

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ИНТЕГРАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ



ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ИНТЕГРАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ

Том III



ПЕРЕВОД С ЛАТИНСКОГО
И КОММЕНТАРИИ
Ф. И. ФРАНКЛЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1958

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР
ИНТЕГРАЛЬНОГО
ИСЧИСЛЕНИЯ
ТОМ ТРЕТИЙ

В КОТОРОМ ИЗЛАГАЕТСЯ
МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ
ДВУХ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ
ПО ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ
МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ
ЛЮБОГО ПОРЯДКА.

С ПРИЛОЖЕНИЕМ
О ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ
И С ДОПОЛНЕНИЕМ,
СОДЕРЖАЩИМ ИЗЛОЖЕНИЕ
НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СЛУЧАЕВ
ИНТЕГРИРОВАНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ



INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS
VOLVMEN TERTIVM,

IN QVO METHODVS INVENIENDI FVNCTIONES
DVARVM ET PLVRIVM VARIABILIVM, EX DATA RELATIONE
DIFFERENTIALIVM CVIVSVIS GRADVS PERTRACTATVR.

VNA CVM APPENDICE DE CALCVLO VARIATIONVM ET SUP-
PLEMENTO, EVOLVTIONEM CASVVM PRORSVS SINGVLARIVM CIRCA INTEGRA-
TIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM CONTINENTE.

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.



PETROPOLI,

Impensis Academiae Imperialis Scientiarum

1770.

ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ КНИГА ПОСЛЕДНЯЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ ИЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ ЛЮБОГО ПОРЯДКА

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ГЛАВА I

ОБЩЕЕ О ПРИРОДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕ- НИЙ, КОТОРЫМИ ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ЗАДАЧА 1

1. Пусть z — какая угодно функция двух переменных x и y . Определить свойство дифференциального уравнения¹⁾, которым выражается соотношение между дифференциалами dx , dy и dz .

¹⁾ definire indolem aequationis differentialis.

РЕШЕНИЕ

Пусть $P dx + Q dy + R dz = 0$ — уравнение, выражающее соотношение между дифференциалами dx , dy и dz , где P , Q и R — какие угодно функции переменных x , y и z . Прежде всего необходимо, чтобы это уравнение получалось из некоторого конечного уравнения между этими переменными путем дифференцирования и деления полученного дифференциала на некоторое количество. Итак, пусть задан некоторый множитель, положим M , после умножения на который выражение

$$P dx + Q dy + R dz$$

становится интегрируемым, ибо если бы такого множителя не было, то предложенное дифференциальное уравнение было бы бессмысленным и ничего бы не выражало. Следовательно, все дело сводится к тому, чтобы указать критерий, с помощью которого можно было бы отличать такие бессмысленные и ничего не выражающие дифференциальные уравнения от реальных. С этой целью будем рассматривать уравнение

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

как реальное. Пусть M — множитель, делающий его интегрируемым, так что выражение

$$MP dx + MQ dy + MR dz$$

действительно является дифференциалом некоторой функции трех переменных x , y и z ; пусть эта функция обозначена через V , так что уравнение $V = \text{const}$ будет полным интегралом предложенного уравнения. Стало быть, если предположить постоянным либо x , либо y , либо z , то выражения: $MQ dy + MR dz$; $MR dz + MP dx$; $MP dx + MQ dy$ должны быть интегрируемыми каждое в отдельности. Отсюда и из природы дифференциалов следует

$$\begin{aligned} \left(\frac{d(MQ)}{dz}\right) - \left(\frac{d(MR)}{dy}\right) &= 0; & \left(\frac{d(MR)}{dx}\right) - \left(\frac{d(MP)}{dz}\right) &= 0; \\ \left(\frac{d(MP)}{dy}\right) - \left(\frac{d(MQ)}{dx}\right) &= 0, \end{aligned}$$

откуда после раскрытия скобок вытекают следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} \text{I. } M \left(\frac{dQ}{dz}\right) + Q \left(\frac{dM}{dz}\right) - M \left(\frac{dR}{dy}\right) - R \left(\frac{dM}{dy}\right) &= 0 \\ \text{II. } M \left(\frac{dR}{dx}\right) + R \left(\frac{dM}{dx}\right) - M \left(\frac{dP}{dz}\right) - P \left(\frac{dM}{dz}\right) &= 0 \\ \text{III. } M \left(\frac{dP}{dy}\right) + P \left(\frac{dM}{dy}\right) - M \left(\frac{dQ}{dx}\right) - Q \left(\frac{dM}{dx}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Если умножим первое уравнение на P , второе на Q , третье на R и сложим их, то в сумме производные M уничтожаются и полученное уравнение после деления на M принимает вид

$$P \left(\frac{dQ}{dz}\right) - P \left(\frac{dR}{dy}\right) + Q \left(\frac{dR}{dx}\right) - Q \left(\frac{dP}{dz}\right) + R \left(\frac{dP}{dy}\right) - R \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Этим и выражается критерий для отличия реальных дифференциальных уравнений от бессмысленных; всякий раз, как это соотношение между величинами P , Q и R имеет место, дифференциальное уравнение

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

является реальным. Кроме того, надо здесь помнить, что заключенное в скобки выражение $\left(\frac{dQ}{dz}\right)$ представляет значение $\frac{dQ}{dz}$, если при дифференцировании Q только величина z рассматривается как переменная; то же относится к остальным соответствующим выражениям, которые таким образом всегда сводятся к конечным функциям.

СЛЕДСТВИЕ 1

2. Стало быть, если предложено дифференциальное уравнение между тремя переменными:

$$P dx + Q dy + R dz = 0,$$

то надо прежде всего выяснить, имеет ли место вышенайденное соотношение или нет. В первом случае уравнение реальное, во втором случае — бессмысленное и ничего не выражает, и никогда решение какой-либо задачи не может привести к такому уравнению.

СЛЕДСТВИЕ 2

3. Найденное соотношение можно выразить еще так:

$$\left(\frac{P dQ - Q dP}{dz}\right) + \left(\frac{Q dR - R dQ}{dx}\right) + \left(\frac{R dP - P dR}{dy}\right) = 0,$$

причем скобки относятся не к конечным количествам, а ограничивают дифференцирование только одним из переменных.

СЛЕДСТВИЕ 3

4. Вместе с тем, если уравнение, выражающее найденный критерий, разделить на PQR , оно принимает вид

$$\left(\frac{d}{dz} \frac{Q}{P}\right) + \left(\frac{d}{dx} \frac{R}{Q}\right) + \left(\frac{d}{dy} \frac{P}{R}\right) = 0.$$

Его можно выразить еще и так:

$$\left(\frac{\frac{dQ}{Q} - \frac{dP}{P}}{R dz}\right) + \left(\frac{\frac{dR}{R} - \frac{dQ}{Q}}{P dx}\right) + \left(\frac{\frac{dP}{P} - \frac{dR}{R}}{Q dy}\right) = 0.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

5. В то время как все дифференциальные уравнения между двумя переменными всегда реальны и всегда ими определяется некоторое соотношение между этими переменными, мы выяснили, таким образом, что иначе дело обстоит с дифференциальными уравнениями, содержащими три переменные, и уравнения вида

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

выражают определенное соотношение между x , y и z только тогда, когда величины P , Q , R таковы, что имеет место найденный критерий. Отсюда понятно, что можно предложить бесконечно много таких дифференциальных уравнений между тремя переменными, которым не соответствует никакое конечное соотношение и которые поэтому ничего

собственно не определяют. Очевидно, можно как угодно¹⁾ образовывать такого рода уравнения, которые ни к какой задаче не приспособлены; но, как только определенная задача сводится к дифференциальному уравнению между тремя переменными, всегда должен быть выполнен указанный критерий, так как в противном случае уравнение ничего бы не выражало. Таким ничем не выражающим уравнением является, например, уравнение

$$z dx + x dy + y dz = 0,$$

и нельзя придумать ни одной функции z от x и y , которая бы удовлетворяла такому соотношению, ибо наш критерий дает в этом примере $-x - y - z$, а эта величина не исчезает, откуда вытекает бессмысленность уравнения.

ПОЯСНЕНИЕ 2

6. Чтобы легче можно было применять найденный критерий к разным случаям, следует сначала по уравнению

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

вычислить выражения

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) - \left(\frac{dR}{dy}\right) = L; \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dz}\right) = M; \quad \left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = N,$$

и левая часть нашего критерия представится в виде

$$LP + MQ + NR.$$

Если это выражение исчезает, то предложенное уравнение реально и выявляет некоторое конечное уравнение, а если оно не сводится к нулю, то заданное уравнение бессмысленно и нечего и думать об его интегрировании. Так, в вышеуказанном примере имеем

$$P = z; \quad Q = x; \quad R = y,$$

так что

$$L = -1, \quad M = -1 \quad \text{и} \quad N = -1,$$

откуда для левой части критерия получаем $-x - y - z$, что означает бессмысленность [заданного уравнения]. Дадим, напротив, еще пример реального уравнения:

$$dx (y^2 + nyz + z^2) - x (y + nz) dy - xz dz = 0.$$

Поскольку

$$P = y^2 + nyz + z^2; \quad Q = -xy - nxz \quad \text{и} \quad R = -xz,$$

то

$$L = -nx; \quad M = -3z - ny \quad \text{и} \quad N = 3y + 2nz,$$

откуда

$$\begin{aligned} LP + MQ + NR &= -nx(y^2 + nyz + z^2) + x(y + nz)(3z + ny) - xz(3y + 2nz) = \\ &= x(-ny^2 - n^2yz - nz^2 + 3yz + 3nz^2 + ny^2 + n^2yz - 3yz - 2nz^2) = 0 \end{aligned}$$

¹⁾ pro arbitrio.

и, так как это выражение исчезает, дифференциальное уравнение должно считаться реальным. Подобным образом, если предложено уравнение

$$2dx(y+z) + dy(x+3y+2z) + dz(x+y) = 0,$$

поскольку

$$P = 2y + 2z; \quad Q = x + 3y + 2z; \quad R = x + y,$$

имеем

$$L = 2 - 1 = 1; \quad M = 1 - 2 = -1 \quad \text{и} \quad N = 2 - 1 = 1,$$

и, следовательно,

$$LP + MQ + NR = 2y + 2z - x - 3y - 2z + x + y = 0,$$

так что данное дифференциальное уравнение реально.

ЗАДАЧА 2

7. Пусть дано дифференциальное уравнение между тремя переменными x , y , z , которое является реальным. Найти его интеграл, из которого вытекает, какой функцией остальных двух переменных является одно из них.

РЕШЕНИЕ

Пусть предложено дифференциальное уравнение

$$P dx + Q dy + R dz = 0,$$

в котором P , Q , R — функции x , y и z , такое, что найденный выше критерий реальности удовлетворяется, ибо если бы это уравнение не было бы реальным, было бы смешно пытаться его интегрировать. Итак, примем, что уравнение реально, так что существует соотношение между величинами x , y и z , удовлетворяющее заданному дифференциальному уравнению. Чтобы его найти, заметим, что если в интеграле считать постоянным одно из переменных, например z , то, приравнявая нулю дифференциал, мы должны получить уравнение

$$P dx + Q dy = 0.$$

С другой стороны, если считать постоянным одно из переменных, например z , то интегрирование дифференциального уравнения

$$P dx + Q dy = 0,$$

которое содержит только два переменных, приводит к искомому интегралу, если только постоянная интегрирования соответствующим образом зависит от z . Отсюда мы извлекаем следующее правило для интегрирования заданного уравнения. Будем рассматривать одно из переменных, например z , как постоянное, так что получается уравнение $P dx + Q dy = 0$, содержащее только два переменных x и y ; находим его полный интеграл, который содержит, следовательно, произвольное постоянное C . Далее постоянное C рассматривается как некоторая функция z , а теперь, считая и z переменным, снова дифференцируем найденный интеграл; полученное дифференциальное уравнение, в котором все три величины x , y и z рассматриваем как переменные, сравним с заданным уравнением $P dx + Q dy + R dz = 0$. Тогда функции P и Q возникают автомати-

чески, а сравнение функции R с полученным коэффициентом при dz определяет зависимость буквы C от z . Таким образом получается искомый интеграл, который будет полным, поскольку буква C содержит произвольное постоянное слагаемое, так как она определяется по своей производной.

СЛЕДСТВИЕ 1

8. Итак, интегрирование такого рода дифференциальных уравнений, содержащих три переменных, сводится к интегрированию дифференциальных уравнений, содержащих только два переменных, которое, стало быть, надо выполнять, когда это возможно, при помощи методов, изложенных в предыдущей книге.

СЛЕДСТВИЕ 2

9. Итак, это интегрирование может быть выполнено тремя способами в зависимости от того, будем ли мы вначале рассматривать как постоянное или z , или x , или y . Но при этом обязательно получается одно и то же интегральное уравнение¹⁾, если только дифференциальное уравнение было реальным.

СЛЕДСТВИЕ 3

10. Если попробовать применять этот метод к невозможному дифференциальному уравнению, то не удастся определить постоянное C таким образом, чтобы оно зависело только от того переменного, которое мы приняли за постоянное; и отсюда тоже можно извлечь критерий реальности [уравнения].

ПОЯСНЕНИЕ

11. Чтобы легче понять эту операцию, испробуем ее вначале применительно к невозможному уравнению

$$z dx + x dy + y dz = 0.$$

Здесь, беря z за постоянное, получим

$$z dx + x dy = 0 \quad \text{или} \quad \frac{z dx}{x} + dy = 0,$$

интеграл которого есть $zlx + y = C$, где C зависит только от z . Дифференцируем теперь это уравнение, считая z за переменное. Тогда, положив $dC = D dz$, где D — функция только от z , получим

$$\frac{z dx}{x} + dy + dz lx = D dz,$$

или

$$z dx + x dy + dz (x lx - Dx) = 0.$$

Таким образом, должно быть $x lx - Dx = y$ или $D = lx - \frac{y}{x}$, что невозможно.

Теперь применим нашу операцию к реальному уравнению

$$2dx(y+z) + dy(x+3y+2z) + dz(x+y) = 0.$$

¹⁾ В смысле «интеграл дифференциального уравнения».

Принимая y за постоянное, получим $2dx(y+z) + dz(x+y) = 0$ или

$$\frac{2dx}{x+y} + \frac{dz}{y+z} = 0.$$

Интегралом этого уравнения будет

$$2l(x+y) + l(y+z) = C,$$

где C содержит еще y . Итак, пусть $dC = D dy$. Тогда дифференцирование при переменном y дает

$$\frac{2dx + 2dy}{x+y} + \frac{dy + dz}{y+z} = D dy$$

или

$$2dx(y+z) + 2dy(y+z) + dy(x+y) + dz(x+y) = D dy(x+y)(y+z),$$

а это выражение при сравнении с предложенным уравнением дает $D = 0$, откуда $dC = 0$ и C — действительно постоянное. Таким образом, интегралом будет

$$(x+y)^2(y+z) = \text{const.}$$

Следуя этому методу, рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 1

12. Найти интеграл реального дифференциального уравнения

$$dx(y+z) + dy(x+z) + dz(x+y) = 0.$$

Прежде всего, ясно, что это уравнение реальное, поскольку

$$\begin{aligned} P &= y+z; & L &= 1-1=0; \\ Q &= x+z; & M &= 1-1=0; \\ R &= x+y; & N &= 1-1=0. \end{aligned}$$

Рассматривая z как постоянное, получим уравнение

$$dx(y+z) + dy(x+z) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{x+z} + \frac{dy}{y+z} = 0,$$

интегралом которого будет

$$l(x+z) + l(y+z) = f(z).$$

Итак, положим

$$(x+z)(y+z) = Z,$$

где функция Z должна быть найдена путем дифференцирования. Имеем

$$dx(y+z) + dy(x+z) + dz(x+y+z) = dZ,$$

и, вычитая отсюда исходное уравнение, получим $2z dz = dZ$, откуда $Z = z^2 + C$, так что полным интегралом будет

$$(x+z)(y+z) = z^2 + C \quad \text{или} \quad xy + xz + yz = C,$$

что, впрочем, можно легко получить из предложенного уравнения

$$y dx + z dx + x dy + z dy + x dz + y dz = 0,$$

поскольку его члены попарно дают интегрируемые комбинации.

ПРИМЕР 2

13. Найдите полный интеграл реального дифференциального уравнения

$$dx(ay - bz) + dy(cz - ax) + dz(bx - cy) = 0.$$

Реальность этого уравнения показывается так: поскольку

$$P = ay - bz, \quad Q = cz - ax, \quad R = bx - cy,$$

то будет

$$L = 2c, \quad M = 2b, \quad N = 2a,$$

откуда, очевидно, $LP + MQ + NR = 0$. Теперь принимаем за постоянное z и получаем:

$$\frac{dx}{cz - ax} + \frac{dy}{ay - bz} = 0,$$

так что

$$\frac{1}{a} \int \frac{ay - bz}{cz - ax} = f(z).$$

Положив $\frac{ay - bz}{cz - ax} = z$, находим после дифференцирования

$$\frac{a dx(ay - bz) + a dy(cz - ax) + a dz(bx - cy)}{(cz - ax)^2} = dZ,$$

и сравнение с предложенным уравнением дает $dZ = 0$ и $Z = C$, так что полный интеграл есть $\frac{ay - bz}{cz - ax} = n$ или $ay + nax = (b + nc)z$.

Если интеграл написать в виде

$$Ax + By + Cz = 0,$$

то эти постоянные должны быть связаны уравнением

$$Ac + Bb + Ca = 0,$$

и таким образом произвольное постоянное вводится в более изящном виде.

СЛЕДСТВИЕ

14. Итак рассмотренное уравнение становится интегрируемым, будучи поделено на $(cz - ax)^2$, и для той же цели годятся также делители

$$(ay - bz)^2 \quad \text{и} \quad (bx - cy)^2,$$

ибо, на основании интеграла, эти делители находятся между собой в постоянных отношениях. В самом деле, если $\frac{ay - bz}{cz - ax} = n$, то

$$\frac{bx - cy}{cz - ax} = \frac{-b - nc}{a} \quad \text{и} \quad \frac{bx - cy}{ay - bz} = \frac{-b - nc}{na}.$$

ПРИМЕР 3

15. Найдите полный интеграл реального дифференциального уравнения

$$dx(y^2 + yz + z^2) + dy(z^2 + xz + x^2) + dz(x^2 + xy + y^2) = 0.$$

Уравнение это реальное, поскольку

$$P = y^2 + yz + z^2, \quad Q = z^2 + xz + x^2, \quad R = x^2 + xy + y^2,$$

следовательно,

$$L = 2z + x - x - 2y = 2(z - y), \quad M = 2x + y - y - 2z = 2(x - z),$$

$$N = 2y + z - z - 2x = 2(y - x),$$

откуда

$$LP + MQ + NR = 2(z^3 - y^3) + 2(x^3 - z^3) + 2(y^3 - x^3) = 0.$$

Чтобы найти интеграл, примем z за постоянное и получим

$$\frac{dx}{x^2 + xz + z^2} + \frac{dy}{y^2 + yz + z^2} = 0.$$

Интеграл этого уравнения есть

$$\frac{2}{z\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{2z+x} + \frac{2}{z\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y\sqrt{3}}{2z+y} = f(z).$$

После сложения углов он переходит в

$$\frac{2}{z\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{(xz + yz + xy)\sqrt{3}}{2z^2 + xz + yz - xy} = f(z).$$

Положим, следовательно,

$$\frac{xz + yz + xy}{2z^2 + xz + yz - xy} = Z.$$

Дифференцируя это уравнение, причем считаем переменными и x , и y , и z , находим

$$\frac{2z dx (y^2 + yz + z^2) + 2z dy (z^2 + xz + x^2) - 2x dz (z^2 + yz + y^2) - 2y dz (z^2 + xz + x^2)}{(2z^2 + xz + yz - xy)^2} = dZ.$$

Поскольку, однако, из предложенного уравнения вытекает, что

$$dx (y^2 + yz + z^2) + dy (z^2 + xz + x^2) = -dz (x^2 + xy + y^2),$$

то после подстановки получим

$$\frac{-2z dz (x^2 + xy + y^2) - 2x dz (z^2 + yz + y^2) - 2y dz (z^2 + xz + x^2)}{(2z^2 + xz + yz - xy)^2} = dZ,$$

то есть

$$\frac{-2 dz (x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + x^2y + xy^2 + 3xyz)}{(2z^2 + xz + yz - xy)^2} = dZ,$$

что приводится к такому виду:

$$\frac{-2dz (x + y + z) (xy + xz + yz)}{(2z^2 + xz + yz - xy)^2} = dZ.$$

А так как

$$Z = \frac{xy + xz + yz}{2z^2 + xz + yz - xy},$$

то

$$\frac{-2Z^2 dz (x + y + z)}{xy + xz + yz} = dZ \quad \text{или} \quad \frac{-dZ}{Z^2} = \frac{2dz (x + y + z)}{xy + xz + yz}.$$

Следовательно, необходимо, чтобы выражение

$$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z}$$

было функцией только от z , которую обозначим через Σ , так что $-\frac{dZ}{Z^2} = \frac{2dz}{\Sigma}$. Но чтобы закончить решение, нужно выяснить еще форму функции Z , что может быть выполнено так. Поскольку

$$Z = \frac{xy + xz + yz}{2z^2 + xz + yz - xy}, \quad \text{имеем} \quad 1 + Z = \frac{2z^2 + 2xz + 2yz}{2z^2 + xz + yz - xz},$$

откуда

$$\frac{1 + Z}{Z} = \frac{2z(x + y + z)}{xy + xz + yz}.$$

С помощью этого уравнения можно исключить количества x и y из дифференциального уравнения, а именно:

$$-\frac{dZ}{Z^2} = dz \frac{2(x + y + z)}{xy + xz + yz} = dz \frac{1 + Z}{Zz},$$

откуда

$$\frac{-dZ}{Z(1 + Z)} = \frac{dz}{z} = \frac{-dz}{Z} + \frac{dZ}{1 + Z},$$

и после интегрирования $lz = l \frac{1 + Z}{Z} + la$. Итак,

$$\frac{1 + Z}{Z} = \frac{z}{a} \quad \text{и} \quad Z = \frac{a}{z - a}.$$

Таким образом, искомый интеграл есть

$$\frac{a}{z - a} = \frac{xy + xz + yz}{2z^2 + xz + yz - xy} \quad \text{или} \quad xy + xz + yz = a(x + y + z).$$

Эта простейшая форма может быть также сразу получена из уравнения

$$\frac{2z(x + y + z)}{xy + xz + yz} = \frac{1 + Z}{Z} = \frac{z}{a}.$$

СЛЕДСТВИЕ

15 [a] ¹⁾. Поскольку полный интеграл данного уравнения есть

$$xy + xz + yz = a(x + y + z) \quad \text{или} \quad \frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = \text{const},$$

то из этого уравнения путем дифференцирования снова получается предложенное дифференциальное уравнение. Отсюда ясно, что оно становится интегрируемым путем деления на $(x + y + z)^2$, а также на $(xy + xz + yz)^2$.

ПОЯСНЕНИЕ

16. Из этого примера видим, что определение функции, вводимой при интегрировании, иногда связано с довольно серьезными затруднениями; в данном случае мы определили функцию Z несколько извили-

¹⁾ В первом издании ошибочно повторен § 15.

стыми путями. Можно было бы, однако, определить ее гораздо легче; в самом деле, мы находим немедленно, что

$$\frac{xy + xz + yz}{2z^2 + xz + yz - xy} = Z = f(z),$$

а это выражение можно было бы представить в более изящном виде. В самом деле, так как

$$\frac{1}{Z} = \frac{2z^2 + xz + yz - xy}{xy + xz + yz},$$

то

$$1 + \frac{1}{Z} = \frac{2z(x + y + z)}{xy + xz + yz},$$

а отсюда

$$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = \frac{2Zz}{1 + Z} = f(z).$$

Отбрасывая функцию Z , положим сразу

$$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = \Sigma = f(z),$$

и после дифференцирования получим $d\Sigma = 0$, откуда $\Sigma = \text{const}$. Еще легче решается эта задача, если искать интеграл, приняв за постоянное y . Тогда подобным же путем приходим к уравнению

$$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = Y = f(y),$$

а поскольку это выражение должно быть одновременно функцией только от z и функцией только от y , то необходимо, чтобы оно было постоянным, поэтому полным интегралом нашего уравнения будет

$$xy + xz + yz = a(x + y + z).$$

ПРИМЕР 4

17. Найти полный интеграл реального дифференциального уравнения

$$dx(x^2 - y^2 + z^2) - z^2 dy + z dz(y - x) + \frac{x dz}{z}(y^2 - x^2) = 0.$$

Реальность этого уравнения показывает так: поскольку

$$P = x^2 - y^2 + z^2, \quad Q = -z^2, \quad R = z(y - x) + \frac{x}{z}(y^2 - x^2),$$

то

$$L = -3z - \frac{2xy}{z}, \quad M = -3z + \frac{y^2}{z} - \frac{3x^2}{z}, \quad N = -2y,$$

откуда после соответствующих выкладок получим

$$LP + MQ + NR = 0.$$

Полагаем теперь z постоянным и приходим к уравнению

$$dx(x^2 - y^2 + z^3) - z^2 dy = 0.$$

Его интегрирование удается, если учесть, что ему, в частности, удовлетворяет $y = x$. Положив поэтому $y = x + \frac{z^2}{v}$, мы можем найти полный

интеграл; имеем

$$dx \left(z^2 - \frac{2xz^2}{v} - \frac{z^4}{v^2} \right) = z^2 dx + \frac{z^4}{v^2} dv = 0,$$

откуда

$$dv - \frac{2xv}{z^2} dx = dx.$$

После умножения на $e^{\frac{-x^2}{z^2}}$ находим интеграл

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} v = \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx + f(z),$$

где в интегральном выражении $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$ количество z надо рассматривать как постоянное и, кроме того, надо учесть, что $v = \frac{z^2}{y-x}$. Итак, будем иметь

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx = \frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}}}{y-x} z^2 + Z.$$

Так как мы хотим дифференцировать это уравнение, считая переменным и z , то возникает затруднение, поскольку надо найти дифференциал количества $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$, порождаемый переменностью одного только z . Здесь надо напомнить из основ теории, что если

$$dV = S dx + T dz,$$

то должно быть $\left(\frac{dT}{dx} \right) = \left(\frac{dS}{dz} \right)$ и, следовательно, если z считать постоянным, $T = \int dx \left(\frac{dS}{dz} \right)$. В нашем же случае $S = e^{\frac{-x^2}{z^2}}$ и $V = \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$,

где z считается постоянным. Отсюда $\left(\frac{dS}{dz} \right) = e^{\frac{-x^2}{z^2}} \frac{2x^2}{z^2}$ и, следовательно,

$T = \frac{2}{z^3} \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} x^2 dx$. Таким образом полный дифференциал выражения $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$, порождаемый переменностью как x , так и z , есть

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx + \frac{2dz}{z^3} \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} x^2 dx,$$

и это выражение должно равняться дифференциалу выражения

$$\frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}}}{y-x} z^2 + Z,$$

который равен

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} \left[\frac{2z dz}{y-x} - \frac{z^2 dy + z^2 dx}{(y-x)^2} + \frac{2x^2 dz - 2xz dx}{z(y-x)} \right] + dZ.$$

Здесь мешает еще интегральное выражение $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} x^2 dx$, в котором z считается постоянным; оно может быть, однако, сведено к выражению

$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$. Если положить

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} x^2 dx = A e^{\frac{-x^2}{z^2}} x + B \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx,$$

то, поскольку здесь только x считается переменным, дифференцирование даст

$$x^2 dx = A dx - \frac{2Ax^2 dx}{z^2} + B dx,$$

и, следовательно,

$$A = -\frac{1}{2} z^2 \quad \text{и} \quad B = -A = \frac{1}{2} z^2,$$

так что

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} x^2 dx = -\frac{1}{2} e^{\frac{-x^2}{z^2}} x z^2 + \frac{1}{2} z^2 \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx.$$

Но поскольку

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx = \frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}} z^2}{y-x} + Z,$$

имеем

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} x^2 dx = -\frac{1}{2} e^{\frac{-x^2}{z^2}} x z^2 + \frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}} z^4}{2(y-x)} + \frac{1}{2} Z z^2.$$

После этой подстановки получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} & e^{\frac{-x^2}{z^2}} \left(dx - \frac{x dz}{z} + \frac{z dz}{y-x} \right) + \frac{Z dz}{z} = \\ & = e^{\frac{-x^2}{z^2}} \left[\frac{2z dz}{y-x} - \frac{z^2 dy}{(y-x)^2} + \frac{z^2 dx}{(y-x)^2} - \frac{2x dx}{y-x} + \frac{2x^2 dz}{z(y-x)} \right] + dZ, \end{aligned}$$

которое преобразуется к виду

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} \left[\frac{dx(y+x)}{y-x} - \frac{z^2 dx}{(y-x)^2} + \frac{z^2 dy}{(y-x)^2} - \frac{z dz}{y-x} - \frac{x(y+x) dz}{z(y-x)} \right] = \frac{z dZ - Z dz}{z},$$

или

$$\frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}}}{(y-x)^2} \left[dx(y^2 - x^2 - z^2) + z^2 dy - z dz(y-x) - \frac{x dz}{z}(y^2 - x^2) \right] = \frac{z dZ - Z dz}{z}.$$

При сопоставлении с исходным уравнением очевидно, что

$$z dZ - Z dz = 0, \quad \text{то есть} \quad Z = nz.$$

Таким образом, полный интеграл предложенного уравнения есть

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx = \frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}} z^2}{y-x} + nz,$$

где в интеграле $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$ количество z считается постоянным.

СЛЕДСТВИЕ

18. Предложенное уравнение становится интегрируемым, если его умножить¹⁾ на

$$\frac{1}{(y-x)^2} e^{\frac{-x^2}{z^2}},$$

и тогда получается тот интеграл, который мы нашли.

ПОЯСНЕНИЕ 1

19. Этот пример прежде всего замечателен тем, что при его решении были использованы некоторые искусственные приемы, которые в предыдущих примерах не требовались. Кроме того, выражение

$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$ кажется не определяющим этот интеграл полностью, ибо хотя

в нем z считается постоянным, все же постоянная, вводимая интегрированием, еще не определяется через nz , поскольку не предписано, как

надо взять интеграл $\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$: так ли, чтобы он исчезал при $x=0$, или же как-нибудь иначе. Это сомнение можно устранить, если найденное

уравнение разделить на z , так что интегральное выражение принимает вид

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} \frac{dx}{z};$$

поскольку здесь $\frac{dx}{z}$ равно $d\frac{x}{z}$, очевидно, что оно является некоторой

функцией от $\frac{x}{z}$; а если положить $\frac{x}{z} = p$, то наше интегральное уравнение принимает вид

$$\int e^{-p^2} dp + \text{const} = e^{-p^2} \frac{z}{y-x},$$

и условия, чтобы в интегральном выражении z считался постоянным, больше не требуется, а интеграл определяется точно так же, как если бы дифференциальное уравнение содержало только два переменных. Если учесть это обстоятельство, то определение полного дифференциала выражения

$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx$ при учете переменности как x , так и z , не связано ни с какими трудностями, ибо как только мы придем к уравнению

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} dx = e^{\frac{-x^2}{z^2}} \frac{z^2}{y-z} + f(z),$$

мы представим его в виде

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} \frac{dx}{z} = \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} d\frac{x}{z} = e^{\frac{-x^2}{z^2}} \frac{z}{y-z} + Z,$$

¹⁾ В следующем параграфе множитель для этого уравнения определяется точнее. Действительно, приведенное здесь выражение надо разделить на z . [Ф. Э.]

откуда, если теперь считать переменным также и z , после дифференцирования с учетом переменности всех количеств x , y и z получается

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} \left(\frac{dx}{z} - \frac{x dz}{z^2} \right) = e^{\frac{-x^2}{z^2}} \left[\frac{dz}{y-z} + \frac{z dx - z dy}{(y-x)^2} - \frac{2x dx}{z(y-x)} + \frac{2x^2 dz}{z^2(y-x)} \right] + dZ,$$

то есть

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} \left[\frac{dx(y+x)}{z(y-x)} - \frac{z dx}{(y-x)^2} + \frac{z dy}{(y-x)^2} - \frac{x dz(y+x)}{z^2(y-x)} - \frac{dz}{y-x} \right] = dZ,$$

что приводится к такому виду:

$$\frac{e^{\frac{-x^2}{z^2}}}{z(y-x)^2} \left[dx(y^2 - x^2 - z^2) + z^2 dy - z dz(y-x) - \frac{x dz}{z}(y^2 - x^2) \right] = dZ.$$

Отсюда вытекает, что должно быть $dZ=0$ и $Z = \text{const}$, и получается тот же интеграл, который мы нашли раньше.

ПОЯСНЕНИЕ 2

20. Тот же самый интеграл получится, если вместо z принять за постоянное x или y . Вообще следует иметь в виду, что если рассматриваем уравнение вида

$$P dx + Q dy + R dz = 0,$$

считая z постоянным, то мы должны получить одно и то же решение, какое бы из трех переменных мы ни считали постоянным даже тогда, когда этого казалось бы трудно ожидать. Так, если в предложенном уравнении принять за постоянное y , то нужно будет решить уравнение

$$dx(x^2 + z^2 - y^2) - z dz(x-y) - \frac{x dz}{z}(x^2 - y^2) = 0,$$

которое после умножения на z принимает вид

$$(z dx - x dz)(x^2 + z^2 - y^2) + y z^2 dz = 0.$$

Легко видеть, что оно упрощается, если положить $x = pz$, ибо в силу того, что

$$z dx - x dz = z^2 dp,$$

получаем

$$dp(p^2 z^2 + z^2 - y^2) + y dz = 0.$$

Далее, если положить $z = qy$, то будет

$$dp(p^2 q^2 + q^2 - 1) + dq = 0,$$

а так как этому уравнению удовлетворяет $q = \frac{1}{p}$, то положим $q = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ и получим

$$dp \left(\frac{2p}{r} + \frac{p^2}{r^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{pr} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{dp}{p^2} - \frac{dr}{r^2} = 0,$$

или

$$dp(2p^2 r + p^3 + 2r + p) - p dr = 0,$$

или, наконец,

$$dr - \frac{2r dp(p^2 + 1)}{p} = dp(p^2 + 1).$$

Умножим это уравнение на $\frac{1}{p^2} e^{-p^2}$ и интегрируем. Тогда

$$e^{-p^2} \frac{r}{p^2} = \int e^{-p^2} \frac{dp(1+p^2)}{p^2}.$$

Но

$$\int e^{-p^2} \frac{dp}{p^2} = -e^{-p^2} \frac{1}{p} - 2 \int e^{-p^2} dp,$$

откуда

$$e^{-p^2} \left(\frac{r}{p^2} + \frac{1}{p} \right) = - \int e^{-p^2} dp.$$

Но поскольку

$$p = \frac{x}{z} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} = \frac{z}{y} - \frac{z}{x} = \frac{z(x-y)}{xy},$$

имеем

$$r = \frac{xy}{z(x-y)}, \quad \frac{r}{p^2} = \frac{yz}{x(x-y)} \quad \text{и} \quad \frac{r}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{z}{x-y}.$$

Отсюда наш интеграл получается в виде

$$\int e^{\frac{-x^2}{z^2}} d \frac{x}{z} = e^{\frac{-x^2}{z^2}} \frac{z}{y-x} + f(y),$$

а его дифференциал, вычисленный при переменном y , при сравнении с предложенным уравнением дает, как и раньше, $f(y) = \text{const}$.

Впрочем, поскольку в этих примерах переменные x , y и z встречаются везде в одной и той же степени, я изложу общий метод исследования таких уравнений.

ЗАДАЧА 3

21. Если в дифференциальном уравнении

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

P , Q , R — однородные функции от x , y и z одного и того же измерения, то найти его интеграл; конечно, когда это уравнение реальное.

РЕШЕНИЕ

Пусть n — число измерений, которое дают переменные x , y и z в функциях P , Q , R ; итак, подставив $x = pz$ и $y = qz$, имеем

$$P = z^n S, \quad Q = z^n T \quad \text{и} \quad R = z^n V,$$

где S , T , V — функции только двух переменных p и q . А так как

$$dx = p dz + z dp \quad \text{и} \quad dy = q dz + z dq,$$

то наше уравнение принимает вид

$$+ qT + V) + Sz dp + Tz dq = 0,$$

то есть

$$\frac{dz}{z} + \frac{S dp + T dq}{pS + qT + V} = 0,$$

и это уравнение может быть реальным только тогда, когда дифференциальное выражение

$$\frac{S dp + T dq}{pS + qT + V},$$

содержащее два переменных p и q , непосредственно интегрируется, что имеет место, если

$$(qT + V) \left(\frac{dS}{dq} \right) + pT \left(\frac{dS}{dp} \right) - (pS + V) \left(\frac{dT}{dp} \right) - qS \left(\frac{dT}{dq} \right) - \\ - S \left(\frac{dV}{dq} \right) + T \left(\frac{dV}{dp} \right) = 0.$$

Всякий раз, как этот критерий соблюдается, наше уравнение будет реальным, а его интегралом будет

$$lz + \int \frac{S dp + T dq}{pS + qT + V} = \text{const},$$

где только вместо букв p и q надо подставить значения $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$.

СЛЕДСТВИЕ 1

22. Таким образом, в нашем первом примере [§ 12], поскольку

$$P = y + z, \quad Q = x + z, \quad R = x + y,$$

будет

$$S = q + 1, \quad T = p + 1, \quad V = p + q$$

и

$$\frac{dz}{z} + \frac{(q+1) dp + (p+1) dq}{2pq + 2p + 2q} = 0;$$

интеграл этого уравнения есть

$$lz + \frac{1}{2} l (pq + p + q) = \frac{1}{2} l (xy + xz + yz) = C$$

или

$$xy + xz + yz = C.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

23. Во втором примере [§ 13] имеем

$$P = ay - bz, \quad Q = cz - ax, \quad R = bx - cy,$$

откуда

$$S = aq - b, \quad T = c - ap, \quad V = bp - cq.$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{z} + \frac{(aq - b) dp + (c - ap) dq}{0} = 0,$$

откуда

$$(aq - b) dp + (c - ap) dq = 0,$$

и после интегрирования

$$l \frac{aq-b}{c-ap} = l \frac{ay-bz}{cz-ax} = C.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

24. В третьем примере [§ 14] будет

$$S = q^2 + q + 1, \quad T = p^2 + p + 1 \quad \text{и} \quad V = p^2 + pq + q^2,$$

откуда

$$\frac{dz}{z} + \frac{dp(q^2 + q + 1) + dq(p^2 + p + 1)}{p^2q + pq^2 + p^2 + 3pq + q^2 + p + q} = 0,$$

где знаменатель равен $(p + q + 1)(pq + p + q)$, так что эта дробь разлагается на две:

$$\frac{-dp - dq}{p + q + 1} + \frac{dp(q + 1) + dq(p + 1)}{pq + p + q},$$

вследствие чего интеграл после перехода от логарифмов к числам получается в виде

$$\frac{z(pq + p + q)}{p + q + 1} = \frac{xy + xz + yz}{x + y + z} = C.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

25. В четвертом примере [§ 18] будет

$$S = p^2 - q^2 + 1, \quad T = -1, \quad V = q - p + p(q^2 - p^2),$$

откуда

$$\frac{dz}{z} + \frac{dp(p^2 - q^2 + 1) - dq}{0} = 0,$$

и, следовательно,

$$dq = dp(p^2 - q^2 + 1).$$

Поскольку это уравнение удовлетворяется при $q = p$, положим $q = p + \frac{1}{r}$, стало быть, $dr - 2pr dp = dp$, а после интегрирования

$$e^{-p^2} r = \int e^{-p^2} dp = e^{-p^2} \frac{1}{q-p};$$

так что интеграл будет

$$e^{\frac{-x^2}{z^2}} \frac{z}{y-x} = \int e^{\frac{-x^2}{z^2}} d \frac{x}{z} + \text{const.}$$

ПОЯСНЕНИЕ

26. Итак, поскольку дифференциальные уравнения, содержащие три переменные, не представляют особых трудностей, так как их решение, когда они реальны, всегда может быть сведено к дифференциальным уравнениям в двух переменных, то я об этом предмете больше распространяться не буду. Что же касается дифференциальных уравнений в трех переменных, в которых дифференциалы встречаются в более

высоких степенях, как, например,

$$P dx^2 + Q dy^2 + R dz^2 + 2S dx dy + 2T dx dz + 2V dy dz = 0,$$

то надо иметь в виду, что они всегда бессмысленны, за исключением того случая, когда они с помощью извлечения корня приводятся к виду

$$P dx + Q dy + R dz = 0.$$

Ибо, как бы ни было составлено интегральное уравнение, из него можно определить z так, что оно будет функцией обоих переменных x и y , откуда $dz = p dx + q dy$, а переменные x и y никак не зависят друг от друга. Поэтому, если подставим значение $p dx + q dy$ вместо dz в дифференциальное уравнение, то оно должно удовлетворяться так, чтобы все члены взаимно уничтожались. А это невозможно, если из уравнения dz определяется так, что дифференциалы dx и dy стоят под знаком корня. Следовательно, так как приведенное нами для примера уравнение при решении дает

$$dz = \frac{-T dx - V dy \pm \sqrt{(T^2 - PR) dx^2 + 2(TV - RS) dx dy + (V^2 - QR) dy^2}}{R},$$

то оно может быть реальным только в том случае, когда корень извлекается, т. е. если само уравнение разлагается на два множителя вида

$$P dx + Q dy + R dz.$$

Но даже если это выполняется и полученные множители приравнены нулю, то уравнение будет реальным только тогда, когда соблюдается вышеприведенный критерий. Отсюда совершенно ясно, что и уравнения такого рода, которые содержат четыре или больше переменных, не представляют затруднений.

ЗАДАЧА 4

27. Пусть V — какая угодно функция переменных x , y и в интеграле $\int V dx$ количество y считается постоянным. Определить дифференциал выражения $\int V dx$, когда не только x , но и y считается переменным.

РЕШЕНИЕ

Положим, что $\int V dx = Z$; тогда Z будет функцией переменных x и y , хотя при самом интегрировании y считается постоянным. Очевидно также, что если при дифференцировании y считается постоянным, то будет $dZ = V dx$. Следовательно, если считать переменным также и y , то дифференциал $Z = \int V dx$ имеет вид

$$dZ = V dx + Q dy,$$

и вопрос заключается в том, чтобы определить количества Q . Поскольку выражение $V dx + Q dy$ представляет полный дифференциал, должно

быть $\left(\frac{dV}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$; отсюда

$$dx\left(\frac{dQ}{dx}\right) = dx\left(\frac{dV}{dy}\right).$$

Но $dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ есть дифференциал Q , когда y рассматривается как постоянное; отсюда получается Q , если выражение $dx\left(\frac{dV}{dy}\right)$ интегрировать так, что y рассматривается как постоянное, то есть $Q = \int dx \frac{dV}{dy}$. Итак, полный дифференциал выражения $Z = \int V dx$ при переменном как x , так и y будет

$$dZ = V dx + dy \int dx \left(\frac{dV}{dy}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

28. Поскольку V есть функция x и y , то, полагая $dV = R dx + S dy$, имеем $S = \left(\frac{dV}{dy}\right)$, откуда

$$dZ = d \int V dx = V dx + dy \int S dx,$$

где в выражении $\int S dx$ точно так же, как раньше в выражении $\int V dx$, только количество x должно считаться переменным.

СЛЕДСТВИЕ 2

29. Если V есть однородная функция x и y , пусть с числом измерений $= n$, то при $dV = R dx + S dy$ будет $Rx + Sy = nV$, так что

$$S = \frac{nV}{y} - \frac{Rx}{y}, \text{ откуда } \int S dx = \frac{n}{y} \int V dx - \frac{1}{y} \int Rx dx.$$

Но при y постоянном имеем $R dx = dV$, откуда

$$\int Rx dx = \int x dV = Vx - \int V dx,$$

так что

$$\int S dx = \frac{n+1}{y} \int V dx - \frac{Vx}{y}$$

и

$$dZ = d \int V dx = V dx - \frac{Vx dy}{y} + \frac{(n+1) dy}{y} \int V dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

30. То же самое легче получить на основании соображения, что функция $Z = \int V dx$ будет однородной функцией $n+1$ измерения, так что,

положив $dZ = V dx + Q dy$, будем иметь $Vx + Qy = (n+1)Z$; итак, $Q = \frac{(n+1)Z}{y} - \frac{Vx}{y}$, как и выше.

ПОЯСНЕНИЕ

31. Этой задачей я занимался еще раньше, в предыдущей книге¹⁾, но я счел не лишним поместить ее и в эту работу, поскольку эта книга занимается функциями двух и больше переменных. Однако главной задачей этой книги является интегрирование не тех дифференциальных уравнений, о которых речь шла в данной главе и решение которых я вкратце показал. Как мы знаем, когда V есть функция двух переменных x и y , она дает при дифференцировании две производные $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ и $\left(\frac{dV}{dy}\right)^2$; и в этой книге мы будем рассматривать главным образом вопрос об определении такой функции V из какого-либо данного соотношения между производными $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ и $\left(\frac{dV}{dy}\right)$. А такое соотношение выражается в виде уравнения между этими производными и переменными x и y , куда может войти и искомая функция V ; из свойств этого уравнения надо исходить в построении данной работы. А именно, общая проблема, решением которой мы занимаемся в данном разделе, заключается в том, чтобы найти функцию V переменных x и y , которая удовлетворяет любому предложенному уравнению между величинами x , y , V , $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ и $\left(\frac{dV}{dy}\right)$. Если в этом уравнении содержится только одна из производных $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ или $\left(\frac{dV}{dy}\right)$, то его решение нетрудно и сводится к решению дифференциальных уравнений в двух только переменных. Но когда встречаются в уравнении обе производные, тогда решение гораздо труднее и часто невыполнимо, даже если дифференциальные уравнения в двух переменных считать уже решенными. Вообще в этих вопросах мы всегда будем считать задачу решенной, когда она может быть сведена к интегрированию дифференциальных уравнений в двух переменных. Итак, поскольку согласно данному уравнению производная $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ равняется некоторой функции количеств x , y , V и $\left(\frac{dV}{dx}\right)$, мы подразделим изложение предмета в зависимости от свойств этой функции, рассматривая последовательно случаи, когда эта функция содержит только производную $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ или, кроме того, еще одно из остальных количеств, или еще два, или же все. Соблюдая такой порядок, легко будет показать, что до сих пор оказалось возможным получить и чего еще остается пожелать. Кроме того, мы будем излагать еще некоторые вспомогательные предложения³⁾ о преобразовании обеих производных к другим переменным.

¹⁾ См. Интегральное исчисление, т. I, §§ 457, 458, а также «Механику» Эйлера, т. II, § 106 в издании Opera Omnia, ser. II, vol. 2, p. 44.

²⁾ У Эйлера: *duplices formulas* $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dV}{dy}\right)$. И дальше речь идет о «*formulas*».

³⁾ *Nonnulla subsidia*.

ПОСТРОЕНИЕ ДАННОГО РАЗДЕЛА

32. Чтобы легче объяснить те части, которые должны войти в данный раздел, поскольку эти вопросы касаются функций двух переменных, пусть будут x и y два переменных, а z функция их, которую требуется определить из данного дифференциального уравнения, следовательно, требуется найти конечное уравнение между x , y и z . Положим $dx = p dx + q dy$, так что по принятым обозначениям $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ и $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, стало быть, p и q суть те производные, которые входят в предложенное соотношение. Вообще говоря, это соотношение есть какое угодно уравнение между величинами p , q , x , y и z , и задача этого раздела была бы полностью решена, если бы был указан метод для получения уравнения между x , y и z по любому предложенному уравнению между количествами p , q , x , y и z . А так как это, вообще говоря, не удается выполнить даже для функций одного переменного, то тем менее можно ожидать этого в данном случае. Следовательно, нужно будет только рассмотреть те случаи, которые допускают решение. Но прежде всего решение удается, когда в заданном уравнении одна из производных p или q отсутствует, т. е. когда задано уравнение либо между p , x , y и z , либо между q , x , y и z . Далее, легко удается решить уравнения, которые содержат только обе производные p и q , так что одна из них должна быть некоторой функцией другой. Далее следуют уравнения, которые, кроме p и q , содержат еще одно конечное количество, или x , или y , или z , и мы увидим, что во всех этих случаях решение возможно. Затем порядок требует, чтобы были рассмотрены уравнения, содержащие кроме обеих производных p и q еще два конечных количества, или x и y , или x и z , или y и z . Наконец, мы займемся решением уравнений, содержащих все переменные p , q , x , y и z и изложим вспомогательные преобразования.



ГЛАВА II

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, В КОТОРЫХ ОДНА ИЗ ПРОИЗВОДНЫХ ЛЮБЫМ ОБРАЗОМ ВЫРАЖЕНА ЧЕРЕЗ КОНЕЧНЫЕ КОЛИЧЕСТВА

ЗАДАЧА 4 [a]¹⁾

33. Определить вид функции z двух переменных x и y , если производная $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ есть постоянное количество $= a$.

РЕШЕНИЕ

Положим $dz = p dx + q dy$, тогда требуется определить функцию z так, чтобы было $p = a$ или $dz = a dx + q dy$. Чтобы найти эту функцию, будем считать y постоянным, тогда $dz = a dx$, и после интегрирования $z = ax + \text{const}$, причем нужно иметь в виду, что здесь постоянное может любым образом зависеть от y . Следовательно, общее решение будет $z = ax + f(y)$, где $f(y)$ обозначает любую функцию y , которая никоим образом не может быть определена и полностью зависит от нашего произвола. В свою очередь это показывает дифференцирование: действительно, если дифференциал функции $f(y)$ обозначить через $dyf'(y)$, то непременно будет $dz = a dx + dyf'(y)$. Итак, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a$, как оно и требуется. Отсюда ясно, что в этом случае другая производная $q = -\left(\frac{dz}{dy}\right)$ есть функция только от y , так как $q = f'(y)$ ²⁾.

СЛЕДСТВИЕ 1

34. Итак, если ищем такую функцию z двух переменных x и y , чтобы было $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a$, то $z = ax + f(y)$, и другая производная $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ будет по необходимости функцией только от y .

¹⁾ В первом издании ошибочно повторен № 4.

²⁾ В первом издании ошибочно напечатано: так как $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$. [Ф. Э.]

СЛЕДСТВИЕ 2

35. Если ищем такую функцию, чтобы было $\frac{dz}{dx} = 0$, то она по необходимости будет функцией только от y , т. е. вовсе не содержит количества x . Ибо, поскольку изменение одного x не вызывает никакого изменения функции, это количество вовсе не требуется для ее определения.

СЛЕДСТВИЕ 3

36. Отсюда еще вытекает также, что дифференциальное уравнение $dz = a dx + q dy$ может быть реальным только тогда, когда q зависит только от y ; того же требует и вышеизложенный критерий, если уравнение представить в виде $a dx + q dy - dz = 0$. В самом деле, так как

$$P = a, Q = q \text{ и } R = -1, \text{ то } L = \left(\frac{dq}{dz}\right), M = 0 \text{ и } N = -\left(\frac{dq}{dx}\right).$$

Следовательно, для реальности уравнения требуется, чтобы было

$$a \left(\frac{dq}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right) = 0.$$

Но по условию q не зависит от z , откуда в силу $\left(\frac{dq}{dz}\right) = 0$ следует $\left(\frac{dq}{dx}\right) = 0$, следовательно, q не зависит также и от x .

ПОЯСНЕНИЕ

37. Из сказанного достаточно ясно, что операция, которой мы определили функцию z , является настоящим интегрированием, которое, как обычное интегрирование, вводит нечто неопределенное. В данном случае вводится какая угодно функция от y , свойства которой сами по себе никоим образом не определены. Ее можно представить себе даже так, что описывается какая угодно кривая, и если ее абсциссы обозначать через y , то ее ординаты дают такого рода функцию от y . При этом даже не нужно, чтобы эта кривая была регулярной и представлялась каким-либо уравнением; но любая кривая, свободно проведенная от руки, дает тот же эффект даже когда она крайне иррегулярна и состоит из нескольких частей разных кривых. Такие иррегулярные функции следует называть разрывными или лишенными непрерывной связи¹⁾. В связи с этим следует обратить внимание на то, что в то время, как прежде рассмотренные интеграции давали только непрерывные функции, в данном случае в [математическом] анализе появляются также разрывные функции²⁾, что до сих пор многим видным математикам представляется противоречащим его принципам³⁾. Особенная сила интеграций, рассматриваемых в данной книге, в том и состоит, что при них могут встречаться и разрывные функции⁴⁾; так что надо полагать, что благодаря этому существенно новому исчислению границы анализа значительно расширяются.

¹⁾ Именно в этом смысле, существенно отличном от современного, Эйлер употребляет в дальнейшем термин «разрывный».

²⁾ hic etiam functiones discontinuae calculo subjiciantur.

³⁾ См. примечание к § 299. [Ф. Э.]

⁴⁾ etiam functionum discontinuarum sint capaces.

ПОЯСНЕНИЕ 2

38. Точно так же, как встречающаяся в обычных интегрированиях произвольная постоянная всегда определяется природой задачи, которая привела к этому интегрированию, так и в нашем случае природа задачи всегда дает возможность определить ту произвольную функцию, которая появляется в результате интегрирования. Так, если известна форма натянутой струны и мы ее внезапно отпускаем, чтобы она колебалась, то с помощью принципов механики можно определить форму струны в любой момент времени, а выполняется это при помощи некоторого интегрирования, в связи с которым появляется некоторая произвольная функция; а последнюю надо определить так, чтобы получалась в начальный момент движения заданная форма струны. А так как решение должно быть общим и отвечать любой начальной форме, то необходимо, чтобы оно было пригодно и в тех случаях, когда струна вначале имеет совершенно иррегулярную форму и не удовлетворяет никаким условиям непрерывности, что было бы невозможно, если бы при интегрировании не вводились бы такие находящиеся в нашем произволе функции, что дают возможность приспособиться даже к иррегулярным формам¹⁾. Такого рода произвольные функции я буду и в дальнейшем обозначать через $f(y)$.

Таким же образом в дальнейшем запись $f(x+y)$ будет обозначать произвольную функцию количества $x+y$; и там, где несколько таких функций будут входить в расчет, я буду употреблять, кроме буквы f , еще буквы Φ , ψ , θ и т. д. в том же смысле.

ЗАДАЧА 5

39. Определить вид функции z двух переменных x и y так, чтобы производная $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ была равна данной функции x , которая пусть будет X , так что $p = X$.

РЕШЕНИЕ

Положив $dz = p dx + q dy$, имеем в силу $p = X$, что $dz = X dx + q dy$; поскольку слагаемое $X dx$ в этом дифференциале задано, то для нахождения интеграла примем y за постоянное и, поскольку тогда $dz = X dx$, после интегрирования получаем $z = \int X dx + \text{const}$, причем постоянная может зависеть от y и в качестве ее можно взять произвольную функцию y . Итак, искомый интеграл есть $z = \int X dx + f(y)$, что при дифференцировании дает

$$dz = X dx + dy f'(y),$$

так что $q = f'(y)$ и $\left(\frac{dz}{dx}\right) = X$, как оно и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 1

40. Таким образом интеграл уравнения $\left(\frac{dz}{dx}\right) = X$, где z — функция двух переменных x и y , есть $z = \int X dx + f(y)$. Здесь, поскольку X

¹⁾ См. примечание к § 299. [Ф. Э.]

дано, выражение $\int X dx$ означает определенную функцию x , ибо постоянная интегрирования может быть включена в произвольную функцию $f(y)$.

СЛЕДСТВИЕ 2

41. Отсюда следует, что дифференциальное уравнение

$$dz = X dx + q dy$$

может быть реальным только тогда, когда q зависит только от y ; это надо понимать с таким ограничением, что q не содержит также величины z ; этот случай мы отбрасываем.

ПОЯСНЕНИЕ

42. Если q зависит также от z , то уравнение $dz = X dx + q dy$ будет реальным, если q будет какой угодно функцией двух количеств $z - \int X dx$ и y ; в этом легко убедиться, если положить $z - \int X dx = u$ так, что q будет функцией двух количеств u и y . Действительно, тогда дифференциальное уравнение, которое примет вид $du = q dy$, содержит только два переменных u и y и, следовательно, всегда реально. Каким бы ни был его интеграл, в силу этого интеграла u будет определенной функцией от y , так что $u = z - \int X dx = f(y)$, как и раньше. Таким образом, всегда, когда $\left(\frac{dz}{dx}\right) = X$, не исключая и того случая, когда q содержит также и z , интегралом будет

$$z = \int X dx = f(y),$$

и другого решения быть не может. Этот интеграл является полным, так как он содержит произвольную функцию, что следует рассматривать как самый верный признак полного интеграла. Стало быть, для полноты интеграла здесь требуется, чтобы он содержал не какую-либо произвольную постоянную, а произвольную функцию¹⁾. Таким образом, если в случае $\left(\frac{dz}{dx}\right) = ax^2$ рассматривать интеграл

$$z = \frac{1}{3} ax^3 + A + By + Cy^2 + \text{и т. д.},$$

то он будет только частным, даже если взять несколько произвольных постоянных A, B, C и т. д. и возможно даже, когда их будет бесконечно много; а подлинный полный интеграл

$$z = \frac{1}{3} ax^3 + f(y)$$

имеет намного бóльшую общность²⁾; это надо иметь в виду для правильного понимания дальнейшего. Однако встречаются случаи, когда из-за отсутствия метода нахождения полного интеграла мы вынуждены удовлетворяться частными интегралами, которые даже тогда, когда они содержат бесконечное число произвольных постоянных, должны рассмат-

¹⁾ Sed functio adeo variabilis arbitraria ingrediatur.

²⁾ infinite latius patet.

риваться как частные решения. Это замечание надо в дальнейшем постоянно помнить, и тогда мы никогда не будем ошибаться в отношении частных и полных интегралов.

ЗАДАЧА 6

43. Пусть z — функция двух переменных x , y и пусть производная $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ равняется какой угодно заданной функции x и y . Требуется найти общий вид искомой функции z .

РЕШЕНИЕ

Пусть V есть та заданная функция x и y , которой равняется производная $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$. Если положить $dz = p dx + q dy$, то будет, следовательно, $p = V$. Для нахождения формы функции z будем рассматривать сперва количество y как постоянное, и тогда $dz = V dx$. Выполняем, следовательно, интегрирование $\int V dx$, рассматривая только x как переменное, так как y рассматриваем как постоянное, стало быть, в этом выражении имеется только одно переменное интегрирования x и это интегрирование выполняется без затруднений. При этом надо только иметь в виду, что в постоянную интегрирования может любым образом входить второе количество y , так что для искомой функции z получаем выражение

$$z = \int V dx + f(y),$$

где интеграл $\int V dx$ взят таким образом, что количество y считается постоянным и только x меняется; а $f(y)$ означает какую угодно произвольную функцию y , не исключая и разрывные, которые не выражаются никакими аналитическими выражениями, и только при наличии такой произвольной функции интегрирование может считаться полным.

СЛЕДСТВИЕ 1

44. Поскольку V — заданная функция x и y , интеграл $\int V dx$ также есть известная и определенная функция тех же переменных x и y , ибо весь произвол, который появляется в результате интегрирования, содержится во втором слагаемом $f(y)$.

СЛЕДСТВИЕ 2

45. Отсюда определяется также второе слагаемое $q dy$ в дифференциале dz , возникающее в результате переменности y . Ведь уже в § 28 мы нашли дифференциал выражения $\int V dx$, возникающий в результате переменности как x , так и y :

$$V dx + dy \int dx \left(\frac{dV}{dy}\right),$$

а если обозначить дифференциал функции $f(y)$ через $dyf'(y)$, то будет

$$dz = V dx + dy \int dx \left(\frac{dV}{dy} \right) + dyf'(y).$$

СЛЕДСТВИЕ 3

46. Согласно нашему обозначению $dz - p dx + q dy$ имеем $p = V$ и

$$q = \int dx \left(\frac{dV}{dy} \right) + f'(y),$$

где, поскольку V — заданная функция x и y , также и $\left(\frac{dV}{dy} \right)$ будет заданной функцией, а при интегрировании $\int dx \left(\frac{dV}{dy} \right)$ только x рассматривается как переменное.

ПРИМЕР 1

47. Ищется такая функция z от x и y , чтобы было

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Вследствие того, что $V = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, будет $\int V dx = \sqrt{x^2 + y^2}$, так что имеем

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + f(y).$$

Отсюда

$$\left(\frac{dz}{dy} \right) = q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f'(y),$$

что вытекает также из данного [нами] правила. В самом деле,

$$\left(\frac{dV}{dy} \right) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

и, полагая y постоянным, получим

$$\int dx \left(\frac{dV}{dy} \right) = -y \int \frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

ПРИМЕР 2

48. Ищется такая функция z от x и y , чтобы было

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Поскольку $V = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$, то $\int V dx = y \arcsin \frac{x}{y}$ и отсюда

$$z = y \arcsin \frac{x}{y} + f(y).$$

Ищем дифференциал этого выражения, происходящий от переменности y . Вследствие того, что

$$\left(\frac{dV}{dy} \right) = \frac{-x^2}{(y^2 - x^2)^{3/2}},$$

имеем

$$\int dx \left(\frac{dV}{dy} \right) = - \int \frac{x^2 dx}{(y^2 - x^2)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{y^2 - x^2}} - y^2 \int \frac{dx}{(y^2 - x^2)^{3/2}}$$

и, следовательно,

$$\int dx \left(\frac{dV}{dy} \right) = \arcsin \frac{x}{y} - \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}},$$

так что

$$q = \arcsin \frac{x}{y} - \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}} + f'(y).$$

То же самое мы находим при помощи дифференцирования полученного выражения для z :

$$dz = dy \arcsin \frac{x}{y} + \frac{y dx - x dy}{\sqrt{y^2 - x^2}} + dy f'(y),$$

откуда для $q = \left(\frac{dz}{dy} \right)$ получается то же самое значение.

ПРИМЕР 3

49. Ищется такая функция z от x и y , чтобы было

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2 - x^2}}.$$

Так как $V = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2 - x^2}}$, то

$$\int V dx = a \arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

откуда искомая функция z получается в виде

$$z = a \arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} + f(y).$$

Отсюда, поскольку

$$\left(\frac{dV}{dy} \right) = \frac{ay}{(a^2 - y^2 - x^2)^{3/2}},$$

получаем

$$\int dx \left(\frac{dV}{dy} \right) = ay \int \frac{dx}{(a^2 - y^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{ay}{a^2 - y^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2 - x^2}},$$

так что

$$\left(\frac{dz}{dy} \right) = q = \frac{axy}{(a^2 - y^2) \sqrt{a^2 - y^2 - x^2}} + f'(y),$$

что мы могли бы получить также путем дифференцирования z .

ПОЯСНЕНИЕ 1

50. В этих выкладках до сих пор имеется еще одна неопределенность касательно количества q . Ибо для того, чтобы значение $z = \int V dx + f(y)$

было определенным, требуется также, чтобы интеграл $\int V dx$ был определенным относительно x , а именно, чтобы для данного значения x он принимал заданное значение; при этом в его полном дифференциале не может быть никакой неопределенности, значит необходимо, чтобы значение q было так же вполне определено, как и значение p ; вместе с тем выражение $\int dx \left(\frac{dV}{dy} \right)$ не вполне определенное, а содержит новую производную функцию, не зависящую от прежде введенных величин. Чтобы избежать такого неопределенного обозначения, нужно иметь в виду, что то условие, которым определяется интеграл $\int V dx$, нужно применять также к определению интеграла $\int dx \left(\frac{dV}{dy} \right)$. Ибо, если положить, что интеграл $\int V dx$ берется так, чтобы он равнялся нулю при $x = a$, и обозначить его при таком определении через S , то он содержит множитель $a - x$ или $a^n - x^n$; и поскольку этот множитель не содержит y , то $\left(\frac{dS}{dy} \right)$ также содержит этот множитель и, следовательно, $\left(\frac{dS}{dy} \right)$ исчезает при $x = a$. Но $\left(\frac{dS}{dy} \right) = \int dx \left(\frac{dV}{dy} \right)$, откуда видно, что если интеграл $\int V dx$ берется так, что он исчезает при $x = a$, то интеграл $\int dx \left(\frac{dV}{dy} \right)$ также должен быть взят так, чтобы он исчезал при $x = a$. В последних двух рассмотренных примерах оба раза интегрирование выполнено так, чтобы интеграл исчезал при $x = 0$, в первом же примере такое правило не соблюдено; но если применить это правило, то будем иметь

$$\int V dx = \sqrt{x^2 - y^2} - y \quad \text{и} \quad \int dx \left(\frac{dV}{dy} \right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1,$$

откуда получается то же самое решение; ибо здесь y включено в $f(y)$ и, следовательно, -1 в $f'(y)$. Вообще, каким бы законом ни определялось первое интегрирование, тем же надо пользоваться и во втором интегрировании.

ПОЯСНЕНИЕ 2

51. Принцип этого определения опирается на следующую теорему, изящную и достойную внимания:

Если S — такая функция двух переменных x и y , которая исчезает при $x = a$ и если

$$dS = P dx + Q dy,$$

то количество Q также исчезает при $x = a$.

Отсюда заключаем также, что если S исчезает при $y = b$, то также будет $P = 0$ при $y = b$. При этом, нужно, однако, заметить, что то, что было сказано относительно одинакового определения интегралов $\int V dx$ и $\int dx \left(\frac{dV}{dy} \right)$, верно только в том случае, если значение a , которое придается переменному x , является постоянным. Например, вышеприведенная теорема не имеет места, если, к примеру, функция S исчезает

при $x = y$, откуда ни в коей мере не следует, что при том же условии должно исчезать Q . Даже если функция S содержит множитель $x - y$ или $x^n - y^n$, то отсюда вовсе не следует, что производная $\left(\frac{dS}{dy}\right)$, то есть Q , должна содержать тот же множитель, как это имело бы место, если бы этот множитель был $x - a$, или $x^n - a^n$. Подчеркиваю при этом, что вовсе не нужно, чтобы такой множитель на самом деле присутствовал также как степень в функции S . Например, если

$$S = a - x + y - \sqrt{a^2 - x^2 + y^2},$$

то эта функция исчезает при $x = a$, но она не содержит ни множителя $x - a$, ни множителя $x^n - a^n$; но все же

$$\left(\frac{dS}{dy}\right) = 1 - \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

исчезает при $x = a$. В таких выкладках, какими мы пользуемся в этих задачах, каждый раз, когда требуется вычислить интеграл вида $\int V dx$, его надо всегда рассматривать как состоящий из двух частей, из которых одна неопределенная, обозначенная через функцию $f(y)$, а другая, которую мы выразили через $\int V dx$ в собственном смысле, определяется так, чтобы она исчезала при $x = a$; при этом безразлично, какое значение берется для постоянной a , поскольку такое изменение всегда [соответственно] изменит вторую, неопределенную часть¹⁾.

ЗАДАЧА 7

52. Если z должно быть так определено через переменные x и y , чтобы производная $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ равнялась некоторой заданной функции y и z , которая пусть будет V , — найти общий вид функции z от x и y .

РЕШЕНИЕ

Положим $dz = p dx + q dy$, тогда $p = V$. Таким образом, если y считать постоянным, будет $dz = V dx$, причем V есть данная функция y и z ; итак, при y постоянном имеет место уравнение $\frac{dz}{V} = dx$, которое можно проинтегрировать, и его полным интегралом будет

$$\int \frac{dz}{V} = x + f(y).$$

Это уравнение дает соотношение между тремя переменными x , y и z в общем случае, и отсюда можно выразить z через x и y и найти вид функции z .

Если мы хотим исследовать второй член дифференциала $q dy$ или функцию $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, то возьмем интеграл $\int \frac{dz}{V}$, в котором y считается постоянным, так, чтобы интеграл исчезал при $z = c$ и тогда, продиффе-

¹⁾ dum discrimen perpetuo alteri parti indeterminatae involvitur.

ренцировав количество $\int \frac{dz}{V}$, причем y считаем переменным, получим

$$d \int \frac{dz}{V} = \frac{dz}{V} + dy \int dz \left(\frac{d \frac{1}{V}}{dy} \right),$$

то есть

$$d \int \frac{dz}{V} = \frac{dz}{V} - dy \int \frac{dz}{V^2} \left(\frac{dV}{dy} \right),$$

где в интеграле $\int \frac{dz}{V^2} \left(\frac{dV}{dy} \right)$ количество y снова считается постоянным, а интеграл берется так, чтобы он исчезал при $z=c$. Сделав так, мы имеем дифференциал найденного уравнения

$$\frac{dz}{V} - dy \int \frac{dz}{V^2} \left(\frac{dV}{dy} \right) = dx + dy f'(y),$$

откуда

$$dz = V dx + dy \left(V \int \frac{dz}{V^2} \left(\frac{dV}{dy} \right) + V f'(y) \right),$$

что нам дает количество q .

СЛЕДСТВИЕ 1

53. В этой задаче легче всего определить количество x , как функцию остальных переменных y и z , так как

$$x = \int \frac{dz}{V} - f(y),$$

где V выражено через y и z . И ведь безразлично, определить z через x и y или x через y и z .

СЛЕДСТВИЕ 2

54. Поскольку соотношение между тремя переменными x , y и z определяется так, что $\left(\frac{dz}{dx} \right) = V$, то есть заданной функции y и z , то из $dx = \frac{dz}{V}$, что имеет место при y постоянном, следует, что x есть такая функция от y и z , что $\left(\frac{dx}{dz} \right) = \frac{1}{V}$, и следовательно, $\left(\frac{dz}{dx} \right) \left(\frac{dx}{dz} \right) = 1$.

ПОЯСНЕНИЕ

55. Вообще говоря, какое бы ни было предложено соотношение между тремя переменными x , y и z , из которого любое из них может быть определено через остальные два и, стало быть, может рассматриваться как их функция, всегда будет $\left(\frac{dz}{dx} \right) \left(\frac{dx}{dz} \right) = 1$. Действительно, положим, что из уравнения, которым выражена эта зависимость, получается

$$P dx + Q dy + R dz = 0;$$

тогда, принимая y постоянным, имеем, очевидно,

$$P dx + R dz = 0,$$

откуда $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-P}{R}$ и $\left(\frac{dx}{dz}\right) = \frac{-R}{P}$; подобным же образом получаем

$$\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{-Q}{P}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-P}{Q}; \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-Q}{R}; \quad \left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{-R}{Q},$$

что делает очевидным наше утверждение, также и в случае, когда дано соотношение между более чем тремя переменными. Впрочем, рассмотренный случай отличается от только что изложенного, поскольку функция z , в зависимости от x и y , не дана в явном виде, а должна определяться путем решения найденного уравнения. Будет полезно дать в связи с этим несколько примеров.

ПРИМЕР 1

56. *Ищется такая функция z от x и y , чтобы было*

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y}{z}.$$

Поскольку $dz = \frac{y dx}{z} + q dy$, то, взяв y постоянным, имеем

$$z dz = y dx \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} z^2 = xy + f(y).$$

Чтобы найти q , дифференцируем это уравнение в общем виде, и это дает

$$z dz = y dx = x dy + dy f'(y)$$

и

$$q = \frac{x}{z} + \frac{1}{z} f'(y),$$

что может быть найдено также при помощи вышеприведенного правила. В самом деле, $V = \frac{y}{z}$, откуда $\int \frac{dz}{V} = \frac{z^2}{2y}$, где интеграл взят таким образом, что он исчезает при $z = 0$; а вследствие того, что $\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{1}{z}$, будет

$$\int \frac{dz}{V^2} \left(\frac{dV}{dy}\right) = \int \frac{z dz}{y^2} = \frac{z^2}{2y^2}.$$

Соблюдая при интегрировании прежнее условие¹⁾ [получаем]

$$dz = \frac{y dx}{z} + \frac{y dy}{z} \left[\frac{z^2}{2y^2} + f'(y) \right] \quad \text{и} \quad q = \frac{z}{2y} + \frac{y}{z} f'(y),$$

что согласуется с предыдущим результатом. Действительно, сравнение дает

$$x + f'(y) = \frac{z^2}{2y} + y f'(y),$$

откуда следует, что x , как и раньше, равняется $\frac{z^2}{2y}$ с прибавлением некоторой функции y . Нужно только иметь в виду, что для полного согласия нужно здесь вместо $f(y)$ писать $yf(y)$.

¹⁾ eadem integrationis lege observata. — Это значит, что и здесь берем интеграл так, чтобы он был равен нулю при $z = 0$.

ПРИМЕР 2

57. Ищется такая функция z переменных x и y , чтобы было

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\sqrt{y^2 - z^2}}{z}.$$

Поскольку должно быть

$$dz = \frac{dx\sqrt{y^2 - z^2}}{z} + q dy,$$

то при постоянном y имеем

$$dx = \frac{z dz}{\sqrt{y^2 - z^2}}$$

и, после интегрирования,

$$x = y - \sqrt{y^2 - z^2} - f(y),$$

откуда в свою очередь путем дифференцирования получаем

$$dx = dy - \frac{y dy - z dz}{\sqrt{y^2 - z^2}} - dy f'(y)$$

или

$$dz = \frac{dx\sqrt{y^2 - z^2}}{z} + dy \left[\frac{y}{z} - \frac{\sqrt{y^2 - z^2}}{z} [1 - f'(y)] \right].$$

Согласно же данному выше правилу имеем, так как $V = \frac{\sqrt{y^2 - z^2}}{z}$,

$$\int \frac{dz}{V} = y - \sqrt{y^2 - z^2},$$

где интеграл берется так, чтобы он исчезал при z , равном нулю. Но

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{y}{z\sqrt{y^2 - z^2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{V^2} \left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{yz}{(y^2 - z^2)^{3/2}},$$

следовательно,

$$\int \frac{dz}{V^2} \left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - z^2}} - 1,$$

где интеграл взят при прежнем условии¹⁾. Отсюда вытекает, что

$$q = \frac{\sqrt{y^2 - z^2}}{z} \left[\frac{y}{\sqrt{y^2 - z^2}} - 1 + f'(y) \right] = \frac{y}{z} - \frac{\sqrt{y^2 - z^2}}{z} [1 - f'(y)],$$

так же как и раньше.

ЗАДАЧА 8

58. Требуется определить функцию z от x и y так, чтобы производная $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ равнялась произвольно заданной функции от x и z , которая пусть равна V . Определить общий вид функции z от x и y .

¹⁾ integrali eadem lege sumto. См. предыдущую сноску.

РЕШЕНИЕ

Положим $dz = p dx + q dy$ и, поскольку $p = V$, полагая количество y постоянным, получаем $dz - V dx = 0$. Это уравнение содержит только два переменных x и z и его можно сделать интегрируемым при помощи соответствующего множителя, который пусть равняется M . Таким образом, $M dz - MV dx$ есть точный дифференциал некоторой функции x и z , скажем функции S , которая не содержит количества y . В силу этого нашим интегральным уравнением будет $S = f(y)$, откуда определяется функция z через x и y . Если продифференцировать это уравнение, считая переменными не только x и z , но также и y , то будет

$$dS = M dz - MV dx = dy f'(y),$$

то есть

$$dz = V dx + \frac{dy}{M} f'(y), \text{ так что } q = \frac{1}{M} f'(y).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

59. Множитель M , который делает интегрируемым выражение $dz - V dx$, не содержит количества y , так как и заданная функция V не содержит y . Однако, как только этот множитель найден, мы находим $q = \frac{1}{M} f'(y)$.

СЛЕДСТВИЕ 2

60. Если интеграл дифференциала $M dz - MV dx$ есть функция S от x и z , то решением задачи будет $S = f(y)$, откуда вытекает, что постоянная интегрирования, которую, казалось бы, можно добавить к S^1 , содержится в произвольной функции $f(y)$.

ПРИМЕР 1

61. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{nz}{x}.$$

Поскольку $dz = \frac{nz dx}{x} + q dy$, то при y постоянном имеем $dz - \frac{nz dx}{x} = 0$, и это уравнение после умножения на $\frac{1}{z}$ становится интегрируемым, так что имеем множитель $M = \frac{1}{z}$. Отсюда интеграл $S = lz - lx^n$. Итак, искомым интегралом нашего уравнения будет $l \frac{z}{x^n} = f(y)$; следовательно, $\frac{z}{x^n}$ также является произвольной функцией y , так что $z = x^n f(y)$.

ПРИМЕР 2

62. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = nx - z.$$

¹⁾ quam quis forte ad S adicere voluerit.

Положим $dz = (nx - z) dx + q dy$; при y постоянном имеем $dz + z dx - nx dx = 0$, что при помощи множителя $M = e^x$ дает

$$S = e^x z - n \int e^x x dx = e^x z - ne^x x + ne^x,$$

откуда уравнение, выражающее искомое соотношение между x , y и z , есть

$$e^x z - ne^x x + ne^x = f(y)$$

или

$$z = n(x - 1) + e^{-x} f(y),$$

так что

$$q = \left(\frac{dz}{dy} \right) = e^{-x} f'(y).$$

ПРИМЕР 3

63. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{xz}{x^2 + z^2}.$$

Положив $dz = \frac{xz dx}{x^2 + z^2} + q dy$ и считая y постоянным, ищем интеграл дифференциального уравнения

$$dz - \frac{xz dx}{x^2 + z^2} = 0.$$

Это уравнение становится интегрируемым при помощи некоторого делителя, который вследствие однородности уравнения получается посредством подстановки x и z вместо дифференциалов dx и dz , так что этот делитель есть

$$z - \frac{x^2 z}{x^2 + z^2} = \frac{z^3}{x^2 + z^2},$$

откуда множитель $M = \frac{x^2 + z^2}{z^3}$. Следовательно,

$$dS = \frac{(x^2 + z^2) dz}{z^3} - \frac{x dx}{z^2}$$

и отсюда

$$S = \frac{-x^2}{2z^2} + lz,$$

так что искомое уравнение есть

$$lz - \frac{x^2}{2z^2} = f(y) \quad \text{и} \quad q = \frac{z^3}{x^2 + z^2} f'(y).$$

В силу этого, положив $lz - \frac{x^2}{2z^2} = u$, имеем $u = f(y)$, и в свою очередь $y = f(u)$.

ЗАДАЧА 9

64. Требуется определить функцию z двух переменных x и y так, чтобы производная $\left(\frac{dz}{dx} \right)$ равнялась любой заданной функции всех трех переменных x , y и z , которая пусть будет $= V$. Найти общий вид функции z от x и y .

РЕШЕНИЕ

Поскольку $dz = V dx + q dy$, то, полагая y постоянным, имеем $dz = V dx$, что является дифференциальным уравнением двух переменных x и z , причем, однако, буква y все же входит в функцию V . Если имеем множитель M , делающий это уравнение интегрируемым, так что

$$M dz - MV dx = dS,$$

то отсюда вытекает интегральное соотношение между x , y и z

$$S = f(y),$$

где S есть функция x , y и z , причем уже M может содержать все эти три буквы. Целесообразно придать функции S , которую находим интегрированием, определенное значение, так как неопределенное слагаемое включается в произвольную функцию $f(y)$. Положим поэтому, что функция S берется так, чтобы она исчезала при $x = a$ и $z = c$.

Если мы отсюда хотим найти в искомом дифференциале второе слагаемое $q dy$ ¹⁾, то дифференцируем функцию S , считая переменным также y , так что

$$dS = M dz - MV dx + Q dy = dy f'(y),$$

и, поскольку

$$\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dM}{dy}\right) \quad \text{или} \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\left(\frac{d(MV)}{dy}\right),$$

имеем, снова считая y постоянным,

$$dQ = dz \left(\frac{dQ}{dz}\right) + dx \left(\frac{dQ}{dx}\right) = dz \left(\frac{dM}{dy}\right) - dx \left(\frac{d(MV)}{dy}\right).$$

и это выражение безусловно интегрируемо. При этом надо Q взять по тому же закону, по которому мы взяли S , а именно так, чтобы это количество исчезало при $x = a$ и $z = c$, а после нахождения этой величины Q , ввиду того, что

$$dz = V dx - \frac{Q dy}{M} + \frac{dy}{M} f'(y),$$

получим

$$q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-Q + f'(y)}{M}.$$

Это определение основывается на том, что если S такая функция переменных x , y и z , которая исчезает при $x = a$ и $z = c$, то производная $\left(\frac{dS}{dy}\right)$ в этом случае также исчезает.

СЛЕДСТВИЕ 1

65. Итак, решение этой задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$dz - V dx = 0,$$

в котором количество y рассматривается как постоянное и тогда, когда V содержит все три буквы x , y и z . Затем тем или иным образом указы-

¹⁾ Quodsi hinc aequationis differentialis propositae alteram partem $q dy$ invenire velimus.

вается множитель M , который делает это уравнение интегрируемым, так что

$$M dz - MV dx = dS,$$

где S — какая-то определенная функция x , y и z .

СЛЕДСТВИЕ 2

66. После нахождения этого множителя M и отсюда интеграла S , величина z определяется через переменные x и y так, чтобы было $S = f(y)$, где $f(y)$ обозначает любую функцию y , непрерывную или разрывную, и поскольку эта функция такова, интеграл следует считать полным.

СЛЕДСТВИЕ 3

67. Если по этому способу найдено соотношение между z , x , y , то, продифференцировав его, считая все три буквы x , y и z переменными, получаем

$$dz = V dx + \frac{f'(y) - Q}{M} dy,$$

где величина Q должна быть определена по своему дифференциалу,

$$dQ = dz \left(\frac{dM}{dy} \right) - dx \left(\frac{dMV}{dy} \right),$$

причем I считаем постоянным, а интегрирование должно быть выполнено так, чтобы S исчезало, в случае $x = a$ и $z = c$ и чтобы Q в этом случае также исчезало.

ПОЯСНЕНИЕ

68. Мы пришли здесь, следовательно, к такой замечательной теореме:

Если S есть такая функция x , y и z , которая исчезает при $x = a$ и $z = c$, тогда при тех же предположениях исчезает также $\left(\frac{dS}{dy} \right)$. Так, например, если

$$S = Ax^2 + Bxyz + Cz^2 - Aa^2 - Basc - Cc^2,$$

то $\left(\frac{dS}{dy} \right) = Bxz - Basc$ и оба эти выражения исчезают при $x = a$ и $z = c$. Правильность этой теоремы настолько ясна из многочисленных просмотренных примеров, что специальное доказательство не требуется. Все же (укажем), что такая функция после выделения количеств, содержащих только y , может быть разложена так, что она принимает вид

$$S = PY + QY' + RY'' + \text{и т. д.},$$

где по условию P , Q , R и т. д. суть функции только от x и z , которые при $x = a$ и $z = c$ каждая в отдельности исчезает. Отсюда ясно, что

$$\left(\frac{dS}{dy} \right) = P \frac{dY}{dy} + Q \frac{dY'}{dy} + R \frac{dY''}{dy} + \text{и т. д.},$$

а это выражение, очевидно, при тех же условиях также исчезает. Но как бы функция S указанного свойства ни была сложна и какие бы

она ни содержала иррациональные и трансцендентные выражения, ее всегда можно разложить в ряд такого вида, быть может, бесконечный, и это доказательство сохраняет силу.

ПРИМЕР 1

69. Требуется найти такую функцию z двух переменных x и y , чтобы было $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{xz}{ay}$.

Положив $dz = \frac{xz dx}{ay} + q dy$ и приняв y постоянным, получим уравнение $dz - \frac{xz dx}{ay} = 0$, так что $V = \frac{xz}{ay}$, а множитель будет $M = \frac{1}{z}$; отсюда

$$S = l \frac{z}{c} - \frac{x^2 - a^2}{2ay},$$

а полный интеграл, определяющий функцию z , будет

$$l \frac{z}{c} + \frac{a^2 - x^2}{2ay} = f(y).$$

Далее, чтобы найти величину q , имеем, поскольку $M = \frac{1}{z}$ и $MV = \frac{x}{ay}$, уравнения $dQ = \frac{x dx}{ay^2}$ и $Q = \frac{x^2 - a^2}{2ay^2}$ ¹⁾; отсюда $q = zf'(y) - \frac{z(x^2 - a^2)}{2ay^2}$. Впрочем, здесь то же значение можно найти путем дифференцирования найденного интеграла, что дает

$$\frac{dz}{z} - \frac{x dx}{ay} - \frac{a^2 - x^2}{2ay^2} dy = dyf'(y),$$

откуда

$$dz = \frac{xz dx}{ay} + z dyf'(y), + \frac{z(a^2 - x^2)}{2ay^2} dy, \text{ так что } q = zf'(y) + \frac{z(a^2 - x^2)}{2ay^2}.$$

ПРИМЕР 2

70. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y}{x+z}$.

Поскольку $V = \frac{y}{x+z}$, имеем при y постоянном уравнение

$$dz - \frac{y dx}{x+z} = 0.$$

Для того чтобы найти его множитель, умножим его сначала на $x+z$, что даст

$$x dz + z dz - y dx = 0 \quad \text{или} \quad dx - \frac{x dz}{y} = \frac{z dz}{y},$$

а это выражение становится интегрируемым после умножения на $e^{-\frac{z}{y}}$. И таким образом получаем, что

$$e^{-\frac{z}{y}} x = \int e^{-\frac{z}{y}} \frac{z dz}{y} = -e^{-\frac{z}{y}} z + \int e^{-\frac{z}{y}} dz,$$

¹⁾ В первом издании: $dQ=0$ и $Q=0$, откуда $q=zf'(y)$. Поэтому надо было исправить и формулы следующего параграфа. [Ф. Э.]

откуда

$$e^{-\frac{z}{y}} x = -e^{-\frac{z}{y}} z - ye^{-\frac{z}{y}} + C.$$

Следовательно, множитель есть

$$M = (x+z) \left(-\frac{1}{y} \right) e^{-\frac{z}{y}} = -\frac{x+z}{y} e^{-\frac{z}{y}}$$

и

$$S = e^{-\frac{z}{y}} (x+z+y) - e^{-\frac{c}{y}} (a+c+y).$$

В результате полный интеграл будет

$$e^{-\frac{z}{y}} (x+z+y) - e^{-\frac{c}{y}} (a+c+y) = f(y).$$

Далее, поскольку $MV = -e^{-\frac{z}{y}}$, то

$$\left(\frac{dM}{dy} \right) = e^{-\frac{z}{y}} \left[\frac{x+z}{y^2} - \frac{z(x+z)}{y^3} \right] = e^{-\frac{z}{y}} (x+z) \left(\frac{1}{y^2} - \frac{z}{y^3} \right)$$

и

$$\left(\frac{dMV}{dy} \right) = -e^{-\frac{z}{y}} \frac{z}{y^2},$$

откуда

$$dQ = e^{-\frac{z}{y}} \left[dz(x+z) \left(\frac{1}{y^2} - \frac{z}{y^3} \right) + \frac{z dx}{y^2} \right].$$

Считая y постоянным и интегрируя, получаем

$$Q = e^{-\frac{z}{y}} \left(\frac{xz}{y^2} + 1 + \frac{z}{y} + \frac{z^2}{y^2} \right) - e^{-\frac{c}{y}} \left(\frac{ac}{y^2} + 1 + \frac{c}{y} + \frac{c^2}{y^2} \right),$$

откуда

$$q = \frac{z}{y} + \frac{y+z}{x+z} - e^{\frac{z-c}{y}} \left[\frac{ac+c^2+cy+y^2}{y(x+z)} \right] - \frac{y}{x+z} e^{\frac{z}{y}} f'(y),$$

так что

$$dz = \frac{y dx}{x+z} + q dy.$$

Найденное уравнение дает после дифференцирования

$$\begin{aligned} -e^{-\frac{z}{y}} \frac{(x+z) dz}{y} + e^{-\frac{z}{y}} dx + e^{-\frac{z}{y}} dy \left(1 + \frac{z}{y} + \frac{xz}{y^2} + \frac{z^2}{y^2} \right) - \\ - e^{-\frac{c}{y}} dy \left(1 + \frac{c}{y} + c \frac{a+c}{y^2} \right) = dy f'(y), \end{aligned}$$

откуда получаем точно такое же значение q .

ПРИМЕР 3

71. Ищется такая функция z переменных x и y , чтобы было

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{y^2 + z^2}{y^2 + x^2}.$$

Положив $dz = \frac{y^2 + z^2}{y^2 + x^2} dx + q dy$ и приняв y постоянным, получаем $dz - \frac{(y^2 + z^2) dx}{y^2 + x^2} = 0$, и подходящим множителем для этого уравнения является, очевидно, $M = \frac{y}{y^2 + z^2}$. Отсюда получаем

$$\frac{y dz}{y^2 + z^2} - \frac{y dx}{y^2 + x^2} = 0$$

и, после интегрирования,

$$S = \operatorname{arctg} \frac{z}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C = \operatorname{arctg} \frac{yz - xy}{y^2 + xz} - \operatorname{arctg} \frac{(c-a)y}{ac + y^2},$$

и искомая функция z определяется следующим уравнением:

$$\operatorname{arctg} \frac{y(z-x)}{y^2 + xz} - \operatorname{arctg} \frac{(c-a)y}{ac + y^2} = f(y).$$

Поскольку, далее, $MV = \frac{y}{y^2 + x^2}$, то будет

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \frac{z^2 - y^2}{(y^2 + z^2)^2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{d(MV)}{dy}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2},$$

откуда

$$dQ = \frac{(z^2 - y^2) dz}{(y^2 + z^2)^2} - \frac{(x^2 - y^2) dx}{(y^2 + x^2)^2}.$$

Мы считаем здесь y постоянным, следовательно,

$$Q = \frac{-z}{y^2 + z^2} + \frac{x}{y^2 + x^2} + \frac{c}{y^2 + c^2} - \frac{a}{y^2 + a^2}$$

и $q = \frac{-Q + f'(y)}{M}$, и это же значение можно получить путем дифференцирования [интеграла].

Впрочем, так как постоянные a и c взяты произвольно, их можно принять равными нулю или положить только $c = a$, а тогда интеграл будет

$$\operatorname{arctg} \frac{y(z-x)}{y^2 + xz} = f(y),$$

откуда также

$$\frac{y(z-x)}{y^2 + xz} = f(y) \quad \text{и} \quad \frac{y^2 + xz}{z-x} = f(y),$$

а если последнюю функцию обозначать через V , то будем иметь

$$Z = \frac{y^2 + xY}{Y-x}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

72. Вряд ли необходимо специально указать, что, как часто случается, решение такого рода вопросов может превосходить силы анализа, а именно в том случае, когда подлежащее решению дифференциальное уравнение [в двух переменных] не может быть проинтегрировано известными до сих пор приемами. Например, если взять $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y^2}{x^2 + z^2}$, откуда при y постоянном получается $y^2 dx = x^2 dz + z^2 dz$, т. е.

уравнение, которое до сих пор не удается проинтегрировать. Впрочем, так как интеграл может быть выражен при помощи ряда, то, если только он полный, решение нашей задачи также может быть получено в виде ряда. Именно, положив $x = \frac{-y^2 du}{udz}$ и рассматривая элемент dz как постоянный, получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y^4 d^2 u + uz^2 dz^2 = 0,$$

интегрируя которое с помощью рядов, получаем¹⁾

$$u = A \left(1 - \frac{z^4}{3 \cdot 4 y^4} + \frac{z^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 y^8} - \dots \right) + Bz \left(1 - \frac{z^4}{4 \cdot 5 y^4} + \frac{z^8}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 y^8} - \dots \right),$$

где A и B можно считать какими-то функциями y . Итак, если положить

$$\frac{A}{B} = f(y), \text{ то будет}$$

$$x = \frac{y^2 f(y) \left(\frac{z^3}{3y^4} - \frac{z^7}{3 \cdot 4 \cdot 7 y^8} + \dots \right) - y^2 \left(1 - \frac{z^4}{4y^4} + \frac{z^8}{4 \cdot 5 \cdot 8 y^8} - \dots \right)}{f(y) \left(1 - \frac{z^4}{3 \cdot 4 y^4} + \frac{z^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 y^8} - \dots \right) + z \left(1 - \frac{z^4}{4 \cdot 5 y^4} + \frac{z^8}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 y^8} - \dots \right)},$$

и этим уравнением искомая функция z выражается через переменные x и y в самом общем виде. Так как мы уже нашли методы приближенного интегрирования произвольных дифференциальных уравнений [в двух переменных]²⁾, и с получением при этом полного интеграла, то при помощи этих методов все относящиеся сюда проблемы могут быть решены, по крайней мере, приближенно. Вообще в этой более сложной части анализа мы можем считать, что решение дифференциальных уравнений, относящихся к предыдущему разделу анализа, уже выполнено, и вообще, при дальнейшем продвижении вперед в анализе, мы будем всегда считать решенными те вопросы, которые относятся к предыдущим разделам, даже если они не разработаны полностью.

¹⁾ См. Интегральное исчисление, т. II, § 929.

²⁾ См. Интегральное исчисление, т. I, §§ 650—667 и т. II, §§ 1082—1099.



