ \rho=0;$$

$$\sigma=-\frac{3617}{1\cdot2\cdot3\ldots17\cdot30};$$

$$\tau=0 \text{ etc.}$$

Hac igitur seriei factu erit

$$S=\int Tdx+\frac{T}{1\cdot2}+\frac{dT}{1\cdot2\cdot3\cdot2dx}-\frac{d^3T}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6dx^3}+$$
$$+\frac{d^5T}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot6dx^5}-\frac{3d^7T}{1\cdot2\ldots9\cdot10dx^7}+$$
$$+\frac{5d^9T}{1\cdot2\ldots11\cdot6dx^9}-\frac{691d^{11}T}{1\cdot2\ldots13\cdot2\cdot10dx^{11}} \text{ etc.}$$

Ex qua formula dato quocunque termino generali summa expedite exhiberi potest; in quo efficiendo termini, in quibus non inest x, omittuntur, quia summa evanescere debet, posito $x=0$; hoc scilicet fit propter constantem in integratione ipsius Tdx vel addendam vel subtrahendam.

Ut sit terminus generalis x^3-x^2+x, seu series summanda haec: $1+6+21+52+$ etc erit $T=x^3-x^2+$

$+x$ et $\int T dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ atque $\frac{dT}{dx} = 3x^2 - 2x + 1$, ubi 1 ob rationem datam negligitur. Porro est $\frac{ddT}{dx^2} = 6x - 2$, ubi -2 omittitur, atque $\frac{d^3T}{dx^3} = 6$, ubi hoc 6 etiam rejicitur, quia singuli termini in x debent esse ducti; altiorum graduum differentialia omnia evanescunt. Erit ergo

$$\int = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{1 \cdot 2} - \frac{2x}{12} =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x,$$

qui est terminus summatorius seriei propositae. Sit nunc summanda series $1 + 2^{10} + 3^{10} + 4^{10} +$ etc, cujus terminus generalis T est $= x^{10}$; ideoque

$$\int T dx = \frac{1}{11}x^{11}, \text{ atque } \frac{dT}{dx} = 10x^9; \ \frac{ddT}{dx^2} = 10.9x^8;$$

$$\frac{d^3T}{dx^3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot x^7 \text{ etc.}$$

Ex his invenitur hujus progressionis terminus summatorius seu $Sx^{10} = \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{2} + \frac{5x^9}{6} - x^7 + x^5 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x}{6c}$, atque generaliter seriei $1 + 2^n + 3^n + x^n$ summa seu Sx^n reperitur $= \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \frac{nx^{n-1}}{2.6} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots 30} +$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 42} - \frac{n(n-1)\ldots(n-6)x^{n-7}}{2 \cdot 3 \ldots 8 \cdot 30} +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-8)5x^{n-9}}{2 \cdot 3 \ldots 10 \cdot 66} - \frac{n(n-1)\ldots(n-10)691x^{n-11}}{2 \cdot 3 \ldots 12 \cdot 2730} +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-11)7x^{n-13}}{23 \ldots 14 \cdot 6} - \frac{n(n-1)\ldots(n-14)3617x^{n-15}}{2 \cdot 3 \ldots 16 \cdot 510} + \text{etc.}$$

Qua expressione dubito an simplicior et facilior exhiberi possit, et suspicor Viri Cl[arissimi] formulam cum hac mea congruere. Hic enim excipi non potest progressionis coëfficientium $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $-\frac{1}{30}$, $+\frac{5}{66}$ etc legem non constare, oriuntur enim hae fractiones ex serie α, β, γ, δ, ε, cujus progressionis lex est exposita. Haec praeterea formula mea generalis latissime patet, ex ea enim facili negotio inveni seriei $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{etc.}$ summam 1 000 000 terminorum esse $=14{,}3927267228657236$, seriei autem in infinitum continuatae summa ut constat est infinita; seriei reciprocae quadratorum $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+$ $+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc in infinitum continuatae summam ejusdem formulae ope inveni $=1.6449340568482264$ et seriei reciprocae cuborum $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+$ etc. infinitum continuatae summa est 1.197531985674193; quae approximationes alias difficulter obtinentur.

Denique, quia Vir Cl[arissimus] circa meas reliquorum problematum solutiones nihil monuit, existimo ipsum iis esse contentum.

Печатается по копии, написанной писарской рукой и заверенной Л. Эйлером (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 19, лл. 129—138 об.) и идентичной другой незаверенной копии (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 19, лл. 119—128).

Пометы, сделанные рукой Л. Эйлера: «Письмо Л. Эйлера, посланное славнейшему Кюну, данцигскому профессору математики». «Соответствует оригиналу. Л. Эйлер».

Отрывок из письма от слов «Теорема, предложенная. . .» до «что и требовалось доказать» опубликован в «Comment.», т. VIII, стр. 141.

[1] Хотя на письме имеется помета Эйлера «Письмо. . . славнейшему Кюну. . .», следует считать, что письмо было адресовано К.-Л.-Г. Элеру по двум причинам: в письме постоянно говорится о Г. Кюне в третьем лице и, кроме того, по математическим вопросам в 1735—1742 гг. Л. Эйлер вел переписку с Г. Кюном через К.-Л.-Г. Элера и по инициативе последнего.

[2] Датируется по протокольной записи, где говорится, что 6 июня 1735 г. Эйлер представил в Конференции письмо Кюну, в котором содержались некоторые рассуждения Эйлера и ответ Кюна (Протоколы, т. 1, стр. 205). Представляется весьма возможным, что комментируемое письмо Эйлера написано вскоре после получения Эйлером последнего письма Кюна.

[3] Речь идет о шести задачах, предложенных Л. Эйлером Г. Кюну (ААН СССР, р. I, оп. 8, № 19, лл. 1—2 об.)

[4] ААН СССР, р. I, оп. 8, №№ 20—21.

[5] Более подробно об этой задаче сказано в письме Эйлера Ноде (см. стр. 189—190 настоящего издания).

[6] Речь идет о малой теореме Ферма́: если p — простое число и a — любое целое, то $a^{p-1}-1$ делится на p, если a не делится на p. Эйлер в настоящем письме приводит доказательство этой теоремы для случая $a=2$, отмечая затем, что теорема верна при любом a. Эйлеру принадлежит дальнейшее обобщение теоремы Ферма́: пусть n — любое целое, взаимно простое с a, и пусть

$\varphi(n)$ обозначает число всех чисел, взаимно простых с n и меньших n, тогда $a^{\varphi(n)}-1$ делится на n. В этом письме Эйлер указывает несколько другое обобщение теоремы Ферма́, а именно $a^{n^{(m-1)}(n-1)}-1$ делится на n^m, если n — простое, не являющееся делителем a, m — любое целое. В действительности этот результат есть следствие предыдущего обобщения, так как $\varphi(n^m)=n^{m-1}\times$ $\times(n-1)$ в случае простого n.

[7] Совершенные числа — такие целые числа, у которых сумма всех делителей, меньших самого числа, равна самому числу. Эвклидом доказана теорема: всякое число вида $2^{m-1}(2^m-1)$, если 2^m-1 — простое (а значит и m простое), будет совершенным. Эйлер доказал, что всякое четное совершенное число выражается этой формулой. Отмечая ошибку Вольфа, Эйлер сам допустил ошибку, указав, что при $m=41$, 47 число 2^m-1 будет простым. Однако в письме к Винсгейму (1748) Эйлер эту ошибку исправил, указав делитель для $2^{47}-1$; вопрос о том, будет ли простым число $2^{41}-1$, остался тогда нерешенным. Позже был найден делитель и этого числа.

[8] Здесь говорится о книге Вольфа: Elementa matheseos universae (Основы всеобщего знания) — издание новое, расширенное и улучшенное, Halae Magdeburgicae, 1730.

[9] Это обобщение легко выводится из малой теоремы Ферма̀.

[10] Дальнейшие рассуждения Эйлера в этом, а также в следующих письмах имеют целью выяснить понятия отрицательных и мнимых чисел и обосновать алгебраические действия с ними. Эти рассуждения с современной точки зрения не являются строгими. В современной математике целые отрицательные числа вводятся аксиоматически как пары натуральных чисел с определенными свойствами (пары первой ступени), дробные — как пары целых (пары второй ступени), комплексные числа — как пары вещественных (пары третьей ступени). Однако точка зрения, высказанная здесь Эйлером, может представить методический интерес для преподавателей математики при введении понятий отрицательных и мнимых чисел в средней школе.

[11] Это положение подробно развивается в последующей дискуссии Л. Эйлера и Кюна, суть которой сводилась к различию во взглядах обоих ученых на природу воображаемых, или мнимых, величин. Г. Кюн был единственным из математиков XVIII в., признававшим реальность понятия воображаемых величин. Концепция Кюна подробно разбирается в книге: В. Н. Молодший. Основы учения о числе в XVIII веке. М., 1953, стр. 153—160, — где изложено также содержание писем Кюна Эйлеру (1744—1753 гг.), посвященных обсуждению той же самой проблемы.

[12] Под истинным частным Эйлер, видимо, понимает выражение $\frac{A}{p}$, где $p=x+\delta$ — истинный делитель; x — ложный делитель; при $\delta=0$ получаем ложное частное. Тогда $\frac{A}{x+\delta}=\frac{A}{x}\times$ $\times\left(1-\frac{\delta}{x}+\frac{\delta}{x^2}\cdots\right)$, если $\left|\frac{\delta}{x}\right|<1$.

Эйлер приводит эту формулу как частный случай формулы Тейлора без остаточного члена: $F(p) = F(x) + F_x(x)\,\delta + \frac{1}{2!}F_{xx}(x)\,\delta^2 + \ldots$ и рассматривает примеры, выбирая различным образом x и δ.

[13] Здесь Эйлер приводит формулу, связывающую сумму и члены какого-либо ряда с интегралом (формула Эйлера—Маклорена). Более подробно об этой формуле и ее различных вариантах см.: Переписка Л. Эйлера и Дж. Стирлинга. Историко-математические исследования, вып. X, 1957, стр. 153.

2

[11 (22) августа 1735 г.[1] Петербург]

Преславному и знаменитому мужу
Карлу Готлибу Элеру
шлет нижайший привет
Леонард Эйлер.

Размышляя об оказанном мне Тобою величайшем благоволении, воспоминание о котором никогда не покидает меня, я нахожусь в сомнении, должен ли я более горевать о Твоем отъезде или радоваться Твоему счастливому возвращению к Твоей семье.[2] Сделаю, впрочем, и то, и другое. Будучи охвачен сильным желанием быть с Тобой вместе, я в то же время от души поздравляю Тебя с желанным прибытием на родину. Между тем я всегда со всевозможным старанием буду стремиться заслужить постоянную любовь и благосклонность, которыми Ты одариваешь меня даже на расстоянии. Славнейший Гольдбах и другие друзья, которым я засвидетельствовал как сильное Твое желание попрощаться с ними, так и величайшие препятствия [этому], шлют Тебе через меня нижайший привет, а я в свою очередь прошу приветствовать от моего имени преславного доктора Кюна и достойнейшего Твоего сына.[3]

Что касается спора о природе отрицательных и мнимых величин, то я изложу мой ответ возможно короче и попрошу ознакомить с ним славнейшего доктора Кюна. Прежде всего мне надлежит выяснить, какое я имею представление об отрицательных величинах и как я их определяю, чтобы вся дискуссия не оказалась бы случайно перешедшей в спор о словах. Для меня же отрицательное число есть не что иное, как [число], которое, как следует полагать, получается в остатке, если большее число вычитается из меньшего; я не обсуждаю здесь вопрос о том, является ли этот остаток реальным числом или сущностью чисто мнимой, хотя и надеюсь, что в дальнейшем смогу доказать, что отрицательные числа не всегда нужно считать мнимыми; здесь мне достаточно отметить, что одно и то же число, имеющее перед собой знак минус, есть остаток большего числа, отнятого от меньшего; а [это же число], взятое просто, будет остаток меньшего, отнятого от большего; так, я считаю, что —3 есть остаток, полученный при вычитании пяти от двух, в то время как 3 [есть число], взятое просто или со знаком +, который может рассматриваться как примененный ради различия или противоположения в отношении знака —.

Что касается меня, то я обычно прежде всего требую от изучающего анализ только знания целых положительных чисел или таких, которые получаются от сложения нескольких единиц, и учу, каким образом надлежит производить взаимное прибавление их; затем я излагаю правила вычитания, которые сначала представляются применимыми только для вычитания меньших чисел из больших, так как я полагаю, что ученик не знает никаких других чисел, кроме целых положительных. Итак, ученик видит, что, когда нужно отнять большее число от меньшего, в остатке не может получиться такое число, которое ему известно, но что остаток следует отнести к иному роду сущностей; таким образом, как я уже указал, он получает по крайней мере некоторое представление об отрицательных числах. Это происходит совершенно тем же способом, каким впоследствии, когда дело доходит до деления, он приходит к познанию дробных чисел. Ибо сначала также представляется, что [область] деления не простирается далее тех случаев, когда число, которое нужно разделить, есть кратное делителя; между тем, он легко узнает из других случаев, что частное есть [число], величину которого он начинает постигать, даже если он знает только целые числа: ибо достаточно уже знания дробей, которые являются частными чисел, разделенных на какие-либо части. Таким же образом отрицательные числа есть остатки, получившиеся при вычитании бо́льших чисел от меньших. Следовательно, при вычитании и делении ученик присоединяет к своему первоначальному понятию о целых положительных числах, которое он [прежде] считал единственным, [понятие] о числах отрицательных и дробных. Это познание чисел он все больше увеличивает при изучении следующих действий анализа, ибо при извлечении корней он достигает знания иррациональных чисел и отсюда затем получает представление о сверхиррациональных или интерсцендентных числах такого рода как $3^{\sqrt{2}}$. Наконец, когда он обращается к интегральному исчислению, то из выражений, не допускающих интеграции, он приобретает понятие о трансцендентных, или экспоненциальных, величинах, благодаря чему он получает самое широкое представление о величинах.[4] Эти столь различные виды величин обладают таким свойством, что часто не все они могут быть применены в задачах, когда идет речь о какой-нибудь величине, поэтому в отношении задач то один, то другой вид будет как бы мнимым. Так, если спрашивается о числе солдат войска, на этот вопрос можно ответить только с помощью целых положительных чисел; числа же дробные и иррациональные в этого рода задачах будут такими же, как мнимые и отрицательные. Таким же образом, если предлагается вопрос о цене какой-либо вещи, за которую следует уплатить деньгами, ответ может быть выражен в числах целых и дробных, но отнюдь не в иррациональных и трансцендентных. Далее, то, что кто-нибудь должен в отношении владения имуществом, правильно выражается отрицательными числами.

Наконец, все эти перечисленные виды величин могут быть представлен линиями, или прямыми, или кривыми, величины же действительно мнимые для меня суть такие, которые не могут быть переданы посредством линий и вследствие этого являются чистым порождением разума; они не являются бо́льшими или меньшими [по сравнению с какой-либо величиной]; но о них я выражу свое мнение позже. Итак, когда начинающий в области анализа, все первоначальное познание которого состоит в [представлении о] целых положительных числах, переходит к изучению остальных видов чисел, он стремится те же самые действия, которые прежде применял в отношении только целых чисел, приспособить также для чисел отрицательных, дробных, иррациональных, интерсцендентных и трансцендентных; при этом по аналогии пользуется теми же правилами, которые прежде применял для целых чисел. Что касается действий с числами дробными и иррациональными, такой метод не сопряжен ни с какими трудностями; следовательно, я коснусь только сомнений, высказанных преславным доктором Кюном относительно отрицательных величин,[5] и, высказав свое мнение, перейду к мнимым [величинам]. Прежде всего, надлежит внимательно рассмотреть данное определение отрицательных чисел, чтобы предмет, о котором идет речь, был рассмотрен правильно и в соответствии с особенностями отрицательных чисел и чтобы как положительные, так и отрицательные числа рассматривались согласованно. Ибо если славнейший доктор Кюн сказал в примечании, что может получиться так, что $+2+(-2)$ не будет равно 0, то на это я отвечаю так: предметы, которые он обозначает таким способом, неправильно выражены этими числами, и нельзя рассматривать $+2$ и -2 как величины одного и того же порядка; так, могут даже быть случаи, когда $(+2)+(+2)$ не будет 4, если одно $+2$ обозначает фунты, а другое $+2$ — унции или другие разнородные понятия.

Итак, когда требуется произвести вычислительные операции над различными предметами, выраженными с помощью положительных чисел, эти предметы должны быть обозначены таким образом, чтобы они соответствовали величинам одного и того же порядка; точно так же следует поступать, когда кто-либо, вызывая уважение остальных, исследует отрицательные числа. Так, по моему мнению, в денежных вопросах и при оценке имущества долги правильно обозначаются отрицательными величинами, если кредиты выражаются положительными числами, и как долги, так и кредиты допускают общие операции. Ибо если, например, невеста обладает 100 флоринами, а жених, который намерен на ней жениться, не только ничего не имеет, но задолжал 100 флоринов, то после того как они соединят свои состояния в одно, следует полагать со всей определенностью, что они не имеют никакого имущества. В том случае, если приданое невесты принять за 100, или $+100$, состояние (не скажу «имущество», чтобы не придавать словам чуждое им значение) жениха нужно будет обозначить как -100; таким образом, нет никакого сомнения, что $+100+(-100)$, или $+100$ и -100, соединенные в одну сумму, ничего не дают.

Хотя этот пример и является вульгарным, однако мне представляется, что он может быть применен для доказательства моей мысли. Итак, если обозначать отрицательными числами те понятия, какие нужно, то сложение и вычитание, произведенные обычным способом, не встречают никаких трудностей; следовательно, остается испытать умножение и другие действия, причем, очевидно, обнаружатся многие удивительные вещи. Я остановлюсь только на абсолютных числах, так как после обозначения числами определенных предметов должным, если можно так выразиться, образом действие производится только с целыми числами. Итак, я беру какое-нибудь число, как 6, или +6, которое, будучи умножено на 5, или +5, даст 30, или +30 (для этого я беру только знак +, так как к другому знаку — я намерен обратиться позднее); таким образом, + 30 состоит [из множителей] +6 и +5; если теперь от 30 отнять множитель 6, останется +24, состоящее из +6 и +4, и сколько раз отнимать 6, столько раз будет уменьшаться на единицу другой множитель; следовательно, я произвожу это действие таким образом;

$$
\begin{array}{rcl}
+30 & = \text{произведению} & +6 \text{ и } +5 \\
\underline{\text{Отн. } +\ 6} & & \underline{\text{Отн. } \quad +1} \\
+24 & = \text{произведению} & +6 \text{ и } +4 \\
\underline{\text{Отн. } +\ 6} & & \underline{\text{Отн. } \quad +1} \\
+18 & = \text{произведению} & +6 \text{ и } +3 \\
\underline{\text{Отн. } +\ 6} & & \underline{\text{Отн. } \quad +1} \\
+12 & = \text{произведению} & +6 \text{ и } +2 \\
\underline{\text{Отн. } +\ 6} & & \underline{\text{Отн. } \quad +1} \\
+\ 6 & = \text{произведению} & +6 \text{ и } +1 \\
\underline{\text{Отн. } +\ 6} & & \underline{\text{Отн. } \quad +1} \\
0 & = \text{произведению} & +6 \text{ и } 0 \\
\underline{\text{Отн. } +\ 6} & & \underline{\text{Отн. } \quad +1} \\
-\ 6 & = \text{произведению} & +6 \text{ и } -1 \\
\underline{\text{Отн. } +\ 6} & & \underline{\text{Отн. } \quad +1} \\
-12 & = \text{произведению} & +6 \text{ и } -2
\end{array}
$$

и т. д.

Я уверен, что в этой операции нечего добавить, ибо из нее вытекает, что из +6 и —2 получается —12, а если взять общее выражение, то из +6 и $-a$ получается $-6a$. Поэтому также справедливо, что при умножении $+a$ на $-b$ получается произведение $-ab$. Следовательно, таким же образом будет $-ab$, деленное на $+a$, равно $-b$, и $-ab$, деленное на $-b$, равно $+a$, откуда со всей ясностью обнаруживается правильность принятых правил.

Итак, остается только доказать, что произведение при умножении $-a$ и $-b$ будет равно $+ab$, что я делаю таким же образом. Возьмем, например, число -6, которое, будучи умножено на $+2$, даст произведение -12, как видно из предыдущего действия. Если теперь от произведения -12 отнять множитель -6, получится остаток -6, произведение из -6 и $+1$, причем последний множитель на единицу меньше, чем первый $+2$. Итак, я произвожу здесь действие, подобное первому.

$$\begin{array}{rcl}
-12 = & \text{произведению} & -6 \text{ и } +2 \\
\text{Отн. } -6 & & \text{Отн. } \quad +1 \\ \cline{1-1}\cline{3-3}
-6 = & \text{произведению} & -6 \text{ и } +1 \\
\text{Отн. } -6 & & \text{Отн. } \quad +1 \\ \cline{1-1}\cline{3-3}
0 = & \text{произведению} & -6 \text{ и } 0 \\
\text{Отн. } -6 & & \text{Отн. } \quad +1 \\ \cline{1-1}\cline{3-3}
+6 = & \text{произведению} & -6 \text{ и } -1 \\
\text{Отн. } -6 & & \text{Отн. } \quad +1 \\ \cline{1-1}\cline{3-3}
+12 = & \text{произведению} & -6 \text{ и } -2 \\
 & \text{и т. д.} &
\end{array}$$

Мы убеждаемся, что, действительно, произведение -6 и -2 будет $+12$, и далее, произведение -6 и $-a$ будет $+6a$. Следовательно, произведение $-a$ на $-b$ равно $+ab$, и $+ab$, деленное на $-a$, дает в соответствии с этим $-b$.

Итак, я не вижу, что́ можно было бы привести в качестве возражения против правил, принятых относительно отрицательных чисел, если высказанное мною прежде положение подходит также для отрицательных чисел, а те противоречия, которые, по-видимому, отсюда вытекают, следует признать только парадоксами, так как представляется недопустимым, чтобы противоречие имело место наряду с правильными положениями. Следовательно, по моему мнению, нельзя возражать против пропорции: $+1 : -1 = -1 : +1$. Единственное возражение, которое могло бы быть сделано, состоит в том, что в этой пропорции нельзя употреблять термины и выражения, которыми мы привыкли пользоваться в пропорции положительных чисел. Не термины, однако, составляют пропорцию, а математическое понятие, которое развивается все шире. Ибо хотя мы и не можем утверждать, что $+1$ больше чем -1 во столько раз, во сколько -1 [меньше] чем $+1$, однако реальное понятие, выраженное этими словами, имеет место в этой пропорции, ибо $\frac{+1}{-1}=-1$, и точно так же $\frac{-1}{+1}=-1$, что является настоящим критерием пропорций. Неправильным поэтому является утверждение славнейшего Вольфа, будто отрицательные и положительные [числа] разнородны и что между ними нельзя производить действия;[6] я не понимаю, каким образом можно назвать разнородными такие [количества], из которых одно, будучи увеличено на данное количество, может стать равным другому.

Из сказанного можно также понять, что $-a$, умноженное на $-a$, дает такое же произведение, какое дает $+a$, умноженное на $+a$; вся трудность здесь состоит в выражении «квадрат», которое можно употреблять только в отношении положительных чисел, сам же этот термин имеет более широкое понимание, и в действительности $+a^2$ заключает квадратный корень как $-a$, так $+a$, даже в том случае, если само выражение относится только к $+a$.

Если перейти теперь к действительно мнимым [величинам], окажется очевидным, что квадратный корень отрицательной величины не может быть ни положительной величиной, ни нулем, ни отрицательной [величиной], следовательно, такого рода квадратный корень есть сущность, относящаяся к области чистого воображения; эта сущность не может ни быть представленной, ни быть существующей, так как она не больше нуля, не равна нулю и не меньше нуля. Что же касается способа обозначения, предложенного преславным Кюном, то я уже ответил на это и, кроме этого, могу здесь повторить о его мнимом возведении в куб $-1+\sqrt{-3}$, что в одном случае он вместо $-1 \cdot -3$ ставит -3, а в другом $+3$; эти случаи Тебе, славнейший муж, теперь уже известны. Итак, этими доказательствами, которыми я, думается, подкрепил принятый способ рассмотрения отрицательных величин, я считаю, что мне удалось разрешить бо́льшую часть сомнений, высказанных преславным Кюном, поэтому я намерен перейти к тому, что осталось сказать о корнях уравнения. Прежде всего мне представляется достаточно обоснованным мнение всех тех, которые установили, что всякое уравнение имеет число корней, равное его степени; вопреки такому мнению, славнейший Кюн допускает это только для уравнений, происшедших от произведения множителей; я же в этом вопросе совершенно согласен с мнением других [ученых].