ГЛАВА III

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, В КОТОРЫХ ОДНА ИЗ ДВУХ ПРОИЗВОДНЫХ КАКИМ-ЛИБО ОБРАЗОМ ВЫРАЖАЕТСЯ ЧЕРЕЗ ДРУГУЮ

ЗАДАЧА 10

73. Ищется функция z переменных x и y , такая, чтобы производные $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ и $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ были между собой равны. Найти общий вид этой функции.

РЕШЕНИЕ

Положим $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ и $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$, так что $dz = p dx + q dy$. Выражение $p dx + q dy$ должно быть интегрируемым. Поскольку, однако, требуется, чтобы было $q = p$, то будет $dz = p(dx + dy)$, и после подстановки $x + y = u$ получаем $dz = p du$, а так как эта формула сама по себе интегрируема, то необходимо, чтобы p было функцией переменного количества u и не содержало никаких других переменных. Таким образом, в результате интегрирования количество $z = \int p du$ будет функцией u , то есть $z = f(u)$, а эта функция полностью в нашем произволе, так что условиям задачи отвечает в качестве z любая функция от u , как непрерывная, так даже разрывная. Итак, поскольку $u = x + y$, решением нашей задачи является $z = f(x + y)$. Чтобы легче усмотреть, что это выражение удовлетворяет предписанному условию, напомним $df(u) = du f'(u)$, так что, раз $u = x + y$, будем иметь

$$dz = (dx + dy) f'(x + y) = dx f'(x + y) + dy f'(x + y),$$

и поэтому

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = f'(x + y) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q = f'(x + y),$$

следовательно, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ или $q = p$, как это и требуется.

СЛЕДСТВИЕ 1

74. Как бы ни была образована функция количества $x + y$, количество z всегда будет обладать предписанным свойством, $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right)$. Такую функцию мы будем обозначать знаком $f(x + y)$, так что $z = f(x + y)$.

СЛЕДСТВИЕ 2

75. Геометрически это решение может быть воспроизведено так: нанесем над осью [абсцисс] произвольную кривую регулярную или нерегулярную, и если абсцисса выражает собою $x + y$, то ордината всегда будет давать подходящее для функции z значение.

СЛЕДСТВИЕ 3

76. Универсальность этого найденного с помощью интегрирования решения заключается в том, что мы нашли z как произвольную непрерывную или разрывную функцию количества $x + y$, и, конечно, такая функция всегда удовлетворяет условию задачи.

ПОЯСНЕНИЕ 1

77. В основе нашего решения лежит тот принцип, что дифференциальное выражение $p du$ может быть интегрируемым только тогда, когда p есть функция u , или же, наоборот, u есть функция p , причем никакое другое переменное не принимается в расчет. В силу этого, какой бы функцией u ни было p , интеграл, даже если он не может быть взят в явном виде, всегда, однако, может считаться определенным¹⁾. Ибо если u означает абсциссу, а p —ординату любой кривой, регулярной или нерегулярной, чем можно определить функцию переменного u в самом широком смысле, то площадь, образуемая этой кривой, дает нам значение интеграла, которое в свою очередь может рассматриваться как функция u ; и таким образом, общий вид интеграла $\int p du$ дается произвольной функцией величины u^2). Что, однако, произвольная функция от $x + y$, взятая в качестве z , удовлетворяет тому условию, что в дифференциале $dz = p dx + q dy$ имеем $p = q$ или $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, само по себе очевидно, так что это утверждение не требует иллюстрации примерами. Дадим все же такой пример:

$$z = a^2 + b(x + y) + (x + y)^2 = a^2 + bx + by + x^2 + 2xy + y^2;$$

дифференцирование дает

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = b + 2x + 2y \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = b + 2x + 2y,$$

и эти значения равны между собой.

¹⁾ integrale nisi exhiberi, semper tamen concipi potest.

²⁾ ex quo vicissim functio quaecunque ipsius u naturam formulae integrali $\int p du$ exhaurit.

ПОЯСНЕНИЕ 2

78. Обозначая через z функцию двух переменных x и y и полагая $dz = p dx + q dy$, так что

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q,$$

мы будем рассматривать в этой главе такие вопросы, когда задано произвольное уравнение между p и q , в которое остальные переменные x , y и z не входят. Итак, когда предложено любое уравнение между p и q и постоянными, требуется определить вид функции z переменных x и y так, чтобы соответствующие производные $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ и $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ удовлетворяли этому условию. Мы начали изложение этого вопроса с простейшего примера $p = q$, решение которого может быть выполнено при помощи только что изложенного принципа. И этот же принцип достаточен для решения следующей, более общей задачи.

ЗАДАЧА 11

79. Требуется найти такую функцию z двух переменных x и y , чтобы было $\alpha \left(\frac{dz}{dx}\right) + \beta \left(\frac{dz}{dy}\right) = \gamma$. Найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Положим $dz = p dx + q dy$ и потребуем, чтобы было $\alpha p + \beta q = \gamma$. Отсюда, поскольку $q = \frac{\alpha p - \gamma}{\beta}$, получим

$$dz = p dx + \frac{\gamma - \alpha p}{\beta} dy,$$

то есть

$$dz = \frac{\gamma}{\beta} dy + \frac{p}{\beta} (\beta dx - \alpha dy),$$

и эта формула должна быть интегрируемой. Но поскольку слагаемое $\frac{\gamma}{\beta} dy$ само по себе интегрируемо, то второе слагаемое тоже должно быть интегрируемым, откуда следует, что после подстановки $\beta x - \alpha y = u$, когда оно принимает вид $\frac{p}{\beta} du$, p должно быть функцией u , и, следовательно, соответствующий интеграл также должен быть функцией количества $u = \beta x - \alpha y$. Поэтому положим

$$\int p (\beta dx - \alpha dy) = f(\beta x - \alpha y),$$

и тогда

$$z = \frac{\gamma}{\beta} y + \frac{1}{\beta} f(\beta x - \alpha y).$$

Итак, искомое уравнение, определяющее вид функции z , будет

$$\beta z = \gamma y + f(\beta x - \alpha y),$$

где знак f обозначает какую угодно функцию, непрерывную или разрывную, от выражения $\beta x - \alpha y$. Обозначая дифференциал функции $f(u)$ через $duf'(u)$, будем иметь

$$p = f'(\beta x - \alpha y) \quad \text{и} \quad q = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} f'(\beta x - \alpha y),$$

откуда, очевидно, вытекает $\alpha p + \beta q = \gamma$.

СЛЕДСТВИЕ 1

80. Можно получить то же решение, подставляя для p его значение $p = \frac{\gamma - \beta q}{\alpha}$, что дает

$$dz = \frac{\gamma}{\alpha} dx + \frac{q}{\alpha} (\alpha dy - \beta dx)$$

и тем же путем, как и раньше, получаем

$$z = \frac{\gamma x}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} f(\alpha y - \beta x).$$

Хотя это выражение по внешности отличается от предыдущего, но оно все же легко к нему сводится, если положить

$$f(\beta x - \alpha y) = \frac{\gamma(\beta x - \alpha y)}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \Phi(\alpha y - \beta x),$$

и в этом виде оно также является функцией от $\beta x - \alpha y$.

СЛЕДСТВИЕ 2

81. Итак, если в выражении $dz = p dx + q dy$ должно быть $p + q = 1$, то так как $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и $\gamma = 1$, решение сводится к

$$z = y + f(x - y).$$

Если, следовательно, построена любая кривая и абсциссе $x - y$ соответствует ордината v , то будет $z = y + v$.

ПОЯСНЕНИЕ

82. Если предложено другое соотношение между p и q , то получить этим методом решение уже невозможно; но надлежит пользоваться другим принципом, правильность которого следует из первых элементов интегрального исчисления. А именно, нужно иметь в виду, что

$$\int p dx = px - \int x dp$$

и, подобным же образом,

$$\int q dy = qy - \int y dq;$$

так что если

$$z = \int (p dx + q dy),$$

то будет

$$z = px + qy - \int (x dp + y dq).$$

Как этот принцип можно применять к решению тех вопросов, которые относятся к данной главе, будет показано в нижеследующих задачах.

ЗАДАЧА 12

83. Требуется найти такую функцию z двух переменных x и y , чтобы при $dz = p dx + q dy$ было $pq = 1$. Найти общий вид функции¹⁾

РЕШЕНИЕ

Заметим, что согласно вышеустановленному принципу

$$z = px + qy - \int (x dp + y dq).$$

Но поскольку из $pq = 1$ следует $q = \frac{1}{p}$, то будет

$$z = px + \frac{y}{p} - \int \left(x dp - \frac{y dp}{p^2} \right).$$

Поэтому выражение $\int \left(x - \frac{y}{p^2} \right) dp$ должно быть интегрируемым. Но вообще выражение вида $\int u dp$ допускает интегрирование только тогда, когда u есть функция одного p . Поэтому в нашем случае необходимо, чтобы количество $x - \frac{y}{p^2}$ было функцией только p , откуда следует, что интеграл $\int dp \left(x - \frac{y}{p^2} \right)$ также будет функцией одного p , которую мы обозначим через $f(p)$ и ее дифференциал через $dp f'(p)$. Тогда

$$z = px + \frac{y}{p} - f(p) \quad \text{и} \quad x - \frac{y}{p^2} = f'(p).$$

Следовательно, для решения нашей проблемы нужно ввести новое переменное p , а по этому переменному, вместе со вторым переменным y , определяются остальные переменные x и z . Следовательно, если возьмем переменное p и его произвольную функцию $f(p)$ вместе с ее производной $f'(p)$, то вычислим сперва

$$x = \frac{y}{p^2} + f'(p),$$

а затем

$$z = \frac{2y}{p} + pf'(p) - f(p),$$

что и является искомым общим решением задачи.

СЛЕДСТВИЕ 1

84. Итак в этом случае не удастся выразить искомую функцию z через переменные x и y в явном виде; дело в том, что, вообще говоря, нельзя определить количество z через x и y из уравнения $x - \frac{y}{p^2} = f'(p)$.

СЛЕДСТВИЕ 2

85. Тем не менее, решение должно рассматриваться как подходящее и полное, поскольку после введения нового переменного p по независимым друг от друга y и p определяются остальные переменные x и z .

¹⁾ В этой задаче и далее, по-видимому, впервые применяется преобразование, позже названное «преобразованием Лежандра». См. об этом статью переводчика в конце тома.

СЛЕДСТВИЕ 3

86. Если принять $f'(p) = \alpha + \frac{\beta}{p^2}$, то будет

$$f(p) = \alpha p - \frac{\beta}{p} \quad \text{и} \quad x - \alpha = \frac{\beta + y}{p^2},$$

откуда $p = \sqrt{\frac{\beta + y}{x - \alpha}}$; следовательно, искомая функция z получается

$$z = \frac{2y\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{\beta+y}} + \frac{\alpha y + \beta x}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta+y)}} - \frac{\alpha y - \beta x + 2\alpha\beta}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta+y)}}$$

или $z = 2\sqrt{(x-\alpha)(y+\beta)}$, что является частным решением, а в простейшем случае $z = 2\sqrt{xy}$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

87. Таким образом, решение этой проблемы выведено из другого принципа, так что и по форме решение отличается от предыдущих: в данном случае не удастся получить в явном виде уравнение между x , y и z , а вводится новое переменное p . Поскольку раньше решение представлялось одним уравнением между переменными x , y и z , то теперь, раз введено новое переменное p , решение требует двух уравнений между четырьмя переменными, которые мы в нашем случае и нашли:

$$z = px + \frac{y}{p} - f(p) \quad \text{и} \quad x - \frac{y}{p^2} = f'(p),$$

где

$$df(p) = dpf'(p),$$

причем неопределенность обозначения функции f' , допускающего и разрывные функции, выявляет универсальность решения. Если бы удалось исключить величину p , то отсюда получилось бы уравнение между x , y и z . Это исключение удастся, если для $f(p)$ взять алгебраическую функцию p , но в общем случае на это никоим образом нельзя надеяться. Тем не менее решение задачи может быть построено с помощью произвольно выбранной кривой: если взять какую угодно кривую, регулярную или нерегулярную, и принять абсциссу $= p$, а ординату обозначить через $f'(p) = r$, то $f(p) = \int r dp$ дает площадь, образованную этой кривой; обозначим эту площадь через s ; тогда уравнения

$$x - \frac{y}{p^2} = r \quad \text{и} \quad z = px + \frac{y}{p} - s$$

дают полное решение задачи. Разумеется, при каком угодно значении x будет $y = p^2(x - r)$ и отсюда $z = 2px - pr - s$ и в этом решении с практической точки зрения ничего не остается пожелать. Таким образом, как видно, может случиться, что придется ввести два новых переменных, а решение будет тогда представляться тремя уравнениями: но и в этом случае налицо все, что нужно для практических целей.

ПОЯСНЕНИЕ 2

88. Когда требуется, чтобы в выражении $dz = p dx + q dy$ было $pq = 1$, можно получить другое более изящное решение, вводя неопределенный угол φ . Именно, если положить $p = \operatorname{tg} \varphi$, то будет $q = \operatorname{ctg} \varphi$ и, поскольку $dz = dx \operatorname{tg} \varphi + dy \operatorname{ctg} \varphi$, получим при помощи вышеуказанного преобразования:

$$z = x \operatorname{tg} \varphi + y \operatorname{ctg} \varphi - \int d\varphi \left(\frac{x}{\cos \varphi^2} - \frac{y}{\sin \varphi^2} \right),$$

откуда вытекает, что выражение $\frac{x}{\cos \varphi^2} - \frac{y}{\sin \varphi^2}$ должно быть функцией количества φ , которую обозначим через $f'(\varphi)$. Эта функция и ее интеграл

$$\int d\varphi f'(\varphi) = f(\varphi)$$

дают два уравнения, содержащие решение:

$$\frac{x}{\cos \varphi^2} - \frac{y}{\sin \varphi^2} = f'(\varphi) \text{ и } z = x \operatorname{tg} \varphi + y \operatorname{ctg} \varphi - f(\varphi),$$

откуда можно исключить по желанию либо x , либо y . Мы можем сделать как одно, так и другое. Тогда через переменные z и φ остальные переменные x и y выражаются так:

$$x = \frac{1}{2} z \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi f(\varphi) + \frac{1}{2} \cos \varphi^2 f'(\varphi),$$

$$y = \frac{1}{2} z \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi f(\varphi) - \frac{1}{2} \sin \varphi^2 f'(\varphi).$$

Так, что если перейти здесь к дифференциалам, полагая $dy = 0$, из второго уравнения получается соотношение между dz и $d\varphi$, откуда, если подставить значение $d\varphi$ в первое уравнение, с необходимостью вытекает

$$dz = dx \operatorname{tg} \varphi;$$

подобным образом, если полагать $dx = 0$, из второго уравнения вытекает

$$dz = dy \operatorname{ctg} \varphi.$$

ЗАДАЧА 13

89. Требуется найти такую функцию z двух переменных x и y , чтобы при $dz = p dx + q dy$ было $p^2 + q^2 = 1$. Найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Мы пользуемся преобразованием

$$z = px + qy - \int (x dp + y dq).$$

Чтобы избежать иррациональностей, положим

$$p = \frac{1-r^2}{1+r^2} \quad \text{и} \quad q = \frac{2r}{1+r^2},$$

так что будет $p^2 + q^2 = 1$. Итак, имеем:

$$dp = \frac{-4r dr}{(1+r^2)^2} \quad \text{и} \quad dq = \frac{2dr(1-r^2)}{(1+r^2)^2},$$

откуда

$$z = \frac{(1-r^2)x + 2ry}{1+r^2} + 2 \int \frac{2xr \, dr - y \, dr (1-r^2)}{(1+r^2)^2}.$$

Входящий сюда интеграл является функцией одного переменного r ; обозначим ее через $f(r)$ и ее дифференциал — через $drf'(r)$, откуда получим

$$\frac{2rx - y(1-r^2)}{(1+r^2)^2} = f'(r)$$

и

$$z = \frac{(1-r^2)x + 2ry}{1+r^2} + 2f(r).$$

Если исключить отсюда

$$x = \frac{(1-r^2)y}{2r} + \frac{(1+r^2)^2}{2r} f'(r),$$

будем иметь

$$z = \frac{(1+r^2)y}{2r} + \frac{1-r^4}{2r} f'(r) + 2f(r).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

90. Если мы не побоимся иррациональностей, то, поскольку

$$q = \sqrt{1-p^2} \quad \text{и} \quad dq = \frac{-p \, dp}{\sqrt{1-p^2}},$$

получим

$$z = px + y \sqrt{1-p^2} - \int dp \left(x - \frac{py}{\sqrt{1-p^2}} \right).$$

Если это написать в виде

$$z = px + y \sqrt{1-p^2} - f(p),$$

то

$$x - \frac{py}{\sqrt{1-p^2}} = f'(p).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

91. Наиболее простое решение, несомненно, получается, если принять $f(p) = 0$, и тогда в силу того, что $x = \frac{py}{\sqrt{1-p^2}}$, получаем

$$p = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{1-p^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{а отсюда}$$

$$z = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

При этом значении имеем

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = p = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dy} \right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = q,$$

стало быть, $p^2 + q^2 = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3

92. Если положить $p = \sin \varphi$, то будет $q = \cos \varphi$ и отсюда

$$z = x \sin \varphi + y \cos \varphi - \int d\varphi (x \cos \varphi - y \sin \varphi).$$

Интеграл в этой формуле обозначим через $f(\varphi)$ и его дифференциал через $df'(\varphi)$. Тогда

$$z = x \sin \varphi + y \cos \varphi - f(\varphi) \quad \text{и} \quad x \cos \varphi - y \sin \varphi = f'(\varphi).$$

ЗАДАЧА 14

93. Если z должно быть такой функцией z двух переменных x и y , чтобы при $dz = p dx + q dy$ количество q равнялось заданной функции от p , — найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Поскольку q — заданная функция p , положим $dq = r dp$, где r также будет данной функцией p . Таким образом, наше общее уравнение, которое дает решение, принимает вид

$$z = px + qy - \int dp(x + ry),$$

откуда вытекает, что интеграл $\int dp(x + ry)$ является функцией p , которую мы обозначим через $f(p)$, а ее дифференциал через $df'(p)$. Имеем

$$z = px + qy - f(p) \quad \text{и} \quad x + ry = f'(p),$$

и эти два уравнения содержат самое общее решение задачи, так как $f(p)$ может обозначать какую угодно функцию p , непрерывную или разрывную.

СЛЕДСТВИЕ 1

94. Поскольку q — заданная функция p и отсюда $r = \frac{dq}{dp}$, то, если обозначить неопределенную функцию p через $f(p) = P$, и в силу того, что $f'(p) = \frac{dP}{dp}$, решение будет заключаться в уравнениях

$$z = px + qy - P \quad \text{и} \quad x dp + y dq = dP.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

95. Если для построения воспользуемся произвольной кривой, абсциссу которой примем за p , а ординату за $f'(p)$, то площадь, определяемая этой кривой, даст значение $f(p)$. Если же ординату обозначить через $f(p)$, то через $f'(p)$ выразится тангенс угла, который касательная к кривой образует с осью [абсцисс].

ПОЯСНЕНИЕ

96. Следовательно, можно двояким способом использовать для решения нашей задачи произвольную кривую, либо непрерывную, то есть заданную каким-либо аналитическим уравнением, либо проведенную свободно от руки и как угодно начерченную. Именно, если обозначать абсциссу через p , то в качестве ординаты можно взять либо $f(p)$, либо $f'(p)$, и трудно сказать, что будет практически удобнее. Но когда такие задачи встречаются в действительности, решение обычно определяется добавочными условиями и отсюда для каждого случая легко получается наиболее удобное построение. Что же касается задач механики, для которых требуется этот раздел интегрального исчисления, то они всегда приводят к выражениям в дифференциалах второго или высшего порядка, о решении которых невозможно даже догадаться раньше, чем будет изложен метод для производных первого порядка. До сих пор поставленные задачи удавалось решить полностью; но когда заданное соотношение между производными $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ и $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ содержит остальные переменные x , y и z , то решение удается, вообще говоря, лишь при условии, что это соотношение связывает [фактически] только одно из этих переменных с обеими производными.



ГЛАВА IV

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, КОТОРЫМИ ЗАДАЕТСЯ СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ОБЕИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ОДНИМ ИЗ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЗАДАЧА 15

97. Если функция z двух переменных x и y должна быть такой, чтобы при $dz = p dx + q dy$ было $q = \frac{px}{a}$, — определить общий вид этой функции.

РЕШЕНИЕ

Поскольку

$$dz = p dx + \frac{px}{a} dy = px \left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{a} \right),$$

и это выражение должно быть интегрируемо, то необходимо, чтобы px , а следовательно также и z , было функцией количества $lx + \frac{y}{a}$. Поэтому, в общем случае, решение нашей проблемы получается таким:

$$z = f \left(lx + \frac{y}{a} \right) \quad \text{и} \quad px = f' \left(lx + \frac{y}{a} \right),$$

где, конечно, $df(u) = du f'(u)$. Отсюда получаем

$$p = \frac{1}{x} f' \left(lx + \frac{y}{a} \right) \quad \text{и} \quad q = \frac{1}{a} f' \left(lx + \frac{y}{a} \right),$$

так что $q = \frac{px}{a}$, как оно и требуется.

СЛЕДСТВИЕ 1

98. Поскольку

$$z = px - \int x dp + \int \frac{px}{a} dy = px + \int px \left(\frac{dy}{a} - \frac{dp}{p} \right),$$

то отсюда можно вывести другую форму решения. А именно, если положить

$$\int px \left(\frac{dy}{a} - \frac{dp}{p} \right) = f \left(\frac{y}{a} - lp \right), \text{ то будет } px = f' \left(\frac{y}{a} - lp \right),$$

и отсюда

$$z = f' \left(\frac{y}{a} - lp \right) + f \left(\frac{y}{a} - lp \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

99. В этом решении вводится новое переменное p , через которое вместе с y вначале определяется

$$x = \frac{1}{p} f' \left(\frac{y}{a} - lp \right),$$

а затем уже искомая функция

$$z = px + f \left(\frac{y}{a} - lp \right).$$

Но предыдущее решение, несомненно, имеет преимущество перед этим, поскольку оно выражает величину z непосредственно через x и y .

ПОЯСНЕНИЕ

100. Чтобы быть в состоянии сравнивать эти два решения между собой, заметим, что произвольные функции, входящие в них, имеют различный вид, и мы применим для них различные обозначения. Первое решение дает

$$z = f \left(\frac{y}{a} + lx \right) \text{ и } px = f' \left(\frac{y}{a} + lx \right),$$

а второе

$$z = F \left(\frac{y}{a} - lp \right) + F' \left(\frac{y}{a} - lp \right) \text{ и } px = F' \left(\frac{y}{a} - lp \right),$$

так что должно быть

$$f' \left(\frac{y}{a} + lx \right) = F' \left(\frac{y}{a} - lp \right)$$

и

$$f \left(\frac{y}{a} + lx \right) = F \left(\frac{y}{a} - lp \right) + F' \left(\frac{y}{a} - lp \right),$$

откуда не только определяется соотношение между функциями f и F , но также должно вытекать, что

$$px = f' \left(\frac{y}{a} + lx \right),$$

а это вовсе не очевидно. Эта задача в особенности тем замечательна, что второе решение, при котором вводится новое переменное p , совпадает с первым, в котором y непосредственно определяется через z и x , а совпадение этих двух решений прямо показать нельзя. Поэтому, когда мы в дальнейших задачах будем приходить к подобным решениям, в которых вводится новое переменное, как было и в последних задачах

предыдущей главы, мы не должны сразу отказываться от всякой надежды исключить его, поскольку в рассмотренном случае второе решение, несомненно, сводится к первому, хотя вовсе не видно метода для такого сведения; этим мы займемся ниже, в § 119.

ЗАДАЧА 16

101. Установить общий вид такой функции z двух переменных x и y , чтобы при $dz = p dx + q dy$ было $q = pX + T$, где X и T — произвольные функции x .

РЕШЕНИЕ

Поскольку имеет место уравнение $dz = p dx + pX dy + T dy$, положим $p = r - \frac{T}{X}$, откуда получается, что

$$dz = r dx - \frac{T dx}{X} + rX dy = \frac{-T dx}{X} + rX \left(\frac{dx}{X} + dy \right).$$

Теперь, очевидно, что как rX , так и

$$\int rX \left(\frac{dx}{X} + dy \right)$$

являются функциями количества $y + \int \frac{dx}{X}$. Поэтому если положим

$$\int rX \left(\frac{dx}{X} + dy \right) = f \left(y + \int \frac{dx}{X} \right),$$

то будем иметь

$$rX = f' \left(y + \int \frac{dx}{X} \right),$$

так что искомая функция есть

$$z = - \int \frac{T dx}{X} + f \left(y + \int \frac{dx}{X} \right),$$

и это решение благодаря содержащейся в нем произвольной функции f является полным. Оно дает

$$p = - \frac{T}{X} + \frac{1}{X} f' \left(y + \int \frac{dx}{X} \right)$$

и

$$q = f' \left(y + \int \frac{dx}{X} \right),$$

откуда вытекает, что $q = pX + T$. А так как X и T — заданные функции x , интегралы $\int \frac{dx}{X}$ и $\int \frac{T dx}{X}$ не затрудняют вычисление решения.

СЛЕДСТВИЕ 1

102. Несколько легче получается решение, если на основании предписанного условия положить $p = \frac{q}{X} - \frac{T}{X}$, откуда

$$dz = - \frac{T dx}{X} + \frac{q dx}{X} + q dy$$

и

$$z = - \int \frac{T dx}{X} + \int q \left(dy + \frac{dx}{X} \right);$$

тогда очевидно, что

$$\int q \left(dy + \frac{dx}{X} \right) = f \left(y + \int \frac{dx}{X} \right),$$

откуда получается предыдущий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2

103. Таким же образом решается задача, если предложено условие $q = pY + V$, где Y и V — заданные функции y . Действительно,

$$dz = p dx + pY dy + V dy \quad \text{и} \quad z = \int V dy + \int p(dx + Y dy),$$

следовательно,

$$\int p(dx + Y dy) = f \left(x + \int Y dy \right),$$

и решение будет

$$z = \int V dy + f \left(x + \int Y dy \right),$$

откуда

$$p = f' \left(x + \int Y dy \right) \quad \text{и} \quad q = V + Yf' \left(x + \int Y dy \right).$$

ПОЯСНЕНИЕ

104. По только что найденной форме решения можно установить, каким образом должна быть поставлена задача, чтобы решение можно было получить указанным способом и чтобы функция z могла быть выражена через два независимых переменных x и y . Пусть K и V — какие угодно функции x и y , так что продифференцировав, имеем

$$dK = L dx + M dy \quad \text{и} \quad dV = P dx + Q dy.$$

Будем исходить из вида решения и положим

$$z = K + f(V).$$

Тогда после дифференцирования находим

$$dz = L dx + M dy + (P dx + Q dy) f'(V).$$

Сравнивая это с выражением

$$dz = p dx + q dy,$$

получим

$$p = L + Pf'(V) \quad \text{и} \quad q = M + Qf'(V),$$

так что

$$Qp - Pq = LQ - MP.$$

Следовательно, если задача поставлена так, что при

$$dz = p dx + q dy$$

должно быть

$$q = \frac{Q}{P}p + M - \frac{LQ}{P},$$

то решением будет $z = K + f(V)$, причем M и L , а также P и Q должны быть таковы, чтобы было

$$L dx + M dy = dK \quad \text{и} \quad P dx + Q dy = dV.$$

Впрочем, эти случаи относятся уже к следующей главе¹⁾.

ЗАДАЧА 17

105. Если z должно быть такой функцией двух переменных x и y , чтобы при $dz = p dx + q dy$ было $q = Px + \Pi$, где P и Π — заданные функции p , — найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Поскольку

$$dz = p dx + Px dy + \Pi dy,$$

то

$$z = px + \int (Px dy + \Pi dy - x dp).$$

Введем обозначение $Px + \Pi = v$, так что $x = \frac{v - \Pi}{P}$, и, следовательно,

$$z = px + \int \left(v dy - \frac{v dp}{P} + \frac{\Pi dp}{P} \right).$$

Так как P и Π являются функциями p , то то же самое относится к интегралу $\int \frac{\Pi dp}{P}$, и будем иметь

$$z = px + \int \frac{\Pi dp}{P} + \int v \left(dy - \frac{dp}{P} \right),$$

откуда вытекает, что как v , так и $\int v \left(dy - \frac{dp}{P} \right)$ должны быть функциями выражения $y - \int \frac{dp}{P}$. Положим поэтому

$$\int v \left(dy - \frac{dp}{P} \right) = f \left(y - \int \frac{dp}{P} \right),$$

тогда

$$v = Px + \Pi = f' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right),$$

и отсюда

$$x = \frac{-\Pi}{P} + \frac{1}{P} f' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right),$$

и, наконец,

$$z = \int \frac{\Pi dp}{P} - \frac{\Pi p}{P} + \frac{p}{P} f' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right) + f \left(y - \int \frac{dp}{P} \right).$$

¹⁾ См. особенно § 146. [Ф. Э.]

СЛЕДСТВИЕ 1

106. При решении этой задачи опять-таки вводится новое переменное p , через которое вместе с переменным y определяется вначале переменное x , а затем уже искомая функция z .

СЛЕДСТВИЕ 2

107. Однако это новое переменное p здесь исключить из выкладок невозможно; дело в том, что здесь P и Π обозначают функции p , и эти функции входят в самую постановку задачи.

СЛЕДСТВИЕ 3

108. Подобным образом решается задача, если поменять местами x и y и соответственно количество p задать через y и q , так что $p = Qy + E$, где Q и E означают функции q .

ПОЯСНЕНИЕ

109. В этой главе мы решили рассматривать такие задачи, условия которых выражаются уравнением между двумя производными $\left(\frac{dz}{dp}\right) = p$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$ и одним из трех переменных x , y и z . Однако обе задачи такого рода, которые мы здесь изложили, охватывают некоторые случаи, решение которых может быть выполнено частным методом и приводит к более простым формулам. Так, во второй задаче было принято такое соотношение между p , q и x , а именно $q = px + \Pi$, что в выражение q через p и x количество x входит только в первом измерении; наоборот, в первой задаче, где $q = pX + T$, в выражение q через p и x количество p входит в первом измерении. Однако вообще полезно заметить, что как количества p и x , так и q и y могут меняться местами. В самом деле, поскольку

$$\int p dx = px - \int x dp,$$

то вместо

$$z = \int (p dx + q dy)$$

можно писать

$$z = px + \int (q dy - x dp).$$

Подобным образом имеем

$$z = qy + \int (p dx - y dq)$$

и, следовательно,

$$z = px + qy - \int (x dp + y dq).$$

Если, наконец, одно из этих четырех интегральных выражений является интегрируемым, то все остальные три тоже допускают интегрирование. Поскольку мы, однако, в предыдущей главе нашли реше-

ние в соответствии с первой формулой, если p или q каким-либо образом заданы через x и y , то этим же путем можно найти решение в соответствии с второй формулой, если q дано через p и y , в соответствии с третьей формулой, если p дано через x и q , и согласно четвертой формуле, если x дано через p и q или же y дано через p и q . Как эти вопросы рассматриваются в общем случае, мы покажем в следующей задаче.

ЗАДАЧА 18

110. Пусть $dz = p dx + q dy$ и дано соотношение между p , q и x , определяемое произвольным уравнением. Найти в общем виде выражение функции z через x и y .

РЕШЕНИЕ

Из предложенного уравнения между p , q и x вычисляется x , и это количество будет какой-то функцией от p и q . Имеем

$$z = px + qy - \int (x dp + y dq).$$

А поскольку x является функцией переменных p и q , можно интегрировать выражение $x dp$ при постоянном q и получится

$$\int x dp = V + f(q),$$

где V — известная функция p и q , которая после дифференцирования дает

$$dV = x dp + S dq,$$

где S — также данная функция p и q . Поскольку, однако, выражение $\int (x dp + y dq)$ допускает интегрирование, оно должно равняться выражению $V + f(q)$, откуда с помощью дифференцирования получаем

$$x dp + y dq = x dp + S dq + dq f'(q)$$

и, следовательно,

$$y = S + f'(q), \quad z = px + qy - V - f(q),$$

то есть

$$z = px + Sq + qf'(q) - f(q) - V.$$

Решение, следовательно, получается так: сперва, согласно предписанному условию, выражаем x через p и q ; затем образуем при постоянном q $V = \int x dp$, откуда в свою очередь $dV = x dp + S dq$; после нахождения V и S через p и q остальные количества y и z выражаются через p и q так:

$$y = S + f'(q) \quad \text{и} \quad z = px + Sq + qf'(q) - f(q) = V.$$

Это решение, поскольку оно содержит произвольную функцию $f(q)$ количества q , непрерывную или разрывную, должно считаться полным и наиболее общим.

ДРУГОЕ РЕШЕНИЕ

111. Иначе из заданного уравнения между p , q и x выразим p через q и x , так что p будет равно некоторой заданной функции двух переменных x и q , через которые постараемся выразить остальные количества y и z . С этой целью воспользуемся формулой

$$z = qy + \int (p dx - y dq);$$

и так как p есть функция x и q , то находится функция V тех же переменных такая, что

$$dV = p dx + R dq.$$

Следовательно, получается

$$\int (p dx - y dq) = V + f(q)$$

и отсюда

$$y = -R - f'(q) \quad \text{и} \quad z = qy + V + f(q).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

112. Оба решения одинаково удобны, если из предложенного соотношения между p , q и x можно одинаково удобно вычислить как x , так и p ; если же одно из этих количеств легче вычисляется, чем другое, то надо пользоваться тем решением, которое к этому случаю приспособлено.

СЛЕДСТВИЕ 2

113. Если нельзя просто исключить ни p , ни x , то тем не менее мы принимаем здесь, что разрешимо уравнение любой степени, и даже трансцендентное¹⁾. Но если q даже легко выражается через p и x , то это не облегчает выкладок.

СЛЕДСТВИЕ 3

114. Исходя из этой весьма общей задачи можно решить также обе предыдущие, однако найденные таким образом решения будут [по форме] отличаться от предыдущих, поскольку последние были найдены частным методом. Все же представляет интерес сравнить между собой такие пары решений²⁾.

ПРИМЕР 1

115. Пусть $q = pX + T$, где x и T — функции x . Найми вид функции z .

¹⁾ sin autem neque p neque x commode eliciqueat, tum nihilo minus hic resolutio aequationum cicusque ordinis, quin etiam transcendentium tanquam concessa assumitur. См. рассуждения Эйлера в конце § 72.

²⁾ has duplices solutiones inter se comparare.

Здесь надо пользоваться последним решением в соответствии с формулой $p = \frac{q-T}{X}$; считая q постоянным, получим

$$V = \int p dx = q \int \frac{dx}{X} - \int \frac{T dx}{X},$$

откуда

$$R = \left(\frac{dV}{dq} \right) = \int \frac{dx}{X},$$

так что решение содержится в следующих формулах:

$$q = pX + T, \quad y = - \int \frac{dx}{X} - f'(q), \quad z = - \int \frac{T dx}{X} - qf'(q) + f(q),$$

в то время как вышенайденное решение имеет такой вид:

$$q = pX + T; \quad y = f' \left(y + \int \frac{dx}{X} \right) \quad \text{и} \quad z = - \int \frac{T dx}{X} + f \left(y + \int \frac{dx}{X} \right).$$

ПОЯСНЕНИЕ

116. Совпадение этих двух решений можно выявить тем, что из найденного здесь выведем предыдущее как закономерное следствие¹⁾. В самом деле, имеем

$$f'(q) = -y - \int \frac{dx}{X}.$$

Обозначим для краткости $y + \int \frac{dx}{X} = v$, так что $f'(q) = -v$; в свою очередь q будет равно какой-то функции от v , которую мы обозначим через $F'(v)$, откуда $dq = dvF''(v)$ и, следовательно,

$$dqf'(q) = -v dvF''(v) = -v dF'(v),$$

а после интегрирования получаем

$$f(q) = - \int v dF'(v) = -vF'(v) + \int dvF'(v) = -vF'(v) + F(v).$$

Но поскольку

$$z = - \int \frac{T dx}{X} - qf'(q) + f(q),$$

то будем иметь

$$z = - \int \frac{T dx}{X} + vF'(v) - vF'(v) + F(v),$$

то есть

$$z = - \int \frac{T dx}{X} + F \left(y + \int \frac{dx}{X} \right),$$

что и совпадает с предыдущим решением.

ПРИМЕР 2

117. Пусть $q = Px + \Pi$, где P и Π — заданные функции p . Найдите вид функции z , причем $dz = p dx + q dy$.

¹⁾ per legitimam consequentiam.

Здесь надо пользоваться первым решением в соответствии с формулой $x = \frac{q - \Pi}{P}$. Полагая q постоянным, найдем

$$V = \int x dp = q \int \frac{dp}{P} - \int \frac{\Pi dp}{P},$$

откуда

$$S = \left(\frac{dV}{dq} \right) = \int \frac{dp}{P}.$$

Решением, следовательно, будет

$$y = \int \frac{dp}{P} + f'(q)$$

и

$$z = \frac{pq}{P} - \frac{p\Pi}{P} + q \int \frac{dp}{P} + qf'(q) - f(q) - q \int \frac{dp}{P} + \int \frac{\Pi dp}{P}$$

или

$$z = \frac{p(q - \Pi)}{P} + \int \frac{\Pi dp}{P} + qf'(q) - f(q).$$

Вышенайденное решение этой задачи [§ 105] было

$$x = -\frac{\Pi}{P} + \frac{1}{P} f' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right), \quad q = Px + \Pi,$$

$$z = -\frac{p\Pi}{P} + \int \frac{\Pi dp}{P} + \frac{p}{P} f' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right) + f \left(y - \int \frac{dp}{P} \right).$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

118. Покажем, каким образом найденное здесь решение может быть сведено к предыдущему. Поскольку мы здесь нашли

$$y - \int \frac{dp}{P} = f'(q),$$

то, обратно, q является функцией количества $y - \int \frac{dp}{P}$. Положим, поэтому

$$q = F' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right),$$

так что вместе с тем

$$x = -\frac{\Pi}{P} + \frac{1}{P} F' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right).$$

Введем для краткости обозначение $y - \int \frac{dp}{P} = v$, тогда $q = F'(v)$ и $v = f'(q)$, и будем иметь

$$F(v) = \int q dv = qv - \int v dq = qv - \int dq f'(q).$$

Следовательно, $F(v) = qv - f(q)$, так что

$$f(q) = q \left(y - \int \frac{dp}{P} \right) - F \left(y - \int \frac{dp}{P} \right),$$

то есть

$$f(q) = \left(y - \int \frac{dp}{P} \right) F' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right) - F \left(y - \int \frac{dp}{P} \right).$$

Подставив эти значения, имеем

$$x = -\frac{\Pi}{P} + \frac{1}{P} F' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right)$$

и

$$z = -\frac{p\Pi}{P} + \frac{p}{P} F' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right) + \int \frac{\Pi dp}{P} + \left(y - \int \frac{dp}{P} \right) F' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right) - \\ - \left(y - \int \frac{dp}{P} \right) F' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right) + F \left(y - \int \frac{dp}{P} \right),$$

то есть

$$z = -\frac{p\Pi}{P} + \frac{p}{P} F' \left(y - \int \frac{dp}{P} \right) + \int \frac{\Pi dp}{P} + F \left(y - \int \frac{dp}{P} \right),$$

что совпадает с вышенайденным решением.

ПОЯСНЕНИЕ 2

119. После того, что мы доказали это совпадение, мы можем также доказать вышесотмеченное совпадение (§ 100), которое кажется гораздо более скрытым. Второе найденное там решение было

$$px = F' \left(\frac{y}{a} - lp \right) \quad \text{и} \quad z = px + F \left(\frac{y}{a} - lp \right).$$

Из первой формулы вытекает, что, обратно, $\frac{y}{a} - lp$ является функцией px , следовательно, то же самое относится к выражению $\frac{y}{a} - lp + lpx$, так что $\frac{y}{a} + lx$ также равняется функции px . Снова обращая это соотношение, мы видим, что px равняется некоторой функции количества $\frac{y}{a} + lx$. Положим, следовательно, $px = f' \left(\frac{y}{a} + lx \right)$; а поскольку

$$dF \left(\frac{y}{a} - lp \right) = \left(\frac{dy}{a} - \frac{dp}{p} \right) F' \left(\frac{y}{a} - lp \right),$$

то

$$F \left(\frac{y}{a} - lp \right) = \int px \left(\frac{dy}{a} - \frac{dp}{p} \right) = \\ = \int px \left(\frac{dy}{a} + \frac{dx}{x} \right) - \int px \left(\frac{dx}{x} + \frac{dp}{p} \right) = \int px \left(\frac{dy}{a} + \frac{dx}{x} \right) - px.$$

Подставив для px его значение $f' \left(\frac{y}{a} + lx \right)$, получим

$$F \left(\frac{y}{a} - lp \right) = -px + \int \left(\frac{dy}{a} + \frac{dx}{x} \right) f' \left(\frac{y}{a} + lx \right) = -px + f \left(\frac{y}{a} + lx \right),$$

так что $z = f \left(\frac{y}{a} + lx \right)$, что совпадает со вторым решением. Это преобразование проливает немало света на другие тайны подобного рода. Сущность этого рассуждения сводится к тому, что если $r = f'(s)$, то будет также $r = F'(s + R)$, где R — функция r ; впрочем, это очевидно, поскольку в обоих случаях r выражается через s . Итак, поскольку

$$f'(s) = r = F'(s + R),$$

то

$$\begin{aligned} f(s) &= \int ds f'(s) = \int r ds = \int r(ds + dR - dR) = \\ &= \int (ds + dR) F'(s + R) - \int r dR \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$f(s) = F(s + R) - \int r dR.$$

Вследствие этого вместо функций количества s можно ввести функции количества $s + R$. А именно, если $r = f'(s)$, то можно полагать также

$$r = F'(s + R),$$

где R — какая угодно функция r , откуда в свою очередь

$$f(s) = F(s + R) - \int r dR.$$

ПРИМЕР 3

120. Положим $dz = p dx + q dy$; если x — однородная функция степени n переменных p и q — найти вид функции z .

Поскольку x выражается через p и q , нужно пользоваться первым решением, а так как x равняется однородной функции степени n количеств p и q , то, положив $p = qr$, получим $x = q^n R$, где R — функция одного r . Возьмем теперь q за постоянное и найдем $V = \int x dp = \int q^{n+1} R dr$ (вследствие того, что $dp = q dr$), так что

$$V = q^{n+1} \int R dr,$$

а этот интеграл может считаться заданным. Продифференцировав, получаем

$$dV = q^{n+1} R dr + (n+1) q^n dq \int R dr.$$

а это выражение можно сравнить с выражением

$$dV = x dp + S dq = q^n R dp + S dq,$$

которое в силу того, что $dp = q dr + r dq$, дает

$$dV = q^{n+1} R dr + q^n R r dq + S dq.$$

Следовательно,

$$S = -q^n R r + (n+1) q^n \int R dr,$$

откуда

$$y = -q^n R r + (n+1) q^n \int R dr + f'(q), \quad x = q^n R,$$

$$z = n q^{n+1} \int R dr + q f'(q) - f(q),$$

где $p = qr$.

СЛЕДСТВИЕ 1

121. Пусть $x = \frac{p^n}{q^m}$, тогда при $p = qr$ будет $x = r^m$; следовательно, n равно нулю и $R = r^m$. Отсюда получаем

$$y = -r^{m+1} + \frac{r^{m+1}}{m+1} + f'(q) = -\frac{m}{m+1} r^{m+1} + f'(q)$$

и

$$z = qf'(q) - f(q).$$

Следовательно, поскольку $r = x^{\frac{1}{m}}$, имеем $y = -\frac{m}{m+1} x^{\frac{m+1}{m}} + f'(q)$.

СЛЕДСТВИЕ 2

122. В этом же случае, когда $x = \frac{p^m}{q^m}$, q есть функция количества $y + \frac{m}{m+1} x^{\frac{m+1}{m}}$, и если это количество обозначить через v , то будет $q = F'(v)$ и $v = f'(q)$. Следовательно, $f(q) = \int dq f'(q) = \int v dv F''(v)$ (так как $dq = dv F''(v)$), откуда заключаем, что

$$f(q) = vF'(v) - F(v) \quad \text{и} \quad z = F(v) = F\left(y + \frac{m}{m+1} x^{\frac{m+1}{m}}\right).$$

ПРИМЕР 4

123. Найти такую функцию z двух переменных x и y , чтобы, при $dz = p dx + q dy$, было $p^3 + x^3 = 3p q x$.

РЕШЕНИЕ

Исходим из формулы

$$z = qy + \int (p dx - y dq),$$

где выражение $p dx - y dq$ должно быть интегрируемым. Положим $p = ux$, тогда в силу принятого условия

$$x(1 + u^3) = 3qu,$$

откуда

$$x = \frac{3qu}{1 + u^3} \quad \text{и} \quad p = \frac{3qu^2}{1 + u^3},$$

затем

$$dx = \frac{3q du (1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^2} + \frac{3u dq}{1 + u^3},$$

так что будет

$$z = qy + \int \left(\frac{9q^2 u^2 du (1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^3} + \frac{9qu^3 dq}{(1 + u^3)^2} - y dq \right),$$

а

$$\int \frac{9q^2 u^2 du (1 - 2u^3)}{(1 + u^3)^3} = \frac{3q^2 (1 + 4u^3)}{2(1 + u^3)^2} - \int \frac{3q(1 + 4u^3) dq}{(1 + u^3)^2}.$$

Следовательно,

$$z = qy + \frac{3q^2(1+4u^3)}{2(1+u^3)^2} - \int dq \left(y + \frac{3q}{1+u^3} \right).$$

Таким образом, необходимо, чтобы $y + \frac{3q}{1+u^3}$ было функцией только q , которую обозначим через $-f'(q)$, так что

$$y = -\frac{3q}{1+u^3} - f'(q) \quad \text{и} \quad z = qy + \frac{3q^2(1+4u^3)}{2(1+u^3)^2} + f(q),$$

или

$$z = \frac{3q^2(2u^3-1)}{2(1+u^3)^2} - qf'(q) + f(q),$$

где $x = \frac{3qu}{1+u^3}$. Если из этих трех уравнений исключить количества q и u , то получится искомое уравнение между z , x , y .

СЛЕДСТВИЕ 1

124. Из найденного уравнения для y получается $\frac{3}{1+u^3} = \frac{-y-f'(q)}{q}$, а найденное уравнение для z принимает вид

$$z = \frac{3q^2}{1+u^3} - \frac{9q^2}{2(1+u^3)^2} - qf'(q) + f(q),$$

что после исключения u преобразуется к виду

$$z = -qy - 2qf'(q) - \frac{1}{2}[y + f'(q)]^2 + f(q).$$

Далее,

$$x = -u[y + f'(q)],$$

так что $u = \frac{-x}{y + f'(q)}$, откуда

$$x^3 = 3q[y + f'(q)]^2 + [y + f'(q)]^3.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

125. Если принять $f'(q) = a$, то будет $f(q) = aq + b$, а последнее уравнение дает $q = \frac{x^3 - (y+a)^3}{3(y+a)^2}$. Поскольку в данном случае имеем

$$z = -qy - aq - \frac{1}{2}(y+a)^2 + b,$$

то, подставив вместо q полученное для него выражение, получаем

$$z = \frac{6b(y+a) - (y+a)^3 - 2x^3}{6(y+a)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

126. Поскольку в общем случае

$$x^3 = [y + f'(q)]^2 [y + 3q + f'(q)],$$

положим $f'(q) = a - 3q$, откуда $f(q) = b + aq - \frac{3}{2}q^2$, так что

$$(y + a - 3q)^2 = \frac{x^3}{y + a}.$$

Следовательно,

$$y + a - 3q = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y+a}} \quad \text{и} \quad q = \frac{1}{3}(y + a) - \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{y+a}}.$$

Итак, отсюда вытекает, что

$$f'(q) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y+a}} - y$$

и

$$\begin{aligned} f(q) &= b + \frac{a(y+a)}{3} - \frac{ax\sqrt{x}}{3\sqrt{y+a}} - \frac{1}{6}(y+a)^2 + \frac{1}{3}x\sqrt{x(y+a)} - \\ &\quad - \frac{x^3}{6(y+a)} = b + \frac{a^2 - y^2}{6} + \frac{xy\sqrt{x}}{3\sqrt{y+a}} - \frac{x^3}{6(y+a)} \end{aligned}$$

и, наконец,

$$z = -\frac{1}{3}y(y+a) + \frac{yx\sqrt{x}}{3\sqrt{y+a}} - 2aq + 6q^2 - \frac{x^3}{2(y+a)} + aq - \frac{3}{2}q^2 + b,$$

то есть

$$z = b - \frac{1}{3}y(y+a) + \frac{yx\sqrt{x}}{3\sqrt{y+a}} - \frac{x^3}{2(y+a)} - aq + \frac{9}{2}q^2$$

и, после приведений,

$$z = b + \frac{1}{6}(y+a)^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x(y+a)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

127. Если здесь положить $a = 0$ и $b = 0$, то получаем очень простое выражение

$$z = \frac{1}{6}y^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{xy}.$$

Легко видеть, что оно удовлетворяет поставленному условию. Находим путем дифференцирования

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = -\sqrt{xy} \quad \text{и} \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{1}{3}y - \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{y}},$$

откуда

$$p^3 + x^3 = -xy\sqrt{xy} + x^3,$$

но

$$3pq = x^2 - y\sqrt{xy},$$

так что

$$3pqx = x^3 - xy\sqrt{xy}$$

и, следовательно,

$$p^3 + x^3 = 3pqx.$$

ПОЯСНЕНИЕ

128. Таким образом, нам удалось получить решение, когда задавалось любое уравнение между p , q , x даже в таких случаях, когда его нельзя было решить относительно x или p . Однако еще остаются трудности, связанные с решением конечных уравнений — трудности, которые мы здесь по праву считаем преодоленными¹⁾. Все же из последнего примера видно, как следует вести вычисления, когда подходящая подстановка дает возможность решить предложенное уравнение, но более подробно я на этом вопросе не остановлюсь. Не буду я также отдельно рассматривать те случаи, когда задано некоторое соотношение между p , q и y , поскольку в силу перестановочности количеств x и y , а при этом переставляются также p и q , эти случаи сводятся к предыдущим. Остается, следовательно, тот случай, когда дано уравнение между p , q и z . В этом случае очевидно, что в уравнении $dz = p dx + q dy$ количества p и q не могут рассматриваться как функции одних только x и y , так как они зависят также от z и вид этих функций уже не может быть определен из условия, чтобы выражение $p dx + q dy$ было интегрируемым. Но можно легко вывести условие, нужное для того, чтобы дифференциальное уравнение

$$dz - p dx - q dy = 0$$

было возможным; для этого на основании вышеустановленных принципов (§ 6) требуется, чтобы при

$$\left(\frac{dq}{dz}\right) = L, \quad -\left(\frac{dp}{dz}\right) = M \quad \text{и} \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) - \left(\frac{dq}{dx}\right) = N$$

было

$$Lp + Mq - N = 0, \quad \text{то есть} \quad p\left(\frac{dq}{dz}\right) - q\left(\frac{dp}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right) - \left(\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Следовательно, если предложено некоторое уравнение между p , q и z , то вообще нужно определить те условия, при которых выполняется это требование.

ЗАДАЧА 19

129. При $dz = p dx + q dy$ должно быть выполнено уравнение $p + q = \frac{z}{a}$. Найти соотношение между функцией z и переменными x и y в общем случае.

РЕШЕНИЕ

Поскольку $q = \frac{z}{a} - p$, наше уравнение принимает вид

$$dz = p dx - p dy + \frac{z dy}{a}$$

или

$$p(dx - dy) = \frac{a dz - z dy}{a} = z\left(\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}\right).$$

¹⁾ difficultas quaedam restat, quae autem resolutionem aequationum finitarum potissimum afficit, quam hic merito concedi postulamus.

Но так как оба выражения

$$dx - dy \quad \text{и} \quad \frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}$$

сами по себе интегрируемы, то из уравнения

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a} = \frac{p}{z} (dx - dy)$$

следует, что $\frac{p}{z}$ должно быть функцией количества $x - y$. Итак, положим

$$\frac{p}{z} = f'(x - y), \quad \text{так что} \quad lz - \frac{y}{a} = f(x - y).$$

Таким образом, z определяется как функция x и y , а поскольку $e^{f(x-y)}$ также является функцией $x - y$, то если обозначить ее через $F(x - y)$, получается

$$z = e^{\frac{y}{a}} F(x - y),$$

откуда

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = p = e^{\frac{y}{a}} F'(x - y)$$

и

$$\left(\frac{dz}{dy} \right) = q = -e^{\frac{y}{a}} F'(x - y) + \frac{1}{a} e^{\frac{y}{a}} F(x - y),$$

следовательно,

$$p + q = \frac{1}{a} e^{\frac{y}{a}} F(x - y) = \frac{z}{a},$$

как и требуется.

СЛЕДСТВИЕ 1

130. Этот пример уясняет нам, каким образом некоторая функция p и q может равняться количеству z , даже если p и q являются функциями x и y . При этом, конечно, вводится в расчет условие интегрируемости выражения

$$dz = p dx + q dy^1).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

131. Выражение $e^{\frac{y}{a}} F(x - y)$, найденное как значение z , может быть умножено на любую функцию от $x - y$. Если, следовательно, умножить на $e^{\frac{x-y}{a}}$, то получается

$$z = e^{\frac{x}{a}} F(x - y).$$

1) Simul scilicet ratio integralis formulae

$$dz = p dx + q dy$$

introducitur in calculum.

Если же умножить на $e^{\frac{x-y}{2a}}$, то получается

$$z = e^{\frac{x+y}{2a}} F(x-y),$$

и эти выражения в равной мере решают задачу.

ЗАДАЧА 20

132. При $dz = p dx + q dy$ величина z должна быть заданной функцией p и q . Найдите в общем виде зависимость z от x и y .

РЕШЕНИЕ

Предложенное соотношение дает нам $dy = \frac{dz}{q} - \frac{p dx}{q}$; положим $p = qr$, так что z будет функцией q и r , и из $dy = \frac{dz}{q} - r dx$ получаем

$$y = \frac{z}{q} - rx + \int \left(\frac{z dq}{q^2} + x dr \right),$$

а эта формула должна быть интегрируемой. Поскольку, однако, z дано как функция q и r , то интегрируем выражение $\frac{z dq}{q^2}$ при постоянном r и получим

$$\int \frac{z dq}{q^2} = V + f(r),$$

откуда путем дифференцирования получаем

$$dV = \frac{z dq}{q^2} + R dr,$$

причем ясно, что должно быть $x = R + f'(r)$, следовательно,

$$y = \frac{z}{q} - Rr - rf'(r) + V + f(r).$$

Этими двумя уравнениями определяется соотношение между интересующими нас количествами. А именно, положив $p = qr$, находим z в зависимости от q и r . Затем при r постоянном интегрируем выражение $\frac{z dq}{q^2}$, а интеграл пусть равняется $V = \int \frac{z dq}{q^2}$, что также выражается через q и r , а отсюда при постоянном q получим $R = \left(\frac{dV}{dr} \right)$.

После этого имеем $x = R + f'(r)$ и $y = \frac{z}{q} - rx + V + f(r)$, так что все количества определяются через два переменных q и r .

СЛЕДСТВИЕ 1

133. Так как при перестановке x и y происходит также перестановка букв p и q , то подобным образом можно было бы начать наше исследование с уравнения

$$dx = \frac{dz}{p} - \frac{q dy}{p}.$$

Отсюда мы получили бы сходное решение, отличное от предыдущего по форме, но совпадающее по существу.

СЛЕДСТВИЕ 2

134. Положив $q = ps$, так что

$$dx = \frac{dz}{p} - s dy,$$

будем иметь

$$x = \frac{z}{p} - sy + \int \left(\frac{z dp}{p^2} + y ds \right).$$

Образум при постоянном s интеграл $\int \frac{z dp}{p^2} = U$, который определяется через p и s , и отсюда $\left(\frac{dU}{ds} \right) = S$; тогда будет

$$y = S + f'(s) \quad \text{и} \quad x = \frac{z}{p} - sy + U + f(s).$$

ПРИМЕР 1

135. Найти решение уравнения $p + q = \frac{z}{a}$.

Положив $p = qr$, имеем $z = aq(1+r)$, а интегрируя при постоянном r , получим:

$$V = \int \frac{z dq}{q^2} = a(1+r) lq \quad \text{и} \quad R = \left(\frac{dV}{dr} \right) = a lq.$$

Отсюда находим

$$x = alq + f'(r) \quad \text{и} \quad y = \frac{z}{q} - ar lq - rf'(r) + a(1+r) lq + f(r),$$

то есть

$$y = a(1+r) + a lq - rf'(r) + f(r).$$

Если исключить q на основании уравнения $q = \frac{z}{a(1+r)}$, то решение дается двумя уравнениями

$$x = al \frac{z}{a(1+r)} + f'(r)$$

и

$$y = al \frac{z}{a(1+r)} + a(1+r) - rf'(r) + f(r).$$

Отсюда можно получить предыдущее решение, а именно, из первой формулы находим

$$\frac{x}{a} - l \frac{z}{a} = -l(1+r) + \frac{1}{a} f'(r) = \text{func}t r,$$

а из обеих вместе

$$y - x = a(1+r) - (1+r) f'(r) + f(r) = \text{func}t r.$$

Поскольку, таким образом, как $\frac{x}{a} - l \frac{z}{a}$, то есть $ze^{-\frac{x}{a}}$, так и $y - x$ являются функциями одного r , одно из этих выражений является функцией другого, так что можно положить

$$ze^{-\frac{x}{a}} = F(y - x) \quad \text{или} \quad z = e^{\frac{x}{a}} F(y - x),$$

что совпадает с вышенайденным решением.

ПРИМЕР 2

136. При $dz = p dx + q dy$ должно быть $z = aqr$. Найти соотношение между x , y и z .

Положив $p = qr$, имеем $z = aqr$ и, проинтегрировав при постоянном r , получим $V = \int \frac{z dq}{q^2} = aqr$, откуда $R = \left(\frac{dV}{dr} \right) = aq$. Таким образом, получаем

$$x = aq + f'(r) \quad \text{и} \quad y = aqr - rf'(r) + f(r),$$

или, так как $r = \frac{z}{aq^2}$,

$$x = aq + f' \left(\frac{z}{aq^2} \right) \quad \text{и} \quad y = \frac{z}{q} - \frac{z}{aq^2} f' \left(\frac{z}{aq^2} \right) + f \left(\frac{z}{aq^2} \right).$$

Если обозначить $f'(r) = v$ и соответственно положить $r = F'(v)$, то, поскольку $dr = dv F''(v)$, будем иметь

$$f(r) = \int dr f'(r) = \int v dv F''(v) = v F'(v) - F(v),$$

или

$$f(r) = v F'(v) - F(v),$$

откуда

$$f(r) - rf'(r) = -F(v).$$

Но так как $f'(r) = x - aq$, то, если положить $r = F'(x - aq)$, будет

$$f(r) - rf'(r) = -F(x - aq)$$

и

$$y = aq F'(x - aq) - F(x - aq),$$

а также

$$z = aq^2 F'(x - aq).$$

ПОЯСНЕНИЕ

137. Последние формулы можно также и прямо вывести из условий задачи. Действительно, так как $p = \frac{z}{aq}$, то

$$dz = \frac{z dx}{aq} + q dy \quad \text{и} \quad dy = \frac{dz}{q} - \frac{z dx}{aq^2},$$

откуда

$$y = \frac{z}{q} + \int \left(\frac{z dq}{q^2} - \frac{z dx}{aq^2} \right) = \frac{z}{q} + \int \frac{z}{q^2} \left(dq - \frac{dx}{a} \right),$$

где, очевидно, $\frac{z}{q^2}$ должно быть функцией количества $q - \frac{x}{a}$. Поэтому, если положить

$$\frac{z}{q^2} = F' \left(q - \frac{x}{a} \right),$$

то

$$y = \frac{z}{q} + F \left(q - \frac{x}{a} \right).$$

Чтобы отсюда получить другое решение, заметим, что

$$dx = \frac{aq}{z} (dz - q dy),$$

что после подстановки $z = qv$ переходит в

$$dx = \frac{a}{v} (v dq + q dv - q dy),$$

откуда

$$x = aq + \int \frac{aq}{v} (dv - dy).$$

Следовательно, положим

$$\frac{aq}{v} = f' (v - y),$$

так что

$$x = aq + f (v - y).$$

Подставив сюда значение $v = \frac{z}{q}$, имеем

$$\frac{aq^2}{z} = f' \left(\frac{z}{q} - y \right)$$

и

$$x - aq = f \left(\frac{z}{q} - y \right).$$

Первое решение особенно удобно для исключения q и r в примерах. Если, например, положить

$$f' (r) = \frac{b}{\sqrt{r}} + c, \quad \text{то получается} \quad f (r) = 2b\sqrt{r} + cr + d,$$

откуда

$$z = aq^2 r, \quad x = aq + \frac{b}{\sqrt{r}} + c, \quad y = aqr + b\sqrt{r} + d.$$

А так как $r = \frac{z}{aq^2}$, имеем

$$x = aq + bq \sqrt{\frac{a}{z}} + c \quad \text{и} \quad y = \frac{z}{q} + \frac{b}{q} \sqrt{\frac{z}{a}} + d,$$

откуда

$$x - c = q \left(a + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{z}} \right) \quad \text{и} \quad y - d = \frac{z}{aq} \left(a + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{z}} \right).$$

Теперь путем умножения исключаем q и получаем

$$(x-c)(y-d) = \frac{z}{a} \left(a + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{z}} \right)^2 = (b + \sqrt{az})^2,$$

так что

$$b + \sqrt{az} = \sqrt{(x-c)(y-d)}$$

и отсюда

$$z = \frac{(x-c)(y-d) - 2b\sqrt{(x-c)(y-d)} + b^2}{a},$$

что при $b=c=d=0$ дает простейший случай $z = \frac{xy}{a}$.



ГЛАВА V

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, КОТОРЫМИ ЗАДАЕТСЯ СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ КОЛИЧЕСТВАМИ $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ И ДВУМЯ ИЗ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ x , y , z ,

ЗАДАЧА 21

138. Если при $dz = p dx + q dy$ должно быть $px + qy = 0$ — найти общий вид функции z переменных x и y .

РЕШЕНИЕ

Поскольку $q = -\frac{px}{y}$, имеем

$$dz = p dx - \frac{px dy}{y} = px \left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right)$$

или

$$dz = py \left(\frac{dx}{y} - \frac{x dy}{y^2} \right) = py d \frac{x}{y}.$$

Отсюда ясно, что py должно быть функцией $\frac{x}{y}$; и если положить $py = f' \left(\frac{x}{y} \right)$, то получается $z = f \left(\frac{x}{y} \right)$. Напомним, что мы пользуемся следующим обозначением функций и их производных:

$$df(v) = dv f'(v)$$

и далее

$$df'(v) = dv f''(v), \quad df''(v) = dv f'''(v) \quad \text{и т. д.}$$

Пусть $f \left(\frac{x}{y} \right)$ обозначает какую угодно однородную функцию x и y нулевого измерения, и пусть переменное z равняется такой функции, а ее дифференциал равняется $dz = p dx + q dy$, тогда всегда будет $px + qy = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1

139. Итак, если z является однородной функцией нулевого измерения от x и y , то при

$$p = \left(\frac{dz}{dx} \right) \quad \text{и} \quad q = \left(\frac{dz}{dy} \right)$$

имеем

$$x \left(\frac{dz}{dx} \right) + y \left(\frac{dz}{dy} \right) = 0.$$

Это положение мы вывели еще раньше¹⁾.

СЛЕДСТВИЕ 2

140. Поскольку

$$p = \frac{1}{y} f' \left(\frac{x}{y} \right) \quad \text{и} \quad q = -\frac{x}{y^2} f' \left(\frac{x}{y} \right),$$

то p будет однородной функцией переменных x и y измерения минус единица, и $q = -\frac{px}{y}$, функция же z получается путем интегрирования в виде $z = \int p y d \frac{x}{y}$.

ПОЯСНЕНИЕ

141. Подобным образом решается задача, когда требуется, чтобы при $dz = p dx + q dy$ было $m px + n qy = a$. Тогда вследствие того, что $q = \frac{a}{ny} - \frac{m px}{ny}$, получаем

$$dz = \frac{a dy}{ny} + p dx - \frac{m px dy}{ny},$$

то есть

$$dz = \frac{a dy}{ny} + \frac{px}{n} \left(\frac{n dx}{x} - \frac{m dy}{y} \right) = \frac{a dy}{ny} + \frac{py^m}{nx^{n-1}} d \frac{x^n}{y^m},$$

откуда

$$\frac{py^m}{nx^{n-1}} = f' \left(\frac{x^n}{y^m} \right) \quad \text{и} \quad z = \frac{a}{n} \ln y + f \left(\frac{x^n}{y^m} \right).$$

Можно также получить решение более общей задачи, когда должно быть $pX + qY = A$, где X — функция x и Y — функция y . В этом случае будет $q = \frac{A}{Y} - \frac{pX}{Y}$ и, следовательно,

$$dz = \frac{A dy}{Y} + p dx - \frac{pX dy}{Y} = \frac{A dy}{Y} + pX \left(\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y} \right).$$

Поэтому должно быть

$$pX = f' \left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y} \right),$$

откуда

$$z = A \int \frac{dy}{Y} + f \left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y} \right).$$

¹⁾ См. Интегральное исчисление, т. I, § 481.

ЗАДАЧА 22

142. Пусть при $dz = p dx + q dy$ отношение $\frac{q}{p}$ равняется какой угодно заданной функции x и y . Найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Обозначим через V эту заданную функцию переменных x и y , так что $q = pV$ и $dz = p(dx + V dy)$. Зададимся таким множителем M , который также должен быть функцией x и y , чтобы произведение $M(dx + V dy)$ стало интегрируемым. Пусть $M(dx + V dy) = dS$, откуда вытекает, что S есть функция x и y . Поскольку однако $dz = \frac{p dS}{M}$, то, очевидно, количество $\frac{p}{M}$ должно быть функцией от S , так что, если положить $\frac{p}{M} = f'(S)$ имеем $z = f(S)$, откуда

$$p = Mf'(S) \quad \text{и} \quad q = MVf'(S).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

143. В данном случае мы сразу находим выражение искомой функции z через x и y , так как S определяется через x и y . Но может оказаться, что S — трансцендентное количество, и может также случиться, что с помощью доселе известных методов не удастся найти множитель M .

СЛЕДСТВИЕ 2

144. Если V — однородная функция x и y нулевого измерения, то $M = \frac{1}{x + Vy}$. Если положить $x = vy$, то V будет функцией одного v , и

$$dS = M(y dv + v dy + V dy).$$

Положим

$$M = \frac{1}{y(v + V)},$$

тогда

$$dS = \frac{dy}{y} + \frac{dv}{v + V}.$$

откуда

$$z = f\left(\ln y + \int \frac{dv}{v + V}\right).$$

ПОЯСНЕНИЕ

145. Благодаря возможности перестановки p и x и соответственно q и y , можно подобным образом решить следующие задачи.

I. $q = xV$, где V — какая угодно функция переменных p и y . В этом случае рассмотрим выражение

$$z = px + \int (q dy - x dp) = px + \int x(V dy - dp).$$

Ищем такой множитель M , чтобы было

$$M(V dy - dp) = dS,$$

где S — функция p и y , и тогда

$$z = px + \int \frac{x dS}{M},$$

откуда получается решение

$$\frac{x}{M} = f'(S) \quad \text{и} \quad z = pMf'(S) + f(S).$$

II. $y = pV$, где V — какая угодно функция переменных x и q . Рассмотрим выражение

$$z = qy + \int (p dx - y dq) = dq + \int p(dx - V dq).$$

Ищем такой множитель M , чтобы было

$$M(dx - V dq) = dS,$$

где S — функция переменных x и q , и тогда

$$z = qy + \int \frac{p dS}{M}.$$

Следовательно,

$$\frac{p}{M} = f'(S) \quad \text{и} \quad z = qy + f(S),$$

значит, поскольку $p = \frac{y}{V}$, получим

$$y = MVf'(S) \quad \text{и} \quad z = qMVf'(S) + f(S).$$

III. $y = xV$, где V — какая угодно функция переменных p и q . Рассматривается выражение

$$z = px + qy - \int (x dp + xV dq).$$

Ищем такой множитель M , чтобы было

$$M(dp + V dq) = dS,$$

где S — функция p и q . Тогда

$$z = px + qy - \int \frac{x dS}{M},$$

откуда получается решение

$$\frac{x}{M} = f'(S) \quad \text{и} \quad z = px + qy - f(S).$$

Все эти случаи сводятся к тому, что отношение двух из четырех количеств p , x , q , y , т. е. или $\frac{q}{p}$, или $\frac{q}{x}$, или $\frac{y}{p}$, или $\frac{y}{x}$ равняется какой-либо функции остальных двух.

ЗАДАЧА 23

146. Пусть $dz = p dx + q dy$ и требуется, чтобы было $q = pV + U$, где V и U — произвольные функции двух переменных x и y . Найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Вследствие того, что $q = pV + U$, имеем

$$dz = p(dx + V dy) + U dy.$$

Сначала ищем множитель M , который делает интегрируемым выражение $dx + V dy$, так что

$$M(dx + V dy) = dS,$$

где M и S — функции x и y . Тогда

$$dz = \frac{p dS}{M} + U dy.$$

Поскольку S является функцией x и y , то можно также выразить x через y и S , после чего U и M становятся функциями от y и S . Приняв теперь S за постоянное, интегрируем выражение $U dy$ и получим

$$\int U dy = T + f(S).$$

Положив

$$dT = U dy + W dS,$$

будем иметь

$$\frac{p}{M} = W + f'(S) \quad \text{и} \quad z = T + f(S).$$

Таким образом, все переменные выражены через переменные y и S .

СЛЕДСТВИЕ 1

147. Итак, если даны функции V и U переменных x и y и $q = pV + U$, для решения задачи требуется, чтобы сперва был найден множитель M , делающий интегрируемым выражение $dx + V dy$, и, когда он найден, определена функция S тех же переменных x и y так, чтобы было

$$S = \int M(dx + V dy).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

148. Для этой цели следует рассмотреть дифференциальное уравнение $dx + V dy = 0$. Если оно интегрируется, то отсюда заодно получается такой множитель M , что выражение $M(dx + V dy)$ становится полным дифференциалом некоторой функции S , которая, таким образом, и определяется.

СЛЕДСТВИЕ 3

149. Когда найдена эта функция S , количество x выражается через y и S , так что x равняется функции от y и S . Подставив это значение в количество U , ищем интеграл $\int U dy = T$, рассматривая S как постоянное, и T получается, таким образом, как функция y и S .

СЛЕДСТВИЕ 4

150. Наконец, когда найдена функция T , вычисляем $W = \left(\frac{dT}{dS} \right)$ и получаем решение задачи, содержащееся в следующих двух формулах:

$$\frac{p}{M} = W + f'(S) \quad \text{и} \quad z = T + f(S),$$

где S — функция x и y , и z оказывается функцией x и y .

СЛЕДСТВИЕ 5

151. Если U — функция одного только y , то нет необходимости выразить x через y и S , а $T = \int U dy$ будет функцией только от y , так что $W = \left(\frac{dT}{dS} \right) = 0$. Но этот случай сводится, очевидно, к предыдущему, если заменить z через $z - \int U dy$.

ПРИМЕР 1

152. Пусть $dz = p dx + q dy$ и пусть должно быть $q = \frac{px}{y} + \frac{y}{x}$.

Найти вид функции z .

Итак, здесь

$$V = \frac{x}{y} \quad \text{и} \quad U = \frac{y}{x},$$

так что, поскольку

$$dx + V dy = dx + \frac{x dy}{y},$$

множителем будет $M = y$, откуда $dS = y dx + x dy$ и $S = xy$. Таким образом,

$$x = \frac{S}{y} \quad \text{и} \quad U = \frac{y^2}{S}.$$

Следовательно,

$$T = \int U dy = \int \frac{y^2 dy}{S} = \frac{y^3}{3S} \quad \text{и} \quad W = -\frac{y^3}{3S^2}.$$

Поэтому решением данного примера будет

$$\frac{p}{y} = -\frac{y^3}{3S^2} + f'(S) \quad \text{и} \quad z = \frac{y^3}{3S} + f(S).$$

или, поскольку $S = xy$, $z = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$.

ПРИМЕР 2

153. Пусть $dz = p dx + q dy$ и пусть должно быть $px + qy = n \sqrt{x^2 + y^2}$.
Найти вид функции z .

Поскольку здесь $q = -\frac{px}{y} + \frac{n}{y} \sqrt{x^2 + y^2}$, то

$$V = -\frac{x}{y} \quad \text{и} \quad U = \frac{n}{y} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно, $dS = M \left(dx - \frac{x dy}{y} \right)$, так что надо взять $M = \frac{1}{y}$, и тогда

$$dS = \frac{dx}{y} - \frac{x dy}{y^2} \quad \text{и} \quad S = \frac{x}{y}.$$

Отсюда

$$x = Sy \quad \text{и} \quad U = n \sqrt{1 + S^2},$$

что при постоянном S дает:

$$T = \int U dy = ny \sqrt{1 + S^2} \quad \text{и} \quad W = \left(\frac{dT}{dS} \right) = \left(\frac{nyS}{\sqrt{1 + S^2}} \right).$$

Таким образом, решение нашего вопроса дается соотношениями

$$py = \frac{nyS}{\sqrt{1 + S^2}} + f'(S) \quad \text{и} \quad z = ny \sqrt{1 + S^2} + f(S).$$

Поскольку, однако, $S = \frac{x}{y}$, то

$$z = n \sqrt{x^2 + y^2} = f \left(\frac{x}{y} \right),$$

где $f \left(\frac{x}{y} \right)$ означает любую однородную функцию нулевого измерения от x и y .

ПРИМЕР 3

154. Пусть $dz = p dx + q dy$ и пусть должно быть $px^2 + py^2 = nxy$. Найти вид функции z .

Поскольку $q = -\frac{px^2}{y^2} + \frac{nx}{y}$, то

$$V = -\frac{x^2}{y^2} \quad \text{и} \quad U = \frac{nx}{y}.$$

Поэтому вследствие того, что $dS = M \left(dx - \frac{x^2 dy}{y^2} \right)$, возьмем $M = \frac{1}{x^2}$, так что $S = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}$. Отсюда

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} - S \quad \text{и} \quad x = \frac{y}{1 - Sy},$$

так что $U = \frac{n}{1 - Sy}$. Если, следовательно, S принять за постоянное, то получим

$$T = \int \frac{n dy}{1 - Sy} = -\frac{n}{S} \ln(1 - Sy)$$

и

$$W = \frac{n}{S^2} \ln(1 - Sy) + \frac{ny}{S(1 - Sy)}.$$

Следовательно, так как

$$S = \frac{x-y}{xy} \quad \blacksquare \quad 1 - Sy = \frac{y}{x}.$$

получим решение

$$z = -\frac{nx}{x-y} \ln \frac{y}{x} + f\left(\frac{x-y}{xy}\right).$$

ПОЯСНЕНИЕ

155. На основании решения этой задачи может быть решен также следующий, более общий вопрос. Пусть P , Q , V и U — какие угодно функции переменных x и y и пусть требуется найти функцию z такую, чтобы

$$dz = P dx + Q dy + L(V dx + U dy)$$

или, что то же, найти функцию L такую, чтобы это дифференциальное выражение допускало интегрирование. Чтобы этого добиться, найдем сперва множитель M , делающий интегрируемым выражение $V dx + U dy$, и положим $dS = M(V dx + U dy)$, откуда получается функция S от x и y . Тогда определяем x через y и S , и поскольку

$$dz = P dx + Q dy + \frac{L dS}{M},$$

мы подставим сюда это значение x . Но при этом $dx = E dy + F dS$, где E и F также известны, и мы получаем

$$dz = EP dy + Q dy + FP dS + \frac{L dS}{M}.$$

Интегрируя при постоянном S , получим

$$T = \int (EP + Q) dy, \text{ откуда } z = T + f(S),$$

что достаточно для решения задачи. Для того же, чтобы найти L , дифференцируем выражение

$$dz = (EP + Q) dy + dS \left(\frac{dT}{dS} \right) + dS f'(S).$$

Но должно иметь место [соотношение]

$$FP + \frac{L}{M} = \left(\frac{dT}{dS} \right) + f'(S),$$

откуда

$$L = -FMP + M \left(\frac{dT}{dS} \right) + M f'(S).$$

Благодаря перестановочности p , x и, соответственно, q , y и отсюда можно получить решения некоторых задач, что вкратце изложу.

ЗАДАЧА 24

156. Пусть при $dz = p dx + q dy$ требуется, чтобы было $q = Vx + U$, где V и U — какие-либо заданные функции от p и y . Найти вид искомой функции z .

РЕШЕНИЕ

Воспользуемся формулой

$$z = px + \int (q dy - x dp).$$

Тогда, подставив значение q , будем иметь

$$\int (q dy - x dp) = \int (Vx dy - x dp + U dy).$$

Это выражение должно быть интегрируемым. Обозначим его ради краткости через \mathfrak{h} , тогда

$$d\mathfrak{h} = x(V dy - dp) + U dy.$$

Ищем сперва множитель M , делающий интегрируемым выражение $V dy - dp$, так что

$$M(V dy - dp) = dS,$$

где S выражается через y и p . Отсюда p выражается через y и S . Подставив это значение, получим

$$d\mathfrak{h} = \frac{x dS}{M} + U dy.$$

Затем, приняв S за постоянное, найдем интеграл

$$\int U dy = T + f(S),$$

откуда

$$\frac{x}{M} = \left(\frac{dT}{dS} \right) + f'(S) \quad \text{и} \quad \mathfrak{h} = T + f(S).$$

Следовательно, решение выражается через переменные y и S следующими двумя уравнениями:

$$x = M \left(\frac{dT}{dS} \right) + Mf'(S) \quad \text{и} \quad z = px + T + f(S).$$

ЗАДАЧА 25

157. Если при $dz = p dx + q dy$ должно быть $p = Vy + U$, где V и U — заданные функции от x и y , найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Воспользуемся формулой

$$z = qy + \int (p dx - y dq)$$

и обозначим интеграл в правой части

$$\int (p dx - y dq) = \mathfrak{h}.$$

Подставим сюда полученное значение p , что дает

$$d\mathfrak{h} = Vy dx + U dx - y dq = y(V dx - dq) + U dx.$$

Ищем множитель M такой, чтобы

$$M(V dx - dq) = dS,$$

а поскольку M и S являются функциями x и q , мы можем q выразить через x и S , и затем подставить полученное значение q . Так как

$$d\mathfrak{h} = \frac{y dS}{M} + U dx,$$

то определим при постоянном S интеграл $T = \int U dx$, тогда

$$\mathfrak{h} = T + f(S),$$

откуда

$$\frac{y}{M} = \left(\frac{dT}{dS} \right) + f'(S) \quad \text{и} \quad z = qy + T + f(S),$$

где вместо S надо подставить его выражение через x и q .

ЗАДАЧА 26

158. Пусть при $dz = p dx + q dy$ должно быть $y = Vx + U$, где V и U — произвольные заданные функции p и q . Найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Воспользуемся здесь формулой

$$z = px + qy - \int (x dp + y dq)$$

и обозначим $\int (x dp + y dq) = \mathfrak{h}$. Подставив для y предписанное значение, получим

$$d\mathfrak{h} = x dp + Vx dq + U dq.$$

Далее ищется множитель M , который делает интегрируемым выражение $dp + V dq$, так что

$$M(dp + V dq) = dS,$$

где M и S даны в зависимости от p и q ; отсюда значение p выражается через q и S , что требуется в дальнейшем. Именно, поскольку

$$d\mathfrak{h} = \frac{x dS}{M} + U dq,$$

примем S за постоянное и проинтегрируем выражение $U dq$. Пусть $T = \int U dq$, тогда $\mathfrak{h} = T + f(S)$ и отсюда

$$\frac{x}{M} = \left(\frac{dT}{dS} \right) + f'(S) \quad \text{и} \quad z = px + qy - T - f(S).$$

Все это выражено через p и q , поскольку выражены таким образом M , S , T и $\left(\frac{dT}{dS} \right)$. Итак, имеем

$$x = M \left(\frac{dT}{dS} \right) + Mf'(S), \quad y = Vx + U$$

и

$$z = px + qy - T - f(S).$$

ПРИМЕР

159. Пусть $dz = p dx + q dy$; должно быть $px + qy = apq$. Определить вид функции z .

Так как

$$y = -\frac{px}{q} + ap,$$

то

$$V = -\frac{p}{q} \quad \text{и} \quad U = ap.$$

Но поскольку должно быть

$$M \left(dp - \frac{p dq}{q} \right) = dS,$$

положим $M = \frac{1}{q}$, что дает

$$S = \frac{p}{q} \quad \text{и} \quad p = Sq.$$

Отсюда $U = aSq$, и, приняв S за постоянное, получим

$$T = \int U dq = \frac{1}{2} aSq^2.$$

Поэтому

$$\left(\frac{dT}{dS} \right) = \frac{1}{2} aq^2.$$

Таким образом, имеем решение

$$x = \frac{1}{2} aq + \frac{1}{q} f' \left(\frac{p}{q} \right), \quad y = \frac{1}{2} ap - \frac{p}{q^2} f' \left(\frac{p}{q} \right),$$

$$z = qy + px - \frac{1}{2} apq - f \left(\frac{p}{q} \right) = \frac{1}{2} apq - f \left(\frac{p}{q} \right).$$

При помощи вышеизложенного преобразования получим

$$y = (aq - x) F' \left(qx - \frac{1}{2} aq^2 \right)$$

и

$$z = qy + F \left(qx - \frac{1}{2} aq^2 \right).$$

ПОЯСНЕНИЕ

160. Четыре задачи, которые мы здесь рассмотрели, как связанные друг с другом, охватывают достаточно широкий круг вопросов. Они охватывают все те случаи, когда при $dz = p dx + q dy$ в соотношении между p , q , x и y либо x и y , либо p и y , либо x и q , либо p и q не встречаются в степени выше первой. Поэтому часто может случиться, что один и тот же вопрос решается как частный случай двух или нескольких из этих задач. Так, в последнем примере, в котором не только x и y , но и x и q , а также p и y нигде не встречаются в степени выше первой, вопрос может быть сведен к одной из трех выше рассмотренных задач; не сводится он только к первой из них.

Если же между p , q , x , y задается соотношение

$$apx + \beta qy + ar + bq + tx + ny + c = 0,$$

решение может быть выполнено при помощи любой из четырех задач. Конечно, полученные отсюда решения, даже когда они отличны по форме, могут быть сведены друг к другу при помощи вышеуказанных примеров. Но решение можно получить и в следующем, гораздо более общем случае, который поэтому нам надлежит рассмотреть.

ЗАДАЧА 27

161. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть дано такое соотношение между p , q , x и y , что некоторая функция от p и x равна какой-либо функции от q и y . Найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Пусть P — та функция p и x , а Q — та функция q и y , которые равны между собой. Поскольку, таким образом, $P = Q$, положим, что они обе равны v , так что $P = v$ и $Q = v$. Из первого уравнения можно выразить p через x и v , из второго — q через y и v . После этого в формуле $dz = p dx + q dy$, где p — функция x и v , интегрируется при постоянном v член $p dx$, и пусть $\int p dx = R$; подобным образом, поскольку q функция y и v , интегрируется также, при постоянном v , второй член $q dy$, и пусть $\int q dy = S$. Следовательно, R будет функцией x и v , а S — функцией y и v . Если теперь считать и v переменным, то

$$dR = p dx + V dv \quad \text{и} \quad dS = q dy + U dv,$$

откуда

$$dz = dR + dS - dv(V + U),$$

а так как это выражение должно быть интегрируемым, то нужно, чтобы $V + U = f'(v)$. Таким образом, решение задачи содержится в следующих двух уравнениях:

$$V + U = f'(v) \quad \text{и} \quad z = R + S - f(v).$$

Конечно, в силу того, что p , R и V выражены через x и v , а q , S и U выражены через y и v , то посредством первого уравнения v выражается через x и y , и после подстановки этого значения во второе уравнение определяется искомая функция z от x и y .

СЛЕДСТВИЕ 1

162. Итак, всякий раз, когда q равно такой функции p , x и y , что можно образовать уравнение, в котором одна часть содержит только две буквы x и p , а другая — только две остальные y и q , задача может быть решена.

СЛЕДСТВИЕ 2

163. Если функция переменных p и x , которую я обозначил через P , имеет такой вид, что после приравнивания ее v , легче опре-

делить x через p и v , целесообразно пользоваться формулой

$$z = px + \int (q^2 dy - x dp),$$

а дальше вывод происходит так, как выше.

СЛЕДСТВИЕ 3

164. Подобным образом, если из второго уравнения $Q = v$ легче определить y через q и v , то рекомендуется искать решение на основании формулы

$$z = qy + \int (p dx - y dq).$$

Если, однако, одновременно можно выразить x через p и v , а y через q и v , то следует пользоваться формулой

$$z = px + qy - \int (x dp + y dq).$$

ПОЯСНЕНИЕ

165. Эта задача содержит бесчисленное множество случаев, не заключающихся в предыдущих задачах; при том ее решение покоится на другом основании. Однако мы все же очень далеки от решения общей задачи, которой посвящена данная глава, а именно, найти общее решение, когда задано произвольное уравнение между величинами p, q, x, y . Из-за несовершенства анализа на это, однако, нельзя и надеяться. Поэтому мы должны быть довольны и тем, что удалось получить решение в ряде случаев. А чтобы лучше увидеть значение решения последней задачи, прибавим несколько примеров.

ПРИМЕР 1

166. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $q = \frac{x^2 y^2}{a^4 p}$. Найти вид функции z .

Поскольку здесь пары переменных p, x и q, y можно отделить друг от друга, так как $\frac{a^2 q}{y^2} = \frac{x^2}{a^2 p}$, положим $\frac{x^2}{a^2 p} = v = \frac{a^2 q}{y^2}$, откуда p выражается через x и v , а q через y и v , а именно:

$$p = \frac{x^2}{a^2 v} \quad \text{и} \quad q = \frac{v y^2}{a^2};$$

поэтому

$$dz = \frac{x^2 dx}{a^2 v} + \frac{v y^2 dy}{a^2}.$$

Далее выводим:

$$z = \frac{x^3}{3a^2 v} + \frac{v y^3}{3a^2} + \frac{1}{3a^2} \int \left(\frac{x^3 dv}{v^2} - y^3 dv \right),$$

так что $\frac{x^3}{v^2} - y^3$ должно быть функцией v . Положив

$$\frac{x^3}{v^2} - y^3 = f'(v) \quad \text{или} \quad y^3 = \frac{x^3}{v^2} - f'(v),$$

получим

$$z = \frac{1}{3a^2} \left[\frac{x^3}{v} + vy^3 + f(v) \right].$$

СЛЕДСТВИЕ

167. Отсюда легко исключается v , если положить $f'(v) = \frac{b^3}{v^2} - c^3$, откуда $f(v) = -\frac{b^3}{v} - c^3v$. Тогда первое уравнение дает $y^3 - c^3 = \frac{x^3 - b^3}{v^2}$; отсюда $v^2 = \frac{x^3 - b^3}{y^3 - c^3}$. Вследствие того, что

$$3a^2z = \frac{x^3 + v^2y^3 - b^3 - c^3v^2}{v} = 2v(y^3 - c^3),$$

получаем

$$z = \frac{2}{3a^2} \sqrt{(x^3 - b^3)(y^3 - c^3)}.$$

ПРИМЕР 2

168. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть

$$q = \frac{1}{b} \sqrt{x^2 + y^2 - a^2p^2}.$$

Найти вид функции z .

Предписанное условие приводится к виду

$$b^2q^2 - y^2 = x^2 - a^2p^2 = v,$$

откуда выводим, что

$$q = \frac{1}{b} \sqrt{y^2 + v} \quad \text{и} \quad p = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 - v}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \int p dx &= \frac{1}{a} \int dx \sqrt{x^2 - v} = \frac{1}{2a} x \sqrt{x^2 - v} - \frac{v}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - v}} = \\ &= \frac{x}{2a} \sqrt{x^2 - v} - \frac{v}{2a} l(x + \sqrt{x^2 - v}) = R, \end{aligned}$$

и подобным же образом

$$\int q dy = \frac{y}{2b} \sqrt{y^2 + v} + \frac{v}{2b} l(y + \sqrt{y^2 + v}) = S.$$

Поэтому

$$V = \left(\frac{dR}{dv} \right) = -\frac{x}{4a \sqrt{x^2 - v}} - \frac{1}{2a} l(x + \sqrt{x^2 - v}) + \frac{v}{4a(x + \sqrt{x^2 - v}) \sqrt{x^2 - v}},$$

что приводится к виду

$$V = -\frac{1}{4a} - \frac{1}{2a} l(x + \sqrt{x^2 - v}),$$

и подобным же образом

$$U = \left(\frac{dS}{dv} \right) = +\frac{1}{4b} + \frac{1}{2b} l(y + \sqrt{y^2 + v}).$$

Теперь, так как $V + U = f'(v)$, получаем

$$\frac{a-b}{4ab} + l \frac{(y + \sqrt{y^2 + v})^{1/2b}}{(x + \sqrt{x^2 - v})^{1/2a}} = f'(v),$$

откуда v выражается через x и y . А затем находим

$$z = \frac{x}{2a} \sqrt{x^2 - v} + \frac{y}{2b} \sqrt{y^2 + v} + vl \frac{(y + \sqrt{y^2 + v})^{1/2b}}{(x + \sqrt{x^2 - v})^{1/2a}} - f(v),$$

то есть

$$z = \frac{x}{2a} \sqrt{x^2 - v} + \frac{y}{2b} \sqrt{y^2 + v} - \frac{(a-b)v}{4ab} + vf'(v) - f(v).$$

ПОЯСНЕНИЕ

169. Это решение может быть освобождено от логарифмических выражений вот каким образом. Положим

$$f'(v) = lt + \frac{a-b}{4ab},$$

так что

$$t^{2ab} = \frac{(y + \sqrt{y^2 + v})^a}{(x + \sqrt{x^2 - v})^b},$$

откуда v выражается через t . Но тогда должно быть $v = tF'(t)$, и, поскольку $dvf''(v) = \frac{dt}{t}$, будем иметь

$$\int v dvf''(v) = vf'(v) - f(v) = \int \frac{v dt}{t} = F(t),$$

так что

$$z = \frac{x}{2a} \sqrt{x^2 - v} + \frac{y}{2b} \sqrt{y^2 + v} - \frac{(a-b)v}{4ab} + F(t),$$

где

$$v = tF'(t) \quad \text{и} \quad t^{2ab} = \frac{(y + \sqrt{y^2 + v})^a}{(x + \sqrt{x^2 - v})^b},$$

откуда t и v могут быть определены через x и y . Отсюда сразу видно, что при $F'(t) = 0$ будет $v = 0$, $F(t) = 0$ и $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$, а следовательно, $p = \frac{x}{a}$ и $q = \frac{y}{b}$, стало быть, при этом выполняется предписанное условие. Впрочем, этот способ избавиться от логарифмических выражений достоин внимания и может быть широко использован в других случаях.

ПРИМЕР 3

170. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $x^m y^n = Ar^\mu q^\nu$. Определить вид функции z .

Положим

$$\frac{x^m}{p^{\mu\nu}} = \frac{Aq^\nu}{y^n} = v^\mu,$$

откуда находим

$$p = \frac{x^\mu}{v^\nu} \quad \text{и} \quad q = \frac{1}{a} y^{\frac{n}{\nu}} v^\mu,$$

где $A = a^\nu$. Теперь получим

$$\int p dx = \frac{x^{\mu+1}}{(m+\mu)v^\nu} + \frac{\mu\nu}{m+\mu} \int \frac{x^\mu}{v^{\nu+1}} dv$$

и

$$\int q dy = \frac{y^{\frac{n+\nu}{\nu}} v^\mu}{(n+\nu)a} - \frac{\mu\nu}{(n+\nu)a} \int y^{\frac{n+\nu}{\nu}} v^{\mu-1} dv.$$

Следовательно, будем иметь

$$z = \frac{x^{\mu+1}}{(m+\mu)v^\nu} + \frac{y^{\frac{n+\nu}{\nu}} v^\mu}{(n+\nu)a} + \frac{\mu\nu}{(m+\mu)(n+\nu)a} \int dv \left[\frac{(n+\nu)ax^\mu}{v^{\nu+1}} - (m+\mu)y^{\frac{n+\nu}{\nu}}v^{\mu-1} \right].$$

Отсюда, если положить

$$\frac{x^{\mu+1}}{(m+\mu)v^{\nu+1}} - \frac{y^{\frac{n+\nu}{\nu}}v^{\mu-1}}{(n+\nu)a} = f'(v),$$

получим

$$z = \frac{x^{\mu+1}}{(m+\mu)v^\nu} + \frac{y^{\frac{n+\nu}{\nu}}v^\mu}{(n+\nu)a} + \mu\nu f(v).$$

В простейшем случае положим $f'(v) = 0$ и $f(v) = 0$; тогда

$$y^{\frac{n+\nu}{\nu}}v^{\mu+\nu} = \frac{(n+\nu)a}{m+\mu} x^{\frac{m+\mu}{\mu}} \quad \text{и} \quad v = \left[\frac{(n+\nu)ax^{\frac{m+\mu}{\mu}}}{(m+\mu)y^{\frac{n+\nu}{\nu}}} \right]^{\frac{1}{\mu+\nu}},$$

откуда в свою очередь

$$z = \frac{1}{v^\nu} \left[\frac{x^{\frac{m+\mu}{\mu}}}{m+\mu} + \frac{y^{\frac{n+\nu}{\nu}}v^{\mu+\nu}}{(n+\nu)a} \right],$$

то есть

$$z = \frac{(\mu+\nu)}{(m+\mu)v^\nu} x^{\frac{m+\mu}{\mu}} = (\mu+\nu) \left[\frac{x^{\frac{m+\mu}{\mu}} y^{\frac{n+\nu}{\nu}}}{(m+\mu)^\mu (n+\nu)^\nu A} \right]^{\frac{1}{\mu+\nu}}.$$

ЗАДАЧА 28

171. Положим $dz = p dx + q dy$. Между p , q , x , y задается такое соотношение, что p и q равны функциям от x , y и от нового переменного v . Исследовать те случаи, когда удается установить вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Поскольку p — функция x , y и v , найдем интеграл $\int p dx = P$, рассматривая y и v как постоянные; затем, считая все [эти количества] переменными, получим

$$dP = p dx + R dy + M dv,$$

откуда, если подставить значение $p dx$, находим

$$dz = dP + (q - R) dy - M dv.$$

Если окажется, что $q - R$ является функцией только y и v , но не x , то определяем, при постоянном v , интеграл $\int (q - R) dy = T$, так что

$$dT = (q - R) dy + V dv.$$

После подстановки отсюда значения $(q - R) dy$ получим

$$dz = dP + dT - (M + V) dv,$$

а так как это выражение должно быть интегрируемым, полагаем

$$M + V = f'(v), \text{ и тогда } z = P + T - f(v).$$

Вышеприведенные функции P , R , M зависят от x , y и v , но T и V зависят только от y и v : решение удастся, если только в выражении $q - R$ не содержится переменное x . На основании таких же рассуждений решение удастся, если M зависит только от y и v ; тогда мы вычислим при постоянном y интеграл $\int M dv = L$ и получим

$$dL = M dv + N dy$$

и

$$dz = dP + (q - R + N) dy - dL.$$

Следовательно, нужно положить

$$q - R + N = f'(y),$$

так что

$$z = P - L + f(y).$$

Подобным образом можно было бы начать выкладки также со второго члена $\int q dy$.

Если, однако, ввести неопределенную функцию переменных x , y и v , обозначаемую через K , задачу можно решить в более общем виде:

$$dK = F dx + G dy + H dv,$$

и рассмотрим следующее выражение:

$$dz + dK = (p + F) dx + (q + G) dy + H dv,$$

Примем теперь y и v за постоянные и найдем

$$\int (p + F) dx = P,$$

так что

$$dP = (p + F) dx + R dy + M dv,$$

откуда

$$dz + dK = dP + (q + G - R) dy + (H - M) dv.$$

Если теперь окажется, что или $q + G - R$ или $H - M$ содержат только переменные y и v , но не x , то решение может быть получено так, как было показано раньше.

ЗАДАЧА 29

172. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть дано соотношение между двумя производными p , q и двумя переменными x и z или y и z . Решить эту проблему в тех случаях, когда это возможно.

РЕШЕНИЕ

Положим, что дано соотношение между p , q и x , z . Этот случай легко свести к предыдущему. Действительно, рассмотрим выражение

$$dy = \frac{dz - p dx}{q},$$

выведенное из основной формулы; обозначим

$$\frac{1}{q} = m \quad \text{и} \quad \frac{p}{q} = -n,$$

так что будет

$$dy = m dz + n dx.$$

Тогда, поскольку

$$q = \frac{1}{m} \quad \text{и} \quad p = -\frac{n}{m},$$

заданное соотношение превращается в соотношение между количествами m , n , z и x и тем самым вопрос становится совершенно подобным тем, которые мы рассматривали раньше, с той лишь разницей, что здесь определяем количество y , тогда как раньше мы определяли z . Это определение выполняется с помощью уравнений, и при этом безразлично, вычислять ли z или y . Итак, если при этом вопрос приводится к одному из прежде рассмотренных случаев, то задача может быть решена вышеизложенными методами.

ПРИМЕР

173. Положим $dz = p dx + q dy$ и пусть должно быть $qzx = a^2 p$. Найти вид функции z .

Рассмотрим формулу $dy = \frac{dz}{q} - \frac{p dz}{q}$. Поскольку $\frac{p}{q} = \frac{xz}{a^2}$, имеем

$$dy = \frac{dz}{q} - \frac{xz dx}{a^2} \quad \text{и} \quad y = \int \left(\frac{dz}{q} - \frac{xz dx}{a^2} \right).$$

Но

$$\int \frac{xz dx}{a^2} = \frac{x^2 z}{2a^2} - \int \frac{x^2 dz}{2a^2},$$

следовательно,

$$y = \int dz \left(\frac{1}{q} + \frac{x^2}{2a^2} \right) - \frac{x^2 z}{2a^2}.$$

На этом основании положим

$$\frac{1}{q} + \frac{x^2}{2a^2} = f'(z),$$

так что

$$y = -\frac{x^2 z}{2a^2} + f(z).$$

Из этого уравнения z определяется через x и y . Если для упрощения положим $f(z) = b + az$, то будет

$$y - b = \left(a - \frac{x^2}{2a^2} \right) z \quad \text{и} \quad z = \frac{2a^2(y - b)}{2aa^2 - x^2}.$$

При $a = 0$ и $b = 0$ получим в простейшем случае $z = -\frac{2a^2 y}{x^2}$. Тогда

$$p = +\frac{4a^2 y}{x^3} \quad \text{и} \quad q = -\frac{2a^2}{x^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{p}{q} = -\frac{2y}{x} \quad \text{и} \quad \frac{xz}{a^2} = -\frac{2y}{x}.$$





ГЛАВА VI

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, КОТОРЫМИ ЗАДАЕТСЯ КАКОЕ-ЛИБО СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ОБЕИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ И ВСЕМИ ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ x , y , z

ЗАДАЧА 30

174. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $nz = px + qy$.
Найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

При помощи заданного соотношения вычислим или p , или q .
Поскольку $q = \frac{nz}{y} - \frac{px}{y}$, имеем

$$dz = p dx + \frac{nz dy}{y} - \frac{px dy}{y},$$

а это уравнение преобразуется к виду

$$dz - \frac{nz dy}{y} = p \left(dx - \frac{x dy}{y} \right) = py d \frac{x}{y}.$$

Чтобы левую часть уравнения $dz - \frac{nz dy}{y}$ сделать интегрируемой, умножим уравнение на $\frac{1}{z}$ funct $\frac{z}{y^n}$, или в частном случае на $\frac{1}{y^n}$. Тогда олучим

$$d \frac{z}{y^n} = py^{1-n} d \frac{x}{y}.$$

Отсюда ясно, что нужно положить $py^{1-n} = f' \left(\frac{x}{y} \right)$, так что $\frac{z}{y^n} = f \left(\frac{x}{y} \right)$ или $z = y^n f \left(\frac{x}{y} \right)$. Теперь очевидно, что z является однородной функцией переменных x и y степени n .

Если в общем случае умножить на $\frac{1}{z}$ funct $\frac{z}{y^n}$, то интеграл левой части примет вид $F\left(\frac{z}{y^n}\right)$; если тогда в правой части положить $\frac{py}{z}$ funct $\frac{z}{y^n} = f'\left(\frac{x}{y}\right)$, то будет $F\left(\frac{z}{y^n}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right)$, откуда по-прежнему $\frac{z}{y^n}$ будет равняться произвольной функции количества $\frac{x}{y}$.

СЛЕДСТВИЕ 1

175. Поскольку z равняется однородной функции степени n переменных x и y , то p и q будут функциями степени $n-1$. Ясно, что если $z = y^n f\left(\frac{x}{y}\right)$, то

$$p = y^{n-1} f'\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{и} \quad q = ny^{n-1} f\left(\frac{x}{y}\right) - xy^{n-2} f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

откуда, очевидно, $nz = px + qy$.

СЛЕДСТВИЕ 2

176. Если p и q — функции степени $n-1$ переменных x и y , а выражение $p dx + q dy$ интегрируемо, то есть $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, то интеграл всегда равен $\frac{px + qy}{n}$. Это свойство не раз может оказаться весьма полезным.

ПОЯСНЕНИЕ

177. В основу этого решения положено то, что подлежащее интегрированию уравнение распадается на две части, из которых одну можно сделать интегрируемой при помощи некоторого множителя, благодаря чему определяется одно из переменных, дифференциал которого в уравнении не встречается. В соответствии с этим наше уравнение

$$dz - \frac{nz dy}{y} = p \left(dx - \frac{x dy}{y} \right),$$

может быть представлено еще так:

$$\frac{dx}{y} - \frac{x dy}{y^2} = \frac{1}{py} \left(dz - \frac{nz dy}{y} \right) = \frac{y^{n-1}}{p} \left(\frac{dz}{y^n} - \frac{nz dy}{y^{n+1}} \right),$$

или

$$d \frac{x}{y} = \frac{y^{n-1}}{p} d \frac{z}{y^n}.$$

Следовательно,

$$\frac{y^{n-1}}{p} = F' \left(\frac{z}{y^n} \right),$$

так что

$$\frac{x}{y} = F \left(\frac{z}{y^n} \right)$$

или наоборот,

$$\frac{z}{y^n} = f \left(\frac{x}{y} \right),$$

как и раньше. Можно также с самого начала исключить z из выкладок; в самом деле, так как

$$nz = px + qy,$$

то

$$n dz = p dx + q dy + x dp + y dq.$$

Но

$$n dz = np dx + nq dy,$$

так что

$$(n-1) p dx - x dp + (n-1) q dy - y dq = 0,$$

или

$$x^n \left[\frac{(n-1) p dx}{x^n} - \frac{dp}{x^{n-1}} \right] + y^n \left[\frac{(n-1) q dy}{y^n} - \frac{dq}{y^{n-1}} \right] = 0,$$

что приводится к виду

$$-x^n d \frac{p}{x^{n-1}} - y^n d \frac{q}{y^{n-1}} = 0$$

или

$$d \frac{q}{y^{n-1}} = -\frac{x^n}{y^n} d \frac{p}{x^{n-1}}.$$

Положим

$$\frac{x^n}{y^n} = -f' \left(\frac{p}{x^{n-1}} \right), \quad \text{тогда} \quad \frac{q}{y^{n-1}} = f \left(\frac{p}{x^{n-1}} \right).$$

Введем обозначение $\frac{x}{y} = v$; тогда $v^n = -f' \left(\frac{p}{x^{n-1}} \right)$, и, если положить, наоборот,

$$\frac{p}{x^{n-1}} = u = \frac{1}{v^{n-1}} F'(v),$$

так что

$$f'(u) = -v^n,$$

то получаем

$$\int du f'(u) = f(u) = nF(v) - vF'(v).$$

Таким образом,

$$p = \frac{x^{n-1}}{v^{n-1}} F'(v) = y^{n-1} F' \left(\frac{x}{y} \right)$$

и

$$q = y^{n-1} f(u) = ny^{n-1} F \left(\frac{x}{y} \right) - xy^{n-2} F' \left(\frac{x}{y} \right),$$

откуда

$$nz = px + qy = ny^n F \left(\frac{x}{y} \right) \quad \text{или} \quad z = y^n F \left(\frac{x}{y} \right),$$

как и раньше.

ЗАДАЧА 31

178. Положим $dz = p dx + q dy$; пусть должно быть $\alpha px + \beta qy = nz$. Найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Из предписанного условия выводим, как раньше,

$$q = \frac{nz}{\beta y} - \frac{\alpha px}{\beta y},$$

откуда

$$dz - \frac{nz \, dy}{\beta y} = p \, dx - \frac{\alpha p x \, dy}{\beta y},$$

что после деления на $y^{\frac{n}{\beta}}$ дает

$$d \frac{z}{y^{n/\beta}} = \frac{p}{y^{n/\beta}} \left(dx - \frac{\alpha x \, dy}{\beta y} \right) = \frac{p y^{\alpha/\beta}}{y^{n/\beta}} d \frac{x}{y^{\alpha/\beta}}.$$

Следовательно, положив

$$p y^{(\alpha-n)/\beta} = f' \left(\frac{x}{y^{\alpha/\beta}} \right),$$

имеем решение

$$z = y^{n/\beta} f \left(\frac{x}{y^{\alpha/\beta}} \right).$$

Но функция количества $\frac{x}{y^{\alpha/\beta}}$ сводится к функции количества $\frac{x^\beta}{y^\alpha}$, так что z определяется через x и y формулой

$$z = y^{n/\beta} f \left(\frac{x^\beta}{y^\alpha} \right),$$

или

$$\frac{1}{z^n} = y^{\frac{1}{\beta}} f \left(\frac{x^{1/\alpha}}{y^{1/\beta}} \right).$$

Если количества $x^{1/\alpha}$ и $y^{1/\beta}$ считать имеющими первое измерение, то $\frac{1}{z^n}$ будет их функцией первого измерения и, следовательно, количество z будет функцией n измерения. Итак, если в качестве z взять какую угодно однородную функцию степени n двух переменных t и u , а затем положить $t = x^{1/\alpha}$ и $u = y^{1/\beta}$, то получится подходящее выражение для z .

ЗАДАЧА 32

179. Положим $dz = p \, dx + q \, dy$, и пусть должно быть $Z = pX + qY$, где Z — функция z , X — функция x и Y — функция y . Найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Из предписанного условия имеем $q = \frac{Z}{Y} - \frac{pX}{Y}$ и после подстановки этого значения получаем

$$dz - \frac{Z \, dy}{Y} = p \left(dx - \frac{X \, dy}{Y} \right),$$

следовательно,

$$\frac{dz}{Z} - \frac{dy}{Y} = \frac{p}{Z} \left(dx - \frac{X \, dy}{Y} \right) = \frac{pX}{Z} \left(\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y} \right),$$

и теперь решение очевидно. А именно, положим

$$\frac{pX}{Z} = f' \left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y} \right),$$

тогда

$$\int \frac{dz}{Z} - \int \frac{dy}{Y} = f \left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y} \right),$$

откуда определяется значение z через x и y .

СЛЕДСТВИЕ 1

180. Итак, здесь требуется найти z в зависимости от x и y так, чтобы, если X , Y и Z — заданные функции соответственно от x , y и z , имело место уравнение.

$$X \left(\frac{dz}{dx} \right) + Y \left(\frac{dz}{dy} \right) = Z.$$

Стало быть, найденное здесь решение этого уравнения содержится в следующем конечном уравнении:

$$\int \frac{dz}{Z} = \int \frac{dy}{Y} + f \left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y} \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

181. То, что полученное значение действительно удовлетворяет поставленной задаче, получается немедленно путем дифференцирования. В самом деле:

$$\frac{dz}{Z} = \frac{dy}{Y} + \left(\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y} \right) f' \left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y} \right),$$

откуда

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{Z}{X} f' \left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y} \right)$$

и

$$\left(\frac{dz}{dy} \right) = \frac{Z}{Y} - \frac{Z}{Y} f' \left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y} \right),$$

так что

$$X \left(\frac{dz}{dx} \right) + Y \left(\frac{dz}{dy} \right) = Z.$$

ПОЯСНЕНИЕ

182. Решение можно было выполнить таким же образом, как и выше, без введения новых букв p и q , с сохранением обозначений производных $\left(\frac{dz}{dx} \right)$ и $\left(\frac{dz}{dy} \right)$; однако легче писать единичные буквы и выкладки выходят короче. Впрочем, среди задач такого рода, где встречаются все три переменные x , y и z и сверх того еще производные p и q , только очень немногие могут быть решены; к тем, которые мы уже изложили, едва ли мы сможем добавить ту или иную. Поэтому здесь остается пожелать существенного расширения метода¹⁾. Для того, однако, чтобы лучше видеть охват этой проблемы, добавим несколько примеров.

¹⁾ Unde hic insignia adhuc calculi incrementa desiderantur.

ПРИМЕР 1

183. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $z^2 = px^2 + qy^2$.
Найти общий вид функции z .

В данном случае $Z = z^2$, $X = x^2$ и $Y = y^2$; отсюда имеем

$$\int \frac{dx}{X} = -\frac{1}{x}; \quad \int \frac{dy}{Y} = -\frac{1}{y} \quad \text{и} \quad \int \frac{dz}{Z} = -\frac{1}{z}.$$

После подстановки этих значений получим решение в виде

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{y} + f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$$

или

$$z = \frac{y}{1 - yf\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)}.$$

Следовательно, если взять произвольную функцию количества

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}$$

и обозначить ее через V , то будет $z = \frac{y}{1 - Vy}$.

Если, в частности, положить $V = \frac{n}{y} - \frac{n}{x}$, то получаем

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{y} - \frac{n}{y} + \frac{n}{x} = \frac{ny - (n-1)x}{xy},$$

откуда

$$z = \frac{xy}{ny - (n-1)x}.$$

Следовательно,

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{ny^2}{[ny - (n-1)x]^2} \quad \text{и} \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-(n-1)x^2}{[ny - (n-1)x]^2},$$

так что

$$px^2 + qy^2 = \frac{x^2y^2}{[ny - (n-1)x]^2} = z^2.$$

ПРИМЕР 2

184. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $\frac{n}{z} = \frac{p}{x} + \frac{q}{y}$.
Найти вид функции z .

В данном случае

$$X = \frac{1}{x}, \quad Y = \frac{1}{y} \quad \text{и} \quad Z = \frac{n}{z}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{2} x^2; \quad \int \frac{dy}{Y} = \frac{1}{2} y^2 \quad \text{и} \quad \int \frac{dz}{Z} = \frac{1}{2n} z^2,$$

так что решение получается в виде

$$\frac{1}{2n} z^2 = \frac{1}{2} y^2 + f(x^2 - y^2),$$

или

$$z^2 = ny^2 + f(x^2 - y^2).$$

Нет необходимости множить на $2n$ функцию [в правой части], так как знак этой функции уже включает в себя все такие действия¹⁾.

Если в качестве этой функции взять $\alpha(x^2 - y^2)$, то получим частное решение

$$z^2 = \alpha x^2 + (n - \alpha)y^2 \quad \text{и} \quad z = \sqrt{\alpha x^2 + (n - \alpha)y^2},$$

откуда

$$p = \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2 + (n - \alpha)y^2}}$$

и

$$q = \left(\frac{dz}{dy} \right) = \frac{(n - \alpha)y}{\sqrt{\alpha x^2 + (n - \alpha)y^2}},$$

то есть $\frac{p}{x} = \frac{\alpha}{z}$ и $\frac{q}{y} = \frac{n - \alpha}{z}$, так как $\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = \frac{n}{z}$.

ЗАДАЧА 32 [a]²⁾

185. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $q = pT + V$, где T — любая функция x и y , а V — функция от y и z . Найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Подставив вместо q предписанное значение, получим наше уравнение в виде

$$dz - V dy = p(dx + T dy).$$

Поскольку V содержит только два переменных y и z , можно найти множитель M , который делает интегрируемой левую часть $dz - V dy$; положим, следовательно,

$$M(dz - V dy) = dS.$$

Подобным же образом, поскольку T содержит только x и y , то существует множитель L , который делает интегрируемым $dx + T dy$; итак,

$$L(dx + T dy) = dR.$$

Количества R и S являются теперь известными функциями, первое — от x и y , второе — от y и z . Таким образом, наше уравнение приводится к виду

$$\frac{dS}{M} = \frac{p dR}{L} \quad \text{или} \quad dS = \frac{pM dR}{L}.$$

Из его интегрируемости следует, что $\frac{pM}{L}$ есть функция только от R .

Мы можем, следовательно, положить $\frac{pM}{L} = f'(R)$, и тогда $S = f(R)$. Этим уравнением определяется соотношение между количествами z и x , y

¹⁾ non enim est necesse functionem per $2n$ multiplicari, cum ea omnes operationes iam per se involvat.

²⁾ В первом издании ошибочно повторен № 32.

СЛЕДСТВИЕ 1

186. Эта задача содержит предыдущую как частный случай: в самом деле, так как $Z = pX + qY$, то $q = -\frac{X}{Y}p + \frac{Z}{Y}$, и, применяя полученное решение, имеем

$$T = -\frac{X}{Y} \quad \text{и} \quad V = \frac{Z}{Y}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

187. Хотя эта задача намного шире предыдущей¹⁾, она все же заключена в очень узких рамках: исходя из нее, нельзя решить даже весьма простое уравнение $z = py + qx$.

ПОЯСНЕНИЕ

188. Уравнение $z = py + qx$ достойно внимания, поскольку его не удается решить с помощью каких бы то ни было доныне известных положений. Определяем ли мы из него $q = \frac{z - py}{x}$, получая

$$dz - \frac{z dy}{x} = p \left(dx - \frac{y dy}{x} \right),$$

или находим из него p , мы не приходим к решению. Причина этих затруднений, очевидно, заключается в том, что никакой множитель не может сделать интегрируемым выражение $dz - \frac{z dy}{x}$; иначе говоря, уравнение $dz - \frac{z dy}{x} = 0$ является невозможным, если x переменное количество наравне с y и z . Ведь я уже указал выше, что не все дифференциальные уравнения между тремя переменными возможны, и установил критерий возможности, который для выражения

$$dz + P dx + Q dy = 0$$

приводится к виду

$$P \left(\frac{dQ}{dz} \right) - Q \left(\frac{dP}{dz} \right) = \left(\frac{dQ}{dx} \right) - \left(\frac{dP}{dy} \right).$$

Но в нашем случае $P = 0$ и $Q = -\frac{z}{x}$, так что критерий дает $0 = \frac{z}{x^2}$, что неверно, и поэтому уравнение $dz - \frac{z dy}{x} = 0$ невозможно, что и само по себе очевидно. В то же время можно немедленно указать частное решение уравнения $z = py + qx$, а именно $z = n(x + y)$, откуда $p = q = n$. В дальнейшем мы дадим метод нахождения общего решения из такого рода частных решений.

ПРИМЕР 1

189. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $py + qx = \frac{nxz}{y}$. Найти общий вид функции z .

¹⁾ infinite latius patet quam praecedens.

Поскольку $q = -\frac{py}{x} + \frac{nz}{y}$, имеем

$$T = -\frac{y}{x} \quad \text{и} \quad V = \frac{nz}{y},$$

так что

$$dS = M \left(dz - \frac{nz}{y} \frac{dy}{y} \right) \quad \text{и} \quad dR = L \left(dx - \frac{y}{x} \frac{dy}{y} \right).$$

Положим поэтому $M = \frac{1}{y^n}$, откуда $S = \frac{z}{y^n}$ и $L = 2x$, стало быть, $R = x^2 - y^2$. Таким образом, получается решение

$$\frac{z}{y^n} = f(x^2 - y^2), \quad \text{то есть} \quad z = y^n f(x^2 - y^2).$$

ПРИМЕР 2

190. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $px^2 + qy^2 = nuz$. Определить вид функции z .

Поскольку $q = -\frac{px^2}{y^2} + \frac{nz}{y}$, имеем

$$T = -\frac{x^2}{y^2} \quad \text{и} \quad V = \frac{nz}{y},$$

так что этот случай содержится в нашей задаче. Мы получаем

$$dR = L \left(dx - \frac{x^2}{y^2} \frac{dy}{y} \right) \quad \text{и} \quad dS = M \left(dz - \frac{nz}{y} \frac{dy}{y} \right).$$

Положив $L = \frac{1}{x^2}$, получим $R = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}$, а положив $M = \frac{1}{y^n}$, получим $S = \frac{z}{y^n}$. Таким образом, приходим к решению

$$\frac{z}{y^n} = f\left(\frac{x-y}{xy}\right), \quad \text{то есть} \quad z = y^n f\left(\frac{x-y}{xy}\right).$$

ЗАДАЧА 33

191. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $p = qT + V$, где T — функция x и y , V — функция x и z . Определить вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Подобным же образом, как выше, подставим вместо p его предписанное значение и получим

$$dz - V dx = q(dy + T dx).$$

В силу свойств функций V и T могут быть выполнены следующие интеграции:

$$M(dz - V dx) = dS \quad \text{и} \quad N(dy + T dx) = dR,$$

откуда

$$\frac{dS}{M} = \frac{q dR}{N}, \quad \text{то есть} \quad dS = \frac{Mq}{N} dR.$$

Откуда легко получаем такое решение:

$$\frac{Mq}{N} = f'(R) \quad \text{и} \quad S = f(R).$$

ЗАДАЧА 34

192. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $z = Mp + Nq$, где M и N — любые функции двух переменных x и y . По частному решению $z = V$ найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Продифференцируем частное решение V , представляющее собой функцию x и y ; мы получим

$$dV = P dx + Q dy.$$

Подставив вместо z это частное решение, так что $p = P$ и $q = Q$, имеем, по предположению,

$$V = MP + NQ.$$

В общем же случае полагаем $z = Vf(T)$, так что

$$dT = R dx + S dy,$$

и будем теперь искать функцию T . Путем дифференцирования находим, что

$$p = \left(\frac{dz}{dx} \right) = Pf(T) + VRf'(T)$$

и

$$q = \left(\frac{dz}{dy} \right) = Qf(T) + VSf'(T).$$

Поскольку

$$z = Mp + Nq = Vf(T),$$

должно быть

$$Vf(T) = (MP + NQ)f(T) + V(MR + NS)f'(T),$$

и, так как, по предположению, $V = MP + NQ$, получим

$$MR + NS = 0,$$

откуда

$$dT = R \left(dx - \frac{M dy}{N} \right).$$

Нам не нужно знать R , а достаточно рассмотреть выражение $N dx - M dy$, которое можно сделать интегрируемым при помощи некоторого множителя. Решение теперь легко свести к следующему: исходя из предписанного условия $z = Mp + Nq$, образуем реальное уравнение

$$dT = R(N dx - M dy),$$

и, найдя подходящий множитель R , путем интегрирования определяем количество T . Тогда получим $z = Vf(T)$.

ДРУГОЙ СПОСОБ

Легче найти это общее решение таким образом: исходя из известного значения V , положим $z = Vv$, и пусть

$$dv = r dx + s dy.$$

Тогда

$$p = Pv + Vr \quad \text{и} \quad q = Qv + Vs,$$

поэтому

$$z = Mp + Nq = (MP + NQ)v + V(Mr + Ns) = Vv.$$

Но

$$V = MP + NQ,$$

следовательно,

$$Mr + Ns = 0, \quad \text{то есть} \quad s = -\frac{Mr}{N}.$$

Отсюда

$$dv = r \left(dx - \frac{M dy}{N} \right) = \frac{r}{N} (N dx - M dy).$$

Следовательно, найдя подходящий множитель $[R]$, положим

$$R(N dx - M dy) = dT.$$

Тогда

$$dv = \frac{r}{NR} dT,$$

откуда заключаем, что

$$\frac{r}{NR} = f'(T) \quad \text{и} \quad v = f(T),$$

так что в общем случае, как и прежде, $z = Vv$.

СЛЕДСТВИЕ 1

193. Итак, когда задано условие $z = Mp + Nq$, причем $dz = p dx + q dy$, немедленно переходим к рассмотрению дифференциального уравнения $R(N dx - M dy) = dT$, откуда находятся как множитель R , так и интеграл T ; эта операция не зависит от известного частного решения V .

СЛЕДСТВИЕ 2

194. Пусть найдено количество T ; если откуда-либо известно частное решение $z = V$, то общим решением будет $z = Vf(T)$. Необходимо, однако, заметить, что из частного решения можно найти общее только в том случае, если заданное условие имеет вид $z = Mp + Nq$.

ПРИМЕР 1

195. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $z = py + qx$. По частному решению $z = x + y$ найти общее.

Поскольку в данном случае $M = y$ и $N = x$, имеем следующее уравнение:

$$R(x dx - y dy) = dT,$$

откуда

$$T = f(x^2 - y^2).$$

Следовательно, общим решением будет

$$z = (x + y)f(x^2 - y^2).$$

ПРИМЕР 2

196. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $z = p(x + y) + q(y - x)$. По частному решению $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ найти общее.

Так как $M = x + y$ и $N = y - x$, то выражение $N dx - M dy$ приводит к следующему уравнению:

$$R(y dx - x dx - x dy - y dy) = dT.$$

Положим $R = \frac{1}{x^2 + y^2}$, так что

$$dT = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} - \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}.$$

Следовательно,

$$T = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{1}{2} l(x^2 + y^2).$$

Исходя из этого выражения, содержащего две трансцендентности¹⁾, получаем

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} f(T).$$

Отсюда видно, что нет никакого другого частного алгебраического решения, кроме заданного $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ПРИМЕР 3

197. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $z = p(\alpha x + \beta y) + q(\gamma x + \delta y)$. По найденному частному решению $z = V$ найти общий вид функции z .

Здесь $M = \alpha x + \beta y$ и $N = \gamma x + \delta y$, так что приходим к следующему уравнению:

$$R[(\gamma x + \delta y) dx - (\alpha x + \beta y) dy] = dT.$$

Ввиду его однородности должно быть

$$R = \frac{1}{\gamma x^2 + (\delta - \alpha) xy - \beta y^2},$$

так что

$$dT = \frac{(\delta x + \delta y) dx - (\alpha x + \beta y) dy}{\gamma x^2 + (\delta - \alpha) xy - \beta y^2}.$$

Интеграл находим при помощи подстановки $y = ux$, что дает

$$dT = \frac{dx}{x} - \frac{(\alpha + \beta u) du}{\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2};$$

и, если обозначить $\int \frac{(\alpha + \beta u) du}{\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2} = W$, будем иметь $T = lx - W$, а поскольку функция количества T является также функцией количества $\frac{x}{U}$, то в общем случае $z = Vf\left(\frac{x}{U}\right)$. Отсюда ясно, что, поскольку U есть функция от $u = \frac{y}{x}$, U является однородной функцией нулевого измерения переменных x и y и, следовательно, $\frac{x}{U}$ является функцией измерения единица.

¹⁾ atque ex valor hoc dupliciter transcendente erit.

ПОЯСНЕНИЕ

198. В этом примере остается еще та трудность, что нужно предварительно найти частное решение $z = V$. Ибо если у нас не будет такого частного решения, то общего решения мы не сможем найти. Но в данном случае такое частное решение можно найти по способу, который будет указан ниже, а так как этот способ несколько своеобразен, то благодаря ему этот раздел анализа несомненно существенно обогатится¹⁾.

ЗАДАЧА 35

199. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть

$$z = p(ax + \beta y) + q(\gamma x + \delta y).$$

Найти частное значение z , удовлетворяющее этому условию.

РЕШЕНИЕ

Нам удастся получить решение, если в качестве значения z будем искать однородную функцию переменных x и y нулевого измерения, так что, если положить $y = ux$, это решение должно быть функцией одного u . Положим поэтому

$$z = f(u) = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

значит,

$$f'(u) = \frac{dz}{du},$$

и, вследствие того, что

$$du = \frac{dy}{x} - \frac{y}{x^2} dx,$$

получим

$$dz = \left(\frac{dy}{x} - \frac{y}{x^2} dx\right) f'(u),$$

откуда

$$p = -\frac{u}{x} f'(u) = -\frac{u}{x} \frac{dz}{du} \quad \text{и} \quad q = \frac{1}{x} f'(u) = \frac{dz}{x du}.$$

После подстановки полученных для p и q значений предписанное условие принимает вид

$$z = x(ax + \beta u) p + x(\gamma + \delta u) q = \frac{-u dz(ax + \beta u) + dz(\gamma + \delta u)}{du},$$

откуда

$$\frac{dz}{z} = \frac{du}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2}.$$

Положим

$$\int \frac{du}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2} = IV;$$

тогда $z = V$ будет частным решением

¹⁾ Pro hoc autem casu solutionem particularem sequenti modo elicere licet: qui cum aliquid singulare habeat, nullum est dubium, quin eius ope hoc caleuli genus haud parum adiumenti sit consecuturum.

СЛЕДСТВИЕ 1

200. Когда найдено это значение V , легко получить общее решение, воспользовавшись предыдущим примером. Имеем $z = Vf\left(\frac{x}{U}\right)$, где

$$\frac{dU}{U} = \frac{(\alpha + \beta u) du}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2},$$

откуда видно, что количество U можно найти по частному решению V .

СЛЕДСТВИЕ 2

201. Имеем

$$lU = -l\sqrt{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2} + \int \frac{\frac{1}{2}(\delta + \alpha) du}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2},$$

стало быть,

$$lU = -l\sqrt{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2} + \frac{1}{2}(\alpha + \delta)lV$$

или

$$U = \frac{V^{1/2(\alpha + \delta)}}{\sqrt{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2}};$$

отсюда

$$\frac{x}{U} = \frac{\sqrt{\gamma x^2 + (\delta - \alpha)xy - \beta y^2}}{V^{1/2(\alpha + \delta)}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

202. Таким образом, с помощью найденного частного решения $z = V$, причем

$$\frac{dV}{V} = \frac{du}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2}, \quad u = \frac{y}{x},$$

получаем общее решение

$$z = Vf \left[\frac{\gamma x^2 + (\delta - \alpha)xy - \beta y^2}{V^{\alpha + \delta}} \right] = Vf \left[\frac{x(\gamma x + \delta y) - y(ax + \beta y)}{V^{\alpha + \delta}} \right].$$

СЛЕДСТВИЕ 4

203. Отсюда получаем еще другое частное решение, всегда алгебраическое, а именно

$$z = [x(\gamma x + \delta y) - y(ax + \beta y)]^{\frac{1}{\alpha + \delta}}$$

или любое кратное этого решения. Но если V не является алгебраической функцией, тогда все остальные решения будут трансцендентными и имеют такой вид:

$$z = [x(\gamma x + \delta y) - y(ax + \beta y)]^{\frac{1}{\alpha + \beta}} f \left[\frac{x(\gamma x + \delta y) - y(ax + \beta y)}{V^{\alpha + \delta}} \right].$$

ПОЯСНЕНИЕ

204. В одном случае, когда $\delta = -\alpha$, а предписанное условие имеет вид:

$$z = p(ax + \beta y) + q(\gamma x - \alpha y),$$

требуется особое исследование. Прежде всего при подстановке $u = \frac{y}{x}$ находим для частного решения $z = U$ значение

$$lU = \int \frac{du}{\gamma - 2\alpha u - \beta u^2}.$$

Далее, так как

$$\frac{dU}{U} = \frac{(\alpha + \beta u) du}{\gamma - 2\alpha u - \beta u^2},$$

получим

$$U = \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\alpha u - \beta u^2}} \quad \text{и} \quad \frac{x}{U} = \sqrt{\gamma x^2 - 2\alpha xy - \beta y^2},$$

так что общим решением будет

$$z = Vf(\gamma x^2 - 2\alpha xy - \beta y^2).$$

Само собой очевидно, что вместо $f(\sqrt{T})$ можно писать также $f(T)$. Следовательно, если V не является алгебраической функцией, то в этом случае вовсе не будет никаких алгебраических частных решений.

ПРИМЕР 1

205. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $pz = ry - qx$. Найдти вид функции z .

Сравнивая с исследованным нами общим случаем, мы видим, что

$$\alpha = 0; \quad \beta = \frac{1}{n}; \quad \gamma = -\frac{1}{n}; \quad \delta = 0.$$

Но здесь $\delta = -\alpha$, как в предыдущем параграфе, значит,

$$lV = \int \frac{n du}{-1 - u^2} = -n \operatorname{arctg} u.$$

Поскольку, однако, $u = \frac{y}{x}$, общее решение есть

$$z = e^{-n \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} f(x^2 + y^2).$$

ПРИМЕР 2

206. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $z = p(x + y) - q(x + y)$. Найдти вид функции z .

Сравнение [с общим случаем] дает

$$\alpha = 1; \quad \beta = 1; \quad \gamma = -1; \quad \delta = -1,$$

следовательно,

$$lV = \int \frac{du}{-1 - 2u - u^2} = \frac{1}{1 + u}, \quad V = e^{\frac{1}{1+u}}$$

и общим решением будет

$$z = e^{\frac{x}{x+y}} f(x + y).$$

ПРИМЕР 3

207. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $z = p(x - 2y) + q(2x - 3y)$. Найти вид функции z .

Поскольку здесь

$$\alpha = 1; \quad \beta = -2; \quad \gamma = 2 \quad \text{и} \quad \delta = -3,$$

имеем сперва

$$IV = \int \frac{du}{2 - 4u + 2u^2} = \frac{+1}{2(1-u)} = \frac{x}{2(x-y)},$$

а так как в данном случае δ не равно $-\alpha$, общим решением будет

$$z = (2x^2 - 4xy + 2y^2)^{-1/2} f\left(\frac{2x^2 - 4xy + 2y^2}{V^{-2}}\right).$$

Но

$$V = e^{\frac{x}{2(x-y)}},$$

поэтому

$$z = \frac{1}{x-y} f[(x-y)^2 e^{\frac{x}{x-y}}],$$

а простейшим решением в этом случае будет $z = \frac{1}{x-y}$.

ПОЯСНЕНИЕ

208. Следует поставить вопрос, каким образом можно сразу найти общее решение, без помощи частного решения; следующие рассуждения покажут, как это может быть выполнено. Поскольку

$$p(\alpha x + \beta y) = z - q(\gamma x + \delta y)$$

и

$$q(\gamma x + \delta y) = z - p(\alpha x + \beta y),$$

то после подстановки обоих значений порознь в выражение

$$dz = p dx + q dy$$

получим следующие равенства:

$$(\alpha x + \beta y) dz = z dx - q(\gamma x + \delta y) dx + q(\alpha x + \beta y) dy,$$

$$(\gamma x + \delta y) dz = z dy + p(\gamma x + \delta y) dx - p(\alpha x + \beta y) dy.$$

Умножим первое на неопределенный множитель M , а второе — на N ; тогда сумма произведений дает

$$\begin{aligned} dz[M(\alpha x + \beta y) + N(\gamma x + \delta y)] - z(M dx + N dy) = \\ = (Np - Mq)[(\gamma x + \delta y) dx - (\alpha x + \beta y) dy], \end{aligned}$$

где M и N должны быть взяты так, чтобы левая часть допускала интегрирование. В этом случае ее интеграл равен произвольной функции количества

$$\int \frac{(\gamma x + \delta y) dx - (\alpha x + \beta y) dy}{\gamma x^2 + (\delta - \alpha) xy - \beta y^2},$$

вычисление которого показано выше [§ 197], а именно, этот интеграл равен $f\left(\frac{x}{U}\right)$. Но, очевидно, целесообразно выбрать M и N таким

образом, чтобы стало возможным уравнение

$$\frac{dz}{z} = \frac{M dx + N dy}{M(ax + \beta y) + N(\gamma x + \delta y)}$$

или чтобы второй член допускал интегрирование; если его интеграл обозначить через W , то $\frac{z}{V} = f\left(\frac{x}{U}\right)$. Чтобы добиться интегрируемости, положим $y = ux$, а M и N будем считать функциями u . Тогда

$$\frac{dz}{z} = \frac{(M + Nu) dx + Nx du}{Mx(\alpha + \beta u) + Nx(\gamma + \delta u)}.$$

Интегрирование удастся, если положить $M = -Nu$, что дает

$$\frac{dz}{z} = \frac{du}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2},$$

или

$$W = \int \frac{du}{\gamma + (\delta - \alpha)u - \beta u^2},$$

как и раньше.

ЗАДАЧА 36

209. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $Z = pP + qQ$, где Z — функция z , а P и Q — какие угодно заданные функции x и y . Найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Образует из исходных уравнений следующие:

$$\begin{aligned} L dz &= Lp dx + Lq dy, & MZ dx &= MpP dx + MqQ dx, \\ NZ dy &= NpP dy + NqQ dy. \end{aligned}$$

Образовав их сумму, получим

$$\begin{aligned} L dz + Z(M dx + N dy) &= \\ &= p[(L + MP) dx + NP dy] + q[(L + NQ) dy + MQ dx]. \end{aligned}$$

Для того чтобы правая часть содержала множитель, свободный от p и q , пусть будет

$$\frac{L + MP}{NP} = \frac{MQ}{L + NQ},$$

откуда

$$L^2 + LNQ + LMP = 0, \quad \text{то есть} \quad L = -MP - NQ.$$

После введения этого значения получим

$$-dz(MP + NQ) + Z(M dx + N dy) = (Mq - Np)(Q dx - P dy).$$

Поскольку, однако, P и Q — заданные функции x и y , то существует множитель R такой, что

$$R(Q dx - P dy) = dU$$

и, следовательно,

$$-dz(MP + NQ) + Z(M dx + N dy) = \frac{Mq - Np}{R} dU.$$

Возьмем теперь неопределенные функции M и N такие, чтобы выра-

жение $\frac{M dx + N dy}{MP + NQ}$ стало интегрируемым, что всегда можно сделать. Итак,

$$\frac{M dx + N dy}{MP + NQ} = dV,$$

тогда вследствие того, что

$$M dx + N dy = (MP + NQ) dV,$$

наше уравнение примет вид

$$(MP + NQ)(-dz + Z dV) = \frac{Mq - Np}{R} dU,$$

или

$$\frac{dz}{Z} - dV = \frac{Np - Mq}{RZ(MP + NQ)} dU.$$

Поэтому должно быть

$$\frac{Np - Mq}{RZ(MP + NQ)} = f'(U)$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dz}{Z} - V = f(U), \quad \text{то есть} \quad \int \frac{dz}{Z} = V + f(U),$$

откуда z определяется через x и y .

СЛЕДСТВИЕ 1

210. Для решения этой задачи требуется, следовательно, найти сперва для выражения $Q dx - P dy$ множитель R , который делает это выражение интегрируемым, так что

$$R(Q dx - P dy) = dU,$$

откуда количество U определяется через x и y .

СЛЕДСТВИЕ 2

211. Затем выбираем количества M и N так, чтобы становилось интегрируемым выражение $\frac{M dx + N dy}{MP + NQ}$, интеграл от этого выражения обозначим через V и получим общее решение задачи в виде

$$\int \frac{dz}{Z} = V + f(U).$$

ПРИМЕР

212. Пусть P и Q — однородные функции x и y одной и той же степени n . Найти решение задачи.

Положим $y = ux$. Тогда как P , так и Q будут произведениями x^n и некоторой функции переменного u . Итак, пусть

$$P = x^n S \quad \text{и} \quad Q = x^n T,$$

где S и T — заданные функции переменного u . Но тогда, поскольку $dy = u dx + x du$, выражение $Q dx - P dy$ переходит в

$$x^n T dx - x^n S u dx - x^{n+1} S du = x^n [(T - Su) dx - Sx du].$$

Положим, следовательно,

$$R = \frac{1}{x^{n+1}(T-Su)},$$

так что

$$dU = \frac{dx}{x} - \frac{S du}{T-Su},$$

откуда находится U . Для второго количества V имеем уравнение

$$dV = \frac{(M+Nu) dx + Nx du}{x^n (MS+NT)},$$

и здесь уже легко выбрать M и N в виде функций u так, чтобы это выражение стало интегрируемым. Интеграл получится в виде

$$V = \frac{-M-Nu}{(n-1)x^{n-1}(MS+NT)},$$

а M и N или $\frac{M}{N} = K$ должны быть взяты такими, чтобы было

$$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} d \frac{K+u}{KS+T} = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{du}{KS+T},$$

то есть

$$-K^2 dS + KS du - uK dS - uS dK + T dK - K dT + T du - u dT + (n-1) du (KS+T) = 0.$$

Это можно привести к такому виду:

$$(T-Su) dK + K (nS du - u dS - dT) - K^2 dS + nT du - u dT = 0.$$

Считая это уравнение решенным, находим отсюда количество K , после чего получим

$$V = \frac{-K-u}{(n-1)x^{n-1}(KS+T)}.$$

Поскольку решение предыдущего уравнения затруднительно, положим сразу $\frac{K+u}{KS+T} = v$, так что

$$K = \frac{Tv-u}{1-Sv} \quad \text{и} \quad KS+T = \frac{T-Su}{1-Sv},$$

откуда

$$dv + \frac{(n-1) du (1-Sv)}{T-Su} = 0.$$

Решив это уравнение, получим

$$V = \frac{-v}{(n-1)x^{n-1}}.$$

СЛЕДСТВИЕ

213. Однако случай $n=1$ требует особого исследования. Впрочем, легко видеть, что при этом нужно принять $M = -Nu$, так что $dV = \frac{du}{T-Su}$ и, когда найдено количество V , будем иметь

$$\int \frac{dz}{z} = V + f(U).$$

ПОЯСНЕНИЕ

214. Поскольку три переменные x, y, z перестановочны друг с другом, эту задачу можно, очевидно, широко обобщить. А именно, если заданное условие выражается уравнением $pP + qQ + R = 0$, то наш метод решения приводит к успеху не только, когда R — функция z , P и Q — функции x и y , но и в том случае, когда P — функция x , Q и R — функции y и z , а также в том случае, когда Q — функция y , P и R — функции x и z . Это последнее условие вместе с прежде рассмотренным обладает тем свойством, что производные p и q отделены друг от друга и встречаются только в первой степени, что означает большое ограничение. Однако если условие более сложное, то, по-видимому, вряд ли можно надеяться на решение. Приведу все же один случай, когда удается получить решение.

ЗАДАЧА 37

215. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть

$$q = Ap^n x^\lambda y^\mu z^\nu.$$

Найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Подставив это значение q , получим

$$dz = p dx + Ap^n x^\lambda y^\mu z^\nu dy,$$

откуда

$$Ay^\mu dy = p^{-n} x^{-\lambda} z^{-\nu} (dz - p dx).$$

Положим

$$p^{-n} x^{-\lambda} z^{-\nu} = t,$$

так что

$$p = t^{\frac{1}{n}} x^{\frac{\lambda}{n}} z^{\frac{\nu}{n}}$$

и

$$Ay^\mu dy = t dz - t^{\frac{n-1}{n}} x^{\frac{\lambda}{n}} z^{\frac{\nu}{n}} dx.$$

Далее, принимаем

$$t^{n-1} z^{-\nu} = u^n, \quad \text{то есть} \quad t = z^{\frac{\nu}{n-1}} u^{\frac{n}{n-1}}$$

тогда

$$Ay^\mu dy = u^{\frac{n}{n-1}} z^{\frac{\nu}{n-1}} dz - ux^{\frac{\lambda}{n}} dx.$$

После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \frac{A}{\mu+1} y^{\mu+1} &= \frac{n-1}{n+\nu-1} u^{\frac{n}{n-1}} z^{\frac{n+\nu-1}{n-1}} - \frac{nu}{n-\lambda} x^{\frac{n-\lambda}{n}} - \\ &- \int du \left(\frac{n}{n+\nu-1} u^{\frac{1}{n-1}} z^{\frac{n+\nu-1}{n-1}} - \frac{n}{n-\lambda} x^{\frac{n-\lambda}{n}} \right), \end{aligned}$$

и теперь можно получить решение с помощью приемов, данных выше. А именно, принимаем

$$\frac{1}{n+\nu-1} u^{n-1} z^{\frac{n+\nu-1}{n-1}} - \frac{1}{n-\lambda} x^{\frac{n-\lambda}{n}} = f'(u),$$

откуда

$$\frac{A}{\mu+1} y^{\mu+1} = \frac{n-1}{n+\nu-1} u^{\frac{n}{n-1}} z^{\frac{n+\nu-1}{n-1}} - \frac{n}{n-\lambda} u x^{\frac{n-\lambda}{n}} - n f(u),$$

а если из этих двух уравнений исключить u , то получим z в зависимости от x и y .

СЛЕДСТВИЕ 1

216. Случай $n=1$ требует особого исследования, поскольку при $p = \frac{1}{t} x^{-\lambda} z^{-\nu}$ имеем

$$A y^{\mu} dy = t dz - x^{-\lambda} z^{-\nu} dx$$

и

$$\frac{A}{\mu+1} y^{\mu+1} = \frac{1}{\lambda-1} x^{1-\lambda} z^{-\nu} + \int dz \left(t + \frac{\nu}{\lambda-1} x^{1-\lambda} z^{-\nu-1} \right),$$

откуда немедленно заключаем, что

$$\frac{A}{\mu+1} y^{\mu+1} = \frac{1}{\lambda-1} x^{1-\lambda} z^{-\nu} + f(z).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

217. Случаи $n+\nu-1=0$ и $n-\lambda=0$ не доставляют никаких затруднений, поскольку в первом случае

$$\frac{n-1}{n+\nu-1} z^{\frac{n+\nu-1}{n-1}} = lz,$$

а во втором случае

$$\frac{n}{n-\lambda} x^{\frac{n-\lambda}{n}} = lx.$$

В решение надо подставить именно эти значения.

ПРИМЕР

218. Положим $dz = p dx + q dy$, и пусть должно быть $p q x y = a z$, то есть $q = \frac{a z}{p x y}$. Найти функцию z .

Итак,

$$dz = p dx + \frac{a z dy}{p x y} \quad \text{или} \quad \frac{a dy}{y} = \frac{p x}{z} (dz - p dx).$$

Положим $\frac{p x}{z} = t$, то есть $p = \frac{t z}{x}$. Тогда $\frac{a dy}{y} = t dz - \frac{t^2 z dx}{x}$. Положим

далее $t^2 z = u^2$ или $t = \frac{u}{\sqrt{z}}$, так что $\frac{a dy}{y} = \frac{u dz}{\sqrt{z}} - \frac{u^2 dx}{x}$,

откуда после интегрирования получаем

$$aly = 2u \sqrt{z} - u^2 lx - \int du (2\sqrt{z} - 2ulx),$$

где под знаком интеграла встречается только один дифференциал du .

Положим поэтому $\sqrt{z} - ulx = f'(u)$, откуда

$$aly = 2u \sqrt{z} - u^2 lx - 2f(u) = u^2 lx + 2uf'(u) - 2f(u).$$

В качестве простейшего случая возьмем $f'(u) = 0$ и $f(u) = 0$. Тогда

$$u = \frac{\sqrt{z}}{lx}, \text{ откуда}$$

$$aly = \frac{2z}{lx} - \frac{z}{lx} = \frac{z}{lx},$$

следовательно, в этом случае имеем $z = alxly$. Полагая $f'(u) = ulc$

$$\text{и } f(u) = \frac{1}{2} u^2 lc, \text{ получим } u = \frac{\sqrt{z}}{lx + lc} = \frac{\sqrt{z}}{lcx}$$

и

$$aly = \frac{2z}{lcx} - \frac{zlx}{(lcx)^2} - \frac{zlc}{(lcx)^2} = \frac{z}{lcx},$$

так что

$$z = aly (lc + lx).$$

Существует еще более общее решение

$$z = a (lb + ly) (lc + lx).$$

ПОЯСНЕНИЕ

219. Вышеизложенные методы могут быть существенно расширены, если вместо переменных x и y , функцией которых является z , ввести два других переменных t и u , зависимость которых от старых переменных задана. Итак, если z — функция переменных x и y , причем

$$dz = p dx + q dy,$$

то после введения вместо x и y новых переменных t и u и выполнения дифференцирования получим

$$dz = r dt + s du.$$

Спрашивается, каким образом r и s выражаются через p и q , при заданном соотношении между старыми переменными x , y и новыми переменными t , u . Так как и x , и y равны каким-то определенным функциям t и u , имеем

$$dx = P dt + Q du \quad \text{и} \quad dy = R dt + S du,$$

и после подстановки этих значений z окажется функцией t и u . А поскольку

$$dz = p dx + q dy,$$

будем иметь

$$dz = (Pp + Rq) dt + (Qp + Sq) du.$$

Но по условию,

$$dz = r dt + s du,$$

следовательно,

$$r = Pp + Rq \quad \text{и} \quad s = Qp + Sq.$$

Итак, при этой подстановке новые производные определяются через старые производные так:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + R\left(\frac{dz}{dy}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{du}\right) = Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + S\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

А так как отсюда в свою очередь получается, что

$$Qr - Ps = (QR - PS)q \quad \text{и} \quad Sr - Rs = (PS - QR)p,$$

то мы заключаем, что

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{S}{PS - QR}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{R}{PS - QR}\left(\frac{dz}{du}\right)$$

и

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-Q}{PS - QR}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{P}{PS - QR}\left(\frac{dz}{du}\right).$$

Поскольку x и y , равно как и z , являются функциями t и u , это соотношение может быть так выражено:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

и

$$\left(\frac{dz}{du}\right) = \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Таким образом, мы достигаем того, что если некоторые задачи, заданные в виде соотношения между p , q , x , y , z , могут быть решены, то тем самым получается решение также для вытекающего отсюда соотношения между r , s , t , u , z . При этом часто получаются задачи, решение которых кажется чрезвычайно трудным, так что это может быть весьма существенным вспомогательным средством в данной части Анализа. Но, поскольку польза от этого средства скажется в особенности при рассмотрении дифференциальных уравнений второго порядка, то я на этом вопросе дольше останавливаться не буду и перейду к последним¹⁾.

¹⁾ Следует заметить, что Эйлер уже решил некоторые дифференциальные уравнения того же типа, что рассматриваются здесь в главах II—VI, в статье (№ 285 по списку Энестрема) «Определение функций по заданной зависимости между дифференциалами» *Investigatio functionum ex data differentialium conditione*, *Novi comment. acad. Sc. Petrop.*, 9 (1762/3), 1764, стр. 170 *Opera Omnia*, Ser. I, vol. 22. [Ф. Э.]



ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ КНИГА ПОСЛЕДНЯЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ ИЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ ЛЮБОГО ПОРЯДКА

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ГЛАВА I

ОБЩЕЕ О ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЗАДАЧА 38

220. Пусть z — какая-либо функция двух переменных x и y , найти ее производные второго порядка.

РЕШЕНИЕ

Поскольку z есть функция двух переменных x и y , ее дифференциал имеет вид

$$dz = p dx + q dy,$$

где p и q — производные первого порядка, которые мы обозначаем так:

$$p = \left(\frac{dz}{dx} \right) \quad \text{и} \quad q = \left(\frac{dz}{dy} \right).$$

Но поскольку p и q тоже являются функциями x и y , то их производные являются производными второго порядка от z . Таким образом, получаем нижеследующие четыре производные:

$$\left(\frac{dp}{dx} \right), \left(\frac{dp}{dy} \right), \left(\frac{dq}{dx} \right), \left(\frac{dq}{dy} \right),$$

из которых, однако, вторая и третья между собой совпадают, как было доказано в «Дифференциальном исчислении». Но поскольку $p = \left(\frac{dz}{dx} \right)$, то целесообразно аналогично писать $\left(\frac{dp}{dx} \right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right)$. Смысл этого обозначения совершенно очевиден. Аналогично $\left(\frac{dp}{dy} \right) = \left(\frac{d^2z}{dx dy} \right)$; и, так как $q = \left(\frac{dz}{dy} \right)$, имеем

$$\left(\frac{dq}{dx} \right) = \left(\frac{d^2z}{dy dx} \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dq}{dy} \right) = \left(\frac{d^2z}{dy^2} \right).$$

Но в силу того, что $\left(\frac{d^2z}{dy dx} \right) = \left(\frac{d^2z}{dx dy} \right)$, функция z обладает тремя производными второго порядка, а именно

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2} \right); \left(\frac{d^2z}{dx dy} \right); \left(\frac{d^2z}{dy^2} \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

221. Итак, функция z двух переменных x и y имеет две производные первого порядка

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dy} \right),$$

и три производные второго порядка:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2} \right), \left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2z}{dy^2} \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

222. Итак, эти выражения получаются путем двукратного дифференцирования, причем только одно количество принимается в качестве переменного. Первое из них получается, дважды считая переменным x , во втором при одном дифференцировании переменным считается x , при втором — y , а в третьем — оба раза переменным считается y .

СЛЕДСТВИЕ 3

223. Подобным образом выясняется, что у функции z есть четыре производные третьего порядка, а именно

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right), \left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right), \left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right), \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right),$$

затем пять производных четвертого порядка, шесть производных пятого порядка и т. д.

ПОЯСНЕНИЕ

224. Производные второго порядка с помощью подстановки приводятся к производным первого порядка. Например, производная $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ после подстановки $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ преобразуется в $\left(\frac{dp}{dx}\right)$; производная $\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)$ при помощи той же подстановки преобразуется в $\left(\frac{dp}{dy}\right)$. Посредством подстановки $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$ производная $\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)$ преобразуется в $\left(\frac{dq}{dx}\right)$, а производная $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ в $\left(\frac{dq}{dy}\right)$. Точно так же, как мы из равенства $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ вывели

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) \text{ и } \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right),$$

из последних равенств получим далее:

$$\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right), \left(\frac{d^2p}{dx dy}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right), \left(\frac{d^2p}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right).$$

Точно так же, если положим $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)$, то отсюда следуют равенства

$$\left(\frac{d^2q}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right) \text{ и } \left(\frac{d^2q}{dx dy}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right).$$

Это нечто вроде нового алгоритма, принципы которого очевидны сами по себе и дальнейшей иллюстрации не требуют.

ПРИМЕР 1

225. Пусть $z = xy$. Найти производные второго порядка этой функции.

Поскольку

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = y \text{ и } \left(\frac{dz}{dy}\right) = x,$$

получим

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0; \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = 1 \text{ и } \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0.$$

ПРИМЕР 2

226. Пусть $z = x^m y^n$. Найти производные второго порядка этой функции.

Поскольку

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = mx^{m-1}y^n \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = nx^m y^{n-1},$$

получим

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = m(m-1)x^{m-2}y^n, \quad \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = mnx^{m-1}y^{n-1},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = n(n-1)x^m y^{n-2}.$$

ПРИМЕР 3

227. Пусть $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Найти производные второго порядка этой функции.

Поскольку

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

получим

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \quad \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

228. Точно так же, как производные первого порядка любой функции z так связаны между собой, что

$$dz = dx \left(\frac{dz}{dx}\right) + dy \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

и после интегрирования

$$z = \int \left[dx \left(\frac{dz}{dx}\right) + dy \left(\frac{dz}{dy}\right) \right],$$

точно так же имеем для производных второго порядка

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \int \left[dx \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + dy \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) \right]$$

и

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \int \left[dx \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + dy \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) \right].$$

Значит, три производные второго порядка связаны между собой таким образом, что они дают два интегрируемых выражения¹⁾, если их соответствующим образом скомбинировать с дифференциалами dx и dy . Это свойство отметим особо, поскольку в дальнейшем оно будет весьма полезно.

¹⁾ *geminam integrationem praebeant.*

ЗАДАЧА 39

229. Пусть z — функция двух переменных x и y , а вместо x и y вводятся два новых переменных t и u , так что x и y равны определенным функциям t и u . Найти производные второго порядка функции z относительно новых переменных.

РЕШЕНИЕ

Поскольку z дано в зависимости от x и y , то заданы его производные первого порядка $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, а также производные второго порядка $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, и с помощью этих выражений нужно определить производные относительно новых переменных t и u . Для первого порядка имеем

$$dz = dx \left(\frac{dz}{dx}\right) + dy \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

а так как и x , и y выражены через t и u , то

$$dx = dt \left(\frac{dx}{dt}\right) + du \left(\frac{dx}{du}\right) \quad \text{и} \quad dy = dt \left(\frac{dy}{dt}\right) + du \left(\frac{dy}{du}\right).$$

После подстановки этих значений получим полный дифференциал z при изменении t и u ¹⁾

$$dz = dt \left(\frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{dz}{dx}\right) + du \left(\frac{dx}{du}\right) \left(\frac{dz}{dx}\right) + dt \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{dz}{dy}\right) + du \left(\frac{dy}{du}\right) \left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Меняя соответственно либо только t , либо только u , получим производные первого порядка

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{dz}{dy}\right); \quad \frac{dz}{du} = \left(\frac{dx}{du}\right) \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right) \left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Идя дальше таким же образом, дифференцируем производные

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q$$

сначала в общем виде, а затем заменяя x и y через t и u ; тогда получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{dp}{dt}\right) &= \left(\frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{dp}{dy}\right), & \left(\frac{dp}{du}\right) &= \left(\frac{dx}{du}\right) \left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right) \left(\frac{dp}{dy}\right), \\ \left(\frac{dq}{dt}\right) &= \left(\frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) \left(\frac{dq}{dy}\right), & \left(\frac{dq}{du}\right) &= \left(\frac{dx}{du}\right) \left(\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right) \left(\frac{dq}{dy}\right), \end{aligned}$$

что нам дает возможность найти производные количеств $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ и $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ при изменении одного лишь t и одного лишь u ; поскольку

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = p \left(\frac{dx}{dt}\right) + q \left(\frac{dy}{dt}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{du}\right) = p \left(\frac{dx}{du}\right) + q \left(\frac{dy}{du}\right),$$

¹⁾ differentiale plenum ex variatione utriusque t et u .

найдем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \\ &\quad + 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) &= \left(\frac{d^2x}{dt\,du}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt\,du}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{du^2}\right) &= \left(\frac{d^2x}{du^2}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{d^2y}{du^2}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{dx}{du}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \\ &\quad + 2\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1

230. Итак, если предложено некоторое соотношение между производными функции z , выраженной через t и u , то это соотношение при той же функции z преобразуется к другим двум переменным x и y , зависящим от первых переменных каким угодно образом.

СЛЕДСТВИЕ 2

231. Производные

$$\left(\frac{dx}{dt}\right), \left(\frac{dy}{dt}\right), \left(\frac{dx}{du}\right), \left(\frac{dy}{du}\right) \text{ и т. д.}$$

выражены через t и u , но посредством соотношения, существующего между x , y и t , u , они могут быть выражены также через переменные x и y .

ПОЯСНЕНИЕ

232. В формулах, данных выше, переменность величин t и u выражена посредством производных переменных x и y . Но если, наоборот, заданы переменные t и u , из которых определенным образом получаются другие переменные x и y , то имеют место нижеследующие формулы, получаемые только с помощью перестановки переменных. Для производных первого порядка имеем

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{du}\right); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dz}{du}\right),$$

а для производных второго порядка

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) &= \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) + \left(\frac{dt}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \\ &\quad + 2\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{du^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) &= \left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) + \left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dt\,dy}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{du^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) &= \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) + \left(\frac{dt}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \\ &\quad + 2\left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2z}{du^2}\right). \end{aligned}$$

где буквы t и u нужно рассматривать как определенные через x и y . Таким образом, если в заданных соотношениях фигурируют, как обычно, переменные x и y и вместо них вводятся какие-то другие переменные t и u , то вместо прежних производных вводятся указанные только что выражения в переменных t и u , а соотношение между переменными x , y и t , u надо вводить так, чтобы решение вопроса облегчалось. Дадим примеры для нескольких таких соотношений.

ПРИМЕР 1

233. Пусть между переменными x , y и t , u дано соотношение

$$t = \alpha x + \beta y \quad \text{и} \quad u = \gamma x + \delta y;$$

выполнить преобразование производных.

Поскольку

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = \alpha; \quad \left(\frac{dt}{dy}\right) = \beta; \quad \left(\frac{du}{dx}\right) = \gamma; \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = \delta,$$

соответствующие вторые производные исчезают, находим для производных первого порядка

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \alpha \left(\frac{dz}{dt}\right) + \gamma \left(\frac{dz}{du}\right); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \beta \left(\frac{dz}{dt}\right) + \delta \left(\frac{dz}{du}\right),$$

а для производных второго порядка

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) &= \alpha^2 \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2\alpha\gamma \left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \gamma^2 \left(\frac{d^2z}{du^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) &= \alpha\beta \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + (\alpha\delta + \beta\gamma) \left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \gamma\delta \left(\frac{d^2z}{du^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) &= \beta^2 \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2\beta\delta \left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \delta^2 \left(\frac{d^2z}{du^2}\right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1

234. Если положить $t = x$ и $u = x + y$, то $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ и $\delta = 1$ и, следовательно,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{du}\right); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{du}\right),$$

а также

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) &= \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2 \left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{d^2z}{du^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) &= \left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{d^2z}{du^2}\right), \quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{du^2}\right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

235. Хотя здесь $t = x$, тем не менее [равенство] $\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ не имеет места. Причиной этого обстоятельства является то, что в выражении $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ принимается постоянным количество y , а в $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ — количество $u = x + y$, что надо вообще иметь в виду, чтобы на основании равенства $t = x$ не делать вывода о равенстве выражений $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ и $\left(\frac{dz}{dt}\right)$.

ПРИМЕР 2

236. Пусть между переменными t , u и x , y дано соотношение $t = \alpha x^m$ и $u = \beta y^n$; выполнить преобразование производных.

В данном случае

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = m\alpha x^{m-1}, \quad \left(\frac{dt}{dy}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) = m(m-1)\alpha x^{m-2},$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = n\beta y^{n-1}, \quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = n(n-1)\beta y^{n-2},$$

откуда получим для производных первого порядка

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = m\alpha x^{m-1} \left(\frac{dz}{dt}\right), \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = n\beta y^{n-1} \left(\frac{dz}{du}\right),$$

а для производных второго порядка —

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = m(m-1)\alpha x^{m-2} \left(\frac{dz}{dt}\right) + m^2\alpha^2 x^{2m-2} \frac{d^2z}{dt^2},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = m n \alpha \beta x^{m-1} y^{n-1} \left(\frac{d^2z}{dt du}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = n(n-1)\beta y^{n-2} \left(\frac{dz}{du}\right) + n^2\beta^2 y^{2n-2} \left(\frac{d^2z}{du^2}\right).$$

В этих формулах x и y выразить через t и u .

ПРИМЕР 3

237. Выполнить преобразование производных, если между переменными t , u и x , y дано соотношение $x = t$ и $\frac{x}{y} = u$.

Поскольку $t = x$ и $u = \frac{x}{y}$, то

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = 1, \quad \left(\frac{dt}{dy}\right) = 0.$$

Следовательно, выражения, содержащие d^2t , исчезают. Далее,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{y} = \frac{u}{t}, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{-x}{y^2} = \frac{-u^2}{t}, \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx dy}\right) = \frac{-1}{y^2} = \frac{-u^2}{t^2}, \quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \frac{2x}{y^3} = \frac{2u^3}{t^2},$$

откуда получаем для производных первого порядка

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{u}{t} \left(\frac{dz}{du}\right), \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-u^2}{t} \left(\frac{dz}{du}\right),$$

а для производных второго порядка —

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{2u}{t} \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + \frac{u^2}{t^2} \left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = \frac{-u^2}{t^2} \left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{u^2}{t} \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) - \frac{u^3}{t^2} \left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{2u^3}{t^2} \left(\frac{dz}{du}\right) + \frac{u^4}{t^2} \left(\frac{d^2z}{du^2}\right).$$

ПРИМЕР 4

238. Выполнить преобразование производных, если между переменными t , u и x , y задано соотношение $t = e^x$ и $u = e^x y$, то есть $x = \ln t$ и $y = \frac{u}{t}$.

Итак, здесь

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = e^x = t, \quad \left(\frac{dt}{dy}\right) = 0, \quad \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) = e^x = t, \quad \left(\frac{d^2t}{dx dy}\right) = 0.$$

Далее,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = e^x y = u, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = e^x = t,$$

откуда

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = e^x y = u, \quad \left(\frac{d^2u}{dx dy}\right) = e^x = t, \quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = 0.$$

Таким образом, для производных первого порядка имеем

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = t \left(\frac{dz}{dt}\right) + u \left(\frac{dz}{du}\right); \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = t \left(\frac{dz}{du}\right),$$

а для производных второго порядка —

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = t \left(\frac{dz}{dt}\right) + u \left(\frac{dz}{du}\right) + t^2 \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2tu \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + u^2 \left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = t \left(\frac{dz}{du}\right) + t^2 \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + tu \left(\frac{d^2z}{du^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = t^2 \left(\frac{d^2z}{du^2}\right).$$

ПОЯСНЕНИЕ

239. В общих формулах, данных в § 231, мы считали переменные t и u выраженными через x и y , а также, обратно, x и y выраженными через t и u . Могло бы казаться удобнее выразить с самого начала переменные x и y через t и u , но тогда значения $\left(\frac{dt}{dx}\right)$, $\left(\frac{dt}{dy}\right)$ и т. д. получаются слишком сложными для того, чтобы ввести их в выкладки. В самом деле, если задать x и y через t и u , то получается

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{dy}{du}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right) - \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)},$$

а производные второго порядка приводят к значительно более сложным выражениям. В каждом случае, когда мы будем пользоваться таким преобразованием производных, следует выбирать подходящую замену переменных¹⁾ скорее по догадке, чем при помощи определенных умозаключений. Но можно указать еще другое преобразование, часто приносящее большую пользу, а именно, можно менять самоё функцию z , например, полагая $z = Vv$, где V обозначает заданную функцию x и y , так что v — искомая функция; и эта новая искомая функция v может быть иначе связана с независимыми переменными²⁾.

¹⁾ idoneam variabilium immutationem.

²⁾ quin etiam haec nova quaesita v alio modo cum datis implicari potest.

ЗАДАЧА 40

240. Пусть предложена функция z переменных x и y . Положим $z = Pv$, где P — какая-то заданная функция x и y . Выразить производные функции z через производные функции v .

РЕШЕНИЕ

Поскольку $z = Pv$, то на основании изложенных правил дифференцирования имеем для производных первого порядка

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right)v + P\left(\frac{dv}{dx}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right)v + P\left(\frac{dv}{dy}\right).$$

Отсюда получаем такие выражения для производных второго порядка:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) &= \left(\frac{d^2P}{dx^2}\right)v + 2\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + P\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) &= \left(\frac{d^2P}{dx dy}\right)v + \left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + P\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) &= \left(\frac{d^2P}{dy^2}\right)v + 2\left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) + P\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right). \end{aligned}$$

Поскольку P — известная функция переменных x и y , то ее производные также известны.

СЛЕДСТВИЕ 1

241. Если P — функция одного x , которую обозначим через X , то при $z = Xv$ будет

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{dX}{dx}v + X\left(\frac{dv}{dx}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = X\left(\frac{dv}{dy}\right);$$

а затем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) &= \frac{d^2X}{dx^2}v + \frac{2dX}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + X\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) &= \frac{dX}{dx}\left(\frac{dv}{dy}\right) + X\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) &= X\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

242. Это преобразование сохраняет переменные x и y и только вводит вместо функции z другую функцию v , тогда как прежде мы оставляли неизменной функцию z и заменяли переменные x и y другими переменными t и u . Стало быть, эти два преобразования различны по типу¹⁾.

¹⁾ generi sunt diversae.

ПОЯСНЕНИЕ 1

243. Более простой случай имеем, когда, пользуясь сложением, полагаем $z = P + v$, где P — некоторая заданная функция x и y ; тогда преобразование становится настолько простым, что не требует никакого исследования; действительно, имеем, очевидно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dx}\right) &= \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\right), & \left(\frac{dz}{dy}\right) &= \left(\frac{dP}{dy}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) &= \left(\frac{d^2P}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) &= \left(\frac{d^2P}{dx dy}\right) + \left(\frac{d^2v}{dx dy}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) &= \left(\frac{d^2P}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right). \end{aligned}$$

Не стоит здесь рассматривать более сложные формулы, как, например, $z = \sqrt{P^2 + v^2}$, так как из этих формул вряд ли можно извлечь пользу.

ПОЯСНЕНИЕ 2

244. Предпослав эти принципы и преобразования, мы перейдем к нашему предмету — к изысканию методов для того, чтобы по данному соотношению между производными второго порядка, первого порядка и самими основными количествами найти соотношение между последними. Здесь, следовательно, кроме количеств x , y и z и производных первого порядка $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ и $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, будут встречаться также три производные второго порядка $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)$ и $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$; из них или одна, или две, или все три могут войти в предложенное соотношение, и при этом большая разница, входят ли в уравнение производные первого порядка или нет. Перечисление всех возможных комбинаций, такое, какое мы дали в предыдущем разделе, здесь получилось бы слишком длинным, а кроме того, мешает недостаток подходящих методов; тем не менее, дадим обзор отдельных относящихся сюда вопросов. Поэтому мы изложим соответствующие главы так, чтобы становился ясным метод решения, а те [вопросы], где ничего нельзя предложить, будем целиком опускать ¹⁾.

¹⁾ Non solum autem nimis longum foret omnes combinationes, uti in praecedente sectione fecimus, prosequi, sed etiam defectus idonearum methodorum impedit, quominus singula quaestionum huc pertinentium genera percurramus. Capita igitur pertractanda ita instituamus, prout methodus solvendi patietur, ea, ubi nihil praestare licet, penitus praetermissuri.



ГЛАВА II

О СЛУЧАЕ, КОГДА ОДНА ПРОИЗВОДНАЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА КАК УГОДНО ЗАДАНА ЧЕРЕЗ ДРУГИЕ КОЛИЧЕСТВА¹⁾

ЗАДАЧА 41

245. Пусть z — такая функция переменных x и y , что производная второго порядка $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ равна заданной функции x и y . Найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Пусть P — заданная функция x и y , так что должно быть $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = P$. Примем y за постоянное, и поскольку $d\left(\frac{dz}{dx}\right) = dx\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, будем иметь $d\left(\frac{dz}{dx}\right) = P dx$, откуда, проинтегрировав, получаем

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \int P dx + \text{const.}$$

При вычислении интеграла $\int P dx$ нужно y считать постоянным, и следовательно, постоянная, которую нужно прибавить, обозначает какую угодно функцию y , так что это первое интегрирование дает

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \int P dx + f(y).$$

Рассматривая снова количество y как постоянное, имеем

$$dz = dx\left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{или} \quad dz = dx \int P dx + dx f(y),$$

где $\int P dx$ — функция x и y , причем рассматриваем y как постоянное. Тогда повторное интегрирование дает

$$z = \int dx \int P dx + x f(y) + F(y),$$

¹⁾ То есть приравнено выражению, не содержащему производных второго порядка.

что является полным интегралом предложенного дифференциального уравнения второго порядка $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = P$, так как здесь содержатся две произвольные функции $f(y)$ и $F(y)$, которые обе можно выбрать как угодно, причем не исключаются даже разрывные функции.

СЛЕДСТВИЕ 1

246. Если задать такое условие: $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0$, то полным интегралом будет

$$z = xf(y) + F(y),$$

так как $P = 0$. Правильность этого решения легко проверяется дифференцированием, которое дает сперва $\left(\frac{dz}{dx}\right) = f(y)$, а затем $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2

247. Таким же образом проверяется найденный интеграл и в общем случае — дифференцированием. В самом деле, поскольку мы нашли

$$z = \int dx \int P dx + xf(y) + F(y),$$

первое дифференцирование дает

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \int P dx + f(y),$$

а повторное —

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = P.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

248. Подобным образом, если задано условие $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = Q$, где Q — произвольная функция переменных x и y , полный интеграл находим в виде

$$z = \int dy \int Q dy + yf(x) + F(x),$$

где в двойном интеграле $\int dy \int Q dy$ количество x считается постоянным.

ПОЯСНЕНИЕ

249. Отсюда и в общем случае ясно построение полных интегралов дифференциальных уравнений второго порядка: оно определяется тем, что в них всегда содержатся две произвольные функции, причем опять-таки нужно иметь в виду, что они могут быть как непрерывными, так и разрывными. Если, следовательно, в дальнейшем в данном разделе будут встречаться интегралы, не содержащие двух произвольных функций, их нельзя будет считать полными. Действительно, каждый раз, как некоторая задача приводится к уравнению вида $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = P$, ее характер всегда таков, что, когда переменному x придается определенное значение $x = a$, тогда и производная $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, и само

количество z даны в виде определенных функций переменного y . Если, следовательно, интегралы $\int P dx$ и $\int dx \int P dx$ вычислить так, чтобы они при $x=a$ исчезали, то при том же значении $x=a$ будет

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = f(y) \quad \text{и} \quad z = af(y) + F(y),$$

откуда по условиям задачи определяются обе функции $f(y)$ и $F(y)$. Но так поступить можно только тогда, когда известен полный интеграл; поэтому нужно особенно стремиться к тому, чтобы для всех задач такого рода получить полные интегралы. Я еще раз напоминаю, что везде, где встречается интеграл $\int P dx$, всегда нужно рассматривать как переменное только количество x ; если бы мы рассматривали и количество y как переменное, то выражение $\int P dx$ не имело бы смысла. Подобным образом нужно понимать выражение $\int dx \int P dx$ так, что в обоих интегрированиях только x рассматривается как переменное. Если же встречается выражение $\int dy \int P dx$, то нужно подразумевать, что в интеграле $\int P dx$ только x рассматривается как переменное, а обозначив этот интеграл через R , имеем $\int R dy$, где теперь надо считать переменным только y .

ПРИМЕР 1

250. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{xy}{a},$$

Поскольку здесь $P = \frac{xy}{a}$, получим

$$\int P dx = \frac{x^2y}{2a} \quad \text{и} \quad \int dx \int P dx = \frac{x^3y}{6a},$$

откуда после первого интегрирования получаем

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x^2y}{2a} + f(y).$$

Если положить $x=a$, то производная $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ может быть приравнена любой функции y , то есть ординате любой кривой, построенной над осью абсцисс y . После выполнения второго интегрирования, имеем

$$z = \frac{x^3y}{6a} + xf(y) + F(y),$$

что при $x=a$ может быть снова приравнено любой функции y .

ПРИМЕР 2

251. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Вследствие того, что $P = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, имеем

$$\int P dx = a \sqrt{x^2 + y^2}$$

и

$$\int dx \int P dx = a \int dx \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} ax \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} ay^2 l(x + \sqrt{x^2 + y^2}),$$

так что первое интегрирование дает

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = a \sqrt{x^2 + y^2} + f(y),$$

а второе —

$$z = \frac{1}{2} ax \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} ay^2 l(x + \sqrt{x^2 + y^2}) + xf(y) + F(y).$$

ПРИМЕР 3

252. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$.

Поскольку $P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, будем иметь

$$\int P dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

и далее

$$\int dx \int P dx = x \arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Таким образом, первое интегрирование дает

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} + f(y),$$

а искомая функция есть

$$z = x \arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + xf(y) + F(y).$$

ПРИМЕР 4

253. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = x \sin(x + y)$.

Поскольку

$$P = x \sin(x + y),$$

имеем

$$\begin{aligned} \int P dx &= \int x dx \sin(x + y) = -x \cos(x + y) + \int dx \cos(x + y) = \\ &= -x \cos(x + y) + \sin(x + y). \\ \int x dx \cos(x + y) &= x \sin(x + y) + \cos(x + y), \end{aligned}$$

откуда

$$\int dx \int P dx = -2\cos(x+y) - x \sin(x+y).$$

Таким образом, оба наши интеграла будут

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \sin(x+y) - x \cos(x+y) + f(y)$$

и

$$z = -2\cos(x+y) - x \sin(x+y) + xf(y) + F(y).$$

ЗАДАЧА 42

254. Пусть z должно быть такой функцией переменных x и y , чтобы

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q,$$

где P и Q — какие угодно функции x и y . Найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Положим здесь $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$, так что $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)$; тогда уравнение, подлежащее интегрированию, принимает вид

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = Pv + Q.$$

Рассматриваем как переменное только x ; тогда, поскольку

$$dv = dx\left(\frac{dv}{dx}\right),$$

получим

$$dv = Pv dx + Q dx.$$

После умножения на $e^{-\int P dx}$ и интегрирования получим

$$e^{-\int P dx} v = \int e^{-\int P dx} Q dx + f(y),$$

откуда

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{\int P dx} \int e^{-\int P dx} Q dx + e^{\int P dx} f(y).$$

Снова будем считать только x переменным, а y — постоянным; тогда в силу того, что

$$dz = dx\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

найдем

$$z = \int e^{\int P dx} dx \int e^{-\int P dx} Q dx + f(y) \int e^{\int P dx} dx + F(y).$$

Поскольку эта формула содержит две произвольные функции $f(y)$ и $F(y)$, она является полным интегралом.

СЛЕДСТВИЕ 1

255. Эта задача гораздо шире предыдущей, поскольку предложенное условие содержит также производную первого порядка $\left(\frac{dz}{dx}\right)$. Тем не менее решить ее к счастью удалось.

СЛЕДСТВИЕ 2

256. Здесь требуется четырехкратное интегрирование: сперва нужно найти интеграл $\int P dx$; обозначим его через IR ; далее, нужно найти интеграл

$$\int e^{\int P dx} dx = \int R dx,$$

и, обозначив последний через S , остается найти интеграл

$$\int R dx \int \frac{Q dx}{R} = \int dS \int \frac{Q dx}{R},$$

который может быть приведен к виду

$$S \int \frac{Q dx}{R} - \int \frac{QS dx}{R},$$

так что сверх прочих нужно найти и эти два интеграла.

СЛЕДСТВИЕ 3

257. Точно таким же образом решается задача, если

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P\left(\frac{dz}{dy}\right) + Q,$$

где P и Q — произвольно заданные функции x и y . Действительно, получается

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = e^{\int P dy} \int e^{-\int P dy} Q dy + e^{\int P dy} f(x)$$

и

$$z = \int e^{\int P dy} dy \int e^{-\int P dy} Q dy + f(x) \int e^{\int P dy} dy + F(x).$$

ПРИМЕР 1

258. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{n}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right).$$

Положим $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$ и будем рассматривать только x как переменное; тогда $\frac{dv}{dx} = \frac{nv}{x}$, откуда $\frac{dv}{v} = \frac{n dx}{x}$, а после интегрирования

$$v = \left(\frac{dz}{dx}\right) = x^n f(y).$$

Снова будем считать только x переменным, так что

$$dz = x^n dx f(y).$$

Полный интеграл есть

$$z = \frac{1}{n+1} x^{n+1} f(y) + F(y).$$

В случае $n = -1$, то есть $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{-1}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right)$, будет

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{x} f(y) \quad \text{и} \quad z = \ln x f(y) + F(y).$$

ПРИМЕР 2

259. *Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{n}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{a}{xy}$.*

Положим $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$ и будем рассматривать только x как переменное, тогда

$$dv = \frac{nv dx}{x} + \frac{a dx}{xy},$$

и это уравнение после деления на x^n и интегрирования дает

$$\frac{v}{x^n} = \frac{a}{y} \int \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{-a}{nx^n y} + f(y),$$

то есть

$$v = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-a}{ny} + x^n f(y).$$

Снова рассматривая только x как переменное, имеем

$$dz = \frac{-a dx}{ny} + x^n dx f(y),$$

откуда получается полный интеграл

$$z = \frac{-ax}{ny} + \frac{1}{n+1} x^{n+1} f(y) + F(y).$$

ПРИМЕР 3

260. *Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{2nx}{x^2+y^2} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{x}{ay}$.*

Положим $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$ и будем считать y постоянным. Тогда

$$dv = \frac{2nxv dx}{x^2+y^2} + \frac{x dx}{ay},$$

и это уравнение после деления на $(x^2+y^2)^n$ и интегрирования дает

$$\frac{v}{(x^2+y^2)^n} = \frac{1}{ay} \int \frac{x dx}{(x^2+y^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)ay(x^2+y^2)^{n-1}} + f(y),$$

то есть

$$v = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-(x^2+y^2)}{2(n-1)ay} + (x^2+y^2)^n f(y).$$

Снова рассматривая y как постоянное, получим

$$z = \frac{-x(x^2 + 3y^2)}{6(n-1)ay} + f(y) \int (x^2 + y^2)^n dx + F(y).$$

В случае $n = 1$ или

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{x}{ay}$$

будет

$$\frac{v}{x^2 + y^2} = \frac{1}{ay} \int \frac{x dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2ay} l(x^2 + y^2) + f(y),$$

откуда

$$\left(\frac{z}{dx}\right) = \frac{x^2 + y^2}{2ay} l(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) f(y)$$

и

$$z = \frac{x(x^2 + 3y^2)}{6ay} l(x^2 + y^2) - \frac{1}{9ay} \left(x^3 + 6xy^2 - 6y^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{3} x(x^2 + 3y^2) f(y) + F(y).$$

ЗАДАЧА 43

261. Пусть z должно быть такой функцией двух переменных x и y , чтобы было

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q,$$

где P и Q — произвольно заданные функции всех трех переменных x , y и z . Найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Рассматривая y как постоянное, имеем

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{d^2z}{dx^2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{dz}{dx}.$$

Тогда будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, рассмотренное в предыдущей книге:

$$d^2z = P dx dz + Q dx^2,$$

которое надо считать содержащим только два переменных x и z , поскольку y рассматривается в нем как постоянное. Нужно, следовательно, пытаться интегрировать это уравнение методами, там изложенными; если интегрирование удастся, то нужно вместо двух постоянных, появляющихся вследствие двойного интегрирования, подставить две неопределенные функции переменного y , которые мы обозначим через $f(y)$ и $F(y)$; они могут быть также и разрывными, так что мы получаем полный интеграл предложенного уравнения.

СЛЕДСТВИЕ 1

262. Таким образом, решение этой задачи сведено к методу интегрирования, изложенному в предыдущей книге, где мы определяли функцию одного переменного из заданного дифференциального уравнения второго порядка.

СЛЕДСТВИЕ 2

263. Поскольку здесь мы постулируем, что все уравнения второго порядка, содержащие только два переменных, считаются решенными, то и решение нашей проблемы можно считать выполненным.

СЛЕДСТВИЕ 3

264. Само собой понятно, что таким же образом можно рассматривать уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P\left(\frac{dz}{dy}\right) + Q.$$

Его решение можно, следовательно, считать выполненным, каковы бы ни были функции P и Q переменных x , y и z .

ПОЯСНЕНИЕ 1

265. Из способа решения ясно, что можно решить подобным образом гораздо более широкую задачу: пусть производная $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ зависит каким-либо образом от основных количеств x , y , z и, сверх того, еще от производной $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, причем могут войти степени или какие угодно другие функции величины $\left(\frac{dz}{dx}\right)$. Решение всегда сводится к методам, изложенным в предыдущей книге: если y рассматривать как постоянное, то будет

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{dz}{dx} \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{d^2z}{dx^2},$$

так что получается дифференциальное уравнение второго порядка обычной формы, содержащее только два переменных x и z . Надо иметь в виду только то, что вместо обеих постоянных интегрирования нужно будет писать $f(y)$ и $F(y)$. Итак, мы выполнили значительную часть нашей задачи, а именно, [разобрали] те случаи, когда либо $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ определяется любым образом через x , y , z и $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, либо $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ любым образом определяется через x , y , z и $\left(\frac{dz}{dy}\right)$. В первом случае исключается производная первого порядка $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, во втором — $\left(\frac{dz}{dx}\right)$. Если это не так, то вопрос не может быть решен изложенным методом; это можно видеть хотя бы в простейшем случае $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, решение которого приходится считать очень трудным.

ПОЯСНЕНИЕ 2

266. Поскольку я таким образом из трех производных второго порядка $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ рассматривал до сих пор только первую и третью, когда они определяются через другие количества и вопрос может быть решен применением указанного здесь метода,

остается рассмотреть вторую из этих производных $\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)$ и исследовать, для каких случаев ее задания через другие количества x , y , z , $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ может быть решена задача. В этом деле целесообразно начать с простейших случаев.

ЗАДАЧА 44

267. Пусть z должно быть такой функцией переменных x и y , чтобы было $\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = P$, где P — произвольная заданная функция переменных x и y . Найти общий вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Положим $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$, так что $\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = \left(\frac{dv}{dy}\right)$, откуда $\left(\frac{dv}{dy}\right) = P$. Рассматриваем теперь количество x как постоянное, так что P будет содержать только одно переменное y . Тогда $dv = P dy$, откуда путем интегрирования в предположении постоянства x получается

$$v = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \int P dy + f'(x),$$

где $\int P dy$ — заданная функция x и y . Будем считать теперь x переменным, а y постоянным, так что перейдем к дифференциальному уравнению

$$dz = dx \int P dy + dx f'(x),$$

которое после интегрирования дает

$$z = \int dx \int P dy + f(x) + F(y).$$

Поскольку здесь содержатся две произвольные функции, это указывает на то, что данный интеграл является полным.

СЛЕДСТВИЕ 1

268. Если бы мы в обратном порядке рассматривали как постоянное сначала y , а затем уже x , мы получили бы

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \int P dx + f'(y) \quad \text{и} \quad z = \int dy \int P dx + f(y) + F(x),$$

и это решение подходит так же как и предыдущее.

СЛЕДСТВИЕ 2

269. Легко видеть, что или

$$\int dx \int P dy = \int dy \int P dx,$$

или разность этих выражений есть сумма функции только от x и функ-

ции только от y . Это видно также из того, что если положить

$$\int dx \int P dy = \int dy \int P dx = V,$$

то так или иначе будет

$$P = \left(\frac{d^2V}{dx dy} \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3

270. Если $P=0$, то есть если должно быть $\left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) = 0$, то общим видом функции z будет

$$z = f(x) + F(y).$$

ПОЯСНЕНИЕ

271. Этот случай встречается часто в теории объемов, а именно, когда природа поверхности выражается уравнением между тремя координатами x , y и u ; тогда объем будет $\int dx \int u dy$, так что если объем обозначить через z , будет $\left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) = u$; здесь подразумевается, что ординаты перпендикулярны к осям x и y . Если положить

$$du = p dx + q dy,$$

то поверхность этого тела будет

$$\int dx \int dy \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

или если поверхность обозначить буквой z , то будет

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Если, следовательно, в нашей задаче требуется найти такую функцию z от x и y , чтобы было $\left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) = P$, то это то же самое, что искать объем, соответствующий поверхности, природа которой выражается уравнением между координатами x , y и P . Проиллюстрируем этот вопрос несколькими примерами.

ПРИМЕР 1

272. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было $\left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) = \alpha x + \beta y$.

Поскольку здесь $P = \alpha x + \beta y$, то будет

$$\int P dy = \alpha xy + \frac{1}{2} \beta y^2$$

и

$$\int dx \int P dy = \frac{1}{2} \alpha x^2 y + \frac{1}{2} \beta xy^2 = \frac{1}{2} xy (\alpha x + \beta y),$$

откуда искомая функция z получается в виде

$$z = \frac{1}{2} xy (\alpha x + \beta y) + f(x) + F(y).$$

ПРИМЕР 2

273. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Здесь

$$P = \sqrt{a^2 - y^2},$$

так что

$$\int P dx = x \sqrt{a^2 - y^2},$$

где я начал интегрировать при переменном x . Далее имеем

$$\int dy \int P dx = x \int dy \sqrt{a^2 - y^2} = \frac{1}{2} xy \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{1}{2} a^2 x \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

откуда находим полный интеграл

$$z = \frac{1}{2} xy \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{1}{2} a^2 x \arcsin \frac{y}{a} + f(x) + F(y).$$

ПРИМЕР 3

274. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы была

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Поскольку

$$P = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

то

$$\int P dy = a \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

откуда

$$\int dx \int P dy = a \int dx \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Положим ради краткости

$$\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \varphi;$$

тогда

$$\int dx \int P dy = a \int \varphi dx = ax\varphi - a \int x dx \frac{d\varphi}{dx},$$

где при интегрировании y считается постоянным. Но поскольку

$$\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin \varphi,$$

то будет

$$\frac{yx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) \cos \varphi.$$

Но

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

откуда

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right) = \frac{yx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

и

$$\int x dx \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) = y \int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

так что после интегрирования получаем

$$z = ax \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} - ay \int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + f(x) + F(y).$$

В результате вычисления интеграла это выражение принимает вид

$$z = ax \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} + ay \arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} - a^2 \arcsin \frac{xy}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)}} + f(x) + F(y).$$

В самом деле, интеграл

$$\int \frac{a^2 dx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

весьма легко вычисляется следующим образом. Положим

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = p,$$

тогда

$$x^2 = \frac{p^2(a^2 - y^2)}{1 + p^2},$$

и логарифмическое дифференцирование при постоянном y дает

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p} - \frac{p dp}{1 + p^2} = \frac{dp}{p(1 + p^2)},$$

откуда, если умножить на $\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = p$,

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{dp}{1 + p^2}.$$

Далее

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2 + p^2 y^2}{1 + p^2},$$

откуда получается интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{a^2 dx}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} &= \int \frac{a^2 dp}{a^2 + p^2 y^2} = \frac{a^2}{y^2} \int \frac{dp}{\frac{a^2}{y^2} + p^2} = \\ &= \frac{a}{y} \operatorname{arctg} \frac{py}{y} = \frac{a}{y} \operatorname{arctg} \frac{xy}{a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{y} \arcsin \frac{xy}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)}}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 45

275. Пусть z — такая функция двух переменных x и y , что

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q,$$

где P и Q — какие угодно функции x и y . Найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Положим $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$; тогда получается уравнение

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = Pv + Q,$$

содержащее количества x , y и v . Рассмотрим сперва x как постоянное, тогда

$$dv = Pv dy + Q dy,$$

и после умножения на $e^{-\int P dy}$ получается

$$e^{-\int P dy} v = \int e^{-\int P dy} Q dy + f'(x),$$

откуда

$$v = \left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{\int P dy} \int e^{-\int P dy} Q dy + e^{\int P dy} f'(x).$$

Поскольку эти интегралы содержат x и y , будем рассматривать теперь y как постоянное, и следующее интегрирование дает

$$z = \int e^{\int P dy} dx \int e^{-\int P dy} Q dy + \int e^{\int P dy} dx f'(x) + F(y),$$

и ясно, как надо взять интегралы в каждом случае.