Действительно, всякое уравнение имеет число множителей, равное его степени; эти множители, равным образом и корни, могут быть получены по известным правилам, если только уравнение не выше 4-й степени. Даже если уравнение составлено с помощью сложения, пример чего приводит преславный Кюн, оно и тогда имеет столько множителей, сколько измерений, и столько же корней, так что я удивился тому, что он полагает, будто у уравнения $x^3=8$ или $x^3-8=0$ все три корня равны 2, когда я получил там же различные [корни]. Чтобы отвергнуть всякие сомнения в моем утверждении, я рассмотрю уравнение $x^3=ax^2+bx+c$, или $x^3-ax^2-bx-c=0$. Корнем этого уравнения будет называться все то, что, будучи подставлено вместо x, повлечет за собой $x^3=ax^2+bx+c$ или $x^3-ax^2-bx-c=0$; и какое бы количество ни было подставлено вместо x, оно должно считаться корнем уравнения; таково мое определение корней, совпадающее с определениями всех других [ученых].

Теперь я утверждаю, что выражение x^3-ax^3-bx-c состоит из трех простых выражений, например $x-p$, $x-q$ и $x-r$, и эти количества p, q, r находятся в такой зависимости от a, b и c, что $p+q+r=apq+pr+qr=-b$ и $pqr=c$. Итак, найдя отсюда количества p, q и r, я утверждаю, что если каждое из них подставить вместо x, получится $x^3=ax^2+bx+c$, что не нуждается в доказательстве. Отсюда уравнение будет иметь, таким образом, три корня: p, q и r. Вот каким способом я исследую природу уравнений; по сути дела этот способ не отличается от методов других [ученых], кроме разве того, что многие из них менее удобно находят число корней, так что легко могут встретиться с величайшими трудностями; такого рода трудности, думается мне, и есть те, которые представил преславный Кюн. Итак, когда мы найдем один корень верхнего уравнения, например p, нетрудно будет найти остальные [корни] q и r, ибо когда $x^3-ax^2-bx-c=(x-p)(x-q)(x-r)$, то есть разделить x^3-ax^2-bx-c на $x-p$, то частное равно $(x-q)(x-r)$, и если частное приравнять 0, то такое уравнение будет иметь корни q и r;

такой ответ получается при решении квадратного уравнения. Примером может служить уравнение $x^3=8$; для того чтобы найти три корня этого уравнения, нужно определить три множителя выражения x^3-8. Теперь, поскольку 2 есть один корень уравнения, представляется очевидным, что один его множитель будет $x-2$; если разделить на него x^3-8, получится x^2+2x+4, что является результатом умножения двух остальных множителей, $x-q$ и $x-r$; следовательно, q и r будут корни уравнения $x^2+2x+4=0$; чтобы определить это, отнимаем от обеих частей 3, после чего получится $x^2+2x+1=-3$; извлекая из обеих частей уравнения квадратный корень, получим или $x+1=\sqrt{-3}$, или $-x-1=\sqrt{-3}$; откуда следует, что или $x=-1+\sqrt{-3}$, или $x=-1\sqrt{-3}$. Следовательно, три корня предложенного уравнения $x^3=8$ или $x^3-8=0$ будут 2, $-1+\sqrt{-3}$ и $-1-\sqrt{-3}$; любой из них, будучи подставлен вместо x, даст $x^3=8$, и три множителя x^3-8 будут $x-2$, $x+1-\sqrt{-3}$ и $x+1+\sqrt{-3}$; при их перемножении получается x^3-8, как видно из следующего действия:

$$
\begin{array}{rl}
x+1-\sqrt{-3} & \text{первый множитель,} \\
x-2 & \text{второй множитель} \\
x^2+x-x\sqrt{-3} & \\
-2x-2+2\sqrt{-3} & \\
\hline
x^2-x-x\sqrt{-3}\cdot 2+2\sqrt{-3} & \text{их произведение,} \\
x+1+\sqrt{-3} & \text{третий множитель,} \\
x^3-x^2-x^2\sqrt{-3}-2x+2x\sqrt{-3}, & \\
+x^2-x-x\sqrt{-3}-2+2\sqrt{-3}, & \\
+x^2-\sqrt{-3}-x\sqrt{-3}+3x-2\sqrt{-3}-6, & \\
\hline
\end{array}
$$

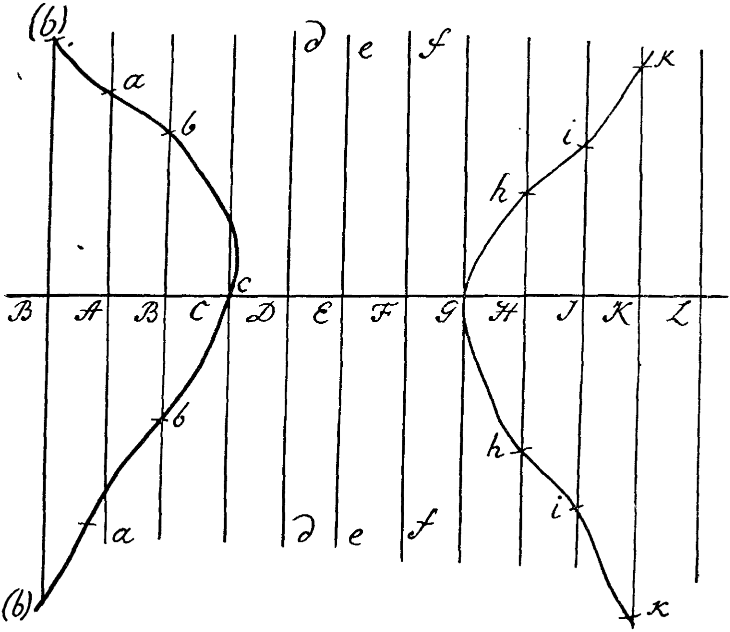
x^3-8 произведение, полученное от перемножения трех множителей.

Теперь, когда мы уже выяснили, что в результате перемножения трех данных множителей с необходимостью должно получиться x^3-8, на основании этого достаточно подтверждается обычный алгорифм. Но когда преславный Кюн, основываясь на этом, хочет доказать, что $2=-1+\sqrt{-3}$, поскольку $2^3=(-1+\sqrt{-3})^3$, то это заключение вообще не имеет смысла; я докажу это, но сначала я хочу придать тому же самому доказательству более удобную форму.

Пусть x будет кубический корень из 8; тогда $x^3=8$; теперь я утверждаю, что $x=2$; затем также утверждаю, что $x=-1+\sqrt{-3}$; соединив эти уравнения, славнейший Кюн вывел $2=-1+\sqrt{-3}$, так как и то и другое равняется x или кубическому корню из 8, каковое заключение во всяком случае было бы совершенно абсурдным. Я представляю подобное же доказательство: пусть x будет число, квадрат которого равен этому числу, умноженному на 5 минус 6. Я утверждаю, что $x=2$; я утверждаю также, что $x=3$; поэтому, если и 2, и 3 равны x, должно получиться, что $2=3$, а так как это невозможно, то следует, что предположения на самом деле неверны, следовательно, рассуждение построено неправильно. Если бы я даже поддерживал это рассуждение, в чем меня обвинил славнейший Кюн, я воспользовался бы им также против вышеупомянутого заключения; ибо в обоих случаях рассуждение одно и то же; и в том и в другом случае молча принимается неправильное допущение, что в уравнениях существует только один корень. Ибо таким же образом, как из равенства $2^3=(-1+\sqrt{-3})^3$ можно заключить, что $2=-1+\sqrt{-3}$, так и из равенства $2^2-5\cdot 2+6=3^2-5\cdot 3+6$ можно сделать вывод, что $2=3$. Во всяком случае, заключения такого рода имеют значение для уравнений, но не для равенств, это различие следует иметь в виду. Ибо если $x^2-5x+6=a^2-5a+6$, я легко мог бы вывести, что $x=a$; таким же образом из уравнения $x^3=a^3$ выводится, что $x=a$; но поскольку в этом уравнении a не единственное значение x, то таким образом открывается путь к решению этого уравнения. Трудности, отмеченные славнейшим Кюном в отношении возможности применения цифр в уравнениях, здесь не должны приниматься во внимание; они имеют место лишь в том случае, если члены из обеих частей соединяются знаком равенства. Приведение уравнения к цифровому выражению не заложено в сущности уравнений, но делается ради удобства, чтобы каждый мог пользоваться тем или другим способом для решения уравнений. Впрочем, мне думается, что эта моя теория о природе уравнений удовлетворила его, ибо пока я исследовал множители формулы x^3-ax^2-bx-c, не было необходимости выражать ее цифрами. Вообще сюда совершенно не относится то, что в других случаях подходит для неравенства цифр, как, например, если ищут значение дроби

$$\frac{a - \sqrt{(3ax - 2x^2)}}{x - a}$$

в случае, когда $x = a$; ибо получается $a = \frac{0}{0}$, однако, как видно из существующих правил, оно равно $\frac{1}{2}$. Далее, в моем доказательстве, основанном на свойствах круга, где я показал различие между отрицательными и воображаемыми величинами, славнейший Кюн против ожидания обвинил меня в том, что я принял абсциссу больше радиуса, в то время как абсцисса всегда является частью радиуса. Я не знаю, кто дал такое определение абсциссы, так как обычно все определяют абсциссу таким образом, что она является частью оси, а ось есть бесконечная прямая линия; следовательно, ничто не препятствует тому, чтобы брать абсциссу какой угодно величины. Из данного же уравнения вид кривой, принятый мною за неизвестный, определяется таким образом, что я выбираю другое уравнение, с помощью которого может быть определена аппликата, соответствующая любой абсциссе. Отсюда следует, что выражение аппликаты, соответствующей какой-нибудь абсциссе, является мнимым, т. е. кривая в этой области вообще не существует, что имеет место в круге, если берутся абсциссы больше радиуса; в соответствии с этим можно сделать вывод, что круг — фигура ограниченная и что нельзя продолжать его за пределы данных границ. Итак, я хотел бы, чтобы славнейший Кюн более внимательно рассмотрел это рассуждение. Между тем я присоединяю к нему следующие, с помощью которых я намерен определить вид кривой из уравнения $y^2 = 3a^2 - 4at + tt$, обозначив абсциссы t, а аппликаты y. Для этого я беру данную линию при $b = \frac{1}{2}a$, тогда $y^2 = 12b^2 - 8bt + tt$, и принимаю, во-первых, $t = 0$. Тогда $y^2 = 12b^2$ и $y = \pm 2b\sqrt{3}$. Затем пусть будет $t = b$, $y^2 = 5b^2$ или $y = \pm b\sqrt{5}$. В-третьих, я принимаю $t = 2b$; тогда $y^2 = 0$ и $y = 0$. В-четвертых, я принимаю $t = 3b$; тогда $y^2 = -3b^2$; поэтому значение y — мнимое; и оно будет мнимым до тех пор, пока t заключено между пределами $2b$ и $6b$; если $t=6b$, то $y=0$; если $t=7b$, то $y=\pm b\sqrt{5}$ и так далее. Для того чтобы лучше исследовать вид кривой, можно продолжить ее также назад, приняв $t=-b$; в этом случае $y^2=21b^2$ или $y=\pm b\sqrt{21}$. Если принять $t=-2b$, то $y^2=32b^2$ или $y=\pm 4b\sqrt{2}$; итак, отсюда может быть найдена бо́льшая часть точек, через которые будет проходить кривая.



Из них получается следующая фигура. Пусть AL будет ось, A — начало абсцисс, и ее части AB, BC и т. д. равны b. Из точек A, B, C, D и т. д. проводятся к оси нормали aa, bb и т. д., в которых могут быть найдены точки c, b и более верхние, через которые проходит кривая; очевидно, если $t=0$, то $Aa=2b\sqrt{3}$ и в результате получится точка a, которая должна перемещаться как над осью, так и под осью в соответствии с разными знаками.

Если $t=b=AB$, тогда $Bb=Bb=b\sqrt{5}$; если $t=2b=AC$; тогда $Cc=0$. Через следующие линии dd, ee, ff кривая нигде не проходит, что показывают мнимые выражения. Далее $Gg=0$; $Hh=Hh=b\sqrt{5}$; $Ii=Ii=2b\sqrt{3}$; $Kk=$ $=Kk=b\sqrt{21}$; и если принять $l=-b=A\,(B)$, то $(B)\,(b)=$ $=(B)\,(b)=b\sqrt{21}$. Следовательно, кривая будет иметь вид, подобный тому, который здесь изображен; насколько можно понять из вида уравнения, это будет гипербола. С помощью этого же примера можно прекрасно понять различие между величинами отрицательными и мнимыми, а также удостовериться в истинности остального, в чем сомневался преславный и знаменитый Кюн.

Четвертая часть моей «Механики» уже почти напечатана; [7] я тотчас пришлю эту часть Тебе, славнейший муж, как только относящиеся к ней рисунки будут готовы.

Итак, прощай и по-прежнему будь ко мне всегда благосклонным, славнейший муж,

Твой покорный [слуга]

Л. Эйлер.

Viro Amplissimo et Clarissimo Car[olo] Gottl[ibo] Ehlero S[alutem] p[lurimam] d[icit] Leonhardus Euler.

Cum de summo favore, quo Tu, Vir Amplissime, me es complexus, cogito, cujus quidem memoria mihi semper ob oculos versatur, nescio utrum potius de Tuo discessu dolere, an de felici ad Tuos reditu gaudere debeam. Facio quidem utrumque. Tecum in eodem loco esse summopere desidero, neque minus de exoptato in patriam adventu ex animo gratulor. Interim vero constantem amorem et benevolentiam, quibus me, Vir Amplissime, etiam absens prosequi es pollicitus, omni studio et opera demereri annitar. Clariss[imus] Goldbach reliquique amici, quibus tam firmum propositum Tuum ipsis vale dicendi, quam maxima impedimenta significaveram, per me Tibi officiosissimam salutem dicunt, egoque vicissim etiam atque etiam rogo, ut Clarissimum D[octorem] Kuhnium Filiumque Tuum praestantissimum meo nomine plurimum salutes.

Ad controversiam circa quantitates negativas et imaginarias quantum potero breviter meas responsiones exponam, quas cum Claris[simo] Doct[ore] Kuhnio communicare rogo. Primum mihi quidem explicandum est, qualem ego numerorum negativorum habeam ideam et definitionem, ne forte tota controversia in logomachiam desinere videatur. Mihi vero est numerus negativus nihil aliud nisi id, quod restare censendum est, si numerus major a minore subtrahitur; neque hic disputo utrum id residuum sit quantitas realis, an ens mere imaginarium, quanquam postea ostendere posse confido, numeros negativos non semper pro imaginariis esse habendos; atque hoc loco mihi notasse sufficit, eundem numerum; signum — praefixum habentem esse residuum numeri majoris a minore subtracti, qui simpliciter positus foret residuum minoris a majore subtracti; ita — 3 mihi est residuum ex subtractione quinarii a binario ortum, cum 3, simpliciter positum seu signo + + affectum, quod signum propter distinctionem seu oppositionem ratione signi — adhibitum esse considerari potest.

Ego enim a discipulo analyseos primum nil aliud nisi notionem numerorum integrorum affirmativorum, seu qui ex compositione plurium unitatum oriuntur requirere soleo, et quomodo tales invicem addi oporteat doceo; tum subtractionis regulas trado, quae quidem primo tantum ad minores numeros a majoribus auferendos pertinere videntur, quia praeter affirmativos integros nullos alios numeros discipulum nosse pono. Vidit igitur discipulus, si major numerus a minore subtrahi debet, non talem numerum restare posse, quales congnoscit, sed residuum ad aliud entium genus esse referendum, qua ratione, ut jam ostendi, ad aliqualem saltem numerorum negativorum cognitionem pertingit. Simili omnino hoc fit modo, quo deinceps, quando ad divisionem pergit, ad cognitionem numerorum fractorum pervenit. Primo enim quoque divisio non latius patere videtur, quam ad casus, quibus numerus dividendus est multiplum divisorio; interim vero facile percipit in aliis casibus quotum tamen esse aliquid, cujus quantitatem, etiamsi tantum numeros integros etiam nunc noverit, cognoscere incipiet. Sufficiet vero ista fractionum notio, quod sint quoti numerorum per partes aliquantas divisorum; perinde ac numeri negativi sunt residua numerorum majorum a minoribus subtractorum. Per subtractionem ergo atque divisionem discipulus primam suam cognitionem numerorum integrorum affirmativorum, quam solam habere ponebatur, numeris negativis atque fractis adauget.

Hancque cognitionem numerorum in sequentibus analyseos operationibus magis extendet, in extractione enim radicum ad cognitionem numerorum surdorum perveniet, indeque porro ideam numerorum hypersurdorum seu interscendentium, cujus modi est $3^{\sqrt{2}}$, nanciscitur. Quando denique in calculo integrali versatur, ex formulis integrationem non admittentibus hauriet notionem quantitum transcendentium et exponentialium, quibus rebus fit, ut amplissimam quantitatum cognitionem acquirat. Haec vero tam diversa quantitatum genera ita sunt comparata, ut saepius non onmia ad quaestiones, in quibus de quantitate quapiam quaeritur accommodari queant, sed pro quaestionum ratione nunc haec nunc illa species sit quasi imaginaria. Ita si de numero militum exercitus quaeratur, tantum per numeros integros affirmativos responderi potest; numerique fracti et surdi in hoc quaestionum genere aeque erunt imaginarii ac negativi. Simili modo si quaestio proponatur de pretio alicujus rei in nummis assignando numeris integris atque fractis responderi poterit, non autem surdis vel transcendentibus. Quod porro quis debet ratione bonorum possessorum recte numeris negativis exprimitur.

Denique omnia haec recensita quantitatum genera lineis sive rectis sive curvis exhiberi possunt, quantitates vero revera imaginariae mihi sunt, quae ne lineis quidem repraesentari possunt, quaeque propterea sunt mera entia rationis, neque sunt nihilo majores neque nihil neque nihilo minores; sed de his postea sententiam meam exponam. Cum itaque tyro analyseos, cujus tota prima cognitio in numeris integris affirmativis constiterat, ad notionem reliquorum numerorum generum pervenerit, operam dabit easdem operationes, quas ante in numeris integris tantum exercuerat, ad numeros quoque negativos, fractos, surdos, interscendentes atque transcendentes accommodare, quo in negotio juxta analogiam iisdem utetur regulis, quibus ante pro numeris integris usus fuerat. Quod quidem ad operationes circa numeros fractos et surdos attinet, haec tractatio nullis involuta est difficultatibus; tantum ergo in numeris negativis propter dubia a Cl[arissimo] D[octore] Kuhnio facta versabor, meaque sententia exposita ad imaginarios progrediar. Ante omnia autem juxta datam numerorum negativorum definitionem diligenter dispiciendum est, ut res, de quibus tractatur, recte et ex indole numeris negativis repraesentatur, atque ut tam numeri affirmativi quam negativi eandem unitatem respiciant. Nam si Cl[arissimus] D[octor] Kuhnius in additione aggerit fieri posse ut $+2+(-2)$ non sit $=0$, ego respondeo: res, quas hac ratione designat, non recte his numeris exprimi, neque $+2$ et -2 eandem unitatem respicere; quemadmodum etiam fieri potest ut $(+2)+(+2)$ non faciant 4, si quidem illud $+2$ libras, hac vero $+2$ uncias designet, vel etiam res heterogeneas.

Uti igitur variae res in computum ducendae, quae numeris affirmativis representari possunt, ita debent denotari, ut eandem unitatem respiciant; idem est faciendum, si quae sunt, quae, respectu reliquorum, numeros negativos ad notationem requirunt.

Ita meo quidem judicio in re pecuniaria et aestimatione bonorum, debita recte numeris negativis exprimuntur, si quidem possessa numeris affirmativis designantur, atque tam debita quam possessa in eundem computum ingrediuntur. Nam si verbi gratia sponsa possideat 100 florenos, sponsus vero cui est nuptura, non solum nihil habeat, sed 100 florenos debeat, postquam status suos in unum contulerunt, certe in bonis nihil habere censendi sunt; hocque casu si dos sponsae exponatur per 100 seu $+100$, status (non dicam bona, ne verbis alienam significationem tribuam) sponsi per -100 designari debebit, hacque ratione dubitandum non est, quin $+100+(-100)$ seu $+100$ et -100 in unam summam conjecta nihil efficiant.

Quod exemplum quanquam est vulgare, tamen ad hoc evincendum mihi commode adhiberi videtur. Si igitur eae res, quas decet numeris negativis exprimantur, additio et subtractio consueto more peracta nullis premitur difficultatibus; superest ergo ut et multiplicationem et reliquas operationes consuetas, probem, ex quibus majora paradoxa emergere videntur. Subsistam vero circa numeros absolutos tantum, cum postquam res concretae si ita loqui licet debito modo numeris sunt designatae, operatio ad scopum perducens, numeros tantum absolutos respiciat.

Assumo ergo numerum quemcunque, ut 6 seu $+6$, qui, per 5 seu $+5$ multiplicatus, dat 30 seu $+30$ (ubi ideo tantum signum $+$ abjicio, quia ad alterum signum — rem perducere animus est); est itaque $+30$ factum ex $+6$ et $+5$; si nunc a 30 subtraho factorem 6, remanebit $+24$, factum ex $+6$ et $+4$, et quoties 6 subtrahitur, toties alter factor unitate diminuetur.

Produco ergo hanc operationem ut sequitur:

$$
\begin{array}{lr l lr}
 & +30 & = \text{facto ex} & +6 \text{ et} & +5 \\
\text{Subtr.} & +\ 6 & & \text{subtr.} & +1 \\ \hline
 & +24 & = \text{facto ex} & +6 \text{ et} & +4 \\
\text{Subtr.} & +\ 6 & & \text{subtr.} & +1 \\ \hline
 & +18 & \ \text{facto ex} & +6 \text{ et} & +3 \\
\text{Subtr.} & +\ 6 & & \text{subtr.} & +1 \\ \hline
 & +12 & \ \text{facto ex} & 6 \text{ et} & +2 \\
\text{Subtr.} & +\ 6 & & \text{subtr.} & +1 \\ \hline
 & +\ 6 & \ \text{facto ex} & +6 \text{ et} & +1 \\
\text{Subtr.} & +\ 6 & & \text{subtr.} & +1 \\ \hline
 & 0 & \ \text{facto ex} & +6 \text{ et} & 0 \\
\text{Subtr.} & +\ 6 & & \text{subtr.} & +1 \\ \hline
 & -\ 6 & \ \text{facto ex} & +6 \text{ et} & -1 \\
\text{Subtr.} & +\ 6 & & \text{subtr.} & +1 \\ \hline
 & -12 & \ \text{facto ex} & +6 \text{ et} & -2 \\
 & & \quad \text{etc.} & &
\end{array}
$$

In hac operatione nihil desiderari confido, sequitu autem ex ea fore factum ex $+6$ et -2 aequale -12 atque generatim factum ex $+6$ et $-a$ aequale $-6a$. Quamobrem quoque certum erit esse factum, quod oritur ex multiplicatione ipsius $+a$ per $-b$, aequale $-ab$. Simili ergo modo erit $-ab$ per $+a$ divisum $=-b$, et $-ab$ per $-b$ divisum $=+a$, unde veritas receptarum regularum magna ex parte patescit.

Restat vero tantum ut quoque demonstretur factum ex $-a$ in $-b$ fore $=+ab$, id quod simili modo ostendo. Sumatur v. gr. numerus -6 qui per 2 multiplicatus dat -12, uti ex praecedente operatione intelligitur. Si nunc a facto -12 factorem -6 subtraho, erit residuum -6 factum ex -6 et $+1$, qui posterior factor est unitate minor, quam prior $+2$. Operationem itaque priori similem hic exhibeo.

$$
\begin{array}{lr l lr}
 & -12 & = \text{facto ex} & -6 \text{ et} & +2 \\
\text{Subtr.} & -\ 6 & & \text{subtr.} & +\ 1 \\ \hline
 & -\ 6 & = \text{facto ex} & -6 \text{ et} & -1 \\
\text{Subtr.} & -\ 6 & & \text{subtr.} & +1 \\ \hline
 & 0 & = \text{facto ex} & -6 \text{ et} & 0 \\
\text{Subtr.} & -\ 6 & & \text{subtr.} & +1 \\ \hline
 & +\ 6 & = \text{facto ex} & -6 \text{ et} & -1 \\
\text{Subtr.} & -\ 6 & & \text{subtr.} & +1 \\ \hline
 & +12 & = \text{facto ex} & -6 \text{ et} & -2 \ \text{etc.}
\end{array}
$$

Perspictur adeo factum ex-6 et-2 esse$=+12$, atque porro factum ex-6 atque$-a$ esse$=+6a$. Generatim ergo erit factum ex$-a$ in$-b=+ab$ atque$+ab$ per$-a$ divisum dat pro quoto$-b$.