СЛЕДСТВИЕ 1

276. При решении этой проблемы нужно сперва найти такое R , что $\int P dy = lR$, затем определяется S по формуле $\int \frac{Q dy}{R} = S$. Наконец, найдем $\int RS dx = T$; в первых двух интегралах только y рассматривается как переменное, а в последнем — только x . Выполнив эти операции, имеем полный интеграл

$$z = T + \int R dx f'(x) + F(y).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

277. Итак, здесь в выражении интеграла содержится произвольная функция $f(x)$, которая может рассматриваться как ордината, соответствующая абсциссе x для точек какой-нибудь кривой. Интеграл $\int R dx f'(x)$ должен быть вычислен отдельно для любого значения y , так как при этом интегрировании количество y должно рассматриваться как постоянное.

ПОЯСНЕНИЕ

278. Точно так же решается задача, получаемая путем перестановки переменных x и y , т. е. задача, в которой ищется функция z такая, чтобы было

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = P\left(\frac{dz}{dy}\right) + Q,$$

где P и Q — функции только от x и y , не содержащие z . А именно, решение имеет вид

$$z = \int e^{\int P dx} dy \int e^{-\int P dx} Q dx + \int e^{\int P dx} dy f'(y) + F(x).$$

Обе эти задачи можно расширить. Решение возможно и тогда, когда в первом случае $\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)$ равняется произвольной функции трех количеств x , y и $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, а во втором случае тогда, когда $\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)$ равняется произвольной функции трех количеств x , y и $\frac{dz}{dy}$; действительно, в обоих случаях дело сводится к дифференциальному уравнению первого порядка. Но если как тут, так и там встречаются обе производные первого порядка $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ и $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, тогда данный метод не приводит к цели; то же относится к случаю, когда функции P и Q содержат также количество z .

ПРИМЕР 1

279. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = \frac{n}{y} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x}.$$

Пусть

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = v,$$

тогда

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{nv}{y} + \frac{m}{x},$$

откуда при x постоянном

$$dv = \frac{nv dy}{y} + \frac{m dy}{x}.$$

что после деления на y^n и интегрирования дает

$$\frac{v}{y^n} = \frac{m}{x} \int \frac{dy}{y^n} = -\frac{m}{(n-1)xy^{n-1}} + f'(x),$$

так что

$$v = \left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{my}{(n-1)x} + y^n f'(x).$$

Полагаем теперь y постоянным и интегрируем снова. Тогда получим

$$z = -\frac{m}{(n-1)} ylx + y^n f(x) + F(y).$$

ПРИМЕР 2

280. Ищется такая функция z двух переменных x и y , чтобы было

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = \frac{y}{x^2 + y^2} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{a}{x^2 + y^2}.$$

Положим $\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$ и рассматриваем x как постоянное. Тогда

$$dv = \frac{vy dy}{x^2 + y^2} + \frac{a dy}{x^2 + y^2},$$

что после деления на $\sqrt{x^2 + y^2}$ дает

$$\frac{v}{\sqrt{x^2 + y^2}} = a \int \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{ay}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} + f(x).$$

Следовательно,

$$v = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{ay}{x^2} + \sqrt{x^2 + y^2} f(x).$$

Пусть теперь постоянным будет y . Получим

$$z = -\frac{ay}{x} + \int f(x) dx \sqrt{x^2 + y^2} + F(y),$$

где интеграл

$$\int f(x) dx \sqrt{x^2 + y^2}$$

в связи с тем, что он содержит неопределенную функцию $f(x)$, и при постоянном y нельзя представить в общем случае так, чтобы он был явно выражен через y и функции x .

ПОЯСНЕНИЕ

281. Когда в уравнение входит производная второго порядка $\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)$, то решение не удастся в таком большом числе случаев, как тогда, когда в уравнение входит либо $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, либо $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$. В последних двух случаях решение удастся и тогда, когда в уравнение входит само количество z , а здесь дело обстоит иначе, так как наш метод не дает возможности решить уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q,$$

когда буквы P и Q содержат количество z ; то же самое относится к случаю, когда, кроме одной производной первого порядка $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, входит еще вторая $\left(\frac{dz}{dy}\right)$. Тем не менее, имеются случаи, когда можно получить частные решения, притом бесконечно много, так что, по-видимому, вместе взятые они эквивалентны общему решению. И хотя в большинстве случаев они приносят мало пользы в практическом приложении, все же полезно знать виды таких решений.

ЗАДАЧА 46

282. Пусть z — такая функция двух переменных x и y , что

$$\left(\frac{d^2z}{dx \cdot dy}\right) = az.$$

Найти вид функции z , по крайней мере, в частных случаях.

РЕШЕНИЕ

Поскольку количество z встречается везде в первой степени, очевидно, что если положить $z = e^{ay}q$, то показательное количество e^{ay} сократится. Итак, положим $z = e^{ax}Y$, причем Y — функция, содержащая только y . Таким образом,

$$\left(\frac{d}{dx}\right) = ae^{ax}Y \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2z}{dx \cdot dy}\right) = ae^{ax} \left(\frac{dY}{dy}\right) = ae^{ax}Y,$$

откуда

$$\frac{a \, dY}{Y} = a \, dy \quad \text{и} \quad Y = e^{\frac{ay}{a}}.$$

Итак, мы уже имеем частное решение

$$z = Ae^{ax + \frac{ay}{a}},$$

которое, однако, является довольно широким, поскольку и A , и a могут быть взяты произвольно. Если взять несколько частных решений z , то их сумма также будет решением, и мы приходим к гораздо более общему выражению

$$z = Ae^{ax + \frac{a}{\alpha}y} + Be^{\beta x + \frac{a}{\beta}y} + Ce^{\gamma x + \frac{a}{\gamma}y} + De^{\delta x + \frac{a}{\delta}y} + \text{и т. д.},$$

где как A, B, C и т. д., так и α, β, γ и т. д. могут принимать какие угодно значения. Поэтому такое решение надо считать в высшей степени универсальным, и в отношении общности оно, по видимому, не уступает вышеприведенным решениям, содержащим две произвольные функции, ибо здесь имеются два ряда произвольных коэффициентов. Однако все же неясно, каким образом можно таким путем представить разрывные функции¹⁾.

СЛЕДСТВИЕ 1

283. Итак, чтобы найти частное решение, мы должны взять два числа m и n такие, чтобы их произведение было $mn = a$; тогда $z = Ae^{mx+ny}$. А переставив эти же числа, получим еще [другое решение] $z = Ae^{nx+my}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

284. При помощи такой пары чисел m и n , что $mn = a$, можно дать также решения, выраженные через синус и косинус, а именно:

$$z = B \sin(mx - ny), \quad \text{или} \quad z = B \cos(mx - ny),$$

или же путем перестановки

$$z = B \sin(nx - my), \quad \text{или} \quad z = B \cos(nx - my).$$

¹⁾ О определении «разрывных функций» см. выше, § 37.

СЛЕДСТВИЕ 3

285. Поскольку можно найти бесконечно много таких решений, то, умножив каждое из них на любые постоянные и собрав их в одну сумму, получим общее решение задачи.

ПОЯСНЕНИЕ

286. Все же нельзя рассматривать это решение, хотя оно и охватывает бесконечное число бесконечно многих частных решений, как эквивалентное тем решениям, которые содержат две произвольные функции, потому что неясно, каким образом надо выбрать отдельные буквы, чтобы в том или ином случае, например при $y = 0$, количество z или $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ или $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ равнялись заданным функциям x , каковы бы ни были эти функции. Но общее решение всегда должно давать возможность определить две такие функции¹⁾. Однако, когда не удастся получить такое решение, приходится удовлетворяться такими, какие мы только что нашли. Можно получить подобным же способом такие решения, если дано такое уравнение:

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + Rz = 0,$$

если только P, Q, R обозначают функции одного лишь x . Действительно, положим $z = e^{\alpha y} X$, где X — функция одного x . Тогда, вследствие того, что

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{\alpha y} \frac{dX}{dx} \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \alpha e^{\alpha y} X,$$

будем иметь

$$\alpha \frac{dX}{dx} + \frac{P dX}{dx} + \alpha QX + RX = 0,$$

откуда находим, что

$$\frac{dX}{X} = -\frac{dx(\alpha Q + R)}{\alpha + P},$$

так что при любом числе α можно найти подходящее значение X . Таким образом, взяв бесконечно много чисел α , получим следующее выражение, принимающее бесконечность бесконечностей значений²⁾:

$$z = Ae^{\alpha y} X + Be^{\beta y} X' + Ce^{\gamma y} X'' + \text{и т. д.}$$

Но имеются и такие случаи подобных уравнений, которые допускают полное решение в подлинном смысле слова, и мы займемся их определением в следующей задаче.

ЗАДАЧА 47

287. Подлежит решению уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + Rz + S = 0.$$

¹⁾ Semper autem solutio generalis duplilis huiusmodi determinationis capax esse debet.

²⁾ Quare sumendis infinitis numeris α , hoc modo expressio infinities infinitas determinaciones recipiens colligitur.

Установить, какими функциями от x и y должны быть количества P , Q , R и S , чтобы это уравнение допускало действительно полное решение.

РЕШЕНИЕ

Пусть V — произвольная функция x и y , и положим $z = e^V v$, так что v — теперь неизвестное количество, значение которого требуется найти. Поскольку

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^V \left[\left(\frac{dv}{dx}\right) + v \left(\frac{dV}{dx}\right) \right], \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = e^V \left[\left(\frac{dv}{dy}\right) + v \left(\frac{dV}{dy}\right) \right],$$

то после подстановки и разделения всего уравнения на e^V , получается следующее уравнение:

$$\left. \begin{aligned} e^{-V}S + \left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right)v \\ + P\left(\frac{dv}{dx}\right) + Q\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{d^2V}{dx dy}\right)v \\ + P\left(\frac{dV}{dx}\right)v \\ + Q\left(\frac{dV}{dy}\right)v \\ + Rv \end{aligned} \right\} = 0.$$

Теперь нужно добиться того, чтобы это уравнение допускало полное решение. Но, как мы видели раньше, такое уравнение, как

$$\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) + T\left(\frac{dv}{dx}\right) + e^{-V}S = 0$$

может быть решено в общем виде, какие бы функции от x и y не представляли собою S , T и V . Поэтому предыдущее уравнение мы будем приводить к этому. Итак, необходимо принять

$$P + \left(\frac{dV}{dy}\right) = T, \quad Q + \left(\frac{dV}{dx}\right) = 0$$

и

$$R + Q\left(\frac{dV}{dy}\right) + P\left(\frac{dV}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) + \left(\frac{d^2V}{dx dy}\right) = 0,$$

откуда получим

$$P = T - \left(\frac{dV}{dy}\right), \quad Q = -\left(\frac{dV}{dx}\right)$$

и

$$R = \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - T\left(\frac{dV}{dx}\right) - \left(\frac{d^2V}{dx dy}\right).$$

Поскольку на основании § 275 имеем

$$v = - \int e^{-\int T dy} dy \int e^{\int T dy - V} S dy + \int e^{-\int T dy} dx f(x) + F(y),$$

то полный интеграл предложенного уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + Rz + S = 0$$

в случае, когда P , Q , R имеют вышеуказанные значения, равен

$$z = -e^V \int e^{-\int T dy} dx \int e^{\int T dy - V} S dy + e^V \int e^{-\int T dy} dx f(x) + e^V F(y),$$

так как $f(x)$ и $F(y)$ означают здесь какие угодно функции x и y .

СЛЕДСТВИЕ 1

288. Итак, какие бы ни взять функции x и y в качестве T и V , всегда при этом получаются подходящие значения для P , Q , R , так что уравнение допускает полное решение, а функция S остается в нашем произволе.

СЛЕДСТВИЕ 2

289. Можно в предложенном уравнении оставлять неопределенными функции P и Q ; тогда должно быть

$$V = -\int Q dx \quad \text{и} \quad \left(\frac{dV}{dy}\right) = -\int dx \left(\frac{dQ}{dy}\right),$$

а также

$$\left(\frac{d^2V}{dx dy}\right) = -\left(\frac{dQ}{dy}\right);$$

при этом надо только определять количество R так, чтобы было

$$R - PQ - \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0,$$

то есть

$$R = PQ + \left(\frac{dQ}{dy}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3

290. Так как здесь вместо $\int Q dx$ можно писать также $\int Q dx + Y$, где Y — произвольная функция y , то, поскольку $V = -\int Q dx - Y$, можно найти полный интеграл такого уравнения:

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + P \left(\frac{dz}{dx}\right) + Q \left(\frac{dz}{dy}\right) + \left[PQ + \left(\frac{dQ}{dy}\right)\right] z + S = 0.$$

Этот интеграл есть

$$z = e^{-\int Q dx - Y} v,$$

где v [решение дифференциального уравнения]

$$\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) + \left[P - \int dx \left(\frac{dQ}{dy}\right) - \frac{dY}{dy}\right] \left(\frac{dv}{dx}\right) + e^{-V} S = 0.$$

Здесь

$$T = P - \int dx \left(\frac{dQ}{dy}\right) - \frac{dY}{dy},$$

поэтому

$$\int T dy = \int P dy - \int Q dx - Y.$$

и отсюда легко найти значение v .

ПОЯСНЕНИЕ

291. В этих выкладках, когда требуется образовать производные интегралов по переменному, отличному от того, по которому интегрируем, нужно придерживаться того правила, что, если $V = \int Q dx$, должно быть $\left(\frac{dV}{dy}\right) = \int dx \left(\frac{dQ}{dy}\right)$. Ибо, поскольку $\left(\frac{dV}{dx}\right) = Q$, будет $\left(\frac{d^2V}{dx dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$. Обозначим теперь $\left(\frac{dV}{dy}\right) = S$; тогда $\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dy}\right)$, и

$$S = \left(\frac{dV}{dy}\right) = \int dx \left(\frac{dQ}{dy}\right),$$

откуда в свою очередь следует, так как $\int S dy = V$, что $\int S dy = \int Q dx$. Поскольку все это само собой понятно на основании вышеустановленных принципов, нет нужды особо излагать правила для этого в некотором отношении нового алгоритма. Но мы покажем на нескольких примерах, какие уравнения могут быть полностью решены этим методом.

ПРИМЕР 1

292. Предложено дифференциальное уравнение второго порядка

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + a \left(\frac{dz}{dx}\right) + b \left(\frac{dz}{dy}\right) + Rz + S = 0.$$

Найти, при каком виде функции R это уравнение допускает решение, когда S — какая угодно функция x и y .

Поскольку $P = a$ и $Q = b$, то $R = ab$ и $V = -bx$; функцию Y можно без ущерба опустить, так как при последующей интеграции будут введены две произвольные функции, так что $T = a$. Поэтому, полагая $z = e^{-bx}v$, получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) + a \left(\frac{dv}{dx}\right) + e^{bx}S = 0$$

и по подстановке $\frac{dv}{dx} = u$ получим $\left(\frac{du}{dy}\right) + au + e^{bx}S = 0$. Интегрируя при постоянном x , получаем

$$e^{ay}u = - \int e^{ay+bx}S dy + f'(x),$$

откуда

$$u = \left(\frac{dv}{dx}\right) = -e^{-ay} \int e^{ay+bx}S dy + e^{-ay}f'(x).$$

Теперь, интегрируя уже при постоянном y , находим

$$v = -e^{-ay} \int dx \int e^{ay+bx}S dy + e^{-ay}f(x) + F(y),$$

где

$$\int dx f'(x) = f(x).$$

Если, наконец, еще вместо $e^{-bx}f(x)$ писать $f(x)$, то

$$z = -e^{-ay-bx} \int dx \int e^{ay+bx}S dy + e^{-ay}f(x) + e^{-bx}F(y).$$

ДРУГОЙ СПОСОБ

Если бы мы взяли $V = -bx - ay$, мы получили бы $T = a - a = 0$; отсюда, полагая $z = e^{-bx-ay}v$, мы получили бы для количества v уравнение

$$\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) + e^{bx+ay}S = 0,$$

которое дает

$$\begin{aligned}\left(\frac{dv}{dx}\right) &= -\int e^{bx+ay}S dy + f'(x), \\ v &= -\int dx \int e^{bx+ay}S dy + f(x) + F(y)\end{aligned}$$

и

$$z = e^{-bx-ay} \left(-\int dx \int e^{bx+ay}S dy + f(x) + F(y) \right).$$

Эта форма [решения] проще предыдущей, но сводится к тому же и представляет полный интеграл уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) + abz + S = 0.$$

ПРИМЕР 2

293. Предложено дифференциальное уравнение второго порядка

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + \frac{a}{y}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dy}\right) + Rz + S = 0.$$

Определить, каков должен быть вид функции R , чтобы это уравнение допускало решение, причем S — произвольная функция x и y .

Поскольку $P = \frac{a}{y}$ и $Q = \frac{b}{x}$, имеем $V = -blx - Y$, откуда $R = \frac{ab}{xy}$, и интегрируемое уравнение будет вида

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + \frac{a}{y}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{ab}{xy}z + S = 0.$$

Поскольку

$$T = P + \left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{a}{y} - \frac{dY}{dy},$$

возьмем $Y = aly$, чтобы было $T = 0$. Тогда, полагая

$$z = e^{-blx-aly}v = x^{-b}y^{-a}v,$$

получим для количества v уравнение

$$\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) + x^b y^a S = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = -x^b \int y^a S dy + f'(x)$$

и

$$v = - \int x^b dx \int y^a S dy + f(x) + F(y),$$

так что

$$z = \frac{- \int x^b dx \int y^a S dy + f(x) + F(y)}{x^b y^a}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

294. Таким образом, ясно, что изложенным методом можно интегрировать в общем виде уравнение

$$\left(\frac{d^2 z}{dx dy} \right) + P \left(\frac{dz}{dx} \right) + Q \left(\frac{dz}{dy} \right) + \left[PQ + \left(\frac{dQ}{dy} \right) \right] z + S = 0,$$

где P , Q и S могут быть любыми функциями x и y . Решение при этом таково: положив $z = e^{-\int Q dx - Y} v$, определяем количество v из уравнения

$$\left(\frac{d^2 v}{dx dy} \right) + \left[P - \int dx \left(\frac{dQ}{dy} \right) - \left(\frac{dY}{dy} \right) \right] \left(\frac{dv}{dx} \right) + e^{\int Q dx + Y} S = 0.$$

При этом для Y надо взять такую функцию от y , чтобы это уравнение становилось возможно проще. Оно оказывается особенно простым, когда удастся свести выражение

$$P - \int dx \left(\frac{dQ}{dy} \right) - \left(\frac{dY}{dy} \right)$$

к нулю. В общем же случае получаем

$$v = - \int e^{-\int P dy + \int Q dx + Y} dx \int e^{\int P dy} S dy + \int e^{-\int P dy + \int Q dx + Y} dx f(x) + F(y),$$

что после умножения на $e^{-\int Q dx - Y}$ дает функцию z . Таким образом, функция Y , зависящая от нашего произвола, полностью выпадает, и мы получим

$$z = - e^{-\int Q dx} \int e^{-\int P dy + \int Q dx} dx \int e^{\int P dy} S dy + \\ + e^{-\int Q dx} \int e^{-\int P dy + \int Q dx} dx f(x) + e^{-\int Q dx} F(y).$$

Это и есть полный интеграл уравнения

$$\left(\frac{d^2 z}{dx dy} \right) + P \left(\frac{dz}{dx} \right) + Q \left(\frac{dz}{dy} \right) + \left[PQ + \left(\frac{dQ}{dy} \right) \right] z + S = 0.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

295. Путем перестановки переменных x и y можно полностью интегрировать и следующее уравнение:

$$\left(\frac{d^2 z}{dx dy} \right) + P \left(\frac{dz}{dx} \right) + Q \left(\frac{dz}{dy} \right) + \left[PQ + \left(\frac{dP}{dx} \right) \right] z + S = 0,$$

интеграл которого равен

$$z = -e^{-\int P dy} \int e^{-\int Q dx + \int P dy} dy \int e^{\int Q dx} S dx + \\ + e^{-\int P dy} \int e^{-\int Q dx + \int P dy} dy f(y) + e^{-\int P dy} F(x).$$

Здесь следует особо отметить случай, содержащийся в обеих формах, когда $P = Y$ и $Q = X$, где X — функция одного x и Y — функция одного y ; тогда получается уравнение

$$\left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right) + Y\left(\frac{dz}{dx}\right) + X\left(\frac{dz}{dy}\right) + XYZ + S = 0,$$

полный интеграл которого есть

$$z = -e^{-\int X dx - \int Y dy} \int e^{\int X dx} dx \int e^{\int Y dy} S dy + e^{-\int X dx - \int Y dy} [f(x) + F(y)]$$

и который можно выразить еще и так:

$$e^{\int X dx + \int Y dy} z = f(x) + F(y) - \int e^{\int X dx} dx \int e^{\int Y dy} S dy,$$

или так:

$$e^{\int X dx + \int Y dy} z = f(x) + F(y) - \int e^{\int Y dy} dy \int e^{\int X dx} S dx.$$



ГЛАВА III

О СЛУЧАЕ, КОГДА ДВЕ ИЛИ ВСЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ ЧЕРЕЗ ДРУГИЕ КОЛИЧЕСТВА

ЗАДАЧА 48

296. Пусть z должно быть такой функцией x и y , чтобы было

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right).$$

Определить вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Вводятся два новых переменных t и u так, что $t = \alpha x + \beta y$ и $u = \gamma x + \delta y$. Тогда согласно § 233 все производные преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{dx}\right) &= \alpha \left(\frac{dz}{dt}\right) + \gamma \left(\frac{dz}{du}\right), & \left(\frac{dz}{dy}\right) &= \beta \left(\frac{dz}{dt}\right) + \delta \left(\frac{dz}{du}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) &= \alpha^2 \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2\alpha\gamma \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + \gamma^2 \left(\frac{d^2z}{du^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) &= \alpha\beta \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + (\alpha\delta + \beta\gamma) \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + \gamma\delta \left(\frac{d^2z}{du^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) &= \beta^2 \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2\beta\delta \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + \delta^2 \left(\frac{d^2z}{du^2}\right),\end{aligned}$$

вследствие чего наше уравнение преобразуется в такое:

$$(\beta^2 - \alpha^2 a^2) \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2(\beta\delta - \alpha\gamma a^2) \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + (\delta^2 - \gamma^2 a^2) \left(\frac{d^2z}{du^2}\right) = 0.$$

Поэтому положим

$$\beta^2 = \alpha^2 a^2 \quad \text{и} \quad \delta^2 = \gamma^2 a^2$$

или

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 1; \quad \beta = a \quad \text{и} \quad \delta = -a.$$

Тогда первый и последний члены исчезают. Это было достигнуто при помощи подстановки

$$t = x + ay \quad \text{и} \quad u = x - ay,$$

что дает

$$-2(a^2 + a^2) \left(\frac{d^2z}{dt du} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{d^2z}{dt du} \right) = 0,$$

откуда согласно § 270 получается полный интеграл

$$z = f(t) + F(u),$$

и после подстановки значений t и u

$$z = f(x + ay) + F(x - ay),$$

что, очевидно, удовлетворяет заданному уравнению, поскольку

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = f'(x + ay) + F'(x - ay),$$

$$\left(\frac{dz}{dy} \right) = af'(x + ay) - aF'(x - ay),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) = f''(x + ay) + F''(x - ay),$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2} \right) = a^2 f''(x + ay) + a^2 F''(x - ay).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

297. Значение z равняется, следовательно, сумме двух произвольных функций, из которых одна функция от $x + ay$, а вторая — от $x - ay$. Обе эти функции могут быть взяты произвольно, в частности, они могут быть также разрывными.

СЛЕДСТВИЕ 2

298. Таким образом, для наших целей можно пользоваться двумя кривыми, произвольно проведенными от руки. Если для одной из кривых принять абсциссу равной $x + ay$, а для другой кривой абсцисса равна $x - ay$, то сумма ординат дает нам подходящее значение для z .

ПОЯСНЕНИЕ 1

299. Это было едва ли не первой задачей, которую потребовалось решить в этой новой отрасли анализа: решение общей проблемы о колеблющихся струнах привело как раз к тому уравнению, которое мы здесь рассмотрели. Знаменитый Даламбер, который первый успешно приступил к этой задаче, проинтегрировал это уравнение с помощью особого метода. Именно, поскольку должно быть $\left(\frac{d^2z}{dy^2} \right) = a^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right)$, положим $dz = p dx + q dy$, $dp = r dx + s dy$ и $dq = s dx + t dy$. Тогда это уравнение требует, чтобы было $t = a^2 r$. Рассмотрим теперь уравнения

$$dp = r dx + s dy,$$

$$dq = s dx + a^2 r dy.$$

Скомбинировав их, получаем

$$a dp + dq = ar(dx + a dy) + s(a dy + dx),$$

то есть

$$a dp + dq = (ar + s)(dx + a dy).$$

Отсюда ясно, что $ar + s$ должно быть функцией $x + ay$ и, следовательно, $ar + q$ тоже является такой функцией. Но так как a можно взять как положительным, так и отрицательным, получаются следующие два уравнения:

$$ar + q = 2af'(x + ay) \quad \text{и} \quad q - ar = 2aF'(x - ay),$$

откуда следует, что

$$q = af'(x + ay) + aF'(x - ay)$$

и

$$p = f'(x + ay) - F'(x - ay).$$

Но тогда уравнение $dz = p dx + q dy$ немедленно интегрируется и получается

$$z = f(x + ay) - F(x - ay).$$

Таким образом, этот проницательнейший муж получил полный интеграл¹⁾, но он не обратил внимания на то, что в качестве введенных им функций можно брать не только любые непрерывные функции, но также функции, совершенно лишенные непрерывности²⁾.

ПОЯСНЕНИЕ 2

300. Поскольку весьма важно воспользоваться в этой новой отрасли анализа возможно бóльшим количеством различных методов, то другие авторы пытались решить наше уравнение так, что, полагали $\left(\frac{dz}{dy}\right) = k\left(\frac{dz}{dx}\right)$, откуда, во-первых, $\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = k\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, а, во-вторых, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = k\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)$, так что $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = k^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$. Очевидно, в нашем

¹⁾ Даламбер дал решение рассмотренного здесь уравнения для случая $a=1$ в статье «Исследование кривой, образуемой натянутой колеблющейся струной» (Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration), Mém. de l'acad. d. Sc. de Berlin (1747), 1749, стр. 214. Затем Эйлер, рассматривая вид этого решения, обратил внимание на то, что по характеру задачи о колебаниях струны требуется допустить в качестве произвольных функций, входящих в решение, не только функции непрерывные, то есть определенные с помощью аналитических операций (§ 301), но и функции разные, то есть такие, которые можно изобразить произвольно проведенной кривой (§ 37). См. его статью (№ 119 по списку Энестрема) «Исследование колебания струн» (De vibratione chordarum exereitatio), Nova acta erud., 1749, стр. 512, — во французском переводе Sur la vibration des cordes, Mém. de l'acad. d. Sc. de Berlin (1748), 1750, стр. 69, также в Opera Omnia, Ser. II, vol. 8. Так как Даламбер не хотел с этим согласиться, а постоянно утверждал, что эти функции должны быть определены аналитическими выражениями, возник спор, на что Эйлер указывает в § 37 этого тома. Позже этот спор возобновился в связи с тем, что Даниил Бернулли дал совершенно новое решение, составленное из бесконечного числа частных решений в виде синусов и косинусов кратных углов. Подобного рода вопросы часто и подолгу рассматривались математиками XVIII века, но решение их было получено только в следующем столетии, а именно в общей теории тригонометрических рядов, идущей от Фурье. [Ф. Э.]

²⁾ Конечно, в смысле Эйлера — см. выше, § 37.

случае нужно положить $k^2 = a^2$, то есть $k = \pm a$. Пусть, например, $k = a$, тогда в силу того, что $\left(\frac{dz}{dy}\right) = a \left(\frac{dz}{dx}\right)$, будет

$$dz = dx \left(\frac{dz}{dx}\right) + dy \left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) (dx + a dy),$$

откуда, очевидно, $z = f(x + ay)$, а поскольку a может иметь оба знака и сумма двух решений также является решением, то получается найденное выше решение. Можно действовать еще таким способом. Положим

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx dy}\right),$$

тогда

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) \quad \text{и} \quad a^2 \left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dv}{dy}\right).$$

После нахождения производных первого порядка $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ и $\left(\frac{dv}{dy}\right)$ имеем, поскольку

$$dv = dx \left(\frac{dv}{dx}\right) + dy \left(\frac{dv}{dy}\right),$$

такие уравнения:

$$dz = dx \left(\frac{dz}{dx}\right) + dy \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

и

$$dv = dx \left(\frac{dz}{dy}\right) + a^2 dy \left(\frac{dz}{dx}\right).$$

Скомбинировав их, получаем, что

$$dv + a dz = (dx + a dy) \left[\left(\frac{dz}{dy}\right) + a \left(\frac{dz}{dx}\right) \right],$$

и далее,

$$v + az = f(x + ay) \quad \text{и} \quad v - az = F(x - ay),$$

так что для z получается прежнее выражение. Но метод, которым я воспользовался для решения, представляется более приспособленным к сущности дела, поскольку он и в других более сложных задачах принесит большую пользу.

ПОЯСНЕНИЕ 3

301. Однако наше решение имеет то неудобство, что оно для уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + a^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0$$

приводит к мнимому выражению, а именно,

$$z = f(x + ay \sqrt{-1}) + F(x - ay \sqrt{-1}).$$

Но если эти функции f и F — непрерывные, какого бы вида они ни были, они всегда могут быть представлены в форме $P \pm Q \sqrt{-1}$, от-

куда легко получить следующее выражение, которое всегда дает действительное значение:

$$z = \frac{1}{2} f(x + ay\sqrt{-1}) + \frac{1}{2} f(x - ay\sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}} F(x + ay\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} F(x - ay\sqrt{-1}).$$

Чтобы привести это выражение к действительному, полезно заметить, что при подстановке

$$x = s \cos \varphi \quad \text{и} \quad ay = s \sin \varphi$$

будет

$$(x \pm ay\sqrt{-1})^n = s^n (\cos n\varphi \pm \sqrt{-1} \sin n\varphi).$$

Следовательно, если заданные функции составлены с помощью аналитических операций, т. е. непрерывны, можно выразить в действительной форме через косинусы и синусы [кратных угла] φ . Но если эти функции разрывны, то такое приведение никак не имеет места, хотя можно быть уверенным в том, что и в этом случае полученная форма дает действительное значение. Как бы себе ни представить ординаты, взятые на кривой, описанной произвольным движением руки, и соответствующие абсциссам $x + ay\sqrt{-1}$ и $x - ay\sqrt{-1}$, их сумму нужно будет считать действительной; но будет ли разность, деленная на $\sqrt{-1}$, также действительной? Здесь мы видим, следовательно, существенный пробел теории, который пока никаким способом не удается заполнить; и вследствие этого пробела общие решения указанного вида много теряют в своем значении¹⁾.

ЗАДАЧА 49

302. Дано уравнение $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$; выяснить, какие функции переменных x и y можно взять в качестве P для того, чтобы интегрирование удалось путем приведения.

РЕШЕНИЕ

Приведение это я предполагаю выполненным так, что вместо переменных x и y берутся два других переменных t и u , в результате чего согласно § 232 в общем случае получается следующее уравнение:

$$\left. \begin{aligned} & + \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) \left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) \left(\frac{dz}{du}\right) + \left(\frac{dt}{dy}\right)^2 \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \\ & + 2 \left(\frac{dt}{dy}\right) \left(\frac{du}{dy}\right) \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \left(\frac{d^2z}{du^2}\right) - \\ & - P^2 \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) \left(\frac{dz}{dt}\right) - P^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) \left(\frac{dz}{du}\right) - P^2 \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) - \\ & - 2P^2 \left(\frac{dt}{dx}\right) \left(\frac{du}{dx}\right) \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) - P^2 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \left(\frac{d^2z}{du^2}\right) \end{aligned} \right\} = 0.$$

¹⁾ atque ob hunc ipsum defectum hujusmodi solutiones universales plurimum de sua vi perdunt. — По поводу этих замечаний Эйлера см. статью переводчика в конце тома.

Примем теперь соотношение между переменными t и u и прежними переменными x , y таким, чтобы выпали обе производные $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ и $\left(\frac{d^2z}{du^2}\right)$, а это будет иметь место, если положить

$$\left(\frac{dt}{dy}\right) + P\left(\frac{dt}{dx}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) - P\left(\frac{du}{dx}\right) = 0.$$

Тогда будем иметь

$$\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) = -P\left(\frac{d^2t}{dx dy}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right).$$

Но поскольку

$$\left(\frac{d^2t}{dx dy}\right) = -P\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) - \left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right),$$

то

$$\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) = P^2\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) + P\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

и, подобным же образом, с учетом изменения знака P ,

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = P^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + P\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{du}{dx}\right).$$

После этих подстановок наше уравнение принимает вид

$$\left[P\left(\frac{dP}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right) \right] \left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left[P\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) \right] \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) - 4P^2\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dt du}\right) = 0.$$

Так как это уравнение содержит только одну производную второго порядка $\left(\frac{d^2z}{dt du}\right)$, оно допускает интегрирование, когда выпадает либо $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, либо $\left(\frac{dz}{du}\right)$. Положим поэтому

$$P\left(\frac{dP}{dx}\right) + \frac{dP}{dy} = 0,$$

и это уравнение определяет возможный вид искомой функции P ; а тогда уравнение, подлежащее интегрированию, после деления на $2P\left(\frac{du}{dx}\right)$ принимает вид

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) - 2P\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dt du}\right) = 0.$$

Интеграл этого уравнения, если положить $\left(\frac{dz}{du}\right) = v$, будет

$$2lv = \int \frac{dt \left(\frac{dP}{dx}\right)}{P\left(\frac{dt}{dx}\right)} = 2l\left(\frac{dz}{du}\right).$$

Теперь требуется определить самую функцию P через x и y . Поскольку $\left(\frac{dP}{dy}\right) = P\left(\frac{dP}{dx}\right)$, имеем

$$dP = dx\left(\frac{dP}{dx}\right) + P dy\left(\frac{dP}{dx}\right).$$

Отсюда, полагая для краткости $\left(\frac{dP}{dx}\right) = p$, получаем

$$dx = \frac{dP}{p} - P dy$$

и

$$x = -Py + \int dP \left(y + \frac{1}{p} \right).$$

Поэтому должно быть $y + \frac{1}{p} = f'(P)$, откуда

$$x + Py = f(P) \quad \text{и} \quad p = \left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{1}{f'(P) - y},$$

а также

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \frac{P}{f'(P) - y},$$

откуда вытекает определение P через x и y . Для новых переменных t и u вследствие того, что

$$\left(\frac{dt}{dy}\right) = -P \left(\frac{dt}{dx}\right),$$

имеем

$$dt = \left(\frac{dt}{dx}\right)(dx - P dy),$$

а вследствие того, что

$$x = -Py + f(P),$$

получаем

$$\begin{aligned} dt &= \left(\frac{dt}{dx}\right)(dP f'(P) - 2P dy - y dP) = \\ &= P^{\frac{1}{2}} \left(\frac{dt}{dx}\right) \left(\frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2 dy \sqrt{P} - \frac{y dP}{\sqrt{P}}\right). \end{aligned}$$

Поскольку же интеграл последнего выражения есть

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y \sqrt{P},$$

то

$$t = F \left(\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y \sqrt{P} \right).$$

Далее, вследствие того, что $\left(\frac{du}{dy}\right) = P \left(\frac{du}{dx}\right)$, имеем

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right)(dx + P dy) = \left(\frac{du}{dx}\right)(dP f'(P) - y dP),$$

откуда

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right)(f'(P) - y) dP,$$

так что u должно быть функцией P . Для этой цели можно, однако, взять любые функции, поскольку общность решения достигается впоследствии путем интегрирования. Итак, положим

$$t = \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y \sqrt{P} \quad \text{и} \quad u = P,$$

где

$$x + Py = f(P).$$

Наконец, чтобы найти самый интеграл, напомним, что

$$2l \left(\frac{dz}{du} \right) = \int \frac{dt \left(\frac{dP}{dx} \right)}{P \left(\frac{dt}{dx} \right)}.$$

Здесь при интегрировании u или P считается постоянным, а согласно вышеуказанному

$$\left(\frac{dt}{dx} \right) = dP f'(P) - 2P dy - y dP = -2P dy,$$

так как здесь P постоянное. Кроме того,

$$\left(\frac{dP}{dx} \right) = \frac{1}{f'(P) - y},$$

откуда

$$2l \left(\frac{dz}{dP} \right) = \int \frac{-2dy}{f'(P) - y} = 2l(f'(P) - y) + 2lF(P),$$

то есть

$$\left(\frac{dz}{dP} \right) = (f'(P) - y) F(P),$$

и далее,

$$z = \int dP (f'(P) - y) F(P),$$

где t надо считать постоянным. Но поскольку

$$y = + \frac{1}{2\sqrt{P}} \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - \frac{t}{2\sqrt{P}},$$

то

$$f'(P) - y = f'(P) - \frac{1}{2\sqrt{P}} \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) + \frac{t}{2\sqrt{P}},$$

откуда, наконец,

$$z = \int dP \left[f'(P) - \frac{1}{2\sqrt{P}} \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) \right] F(P) + \left[\frac{1}{2} \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - y \sqrt{P} \right] \int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) + \Phi \left[\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y \sqrt{P} \right].$$

Это выражение содержит две произвольные функции F и Φ

СЛЕДСТВИЕ 1

303. Первый член этого выражения можно преобразовать так:

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} \left[\sqrt{P} f'(P) - \frac{1}{2} \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) \right] F(P),$$

но

$$\sqrt{P} f'(P) - \frac{1}{2} \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) = \int dP \sqrt{P} \cdot f''(P),$$

поэтому первый член равен

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) \int dP \sqrt{P} \cdot f''(P).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

304. Поскольку этот первый член — неопределенная функция P , обозначим ее через $\pi(P)$, и тогда

$$\frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) = \frac{dP\pi'(P)}{\int dP \sqrt{P} \cdot f''(P)},$$

вследствие чего интеграл принимает вид

$$z = \pi(P) + \Phi \left[\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y \sqrt{P} \right] + \\ + \left[\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y \sqrt{P} \right] \int \frac{dP\pi'(P)}{2 \int dP \sqrt{P} \cdot f''(P)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

305. Более частное решение получаем, полагая $\Pi(P) = 0$. Тогда z равняется произвольной функции количества

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y \sqrt{P},$$

которое на основании уравнения $x + Py = f(P)$ может быть выражено через x и y .

ПОЯСНЕНИЕ

306. Хотя я этим же методом воспользовался и в предыдущей задаче, однако, и это может казаться удивительным, тот случай предыдущей задачи, когда $P = a$, не содержится в этом решении. Причиной этого парадокса является то, что одним из решений уравнения $\left(\frac{dP}{dy}\right) = P \left(\frac{dP}{dx}\right)$ будет, очевидно, значение $P = a$, хотя оно не содержится в выведенной из этого уравнения формуле $x + Py = f(P)$. Здесь полезно вспомнить, что, как мы уже раньше заметили¹⁾, дифференциальные уравнения часто имеют решения, которые не содержатся в [общем] интеграле; так, например, уравнение $dy \sqrt{a-x} = dx$ удовлетворяется значением $x = a$, которое не содержится в интеграле $y = C - 2\sqrt{a-x}$. Поэтому и в нашем случае значение $P = a$ требует особого исследования выполненного в предыдущей задаче. Для [иллюстрации] остальных случаев мы дадим несколько примеров, в которых в качестве $f(P)$ взяты некоторые определенные функции P .

¹⁾ См. Интегральное исчисление, т. I, § 546.

ПРИМЕР 1

307. Положив $f(P) = 0$, так что $P = -\frac{x}{y}$, найти полный интеграл уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{x^2}{y^2} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right).$$

Так как $f'(P) = 0$, то поскольку $\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) = C$, найденное решение принимает вид

$$z = -\frac{C}{2} \int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) + \left(\frac{1}{2}C - y\sqrt{P}\right) \int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) + \Phi(C - 2y\sqrt{P}).$$

Положив $\int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) = \Pi(P)$, получим

$$z = -y\sqrt{P}\Pi(P) + \Phi(y)\sqrt{P}.$$

Подставляя для P его значение $-\frac{x}{y}$, имеем $y\sqrt{P} = \sqrt{-xy}$, и включая мнимость $\sqrt{-1}$ в знак функции, получим

$$z = \sqrt{xy}\Pi\left(\frac{x}{y}\right) + \Phi(\sqrt{xy}),$$

что легко преобразуется к виду

$$z = x\Gamma\left(\frac{x}{y}\right) + \Theta(xy),$$

где $x\Gamma\left(\frac{x}{y}\right)$ обозначает какую угодно однородную функцию первого измерения переменных x и y . С другой стороны, мы получаем решение, вводя вместо x и y новые переменные t и u согласно уравнениям $t = C - 2\sqrt{-xy}$ и $u = -\frac{x}{y}$, или проще $t = 2\sqrt{xy}$ и $u = \frac{x}{y}$, откуда

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{dx}\right) &= \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}, & \left(\frac{dt}{dy}\right) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, & \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) &= -\frac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}, & \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) &= -\frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y}}, \\ \left(\frac{du}{dx}\right) &= \frac{1}{y}, & \left(\frac{du}{dy}\right) &= -\frac{x}{y^2}, & \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) &= 0, & \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) &= \frac{2x}{y^3}. \end{aligned}$$

Так как $P^2 = \frac{x^2}{y^2}$, предложенное уравнение принимает вид

$$0 \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{2x}{y^3} \left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{4x\sqrt{x}}{y^2\sqrt{y}} \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) = 0.$$

Но поскольку

$$t^2u = 4x^2 \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{2}t\sqrt{u},$$

а также $y = \frac{t}{2\sqrt{u}}$, имеем

$$\frac{8u^2}{t^2} \left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{8u^2}{t} \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{dz}{du}\right) = t \frac{d^2z}{dt du}.$$

Положим $\left(\frac{dz}{du}\right) = v$, так что $v = t \left(\frac{dv}{dt}\right)$. Тогда при u постоянном будет

$\frac{dt}{t} = \frac{dv}{v}$, откуда $v = \left(\frac{dz}{du}\right) = tf'(u)$. Принимая теперь t постоянным, получим

$$z = tf(u) + F(t) = 2\sqrt{xy} f\left(\frac{x}{y}\right) + F(\sqrt{xy}),$$

как и раньше.

СЛЕДСТВИЕ

308. Что найденное выражение $z = x\Gamma\left(\frac{x}{y}\right) + \Theta(xy)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, можно показать дифференцированием:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\Gamma'\left(\frac{x}{y}\right) + y\Theta'(xy), \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{x^2}{y^2}\Gamma'\left(\frac{x}{y}\right) + x\Theta'(xy),$$

откуда, далее,

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{2}{y}\Gamma'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^2}\Gamma''\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\Theta''(xy)$$

и

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{2x^2}{y^3}\Gamma'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^3}{y^4}\Gamma''\left(\frac{x}{y}\right) + x^2\Theta''(xy).$$

ПРИМЕР 2

309. Положим $f(P) = \frac{P^2}{2a}$, так что

$$P^2 = 2aPy + 2ax \quad \text{и} \quad P = ay + \sqrt{a^2y^2 + 2ax}.$$

Найти полный интеграл уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = (2a^2y^2 + 2ax + 2ay\sqrt{a^2y^2 + 2ax})\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right).$$

Поскольку $f(P) = \frac{P^2}{2a}$, будем иметь

$$f'(P) = \frac{P}{a} \quad \text{и} \quad \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) = \int \frac{1}{a} dP \sqrt{P} = \frac{2}{3a} P \sqrt{P},$$

так что вышенайденное общее решение преобразуется к виду

$$z = \int dP \frac{2P}{3a} F(P) + \left(\frac{P\sqrt{P}}{3a} - y\sqrt{P}\right) \int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) + \Phi\left(\frac{2}{3a} P \sqrt{P} - 2y\sqrt{P}\right).$$

Положим

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) = \Pi(P),$$

тогда

$$dPF(P) = dP\sqrt{P}\Pi'(P)$$

и

$$z = \frac{2}{3a} \int P^{\frac{3}{2}} dP \Pi'(P) + \left(\frac{P\sqrt{P}}{3a} - y\sqrt{P}\right) \Pi(P) + \Phi\left(\frac{P\sqrt{P}}{3a} - y\sqrt{P}\right).$$

С другой стороны,

$$\frac{P}{3a} - y = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\sqrt{\left(y^2 + \frac{2x}{a}\right)},$$

но применение этих формул приводит к слишком сложным выражениям. К цели же приводят следующие подстановки:

$$t = \frac{2}{3a} P \sqrt{P} - 2y \sqrt{P} \quad \text{и} \quad u = P.$$

СЛЕДСТВИЕ

310. Если для получения более ограниченного решения положим

$$\Pi(P) = P^{n - \frac{1}{2}},$$

то

$$\Pi'(P) = \left(n - \frac{1}{2} \right) P^{n - \frac{3}{2}},$$

откуда получаем

$$z = \frac{n}{(n+1)a} P^{n+1} - P^n y + \Phi \left(\frac{P\sqrt{P}}{3a} - y \sqrt{P} \right).$$

Пусть $n = 1$ и пусть функция Φ исчезает. Тогда

$$z = \frac{1}{2a} P^2 - Py = x.$$

В случае же $n = 2$ имеем

$$z = \frac{2}{3a} P^3 - P^2 y = \frac{2}{3} axy + \frac{2}{3} P(2x + ay^2),$$

или

$$z = \frac{2}{3} a^2 y^3 + 2axy + \frac{2}{3} (ay^2 + 2x) \sqrt{a^2 y^2 + 2ax}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

311. Форму найденного интеграла можно существенно упростить. Положим с этой целью

$$\int \frac{dP}{\sqrt{P}} F(P) = \Pi(P),$$

тогда

$$F(P) = \sqrt{P \Pi'(P)}.$$

Опуская второй член

$$\Phi \left[\int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - 2y \sqrt{P} \right],$$

который не нуждается в упрощении, получим

$$z = \int dP \left[\sqrt{P} f'(P) - \frac{1}{2} \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) \right] \Pi'(P) + \\ + \frac{1}{2} \Pi(P) \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - y \sqrt{P} \Pi(P).$$

Но

$$\frac{1}{2} \Pi(P) \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) = \int \left[\frac{1}{2} dP \Pi'(P) \int \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) + \frac{1}{2} \frac{dP}{\sqrt{P}} \Pi(P) f'(P) \right],$$

откуда

$$z = \int \Pi'(P) dP \sqrt{P} f'(P) + \frac{1}{2} \int \Pi(P) \frac{dP}{\sqrt{P}} f'(P) - y \sqrt{P} \Pi(P).$$

Далее,

$$\int dP\Pi'(P)\sqrt{P}f'(P) = \Pi(P)\sqrt{P}\cdot f'(P) - \\ - \int \Pi(P)\left[\frac{dP}{2\sqrt{P}}f'(P) + dP\sqrt{P}f'(P)\right],$$

так что

$$z = \Pi(P)\sqrt{P}f'(P) - \int dP\Pi(P)\sqrt{P}f''(P) - y\sqrt{P}\Pi(P).$$

Положим, наконец,

$$\int dP\Pi(P)\sqrt{P}f''(P) = \Theta(P),$$

тогда

$$\Pi(P) = \frac{\Theta'(P)}{\sqrt{P}f''(P)}$$

и

$$z = \frac{\Theta'(P)}{f''(P)}[f'(P) - y] - \Theta(P) + \Phi\left[\int \frac{dP}{\sqrt{P}}f'(P) - 2y\sqrt{P}\right].$$

Эта форма, несомненно, гораздо проще первоначально найденной.

ЗАДАЧА 50

312. *Задается уравнение*

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - P^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + R\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Установить, в случае каких значений P , Q , R интегрирование удастся при помощи примененных выше преобразований.

РЕШЕНИЕ

Введем два новых переменных t и u ; тогда имеем

$$0 = \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) + \left(\frac{dt}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \\ + 2\left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2z}{du^2}\right) - \\ - P^2\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) - P^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) - P^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) - \\ - 2P^2\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) - P^2\left(\frac{du}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{du^2}\right) + \\ + Q\left(\frac{dt}{dy}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + Q\left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dz}{du}\right) + \\ + R\left(\frac{dt}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) + R\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dz}{du}\right).$$

Положим, как выше,

$$\left(\frac{dt}{dy}\right) = P\left(\frac{dt}{dx}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = -P\left(\frac{du}{dx}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right) = P\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) + \left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

и

$$\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) = P^2 \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) + P \left(\frac{dP}{dx}\right) \left(\frac{dt}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) \left(\frac{dt}{dx}\right),$$

а также

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = P^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + P \left(\frac{dP}{dx}\right) \left(\frac{du}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right) \left(\frac{du}{dx}\right).$$

Подлежащее решению уравнение будет тогда

$$0 = \left[P \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) + PQ + R \right] \left(\frac{dt}{dx}\right) \left(\frac{dz}{dt}\right) - 4P^2 \left(\frac{dt}{dx}\right) \left(\frac{du}{dx}\right) \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + \left[P \left(\frac{dP}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right) - PQ + R \right] \left(\frac{du}{dx}\right) \left(\frac{dz}{du}\right).$$

Очевидно, интегрирование будет возможно тогда, когда либо $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, либо $\left(\frac{dz}{du}\right)$ выпадают. Примем поэтому, что

$$P \left(\frac{dP}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right) - PQ + R = 0,$$

или

$$R = PQ + \left(\frac{dP}{dy}\right) - P \left(\frac{dP}{dx}\right).$$

Тогда полученное уравнение после деления на $\left(\frac{dt}{dx}\right)$ принимает вид

$$0 = 2 \left[PQ + \left(\frac{dP}{dy}\right) \right] \left(\frac{dz}{dt}\right) - 4P^2 \left(\frac{du}{dx}\right) \left(\frac{d^2z}{dt du}\right).$$

Положим $\left(\frac{dz}{dt}\right) = v$. Тогда

$$\left[PQ + \left(\frac{dP}{dy}\right) \right] v - 2P^2 \left(\frac{du}{dx}\right) \left(\frac{dv}{du}\right) = 0.$$

Считая t постоянным, получим

$$\frac{dv}{v} = \frac{\left[PQ + \left(\frac{dP}{dy}\right) \right] du}{2P^2 \left(\frac{du}{dx}\right)},$$

где необходимо выразить количества P , Q , $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ и $\left(\frac{du}{dx}\right)$ через новые переменные t и u . Нужно поэтому сперва определить эти переменные. Поскольку

$$\left(\frac{dt}{dy}\right) = P \left(\frac{dt}{dx}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = -P \left(\frac{du}{dx}\right),$$

имеем

$$dt = \left(\frac{dt}{dx}\right) (dx + P dy) \quad \text{и} \quad du = \left(\frac{du}{dx}\right) (dx - P dy).$$

Следовательно, $\left(\frac{dt}{dx}\right)$ и $\left(\frac{du}{dx}\right)$ являются множителями, которые делают интегрируемыми выражения $dx + P dy$ и $dx - P dy$; при этом нет нужды определять значения t и u в самом общем виде. Пусть p и q суть такие множители, выраженные через x и y . Тогда

$$t = \int p(dx + P dy) \quad \text{и} \quad u = \int q(dx - P dy),$$

и вышеприведенное дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{dv}{v} = \frac{\left[PQ + \left(\frac{dP}{dy} \right) \right] du}{2P^2q}.$$

Здесь при интегрировании нужно рассматривать количество $t = \int p(dx + P dy)$ как постоянное. Но, поскольку $du = q(dx - P dy)$, имеем

$$\frac{dv}{v} = \frac{\left[PQ + \left(\frac{dP}{dy} \right) \right] (dx - P dy)}{2P^2}.$$

Далее, вследствие того, что $dt = 0$, будет $dx = -P dy$, так что

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dy}{P} \left[PQ + \left(\frac{dP}{dy} \right) \right].$$

В этом выражении t — постоянное, а оно дается в зависимости от x и y . Поэтому можно выразить x через y и t , так что остается только переменное y , и после того, как найден интеграл

$$-\int \frac{dy}{P} \left[PQ + \left(\frac{dP}{dy} \right) \right] = IV,$$

получим

$$v = Vf(t) = \left(\frac{dz}{dt} \right).$$

Теперь примем u за постоянное и получим

$$z = \int V dt f(t) + F(u).$$

Условие, при котором это интегрирование возможно, требует, чтобы было

$$R = PQ + \left(\frac{dP}{dy} \right) - P \left(\frac{dP}{dx} \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

313. Таким же образом может быть решено предложенное уравнение тогда, когда

$$R = -PQ - \left(\frac{dP}{dy} \right) - P \left(\frac{dP}{dx} \right).$$

Как выше, нужно ввести

$$t = \int p(dx + P dy) \quad \text{и} \quad u = \int q(dx - P dy).$$

Тогда

$$0 = - \left[PQ + \left(\frac{dP}{dy} \right) \right] \frac{dz}{du} - 2P^2 \left(\frac{dt}{dx} \right) \left(\frac{d^2z}{dt du} \right)$$

и, положив $\left(\frac{dz}{du} \right) = v$, имеем при постоянном u

$$\frac{dv}{v} = \frac{- \left[PQ + \left(\frac{dP}{dy} \right) \right] dt}{2P^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)} = \frac{- \left[PQ + \left(\frac{dP}{dy} \right) \right] (dx + P dy)}{2P^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

314. Если далее принять во внимание, что в выражении

$$u = \int q(dx - P dy)$$

постоянное количество $dx = P dy$, найдем

$$\int -\frac{dy \left[PQ + \left(\frac{dP}{dy} \right) \right]}{P} = lV$$

и получаем

$$v = Vf(u) = \left(\frac{dz}{du} \right).$$

Положив

$$t = \int p(dx + P dy),$$

получим

$$z = \int V du f(u) + F(t).$$

ПРИМЕР 1

315. Полагая $P = a$ и $R = aQ$, где Q — какая угодно функция x и y , проинтегрировать уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2} \right) - a^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) + Q \left(\frac{dz}{dy} \right) + aQ \left(\frac{dz}{dx} \right) = 0.$$

Поскольку здесь $P = a$, то $p = 1$; $q = 1$ и $t = x + ay$, $u = x - ay$, откуда, положив $\left(\frac{dz}{dt} \right) = v$, получим, что

$$\frac{dv}{v} = \frac{aQ du}{2a^2} = \frac{Q du}{2a}.$$

Но так как

$$x = \frac{t+u}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{t-u}{2a},$$

то после подстановки этих значений Q превращается в функцию t и u , и, рассматривая t как постоянное, получим

$$lv = \frac{1}{2a} \int Q du + lf(t),$$

или

$$\left(\frac{dz}{dt} \right) = e^{\frac{1}{2a} \int Q du} f(t),$$

и далее, рассматривая u как постоянное, получим

$$z = \int e^{\frac{1}{2a} \int Q du} dt f(t) + F(u).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

316. Если Q постоянное $= 2ab$, то интегралом уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2ab\left(\frac{dz}{dy}\right) + 2a^2b\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

будет

$$z = e^{bu} f(t) + F(u) = e^{b(x-ay)} f(x+ay) + F(x-ay),$$

или

$$z = e^{b(x-ay)} [f(x+ay) + F(x-ay)].$$

СЛЕДСТВИЕ 2

317. Если $Q = \frac{a}{x}$, то интеграл уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - a^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{a}{x}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{a^2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

поскольку

$$\int Q du = \int \frac{a du}{x} = \int \frac{2a du}{t+u} = 2al(t+u),$$

равен

$$z = \int (t+u) dt f(t) + F(u) = \int t dt f(t) + u \int dt f(t) + F(u).$$

Если положить $f(t) = \Pi''(t)$, то

$$\int dt f(t) = \Pi'(t)$$

и

$$\int t dt f(t) = \int t d\Pi'(t) = t\Pi'(t) - \int dt\Pi'(t) = t\Pi'(t) - \Pi(t).$$

Следовательно,

$$z = (t+u)\Pi'(t) - \Pi(t) + F(u),$$

то есть

$$z = 2x\Pi'(x+ay) - \Pi(x+ay) + F(x-ay).$$

ПРИМЕР 2

318. Пусть $P = \frac{x}{y}$ и $R = -\frac{x}{y}Q + \frac{x}{y^2} - \frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y}Q$. Положим $Q = \frac{1}{x}$, так что $R = -\frac{1}{y}$. Проинтегрировать уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{dz}{dy}\right) - \frac{1}{y}\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Поскольку

$$t = \int p\left(dx + \frac{x dy}{y}\right) \quad \text{и} \quad u = \int q\left(dx - \frac{x dy}{y}\right),$$

положим $p = y$ и $q = \frac{1}{y}$, так что $t = xy$ и $u = \frac{x}{y}$. Положив теперь

$\left(\frac{dz}{du}\right) = v$ и рассматривая u как постоянное, получим, согласно следствию 1 [§ 316],

$$\frac{dv}{v} = \frac{\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dt}{\frac{2x^2}{y^2} y} = -\frac{(y-x) dt}{2x^2 y}.$$

Но $tu = x^2$, значит $x = \sqrt{tu}$ и $y = \sqrt{\frac{1}{u}}$, $2x^2 y = 2t \sqrt{tu}$, так что

$$\frac{dv}{v} = \frac{\left(\sqrt{tu} - \sqrt{\frac{t}{u}}\right) dt}{2t \sqrt{tu}} = \frac{dt}{2t} - \frac{dt}{2tu}.$$

Тогда при u постоянном получим

$$lv = \frac{1}{2} lt - \frac{1}{2u} lt,$$

или

$$\left(\frac{dz}{du}\right) = t^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2u}} f(u).$$

Рассматривая теперь t как постоянное, получим

$$z = t^{\frac{1}{2}} \int t^{-\frac{1}{2u}} du f(u) + F(t).$$

Положим $-\frac{1}{2u} = s$, так что $s = -\frac{y}{2x}$, и будем иметь

$$z = t^{\frac{1}{2}} \int t^s ds f(s) + F(t).$$

В интеграле $\int t^s ds f(s)$ только s является переменным, а после взятия интеграла нужно подставить значения $t = xy$ и $s = -\frac{y}{2x}$. Отсюда, между прочим, видно, что любая функция xy дает частное решение.

ЗАДАЧА 51

319. *Задается общее уравнение*

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - 2P \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + (P^2 - Q^2) \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + R \left(\frac{dz}{dy}\right) + S \left(\frac{dz}{dx}\right) + Tz + V = 0.$$

Найти условия для количеств P, Q, R, S, T , чтобы уравнение интегрировалось с помощью [указанного] приведения.

РЕШЕНИЕ

После введения с помощью прежней подстановки двух новых переменных t и u наше уравнение принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} & V + Tz + \left(\frac{d^2t}{dy^2} \right) \left(\frac{dz}{dt} \right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2} \right) \left(\frac{dz}{du} \right) + \left(\frac{dt}{dy} \right)^2 \left(\frac{d^2z}{dt^2} \right) + \\ & \quad + 2 \left(\frac{dt}{dy} \right) \left(\frac{du}{dy} \right) \left(\frac{d^2z}{dt du} \right) + \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \left(\frac{d^2z}{du^2} \right) - \\ & - 2P \left(\frac{d^2t}{dx dy} \right) \left(\frac{dz}{dt} \right) - 2P \left(\frac{d^2u}{dx dy} \right) \left(\frac{dz}{du} \right) - 2P \left(\frac{dt}{dx} \right) \left(\frac{du}{dy} \right) \left(\frac{d^2z}{dt^2} \right) - \\ & \quad - 2P \left(\frac{dt}{dx} \right) \left(\frac{du}{dy} \right) \left(\frac{d^2z}{dt du} \right) - 2P \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{du}{dy} \right) \left(\frac{d^2z}{du^2} \right) + \\ & + (P^2 - Q^2) \left(\frac{d^2t}{dx^2} \right) \left(\frac{dz}{dt} \right) + (P^2 - Q^2) \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) \left(\frac{dz}{du} \right) + (P^2 - Q^2) \times \\ & \times \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 \left(\frac{d^2z}{dt^2} \right) - 2P \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dt}{dy} \right) \left(\frac{d^2z}{dt du} \right) + (P^2 - Q^2) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \left(\frac{d^2z}{du^2} \right) + \\ & + R \left(\frac{dt}{dy} \right) \left(\frac{dz}{dt} \right) + R \left(\frac{du}{dy} \right) \left(\frac{dz}{du} \right) + 2(P^2 - Q^2) \left(\frac{dt}{dx} \right) \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{d^2z}{dt du} \right) + \\ & + S \left(\frac{dt}{dx} \right) \left(\frac{dz}{dt} \right) + S \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dz}{du} \right). \end{aligned} \right\} = 0$$

Определим теперь эти новые переменные t и u через x и y так, чтобы производные $\left(\frac{d^2z}{dt^2} \right)$ и $\left(\frac{d^2z}{du^2} \right)$ выпали. Тогда должно быть

$$\left(\frac{dt}{dy} \right) = (P + Q) \left(\frac{dt}{dx} \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{du}{dy} \right) = (P - Q) \left(\frac{du}{dx} \right),$$

откуда ясно, что эти переменные определяются следующим образом:

$$t = \int p [dx + (P + Q) dy] \quad \text{и} \quad u = \int q [dx + (P - Q) dy].$$

Количества p и q должны быть при этом выбраны так, чтобы эти выражения допускали интегрирование. Поскольку теперь

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2t}{dx dy} \right) &= (P + Q) \left(\frac{d^2t}{dx^2} \right) + \left[\left(\frac{dP}{dx} \right) + \left(\frac{dQ}{dx} \right) \right] \left(\frac{dt}{dx} \right), \\ \left(\frac{d^2t}{dy^2} \right) &= (P + Q)^2 \left(\frac{d^2t}{dx^2} \right) + (P + Q) \left[\left(\frac{dP}{dx} \right) + \left(\frac{dQ}{dx} \right) \right] \left(\frac{dt}{dx} \right) + \\ & \quad + \left[\left(\frac{dP}{dy} \right) + \left(\frac{dQ}{dx} \right) \right] \left(\frac{dt}{dx} \right), \\ \left(\frac{d^2u}{dx dy} \right) &= (P - Q) \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) + \left[\left(\frac{dP}{dx} \right) - \left(\frac{dQ}{dx} \right) \right] \left(\frac{du}{dx} \right), \\ \left(\frac{d^2u}{dy^2} \right) &= (P - Q)^2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right) + (P - Q) \left[\left(\frac{dP}{dx} \right) - \left(\frac{dQ}{dx} \right) \right] \left(\frac{du}{dx} \right) + \\ & \quad + \left[\left(\frac{dP}{dy} \right) - \left(\frac{dQ}{dy} \right) \right] \left(\frac{du}{dx} \right), \end{aligned}$$

то отсюда вытекает, что член $2 \left(\frac{d^2z}{dt du} \right)$ имеет коэффициент $-2Q^2 \left(\frac{dt}{dx} \right) \left(\frac{du}{dx} \right)$,

член $\left(\frac{dz}{dt} \right)$ имеет коэффициент

$$\left[-(P - Q) \left(\frac{dP + dQ}{dx} \right) + \left(\frac{dP + dQ}{dy} \right) + R(P + Q) + S \right] \left(\frac{dt}{dx} \right),$$

а член $\left(\frac{dz}{du}\right)$ — коэффициент

$$\left[-(P+Q)\left(\frac{dP-dQ}{dx}\right) + \left(\frac{dP-dQ}{dy}\right) + R(P-Q) + S \right] \left(\frac{du}{dx}\right).$$

Далее, $\left(\frac{dt}{dx}\right) = p$ и $\left(\frac{du}{dx}\right) = q$. Положим ради краткости

$$S + R(P+Q) + \left(\frac{dP+dQ}{dy}\right) - (P-Q)\left(\frac{dP+dQ}{dx}\right) = M$$

и

$$S + R(P-Q) + \left(\frac{dP-dQ}{dy}\right) - (P+Q)\left(\frac{dP-dQ}{dx}\right) = N.$$

Тогда уравнение, подлежащее интегрированию, запишется в виде

$$0 = V + Tz + Mp\left(\frac{dz}{dt}\right) + Nq\left(\frac{dz}{du}\right) - 4Q^2pq\left(\frac{d^2z}{dt du}\right)$$

или, ради сравнения с формами, исследованными в §§ 294 и 295, в виде

$$\left(\frac{d^2z}{dt du}\right) - \frac{M}{4Q^2q}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{N}{4Q^2p}\left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{T}{4Q^2pq}z - \frac{V}{4Q^2pq} = 0.$$

Затем положим для краткости

$$\frac{M}{4Q^2q} = K \quad \text{и} \quad \frac{N}{4Q^2p} = L.$$

Наше уравнение допускает интегрирование в двух случаях: либо когда

$$-\frac{T}{4Q^2pq} = +KL - \left(\frac{dL}{du}\right), \quad \text{то есть} \quad T = 4Q^2pq\left(\frac{dL}{du}\right) - \frac{MN}{4Q^2},$$

либо когда

$$-\frac{T}{4Q^2pq} = KL - \left(\frac{dK}{dt}\right), \quad \text{то есть} \quad T = 4Q^2pq\left(\frac{dK}{dt}\right) - \frac{MN}{4Q^2}.$$

Но так как K и L даны в зависимости от x и y , то производные $\left(\frac{dK}{dt}\right)$ и $\left(\frac{dL}{du}\right)$ можно выразить так:

$$\left(\frac{dK}{dt}\right) = \frac{Q-P}{2Qp}\left(\frac{dK}{dx}\right) + \frac{1}{2Qp}\left(\frac{dK}{dy}\right)$$

и

$$\left(\frac{dL}{du}\right) = \frac{P+Q}{2Qq}\left(\frac{dL}{dx}\right) - \frac{1}{2Qq}\left(\frac{dL}{dy}\right).$$

Каким образом можно в этих случаях найти интегралы, было уже объяснено выше; поэтому излишне повторять здесь эти скучные выкладки. В каждом отдельном случае решение может быть получено на основании изложенного.

ПОЯСНЕНИЕ 1

320. Что касается преобразования производных, то оно может быть выполнено так: в общем случае

$$dz = dx\left(\frac{dz}{dx}\right) + dy\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

а из формул

$$dt = p dx + p(P+Q) dy \quad \text{и} \quad du = q dx + q(P-Q) dy$$

следует, что

$$q dt - p du = 2pqQ dy,$$

то есть

$$dy = \frac{q dt - p du}{2Qpq},$$

а также

$$q(P - Q) dt - p(P + Q) du = -2Qpq dx,$$

то есть

$$dx = \frac{p(P + Q) du - q(P - Q) dt}{2Qpq}.$$

Подставив эти значения, получим

$$dz = \left[\frac{(P + Q) du}{2Qq} - \frac{(P - Q) dt}{2Qp} \right] \left(\frac{dz}{dx} \right) + \left(\frac{dt}{2Qp} - \frac{du}{2Qq} \right) \left(\frac{dz}{dy} \right),$$

так что dz выражается через дифференциалы dt и du . Полагая u постоянным и $du = 0$, получим

$$\left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{Q - P}{2Qp} \left(\frac{dz}{dx} \right) + \frac{1}{2Qp} \left(\frac{dz}{dy} \right),$$

а полагая t постоянным и $dt = 0$, получим

$$\left(\frac{dz}{du} \right) = \frac{P + Q}{2Qq} \left(\frac{dz}{dx} \right) - \frac{1}{2Qq} \left(\frac{dz}{dy} \right).$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

321. Итак, метод, изложенный в этой главе, состоит в том, что рассматриваемые уравнения с помощью введения двух новых переменных t и u приводятся к виду

$$\left(\frac{d^2z}{dt du} \right) + P \left(\frac{dz}{dt} \right) + Q \left(\frac{dz}{du} \right) + Rz + S = 0,$$

а что касается таких уравнений, то мы видели в предыдущей главе, в каких случаях их можно интегрировать. Стало быть, в таких случаях все уравнения, которые могут быть приведены к этому виду, допускают интегрирование. Но есть еще один весьма специальный случай уравнения такого вида, когда интегрирование возможно, и из этого случая выводится бесчисленное множество других уравнений, которые могут быть сведены к нему и, значит, также допускают интегрирование. Потому мы тщательно разберем этот случай в следующей главе.



ГЛАВА IV

ДРУГОЙ ЧАСТНЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ТАКИХ УРАВНЕНИЙ

ЗАДАЧА 52

322. Пусть предложено уравнение такого вида¹⁾:

$$(x+y)^2 \left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) + m(x+y) \left(\frac{dz}{dx} \right) + m(x+y) \left(\frac{dz}{dy} \right) + nz = 0^2).$$

Найти его полный интеграл.

РЕШЕНИЕ

Поскольку в это уравнение переменные x и y входят одинаково, положим прежде всего

$$z = A(x+y)^\lambda f(x) + B(x+y)^{\lambda+1} f'(x) + C(x+y)^{\lambda+2} f''(x) + D(x+y)^{\lambda+3} f'''(x) + \text{и т. д.}$$

Для облегчения подстановки заметим, что при $v = (x+y)^\mu F(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dx} \right) &= \mu(x+y)^{\mu-1} F(x) + (x+y)^\mu F'(x), \\ \left(\frac{dv}{dy} \right) &= \mu(x+y)^{\mu-1} F(x), \\ \left(\frac{d^2v}{dx dy} \right) &= \mu(\mu-1)(x+y)^{\mu-2} F(x) + \mu(x+y)^{\mu-1} F'(x). \end{aligned}$$

После подстановки получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} 0 = nA(x+y)^\lambda f(x) + nB(x+y)^{\lambda+1} f'(x) + nC(x+y)^{\lambda+2} f''(x) + \text{и т. д.} \\ + 2m\lambda A \qquad \qquad \qquad + mA \qquad \qquad \qquad + mB \end{aligned}$$

¹⁾ В более общем виде такого рода уравнения рассмотрел Лаплас в работе *Recherches sur le Calcul intégral aux différences partielles*, *Mém. de l'acad. d. Sc., de Paris* (1773), 1777, стр. 341, см. особенно стр. 376. *Oeuvres de Laplace*, т. IX, Paris, 1893, стр. 5 и 41. [Ф. Э.]

²⁾ Это уравнение теперь часто называют уравнением Эйлера—Пуассона. По поводу задачи 52 и содержания этой главы в целом см. статью переводчика в конце тома.

$$\begin{array}{lll}
 +\lambda(\lambda-1)A & +2m(\lambda+1)B & +2m(\lambda+2)C \\
 & +\lambda A & +(\lambda+1)B \\
 & +(\lambda+1)\lambda B & +(\lambda+2)(\lambda+1)C,
 \end{array}$$

так что весь вопрос сводится к определению коэффициентов A, B, C, D и т. д.; и легко было предвидеть, что в уравнении указанной формы степени выражения $(x+y)$ в соответствующих членах должны быть одни и те же. Итак, должно быть

$$\begin{aligned}
 n+2m\lambda+\lambda^2-\lambda &= 0, \\
 (n+2m\lambda+2m+\lambda^2+\lambda)B+(m+\lambda)A &= 0, \\
 (n+2m\lambda+4m+\lambda^2+3\lambda+2)C+(m+\lambda+1)B &= 0, \\
 (n+2m\lambda+6m+\lambda^2+5\lambda+6)D+(m+\lambda+2)C &= 0
 \end{aligned}$$

и т. д.

Эти уравнения, с учетом первого уравнения $n+2m\lambda+\lambda^2-\lambda=0$, записываются более удобным образом:

$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{(m+\lambda)A}{2m+2\lambda}, & F &= -\frac{(m+\lambda+4)E}{5(2m+2\lambda+4)}, \\
 C &= -\frac{(m+\lambda+1)B}{2(2m+2\lambda+1)}, & G &= -\frac{(m+\lambda+5)F}{6(2m+2\lambda+5)}, \\
 D &= -\frac{(m+\lambda+2)C}{3(2m+2\lambda+2)}, & H &= -\frac{(m+\lambda+6)G}{7(2m+2\lambda+6)}, \\
 E &= -\frac{(m+\lambda+3)D}{4(2m+2\lambda+3)} \text{ и т. д.},
 \end{aligned}$$

откуда закон образования коэффициентов очевиден. Для показателя λ получаем следующие два значения:

$$\lambda = \frac{1}{2} - m \pm \sqrt{\frac{1}{4} - m - n + m^2},$$

которые оба могут быть приняты для λ . Здесь нужно особенно отметить те случаи, когда предложенный ряд обрывается, т. е. когда $m+\lambda+i=0$, где i —любое целое положительное число, не исключая нуля. Но это имеет место, когда

$$\frac{1}{2} + i \pm \sqrt{\frac{1}{4} - m - n + m^2} = 0,$$

что возможно лишь тогда, когда $\frac{1}{4} - m - n + m^2$ будет квадратом. Но когда найден этот ряд, либо конечный, либо бесконечный, мы получаем подобный ряд с функциями y , и отсюда значение z получается в таком виде:

$$\begin{aligned}
 z &= A(x+y)^\lambda [f(x)+F(y)] + B(x+y)^{\lambda+1} [f'(x)+F'(y)] + \\
 &+ C(x+y)^{\lambda+2} [f''(x)+F''(y)] + D(x+y)^{\lambda+3} [f'''(x)+F'''(y)] + \\
 &+ E(x+y)^{\lambda+4} [f^{IV}(x)+F^{IV}(y)] + F(x+y)^{\lambda+5} [f^V(x)+F^V(y)] \\
 &\text{и т. д.}
 \end{aligned}$$

Поскольку сюда входят две произвольные функции, это, конечно, указывает, что наше выражение есть полный интеграл предложенного уравнения.

СЛЕДСТВИЕ 1

323. Если $\lambda = -m$, т. е. $n - m^2 + m = 0$ или $n = m^2 - m$, тогда интеграл состоит из одного члена, так как $B = 0$ ¹⁾, и интегралом будет

$$z = A(x + y)^{-m} [f(x) + F(y)].$$

СЛЕДСТВИЕ 2

324. Однако интеграл содержит два члена, если $\lambda = -m - 1$ или $n = m^2 - m - 2 = (m + 1)(m - 2)$; тогда $B = -\frac{1}{2}A$ и интегралом будет

$$z = (x + y)^{-m-1} [f(x) + F(y)] - \frac{1}{2}(x + y)^{-m} [f'(x) + F'(y)].$$

СЛЕДСТВИЕ 3

325. Интеграл состоит из трех членов, если $\lambda = -m - 2$ или $n = (m + 2)(m - 3)$; тогда

$$B = -\frac{1}{2}A; \quad C = -\frac{1}{6}B = +\frac{1}{12}A,$$

а интегралом будет

$$z = (x + y)^{-m-2} [f(x) + F(y)] - \frac{1}{2}(x + y)^{-m-1} [f'(x) + F'(y)] + \frac{1}{12}(x + y)^{-m} [f''(x) + F''(y)].$$

СЛЕДСТВИЕ 4

326. Интеграл состоит из четырех членов, если $\lambda = -m - 3$, или $n = (m + 3)(m - 4)$; тогда

$$B = -\frac{1}{2}A, \quad C = -\frac{1}{5}B = +\frac{1}{10}A, \quad D = -\frac{1}{12}C = -\frac{1}{120}A$$

и интегралом будет

$$z = (x + y)^{-m-3} [f(x) + F(y)] - \frac{1}{2}(x + y)^{-m-2} [f'(x) + F'(y)] + \frac{1}{10}(x + y)^{-m-1} [f''(x) + F''(y)] - \frac{1}{120}(x + y)^{-m} [f'''(x) + F'''(y)].$$

ПОЯСНЕНИЕ

327. Если мы в общем случае примем $\lambda + m = -i$, то $n = (m + i)(m - i - 1)$ и, далее,

$$B = -\frac{1}{2}A, \quad C = -\frac{(i-1)B}{2(2i-1)}, \quad D = -\frac{(i-2)C}{3(2i-2)}, \quad E = -\frac{(i-3)D}{4(2i-3)},$$

¹⁾ Уравнение $-(m + \lambda)A = 2(m + \lambda)B$ в данном случае оставляет коэффициент B неопределенным. Тем не менее интеграл $z = (x + y)^{-m} [f(x) + F(y)]$ является полным, поскольку он существенно содержит две произвольные функции одного переменного. Следовательно, если даже допустить $B \neq 0$, то полученный бесконечный ряд может быть приведен к виду $(x + y)^{-m} [f(x) + F(y)]$. Сравни пояснения Эйлера, § 329. [Ф. Э.]

откуда все коэффициенты выражаются через первый:

$$B = -\frac{1}{2} A, \quad C = \frac{(i-1)}{2 \cdot 2(2i-1)} A, \quad D = \frac{-(i-2)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3(2i-1)} A,$$

$$E = \frac{+(i-2)(i-3)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(2i-1)(2i-3)} A, \quad F = \frac{-(i-3)(i-4)}{2^4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5(2i-1)(2i-3)} A \text{ и т. д.,}$$

и получаются такими:

	A	B	C	D	E	F	
i=1	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	
i=2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	
i=3	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{20}$	$-\frac{1}{120}$	0	0	
i=4	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{28}$	$-\frac{2}{7 \cdot 24}$	$\frac{2 \cdot 1}{96 \cdot 7 \cdot 5}$	0	
i=5	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{36}$	$-\frac{3}{9 \cdot 24}$	$\frac{3 \cdot 2}{96 \cdot 9 \cdot 7}$	$-\frac{2 \cdot 1}{960 \cdot 9 \cdot 7}$	
i=6	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{44}$	$-\frac{4}{11 \cdot 24}$	$\frac{4 \cdot 3}{96 \cdot 11 \cdot 9}$	$-\frac{3 \cdot 2}{960 \cdot 11 \cdot 9}$	$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{5760 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7}$

Таким образом, полным интегралом уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + \frac{m}{x+y} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x+y} \left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{(m+i)(m-i-1)}{(x+y)^2} z = 0$$

будет

$$z = + (x+y)^{-m-i} [f(x) + F(y)]$$

$$- \frac{i}{2i} (x+y)^{-m-i+1} [f'(x) + F'(y)]$$

$$+ \frac{i(i-1)}{2i \cdot 2(2i-1)} (x+y)^{-m-i+2} [f''(x) + F''(y)]$$

$$- \frac{i(i-1)(i-2)}{2i \cdot 2(2i-1)3(2i-2)} (x+y)^{-m-i+3} [f'''(x) + F'''(y)]$$

$$+ \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2i \cdot 2(2i-1)3(2i-2)4(2i-3)} (x+y)^{-m-i+4} [f^{IV}(x) + F^{IV}(y)]$$

$$- \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{2i \cdot 2(2i-1)3(2i-2)4(2i-3) \cdot 5(2i-4)} (x+y)^{-m-i+5} [f^V(x) + F^V(y)]$$

и т. д.

Всякий раз, когда i — целое положительное число, это выражение состоит из конечного числа членов; в противном случае оно представляет бесконечный ряд. Данный интеграл обладает той особенностью, что он содержит не только произвольные функции $f(x)$ и $F(x)$, но также их производные.

ПРИМЕР

328. Если дано уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + \frac{m}{x+y} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x+y} \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

найти те случаи, когда его интеграл представляется в конечном виде.

Поскольку здесь $n = (m + i)(m - i - 1) = 0$, где i — целое положительное число, то существуют два случая, когда интегрирование удастся, а именно когда $m = -i$ и когда $m = i + 1$, так что в общем случае интеграл сводится к конечной сумме, когда m — целое число, которое либо положительно, либо отрицательно. Во-первых, когда $m = -i$, имеем

$$\begin{aligned} z &= 1 [f(x) + F(y)] - \frac{i}{2i} (x+y) [f'(x) + F'(y)] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{i(i-1)}{2i(2i-1)} (x+y)^2 [f''(x) + F''(y)] \\ &- \frac{1}{6} \frac{i(i-1)(i-2)}{2i(2i-1)(2i-2)} (x+y)^3 [f'''(x) + F'''(y)] \\ &+ \frac{1}{24} \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)} (x+y)^4 [f^{IV}(x) + F^{IV}(y)] \end{aligned}$$

и т. д.

Когда $m = i + 1$, имеем

$$\begin{aligned} (x+y)^{2i+1}z &= 1 [f(x) + F(y)] - \frac{i}{2i} (x+y) [f'(x) + F'(y)] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{i(i-1)}{2i(2i-1)} (x+y)^2 [f''(x) + F''(y)] \\ &- \frac{1}{6} \frac{i(i-1)(i-2)}{2i(2i-1)(2i-2)} (x+y)^3 [f'''(x) + F'''(y)] \\ &+ \frac{1}{24} \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)} (x+y)^4 [f^{IV}(x) + F^{IV}(y)] \end{aligned}$$

и т. д.

Таким образом в обоих случаях получается одно и то же выражение, которое в первом случае дает само количество z , а во втором случае — количество $(x+y)^{2i+1}z$. Чтобы отчетливее представить отдельные случаи, положим

$$A = [f(x) + F(y)],$$

$$B = [f(x) + F(y)] - \frac{1}{2} (x+y) [f'(x) + F'(y)],$$

$$C = [f(x) + F(y)] - \frac{2}{4} (x+y) [f'(x) + F'(y)] + \frac{1}{4 \cdot 3} (x+y)^2 [f''(x) + F''(y)],$$

$$\begin{aligned} D &= [f(x) + F(y)] - \frac{3}{6} (x+y) [f'(x) + F'(y)] + \\ &+ \frac{3}{6 \cdot 5} (x+y)^2 [f''(x) + F''(y)] - \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} (x+y)^3 [f'''(x) + F'''(y)] \end{aligned}$$

и т. д.

или, если положить ради краткости

$$\mathfrak{A} = f(x) + F(y),$$

$$\mathfrak{B} = (x+y) [f'(x) + F'(y)],$$

$$\mathfrak{C} = (x+y)^2 [f''(x) + F''(y)],$$

$$\mathfrak{D} = (x+y)^3 [f'''(x) + F'''(y)],$$

$$\mathfrak{E} = (x+y)^4 [f^{IV}(x) + F^{IV}(y)]$$

и т. д.,

будем иметь

$$A = \mathfrak{A},$$

$$B = \mathfrak{A} - \frac{1}{2} \mathfrak{B},$$

$$C = \mathfrak{A} - \frac{2}{4} \mathfrak{B} + \frac{1}{4 \cdot 3} \mathfrak{C},$$

$$D = \mathfrak{A} - \frac{3}{6} \mathfrak{B} + \frac{3}{6 \cdot 5} \mathfrak{C} - \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} \mathfrak{D},$$

$$E = \mathfrak{A} - \frac{4}{8} \mathfrak{B} + \frac{6}{8 \cdot 7} \mathfrak{C} - \frac{4}{8 \cdot 7 \cdot 6} \mathfrak{D} + \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} \mathfrak{E},$$

$$F = \mathfrak{A} - \frac{5}{10} \mathfrak{B} + \frac{10}{10 \cdot 9} \mathfrak{C} - \frac{10}{10 \cdot 9 \cdot 8} \mathfrak{D} + \frac{5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} \mathfrak{E} - \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \mathfrak{F},$$

$$G = \mathfrak{A} - \frac{6}{12} \mathfrak{B} + \frac{15}{12 \cdot 11} \mathfrak{C} - \frac{20}{12 \cdot 11 \cdot 10} \mathfrak{D} + \frac{15}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} \mathfrak{E} - \frac{6}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8} \mathfrak{F} + \\ + \frac{1}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} \mathfrak{G}$$

и т. д.

Когда найдены эти значения, получаем для обоих случаев:

если	то	если	то
$m = 0,$	$z = A;$	$m = 1,$	$(x + y)z = A;$
$m = -1,$	$z = B;$	$m = 2,$	$(x + y)^3 z = B;$
$m = -2,$	$z = C;$	$m = 3,$	$(x + y)^5 z = C;$
$m = -3,$	$z = D;$	$m = 4,$	$(x + y)^7 z = D;$
$m = -4,$	$z = E;$	$m = 5,$	$(x + y)^9 z = E;$
$m = -5,$	$z = F;$	$m = 6,$	$(x + y)^{11} z = F;$
$m = -6,$	$z = G$	$m = 7,$	$(x + y)^{13} z = G$

и т. д.

и т. д.

ПОЯСНЕНИЕ

329. Если i — отрицательное число, то полученное выражение превращается в бесконечный ряд. В самом деле, пусть $i = -k$, тогда в первой формуле [§ 328, выражение для 2] будет $m = k$, так что

$$z = \mathfrak{A} - \frac{k}{2k} \mathfrak{B} + \frac{k(k+1)}{2k(2k+1)} \mathfrak{C} - \frac{1}{6} \frac{k(k+1)(k+2)}{2k(2k+1)(2k+2)} \mathfrak{D} + \text{и т. д.}$$

до бесконечности. В том же случае $m = k$ вторая формула, поскольку $= k - 1$, дает

$$(x + y)^{2k-1} z = \mathfrak{A} - \frac{(k-1)}{2k-2} \mathfrak{B} + \frac{1}{2} \frac{(k-1)(k-2)}{(2k-2)(2k-3)} \mathfrak{C} - \\ - \frac{1}{6} \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{(2k-2)(2k-3)(2k-4)} \mathfrak{D} + \text{и т. д.}$$

ти две формы [решения] нельзя считать тождественными, и чтобы ни тем не менее давали один и тот же результат, функции $f(x)$ и $F(y)$ в них должны быть разного вида. В случае $x = \frac{1}{2}$ обе формулы

совпадают. Положим, однако, $k = 0$, тогда первая формула дает

$$z = \mathfrak{A} = f(x) + F(y),$$

а вторая

$$\frac{z}{x+y} = \mathfrak{A} - \frac{1}{2} \mathfrak{B} + \frac{1}{6} \mathfrak{C} - \frac{1}{24} \mathfrak{D} + \frac{1}{120} \mathfrak{E} - \text{и т. д.}$$

Чтобы выявить, что эти выражения согласуются друг с другом, положим во второй формуле

$$f(x) = ax^3 \quad \text{и} \quad F(y) = by^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= ax^3 + by^2, & \mathfrak{B} &= (x+y)(3ax^2 + 2by), \\ \mathfrak{C} &= (x+y)^2(6ax + 2b), & \mathfrak{D} &= (x+y)^3 6a. \end{aligned}$$

а остальные члены равны нулю. Следовательно, из второго решения получаем

$$\begin{aligned} z &= (x+y)(ax^3 + by^2) - \frac{1}{2}(x+y)^2(3ax^2 + 2by) + \\ &+ \frac{1}{3}(x+y)^3(3ax + b) - \frac{1}{4}(x+y)^4 a, \end{aligned}$$

что после развертывания дает

$$\frac{1}{4} ax^4 - \frac{1}{4} ay^4 + \frac{1}{3} bx^3 + \frac{1}{3} by^3 = z,$$

а это имеет вид, соответствующий первой формуле $z = f(x) + F(y)$. Совпадение этих двух формул в общем случае весьма замечательно

ЗАДАЧА 53

330. Установить, в каких случаях общее уравнение

$$\left(\frac{z}{dy^2}\right) - Q^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + R\left(\frac{dz}{dy}\right) + S\left(\frac{dz}{dx}\right) + Tz = 0$$

может быть приведено к предыдущему виду и, следовательно, проинтегрировано.

РЕШЕНИЕ

Введем новые переменные t и u так, чтобы получить преобразование, рассмотренное в § 319, где $P = 0$ и $V = 0$, а именно,

$$t = \int p(dx + Q dy) \quad \text{и} \quad u = \int q(dx - Q dy).$$

Положим для сокращения

$$\begin{aligned} M &= S + QR + \left(\frac{dQ}{dy}\right) + Q\left(\frac{dQ}{dx}\right), \\ N &= S - QR - \left(\frac{dQ}{dy}\right) + Q\left(\frac{dQ}{dx}\right); \end{aligned}$$

тогда получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dt du}\right) - \frac{M}{4Q^2q}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{N}{4Q^2p}\left(\frac{dz}{du}\right) - \frac{T}{4Q^2pq}z = 0,$$

и его, стало быть, надо привести к виду

$$\left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + \frac{m}{t+u} \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{m}{t+u} \left(\frac{dz}{du}\right) + \frac{n}{(t+u)^2} z = 0,$$

интегрируемость которого мы выше установили для тех случаев, когда $n = (m+i)(m-i-1)$, где i — целое положительное число, не исключая нуля. Итак, для этого необходимо, чтобы было

$$M = -\frac{4mQ^2q}{t+u}, \quad N = -\frac{4mQ^2p}{t+u}, \quad T = -\frac{4nQ^2pq}{(t+u)^2}.$$

А чтобы имели место условия для интегрируемости выражений t и u , положим $Q = \frac{\varphi'(y)}{\pi'(x)}$, а также

$$p = a\pi'(x) \quad \text{и} \quad q = b\pi'(x),$$

тогда

$$t = a\pi(x) + a\varphi(y) \quad \text{и} \quad u = b\pi(x) - b\varphi(y).$$

Отсюда получаем

$$M + N = 2S + 2Q \left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\frac{4m(a+b)Q^2\pi'(x)}{t+u},$$

$$M - N = 2QR + 2 \left(\frac{dQ}{dy}\right) = \frac{4m(a-b)Q^2\pi'(x)}{t+u},$$

и, далее,

$$R = \frac{2m(a-b)Q\pi'(x)}{t+u} - \frac{1}{Q} \left(\frac{dQ}{dy}\right),$$

$$S = -\frac{2m(a+b)Q^2\pi'(x)}{t+u} - Q \left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

$$T = -\frac{4nabQ^2\pi''(x)\pi'(x)}{(t+u)^2} = -\frac{4nab\varphi'(y)\varphi'(y)}{(t+u)^2}.$$

Имеем $Q = \frac{\varphi'(y)}{\pi'(x)}$; следовательно,

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = \frac{\varphi''(y)}{\pi'(x)}, \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\frac{\pi''(x)\varphi'(y)}{\pi'(x)\pi'(x)}$$

и

$$t+u = (a+b)\pi(x) + (a-b)\varphi(y).$$

Отсюда находим

$$R = \frac{2m(a-b)\varphi'(y)}{t+u} - \frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)} \quad \text{и} \quad \frac{S}{Q^2} = -\frac{2m(a+b)\pi'(x)}{t+u} + \frac{\pi''(x)}{\pi'(x)}.$$

С целью упростить уравнение рассмотрим главным образом два случая, а именно: $b = a$ и $b = -a$. В первом случае $t+u = 2a\pi(x)$, и наше уравнение принимает вид

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{\varphi'(y)}{\pi'(x)}\right)^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)} \left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{\varphi'(y)}{\pi'(x)}\right)^2 \left[\frac{\pi''(x)}{\pi'(x)} - \frac{2m\pi'(x)}{\pi(x)}\right] \left(\frac{z}{dx}\right) - n \left(\frac{\varphi'(y)}{\pi(x)}\right)^2 z = 0.$$

Во втором случае $b = -a$ имеем $t + u = 2a\varphi(y)$ и

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{\varphi'(y)}{\pi'(x)}\right)^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left[\frac{2m\varphi'(y)}{\varphi(y)} - \frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3}\right] \left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{\varphi'(y)}{\pi'(x)}\right)^2 \frac{\pi''(x)}{\pi'(x)} \left(\frac{dz}{dx}\right) + n \left(\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2 z = 0.$$

Оба уравнения допускают интегрирование в случаях $n = (m+i)(m-i-1)$.