Nihil ergo video, quod contra regulas receptas circa numeros negativos excipi queat, si quidem numeris negativis ea tribuatur notio, quam ante dedi; atque quae hinc fluere videntur heterodoxa pro paradoxis tantum haberi convenit, cum inter veritates repugnantia existere nequeat.

Itaque non video quid contra proportionem$+1:-1=$ $=-1:+1$ excipi queat, nisi quod voces et phrases, quibus in proportione numerorum affirmativorum uti consuevimus, in hac proportione adhiberi nequeant. Non autem sunt verba, quae proportionem constituunt, sed notio mathematica, quae latius patet. Quanquam enim dicere non licet, quanto$+1$ sit majus quam-1, tanto-1 esse majus quam$+1$, tamen realis notio, quae his verbis exprimitur, in hac proportione locum habet,

est enim $\frac{+1}{-1}=-1$, itidem $\frac{-1}{+1}=-1$, quod est genuinum proportionum criterium.

Neque hic valet, quod Cl[arissimus] Wolffius habet, negativa et affirmativa esse heterogenea, ideoque interea dari non posse rationem, sed quomodo ea heterogenea dici queant, quorum alterum data quantitate auctum alteri aequale fieri potest, non video. Ex his nunc etiam intelligitur$-a$ in$-a$ ductum idem dare productum, quod dat$+a$ in$+a$ ductum; tota difficultas, quae contra assertum consistit in voce quadrati, quod proprie tantum de affirmativis dici potest, res ipsa autem latius patet, atque revera$+a^2$ radicem quadratam habet am$-a$ quam$+a$, etiamsi ipsa vox ad$+a$ tantum pertineat. Quo nunc ad revera imaginaria progrediar, manifestum est quantitatis negativae radicem quadratam, neque quantitatem affirmativam, neque nihil, neque negativam esse posse, hujusmodi ergo radix quadrata est ens in sola imaginatione positum, quod neque exhiberi, neque existere queat, cum neque sit majus nihilo, neque minus, neque nihilo aequale. Quod vero ad Cl[arissimi] Kuhnii signandi methodum attinet, de ea jam respondi, atque de ipsius cubatione imaginarii$-1+\sqrt{-3}$ praeter reliqua iterum excipio, quod uno loco pro$-1.-3$ ponat-3, alio vero$+3$, quae loca Tibi, Vir Amplissime, etiam nunc erunt nota. His igitur argumentis, quibus receptum modum quantitates negativas tractandi me stabilivisse confido, plurimis dubiis, quae Cl [arissimus] Kuhnius in medium protulit, me satisfecisse arbitror quare ad reliqua, quae circa radices aequationis attulit, sum progressurus. Primo mihi quidem omnium eorum sententia satis confirmata videtur, qui statuerant omnem aequationem tot habere radices, quot habeat dimensiones neque contra hoc facit, quando Cl [arissimus] Kuhnius hoc tantum in aequationibus ex factoribus natis concedit; ego quidem cum illis idem prors [us] q [ue] sentio. Omnis autem aequatio re ipsa tot habet quoque factores, quod dimensiones, qui factores pariter ac radices nisi aequatio plures habeat, quam 4 dimensiones, per regulas notas semper exhiberi possunt. Atque etiamsi aequatio additione componatur, cujusmodi exemplum Cl [arissimus] Kuhnius affert, tamen ea tot habet factores, quot dimensiones, totidemque radices, mirorque ipsum arbitrari hujus aequationis $x^3 = 8$ seu $x^3 - 8 = 0$ me statuere tres radices omnes $= 2$, cum singulas ibidem exhibuerim.

Quo autem extra omne dubium ponam assertum meum, considerabo aequationem $x^3 = ax^2 + bx + c$, seu $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$. Hujus aequationis radix vocatur omne id, quod loco x substitutum efficit x^3 aequale ipsi $ax^2 + bx + c$, seu $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$; atque quaecunque quantitas loco x substituta hoc praestat, ea pro radice aequationis est habenda; haec est definitio mea radicum, quae cum omnium aliorum definitionibus convenit. Jam statuo formulam $x^3 - ax^2 - bx - c$ esse factum ex tribus formulis simplicibus puta $x - p$, $x - q$, et $x - r$, quae quantitates p, q, r propterea ita ab a, b et c pendebunt, ut sit $p + q + r = apq + pr + qr = - b$, atque $pqr = c$. Inventis ergo hinc quantitatibus p, q et r, dico earum quamque loco x substitutam facere $x^3 = ax^2 + bx + c$, quod probatione non eget. Haec adeo aequatio tres habebit radices, quae sunt p, q et r. Hoc ergo modo naturam aequationum concipio, qui quidem modus re ab aliis non discrepat, plerique vero numerum radicum minus commode pertractarunt, ita ut proclive sit in summas difficultates incidere, cujusmodi mihi ea videntur, quae Cl [arissimus] Kuhn protulit. Cum igitur superioris aequationis una radix puta p fuerit inventa, non difficulter reliquae q et r reperientur, nam cum sit $x^3 - ax^2 - bx - c = (x - p)(x - q)(x - r)$, dividatur $x^3 - ax^2 - bx - c$ per

$x-p$, erit quotus $=(x-q)(x-r)$, qui quotus si ponatur $=0$, habebit ista aequatio radices q et r; quae igitur ex resolutione aequationis quadraticae prodibunt. Exemplum sit aequatio $x^3=8$, cujus ut tres radices inveniantur, oportet, ut formulae x^3-8 tres factores inveniantur; cujusquidem unus factor, quia 2 est una aequationis radix, jam constat, quippe $x-2$, per quem si x^3-8 dividitur, prodit x^3+2x+4, quod erit factum ex duobus reliquis factoribus, qui sint $x-$ q et $x-r$. Erunt ergo q et r radices aequationis hujus $x^2+2x+4=0$, quae ut inveniantur, subtrahatur utrobique 3, quo facto habebitur $x^2+2x+1=-3$, atque utrobique radice quadrata extracta erit vel $x+1=\sqrt{-3}$, vel $-x-1=\sqrt{-3}$; unde obtinetur vel $x=-1+\sqrt{-3}$, vel $x=-1\sqrt{-3}$. Propositae ergo aequationis $x^3=8$ seu $x^3-8=0$ tres radices erunt 2, $-1+\sqrt{-3}$ atque $-1-\sqrt{-3}$, quarum quaelibet loco x substisuta dabit $x^3=8$, atque ipsus x^3-8 tres factores erunt $x-2$, $x+1-\sqrt{-3}$ atque $x+1+\sqrt{-3}$, qui in se ducti x^3-8 producent uti ex sequente operatione elucebit:

$$x+1-\sqrt{-3} \text{ factor unus,}$$
$$x-2 \text{ factor secundus,}$$
$$\begin{array}{l} x^2+x-x\sqrt{-3} \\ \underline{-2x-2+2\sqrt{-3}} \\ x^2-x-x\sqrt{-3}\cdot 2+2\sqrt{-3} \end{array} \text{ factum illorum}$$
$$x+1+\sqrt{-3} \text{ factor tertius}$$
$$x^3-x^2-x^2\sqrt{-3}-2x+2x\sqrt{-3},$$
$$+x^2-x-x\sqrt{-3}-2+2\sqrt{-3},$$
$$+x^2-\sqrt{-3}-x\sqrt{-3}+3x-2\sqrt{-3}-6,$$
$$x^3-8 \text{ factum ex tribus factoribus.}$$

Cum autem jam ante certum sit trium datorum factorum factum necessario esse debere x^3-8, ex hoc consuetus algorithmus non parum confirmatur. Quod autem Cl[arissimus] Kuhn ex his judicare velit esse $2=-1+\sqrt{-3}$, quia sit $2^3=(-1+\sqrt{-3})^3$, haec consequentia omnino non valet, quod sic ostendo, cum ante idem argumentum in commodiorem formam transmutavero.

Sit x radix cubica ex 8; erit $x^3=8$; nunc ego dico fore $x=2$; dein dico etiam fore $x=-1+\sqrt{-3}$; ex quibus conjungendis Cl[arissimus] Kuhn deducit $2=-1+\sqrt{-3}$, cum utrumque ipsi x seu radici cubicae ex 8 aequetur, quae conclusio utique foret absurdissima. Ego simile argumentum formo: sit x numerus, cujus quadratum aequale sit ipsius quintuplo senario minuto. Dico fore $x=2$; dico vero etiam fore $x=3$; quare cum et 2 et 3 ipsi x aequetur, debebit esse $2=3$, quod cum sit absurdum, nihilo vero minus praemissae sint verae, sequitur conclusionem perperam esse formatam. Fac autem me hanc conclusionem sustinere, quod Cl[arissimus] Kuhn mihi objiciet, illi quoque contra superiorem conclusionem oggero; in utroque enim casu idem est ratiocinium atque in utroque tacite falso assumitur unicam radicem in aequationibus inesse. Eodem enim modo, quo ex aequalitate $2^3=(-1+\sqrt{-3})^3$ concludere licet $2=-1+\sqrt{-3}$, licet ex aequalitate $2^2-5.2+6=3^2-5.3+6$ concludere $2=3$. Hujus modi autem conclusiones in aequationibus valent utique, non vero in aequalitatibus, quam distinctionem probe notari convenit. Nam si foret $x^2-5x+6=a^2-5a+6$ tuto inferre possem $x=a$; aeque ac ex aequatione $x^3=a^3$ infertur $x=a$; uti autem in illa aequatione a non est solus valor ipsius x, ita quoque hujus aequationis ratio est comparata. Difficultates, quas Cl[arissimus] Kuhn movit circa Ziphrae potestatem in aequationibus, huc non pertinent, et hoc solo tolluntur, si ex utraque signi $=$ parte termini collocentur. Aequationem enim ad Ziphram perducere non est de essentia aequationum, sed fit commoditatis gratia, prout quis hac vel illa methodo ad resolvendas aequationes uti consueverit. Ceterum tamen haec mea de natura aequationum idea illi satisfecisse mihi videor, dum enim factores formulae x^3-ax^2-bx-c investigo, non ad negotium attinet illam Ziphrae aequalem ponere. Huc prorsus non pertinent, quae aliis in casibus de inaequalitate Ziphrarum usu veniunt, uti si quaeratur valor hujus fractionis: $\frac{a-\sqrt{(3ax-2x^2)}}{x-a}$ casus, quo $x=a$, fit enim $a=\frac{0}{0}$ et tamen est $=\frac{1}{2}$, uti ex notis regulis constat. In argumento porro meo de circulo allato, quo discrimen inter quantitates negativas et imaginarias monstravi, Cl[arissimus] Kuhnius contra expectationem excipit, me abscissam radio majorem assumsisse, cum abscissa semper sit pars radii. Nescio autem quis unquam hanc abscissae definitionem dederit, quin potius abscissa ab omnibus definitur, quod sit pars axis, et axis est linea recta infinita, nil igitur impedit, quominus abscissa quantumvis magna accipiatur. Ex aequatione au em data figura curvae, quam aliunde non cognitam esse pono, alias enim aliam aequationem elegissem, ita determinatur, ut cuivis abscissae respondens applicata definiatur. Quando igitur evenit, ut expressio applicatae abscissae cuidem respondentis prodeat imaginaria, indicio id est curvam in illa regione omnino non existere, id quod in circulo fit, si abscissae radio majores capiuntur; ex quo ipso deinceps concluditur circulum esse figuram terminatam neque ultra datos terminos extendi. Idem ergo argumentum, ut Cl[arissimus] Kuhn attentius consideret, rogo. Interim tamen sequentia adjungam, quibus ex aequatione $y^2 = 3a^2 - 4at + tt$ curvae figuram sum determinaturus, denotantibus t abscissas et y applicatas. Ad hoc sumo datam lineam b quae sit $= \frac{1}{2} a$, erit $y^2 = 12b^2 - 8bt + tt$ ponoque primum $t = 0$. Erit $y^2 = 12b^2$ et $y = \pm 2b\sqrt{3}$. Tum si $t = b$, erit $y^2 = 5b^2$ seu $y = \pm b\sqrt{5}$. Tertio pono $t = 2b$; erit $y^2 = 0$ et $y = 0$. Quarto pono $t = 3b$; erit $y^2 = -3b^2$; ideoque valor ipsius y imaginarius, manebitque imaginarius, quam diu t continetur intra limites $2b$ et $6b$, si fit $t = 6b$, erit $y = 0$; si $t = 7b$, erit $y = \pm b\sqrt{5}$ et ita porro. Ad figuram curvae melius congnoscendam retro quoque procedi potest, ponendo $t = -b$, quo casu fit $y^2 = 21b^2$ seu $y = \pm b\sqrt{21}$. Atque facto $t = -2b$, erit $y^2 = 32b^2$, seu $y = \pm 4b\sqrt{2}$; hinc igitur plurima puncta reperiuntur, per quae curva transibit. Ex quibus sequens figura oritur: sit AL axis A initium abscissarum ejusque partes AB, BC etc. $=$ b. Ex punctis A, B, C, D, etc. ducantur ad axem normales aa, bb etc., in quibus puncta c, b et superiora inventa potentur, per qua curva transit. Scilicet si $t = 0$, erit $Aa = 2b\sqrt{3}$ et punctum a tum supra quam infra axem incipi debet ob signum ambiguum.

Si $t = b = AB$, erit $Bb = Bb = b\sqrt{5}$. Si $t = 2b = AC$, erit $Cc = 0$. Per sequentes lineas dd, ee, ff curva nusquam transit, quod expressiones imaginariae monstrant. Porro Gg

erit $=0$; $Hh=Hh=b\sqrt{5}$; $Ii=Ii=2b\sqrt{3}$; $Kk=kk=$ $=b\sqrt{21}$; et sumto $t=-b=A(B)$, erit $(B)(b)=(B)(b)=$ $=b\sqrt{21}$. Curva ergo habebit figuram qualis hic repraesentatur; estque hyperbola, uti ex forma aequationis intelligitur. Ex hoc vero exemplo abunde intelligitur differentia inter quantitates negativas et imaginarias pariterque veritas reliquorum, de quibus Cl[arissimus] D[ig] n[issimus] Kuhnius dubitavit.

Meae mechanicae quarta jam fere pars est impressa, quam partem si quoque eo pertinentes figurae essent paratae, Tibi, Vir Amplissime, quantotius transmitterem.

Vale ergo atque favore Tuo me complecti perge, Vir Amplissime.

Tui observantisimum

L. Euler.

Печатается по копии, заверенной Эйлером (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 19, лл. 61—70 об).

Пометы: «Представлено 11 августа 1735». «Соответствует оригиналу. — Л. Эйлер».

[1] Датируется по протокольной записи, где говорится, что 11 августа 1735 г. президент Корф передал копиисту Юберкампфу письмо Л. Эйлера К.-Л.-Г. Элеру о споре относительно мнимых и отрицательных величин (Протоколы, т. I, стр. 219). Письмо было отправлено по почте 3 апреля 1736 г. (там же, стр. 260).

[2] Речь идет о возвращении К.-Л.-Г. Элера из Петербурга в Данциг.

[3] Здесь говорится о сыне К.-Л.-Г. Элера Карле Людовике Элере, с которым впоследствии Эйлер вел переписку. В ААН СССР хранится письмо К.-Л. Элера Эйлеру от 19 XII 1742. (ААН СССР, ф. 136, оп. 2, № 1, л. 200).

[4] В современной терминологии иррациональное число, являющееся корнем полинома какой-либо степени с целыми коэффициентами, называется алгебраическим. Иррациональные числа, не являющиеся алгебраическими, называются трансцендентными.

[5] Здесь имеются в виду возражения Г. Кюна против реального значения понятия отрицательных величин, сторонником которого был Л. Эйлер. Свои сомнения Кюн основывал на невозможности вычесть большее из меньшего; особые возражения вызывало у него правило знаков $-a\times-b=+ab$, о чем он подробно написал в письме К.-Л.-Г. Элеру, присланном последним в Петербургскую Академию (ААН СССР, р. 1, оп. 6, № 38/1).

[6] Эйлер имеет в виду утверждение Вольфа о том, что «Quantitates privativae positivis heterogeneae sunt» (Отрицательные и

положительные величины разнородны): Ch. Wolff. Elementa matheseos universae (Основы всеобщего знания) — Галле, 1730, присовокупление 5, § 23, стр. 300.

[7] Речь идет о четвертой главе «Механики» Эйлера: De motu rectilineo puncti liberi a potentiis absolutis sollicitati (О прямолинейном движении, возбужденном в любой точке абсолютными силами) — весь трактат вышел в свет в 1736 г.

3

3 [14] апреля 1736 г., Петербург

Знаменитому и славнейшему мужу
Карлу Готлибу Элеру
шлет нижайший привет Леонард Эйлер.

Мне особенно приятно было Твое письмо,[1] так как я долго ждал его с большим нетерпением; прежде всего я радуюсь тому, что Ты, славнейший муж, не только свидетельствуешь Твои ко мне прежние благоволение и дружбу, но и обещаешь не лишать меня их в будущем. Я тщательно исследовал повторные возражения [2] славнейшего Кюна против установленной природы мнимых [величин] и уравнений и понял, что они частично основаны на применении другой терминологии, частично на реальных доводах.[3] На то и другое я, главным образом ради того, чтобы удовлетворить Твое особое желание, составил довольно обширные ответы, которые предлагаю на Твой суд, причем я ничего не имею против, чтобы они, если угодно, были сообщены славнейшему Кюну. Что же касается издания этой математической корреспонденции,[4] то я вполне согласен, но я сомневаюсь, что это послужит на пользу славнейшему Кюну, если [все] будет напечатано так, как есть. Во всяком случае я считаю, что самый спор ему не следует прекращать, ибо вполне возможно, что он найдет сторонников, однако повсюду в вычислении он допускает ошибки, а именно в действии, которым он находит куб количества $-1+\sqrt{-3}$, встречающемся дважды и не согласующемся даже с установленными им самим законами, как я достаточно имел возможность прежде убедиться, да и сам славнейший Кюн, по-видимому, признает это. Затем в недавней дискуссии он совершенно обесценил свой довод, который в то же время противоречит его основной мысли и который он никогда бы не привел, если бы относился к вычислению хотя бы с малейшей внимательностью. Поэтому, хотя на этих доказательствах основывается суть спора, он одним этим доводит принятую теорию до абсурда, и я очень опасаюсь, чтобы те, которые в чем-то были согласны со славнейшим Кюном, из-за подобных его аргументов не перешли бы на другую сторону.

Что же касается ответов, данных мною на более серьезный довод, которым в основном подкрепляется принятая теория, то я, славнейший муж, предлагаю их на Твой суд. Пусть в круге с радиусом 1 и окружностью $2p$ будет некий синус y и дуга S; известно, что $y = S - \frac{S^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{S^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{S^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$ и т. д. Это уравнение[5] я внимательно исследовал, как если бы я хотел найти по данному синусу y дугу S. А поскольку моя неизвестная величина S в этом уравнении имеет бесконечное измерение, я заключаю, что и уравнение также имеет бесконечное количество корней или реальных, или мнимых, которые все образуют дугу с синусом y.

Таким образом, из природы круга следует, что существует бесчисленное множество дуг, соответствующих одному и тому же синусу y, которые, если принять наименьшую дугу равной A, суть все следующие:
$A_1 = p - A, 2p + A, 3p - A, 4p + A, 5p - A, 6p + A$ и т. д., а также

$$-p - A, \quad -2p + A, \quad -3p - A, \quad -4p + A, \quad -5p - A, \quad -6p + A, \quad -7p - A \text{ и т. д.}$$

Следовательно, согласно правилу Гарриотта (все эти правила я пока буду считать правильными, чтобы исследовать, ошибочны они или нет), все эти величины должны быть связаны с корнем предложенного уравнения бесконечной степени. Я привожу это уравнение к такому виду

$$0 = 1 - \frac{S}{y} - \frac{0S^2}{y} + \frac{S^3}{1 \cdot 2 \cdot 3y} + \frac{0S^4}{y} - \frac{S^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5y} - \frac{0S^6}{y} + \frac{S^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7y} \text{ и т. д.,}$$

в котором я дополнил отсутствующие члены коэффициентом 0. Следовательно, это выражение, согласно Гарриотту, будет иметь следующие бесчисленные множители:

$$\left(1-\frac{S}{A}\right)\left(1-\frac{S}{p-A}\right)\left(1-\frac{S}{-p-A}\right)\left(1-\frac{S}{2p+A}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{S}{-2p+A}\right)\left(1-\frac{S}{3p-A}\right)\left(1-\frac{S}{-3p-A}\right) \text{ и т. д.}$$

Поэтому, если написать по порядку этих множителей все коэффициенты при $-S$:

$$\frac{1}{A},\ \frac{1}{p-A},\ \frac{1}{-p-A},\ \frac{1}{2p+A},\ \frac{1}{-2p+A},\ \frac{1}{3p-A},$$
$$\frac{1}{-3p-A} \text{ и т. д.},$$

то сумма их будет равна коэффициенту при $-S$ в уравнении, который равен $\frac{1}{y}$. Таким же образом сумма произведений из двух таких дробей будет равна коэффициенту при S^2 в уравнении, который равен 0, и сумма произведений из трех множителей равняется коэффициенту при $-S^3$, который равен $-\frac{1}{6y}$ и т. д. А поскольку сумма тех дробей будет известной вместе с суммами множителей из двух, трех, четырех и т. д., то тогда с помощью известных способов определяется сумма квадратов тех членов или дробей кубов, четвертых степеней и т. д.

Предположим, что синус y равен радиусу 1, тогда A будет равно четвертой части длины окружности $q=\frac{1}{2}p$; если принять это, то вышеупомянутый ряд дробей перейдет (если $p=2q$) в такой: $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{-1}{3q}$, $\frac{-1}{3q}$, $\frac{1}{5q}$, $\frac{1}{5q}$, $\frac{-1}{7q}$, $\frac{-1}{7q}$ и т. д., сумма которых должна быть $\frac{1}{y}=1$. Следовательно, $1=\frac{2}{q}-\frac{2}{3q}+\frac{2}{5q}-\frac{2}{7q}$ и т. д., или $\frac{q}{2}=\frac{p}{4}=$ $=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ и т. д., т. е. ряд Лейбница, к которому я пришел только с помощью правил Гарриотта, хотя они и кажутся славнейшему Кюну неверными.

Следуя тому же направлению, перейду теперь к более трудным и особенным случаям, которые без правил Гарриотта вообще навсегда остались бы неизвестными. Поскольку сумма произведений из двух этих дробей бывает 0, следовательно, сумма квадратов этих дробей равна 1.

Квадраты же этих дробей будут равны $\frac{1}{q^2}$, $\frac{1}{q^2}$, $\frac{1}{9q^2}$, $\frac{1}{9q^2}$, $\frac{1}{25q^2}$, $\frac{1}{25q^2}$ и т. д. Я бы хотел, чтобы славнейший Кюн обратил внимание на то, что вместо квадратов абсолютно отрицательных дробей $\frac{-1}{3q}$, $\frac{-1}{3q}$ и т. д. я брал квадраты положительные, и если, как он думает, считал бы их отрицательными, то я, очевидно, совершил бы ошибку. Итак, поскольку сумма указанных квадратов равна 1, то будет $\frac{q^2}{2}=\frac{p^2}{8}=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}$ и т д., откуда следует $\frac{p^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+$ и т. д., что есть несомненная истина, тем более заслуживающая восхищения, что она до сих пор не была открыта никем из тех, кто исследовал сумму этого ряда; она определяет $p:1$, т. е. отношение длины окружности к диаметру. Таким же образом сумма кубов вышеупомянутых дробей $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{-1}{3q}$, $\frac{-1}{3q}$ и т. д., поскольку дана сумма произведений из трех множителей, должна быть равна $\frac{1}{2}$.

Следовательно, $\frac{1}{2}=\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^3}-\frac{1}{27q^3}-\frac{1}{27q^3}+\frac{1}{125q^3}+$ $+\frac{1}{125q^3}-$ и т. д. Поэтому $\frac{q^3}{4}=\frac{p^3}{32}=1-\frac{1}{27}+\frac{1}{125}-\frac{1}{343}+$ $+\frac{1}{729}$ и т. д.

То, что я нашел, продвигаясь таким образом дальше, Ты можешь увидеть, славнейший муж, в следующей таблице:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\text{и т. д.}=\frac{p}{4},$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13}+\text{и т. д.}=\frac{p^2}{8},$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}-\text{и т. д.}=\frac{p^3}{32},$$

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11^4}+\frac{1}{13^4}+\text{и т. д.}=\frac{p^4}{96},$$

$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\frac{1}{11^5}+\frac{1}{13^5}-\text{и т. д.}=\frac{5p^5}{1536},$$

$$1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\frac{1}{11^6}+\frac{1}{13^6}+\text{и т. д.}=\frac{p^6}{960}\ \text{и т. д.}$$

откуда вытекает следующее, что я приведу ниже, если оно больше нравится:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\text{и т. д.}=\frac{p^2}{6},$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\text{и т. д.}=\frac{p^4}{90},$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+\text{и т. д.}=\frac{p^6}{945},$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+\text{и т. д.}=\frac{p^8}{9450},$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{6^{10}}=\text{и т. д.}=\frac{p^{10}}{93555},$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{6^{12}}+\text{и т. д.}=$$

$$=\frac{691p^{12}}{638512875}\ \text{и т. д.}$$

Я бы хотел, чтобы славнейший Кюн рассмотрел коэффициенты степеней p и установил закон [их] следования; впрочем, относительно всего этого действия он считает, что оно основано на ложных принципах. Мне же представляется очевидным, что если, основываясь на этих принципах, мы приходим всегда к правильному результату и никогда к ошибочному, то нельзя привести большего доказательства в пользу правильности самих принципов, которые в другом месте считались сомнительными.

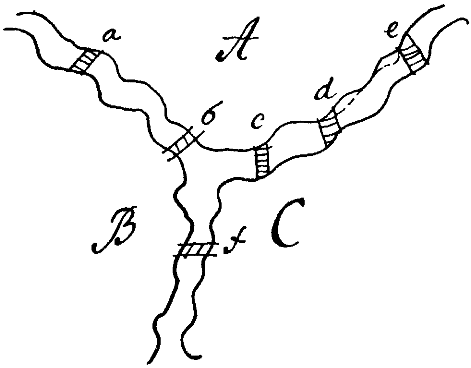
Но перейду, славнейший муж, к Твоему письму, в котором Ты выражаешь сомнение по поводу реального произведения, получающегося от умножения мнимых множителей и не заслуживающего, по Твоему мнению, одобрения.

Кроме того, что я ответил на положения Кюна, я присоединяю здесь также другое сомнение, которое, как я полагаю, вступит в противоречие с высказанным Тобой сомнением. Если реальное число, например 2, разделить на мнимое $\sqrt{-3}$, то, конечно, частное, не может быть реальным числом, в чем я без колебаний соглашаюсь с Тобой, славнейший муж. Ибо частное $\frac{2}{\sqrt{-3}}$ вообще мнимое, само же частное, умноженное на делитель $\sqrt{-3}$, должно в соответствии с природой деления дать 2. Вот, следовательно, случай, когда произведение мнимых чисел есть реальное число. Что же касается Твоего утверждения, что от умножения невозможного не может получиться возможное, это всегда остается справедливым, если Ты считаешь, что умножение совершается на возможное, а если умножение совершается на невозможное, как в приведенном примере, о вполне понятно, как это может произойти. Итак, почему Ты считаешь неправильным, что $16 = \sqrt{-4} \times (4\sqrt{-4})$, я не знаю, но стоит только разделить 16 на $\sqrt{-4}$, и тогда, несомненно, частное будет мнимое, как $-4\sqrt{-4}$ или какое-нибудь другое. Какое бы оно ни было, но будучи умножено на делитель $\sqrt{-4}$, оно в результате должно дать 16. И если Ты будешь отрицать, что возможно деление подобного рода, то я с этим соглашусь в том случае, если под возможным делением Ты будешь понимать такое, в результате которого получается возможное частное. Если же деление совершается с помощью мнимого делителя, то я не вижу, почему частное также мнимое менее допустимо, нежели [мнимый] делитель.

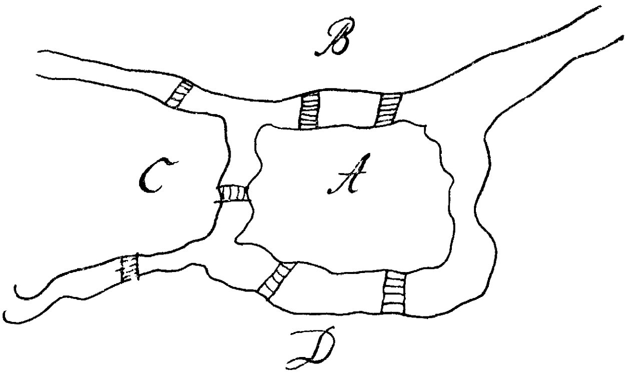
Преславный Кюн обещал нашей Академии два рассуждения, которых мы ждем с нетерпением, разве только я хочу увидеть их с меньшей радостью, чем также обещанный им способ нахождения сумм степеней натуральных чисел. Между прочим я прочитал его трактат о расчете оружейных стволов [6] и был удивлен способом, напоминающим способ Вольфа; сам же предмет не только не нов, но и достаточно ясно изложен Фр. Ланой в «Mag. Nat. et Art.», что, по-видимому, [Кюн] изучил весьма основательно.

Кроме того, Ты, славнейший муж, как будто отрицаешь, что исчисление мнимых величин может на что-нибудь пригодиться. Но, не касаясь бесчисленных примеров, которые могут быть приведены для доказательства, что это исчисление в высшей степени полезно для определения реальных [величин], я приведу только один: пусть радиус, проведенный в круге, равен 1, тангенс некоторого угла t и соответствующая дуга s. Тогда будет $s = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log(-) \frac{t+\sqrt{-1}}{t-\sqrt{-1}}$. Пусть будет другая дуга ns и ее тангенс T. Тогда будет $ns = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log(-) \frac{T+\sqrt{-1}}{T-\sqrt{-1}}$; хотя отдельные части этих выражений и являются мнимыми, однако, будучи соединены, они представляют нечто реальное. Отсюда следует $(-)\left(\frac{t+\sqrt{-1}}{t-\sqrt{-1}}\right)^n=(-)\frac{T+\sqrt{-1}}{T-\sqrt{-1}}$, и этим уравнением выражается соотношение между тангенсами дуг T и t, имеющих данное отношение [n]. Итак, в соответствии с этим отношением, которое, если хочешь, можно реально вывести из того уравнения, следует рассматривать этим же принятым методом мнимые величины, как можно видеть в лейпцигских «Acta», если не ошибаюсь, около 1720 г., где это выражение более подробно изучено славнейшим Иоанном Бернулли.[7] Пример этого рода также встречается в данных ответах преславному Кюну, где я вывел для одного кубического уравнения три корня, с помощью которых в отдельных случаях корни, хотя все они реальные, однако не могут быть найдены без правильной трактовки мнимых [корней]. Твое замечание, что эти реальные величины могут быть определены также другими способами, ничем не опровергает моих положений, так как я нигде не утверждал, что это не может быть. Но в моей «Механике», когда она выйдет в свет, что, как я надеюсь, будет через несколько месяцев (ибо уже напечатано больше половины того и другого тома), Ты сможешь найти многочисленные примеры этого рода, в которых едва ли можно было бы прийти к решениям (являющимся реальными), без использования мнимых величин. Следовательно, если бы я не пожелал воспользоваться теми правильными законными правилами, в какие ошибки я впал бы! IV том «Комментариев» закончен уже несколько месяцев тому назад, и в ближайшие дни начнется его печатание. Итак, я надеюсь, что в скором времени этот том будет прислан вам. Наконец, Ты, славнейший муж, выражаешь желание ознакомиться с моим способом построения мостов;[8] охотно представляю этот способ на Твой суд. Ибо, когда Ты попросил у меня решения этой проблемы, приспособленной к частному случаю Кенигсберга, Ты, вероятно, считал, что я предложил такого рода построение мостов, но я не сделал это, а только доказал, что такое построение вообще не может иметь места, и это следует принять вместо решения. Способ же мой является универсальным, так как с его помощью в любом предложенном мне случае этого рода я тотчас могу решить, следует ли строить переход с помощью отдельных мостов или нет, и в первом случае [могу установить], каким образом этот переход следует осуществить. Далее я изложу мой способ, а также опишу путь, которым я к нему пришел.

Я рассмотрел произвольно взятую фигуру разветвления реки, а также мосты a, b, c, d, e, f, как это указано на рисунке, и установил, что возможен переход, который я представляю следующим образом. Области, отделенные



друг от друга водой, я называю буквами A, B, C, и когда предполагается переход через мосты из одной области в другую, [а именно] переход из A в B через мост или a или b, — наиболее удобно назвать [буквами] AB, из которых первая буква A будет обозначать область, из которой переходят. Итак, $ABCACAB$ будет определять переход, совершаемый через все мосты по одному разу; число этих букв должно быть на единицу больше, чем число мостов; это должно иметь место при любом возможном переходе описанным способом, в чем каждому легче убедиться самому, чем доказывать. Теперь я рассматриваю, сколько раз в ряде букв A, B, C, A, C, A, B должны встретиться буквы ABC, о чем нужно судить по числу мостов, ведущих в каждую из областей. Так, к области A ведут пять мостов: a, b, c, d, e, и сколько раз буква A встречается в середине того ряда, столько раз встречаются два из этих мостов, ибо с одной стороны нужно перейти в область A, с другой стороны — выйти оттуда. Если A встречается или в начале, или в конце того ряда, тогда единственный переход моста соответствует A. Отсюда следует, что если число мостов, ведущих в область A, будет нечетным, тогда переход через все мосты не может совершиться иначе, чем таким образом, чтобы он или начинался в области A, или заканчивался в области A. А если число мостов, ведущих к A, будет четным, тогда переход может быть совершен и без этого условия, чтобы начинаться или заканчиваться в A; но если он начинается в A, то должен будет там же и закончиться. Отсюда вытекает, что в ряде $ABCACAB$ любая буква, за исключением первой и последней, обозначает переход, ведущий через два моста в область, обозначенную этой буквой. Следовательно, надо держаться следующего правила: если на каком-либо рисунке число мостов, ведущих в некоторую область, будет нечетным, тогда желаемый переход через все мосты одновременно не может быть осуществлен иначе, как если переход или начинается, или заканчивается в этой области. А если число мостов четное, отсюда не может возникнуть никакого затруднения, так как ни начало, ни конец перехода при этом не фиксируются. Отсюда следует такое общее правило: если будет больше чем две области, к которым ведет нечетное количество мостов, тогда желательный переход вообще не может быть совершен. Ибо представляется совершенно невозможным, чтобы переход и начинался, и заканчивался в какой-нибудь одной из этих областей. А если будут только две области такого рода (так как не могут быть даны одна область этого рода или нечетное число областей), тогда может быть совершен переход через все мосты, но с таким условием, чтобы начало перехода было в одной, а конец в другой из этих областей. Когда в предложенной фигуре A и B есть области, к которым ведет нечетное число мостов, а число мостов, ведущих к C, является четным, то я считаю, что переход или построение мостов может иметь место, если переход начинается или из A, или из B, а если же кто-нибудь пожелает начать переход из C, то он никогда не сможет достигнуть цели. В расположении кенигсбергских мостов я имею четыре области A, B, C, D, взаимно отделенные друг от друга водой, к каждой из которых ведет нечетное число мостов. Таким образом, поскольку есть больше чем две области, к которым ведет нечетное число мостов, я утверждаю, что я доказал полную невозможность такого соединения мостов. Итак, с помощью очень легкого правила можно почти мгновенно определить для любой фигуры, допускается ли такого рода построение мостов, при котором переход будет происходить только через все мосты одновременно, или нет? Ибо возможным будет построение, если и не будет никакой области, или будут только две, к которым ведет нечетное число мостов; в таких случаях начало перехода выбирается произвольно, но там же должен быть и конец перехода. В последнем же случае начало перехода должно иметь место в одной из тех обла-



стей, а конец — в другой. Построение невозможно, если будет более чем две области, к которым поведет нечетное число мостов. Следовательно, Ты можешь убедиться, славнейший муж, что это решение по своему характеру, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением и, нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике. Итак, я не знаю, каким образом получается, что вопросы, имеющие совсем мало отношения к математике, скорее разрешаются математиками, чем другими [учеными]. Между тем Ты, славнейший муж, определяешь место этого вопроса в геометрии положения, и что касается этой новой науки, то, признаюсь, мне неизвестно, какого рода относящиеся сюда задачи желательны были Лейбницу и Вольфу. Итак, я прошу Тебя; если Ты считаешь, что я способен нечто создать в этой новой науке, чтобы Ты соблаговолил мне прислать несколько определенных, относящихся к ней задач, для того чтобы я мог лучше уяснить себе, что́ именно представляется желательным. Между тем, поскольку мне известно, что Ты также можешь составить суждение о математических науках на основании одной только задачи, которую следует предложить и решить, начало чему по Твоей просьбе положил преславный Кюн, я хотел бы, чтобы он представил нам такого рода задачи, которые он считает более трудными, [сделав это] как для прогресса науки, так и для упражнения наших сил. Между прочим, не сочти для себя обременительным принять следующие задачи, которыми обменялись славнейший Бернулли и я и которые Ты, если Тебе будет угодно, сможешь предложить преславному Кюну.

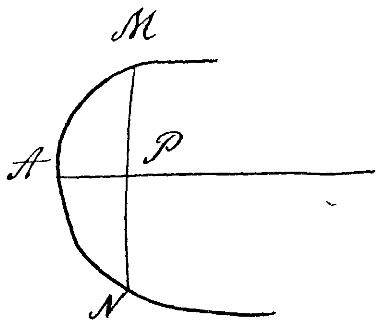
Итак, славнейший Бернулли предложил мне следующие задачи.[9]

I. Определить по крайней мере малые колебания маятника, подвешенного на гибкой цепи или на нити; он ставит также вопрос для маятника такого рода: [определить] длину простого маятника, колебания которого заканчиваются в такое же время. Для разрешения этого вопроса надо произвести тщательные исследования, направленные на определение природы кривой, которую описывает такой маятник при колебании. Я был бы весьма признателен славнейшему Кюну, если бы он, прежде чем приступать к решению, поставил бы опыты, что по крайней мере внесло бы для меня бо́льшую ясность в этом вопросе.

II. Определить колебания упругой пластинки (только малые), одним концом укрепленной на твердой основе. Здесь, таким образом, снова определяется длина простого изохронного маятника и отношение ее к длине пластинки, а также к величине силы упругости. Можно будет произвольно взять гипотезу упругости; поскольку решение от этого мало меняется, мы пользуемся той гипотезой, которая обычно применяется при исследовании кривизны упругой пластинки. Здесь я снова хочу напомнить, что для решения этой задачи нужно определить характер кривой, которую описывает пластинка при колебании.

Я же предложил в ответ славнейшему Бернулли две следующие задачи.

I. Определить движение простого маятника, движущегося в наклонном направлении. Маятник может двигаться трояким способом: во-первых, если нить с подвешенным грузом движется в одной и той же плоскости и производит колебания обычным образом — движение достаточно изучено; во-вторых, если маятник движется так, что [при этом] нить описывает конус, а маятник — круг; это движение преславный Иоанн Бернулли называет вращательным движением; опубликованное им на эту тему исследование в лейпцигских «Acta» упоминалось выше; в-третьих, движение маятника, о котором я говорю здесь и которое несколько отличается от предыдущих. Если же угодно произвести опыты, то можно убедиться, что маятник описывает продолговатые фигуры, линия абсид которых, если можно так ее назвать, не успокаивается, а является подвижной. Итак, я хочу определить характер самой продолговатой кривой и движения упомянутой линии абсид; при этом я не учитываю никакого сопротивления.



II. Я хочу определить две алгебраические кривые AM, AN, отнесенные к одной и той же оси AP и не поддающиеся спрямлению, но такие, что спрямление обеих этих кривых зависит от квадратуры данной кривой (например, круга); кривые эти имеют, впрочем, такое свойство, что сумма дуг, соответствующих одной и той же абсциссе AP, т. е. $AM+AN$, абсолютно поддается спрямлению.[10]

Я не сомневаюсь, что если Тебе угодно будет предложить эти проблемы не только славнейшему Кюну, но также и другим геометрам, то следствием этого будет глубокое развитие анализа. Но если бы я не знал, что Ты — великий любитель этой науки, я опасался бы, что утомил Тебя столь пространным изложением. Поэтому я заканчиваю, обращаясь к Тебе с просьбой, чтобы Ты соблаговолил приветствовать от моего имени как Твоего достойного сына, так и преславного доктора Кюна.

Итак, прощай, преславный муж, и не лишай меня Твоей благосклонности и дружбы.

Петербург, 3 апреля 1736.

Amplissimo atque Clarissimo Viro
Carol[o] Gottlieb[o] Ehlero
S[alutem] p[lurimam] d[icit] Leonhard Euler.

Eo gratiores mihi fuere litterae Tuae, quo majore desiderio eas jam diu expectaveram; in primis vero mihi gratulor, quod favorem et amicitiam, qua me hic complecti coepisti, Vir Amplissime, non solum servasti, sed etiam in posterum servare sis pollicitus. Clar[issimi] Kuhnii repetitas exceptiones contra receptam imaginariorum et aequationum naturam diligenter perpendi, quas partim in alia verborum explicatione, partim in realibus argumentis versari deprehendi. Ad quorum utrumque Tuae praecipue voluntati satisfacturus responsiones satis amplas confeci, quas Tuo judicio submitto, non intercedens, quominus eae, si ita visum fuerit, Cl[arissimo] Kuhnio communicentur. Quod autem ad impressionem hujus Commercii Mathematici attinet, ego quidem minime adversabor; sed vereor ut, si ita ut factum est imprimeretur, ad laudem Cl[arissimi] Kuhnii quidquam tribuat. Ipsam quidem controversiam non puto Illi quicquam derogaturam, nam fieri omnino potest ut asseclas inveniat, sed passim in calculo lapsum commissit; scilicet in operatione, qua cubum quantitatis $-1+\sqrt{-3}$ investigavit, quae bis occurrit, et quae ne cum ipsius quidem principii constare potest, quemadmodum ego satis superque ostendi, et ipse Cl[arissimus] Kuhn agnovisse videtur. Deinde in nuperrima disputatione maximi ponderis argumentum sponte corruit, quod argumentum, cum Ipsius sententiae adversetur, nequidem prolaturus fuisset, si vel minima attentione calculum tractasset. Quare cum in his argumentis totius controversiae cardo versetur, his enim solis receptam Doctrinam ad absurdum deducere conatur, ego vehementer metuo, ne ii, qui alias Cl[arissimo] Kuhnio assensum praebuissent, propter haec ipsa argumenta ad contrariam partem transeant.

Praeter eas autem, quas dedi responsiones gravius argumentum, quo recepta doctrina incredibili modo confirmabitur, Tuo, Vir Amplissime, examini subjiciam. In circulo radii $=$ I et peripheriae $=2\ p$ sit sinus quidam $=y$ et arcus $=S$; nosti fore $y=S-\frac{S^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{S^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-$ $-\frac{S^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}$ etc.; quam aequationem ita contemplabor, quasi ex dato sinu y arcum S vellem investigare. Cum autem mea incognita S in hac aequatione habeat infinitum dimensionem numerum, concludo aequationem quoque innumerabiles habere radices, sive reales, sive imaginarias, quae omnes exhibeant arcus, quorum sinus idem y. At ex natura circuli constat esse utique innumerabiles arcus eidem sinui y respondentes, qui posito minimo arcu $= A$ sunt omnes sequentes: $A, = p - A$, $2p + A$, $3p - A$, $4p + A$, $5p - A$, $6p + A$ etc.; itemque $-p - A$, $-2p + A$, $-3p - A$, $-4p + A$, $-5p - A$, $-6p + A$, $-7p - A$ etc. Hi ergo valores omnes debent esse juxta regulam Harriotti (omnes enim has regulas tantisper pro certis habebo ad inquirendum, utrum fallant nec ne) radice S aequationis propositae infinitae. Quamobrem illa aequationem ad hanc formam reduco:

$$0 = 1 - \frac{S}{y} - \frac{0S^2}{y} + \frac{S^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot y} + \frac{0S^4}{y} - \frac{S^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot y} - \frac{0S^6}{y} + \frac{S^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot y} \text{ etc.,}$$

in qua terminos absentes supplevi coefficientem O ipsis tribuendo. Habebit ergo secundum Harriottum ista expressio sequentes innumeros factores:

$$\left(1 - \frac{S}{A}\right)\left(1 - \frac{S}{p - A}\right)\left(1 - \frac{S}{-p - A}\right)\left(1 - \frac{S}{2p + A}\right)$$
$$\left(1 - \frac{S}{-2p + A}\right)\left(1 - \frac{S}{3p - A}\right)\left(1 - \frac{S}{-3p - A}\right) \text{ etc.}$$

Ex hanc ob rem omnibus coefficientibus ipsius $-S$ horum factorum in ordine scriptis: $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{p - A}$, $\frac{1}{-p - A}$, $\frac{1}{2p + A}$, $\frac{1}{-2p + A}$, $\frac{1}{3p - A}$. $\frac{1}{-3p - A}$ etc., erit eorum summa $=$ coefficienti ipsius $-S$ in aequatione, qui est $= \frac{1}{y}$. Similique modo summa factorum ex binis illarum fractionum erit $=$ coefficienti ipsius S^2 in aequatione, qui est O, atque summa factorum ex ternis aequatur coefficienti ipsius $-S^3$, qui est $-\frac{1}{6y}$ et ita porro. Cum autem summa illarum fractionum fuerit data una cum summis factorum ex binis, ternis, quaternis etc., per notas methodos inde invenitur summa quadratorum illorum terminorum seu fractionum item cuborum, biquadratorum etc. Ponamus autem sinum $y =$ radio $= 1$, erit $A =$ quartae peripheriae parti $= q = \frac{1}{2} p$; quibus positis superior series fractionum abit (ob $p = 2q$) in hanc $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{-1}{3q}$, $\frac{-1}{3q}$, $\frac{1}{5q}$, $\frac{1}{5q}$, $\frac{-1}{7q}$, $\frac{-1}{7q}$ etc., quarum summa debet esse $= \frac{1}{y} = 1$. Erit ergo $1 = \frac{2}{q} - \frac{2}{3q} + \frac{2}{5q} - \frac{2}{7q}$ etc., seu $\frac{q}{2} = \frac{p}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc., quae est ipsa series Leibnitiana, ad quam solis Harriotti regulis, etsi falsae videntur Cl[arissimo] Kuhnio, perveni.

Perveniam autem iisdem vestigiis insistendo ad abstrusiores et magis eximias veritates, quae omnino sine Harriotti regulis perpetuo ignotae mansissent. Cum summa factorum ex binis illarum fractionum sit $= 0$, sequitur fore summam quadratorum illarum fractionum $= 1$. Sunt autem quadrata illarum fractionum $\frac{1}{q^2}$, $\frac{1}{q^2}$, $\frac{1}{9q^2}$, $\frac{1}{9q^2}$, $\frac{1}{25q^2}$, $\frac{1}{25q^2}$ etc. Notet hic velim Cl[arissimus] Kuhn me pro quadratis absolute negativarum fractionum $\frac{-1}{3q}$, $\frac{-1}{3q}$ etc. accipere quadrata affirmativa, quae si ad ejus mentem negativa sumsissem, in certissimum errorem incidissem.

Cum igitur illorum quadratorum summa sit $= 1$, erit $\frac{q^2}{2} = \frac{p^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81}$ etc., unde simul sequitur $\frac{p^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} +$ etc., quae est veritas certissima eoque magis miranda, quod a nemine adhuc eorum, qui hujus seriei summam investigaverunt, sit detecta; denotat autem $p : 1$ rationem peripheriae ad diametrum. Simili modo summa cuborum fractionum superiorum $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{-1}{3q}$, $\frac{-1}{3q}$ etc. ob datam summam factorum ex ternis debet esse $= \frac{1}{2}$. Erit ergo $\frac{1}{2} = \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^3} - \frac{1}{27q^3} -$

$-\frac{1}{27q^3}+\frac{1}{125q^3}+\frac{1}{125q^3}-$etc. Quare erit $\frac{q^3}{4}=\frac{p^3}{32}=1-$ $-\frac{1}{27}+\frac{1}{125}-\frac{1}{343}+\frac{1}{729}$ etc.