СЛЕДСТВИЕ 1

331. Последние два уравнения отличаются между собой только перестановкой переменных x и y ; поэтому достаточно рассмотреть какое-либо из них. В первом случае нужно воспользоваться преобразованием

$$t = \pi(x) + \varphi'(y) \quad \text{и} \quad u = \pi'_1(x) - \varphi(y),$$

а во втором случае — преобразованием

$$t = \pi(x) + \varphi(y) \quad \text{и} \quad u = \varphi(y) - \pi'_1(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

332. Эти уравнения могут быть представлены в более прозрачной форме, а именно, первое в виде

$$\frac{1}{[\varphi'(y)]^2} \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \frac{1}{[\pi'(x)]^2} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3} \left(\frac{dz}{dy}\right) + \left(\frac{\pi''(x)}{[\pi'(x)]^3} - \frac{2m}{\pi(x)\pi'(x)}\right) \left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{n}{[\pi(x)]^2} z = 0,$$

а второе в виде

$$\frac{1}{[\pi'(x)]^2} \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \frac{1}{[\pi'(x)]^2} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left[\frac{2m}{\varphi(y)\varphi'(y)} - \frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3}\right] \left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{\pi''(x)}{[\pi'(x)]^3} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{n}{[\varphi(y)]^2} z = 0.$$

333. Положим $\pi'(x) = a$ и $\varphi'(y) = b$. Тогда $\pi(x) = ax$ и $\varphi(y) = by$, и значит, $\pi''(x) = 0$ и $\varphi''(y) = 0$; тогда первое уравнение дает

$$\frac{1}{b^2} \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \frac{2m}{a^2x} \left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{n}{a^2x^2} z = 0,$$

что сводится к прежде решенному уравнению посредством преобразования

$$t = ax + by \quad \text{и} \quad u = ax - by.$$

Второе же уравнение дает

$$\frac{1}{b^2} \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{2m}{b^2y} \left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{n}{b^2y^2} z = 0,$$

что сводится к прежде решенному уравнению посредством преобразования

$$t = ax + by \quad \text{и} \quad u = by - ax.$$

Оба уравнения интегрируемы в случае

$$n = (m + i)(m - i - 1).$$

Путем введения переменных t и u в обоих случаях получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dt\,du}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{m}{t+u}\left(\frac{dz}{du}\right) + \frac{n}{(t+u)^2}z = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

334. Если взять n равным нулю, то оба уравнения:

$$\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

и

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{2m}{y}\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

будут интегрируемы, когда m — целое число и, следовательно, число $2m$ — четное.

СЛЕДСТВИЕ 2

335. Таким образом, налицо замечательные по своей простоте уравнения, состоящие только из трех членов, которые допускают интегрирование в бесконечном числе случаев. Интеграл в этих случаях легко получается на основании § 328, если только вместо x и y писать t и u .

СЛУЧАЙ 2

336. Пусть $\pi'(x) = ax^\mu$ и $\varphi'(y) = b$, тогда

$$\pi(x) = \frac{1}{\mu+1}ax^{\mu+1} \quad \text{и} \quad \varphi(y) = by,$$

а также

$$\pi''(x) = \mu ax^{\mu-1} \quad \text{и} \quad \varphi''(y) = 0.$$

Тогда первое уравнение дает

$$\frac{1}{b^2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \frac{1}{a^2x^{2\mu}}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{\mu - 2m\mu - 2m}{a^2x^{2\mu+1}}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{n(\mu+1)^2}{a^2x^{2\mu+2}}z = 0,$$

что сводится к решенному выше уравнению, если положить

$$t = \frac{1}{\mu+1}ax^{\mu+1} + by \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{\mu+1}ax^{\mu+1} - by.$$

Второе же уравнение дает

$$\frac{1}{b^2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \frac{1}{a^2x^{2\mu}}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{2m}{b^2y}\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{\mu}{a^2x^{2\mu+1}}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{n}{b^2y^2}z = 0,$$

решение которого получаем, положив

$$t = \frac{1}{\mu+1}ax^{\mu+1} + by \quad \text{и} \quad u = by - \frac{1}{\mu+1}ax^{\mu+1}.$$

Оба эти уравнения допускают интегрирование, если $n = (m + i)(m - i - 1)$.

СЛЕДСТВИЕ 1

337. Для первого из этих уравнений следует особо отметить тот случай, когда $m = \frac{\mu}{2\mu+2}$ и $n = 0$. Тогда получим

$$\frac{a^2}{b^2} x^{2\mu} \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right).$$

Это уравнение интегрируемо, если $\frac{\mu}{2\mu+2}$ равно целому числу m , положительному или отрицательному.

СЛЕДСТВИЕ 2

338. Или же, поскольку $\mu = -\frac{2m}{2m-1}$, уравнение

$$\frac{a^2}{b^2} x^{-\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right),$$

то есть

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right)$$

интегрируемо, если m — целое число, положительное или отрицательное. Приведение выполняется, если положить

$$t = -(2m-1) a x^{-\frac{1}{2m-1}} + by,$$

$$u = -(2m-1) a x^{-\frac{1}{2m-1}} - by.$$

СЛУЧАЙ 3

339. Пусть $\pi'(x) = ax^\mu$ и $\varphi'(y) = by^\nu$, тогда

$$\pi(x) = \frac{1}{\mu+1} ax^{\mu+1} \quad \text{и} \quad \varphi(y) = \frac{1}{\nu+1} by^{\nu+1},$$

а также

$$\pi''(x) = \mu ax^{\mu-1} \quad \text{и} \quad \varphi''(y) = \nu by^{\nu-1}.$$

Первое уравнение сводится к

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2 y^{2\nu}} \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) - \frac{1}{a^2 x^{2\mu}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) - \frac{\nu}{b^2 y^{2\nu+1}} \left(\frac{dz}{dy} \right) + \\ + \frac{\mu - 2m\mu - 2m}{a^2 x^{2\mu+1}} \left(\frac{dz}{dx} \right) - \frac{n(\mu+1)^2}{a^2 x^{2\mu+2}} z = 0. \end{aligned}$$

Приведение [к интегрируемому виду] выполняем, положив

$$t = \frac{1}{\mu+1} ax^{\mu+1} + \frac{1}{\nu+1} by^{\nu+1}$$

и

$$u = \frac{1}{\mu+1} ax^{\mu+1} - \frac{1}{\nu+1} by^{\nu+1}.$$

Второе же уравнение получается в виде

$$\frac{1}{b^2 y^{2\nu}} \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) - \frac{1}{a^2 x^{2\mu}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) + \frac{2m\nu + 2m - \nu}{b^2 y^{2\nu+1}} \left(\frac{dz}{dy} \right) + \frac{\mu}{a^2 x^{2\mu+1}} \left(\frac{dz}{dx} \right) + \frac{n(\nu+1)^2}{b^2 y^{2\nu+2}} z = 0,$$

и приводится посредством подстановки

$$t = \frac{1}{\mu+1} a x^{\mu+1} + \frac{1}{\nu+1} b y^{\nu+1}$$

и

$$u = -\frac{1}{\mu+1} a x^{\mu+1} + \frac{1}{\nu+1} b y^{\nu+1}.$$

Поскольку здесь встречается только отношение между a и b , то можно в первом случае положить

$$t = \frac{1}{2} x^{\mu+1} + \frac{(\mu+1)b}{2(\nu+1)a} y^{\nu+1}$$

и

$$u = \frac{1}{2} x^{\mu+1} - \frac{(\mu+1)b}{2(\nu+1)a} y^{\nu+1},$$

так что

$$t + u = x^{\mu+1}.$$

Тогда выражение интеграла становится проще.

СЛЕДСТВИЕ 1

340. Если в первом уравнении положить $\mu = -\frac{2m}{2m-1}$, в нем пропадет один член и получается

$$\frac{1}{b^2 y^{2\nu}} \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) - \frac{1}{a^2} x^{2m-1} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) - \frac{\nu}{b^2 y^{2\nu+1}} \left(\frac{dz}{dy} \right) - \frac{n}{(2m-1)^2 a^2} x^{2m-1} z = 0.$$

Если принять $a = b$ и $\nu = -\frac{2m}{2m-1}$, получаем

$$y^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) - x^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) + \frac{2m}{2m-1} y^{\frac{2m+1}{2m-1}} \left(\frac{dz}{dy} \right) - \frac{n}{(2m-1)^2} x^{\frac{2}{2m-1}} z = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

341. Далее, если в первом уравнении принять $\nu = \mu$ и $\mu = 2m\mu - 2m = -\mu$, то есть $m = \frac{\mu}{\mu+1}$, получается

$$\frac{1}{b^2 y^{2\mu}} \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) - \frac{1}{a^2 x^{2\mu}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) - \frac{\mu}{b^2 y^{2\mu+1}} \left(\frac{dz}{dy} \right) - \frac{\mu}{a^2 x^{2\mu+1}} \left(\frac{dz}{dx} \right) - \frac{n(\mu+1)^2}{a^2 x^{2\mu+2}} z = 0.$$

Это уравнение интегрируемо, если

$$n = - \frac{[\mu + (\mu + 1) i][(\mu + 1) i + 1]}{(\mu + 1)^2},$$

то есть

$$n = - \left(i + \frac{\mu}{\mu + 1} \right) \left(i + \frac{1}{\mu + 1} \right).$$

ПОЯСНЕНИЕ

342. Таким образом, мы получили весьма большое количество довольно простых уравнений, которые можно проинтегрировать с помощью изложенного здесь метода. Но мы здесь рассмотрим главным образом два случая, из которых первый,

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} x^{2m-1} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right),$$

был введен в связи с определением движения струн переменной толщины¹⁾, а второй, которому соответствует уравнение

$$\frac{a^2}{b^2} \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) - \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) - \frac{2m}{x} \left(\frac{dz}{dx} \right) = 0,$$

замечателен тем, что мы приходим к такой форме уравнения при исследовании распространения звука²⁾. Стало быть, эти два уравнения больше других заслуживают того, чтобы были даны их интегралы в тех случаях, когда это возможно.

ЗАДАЧА 54

343. Пусть предложено дифференциальное уравнение

$$\frac{a^2}{b^2} \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) - \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) - \frac{2m}{x} \left(\frac{dz}{dx} \right) = 0.$$

Найти его полный интеграл в том случае, когда m — целое положительное или отрицательное число.

¹⁾ См, например, работы Эйлера (№ 287 и 442 по списку Энестрема): «О колебательном движении струн неодинаковой толщины» (De motu vibratorio cordarum inaequaliter crassarum, Novi comment. acad. Sc. Petrop. 9 (1762/3), 1764, стр. 246) и «О колебательном движении струн, толщина которых изменяется по произвольному закону» (De motu vibratorio cordarum crassitie utcumque variabili praeditarum), Novi comment. acad. Sc. Petrop., 17 (1772), 1773, стр. 432; также в Opera Omnia, Ser. II, vol. 8 и 9. [Ф. Э.]

²⁾ См. работы Эйлера (№ 306, 307, 319 по списку Энестрема): «Дополнение к изысканиям о распространении звука» (Supplément aux recherches sur la propagation du son), Mém. de l'acad. d. Sc. de Berlin, 15 (1759), 1766, стр. 210; «Продолжение изысканий о распространении звука» (Continuation des recherches sur la propagation du son) там же, стр. 241; «Изыскание об интегрировании уравнения

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) + \frac{b}{x} \left(\frac{dz}{dx} \right) + \frac{c}{x^2} z$$

(Recherches sur l'intégration de l'équation...), Miscellanea Taurin, 3, (1762/5), 1766 стр. 60; также в Opera Omnia, Ser. III, vol. I и Ser. I, vol. 23. [Ф. Э.]

РЕШЕНИЕ

После подстановки $t = \frac{1}{2}x + \frac{b}{2a}y$ и $u = \frac{1}{2}x - \frac{b}{2a}y$ наше уравнение принимает вид

$$\left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + \frac{m}{t+u} \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{m}{t+u} \left(\frac{dz}{du}\right) = 0.$$

Здесь $t+u = x$. Положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= f\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F\left(\frac{ax-by}{2a}\right), \\ \mathfrak{B} &= x \left[f'\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F'\left(\frac{ax-by}{2a}\right) \right], \\ \mathfrak{C} &= x^2 \left[f''\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F''\left(\frac{ax-by}{2a}\right) \right], \\ \mathfrak{D} &= x^3 \left[f'''\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F'''\left(\frac{ax-by}{2a}\right) \right], \\ \mathfrak{E} &= x^4 \left[f^{IV}\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F^{IV}\left(\frac{ax-by}{2a}\right) \right], \\ \mathfrak{F} &= x^5 \left[f^V\left(\frac{ax+by}{2a}\right) + F^V\left(\frac{ax-by}{2a}\right) \right] \end{aligned}$$

и т. д.

В случаях, допускающих интегрирование, имеем при отрицательных m :

если $m = 0$, $z = \mathfrak{B}$;

если $m = -1$, $z = \mathfrak{A} - \frac{1}{2} \mathfrak{B}$;

если $m = -2$, $z = \mathfrak{A} - \frac{2}{4} \mathfrak{B} + \frac{1}{4 \cdot 3} \mathfrak{C}$;

если $m = -3$, $z = \mathfrak{A} - \frac{3}{6} \mathfrak{B} + \frac{3}{6 \cdot 5} \mathfrak{C} - \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} \mathfrak{D}$;

если $m = -4$, $z = \mathfrak{A} - \frac{4}{8} \mathfrak{B} + \frac{6}{8 \cdot 7} \mathfrak{C} - \frac{4}{8 \cdot 7 \cdot 6} \mathfrak{D} + \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} \mathfrak{E}$;

если $m = -5$, $z = \mathfrak{A} - \frac{5}{10} \mathfrak{B} + \frac{10}{10 \cdot 9} \mathfrak{C} - \frac{10}{10 \cdot 9 \cdot 8} \mathfrak{D} + \frac{5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} \mathfrak{E} - \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \mathfrak{F}$

и т. д.

Для положительных значений m имеем:

если $m = 1$, $xz = \mathfrak{A}$;

если $m = 2$, $x^3z = \mathfrak{A} - \frac{1}{2} \mathfrak{B}$;

если $m = 3$, $x^5z = \mathfrak{A} - \frac{2}{4} \mathfrak{B} + \frac{1}{4 \cdot 3} \mathfrak{C}$;

если $m = 4$, $x^7z = \mathfrak{A} - \frac{3}{6} \mathfrak{B} + \frac{3}{6 \cdot 5} \mathfrak{C} - \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} \mathfrak{D}$;

если $m = 5$, $x^9z = \mathfrak{A} - \frac{4}{8} \mathfrak{B} + \frac{6}{8 \cdot 7} \mathfrak{C} - \frac{4}{8 \cdot 7 \cdot 6} \mathfrak{D} + \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} \mathfrak{E}$;

если $m = 6$, $x^{11}z = \mathfrak{A} - \frac{5}{10} \mathfrak{B} + \frac{10}{10 \cdot 9} \mathfrak{C} - \frac{10}{10 \cdot 9 \cdot 8} \mathfrak{D} + \frac{5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} \mathfrak{E} - \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \mathfrak{F}$

и т. д.

Итак, эти выражения в случае $m = -i$ дают значение z , а в случае $m = i+1$ они дают значение $x^{2i+1}z$.

ПОЯСНЕНИЕ

344. Значение t и u здесь взяты так, чтобы было $t + u = x$; целесообразно, чтобы именно эти значения были использованы как аргументы произвольных функций. В самом деле, хотя $f\left(\frac{ax+by}{2a}\right)$ является также функцией аргумента $ax+by$, но функции, получающиеся отсюда при дифференцировании, имеют отличие. А именно, если положить

$$f\left(\frac{ax+by}{2a}\right) = \varphi(ax+by),$$

то дифференцирование дает

$$\frac{a dx + b dy}{2a} f'\left(\frac{ax+by}{2a}\right) = (a dx + b dy) \varphi'(ax+by),$$

откуда

$$f'\left(\frac{ax+by}{2a}\right) = 2a\varphi'(ax+by).$$

Таким образом, производные не равны, несмотря на то, что сами функции были равны между собой. Подобным же образом получаем

$$f''\left(\frac{ax+by}{2a}\right) = 4a^2\varphi''(ax+by),$$

$$f'''\left(\frac{ax+by}{2a}\right) = 8a^3\varphi'''(ax+by)$$

и т. д.

ЗАДАЧА 55

345. Предложено дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{2m-1} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right).$$

Найти его полный интеграл в тех случаях, когда m — целое положительное или отрицательное число.

РЕШЕНИЕ

Введем новые переменные t и u так, что

$$t = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2m-1}} - \frac{b}{2(2m-1)a} y \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2m-1}} + \frac{b}{2(2m-1)a} y.$$

Тогда наше уравнение приводится к виду

$$\left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + \frac{m}{t+u} \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{m}{t+u} \left(\frac{dz}{du}\right) = 0,$$

где

$$t + u = x^{-\frac{1}{2m-1}}.$$

Положим

$$\mathfrak{A} = f(t) + F(u), \quad \mathfrak{B} = x^{-\frac{1}{2m-1}} [f'(t) + F'(u)],$$

$$\mathfrak{C} = x^{-\frac{2}{2m-1}} [f''(t) + F''(u)], \quad \mathfrak{D} = x^{-\frac{3}{2m-1}} [f'''(t) + F'''(u)],$$

$$\mathfrak{E} = x^{-\frac{4}{2m-1}} [f^{IV}(t) + F^{IV}(u)], \quad \mathfrak{F} = x^{-\frac{5}{2m-1}} [f^V(t) + F^V(u)]$$

и т. д.

Рассмотрим вкратце сперва случаи, когда m , начиная с нуля, уменьшаеся, принимая отрицательные значения.

I. Когда $m = 0$, имеем уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right);$$

его интеграл

$$z = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{b}{2a}y\right) + F\left(\frac{1}{2}x - \frac{b}{2a}y\right).$$

II. Когда $m = -1$, с помощью подстановки

$$t = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} + \frac{b}{6a}y \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} - \frac{b}{6a}y$$

для уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{2}{3}} \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right)$$

получаем интеграл

$$z = f_i(t) + F(u) - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}[f'(t) + F'(u)].$$

III. Когда $m = -2$, с помощью подстановки

$$t = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{5}} + \frac{b}{10a}y \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{5}} - \frac{b}{10a}y$$

для уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{8}{5}} \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right)$$

получаем интеграл

$$z = f(t) + F(u) - \frac{2}{4}x^{\frac{1}{5}}[f'(t) + F'(u)] + \frac{1}{4 \cdot 3}x^{\frac{2}{5}}[f''(t) + F''(u)].$$

IV. Когда $m = -3$, с помощью подстановки

$$t = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{7}} + \frac{b}{14a}y \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{7}} - \frac{b}{14a}y$$

для уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{12}{7}} \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right)$$

получаем интеграл

$$z = f(t) + F(u) - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{7}}[f'(t) + F'(u)] + \frac{3}{6 \cdot 5}x^{\frac{2}{7}}[f''(t) + F''(u)] - \\ - \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4}x^{\frac{3}{7}}[f'''(t) + F'''(u)].$$

V. Когда $m = -4$, с помощью подстановки

$$t = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{9}} + \frac{b}{18a} y \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{9}} - \frac{b}{18a} y$$

для уравнения

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{16}{9}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right)$$

получаем интеграл

$$z = f(t) + F(u) - \frac{4}{8} x^{\frac{1}{9}} [f'(t) + F'(u)] + \frac{6}{8 \cdot 7} x^{\frac{2}{9}} [f''(t) + F''(u)] - \\ - \frac{4}{8 \cdot 7 \cdot 6} x^{\frac{3}{9}} [f'''(t) + F'''(u)] + \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} x^{\frac{4}{9}} [f^{IV}(t) + F^{IV}(u)].$$

И так далее.

Во втором случае, когда m имеет положительные значения, интегралы выражаются следующим образом:

I. Когда $m = 1$, то есть когда

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} x^4 \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right),$$

с помощью подстановки

$$t = \frac{1}{2} x^{-1} - \frac{b}{2a} y \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{2} x^{-1} + \frac{b}{2a} y$$

получаем интеграл

$$x^{-1} z = f(t) + F(u) \quad \text{или} \quad z = x [f(t) + F(u)].$$

II. Когда $m = 2$, то есть когда

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{8}{3}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right),$$

с помощью подстановки

$$t = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{b}{6a} y \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{b}{6a} y$$

получаем интеграл

$$z = x [f(t) + F(u)] - \frac{1}{2} x^{\frac{2}{3}} [f'(t) + F'(u)].$$

III. Когда $m = 3$, то есть когда

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{12}{5}} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right),$$

с помощью подстановки

$$t = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{5}} - \frac{b}{10a} y \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{5}} + \frac{b}{10a} y$$

получаем интеграл

$$z = x [f(t) + F(u)] - \frac{2}{4} x^{\frac{4}{5}} [f'(t) + F'(u)] + \frac{1}{4 \cdot 3} x^{\frac{3}{5}} [f''(t) + F''(u)].$$

IV. Когда $m=4$, то есть когда

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{16}{7}} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

с помощью подстановки

$$t = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{7}} = \frac{b}{14a} y \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{7}} + \frac{b}{14a} y$$

получаем интеграл

$$z = x[f(t) + F(u)] - \frac{3}{6} x^{\frac{6}{7}} [f'(t) + F'(u)] + \frac{3}{6 \cdot 5} x^{\frac{5}{7}} [f''(t) + F''(u)] - \\ - \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} x^{\frac{4}{7}} [f'''(t) + F'''(u)].$$

V. Когда $m=5$, то есть когда

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^{\frac{20}{9}} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

с помощью подстановки

$$t = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{9}} - \frac{6}{18a} y \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{9}} + \frac{6}{18a} y$$

получаем интеграл

$$z = x[f(t) + F(u)] - \frac{4}{8} x^{\frac{8}{9}} [f'(t) + F'(u)] + \frac{6}{8 \cdot 7} x^{\frac{7}{9}} [f''(t) + F''(u)] - \\ - \frac{4}{8 \cdot 7 \cdot 6} x^{\frac{6}{9}} [f'''(t) + F'''(u)] + \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} x^{\frac{5}{9}} [f^{IV}(t) + F^{IV}(u)]$$

и т. д.*

Отсюда закон образования последующих выражений очевиден.

ПОЯСНЕНИЕ 1

346. Эти случаи интегрируемости совпадают с теми, которые обнаруживаются у так называемого уравнения Риккати. В самом деле известно, что это уравнение

$$dy + y^2 dx = ax^{-\frac{4m}{2m-1}} dx$$

может быть проинтегрировано, когда m — целое число, положительное или отрицательное¹⁾. Это уравнение довольно существенно связано с нашим уравнением [в частных производных], что можно показать следующим образом. Если задать уравнение общего вида

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = X \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$$

и для нахождения частных интегралов положить $z = e^{\alpha y} v$, где v — функция одного только x , то

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{\alpha y} \frac{dv}{dx} \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = e^{\alpha y} \frac{d^2v}{dx^2}.$$

¹⁾ См. интегральное исчисление, т. I, § 436 и т. II, § 943. [Ф. Э.]

С другой стороны, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \alpha^2 e^{\alpha y} v$, откуда получается уравнение $\alpha^2 v = \frac{X d^2 v}{dx^2}$; если, далее, в этом уравнении положить $v = e^{\int p dx}$, то получается $\frac{\alpha^2 dx}{X} = dp + p^2 dx$; но если $X = Ax^{\frac{4m}{2m-1}}$, как в нашем случае, то получается уравнение

$$dp + p^2 dx = \alpha x^{-\frac{4m}{2m-1}} dx.$$

Итак, надо полагать, что не случайно оба уравнения интегрируются в одних и тех же случаях. Следует, однако, отметить, что когда $m = \infty$, а это для уравнения Риккати не представляет никаких затруднений, в нашем случае интегрирование не удастся. Дело в том, что получается уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} x^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

приведение которого методом, изложенным в § 330, не удастся. В самом деле, так как

$$Q = \frac{bx}{a}, \quad R = 0, \quad S = 0 \quad \text{и} \quad T = 0,$$

мы находим для новых переменных

$$t = \int p \left(dx + \frac{bx dy}{a}\right) \quad \text{и} \quad u = \int q \left(dx - \frac{bx dy}{a}\right);$$

откуда, поскольку $M = \frac{b^2 x}{a^2} = N$, получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dt du}\right) - \frac{1}{4qx} \left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{1}{4px} \left(\frac{dz}{du}\right) = 0.$$

Полагая

$$p = \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad q = \frac{1}{x},$$

так что

$$t = lx + \frac{by}{a} \quad \text{и} \quad u = lx - \frac{by}{a},$$

преобразуем уравнение к виду

$$\left(\frac{d^2z}{dt du}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{dz}{du}\right) = 0.$$

Как это уравнение интегрировать, не ясно.

ПОЯСНЕНИЕ 2

347. Все же для уравнения $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = x^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ можно найти бесконечное количество частных интегралов, которые содержатся в выражении $z = Ax^\lambda e^{\mu y}$. Действительно, поскольку тогда имеем

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \mu Ax^\lambda e^{\mu y} \quad \text{и} \quad \left(\frac{dz}{dx}\right) = \lambda Ax^{\lambda-1} e^{\mu y},$$

получим

$$\mu^2 Ax^\lambda e^{\mu y} = \lambda(\lambda - 1) Ax^\lambda e^{\mu y},$$

так что

$$\mu = \sqrt{\lambda(\lambda - 1)},$$

откуда для любого λ получаются два значения μ , и, следовательно,

$$z = Ax^\lambda e^{\mu y} \sqrt{\lambda(\lambda - 1)} + Bx^\lambda y^{-\nu} \sqrt{\lambda(\lambda - 1)},$$

а меняя значение λ можно получить бесконечное количество таких решений. Однако эти решения могут быть еще обобщены. В самом деле, положим $z = x^\lambda e^{\mu y} v$ и посмотрим, обязательно ли v должно быть постоянным. Отсюда следует, что

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \mu x^\lambda e^{\mu y} v + x^\lambda e^{\mu y} \left(\frac{dv}{dy}\right)$$

и

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \lambda x^{\lambda-1} e^{\mu y} v + x^\lambda e^{\mu y} \left(\frac{dv}{dx}\right),$$

а тогда наше уравнение после деления на $x^\lambda e^{\mu y}$ дает

$$\mu^2 v + 2\mu \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 v}{dy^2}\right) = \lambda(\lambda - 1)v + 2\lambda x \left(\frac{dv}{dx}\right) + x^2 \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right).$$

Положим, как выше, $\mu^2 = \lambda(\lambda - 1)$ и пусть будет $v = \alpha lx + \beta y$. Тогда

$$2\beta\mu = 2\alpha\lambda - \alpha, \quad \text{или} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\mu}{2\lambda - 1} = \frac{2\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}}{2\lambda - 1},$$

откуда решение, соответствующее числу λ , принимает вид

$$z = x^\lambda \left[e^{\sqrt{\lambda(\lambda - 1)} y} \left(A + \frac{2\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}}{\mathfrak{A}} lx + \frac{2\lambda - 1}{\mathfrak{A}} y \right) + e^{-\sqrt{\lambda(\lambda - 1)} y} \left(B - \frac{2\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}}{\mathfrak{B}} lx + \frac{2\lambda - 1}{\mathfrak{B}} y \right) \right].$$

Если теперь каким-либо образом менять показатель λ , а также количества A , \mathfrak{A} , B , \mathfrak{B} , можно образовать таким образом бесконечное число членов, и надо считать, что все они вместе взятые дают полный интеграл. Так как для λ можно взять и мнимые значения, положим

$$\lambda = a + b\sqrt{-1}.$$

Тогда

$$\mu = p + q\sqrt{-1},$$

где

$$p^2 - q^2 = a^2 - a - b^2$$

и

$$p^2 + q^2 = \sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 - 2a + 1 + b^2)},$$

так что

$$x^\lambda = x^a [\cos(blx) + \sqrt{-1} \cdot \sin(blx)], \\ e^{\mu y} (\cos qy + \sqrt{-1} \sin qy).$$

Таким образом получаем действительное выражение

$$z = x^a e^{py} \left\{ \begin{aligned} &A \cos(blx + qy) + B[2plx + (2a - 1)y] \cos(blx + qy) - \\ &\quad - B(2qlx + 2by) \sin(blx + qy) \\ &\Im \sin(blx + qy) + \Im[2plx + (2a - 1)y] \sin(blx + qy) + \\ &\quad + \Im(2qlx + 2by) \cos(blx + qy) \end{aligned} \right\},$$

где величины a и b могут быть взяты произвольно, а по ним вычисляются p и q . Если же здесь считать заданными параметры b и q , то остальные a и p вычисляются по ним следующим образом:

$$2a - 1 = q \sqrt{\frac{1}{q^2 - b^2} - 4} \quad \text{и} \quad p = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{q^2 - b^2} - 4}.$$

Поэтому здесь необходимо, чтобы было $q^2 > b^2$ и $q^2 < b^2 + \frac{1}{4}$, или чтобы q^2 лежало между пределами b^2 и $b^2 + \frac{1}{4}$. Если положить $q = c$

и $\sqrt{\frac{1}{q^2 - b^2} - 4} = 2f$, так что

$$\frac{1}{q^2 - b^2} = 4(1 + f^2) \quad \text{или} \quad c^2 - b^2 = \frac{1}{4(1 + f^2)},$$

будем иметь также

$$2a - 1 = 2cf \quad \text{и} \quad p = bf,$$

и тогда формую частных интегралов будет

$$z = x^{cf + \frac{1}{2}} e^{bfy} \left\{ \begin{aligned} &A \cos(blx + cy) + 2Bf(blx + cy) \cos(blx + cy) - 2B(cly + by) \sin(qlx + cy) \\ &\Im \sin(blx + cy) + 2\Im f(blx + cy) \sin(blx + cy) + 2\Im(cly + by) \cos(blx + cy) \end{aligned} \right\}.$$

Если ради краткости ввести угол $blx + cy = \Phi$, получаем

$$z = x^{cf + \frac{1}{2}} e^{bfy} [A \cos(\Phi + \alpha) + Bf(blx + cy) \sin(\Phi + \beta) + B(cly + by) \cos(\Phi + \beta)],$$

где величины $b, c, A, B, \alpha, \beta$ в нашем произволе.

ПОЯСНЕНИЕ 3

348. Можно получить решение уравнения $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = x^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ таким образом:

поло

$$z = x^\lambda e^{\mu y} (mlx + ny),$$

откуда

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \lambda x^{\lambda-1} e^{\mu y} (mlx + ny) + m x^{\lambda-1} e^{\mu y}$$

и

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \mu x^\lambda e^{\mu y} (mlx + ny) + n x^\lambda e^{\mu y}$$

и дифференцируя еще раз, находим

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = x^{\lambda-2} e^{\mu y} [m(2\lambda - 1) + \lambda(\lambda - 1)mlx + \lambda(\lambda - 1)ny]$$

и

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = x^\lambda e^{\mu y} (2\mu n + \mu^2 m x + \mu^2 n y).$$

Отсюда получим сперва $\mu = \sqrt{\lambda(\lambda-1)}$ и далее

$$2n \sqrt{\lambda(\lambda-1)} = m(2\lambda-1),$$

откуда

$$\frac{m}{n} = \frac{2\sqrt{\lambda(\lambda-1)}}{2\lambda-1},$$

так что получается тот же интеграл, который мы указали раньше.



ГЛАВА V

ОСОБОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭТИХ УРАВНЕНИЙ

ЗАДАЧА 56

349. Предложено уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + Rz,$$

где P, Q, R — функции только x . Требуется при помощи подстановки

$$z = M\left(\frac{dv}{dx}\right) + Nv,$$

где M и N — функции одного x , преобразовать наше уравнение в уравнение такого же вида, а именно,

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = F\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + G\left(\frac{dv}{dx}\right) + Hv,$$

где F, G, H — функции одного x .

РЕШЕНИЕ

Так как величины M и N не содержат y , имеем

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = M\left(\frac{d^3v}{dx dy^2}\right) + N\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right).$$

Это выражение в силу уравнения, которое мы лишь предполагаем получить, преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = MF\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) &+ \frac{MdF}{dx}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{MdG}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{MdH}{dx}v. \\ &+ MG \qquad \qquad + MH \qquad \qquad + NH \\ &+ NF \qquad \qquad + NG \end{aligned}$$

Затем для правой части предложенного уравнения наша подстановка дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = M\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) &+ \frac{dM}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{dN}{dx}v, \\ &+ N \end{aligned}$$

и, далее,

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = M \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + \left(\frac{2dM}{dx} + N\right) \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{2dN}{dx}\right) \left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{d^2N}{dx^2} v.$$

Но согласно условию

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + Q \left(\frac{dz}{dx}\right) + Rz,$$

и если теперь подставить сюда найденные только что значения и приравнять нулю слагаемые, умноженные соответственно на

$$\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right), \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right), \left(\frac{dv}{dx}\right) \text{ и } v,$$

каждое в отдельности, то получаются следующие четыре уравнения, а именно

из	получается уравнение
$\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)$	$MF = MP,$
$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$	$\frac{MdF}{dx} + MG + NF = \left(\frac{2dN}{dx} + N\right)P + MQ,$
$\left(\frac{dv}{dx}\right)$	$\frac{MdG}{dx} + MH + NG = \left(\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{2dN}{dx}\right)P + \left(\frac{dM}{dx} + N\right)Q + MR,$
v	$\frac{MdN}{dx} + NH = \frac{d^2N}{dx^2}P + \frac{dN}{dx}Q + NR.$

Отсюда прежде всего очень удобно получаются P , Q и R . В самом деле, первое уравнение дает немедленно $P = F$, а затем второе дает

$$\frac{M dF + 2F dM}{M dx} + G = Q.$$

Исключая же из последних двух уравнений R , получаем

$$\frac{M (N dG - M dH)}{dx} + N^2G = \left(\frac{N d^2M - M d^2N}{dx^2} + \frac{2N dN}{dx}\right)F + \left(\frac{N dM - M dN}{dx} + N^2\right)Q$$

и, подставив сюда найденное значение Q , находим

$$0 = \frac{M^2 dH}{dx} - \frac{MN dG}{dx} + \frac{(N d^2M - M d^2N)}{dx^2} F + \frac{2NF dN}{dx} + \frac{N dM - M dN}{dx} G + \frac{(N dM - M dN)}{dx^2} dF + \frac{N^2 dF}{dx} - \frac{F dM (N dM - M dN)}{M dx^2} - \frac{2N^2 F dM}{M dx}.$$

Умножив это уравнение на $\frac{dx}{M^2}$, мы приведем его к интегрируемому виду и найдем интеграл

$$C = H - \frac{N}{M} G + \frac{N dM - M dN}{M^2 dx} F + \frac{N^2 F}{M^2}.$$

Если теперь ради краткости положим $N = Ms$, то

$$C = H - G_s - F \frac{ds}{dx} + Fs^2$$

или

$$ds + \frac{G}{F} s dx - s^2 dx + \frac{(C-H) dx}{F} = 0.$$

Отсюда определяется либо количество $s = \frac{N}{M}$, либо одна из функций F , G и H . Тогда в предположенном уравнении коэффициенты P , Q и R определяются так:

$$\begin{aligned} \text{I. } P &= F; \\ \text{II. } Q &= G + \frac{dF}{dx} - \frac{2F dM}{M dx}; \end{aligned}$$

из последнего же уравнения выводим

$$R = H + \frac{M dH}{N dx} - \frac{F d^2 N}{N dx^2} - \frac{dN}{N dx} \left(G + \frac{dF}{dx} - \frac{2F dM}{M dx} \right),$$

что, в силу уравнения $N = Ms$, преобразуется к виду

$$R = H + \frac{dH}{s dx} - \frac{G ds}{s dx} - \frac{G dM}{M dx} - \frac{F d^2 s}{s dx^2} - \frac{F d^2 M}{M dx^2} + \frac{2F dM^2}{M^2 dx^2} - \frac{dF ds}{s dx^2} - \frac{dF dM}{M dx^2},$$

а поскольку найденное уравнение при дифференцировании дает

$$0 = dH - G ds - s dG - \frac{F d^2 s}{dx} - \frac{dF ds}{dx} + 2Fs ds + s^2 dF,$$

получим

$$\text{III. } R = H - \frac{G dM}{M dx} + \frac{dG}{dx} - \frac{F d^2 M}{M dx^2} - \frac{2F ds}{dx} + \frac{2F dM^2}{M^2 dx^2} - \frac{s dF}{dx} - \frac{dF dM}{M dx^2}.$$

Таким образом, если уравнение

$$\left(\frac{d^2 v}{dy^2} \right) = F \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) + G \left(\frac{dv}{dx} \right) + Hv$$

допускает решение, то возможно решение также уравнения

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) = P \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) + Q \left(\frac{dz}{dx} \right) + Rz,$$

где

$$z = M \left(\frac{dv}{dx} \right) + Nv = M \left[\left(sv + \left(\frac{dv}{dx} \right) \right) \right].$$

СЛЕДСТВИЕ 1

350. Если положить $M = 1$, так что $z = sv + \left(\frac{dv}{dx} \right)$, то

$$P = F, \quad Q = G + \frac{dF}{dx} \quad \text{и} \quad R = H + \frac{dG}{dx} + \frac{2F ds - s dF}{dx},$$

что не является ограничением для указанного приведения, так как если вместо z писать Mz , то сразу получается также решение соответствующего уравнения.

СЛЕДСТВИЕ 2

351. Итак, если возможно решение уравнения

$$\left(\frac{d^2 v}{dy^2} \right) = F \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) + G \left(\frac{dv}{dx} \right) + Hv,$$

то возможно также решение следующего уравнения:

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = F\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(G + \frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(H + \frac{dG}{dx} - \frac{2F ds - s dF}{dx}\right)z,$$

если только s определяется из уравнения

$$F ds + Gs dx - Fs^2 dx + (C - H) dx = 0,$$

а именно тогда $z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right)$. Коэффициенты F, G, H должны быть функциями одного x .

ПОЯСНЕНИЕ

352. Нам представляется, что это преобразование дает весьма естественный метод для получения таких интегралов [дифференциальных уравнений], которые содержат не только [произвольные] функции, но также их производные. В самом деле, если интеграл уравнения для v есть $v = \varphi(t)$, где t — функция x и y , тогда, поскольку $dv = dt\varphi'(t)$, будет $\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(\frac{dt}{dx}\right)\varphi'(t)$, и мы получим интеграл выводимого отсюда для z уравнения в виде

$$z = s\varphi(t) + \left(\frac{dt}{dx}\right)\varphi'(t).$$

Затем, если имеем, более общим образом $v = u\varphi(t)$, то

$$z = su\varphi(t) + \left(\frac{du}{dx}\right)\varphi(t) + u\left(\frac{dt}{dx}\right)\varphi'(t),$$

что указывает способ перехода к таким уравнениям, интегралы которых, кроме функции $\varphi(t)$, содержат еще ее производные $\varphi'(t)$, а также $\varphi''(t)$, $\varphi'''(t)$ и т. д. Поэтому есть смысл заняться этим преобразованием подробнее.

ЗАДАЧА 57

353. Предполагая, что известно решение уравнения

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{n}{x^2}v,$$

найти другое уравнение вида

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + Rz,$$

которому удовлетворяет

$$z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

РЕШЕНИЕ

При сравнении с предыдущей задачей имеем

$$F = 1, \quad G = \frac{m}{x} \quad \text{и} \quad H = \frac{n}{x^2},$$

так что количество s требуется определить из уравнения

$$ds + \frac{ms dx}{x} - s^2 dx + \left(f - \frac{n}{x^2}\right) dx = 0.$$

После нахождения этой величины, на основании равенства $\frac{dG}{dx} = -\frac{m}{x^2}$, находим искомое уравнение в виде

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{n-m}{x^2} - \frac{2ds}{dx}\right) z,$$

или после подстановки значения ds

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(2f - \frac{m-n}{x^2} + \frac{2ms}{x} - 2s^2\right) z,$$

причем

$$z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

I. Положим сперва, что постоянное количество $f = 0$, так что

$$ds + \frac{ms dx}{x} - s^2 dx - \frac{n dx}{x^2} = 0.$$

Это уравнение имеет частный интеграл $s = \frac{\alpha}{x}$, если $-\alpha + m\alpha - \alpha^2 - n = 0$, то есть $\alpha^2 - (m-1)\alpha + n = 0$, откуда, поскольку $\frac{ds}{dx} = -\frac{\alpha}{x^2}$, получается уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2\alpha - m + n}{x^2} z,$$

где

$$z = \frac{\alpha}{x} v + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Или, если исключить $n = \alpha(m-1-\alpha)$, получаем, что если известно решение уравнения

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\alpha(m-1-\alpha)}{x^2} v,$$

то решением уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{(\alpha-1)(m-\alpha)}{x^2} z$$

будет

$$z = \frac{\alpha}{x} v + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

II. Сохраним значение $f = 0$, а для s будем искать полный интеграл, положив $s = \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{t}$. Тогда, поскольку

$$n = (m-1)\alpha - \alpha^2, \quad \text{имеем } dt + \frac{(2\alpha-m)t dx}{x} + dx = 0$$

и это уравнение после умножения на $x^{2\alpha-m}$ и интегрирования дает

$$t = \frac{cx^{m-2\alpha}}{2\alpha-m+1} - \frac{x}{2\alpha-m+1},$$

откуда

$$s = \frac{acx^{m-2\alpha-1} + \alpha - m + 1}{x(cx^{m-2\alpha-1} - 1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{2\alpha - m + 1}{x(cx^{m-2\alpha-1} - 1)}$$

и

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{\alpha}{x^2} + \frac{(m-2\alpha-1)(m-2\alpha)}{x^2(cx^{m-2\alpha-1} - 1)} + \frac{(m-2\alpha-1)^2}{x^2(cx^{m-2\alpha-1} - 1)^2}.$$

Особо отметим здесь случай $c=0$, когда

$$s = \frac{m-\alpha-1}{x} \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dx} = \frac{-m+\alpha+1}{x^2},$$

так что данному уравнению

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\alpha(m-1-\alpha)}{x^2} v$$

соответствует уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{(\alpha+1)(m-2-\alpha)}{x^2} z,$$

где

$$z = \frac{m-\alpha-1}{x} v + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

В общем случае пусть будет $m-2\alpha-1=\beta$, так что

$$s = \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{x(cx^\beta-1)}$$

и

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta(\beta+1)}{x^2(cx^\beta-1)} + \frac{\beta^2}{x^2(cx^\beta-1)^2}.$$

Таким образом, если задано уравнение

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{2\alpha+\beta+1}{x} \left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{x^2} v,$$

то с его помощью решается уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{2\alpha+\beta+1}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left[(\alpha-1)(\alpha+\beta+1) - \frac{2\beta(\beta+1)}{cx^\beta-1} - \frac{2\beta^2}{(cx^\beta-1)^2} \right] \frac{z}{x^2},$$

где

$$z = \left(\alpha - \frac{\beta}{cx^\beta-1} \right) \frac{v}{x} + \left(\frac{dv}{dx} \right).$$

III. Учтем теперь еще постоянную f , полагая $f = \frac{1}{a^2}$, так что при $n = \alpha(m-1-\alpha)$ имеем

$$ds + \frac{ms}{x} dx - s^2 dx - \frac{\alpha(m-1-\alpha)}{x^2} dx + \frac{dx}{a^2} = 0.$$

При помощи подстановки $s = \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{t}$ это уравнение преобразуется к виду

$$dt - \frac{(m-2\alpha)t}{x} dx + dx = \frac{t^2}{a^2} dx.$$

Пусть $m - 2\alpha = \gamma$, тогда заданное уравнение есть

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{2\alpha + \gamma}{x} \left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\alpha(\alpha + \gamma - 1)}{x^2} v,$$

откуда после нахождения количества s получается уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{2\alpha + \gamma}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha + \alpha\gamma - \gamma}{x^2} - \frac{2ds}{dx}\right) z,$$

то есть

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{2\alpha + \gamma}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \left[\frac{(\alpha - 1)(\alpha + \gamma)}{x^2} + \frac{2dt}{t^2 dx}\right] z,$$

где

$$z = \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{1}{t}\right)v + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Вся задача, таким образом, сведена к нахождению количества t из уравнения

$$dt - \frac{\gamma t dx}{x} + dx = \frac{t^2}{a^2} dx.$$

Для этого положим $t = a - \frac{a^2 du}{u dx}$, тогда получим уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\gamma}{x} \frac{du}{dx} - \frac{2du}{a dx} + \frac{\gamma u}{ax} = 0,$$

которое имеет два решения. Одно получается, если положить

$$u = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{и т. д.},$$

где

$$B = \frac{\gamma A}{\gamma a}, \quad C = \frac{(\gamma - 2)B}{2(\gamma - 1)a}, \quad D = \frac{(\gamma - 4)C}{3(\gamma - 2)a}, \quad E = \frac{(\gamma - 6)D}{4(\gamma - 3)a} \text{ и т. д.},$$

второе же получается, если положить

$$u = Ax^{\gamma+1} + Bx^{\gamma+2} + Cx^{\gamma+3} + Dx^{\gamma+4} + Ex^{\gamma+5} + \text{и т. д.},$$

где

$$B = \frac{(\gamma + 2)A}{(\gamma + 2)a}, \quad C = \frac{(\gamma + 4)B}{2(\gamma + 3)a}, \quad D = \frac{(\gamma + 6)C}{3(\gamma + 4)a}, \quad E = \frac{(\gamma + 8)D}{4(\gamma + 5)a} \text{ и т. д.}$$

Первый из этих двух рядов обрывается, когда γ — целое четное положительное число, а второй, когда γ — целое четное отрицательное. Хотя эти два решения и являются частными, однако мы уже показали выше¹⁾, как по ним найти полный интеграл.

¹⁾ См. Интегральное исчисление, т. II, § 837, а также § 967 и § 1036. Действительно, рассмотренное здесь уравнение получается из уравнения § 967, если положить

$$n=1, \quad a=1, \quad b=0, \quad c=-\gamma, \quad e=-\frac{2}{a}, \quad f=0, \quad g=\frac{\gamma}{a}.$$

В § 1036 уравнение этого же вида интегрируется в квадратурах. [Ф. Э.]

СЛЕДСТВИЕ 1

354. Мы видели выше (§ 333), что уравнение

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{2m}{x} \left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{(m+i)(m-i-1)}{x^2} v$$

интегрируется, если i — произвольное целое число. Отсюда мы заключаем, что уравнение

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\alpha(m-1-\alpha)}{x^2} v$$

допускает интегрирование, когда $\alpha = \frac{1}{2} m + i$, а также когда $\alpha = \frac{1}{2} m - i - 1$,

т. е. когда $m - 2\alpha$ — четное целое положительное или четное целое отрицательное число. Так как $m - 2\alpha = \gamma$, эти случаи совпадают со случаями интегрируемости при определении общего значения s .

СЛЕДСТВИЕ 2

355. Если из данного уравнения удастся определить функцию v , то могут быть решены также и следующие два сходные с данными уравнения:

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{(\alpha-1)(m-\alpha)}{x^2} z$$

и

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{m}{x} \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{(\alpha+1)(m-\alpha-2)}{x^2} z,$$

поскольку для первого уравнения

$$z = \frac{\alpha}{x} v + \left(\frac{dv}{dx}\right),$$

а для второго

$$z = \frac{m-\alpha-1}{x} v + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3

356. Кроме уравнения указанного типа, этим способом можно решить также уравнения другого вида, в которых последний член не имеет вида $\frac{n}{x^2} z$. Эти решения получаются, когда для количества s берут его общее значение, и учитывается постоянное f .

ПРИМЕР 1

357. Пусть дано уравнение $\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, для которого

$$v = \pi(x+y) + \varphi(x-y);$$

найти более сложные уравнения, которые могут быть с его помощью проинтегрированы.

Поскольку здесь $F = 1$, $G = 0$ и $H = 0$, нужно решить уравнение

$$ds - s^2 dx + C dx = 0.$$

Тогда интегралом уравнения

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) - \frac{2ds}{dx} z$$

будет

$$z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Сперва положим $C = 0$; тогда $\frac{ds}{s^2} = dx$ и $\frac{1}{s} = c - x$, то есть $s = \frac{1}{c-x}$, откуда $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{(c-x)^2}$, и здесь можно без всякого ограничения принять, что $c = 0$. Следовательно, уравнение

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) - \frac{2}{x^2} z$$

имеет интеграл

$$z = -\frac{1}{x} [\pi(x+y) + \varphi(x-y)] + \pi'(x+y) + \varphi'(x-y).$$

Пусть далее $C = a^2$, тогда вследствие того, что $ds = dx(s^2 - a^2)$, будем иметь

$$x = \frac{1}{2a} \int \frac{s-a}{s+a} - \frac{1}{2a} \int \frac{1}{s+a},$$

откуда

$$\frac{s-a}{s+a} = Ae^{2ax} \quad \text{и} \quad s = \frac{a(1 + Ae^{2ax})}{1 - Ae^{2ax}},$$

и, далее,

$$\frac{ds}{dx} = \frac{4Aa^2 e^{2ax}}{(1 - Ae^{2ax})^2}.$$

Таким образом, уравнение

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) - \frac{8Aa^2 e^{2ax}}{(1 - Ae^{2ax})^2} z$$

имеет интеграл

$$z = \frac{a(1 + Ae^{2ax})}{1 - Ae^{2ax}} v + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Напротив, если $C = -a^2$, тогда вследствие того, что $ds = dx(a^2 + s^2)$, будем иметь

$$ax + b = \operatorname{arctg} \frac{s}{a},$$

откуда

$$s = a \operatorname{tg}(ax + b) \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dx} = \frac{a^2}{\cos^2(ax + b)}.$$

Следовательно, интеграл уравнения

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) - \frac{2a^2}{\cos^2(ax + b)} z$$

есть

$$z = \frac{a \sin(ax+b)}{\cos(ax+b)} v + \left(\frac{dv}{dx} \right).$$

ПРИМЕР 2

358. Предположим, что интеграл уравнения

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2} \right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) - \frac{2}{x^2} v$$

известен; найти другие уравнения, которые с его помощью интегрируются.

Для этого случая мы имеем

$$ds - s^2 dx + \left(C + \frac{2}{x^2} \right) dx = 0.$$

После решения этого уравнения мы получим интеграл уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2} \right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{ds}{dx} \right) z$$

в виде

$$z = sv + \left(\frac{dv}{dx} \right).$$

I. Пусть сперва $C=0$, тогда уравнение

$$ds - s^2 dx + \frac{2ds}{x^2} = 0$$

имеет частные решения $s = \frac{1}{x}$ и $s = -\frac{2}{x}$. Поэтому положим $s = \frac{1}{x} + \frac{1}{t}$, тогда

$$dt + \frac{2t dx}{x} + dx = 0,$$

откуда

$$tx^2 + \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3} a^3.$$

Следовательно,

$$t = \frac{a^3 - x^3}{3x^2} \quad \text{и} \quad s = \frac{a^3 + 2x^3}{x(a^3 - x^3)},$$

так что

$$\frac{ds}{dx} + \frac{1}{x^2} = \frac{3x(2a^3 + x^3)}{(a^3 - x^3)^2}.$$

Таким образом, уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2} \right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) - \frac{6x(2a^3 + x^3)}{(a^3 - x^3)^2} z$$

имеет интеграл

$$z = \frac{a^3 + 2x^3}{x(a^3 - x^3)} v + \left(\frac{dv}{dx} \right).$$

II. Пусть $C = \frac{1}{c^2}$, тогда, положив $s = \frac{1}{x} + \frac{1}{t}$, имеем

$$dt + \frac{2t dx}{x} + dx = \frac{t^2 dx}{c^2}.$$

В частности, этому уравнению удовлетворяет $t = c + \frac{c^2}{x}$, так что

$$s = \frac{c^2 + cx + x^2}{cx(c+x)} \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dx} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(c+x)^2}.$$

Итак, интеграл уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \frac{2}{(c+x)^2} z$$

есть

$$z = \frac{c^2 + cx + x^2}{cx(c+x)} v + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

Для того же, чтобы найти полный интеграл для t , положим

$$t = c + \frac{c^2}{x} + \frac{1}{u},$$

так что

$$du + \frac{2u dx}{c} + \frac{dx}{c^2} = 0 \quad \text{или} \quad dx = -\frac{c^2 du}{1 + 2cu},$$

откуда

$$x = b - \frac{c}{2} l(1 + 2cu)$$

и, следовательно,

$$u = \frac{e^{\frac{2(b-x)}{c}} - 1}{2c}.$$

Таким образом,

$$t = c + \frac{c^2}{x} + \frac{2c}{e^{\frac{2(b-x)}{c}} - 1},$$

$$s = \frac{1}{x} + \frac{x \left(e^{\frac{2(b-x)}{c}} - 1 \right)}{c \left[(c+x) e^{\frac{2(b-x)}{c}} + x - c \right]}$$

и, наконец,

$$\frac{ds}{dx} + \frac{1}{x^2} = -\frac{dt}{t^2 dx} = \frac{1}{t^2} \left(1 + \frac{2t}{x} - \frac{t^2}{c^2} \right) = \frac{1}{t^2} \left[\frac{c^2}{x^2} - \frac{4e^{\frac{2(b-x)}{c}}}{\left(e^{\frac{2(b-x)}{c}} - 1 \right)^2} \right].$$

ПОЯСНЕНИЕ

359. Выше, мы убедились, что уравнение

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) - \frac{i(i+1)}{x^2} v$$

допускает интегрирование, так как оно получается из общей формы (§ 354), если принять $m = 0$. Применяя к этому уравнению изложенный метод и найдя из уравнения

$$ds - s^2 dx + \left[j + \frac{i(i+1)}{x^2} \right] dx = 0$$

количество s , получим интеграл уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left[2f + \frac{i(i+1)^2}{x^2} - 2s^2\right] z$$

в виде

$$z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right).$$

I. Если при этом взять $f = 0$, получим, в частности, решения $s = \frac{i}{x}$ и $s = -\frac{i-1}{x}$, но тогда форма интегрируемого уравнения не меняется.

Если, однако, положить $s = \frac{i}{x} + \frac{1}{t}$, то получаем [уравнение]

$$dt + \frac{2it dx}{x} + dx = 0,$$

интегралом которого будет

$$x^{2i}t + \frac{1}{2i+1} x^{2i+1} = \frac{g}{2i+1},$$

так что

$$s = \frac{ig + (i+1)x^{2i+1}}{x(g - x^{2i+1})},$$

а интегрируемое уравнение есть

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \frac{[i(i-1)g^2 + 6i(i+1)gx^{2i+1} + (i+1)(i+2)x^{4i+2}]z}{x^2(g - x^{2i+1})^2}.$$

II. Если не отбрасываем f , то положим $s = \frac{i}{x} + u$, откуда

$$-du + \frac{2iu dx}{x} + u^2 dx = f dx.$$

Это уравнение можно преобразовать в дифференциальное уравнение второго порядка, легко интегрирующееся с помощью ряда. Для этого положим

$$u = \sqrt{f} - \frac{i}{x} - \frac{dr}{r dx}$$

и получим уравнение ¹⁾

$$\frac{d^2r}{dx^2} - \frac{2dr \sqrt{f}}{dx} - \frac{i(i+1)r}{x^2} = 0.$$

Приняв $\sqrt{f} = a$ и полагая

$$r = Ax^{i+1} + Bx^{i+2} + Cx^{i+3} + Dx^{i+4} \text{ и т. д.},$$

находим

$$B = \frac{2(i+1)a}{1(2i+2)}A, \quad C = \frac{2(i+2)a}{2(2i+3)}B, \quad D = \frac{2(i+3)a}{3(2i+4)}C, \quad E = \frac{2(i+4)}{4(2i+5)}D \text{ и т. д.}$$

Этот ряд обрывается, когда i — целое отрицательное число. Если же положить

$$r = Ax^{-i} + Bx^{1-i} + Cx^{2-i} + Dx^{3-i} + \text{ и т. д.},$$

¹⁾ См. примечание к § 353, — и здесь имеем частный случай уравнения, рассмотренного в § 967 тома II Интегрального исчисления. [Ф. Э.]

то

$$B = \frac{2ia}{2i} A, \quad C = \frac{2(i-1)a}{2(2i-1)} B, \quad D = \frac{2(i-2)a}{3(2i-2)} C, \quad E = \frac{2(i-3)a}{4(2i-3)} D \text{ и т. д.}$$

Этот ряд обрывается, когда i — целое положительное число.

ЗАДАЧА 58

360. Предложено уравнение

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) - \frac{2a^2}{\cos(ax+b)^2} v,$$

интеграл которого есть

$$v = a \operatorname{tg}(ax+b) [\pi(x+y) + \varphi(x-y)] + \pi'(x+y) + \varphi'(x-y).$$

Найти посредством изложенного здесь преобразования другие уравнения, которые интегрируются с его помощью.

РЕШЕНИЕ

Введем для краткости угол $ax+b = \omega$, так что $d\omega = a dx$; согласно § 351, поскольку $F = 1$, $G = 0$, $H = -\frac{2a^2}{\cos \omega^2}$, мы должны искать количество s из уравнения

$$ds - s^2 dx + \left(C + \frac{2a^2}{\cos \omega^2}\right) dx = 0.$$

Тогда интегралом уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \left(\frac{2a^2}{\cos \omega^2} + \frac{2ds}{dx}\right) z$$

будет

$$z = sv + \left(\frac{dv}{dx}\right),$$

то есть

$$\begin{aligned} z = as \operatorname{tg} \omega [\pi(x+y) + \varphi(x-y)] + s [\pi'(x+y) + \varphi'(x-y)] + \\ + \frac{a^2}{\cos \omega^2} [\pi(x+y) + \varphi(x-y)] + a \operatorname{tg} \omega [\pi'(x+y) + \varphi'(x-y)] + \\ + \pi''(x+y) + \varphi''(x-y). \end{aligned}$$

Весь вопрос сводится, таким образом, к определению количества s . С этой целью положим

$$s = a \operatorname{tg} \omega - \frac{du}{u dx},$$

откуда

$$\frac{ds}{dx} = \frac{aa}{\cos \omega^2} - \frac{d^2u}{u dx^2} + \frac{du^2}{u^2 dx^2},$$

и после подстановки получим

$$\frac{aa}{\cos \omega^2} - \frac{a^2 \sin \omega^2}{\cos \omega^2} + C + \frac{2a^2}{\cos \omega^2} - \frac{d^2u}{u dx^2} + \frac{2a du}{u dx} \operatorname{tg} \omega = 0.$$

Учтем, что

$$-\frac{a^2 \sin \omega^2}{\cos \omega^2} = -\frac{a^2}{\cos \omega^2} + a^2,$$

и выберем a так, чтобы было

$$-a^2 + aa + 2a^2 = 0.$$

Итак, берем $a = -a$, так что

$$s = -a \operatorname{tg} \omega - \frac{du}{u dx},$$

а для определения количества u будем иметь уравнение

$$\frac{d^2u}{u dx^2} + \frac{2a du}{u dx} \operatorname{tg} \omega + na^2u = 0,$$

где $C = -a^2 - na^2$, то есть

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} + \frac{2du}{d\omega} \operatorname{tg} \omega + nu = 0,$$

так как $dx = \frac{d\omega}{a}$.

Решение этого уравнения кажется довольно трудным; среди различных способов его исследования следующий представляется наиболее удобным. Положим

$$u = A \cos \lambda \omega + B \cos (\lambda + 2) \omega + C \cos (\lambda + 4) \omega + \text{и т. д.},$$

откуда

$$\frac{du}{d\omega} = -\lambda A \sin \lambda \omega - (\lambda + 2) B \sin (\lambda + 2) \omega - (\lambda + 4) C \sin (\lambda + 4) \omega - \text{и т. д.},$$

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} = -\lambda^2 A \cos \lambda \omega - (\lambda + 2)^2 B \cos (\lambda + 2) \omega - (\lambda + 4)^2 C \cos (\lambda + 4) \omega - \text{и т. д.}$$

Тогда уравнение, представленное в виде

$$\frac{2d^2u}{d\omega^2} \cos \omega + \frac{4du}{d\omega} \sin \omega + 2nu \cos \omega = 0,$$

дает

$$0 = -\lambda^2 A \cos (\lambda - 1) \omega - (\lambda + 2)^2 B \cos (\lambda + 1) \omega - (\lambda + 4)^2 C \cos (\lambda + 3) \omega - \text{и т. д.},$$

	-	$\lambda^2 A$	-	$(\lambda + 2)^2 B$
$-2\lambda A$		$-2(\lambda + 2) B$		$-2(\lambda + 4) C$
	+	$2\lambda A$	+	$2(\lambda + 2) B$
$+nA$		$+nB$		$+nC$
	+	nA	+	nB

поэтому λ надо брать так, чтобы было

$$\lambda^2 + 2\lambda = n, \quad \text{то есть} \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{n+1}.$$

Получаются два значения λ . Кроме того, второй член, поскольку $n = \lambda^2 + 2\lambda$, дает $B = \frac{\lambda}{\lambda+2} A$, а третий член дает $C = 0$, и следовательно, исчезают и все остальные коэффициенты.

Положим $n = m^2 - 1$, так что

$$\lambda = -1 \pm m \quad \text{и} \quad B = \frac{-1 \pm m}{1 \pm m} A.$$

Тогда полный интеграл получается в виде

$$u = A \left[\cos (m - 1) \omega + \frac{m - 1}{m + 1} \cos (m + 1) \omega \right] + \\ + \mathfrak{A} \left[\cos (m + 1) \omega + \frac{m + 1}{m - 1} \cos (m - 1) \omega \right],$$

или же, после подстановки

$$A = (m + 1)B \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} = (m - 1)\mathfrak{B},$$

в виде

$$u = (m + 1)(B + \mathfrak{B}) \cos(m - 1)\omega + (m - 1)(B + \mathfrak{B}) \cos(m + 1)\omega.$$

Поскольку здесь обе постоянные сливаются в одну, этот интеграл является лишь частным, но из него можно получить полный. В самом деле,

$$\frac{du}{u d\omega} = - \frac{(m^2 - 1) \sin(m - 1)\omega - (m^2 - 1) \sin(m + 1)\omega}{(m + 1) \cos(m - 1)\omega + (m - 1) \cos(m + 1)\omega}$$

и

$$\frac{s}{a} = - \operatorname{tg} \omega + \frac{(m^2 - 1) [\sin(m - 1)\omega + \sin(m + 1)\omega]}{(m + 1) \cos(m - 1)\omega + (m - 1) \cos(m + 1)\omega},$$

что должно удовлетворять уравнению

$$\frac{ds}{a d\omega} - \frac{s^2}{a^2} - m^2 + \frac{2}{\cos \omega^2} = 0,$$

так как $C = -(n + 1)a^2 = -m^2 a^2$. Найденный интеграл приводится к виду

$$\frac{s}{a} = - \operatorname{tg} \omega + \frac{(m^2 - 1) \operatorname{tg} m\omega}{m + \operatorname{tg} m\omega \operatorname{tg} \omega},$$

что полностью удовлетворяет дифференциальному уравнению. Будем писать вместо этого выражения Θ и положим $\frac{s}{a} = \Theta + \frac{1}{t}$ для того, чтобы найти полный интеграл. Тогда будем иметь

$$- \frac{dt}{t^2 d\omega} - \frac{2\Theta}{t} - \frac{1}{t^2} = 0$$

или

$$dt + 2\Theta t d\omega + d\omega = 0.$$

Мы получили, однако, раньше

$$\Theta = \frac{s}{a} = - \operatorname{tg} \omega - \frac{du}{u d\omega},$$

откуда

$$\int \Theta d\omega = l \cos \omega - lu \quad \text{и} \quad e^{2 \int \Theta d\omega} = \frac{\cos \omega^2}{u^2}.$$

Это выражение является множителем для дифференциального уравнения, так что

$$\frac{t \cos \omega^2}{u^2} = C - \int \frac{d\omega \cos \omega^2}{u^2}.$$

Но

$$u = 2m \cos m\omega \cos \omega + 2 \sin m\omega \sin \omega,$$

откуда

$$\frac{t}{(m \cos m\omega + \sin m\omega \operatorname{tg} \omega)^2} = A - \int \frac{d\omega}{(m \cos m\omega + \sin m\omega \operatorname{tg} \omega)^2}.$$

Интеграл в правой части равен

$$\frac{-m \operatorname{tg} m\omega + \operatorname{tg} \omega}{m(m^2 - 1)(m + \operatorname{tg} m\omega \operatorname{tg} \omega)} = \frac{-m \sin m\omega + \operatorname{tg} \omega \cos m\omega}{m(m^2 - 1)(m \cos m\omega + \sin m\omega \operatorname{tg} \omega)},$$

так что

$$\frac{t}{(m \cos m\omega + \sin m\omega \operatorname{tg} \omega)^2} = A + \frac{\cos m\omega \operatorname{tg} \omega - m \sin m\omega}{m(m^2 - 1)(m \cos m\omega + \sin m\omega \operatorname{tg} \omega)}$$

или

$$\frac{1}{t} = \frac{m(m^2 - 1)}{[C(m \cos m\omega + \sin m\omega \operatorname{tg} \omega) + \cos m\omega \operatorname{tg} \omega - m \sin m\omega](m \cos m\omega + \sin m\omega \operatorname{tg} \omega)},$$

к чему надо добавить

$$\Theta = -\operatorname{tg} \omega + \frac{(m^2 - 1) \sin m\omega}{m \cos m\omega + \sin m\omega \operatorname{tg} \omega}.$$

Таким образом, получим $\frac{s}{a}$ в виде

$$\frac{s}{a} = -\operatorname{tg} \omega + \frac{(m^2 - 1)(C \sin m\omega + \cos m\omega)}{C(m \cos m\omega + \sin m\omega \operatorname{tg} \omega) + \cos m\omega \operatorname{tg} \omega - m \sin m\omega}$$

или

$$\frac{s}{a} = \frac{(m^2 - 1 - \operatorname{tg}^2 \omega)(C \sin m\omega + \cos m\omega) - m \operatorname{tg} \omega (C \cos m\omega - \sin m\omega)}{C(m \cos m\omega + \sin m\omega \operatorname{tg} \omega) + \cos m\omega \operatorname{tg} \omega - m \sin m\omega}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

361. Особо отметить здесь нужно, что уравнение

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} + \frac{2du}{d\omega} \operatorname{tg} \omega + (m^2 - 1)u = 0$$

имеет частный интеграл

$$u = m \cos \omega \cos m\omega + \sin m\omega \sin \omega,$$

а второй частный интеграл получается подобным образом:

$$u = m \sin m\omega \cos \omega - \cos m\omega \sin \omega,$$

откуда находим полный интеграл

$$u = A(m \cos m\omega \cos \omega + \sin m\omega \sin \omega) + B(m \sin m\omega \cos \omega - \cos m\omega \sin \omega).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

362. Если здесь взять

$$A = C \cos \alpha \quad \text{и} \quad B = -C \sin \alpha,$$

этот полный интеграл приводится к виду

$$u = C[m \cos(m\omega + \alpha) \cos \omega + \sin(m\omega + \alpha) \sin \omega],$$

что можно сразу получить из вышенайденного частного интеграла, так как там вместо угла $m\omega$ можно писать $m\omega + \alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 3

363. Отсюда можно гораздо легче получить значение

$$\frac{s}{a} = -\operatorname{tg} \omega - \frac{du}{u d\omega}.$$

Действительно, так как

$$\frac{du}{d\omega} = -C(m^2 - 1) \sin(m\omega + \alpha) \cos \omega,$$

то

$$\frac{s}{a} = -\operatorname{tg} \omega + \frac{(m^2-1) \sin(m\omega + \alpha) \cos \omega}{m \cos(m\omega + \alpha) \cos \omega + \sin(m\omega + \alpha) \sin \omega},$$

и отсюда

$$\frac{ds}{a d\omega} = \frac{ds}{a^2 dx} = -\frac{1}{\cos \omega^2} - \frac{(m^2-1) [m^2 \cos \omega^2 - \sin(m\omega + \alpha)^2]}{[m \cos(m\omega + \alpha) \cos \omega + \sin(m\omega + \alpha) \sin \omega]^2}.$$

Таким образом, уравнение, способ интегрирования которого мы нашли, будет

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) = \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right) - \frac{2(m^2-1) a^2 [m^2 \cos \omega^2 - \sin(m\omega + \alpha)^2]}{[m \cos(m\omega + \alpha) \cos \omega + \sin(m\omega + \alpha) \sin \omega]^2} z,$$

а его интеграл находится в виде

$$z = \frac{ma^2 [m \sin(m\omega + \alpha) \sin \omega + \cos(m\omega + \alpha) \cos \omega]}{m \cos(m\omega + \alpha) \cos \omega + \sin(m\omega + \alpha) \sin \omega} [\pi(x+y) + \varphi(x-y)] + \\ + \frac{(m^2-1) a \sin(m\omega + \alpha) \cos \omega}{m \cos(m\omega + \alpha) \cos \omega + \sin(m\omega + \alpha) \sin \omega} [\pi'(x+y) + \varphi'(x-y)] + \\ + [\pi''(x+y) + \varphi''(x-y)],$$

где $\omega = ax + b$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

364. Вполне достойно упоминания интегрирование уравнения

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} + \frac{2du}{d\omega} \operatorname{tg} \omega + (m^2 - 1)u = 0,$$

и я воспользуюсь этим поводом для исследования более общего уравнения

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} + \frac{2f du}{d\omega} \operatorname{tg} \omega + gu = 0.$$

Замечу прежде всего, что если положить

$$\frac{du}{u} = -(2f+1) d\omega \operatorname{tg} \omega + \frac{dv}{v},$$

так что

$$u = \cos \omega^{2f+1} v,$$

то оно приводится к виду

$$\frac{d^2 v}{d\omega^2} - \frac{2(f+1) dv}{d\omega} \operatorname{tg} \omega + (g - 2f - 1)v = 0.$$

Следовательно, если оно интегрируемо в случае $f = n$, оно интегрируемо также в случае $f = -n - 1$. Для решения исходного уравнения положим

$$u = A \sin \lambda \omega + B \sin(\lambda + 2)\omega + C \sin(\lambda + 4)\omega + D \sin(\lambda + 6)\omega + \dots \quad \text{и т. д.,}$$

что после подстановки в уравнение

$$\frac{2d^2 u}{d\omega^2} \cos \omega + \frac{4f du}{d\omega} \sin \omega + 2gu \cos \omega = 0$$

дает

$$\begin{array}{cccc}
 0 = -\lambda^2 A \sin(\lambda-1)\omega - (\lambda+2)^2 B \sin(\lambda+1)\omega - (\lambda+4)^2 C \sin(\lambda+3)\omega - (\lambda+6)^2 D \sin(\lambda+5)\omega & & & \\
 -2\lambda A f & -\lambda^2 A & -(\lambda+2)^2 B & -(\lambda+4)^2 C \\
 + Ag & + 2\lambda A f & + 2(\lambda+2) B f & + 2(\lambda+4) C f \\
 & - 2(\lambda+2) B f & - 2(\lambda+4) C f & - 2(\lambda+6) D f \\
 & + A g & + B g & + C g \\
 & + B g & + C g & + D g \\
 & & & \text{— и т. д.}
 \end{array}$$

Следовательно, должно быть $g = \lambda^2 + 2\lambda f$, после чего коэффициенты определяются так:

$$B = \frac{\lambda f A}{\lambda + f + 1}, \quad C = \frac{(\lambda + 1)(f - 1) B}{2(\lambda + f + 2)}, \quad D = \frac{(\lambda + 2)(f - 2) C}{3(\lambda + f + 3)} \text{ и т. д.}$$

Если полагать $g = m^2 - f^2$, так что $\lambda = m - f$, то наши уравнения будут

$$\frac{d^2 u}{d\omega^2} + \frac{2f du}{d\omega} \operatorname{tg} \omega + (m^2 - f^2) u = 0$$

и

$$\frac{d^2 v}{d\omega^2} - \frac{2(f+1) dv}{d\omega} \operatorname{tg} \omega + [m^2 - (f+1)^2] v = 0,$$

где

$$u = v \cos \omega^{2f+1} \quad \text{или} \quad v = \frac{u}{\cos \omega^{2f+1}}.$$

Поскольку наш ряд обрывается, когда f — целое число, рассмотрим наиболее простые случаи.

I. Пусть $f = 0$, тогда

$$\lambda = m \quad \text{и} \quad B = 0, \quad C = 0 \quad \text{и т. д.,}$$

откуда

$$u = A \sin m\omega \quad \text{и} \quad v = \frac{A \sin m\omega}{\cos \omega}.$$

II. Пусть $f = 1$; получим

$$\lambda = m - 1 \quad \text{и} \quad B = \frac{(m-1)A}{m+1}, \quad C = 0 \quad \text{и т. д.,}$$

так что

$$\frac{u}{a} = (m+1) \sin(m-1)\omega + (m-1) \sin(m+1)\omega \quad \text{и} \quad v = \frac{u}{\cos \omega^3},$$

или

$$\frac{u}{2a} = m \sin m\omega \cos \omega - \cos m\omega \sin \omega.$$

III. Пусть $f = 2$, откуда $\lambda = m - 2$ и

$$B = \frac{2(m-2)A}{m+1}, \quad C = \frac{(m-1)B}{2(m+2)} = \frac{(m-1)(m-2)A}{(m+1)(m+2)}, \quad D = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \frac{u}{a} = (m+1)(m+2) \sin(m-2)\omega + 2(m-2)(m+2) \sin m\omega + \\
 + (m-1)(m-2) \sin(m+2)\omega,
 \end{aligned}$$

а отсюда

$$v = \frac{u}{\cos \omega^5},$$

или

$$\frac{u}{2a} = (m^2 + 2) \sin m\omega \cos 2\omega + (m^2 - 4) \sin m\omega - 3m \cos m\omega \sin 2\omega.$$

IV. Пусть $f = 3$, тогда $\lambda = m - 3$ и

$$B = \frac{3(m-3)A}{m+1}, \quad C = \frac{2(m-2)B}{2(m+2)}, \quad D = \frac{(m-1)C}{3(m+3)}, \quad E = 0 \text{ и т. д.}$$

следовательно,

$$\frac{u}{a} = +(m+1)(m+2)(m+3) \sin(m-3)\omega + 3(m+2)(m^2-9) \sin(m-1)\omega + \\ + (m-1)(m-2)(m-3) \sin(m+3)\omega + 3(m-2)(m^2-9) \sin(m+1)\omega,$$

и

$$v = \frac{u}{\cos \omega^7}.$$

V. Пусть $f = 4$, тогда $\lambda = m - 4$, и находим

$$\frac{u}{a} = +(m+1)(m+2)(m+3)(m+4) \sin(m-4)\omega + \\ + 4(m+2)(m+3)(m^2-16) \sin(m-2)\omega + \\ + (m-1)(m-2)(m-3)(m-4) \sin(m+4)\omega + \\ + 4(m-2)(m-3)(m^2-16) \sin(m+2)\omega + 6(m^2-9)(m^2-16) \sin m\omega,$$

причем

$$v = \frac{u}{\cos \omega^9}.$$

Отсюда ясен закон построения этих решений. Следует также заметить, что если бы мы положили

$$u = A \cos \lambda\omega + B \cos(\lambda+2)\omega + C \cos(\lambda+4)\omega + \text{и т. д.},$$

то мы получили бы те же коэффициенты, стало быть, соединяя эти два решения, получим полный интеграл; полный интеграл получается также из найденного решения, если вместо угла $m\omega$ писать более общим образом $m\omega + \alpha$.

ПОЯСНЕНИЕ 2

365. Можно исследовать уравнение

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} + \frac{2f}{d\omega} \operatorname{tg} \omega + gu = 0$$

еще многими другими способами и выражать его интеграл посредством рядов, откуда получаются другие случаи интегрируемости. С этой целью заметим прежде всего, что, положив $u = \sin \omega^\lambda$, получим

$$\frac{du}{d\omega} = \lambda \sin \omega^{\lambda-1} \cos \omega,$$

откуда

$$\frac{du}{d\omega} \operatorname{tg} \omega = \lambda \sin \omega^\lambda$$

и

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} = \lambda(\lambda - 1) \sin \omega^{\lambda-2} \cos \omega^2 - \lambda \sin \omega^\lambda = \lambda(\lambda - 1) \sin \omega^{\lambda-2} - \lambda^2 \sin \omega^\lambda.$$

Положим далее¹⁾

$$u = A \sin \omega^\lambda + B \sin \omega^{\lambda+2} + C \sin \omega^{\lambda+4} + D \sin \omega^{\lambda+6} + \text{и т. д.},$$

тогда после подстановки [в дифференциальное уравнение] получим

$$\begin{aligned} 0 = \lambda(\lambda - 1) A \sin \omega^{\lambda-2} + (\lambda + 2)(\lambda + 1) B \sin \omega^{\lambda+2} + (\lambda + 4)(\lambda + 3) C \sin \omega^{\lambda+4} + \text{и т. д.}, \\ - \lambda^2 A \qquad \qquad \qquad - (\lambda + 2)^2 B \\ + 2\lambda f A \qquad \qquad \qquad + 2(\lambda + 2) f B \\ + g A \qquad \qquad \qquad + g B \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что должно быть $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$, и далее

$$B = \frac{\lambda^2 - 2\lambda f - g}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)} A, \quad C = \frac{(\lambda + 2)^2 - 2(\lambda + 2)f - g}{(\lambda + 3)(\lambda + 4)} B \text{ и т. д.}$$

Соответственно в обоих случаях получим

$\lambda = 0$	$\lambda = 1$
$B = \frac{-g}{1 \cdot 2} A,$	$B = \frac{1 - 2f - g}{2 \cdot 3} A,$
$C = \frac{4 - 4f - g}{3 \cdot 4} B,$	$C = \frac{9 - 6f - g}{4 \cdot 5} B,$
$D = \frac{16 - 8f - g}{5 \cdot 6} C,$	$D = \frac{25 - 10f - g}{6 \cdot 7} C,$
$E = \frac{36 - 12f - g}{7 \cdot 8} D$	$E = \frac{49 - 14f - g}{8 \cdot 9} D$
и т. д.	и т. д.

Интегрирование, следовательно, удается, когда $g = i^2 - 2if$, где i — положительное целое число. Если положить $u = v \cos \omega^{2f+1}$, то преобразованное уравнение будет

$$\frac{d^2v}{d\omega^2} - \frac{2(f+1)dv}{d\omega} \operatorname{tg} \omega + (g - 2f - 1)v = 0.$$

Это уравнение и исходное интегрируются, когда

$$g = (i + 1)^2 + 2(i + 1)f.$$

Оба эти случая можно объединить в один, а именно интегрирование удается, когда $g = i^2 \pm 2if$.

¹⁾ См. примечание к § 353. Действительно, это дифференциальное уравнение, если положить $\sin \omega = x$, запишется в виде $(1 - x^2) d^2u + (2f - 1) x dx du + gu dx^2 = 0$, что опять-таки содержится в общей записи § 967 тома II. Впрочем, Эйлер и сам рассматривал уравнение такого вида в работе (№ 678 по списку Энестрема) «Новый метод определения всех случаев, когда можно решить дифференциальное уравнение $d^2y(1 - ax^2) - bx dx dy - cy dx^2 = 0$ » (Methodus nova investigandi omnes, casus, quibus hanc aequationem differentialem $d^2y(1 - ax^2) - bx dx dy - cy dx^2 = 0$ resolvere licet), Institutiones calculi integralis 4, 1794, стр. 533 = Opera Omnia, ser. I, vol. 23. [Ф. Э.]

ПОЯСНЕНИЕ 3

366. Все еще рассматривая то же самое уравнение и полагая $u = \cos \omega^\lambda$, получаем

$$\frac{du}{d\omega} = -\lambda \cos \omega^{\lambda-1} \sin \omega$$

и далее

$$\frac{du}{d\omega} \operatorname{tg} \omega = -\lambda \cos \omega^{\lambda-2} + \lambda \cos \omega^\lambda$$

и

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} = \lambda(\lambda-1) \cos \omega^{\lambda-2} - \lambda^2 \cos \omega^\lambda.$$

Приняв теперь

$$u = A \cos \omega^\lambda + B \cos \omega^{\lambda+2} + C \cos \omega^{\lambda+4} + D \cos \omega^{\lambda+6} + \dots \text{ и т. д.,}$$

получим после подстановки [в дифференциальное уравнение]

$$0 = \lambda(\lambda-1) A \cos \omega^{\lambda-2} + (\lambda+2)(\lambda+1) B \cos \omega^\lambda + (\lambda+4)(\lambda+3) C \cos \omega^{\lambda+2} + \dots \text{ и т. д.}$$

$-2\lambda f A$	$-\lambda^2 A$	$-(\lambda+2)^2 B$
	$-2(\lambda+2) f B$	$-2(\lambda+4) f C$
	$+2\lambda f A$	$+2(\lambda+2) f B$
	$+g A$	$+g B$

Следовательно, должно быть или $\lambda = 0$, или $\lambda = 2f + 1$, и далее

$$B = \frac{\lambda^2 - 2\lambda f - g}{(\lambda+2)(\lambda+1-2f)} A, \quad C = \frac{(\lambda+2)^2 - 2(\lambda+2)f - g}{(\lambda+4)(\lambda+3-2f)} B \text{ и т. д.}$$

Соответственно в обоих случаях получим

$\lambda = 0$	$\lambda = 2f + 1$
$B = \frac{-g}{2(1-2f)} A,$	$B = \frac{1+2f-g}{2(2f+3)} A,$
$C = \frac{4-4f-g}{4(3-2f)} B,$	$C = \frac{9+6f-g}{4(2f+5)} B,$
$D = \frac{16-8f-g}{6(5-2f)} C$	$D = \frac{25-10f-g}{6(2f+7)} C$
и т. д.	и т. д.

В первом случае интегрирование удастся, если $g = 4i^2 - 4if$, а во втором — если $g = (2i+1)^2 + 2(2i+1)f^1$.

Оба эти случая вместе с теми, которые получаются из преобразованного уравнения, сводятся к одному и тому же, как и найденные в предыдущем параграфе. Итак, все до сих пор найденные случаи интегрируемости сводятся к тому, что, полагая $g = m^2 - f^2$, должны иметь или $f = \pm i$ или $m = i \pm f$, т. е. или $f = \pm i$ или $f = \pm i \pm m$. Впрочем, эти последние случаи вытекают также из первого решения (§ 364), где

¹⁾ Следует заметить, что в этом месте мы не получаем с помощью преобразованного уравнения новых случаев интегрируемости, а только такие, которые уже были найдены. В действительности § 366 дает не все случаи интегрируемости, которые были получены в § 365. [Ф. Э.]

ряд тоже обрывается, если $\lambda = -i$, и следовательно, $g = m^2 - f^2 = i^2 - 2if$, откуда $i - f = \pm m$, и с помощью преобразования приходим к выражению $f = \pm i \pm m$. Напротив, случаи, найденные вначале, не содержатся в последних решениях.

ЗАДАЧА 59

367. Положим, что известно интегрирование уравнения

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = F\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + G\left(\frac{dv}{dx}\right) + Hv.$$

Найти такое уравнение вида

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + Rz,$$

где

$$z = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + r\left(\frac{dv}{dx}\right) + sv,$$

а $F, G, H; P, Q, R$ и r, s суть функции только x .

РЕШЕНИЕ

Так как

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^4v}{dx^2 dy^2}\right) + r\left(\frac{d^3v}{dx dy^2}\right) + s\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right),$$

то, поскольку

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = F\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + G\left(\frac{dv}{dx}\right) + Hv,$$

будет

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3v}{dx dy^2}\right) &= F\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + \frac{dF}{dx}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{dG}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{dH}{dx}v \\ &\quad + G \quad + H \\ \left(\frac{d^4v}{dx^2 dy^2}\right) &= F\frac{d^4v}{dx^4} + \frac{2dF}{dx}\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + \frac{d^2F}{dx^2}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{d^2G}{dx^2}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{d^2H}{dx^2}v \\ &\quad + G \quad + \frac{2dG}{dx} \quad + \frac{2dH}{dx} \\ &\quad + H \end{aligned}$$

Затем, в силу того, что

$$z = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + r\left(\frac{dv}{dx}\right) + sv,$$

имеем

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + r\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{dr}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{ds}{dx}v + s$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) &= \left(\frac{d^4v}{dx^4}\right) + r\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + \frac{2dv}{dx}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{d^2r}{dx^2}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{d^2s}{dx^2}v \\ &\quad + s \quad + \frac{2ds}{dx}. \end{aligned}$$

После этих подстановок необходимо, чтобы все члены, умноженные

[соответственно] на $\left(\frac{d^4v}{dx^4}\right)$, $\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)$, $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ и, каждый в отдельности, равнялись нулю, откуда вытекают следующие уравнения:

$$\begin{array}{l} \left(\frac{d^4v}{dx^4}\right) \quad \text{I. } F = P, \\ \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) \quad \text{II. } G + \frac{2dF}{dx} + Fr = Pr + Q, \\ \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) \quad \text{III. } H + \frac{2dG}{dx} + \frac{d^2F}{dx^2} + Gr + \frac{rdF}{dx} + Fs = P\left(s + \frac{2dr}{dx}\right) + Qr + R, \\ \left(\frac{dv}{dx}\right) \quad \text{IV. } \frac{2dH}{dx} + \frac{d^2G}{dx^2} + Hr + \frac{rdG}{dx} + Gs = P\left(\frac{2ds}{dx} + \frac{d^2r}{dx^2}\right) + Q\left(s + \frac{dr}{dx}\right) + Rr, \\ v \quad \text{V. } \frac{d^2H}{dx^2} + \frac{rdH}{dx} + Hs = P\frac{d^2s}{dx^2} + Q\frac{ds}{dx} + Rs. \end{array}$$

Из первого уравнения имеем $P = F$, из второго $Q = C + \frac{2dF}{dx}$, третье уравнение даст $R = H + \frac{2dG}{dx} + \frac{d^2F}{dx^2} - \frac{rdF + 2Fdr}{dx}$, а после подстановки этих значений последние два уравнения дают

$$\frac{2dH}{dx} + \frac{d^2G}{dx^2} - \frac{rdG + Gdr}{dx} - \frac{rd^2F}{dx^2} - \frac{2dFdr}{dx^2} - \frac{2s dF - 2F ds}{dx} + \frac{r^2 dF + 2Fr dr}{dx} - \frac{Fd^2r}{dx^2} = 0$$

и

$$\frac{d^2H}{dx^2} + \frac{rdH}{dx} - \frac{s d^2F + 2dF ds + F d^2s}{dx^2} - \frac{2s dG + G ds}{dx} + \frac{s(rdF + 2Fdr)}{dx} = 0.$$

Из них первое сразу интегрируется и дает

$$2H + \frac{dG}{dx} - Gr - \frac{rdF + Fdr}{dx} - 2Fs + Fr^2 = A.$$

Тогда вышеприведенные два уравнения можно представить еще так:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2Fr}{dx^2} - \frac{2dFs}{dx} + \frac{dFr^2}{dx} + \frac{d^2G}{dx^2} - \frac{dGr}{dx} + \frac{2dH}{dx} &= 0, \\ -\frac{d^2Fs}{dx^2} + \frac{s dFr^2}{r dx} - \frac{2s dG + G ds}{dx} + \frac{rdH}{dx} + \frac{d^2H}{dx^2} &= 0, \end{aligned}$$

или же так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(G - Fr)}{dx} - d[r(G - Fr)] + 2d(H - Fs) &= 0, \\ \frac{d^2(H - Fs)}{dx} + 2Fs dr + rs dF - G ds - 2s dG + r dH &= 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение можно еще так записать:

$$\frac{d^2(H - Fs)}{dx} - 2sd(G - Fr) - ds(G - Fr) + rd(H - Fs) = 0.$$

Умножим теперь первое уравнение на $H - Fs$, а второе на $-(G - Fr)$ и сложим их. Получим

$$\begin{aligned} \frac{(H - Fs)d^2(G - Fr) - (G - Fr)d^2(H - Fs)}{dx} - (G - Fr)(H - Fs) dr + \\ + 2(H - Fs)d(H - Fs) - r(H - Fs)d(G - Fr) + \\ + 2s(G - Fr)d(G - Fr) + (G - Fr)^2 ds - r(G - Fr)d(H - Fs) &= 0. \end{aligned}$$

Интегралом этого уравнения, очевидно, будет

$$\frac{(H-Fs)d(G-Fr)-(G-Fr)d(H-Fs)}{dx} + (H-Fs)^2 + (G-Fr)^2 s - \\ - (G-Fr)(H-Fs)r = B,$$

а прежде найденный интеграл есть

$$\frac{d(G-Fr)}{dx} - (G-Fr)r + 2(H-Fs) = A.$$

Умножим его на $H-Fs$ и отнимем от предыдущего. Тогда получим

$$-\frac{(G-Fr)d(H-Fs)}{dx} - (H-Fs)^2 + (G-Fr)^2 s = B - A(H-Fs).$$

Мы имеем, таким образом, два дифференциальных уравнения первого порядка¹⁾, из которых надо определить количества r и s , после чего находятся также функции P , Q и P .

СЛЕДСТВИЕ 1

368. Если $F=1$, $G=0$ и $H=0$, тогда найденные уравнения будут

$$-\frac{dr}{dx} + r^2 - 2s = a \quad \text{и} \quad \frac{sdr - rds}{dr} + s^2 = b,$$

откуда после исключения dx находим

$$\frac{rds - sdr}{dr} = \frac{b - s^2}{a + 2s - r^2} \quad \text{или} \quad \frac{rds}{dr} = \frac{b + as + s^2 - r^2s}{a + 2s - r^2}.$$

Вряд ли можно рассчитывать на решение этого уравнения в общем случае. Если, однако, принять, что $a=0$ и $b=0$, тогда уравнение

$$\frac{rds}{dr} = \frac{s^2 - r^2s}{2s - r^2}$$

после подстановки $s = r^2t$ преобразуется к виду

$$\frac{r dt + 2t dr}{dr} = \frac{t^2 - t}{2t - 1} \quad \text{или} \quad \frac{r dt}{dr} = \frac{-3t^2 + t}{2t - 1},$$

откуда

$$\frac{dr}{r} = \frac{dt(1-2t)}{t(3t-1)} = -\frac{dt}{t} + \frac{dt}{3t-1}$$

и

$$r = \frac{\alpha \sqrt[3]{3t-1}}{t}.$$

Следовательно,

$$s = \frac{\alpha^2 \sqrt[3]{(3t-1)^2}}{t}.$$

¹⁾ duae aequationes simpliciter differentiales.

СЛЕДСТВИЕ 2

369. В этом же особом случае положим $3t - 1 = u^3$, так что

$$r = \frac{3au}{1+u^3} \quad \text{и} \quad s = \frac{3a^2u^2}{1+u^3}.$$

Но так как $a = 0$, имеем

$$dx = \frac{dr}{r^2 - 2s} = \frac{dr}{r^2(1-2t)} = \frac{3dr}{r^2(1-2u^3)}$$

и

$$\frac{dr}{r^2} = \frac{du}{3au^2} - \frac{2u du}{3a} = \frac{du(1-2u^3)}{3au^2},$$

так что

$$dx = \frac{du}{au^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{u} = \beta - \alpha x \quad \text{и} \quad u = \frac{1}{\beta - \alpha x}.$$

Без потери общности можно принять

$$\beta = 0 \quad \text{и} \quad u = -\frac{1}{\alpha x},$$

откуда

$$r = -\frac{3x^2}{x^3 + c^3},$$

где

$$\alpha = -\frac{1}{c} \quad \text{и} \quad s = \frac{3x}{x^3 + c^3}.$$

Итак, мы получаем, наконец,

$$P = 1, \quad Q = 0 \quad \text{и} \quad R = -\frac{2dr}{dx} = \frac{6x(2c^3 - x^3)}{(c^3 + x^3)^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

370. Если, следовательно, задано уравнение

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right),$$

интеграл которого есть

$$v = \Gamma(x+y) + \Delta(x-y),$$

то отсюда можно найти интеграл следующего уравнения

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{6x(2c^3 - x^3)}{(c^3 + x^3)^2} z,$$

а именно,

$$z = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) - \frac{3x^2}{c^3 + x^3} \left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{3x}{c^3 + x^3} v.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

371. Все это для случая

$$F = 1, \quad G = 0 \quad \text{и} \quad H = 0$$

можно вычислить гораздо легче и в более общем виде для любого

значения количества a , если $b=0$. В этом случае второе уравнение сразу дает

$$dx = \frac{r ds - s dr}{s^2}$$

и отсюда

$$x = -\frac{r}{s} \quad \text{и} \quad s = -\frac{r}{x},$$

так что первое уравнение принимает вид

$$\frac{dr}{dx} - r^2 - \frac{2r}{x} + a = 0.$$

Положим $r = \frac{a}{t}$, тогда

$$dt + \frac{2t dx}{x} - t^2 dx + a dx = 0.$$

В частности, этому уравнению удовлетворяет

$$t = \sqrt{a} + \frac{1}{x}.$$

Положим поэтому

$$t = \sqrt{a} + \frac{1}{x} + \frac{1}{u},$$

тогда

$$du + dx + 2u dx \sqrt{a} = 0,$$

что после умножения на $e^{2x\sqrt{a}}$ и интегрирования дает

$$e^{2x\sqrt{a}} u + \frac{1}{2\sqrt{a}} e^{2x\sqrt{a}} = \frac{n}{2\sqrt{a}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{u} = \frac{2e^{2x\sqrt{a}}\sqrt{a}}{n - e^{2x\sqrt{a}}} = \frac{2\sqrt{a}}{ne^{-2x\sqrt{a}} - 1},$$

$$t = \frac{1}{x} + \frac{ne^{-2x\sqrt{a}} + 1}{ne^{-2x\sqrt{a}} - 1} \sqrt{a} = \frac{1}{x} + \frac{n + e^{2x\sqrt{a}}}{n - e^{2x\sqrt{a}}} \sqrt{a},$$

$$r = \frac{ax(n - e^{2x\sqrt{a}})}{n(x\sqrt{a} + 1) + e^{2x\sqrt{a}}(x\sqrt{a} - 1)},$$

и поэтому

$$s = \frac{-a(n - e^{2x\sqrt{a}})}{n(x\sqrt{a} + 1) + e^{2x\sqrt{a}}(x\sqrt{a} - 1)},$$

откуда, наконец,

$$P = -1, \quad Q = 0 \quad \text{и} \quad R = -\frac{2dr}{dx} = -2r^2 - \frac{4r}{x} + 2a$$

или

$$R = \frac{-2an^2 - 4nax^2e^{2x\sqrt{a}} - 2ne^{2x\sqrt{a}} + e^{4x\sqrt{a}}}{[n(x\sqrt{a} + 1) + e^{2x\sqrt{a}}(x\sqrt{a} - 1)]^2} = \frac{-2a(n - e^{2x\sqrt{a}})^2 + 8na^2x^2e^{2x\sqrt{a}}}{[n(x\sqrt{a} + 1) + e^{2x\sqrt{a}}(x\sqrt{a} - 1)]^2}.$$

Если принять, что a очень мало¹⁾ и что $n = 1 + \frac{2}{3}ac^3\sqrt{a}$, то получаются ранее найденные формулы. Если a — отрицательное число, пусть $a = -m^2$, возьмем $n = \frac{\alpha\sqrt{-1+\beta}}{\alpha\sqrt{-1-\beta}}$. Тогда находим

$$r = \frac{m^2x(\beta \cos mx + \alpha \sin mx)}{\beta \cos mx + \alpha \sin mx - mx(\alpha \cos mx - \beta \sin mx)} = \frac{-m^2x \cos (mx + \gamma)}{\cos (mx + \gamma) - mx \sin (mx + \gamma)}$$

и

$$s = \frac{m^2 \cos (mx + \gamma)}{\cos (mx + \gamma) - mx \sin (mx + \gamma)},$$

откуда

$$R = \frac{2m^2 [\cos (mx + \gamma)^2 + m^2x^2]}{[\cos (mx + \gamma) - mx \sin (mx + \gamma)]^2}.$$

[В случае положительного] количество R преобразуется к виду

$$R = \frac{8na^2x^2 - 2a(ne^{-x}\sqrt{a} - e^x\sqrt{a})^2}{[n(1+x\sqrt{a})e^{-x}\sqrt{a} - (1-x\sqrt{a})e^x\sqrt{a}]^2},$$

и это выражение при очень малом a дает

$$R = \frac{8na^2x^2 - 2a \left[n - 1 - (n+1)x\sqrt{a} + \frac{(n-1)}{2}ax^2 - \frac{(n+1)}{6}ax^3\sqrt{a} + \text{и т. д.} \right]^2}{\left[n - 1 - \frac{1}{2}(n-1)ax^2 + \frac{1}{3}(n+1)ax^3\sqrt{a} + \text{и т. д.} \right]^2}.$$

Положим $n = 1 + \beta a\sqrt{a}$, так что

$$n - 1 = \beta a\sqrt{a} \quad \text{и} \quad n + 1 = 2 + \beta a\sqrt{a},$$

тогда

$$R = \frac{8na^2x^2 - 2a \left(\beta a\sqrt{a} - 2x\sqrt{a} - \beta a^2x + \frac{\beta a^2x^2\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{3}ax^3\sqrt{a} \right)^2}{\left(\beta a\sqrt{a} - \frac{1}{2}\beta a^2x^2\sqrt{a} + \frac{2}{3}ax^3\sqrt{a} \right)^2},$$

где числитель равен

$$8na^2x^2 + 8\beta a^3x^2\sqrt{a} - 2a(\beta^2a^3 - 4\beta a^2x - 2\beta^2a^3x\sqrt{a}) + 4ax^2 + \frac{4}{3}a^2x^4.$$

Поскольку здесь члены, умноженные на a^2 , уничтожаются и сохраняются только те, которые умножены на a^3 , и то же самое замечаем в знаменателе, мы получаем

$$R = \frac{8\beta a^3x - \frac{8}{3}a^3x^4}{a^3 \left(\beta + \frac{2}{3}x^3 \right)^2} = \frac{8x \left(\beta - \frac{1}{3}x^3 \right)}{\left(\beta + \frac{2}{3}x^3 \right)^2},$$

что легко приводится к виду

$$R = \frac{6x(2c^3 - x^3)}{(c^3 + x^3)^2},$$

1) У Эйлера — evanescent, то есть исчезающее.

где

$$3\beta = 2c^3, \quad \text{так что} \quad \beta = \frac{2}{3}c^3.$$

Таким образом, этот случай получается, если принять a очень малым и

$$n = 1 + \frac{2}{3}c^3a\sqrt{a}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

372. Поскольку получение найденного решения очень трудно и не видно другого пути, каким образом можно было бы определить оба неизвестных количества r и s из полученных двух уравнений, то для лучшего понимания дела полезно заметить¹⁾, что та же задача может быть решена также путем повторения преобразования из первой задачи этой главы и не бесполезно будет сравнить между собой оба эти решения. Итак, пусть предложено уравнение

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = F\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + G\left(\frac{dv}{dx}\right) + Hv,$$

и положим сперва

$$u = \left(\frac{dv}{dx}\right) + pv,$$

где p определяется из уравнения

$$Fdp + Gpdx - Fp^2dx + (C - H)dx = 0.$$

Тогда получается уравнение

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = F\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \left(G + \frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(H + \frac{dG}{dx} - \frac{2Fdp + p dF}{dx}\right)u.$$

Для дальнейшего преобразования этого уравнения положим подобным же образом

$$z = \left(\frac{du}{dx}\right) + qu,$$

так что

$$z = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + (p + q)\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dp}{dx} + pq\right)v,$$

а количество q определяется из уравнения

$$Fdq + \left(G + \frac{dF}{dx}\right)qdx - Fq^2dx + \left(D - H - \frac{dG}{dx} + \frac{2Fdp + p dF}{dx}\right)dx = 0.$$

Тогда приходим к уравнению

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = P\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + Rz,$$

где количества P , Q , R определяются так:

$$P = F, \quad Q = G + \frac{2dF}{dx},$$

¹⁾ on scientiae incrementum haud parum juvabit observasse.

и

$$R = H + \frac{2dG}{dx} - \frac{2F dp + p dF}{dx} + \frac{d^2F}{dx^2} - \frac{2F dq - q dF}{dx}.$$

Поскольку с этим решением должно совпасть то, которое мы получили при рассмотрении последней задачи, где мы сразу положили

$$z = \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) + r \left(\frac{dv}{dx} \right) + sv,$$

то, как бы то ни было, имеем

$$r = p + q \quad \text{и} \quad s = \frac{dp}{dx} + pq,$$

откуда немедленно вытекает, что значения P , Q и R — те же самые. Но гораздо менее очевидно, что если r и s выразить через p и q , как указано выше, то уравнения

$$\frac{d(G - Fr)}{dx} - (G - Fr)r + 2(H - Fs) = A$$

и

$$\frac{(G - Fr)d(H - Fs)}{dx} + (H - Fs)^2 - (G - Fr)^2 s - A(H - Fs) = B$$

сводятся к тем, которые мы нашли раньше:

$$\frac{F dp}{dx} + Gp - Fp^2 - H + C = 0$$

и

$$\frac{F dq}{dx} + \left(G + \frac{dF}{dx} \right) q - Fq^2 - H - \frac{dG}{dx} + \frac{2F dp + p dF}{dx} + D = 0,$$

где постоянные C и D должны быть определенным образом связаны с постоянными A и B . Однако ясно, что последние два уравнения гораздо проще, поскольку первое содержит только два переменных p и x , так что p выражается через переменное x , заданными функциями которого являются F , G и H , а после нахождения этого количества подобным же образом находим из второго уравнения количество q . Между тем в предыдущих двух уравнениях оба переменных r и s так между собой перемешаны, что нет никакого метода для их решения или хотя бы сведения к уравнению с двумя только переменными. Поскольку, однако, установлено, что первые, очень трудные уравнения могут быть сведены путем указанных подстановок ко вторым, гораздо более легким, то, несомненно, метод выполнения этого приведения должен оказать немаловажную помощь анализу.

ПОЯСНЕНИЕ 3

373. Поскольку совпадение этих двух решений представляет собою весьма загадочное явление¹⁾, целесообразно тщательно разобрать частный случай. Итак, пусть

$$F = 1, \quad G = 0 \quad \text{и} \quad H = 0,$$

так что первые два уравнения между r и s принимают вид

$$I. \quad -\frac{dr}{dx} + r^2 - 2s = A$$

¹⁾ Cum adeo consensus harum duarum solutionum maxime sit absconditus.

и

$$\text{II.} \quad \frac{r ds}{dx} + s^2 - r^2 s + As = B,$$

а последние два уравнения таковы:

$$\text{III.} \quad \frac{dp}{dx} - p^2 + C = 0$$

и

$$\text{IV.} \quad \frac{dq}{dx} - q^2 + \frac{2dp}{dx} + D = 0,$$

причем первые уравнения заведомо согласуются со вторыми так, что

$$r = p + q \quad \text{и} \quad s = \frac{dp}{dx} + pq.$$

Чтобы получить это совпадение, исходя из последних уравнений, положим $C = -m^2$, и тогда третье уравнение дает

$$dx = \frac{dp}{m^2 + p^2},$$

откуда

$$x = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{p}{m} \quad \text{и} \quad p = m \operatorname{tg} mx.$$

Отсюда, поскольку

$$\frac{dp}{dx} = m^2 + p^2,$$

получим

$$s = m^2 + p^2 + pq = m^2 + pr = m(m + r \operatorname{tg} mx),$$

что после подстановки в уравнение I дает

$$-\frac{dr}{dx} + r^2 - 2mr \operatorname{tg} mx - 2m^2 = A,$$

то есть

$$\frac{dr}{dx} = r^2 - 2mr \operatorname{tg} mx - 2m^2 - A,$$

а уравнение II в силу соотношения

$$\frac{ds}{dx} = \frac{m dr}{dx} \operatorname{tg} mx + \frac{m^2 r}{\cos^2 mx}$$

приводится к виду

$$\frac{mr dr}{dx} \operatorname{tg} mx = mr^3 \operatorname{tg} mx - 2m^2 r^2 \operatorname{tg} mx^2 - m(A + 2m^2) r \operatorname{tg} mx - m^4 - Am^2 + B.$$

После исключения dr из этих уравнений получим

$$B = Am^2 + m^4.$$

Четвертое уравнение вследствие того, что

$$q = r - p = r - m \operatorname{tg} mx,$$

дает

$$\frac{dr}{dx} = r^2 - 2mr \operatorname{tg} mx - m^2 - D,$$

так что

$$D = m^2 + A.$$

Итак, совпадение наших уравнений заключается в таком соотношении между постоянными: при $m^2 = -C$ должно быть

$$D = A - C \quad \text{и} \quad B = -C(A - C) = -CD.$$

В общем случае также имеют место те же соотношения. В самом деле, если сложить уравнения III и IV, то, так как

$$C + D = A \quad \text{и} \quad p + q = r,$$

получим

$$\frac{F dr}{dx} + Gr + \frac{r dF}{dx} - Fp^2 - Fq^2 - 2H - \frac{dG}{dx} + \frac{2F dp}{dx} + A = 0,$$

но поскольку

$$\frac{dp}{dx} = s - pq,$$

должно быть

$$\frac{F dr + r dF - dG}{dx} + Gr - Fr^2 - 2H + 2Fs + A = 0,$$

то есть

$$\frac{d(G - Fr)}{dx} - (G - Fr)r + 2(H - Fs) = A,$$

что совпадает с первым уравнением. Далее, уравнение III, так как $\frac{dp}{dx} = s - pq$, дает $Fs - Fpr - Gp - H + C = 0$ или $C = H - Fs - p(G - Fr)$.

Тогда уравнение IV приводится к виду

$$\frac{F dr}{dx} + Gq + \frac{q dF}{dx} - Fq^2 - H - \frac{dG}{dx} + Fs - Fpq + \frac{p dF}{dx} + D = 0$$

или

$$\frac{d(Fr - G)}{dx} + q(G - Fr) - H + Fs + D = 0,$$

откуда

$$D = \frac{d(G - Fr)}{dx} - q(G - Fr) + H - Fs.$$

Из этих уравнений заключаем, что

$$CD = \frac{(H - Fs) d(G - Fr)}{dx} - q(G - Fr)(H - Fs) + (H - Fs)^2 - \\ - \frac{p(G - Fr) d(G - Fr)}{dx} + pq(G - Fr)^2 - p(G - Fr)(H - Fs).$$

С другой стороны, из второго уравнения имеем

$$B = \frac{(G - Fr) d(H - Fs)}{dx} - \frac{(H - Fs) d(G - Fr)}{dx} - \\ - (H - Fs)^2 + (G - Fr)(H - Fs)r - (G - Fr)^2 s.$$

Соединяя эти два выражения, получим

$$\frac{CD+B}{G-Fr} = \frac{d(H-Fs)}{dx} - \frac{pd(G-Fr)}{dx} - \frac{dp(G-Fr)}{dx} = \frac{d(H-Fs) - dp(G-Fr)}{dx} = 0,$$

если только

$$C = H - Fs - p(G - Fr).$$

В силу этого и вообще имеем

$$B = -CD \quad \text{и} \quad A = C + D,$$

но все же отсюда не видно, каким образом можно из уравнений I и II получить остальные два уравнения III и IV.

ПОЯСНЕНИЕ 4

374. Если это тщательно продумать, то становится ясным, что все можно получить при помощи довольно простой подстановки. Чтобы показать это проще, положим ради краткости

$$G - Fr = R \quad \text{и} \quad H - Fs = S,$$

так что получаются следующие два уравнения:

$$\text{I.} \quad A = \frac{dR}{dx} - \frac{GR}{F} + \frac{R^2}{F} + 2S,$$

$$\text{II.} \quad B = \frac{RdS - SdR}{dx} - \frac{HR^2}{F} + \frac{GRS}{F} - S^2;$$

из них нужно определить два количества R и S , причем F, G, H — произвольные функции переменного x , а A и B — постоянные. Для этого применим подстановку $S = C + Rp$, подобрав ее так, чтобы оба уравнения слились в одно, в которое, кроме x , входит лишь новое переменное p , каковое затем надлежит определить известными методами. Таким образом, поскольку

$$dS = Rdp + p dR,$$

получим:

$$\text{I.} \quad A = \frac{dR}{dx} - \frac{GR}{F} + \frac{R^2}{F} + 2C + 2Rp,$$

$$\text{II.} \quad B = \frac{R^2 dp}{dx} - \frac{C dR}{dx} - \frac{HR^2}{F} + \frac{CGR}{F} + \frac{GR^2 p}{F} - C^2 - 2CRp - R^2 p^2,$$

откуда после исключения dR заключаем, что

$$B + AC = \frac{R^2 dp}{dx} + \frac{CR^2}{F} + C^2 - \frac{HR^2}{F} - R^2 p^2 + \frac{GR^2 p}{F} \text{)}.$$

Если теперь определить постоянное C таким образом, чтобы было $C^2 = B + AC$, тогда путем деления можно устранить количество R , и получается уравнение

$$0 = \frac{dp}{dx} + \frac{C}{F} - \frac{H}{F} - p^2 + \frac{Gp}{F},$$

¹⁾ В первом издании член $\frac{GR^2 p}{F}$ отсутствовал, и в связи с этим в следующем ниже равенстве не было члена $\frac{Gp}{F}$. Исправлено Ф. Энгелем.

решение которого выполняется при помощи хорошо известных методов. Поскольку, однако, вышеизложенный метод имеет очень большое значение, то имеет смысл добавить здесь следующую задачу, хотя она относится к первой части интегрального исчисления.

ЗАДАЧА 60

375. Пусть даны такие два дифференциальные уравнения:

$$I. \quad 0 = \frac{dy}{dx} + F + Gy + Hz + Iy^2 + Kyz + Lz^2,$$

$$II. \quad 0 = \frac{y dz - z dy}{dx} + P + Qy + Rz + Sy^2 + Tyz + Vz^2,$$

где F, G, H и т. д., P, Q, R и т. д. — функции x . Дать метод решения этих уравнений, когда это возможно.

РЕШЕНИЕ

Метод заключается в том, что при помощи подстановки $z = a + yv$ из этих уравнений выводится одно, которое содержит только два переменных x и v . Итак, поскольку

$$y dz - z dy = y^2 dv - a dy,$$

то из I + II получается следующее уравнение:

$$0 = \frac{y^2 dv}{dx} + P + Qy + Rz + Sy^2 + Tyz + Vz^2 + aF + aGy + aHz + aIy^2 + aKyz + aLz^2;$$

оно после подстановки вместо z его значения $a + yv$ записывается, по степеням количества y , в виде

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{y^2 dv}{dx} + y^0 [P + aF + a(R + aH) + a^2(V + aL)] \\ & + y^1 [Q + aG + v(R + aH) + a(T + aK) + 2av(V + aL)] \\ & + y^2 [S + aI + v(T + aK) + v^2(V + aL)]. \end{aligned}$$

Теперь нужно, чтобы все уравнение разделилось на y^2 и, следовательно, чтобы члены, умноженные на y^0 и y^1 , исчезали. Итак, слагаемое с y^0 должно дать

$$P + aF + a(R + aH) + a^2(V + aL) = 0,$$

а слагаемое с y^1 , поскольку v есть новое переменное, введенное в расчет, дает следующие два условия:

$$\begin{aligned} Q + aG + a(T + aK) &= 0, \\ R + aH + 2a(V + aL) &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому первое условие дает

$$P + aF - a^2(V + aL) = 0.$$

Имеем следующие три условия, требуемые для такого приведения:

$$I. \quad P + aF - a^2(V + aL) = 0,$$

$$\text{II.} \quad Q + aG + a(T + aK) = 0,$$

$$\text{III.} \quad R + aH + 2a(V + aL) = 0.$$

Отсюда удобно определяются или P , Q и R , или F , G и H .

После установления этих условий все дело сводится к решению уравнения

$$0 = \frac{dv}{dx} + S + aI + v(T + aK) + v^2(V + aL),$$

которое содержит только два переменных x и v и из которого v нужно определить через x . Если теперь положить $z = a + yv$, то первое уравнение получается в виде

$$0 = \frac{dy}{dx} + F + aH + a^2L + y(G + Hv + aK + 2aLv) + y^2(I + Kv + Lv^2),$$

а второе — в виде

$$0 = \frac{y^2 dv}{dx} - \frac{a dy}{dx} + P + aR + a^2V + \\ + y(Q + Rv + aT + 2aVv) + y^2(S + Tv + Vv^2).$$

Если первое уравнение умножить на y^2 и вычесть из второго, получим

$$0 = -\frac{a dy}{dx} + P + aR + a^2V + y(Q + Rv + aT + 2aVv) - y^2(Ia + aKv + aLv^2),$$

что совпадает с первым уравнением, как того и требует сущность дела.

СЛЕДСТВИЕ 1

376. Если, следовательно, даны такие два уравнения:

$$0 = \frac{dy}{dx} + F + Gy + Hz + Iy^2 + Kyz + Zz^2,$$

$$0 = \frac{y dz - z dy}{dx} - aF - aGy - aHz + Sy^2 + Tyz + Vz^2 \\ + a^3L - a^2Ky - 2a^2Lz \\ + a^2V - aTy - 2aVz,$$

то, взяв $z = a + yv$, надо решить прежде всего уравнение

$$0 = \frac{dv}{dx} + S + aI + v(T + aK) + v^2(V + aL),$$

а когда отсюда v определено через x , требуется решить уравнение

$$0 = \frac{dy}{dx} + F + aH + a^2L + y(G + aK) + y^2(I + Kv + Lv^2) + yv(H + 2aL),$$

после чего получим и $z = a + yv$.

СЛЕДСТВИЕ 2

377. Если $F = A$, $K = 0$, $L = 0$, $H = -2b$, $V = b$ и $T = -G$, то получаем рассмотренные выше в § 374 уравнения

$$0 = \frac{dy}{dx} + A + Gy - 2bz + Iy^2,$$

$$0 = \frac{y dz - z dy}{dx} - aA + a^2b + Sy^2 - Gyz + bz^2,$$

где G , I и S — произвольные функции x , а решение выполняется так: после подстановки $z = a + yv$ решаются последовательно следующие уравнения:

$$0 = \frac{dv}{dx} + S + aI - Gv + bv^2$$

и

$$0 = \frac{dy}{dx} + A - 2ab + y(G - 2bv) + Iy^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

378. Очевидно, последнее уравнение не представляет никаких затруднений даже в общем случае, если только

$$F + aH + a^2L = 0,$$

а первое решается немедленно, если или $S + aI = 0$, или $V + aL = 0^1$).

¹⁾ См. Инт. исч., т. I, § 429.



ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ КНИГА ПОСЛЕДНЯЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ИЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ
ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ
ПО ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ
МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ
ЛЮБОГО ПОРЯДКА

—
РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ
ПО ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ
МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ
ТРЕТЬЕГО
ИЛИ

БОЛЕЕ ВЫСОКОГО
ПОРЯДКА

ГЛАВА I

О РЕШЕНИИ ПРОСТЕЙШИХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТОЛЬКО ОДНУ ПРОИЗВОДНУЮ

ЗАДАЧА 61

379. *Найти вид функции двух переменных x и y , если какая-нибудь ее производная третьего порядка исчезает.*

РЕШЕНИЕ

Пусть z — искомая функция, и так как она имеет четыре производные третьего порядка

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right), \quad \left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right), \quad \left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right),$$

то в соответствии с тем, какую из них берем равной нулю, мы должны исследовать четыре случая.

I. Пусть сперва $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = 0$, тогда, рассматривая y как постоянное, после первого интегрирования получаем

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \Gamma(y).$$

Подобным образом второе интегрирование дает

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = x\Gamma(y) + \Delta(y),$$

откуда, наконец,

$$z = \frac{1}{2} x^2 \Gamma(y) + x\Delta(y) + \Sigma(y),$$

где $\Gamma(y)$, $\Delta(y)$ и $\Sigma(y)$ обозначают какие угодно функции y ; таким образом, благодаря трем интеграциям в расчет вошли три произвольные функции, как того требует сущность дела.

II. Пусть $\left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right) = 0$, тогда, дважды проинтегрировав, причем считаем переменным только x , получаем, как выше,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = x\Gamma'(y) + \Delta'(y).$$

Далее, считая переменным только y , находим

$$z = x\Gamma(y) + \Delta(y) + \Sigma(x),$$

причем встречающиеся здесь значки при обозначении функций имеют тот смысл, что

$$\int dy\Gamma'(y) = \Gamma(y) \quad \text{и} \quad \int dy\Delta'(y) = \Delta(y).$$

III. Пусть $\left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right) = 0$. Так как этот случай отличается от предыдущего только перестановкой переменных x и y , искомый интеграл есть

$$z = y\Gamma(x) + \Delta(x) + \Sigma(y).$$

IV. Пусть $\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = 0$. Тогда путем подобной перестановки получим из первого случая, что

$$z = \frac{1}{2} y^2 \Gamma(x) + y\Delta(x) + \Sigma(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

380. Три произвольные функции, введенные здесь посредством тройного интегрирования, зависят либо только от x , либо только от y ; все три

зависят только от y в первом случае, когда $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = 0$, а только от x — в четвертом случае, когда $\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = 0$; две функции зависят только от y , а одна от x во втором случае, когда $\left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right) = 0$; напротив, две зависят только от x и одна только от y в третьем случае, когда $\left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2

381. Затем полезно заметить, что если встречаются две или больше произвольных функций одного переменного, положим x , то одна стоит сама по себе, вторая умножена на y , третья, если она имеется, умножена на $\frac{1}{2}y^2$ или, что то же, на y^2 .

СЛЕДСТВИЕ 3

382. Все же нужно постоянно иметь в виду, что требуется такой произвол в выборе этих функций, что не исключаются разрывные функции, т. е. такие, которые не удовлетворяют никакому непрерывному закону, иначе говоря, если свободно от руки провести произвольную линию, то ордината, соответствующая абсциссе x , дает такую функцию $\Gamma(x)$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

383. Считаю, что не стоит особенно останавливаться на преобразовании производных высшего порядка, когда вместо двух переменных x и y вводятся в расчет другие переменные, так как вообще получаются чрезвычайно сложные выражения, от которых вряд ли будет польза, кроме того, метод нахождения этих преобразований уже достаточно подробно изложен выше (§ 229). Но для простейшего случая, когда новые переменные t и u вводятся вместо x и y так, что

$$t = \alpha x + \beta y \quad \text{и} \quad u = \gamma x + \delta y,$$

я привожу нижеследующие формулы преобразования высших производных. Как мы уже видели, имеем:

для производных первого порядка

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dx}\right) &= \alpha \left(\frac{dz}{dt}\right) + \gamma \left(\frac{dz}{du}\right), \\ \left(\frac{dz}{dy}\right) &= \beta \left(\frac{dz}{dt}\right) + \delta \left(\frac{dz}{du}\right); \end{aligned}$$

для производных второго порядка

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) &= \alpha^2 \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2\alpha\gamma \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + \gamma^2 \left(\frac{d^2z}{du^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) &= \alpha\beta \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + (\alpha\delta + \beta\gamma) \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + \gamma\delta \left(\frac{d^2z}{du^2}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) &= \beta^2 \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2\beta\delta \left(\frac{d^2z}{dt du}\right) + \delta^2 \left(\frac{d^2z}{du^2}\right); \end{aligned}$$

для производных третьего порядка получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) &= \alpha^3\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right) + 3\alpha^2\gamma\left(\frac{d^3z}{dt^2 du}\right) + 3\alpha\gamma^2\left(\frac{d^3z}{dt du^2}\right) + \gamma^3\left(\frac{d^3z}{du^3}\right), \\ \left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right) &= \alpha^2\beta\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right) + (\alpha^2\delta + 2\alpha\beta\gamma)\left(\frac{d^3z}{dt^2 du}\right) + (\beta\gamma^2 + 2\alpha\gamma\delta)\left(\frac{d^3z}{dt du^2}\right) + \gamma^3\left(\frac{d^3z}{du^3}\right), \\ \left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right) &= \alpha\beta^2\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right) + (\beta^2\gamma + 2\alpha\beta\delta)\left(\frac{d^3z}{dt^2 du}\right) + (\alpha\delta^2 + 2\beta\gamma\delta)\left(\frac{d^3z}{dt du^2}\right) + \gamma\delta^2\left(\frac{d^3z}{du^3}\right), \\ \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) &= \beta^3\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right) + 3\beta^2\delta\left(\frac{d^3z}{dt^2 du}\right) + 3\beta\delta^2\left(\frac{d^3z}{dt du^2}\right) + \delta^3\left(\frac{d^3z}{du^3}\right), \end{aligned}$$

а для производных четвертого порядка —

$\left(\frac{d^4z}{dt^4}\right)$	$\left(\frac{d^4z}{dt^3 du}\right)$	$\left(\frac{d^4z}{dt^2 du^2}\right)$	$\left(\frac{d^4z}{dt du^3}\right)$	$\left(\frac{d^4z}{du^4}\right)$
$\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right) = \alpha^4$	$+ 4\alpha^3\gamma$	$+ 6\alpha^2\gamma^2$	$+ 4\alpha\gamma^3$	$+ \gamma^4$
$\left(\frac{d^4z}{dx^3 dy}\right) = \alpha^3\beta$	$\alpha^3\delta + 3\alpha^2\beta\gamma$	$3\alpha^2\gamma\delta + 3\alpha\beta\gamma^2$	$+ 3\alpha\gamma^2\delta + \beta\gamma^3$	$+ \gamma^3\delta$
$\left(\frac{d^4z}{dx^2 dy^2}\right) = \alpha^2\beta^2$	$2\alpha^2\beta\delta + 2\alpha\beta^2\gamma$	$\alpha^2\delta + 4\alpha\beta\gamma\delta + \beta^2\gamma^2$	$2\alpha\gamma\delta^2 + 2\beta\gamma^2\delta$	$+ \gamma^2\delta^2$
$\left(\frac{d^4z}{dx dy^3}\right) = \alpha\beta^3$	β^3	$3\alpha\beta\delta^2 + 3\beta^2\gamma\delta$	$\alpha\delta^3 + 3\beta\gamma\delta^2$	$+ \gamma\delta^3$
$\left(\frac{d^4z}{dy^4}\right) = \beta^4$	$+ 4\beta^3\delta$	$+ 6\beta^2\delta^2$	$+ 4\beta\delta^3$	$+ \delta^4$

Отсюда уже ясен закон для производных высших порядков, а именно

для вычисления общей производной $\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right)$ требуются те же коэффициенты, которые возникают при развертывании выражения

$$(\alpha + \gamma v)^m (\beta + \delta v)^n,$$

если только расположить слагаемые по степеням v .

ПОЯСНЕНИЕ 2

384. Считаю не лишним более подробно показать это развертывание на основании ранее установленных положений¹⁾. Итак, пусть

$$s = (\alpha + \gamma v)^m (\beta + \delta v)^n,$$

и положим

$$s = A + Bv + Cv^2 + Dv^3 + Ev^4 + Ev^5 + \text{и т. д.},$$

где прежде всего, очевидно, $A = \alpha^m \beta^n$; для нахождения же остальных коэффициентов возьмем дифференциалы логарифмов и получим

$$\frac{ds}{sdv} = \frac{m\gamma}{\alpha + \gamma v} + \frac{n\delta}{\beta + \delta v};$$

следовательно,

$$\frac{ds}{dv} [\alpha\beta + (\alpha\delta + \beta\gamma)v + \gamma\delta v^2] - s [m\beta\gamma + n\alpha\delta + (m+n)\gamma\delta v] = 0.$$

¹⁾ Эйлер, Дифференциальное исчисление, ч. 2-я, § 201 [Ф. Э.].

Если теперь вместо s подставить вышенаписанный ряд, то возникает уравнение

$$\begin{aligned}
 0 = & \alpha\beta B + 2\alpha\beta Cv + 3\alpha\beta Dv^2 + 4\alpha\beta Ev^3 + 5\alpha\beta Fv^4 + \text{и т. д.} \\
 & + \alpha\delta B + 2\alpha\delta C + 2\alpha\delta D + 4\alpha\delta E \\
 & + \beta\gamma B + 2\beta\gamma C + 3\beta\gamma D + 4\beta\gamma E \\
 & + \gamma\delta B + 2\gamma\delta C + 3\gamma\delta D \\
 - & m\beta\gamma A - m\beta\gamma B - m\beta\gamma C - m\beta\gamma D - m\beta\gamma E \\
 - & n\alpha\delta A - n\alpha\delta B - n\alpha\delta C - n\alpha\delta D - n\alpha\delta E \\
 & - (m+n)\gamma\delta A - (m+n)\gamma\delta B - (m+n)\gamma\delta C - (m+n)\gamma\delta D.
 \end{aligned}$$

Тогда каждый коэффициент получается из предыдущих таким образом:

$$\begin{aligned}
 A &= \alpha^m \beta^n, \\
 B &= \frac{m\beta\gamma + n\alpha\delta}{\alpha\beta} A, \\
 C &= \frac{(m-1)\beta\gamma + (n-1)\alpha\delta}{2\alpha\beta} B + \frac{(m+n)\gamma\delta}{2\alpha\beta} A, \\
 D &= \frac{(m-2)\beta\gamma + (n-2)\alpha\delta}{3\alpha\beta} C + \frac{(m+n-1)\gamma\delta}{3\alpha\beta} B, \\
 E &= \frac{(m-3)\beta\gamma + (n-3)\alpha\delta}{4\alpha\beta} D + \frac{(m+n-2)\gamma\delta}{4\alpha\beta} C \\
 &\quad \text{и т. д.}
 \end{aligned}$$

Итак, когда эти коэффициенты найдены для подстановки

$$t = \alpha x + \beta y \quad \text{и} \quad u = \gamma x + \delta y,$$

получается такое преобразование любой производной

$$\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right) = A \left(\frac{d^{m+n}z}{dt^{m+n}}\right) + B \left(\frac{d^{m+n}z}{dt^{m+n-1} du}\right) + C \left(\frac{d^{m+n}z}{dt^{m+n-2} du^2}\right) + \text{и т. д.}$$

ЗАДАЧА 62

385. Найти вид функции двух переменных x и y , если исчезает какая-нибудь ее производная любого порядка.

РЕШЕНИЕ

Из того, что мы показали в предыдущей задаче, когда приравнялись нулю производные, достаточно ясно, что наша задача для производных четвертого порядка решается так:

I. Если $\left(\frac{d^4 z}{dx^4}\right) = 0$,

то будет

$$z = x^3 \Gamma(y) + x^2 \Delta(y) + x \Sigma(y) + \Theta(y).$$

II. Если $\left(\frac{d^4 z}{dx^3 dy}\right) = 0$,

то будет

$$z = x^2 \Gamma(y) + x \Delta(y) + \Sigma(y) + \Theta(x).$$

III. Если $\left(\frac{d^4z}{dx^2 dy^2}\right) = 0$,
то будет

$$z = x\Gamma(y) + \Delta(y) + y\Sigma(x) + \Theta(x).$$

IV. Если $\left(\frac{d^4z}{dx dy^3}\right) = 0$,
то будет

$$z = \Gamma(y) + y^2\Delta(x) + y\Sigma(x) + \Theta(x).$$

V. Если $\left(\frac{d^4z}{dy^4}\right) = 0$,
то будет

$$z = y^3\Gamma(x) + y^2\Delta(x) + y\Sigma(x) + \Theta(x).$$

Заодно отсюда выясняется, как переходить к более высоким порядкам.

СЛЕДСТВИЕ 1

386. Поскольку здесь встречаются четыре произвольные функции, то есть столько же, сколько требовалось интегрирований, то в этом заключается критерий полного интегрирования.

СЛЕДСТВИЕ 2

387. Очень легко, наоборот, показать, что найденные выражения удовлетворяют предложенному уравнению. Так, например, для третьего случая мы нашли

$$z = x\Gamma(y) + \Delta(y) + y\Sigma(x) + \Theta(x),$$

а дифференцируя, получим:

$$\text{во-первых, } \left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma(y) + y\Sigma'(x) + \Theta'(x),$$

$$\text{затем } \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = y\Sigma''(x) + \Theta''(x),$$

$$\text{в-третьих, } \left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right) = \Sigma''(x),$$

$$\text{в-четвертых, } \left(\frac{d^4z}{dx^2 dy^2}\right) = 0$$

и мы приходим к тому же для любого порядка дифференцирований, при которых рассматриваем как переменное либо только x , либо только y .

ПОЯСНЕНИЕ 1

388. До сих пор мы принимали одну производную равной нулю, но вычисление равным образом удастся и тогда, когда эта производная приравнена любой функции x и y ; каким образом, это будет показано в следующих проблемах. Считаю нужным здесь вставить только то, что если V — произвольная функция двух переменных x и y , то $\int V dx$ означает интеграл, который получается, если только x считается пере-

менным, а в выражении $\int V dy$ считается переменным только y ; точно то же надо иметь в виду при повторных интегрированиях, как, например, $\int dx \int V dx$, где при обоих интегрированиях только количество x считается переменным, в то время как в выражении $\int dy \int V dx$, после того что интеграл $\int V dx$ найден на основании переменности одного только x , второе интегрирование $\int dy \int V dx$ выполняется так, что только y считается переменным. Поскольку равным образом можно начать с любого из этих интегрирований, можно устранить различие в порядке интегрирования также из обозначения и писать этот интеграл в виде $\iint V dx dy$. Отсюда ясно, как надо понимать выражения

$$\iiint dx^2 dy, \text{ то есть } \int^3 V dx^2 dy, \text{ и } \int^{m+n} V dx^m dy^n.$$

Здесь мы снабдили знак интегрирования \int индексом точно так же, как раньше знак дифференцирования d , с тем чтобы указать, сколько раз нужно повторить интегрирование.

ПОЯСНЕНИЕ 2

389. Здесь мы принимаем, что каждое из этих интегрирований в отдельности выполняется без использования какого-либо соотношения между переменными x и y . Это надо иметь в виду тем более, что обыкновенно, когда требуются такие интегрирования, выкладки должны выполняться совершенно иначе. Если, например, нужно вычислить объем некоторого тела или площадь его поверхности, то это выполняется при помощи двойного интеграла $\iint V dx dy$, где V — определенная функция x и y , и здесь сперва находим интеграл $\int V dy$, рассматривая x как постоянное; однако после выполнения интегрирования нужно обратить внимание на предписанные пределы интегрирования, а именно, с одной стороны, требуется, чтобы этот интеграл $\int V dy$ исчезал при $y=0$, и, с другой стороны, его надо распространить до тех пор, пока y не будет равняться некоторой заданной функции x . После же того, как таким образом определен интеграл $\int V dy$, нужно выполнить интегрирование выражения $dx \int V dy$, в котором количество y уже не встречается, так как вместо него подставляется некоторая функция от x и, следовательно, это выражение содержит на деле только одно-единственное переменное x . Таким образом после выполнения первого интегрирования переменное y превращается в функцию x , и поэтому при втором интегрировании, где x — переменное, это количество $[y]$ игрок уже не может рассматриваться как постоянное. Отсюда ясно, что указанный случай совершенно отличен от тех повторных интегрирований, которые мы здесь рассматриваем; и мы должны этот случай отбросить,

тем более, что он может иметь место только в выражении $\iint V dx dy$; в остальных же случаях, когда дифференциал dx или dy несколько раз повторяется, он и не может встречаться. Поэтому мы здесь не должны допускать никакого соотношения, которое, после того как выполнено одно интегрирование, можно иной раз установить между переменными x и y .

ЗАДАЧА 63

390. *Найти вид функций z , если какая-нибудь ее производная третьего или высшего порядка равна некоторой функции x и y .*

РЕШЕНИЕ

Пусть V — какая-либо функция двух переменных x и y , и пусть сперва $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = V$; тогда, считая переменным только x , получим

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \int V dx + \Gamma(y),$$

а затем —

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \int dx \int V dx + x\Gamma(y) + \Delta(y) = \iint V dx^2 + x\Gamma(y) + \Delta(y)$$

и, наконец,

$$z = \int^3 V dx^3 + \frac{1}{2} x^2 \Gamma(y) + x\Delta(y) + \Sigma(y).$$

Подобным образом, если

$$\left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right) = V,$$

то

$$z = \int^3 V dx^2 dy + x\Gamma(y) + \Delta(y) + \Sigma(x),$$

если же

$$\left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right) = V,$$

то

$$z = \int^3 V dx dy^2 + \Gamma(y) + y\Delta(x) + \Sigma(x),$$

а если, наконец,

$$\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = V,$$

то

$$z = \int^3 V dy^3 + y^2\Gamma(x) + y\Delta(x) + \Sigma(x).$$

Таким же образом можно перейти к производным высшего порядка, и мы получаем следующее:

если

$$\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right) = V,$$

ТО

$$z = \int^4 V dx^4 + x^3\Gamma(y) + x^2\Delta(y) + x\Sigma(y) + \Theta(y);$$

ЕСЛИ

$$\left(\frac{d^4z}{dx^3 dy}\right) = V,$$

ТО

$$z = \int^4 V dx^3 dy + x^2\Gamma(y) + x\Delta(y) + \Sigma(y) + \Theta(x);$$

ЕСЛИ

$$\left(\frac{d^4z}{dx^2 dy^2}\right) = V,$$

ТО

$$z = \int^4 V dx^2 dy^2 + x\Gamma(y) + \Delta(y) + y\Sigma(x) + \Theta(x);$$

ЕСЛИ

$$\left(\frac{d^4z}{dx dy^3}\right) = V,$$

ТО

$$z = \int^4 V dx dy^3 + \Gamma(y) + y^2\Delta(x) + y\Sigma(x) + \Theta(x);$$

ЕСЛИ

$$\left(\frac{d^4z}{dy^4}\right) = V,$$

ТО

$$z = \int^4 V dy^4 + y^3\Gamma(x) + y^2\Delta(x) + y\Sigma(x) + \Theta(x).$$

В дальнейшем изложении для более высоких порядков нет нужды.

СЛЕДСТВИЕ 1

391. Точно так, как знак интегрирования, используемый в первой книге, включает в себе уже постоянное, вводимое интегрированием, точно так же и здесь произвольные функции, появляющиеся в результате интегрирования, предполагаются включенными в знак интеграла, так что выделять их не требуется.

СЛЕДСТВИЕ 2

392. Достаточно, следовательно, для уравнения $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = V$ записать тройной интеграл в виде $z = \int^3 V dx^3$; это выражение само по себе уже содержит добавочные члены

$$x^2\Gamma(y) + x\Delta(y) + \Sigma(y),$$

и то же самое относится к остальным случаям.

СЛЕДСТВИЕ 3

393. Итак, если в общем случае дано уравнение

$$\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n} \right) = V,$$

то его интеграл можно сразу записать таким образом:

$$z = \int^{m+n} V dx^m dy^n,$$

что уже заключает в себе все $m+n$ произвольные функции, появившиеся в результате такого же числа интегрирований.

ПОЯСНЕНИЕ

394. Случаи, рассмотренные в этой главе, являются наиболее простыми; для более сложных случаев вряд ли можно указать определенные способы, так как эта часть интегрального исчисления находится только в самом начале своего развития. Ясно, конечно, что если более сложное уравнение может быть путем преобразования приведено к этим простейшим, то его интегрирование будет немедленно дано; на этом вопросе мы здесь подробнее не остановимся. Я перехожу к случаям более глубоким, обладающим таким свойством, что решение удастся при помощи уравнений менее высокого порядка, откуда можно получить замечательный метод достаточно широкого охвата, который можно будет часто не без успеха применять. Все же не представляется целесообразным слишком подробно останавливаться на этом вопросе; достаточно будет разъяснить те основные начала, которые известны в настоящее время.



ГЛАВА II

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ПУТЕМ ПРИВЕДЕНИЯ К УРАВНЕНИЯМ НИЗШЕГО ПОРЯДКА

ЗАДАЧА 64

395. Дано уравнение третьего порядка $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = a^3z$. Найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Предположим, что этому уравнению удовлетворяет решение следующего более простого уравнения первого порядка:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = nz;$$

из него путем дифференцирования получается

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = n \left(\frac{dz}{dx}\right) = n^2z$$

и, далее,

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) = n^2 \left(\frac{dz}{dx}\right) = n^3z.$$

Ясно, что заданное уравнение будет удовлетворяться, если $n^3 = a^3$, что возможно тремя способами:

I. $n = a$;

II. $n = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} a$;

III. $n = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} a$.

В любом случае ищем полный интеграл уравнения $\left(\frac{dz}{dx}\right) = nz$, и эти три интеграла вместе дадут полный интеграл заданного уравнения.

Поскольку, однако, в уравнении $\left(\frac{dz}{dx}\right) = nz$ количество y считается постоянным, то будет

$$dz = nz dx, \text{ то есть } \frac{dz}{z} = n dx,$$

откуда

$$lz = nx + \Gamma(y) \text{ или } z = e^{nx}\Gamma(y).$$

Придавая теперь числу n его три значения, получим для заданного уравнения

$$z = e^{ax}\Gamma(y) + e^{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}ax} \Delta(y) + e^{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}ax} \Sigma(y).$$

Поскольку, однако,

$$e^{m\sqrt{-1}} = \cos m + \sqrt{-1} \sin m,$$

то, изменяя вид произвольных функций, будем иметь

$$z = e^{ax}\Gamma(y) + e^{-\frac{1}{2}ax} \cos \frac{ax\sqrt{3}}{2} \Delta(y) + e^{-\frac{1}{2}ax} \sin \frac{ax\sqrt{3}}{2} \Sigma(y).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

396. Этот интеграл можно представить еще так:

$$z = e^{ax}\Gamma(y) + e^{-\frac{1}{2}ax} \Delta(y) \cos\left(\frac{ax\sqrt{3}}{2} + Y\right),$$

где Y — функция y .

СЛЕДСТВИЕ 2

397. Поскольку требуются три интегрирования и в каждом из них количество y рассматривается как постоянное, то решаем по правилам первой книги¹⁾ уравнение $d^3z = a^3z dx^3$, а вместо трех постоянных вводим какие-либо функции y ; тогда получается то же решение.

ЗАДАЧА 65

398. *Задается следующее уравнение любого порядка*

$$Pz + Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + R\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + S\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + T\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right) + \text{и т. д.} = 0,$$

где буквы P, Q, R, S, T и т. д. обозначают какие-угодно функции двух переменных x и y ; найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Поскольку при выполнении всех интегрирований количество y рассматривается как постоянное, это уравнение следует рассматривать как

¹⁾ См. Интегральное исчисление, т. II, § 4136. [Ф. Э.]

уравнение только с двумя переменными x и z . Следовательно, надо по правилам первой книги¹⁾ рассматривать уравнение

$$Pz + \frac{Q dz}{dx} + \frac{R d^2z}{dx^2} + \frac{S d^3z}{dx^3} + \frac{T d^4z}{dx^4} + \text{и т. д.} = 0.$$

Если его решение удастся, тогда нужно только вместо постоянных, вводимых при отдельных интегрированиях, подставлять произвольные функции y ; тогда получим требуемый интеграл, к тому же полный, если только полностью можно проинтегрировать последнее уравнение.

СЛЕДСТВИЕ 1

399. Если, следовательно, буквы P, Q, R, S и т. д. — постоянные или содержат только переменное y , то интегрирование всегда удастся, так как в первой книге мы показали, как такие уравнения интегрируются в общем виде.

СЛЕДСТВИЕ 2

400. Далее, удастся также решить следующее уравнение²⁾:

$$Az + Bx \left(\frac{dz}{dx} \right) + Cx^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) + Dx^3 \left(\frac{d^3z}{dx^3} \right) + \text{и т. д.} = 0,$$

будут ли буквы A, B, C и т. д. постоянными или функциями одного только y .

СЛЕДСТВИЕ 3

401. Если эти выражения не равны нулю, а равны каким угодно функциям переменных x и y , то интегрирование все равно удастся на основании того, что изложено в последних главах первой книги.

ПОЯСНЕНИЕ

402. Все это можно применить еще гораздо шире — ко всем уравнениям, в которых не встречаются другие производные, кроме производных

$$\left(\frac{dz}{dx} \right), \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right), \left(\frac{d^3z}{dx^3} \right) \text{ и т. д.,}$$

содержащих только x как [независимое] переменное. Как бы сложны ни были выражения, содержащие конечные количества x, y и z , уравнение всегда надо считать относящимся к предмету первой книги, так как при всех интегрированиях количество y неизменно рассматривается как постоянное. После выполнения интегрирования разница заключается лишь в том, что вместо произвольных постоянных вводятся производные функции y . Излишне здесь напомнить, что то, что сказано о переменном y , относится также к переменному x .

¹⁾ Интегральное исчисление [том II], книга 1, часть II, раздел 1, гл. III—XI и раздел 2, гл. II. [Ф. Э.]

²⁾ См. там же, раздел II, гл. V. [Ф. Э.]

ЗАДАЧА 66

403. По предложенному уравнению

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + b\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) - 2a\left(\frac{dz}{dx}\right) - ab\left(\frac{dz}{dy}\right) + a^2z = 0$$

найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Легко видеть, что этому уравнению удовлетворяет решение более простого уравнения $\left(\frac{dz}{dx}\right) = az$, откуда $z = e^{ax}$; положим поэтому $z = e^{ax}v$. Тогда

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{ax} \left[av + \left(\frac{dv}{dx}\right) \right], \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = e^{ax} \left(\frac{dv}{dy}\right),$$

а отсюда

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = e^{ax} \left[a^2v + 2a\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) \right]$$

и

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = e^{ax} \left[a\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) \right].$$

После подстановки этих значений и деления уравнения на e^{ax} будем иметь

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + b\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) = 0.$$

Здесь везде встречается $\left(\frac{dv}{dx}\right)$. Поэтому положим $\left(\frac{dv}{dx}\right) = u$ и получим

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + b\left(\frac{du}{dy}\right) = 0.$$

Интеграл этого уравнения есть

$$f(y - bx) = u.$$

Напишем поэтому

$$u = \left(\frac{dv}{dx}\right) = -b\Gamma'(y - bx),$$

откуда вытекает

$$v = \Gamma(y - bx) + \Delta(y),$$

так что искомым интегралом есть

$$z = e^{ax} [\Gamma(y - bx) + \Delta(y)].$$

Это выражение содержит две произвольные функции и поэтому является полным интегралом.

ЗАДАЧА 67

404. Предложено уравнение

$$0 = (a + 2b)z - (2a + 3b)\left(\frac{dz}{dx}\right) + c\left(\frac{dz}{dy}\right) + a\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - \\ - 2c\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + b\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + c\left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right).$$

Найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Это уравнение составлено таким образом, что ему, очевидно, удовлетворяет $z = e^x$; положим поэтому $z = e^x v$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dx}\right) &= e^x \left[v + \left(\frac{dv}{dx}\right) \right], \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = e^x \left(\frac{dv}{dy}\right), \\ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) &= e^x \left[v + 2\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) \right], \quad \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) = e^x \left[\left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) \right], \\ \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) &= e^x \left[v + 3\left(\frac{dv}{dx}\right) + 3\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) \right], \\ \left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right) &= e^x \left[\left(\frac{dv}{dy}\right) + 2\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) + \left(\frac{d^3v}{dx^2 dy}\right) \right]. \end{aligned}$$

После подстановки этих значений получается следующее довольно простое уравнение:

$$0 = (a + 3b) \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + b \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + c \left(\frac{d^3v}{dx^2 dy}\right).$$

Удобным здесь является то, что во всех членах содержится выражение $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$, поэтому, положив $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = u$, получим такое уравнение первого порядка:

$$0 = (a + 3b)u + b \left(\frac{du}{dx}\right) + c \left(\frac{du}{dy}\right).$$

Отсюда вытекает, что если принять

$$du = p dx + q dy,$$

то будем иметь

$$(a + 3b)u + bp + cq = 0.$$

А это уравнение решается так. Если положить $a + 3b = f$, то

$$q = -\frac{bp}{c} - \frac{fu}{c},$$

и тогда

$$du = p dx - \frac{bp dy}{c} - \frac{fu dy}{c},$$

то есть

$$dx - \frac{b dy}{c} = \frac{1}{p} \left(du + \frac{fu dy}{c} \right) = \frac{u}{p} \left(\frac{du}{u} + \frac{f dy}{c} \right).$$

Таким образом, необходимо, чтобы $\frac{u}{p}$ было функцией от $x - \frac{by}{c}$, откуда

$$lu + \frac{fy}{c} = f(cx - by)$$

и

$$u = e^{-\frac{fy}{c}} \Gamma'' \left(x - \frac{by}{c} \right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right).$$

Если рассматривать y как постоянное, то первое интегрирование дает

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = e^{-\frac{fy}{c}} \Gamma' \left(x - \frac{by}{c} \right) + \Delta(y),$$

а второе —

$$v = e^{-\frac{fy}{c}} \Gamma \left(x - \frac{by}{c} \right) + x\Delta(y) + \Sigma(y).$$

Таким образом, полагая $a + 3b = f$, получим полный интеграл заданного уравнения

$$z = e^{x - \frac{fy}{c}} \Gamma \left(x - \frac{by}{c} \right) + e^x x\Delta(y) + e^{x\Sigma}(y).$$

ЗАДАЧА 67 [a] ¹⁾

405. Предложено следующее дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$0 = Pz - 3P \frac{dz}{dx} + 3P \frac{d^2z}{dx^2} - P \frac{d^3z}{dx^3} + Q \frac{dz}{dy} - 2Q \frac{d^2z}{dx dy} + Q \frac{d^3z}{dx^2 dy},$$

где P и Q — какие-либо функции от x и y . Найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Сделаем подстановку $z = e^x v$, поскольку по заданному уравнению легко видеть, что ему можно удовлетворять, подставляя e^x вместо z . Приходим к следующему уравнению:

$$-P \left(\frac{d^3v}{dx^3} \right) + Q \left(\frac{d^3v}{dx^2 dy} \right) = 0.$$

Положим далее $\left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) = u$, так что $v = \int \int u dx^2$. Тогда получим

$$-P \left(\frac{du}{dx} \right) + Q \left(\frac{du}{dy} \right) = 0.$$

Положим $du = p dx + q dy$, имеем $Qq = Pr$, стало быть, $q = \frac{Pr}{Q}$ и, следовательно,

$$du = p \left(dx + \frac{P}{Q} dy \right),$$

откуда ясно, что количество p должно быть таким, чтобы выражение

$$dx + \frac{P}{Q} dy$$

после умножения на него становилось интегрируемым. Итак, ищем множитель M , который делает интегрируемым выражение

$$Q dx + P dy,$$

так что

$$\int M (Q dx + P dy) = s,$$

и я принимаю, что мы можем найти эту функцию s переменных x и y ; а так как

$$Q dx + P dy = \frac{ds}{M},$$

¹⁾ В первом издании: Задача 68; см. примечание к § 407.

то

$$du = \frac{p ds}{MQ},$$

откуда ясно, что $\frac{p}{MQ}$ означает функцию количества s . Положим поэтому $\frac{p}{MQ} = \Gamma'(s)$; тогда сразу получаем $u = \Gamma(s)$, и отсюда $v = \int dx \int dx \Gamma(s)$, где в обоих интегрированиях количество y рассматривается как постоянное. Таким образом, получаем следующее решение проблемы.

Ищем для дифференциального выражения $Q dx + P dy$ множитель M , который делает его интегрируемым, так что

$$M(Q dx + P dy) = ds,$$

и, когда найдена эта функция s переменных x и y , имеем

$$z = e^x \int dx \int dx \Gamma(s) + e^x x \Delta(y) + e^x \Sigma(y).$$

ПОЯСНЕНИЕ

406. В этих уравнениях мы воспользовались тем обстоятельством, что после подстановки $z = e^x v$ они принимают форму, которую затем легко можно привести к простому типу, рассмотренному в первом разделе. Действительно, хотя производные третьего порядка не уничтожаются, все же исчезают из уравнения такие члены, что можно воспользоваться новой подстановкой $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = u$ и с ее помощью перейти к дифференциальному уравнению первого порядка. Значит, этого можно достичь одной подстановкой, если сразу положить $z = e^x \int \int u dx^2$. Если бы только мы имели правила, с помощью которых можно было бы легко находить такие подстановки! А пока что в качестве последней задачи гораздо более широкого охвата может быть решена с применением § 209 следующая

ЗАДАЧА 67 [b] ¹⁾

407. Предложено дифференциальное уравнение третьего порядка

$$0 = (P + Q)z - (2P + 3Q)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (P + 3Q)\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) - Q\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) - \\ - R\left(\frac{dz}{dy}\right) + 2R\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) - R\left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right),$$

где P , Q и R — какие-либо заданные функции x и y . Найти вид функции z .

РЕШЕНИЕ

Применим ту же подстановку $z = e^x v$, которой мы пользовались до сих пор, и предложенное уравнение перейдет в следующее:

$$0 = P\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) - Q\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) - R\left(\frac{d^3v}{dx^2 dy}\right),$$

¹⁾ В первом издании: Задача 67; в этом издании номера задач 67 и 68 по ошибке повторены два раза.

и удобным оказывается здесь то, что, если положить $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = u$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$0 = Pu - Q\left(\frac{du}{dx}\right) - R\left(\frac{du}{dy}\right),$$

откуда надо найти, какова функция u переменных x и y . Положим

$$du = p dx + q dy;$$

тогда, согласно вышестоящему условию,

$$Pu = Qp + Rq.$$

Следуя приему, примененному в § 209, образуем теперь следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} L du &= Lp dx + Lq dy, \\ MPu dx &= MQp dx + MRq dx, \\ NPu dy &= NQp dy + NRq dy. \end{aligned}$$

Складывая их, получаем

$$L du - Pu(M dx + N dy) = p[(L + MQ) dx + NQ dy] + q[(L + NR) dy + MR dx].$$

Здесь, поскольку три количества L , M и N зависят от нашего произвола, установим между ними прежде всего такое соотношение, чтобы оба слагаемых в правой части содержали общий множитель, а именно,

$$(L + MQ) : NQ = MR : (L + NR), \text{ то есть } L = -MQ - NR.$$

Тогда имеем

$$-du(MQ + NR) + Pu(M dx + N dy) = (Mq - Np)(R dx - Q dy).$$

Найдем множитель T , который делает интегрируемым выражение $(R dx - Q dy)$, так что

$$T(R dx - Q dy) = ds,$$

и, таким образом, мы можем рассматривать как функцию T , так и s как известные и имеем теперь

$$-du(MQ + NR) + Pu(M dx + N dy) = (Mq - Np) \frac{ds}{T}$$

или

$$\frac{du}{u} - \frac{P(M dx + N dy)}{MQ + NR} = \frac{Np - Mq}{u(MQ + NR)} \frac{ds}{T}.$$

Теперь надо заметить, что, поскольку P , Q , R — заданные функции x и y , мы всегда можем установить такое соотношение между пока не определенными величинами M и N , чтобы выражение $\frac{P(M dx + N dy)}{MQ + NR}$ допускало интегрирование. Итак, пусть его интеграл $= l\omega$, так что

$$M dx + N dy = \frac{MQ + NR}{P} \frac{d\omega}{\omega}$$

и

$$\frac{du}{u} = \frac{d\omega}{\omega} + \frac{Np - Mq}{Tu(MQ + NR)} ds.$$

Поэтому необходимо, чтобы количества p и q были между собой связаны так, чтобы было

$$\frac{Np - Mq}{Tu(MQ + NR)} = f'(s),$$

откуда

$$lu = l\omega + f(s).$$

Вместо $f(s)$ напомним $l\Gamma(s)$ и получим $u = \omega\Gamma(s)$, а тогда

$$v = \int dx \int \omega dx\Gamma(s) + x\Delta(y) + \Sigma(y)$$

и, следовательно,

$$z = e^x \int dx \int \omega dx\Gamma(s) + e^x x\Delta(y) + e^x \Sigma(y).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

408. Итак, для того чтобы сразу построить по предложенному уравнению это решение, ищем сперва такую функцию от x и y , которую назовем s , чтобы было

$$ds = T(Rdx - Qdy),$$

и это выполняется путем определения множителя T , который делает интегрируемым дифференциальное выражение $Rdx - Qdy$.

СЛЕДСТВИЕ 2

409. Правда, кроме того, надо найти также количество ω . С этой целью нужно установить такое соотношение между количествами M и N , чтобы было

$$\int \frac{P(Mdx + Ndy)}{MQ + NR} = l\omega,$$

и это всегда возможно.

ПОЯСНЕНИЕ

410. Поскольку мы свели весь вопрос к тому, что надо определить функцию u из дифференциального уравнения

$$Pu = Q \left(\frac{du}{dx} \right) + R \left(\frac{du}{dy} \right),$$

то его решение может быть получено гораздо проще, без обходных путей, которыми я пользовался [первоначально]; это даст существенное дополнение к первому разделу [нашей книги]. Примем, что

$$\left(\frac{du}{dx} \right) = LMu \quad \text{и} \quad \left(\frac{du}{dy} \right) = LNu.$$

Тогда, прежде всего,

$$P = L(MQ + NR),$$

откуда

$$L = \frac{P}{MQ + NR}.$$

Далее, так как

$$du = dx \left(\frac{du}{dx} \right) + dy \left(\frac{du}{dy} \right),$$

получим

$$\frac{du}{u} = L (M dx + N dy) = \frac{P (M dx + N dy)}{MQ + NR},$$

где M и N должны быть выбраны так, чтобы это выражение интегрировалось, а так как это можно сделать бесконечным числом способов, следует считать, что получено полное решение. Но, имея один частный интеграл, гораздо удобнее получить общее решение следующим путем. Положим

$$\frac{dw}{w} = \frac{P (M dx + N dy)}{MQ + NR},$$

так что значение w может быть взято вместо u в качестве частного интеграла. Итак,

$$Pw = Q \left(\frac{dw}{dx} \right) + R \left(\frac{dw}{dy} \right).$$

Напишем теперь полный интеграл в виде $u = w\Gamma(s)$, так что после подстановки получим

$$Pw\Gamma(s) = Q \left(\frac{dw}{dx} \right) \Gamma(s) + R \left(\frac{dw}{dy} \right) \Gamma(s) + Qw \left(\frac{ds}{dx} \right) \Gamma'(s) + Rw \left(\frac{ds}{dy} \right) \Gamma'(s),$$

что немедленно приводится к виду

$$Q \left(\frac{ds}{dx} \right) + R \left(\frac{ds}{dy} \right) = 0,$$

откуда заключаем, что

$$\left(\frac{ds}{dx} \right) = TR \quad \text{и} \quad \left(\frac{ds}{dy} \right) = -TQ.$$

Следовательно,

$$ds = T (R dx - Q dy),$$

откуда ясно, что это количество s находится из выражения $R dx - Q dy$ таким путем: сперва определяем множитель T , который делает это выражение интегрируемым, а затем берем в качестве s интеграл от этого выражения. Итак, мы получили то же решение, что и выше, но без обходных путей.

ЗАДАЧА 68

411. Предложено дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\left(\frac{d^4 z}{dy^4} \right) = a^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right).$$

Свести нахождение функции z к решению более простого уравнения.

РЕШЕНИЕ

При более внимательном рассмотрении этого уравнения легко обнаружим, что ему удовлетворяет решение более простого уравнения

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right) = b \left(\frac{dz}{dx} \right).$$

В самом деле, дифференцируя по y , получаем

$$\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = b \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right),$$

а повторив то же самое, находим

$$\left(\frac{d^4z}{dy^4}\right) = b \left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right).$$

Но если продифференцировать принятое нами уравнение по x , получим

$$\left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right) = b \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

и подстановка в предыдущее уравнение дает, что

$$\left(\frac{d^4z}{dy^4}\right) = b^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right).$$

Это уравнение совпадает с предложенным, если $b^2 = a^2$, что можно получить двояким способом: при

$$b = +a \quad \text{и} \quad b = -a.$$

После того как решим такие более простые уравнения:

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - a \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0, \quad \text{что пусть дает } z = P,$$

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + a \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0, \quad \text{что пусть дает } z = Q,$$

имеем для предложенного уравнения

$$z = P + Q,$$

и так как и P , и Q содержат по две произвольные функции, полученный таким образом интеграл содержит четыре произвольные функции и является, следовательно, полным.

СЛЕДСТВИЕ 1

412. Можно легко получить бесконечное число частных решений, полагая

$$z = e^{\mu x + \nu y}.$$

Действительно, выполнив подстановку, видим, что должно быть

$$\nu^4 = \mu^2 a^2 \quad \text{и} \quad \mu = \pm \frac{\nu^2}{a}.$$

Если $\nu = \lambda a$, то $\mu = \pm \lambda^2 a$, и интегралом будет

$$z = e^{\lambda a(y \pm \lambda x)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

413. Можно также полагать $z = e^{\mu x} \cos(\nu y + \alpha)$, откуда $\nu^4 = \mu^2 a^2$, как и выше, так что получается другая форма частных интегралов:

$$z = e^{\pm \lambda^2 a x} \cos(\lambda a y + \alpha).$$

Надо считать, что, беря совместно бесконечно много таких выражений, мы как бы исчерпываем полный интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 3

414. Эти же решения получаются, если положить в более общем виде $z = XY$, что дает

$$\frac{X d^4 Y}{dy^4} = \frac{a^2 Y d^2 X}{dx^2},$$

что можно представить в таком виде

$$\frac{d^4 Y}{Y dy^4} = \frac{a^2 d^2 X}{X dx^2},$$

и обе части этого уравнения должны быть равны одному и тому же постоянному количеству.

ПОЯСНЕНИЕ

415. Однако уравнение, к которому мы свели всю задачу, а именно

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = b \left(\frac{dz}{dx}\right),$$

принадлежит к тем, которые, по-видимому, никак не могут быть решены в общем случае, так что мы должны удовлетвориться частными решениями. Но предложенное уравнение получено не путем чистого умозрения, а при определении в общем виде весьма малых колебаний упругих пластинок; то, что мы приходим к решению такого уравнения четвертого порядка¹⁾, является причиной того, что этот вопрос не мог быть до сих пор решен в общем виде, в отличие от [задачи] о колебаниях струн. Подобным же образом легко усмотреть, что уравнение четвертого порядка

$$\left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right) = a \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + 2ab \left(\frac{dz}{dx}\right) + b^2 z$$

сводится к таким двум уравнениям второго порядка:

$$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \pm a \left(\frac{dz}{dx}\right) \pm bz,$$

и нетрудно обнаружить a posteriori другие случаи, когда такое приведение к уравнениям низшего порядка имеет место.

¹⁾ См. работу Эйлера (№ 443 по списку Энестрема) «О колебательном движении упругих пластинок, причем исследуются многие новые виды колебаний, доселе не рассмотренные» (De motu vibratorio laminarum elasticarum, ubi plures novae vibrationum species hactenus non pertractatae evolvuntur), Novi comment. acad. Sc. Petrop. 17 (1772), 1773, § IX, стр. 456, а также в Opera Omnia, Ser. II, vol. 9. [Ф. Э.]



ГЛАВА III

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ, В КОТОРЫХ ВСЕ ЧЛЕНЫ СОДЕРЖАТ ПРОИЗВОДНЫЕ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ ПОРЯДКА

ЗАДАЧА 69

416. Найти интеграл однородного уравнения второго порядка

$$A \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) + B \left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) + C \left(\frac{d^2z}{dy^2} \right) = 0,$$

то есть найти вид функции z ; буквами A , B , C обозначены произвольные постоянные количества.

РЕШЕНИЕ

Я называю это уравнение однородным, так как оно состоит из производных второго порядка и, кроме них, не содержит никаких других переменных величин. Для его решения замечу, что ему удовлетворяют решения однородных уравнений первого порядка такого вида:

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) + \alpha \left(\frac{dz}{dy} \right) = \Delta = \text{const.}$$

В самом деле, два раза дифференцируя это уравнение, по x и по y , получаем

$$\text{I. } \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) + \alpha \left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) = 0,$$

$$\text{II. } \left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) + \alpha \left(\frac{\partial^2 z}{dy^2} \right) = 0.$$

Если первое уравнение умножить на A , а второе на $\frac{C}{\alpha}$ и сложить, получим предложенное уравнение при условии, что

$$Ax + \frac{C}{\alpha} = B,$$

то есть

$$Ax^2 - Bx + C = 0;$$

отсюда получаем для a два значения, каждое из которых при подстановке в уравнение дает слагаемое в искомой функции z . Действительно, поскольку

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Delta - a \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

и, следовательно,

$$dz = \Delta dx + (dy - a dx) \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

то ясно, что $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ должно быть функцией количества $y - ax$; если записать ее в виде $\Gamma'(y - ax)$, то

$$z = fx + \Gamma(y - ax),$$

где f обозначает какую-либо постоянную. Таким образом, решение предложенного уравнения находится следующим путем. Образум сперва алгебраическое уравнение

$$Au^2 + Bu + C = 0,$$

простые множители которого суть

$$u + \alpha \quad \text{и} \quad u + \beta,$$

так что

$$Au^2 + Bu + C = A(u + \alpha)(u + \beta).$$

Тогда искомый интеграл будет

$$z = fx + \Gamma(y - ax) + \Delta(y - \beta x),$$

а поскольку первое слагаемое fx можно считать содержащимся уже в двух неопределенных функциях, так как

$$fx = \frac{f(y - ax) - f(y - \beta x)}{\beta - \alpha},$$

можно записать этот интеграл короче:

$$z = \Gamma(y - ax) + \Delta(y - \beta x).$$

Его следует считать полным, благодаря наличию в нем двух произвольных функций, за исключением того случая, когда $\beta = \alpha$. В этом случае положим $\beta = \alpha + d\alpha$; тогда

$$\Delta[y - (a + d\alpha)x] = \Delta(y - ax) - x d\alpha \Delta'(y - ax),$$

и так как первое слагаемое [первой части] уже содержится в первом члене [выражения для z], а вместо второго слагаемого можно написать $x \Delta(y - ax)$, получаем для случая $\beta = \alpha$, то есть $B^2 = 4AC$, интеграл

$$z = \Gamma(y - ax) + x \Delta(y - ax).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

417. В случае $\beta = \alpha$ интеграл можно, очевидно, выразить еще и так:

$$z = \Gamma(y - ax) + y \Delta(y - ax),$$

что не отличается от предыдущего выражения.

СЛЕДСТВИЕ 2

418. Если $C = 0$, так что

$$A \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) + B \left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) = 0,$$

и, далее,

$$Au^2 + Bu = Au \left(u + \frac{B}{A} \right),$$

то получим

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \beta = \frac{B}{A}$$

и интеграл

$$z = \Gamma(y) + \Delta \left(y - \frac{B}{A} x \right) = \Gamma(y) + \Delta(Ay - Bx).$$

Подобным образом интеграл уравнения

$$B \left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) + C \left(\frac{d^2z}{dy^2} \right) = 0,$$

есть

$$z = \Gamma(x) + \Delta(Cx - By).$$

СЛЕДСТВИЕ 3

419. Для уравнения

$$a^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) + 2ab \left(\frac{d^2z}{dx dy} \right) + b^2 \left(\frac{d^2z}{dy^2} \right) = 0,$$

поскольку

$$a^2 u^2 + 2abu + b^2 = a^2 \left(u + \frac{b}{a} \right)^2,$$

интеграл равен

$$z = \Gamma(ay - bx) + x\Delta(ay - bx).$$

ПОЯСНЕНИЕ

420. Запись этих интегралов не вызывает никаких затруднений, если только уравнение

$$Au^2 + Bu + C = 0$$

имеет два действительных корня, будут ли они равными или неравными; когда же эти два корня мнимые, так что

$$\alpha = \mu + \nu \sqrt{-1} \quad \text{и} \quad \beta = \mu - \nu \sqrt{-1},$$

то произвольные функции уже ничего не дают. Ибо если вид функций Γ и Δ представляется произвольно проведенными кривыми, так что $\Gamma(v)$ и $\Delta(v)$ означают ординаты, соответствующие абсциссе v , то никак не ясно, как надо строить значения

$$\Gamma(p + q\sqrt{-1}) \quad \text{и} \quad \Delta(p - q\sqrt{-1}),$$

даже если мнимые части взаимно уничтожаются. В том-то и обнаруживается большое различие между функциями непрерывными и разрывными,

что в первых выражения

$$\Gamma(p + q\sqrt{-1}) + \Gamma(p - q\sqrt{-1})$$

и

$$\frac{\Delta(p + q\sqrt{-1}) - \Delta(p - q\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$$

могут быть представлены в действительном виде¹⁾, что никак не удастся, если Γ и Δ — разрывные функции. В этих случаях, следовательно, найденное здесь общее решение, по-видимому, нужно ограничить случаем непрерывных функций, поскольку здесь разрывные функции не допускают применения и построения²⁾.

ЗАДАЧА 70

421. Предложено однородное уравнение третьего порядка

$$A\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + B\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) + C\left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right) + D\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = 0.$$

Найти его общий интеграл.

РЕШЕНИЕ

И этому уравнению, как и в предыдущей задаче, удовлетворяет решение простого дифференциального уравнения первого порядка, как это легко видеть, и отсюда следует, что оно имеет частный интеграл вида

$$z = \Gamma(y + nx).$$

Образум все производные третьего порядка, а именно:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) &= n^3\Gamma''''(y + nx), & \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right) &= n^2\Gamma''''(y + nx), \\ \left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right) &= n\Gamma''''(y + nx), & \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) &= \Gamma''''(y + nx); \end{aligned}$$

тогда после подстановки и деления на $\Gamma''''(y + nx)$ получается уравнение

$$An^3 + Bn^2 + Cn + D = 0,$$

три корня которого пусть будут $n = \alpha$, $n = \beta$, $n = \gamma$. Ясно, что заданному уравнению удовлетворяет выражение

$$z = \Gamma(y + \alpha x) + \Delta(y + \beta x) + \Sigma(y + \gamma x),$$

которое, несомненно, является полным интегралом, поскольку оно содержит три произвольные функции. Нужно только заметить, что если два корня равны между собой, например $\gamma = \beta$, интеграл будет

$$z = \Gamma(y + \alpha x) + \Delta(y + \beta x) + x\Sigma(y + \beta x),$$

¹⁾ realiter exhiberi queant.

²⁾ His igitur casibus solutio generalis hic inventa ad solas functiones contnuas restringenda videtur, quandoquidem discontinuae applicationi et executioni adversantur. Эйлер подразумевает, что здесь можно пользоваться только аналитическими функциями.

если же все три корня равны между собой: $\gamma = \beta = \alpha$, искомым интеграл будет

$$z = \Gamma(y + \alpha x) + x\Delta(y + \alpha x) + x^2\Sigma(y + \alpha x).$$

Если два корня — комплексные, тогда нужно иметь в виду то же самое, что мы выше заметили.

СЛЕДСТВИЕ 1

422. Последний случай, когда три корня равны между собой, получается и на том основании, что если вместо переменных x и y ввести новые

$$t = x \quad \text{и} \quad u = y + \alpha x,$$

то предложенное уравнение упрощается и принимает форму $\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right) = 0$, интеграл которого, очевидно, есть

$$z = \Gamma(u) + x\Delta(u) + x^2\Sigma(u).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

423. Отсюда уже видно, каким образом надо будет строить интегралы однородных уравнений высшего порядка в том случае, когда соответствующие алгебраические уравнения имеют несколько равных корней. Таким образом, построение интегралов как в случае равных, так и в случае неравных корней не представляет никаких затруднений.

ПОЯСНЕНИЕ

424. Однако случай двух мнимых корней, когда произвольные функции, по-видимому, не дают никакой пользы, стоит подробнее рассмотреть в отношении тех непрерывных функций, которые здесь дают решение. Выражения, входящие в интеграл, в таком случае всегда приводятся к виду

$$\Gamma(v(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)) + \Delta(v \cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi).$$

Теперь, если эти функции суть степени, то получаются выражения вида

$$Av^n \cos n\varphi + Bv^n \sin n\varphi \quad \text{или} \quad Av^n \cos(n\varphi + \alpha),$$

где постоянные A , n и α можно произвольно менять. Далее, если эти функции обозначают логарифмы, то получаются выражения вида

$$Av + B\varphi.$$

Если эти функции показательные, то получаются такие выражения:

$$e^{v \cos \varphi} [A \cos(v \sin \varphi) + B \sin(v \sin \varphi)] = Ae^{v \cos \varphi} \cos(v \sin \varphi + \alpha)$$

или, более общим образом,

$$Ae^{v^n \cos n\varphi} \cos(v^n \sin n\varphi + \alpha).$$

Можно еще получить из учения о мнимых многие другие выражения такого рода, которые в комбинации с вышеуказанными дают слагаемые

интеграла, соответствующие парам комплексных корней. Таким образом, получится бесконечное множество функций, которые представляют собою нечто сходное с полным решением, но его, однако, нельзя считать в той же мере полным и использовать так же, как в тех случаях, когда все корни действительны¹⁾. Заметим здесь, однако, что до сих пор не встречалась ни одна механическая или физическая проблема, которая сводилась бы к этому случаю.

ЗАДАЧА 71

425. Предложено однородное уравнение любого порядка

$$A \left(\frac{d^\lambda z}{dx^\lambda} \right) + B \left(\frac{d^\lambda z}{dx^{\lambda-1} dy} \right) + C \left(\frac{d^\lambda z}{dx^{\lambda-2} dy^2} \right) + \text{и т. д.} = 0.$$

Найти его интеграл.

РЕШЕНИЕ

По предложенному уравнению образуем алгебраическое уравнение степени λ :

$$An^\lambda + Bn^{\lambda-1} + Cn^{\lambda-2} + \text{и т. д.} = 0.$$

Его корни, числом λ , суть

$$n = \alpha, \quad n = \beta, \quad n = \gamma, \quad n = \delta \quad \text{и т. д.}$$

Если они все не равны между собой, то полный интеграл заданного уравнения будет

$$z = \Gamma(y + \alpha x) + \Delta(y + \beta x) + \Sigma(y + \gamma x) + \Theta(y + \delta x) + \text{и т. д.},$$

где число разных функций будет λ . Если, однако, среди этих корней встречаются два или больше равных между собой, например, $\beta = \alpha$, $\gamma = \alpha$, тогда функции, соответствующие этим корням, должны быть соответственно умножены на члены такой геометрической прогрессии: $1, x, x^2$ и т. д. или $1, y, y^2$ и т. д., так что число произвольных функций не уменьшается. В отношении же комплексных корней нужно постоянно иметь в виду то, что мы выше заметили, если мы не хотим исключить произвольные функции мнимых выражений.

СЛЕДСТВИЕ 1

426. В случае равных корней все равно, каким геометрическим рядом пользоваться, так как встречающиеся функции не являются функциями только от x или только от y . Но если это будут функции только от x или только от y , то нужно пользоваться геометрической прогрессией другого переменного.

¹⁾ unde infinita functionum multitudo nascitur, quae solutionem completam mentiri videtur, neque tamen pro completa perinde haberi potest, atque usu venit iis casibus, quibus omnes radices sunt reales.

СЛЕДСТВИЕ 2

427. Если в алгебраическом уравнении первые коэффициенты A , B , C и т. д. исчезают, так что кажется, что число корней меньше показателя λ , тогда отсутствующие корни надо считать бесконечно большими; им соответствуют функции одного x , которые надо ввести в интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 3

428. Итак, если $A=0$, $B=0$ и $C=0$, то нужно считать, что корни α , β , γ становятся бесконечными, и из них возникает следующая часть интеграла:

$$\Gamma(x) + y\Delta(x) + y^2\Sigma(x).$$

ПОЯСНЕНИЕ

429. Так как эту часть интегрального исчисления едва лишь начали разрабатывать и поэтому исследования такого рода еще очень трудно доступны, то нет возможности много изложить в этом разделе. Поэтому я вынужден закончить этим первую часть второй книги, которая занимается определением функций двух переменных по заданному соотношению между дифференциалами. Однако еще гораздо меньше можно сообщить во второй части этой книги, где интегральное исчисление применяется к функциям трех переменных, и поэтому не имеет смысла разбивать эту часть на разделы, и тем более — заняться следующими частями.



ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ КНИГА ПОСЛЕДНЯЯ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ ИЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ

ГЛАВА I

О ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЗАДАЧА 72

430. Пусть v — любая функция трех переменных x , y и z ; найти ее производные первого порядка.

РЕШЕНИЕ

Поскольку v — функция трех переменных x , y и z , то, если ее дифференцировать обычным образом, ее дифференциал вообще выразится в виде

$$dv = p dx + q dy + r dz.$$

Он состоит, таким образом, из трех слагаемых, причем мы найдем отдельно первое слагаемое $p dx$, если при дифференцировании только количество x будем рассматривать как переменное, а остальные два y и z — как постоянные. Подобным образом второе слагаемое $q dy$ находится путем дифференцирования функции v таким образом, что только количество y отличается переменным, остальные же x и z считаются постоянными; то же самое относится к третьему слагаемому $r dz$, которое дает дифференциал v , когда принимается в расчет переменность одного только количества z . Отсюда ясно, каким образом надо нахо-

дуть путем дифференцирования количества p , q и r каждое в отдельности, и эти выражения я буду называть производным первого порядка функции v , а чтобы не понадобилось вводить в вычисление новые буквы, буду их обозначать в соответствии с их сущностью, так:

$$p = \left(\frac{dv}{dx} \right), \quad q = \left(\frac{dv}{dy} \right), \quad r = \left(\frac{dv}{dz} \right).$$

Таким образом, любая функция v трех переменных x , y и z имеет три производные первого порядка, которые надо обозначать так:

$$\left(\frac{dv}{dx} \right), \quad \left(\frac{dv}{dy} \right), \quad \left(\frac{dv}{dz} \right).$$

В каждом из этих выражений принимается в расчет какое-либо одно из переменных, в то время как остальные два считаются постоянными, а поскольку дифференциалы благодаря делению устраняются, эти дифференциальные выражения следует отнести к классу конечных количеств.

СЛЕДСТВИЕ 1

431. По найденным трем производным функции v ее дифференциал, взятый обычным порядком, выражается так:

$$dv = dx \left(\frac{dv}{dx} \right) + dy \left(\frac{dv}{dy} \right) + dz \left(\frac{dv}{dz} \right).$$

Наоборот, интеграл этого дифференциального выражения есть сама функция v , к тому же с добавлением или вычитанием любого [постоянного] количества.

СЛЕДСТВИЕ 2

432. Если дана функция v трех переменных x , y и z , то ее производные

$$\left(\frac{dv}{dx} \right), \quad \left(\frac{dv}{dy} \right), \quad \left(\frac{dv}{dz} \right)$$

являются опять функциями тех же переменных x , y и z и легко находятся путем дифференцирования. Однако может случиться и так, что одно из этих переменных или большее их число полностью исчезает из этих производных.

ПОЯСНЕНИЕ 1

433. Ничто не мешает тому, чтобы рассматривать количество v как функцию трех переменных x , y и z , даже когда оно содержит их, быть может, только два, а именно, когда эта функция построена так, что третье переменное выпадает как бы случайно; этому тем менее следует удивляться, что то же самое может случиться с функциями как одного, так и двух переменных. Действительно, так как функции одного переменного удобнее всего представлять как ординаты некоторой кривой, если только по свойствам кривой ее ординаты можно считать определенными функциями абсциссы x , то никак нельзя, исходя из той же общей идеи, исключить тот случай, когда кривая переходит в прямую, параллельную оси; хотя при этом ордината равна постоян-

ному количеству; и не будет ничего несуразного, если кто-нибудь на вопрос о том, какова же функция y от x , ответит, что эта функция y равняется постоянному количеству. Что же касается функций двух переменных x и y , которые всегда представляются при помощи расстояний точек некоторой поверхности от некоторой плоскости, причем переменные x и y задаются в этой плоскости, то, очевидно, эта поверхность может быть такой, что эта функция зависит либо только от x , либо только от y . Если же поверхность является плоскостью, параллельной вышеуказанной плоскости, то функция к тому же обращается в постоянное количество; но и здесь ничто не мешает рассматривать ее как функцию двух переменных. Поэтому, хотя в дальнейшем будет идти речь о функциях трех переменных, сюда относятся также такие функции, которые зависят только от двух или одного из трех переменных x , y и z , и даже такие, которые являются постоянными количествами.

ПОЯСНЕНИЕ 2

434. В дифференциальном исчислении уже было показано, что дифференциалы функций многих переменных находятся так, что только какое-нибудь одно переменное рассматривается как переменное и все полученные таким образом дифференциалы соединяются в одну сумму¹⁾. Когда дифференцирование таким образом выполняется, отдельные эти операции после отбрасывания дифференциала дают производные, которые обозначаются

$$\left(\frac{dv}{dx}\right), \left(\frac{dv}{dy}\right) \text{ и } \left(\frac{dv}{dz}\right).$$

Точно так же понятно, как надо находить производные функций четырех или больше переменных. Мы приведем здесь дополнительно несколько примеров, относящихся к функциям трех переменных x , y и z , и будем находить их производные.

ПРИМЕР 1

435. Если функция трех переменных есть

$$v = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

то ее производные находятся так:

Поскольку путем дифференцирования получается

$$dv = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz,$$

то, очевидно, будет

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \alpha, \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = \beta, \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) = \gamma,$$

и таким образом все три производные являются постоянными.

ПРИМЕР 2

436. Если функция трех переменных есть

$$v = x^\lambda y^\mu z^\nu,$$

то ее производные находятся так.

¹⁾ См. Эйлер, Дифференциальное исчисление, ч. 1-я, § 214.

Выполняя дифференцирование обычным способом, получаем

$$dv = \lambda x^{\lambda-1} y^{\mu} z^{\nu} dx + \mu x^{\lambda} y^{\mu-1} z^{\nu} dy + \nu x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu-1} dz,$$

откуда очевидно, что производные равны:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \lambda x^{\lambda-1} y^{\mu} z^{\nu}, \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = \mu x^{\lambda} y^{\mu-1} z^{\nu}, \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) = \nu x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu-1}.$$

Каждое из этих выражений в отдельности является новой функцией трех переменных x , y , z , если только показатели λ , μ , ν не равны нулю или единице.

ПРИМЕР 3

437. Если функция v содержит только два переменных x и y , а третья z в нее не входит, то ее производные находятся так.

Так как функция v содержит только переменные x и y , то ее дифференциал принимает вид

$$dv = p dx + q dy + 0 \cdot dz,$$

потому что третье слагаемое, происходящее от переменности z , конечно, исчезает, так что имеем

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = p, \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = q \quad \text{и} \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ

438. Наоборот, отсюда ясно, что если $\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0$, то v является некоторой функцией двух переменных x и y , что мы в дальнейшем будем указывать так: $v = \Gamma(x, y)$, где $\Gamma(x, y)$ — произвольная функция двух переменных x и y .

ПОЯСНЕНИЕ

439. Мы вскоре покажем, что когда предлагается определить функцию трех переменных из некоторого соотношения между производными, или некоторого условия для них, то при любом способе интегрирования вводится некоторая произвольная функция двух переменных, и именно это составляет признак, которым эта часть интегрального исчисления отличается от предыдущих. Действительно, как при исследовании природы функций одного переменного по данному дифференциальному уравнению (этому вопросу была посвящена вся первая книга) любое интегрирование вводит в расчет произвольное постоянное количество; мы это видели в предыдущей части второй книги при определении функций двух переменных из дифференциальных уравнений с самой сутью дела связано то, что при любом способе интегрирования вводится в расчет не постоянное количество, а вполне произвольная функция одного переменного; правда, большей частью эти функции, как, например, $\Gamma(\alpha x + \beta y)$, содержали два переменных x и y , однако здесь количество $\alpha x + \beta y$ рассматривается целиком как единое количество и выражение $\Gamma(\alpha x + \beta y)$ обозначает некоторую его функцию. Теперь же, когда будем иметь дело с функциями трех переменных, следует заметить, что любое интегрирование вводит в расчет произвольную функцию уже двух

переменных, откуда заодно можно заключить, каков характер интегрирований в тех случаях, когда рассматриваются функции многих переменных.

ЗАДАЧА 73

440. Пусть v — произвольная функция трех переменных x , y и z ; найти ее производные второго и более высокого порядка.

РЕШЕНИЕ

Поскольку она имеет три производные первого порядка

$$\left(\frac{dv}{dx}\right), \left(\frac{dv}{dy}\right), \left(\frac{dv}{dz}\right),$$

то каждая из них, снова рассматриваемая как функция, дает в свою очередь три производные, которые, однако, в силу того, что

$$\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) = \left(\frac{d^2v}{dy dx}\right),$$

сводятся к следующим шести:

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right), \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right), \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right), \left(\frac{d^2v}{dx dy}\right), \left(\frac{d^2v}{dy dz}\right), \left(\frac{d^2v}{dx dz}\right).$$

Из знаменателей каждого из этих выражений ясно, какое из трех количеств x , y , z рассматривается как единственное переменное при том или ином дифференцировании. Таким же образом ясно, что имеются следующие десять производных третьего порядка:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right), \left(\frac{d^3v}{dx^2 dy}\right), \left(\frac{d^3v}{dx dy^2}\right), \\ &\left(\frac{d^3v}{dy^3}\right), \left(\frac{d^3v}{dy^2 dz}\right), \left(\frac{d^3v}{dy dz^2}\right), \left(\frac{d^3v}{dx dy dz}\right), \\ &\left(\frac{d^3v}{dz^3}\right), \left(\frac{d^3v}{dz^2 dx}\right), \left(\frac{d^3v}{dz dx^2}\right). \end{aligned}$$

Число производных четвертого порядка есть 15, пятого — 21 и т. д., в соответствии со значениями треугольных чисел. Из формы каждого из этих выражений видно, каким образом оно получается из данной функции v повторным дифференцированием, причем каждый раз принимается в расчет одно из переменных.

СЛЕДСТВИЕ 1

441. Итак, вот все производные любого порядка, которые можно получить из любой функции трех переменных путем дифференцирования и которые могут снова рассматриваться как функции трех переменных.

СЛЕДСТВИЕ 2

442. Подобно тому как для заданной такой функции все ее производные определяются при помощи дифференциального исчисления,

нужно найти, наоборот, самую эту функцию по данной производной или по соотношению между несколькими из них при помощи интегрального исчисления.

ПОЯСНЕНИЕ 1

443. В дифференциальном исчислении не играет большой роли, требуется ли дифференцировать функцию одного или нескольких переменных, поскольку способы дифференцирования для любого числа переменных остаются одними и тем же; поэтому не требуется разделить предмет дифференциального исчисления на несколько частей в зависимости от числа переменных. Совсем другое дело в интегральном исчислении, которое нужно делить на части в зависимости от числа переменных, так как эти части как по характерным признакам, так и по применяемым методам чрезвычайно сильно различаются между собою. Полагаю, что надо указать, в каком порядке следует изложить эту часть, относящуюся к функциям трех переменных. Прежде всего наиболее удобно рассмотреть те случаи, когда задается значение какой-либо одной производной, по которому надлежит определить вид искомой функции, так как в этом случае исследование не представляет никаких затруднений. Затем я перейду к тем вопросам, когда дано соотношение между двумя или больше производными; при этом играет очень большую роль, какого они порядка, так что для первого порядка во многих случаях решение удается, для высших же порядков пока очень немногое удается сделать; именно этот порядок я буду соблюдать при изложении материала.

ПОЯСНЕНИЕ 2

444. Здесь могло бы показаться, что для определения функций трех переменных можно задавать два условия или соотношения между производными, и что при задании только одного вопрос является неопределенным. В самом деле, если положить

$$dv = p dx + q dy + r dz,$$

где буквы p , q , r означают производные первого порядка, и, например, задать следующие два условия:

$$q = p \quad \text{и} \quad r = p,$$

так что

$$dv = p(dx + dy + dz),$$

то, очевидно, существует решение, а именно

$$v = \Gamma(x + y + z).$$

На это возражение я отвечаю, что в этом примере случайно получилось так, что оба условия могут существовать совместно. В самом деле, если оставить неизменным условие $q = p$, а другое заменить через $r = px$, так что

$$dv = p(dx + dy + x dz),$$

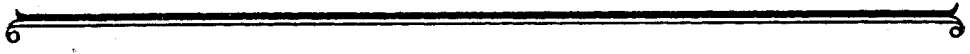
то очевидно, что не может существовать такого значения p , чтобы дифференциальное выражение

$$dx + dy + x dz,$$

будучи на него умножено, становилось интегрируемым. Однако этого примера достаточно, чтобы доказать, что задание двух условий дает больше, чем требуется для определенности задачи¹⁾, и они поэтому не допускают никаких решений, за исключением некоторых случаев, когда одно условие как бы уже содержится в другом. Поэтому всегда одного только соотношения между производными совершенно достаточно, чтобы сделать задачу определенной, поскольку то обстоятельство, что при интегрировании появляется неопределенная функция, так же мало делает задачу неопределенной, как появление произвольной постоянной при решении задачи обычного интегрального исчисления.

¹⁾ duabus conditionibus praescribendis hujusmodi quaestiones evadere plusquam determinatas.





ГЛАВА II

О НАХОЖДЕНИИ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ЗАДАННОМУ ЗНАЧЕНИЮ КАКОЙ-ЛИБО ПРОИЗВОДНОЙ

ЗАДАЧА 74

445. *Задается какая-либо производная первого порядка. Найти ту функцию трех переменных, из которой эта производная получается.*

РЕШЕНИЕ

Пусть v — искомая функция трех переменных x , y , z и пусть S — та заданная функция тех же переменных, которая должна быть равна производной $\left(\frac{dv}{dx}\right)$. Итак, поскольку $\left(\frac{dv}{dx}\right) = S$, то, считая переменным только количество x , а остальные два y и z — постоянными, будем иметь $dv = S dx$ и, следовательно,

$$v = \int S dx + \text{const},$$

где надо иметь в виду, что при интегрировании выражения $S dx$ оба количества y и z должны считаться постоянными и что вместо const нужно написать произвольную функцию y и z , так что искомая функция получается в виде

$$v = \int S dx + T(y, z).$$

Здесь, разумеется, $T(y, z)$ обозначает какое угодно количество, любым образом составленное с помощью количеств y и z вместе с постоянными.

Подобным образом, если положить $\left(\frac{dv}{dy}\right) = S$, то будет

$$v = \int S dy + T(x, z),$$

а уравнение $\left(\frac{dv}{dz}\right) = S$ дает после интегрирования

$$v = \int S dz + T(x, y).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

446. Отсюда уже достаточно ясно, что интегрирование таких функций вводит произвольную функцию двух переменных количеств, и что именно в этом состоит характерное отличие этих интегрирований.

СЛЕДСТВИЕ 2

447. Таким образом, мы решили задачу определения такой функции v трех переменных x, y, z , чтобы при

$$dv = p dx + q dy + r dz$$

было или $p = S$, или $q = S$, или $r = S$, где S — какая-либо заданная функция тех же переменных, или двух, или одной из них.