Quae hoc modo ulterius progrediendo inveni, accipe, Vir Amplissime, in sequenti Tabella:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\text{etc.}=\frac{p}{4},$$
$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\text{etc.}=\frac{p^2}{8},$$
$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}-\text{etc.}=\frac{p^3}{32},$$
$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11^4}+\frac{1}{13^4}+\text{etc.}=\frac{p^4}{96},$$
$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\frac{1}{11^5}+\frac{1}{13^5}-\text{etc.}=\frac{5p^5}{1536},$$
$$1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\frac{1}{11^6}+\frac{1}{13^6}+\text{etc.}=\frac{p^6}{960}\ \text{etc.},$$

ex qua fluit sequens, quam, si forte magis arridet, appono:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\text{etc.}=\frac{p^2}{6},$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\text{etc.}=\frac{p^4}{90},$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+\text{etc.}=\frac{p^6}{945},$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+\text{etc.}=\frac{p^8}{9450},$$
$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{6^{10}}+\text{etc.}=\frac{p^{10}}{93\,555},$$
$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{6^{12}}+\text{etc.}=\frac{691p^{12}}{638\,512\,875}\ \text{etc.}$$

Coefficientes potestatum ipsius p optarem, ut Cl[arissimus] Kuhnius consideret, et legem progressionis indaget, ceterum quid de integra hac operatione falsis secundum ipsum nixa principiis sentiat. Mihi certe videtur si ex his principiis semper verum nunquam falsum eliciatur, majus argumentum pro ipsorum principiorum alias dubiorum veritate afferri non posse. Sed ut ad Tuas, Vir Amplissime, litteras redeam, quibus etiam dubium inseruisti circa factum reale, quod ex factoribus imaginariis resultet, Tibique improbabile videatur. Adhoc praeterea, quae ad Kuhnianas exceptiones respondi, aliud dubium reponam, quo Tuo dubio occurri arbitror. Si numerus realis puta 2 per imaginarium $\sqrt{-3}$ dividatur, quotus certe non potest esse realis numerus, in quo Te, Vir Amplissime, sine dubio consentientem habeo. Est enim quotus $\frac{2}{\sqrt{-3}}$ omnino imaginarius, quotus autem iste per divisorem $\sqrt{-3}$ multiplicatus, ex natura divisionis dividendum 2 reproducere debet. En ergo casum, quo factum ex duobus numeris imaginariis est numerus realis. Quod autem dicis ex multiplicatione impossibilis oriri non posse possibile id utique verum est si multiplicationem per possibile fieri intelligas; at si per impossibile fit multiplicatio exallato exemplo, id fieri posse satis intelligitur. Ita quod negas esse $16 = \sqrt{-4} \times (-4\sqrt{-4})$, non video, placeat tantum 16 per $\sqrt{-4}$ dividere, quotus certe erit imaginarius, ut $-4\sqrt{-4}$ vel alius quisquiam, prout libuerit. Quisquis autem sit, is per divisorem $\sqrt{-4}$ multiplicatus producere debet 16. At forte negabis hujusmodi divisionem fieri posse, in quo equidem assentior, si per divisionem possibilem intelligas, qua quotus possibilis invenitur; si divisio autem fit per divisorem imaginarium, non video, cur quotus quoque imaginarius minus admittendus sit, quam ipse divisor. Clar[issimus] Kuhn promisit Academiae nostrae duas dissertationes, quas oppido expectamus, etsi ego eas non tantopere videre gestio, quam methodum inveniendi summas potestatum numerorum naturalium, quam pariter promisit. Interim tractatum ejus de collineatione fistularum bellicarum perlegi methodumque Wolfiano more adornatam valde sum admiratus; remque ipsam etsi non novam, sed a Fr. Lana in Mag. Nat. et Art. satis distincte explicatam, per quam profunde tractasse videtur.

Videris praeterea negare, Vir Amplissime, calculum quantitatum imaginariarum ad quicquam expedire. Sed praeter innumera exempla, quae afferri possent ad ostendendum, quod hic calculus ad realia eruenda sit summe necessarius, unicum afferam: ex circulo desumtum cujus radius sit 1, tangens cujusdam anguli t et arcus respondens s. Erit $s = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log(-) \frac{t+\sqrt{-1}}{t-\sqrt{-1}}$. Sit alius arcus ns ejus tangens T. Erit $ns = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log(-) \frac{T+\sqrt{-1}}{T-\sqrt{-1}}$, quarum expressionum singulae partes etsi sunt imaginariae, tamen conjunctae reale quid exhibent. Hinc sequitur fore $(-)\left(\frac{t+\sqrt{-1}}{t-\sqrt{-1}}\right)^n = (-)\frac{T+\sqrt{-1}}{T-\sqrt{-1}}$, qua aequatione relatio tangentium T et t arcuum datam rationem habentium continetur. Hanc igitur relationem, quae realis si volueris ex ista aequatione eruere, omnino opus erit methodo eaque recepta tractandi quantitates imaginarias, quemadmodum videre licet in Act[is] Lips[iensibus] circa A. 1720, ni fallor, ubi haec expressio fusius a Cel[eberrimo] Joh. Bernoulli est pertractata. Hujusmodi exemplum quoque occurrit in praesentibus responsis ad Cl[arissimum] Kuhn, in quibus cujusque aequationis cubicae tres radices exhibui, quarum ope in casibus particularibus radices, etsi sint omnes reales, tamen sine legitima imaginariarum tractatione inveniri non possunt. Sin autem objicias haec realia aliis modis quoque obtineri posse, hoc quidem nil contra me faceret, non enim negavi id fieri non posse. Sed in mea «Mechanica», quando prodierit, quod aliquot mensibus fieri spero (utriusque enim tomi jam plus dimidio est impressum) plurima hujus modi exempla invenies in quibus vix puta ad solutiones (quae sunt reales) sine intermedio imaginariarum perveniri potuisse. Ubi ergo nisi receptis iisque legitimis regulis uti voluissem, in quantos errores incidissem! Tomus IV Comment[ariorum] jam ante aliquot menses est absolutus et propediem sequens typis mandari incipietur. Brevi igitur spero illum Tomum ad Vos allatum iri. Desideras tandem, Vir Amplissime, methodum meam de pontibus conjungendis videre, quam lubentissime Tuo iudicio subjicio. Dum autem solutionem hujus problematis ad casum Regiomontanum accommodati a me petis, videris arbitrari, quasi ego hujusmodi conjunctionem pontium invenissem, quod quidem non feci, sed demonstravi talem conjunctionem omnino fieri non posse, quod solutionis loco assumi debet. Methodus autem mea est universalis, ejusque ope quocunque hujusmodi casu mihi oblato statium discernere queo, utrum transitus per sinqulos pontes institui queat, an secus, et priori casu quomodo sit instituendus. Methodum igitur meam quemadmodum eo perveni succincte explicabo. Consideravi ramorum fluvii figuram quamcunque et pontes a, b, c, d, e, f, ut figura repraesentat,. et finxi transitum possibilem esse, quem sequenti exprimendi modo repraesentabo. Regiones, quae a se invicem aqua diremtae sunt, designo literis A, B, C, et cum singulis per pontes transitus ex una regione in aliam pervenitur, transitus ex A ad B per pontem vel a, vel b, perinde enim est uter sumatur commodissime designabitur per AB, quarum prior littera A denotat regionem, in quam pervenitur. Ita $ABCACAB$ denotabit transitum, factum per omnes pontes semel, quarum litterarum numerus unitate superare debet numerum pontium; hocque in omni possibili transitu hoc modo designato locum habere debet, quod cuique facilius ipsi est perspicere, quam demonstrare. Nunc considero quoties in serie litterarum A, B, C, A, C, A, B quae litterarum ABC occucrere debeat, it quod ex numero pontium, ad quamque regionum ducentium judicare poterit. Sic ad regionem A ducunt quinque pontes: a, b, c, d, e, et quoties littera A in medio illius seriei occurrit, toties duo horum pontium percurruntur, nam altero in regionem A est perventum, altero inde egressum. At si A vel in principio illius seriei occurrit, vel fine, tum unicus pontis transitus ipsi A respondet. Ex quo sequitur, si numerus pontium, ad regionem A ducentium, fuerit impar, tum transitum per omnes pontes fieri non posse, nisi vel initium ex regione A capiatur, vel finis in regione A terminetur. At si numerus pontium, ad A ducentium, foret par, tum transitus fieri posset neque in A incipiendo neque finiendo, sed si in A inciperetur ibidem finiri deberet. Hoc scilicet exinde sequitur, quod in serie $ABCACAB$ quaevis littera, praeter primam et ultimam, transitum per duas pontes ad regionem, ea littera signatam ducentem denotet. Teneatur ergo ista regula: si in quacunque figura pontium numerus, ad aliquam regionem ducentium, fuerit impar, tum transitus desideratus per omnes pontes semel tantum fieri non potest, nisi vel cursus in illa regione incipiatur, vel finiatur. Atsi numerus pontium est par, exinde nullum impedimentum tum concludi potest, saltem neque initium, neque finis cursus eo determinatur. Ex his sequitur ista regula generalis: si plures fuerint regiones duabus, ad quas pontes numero impares conducunt, tum transitus desideratus omnino fieri non potest. Impossibile enim est, ut in una quaque earum regionum cursus vel incipiatur vel finiatur. At si duae tantum hujusmodi fuerint regiones (unica autem vel numero impares hujusmodi regiones non dari possunt), tum transitus per omnes pontes fieri poterit, sed hac conditione, ut initium cursus in altera earum regionum, finisque in altera sumatur. Ubi exposita figura A et B sunt regiones, ad quas pontes numero impares conducunt, ad C vero pontium ducentium numerus est par, quare pronuncio transitum seu conjunctionem pontium fieri posse, si cursus vel ex A, vel ex B sumatur, si quis autem ex C vellet cursum incipere, is nunquam scopum affingere posset. In situ pontium Regiomontanorum habeo quattuor regiones A, B, C, D, aqua a se invicem separatas, ad quarum singulas impar pontium numerus conducit. Cum igitur sint plures duabus regiones, ad quas pontes numero impares conducunt, pronuncio, uti demonstravi talem pontium conjunctionem plane esse impossibilem. Hac igitur tam facili regula pro figura quomodocunque intricata momento fere discerni potest utrum ejusmodi pontium conjunctio, qua trans omnes semel tantum itur detur, an non? Possibilis autem erit conjunctio, si vel nulla fuerit regio, vel duae tantum, ad quas pontes numero impares deducunt, in quorum casuum illo initium ubi libuerit, sumi potest, eodemque finis incidet. In posteriori vero casu initium cursus in altero illarum regionum sumi debet, finisque in alteram incidet. Impossibilis vero erit conjunctio, si plures duabus fuerint regiones, ad quas pontium decentium numerus est impar. Vides ergo, Vir Amplissime, solutionem hanc ita esse comparatam, ut vix ad mathesin pertinere videatur neque ego comprehendo, cur ea potius a mathematico sit expectanda, quam a quovis alio homine, sola enim ratione nititur ista solutio nec ullis mathesi propriis principiis ad eam in veniendam opus fuit. Nescio igitur quomodo fit, ut quaestiones etiam ad mathesin minime spectantes citius a mathematicis solvantur, quam ab aliis. Locum interim huic quaestioni concedis, Vir Amplissime, in Geometria situs, de qua autem nova disciplina fateor me ignorare, cujusmodi problemata ad eam referenda velint Leibnitius et Wolffius. Rogo igitur Te, si me idoneum judicas in hac nova disciplina quicquam praestandi ut mihi aliquot definita problemata, eo spectantia, proponere velis, quo distinctius perspicere queam, quid praecise desideretur.

Cum interim judicem, Teque idem judicare persenserim disciplinas mathematicas maxime ex soli problematis multo proponendis et solvendis, cujus quidem exercitii Te hortante initium fecit Cl [arisimus] Kuhn, optarem, ut pergeret nobis ejusmodi problemata, quae difficiliora judicat, proponere tum ad augmentum scientiae, tum ad vires nostras intendendas. Interea autem non gravaberis sequentia problemata accipere, quae Cl [arissimum] Bernullium inter et me sunt agitata, quaeque si ita visum fuerit Cl [arissimo] Kuhnio proponere velis.

Cl [arissimus] Bernoullius scilicet mihi sequentia proposuerat problemata.

I. Determinare oscillationes penduli flexilis v. g. catenae seu funis suspensi, saltem minimas, quaeritque proposito hujusmodi pendulo longitudinem penduli simplicis eodem tempore oscillationes absolventis. Ad hanc quaestionem solvendam utique requiritur, ut curvae, quam tale pendulum inter oscillandum induit, natura definiatur. Auctor autem essem Cl [arissimo] Kuhnio, ut antequam solutionem aggrederetur, experimenta instituat, id quod mihi saltem magnam lucem hac in re attulit.

II. Determinare oscillationes laminae elasticae (minimas tantum) altero termino pavimento firmo infixae. Requiritur scilicet iterum longitudo penduli simplicis isochroni, et quamnam ea relationem habeat, ad longitudinem laminae et vis elasticae quantitatem. Poterit autem pro arbitrio hypothesis elasticitatis accipi, quippe quo solutio vix variatur, nos quidem ea hypothesi usi sumus, quae ad curvaturam laminae elasticae indagandam adhiberi solet. Ad haec monere habeo, ad hoc problema solvendum opus esse iterum, ut curvae, quam lamina inter oscillandum induit, natura determinetur.

Celeb [errimo] Bernoullio vero ego contra sequentia ambo proposui problemata.

I. Determinare motum penduli simplicis oblique moti. Pendulum enim triplici modo moveri potest, primo si filum cum annexo pondere in eodem plano movetur oscillationesque consueto modo peragit, quiquidem motus jam satis est pertractatus. Secundo si pendulum ita movetur, ut filum conum pondus vero circulum describat, qui motus a Cel [eberrimo] Joh [anno] Bernoullio motus turbinatorius vocatur ab eodemque in actis Lips [iensis] superque est examinatus. Tertius penduli motus, de quo hic loquor, est quisquis diversus motus ab allegatis. Si autem placeat experimenta instituere, reperietur pendulum figuras oblongas describere, quarum linea absidum, si ita appellare licet, non quiescit, sed mutabilis est. Quaero igitur naturam hujus curvae oblongae et motum lineae istius absidum; animum autem abstraho ab omni resistentia.

II. Duas quaero curvas algebraicas AM, AN, adeundem axem AP relatas, quae non sint rectificabiles, sed quarum utriusque rectificatio pendeat a datae curvae quadratura (circuli puta), quae tamen curvae ita sint comparatae, ut summa arcuum eidem abscissae AP respondentium nempe $AM+AN$ sit absolute rectificabilis.

Heac problemata si non solum Cl[arissimo] Kuhnio, sed aliis quoque Geometris volueris proponere, non dubito, quin exinde Analysi magnum incrementum sit accessurum. Sed nisi Te summum hujus studii Amatorem esse cognoscerem, vererem, ne ad fastidium prolixus fuissem. Quare finio, rogans, ut meo nomine plurimam salutem significare velis tum Filio Tuo praestantissimo, tum Clarissimo D[octore] Kuhn. Vale ergo, Vir Amplissime, meque Tuo favore atque adeo Amicitia dignari perge.

Dabam Petropoli d. 3 Aprilis 1736.

Печатается по копии, написанной писарским почерком и заверенной Тидеманом (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 22, лл. 33—41 об.).

Пометы Эйлера: «Соответствует оригиналу. — Л. Эйлер, 3 апреля 1736». «Передано в Архив Академии наук 29 марта 1736 г.». В этот же день письмо было представлено в Академическом собрании(Протоколы, т. I, стр. 258).

Отрывок письма от слов: «что же касается. . .» до «$\frac{691p^{12}}{638512875}$» опубликован: Commentarii Academiae Sc. Petropolitanae, СПб., т. VII, стр. 123.

[1] Речь идет о письме К.-Л.-Г. Элера Л. Эйлеру от 9 марта 1736 г. (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 21, лл. 35—37 об. — подлинник и лл. 38—39 об. — копия). Письмо было представлено в Академическом собрании 26 марта 1736 г. (Протоколы, т. I, стр. 258).

[2] Имеется в виду письмо Г. Кюна К.-Л.-Г. Элеру, в котором Кюн подробно, в 12 пунктах, изложил свои взгляды на природу отрицательных и мнимых величин, постоянно ссылаясь на высказывания Л. Эйлера по этому вопросу (ААН СССР, р. I, оп. 6, № 38/1, лл. 1—5 — оригинал и ф. 1, оп. 3, № 19, лл. 40—51 об. — копия). Это письмо К.-Л.-Г. Элер прислал в Петербургскую Академию

одновременно с письмом от 9 марта 1736 г.; оно было представлено Академическому собранию 26 марта 1736 г. (Протоколы, т. I, стр. 258).

[3] См. прим. 11 к 1-му письму Эйлера Элеру (см. стр. 306 настоящего издания).

[4] В письме от 9 марта 1736 г. (см. прим. 1 к настоящему письму) К.-Л.-Г. Элер выражал пожелание, чтобы переписка Эйлера и Кюна была издана под названием «Commercium mathemathicum» (Математическая переписка).

[5] Неясен текст. Если Эйлер имеет в виду, что уравнение бесконечной степени должно иметь бесчисленное множество корней (вещественных или мнимых), то это неверно. О разложении $1-\sin y$ в произведение и получающихся отсюда рядах см.: Переписка Л. Эйлера и Дж. Стирлинга и примечания к ней. Историко-математические исследования, вып. X, стр. 117—158.

[6] Здесь говорится о трактате Г. Кюна: Commentatio de motu gravium ex fistulis bellicis projectorum (Рассуждение о движении тяжестей, выброшенных из оружейных стволов) — ААН СССР, р. I, оп. 6, № 38/3, лл. 1—14, — присланном в Петербургскую Академию вместе с письмом К.-Л.-Г. Элера от 9 марта 1736 г. и представленном Академическому собранию 26 марта 1736 г. (Протоколы, т. I, стр. 259). Трактат был передан Г.-В. Крафтом в Архив 16 августа 1736 г. после того, как почти все профессора ознакомились с ним (там же, стр. 296).

[7] Речь идет о статье И. Бернулли: Responsio ad nonneminis provocationem, eiusque solutio quaestionis ispi ab eodem propositae de invenienda Linea curva, quam describit projectile in medio resistente (Ответ на анонимный вызов и решение его же задачи, предложенной автору, о нахождении кривой линии, которую описывает движущаяся точка в среде с сопротивлением) — Acta Eruditorum, Leipzig, 1719, май, стр. 216—226. По этому вопросу И. Бернулли опубликовал в «Acta Eruditorum» еще две статьи: Operatio analytica, per quam deducta est eiusdem solutio, quae extat in Actis Lips. 1719 m. Maii, Problematis de invenienda curvae, quae describitur a projectili gravi in medio resistente (Аналитическое вычисление, с помощью которого найдено решение, опубликованное в лейпцигских «Acta», 1719, май, задачи о нахождении кривой, которую описывает материальная точка в среде с сопротивлением) — там же, 1721, май, стр. 228—230; Variae solutiones et constructiones Problematis propositi in Actis Lips. Supplem. Tomo VII p. 352: de curvis motis secundum axem et se mutuo constanter ad angulos datos secantibus (Различные решения и построения задачи, предложенной в лейпцигских «Acta», Suppl., T. VII, Sec. VIII, стр. 352: о кривых, движущихся вдоль за осью и взаимно пересекающихся под данными углами) — там же, 1722, август, стр. 396—413.

[8] В письме К.-Л.-Г. Элера от 9 марта 1736 г. (см. прим. 1 к настоящему письму) о проекте семи кенигсбергских мостов говорилось следующее: «Ты доставишь большое удовольствие и мне, и нашему Кюну и заслужишь нашу величайшую благодарность, ученейший муж, если пожелаешь сообщить решение вместе с доказательством достаточно известной Тебе задачи о построении семи кенигсбергских мостов. Это будет труд, представляющий от-

личное место для вычислений и вполне достойный Твоего гения. Я прилагаю схему указанных мостов» — ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 21, лл. 36, 37 об. См. также письмо Л. Эйлера к Маринони от 13 марта 1736 г. (там же, ф. 136, оп. 2, № 3, лл. 74—75), где говорится о решении этой задачи (стр. 152 и след. наст. издания), и письмо Г. Кюна К.-Л.-Г. Элеру, где Кюн одобряет решение, предложенное Эйлером (ААН СССР, р. I, оп. 6, № 38/4, л. 14).

[9] Решение этих задач Эйлер сообщил Д. Бернулли в июне 1735 г. (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 19, лл. 146—151).

[10] Решение этой задачи см. в 3-м письме Эйлера Стирлингу — Историко-математические исследования, т. X, стр. 133—151.

4

1 [12] сентября 1736 г. Петербург [1]

Преславный муж,

Твое любезное письмо вместе с посланием славнейшего Кюна передано мне кенигсбергским торговцем Кадом и прочитано мною с величайшим удовольствием; [2] с большим удивлением узнал я, что славнейший Кюн в вопросе относительно отрицательных и мнимых величин изменил свое мнение и перешел на нашу сторону.[3] В этом деле, по-видимому, не малой является моя заслуга, а именно то, что я привел такие доказательства, которые смогли убедить столь серьезного противника; я не сомневаюсь, что эти же самые доказательства вместе с сомнениями, которые вначале были против них высказаны, будучи представлены на суд публики, привлекут также и других сторонников к этому мнению. В самом деле, когда недавно в мои руки попало последнее издание «Основ всеобщего знания» славнейшего Вольфа,[4] я был весьма удивлен, что теперь этот муж значительно больше, чем он это делал прежде, защищает разнородность положительных и отрицательных величин; [5] правда, утверждая это, он сам поставил себе столь непреодолимые трудности, что не смог избежать их с помощью какого-нибудь мало-мальски возможного математического рассуждения. Ибо, отрицая, что разнородные величины допускают между собой действия сложения и вычитания, он в то же время считает возможным одобрить такого рода сложения и вычитания и пытается разрешить возникшее противоречие геометрическим способом; [6] всех этих трудностей он легко мог бы избежать, если бы дал однородным величинам такое определение: это такие величины, из которых одна, не взятая несколько раз, но увеличенная на положительное количество, может быть больше другой. Ибо таким определением он не исключил бы однородности отрицательных величин с положительными, но при таком условии смог бы избежать всех трудностей; мне представляется, что такой же недостаток ясно заметен в определении, данном славнейшим Кюном, когда он пишет, что теперь он переходит к истинным определениям как отрицательных, так и мнимых величин и употребляет это понятие вместо недостаточных вольфианских и других [определений], так как при их сопоставлении уже не может произойти никаких сомнений.

Я, правда, еще не ставил себе задачей дать подлинное определение однородности и, не заботясь о названиях такого рода, все те величины, которые получаются только из понятия положительных величин и в результате действий с ними, считаю вещами однородными или такими, которые могут смешиваться друг с другом и поддаются исчислению. Итак, обычно при занятиях с новичками я исследую только понятие о положительных и целых величинах и произвожу с этими величинами действия, во время которых, прежде всего при вычитании, получаются отрицательные величины, причем я одновременно излагаю понятие о них. Затем в делении я привожу их к понятию о дробях и далее, при извлечении корней, к понятию иррациональных и мнимых чисел. Ибо в такой последовательности мы получаем не только более ясное представление об этих величинах, но вместе с тем при их возникновении мы узнаем, каким образом они вступают во взаимодействие; тот же, кто хочет выяснить, являются ли эти величины однородными или разнородными, только вносит путаницу в рассмотрение этого вопроса, ибо математические действия зависят от самой природы величин, а не от слов. Поскольку я вижу, что славнейший Кюн это уже заметил, я не сомневаюсь, что он убедит и Тебя, славнейший муж, принять ту же самую точку зрения, к тому же и я представлял многие доказательства другим ученым; ибо относительно любых его суждений, истинность которых он прежде отрицал, многие доказательства обычно бывают более основательными, чем те, которые он всегда приводил.

Во всяком случае, многие примеры того, что предложил Лейбниц, подобны тем, которые уже изучались геометрами и изучаются в настоящее время и с помощью которых едва ли возможен истинный переход к мнимым [величинам]; однако в отдельных случаях обычное исчисление в этих трактатах бывает невозможно применять, а при пренебрежении этим обычным исчислением получаются нелепости. По крайней мере, как мне представляется, каждый, кто изучал задачи этого рода, пользовался обычным исчислением и достиг правильного результата; итак, я очень хотел бы видеть пример этого рода, в котором обычное исчисление привело бы к абсурду, в этом отношении достойный Крузац и другие современные [ученые], склоняющиеся более к метафизике, чем к анализу, не имеют у меня никакого авторитета. Что же касается мнения, будто бы из исчисления мнимых получается абсурд, что $\frac{0}{0}$ может быть равен 2 или какому-нибудь другому числу, то это вообще не является абсурдом, но допускается всеми геометрами, ибо как m относится к n, так 0 относится к 0, следовательно, $\frac{m}{n}=\frac{0}{0}$; и в любом данном случае, каким будет истинное значение дроби этого рода, в которой исчезают как числитель, так и знаменатель, тотчас можно заключить из принятого правила. Так, $\frac{1-x^6}{1-x^5}$, если принять $x=1$, переходит в $\frac{0}{0}$; в этом же случае значение указанной дроби будет $\frac{6}{5}$. Если искать значение дроби

$$\frac{a-x}{\sqrt{(2ax-xx)}-\sqrt{ax}}$$

в случае, когда $x=a$, то получится $\frac{0}{0}$, но можно показать, что дробь в этом случае равна 2. Этот вариант уже до такой степени изучен, что не может быть никакого сомнения.

Подобным же образом я не испытываю никакого затруднения, когда утверждаю, что $\frac{a}{a^3}$ (если a обозначить некоторую линию), умноженное на a^3, не дает a; что же касается шутки относительно гуся и гипоцентавра, то она заключает в себе не бо́льшую трудность. Ибо, если гусь, разделенный на гипоцентавра, дает мнимое частное и если его надо умножить на гипоцентавра, чтобы получился гусь, а также необходимо, чтобы это была мнимая [величина], то я не понимаю, почему Ты утверждаешь, что мнимая [величина] отлична от указанного мнимого частного.

Далее Ты спрашиваешь, славнейший муж, что же такое мнимые величины, если они не равны нулю, не больше и не меньше нуля? Я отвечаю, что на то они и мнимые величины, ибо если бы они были или равны нулю, или больше, или меньше нуля, то тогда они были бы реальными, а не мнимыми. И в этом отношении они не могут быть отнесены ни к положительным величинам, ни к отрицательным, из которых одни больше нуля, а другие меньше нуля, но составляют как бы собственно класс мнимых величин, к которому они присоединяются. То же, что вытекает из этого понятия, если Ты не хочешь считать Твоим, то пусть будет моим, ибо оно не только не противоречит моей теории, но и подкрепляет ее. До нас уже дошла последняя работа славнейшего Вольфа «О естественной теологии», но мне еще не удалось ознакомиться с нею; впрочем, я опасаюсь, не был бы этот труд подобен «Космологии» или «Онтологии», которые являют собой только видимость истины. Я не сомневаюсь, что IV том наших «Комментариев» уже передан вам, так как он давно послан отсюда в Германию, теперь же начинают печатать пятый [том]. Оба тома моей «Механики» в типографии уже закончены, и экземпляр их я при первой возможности намерен послать Тебе, славнейший муж. Прошу Тебя приветствовать от моего имени преславного Кюна и передать ему, что я очень благодарен ему за то, что он соблаговолил сообщить мне такие отличные сочинения.

Мои первые способы суммирования степеней, действительно, определяют мой анализ, ибо я получил его из различных непрерывных величин с помощью обычного метода, которым суммируются все ряды, какие в конце концов приводятся к различным константам. Однако этот способ имеет недостаток, так как он приводит к формулам, содержащим неизвестное n, сопровождаемое множителями; обычно таким образом исследуются формулы суммирования, в которых члены расположены в соответствии с неизвестной; этим преимуществом отличается также мой последний способ. Способ же Кюна, хотя он весьма остроумен, имеет такой же недостаток и требует много времени и труда для приведения формулы суммирования к такому виду. Впрочем, мне представляется мало удобным, что число членов в последней его форме на единицу меньше, чем в первой, ибо сами члены более сложны и тем труднее их развернуть, а это является причиной того, что я на практике всегда предпочитаю ей первую, которая дает $Sn^m = \frac{n}{1} 1^m + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(2^m - 1)$ и т. д.

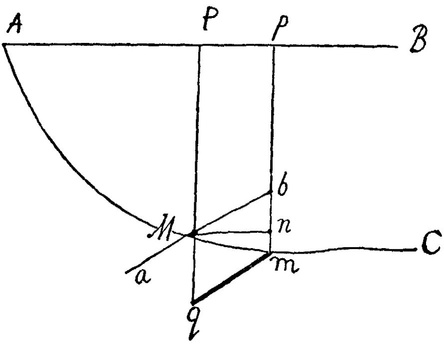
Моя же последняя формула для величины Sn^{100} имеет только 52 члена и дает их уже расположенными в обычном порядке.[7]

Что касается коэффициентов последней формулы славнейшего Кюна, то в рядах, которые он недавно здесь нам предложил в виде задачи, я подозреваю, что он сам прекратил заниматься суммированием; я, занимаясь этим же вопросом, пришел к такому же, хотя причиной этого была возможность получения общих членов, а если бы я не наблюдал этого, я никогда не смог бы ничего получить. Ибо начальные члены, сколько бы их ни было, не определяют ряда; [они определяют] только закон или некоторое свойство, которое следует знать для определения ряда. Что сумма кубов есть квадрат соответствующего треугольного числа, для меня уже давно стало ясным; это было еще, насколько я помню, в работах Якова Бернулли о бесконечных рядах; между тем я видел недавно эту теорему в «Дифференциальном методе» славнейшего Стирлинга, в книжке, которая полна точнейших открытий относительно рядов.[8]

Недавно я написал довольно любопытное рассуждение «О движении по реке лодок, толкаемых веслами»;[9] это доказательство достойно более пространного изложения. Прежде чем перейти к рассмотрению этого вопроса, я сделал два предположения: I. Лодка, толкаемая веслами в спокойной воде, движется равномерно в направлении оси, или хребта, лодки; это положение имеет место, если на весла постоянно действуют одинаковые силы, хотя и не с самого начала движения, чем можно пренебречь. II. Лодка, находящаяся в реке и не толкаемая веслами, плывет по течению реки таким образом, что ее уносит в направлении [течения] реки с той же самой скоростью, с которой движется река; положение, которое также в действительности имеет место и по отношению к началу движения.

Итак, когда дано движение лодки, или толкаемой веслами в спокойной воде, или не толкаемой веслами в реке, то движение лодки, толкаемой веслами в реке, можно определить следующим образом.

Пусть AB будет прямая, перпендикулярная течению реки, AMm — кривая, по которой движется центр лодки



или какая-нибудь фиксированная точка M, ab — положение оси лодки; при условии, что полный синус равен 1, синус угла $PMb = q$. Положим, скорость лодки в направлении $Mb = c$, скорость реки, которая на отрезке AP повсюду является переменной, u; скорость же лодки в ее пути $Mm = v$. Если провести ближайшую аппликату pm, то $AP = x$, $PM = y$, $Pp = Mn = dx$, $mn = dy$ и $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$. Продолжим PM до q, так чтобы было $Mb : Mq = c : u$; тогда Mm будет диагональю параллелограмма bq. Следовательно, $\sin bMm = \frac{udx}{cds}$; а поскольку этот угол будет равен сумме углов $bMn + mMn$, то $\frac{udx}{cds} = \frac{qdy + dx\sqrt{(1 - qq)}}{ds}$ или $dy = \frac{udx - cdx\sqrt{(1 - qq)}}{cq}$; из этого уравнения становится известным характер кривой AMm, если дана повсюду скорость реки u и направление лодки; отсюда следует, что если как u, так и q будут постоянными [величинами], то путь лодки будет прямой линией.

Итак, если эта задача решена, то возникает новая [задача]: найти путь AMC, который должен быть пройден лодкой с тем, чтобы она в кратчайший срок из A перешла в C. Время выражается через $AM = \int \frac{dx}{cq} = \int \frac{ds^2}{udy + \sqrt{(c^2ds^2 - u^2dx^2}}$. Следовательно, нужно определить кривую, для которой это последнее выражение будет наименьшим, если u каким-либо образом будет выражено через x. Я нашел для этой кривой такое уравнение: $dy \frac{(u^2 + au - c^2)\, dx}{c\sqrt{(a+u)^2 - c^2}}$ (где под a следует понимать произвольную постоянную величину).[10] Прошу Тебя, соблаговолили сообщить преславному Кюну это [уравнение]. Наконец, наши друзья приказали мне приветствовать Тебя, я же покорнейше прошу Тебя постоянно сохранять Твое благоволение ко мне.

Со всей почтительностью пребываю, славнейший муж,

Твой покорный слуга

Леонард Эйлер.

Петербург, 27 августа 1736.

P. S. Когда я закончил это письмо, мне была передана кенигсбергским студентом [11] записка без письма, озаглавленная «Решение некоторых петербургских задач» и подписанная М. Кнутценом.[12] Я тотчас подумал, что эти задачи, которые славнейший Крафт и я когда-то через Тебя предложили преславному достойному Кюну, Вами были переданы этому славнейшему мужу.[13] Поэтому, если это не будет Тебе неприятно, я пересылаю мои заметки Тебе, зачинателю и покровителю этой переписки. Итак, первая задача, которую он решил, так же как и вторая, были предложены славнейшим профессором Крафтом; одна из них касалась определения расстояния солнечного пятна от [центра) солнца, вторая — нахождения двух точек вне сферического зеркала; обе эти задачи были удачно решены преславным знаменитым Кюном.

Иначе получилось у славнейшего Кнутцена, ибо при решении первой задачи он пренебрег видимым диаметром Солнца, вместо пропорциональности, которую он дает, а именно, $\cos 10^\circ$ так относится к полному синусу, как полудиаметр $\odot$ к расстоянию пятна от центра Солнца, надо было бы указать, что cos 10°—16′ так относится к полному синусу, как полудиаметр ⊙ к расстоянию пятна от центра ⊙. Другую же задачу только для случая, когда дуга зеркала равна 120°, он хотя и решил правильно, но сделал неверный вывод, будто это решение возможно только в определенных случаях. Третьей была задача, некогда предложенная мной, в которой требовалось найти, когда тот, который занял 1000 гульденов из 8 процентов, при условии, что плата за пользование капиталом ежегодно будет прибавляться к капиталу, будет должен 5000 гульденов; эту задачу он решил правильно.

Ему также принадлежит честь решения моей задачи, где я постулировал ряд целых чисел, обладающих таким свойством, что квадрат некоторого числа вместе с тем является треугольным числом; этот ряд начинается с членов 1, 6, 35, ибо квадраты чисел 1, 36, 1225 есть треугольные числа с основаниями 1, 8, 49. Он продолжает этот ряд таким образом: 1, 6, 35, 1189, 1 412 496, 1 995 143 546 295 и т. д., считая, что квадраты всех этих чисел есть треугольные числа.

Здесь он совершил ошибку, ибо если четыре первых члена обладают этой особенностью, то из последующих ни одно не удовлетворяет этому условию, что при проверке легко обнаруживается. По-видимому, славнейший муж пришел к этому ряду с помощью недостаточной индукции, после того как он заметил, что 35 есть разность предшествующих квадратов 1 и 6, а также число 1189 есть разность квадратов, полученных от 35 и 6, и таким же образом он образовал следующие числа, весьма отклоняющиеся от цели. Истинным же будет следующий ряд с членами показательного вида

$$\overset{1}{1},\ \overset{2}{6},\ \overset{3}{35},\ \overset{4}{204},\ \overset{5}{1189} \ldots \frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}.$$ [14]

Что же касается утверждения славнейшего Кнутцена о легкости нахождения общего члена предложенного им ряда и о том, что это вполне доступно каждому, кто обладает даже поверхностными знаниями алгебры, то я с этим не согласен; скорее я мог бы признаться, что это нахождение слишком трудно для меня. Поэтому, если бы славнейший Кнутцен дал общий член своего ряда, то следовало бы считать, что он выполнил большой труд, даже значительно больший, нежели тот, который нужен для правильного решения задачи.

Vir amplissime,

Litterae Tuae gratissimae una cum Clar[issimi] Kuhnii scripto a D[ignissimo] Cade mercatore Regiomontano mihi sunt redditae, quas summa cum voluptate perlegi, atque non sine maxima admiratione intellexi Clar[issimum] Kuhnium circa quantitates negativas et imaginarias mentem mutasse et in nostras partes transiisse. In quo negotio non parum mihi praestitisse videor, si ejusmodi argumenta protulero, quae tam gravi adversario satis fecerint; neque dubito, quin eadem argumenta cum dubiis, quae initio contra ea erant objecta, si publici juris fierent, etiam reliquos istius sententiae fautores sint motura. Sane, cum nuper Cel[eberrimi] Wolfii novissima Elementorum Matheseos editio in manus meas incidisset, maxime sum admiratus, quod Vir iste eximius nunc magis, quam antea feceret, heterogeneitatem quantitatum affirmativarum et negativarum defendat; qua quidem assertione ipse se tam i extricabilibus objectionibus exponit, ut ne probabili quidem multo minus mathematico ratiocinio illis occurerre queat. Dum enim negat quantitates heterogeneas inter se addi subtrahive posse, interim tamen ipse hujusmodi additiones et subtractiones probare cogitur, apparentem hanc contradictionem modo geometricalo diluere conatur; quibus omnibus difficultatibus se facile subduxisset, si quantitates homogeneas ita definirisset, ut essent quantitates, quarum altera non quidem aliquoties sumta, sed quantitate positiva aucta, alteram superare queat. Hac namque definitione quantitates negativas ex homogeneitate cum positivis non exclusisset, hocque pacto omnes difficultates evitasset, quem quidem defectum in definiendo Clar[issimum] Kuhnium probe persensisse video, dum scribit se in veras quantitatum tam negativarum quam imaginariarum definitiones nunc incidisse, easque loco insufficientium Wolfianarum aliorumque substituisse, quibus semel positis nulla amplius dubia enasci possunt.

Ego quidem nondum fui sollicitus, ut genuinam homogeneitatis definitionem adipiscerer, sed potius hujusmodi nomina non curans, eas omnes quantitates, quae ex notione quantitatum positivarum tantum, earumque operatione oriuntur, pro homogeneis seu huiusmodi rebus habeo, quae interse misceri atque calculo tractari queant. Ita initio a Tyronibus aliam nisi numerorum affirmativorum et intergrorum notionem requirere non soleo, cum hisque operationes ostendo, ex quibus tum statim in substractione, quemadmodum quantitates negativae oriantur, expono simulque ideam de iis formo.

In divisione deinde perduco eos ad notionem fractionumque atque porro in radicum extractione ad notionem irrationalium atque imaginariarum quantitatum. Hoc enim ordine non solum multa clariores harum quantitatum ideas adipiscimur, sed simul ex earum generatione addiscimus, quomodo inter se tractari debeant, neque in hoc negotio quicquam turbatur, utrumquis hujusmodi quantitates pro homogeneis an pro heterogeneis habere velit; ex ipsa enim quantitatum natura non ex verbis operationes mathematicae pendent. Quae omnia cum Cl[arissimum] Kuhnium jam animadvertisse videam, non dubito, quin is Te etiam, Vir Amplissime, in eandem sententiam pertraxerit, adeo ut ego supervacaneum judicem plura argumenta proferre; pro quaevis enim sententia ejus, qui eam ante negaverit, argumenta multa solent esse graviora, quam qui semper affirmavit.

Plura utique exempla ejus, quod Leibnitius protulit, similia jam sunt a Geometris tractata et quotidie tractantur, quibus si transitu[m] per imaginaria verum vix erui potest, sed tantum abest, ut in iis tractandis calculus consuetus adhiberi nequeat, ut potius neglecto hoc calculo consueto absurda consequantur. Saltem quantum mihi constat, quilibet, qui hujusmodi problemata tractavit usus est calculo ordinario, atque ad verum pertigit; maxime igitur optarem hujusmodi exemplum videre in quo calculus ordinarius ad absurdum deduceret; neque in hoc genere D[ignissimus] Crousaz aut alii recentiores methaphysicae magis quam analysi litantes quicquam habent apud me auctoritatis. Quod autem ex calculo imaginariorum recepto hoc absurdum derivari arbitreri, quod $\frac{0}{0}$ possit esse $=2$ aut cuique alio numero, id omnino absurdum non est, sed ab omnibus Geometris admittitur; nam uti est m ad n, ita 0 certe ad 0, ergo est $\frac{m}{n}=\frac{0}{0}$; quisnam autem in quovis casu oblato sit verus fractionis hujusmodi, in qua tam numerator quam denominator evanescit, valor, ex regula recepta statim judicari potest. Ita $\frac{1-x^6}{1-x^5}$ posito $x=1$ abit in $\frac{0}{0}$; hoc autem casu istius fractionis valor fit $\frac{6}{5}$. Atque si quaeratur valor hujus fractionis $\frac{a-x}{\sqrt{(2ax-xx)}-\sqrt{ax}}$ casu quo fit $x=a$, utique prodit $\frac{0}{0}$, constat autem eam fractionem hoc casu fore $=2$. Sic ista materia iam ita est perlustrata, ut nullum amplius dubium superesse possit.

Simili modo nullam sentio difficultatem, cur $\frac{a}{a^3}$ (denotante a lineam quandam), per a^3 multiplicatam non producat a. Quod autem de ansere et hippocentauro jocari lubet, id non majorem habet in se difficultatem. Nam cum anser per hippocentaurum divisus det quotum imaginarium, certe id, per quod hippocentaurus multiplicari debeat, ut prodeat anser, quoque imaginarii quid sit necesse est, quod imaginarium cur diversum esse ab illo quoto imaginario affirmes, non intelligo.

Quaeris porro, Vir Amplissime, cum quantitates imaginariae neque nihil sint, neque majores, neque minores nihilo, quid tum sint? Ego respondeo, quod ideo sint imaginariae, nam si essent vel nihil, vel majores, vel minores nihilo, tum certe forent reales ideoque non imaginariae. Atque ob eam ipsam rationem neque ad quantitates affirmativas, neque negativas, quarum illae sunt nihilo majores, hae vero minores, referri possunt, sed peculiare genus constituunt quantitatum scilicet imaginariarum, ad quod quantitatum genus utique reducuntur. Quae autem ex hac notione consequuntur, si non velis Tua facere, ego mea sint patiar, non solum enim ea theoriae meae non adversantur, sed tota theoria etiam iis est superstructa. Pervenerunt jam ad nos Cel[eberrimi] Wolfii opera novissima de Theologia naturali, quae autem mihi pervolvere nondum licuit, interim autem vereor ne hoc opus simile sit Cosmologiae et Ontologiae, quae speciem veritatis tantum prae se ferunt. Non dubito, quin Comment[ariorum] nostrorum Tom. IV jam ad Vos sit perlatus, quippe qui jam pridem hinc in Germaniam est dimissus, et nunc quidem quintus incipiet imprimi. Meae quoque Mechanicae uterque Tomus in Typographia est absolutus, cujus exemplar prima oblata occasione ad Te, Vir Amplissime, sum transmissurus. Clar[issimi] Kuhnio rogo ut meo nomini plurimam salutem dicas eique significes, me Ipsi summa habere gratias, quod tot egregia specimina mecum communicari voluerit.

Primae meae methodi potestates summandi analysin recte meamque ipsam exhibet, deduxi enim eam ex differentiis continuis ope methodi communis, qua omnium serierum, quae tandem ad differentias constantes reducuntur, summari solent. Haec autem methodus hoc laborat incommodo, quod formulas praebeat, quae indeterminatam n factoribus involutam contineat, cum formulae summatoriae requiri soleant, in quibus termini secundum dimensiones indeterminatae sint dispositae, qua praerogativa utique posterior methodus mea gaudet. Methodus autem Kuhniana, quamvis sit perquam ingeniosa, eodem laborat incommodo, multumque tum temporis tum laboris requirit ad formulam summatoriam ad talem formam producendam. Ceterum hoc mihi parum commodi videtur, quod numerus terminorum posterioris ejus formae sit unitate minor quam prioris, termini enim ipsi eo magis sunt complicati, et evolutu difficiliores, quod in causa est, ut ego ad usum priorem, quam debit $\int n^m = \frac{n}{1} 1^m + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(2^m - 1)$ etc., alteri longe perferrem. Mea autem posterior formula valorem Sn^{100} tantum terminis 52 habet opus eosque jam ordine consueto dispositos exhibet.

Quod ad coefficientes terminorum posterioris formulae Cl[arissimi] Kuhnii attinet, quasque antea hic nobis tanquam series problematice proposuit, ego tum jam suspicatus eram ipsum in hoc negotio summandi occupatum in eas incidisse; ego enim in eodem negotio occupatus ad easdem perveni, quod etiam in causa fuit, ut ego earum terminos generales exhibere potuerim, quod quidem nisi hoc observassem nunquam facere potuissem. Termini enim initiales, quotquot etiam fuerint, non determinant seriem, sed lex vel proprietas quaedam, quam nosse oportet ad seriem definiendam. Quod summa cuborum quadratum sit respondentis numeri trigonalis mihi quidem jam pridem constitit, et quantum memini ex Jac[obi] Bernoulli dissertationibus de seriebus infinitis hausi; interim enim

Theorema nuper in Cl[arissimi] Stirlingii methodo differentiali quoque deprehendi, qui libellus plenus est accuratisimis circa series inventis. Commentatus sum nuper quaedam satis curiosa de motu cymbarum in fluvio remis propulsarum, quod argumentum dignum est ut magis excolatur. Antequam autem hanc quaestionem essem agressus duas sequentes feci hypotheses:

I. Cymba, in aqua quiescente remis propulsa, motu aequabili progreditur in directione axis seu spinae cymbae; quae positio nisi in ipso motus initio, quod negligi licet, locum habet, si quidem remiges perpetuo aequales vires adhibeant.

II. Cymba, in fluvio constituta nec remis propulsa, cursum fluvii sequetur, ita ut aequali celeritate, qua fluvius movetur, abripiatur in directione fluvii; quae positio quoque praeter ipsum motus initium revera locum habet.

Cum igitur detur motus cymbae, tum remis propulsae in aqua quiescente, tum remis non propulsae in fluvio, ex his motum cymbae remis propulsae in fluvio determinare licebit sequente modo.

Sit AB recta ad cursum fluvii normalis, AMm curva, in qua cymbae centrum seu punctum quoddam fixum M movetur, ab — positio axis cymbae; positoque sinu toto $=1$, sit sinus ang[uli] $PMb=q$. Ponatur cymbae celeritas in directione $Mb=c$, celeritas fluvii, quae sit pro latitudine AP utcunque variabilis, $=u$; celeritas vero cymbae in sua via $Mm=v$.

Ducta applicata proxima pm, sit $AP=x$, $PM=y$, erit $Pp=Mn=dx$, $mn=dy$, sitque $Mm=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$ $=ds$. Jam producatur PM in q, ut sit $Mb:Mq=c:u$, erit Mm diagonalis parallelogrammi bq.

Erit ergo $\sin bMm=\frac{udx}{cds}$; qui angulus cum sit summa ang[ulorum] $bMn+mMn$, erit $\frac{udx}{cds}=\frac{qdy+dx\sqrt{(1-qq)}}{ds}$, seu

$dy=\frac{udx-cdx\sqrt{(1-qq)}}{cq}$; ex qua aequatione natura curvae AMm innotescit, si detur celeritas fluvii u ubique et directio cymbae, ex qua patet, si tam u quam q fuerint constantes, viam cymbae fore lineam rectam.

Hoc igitur problemate soluto nascitur novum hoc: invenire viam AMC a cymba describendam, in qua cymba brevissimo tempore ex A in C pertingat.

Est autem tempus per $AM = \int \frac{dx}{cq} = \int \frac{ds^2}{udy + \sqrt{(c^2ds^2 - u^2dx^2)}}$. Quaeritur ergo curva, in qua haec postrema expressio sit minimum, dato u quomodocunque per x. Jnveni autem ego per hac curva hanc aequationem: $dy = \frac{(u^2 + au + c^2)\,dx}{c\sqrt{(a+u)^2 - c^2}}$ (ubi pro a quantitatem constantem arbitrariam ponere licet), quam Cl[arissimo] Kuhnio rogo ut communicare velis. Nostrates amici denique Te plurimum salvere jubent, ego vero enixe rogans, ut mihi favorem Tuum constanter serves, omni observantia cultu persevero esse. Vir Amplissime,

Tui observantissimus

Leonh[ard] Euler.

Dabam Petropoli, d. 27 Aug. 1736.