СЛЕДСТВИЕ 3

448. Если, следовательно, требуется, чтобы было $\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0$, то есть $p = 0$, тогда искомая функция будет $v = \Gamma(y, z)$; а если должно быть $\left(\frac{dv}{dy}\right) = 0$, то будет $v = \Gamma(x, z)$; а если должно быть $\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0$, то необходимо, чтобы было $v = \Gamma(x, y)$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

449. Точно так же, как в предыдущей части книги произвольные функции представлялись, как ординаты произвольных кривых, регулярных или иррегулярных, так и в этой части произвольные функции двух переменных представляются при помощи произвольно описанных поверхностей. Именно над плоскостью, в которой обычным способом наносятся координаты x и y , представим себе расположенную некоторую произвольную поверхность. Третья координата означает расстояние произвольной точки поверхности от этой плоскости, — она и будет представлять произвольную функцию двух переменных x и y . Таким образом, удобнее всего выясняется идея такого рода функций, поскольку отсюда видна природа таких функций, как регулярных, так и иррегулярных.

ПОЯСНЕНИЕ 2

450. Здесь целесообразно еще заметить, что есть бесконечно много различных способов записи такого рода функций двух переменных. В самом деле, если в указанной плоскости обе координаты x и y заменить другими двумя координатами t и u , так что $t = \alpha x + \beta y$ и $u = \gamma x + \delta y$, то, очевидно, функция двух переменных t и u , или $\Gamma(t, u)$, совпадает с функцией x и y , или $\Gamma(x, y)$; дело в том, что если вместо t и u подставить их значения в зависимости от x и y , то получается функция, содержащая только переменные x и y . В гораздо более общем виде, если t равняется какой-либо заданной функции x и y , а u — другой такой функцией, то $\Gamma(t, u)$ после подстановки превращается в функцию x и y , которую запишем в виде $\Delta(x, y)$; при этом нет необходимости, чтобы одно и то же обозначение функции посредством Γ указывало на то, что будто само строение функции одно и то же, поскольку здесь

имеем дело с произвольными функциями. Поэтому, если в дальнейшем будут встречаться функции вида

$$\Gamma(ax + by; fx^2 + gy^2) \text{ или } \Gamma\left(\sqrt{x^2 + y^2}; l \frac{x}{y}\right) \text{ и т. д.,}$$

то вместо этого всегда можно писать просто $\Gamma(x, y)$.

ПОЯСНЕНИЕ 3

451. Изучение решения, которое мы дали, приводит нас к следующим соображениям. Положим сперва

$$dv = p dx + q dy + r dz,$$

тогда, если требуется, чтобы было $p = \left(\frac{dv}{dx}\right) = 0$, будет

$$dv = q dy + r dz.$$

Отсюда ясно, что v есть такое количество, дифференциал которого имеет форму $q dy + r dz$; это возможно, только если v является функцией только двух переменных y и z , так что третье переменное x из него полностью исключается; поскольку относительно количеств q и r не предписано никакого условия, то мы можем утверждать, что вместо количества v можно принять любую функцию двух переменных y и z или что $v = \Gamma(y, z)$; и такое же решение дает нам рассмотрение уравнения $\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0$. Если же в более общем виде требуется, чтобы было $\left(\frac{dv}{dx}\right) = p = S$, где S — количество, любым образом составленное из переменных x, y, z , то будем иметь

$$dv = S dx + q dy + r dz,$$

и это уравнение решается следующим образом. Ищется сперва интеграл выражения $S dx$, где только количество x рассматривается как переменное, и пусть он равен V . Дифференцируя его по всем трем переменным, получаем

$$dV = S dx + Q dy + R dz,$$

откуда поскольку

$$S dx = dV - Q dy - R dz,$$

имеем

$$dv = dV + (q - Q) dy + (r - R) dz$$

или

$$d(v - V) = (q - Q) dy + (r - R) dz,$$

а отсюда, как и выше, вытекает, что количество $v - V$ является функцией только двух переменных y и z . Поэтому и в силу того, что $V = \int S dx$, получаем, как выше,

$$v = \int S dx + \Gamma(y, z).$$

Способ рассуждения, к которому мы здесь пришли, следует запомнить, поскольку он и в первой части мог бы дать большую пользу. В самом

деле, зададим уравнение

$$\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right).$$

Тогда, поскольку

$$d\left(\frac{dz}{dx}\right) = dx\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + dy\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)$$

и

$$d\left(\frac{dz}{dy}\right) = dx\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) + dy\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right),$$

имеем

$$ad\left(\frac{dz}{dx}\right) + d\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)(a dx + a^2 dy) + \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)(a dy + dx),$$

или

$$ad\left(\frac{dz}{dx}\right) + d\left(\frac{dz}{dy}\right) = (dx + a dy) \left[a \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right) \right].$$

Интеграл второй части уравнения, очевидно, равен $F(x + ay)$, откуда

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = -a \left(\frac{dz}{dx}\right) + a\Gamma'(x + ay).$$

Таким образом, одно интегрирование выполнено. Поскольку

$$dz = dx\left(\frac{dz}{dx}\right) + dy\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

будем иметь

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)(dx - a dy) + a dy\Gamma'(x + ay).$$

Пусть

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{и} \quad x - ay = t.$$

Тогда

$$dz = p dt + a dy\Gamma'(t + 2ay)$$

при двух [независимых] переменных t и y , откуда

$$z = \frac{1}{2}\Gamma(t + 2ay) + \int dt \left[p - \frac{1}{2}\Gamma'(t + 2ay) \right] = \Gamma(x + ay) + \Delta(x - ay),$$

потому что

$$\Delta(t) = \Delta(x - ay) \quad \text{и} \quad \Gamma(t + 2ay) = \Gamma(x + ay).$$

ЗАДАЧА 75

452. Найти вид функции трех переменных x , y , z , одна производная второго порядка которой равняется заданной произвольной функции S .

РЕШЕНИЕ

Обозначим через v искомую функцию, а поскольку она имеет шесть производных второго порядка, положим сперва $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = S$; тогда

однократное интегрирование дает

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \int S dx + \Gamma(y, z),$$

а вторичное интегрирование —

$$v = \int dx \int S dx + x\Gamma(y, z) + \Delta(y, z),$$

где в выражении $\int dx \int S dx$ при двойном интегрировании только количество x рассматривается как переменное — каким образом, мы уже объяснили выше. Совершенно таким же образом выполняется интегрирование уравнений

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = S \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) = S.$$

Что касается остальных производных второго порядка, достаточно решить уравнение $\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) = S$; интегрируя сперва по одному только переменному x , получаем

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \int S dx + f(y, z).$$

Затем второе интегрирование только по переменному y дает

$$v = \int dy \int S dx + \int dy f(y, z) + \Delta(x, z),$$

где я прежде всего замечу, что первый член правой части, поскольку в нем порядок переменных x и y не играет роли, можно выразить еще так $\iint S dx dy$. Далее, поскольку из любой функции $f(y, z)$ переменных y и z после умножения на dy и интегрировании при постоянном z , очевидно, снова возникает функция y и z , и поскольку она никоим образом [этим] не определяется, то она должна быть неопределенной и, следовательно, произвольной функцией; таким образом, мы можем написать

$$v = \iint S dx dy + \Gamma(y, z) + \Delta(x, z).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

453. Замечу здесь, что интеграл $\int dy f(y, z)$ уже сразу содержит член $\Delta(x, z)$; ибо, поскольку здесь только количество y рассматривается как переменное, то вместо постоянного количества, которое надо присоединить после интегрирования, можно писать произвольную функцию переменных x и z .

СЛЕДСТВИЕ 2

454. Если заданная функция S исчезает, то получаются следующие интегрирования:

$$\begin{array}{cc} \text{если} & \text{то} \\ \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = 0, & v = x\Gamma(y, z) + \Delta(y, z); \end{array}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) &= 0, & v &= y\Gamma(x, z) + \Delta(x, z); \\ \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) &= 0, & v &= z\Gamma(x, y) + \Delta(x, y); \\ \left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) &= 0, & v &= \Gamma(x, z) + \Delta(y, z); \\ \left(\frac{d^2v}{dx\,dz}\right) &= 0, & v &= \Gamma(x, y) + \Delta(y, z); \\ \left(\frac{d^2v}{dy\,dz}\right) &= 0, & v &= \Gamma(x, y) + \Delta(x, z). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3

455. Поскольку здесь требуется двукратное интегрирование, то появляются две произвольные функции, обе зависящие от двух переменных; это является бесспорным признаком того¹⁾, что найденные здесь интегралы — полные.

ПОЯСНЕНИЕ

456. Можно еще другим способом получить те же интегралы, а именно на основании положения, изложенного выше [§ 451], если имеем

$$dv = S\,dx + q\,dy + r\,dz,$$

то

$$v = \int S\,dx + f(y, z).$$

Итак, согласно этому положению, если $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = S$, то будет

$$d\left(\frac{dv}{dx}\right) = S\,dx + dy\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) + dz\left(\frac{d^2v}{dx\,dz}\right).$$

Если эту формулу сопоставить с предыдущей, вместо v имеем $\left(\frac{dv}{dx}\right)$, а вместо q и r — выражения

$$\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2v}{dx\,dz}\right),$$

поэтому интегралом будет

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \int S\,dx + f(y, z).$$

Поскольку, далее,

$$dv = \left(\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{dv}{dy}\right)dy + \left(\frac{dv}{dz}\right)dz,$$

то будет

$$dv = dx \int S\,dx + dx f(y, z) + dy\left(\frac{dv}{dy}\right) + dz\left(\frac{dv}{dz}\right),$$

¹⁾ hoc certissimum est criterium.

откуда, очевидно, следует, что

$$v = \int dx \int S dx + x\Gamma(y, z) + \Delta(y, z).$$

Таким же образом выполняется действие для уравнения $\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) = S$; а именно, имеем

$$d\left(\frac{dv}{dy}\right) = S dx + dy\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) + dz\left(\frac{d^2v}{dy dz}\right),$$

что дает интеграл

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \int S dx + f(y, z).$$

Второе интегрирование выполняется над выражением

$$dv = dy \int S dx + dyf(y, z) + dx\left(\frac{dv}{dx}\right) + dz\left(\frac{dv}{dz}\right),$$

откуда, поскольку

$$\int dyf(y, z) = \Gamma(y, z),$$

получается, как выше,

$$v = \iint S dx dy + \Gamma(y, z) + \Delta(x, z).$$

ЗАДАЧА 76

457. Найти вид функции трех переменных x , y и z , одна какая-либо производная третьего порядка которой равна заданному количеству S , составленному каким угодно образом из тех же переменных и из постоянных.

РЕШЕНИЕ

Пусть искомая функция равна v , и рассмотрим теперь не все ее производные третьего порядка, а те, в построении которых есть различия.

Итак, пусть сперва $\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) = S$; первое интегрирование немедленно дает

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = \int S dx + 2\Gamma(y, z),$$

второе интегрирование дает

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \int dx \int S dx + 2x\Gamma(y, z) + \Delta(y, z)$$

и, наконец, получаем

$$v = \int dx \int dx \int S dx + x^2\Gamma(y, z) + x\Delta(y, z) + \Sigma(y, z).$$

Пусть, во-вторых, $\left(\frac{d^3v}{dx^2 dy}\right) = S$; тогда первые два интегрирования дают, как и выше

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \int dx \int S dx + x\Gamma(y, z) + \Delta(y, z).$$

Так как теперь, как мы видели, можно вместо $\int dy\Gamma(y, z)$ писать также $\Gamma(y, z)$, то после третьего интегрирования находим

$$v = \int^3 S dx^2 dy + x\Gamma(y, z) + \Delta(y, z) + \Sigma(x, z).$$

В этих двух случаях, если переставлять между собою [независимые] переменные, содержатся все производные третьего порядка, за исключением только производной $\left(\frac{d^3v}{dx dy dz}\right)$, которую поëтому нужно рассмотреть отдельно.

Итак, пусть $\left(\frac{d^3v}{dx dy dz}\right) = S$, тогда первое интегрирование только по переменному x дает

$$\left(\frac{d^2v}{dy dz}\right) = \int S dx + f(y, z).$$

Теперь интегрируем второй раз, рассматривая только y как переменное, что дает

$$\left(\frac{dv}{dz}\right) = \iint S dx dy + \Gamma(y, z) + \Delta(x, z).$$

Наконец, третье интегрирование по z дает

$$v = \int^3 S dx dy dz + \Gamma(y, z) + \Delta(x, z) + \Sigma(x, y),$$

так что задача полностью решена.

СЛЕДСТВИЕ 1

458. Поскольку здесь требовалось трехкратное интегрирование, то найденные интегралы содержат три произвольные функции, причем каждая функция зависит от двух переменных, как того и требует природа полных интегралов.

СЛЕДСТВИЕ 2

459. Если заданное количество S исчезает, то получаются следующие интегралы:

если

$$\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) = 0,$$

то

$$v = x^2\Gamma(y, z) + x\Delta(y, z) + \Sigma(y, z);$$

если

$$\left(\frac{d^3v}{dx^2 dy}\right) = 0,$$

то

$$v = x\Gamma(y, z) + \Delta(y, z) + \Sigma(x, z);$$

если

$$\left(\frac{d^3v}{dx dy dz} \right) = 0,$$

то

$$v = \Gamma(y, z) + \Delta(x, z) + \Sigma(x, y).$$

ПОЯСНЕНИЕ

460. Те же интегралы можно получить также другим методом, выше изложенным, но было бы излишним приводить здесь соответствующие действия. Точно так же нет нужды проводить соответствующие исследования для производных высших порядков, поскольку закон появления произвольных функций, составляющих отдельные слагаемые интеграла, достаточно очевиден и сам по себе, и на основании вышеизложенного. Поэтому по предмету данной главы, т. е. по определению функции на основании какой-нибудь заданной ее производной, сказано все. Однако, прежде чем пойти дальше, прибавлю к этому два случая достаточно широкого охвата, решение которых легко сводится к предыдущим, уже изложенным разделам интегрального исчисления; поэтому эти задачи мы здесь будем считать решенными, даже если связанные с ними трудности в настоящее время еще не преодолены.

ЗАДАЧА 77

461. Пусть в предложенное уравнение, из которого требуется найти функцию трех переменных x , y и z , входят только производные по одному лишь переменному x , а именно

$$\left(\frac{dv}{dx} \right), \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right), \left(\frac{d^3v}{dx^3} \right) \text{ и т. д.}$$

Найти искомую функцию.

РЕШЕНИЕ

Поскольку в предложенном уравнении не содержатся другие производные, кроме указанных, то будем рассматривать в нем количества y и z как постоянные, и точно так же надо с ними обращаться при отдельных интегрированиях. Следовательно, нужно считать, что предложенное уравнение содержит только переменные x и v , и поэтому, отбросив скобки при производных, получим дифференциальное уравнение, относящееся к [предмету] первой книги, и в этом уравнении, если оно более высокого порядка, надо считать элемент dx постоянным. Поэтому если это уравнение может быть проинтегрировано изложенными там способами, надо вместо постоянных, вводимых при каждом интегрировании, подставлять произвольные функции двух переменных y и z , например

$$\Gamma(y, z), \Delta(y, z) \text{ и т. д.,}$$

и таким образом получается полное решение предложенной задачи.

СЛЕДСТВИЕ 1

462. Итак, кроме многочисленных случаев интегрируемости, изложенных в первой книге, допускают решение также следующие диффе-

ренциальные уравнения, какого бы высокого порядка они ни были:

$$S = Av + B\left(\frac{dv}{dx}\right) + C\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + D\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + \text{и т. д.}$$

и

$$S = Av + Bx\left(\frac{dv}{dx}\right) + Cx^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + Dx^3\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + \text{и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

463. Действительно, отбросив скобки [при производных], получаем такие дифференциальные уравнения, интегрирование которых показано в последних главах первой книги¹⁾. Нужно только вместо постоянных интегрирования писать такие функции, как

$$\Gamma(y, z); \Delta(y, z); \Sigma(y, z) \text{ и т. д.,}$$

чтобы получить, таким образом, полные интегралы.

ПОЯСНЕНИЕ

464. Сюда еще могут быть отнесены те дифференциальные уравнения, в которых встречаются производные, содержащие два элемента dx и dy , таким образом, что dy имеет везде одно и то же число измерений, например

$$\left(\frac{dv}{dy}\right), \left(\frac{d^2v}{dx dy}\right), \left(\frac{d^3v}{dx^2 dy}\right), \left(\frac{d^4v}{dx^3 dy}\right) \text{ и т. д.,}$$

или

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right), \left(\frac{d^3v}{dx dy^2}\right), \left(\frac{d^4v}{dx^2 dy^2}\right), \left(\frac{d^5v}{dx^3 dy^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Само же количество v нигде не встречается. В самом деле, в первом случае положим тогда $\left(\frac{dv}{dy}\right) = u$, во втором же случае $-\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = u$. Тогда уравнение сводится к такой задаче, когда встречаются только производные вида

$$\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) \text{ и т. д.}$$

и, кроме того, быть может, еще сама функция u . Поэтому, если уравнение проинтегрировано одним из вышеизложенных способов и функцию u таким образом можно определить, нужно вместо u снова подставить $\left(\frac{dv}{dy}\right)$ или $\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right)$, так что $\left(\frac{dv}{dy}\right) = S$ или $\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = S$, после чего с помощью способов данной главы находится и сама функция v . Тем же способом можно решить уравнение, содержащее только такие производные

$$\left(\frac{d^{\mu+\nu}v}{dy^\mu dz^\nu}\right), \left(\frac{d^{\mu+\nu+1}v}{dx dy^\mu dz^\nu}\right), \left(\frac{d^{\mu+\nu+2}v}{dx^2 dy^\mu dz^\nu}\right) \text{ и т. д.,}$$

¹⁾ Точнее форма этого интеграла описана в § 508. [Ф. Э.]

где встречаются все три элемента dx , dy , dz ; в самом деле, если положить $\left(\frac{d^{\mu+\nu}v}{dy^{\mu}dz^{\nu}}\right) = u$, то в уравнение войдут только производные

$$\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) \text{ и т. д.}$$

и еще сама функция u ; таким образом, вопрос сводится к предыдущей задаче, решив которую получим $u = S = \left(\frac{d^{\mu+\nu}v}{dy^{\mu}dz^{\nu}}\right)$, где S — уже известная функция, и нахождение самой функции v тогда уже не представляет никаких затруднений. Но, кроме того, приведем еще другой случай, который может быть сведен к предыдущей части второй книги, как будет показано в следующей задаче.

ЗАДАЧА 78

465. Пусть в заданном уравнении, из которого требуется определить функцию v трех переменных x , y , z , встречаются только производные по переменным x и y , а третий элемент dz полностью исключен; найти функцию v .

РЕШЕНИЕ

Поскольку в подлежащее решению уравнение, которым выражается заданное условие, количество z не входит в качестве переменного, то при всех интегрированиях можно рассматривать количество z как постоянное. Следовательно, решение этого уравнения относится к предыдущей части, поскольку требуется найти из заданного соотношения между производными функцию только двух переменных x и y ; если это удастся и интеграл будет найден, тогда туда войдет столько функций одного переменного, определенным образом образованных из x и y , сколько потребуется интегрирований. Пусть $\Gamma(t)$ — такая функция, где t предполагается заданным через x и y ; чтобы теперь это решение приспособить к нашей задаче, в которой к числу переменных прибавляется количество z , нужно вместо каждой произвольной функции $\Gamma(t)$ писать $\Gamma(t, z)$, т. е. функцию двух переменных, и тогда получается полный интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 1

466. Итак, если предложено уравнение

$$\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right),$$

то, так как мы в предыдущей части нашли

$$v = \Gamma(x + ay) + \Delta(x - ay),$$

в данном случае, когда v должна быть функцией трех переменных x , y и z , интеграл будет такой

$$v = \Gamma(\overline{x + ay}, z) + \Delta(\overline{x - ay}, z).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

467. Здесь нужно помнить, что выражение

$$\Gamma(x+ay, z)$$

означает произвольную функцию двух переменных, одно из которых есть $x+ay$, а второе есть z ; таким образом, эту функцию можно представить в виде аппликаты, отнесенной к некоторой поверхности.

ПОЯСНЕНИЕ

468. Можно свести к предыдущей части интегрального исчисления не только те уравнения, которые описаны в предыдущей задаче, но и бесчисленные другие, которые могут быть сведены к этой форме какой-нибудь подстановкой. Например, если в уравнении встречаются только такие производные, которые содержат элемент dz лишь в первом измерении, то есть

$$\left(\frac{dv}{dz}\right), \left(\frac{d^2v}{dx dz}\right), \left(\frac{d^2v}{dy dz}\right), \left(\frac{d^3v}{dx^2 dz}\right), \left(\frac{d^3v}{dx dy dz}\right), \left(\frac{d^3v}{dy^2 dz}\right) \text{ и т. д.,}$$

то при помощи подстановки $\left(\frac{dv}{dz}\right) = u$ уравнение переходит в другое, из которого уже надо определить функцию u , причем вопрос сводится к случаю, указанному в предыдущей задаче. Если можно найти вид функции u , так что $u = S$, то остается решить уравнение $\left(\frac{dv}{dz}\right) = S$, откуда, как мы видели выше, получается

$$v = \int S dz + \Gamma(x, y).$$

Точно так же нужно поступать, если заданное уравнение может быть сведено к случаю предыдущей задачи посредством подстановки

$$\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) = u \text{ или } \left(\frac{d^3v}{dz^3}\right) = u \text{ и т. д.}$$

Точно так же надо, очевидно, поступить, если уравнение при помощи какого-либо преобразования сводится к случаю предыдущей задачи; выше я показал большое число таких преобразований, где или вместо функции v вводится другая функция u посредством подстановки $v = Su$, или переменные x, y, z заменяются другими переменными p, q, r , которые с ними определенным образом связаны; более подробно я изложил этот способ выше, для случая двух переменных. Очевидно, что подобное преобразование легко приспособить и к случаю трех переменных. В дальнейшем будут встречаться такого рода преобразования. Итак, перейду к другим случаям, когда встречаются всякого рода производные, но здесь я смогу привести только самые элементарные результаты.



ГЛАВА III

О РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ЗАДАЧА 79

469. Если для функции v трех переменных x, y, z , полагая

$$dv = p dx + q dy + r dz,$$

имеем

$$\alpha p + \beta q + \gamma r = 0,$$

найти вид функции v .

РЕШЕНИЕ

Поскольку

$$\gamma dv = \gamma p dx + \gamma q dy - (\alpha p + \beta q) dz,$$

имеем

$$\gamma dv = p(\gamma dx - \alpha dz) + q(\gamma dy - \beta dz).$$

Поэтому, полагая

$$\gamma x - \alpha z = t \quad \text{и} \quad \gamma y - \beta z = u,$$

получим

$$\gamma dv = p dt + q du,$$

откуда ясно, что количество v равняется произвольной функции двух переменных t и u , так что

$$v = \Gamma(t, u)$$

или после подстановки

$$v = \Gamma(\gamma x - \alpha z, \gamma y - \beta z),$$

что таким образом, является решением проблемы. Итак, если для производных задается условие

$$\alpha \left(\frac{v}{dx} \right) + \beta \left(\frac{dv}{dy} \right) + \gamma \left(\frac{dv}{dz} \right) = 0,$$

то интеграл этого уравнения есть

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}, \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

470. Очевидно, что этот интеграл может быть записан также в виде

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}, \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}\right),$$

поскольку вообще, как мы выше указали,

$$\Gamma(x, y) = \Delta(t, u),$$

если t и u выражаются каким-либо образом через x и y .

СЛЕДСТВИЕ 2

471. Можно также утверждать, что если образовать выражения

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}, \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}, \frac{z}{\gamma} - \frac{x}{\alpha},$$

то количество v является произвольной функцией этих трех выражений; но поскольку любое из них выражается через два остальные, то в силу этого v равняется функции только двух из этих переменных.

ЗАДАЧА 80

472. Пусть при

$$dv = p dx + q dy + r dz$$

требуется, чтобы выполнялось условие

$$px + qy + rz = nv,$$

то есть

$$nv = x \left(\frac{dv}{dx}\right) + y \left(\frac{dv}{dy}\right) + z \left(\frac{dv}{dz}\right).$$

Найти вид функции v .

РЕШЕНИЕ

Из предписанного условия получаем для r значение

$$r = \frac{nv - px - qy}{z}$$

и, подставив его, будем иметь

$$dv - \frac{nv dz}{z} = p \left(dx - \frac{x dz}{z}\right) + q \left(dy - \frac{y dz}{z}\right)$$

или

$$dv - \frac{nv dz}{z} = pzd \frac{x}{z} + qzd \frac{y}{z}.$$

Здесь левая часть становится интегрируемой путем умножения на $\frac{1}{z^n}$, так что получим

$$d \frac{v}{z^n} = \frac{pz}{z^n} d \frac{x}{z} + \frac{qz}{z^n} d \frac{y}{z}.$$

Поскольку, однако, количества p и q не определены и в общем случае из уравнения

$$dV = P dX + Q dY$$

следует

$$V = \Gamma(X, Y),$$

то для нашего случая заключаем, что

$$\frac{v}{z^n} = \Gamma\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

или

$$v = z^n \Gamma\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Итак, если произвольную функцию двух количеств $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$ умножить на z^n , или, что то же самое, на x^n или y^n , то получается подходящее значение функции v , удовлетворяющее предписанному условию.

СЛЕДСТВИЕ 1

473. Очевидно, выражение $\Gamma\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ представляет собою такую функцию, в которой все три переменные x , y , z везде дают число измерений нуль и, наоборот, все функции такого рода даются таким выражением.

СЛЕДСТВИЕ 2

474. Умножив затем эту функцию на z^n , мы образуем однородную функцию трех переменных x , y , z , число измерений которой есть n ; поэтому решение нашей проблемы может быть выражено так, что искомое количество v является однородной функцией трех переменных x , y и z с числом измерений, равным n .

СЛЕДСТВИЕ 3

475. Итак, если заданное условие есть

$$px + qy + rz = 0,$$

то есть

$$x \left(\frac{dv}{dx} \right) + y \left(\frac{dv}{dy} \right) + z \left(\frac{dv}{dz} \right) = 0,$$

то количество v будет однородной функцией нулевого измерения трех переменных x , y и z .

ПОЯСНЕНИЕ

476. Таким же образом получается решение, если предписанное условие требует, чтобы было

$$\alpha px + \beta qy + \gamma rz = nv$$

или

$$\alpha x \left(\frac{dv}{dx} \right) + \beta y \left(\frac{dv}{dy} \right) + \gamma z \left(\frac{dv}{dz} \right) = nv.$$

В самом деле, тогда в силу того, что

$$r = \frac{nv - \alpha px - \beta qy}{\gamma z},$$

будем иметь

$$dv - \frac{nv dz}{\gamma z} = p \left(dx - \frac{\alpha x dz}{\gamma z} \right) + q \left(dy - \frac{\beta y dz}{z} \right),$$

а это уравнение может быть представлено в следующей форме:

$$\frac{\gamma dv}{v} - \frac{n dz}{z} = \frac{px}{v} \left(\frac{\gamma dx}{x} - \frac{\alpha dz}{z} \right) + \frac{qy}{v} \left(\frac{\gamma dy}{y} - \frac{\beta dz}{z} \right).$$

Отсюда заключаем, что интеграл левой части $\gamma lv - nlz$ равняется произвольной функции двух количеств

$$\gamma lx - \alpha lz \quad \text{и} \quad \gamma ly - \beta lz,$$

а после перехода от логарифмов к числам получим

$$\frac{v^\gamma}{z^n} = \Gamma \left(\frac{x^\gamma}{z^\alpha}, \frac{y^\gamma}{z^\beta} \right).$$

Положим $\alpha = \frac{1}{\lambda}$, $\beta = \frac{1}{\mu}$ и $\gamma = \frac{1}{\nu}$, тогда предписанное условие будет

$$\frac{px}{\lambda} + \frac{qy}{\mu} + \frac{rz}{\nu} = nv,$$

и решение принимает такую форму:

$$v = z^{\nu n} \Delta \left(\frac{x^\lambda}{z^\nu}, \frac{y^\mu}{z^\nu} \right).$$

Если, далее, принять

$$x^\lambda = X, \quad y^\mu = Y \quad \text{и} \quad z^\nu = Z,$$

то будет

$$v = Z^n \Delta \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right).$$

Таким образом, искомое количество v есть однородная функция, в которой все три переменные X , Y и Z везде имеют одно и то же число измерений n .

ЗАДАЧА 81

477. Полагая

$$dv = p dx + q dy + r dz,$$

задаем условие

$$px + qy + rz = nv + S,$$

где S — произвольная заданная функция переменных x, y, z . Исследовать природу искомой функции v .

РЕШЕНИЕ

Поскольку заданное условие дает

$$r = \frac{dv + S - px - qy}{z},$$

то будет

$$dv - \frac{nv dz}{z} = \frac{S dz}{z} + p \left(dx - \frac{x dz}{z} \right) + q \left(dy - \frac{y dz}{z} \right),$$

или

$$d \frac{v}{z^n} = \frac{S dz}{z^{n+1}} + \frac{p}{z^{n-1}} d \frac{x}{z} + \frac{q}{z^{n-1}} d \frac{y}{z}.$$

Пусть $x = tz$ и $y = uz$, так что теперь S — функция трех переменных t, u, z , и пусть дифференциальное выражение $\frac{S dz}{z^{n+1}}$ интегрируется при условии, что количества t и u считаются постоянными; соответствующий интеграл обозначим через V . Тогда

$$v = Vz^n + z^n \Gamma \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right),$$

где последний член правой части обозначает однородную функцию трех переменных x, y, z числа измерений n .

СЛЕДСТВИЕ 1

478. Если S — постоянное количество C , тогда

$$V = \int \frac{C dz}{z^{n+1}} = -\frac{C}{nz^n}.$$

Тогда первый член интеграла равен

$$Vz^n = -\frac{C}{n}.$$

Очевидно, то же значение получается при перестановке количеств x, y, z между собой.

СЛЕДСТВИЕ 2

479. Если S — однородная функция x, y, z числа измерений m , то, полагая $x = tz$ и $y = uz$, получим $S = Mz^m$, где M содержит только количества t и u и, следовательно, может рассматриваться как постоянное. Тогда

$$V = \int Mz^{m-n-1} dz = \frac{Mz^{m-n}}{m-n} = \frac{S}{(m-n)z^n},$$

так что первый член интеграла есть

$$\frac{S}{m-n}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

480. Если в этом случае будет $m = n$, то

$$V = Mlz + C = Mlaz$$

и тогда первый член интеграла равен

$$Mz^n laz = Slaz.$$

С таким же правом можно писать также

$$Slby \text{ или } Slax;$$

это достаточно очевидно, поскольку разность двух таких значений есть однородная функция n измерений, следовательно, она содержится во втором члене интеграла.

ПОЯСНЕНИЕ

481. Основой для этого решения является следующая весьма общая лемма.

Если

$$dV = S dZ + P dX + Q dY,$$

где S обозначает заданную функцию, тогда как P и Q — неопределенные функции, то

$$V = \int S dZ + \Gamma(X, Y),$$

причем здесь недостаточно указать, что при интегрировании выражения $S dZ$ только количество Z является переменным, но нужно сверх того отметить, что X и Y должны рассматриваться как постоянные. Если, следовательно, S задана как функция трех других переменных x, y, z , из которых определенным образом получаются количества X, Y, Z , о которых здесь идет речь, то вместо x, y, z нужно сперва ввести X, Y и Z , так что S окажется функцией X, Y и Z , и тогда берем интеграл $\int S dZ$, считая X и Y постоянными и только Z переменным. Таким образом, в случае нашей задачи в интеграле $\int \frac{S dz}{z^{n+1}}$ количества $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$ нужно рассматривать как постоянные, и только z — как переменное, следовательно, в функции S надо положить $x = tz$ и $y = uz$, так что S будет функцией количеств $z, t = \frac{x}{z}$ и $u = \frac{y}{z}$, причем последние два нужно рассматривать как постоянные. Стало быть, тот, кто пожелал бы, рассматривая z как переменное, считать x и y постоянными, допустил бы серьезную ошибку, так как и x , и y следует считать содержащими переменное z . А то, что при перестановке переменных первый член интеграла должен остаться прежним, так что

$$z^n \int \frac{S dz}{z^{n+1}} = x^n \int \frac{S dx}{x^{n+1}},$$

ясно из того, что если положить $x = tz$ и $dx = t dz$, то при постоянном t получим

$$x^n \int \frac{S dx}{x^{n+1}} = t^n z^n \int \frac{St dz}{t^{n+1} z^{n+1}} = z^n \int \frac{S dz}{z^{n+1}};$$

в самом деле, при всех этих интегрированиях следует считать постоянными отношения переменных $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{x}{y}$, поэтому количество $t = \frac{x}{z}$ совершенно правильно рассматривается как постоянное при выполнении приведенных.

ЗАДАЧА 82

482. Положим

$$dv = p dx + q dy + r dz$$

и предположим условие

$$pL + qM + rN = 0,$$

где L , M , N — заданные функции количества x , y и z соответственно, а именно, L — функция только от x , M — только от y и N — только от z ; определить природу искомой функции v .

РЕШЕНИЕ

Поскольку

$$r = -\frac{pL + qM}{N},$$

то основное уравнение будет

$$dv = p \left(dx - \frac{L dz}{N} \right) + q \left(dy - \frac{M dz}{N} \right)$$

или

$$dv = pL \left(\frac{dx}{L} - \frac{dz}{N} \right) + qM \left(\frac{dy}{M} - \frac{dz}{N} \right).$$

Положим

$$t = \int \frac{dx}{L} - \int \frac{dz}{N} \quad \text{и} \quad u = \int \frac{dy}{M} - \int \frac{dz}{N},$$

так что

$$dv = pL dt + qM du,$$

тогда, очевидно, количество v должно равняться произвольной функции двух переменных t и u , которые можно описать и так, что при заданных трех интегралах $\int \frac{dx}{L}$, $\int \frac{dy}{M}$ и $\int \frac{dz}{N}$ в качестве t и u нужно брать разности между ними.

ПОЯСНЕНИЕ 1

483. Решение удалось бы и тогда, когда $\frac{L}{N}$ — функция только x и z , а $\frac{M}{N}$ — функция только y и z ; тогда нужно было бы искать такие подходящие для интегрирования множители P и Q , чтобы было

$$P \left(dx - \frac{L dz}{N} \right) = dt \quad \text{и} \quad Q \left(dy - \frac{M dz}{N} \right) = du.$$

и вследствие

$$dv = \frac{p dt}{P} + \frac{q du}{Q}$$

будет

$$v = \Gamma(t, u).$$

При перестановке же переменных x , y и z получаются другие случаи, допускающие решение. Однако если количества L , M , N будут составлены иначе, то не видно верного пути для получения решения, которое в этом случае заведомо представляется довольно затруднительным. В самом деле, в довольно простом случае

$$(y+z)p + (x+z)q + (x+y)r = 0$$

я только сложным путем пришел к такому решению: пусть

$$t = (x+y+z)(x-z)^2 \quad \text{и} \quad u = (x+y+z)(y-z)^2;$$

тогда

$$v = \Gamma(t, u);$$

и так как количества t и u , произвольная функция которых дает решение v , в этом случае довольно сложные, то тем более трудно надеяться получить решение в общем случае.

ПОЯСНЕНИЕ 2

484. Можно все же распространить решение на ряд других случаев. Если заданные функции L , M , N таковы, что можно найти другие функции E , F , G , H такие, чтобы было

$$E \left(dx - \frac{L dz}{N} \right) + F \left(dy - \frac{M dz}{N} \right) = dt$$

и

$$G \left(dx - \frac{L dz}{N} \right) + H \left(dy - \frac{M dz}{N} \right) = du,$$

то, полагая

$$p = PE + QG \quad \text{и} \quad q = PF + QH,$$

имеем

$$dv = P dt + Q du,$$

где P и Q — неопределенные функции, введенные вместо p и q . Тогда количество v будет равно произвольной функции двух переменных t и u , то есть

$$v = \Gamma(t, u).$$

Итак, все дело сводится к тому, чтобы для заданных функций L , M , N найти функции E , F , G , H , и это, казалось бы, всегда можно сделать; однако этот вопрос чаще всего оказывается гораздо более трудным, чем предложенная задача. Достаточно, однако, найти две такие функции E и F и отсюда определить количество t , потому что после этого путем перестановки переменных x , y , z заодно с соответствующими функциями L , M , N сразу находим подходящее значение для u . Так,

в вышеприведенном примере, где

$$L = y + z, \quad M = x + z, \quad N = x + y,$$

после того, как мы нашли

$$t = (x + y + z)(x - z)^2,$$

перестановка дает сразу

$$u = (x + y + z)(y - z)^2$$

или также

$$u = (x + y + z)(x - y)^2,$$

причем безразлично, каким из этих значений пользоваться.

ЗАДАЧА 83

485. Полагая

$$dv = p dx + q dy + r dz,$$

предписываем условие

$$pqr = 1.$$

Исследовать природу функции v .

РЕШЕНИЕ

Так как $r = \frac{1}{pq}$, то $dv = p dx + q dy + \frac{dz}{pq}$, откуда получаем, что

$$v = px + qy + \frac{z}{pq} - \int \left(x dp + y dq - \frac{z dp}{p^2 q} - \frac{z dq}{p q^2} \right).$$

Этим преобразованием мы достигли того, что в интегральном выражении встречаются только два дифференциала dp и dq . После введения соответствующих переменных вместо основных заключаем, что вышестоящее интегральное выражение должно быть произвольной функцией переменных p и q . Пусть S — такая функция, тогда

$$v = px + qy + \frac{z}{pq} - S,$$

и теперь остается только сделать так, чтобы, сохраняя в расчетах p и q , исключить два других переменных, а мы достигнем этого, потребовав, чтобы было

$$dS = \left(x - \frac{z}{p^2 q} \right) dp + \left(y - \frac{z}{p q^2} \right) dq,$$

откуда

$$x - \frac{z}{p^2 q} = \left(\frac{dS}{dp} \right) \quad \text{и} \quad y - \frac{z}{p q^2} = \left(\frac{dS}{dq} \right).$$

Итак, решение получается таким образом: вводим три переменные p , q и z , а также произвольную функцию S двух переменных p и q и полагаем

$$x = \frac{z}{p^2 q} + \left(\frac{dS}{dp} \right) \quad \text{и} \quad y = \frac{z}{p q^2} + \left(\frac{dS}{dq} \right),$$

а тогда искомая функция v определяется так:

$$v = \frac{3z}{pq} + p \left(\frac{dS}{dp} \right) + q \left(\frac{dS}{dq} \right) - S.$$

Если же мы хотим выразить v через три переменные x, y, z , то из двух уравнений

$$x = \frac{z}{p^2q} + \left(\frac{dS}{dp} \right) \quad \text{и} \quad y = \frac{z}{pq^2} + \left(\frac{dS}{dq} \right)$$

нужно найти значения p и q и после подстановки этих значений в функцию S будет

$$v = px + qy + \frac{z}{pq} - S,$$

и вопрос будет решен.

СЛЕДСТВИЕ 1

486. Если вместо функции S взять постоянное количество C , то, поскольку $p^2q = \frac{z}{x}$ и $pq^2 = \frac{z}{y}$, будет $pq = \sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}$, откуда $= \sqrt[3]{\frac{yz}{x^2}}$ и $q = \sqrt[3]{\frac{xz}{y^2}}$ и, наконец,

$$v = 3 \sqrt[3]{xyz} - C,$$

что дает частное решение задачи.

СЛЕДСТВИЕ 2

487. Так как в предписанном условии

$$pqr = 1 \quad \text{или} \quad \left(\frac{dv}{dx} \right) \left(\frac{dv}{dy} \right) \left(\frac{dv}{dz} \right) = 1$$

встречаются только дифференциалы трех переменных x, y и z , к этим переменным можно прибавить постоянные количества, откуда получается несколько более общее решение

$$v = 3 \sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)} - C.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

488. Можно привести еще другой случай, который легко решается: положим $S = 2c \sqrt{pq}$, откуда получаем, что

$$p = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \sqrt[3]{\frac{z}{\sqrt{xy-c}}} \quad \text{и} \quad q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \sqrt[3]{\frac{z}{\sqrt{xy-c}}},$$

и поэтому

$$S = 2c \sqrt[3]{\frac{z}{\sqrt{xy-c}}}.$$

Следовательно,

$$v = 3 \sqrt[3]{z} (\sqrt{xy} - c)^2,$$

а путем перестановки переменных получаем подобным же образом, что

$$v = 3 \sqrt[3]{y} (\sqrt{xz} - b)^2 \quad \text{и} \quad v = 3 \sqrt[3]{x} (\sqrt{yz} - a)^2,$$

где затем вместо x, y, z можно писать $x+f, y+g, z+h$. Впрочем, ясно, что можно также получить общее решение и тогда, когда r должно быть равно какой-то функции p и q , или же когда между p, q, r задается какое-либо уравнение.

ПОЯСНЕНИЕ 2

489. В самом деле, если, полагая $dv = p dx + q dy + r dz$, задать между производными $p = \left(\frac{dv}{dx}\right)$, $q = \left(\frac{dv}{dy}\right)$, $r = \left(\frac{dv}{dz}\right)$ произвольное уравнение, то, продифференцировав последнее, получаем

$$P dp + Q dq + R dr = 0.$$

Теперь, положив

$$S = \int (x dp + y dq + z dr),$$

так что

$$v = px + qy + rz - S,$$

берем произвольную функцию трех количеств p, q, r , которую обозначим через V , и дифференцируем ее; имеем

$$dV = L dp + M dq + N dr,$$

а в то же время

$$0 = Pu dp + Qu dq + Ru dr$$

и, следовательно,

$$dV = (L + Pu) dp + (M + Qu) dq + (N + Ru) dr.$$

Эта формула благодаря введенному новому переменному u широко применима. Примем теперь $S = V$ и потребуем, чтобы было

$$x = L + Pu; \quad y = M + Qu; \quad z = N + Ru.$$

Таким образом, мы теперь наряду с переменными p, q, r , из которых одно выражается через остальные две, имеем еще новое переменное u и по ним мы определяем три переменные x, y, z таким образом, чтобы через них обратно определялись p, q, r и u ; тогда будет

$$v = px + qy + rz - V.$$

Итак, берем за V какую угодно функцию трех количеств p, q, r , для которых предписывается такое условие, чтобы было

$$P dp + Q dq + R dr = 0,$$

и тогда, положив

$$x = Pu + \left(\frac{dV}{dp}\right), \quad y = Qu + \left(\frac{dV}{dq}\right), \quad z = Ru + \left(\frac{dV}{dr}\right),$$

получим

$$v = (Pp + Qq + Rr)u + p \left(\frac{dV}{dp} \right) + q \left(\frac{dV}{dq} \right) + r \left(\frac{dV}{dr} \right) - V.$$

Это решение следует предпочесть предыдущему, поскольку количества p, q, r входят в него на равных правах.

ЗАДАЧА 84

490. Полагая

$$dv = p dx + q dy + r dz,$$

предписываем условие

$$pqr = \frac{v^3}{xyz}.$$

Определить природу функции v .

РЕШЕНИЕ

Положим $p = \frac{Pv}{x}$, $q = \frac{Qv}{y}$, $r = \frac{Rv}{z}$; в силу предписанного условия должно быть $PQR = 1$; но тогда

$$\frac{dv}{v} = \frac{P dx}{x} + \frac{Q dy}{y} + \frac{R dz}{z}.$$

Теперь примем, что $lv = V$, $lx = X$, $ly = Y$, $lz = Z$, и получим уравнение

$$dV = P dX + Q dY + R dZ,$$

где должно быть $PQR = 1$. Таким образом, вопрос не отличается от предыдущей задачи, и решение легко переносится на этот случай.

ПОЯСНЕНИЕ

491. Другие случаи, которые можно было бы привести в этой главе, я не буду излагать, поскольку пока не предвидится от этого пользы, а главным образом потому, что я задался целью дать только набросок первоначальных положений этой мало исследованной части интегрального исчисления. Что же касается случая, когда в предписанное условие входят производные высших порядков, то едва ли можно что-либо предложить, кроме нескольких замечаний об однородных уравнениях, чем я и закончу этот раздел интегрального исчисления, а вместе с тем завершу и весь труд.



ГЛАВА IV

О РЕШЕНИИ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЗАДАЧА 85

492. Если v равняется произвольной функции двух количеств t и u , которые определены через три переменные x , y и z так, что

$$t = \alpha x + \beta z \quad \text{и} \quad u = \gamma y + \delta z,$$

то найти ее производные всех порядков.

РЕШЕНИЕ

Поскольку v есть функция количеств

$$t = \alpha x + \beta z \quad \text{и} \quad u = \gamma y + \delta z,$$

отметим ее производные по этим двум переменным, а именно:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right), \quad \left(\frac{dv}{du}\right), \quad \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right), \quad \left(\frac{d^2v}{dt du}\right), \quad \left(\frac{d^2v}{du^2}\right) \quad \text{и т. д.},$$

и отсюда получаем немедленно

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \alpha \left(\frac{dv}{dt}\right), \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = \gamma \left(\frac{dv}{du}\right), \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) = \beta \left(\frac{dv}{dt}\right) + \delta \left(\frac{dv}{du}\right),$$

т. е. производные первого порядка. Для производных второго порядка получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) &= \alpha^2 \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right), \quad \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) = \gamma^2 \left(\frac{d^2v}{du^2}\right), \\ \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) &= \beta^2 \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + 2\beta\delta \left(\frac{d^2v}{dt du}\right) + \delta^2 \left(\frac{d^2v}{du^2}\right), \\ \left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) &= \alpha\gamma \left(\frac{d^2v}{dt du}\right), \quad \left(\frac{d^2v}{dx dz}\right) = \alpha\beta \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + \alpha\delta \left(\frac{d^2v}{dt du}\right) \end{aligned}$$

и

$$\left(\frac{d^2v}{dy dz}\right) = \beta\gamma \left(\frac{d^2v}{dt du}\right) + \gamma\delta \left(\frac{d^2v}{du^2}\right).$$

Подобным же образом доходим до производных третьего порядка:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) &= \alpha^3 \left(\frac{d^3v}{dt^3}\right), & \left(\frac{d^3v}{dy^3}\right) &= \gamma^3 \left(\frac{d^3v}{du^3}\right), \\ \left(\frac{d^3v}{dz^3}\right) &= \beta^3 \left(\frac{d^3v}{dt^3}\right) + 3\beta^2\delta \left(\frac{d^3v}{dt^2 du}\right) + 3\beta\delta^2 \left(\frac{d^3v}{dt du^2}\right) + \delta^3 \left(\frac{d^3v}{du^3}\right), \\ \left(\frac{d^3v}{dx^2 dy}\right) &= \alpha^2\gamma \left(\frac{d^3v}{dt^2 du}\right), & \left(\frac{d^3v}{dx dy^2}\right) &= \alpha\gamma^2 \left(\frac{d^3v}{dt du^2}\right), \\ \left(\frac{d^3v}{dx^2 dz}\right) &= \alpha^2\beta \left(\frac{d^3v}{dt^3}\right) + \alpha^2\delta \left(\frac{d^3v}{dt^2 du}\right), \\ \left(\frac{d^3v}{dy^2 dz}\right) &= \beta\gamma^2 \left(\frac{d^3v}{dt du^2}\right) + \gamma^2\delta \left(\frac{d^3v}{du^3}\right), \\ \left(\frac{d^3v}{dx dz^2}\right) &= \alpha\beta^2 \left(\frac{d^3v}{dt^3}\right) + 2\alpha\beta\delta \left(\frac{d^3v}{dt^2 du}\right) + \alpha\delta^2 \left(\frac{d^3v}{dt du^2}\right), \\ \left(\frac{d^3v}{dy dz^2}\right) &= \beta^2\gamma \left(\frac{d^3v}{dt^2 du}\right) + 2\beta\gamma\delta \left(\frac{d^3v}{dt du^2}\right) + \gamma\delta^2 \left(\frac{d^3v}{du^3}\right), \\ \left(\frac{d^3v}{dx dy dz}\right) &= \alpha\beta\gamma \left(\frac{d^3v}{dt^2 du}\right) + \alpha\beta\delta \left(\frac{d^3v}{dt du^2}\right), \end{aligned}$$

откуда легко видеть, как эти формулы надлежит распространить на производные более высокого порядка.

ПОЯСНЕНИЕ 1

493. Казалось бы, что задачу нужно ставить более общим образом, выражая количества t и u через три переменные x, y, z так, что

$$t = \alpha x + \beta y + \gamma z \quad \text{и} \quad u = \delta x + \epsilon y + \zeta z,$$

но поскольку наша гипотеза сделана только с той целью, чтобы v было функцией t и u , а тогда, очевидно, v можно рассматривать также как функцию двух количеств $\epsilon t - \beta u$ и $\delta t - \alpha u$, из которых первое свободно от y , а второе от x . Поэтому нашу гипотезу следует считать вполне общей; однако исключение здесь составляет тот случай, когда

$$t = x + z \quad \text{и} \quad u = x - z,$$

потому что тогда значение y не входит. Но в этом случае количество v , рассматриваемое как функция $t + u$ и $t - u$, будет функцией x и z , и этот случай охватывается и нашей гипотезой, если считать $\beta = 0$ и $\gamma = 0$.

ПОЯСНЕНИЕ 2

494. Эту проблему я предпослал, потому что я намерен здесь заниматься только такими дифференциальными уравнениями, для которых решение v равно произвольной функции двух новых переменных t и u , которые от основных переменных x, y, z зависят так, как я выше предположил:

$$t = \alpha x + \beta z \quad \text{и} \quad u = \gamma y + \delta z.$$

Что уравнения, которым можно таким образом удовлетворить, должны быть однородными, легко заметить; таким образом, в уравнение, подлежащее решению, входят только производные одного и того же порядка, умноженные на постоянные и сложенные друг с другом, а обозначением таких уравнений однородными я пользовался еще в предыдущей части. Итак, если предложено такое однородное дифференциальное уравнение,

то вместо производных, образованных при помощи элементов dx , dy , dz , подставляем указанные ранее их выражения, образованные посредством элементов dt и du , и при этом суммы всех членов, содержащих одну и ту же производную, образованную с помощью элементов dt и du , должны равняться нулю каждая в отдельности; отсюда определяются отношения $\frac{\beta}{\alpha}$ и $\frac{\delta}{\gamma}$; вопрос здесь, конечно, не в определении самих этих коэффициентов, но их отношений. Поскольку, следовательно, подлежат определению только два количества, то, если требуется удовлетворить нескольким уравнениям, такие однородные уравнения могут быть решены указанным способом лишь тогда, когда они сводятся только к двум из них: ниже это будет изложено яснее.

ЗАДАЧА 86

495. Предлагается однородное уравнение первого порядка

$$A\left(\frac{dv}{dx}\right) + B\left(\frac{dv}{dy}\right) + C\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0.$$

Найти природу функции v трех переменных x , y и z .

РЕШЕНИЕ

Положим $v = \Gamma(t, u)$, где

$$t = \alpha x + \beta z \quad \text{и} \quad u = \gamma y + \delta z.$$

Тогда после подстановки, на основании предыдущей задачи, левая часть нашего уравнения разбивается на две части,

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)(A\alpha + C\beta) + \left(\frac{dv}{du}\right)(B\gamma + C\delta) = 0,$$

из которых каждая в отдельности должна равняться нулю, и следовательно,

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{A}{C} \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\gamma} = -\frac{B}{C},$$

откуда

$$t = Cx - Az \quad \text{и} \quad u = Cy - Bz.$$

Следовательно, полный интеграл заданного уравнения есть

$$v = \Gamma(\overline{Cx - Az}, \overline{Cy - Bz}),$$

что можно еще записать короче так:

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{A} - \frac{z}{C}, \frac{y}{B} - \frac{z}{C}\right),$$

СЛЕДСТВИЕ 1

496. Очевидно, что, если переставить переменные, этот интеграл можно выразить еще и так:

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}, \frac{y}{B} - \frac{z}{C}\right)$$

или

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}, \frac{x}{A} - \frac{z}{C}\right),$$

так как

$$\frac{x}{A} - \frac{y}{B} = \left(\frac{x}{A} - \frac{z}{C}\right) - \left(\frac{y}{B} - \frac{z}{C}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

497. Таким образом, если образовать, исходя из предложенного уравнения три выражения

$$\frac{x}{A} - \frac{y}{B}, \quad \frac{x}{A} - \frac{z}{C}, \quad \frac{y}{B} - \frac{z}{C},$$

то любая функция этих выражений дает подходящее значение для v . А так как любое из этих выражений есть разность двух остальных, такую функцию следует рассматривать [как функцию только двух переменных.

СЛЕДСТВИЕ 3

498. Безразлично, каким из этих трех выражений для интеграла пользоваться; но если новые переменные t и u равны друг другу, надо пользоваться еще другим переменным. Если, в частности, $C=0$, то первоначальное выражение $v = \Gamma(z, z)$, как функция одного z , становится бесполезным, а полным интегралом будет

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}, z\right)$$

или

$$v = \Gamma(\overline{Bx - Ay}, z).$$

ЗАДАЧА 87

499. Предложено однородное уравнение второго порядка

$$A\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + B\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) + C\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) + 2D\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) + 2E\left(\frac{d^2v}{dx dz}\right) + 2F\left(\frac{d^2v}{dy dz}\right) = 0.$$

Исследовать те случаи, когда его интеграл может быть выражен в виде $\Gamma(t, u)$, где

$$t = \alpha x + \beta z \quad \text{и} \quad u = \gamma y + \delta z.$$

РЕШЕНИЕ

Сделаем подстановку по формулам, указанным в задаче 85, и предложенное уравнение распадается на три члена, а именно:

$$\left. \begin{aligned} &\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)(A\alpha^2 + C\beta^2 + 2E\alpha\beta) \\ &\left(\frac{d^2v}{dt du}\right)(2C\beta\delta + 2D\alpha\gamma + 2E\alpha\delta + 2F\beta\delta\gamma) \\ &\left(\frac{d^2v}{du^2}\right)(B\gamma^2 + C\delta^2 + 2F\gamma\delta) \end{aligned} \right\} = 0,$$

причем каждый в отдельности должен равняться нулю. Первый член дает

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-E + \sqrt{E^2 - AC}}{C},$$

а последний

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{-F + \sqrt{F^2 - BC}}{C}.$$

Если эти два значения подставить в средний член, который запишем в виде

$$\frac{C\beta\delta}{\alpha\gamma} + D + \frac{E\delta}{\gamma} + \frac{F\beta}{\alpha} = 0,$$

тогда получается уравнение

$$EF - CD = \sqrt{(E^2 - AC)(F^2 - BC)}.$$

Это уравнение представляет условие, [налагаемое] на коэффициенты A, B, C, D, E, F для того, чтобы решение указанного вида могло иметь место. Это уравнение в развернутом виде дает

$$C^2D^2 - 2CDEF + BCE^2 + ACF^2 - ABC^2 = 0,$$

откуда

$$C = \frac{2DEF - BE^2 - AF^2}{D^2 - AB},$$

так как коэффициент C входит как [общий] множитель. Но каждый раз, когда имеет место условие

$$AF^2 + BE^2 + CD^2 = ABC + 2DEF,$$

тогда алгебраическое выражение, образованное в соответствии с предложенным

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,$$

разлагается на два множителя, и только в этом случае имеет место решение указанного вида. Следовательно, чтобы должным образом указать эти случаи, допускающие решение, положим, что разложение на множители приведенного выше выражения таково:

$$(ax + by + cz)(fx + gy + bz),$$

что имеет место, когда

$$A = af, \quad B = bg, \quad C = cb,$$

$$2D = ag + bf, \quad 2E = ab + cf, \quad 2F = b^2 + cg,$$

откуда тоже будем иметь

$$AF^2 + BE^2 + CD^2 = ABC + 2DEF.$$

Но тогда мы получаем в качестве решения

$$\text{или } \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{a}{c}, \quad \text{или } \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{f}{h}$$

и

$$\text{или } \frac{\delta}{\gamma} = -\frac{b}{c}, \quad \text{или } \frac{\delta}{\gamma} = -\frac{g}{h},$$

причем нужно заметить, что значения дробей $\frac{\beta}{\alpha}$ и $\frac{\delta}{\gamma}$, написанные одно под другим, надо брать вместе, так что

$$\begin{aligned} \text{или } t &= cx - az & \text{и } u &= cy - bz, \\ \text{или } t &= hx - fz & \text{и } u &= hy - gz. \end{aligned}$$

Таким образом, для этих случаев, допускающих решение, полный интеграл будет

$$v = \Gamma(cx - az, cy - bz) + \Delta(hx - fz, hy - gz)$$

или

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{x}{c}, \frac{y}{b} - \frac{a}{c}\right) + \Delta\left(\frac{x}{f} - \frac{z}{h}, \frac{y}{g} - \frac{z}{h}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

500. Таким способом, следовательно, могут быть решены только те однородные уравнения второго порядка, которые содержатся в следующей записи:

$$\begin{aligned} af\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + bg\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) + cb\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) + (ag + bf)\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) + \\ + (ah + cf)\left(\frac{d^2v}{dx\,dz}\right) + (bh + cg)\left(\frac{d^2v}{dy\,dz}\right) = 0, \end{aligned}$$

а их полный интеграл есть

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + \Delta\left(\frac{x}{f} - \frac{z}{h}, \frac{y}{g} - \frac{z}{h}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

501. Для того чтобы легче было выяснить, можно ли привести к этому случаю некоторос уравнение вида

$$A\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + B\left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) + C\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) + 2D\left(\frac{d^2v}{dx\,dy}\right) + 2E\left(\frac{d^2v}{dx\,dz}\right) + 2F\left(\frac{d^2v}{dy\,dz}\right) = 0$$

или нельзя, образуем следующее алгебраическое выражение:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz;$$

если его можно разбить на два рациональных множителя

$$(ax + by + cz)(fx + gy + bz),$$

то его полный интеграл можно сразу получить, как выше.

СЛЕДСТВИЕ 3

502. Только один случай, а именно тот, когда оба эти множителя равны между собой, составляет исключение, так как в этом случае обе найденные функции сливаются в одну. Но уже из вышеприведенных соображений следует, что если это имеет место и, значит, $f = a$, $b = g$ и $b = c$, то полный интеграл выражается так:

$$z = x\Gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + \Delta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right).$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

503. Итак, в тех случаях, в которых однородное уравнение второго порядка допускает решение указанного вида, оно заключает в себе два однородных уравнения первого порядка.

$$a \left(\frac{dv}{dx} \right) + b \left(\frac{dv}{dy} \right) + c \left(\frac{dv}{dz} \right) = 0$$

и

$$f \left(\frac{dv}{dx} \right) + g \left(\frac{dv}{dy} \right) + h \left(\frac{dr}{dz} \right) = 0,$$

так что должно быть удовлетворено каждое из них, и полные интегралы этих уравнений в сумме составляют полный интеграл заданного уравнения. Таким образом, открывается другой путь построения интегралов однородных уравнений второго порядка указанного типа. Для этой цели исходим из уравнения

$$a \left(\frac{dv}{dx} \right) + b \left(\frac{dv}{dy} \right) + c \left(\frac{dv}{dz} \right) = 0,$$

из которого тремя дифференцированиями образуем три новых уравнения:

$$a \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) + b \left(\frac{d^2v}{dx dy} \right) + c \left(\frac{d^2v}{dx dz} \right) = 0,$$

$$a \left(\frac{d^2v}{dx dy} \right) + b \left(\frac{d^2v}{dy^2} \right) + c \left(\frac{d^2v}{dy dz} \right) = 0,$$

$$a \left(\frac{d^2v}{dx dz} \right) + b \left(\frac{d^2v}{dy dz} \right) + c \left(\frac{d^2v}{dz^2} \right) = 0.$$

Умножим первое на f , второе на g и третье на h и соберем их в одну сумму; тогда мы получим то общее уравнение, интеграл которого мы выше нашли. Оно может рассматриваться как бы как произведение двух однородных уравнений первого порядка, и, сложив их интегралы, получим полный интеграл.

ПОЯСНЕНИЕ 2

504. Таким образом, исключаются бесчисленные уравнения второго порядка, которые не допускают интегрирования таким способом, или которые не могут быть сведены к уравнениям первого порядка. Эти случаи определяются на основании того критерия, что не имеет места условие

$$AF^2 + BE^2 = CD^2 = ABC + 2DEF.$$

Таким уравнением является, например,

$$\left(\frac{d^2v}{dx dy} \right) = \left(\frac{d^2v}{dz^2} \right),$$

которое, следовательно, не допускает такого рода решения, и даже не видно другого пути для нахождения его полного интеграла. Но можно легко найти бесчисленные частные интегралы, к тому же содержащие произвольные функции, но всегда только функции одного переменного количества, которые в данном вопросе надо считать только частными интегралами. В самом деле, если положить

$$v = \Gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

то после подстановки получим $\alpha\beta = \gamma^2$, или, если принять $\gamma = 1$, то должно быть $\alpha\beta = 1$: таким образом, уравнению удовлетворяют бесконечно много выражений и их сумм вида

$$v = \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\beta}{\alpha}y + z\right) + \Delta\left(\frac{\gamma}{\delta}x + \frac{\delta}{\gamma}y + z\right) + \Sigma\left(\frac{\varepsilon}{\zeta}x + \frac{\zeta}{\varepsilon}y + z\right) + \text{и т. д.},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т. д. можно подставить какие угодно числа, но каким бы образом ни объединять в суммы подобные выражения в бесконечном числе, интеграл можно все же считать лишь частным. Отсюда становится ясным, что полное интегрирование уравнения

$$\left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) = \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)$$

имеет очень большое значение, и метод, который приведет к этому, очень существенно увеличит возможности анализа. Однородные же уравнения третьего порядка надо ограничить еще в гораздо большей степени, чтобы их можно было полностью проинтегрировать указанным способом, как это будет показано в следующей задаче.

ЗАДАЧА 88

505. *Определить те случаи, когда однородные уравнения третьего порядка допускают интегралы указанного вида, то есть когда они могут быть сведены к однородным уравнениям первого порядка.*

РЕШЕНИЕ

Пусть в однородном уравнении третьего порядка содержится однородное уравнение первого порядка

$$a\left(\frac{dv}{dx}\right) + b\left(\frac{dv}{dy}\right) + c\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0.$$

Чтобы из него следовало однородное уравнение третьего порядка

$$\left. \begin{aligned} A\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right) + B\left(\frac{d^3v}{dy^3}\right) + C\left(\frac{d^3v}{dz^3}\right) + D\left(\frac{d^3v}{dx^2 dy}\right) + E\left(\frac{d^3v}{dx dy^2}\right) + \\ + F\left(\frac{d^3v}{dx^2 dz}\right) + G\left(\frac{d^3v}{dx dz^2}\right) + \\ + H\left(\frac{d^3v}{dy^2 dz}\right) + I\left(\frac{d^3v}{dy dz^2}\right) + \\ + K\left(\frac{d^3v}{dx dy dz}\right) \end{aligned} \right\} = 0,$$

необходимо, чтобы алгебраическое выражение

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dx^2y + Fx^2z + Hy^2z + Kxyz + Exy^2 + Gxz^2 + Iyz^2$$

содержало множитель $ax + by + cz$, но если второй множитель не распадается в свою очередь на два простых множителя, то дело сведется к уравнению второго порядка, которое не допускает решения. Поэтому чтобы удалось полное интегрирование, необходимо, чтобы это выражение состояло из трех простых множителей, которые пусть будут

$$(ax + by + cz)(fx + gy + bz)(kx + my + nz).$$

Следовательно, коэффициенты общего уравнения получаются такими:

$$\begin{aligned} A &= afk, & B &= bgm, & C &= cbn, \\ D &= afm + agk + bfk, & G &= ahn + cfj + chk, \\ E &= agm + bfm + bgk, & H &= bgn + bhm + cgm, \\ F &= afn + ahk + cfk, & I &= bhj + cgn + chm, \\ K &= agn + ahm + bfn + bhk + cfm + cgk, \end{aligned}$$

а полный интеграл будет

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + \Delta\left(\frac{x}{f} - \frac{z}{h}, \frac{y}{g} - \frac{z}{h}\right) + \Sigma\left(\frac{x}{k} - \frac{z}{n}, \frac{y}{m} - \frac{z}{n}\right),$$

так как каждый простой множитель дает одну произвольную функцию двух переменных.

СЛЕДСТВИЕ 1

506. В каждой из этих функций допускается перестановка переменных x, y, z ; поэтому каждую из них можно считать также как бы функцией трех переменных, например первую функцией от $\frac{x}{a} - \frac{y}{b}$, $\frac{y}{b} - \frac{z}{c}$ и $\frac{z}{c} - \frac{x}{a}$, и аналогично для остальных функций.

СЛЕДСТВИЕ 2

507. Если два множителя равны между собой, $f = a, g = b, h = c$, то в этом случае первые две функции сливаются в одну и вместо них надо писать

$$x\Gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + \Delta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right),$$

а если все три функции равны, то сверх того $k = a, m = b, n = c$, и полный интеграл будет

$$v = x^2\Gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + x\Delta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + \Sigma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3

508. Точно так же, как мы здесь первые два члена множили на x^2 и x , мы могли бы умножить их также на y^2 и y или же на z^2 и z , так как безразлично, каким переменным здесь пользоваться, лишь бы это не было то, которое как раз одно встречается под знаком функции, т. е. если $a = 0$ и приходится брать функции количеств x и $\frac{y}{b} - \frac{z}{c}$, тогда множители x^2 и x исключаются.

ПОЯСНЕНИЕ 1

509. По аналогии ясно, что однородное уравнение четвертого порядка можно решить этим методом лишь тогда, когда оно распадается на четыре уравнения первого порядка и его можно считать как бы их произведением. Но и в том случае, когда невозможно разложить его на множители, приведенные примеры все же ясно показы-

вают, как нужно по однородному дифференциальному уравнению любого порядка строить алгебраическое выражение того же порядка с тремя переменными x , y , z ; если же это выражение можно разложить на простые множители вида $ax + by + cz$, то заодно легко находится полный интеграл дифференциального уравнения, причем каждый множитель дает функцию двух переменных, которая является слагаемым интеграла, и каждое такое слагаемое в отдельности удовлетворяет дифференциальному уравнению и его можно считать частным интегралом. Но если указанное алгебраическое выражение таково, что хотя имеет несколько простых множителей, но не столько, какова его степень, то мы получим несколько частных интегралов, которые, однако, и в сумме не дают полного интеграла. Например, если задать дифференциальное уравнение третьего порядка

$$a \left(\frac{d^3v}{dx^2 dy} \right) + b \left(\frac{d^3v}{dx dy^2} \right) - a \left(\frac{d^3v}{dx dz^2} \right) - b \left(\frac{d^3v}{dy dz^2} \right) = 0,$$

то алгебраическое выражение $ax^2y + bxy^2 - axz^2 - byz^2$ имеет простой множитель $ax + by$, и следовательно, дифференциальному уравнению удовлетворяет

$$v = \Gamma \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}, z \right).$$

Однако для получения полного интеграла еще недостает двух произвольных функций, которые составляют полный интеграл уравнения

$$\left(\frac{d^2v}{dx dy} \right) - \left(\frac{d^2v}{dz^2} \right) = 0,$$

дающего второй множитель $xy - z^2$ указанного выражения. Итак, каждый раз, когда эти алгебраические выражения, полученные из однородных дифференциальных уравнений высшего порядка, допускают разложение на множители, хотя бы и не простые, мы немедленно узнаем, каким образом их интегрирование может быть сведено к интегрированию уравнений низшего порядка, что в этих трудных исследованиях, несомненно, имеет очень большое значение.

ПОЯСНЕНИЕ 2

510. Это все, что я могу предложить относительно определения функции трех переменных из данного соотношения между дифференциалами, и здесь содержатся лишь первые элементы этой науки, дальнейшее развитие которой следует всячески рекомендовать проницательности геометров. Отнюдь не следует считать эти рассуждения бесплодными, так как почти все не решенные задачи теории движения жидкостей относятся к этим более высоким разделам анализа¹⁾, полезность которых, следовательно, ничуть не меньше полезности первой части интегрального исчисления. Эти последние разделы тем более нужно разрабатывать, что теория жидкостей имеет дело с функциями четырех

¹⁾ См. работы Эйлера (№ 227 и № 396 по списку Энестрема): «Продолжение изысканий по теории движения жидкостей» (Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides), Mém. de l'acad. d. Sc. de Berlin [11] (1755), 1757, стр. 316 и «второй раздел основ [теории] движения жидкостей» (Sectio secunda de principis motus fluidorum), Novi comment. acad. Sc. Petrop. 14 (1769), 1770, стр. 270; также в Opera Omnia, Ser. II, vol. 10 и 11. [Ф. Э.]

переменных, природа которых должна быть исследована на основании дифференциальных уравнений второго порядка, но к этому разделу я из-за недостатка материала не решился даже приступить. В этой теории величайшее значение имеет решение уравнения

$$\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2v}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right),$$

где буквы x, y, z обозначают три координаты, а t — истекшее время, и мы ищем функцию этих четырех переменных, которая, будучи подставлена вместо v , удовлетворяет вышеуказанному уравнению¹⁾. Из вышеприведенных соображений легко заключить, что полный интеграл этого уравнения должен содержать две произвольные функции трех переменных; любые менее общие решения должны рассматриваться как неполные. Легко, однако, найти бесчисленные частные решения, ибо если положить $v = \Gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t)$, то находим

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

а поскольку этого можно достичь бесконечным числом способов, есть бесконечно много функций указанного вида, сумма которых дает подходящее значение для v . Далее, уравнению удовлетворяют также значения

$$v = \frac{\Gamma(t \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad v = \frac{\Gamma(x \pm \sqrt{t^2 - y^2 - z^2})}{\sqrt{t^2 - y^2 - z^2}},$$

$$v = \frac{\Gamma(y \pm \sqrt{t^2 - x^2 - z^2})}{\sqrt{t^2 - x^2 - z^2}}, \quad v = \frac{\Gamma(z \pm \sqrt{t^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}},$$

получить которые уже труднее²⁾. Поскольку, однако, это функции только одного переменного каждая, эти интегралы следует считать весьма частными, и даже если бы мы имели в качестве v функции двух переменных, они были бы лишь частными интегралами, а нет даже догадки, как найти такие решения. Так как, однако, полный интеграл должен содержать две произвольные функции трех переменных, то легко понять, как далеки мы еще сейчас от цели.

¹⁾ См. работы Эйлера (№ 268 и № 306 по списку Энестрема): Письмо г-на Эйлера к г-ну де Лагранжу... Изыскания о распространении сотрясений в упругой среде (Lettre de M. Euler à M. de la Grange... Recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique), Miscellanea Taurin. 2 (1760/1), 1762, стр. 1 (Oeuvres de Lagrange, т. XIV, Paris 1892, стр. 178) и Дополнение к изысканиям о распространении звука (Supplément aux recherches sur la propagation du son), Mém. de l'acad. d. Sc. de Berlin [15] (1759), 1766, стр. 210, особ. § 43, стр. 236, также в Opera Omnia, Ser. II, vol. 8 и Ser. III, vol. 1. [Ф. Э.]

²⁾ См. работу Эйлера (№ 307 по списку Энестрема): «Продолжение изысканий о распространении звука» (Continuation des recherches sur la propagation du son), Mém. de l'acad. d. Sc. de Berlin [15] (1759), 1766, стр. 241, особ. § 33, стр. 261; также в Opera Omnia, Ser. III, vol. 1. [Ф. Э.]



ПРИЛОЖЕНИЕ

О ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

ГЛАВА I

О ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ ВООБЩЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

1. Мы говорим, что соотношение между двумя переменными варьируется, если значение одного из переменных, определяемое через другое, увеличивается на бесконечно малое приращение; это приращение называется вариацией того количества, к которому оно прибавляется.

ОБЪЯСНЕНИЕ

2. Итак, сначала рассматривается любое соотношение между двумя переменными x и y , которое выражается некоторым уравнением между ними, в силу которого по отдельным значениям, приписываемым x , определяются соответствующие значения y , а затем уже значения y рассматриваются как получающие какие угодно бесконечно малые приращения, так что эти варьированные значения отличаются бесконечно мало от истинных, вытекающих из предложенного соотношения; тогда мы говорим, что таким образом *варьируется* соотношение между x и y , и вместе с тем те бесконечно малые частицы, которые мы прибавляем к истинным значениям y , называем *вариациями*. Прежде всего надо обратить внимание на то, что эти вариации, на которые меняются отдельные значения y , не следует ни рассматривать как равные между собой, ни считать их каким-либо образом зависящими друг от друга, а их следует считать настолько произвольными, что разрешается даже считать равными нулю все их значения, кроме тех, которые соответствуют одному или нескольким значениям y . Следовательно, их нужно рассматривать как не подчиненные никакому закону, и надо считать, что данное соотношение между x и y не накладывает никаких ограничений на эти вариации, на которые, таким образом, надо смотреть как на целиком произвольные.

СЛЕДСТВИЕ 1

3. Отсюда ясно, что вариации совершенно отличаются от дифференциалов, хотя как вариации, так и дифференциалы суть бесконечно малые и поэтому совсем исчезают: действительно, вариация относится

к значению y , соответствующему данному значению x , в то время как дифференциал dy учитывает вместе с тем переход к следующему значению $x + dx$ ¹⁾.

СЛЕДСТВИЕ 2

4. Итак, если из предложенного соотношения между x и y [значению] x соответствует y , а $x + dx$ соответствует значению y , равное y' , то $dy = y' - y$; но вариация y никоим образом не зависит от следующего значения y' , так что и y , и y' можно придать в отдельности их вариации, какие нам угодно.

ПОЯСНЕНИЕ

5. Это представление о вариациях, которое само по себе может казаться как очень неопределенным, так и бесплодным, становится немного яснее, если подробнее изложить, откуда оно берет начало и как к нему пришли. К этому прежде всего приводит вопрос о нахождении кривых, обладающих некоторым свойством максимума или минимума, или, чтобы избежать неясности, связанной с рассмотрением вопроса в общем виде, рассмотрим проблему нахождения кривой, по которой тяжелое тело, падающее из данной точки, наиболее быстро попадает в другую данную точку. Тогда из самой природы максимумов и минимумов ясно, что эта кривая должна быть такова, что если ее заменить другой кривой, бесконечно мало отличающейся от нее, то время падения при этом должно быть почти тем же. Решение, следовательно, должно быть такое, что если искомую кривую рассматривать как заданную, а затем выполнить соответствующее вычисление для бесконечно мало отличающейся от нее кривой и найти разность времен падения, то, положив эту разность равной нулю, мы выявим природу искомой кривой. А кривые, бесконечно мало отличающиеся от искомой, удобнее всего рассматривать как получающиеся при увеличении или уменьшении ординат отдельных точек искомой кривой на бесконечно малые значения, то есть при *вариации* ординат. Обыкновенно достаточно осуществить такую вариацию для одной единственной ординаты, но ничто не мешает приписать такие вариации нескольким или всем ординатам, поскольку всегда должны прийти к одному и тому же решению. Но при этом не только в большей мере выявляется сила метода, но получают также более полные решения вопросов такого рода, а отсюда можно извлечь вопросы, связанные с другими условиями. Поэтому представляется совершенно необходимым изложить предмет вариационного исчисления в наиболее общем виде, какой для него возможен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2

6. При заданном соотношении между двумя переменными количествами мы говорим, что оба переменных варьируются, если к каждому из них прибавляется бесконечно малое приращение; отсюда ясно, как надо понимать то, что каждому из переменных приписывается своя вариация.

¹⁾ variatio enim afficit eundem valorem ipsius y , eidem valori ipsius x convenientem, dum eius differentiale dy simul sequentem.

ОБЪЯСНЕНИЕ

7. Если, таким образом, задано какое-либо уравнение между переменными x и y , которое выражает их взаимную связь, то это соотношение согласно определению может варьироваться двояким способом, а именно, можно при неизменных значениях x менять одни только значения y или же при неизменных значениях y менять одни только значения x . Но ничто не мешает представить себе, что оба переменных получают свои вариации одновременно; это надо понимать так, что между этими вариациями нет никакой связи, и эта двойная вариация рассматривается точно так же, как одна вариация в первом определении. Итак, мы рассматриваем здесь вопрос вообще таким образом, что ни одна из вариаций не подчинена никакому закону и что вариации y никоим образом не зависят от вариаций x .

СЛЕДСТВИЕ 1

8. Стало быть, из случая, когда рассматривается двойная вариация, предыдущий случай получается как частный, а именно, когда вариации второй переменной полностью отбрасываются; отсюда ясно, что второе определение содержит в себе первое.

СЛЕДСТВИЕ 2

9. Отсюда становится яснее, каким образом данное соотношение между двумя переменными может варьироваться бесконечным числом способов, а также становится ясным, что, поскольку мы не считали эти вариации подчиненными какому-либо закону, мы получаем таким образом все возможные вариации данного соотношения.

ПОЯСНЕНИЕ 1

10. Вариации каждого переменного в отдельности дают уже все возможные вариации для данного соотношения между двумя переменными; поэтому может казаться, что излишне приспособить наш метод к двойной вариации. Но если природу вопроса и назначения метода рассматривать внимательнее, то мы поймем, что рассмотрение двойной вариации вовсе не является излишним. Яснее всего это можно проиллюстрировать геометрически следующим путем. Поскольку лучше всего изобразить соотношение между двумя переменными при помощи кривой, описанной на плоскости, то пусть будет AUM (рис. 1) эта кривая, определяемая уравнением между координатами $Ax = x$ и $Xy = y$, которая, следовательно, представляет заданное соотношение, и пусть некоторая другая кривая Aum , отличающаяся от этой кривой бесконечно мало, представляет варьированное соотношение. Каково бы ни было это соотношение, всегда можно рассматривать вопрос так, что данной абсциссе $Ax = x$ соответствует варьированная ордината Xv , так что вариация представляет собой небольшую частицу Yv . Такой способ

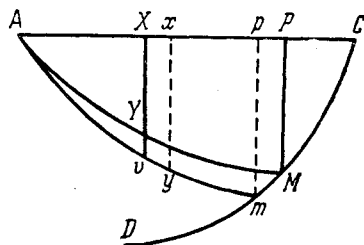


Рис. 1.

рассмотрения достаточен для большинства вопросов о максимумах или минимумах, где кривая AM должна варьироваться только в нескольких элементах. Но если вопрос поставлен таким образом, что среди всех кривых, которые проводятся из точки A к некоторой произвольно заданной кривой CD , требуется найти ту кривую AUM , которая обладает некоторым свойством максимума или минимума, тогда приходится исследовать это свойство также у какой-либо соседней кривой Aum , которая кончается в другой точке m линии CD , так что для конечной точки M искомой кривой надо считать, что получают вариацию как абсцисса AP , так и ордината PM и притом так, как это соответствует природе кривой CD . Но чтобы приспособить наш способ к такой вариации, требуемой последним элементом, необходимо, чтобы для всех промежуточных точек Y кривой AM самым общим образом варьировались как абсциссы $AX = x$, так и ординаты $XY = y$, и чтобы рассматривались вариации обеих координат Xx и $xy - XY$. Отсюда вполне уясняются характер и польза этих двойных вариаций.

ПОЯСНЕНИЕ 2

11. Подобно тому как [рассмотрение последней точки исследуемой кривой было для нас весьма поучительным, так же часто нам приходится иметь дело с вариацией первой точки. Например, если среди

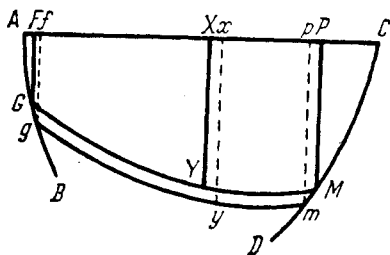


Рис. 2.

всех линий, которые можно провести от одной данной кривой AB (рис. 2) до другой данной кривой CD , надо найти ту, которая обладает некоторым свойством максимума или минимума, то тем более необходимо ввести такие вариации как абсцисс AX , так и ординат XY , которые не ограничены никаким законом, для того, чтобы можно было придать как начальной точке искомой кривой G , так и ее конечной точке M требуемые вариации. Хотя эта иллюстрация и взята из геометрии,

тем не менее ясно, что понятие вариации, требуемое здесь, имеет гораздо более широкое значение и приносит большую пользу в общем математическом анализе. Знаменитый Лагранж, остроумнейший туринский геометр, которому мы должны приписать первые рассмотрения вариационного исчисления¹⁾, перенес этот метод талантливейшим образом на разрывные линии, например, полигонального типа, где эти двойные вариации приносят очень большую пользу²⁾.

¹⁾ Cui primas speculationes de calculo variationum acceptas referre debemus.

²⁾ Лагранж опубликовал свой метод определения максимальных и минимальных значений интегралов в работе «Опыт новой теории определения максимумов и минимумов неопределенных интегральных выражений» (Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies), Miscellaneae Taurin. II₃ (1760/4), 1762, стр. 173-Oeuvres de Lagrange, т. 1, стр. 335. Но он изложил его уже 12 августа 1755 г. в письме к Эйлеру (Oeuvres de Lagrange, т. XIV, стр. 138), в котором писал, что Эйлер и сам уже раньше выразил желание иметь такого рода метод, «свободный от геометрических соображений и построений» (a resolutione geometrica et lineari liberam) в «Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes». Эйлер был чрезвычайно образован этой работой, всячески выражал свое восхищение поразитель-

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3

12. Мы говорим, что соотношение между тремя переменными, определенное двумя уравнениями, варьируется, если либо одно, либо два, либо все три переменные увеличиваются на бесконечно малые приращения, которые называются их вариациями.

ОБЪЯСНЕНИЕ

13. Поскольку задаются три переменных количества x , y и z , между которыми предполагаются заданными два уравнения, то можно по одному из них определить остальные два, так что, например, можно рассматривать y и z как функции x . Таким образом, определяется кривая, не лежащая в одной плоскости, если ее точкам обычным способом сопоставить координаты x , y и z . Если такая кривая сопровождается какой-либо близкой к ней, так что различие между ними бесконечно мало, то эта новая кривая является варьированной для предложенной и варьированное соотношение между переменными x , y , z надо рассматривать как выражающее природу этой кривой. Если, таким образом, сравнивать две близкие точки, из которых одна лежит на заданной кривой, а вторая на варьированной, то может случиться, что для варьированной, все три координаты будут иными, или только две, или же только одна, разности же координат между соответствующими точками основной кривой и варьированной представляют собою вариации; при этом нужно вопрос рассматривать в самом общем виде, так чтобы получить решительно все соседние кривые, как те, которые на всем участке отличаются от предложенной кривой, так и те, которые отличаются от нее только в некоторых частях, так что не исключаются здесь и разрывные кривые, лишь бы они были близки к исходной. Действительно, не следует ограничить варьированные кривые каким-либо законом непрерывности, с тем, чтобы в их состав входили все возможные кривые, бесконечно мало отличающиеся от основной.

СЛЕДСТВИЕ 1

14. Таким образом, с произвольной точкой предложенной или основной кривой сравнивается любая точка варьированной кривой, бесконечно мало относительно нее смещенная, и отсюда определяются вариации координат.

СЛЕДСТВИЕ 2

15. Поскольку по одному переменному x полностью определяются остальные два — y и z — и тем самым точка заданной кривой, то и вариации координат можно рассматривать как функции x , которые, однако, должны быть бесконечно малыми количествами.

ным остроумием Лагранжа (см. его письма от 6 сентября 1755 г. в L. Euleri Opera postuma 1, Petropoli 1862, стр. 555, а также в Oeuvres de Lagrange, т. XIV, стр. 144) и посвятил две работы (№ 296 и 297 по списку Энестрема) разъяснению и популяризации нового метода, которому он дал название «исчисления вариаций»: «Основы исчисления вариаций» (Elementa calculi variationum) и «Аналитическое изложение метода максимумов и минимумов» (Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum), Novi comment. acad. sc. Petrop. 10 (1764), 1766, стр. 51 и 94; также в Opera Omnia, ser. I, vol. 25. [Ф. Э.]

СЛЕДСТВИЕ 3

16. Таким образом, можно брать три какие угодно функции x , как-либо отличающиеся друг от друга, и после умножения на подходящие бесконечно малые множители они становятся пригодными для представления трех вариаций координат. Это же применимо к любым трем переменным, и тогда, когда они не относятся к геометрии.

СЛЕДСТВИЕ 4

17. Подобным образом, если дано соотношение только между двумя переменными, их вариации могут рассматриваться как функции одного из переменных, лишь бы они были бесконечно малы, или, что сводится к тому же, если они умножены на бесконечно малое количество.

ПОЯСНЕНИЕ 1

18. Геометрические рассуждения особенно удобны для пояснения таких рассуждений, которые в общем виде могут казаться слишком абстрактными и неопределенными. И случай трех переменных, соотношение между которыми дается двумя уравнениями, превосходно объясняется при помощи кривой, не расположенной в одной плоскости, причем указанные переменные рассматриваются как координаты. Если теперь рассматривается вопрос об определении среди этих кривых той, которая обладает некоторым свойством максимума или минимума, тогда необходимо, чтобы это самое свойство для всех кривых, бесконечно мало отстоящих от заданной, имело одно и то же значение, о чем необходимо судить по вариациям, должным образом вводимым в расчет. Какую же пользу нам даст максимальная общность в способе варьирования, можно усмотреть из того примера, когда вместо двух кривых AB и CD заданы две какие-либо поверхности, между которыми надо провести кривую, обладающую некоторым свойством максимума или минимума. Тогда уже приходится рассматривать вариации трех координат настолько общие, чтобы при перемещении начальной точки искомой кривой по поверхности AB вариации могли соответствовать этой поверхности и чтобы то же самое можно было бы сделать с конечной точкой на поверхности CD . Отсюда ясно, что в общем случае нужно ввести в расчет три вариации, с тем, чтобы можно было как начальную, так и конечную точку исследуемой кривой перемещать на граничных поверхностях, чем определяются соотношения между вариациями как на одном, так и на другом конце.

ПОЯСНЕНИЕ 2

19. Подобно тому, как мы здесь рассматривали три переменные, соотношение между которыми определяется двумя уравнениями, можно распространить вариационное исчисление также на случай четырех или большего числа переменных, если при этом соотношение между ними выражается столькими уравнениями, что по одному переменному определяются все остальные. Правда, в этом случае уже невозможно пользоваться для иллюстрации геометрией, ограниченной тремя измерениями, если только не пожелаем для этой цели привлечь время и рассматривать непрерывный поток, текущий от поверхности AB до поверхности CD

и постепенно изменяющийся с течением времени, так что надо указать и момент времени, когда та или иная струя в потоке, идущая от поверхности AB до поверхности CD , обладает некоторым свойством максимума или минимума. Если, кроме этих переменных, ввести еще и переменную скорость, то это дает возможность проиллюстрировать случай большего числа вариаций. Но прежде всего мы видим отсюда, что даже в том случае, когда все переменные считаются зависимыми от одного из них, метод исследования существенно отличается от того, когда рассматриваются только два переменных, потому что и в этом случае нужно считать, что вариации этих переменных совершенно не зависят друг от друга; действительно, из того, что между самими переменными устанавливается некоторое соотношение, не следует заключать, что их вариации ограничиваются каким-либо соотношением. Это видно, в частности, из вышерассмотренного случая, когда между двумя поверхностями AB и CD должна быть проведена кривая, обладающая некоторым свойством максимума или минимума: хотя она и определена таким образом, что по одной координате точки получаются остальные две, тем не менее варьированные кривые могут отклоняться от нее во все стороны, и координаты отдельных точек получают вариации, никоим образом друг от друга не зависящие. Исключения составляют только начальная и конечная точки, которые могут двигаться на заданных поверхностях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4

20. Мы говорим, что соотношение между тремя переменными, определенное одним уравнением, так что одно из этих переменных равняется функции остальных двух, варьируется, если одно или все три переменные получают бесконечно малые приращения, которые называются их вариациями.

ОБЪЯСНЕНИЕ

21. Так как в этом случае соотношение между тремя переменными определяется одним уравнением, два из них могут быть взяты произвольно, а третье определяется по ним, так что оно может рассматриваться как функция двух переменных. Этим соотношением, следовательно, определяется не кривая, если мы хотим прибегнуть к геометрическим фигурам, а какая-то целая поверхность, природа которой выражается уравнением между тремя координатами; отсюда ясно, что это соотношение, будучи проварьировано, представляет другую поверхность, бесконечно мало отличающуюся от заданной. Вариация эта должна быть настолько общей, чтобы ее можно было ограничить любой частью поверхности, либо же распространить на всю поверхность. Поскольку с любой точкой данной поверхности сравнивается другая точка варьированной поверхности, очень близкая к первой точке, то может случиться, что варьируется не только одна из трех координат, но две или даже все три, следовательно, чтобы исследование вести в самом общем виде, целесообразно приписывать каждой отдельной координате свою вариацию; эти вариации должны рассматриваться как функции двух переменных, поскольку любая точка поверхности определяется двумя данными.

СЛЕДСТВИЕ 1

22. Если, таким образом, эти три переменные или координаты суть x , y и z , то какие бы ни придавать значения двум из них, x и y , получается определенное значение z . Точно так же вариацию z надо считать зависящей и от x ; и от y , так что, если изменяется или одно из этих количеств или оба, то должны получать разные вариации z .

СЛЕДСТВИЕ 2

23. Те замечания, которые здесь сделаны относительно вариации z , относятся в равной мере и к остальным двум переменным, так что вариации каждого из них также следует рассматривать как функции двух переменных. Действительно, поскольку задано уравнение между x , y и z , то безразлично, какие из них считать независимыми переменными: ведь функция от y и z в силу этого уравнения может рассматриваться также как функция от x и y , если, конечно вместо z подставить его выражение через x и y .

ПОЯСНЕНИЕ 1

24. Таким определением вариаций нужно будет пользоваться, когда ищется поверхность, обладающая некоторым свойством максимума или минимума: вычисление нужно вести таким образом, чтобы рассматриваемое свойство имело одинаковое значение для искомой поверхности и для близких, варьированных поверхностей. Как в случае кривых, обладающих свойствами максимума или минимума, должны быть заданы условия для обоих концов, а именно, чтобы они лежали или в заданных точках, или на заданных поверхностях — точно так же в данном случае нужно задать условие, чтобы или была задана граница поверхности, или же чтобы была задана некоторая другая поверхность, на которой эта граница лежит. Чтобы иметь возможность учитывать это последнее условие, необходимо придавать вариации всем трем координатам самого общего вида, никоим образом не зависящие друг от друга, с тем, чтобы иметь возможность приспособиться к той поверхности, на которой лежит граница искомой поверхности. Здесь нужно признать, что к настоящему времени метод максимумов и минимумов едва ли достаточно разработан для таких исследований и что здесь появляются такие трудности, для преодоления которых требуется, по-видимому, значительно большее развитие математического анализа. Именно поэтому нужно тем более стремиться к тому, чтобы основы этого метода, которые входят в состав вариационного исчисления, были твердо установлены и вместе с тем ясно и отчетливо изложены

ПОЯСНЕНИЕ 2

25. Считаю, что вряд ли нужно подчеркнуть, что вариационное исчисление может быть применено в случае числа переменных большего трех, хотя в этом случае уже невозможно геометрическое объяснение; вообще надо считать, что анализ не ограничивается, в отличие от геометрии, определенным числом измерений. Когда же рассматриваются несколько переменных, то прежде всего нужно выяснить, выражается ли соотношение между ними одним уравнением, или несколькими. Их может быть максимум столько, сколько составляет число этих пере-

менных минус единица; в последнем случае все эти переменные можно рассматривать как функции одного из них. Если же соотношение определяется меньшим числом уравнений, то каждое переменное будет функцией двух или больше переменных, и вариации этих переменных в любом случае должны рассматриваться как функции такого же числа переменных. В соответствии с этим мы хотим изложить это исчисление в самом общем виде.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5

26. Вариационное исчисление есть метод нахождения вариации, которую принимает выражение, любым способом составленное из нескольких переменных, когда варьируются все или некоторые из этих переменных.

ОБЪЯСНЕНИЕ

27. В этом определении вовсе не идет речь о соотношении, которое мы до сих пор предполагали между переменными. Дело в том, что это исчисление как раз для того и служит, чтобы установить это соотношение, при котором будет выполнено требуемое свойство максимума или минимума, и поскольку сначала это соотношение неизвестно, оно и не входит в расчет, так что вопрос приходится трактовать так, как если бы между переменными не существовало никакого соотношения. Следовательно, исчисление должно быть построено таким образом, чтобы оно давало нам правила, как найти вариации любых выражений, составленных из входящих в расчет переменных, по вариациям этих переменных. Лишь тогда, когда такие вариации найдены, появляется возможность установить, какое соотношение должно существовать между переменными, чтобы эта найденная вариация была либо равна нулю, как это требуется при определении максимумов или минимумов, либо была составлена некоторым определенным образом, как этого требует характер вопроса. Таким образом, если даны правила этого исчисления, то ничто уже не мешает трактовать такие вопросы, в которых заранее задано некоторое соотношение между переменными и требуется найти вариацию выражения, составленного из этих переменных, получаемую при их варьировании. Отсюда ясно, что данное исчисление может быть применено в вопросах самого различного рода.

СЛЕДСТВИЕ 1

28. Итак, вопросы, которые подлежат исследованию в этом исчислении, сводятся к тому, что, если задано какое угодно выражение, каким-либо образом составленное из любого числа переменных, требуется найти его приращение, при условии, что отдельные переменные получают вариации.