P. S. Cum has litteras finissem, tradita mihi est schedula sine litteris per studiosum Regiomontanum quae inscripta erat Resolutio problematum quorundam Petropolitanorum subscripta vero a M. Knutzen P. P. Statim igitur eram suspicatus ad hunc Virum Cl[arissimum] a Vobis haec problemata, quae Cl[arissimus] Krafft et ego olim Te mediante, Vir Amplissime, Cl[arissimo] D[iginissimo] Kuhnio proposueramus, pervenisse. Quamobrem nisi ingratum fuerit, meas notationes ad Te potissimum transmitto Auctorem atque Patronum hujus commercii. Primum igitur problema, quod resolvit, pariter ac secundum a Cl[arissimo] Professore Krafft erant proposita, illud circa distantiam maculae solaris a sole determinandam, hoc vero circa duo puncta extra speculum sphaericum invenienda versabatur, quorum utrumque a Cl[arissimo] D[ig]n[issimo] Kuhnio felicissime est solutum.

Secus autem res acc'dit Cl[arissimus] Knutzen, in prioris enim problematis solutione neglexit diametrum solis apparentem et loco analogiae, quam dat, ut cos[inus] 10° ad sin[um] tot[um], ita semid[iameter] ☉ ad distantiam maculae a centro solis, hanc dare debuisset, ut cos[inus] 10°—16′ ad sin[um] tot[um], ita semidiam[eter] ☉ ad distant[iam] maculae a centro ☉. Alterum vero problema tantum casu, quo arcus speculi est 120°, resolvit recte quidem, sed falso existimat id in certis tantummodo casibus possibile esse. Tertio aggreditur problema, a me aliquando propositum, quo quaerit [ur] quando is, qui 1000 H a 8 procent. debet, si quotannis usura sorti adjiciatur, 5000 H. debebit, ejusque solutio recte se habet. Problema denique meum iterum resolvere ornatur, quo seriem numerorum integrorum postulavi, ejus proprietatis, ut cujusque numeri quadratum simul sit numerus trigonalis, quae series incipit a terminis 1, 6, 35, horum enim numerorum quadrata 1, 36, 1225 sunt numeri trigonales radicum 1, 8, 49. Ita autem hanc seriem continuat: 1, 6, 35, 1189, 1 412 496, 1 995 143 546 295 etc., quorum omnium numerorum quadrata putat esse numeros trigonales.

Fallitq [ue] autem, nam etsi quattuor termini initiales hanc habeant proprietatem, sequentium nullus satisfacit, quod tentanti facile patebit. Videtur autem Vir Cl [arissimus] inductione insufficienti ad hanc seriem pervenisse, dum observavit 35 esse differentiam quadratorum praecedentium I et 6, praetereaque 1189, qui numerus item est differentia quadratorum a 35 et 6 ortorum hocque modo sequentes numeros formavit, a scopo maxime aberrantes. Vera quidem series ita progreditur, ut sit terminus exponentis

$$\overset{1}{1},\ \overset{2}{6},\ \overset{3}{35},\ \overset{4}{204},\ \overset{5}{1189},\ \ldots\quad \frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}.$$

Quod autem Cl [arissimus] Knutzen asserat seriei a se exhibitae terminum generalem inventu esse facilem, et a quolibet rerum algebraicarum leviter perito facile inveniri posse id equidem non video, sed potuis fateor hanc inventionem vires meas superare. Quare si Cl [arissimus] Knutzen suae seriei terminum generalem dederit, se magnum praestitisse opus sibi persuadeat, imo longe majus, quam si haec, quae attigit problemata, legitime resolvisset.

Печатается по копии (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 22, лл. 111—115 об.).

Пометы: «Представлено 1 сентября 1736 г.» «Соответствует оригиналу. — Л. Эйлер». «Удостоверяю, что копия соответствует оригиналу. — Тидеман».

[1] Датируется по протокольной записи, в которой говорится, что письмо было передано Эйлером для снятия копии 1 сентября 1736 г. (Протоколы, т. I, стр. 305). 3 сентября 1736 г. копия была снята и передана Эйлеру (там же, стр. 307).

[2] Здесь говорится о письме К.-Л.-Г. Элера Эйлеру от 19/8 июня 1736 г. (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 21, лл. 88—89 об. — оригинал и лл. 85—87 — копия). Письмо было представлено в Академическом собрании 28 июня 1736 г. (Протоколы, т. I, стр. 281). 1 июля 1736 г. с него была снята копия (Протоколы, т. I, стр. 282).

[3] Имеются в виду теоретические положения Кюна относительно отрицательных и мнимых величин, изложенные им в письме Элеру от 15 июня 1736 г. Это письмо Элер прислал в Петербургскую Академию. 28 июня 1736 г. оно было представлено в Академическом собрании (Протоколы, т. I, стр. 281). Письмо Кюна Элеру, а также письмо К.-Л.-Г. Элера Эйлеру от 19/8 июня находились у Эйлера с 23 августа 1736 г. (там же, стр. 300) до 27 августа 1736 г.; в этот день он передал эти письма в Академическое собрание (там же, стр. 300).

[4] См. прим. 8 к 1-му письму Эйлера К.-Л.-Г. Элеру (стр. 306 настоящего издания).

[5] См. прим. 6 ко 2-му письму Эйлера Элеру (стр. 329—330 настоящего издания).

[6] Здесь говорится о следующем положении Вольфа: «По-видимому, не следует считать странным, что между $3a$ и $5a$ существует то же самое отношение, что между положительными $+3a$ и $+5a$. — Ch. W o l f f. Elementa matheseos universae, Галле, 1713, стр. 300.

[7] Имеется в виду формула Эйлера—Маклорена.

[8] См. прим. 4 к 1-му письму Л. Эйлера Дж. Стирлингу: Историко-математические исследования, вып. X, 1957, стр. 152.

[9] Рассуждение Эйлера на указанную тему было представлено Гольдбахом в Конференции только 3 марта 1738 г.: Dissertatio de motu cymbarum remis propulsarum in fluviis (Рассуждение о движении по рекам лодок, толкаемых веслами) — Протоколы, т. I, стр. 262. Рукопись этого трактата хранится в ААН СССР (р. III, оп. 1, № 86). 17 апреля 1738 г. Эйлер прочитал часть своей работы в Академическом собрании (Протоколы, т. I, стр. 473); с заключительной частью он знакомил слушателей 8 мая 1738 г. (там же, стр. 478).

[10] Действительно, обозначив угол $PMb = \alpha$, имеем $dx = c \sin \alpha dt$, $dy = udt - c \cos dt$, откуда $y' = \dfrac{u}{c \sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha$ (1). Если ширина реки x_0, то время переезда будет, очевидно, равно $T = \int\limits_0^{x_0} \dfrac{dx}{c \sin \alpha}$ или, выразив из (1) $\sin \alpha$ через y', получим

$$T = \int\limits_0^{x_0} \frac{(1 + y'^2)\, dx}{uy' + \sqrt{c^2 (1 + y'^2) - u^2}} = \int\limits_0^{x_0} \frac{\sqrt{c^2 y'^2 + c^2 - u^2} - uy'}{c^2 - u^2}\, dx.$$

Уравнение Эйлера для вариационной задачи $T = \min$ дает

$$\frac{d}{dy'} \frac{\sqrt{c^2 y'^2 + c^2 - u^2} - uy'}{c^2 - u^2} = \frac{-1}{a}, \text{ откуда } y' = \frac{u^2 + au - c^2}{c \sqrt{(a + u)^2 - c^2}}.$$

[11] Здесь говорится о студенте Беке (Beek): см. письмо Г. Кюна Элеру (ААН СССР, р. 1, оп. 6, № 38/4, л. 14 и об.).

[12] Речь идет о присланном М. Кнутценом в Петербургскую Академию решении трех задач: Resolutio problematum quorundam Petropolitanorum (Решение некоторых петербургских задач) — ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 1, л. 34 и об. — оригинал и лл. 33 и об. и 35 — копия. Решение было представлено в Академическое собрание 24 августа 1736 г. (Протоколы, т. I, стр. 300—301) и передано академикам для ознакомления.

[13] Это предположение Эйлера подтверждается письмом Г. Кюна К.-Л.-Г. Элеру (1736 г.), в котором Кюн вспоминает, что 15 месяцев тому назад он через одного своего кенигсбергского приятеля послал Кнутцену эти задачи (ААН СССР, р. I, оп. 6, № 38/4, л. 14 об.).

[14] Треугольным числом называется число вида $\frac{q(q+1)}{2}$ (Здесь и дальше все буквы означают целые положительные числа). Чтобы треугольное число было полным квадратом, необходимо выполнить равенства $q=k^2$, $q+1=2s^2$ или $q=2t^2$, $q+1=m^2$ (ибо q и $q+1$ взаимно просты), т. е. $2s^2-k^2=1$, $m^2-2t^2=1$, или $\sqrt{2}\,s-k)(s\sqrt{2}+k)=1$, $(m-t\sqrt{2})(m+t\sqrt{2})=1$. Наименьшие значения s, k, m, t, удовлетворяющие этим равенствам, будут $s=k=1$, $m=3$, $t=2$, причем $3\pm2\sqrt{2}=(\sqrt{2}\pm1)^2$. Ясно, что $(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^n=1$ при любом n. Легко доказать по индукции, что $(\sqrt{2}\pm1)^{2l+1}=s^*\sqrt{2}\pm k^*$ (1) и $(\sqrt{2}\pm1)^{2l}=m^*\pm t^*\sqrt{2}$ (2).

Отсюда следует, что квадраты чисел k^*s^*, m^*t^* будут треугольными. Определяя из (1) и (2) k^*s^*, m^*t^*, найдем, что квадрат числа

$$r_n=\frac{1}{4\sqrt{2}}[(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n][(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n]=$$

$$=\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}\quad (3)$$ будет треугольным числом.

Нетрудно показать, что эта формула дает все целые числа, квадраты которых будут треугольными. Из формулы (3) следует, между прочим, $r_{n+1}=6r_n-r_{n-1}$. В письме к Ноде Эйлер сообщает, что это замеченное им свойство последовательности чисел r_n помогло ему найти явное выражение общего члена последовательности (3).

5

11 февраля 1737 г., Петербург

Великому и уважаемому мужу
Карлу Готлибу Элеру
шлет нижайший привет Леонард Эйлер.

Ожидая прибытия нашего знаменитого президента камергера де Корфа, я начал ответ на Твое последнее письмо,[1] великий муж. Я весьма благодарен Тебе, что Ты соблаговолил сообщить нам отличное рассуждение преславного Кюна об отрицательных и мнимых величинах,[2] в котором знаменитый муж теорию, до настоящего времени преподносимую с легкостью и небрежностью, изложил с таким свойственным ему старанием и остроумием, что, по-видимому, не остается желать ничего лучшего.[3] В этом вопросе мы можем добиться немалого развития математики, и прежде всего Ты, великий муж, так как Ты не только был зачинателем этого дружеского рассуждения, но своим старанием и авторитетом ввел его в должные границы и довел до конца. Славнейший же Кюн, со всей тщательностью собирая доказательства обеих сторон и подвергая их точному исследованию, не только ясно обнаружил недостаток необычного способа изучить этот предмет, но дал также изложение всей теории в точнейших законах, причем славнейший муж обнаружил и проницательный ум, и величайшую безупречность. Я считаю особенно важным то, что сказано обо мне, так как, собрав отовсюду множество доказательств, он освободил истину от столь многих обвинений. Я очень хочу узнать, что думает славнейший Вольф об этом споре, в результате которого опровергнуто также учение, принятое в новом издании «Основ всеобщего знания»; [4] я весьма удивлен, что этот муж, такой проницательный в других вопросах, отрицает возможность получения реального произведения от перемножения мнимых множителей, хотя в то же время сам в приведенных примерах, пользуясь своим собственным способом, получил от перемножения двух мнимых множителей реальное произведение, что имело место в примечании к первой главе «Анализа конечных». Написанное мною в предыдущем письме о «Космологии» Вольфа я высказал совсем не с тем намерением, чтобы в какой-то мере лишить этого мужа весьма заслуженной им в области философии славы, которая получила величайшее распространение повсюду; напротив, я всегда почитал и уважал этого несравненного мужа. Я также высоко ценю его труды и сознаюсь, что во многом обязан им своими успехами; но если кто-нибудь сможет доказать, что не все в его трудах имеет одинаковую ценность, то я считаю, что это нисколько не повредит его славе. Ибо не допустить ни одной ошибки в столь многочисленных трудах — это не дано никому из смертных. Впрочем, хотя это и не имеет отношения к нашей переписке, если когда-нибудь наши письма будут опубликованы ([мысль, которую] знаменитый президент Академии уже одобрил), я позабочусь, чтобы [в них не были напечатаны] те места, которые, по Твоему мнению, славнейший муж, должны быть опущены.

Приведенные мною дроби, которые в определенном случае переходят в $\frac{0}{0}$ и тем самым, как представляется, имеют неопределенное значение, я получил не путем исследования какой-нибудь кривой, а предложил в связи с тем, что они оказались полезными для доказательства моего утверждения. Относительно дроби $\frac{1-x^6}{1-x^5}$ очевидно, что она в случае, когда $x=1$, дает $\frac{6}{5}$, ибо делением на $1-x$ она сводится к следующей: $\frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{1+x+x^2+x^3+x^4}$, которая, следовательно, должна иметь такое же значение, как данная, а если принять, что $x=1$, эта последняя дробь ясно даст $\frac{6}{5}$. Что же касается другой дроби $\frac{a-x}{\sqrt{(2ax-x^2)}-\sqrt{ax}}$, то не так легко обнаружить, что она переходит в 2, если $x=a$, так как ее нельзя с помощью деления превратить в другую, которая была бы свободна от указанного недостатка. Приняв же, что эта дробь равна y, мы будем иметь $a-x+y\sqrt{ax}=y\sqrt{(2ax-xx)}$, что при возведении в квадрат даст $(a-x)^2+2(a-x)\times \times y\sqrt{ax}=(a-x)\,xy^2$; будучи разделено на $(a-x)$, это [выражение] переходит в $a-x+2y\sqrt{ax}=xy^2$. Если же $x=a$, то получается $2ay=ay^2$, откуда $y=2$. Отсюда становится очевидным, что значение предложенной дроби в случае, если $x=a$, будет 2. Но чаще бывает, что такого рода определение дробей становится слишком обременительным и трудным, поэтому следует пользоваться правилом, изложенным г. Лопиталем в предпоследней главе «Анализа бесконечно малых».[5] Вместо числителя и знаменателя подставляются их дифференциалы, после чего эта новая дробь в том случае, когда предложенная [дробь] переходит в $\frac{0}{0}$, и даст искомое значение.

Если же такой недостаток возникает снова, то следует еще с помощью дифференцирования исследовать дробь, пока не получится определенное значение. Итак, с помощью этого правила дробь $\frac{1-x^6}{1-x^5}$ переходит в $\frac{-6x^5dx}{-5x^4dx}=\frac{6x}{5}$, а если принять $x=1$, то получится $\frac{6}{5}$ — истинное значение дроби $\frac{1-x^6}{1-x^5}$; если принять $x=a$, то таким же образом вторая дробь $\frac{a-x}{\sqrt{(2ax-xx)}-\sqrt{ax}}$ переходит в следующую:

$$\frac{-dx}{\frac{adx-xdx}{\sqrt{2ax-xx}}-\frac{adx}{2\sqrt{ax}}}=\frac{-1}{\frac{a-x}{\sqrt{2ax-xx}}-\frac{a}{2\sqrt{ax}}}.$$

Если принять в этой [дроби] $x=a$, то получим $+\frac{-1}{\frac{1}{-2}}=2$. Чтобы привести пример, в котором одного дифференцирования[2] недостаточно для определения моим способом суммы $1+2x+3x^2+4x^3 \ldots nx^{n-1}$, я принимаю [эту сумму равной] S и действую следующим образом: $S=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots nx^{n-1}$, $\int Sdx=x+$ $+x^2+x^3+x^4 \ldots x^n=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$. Следовательно, после дифференцирования

$$Sdx=\frac{(x-1)[(n+1)x^n-1]dx-x^{n+1}dx+xdx}{(x-1)^2},$$

а разделив это [выражение] на dx, получим

$$S=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2};$$

следовательно, эта дробь есть предложенная сумма. Отсюда получится сумма $1+2+3+4+\ldots n$, если принять $x=1$, после чего окажется $\frac{0}{0}$. Поэтому, согласно правилу, эта дробь перейдет в другую

$$\frac{n(n+1)x^ndx-n(n+1)x^{n-1}dx}{2(x-1)dx}=\frac{n(n+1)x^n-n(n+1)x^{n-1}}{2(x-1)},$$

а эта дробь снова перейдет в $\frac{0}{0}$, если принять $x=1$. Итак, снова с помощью дифференцирования эта дробь сводится к следующей:

$$\frac{n^2(n+1)\,x^{n-1}-n\,(n-1)\,(n+1)\,x^{n-2}}{2},$$

которая, если принять $x=1$, даст $\frac{n\,(n+1)}{2}$, это выражение есть сумма ряда: $1+2+3+4+\ldots n$, как установлено в другом месте. Так же определяется, что в дроби $\frac{x-1}{\log x}$ получится 1, если принять $x=1$.

Далее славнейший Кюн ставит вопрос, каким образом определяется связь между следующими двумя бесконечными рядами: $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{9^2}$ и т. д. и $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+$ и т. д.; я прошу сообщить ему следующий весьма легкий способ. Пусть $S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+$ и т. д. Разделим его на 4; $\frac{S}{4}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}$ и т. д.; если этот ряд отнять от предыдущего, то в остатке получим $\frac{3S}{4}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+$ и т. д. Следовательно, если дана сумма одного ряда, то получится сумма другого ряда. Таким же образом, если $S=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+$ и т. д., то $\frac{(2^n-1)\,S}{2^n}=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+$ и т. д.; с помощью этой теоремы можно обосновать суммирования рядов, принятые мною прежде без доказательства. Впрочем, славнейший Кюн прекрасно разобрался в моем суммировании рядов обратных величин, что я усматриваю из сформулированного им на основании его собственных изысканий закона сумм последовательностей, отлично совпадающего с моим.

Я нахожусь в совершенном затруднении, какого рода книгу я мог бы рекомендовать славнейшему Кюну, где интегральное исчисление было бы изложено более подробно, так как, насколько мне известно, такого труда, где давалось бы исчерпывающее изложение вопроса, еще не существует. Впрочем, я читал в парижских «Новых известиях», что опубликован трактат об интегральном исчислении, автор которого англичанин, но имя его ни о чем не говорит. В рукописях повсюду встречаются уроки, данные славнейшим Иоанном Бернулли г. Лопиталю, но они еще нигде не были напечатаны, и хотя в них заключаются многие блестящие открытия, однако до сих пор это учение нуждается в значительном усовершенствовании. Далее, наш покойный Герман написал трактат об интегральном исчислении,[6] закончив его незадолго до смерти, однако этот трактат еще не опубликован; впрочем, его наследники обещали прислать этот трактат сюда, что еще не сделано.[7] Однако нет сомнения в том, что этот труд лишен каких-либо вычислений. И хотя об этом роде исчисления и не издан еще [курс], содержащий полную его систему, однако повсюду имеются превосходные рассуждения, из которых можно почерпнуть [сведения] об этом исчислении, как например «Метод приращений» славнейшего Тейлора; [8] статьи Бернулли, включенные в лейпцигские «Acta», «Комментарии Парижской Академии» и другие журналы; равным образом, во многих местах опубликованы размышления и других математиков первого разряда.

Затем также и в наших «Комментариях» находятся многие рассуждения по этому предмету; следует считать, что благодаря этим рассуждениям анализ немало продвинулся вперед. Очень трудно, однако, все это собрать и расположить по порядку, так как многое изложено без анализа, а другое исследуется наименее удобным способом. Я же начал [размышлять], сколько времени мне нужно затратить на этот предмет, и хотя мне представили много различных аргументов, что этот труд нельзя закончить и в течение нескольких лет, все же я составил такой план всего труда, как если бы я имел намерение не пропустить ничего, что имеет отношение к этому предмету.

Доказательства, данные славнейшим Кюном относительно равенства противоположных углов, вообще мне понравились, особенно последнее, которое, по-видимому, наиболее удовлетворяет [его] желанию.[9]

В трудах Валлиса (место я не могу указать, так как у меня нет их под рукой) имеется много доказательств, из которых почти все страдают некоторым недостатком, за исключением доказательств самого Валлиса, как мне, впрочем, представляется. Славнейший Кюн найдет в этом трактате Валлиса то, что хотел [автор получить] и каким образом он этого достиг.[10]

Что касается предложенной нам славнейшим Кюном задачи[11] о нахождении суммы такого ряда $1+1+d+d^3+d^6+\ldots d^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$, то я считаю, что она является весьма трудной, так как я и другие уже пытались решить ее, но напрасно. Если решение было бы найдено, оно имело бы большое значение для развития анализа; однако я считаю, что ни эту задачу, ни подобные ей, относящиеся к суммированию геометрических прогрессий более высоких степеней (очень удобное название, данное славнейшим Кюном), мне никогда не удастся решить, поэтому, если преславный муж решит эту задачу, он найдет во мне величайшего ценителя и почитателя. Кроме этого ряда, имеется много других более простых [рядов], которые, однако, также не могут быть суммированы с помощью известных способов; к ним принадлежит ряд $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{31}+\frac{1}{63}+$ и т. д., знаменатели которого, будучи увеличены на единицу, составляют геометрическую прогрессию; если же кто-нибудь сможет определить сумму этой [прогрессии], от этого последует немалое развитие анализа. Отсюда удачно следует суммирование Кюна, ибо этот ряд равен такому: $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{5}{3\cdot 2^4}+\frac{9}{7\cdot 2^9}+\frac{17}{15\cdot 2^{16}}+\frac{33}{31\cdot 2^{25}}+\frac{65}{63\cdot 2^{36}}$ и т. д., в котором показатели следуют в порядке квадратов чисел; между прочим я своими способами определил, что сумма равна 1.606951524152. Такого рода ряды не допускают суммирования, хотя закон следования у них достаточно прост. Имеются другие ряды, которые хотя не допускают выражения общего члена, однако это не препятствует тому, что они могут быть суммированы. Такой ряд был когда-то сообщен мне славнейшим Гольдбахом, а именно:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\frac{1}{35}+ \text{ и т. д.}$$

В этом ряде знаменатели, увеличенные на единицу, все дают числа, которые являются степенями или квадратами, или кубами, или другими степенями, сумма же этого неправильного ряда, как он показал, равна 1.[12] Я вычислял подобные последовательности, в которых члены связываются между собой не с помощью сложения, а с помощью умножения; так, я нашел, что $2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11}$ и т. д.; дроби подчиняются такому закону, что числители [у них] четные, а знаменатели нечетные, отличающиеся от числителей на единицу. Если же числители и знаменатели отдельных дробей соединить в одну сумму, то получится такой ряд: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и т. д., в котором содержатся все простые числа [и] из которого можно продолжать эти дроби сколько угодно.[13] Равным образом, если A обозначает площадь круга, диаметр которого есть 1, то я нашел, что $A = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{14}{15} \times \times \frac{16}{17}$ и т. д.; в этих дробях, как и прежде, разность между числителями и знаменателями равна 1, а соединения числителей и знаменателей из отдельных дробей составляют ряд чисел нечетных [и] не простых. Способ же, с помощью которого определяются суммы таких рядов, является очень легким; однако я считаю, что очень трудно доказать правильность этих суммирований другому [человеку], не следившему за ходом рассуждения.

Что касается того, о чем я прежде всего должен сообщить Тебе, великий муж, и на что прежде всего ожидается ответ, то прошение славнейшего Кюна я тотчас по возвращении знаменитого нашего президента покорнейше ему представил и одновременно получил желанное подтверждение. Однако в настоящее время обещанная пенсия еще не может быть выслана славнейшему мужу, так как наше жалованье выплачивается в Москве и затем пересылается сюда; славнейший муж, конечно, очень обрадован обещанным решением. Тщетно искал я до сих пор случая переслать Тебе, славнейший муж, мою «Механику» и так и не нашел случая, с помощью которого я мог бы Тебя удовлетворить в этом отношении. Вообще же я хотел бы, чтобы Ты был уверен в моей к Тебе преданности, а также в том, что я с большой благодарностью принимаю Твое особое ко мне благоволение. Прощай.

Л. Эйлер.

Петербург, 11 февраля 1737.

Viro Magnifico atque Spectatissimo C[arolo] G[ottliebo] Ehlero
S[alutem] p[lurimam] d[icit] Leonhardus Euler.

Adventum Illustris Praefecti nostri Cammerarii de Korff expectans ad hoc tempus responsiorum ad Tuas ultimas, Vir magnifice, litteras differre coactus fui. Maximas autem Tibi habeo gratias, quod eximiam Cl[arissimi] Kuhnii dissertationem de quantitatibus negativis et imaginariis nobiscum communicare volueris, in qua Vir praestantissimus hanc doctrinam, tam leviter et negligenter adhuc expositam, pro more suo tanto studio et ingenii acumine pertractavit, ut nihil amplius desiderari posse videatur. In quo negotio non exiguam Matheseos promotionem jure nostro vindicare possumus, Tu nimirum, Vir magnifice, imprimis, qui hujus amicae dissertationis non solum Auctor fuisti, sed etiam Tuo studio et auctoritate moderasti atque ad finem perduxisti. Clarissimus Kuhnius vero, dum summa diligentia argumenta pro utraque parte excussit et accurato examini subjecit, non solum defectum inconsueta hanc rem tractandi methodo clare monstravit, verum etiam totam doctrinam ex certissimis principiis expostitam dedit, in quo Viri Clarissimi non minus acutissimum ingenium, quam summa integritas elucet. De me vero quicquid praestiti, hoc praecipuum esse judico, quod pluribus undequaque argumentis colligendis veritatem a tot tantisque objectionibus liberavi. Quid Celeb[errimus] Wolfius de hac controversia sentiat, vehementer rescire gestio, qui etiamnum in nova Elementorum Math[eseos] editione receptam doctrinam fortiter impugnat; quem virum alias acutissimum maxime miror negantem ex factoribus imaginariis factum reale oriri posse, cum tamen ipse in subjunctis exemplis, suo computandi modo ex duobus factoribus imaginariis factum reale eliciat, accidit hoc in scholio primi cap[itis] «Analyseos finitorum».

Quae in praecedentibus litteris obiter de «Cosmologia» Wolfiana scripseram, nequaquam eo scripsi animo, quo

Viri de Philosophia summe meriti laudi, quae utique maxima est, quicquam detractam esse vellem, maxime potius hunc incomparabilem Virum suspicio et veneror. Opera quoque ejus maximi facio, et non parum me ex iis profecisse confiteor, atque si quid humani possum esse deprehendo quod quidem non semel accidit, id gloriam ejus minime diminuere censeo. In tot enim et tantis operibus nusquam labi, nulli mortalium datum est. Interim tamen cum hoc ad commercium nostrum non pertineat, si quando litterae nostrae lucem publicam aspicient, quod Illustris Praefectus Academiae jam probavit, hoc et alia, quae Tibi, Vir magnifice, videbuntur omissum iri, curabo.

Fractiones a me exibitas, quae certo casu abeunt in $\frac{0}{0}$ ideoque indeterminatum valorem habere videntur, ex nullius curvae consideratione sum adeptus, sed prout se mihi obtulerunt ad assertionem meam probandam proposui. De fractione quidem $\frac{1-x^6}{1-x^5}$ factis manifestum est eam casu, quo $x=1$, dare $\frac{6}{5}$, divisione enim per $1-x$ ea deprimitur ad hanc: $\frac{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}{1+x+x^2+x^3+x^4}$, quae igitur propositae aequi valet, posito autem $x=1$ haec posterior fractio aperte dat $\frac{6}{5}$. De altera autem fractione $\frac{a-x}{\sqrt{(2ax-x^2)}-\sqrt{ax}}$ non tam facile patet eam abire in 2 posito $x=a$, quia eam divisionis ope non in aliam transformare licet, quae ab incommodo isto esset libera. Posita vero hac fractione $=y$, habebitur $a-x+y\sqrt{ax}=$ $=y\sqrt{(2ax-xx)}$, quae quadratis sumendis dat $(a-x)^2+$ $+2(a-x)y\sqrt{ax}=(a-x)xy^2$, quae per $(a-x)$ divisa abit in $a-x+2y\sqrt{ax}=xy^2$. Jam ponatur $x=a$, fiet $2ay=ay^2$, hinque $y=2$. Unde perspicitur valorem fractionis propositae casu $x=a$ esse 2. Sed saepius accidit ut huiusmodi determinatio fractionum nimis fiat difficilis et operosa, quam ob rem conveniet hac sequenti regula uti, quae a M. Hospitalio in penultimo capite de «L'Analyse des infinitement petits» est tradita. Loco numeratoris et denominatoris substituantur eorum differentialia; quo facto haec nova fractio eo casu, quo proposita abit in $\frac{0}{0}$, dabit valorem quaesitum. Atque si idem incommodum denuo adsit, iterum ope differentiationis nova quaerenda est fractio, donec valor prodeat assignabilis. Per hanc igitur regulam fractio $\frac{1-x^6}{1-x^5}$ abit in hanc $\frac{-6x^5dx}{-5x^4dx}=\frac{6x}{5}$, in qua facto $x=1$, prodibit $\frac{6}{5}$ verus valor fractionis $\frac{1-x^6}{1-x^5}$; si ponatur $x=a$, simili modo altera fractio $\frac{a-x}{\sqrt{(2ax-xx)}-\sqrt{ax}}$ abit in hanc: $\frac{\frac{-dx}{adx-xdx}}{\sqrt{(2ax-xx)}}-$ $-\frac{adx}{2\sqrt{ax}}=\frac{\frac{-1}{a-x}}{\sqrt{2ax-xx}}-\frac{a}{2\sqrt{ax}}$. Ponatur in hac $x=a$, habebitur $+\frac{-1}{-\frac{1}{2}}=2$. Ad exemplum autem proferendum, in quo una differentiatio non sufficit quarum mea methodo summam hujus prodressionis $1+2x+3x^2+4x^3\ldots nx^{n-1}$, quam pono S et sequenti modo operationem instituo:

$$S=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1},$$

$$\int Sdx=x+x^2+x^3+x^4\ldots x^n=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}.$$

Differentiando ergo erit

$$Sdx=\frac{(x-1)\left[(n+1)x^n-1\right]dx-x^{n+1}dx+xdx}{(x-1)^2},$$

atque per dx dividendo $S=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$; qua fractio est ergo summa progressionis propositae. Ex qua prodibit summa hujus $1+2+3+4\ldots+n$, si ponatur $x=1$. Hoc autem facto prodit $\frac{0}{0}$. Quare secundum regulam fractio ista abibit in hanc:

$$\frac{n(n+1)x^ndx-n(n+1)x^{n-1}dx}{2(x-1)dx}=\frac{n(n+1)x^n-n(n+1)x^{n-1}}{2(x-1)},$$

quae vero iterum abit in $\frac{0}{0}$ facto $x=1$. Denuo igitur ope differentiationis haec fractio reducetur ad hanc: $\frac{n^2(n+1)x^{n-1}-n(n-1)(n+1)x^{n-2}}{2}$, quae posito $x=1$ dat $\frac{n(n+1)}{2}$, quae expressio est summa seriei: $1+2+3+$ $+4\ldots+n$, uti aliunde constat. Sic etiam invenietur hanc fractione $\frac{x-1}{\log x}$ dare 1 posito $x=1$.

Cl[arissimus] Kuhnius porro suscitatur, quemadmodum relatio, quam duae hae series infinitae: $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+$ $+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{9^2}$ etc. atque $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}$ etc. tenent, definiatur, cum quo sequentem modum perfacilem communicandum rogo. Sit $S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+$ $+\frac{1}{5^2}+$ etc. Erit div. per 4; $\frac{S}{4}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+$ $+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}$ etc.; qua serie a superiori subtracta restat $\frac{3S}{4}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+$ etc. Data ergo summa unius seriei alterius summa habetur. Simili modo si fuerit $S=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+$etc., erit $\frac{(2^n-1)S}{2^n}=1+\frac{1}{3^n}+$ $+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+$ etc.; hocque theoremate nituntur summationes serierum, quas ante sine demonstratione exhibueram. Ceterum Clariss[imum] Kuhnium hanc meam serierum reciprocarum summationem profundissime penetrasse video ex lege, quam ex ipso fonte elicuit progressionis summarum, quae cum mea optime congruit.

Cujusmodi librum Clar[issimo] Kuhnio commendem, in quo calculus integralis fusius sit pertractatus, omnino nescio, cum tale opus absolutum mihi videre nondum contigerit. In novellis litterariis quidem legi Parisiis tractatum de calculo integrali prodiisse, cujus auctor esse Anglus, sed nomen auctoris parum praeter trivialia pollicetur. In m[anu]sc[rip]t[is] passim inveniuntur lectiones, quas Cel[eberrimus] Joh[annus] Bernoulli M. Hospitalio habuit, nusquam autem impressa extant, et quamvis plura egregia inventa in iis contineantur, tamen hoc tempore ad longe majorem profectionem haec doctrina est provecta. Hermannus porro etiam noster b[eate] m[ortuus] integrum hoc de calculo tractatum conscripsit et brevi tempore ante obitum absolvit, nondum vero publicam lucem aspexit; a haeredibus quidem ejus promissum est istum tractatum huc transmittere, quod autem nondum est factum. Ceterum non est dubitandum, quin hoc opus sit omnibus numeris absolutum. Etsi autem in hoc calculi genere etiamnum nullum completum systema sit editum, tamen passim egregiae extant dissertationes, ex quibus istum calculum haurire licet; cujusmodi sunt Cel[eberrimi] Taylori «Methodus incrementorum»; Bernoulliorum schediasmata, «Actis» Lips[iensibus] et «Comment[ariis]» Acad[emiae] Paris[inae] aliisque diariis inserta; pariter ac aliorum primi ordinis mathematicorum meditationes hinc inde impressae.

Deinde etiam in nostris «Commentariis» plures hac de re reperiuntur dissertationes, quibus analysis non parum promota est censenda. Difficillimum autem est haec omnia conquirere atque in ordinem disponere, cum multa sine analysi, aliaque minus commodo methodo sint pertractata. Coepi ego etiam, quantum temporis ad hoc negotium mihi impendere licet, sed tot se mihi obtulerunt diversa argumenta, ut hoc opus intra aliquot annorum spatium absolvere non liceat, ejusmodi autem totius operis dispositionem feci, ut nihil eorum, quae ad hoc institutum pertinent, sim praetermissurus.

Demonstrationes, quas Cl[arissimus] Kuhnius de aequalitate angulorum alternorum dedit, omnino mihi placuerunt, praecipue autem posterior, quae desiderato magis satisfacere videtur. In Wallisii operibus (quae, quia non sunt ad manus, locum indicare nequeo) plures habentur demonstrationes, quae autem fere omnes aliquo defectu laborant, excepta Wallisiana ipsa, ut mihi quidem videtur. Inveniet vero Cl[arissimus] Kuhnius in hoc Wallisii tractatu, quid Wallisius in quaque demonstratione desideret et quomodo ipse his desideratis satisfaciat.

Quod ad problema Cl[arissimi] Kuhnii de invenienda summa hujus seriei $1+1+d+d^3+d^6\ldots+d^{\frac{(m-1)(n-2)}{2}}$ [a]

[a] *Следует* «$d^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$».

nobis propositum attinet, id quidem difficillimum esse judico jam dudum enim id a me aliisque frustra fuit tentatum. Solutio vero utique si inveniri posset, magnum analysi afferret incrementum; certus vero sum neque hoc problema, neque alia similia circa summationes progressionum geometricarum altiorum ordinum pro ut a Cl [arissimo] Kuhnio aptissime appellantur, a me unquam solutum iri, quamobrem si Vir Cl [arissimus] hoc problema resolvet, me maximum habebit solutionis aestimatorem et admiratorem. Praeter hanc autem seriem complures dantur aliae multo simpliciores, quae tamen per methodos etiamnum cognitas summari nequeunt, cujusmodi est $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+$ $+\frac{1}{15}+\frac{1}{31}+\frac{1}{63}+$ etc., cujus denominatores unitate aucti constituunt progressionem geometricam, hujus autem summam si assignari posset, non parum augmenti analysis consequeretur. Inde forte etiam summatio Kuhniana sequeretur, haec enim series aequalis est huic: $\frac{3}{1\cdot 2}+$ $+\frac{5}{3\cdot 2^4}+\frac{9}{7\cdot 2^9}+\frac{17}{15\cdot 2^{16}}+\frac{33}{31\cdot 2^{25}}+\frac{65}{63\cdot 2^{36}}+$ etc., in qua exponentes occurrunt secundum numeros quadratos progredientes, summam interim per methodos meas inveni esse proxime $=1.606951524152$. Prout autem hujusmodi series summationem respuunt, quamvis earum lex progressionis sit satis simplex. Ita aliae dantur series, quae nequidem ad terminum generalem revocari, hoc tamen non obstante summari possunt. Talis series a Cel[eberrimo] Goldbach, mecum quondam est communicata, haec scilicet: $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+$ $+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\frac{1}{35}+$ etc., in qua denominatores unitate aucti omnes dant numeros, qui sunt potestates, sive quadrata, sive cubi, sive altiorum generum, hujus vero seriei irregularis summam demonstravit esse$=1$. Similes progressiones ego etiam summami, in quibus termini non additione sed multiplicatione inter se iungunt[ur]; ita inveni esse $2=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}$ etc., quae fractiones hanc tenent legem, ut numeratores sint pares, denominatores vero impares, unitate a numeratoribus differentes. Si autem singularum fractionum numeratores et denominatores in unam summam colligantur, orietur ista series 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 etc., in qua omnes continentur numeri primi, ex qua illas fractiones quousque libuerit continuare licet. Pari modo si A significet aream circuli, cujus diameter est 1, inveni esse $A = \frac{4}{5} \times \times \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{17}$ etc., in quibus fractionibus est ut ante differentia inter numeratores et denominatores $= 1$ et aggregata numeratorum et denominatorum ex singulis fractionibus constituunt seriem numerorum imparium non primorum. Modus quidem, quo hujusmodi serierum summae inveniuntur, est facilis; sed difficillimum esse judico alii isdem vestigiis non insistenti veritatem harum summationum demonstrare.

Quod autem potissimum Tibi, Vir Magnifice, significandum habeo, et ad quod imprimis responsum expectabitur, est petitio Cl[arissimi] Kuhnii, quam statim post reditum Illustris Praefecti nostri modeste proposui, simulque exoptatissimam confirmationem continui. Ad hoc quidem tempus nondum licet Viro Cl[arissimo] promissum salarium transmittere, quia reditus nostri Mosquae solvuntur, qui quamprimum huc transportabuntur; Vir Clarissimus solutione promissi certissime exhilarabitur. Frustra adhuc occasionem anquisivi Tibi, Vir Magnifice, «Mechanicam» meam mittendi, atque nullam occasionem praetermittam, qua hac in re Tibi satisfacere potero. Omnino autem me velim credas Tibi esse devinctissimum, Tuumque eximium, quo me dignaris favorem, gratissimo animo suscipere. Vale.

L. Euler.

Dabam Petropoli, d. 11 Febr. 1737.

Печатается по копии, подписанной Эйлером (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 22, лл. 170—175 об.).

Пометы: «Представлено 1737 февраля 11». «Г-ну Элеру, советнику города Данцига, в Данциг».

[1] Имеется в виду письмо К.-Л.-Г. Элера Л. Эйлеру от 27 ноября 1736 г. (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 21, лл. 159—162 об. — оригинал и лл. 163—166 об. — копия).

[2] Речь идет о присланной К.-Л.-Г. Элером в Петербургскую Академию работе Г. Кюна: Meditationes de natura quantitum privativarum et imaginarum recte explicanda (Размышления о необходимости правильного определения природы величин отрицательных и мнимых) — ААН СССР, р. I, оп. 6, № 38/4, лл. 1—14.

[3] Похвальный отзыв Эйлера К.-Л.-Г. Элер сообщил Кюну, чем весьма обрадовал его (письмо Кюна Элеру, без даты, предста-

влено в Академическое собрание 11 ноября 1737 г. — ААН СССР, р. I, оп. 6, № 38/6, лл. 1—9).

[4] См. прим. 8 к 1-му письму Эйлера Элеру (стр. 306 настоящего издания).

[5] Здесь говорится о книге Лопиталя: Analyse des infinement petits pour l'intelligence des lignes courbes (Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий) — Париж, 1696 (более поздние издания: 1715, 1720, 1768).

[6] Речь идет о трактате, написанном Я. Германом в Базеле в 1733 г. по материалам его работ: «Теорема об интегральном исчислении», представленная в Академическое собрание 18 и 21 июня 1726 г. (Протоколы, т. I, стр. 5), и «Вторая теорема об интегральном исчислении», представленная в Академическое собрание 13 сентября 1726 г. (там же, т. I, стр. 7).

16 января 1728 г. было принято решение о включении работ Германа об интегральном исчислении в «Комментарии» за 1726 г. (там же, стр. 11): Dissertatio, qua novum aliquod theorema circa calculum integralem demonstrandum deditur (Рассуждение, в котором дается некоторая новая теорема относительно доказательства интегрального исчисления) — там же, стр. 19.

[7] Эйлер вел длительную переписку с Г. Германом по поводу пересылки в Петербургскую Академию трактата его покойного брата профессора Я. Германа «De calculo integrali» (Об интегральном исчислении) — см. письма Л. Эйлера Г. Герману от 25 октября 1735 г. (ААН СССР, ф. 1, оп. 3, № 19, лл. 74—75), от 18 октября 1737 г. (там же, № 22, л. 207) и другие.

[8] Здесь говорится о книге Тейлора: Methodus incrementorum directa et inversa (Прямой и обратный способ приращений) — Лондон, 1715.

[9] Речь идет о двух доказательствах, предложенных Кюном в письме К.-Л.-Г. Элеру (ААН СССР, р. I, оп. 6, № 38/4, л. 14, 1736).

[10] Эйлер отвечает этим на замечание Г. Кюна, что ему неизвестно, совпадают ли предложенные им доказательства с доказательствами Валлиса (там же, л. 14).

[11] Здесь говорится о задаче, предложенной Кюном в этом же письме Элеру с просьбой сообщить ее Эйлеру и Крафту, которые, может быть, сочтут ее достойной размышления (там же, л. 14 об.). См. письмо Кюну, стр. 133 настоящего издания.

[12] Действительно, ряд Гольдбаха имеет вид

$$A = \sum_{k \neq m^n}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{k^s - 1},$$

где суммирование по k распространяется на все целые числа, большие единицы, не имеющие вида m^n, ни при каких целых m, n, больших единицы. Но $\frac{1}{k^s-1} = \frac{1}{k^s} + \frac{1}{(k^s-1)k^s}$. Отсюда $A = \sum_{k \neq m^n}^{\infty} \left\{ \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{k^s(k^s-1)} + \frac{1}{k(k-1)} \right\}$. Так как все числа вида

k^s при различных $k \geqslant 2$ и $s \geqslant 1$ различны и поскольку всякое целое число имеет вид k^s, где $s \geqslant 1$, а k не имеет вида m^n, то написанная двойная сумма, ввиду положительности ее членов, может быть преобразована к виду $A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

[13] Вывод этого произведения, а также аналогичных других см. в книге: Л. Эйлер. Введение в анализ бесконечно малых, т. I, М., 1961, гл. XV.

6

10 мая 1740 г., Петербург

Мужу преславному и знаменитому
бургомистру города Данцига Элеру
шлет нижайший привет Леонард Эйлер.

Какую радость доставило мне письмо Кюна, в котором сообщалось о присуждении Тебе самой высокой в вашем городе должности бургомистра,[1] Ты сам прекрасно можешь себе представить, если взвесить огромную Твою любовь ко мне и исключительные благодеяния, оказанные мне Тобою. Поэтому я с огромной радостью, великий муж, поздравляю Тебя с этой должностью, которой Ты так достоин. Я воссылаю многократные мольбы всеблагому господу, чтобы он помог Тебе в Твоей будущей государственной деятельности и помог бы Тебе совершить много добрых дел как для Твоего города, так и для ученого мира. Ибо я не сомневаюсь, что, когда можно будет Тебе немного освободиться от труднейших государственных дел, Ты еще с большей готовностью, чем теперь, будешь способствовать развитию наук и искусств. Я усиленно прошу Тебя, великий муж, чтобы Ты теперь, заняв столь высокое положение, не уменьшал бы Твои ко мне благоволение и любовь, но, напротив, увеличил бы. Будь уверен, что никто из Твоих близких не испытывает большей радости, чем я. Прощай, великий муж, и не лишай меня полной Твоей благосклонности и любви.

Л. Эйлер.

Петербург, 10 мая 1740.

Viro amplissimo ac magnifico,
Civitatis Gedanensis Consuli Ehlero

S[alutem] p[lurimam] d[icit] L[eonhard] E[uler].

Quanta laetitia me affeceriat litterae Kuhnianae, quibus significabit summam civitati vestrae dignitatem consularem Tibi esse collatam, ipse profecto indicare poteris, si insignem Tuum mei amorem atque eximia Tua in me merita perpendes. Quamobrem Tibi, Vir Magnifice, hoc munus Te dignissimum maximo gaudio gratulor. Deumque Ter optimum maximum precor, ut cuncta Tua consilia fortunare atque cum Tuae civitati tum etiam orbi litterario per Te maxima commoda largiri velet. Non enim dubito, quin cum a gravissimis reipublicae negotiis paulisper vacare concessum sit, etiamnunc et quidem majore cum auctoritate ad litteras artesque promovendas atque excolendas studium et operam sis collocaturus. Hoc autem Te, Vir Magnifice, vehementer etiam atque etiam rogo, ut nunc etiam, cum summam sis consecutus dignitatem, Tuam erga me benevolentiam atque adeo amorem ne diminuas, verum potius adaug[e]bas.

Tibique persuadeas, neminem ex Tuis commodis majorem capere laetitiam quam me. Vale, Vir Magnifice, meque Tuo favore atque amore amplecti perge.

L. Euler.

Dabam Petropoli, d. 10 Maj 1740.

Печатается по собственноручному черновику (Рукописное собрание Фундаментальной библиотеки Тартуского университета, Morgensterni Ep. Phil., II, № 56).

[1] Здесь говорится о получении К.-Л.-Г. Элером должности бургомистра города Данцига.

Viro amplissimo ac Magnifico
Civitatis Gedan is Consuli Ehlero
S. P.
L. E.

Quanta laetitia me affecerint litt…
Kuhnianae, quibus signific…
summam Civitatis Vestrae dignitatem consularem
Tibi esse collatam, ipse profecto
judicare poteris, si insignem Tuum
mei amorem atque eximia Tua in
me merita perpendes. Quamobrem
Tibi Vir Magnifice ~~hanc digni~~
… hoc munus Te dignissimum
maximo gaudio gratulor: Deumque
Ter Optimum maximum precor, ut
cuncta Tua consilia fortunare,
atque cum Tuae Civitati tum etiam
orbi litterario per Te maxima com-
moda largiri velit. Non enim
dubito, quin cum a gravissimis
reipublicae negotiis paulisper va-
care concessum sit, etiamnunc
et quidem majore cum ac… ta-
te litteras artesque promo… as
atque excolendas studium et operam
sis collocaturus. Hoc autem Te
Vir Magnifice v… etiam
atque etiam rogo, ut nunc etiam,
cum summam sis consecutus digni-
tatem, Tuam ergame benevolentiam
atque adeo amorem ne diminuas,
verum potius adaugeas. Tibique

Начало письма Л. Эйлера к К.-Л.-Г. Элеру от 10 V 1740.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ *

* В указатель включены имена, упоминаемые как в тексте писем, так и в примечаниях. Страницы примечаний даны курсивом.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Леонард Эйлер

ПИСЬМА К УЧЕНЫМ

Утверждено к печати
Институтом истории естествознания и техники
Академии наук СССР

Редактор издательства *Т. И. Сушкова*
Художник *М. И. Разулевич*
Технический редактор *В. Т. Бочевер*
Корректоры *Т. Н. Богданова-Катькова* и *М. А. Горилас*

Сдано в набор 14/XII 1962 г. Подписано к печати 5/IV 1963 г. М-24667
РИСО АН СССР № 35—4В. Формат бумаги 84×108$^1/_{32}$. Бум. л. 6$^1/_4$. Печ. л
12$^1/_2$=20.50 усл. печ. л.+1 вкл. Уч.-изд. л. 23.33 + 1 вкл. (0,03). Изд. № 1706
Тип. зак. № 910. Тираж 2000. *Цена 1 р. 60 к.*

Ленинградское отделение Издательства Академии наук СССР
Ленинград, В-164, Менделеевская лин., д. 1.

1-я тип. Издательства Академии наук СССР
Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12