СЛЕДСТВИЕ 2

29. Таким образом, вариационное исчисление очень похоже на дифференциальное исчисление, так как в обоих случаях к переменным прибавляются бесконечно малые приращения. Поскольку мы, однако, уже заметили, что вариации отличаются от дифференциалов, и поскольку они могут встречаться одновременно с ними, то нужно иметь в виду большое различие между этими исчислениями.

ПОЯСНЕНИЕ

30. Из замечаний, сделанных выше, это различие становится вполне ясным, ибо когда идет речь о кривой, которая сравнивается с очень близкой к ней, то при помощи дифференциалов мы переходим от одной точки кривой к другим точкам той же кривой, в то время как, если перейти от этой кривой к другой, ей очень близкой, и если этот переход является бесконечно малым, то он осуществляется при помощи вариаций. То же самое имеет место, если рассматривать две очень близкие поверхности: дифференциалы относятся тогда к одной и той же поверхности, а при помощи вариаций переходят от одной поверхности к другой. То же самое относится к случаю, когда вопрос рассматривается аналитически без всякого отношения к геометрическим фигурам: всегда нужно явным образом различать вариации переменных количеств от их дифференциалов. Поэтому целесообразно обозначать вариации другим знаком.

УСЛОВНОЕ ОБОЗНАЧЕНИЕ

31. Будем обозначать в дальнейшем вариацию любого переменного количества буквой δ , предпосланной этому количеству, так что δx , δy , δz обозначают вариации величин x , y , z , а если V — выражение, каким-либо образом составленное из этих количеств, то его вариация будет обозначаться через δV .

СЛЕДСТВИЕ 1

32. Итак δx обозначает то бесконечно малое приращение, которое получает количество x , чтобы получилось его варьированное значение; отсюда явствует, что варьированным значением x будет $x + \delta x$.

СЛЕДСТВИЕ 2

33. В соответствии с этим, если в выражении V , составленном из переменных x , y и z , вместо них написать их варьированные значения

$$x + \delta x, \quad y + \delta y \quad \text{и} \quad z + \delta z,$$

а затем из полученного таким образом значения V вычесть первоначальное значение V , то остаток будет вариация δV .

СЛЕДСТВИЕ 3

34. До сих пор все происходит точно так, как и в дифференциальном исчислении, и если V — какая угодно функция переменных x , y и z , то если взять обычным способом ее дифференциал, а затем только вместо d написать δ , получится ее вариация δV .

ПОЯСНЕНИЕ 1

35. Каждый раз, когда V — какая угодно функция переменных x , y , z , ее вариация получается по тем же правилам, как и дифференциал, и поэтому может показаться, что вариационное исчисление полностью совпадает с дифференциальным исчислением, поскольку одно только изменение обозначения не меняет сущности дела. Однако надо

учесть, что не все величины, вариации которых требуется [вычислять], могут рассматриваться как функции; именно поэтому я воспользовался в определении словом *выражение*, которому я придаю гораздо более широкий смысл. Дело в том, что мы не можем обращаться к соотношению между переменными, поскольку оно неизвестно, и поэтому приходится иметь дело с выражениями или формулами, содержащими производные и интегралы от переменных. Они, следовательно, не могут рассматриваться как обычные функции переменных, а варьирование выражений, содержащих производные и интегралы, требует особых правил. Следовательно, весь вопрос сводится к тому, чтобы найти вариации выражений такого рода, в связи с чем наше изложение делится на две части.

ПОЯСНЕНИЕ 2

36. В нижеследующем изложении очень большую роль играет число переменных: когда их больше двух, то почти не видно, как решить задачу. В самом деле, если ввести несколько переменных, то даже дифференциалы приходится рассматривать существенно иначе, а именно большей частью сравнивают между собою только два дифференциала, как будто остальные переменные сохраняются постоянными. Точно так же надо поступать в случае вариаций, но при этом возникают такие затруднения, что едва видно, как их можно преодолеть. Конечно, прежде всего нужно самым тщательным образом изложить основы этого исчисления, так чтобы из внутренней сущности вопроса получились правила исчисления¹⁾, причем и здесь большей частью встречаются значительные трудности. Первоначально же исчисление это разрабатывалось применительно только к двум переменным и поэтому обычно его так и излагали. Я постараюсь объяснить, как [в этом случае] находятся вариации выражений, содержащих как производные, так и интегралы, а уж после этого, если эти рассмотрения прольют свет [на наш предмет]²⁾, перейду к трем или большему числу переменных.

1) ut ex intima rei natura calculi praecepta repetantur.

2) tum vero si quid lucis ex ipsa hac tractatione affulserit.



ГЛАВА II

**О ВАРИАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ,
СОДЕРЖАЩИХ ДВА ПЕРЕМЕННЫХ**

ТЕОРЕМА 1

37. *Вариация дифференциала всегда равняется дифференциалу вариации, т. е. $\delta dV = d\delta V$, каково бы ни было количество V , которое, увеличиваясь на дифференциалы, получает также вариации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Переменное количество V может рассматриваться как ордината некоторой кривой, которая [ордината] благодаря дифференциалам продвигается по той же кривой, благодаря же вариациям переходит на другую кривую, очень близкую к первой. Когда мы переходим по той же кривой к близкой точке, то получается значение $V + dV$, и пусть оно равно V' , так что $dV = V' - V$, откуда вариация величины dV равна δdV , т. е. $\delta V' - \delta V$. С другой стороны, $\delta V'$ есть близкое значение, в которое переходит δV благодаря прибавлению к нему дифференциала, так что $\delta V' = \delta V + d\delta V$ или $\delta V' - \delta V = d\delta V$, откуда очевидно, что $\delta dV = d\delta V$, то есть вариация дифференциала равна дифференциалу вариации, как утверждает теорема.

СЛЕДСТВИЕ 1

38. На этом основании вариация второго дифференциала определяется так: $\delta d^2V = d\delta dV$; поскольку далее $\delta dV = d\delta V$, то получается равенство между следующими выражениями:

$$\delta d^2V = d\delta dV = d^2\delta V.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

39. Таким же образом получается для дифференциалов третьего порядка

$$\delta d^3V = d\delta d^2V = d^2\delta dV = d^3\delta V,$$

а для дифференциалов четвертого порядка вариация получается так:

$$\delta d^4V = d\delta d^3V = d^2\delta d^2V = d^3\delta dV = d^4\delta V,$$

и подобным образом — для более высоких порядков.

СЛЕДСТВИЕ 3

40. Итак, если требуется вариация дифференциала любого порядка, то можно знак вариации δ вставлять где угодно среди знаков дифференцирования d ; если же поставить его в самый конец, то это значит, что вариация дифференциала любого порядка равняется дифференциалу того же порядка от вариации.

СЛЕДСТВИЕ 4

41. Поскольку, таким образом, $\delta d^mV = d^m\delta V$, то дело сводится к тому, чтобы определить дифференциал произвольного порядка от вариации величины V , т. е. от δV ; и такое приведение в значительной мере обуславливает эффективность этого нового исчисления¹⁾.

ПОЯСНЕНИЕ 1

42. Доказательство основывается главным образом на том, что δV переходит в $\delta V'$, если количество V увеличивается на свой дифференциал, что само собою вытекает из природы дифференциалов; но полезно иллюстрировать это также геометрически. Если имеем на некоторой кривой EF (рис. 3) координаты $AX = x$ и $XU = y$, и если продвинуться на бесконечно малый промежуток UY' , то имеем в дифференциалах

$$AX' = x + dx \quad \text{и} \quad X'Y' = y + dy,$$

откуда

$$dx = AX' - AX \quad \text{и} \quad dy = X'Y' - XY.$$

Теперь перейдем к другой кривой ef , близкой к предыдущей, так что точки y и y' новой кривой сравниваются с точками Y и Y' старой кривой, из которых они получаются путем вариации; беря соответствующим образом координаты, имеем

$$Ax = x + \delta x \quad \text{и} \quad xy = y + \delta y,$$

поэтому

$$\delta x = Ax - AX \quad \text{и} \quad \delta y = xy - XY,$$

так что

$$Ax' = x + dx + \delta(x + dx) \quad \text{и} \quad x'y' = y + dy + \delta(y + dy),$$

поскольку мы из точки Y' путем вариации перешли к точке y' . Но к той же точке y' мы переходим также из точки y путем дифференциро-

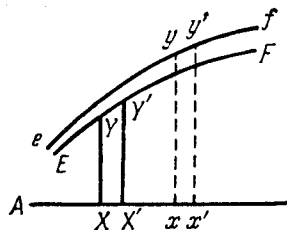


Рис. 3.

¹⁾ atque in hac reductione praecipua vis hujus novi calculi est constituenda.

вания, так что

$$Ax' = x + \delta x + d(x + \delta x) \quad \text{и} \quad x'y' = y + \delta y + d(y + \delta y).$$

Сравнивая эти значения с предыдущими, имеем

$$x + dx + \delta x + \delta dx = x + \delta x + dx + d\delta x$$

и

$$y + dy + \delta y + \delta dy = y + \delta y + dy + d\delta y,$$

и отсюда, очевидно, следует, что

$$\delta dx = d\delta x \quad \text{и} \quad \delta dy = d\delta y.$$

Если внимательнее рассмотреть принцип, на котором доказательство основывается, то все сводится к тому, что, если переменное количество изменить вначале дифференцированием, а затем вариацией, то это то же самое, как если, наоборот, произвести вначале вариацию, а затем уже дифференцирование. Например, на фигуре мы из точки Y переходим вначале путем дифференцирования к точке Y' , а отсюда путем вариации к y' ; в обратном порядке, можно вначале перейти из точки Y путем вариации к точке y , а отсюда уже путем дифференцирования к точке y' , — к той же, что и раньше.

ПОЯСНЕНИЕ 2

43. Данная теорема имеет очень большую общность¹⁾ и не ограничивается случаем двух переменных. Действительно, она сохраняет силу независимо от того, сколько переменных входят в расчет, поскольку в доказательстве рассматривалось только то переменное, для которого образуется дифференциал и вариация, а остальные переменные не принимались во внимание. Чтобы не оставалось здесь места для каких-либо сомнений, рассмотрим произвольную поверхность, какая угодно точка которой z (рис. 4) определяется тремя координатами

$$AX = x, \quad XY = y \quad \text{и} \quad YZ = z.$$

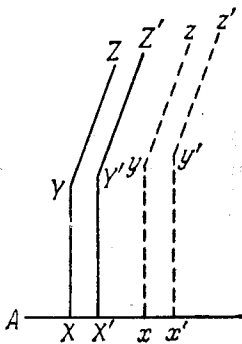


Рис. 4.

Если от этой точки перейти к близкой точке Z' в той же поверхности, то ее координаты увеличиваются на дифференциалы. Если же рассматривать какую-либо другую, близкую поверхность и сравнивать ее точки z и z' с точками Z и Z' первоначальной поверхности, то переход осуществляется путем вариации. После этого очевидно, что можно перейти к точке z' двояким способом, а именно путем вариации, исходя из точки Z' , или же путем дифференцирования, исходя из точки z , так что

$$Ax' = AX' + \delta AX' = Ax + d(Ax),$$

$$x'y' = X'Y' + \delta X'Y' = xy + d(xy),$$

$$y'z' = Y'Z' + \delta Y'Z' = yz + d(yz),$$

¹⁾ latissime patet.

что относится также ко всем другим переменным, связанным с этими точками. Отсюда совершенно ясно, что

$$\delta dx = d\delta x, \quad \delta dy = d\delta y, \quad \delta dz = d\delta z.$$

ПОЯСНЕНИЕ 3

44. Важно вспомнить, что в случае дифференцирования более высокого порядка можно вставить знак вариации δ где угодно среди знаков дифференцирования d . Отсюда также понятно, что эта переместительность имеет место и тогда, если знак вариации δ , равно как знак дифференцирования d , встречается несколько раз; это замечание, быть может, окажется полезным при других рассмотрениях. Но в настоящей работе повторение вариации δ нигде не рассматривается, так как от данной линии или поверхности мы переходим только к одной, ей очень близкой. Действительно, хотя это понимается в самом общем виде, так что при этом подразумеваются все бесконечно близкие линии или поверхности, но рассматривается только одна, а после того, что мы от главной кривой перешли к соседней, не будет рассматриваться никакой новый переход. Таким образом, такие рассуждения, для которых требуются вариации вариаций, полностью исключаются. Но, наоборот, необходимо допускать дифференциалы любого порядка от вариаций, а так как в производных, имеющих вместе с тем конечные значения, рассматриваются только отношение дифференциалов, то, если имеется два переменных x и y и мы положим, как обычно, для приведения к конечному виду

$$dy = p dx; \quad dp = q dx, \quad dq = r dx \quad \text{и т. д.},$$

необходимо полностью определить вариации количеств p , q , r и т. д.

ЗАДАЧА 1

45. Если даны вариации δx и δy переменных x и y , найти вариацию производной $p = \frac{dy}{dx}$.

РЕШЕНИЕ

Поскольку

$$\delta dy = d\delta y \quad \text{и} \quad \delta dx = d\delta x,$$

искомая вариация δp находится при помощи известных правил дифференцирования, причём только вместо знака дифференцирования d пишется знак вариации δ , так что получаем

$$\delta p = \frac{dx \delta dy - dy \delta dx}{dx^2},$$

или, посредством перестановки, [допустимость] которой была доказана раньше,

$$\delta p = \frac{dx \delta dy - dy \delta dx}{dx^2},$$

где δx и δy — вариации величин x и y , так что $\delta x + d\delta x$ и $\delta y + d\delta y$ — вариации величин $x + dx$ и $y + dy$. Как мы уже выше заметили,

$$d\delta x = \delta(x + dx) - \delta x \quad \text{и} \quad d\delta y = \delta(y + dy) - \delta y.$$

То же получается из основных наших положений, потому что варьированное значение $p + \delta p$ возникает, если вместо x и y подставить их варьированные значения $x + \delta x$ и $y + \delta y$, так что

$$p + \delta p = \frac{d(y + \delta y)}{d(x + \delta x)} = \frac{dy + d\delta y}{dx + d\delta x},$$

а отсюда, так как $p = \frac{dy}{dx}$, получаем

$$dp = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{dy + d\delta y}{dx + d\delta x} - \frac{dy}{dx} = \frac{dx d\delta y - dy d\delta x}{dx^2},$$

поскольку в знаменателе величина $dx d\delta x$ исчезает по сравнению с dx^2 .

СЛЕДСТВИЕ 1

46. Если продвигаться посредством дифференциалов и обозначить непрерывно увеличиваемые x и y через x' , x'' , x''' и т. д., y' , y'' , y''' и т. д., то

$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy$$

и

$$d\delta x = \delta x' - \delta x, \quad d\delta y = \delta y' - \delta y,$$

откуда

$$\delta p = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{dx(\delta y' - \delta y) - dy(\delta x' - \delta x)}{dx^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

47. Так как вариации обоих переменных x и y друг от друга совершенно не зависят, а полностью предоставлены нашему произволу, то если не приписывать количеству x никакой вариации, так что

$$\delta x = 0 \quad \text{и} \quad \delta x' = 0,$$

то

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} = \frac{\delta y' - \delta y}{dx}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

48. Если, кроме того, приписать только одному значению переменного y вариацию δy , так что $\delta y' = 0$, то $\delta p = -\frac{\delta y}{dx}$. Такое предположение вовсе не противоречит сущности дела, так как допустимо, чтобы близкая кривая отличалась от основной только в одной точке.

ПОЯСНЕНИЕ

49. Обыкновенно при решении изопериметрических и других подобных проблем варьированная кривая должна быть выбрана таким образом, чтобы она отклонялась от исходной кривой только в каком-нибудь одном элементе¹⁾. Итак, если ищется кривая EF (рис. 5), обла-

¹⁾ См. примечание к § 55 (стр. 324).

дающая некоторым свойством максимума или минимума, то обычно переносят только одну точку Y в близкое положение y , так что варьированная кривая $EMyY'F$ только в очень малом интервале MY' отличается от искомой. Тогда, полагая

$$AX = x \quad \text{и} \quad XY = y,$$

имеем для варьированной кривой

$$Ax = x + \delta x \quad \text{и} \quad xy = y + \delta y$$

или

$$\delta x = Ax - AX \quad \text{и} \quad \delta y = xy - XY.$$

Для остальных же точек, к которым мы приходим при помощи дифференциалов, имеем везде

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta x'' = 0, \quad \delta y'' = 0 \quad \text{и т. д.}$$

и то же самое имеет место для предшествующих. Поскольку для удобства расчета следует полагать вариацию $Xx = \delta x$ равной нулю, так что вся вариация сводится к одному элементу δy ,

то и в этом случае будем иметь $\delta p = -\frac{\delta y}{dx}$,

и эта единственная вариация достаточна для того, чтобы решить те задачи этого рода, которые до сих пор рассматривались. Но если, как мы уже говорили, дальше обобщить эти задачи, а именно, когда требуется определить начало и конец кривой, тогда необходимо вычисление вариаций произведения наиболее общим способом, и приписать всем точкам кривой произвольные вариации их координат. Это особенно необходимо, если мы хотим применить эти исследования к не непрерывным кривым.

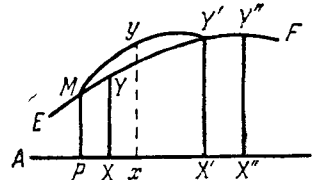


Рис. 5.

ЗАДАЧА 2

50. Если даны два переменных x и y и их вариации δx и δy и если положено $dy = p dx$ и $dp = q dx$, найти вариацию величины q , то есть значения δq .

РЕШЕНИЕ

Поскольку $q = \frac{dp}{dx}$, имеем для варьированного значения

$$q + \delta q = \frac{d(p + \delta p)}{d(x + \delta x)} = \frac{dp + d\delta p}{dx + d\delta x},$$

откуда после вычитания количества $q = \frac{dp}{dx}$ получим

$$\delta q = \frac{dx d\delta p - dp d\delta x}{dx^2}.$$

Эта вариация получается также путем дифференцирования формулы $q = \frac{dp}{dx}$, если обычным способом выполнить дифференцирование, но написать вместо знака дифференциала d знак вариации δ ; при этом надо помнить, что

$$\delta dx = d\delta x \quad \text{и} \quad \delta dp = d\delta p.$$

Выше мы, однако, нашли, что при $p = \frac{dy}{dx}$ имеем

$$\delta p = \frac{dx d\delta y - dy d\delta x}{dx^2},$$

откуда обычным дифференцированием получаем значение $d\delta p$, то есть дифференциал δp .

СЛЕДСТВИЕ 1

51. Поскольку $\frac{dy}{dx} = p$ и $\frac{dp}{dx} = q$, имеем сперва

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} - \frac{p d\delta x}{dx}$$

и соответственно

$$\delta q = \frac{d\delta p}{dx} - \frac{q d\delta x}{dx}.$$

Для будущего применения предпочтительно оставить здесь выражение $d\delta p$ и не вводить его из предыдущей формулы.

СЛЕДСТВИЕ 2

52. Так как первое из вышестоящих уравнений при дифференцировании дает

$$d\delta p = \frac{d^2\delta y}{dx} - \frac{d^2x d\delta y}{dx^2} - \frac{p d^2\delta x}{dx} - q d\delta x + \frac{pd^2x d\delta x}{dx^2},$$

то получаем после подстановки

$$\delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2} - \frac{d^2x d\delta y}{dx^3} - \frac{p d^2\delta x}{dx^2} - \frac{2q d\delta x}{dx} + \frac{p d^2x d\delta x}{dx^3}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

53. Если одному только переменному y придаются вариации, так что величины δx и все отсюда выведенные величины исчезают, имеем

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} \quad \text{и} \quad \delta q = \frac{d\delta p}{dx^2} = \frac{d^2\delta y}{dx^2} - \frac{d^2x d\delta y}{dx^3},$$

а если также рассматривать дифференциал dx как постоянный, получим, что $\delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2}$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

54. Чтобы все это лучше понять, рассмотрим на кривой EF (рис. 5, стр. 321), в согласии с соотношением между переменными $AX = x$ и $XY = y$, несколько точек Y, Y', Y'' и т. д., все время продвигаясь, прибавляя дифференциалы, так что

$$\begin{aligned} AX &= x; & AX' &= x + dx; & AX'' &= x + 2 dx + d^2x; \\ & & AX''' &= x + 3 dx + 3 d^2x + d^3x, \\ XY &= y; & X'Y' &= y + dy; & X''Y'' &= y + 2 dy + d^2y; \\ & & X'''Y''' &= y + 3 dy + 3 d^2y + d^3y, \end{aligned}$$

и эти обозначения для дифференциалов любого порядка сокращенно представим так:

$$\begin{aligned} AX &= x; & AX' &= x'; & AX'' &= x''; & AX''' &= x''' \text{ и т. д.} \\ XY &= y; & X'Y' &= y'; & X''Y'' &= y''; & X'''Y''' &= y''' \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Эти величины получают вариации, никоим образом друг от друга не зависящие, так что

$$\begin{aligned} \delta x, \delta x', \delta x'', \delta x''' \text{ и т. д.} \\ \delta y, \delta y', \delta y'', \delta y''' \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

должны считаться зависящими от нашего произвола, но известными. После этого дифференциалы любого порядка от вариаций представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} d\delta x &= \delta x' - \delta x, & d^2\delta x &= \delta x'' - 2\delta x' + \delta x; & d^3\delta x &= \delta x''' - 3\delta x'' + 3\delta x' - \delta x, \\ d\delta y &= \delta y' - \delta y; & d^2\delta y &= \delta y'' - 2\delta y' + \delta y; & d^3\delta y &= \delta y''' - 3\delta y'' + 3\delta y' - \delta y. \end{aligned}$$

Если мы, однако, хотим варьировать только одну точку кривой, а именно Y , то будет

$$\begin{aligned} d\delta x &= -\delta x; & d^2\delta x &= \delta x; & d^3\delta x &= -\delta x \text{ и т. д.} \\ d\delta y &= -\delta y; & d^2\delta y &= \delta y; & d^3\delta y &= -\delta y \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

и отсюда

$$\delta p = -\frac{\delta y}{dx} + \frac{p \delta x}{dx}$$

и

$$\delta q = \frac{\delta y}{dx^2} + \frac{d^2x \delta y}{dx^3} - \frac{p \delta x}{dx^2} + \frac{2q \delta x}{dx} - \frac{p d^2x \delta x}{dx^3},$$

откуда после отбрасывания членов, исчезающе малых по сравнению с остальными, получаем

$$\delta q = \delta y \cdot \frac{1}{dx^2} - \delta x \cdot \frac{p}{dx^2}.$$

Наконец, если придать вариацию только одной ординате $XY = y$, то имеем

$$\delta p = -\frac{1}{dx} \delta y \quad \text{и} \quad \delta q = \frac{1}{dx^2} \delta y.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

55. Отсюда ясно, что если кривую варьировать только в одной точке, то получаются значительные отклонения от правил дифференцирования, поскольку тогда высшие дифференциалы вариации не исчезают по сравнению с низшими, а могут иметь одно и то же значение; кроме того, вариации количеств p и q возрастают до бесконечности, если бесконечно малые δx и δy считать того же порядка, что и дифференциалы dx и dy . Отсюда следует, что в этом исчислении надо быть настороже, чтобы не допустить ошибок, так как правила исчисления опираются на закон непрерывности, согласно которому кривые линии описываются непрерывным движением точки так, чтобы нигде не получался скачок кривизны. Если, однако, менять положение только одной точки, переходя от Y (рис. 5, стр. 321) к y , так что все элементы, кроме My и yY , остаются неварьированными, то этим, очевидно, вводится весьма большая

нерегулярность кривизны, вследствие чего обычные правила исчисления уже не могут быть применены. Для того чтобы избежать этого неудобства, лучшим средством является придавать отдельным точкам кривой только вариации, удовлетворяющие некоторому закону непрерывности, и не допускать нерегулярностей в выкладках прежде, чем не будут выполнены все дифференцирования и интегрирования; тем самым мы в нашем исчислении по крайней мере сохраняем вид непрерывности. Хотя, следовательно, дифференциалы вариаций

$$d\delta y, d^2\delta y, d^3\delta y \text{ и т. д.,}$$

а также

$$d\delta x, d^2\delta x, d^3\delta x \text{ и т. д.}$$

при сделанном допущении¹⁾ сводятся к простым вариациям, то все же следует эти выражения сохранить в выкладках и приспособить к ним последующие интегрирования; то же самое относится к операциям, которые в свое время мне нужно было ввести при рассмотрении вопроса о нахождении кривых, обладающих свойствами максимума или минимума²⁾.

ЗАДАЧА 3

56. Если для двух переменных x и y даны вариации δx и δy , найти вариации отношений дифференциалов любого порядка.

РЕШЕНИЕ

Вопрос сводится к тому, чтобы, если положить подряд

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx, \quad dr = s dx \text{ и т. д.,}$$

найти вариации количеств p, q, r, s и т. д., так как к этим количествам сводятся все отношения дифференциалов любого порядка, имеющие конечные значения. Что касается первых двух из них, p и q , мы уже видели, что их вариации равны

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} - \frac{p d\delta x}{dx}, \quad \delta q = \frac{d\delta p}{dx} - \frac{q d\delta x}{dx}.$$

Поскольку, далее, имеем

$$r = \frac{dq}{dx}, \quad s = \frac{dr}{dx} \text{ и т. д.,}$$

мы получаем их вариации подобным же образом при помощи правил дифференцирования:

$$\delta r = \frac{d\delta q}{dx} - \frac{r d\delta x}{dx}; \quad \delta s = \frac{d\delta r}{dx} - \frac{s d\delta x}{dx} \text{ и т. д.,}$$

где при желании можно подставить вместо $d\delta p, d\delta q, d\delta r$ и т. д. значения вариаций $\delta p, \delta q, \delta r$ и т. д., найденные выше. Но это не приводит к более простым формулам и, кроме того, как видно будет в дальнейшем, это и не нужно, поскольку указанный вид этих выражений удобнее всего для всех преобразований, какие понадобятся.

¹⁾ Эйлер имеет здесь в виду предположение, что кривая варьируется только в одной точке.

²⁾ См. «Methodus inveniendi lineas curvas...», гл. II, §§ 1, 21, 56; см. прим. к § 11. [Ф. Э.]

СЛЕДСТВИЕ 1

57. Если вариации придаются только переменному y , так что при неизменных абсциссах x только ординаты y возрастают на свои вариации, то получим:

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx}; \quad \delta q = \frac{d\delta p}{dx}; \quad \delta r = \frac{d\delta q}{dx}; \quad \delta s = \frac{d\delta r}{dx}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

58. Если, кроме того, считать равными между собой все приращения dx количества x , то есть положить элемент dx постоянным, то, подставляя дифференциалы из предыдущей формулы в последующую, получим

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx}; \quad \delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2}; \quad \delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3}; \quad \delta s = \frac{d^4\delta y}{dx^4} \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 3

59. Если вариации придаются только абсциссам x , так что вариация δy вместе со всеми производными исчезает, и если вместе с тем элемент dx принимается постоянным, то рассматриваемые вариации будут равны:

$$\delta p = -\frac{p d\delta x}{dx}; \quad \delta q = -\frac{p d^2\delta x}{dx^2} - \frac{2q d\delta x}{dx}, \quad \delta r = -\frac{p d^3\delta x}{dx^3} - \frac{3q d^2\delta x}{dx^2} - \frac{3r d\delta x}{dx},$$

$$\delta s = -\frac{p d^4\delta x}{dx^4} - \frac{4q d^3\delta x}{dx^3} - \frac{6r d^2\delta x}{dx^2} - \frac{4s d\delta x}{dx} \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 4

60. Итак, даже если в этом случае элемент dx принимается постоянным, все же будут существовать дифференциалы любого порядка вариации δx по причине того, что вариации x при последовательном переходе к x' , x'' и т. д. никоим образом не зависят от дифференциалов.

ПОЯСНЕНИЕ

61. Если нам угодно будет придавать вариации только переменному x , то лучше всего поменять местами переменные x и y и в соответствии с этим писать

$$dx = p dy, \quad dp = q dy, \quad dq = r dy \text{ и т. д.,}$$

чем устраняются дифференциалы. Это приводит к упрощению, так как, считая элемент dy постоянным, мы получим столь же простые формулы для вариаций величин p , q , r и т. д., что и в следствии 2. Впрочем, поскольку требуется приспособить исчисление ко всем случаям, всегда полезно придавать вариации обоим переменным, хотя тогда действительно получаются гораздо более сложные выражения, особенно при их развертывании. Но зато при дальнейшем углублении в наше исчисление выявляются такие преимущества, что в конечном счете выкладки едва ли становятся более трудоемкими и пространными. Итак, перейдем к более общим проблемам, относящимся к данной главе.

ЗАДАЧА 4

62. Если даны вариации двух переменных x и y , то есть δx и δy , найти вариацию любого конечного выражения V , образованного как из этих переменных, так и из их дифференциалов любого порядка.

РЕШЕНИЕ

Поскольку V является конечным количеством, то, полагая

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx, \quad dr = s dx \text{ и т. д.},$$

мы исключим дифференциалы из этого выражения, и V окажется функцией, образованной конечными количествами x , y , p , q , r , s и т. д. Какова бы ни была форма этого выражения, его дифференциал всегда имеет вид

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{ и т. д.}$$

Число членов этого выражения становится тем больше, чем выше порядок дифференциалов, входящих в V . Если требуется найти вариацию выражения V , то есть δV , то она получается, если вместо переменных x , y , p , q , r и т. д. подставить те же количества, увеличенные на свои вариации, и из полученного выражения вычесть количество V . Отсюда ясно, что мы находим вариацию обычным способом дифференцирования, заменяя лишь знак дифференциала d знаком вариации δ . Поэтому, поскольку выше мы уже записали дифференциал, немедленно находим искомую вариацию:

$$\delta V = M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + S \delta s + \text{ и т. д.}$$

А как найти вариации δp , δq , δr , δs и т. д. через вариации δx и δy , уже выше [§ 58] показано.

СЛЕДСТВИЕ 1

63. Если мы сюда подставим ранее найденные значения, то получим искомую вариацию в следующей форме:

$$\begin{aligned} \delta V = M \delta x + N \delta y + \frac{1}{dx} (P d\delta y + Q d\delta p + R d\delta q + S d\delta r + \text{ и т. д.}) \\ - \frac{d\delta x}{dx} (Pp + Qq + Rr + Ss + \text{ и т. д.}) \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

64. Если переменному x не придается никакая вариация, и сверх того элемент dx рассматривается как постоянный, то вариация предложенного выражения V получается в виде

$$\delta V = N \delta y + \frac{P d\delta y}{dx} + \frac{Q d^2 \delta y}{dx^2} + \frac{R d^3 \delta y}{dx^3} + \frac{S d^4 \delta y}{dx^4} + \text{ и т. д.}$$

ПОЯСНЕНИЕ

65. В этих формулах усматривается однородность в дифференциалах, если только относить δx и δy к числу дифференциалов; но иначе получится, если мы захотим в случае, когда варьируется только одна точка

кривой, подставить значения дифференциалов вариаций, найденные выше (§ 54), ибо при этом исключается переход к интегрированию, которое затем потребуется в этих формулах. Впрочем, ясно, каким образом нахождение вариаций приводится к обычному дифференцированию, поскольку вся разница заключается только в том, что вместо вариаций δp , δq , δr и т. д. подставляются вышеуказанные значения, которые в свою очередь находятся при помощи обычного дифференцирования. Целесообразно иллюстрировать эту операцию несколькими примерами, чтобы суть дела стала яснее.

ПРИМЕР 1

66. Найти вариацию выражения для подкасательной $\frac{y dx}{dy}$.

Так как $dy = p dx$, это выражение принимает вид $\frac{y}{p}$, так что его вариация равна $\frac{\delta y}{p} - \frac{y \delta p}{p^2}$; после подстановки вместо δp его значения получим

$$\frac{\delta y}{p} - \frac{y \delta p}{p^2} + \frac{y \delta p}{p^2} = \frac{dx}{dy} \delta y - \frac{y dx}{dy^2} \delta dy + \frac{y}{dy} \delta dx.$$

Последнее выражение получается также непосредственно дифференцированием предложенного выражения.

ПРИМЕР 2

67. Найти вариацию выражения для длины касательной

$$\frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}.$$

Положив $dy = p dx$, приводим это выражение к конечному виду $\frac{y}{p} \sqrt{1 + p^2}$, откуда получается искомая вариация

$$\frac{\delta y}{p} \sqrt{1 + p^2} - \frac{y \delta p}{p^2 \sqrt{1 + p^2}},$$

что преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} \delta y - \frac{y dx}{dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}} (dx \delta dy - dy \delta dx).$$

ПРИМЕР 3

68. Найти вариацию выражения для радиуса кривизны

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx d^2y}.$$

Полагая $dy = p dx$ и $dp = q dx$, приводим это выражение к виду $\frac{(1 + p^2)^{3/2}}{q}$, откуда получается вариация

$$\frac{3p \delta p}{q} \sqrt{1 + p^2} - \frac{\delta q}{q^2} (1 + p^2)^{3/2}.$$

На подстановке в это выражение ранее найденных значений, я не останавливаюсь.

ЗАДАЧА 5

69. Если заданы вариации двух переменных количеств x и y , т. е. δx и δy , найти вариацию любого выражения, составленного как из этих переменных, так и из их дифференциалов любого порядка, сколь угодно большого или бесконечно малого.

РЕШЕНИЕ

Полагая, как и до сих пор, $dy = p dx$, $dp = q dx$, $dq = r dx$ и т. д., мы всегда приведем наше выражение к виду $V dx^n$, где V — конечная функция количеств x , y , p , q , r и т. д., а показатель n положителен или отрицателен, и в первом случае это выражение бесконечно мало, во втором — бесконечно велико. Положим, что обычное дифференцирование дает

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{ и т. д.}$$

откуда получаем одновременно и вариацию V . Поскольку же вариация рассматриваемого выражения равняется

$$nV dx^{n-1} d\delta x + dx^n \delta V,$$

то мы получаем следующее выражение искомой вариации:

$$nV dx^{n-1} d\delta x + dx^n (M \delta x + N \delta p + P \delta q + Q \delta r + \text{ и т. д.}).$$

Сюда можно подставить вышенайденные значения

$$\begin{aligned} \delta p &= \frac{d\delta y - p d\delta x}{dx}; & \delta q &= \frac{d\delta p - q d\delta x}{dx}; \\ \delta r &= \frac{d\delta q - r d\delta x}{dx}; & \delta s &= \frac{d\delta r - s d\delta x}{dx} \end{aligned}$$

и т. д.

Эти выражения ясны и не требуют дальнейшего объяснения; вместе с этим данная глава полностью закончена.



ГЛАВА III

**О ВАРИАЦИИ ПРОСТЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ДВА ПЕРЕМЕННЫХ**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6

70. Я называю здесь интегральное выражение простым, если оно не содержит других интегралов, а операция интегрирования применяется всего один раз к дифференциальному выражению, содержащему, кроме двух переменных, какие-либо их дифференциалы.

СЛЕДСТВИЕ 1

71. Итак, если x и y — два переменных, то интегральное выражение $\int W$ будет простым, если выражение W , кроме этих переменных, содержит только их дифференциалы какого-либо порядка, но не включает в себя других интегральных выражений.

СЛЕДСТВИЕ 2

72. Если, следовательно, положим

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx \quad \text{и т. д.},$$

так что дифференциалы исключаются, то так как интеграция всегда применяется к дифференциальному выражению, то W всегда сведется к виду $V dx$, где V — функция количеств x, y, p, q и т. д.

СЛЕДСТВИЕ 3

73. Поскольку простое интегральное выражение будет вида $\int V dx$, где V — функция количеств x, y, p, q, r и т. д., то свойства этого выражения удобнее всего представить с помощью дифференциала под-интегральной функции, указав, что

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \quad \text{и т. д.}$$

ПОЯСНЕНИЕ

74. Я отличаю здесь простые интегральные выражения от сложных, в которых предполагается интегрирование таких дифференциальных выражений, которые в свою очередь содержат одно или несколько интегральных. Например, если буква s обозначает интеграл

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dx \sqrt{1 + p^2}$$

и если количество V , кроме переменных и их дифференциалов, содержит еще количество s , то интегральное выражение $\int V dx$ по праву считается сложным; его вариация потребует особых правил, которые будут изложены в дальнейшем. В данной главе я решил прежде всего изложить метод нахождения вариаций простых интегральных выражений.

ТЕОРЕМА 2

75. Вариация интегрального выражения $\int W$ всегда равна интегралу вариации дифференциального выражения, интеграл которого предложен, то есть

$$\delta \int W = \int \delta W.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Поскольку вариация представляет собой излишек, на который варьированное значение какого-либо количества превышает естественное, заменим заданное выражение $\int W$ его варьированным значением, которое получается, если увеличить количества x и y их вариациями δx и δy . А так как тогда количество W превращается в $W + \delta W$, то варьированное значение рассматриваемого выражения будет

$$\int (W + \delta W) = \int W + \int \delta W,$$

откуда вследствие того, что

$$\delta \int W = \int (W + \delta W) - \int W,$$

имеем

$$\delta \int W = \int \delta W.$$

Отсюда ясно, что вариация интеграла равняется интегралу вариации.

Это можно показать еще другим способом. Положим $\int W = w$, так что искомая вариация будет δw . После дифференцирования имеем $dw = W$ и, взяв теперь вариацию, получим

$$\delta dw = \delta W = d\delta w$$

вследствие того, что $\delta dw = d\delta w$. Теперь снова интегрируем уравнение $d\delta w = \delta W$, откуда

$$\delta w = \int \delta W = \delta \int W.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

76. Итак, если задать интегральное выражение $\int V dx$, то его вариация $\delta \int V dx$ будет

$$\int \delta(V dx) = \int (V \delta dx + dx \delta V),$$

откуда, поскольку $\delta dx = d\delta x$, следует, что

$$\delta \int V dx = \int V d\delta x + \int dx \delta V.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

77. Полагая $\delta x = \omega$, так что $d\delta x = d\omega$, мы можем, поскольку

$$\int V d\omega = V\omega - \int \omega dV,$$

уничтожить вариацию дифференциала dx в первом слагаемом, и получается

$$\delta \int V dx = V\delta x - \int dV \delta x + \int dx \delta V,$$

где первое слагаемое [справа] не содержит интегрирования.

ПОЯСНЕНИЕ

78. Выше мы показали [§ 37], что знак дифференцирования d можно переместить со знаком вариации δ , теперь же мы видим, что знак интегрирования \int можно переместить со знаком вариации δ , поскольку

$$\delta \int W = \int \delta W.$$

Это относится и к случаю повторных интегрирований, так что, если задано выражение $\iint W$, то его вариация может быть представлена следующими способами:

$$\delta \iint W = \iint \delta W = \iint \delta W.$$

Таким образом, вариация интегральных выражений сводится к вариации выражений, уже не содержащих никакого интегрирования, а для таких выражений соответствующие правила изложены нами выше.

ЗАДАЧА 6

79. Если заданы вариации двух переменных x и y , то есть δx и δy , и если положить

$$dy = p dx; \quad dp = q dx, \quad dq = r dx \quad \text{и т. д.},$$

требуется найти для какой угодно функции V переменных x, y, p, q, r и т. д. вариацию интеграла $\int V dx$.

РЕШЕНИЕ

Мы видели (§ 77), что вариация этого интеграла может быть выражена так:

$$\delta \int V dx = V \delta x - \int dV \delta x + \int dx \delta V.$$

Чтобы исключить вариацию δV заметим, что V есть функция количеств x, y, p, q, r и т. д., так что ее дифференциал равен

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{и т. д.}$$

Подобным же образом ее вариация выражается так:

$$\delta V = M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{и т. д.}$$

После подстановки получим искомую вариацию

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= V \delta x + \int dx (M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{и т. д.}) - \\ &\quad - \int \delta x (M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{и т. д.}). \end{aligned}$$

Члены, зависящие от M , взаимно уничтожаются, так что после собирания членов, содержащих соответственно N, P, Q, R и т. д., получим

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= V \delta x + \int N (dx \delta y - dy \delta x) + \int P (dx \delta p - dp \delta x) + \\ &\quad + \int Q (dx \delta q - dq \delta x) + \int R (dx \delta r - dr \delta x) + \text{и т. д.}, \end{aligned}$$

где, как мы уже нашли выше,

$$d dx p = d \delta y - p d \delta x; \quad dx \delta q = d \delta p - q d \delta x; \quad dx \delta r = d \delta q - r d \delta x \text{ и т. д.}$$

После подстановки этих значений получаем, поскольку $dy = p dx$, следующее выражение:

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= V \delta x + \int N dx (\delta y - p \delta x) + \int P d (\delta y - p \delta x) + \\ &\quad + \int Q d (\delta p - q \delta x) + \int R d (\delta q - r \delta x) + \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Для дальнейшего приведения этого выражения заметим, что

$$\delta p - q \delta x = \frac{d \delta y - p d \delta x - dp \delta x}{dx} = \frac{d (\delta y - p \delta x)}{dx},$$

$$\delta q - r \delta x = \frac{d \delta p - q d \delta x - dq \delta x}{dx} = \frac{d (\delta p - q \delta x)}{dx},$$

$$\delta r - s \delta x = \frac{d \delta q - r d \delta x - dr \delta x}{dx} = \frac{d (\delta q - r \delta x)}{dx}$$

и т. д.

что означает, что каждое из этих выражений приводится к предыду-

щему; если краткости ради положить $\delta y - p \delta x = \omega$, то получим:

$$\begin{aligned} \delta y - p \delta x &= \omega, \\ \delta p - q \delta x &= \frac{d\omega}{dx}, \\ \delta q - r \delta x &= \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx}, \\ \delta r - s \delta x &= \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} \end{aligned}$$

и т. д.

Таким образом, исключив знаки производных p, q, r и т. д., мы получим искомую вариацию в виде

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= V \delta x + \int N dx \omega + \int P d\omega + \int Q d \frac{d\omega}{dx} + \int R d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} + \\ &+ \int S d \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} + \int T d \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} + \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Закон построения последовательных членов здесь очевиден, каков бы ни был порядок дифференциалов, входящих в выражение V .

СЛЕДСТВИЕ 1

80. Первый член этой вариации $\delta V x$ не содержит знака интегрирования и только одну вариацию δx ; остальные члены содержат вариации обоих переменных в сочетании

$$\omega = \delta y - p \delta x.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

81. Второй член

$$\int N dx \omega = \int N \omega dx$$

не может быть выражен удобнее, но третий член $\int P d\omega$ может быть выражен удобнее, поскольку

$$\int P d\omega - P\omega = \int \omega dP,$$

так что под знаком интеграла остается только величина ω .

СЛЕДСТВИЕ 3

82. Четвертый член $\int Q d \frac{d\omega}{dx}$ приводится подобным же образом к виду

$$Q \frac{d\omega}{dx} - \int dQ \frac{d\omega}{dx}.$$

Здесь второй член, который может быть записан также в виде $\int \frac{dQ}{dx} \omega dx$, в свою очередь преобразуется в

$$\frac{dQ}{dx} \omega - \int \omega d \frac{dQ}{dx},$$

так что четвертый член окончательно представляется в виде

$$Q \frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx} \omega + \int \omega d \frac{dQ}{dx}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

83. Пятый член

$$\int R d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx}$$

преобразуется сперва в

$$R \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} - \int \frac{dR}{dx} d \frac{d\omega}{dx}.$$

Но поскольку второе слагаемое в этом выражении равно

$$\frac{dR}{dx} \frac{d\omega}{dx} - \int \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} d\omega,$$

а здесь последнее слагаемое приводится к

$$\frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} \omega - \int \omega d \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx},$$

то пятый член получает, окончательно, следующее выражение:

$$R \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} - \frac{dR}{dx} \frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} \omega - \int \omega d \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx}.$$

84. Подобным же образом для шестого члена

$$\int S d \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx}$$

находим такое выражение:

$$S \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} - \frac{dS}{dx} \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dS}{dx} \frac{d\omega}{dx} - \\ - \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dS}{dx} \omega + \int \omega d \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dS}{dx}.$$

ЗАДАЧА 7

85. Положим $dy = p dx$, $dp = q dx$, $dq = r dx$, $dr = s dx$ и т. д., и пусть V есть произвольная функция количества x , y , p , q , r , s и т. д., так что

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{и т. д.}$$

Требуется выразить вариацию интеграла $\int V dx$ через вариации обеих переменных x и y таким образом, чтобы под знаком интеграла не встречались производные вариаций.

РЕШЕНИЕ

В следствиях, указанных в предыдущей задаче, уже все подготовлено для нашей цели, и остается только собрать в должном порядке преобразования отдельных слагаемых. При этом получают члены двух видов: одни содержат интегральные выражения, которые все можно

собрать в одну сумму, а остальные же полученные слагаемые можно записать таким образом, что вначале стоят члены, содержащие сами вариации δx и δy , а затем члены, содержащие их дифференциалы любого порядка. Полагая краткости ради выражение $\delta y - p \delta x = \omega$, получаем искомую вариацию в виде

$$\begin{aligned} \delta \int V dx = & \int \omega dx \left(N - \frac{dP}{dx} d \frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dS}{dx} - \text{и т. д.} \right) \\ & + V \delta x + \omega \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dR}{dx} - \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dS}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{d\omega}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dS}{dx} - \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} (S - \text{и т. д.}) \\ & + \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Характер этой формулы сразу виден при одном только взгляде на нее, и дальнейшие пояснения не требуются.

СЛЕДСТВИЕ 1

86. Это выражение становится гораздо проще, если рассматривать элемент dx как постоянный, хотя при этом число членов выражения не уменьшается, а именно получим

$$\begin{aligned} \delta \int V dx = & \int \omega dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{и т. д.} \right) \\ & + V \delta x + \omega \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{d\omega}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{d^2\omega}{dx^2} \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{d^3\omega}{dx^3} (S - \text{и т. д.}) \\ & + \text{и т. д.} \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

87. Если речь идет о кривой линии, то первый член представляет собой интеграл, распространенный по всей кривой от начала до конца, где только существуют координаты x и y , и вместе с тем содержащий вариации во всех точках кривой, в то время как остальные члены не содержащие знака интеграла, определяются только вариациями на концах кривой.

СЛЕДСТВИЕ 3

88. Если мы рассматриваем кривую, определяемую координатами x и y , как заданную, а другая кривая отличается от нее бесконечно мало, причем в отдельных точках заданной кривой обе координаты получают какие угодно вариации, то найденное выражение показывает.

насколько значение интеграла $\int V dx$ для варьированной кривой превосходит то же значение, полученное для заданной кривой.

СЛЕДСТВИЕ 4

89. Поскольку $\omega = \delta y - p \delta x$, то ясно, что это количество ω исчезает, если в отдельных точках вариации δx и δy сделать такими, чтобы было

$$\delta y : \delta x = p : 1 = dy : dx.$$

Но в этом случае варьированная кривая вовсе не отличается от заданной, и вся вариация выражения $\int V dx$ сводится к $V dx$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

90. Найденная нами формула для вариации интеграла $\int V dx$ дает нам правило, которое я уже однажды указал для нахождения кривой, для которой значение некоторого интеграла становится максимальным или минимальным¹⁾. Это правило требует, чтобы выражение

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{и т. д.}$$

было равно нулю. В самом деле, очевидно, что для того, чтобы вариация выражения $\int V dx$ исчезала, как того требует природа максимумов и минимумов, прежде всего необходимо, чтобы было равно нулю выражение, содержащееся в первом члене под знаком интеграла, т. е.

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{и т. д.} = 0.$$

Кроме того, должны равняться нулю члены не содержащие знаки интеграла, в которых содержится то, что относится к концам кривой. Дело в том, что характер кривой определяется вышеуказанным уравнением, которое вследствие наличия дифференциалов высших порядков интегрируется соответствующее число раз с таким же числом постоянных. Для определения же этих постоянных и нужны упомянутые члены без знака интеграла: ведь и в начале и в конце искомая кривая удовлетворяет определенным условиям, например, она должна оканчиваться на определенных кривых. Так, если это уравнение будет дифференциальным уравнением четвертого или более высокого порядка, увеличивается также число членов без знака интеграла, и с их помощью можно добиться того, чтобы искомая кривая не только оканчивалась с обеих сторон на заданных линиях, но, сверх того, имела там определенные направления, а если встречаются еще более высокие дифференциалы, то можно представить определенные значения кривизны. В приложениях же всегда, и обычно очень красивым образом, получается так, что сам характер вопроса приводит к таким условиям, которым очень удобно можно удовлетворить с помощью слагаемых без знака интеграла.

¹⁾ «Methodus inveniendi lineas curvas...» гл. II, § 56. [Ф. Э.]

ПОЯСНЕНИЕ 2

91. Поскольку все секреты, заключенные в формуле, которую мы нашли для вариации интеграла $\int V dx$, лучше всего объясняются при ее применении к максимумам и минимумам, я здесь замечу только, что интегральный член обязательно должен войти в выражение для вариации. Если, следовательно, рассматривать вопрос в самом общем виде, так что в отдельных точках кривой оба переменных x и y получают вариации произвольные и не связанные между собой никаким законом, то не может случиться, чтобы вариация, относящаяся ко всей кривой, не зависела одновременно от всех промежуточных вариаций, так что, если их менять, должна меняться также вариация, относящаяся ко всей кривой в целом. Этим вариация интегралов сильнейшим образом отличается от вариации такого рода выражений, какие мы рассматривали в предыдущей главе: последние зависят только от вариаций в данном бесконечно малом элементе. Отсюда ясно следует, что, если случайно количество V таково, что дифференциальное выражение $V dx$ допускает интегрирование, не связанное с каким-либо определенным соотношением между переменными x и y , так что интеграл $\int V dx$ является определенной функцией количеств x, y, p, q, r и т. д. — то тогда и ее вариация может зависеть только от вариаций крайних элементов, а интегральная часть вариации явно должна обращаться в нуль. Отсюда следует нижестоящая важная теорема.

ТЕОРЕМА 3

92. Положим $dy = p dx, dp = q dx, dq = r dx, dr = s dx$ и т. д. Если V — такая функция переменных x, y, p, q, r, s и т. д., что, полагая ее дифференциал

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{и т. д.},$$

имеем

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{и т. д.} = 0,$$

считая элемент dx постоянным, то дифференциальное выражение $V dx$ само по себе интегрируемо, без предположения определенного соотношения между переменными x и y ; и верно обратное утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Если имеем

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{и т. д.} = 0,$$

то вариация интеграла $\int V dx$ не содержит никакого интегрального выражения и, следовательно, при любом размещении координат x и y ¹⁾ эта вариация может зависеть только от вариаций в крайних элементах. Это было бы невозможно, если бы выражение $V dx$ не допускало инте-

¹⁾ pro quovis situ coordinatarum x et y .

грирования, так как в последнем случае вариация интеграла обязательно зависит от вариаций всех промежуточных точек одновременно; отсюда следует, что каждый раз, когда имеет место вышестоящее уравнение, выражение $V dx$ должно допускать интегрирование; но тогда интеграл $\int V dx$ будет вполне определенной функцией количеств x, y, p, q, r, s и т. д. Обратно, каждый раз, когда дифференциальное выражение $V dx$ допускает интегрирование и, следовательно, интеграл $\int V dx$ является настоящей функцией количеств x, y, p, q, r, s и т. д., его вариация зависит только от крайних вариаций координат x и y , а промежуточные вариации не могут каким бы ни было образом влиять на нее. Но тогда необходимо, чтобы вышенайденная интегральная часть вариации исчезала, что возможно только, если

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{и т. д.} = 0.$$

Таким образом, предложенная теорема вместе со своей обратной соответствует действительности¹⁾.

СЛЕДСТВИЕ 1

93. Итак, налицо замечательный критерий, при помощи которого можно судить о том, является ли данное дифференциальное выражение от двух переменных, в которое входят дифференциалы сколь угодно высокого порядка, интегрируемым или нет. Этот критерий является гораздо более общим, чем достаточно известный критерий, на основании которого судят об интегрируемости дифференциальных выражений первого порядка.

СЛЕДСТВИЕ 2

94. Итак, если количество V есть функция только от x и y , не содержащая никакого отношения дифференциалов, так что

$$dV = M dx + N dy,$$

то дифференциальное выражение $V dx$ допускает интегрирование только в том случае, если $N = 0$, то есть, если V является функцией x , что, впрочем, само по себе очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 3

95. Пусть предложено дифференциальное выражение $v dx + u dy$; сравнивая его с выражением $V dx$, поскольку $dy = p dx$, получаем $V = v + pu$; тогда

$$M = \left(\frac{dv}{dx} \right) + p \left(\frac{du}{dx} \right); \quad N = \left(\frac{dv}{dy} \right) + p \left(\frac{du}{dy} \right)$$

¹⁾ Уже ранее, а именно в конце работы (№ 297 по списку Энестрема) «Аналитическое изложение метода максимумов и минимумов» (см. выше примечание к § 11) Эйлер обращал внимание аналитиков на эту превосходную теорему, утверждая, что ее легко доказать, исходя из изложенных им положений. Здесь это доказательство проведено. [Ф. Э.]

и $P = u$, причем предполагается, что количества v и u не содержат никаких дифференциалов. Итак,

$$dP = du = dx \left(\frac{du}{dx} \right) + dy \left(\frac{du}{dy} \right).$$

Поскольку критерий интегрируемости требует, чтобы было

$$N - \frac{dP}{dx} = 0,$$

имеем для данного случая

$$\left(\frac{dv}{dy} \right) + p \left(\frac{du}{dy} \right) - \left(\frac{du}{dx} \right) - p \left(\frac{du}{dy} \right) = 0,$$

то есть

$$\left(\frac{dv}{dy} \right) = \left(\frac{du}{dx} \right),$$

что является широко известным критерием.

ПОЯСНЕНИЕ 1

96. Доказательство этой теоремы является совершенно особым, поскольку оно получено из учения о вариациях, которое казалось бы, очень далеко от этого вопроса; но едва ли каким-либо иным путем можно было бы получить ее доказательство¹⁾. В связи с этим необходимо обратить внимание на то понятие функции, при помощи которого мы показали, что интеграл $\int V dx$ может рассматриваться как функция величин x, y, p, q, r и т. д., только если он действительно допускает интегрирование. Ибо по сути с функциями всегда сочетается то свойство, что когда входящим в функцию количествам придаются определенные значения, функция также получает определенное значение; так, например, функция xy , если положить $x = 2$ и $y = 3$ принимает значение 6. Совсем иначе дело обстоит с интегралом $\int y dx$, значение которого для случая $x = 2$ и $y = 3$ никоим образом нельзя указать, если только не будет установлено определенное соотношение между y и x ; но в этом случае формула дает функцию одного переменного. Интегральные выражения, которые не обладают свойством интегрируемости, отличаются, следовательно, по своей природе коренным образом от функций, поскольку функции при определенных значениях, из которых они составлены, принимают определенные значения и в том случае, когда эти переменные никоим образом не зависят друг от друга; в случае интегральных выражений это не имеет места, поскольку для их определения требуется все промежуточные значения одновременно. На этом различии и основывается главным образом то общее учение о максимумах и минимумах, которым мы здесь занимаемся и где

¹⁾ Сопоставить с § 104. Первое чисто аналитическое доказательство дал друг и помощник Эйлера А. И. Лексель (Lxcell, 1740—1784) в работе «О критериях интегрируемости дифференциальных выражений» (De criteriis integrabilitatis formularum differentialium), Novi comment. acad. sc. Petrop. 15 (1770), 1771, стр. 127. [Ф. Э.]

надлежит рассматривать свойства максимума или минимума некоторых выражений; по необходимости это должны быть такие интегральные выражения, которые сами по себе не допускают интегрирования¹⁾.

ПОЯСНЕНИЕ 2

97. Для лучшего разъяснения теоремы рассмотрим интегральное выражение $\int V dx$, которое само по себе интегрируемо, и положим, примера ради,

$$\int V dx = \frac{x dy}{y dx} = \frac{xp}{y},$$

так что

$$V = \frac{p}{y} - \frac{xp^2}{y^2} + \frac{xq}{y};$$

следовательно, нижестоящее дифференциальное выражение

$$\left(\frac{p}{y} - \frac{xp^2}{y^2} + \frac{xq}{y} \right) dx$$

является вполне интегрируемым, но посмотрим, выявляет ли наша теорема эту интегрируемость. Итак, дифференцируем количество V , тогда, сравнивая дифференциал с [общей] формулой

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq,$$

получим

$$M = -\frac{p^2}{y^2} + \frac{q}{y}; \quad N = -\frac{p}{y^2} + \frac{2xp^2}{y^3} - \frac{xq}{y^2}; \quad P = \frac{1}{y} - \frac{2xp}{y^2} \quad \text{и} \quad Q = \frac{x}{y}.$$

Поскольку, согласно нашей теореме, должно быть

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0,$$

находим сперва с помощью дифференцирования, что

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{3p}{y^2} + \frac{4xp^2}{y^3} - \frac{2xq}{y^2} \quad \text{и} \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{1}{y} - \frac{xp}{y^2},$$

и далее,

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = -\frac{2p}{y^2} + \frac{2xp^2}{y^3} - \frac{xq}{y^2}.$$

Итак,

$$\frac{dP}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2} = -\frac{p}{y^2} + \frac{2xp^2}{y^3} - \frac{xq}{y^2},$$

что совпадает с количеством N .

ПОЯСНЕНИЕ 3

98. Кроме того, из того, что дифференциальное выражение $V dx$ само по себе допускает интегрирование, и, стало быть, если положить

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{и т. д.},$$

¹⁾ Это Эйлер заметил уже в работе «Methodus inveniendi lineas curvas...», в гл. I, § 34, но, по-видимому, он тогда не обратил внимания на критерий интегрируемости, который может быть отсюда выведен. [Ф. Э.]

то согласно теореме имеем

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{и т. д.} = 0,$$

следуют другие важные заключения. Прежде всего, если умножить на dx и проинтегрировать, получим

$$\int N dx - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^3S}{dx^3} - \text{и т. д.} = A$$

так что, следовательно, выражение $N dx$ является интегрируемым. Далее, отсюда получаем, что

$$\int dx \left(\int N dx - P \right) + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \text{и т. д.} = Ax + B,$$

следовательно, выражение

$$dx \left(\int N dx - P \right)$$

также допускает интегрирование. После этого подобным же образом получается интегрируемость выражения

$$dx \left[\int dx \left(\int N dx - P \right) + Q \right],$$

затем выражения

$$dx \left[\int dx \left(\int N dx - P \right) + Q \right] - R$$

и т. д. Отсюда получается следующая теорема, не менее достойная быть отмеченной и практически очень полезная.

ТЕОРЕМА 4

99. Положим $dy = p dx$, $dp = q dx$, $dq = r dx$, $dr = s dx$ и т. д. Пусть V — такая функция переменных x, y, p, q, r, s и т. д., что дифференциальное выражение $V dx$ интегрируемо само по себе. Тогда, полагая

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{и т. д.},$$

мы получаем еще следующие дифференциальные выражения, интегрируемые сами по себе;

I. Выражение $N dx$ само по себе интегрируемо.

Тогда, полагая, $P - \int N dx = \mathfrak{P}$,

II. находим, что выражение $\mathfrak{P} dx$ само по себе интегрируемо.

Далее, полагая $Q - \int \mathfrak{P} dx = \mathfrak{Q}$,

III. находим, что выражение $\mathfrak{Q} dx$ само по себе интегрируемо.

Затем, полагая $R - \int \mathfrak{Q} dx = \mathfrak{R}$,

IV. находим, что выражение $\mathfrak{R} dx$ само по себе интегрируемо.

Наконец, полагая $S - \int \mathfrak{R} dx = \mathfrak{S}$,

V. находим, что выражение $\mathfrak{S} dx$ само по себе интегрируемо, и так далее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Правильность этой теоремы показана уже в предыдущем параграфе, причем одновременно явствует, что, если все эти выражения допускают интегрирования, исходное выражение $V dx$ также интегрируемо¹⁾.

СЛЕДСТВИЕ 1

100. Поскольку V является функцией количеств

$$x, y, p = \frac{dy}{dx}; \quad q = \frac{dp}{dx}; \quad r = \frac{dq}{dx} \text{ и т. д.,}$$

то количества, полученные отсюда путем дифференцирования — M, N, P, Q, R и т. д., могут быть выражены так:

$$M = \left(\frac{dV}{dx} \right); \quad N = \left(\frac{dV}{dy} \right); \quad P = \left(\frac{dV}{dp} \right); \quad Q = \left(\frac{dV}{dq} \right) \text{ и т. д.,}$$

откуда в силу первой формулы вытекает, что, если выражение $V dx$ интегрируемо, то выражение $\left(\frac{dV}{dy} \right) dx$ также интегрируемо.

СЛЕДСТВИЕ 2

101. Далее, на основании того же рассуждения находим, что выражение $\left(\frac{d^2V}{dy^2} \right) dx$ и, далее, выражения $\left(\frac{d^3V}{dy^3} \right) dx$, $\left(\frac{d^4V}{dy^4} \right) dx$ и т. д. все допускают интегрирование непосредственно.

СЛЕДСТВИЕ 3

102. Поскольку налицо ровно столько букв P, Q, R и т. д., сколько единиц в порядке дифференциалов в выражении $V dx$, а все дальнейшие исчезают, то выводимые из них немецкие буквы $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ и т. д. также исчезают или же превращаются в функции только одного количества x , так как иначе последующие интегрируемости не могли бы иметь места.

ПРИМЕР

103. Пусть V — такая функция, что

$$\int V dx = \frac{y(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{x dx d^2y}.$$

После подстановок

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx \text{ и т. д.}$$

¹⁾ То, что здесь рассматривается как очевидное, требует некоторого разъяснения, а каким образом это можно сделать, видно из § 102. [Ф. Э.]

функция V выражается в этом примере так:

$$V = \frac{p(1+p^2)^{3/2}}{xq} - \frac{y(1+p^2)^{3/2}}{x^2q} + \frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{x} - \frac{yr(1+p^2)^{3/2}}{xq^2};$$

отсюда путем дифференцирования выводим следующие значения:

$$\begin{aligned} N &= -\frac{(1+p^2)^{3/2}}{x^2q} + \frac{3p\sqrt{1+p^2}}{x} - \frac{r(1+p^2)^{3/2}}{xq^2}, \\ P &= \frac{(1+4p^2)\sqrt{1+p^2}}{xq} - \frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{x^2q} + \frac{3y(1+2p^2)}{x\sqrt{1+p^2}} - \frac{3yp r\sqrt{1+p^2}}{xq^2}, \\ Q &= -\frac{p(1+p^2)^{3/2}}{xq^2} + \frac{y(1+p^2)^{3/2}}{x^2q^2} + \frac{2yr(1+p^2)^{3/2}}{xq^3}, \\ R &= -\frac{y(1+p^2)^{3/2}}{xq^2}. \end{aligned}$$

Тогда прежде всего должно быть интегрируемо выражение $N dx$, то есть

$$-\frac{dx(1+p^2)^{3/2}}{x^2q} + \frac{3p dx\sqrt{1+p^2}}{x} - \frac{dq(1+p^2)^{3/2}}{xq^2},$$

откуда сразу получаем его интеграл

$$\int N dx = \frac{(1+p^2)^{3/2}}{xq}.$$

Для второго выражения получаем отсюда

$$\mathfrak{P} = P - \int N dx = \frac{3p^2\sqrt{1+p^2}}{xq} - \frac{3yp(1+p^2)}{x^2q} + \frac{3y(1+2p^2)}{x\sqrt{1+p^2}} - \frac{3yp r\sqrt{1+p^2}}{xq^2},$$

так что требуется интегрировать выражение

$$\mathfrak{P} dx = \frac{3p dy\sqrt{1+p^2}}{xq} - \frac{3yp dx\sqrt{1+p^2}}{x^2q} + \frac{3y dx(1+2p^2)}{x\sqrt{1+p^2}} - \frac{3yp dq\sqrt{1+p^2}}{xq^2}.$$

Интеграл этого выражения, или по крайней мере часть его, получаемая из последнего члена, равняется $\frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{xq}$, а так как дифференциал этого выражения исчерпывает все предыдущее выражение, имеем

$$\int \mathfrak{P} dx = \frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{qx}.$$

Теперь имеем для третьего выражения

$$\mathfrak{Q} = Q - \int \mathfrak{P} dx = -\frac{p(1+p^2)^{3/2}}{xq^2} + \frac{y(1+p^2)^{3/2}}{x^2q^2} + \frac{2yr(1+p^2)^{3/2}}{xq^3} - \frac{3yp\sqrt{1+p^2}}{xq},$$

откуда после умножения на dx и поскольку $dx = \frac{dp}{q}$, получим

$$\mathfrak{Q} dx = -\frac{dy(1+p^2)^{3/2}}{xq^2} + \frac{y dx(1+p^2)^{3/2}}{x^2q^2} + \frac{2y dq(1+p^2)^{3/2}}{xq^3} - \frac{3yp dp\sqrt{1+p^2}}{xq^2},$$

и по предпоследнему слагаемому в этом выражении выявляем интеграл

$$\int \mathfrak{Q} dx = -\frac{y(1+p^2)^{3/2}}{xq^2}.$$

Затем четвертое выражение имеет вид

$$\mathfrak{H} = R - \int \Omega dx = 0,$$

откуда ясно, что интегрируемо не только $\mathfrak{H} dx$, но и все следующие [аналогичные] выражения.

ПОЯСНЕНИЕ

104. Эти теоремы кажутся тем красивее, что их доказательство опирается на принцип, казалось бы, чуждый этому вопросу, поскольку в этих формулировках вариации больше не встречаются; поэтому нет сомнения, что можно получить доказательство также из более естественного источника.





ГЛАВА IV

О ВАРИАЦИИ СЛОЖНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ДВА ПЕРЕМЕННЫХ

ЗАДАЧА 8

105. Пусть $v = \int \mathfrak{B} dx$, где \mathfrak{B} — какая угодно функция переменных x, y и их дифференциалов $dy = p dx$, $dp = q dx$, $dq = r dx$ и т. д., и пусть V обозначает какую-либо функцию от v . Найти вариацию сложного интегрального выражения $\int V dx$.

РЕШЕНИЕ

Так как само количество v — это интегральное выражение $\int \mathfrak{B} dx$, выражение $\int V dx$ считается сложным. Поскольку же мы считаем, что функция V содержит только количество v , положим $dV = L dv$, в то время как функция \mathfrak{B} имеет дифференциал

$$d\mathfrak{B} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{и т. д.}$$

Но искомая вариация равна

$$\delta \int V dx = \int \delta(V dx) = \int (\delta V dx + V d\delta x),$$

или после преобразования, которое мы применяли уже раньше,

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (dx \delta V - dV \delta x).$$

Поскольку, однако, по допущению имеем $dV = L dv$, то получим для вариации $\delta V = L \delta v$; но в силу того, что $v = \int \mathfrak{B} dx$, имеем сперва $dv = \mathfrak{B} dx$, и отсюда $dV = L \mathfrak{B} dx$. так что

$$\delta v = \delta \int \mathfrak{B} dx = \mathfrak{B} \delta x + \int (dx \delta \mathfrak{B} - d\mathfrak{B} \delta x)$$

и, следовательно,

$$\delta V = L\mathfrak{B} \delta x + L \int (dx \delta \mathfrak{B} - d\mathfrak{B} \delta x),$$

откуда

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (L\mathfrak{B} dx \delta x + L dx \int (dx \delta \mathfrak{B} - d\mathfrak{B} \delta x) - L\mathfrak{B} dx \delta x),$$

так что

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int L dx \int (dx \delta \mathfrak{B} - d\mathfrak{B} \delta x).$$

Из предыдущей главы, однако, видно, что

$$\begin{aligned} \int (dx \delta \mathfrak{B} - d\mathfrak{B} \delta x) &= \delta \int \mathfrak{B} dx - \mathfrak{B} \delta x = \\ &= \int \omega dx \left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \text{и т. д.} \right) \\ &\quad + \omega \left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ &\quad + \frac{d\omega}{dx} \left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{S}}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ &\quad + \frac{d^2\omega}{dx^2} \left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{S}}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ &\quad + \text{и т. д.,} \end{aligned}$$

где элемент dx считается постоянным и кратности ради положено $\omega = \delta y - p \delta x$. Однако поскольку эта подстановка представляет собою неудобства, то лучше вернуться к исходным соображениям. На основании выражений для дифференциала и вариации величины \mathfrak{B} получим, что

$$\begin{aligned} dx \delta \mathfrak{B} - d\mathfrak{B} \delta x &= dx (\mathfrak{M} \delta x + \mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \delta p + \mathfrak{Q} \delta q + \mathfrak{R} \delta r + \text{и т. д.}) \\ &\quad - \delta x (\mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{и т. д.}), \end{aligned}$$

откуда, поскольку

$$dy + p dx, dp = q dx, dq = r dx, dr = s dx \text{ и т. д.,}$$

вытекает, что

$$\begin{aligned} dx \delta \mathfrak{B} - d\mathfrak{B} \delta x &= \mathfrak{N} dx (\delta y - p \delta x) + \mathfrak{P} dx (\delta p - q \delta x) \\ &\quad + \mathfrak{Q} dx (\delta q - r \delta x) + \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Но, так как dx постоянно, получаем по § 79

$$\begin{aligned} \delta y - p \delta x &= \omega; & \delta p - q \delta x &= \frac{d\omega}{dx}; \\ \delta q - r \delta x &= \frac{d^2\omega}{dx^2}; & \delta r - s \delta x &= \frac{d^3\omega}{dx^3} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$dx \delta \mathfrak{B} - d\mathfrak{B} \delta x = \mathfrak{N}\omega dx + \mathfrak{P} d\omega + \mathfrak{Q} \frac{d^2\omega}{dx^2} + \mathfrak{R} \frac{d^3\omega}{dx^3} + \mathfrak{S} \frac{d^4\omega}{dx^4} + \text{и т. д.}$$

Интеграл от этого выражения совпадает с вышестоящим выражением.

Положим теперь $\int L dx = I$; тогда

$$\delta \int V dx = V \delta x + I \int (dx \delta \mathfrak{B} - d\mathfrak{B} \delta x) - \int I (dx \delta \mathfrak{B} - d\mathfrak{B} \delta x).$$

Теперь легко получаем

$$\begin{aligned} \int I(dx \delta \mathfrak{B} - d\mathfrak{B} \delta x) &= \int \omega dx \left(I\mathfrak{R} - \frac{dI\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2I\Omega}{dx^2} - \frac{d^3I\mathfrak{R}}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ &+ \omega \left(I\mathfrak{P} - \frac{dI\Omega}{dx} + \frac{d^2I\mathfrak{R}}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{d\omega}{dx} \left(I\Omega - \frac{dI\mathfrak{R}}{dx} + \text{и т. д.} \right), \end{aligned}$$

откуда после подстановки находим искомую вариацию

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= V \delta x + I \int \omega dx \left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\Omega}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ &- \int \omega dx \left(I\mathfrak{R} - \frac{dI\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2I\Omega}{dx^2} - \frac{d^3I\mathfrak{R}}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ &+ I\omega \left(\mathfrak{P} - \frac{d\Omega}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{C}}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ &- \omega \left(I\mathfrak{P} - \frac{dI\Omega}{dx} + \frac{d^2I\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3I\mathfrak{C}}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{Id\omega}{dx} \left(\Omega - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{C}}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ &- \frac{d\omega}{dx} \left(I\Omega - \frac{dI\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d^2I\mathfrak{C}}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{I d^2\omega}{dx^2} \left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{C}}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ &- \frac{d^2\omega}{dx^2} \left(I\mathfrak{R} - \frac{dI\mathfrak{C}}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{I d^3\omega}{dx^3} \left(\mathfrak{C} - \text{и т. д.} \right) \\ &- \frac{d^3\omega}{dx^3} \left(I\mathfrak{C} - \text{и т. д.} \right) \\ &+ \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Если здесь первые два члена продифференцировать и снова проинтегрировать, то после приведений и замены dI через $L dx$, найдем, что

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= V \delta x + \int L dx \int \omega dx \left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\Omega}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ &+ \int \omega dx \left(L\mathfrak{P} - \frac{L d\Omega + dL\Omega}{dx} + \frac{L d^2\mathfrak{R} + dL d\mathfrak{R} + d^2L\mathfrak{R}}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ &+ \omega \left(L\Omega - \frac{L d\mathfrak{R} + dL\mathfrak{R}}{dx} + \frac{L d^2\mathfrak{C} + dL d\mathfrak{C} + d^2L\mathfrak{C}}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{d\omega}{dx} \left(L\mathfrak{R} - \frac{L d\mathfrak{C} + dL\mathfrak{C}}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{d^2\omega}{dx^2} \left(L\mathfrak{C} - \text{и т. д.} \right) \\ &+ \text{и т. д.,} \end{aligned}$$

и эта форма представляется наиболее простой и наиболее подходящей для приложений.

СЛЕДСТВИЕ 1

106. Если требуется найти такое соотношение между x и y , чтобы интеграл $\int V dx$ стал максимумом или минимумом, то интегральную часть вариации пужно приравнять нулю, что вообще может не иметь места, а относится к промежутку, на который распространяется интеграл $\int V dx$ ¹⁾. Если для этого промежутка положить $I = \int L dx = A$, то из первой формы вариации получаем уравнение

$$0 = (A - I) \mathfrak{R} - \frac{d(A - I) \mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2(A - I) \mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3(A - I) \mathfrak{R}}{dx^3} + \text{и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

107. Каким бы образом ни рассматривать в том или ином случае это уравнение, мы всегда приходим к тому, что путем дифференцирования интеграл $I = \int L dx$ должен быть исключен; при этом, очевидно, исключается также количество A . Таким образом, полученное уравнение больше не зависит от пределов интегрирования.

СЛЕДСТВИЕ 3

108. Итак, если в общем случае требуется найти вариацию интеграла $\int V dx$, то, если обозначим значение всего интеграла $\int L dx = I$ через A , искомая вариация выражается так:

$$\begin{aligned} \delta \int V dx = & V \delta x + \int \omega dx \left[(A - I) \mathfrak{R} - \frac{d(A - I) \mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2(A - I) \mathfrak{Q}}{dx^2} - \right. \\ & \left. - \frac{d^3(A - I) \mathfrak{R}}{dx^3} + \text{и т. д.} \right] \\ & + \omega \left(L \mathfrak{Q} - \frac{L d\mathfrak{R} + dL\mathfrak{R}}{dx} + \frac{L d^2\mathfrak{S} + dL d\mathfrak{S} + d^2L\mathfrak{S}}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{d\omega}{dx} \left(L\mathfrak{R} - \frac{L d\mathfrak{S} + dL\mathfrak{S}}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{d^2\omega}{dx^2} (L\mathfrak{S} - \text{и т. д.}), \end{aligned}$$

где $A - I$ есть значение выражения $\int L dx$ от некоторого неопределенного промежуточного места до конца промежутка интегрирования.

ПОЯСНЕНИЕ

109. При решении этой проблемы возможно значительное упрощение, при помощи которого исследование и в предыдущей главе может быть существенно сокращено. Мы уже там (§ 79) пришли к выражению

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (dx \delta V - dV \delta x).$$

¹⁾ quod in genere fieri nequit, sed ad terminum, quousque integrale $\int V dx$ extenditur, spectari oportet.

Поскольку

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{и т. д.}$$

и

$$\delta V = M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{и т. д.},$$

и, далее,

$$dV = dx (M + Np + Pq + Qr + Rs + \text{и т. д.}),$$

получается

$$dx \delta V - dV \delta x = dx [N (\delta y - p \delta x) + P (\delta p - q \delta x) + Q (\delta q - r \delta x) + \text{и т. д.}].$$

Полагая краткости ради $\delta y - p \delta x = \omega$, получим, дифференцируя,

$$\delta (p dx) - q dx \delta x - p \delta dx = d\omega.$$

Но

$$\delta (p dx) = pd \delta x + \delta p dx,$$

так что

$$\delta p - q \delta x = \frac{d\omega}{dx}.$$

Дифференцируя подобным образом эту формулу и пользуясь тем, что

$$dp = q dx \text{ и } dq = r dx,$$

получим

$$q d\delta x + \delta q dx - q d\delta x - dq \delta x = dx (\delta q - r \delta x) = d \frac{d\omega}{dx},$$

откуда очевидно, что, полагая

$$\delta y - p \delta x = \omega,$$

будем иметь

$$\delta p - q \delta x = \frac{d\omega}{dx}, \quad \delta q - r \delta x = \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} = \frac{d^2\omega}{dx^2},$$

причем dx считается постоянным,

$$\delta r - s \delta x = \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{d\omega}{dx} = \frac{d^3\omega}{dx^3} \text{ и т. д.}$$

Таким образом,

$$dx \delta V - dV \delta x = dx \left(N\omega + \frac{P d\omega}{dx} + \frac{Q d^2\omega}{dx^2} + \frac{R d^3\omega}{dx^3} + \frac{S d^4\omega}{dx^4} + \text{и т. д.} \right),$$

если только дифференциал dx считается постоянным.

ЗАДАЧА 9

110. Пусть $v = \int \mathfrak{B} dx$ и

$$d\mathfrak{B} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{и т. д.}$$

Пусть далее V — какая угодно функция не только количества

$$x, y, p = \frac{dy}{dx}; \quad q = \frac{dp}{dx}; \quad r = \frac{dq}{dx} \text{ и т. д.},$$

но также интегрального выражения $v = \int \mathfrak{B} dx$. Требуется найти вариацию сложного интегрального выражения $\int V dx$.

РЕШЕНИЕ

Так как V есть функция количеств v, x, y, p, q, r и т. д., берется ее дифференциал, который пусть будет

$$dv = L dv + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{и т. д.},$$

так что вариация V выражается так:

$$\delta V = L \delta v + M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{и т. д.}$$

Теперь заметим, что, поскольку

$$dv = \mathfrak{B} dx, \quad dy = p dx, \quad dp = q dx \text{ и т. д.},$$

получается

$$dV = dx(L\mathfrak{B} + M + Np + Pq + Qr + Rs + \text{и т. д.})$$

и

$$\delta \mathfrak{B} = \mathfrak{M} \delta x + \mathfrak{N} \delta y + \mathfrak{P} \delta p + \mathfrak{Q} \delta q + \mathfrak{R} \delta r + \text{и т. д.}$$

Далее имеем

$$\delta v = \int (\mathfrak{B} \delta dx + dx \delta \mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \delta x + \int (dx \delta \mathfrak{B} - d\mathfrak{B} \delta x),$$

откуда после подстановки $\delta y - p \delta x = \omega$, согласно ранее найденному,

$$\delta v = \mathfrak{B} \delta x + \int dx \left(\mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3\omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right),$$

где для удобства мы положили dx постоянным. После этих предварительных преобразований находим искомую вариацию

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (dx \delta V - dV \delta x).$$

Для того чтобы пользоваться ранее найденным приведением, положим

$$dV = L dv + dW,$$

так что

$$\delta V = L \delta v + \delta W,$$

где

$$dW = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{и т. д.}$$

Отсюда мы получаем формулу

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (L dx \delta v - L dv \delta x) + \int (dx \delta W - dW \delta x),$$

где

$$dx \delta W - dW \delta x = dx \left(N\omega + \frac{P d\omega}{dx} + \frac{Q d^2\omega}{dx^2} + \frac{R d^3\omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right).$$

Далее,

$$dx \delta v - dv \delta x = dx \int dx \left(\mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3\omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right),$$

так как $dv \delta x = \mathfrak{B} dx \delta x$. После этих подстановок получаем искомую вариацию в виде

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int L dx \int dx \left(\mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} d^2 \omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3 \omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ + \int dx \left(N + \frac{P d\omega}{dx} + \frac{Q d^2 \omega}{dx^2} + \frac{R d^3 \omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right).$$

Для дальнейшего приведения в этой формуле положим, что интеграл $\int L dx = I$ берется таким образом, что он исчезает в начальной точке, откуда берется интеграл $\int V dx$, а для конечной точки в интеграле $\int V dx$ имеем $I = A$. Таким образом,

$$\delta \int V dx = V \delta x + A \int dx \left(\mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} d^2 \omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3 \omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ - I \int I dx \left(\mathfrak{N} \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} d^2 \omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3 \omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ + \int dx \left(N \omega + \frac{P d\omega}{dx} + \frac{Q d^2 \omega}{dx^2} + \frac{R d^3 \omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right).$$

Для дальнейшего сокращения положим

$$N + (A - I) \mathfrak{N} = N', \\ P + (A - I) \mathfrak{P} = P', \\ Q + (A - I) \mathfrak{Q} = Q', \\ R + (A - I) \mathfrak{R} = R' \\ \text{и т. д.}$$

Отсюда получается выражение такое же, как и рассмотренное выше,

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int dx \left(N' \omega + \frac{P' d\omega}{dx} + \frac{Q' d^2 \omega}{dx^2} + \frac{R' d^3 \omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right).$$

Следовательно, если здесь под знаком интеграла исключить дифференциалы количества ω , то, как и в § 86, мы приходим к выражению

$$\delta \int V dx = \int \omega dx \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2 Q'}{dx^2} - \frac{d^3 R'}{dx^3} + \frac{d^4 S'}{dx^4} - \text{и т. д.} \right) \\ + V \delta x + \omega \left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2 R'}{dx^2} - \frac{d^3 S'}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ + \text{const} + \frac{d\omega}{dx} \left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{d^2 S'}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ + \frac{d^2 \omega}{dx^2} \left(R' - \frac{dS'}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ + \frac{d^3 \omega}{dx^3} (S' - \text{и т. д.}) \\ + \text{и т. д.}$$

А постоянному, вводимому интегрированием, должно быть придано такое значение, чтобы в начальной точке интеграла $\int V dx$ безинтегральные члены обращались в нуль, если только первый интегральный член

берется так, что он исчезает в той же начальной точке. Затем уже надо вычислить полное выражение для конечной точки интегрирования, для которой мы уже положили $\int L dx = I = A$.

СЛЕДСТВИЕ 1

111. В интегральной части должно полагать, что переменные меняются по всей области интегрирования¹⁾, что же касается неинтегральных членов, то достаточно их рассмотреть только в начальной и в конечной точках интегрирования, при этом для обоих концов условия, предписанные для вариаций, дают значения δx , ω , $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ и т. д. После того как из начальных условий соответствующим образом определена постоянная, остается только приспособиться к [условиям для] конечной точки интегрирования.

СЛЕДСТВИЕ 2

112. Для начала интегрирования, где $I = 0$, имеем

$$\begin{aligned} N' &= N + A\mathfrak{N}; & P' &= P + A\mathfrak{P}; & Q' &= Q + A\mathfrak{Q}; \\ R' &= R + A\mathfrak{R} \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

а для производных, поскольку $dI = L dx$, получается

$$\frac{dN'}{dx} = \frac{dN}{dx} + \frac{A d\mathfrak{N}}{dx} - L\mathfrak{N}$$

и аналогично для остальных первых производных; подобным же образом для вторых производных будем иметь:

$$\frac{d^2N'}{dx^2} = \frac{d^2N}{dx^2} + \frac{A d^2\mathfrak{N}}{dx^2} - \frac{2L d\mathfrak{N}}{dx} - \frac{\mathfrak{N} dL}{dx} \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 3

113. Для конца интегрирования, где $I = A$, имеем

$$N' = N; \quad P' = P; \quad Q' = Q; \quad R' = R \text{ и т. д.}$$

Отсюда получаем [первые] производные

$$\frac{dN'}{dx} = \frac{dN}{dx} - L\mathfrak{N}; \quad \frac{dP'}{dx} = \frac{dP}{dx} - L\mathfrak{P}; \quad \frac{dQ'}{dx} = \frac{dQ}{dx} - L\mathfrak{Q} \text{ и т. д.,}$$

вторые производные

$$\begin{aligned} \frac{d^2N'}{dx^2} &= \frac{d^2N}{dx^2} - \frac{2L d\mathfrak{N}}{dx} - \frac{\mathfrak{N} dL}{dx}, \\ \frac{d^2P'}{dx^2} &= \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{2L d\mathfrak{P}}{dx} - \frac{\mathfrak{P} dL}{dx} \end{aligned}$$

и т. д.

¹⁾ per totam extensionem integrationis—буквально: во всем охвате интегрирования.

ПОЯСНЕНИЕ 1

114. Хотя природа вариаций, а также вопросов, сюда относящихся, достаточно объяснена, все же нам кажется, что важность и новизна этого вопроса требуют более широких разъяснений, а поэтому не лишне еще и еще раз остановиться на этом предмете. Тогда как раньше мы пользовались геометрией и приложением этого исчисления к максимумам и минимумам для лучшего объяснения этого учения, здесь мы хотим рассматривать вопрос более общим образом, исключительно с точки зрения анализа¹⁾. Итак, рассматривается сперва произвольное соотношение между двумя переменными x и y , либо известное, либо подлежащее определению, а затем рассматривается образованное на этом основании интегральное выражение $\int V dx$, которое берется между определенными пределами, т. е. от определенного начала до определенного конца, и, следовательно, оно принимает какое-то определенное значение. Тогда мы каким-либо образом бесконечно мало изменяем это соотношение между x и y , каково бы оно ни было, так что отдельным значениям x , увеличенным на какие угодно вариации δx , соответствуют значения y , увеличенные на какие угодно вариации δy , причем надо иметь в виду, что в начале и в конце для этих вариаций задаются условия, которые вытекают из условий задачи, в то время как в промежуточных точках эти вариации должны считаться общими и не связанными между собой никакими законами. Затем из этого проварьированного соотношения предполагается найденным соответствующее значение интеграла $\int V dx$, распространенного от того же начала до того же конца, т. е. между теми же пределами, так что весь вопрос теперь сводится к тому, чтобы установить приращение этого варьированного значения по сравнению с первоначальным значением интеграла $\int V dx$. Это приращение обозначается через $\delta \int V dx$, что и представляет вариацию выражения $\int V dx$, и пока решение вопроса мы дали в таком объеме, что охвачены все случаи, когда количество V есть какая угодно функция не только от x, y, p, q, r, s и т. д., но, кроме того, и от некоторого интегрального выражения $v = \int \mathfrak{B} dx$.

ПОЯСНЕНИЕ 2

115. То, что мы в предыдущей главе молчаливо предположили относительно постоянного количества, которое надо добавить к найденной вариации, поскольку ее интегральная часть содержит некоторый произвол, при решении данной проблемы имелось в виду изложить более тщательно. Конечно, поскольку в таких вопросах, которые приводят к интегральным выражениям, всегда необходимо иметь в виду пределы интегрирования, — ведь интеграл есть не что иное, как сумма элементов, взятая от одной заданной границы или начала до другой границы или конца, — то это соображение существенно для любого

¹⁾ Говоря об использовании геометрических методов, Эйлер здесь имеет в виду свою знаменитую работу «Methodus inveniendi lineas curvas...» [Ф. Э.]

интегрирования; без него само понятие значения интеграла не может существовать. Поэтому если установлены пределы интегрирования, т. е. начало и конец, то как только интегральная часть вариации берется таким образом, чтобы она была равна нулю вначале, то должна быть добавлена такая постоянная, чтобы для того же начала уничтожались также внеинтегральные члены, стало быть, чтобы полное выражение вариации обращалось в нуль. После того как это сделано, можно продвинуться до конечной точки интегрирования, и таким образом получается истинное значение вариации заданного интегрального выражения, распространенного от начала до конца. И это учение о вариациях используется для двойного рода вопросов: в вопросах одного рода задается соотношение между переменными x и y и ищется вариация данного интегрального выражения $\int V dx$, когда на всем протяжении интегрирования переменным x и y приписываются какие угодно вариации; в вопросах второго рода это соотношение между переменными x и y отыскивается таким образом, чтобы вариация интеграла $\int V dx$ имела некоторое определенное свойство. В частности, если требуется, чтобы это выражение принимало максимальное или минимальное значение, то эта вариация должна равняться нулю. При этом опять же представляются два случая в зависимости от того, должен ли максимум или минимум иметь место для любых вариаций переменных x и y или только тогда, когда эти вариации подчинены какому-то определенному закону. Отсюда ясно, что данная теория охватывает гораздо больше, чем те вопросы, к которым она до сих пор применялась.

ЗАДАЧА 10

116. Пусть функция V содержит, кроме двух переменных x , y и их производных

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx}, \quad r = \frac{dq}{dx} \quad \text{и т. д.,}$$

еще два или большее число интегральных выражений:

$$v = \int \mathfrak{B} dx; \quad v' = \int \mathfrak{B}' dx \quad \text{и т. д.,}$$

и пусть

$$\begin{aligned} d\mathfrak{B} &= \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{и т. д.,} \\ d\mathfrak{B}' &= \mathfrak{M}' dx + \mathfrak{N}' dy + \mathfrak{P}' dp + \mathfrak{Q}' dq + \mathfrak{R}' dr + \text{и т. д.,} \end{aligned}$$

а для дифференциала V имеем

$$dV = L dv + L' dv' + M dx + N dy + P dp + Q dq + \text{и т. д.}$$

Найти вариацию интеграла $\int V dx$.

РЕШЕНИЕ

Если приступить к решению данной задачи тем же способом, как и выше, то мы скоро убедимся в том, что наличие двух интегралов

$$v = \int \mathfrak{B} dx \quad \text{и} \quad v' = \int \mathfrak{B}' dx$$

не вносит никаких затруднений, равно как если их будет даже несколько. Таким образом, все решение сводится к тому, чтобы при данных пределах интегрирования прежде всего взять интегралы

$$\int L dx = I \quad \text{и} \quad \int L' dx = I'$$

таким образом, чтобы они для начала интегрирования исчезали, и пусть для конца интегрирования имеем $I = A$ и $I' = A'$. Когда эти количества найдены, полагаем далее

$$\begin{aligned} N + (A - I) \mathfrak{N} + (A' - I') \mathfrak{N}' &= N', \\ P + (A - I) \mathfrak{P} + (A' - I') \mathfrak{P}' &= P', \\ Q + (A - I) \mathfrak{Q} + (A' - I') \mathfrak{Q}' &= Q', \\ R + (A - I) \mathfrak{R} + (A' - I') \mathfrak{R}' &= R' \end{aligned}$$

и т. д.

и тогда искомая вариация, если обоим переменным x и y придавать какие угодно вариации, будет, как и для предыдущей задачи,

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= \int \omega dx \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \frac{d^4S'}{dx^4} - \text{и т. д.} \right) \\ &+ V \delta x + \omega \left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2R'}{dx^2} - \frac{d^3S'}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ &+ \text{const} + \frac{d\omega}{dx} \left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{d^2S'}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{d^2\omega}{dx^2} \left(R' - \frac{dS'}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{d^3\omega}{dx^3} (S' - \text{и т. д.}) \\ &+ \text{и т. д.} \end{aligned}$$

где ради удобства элемент dx принят постоянным.

СЛЕДСТВИЕ

117. Итак, если в функцию V каким угодно образом входят несколько интегральных выражений $\int \mathfrak{B} dx$, то это не изменяет выражения искомой вариации, только нужно определить соответствующим образом количества N' , P' , Q' , R' и т. д.

ПОЯСНЕНИЕ

118. Даже если интегральные выражения

$$I = \int L dx, \quad I' = \int L' dx$$

содержат оба переменных и, следовательно, не могут, по-видимому, иметь определенные значения, нужно иметь в виду, что во всех вопросах этого рода предполагается некоторое определенное соотношение между переменными x и y , либо заранее заданное, либо подлежащее определению путем вычислений. А если применить это соотношение, то количество y может рассматриваться как функции x , и для указанных интегралов получаются определенные значения.

ЗАДАЧА 11

119. Пусть функция \mathfrak{B} содержит, кроме переменных x и y и их производных p , q , r , s и т. д., еще и интегральное выражение $u = \int v dx$, так что ее дифференциал будет

$$d\mathfrak{B} = \mathfrak{L} du + \mathfrak{M} dx = \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr + \text{и т. д.},$$

где $dv = m dx + n dy + p dp + q dq + r dr + \text{и т. д.}$ Пусть далее V — некоторая функция переменных x , y , p , q , r и т. д. и, сверх того, еще интеграла $v = \int \mathfrak{B} dx$, так что

$$dV = L dv + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{и т. д.}$$

Найти вариацию интеграла $\int V dx$.

РЕШЕНИЕ

На основании задачи 9 сразу находим вариацию интеграла $\int \mathfrak{B} dx = v$. В самом деле, если установлены пределы интегрирования и интеграл $\mathfrak{L} dx = \mathfrak{J}$ берется таким образом, что он исчезает в начальной точке интегрирования, а на конце имеем $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}$, после введения сокращенных обозначений

$$\mathfrak{N} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{J}) p = \mathfrak{N}', \quad \mathfrak{P} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{J}) p = \mathfrak{P}', \quad \mathfrak{Q} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{J}) q = \mathfrak{Q}' \text{ и т. д.},$$

получаем на основании решения указанной задачи

$$\delta v = \mathfrak{B} \delta x + \int dx \left(\mathfrak{N}' \omega + \frac{\mathfrak{P}' d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}' d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}' d^3\omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right),$$

где положено $\omega = \delta y - p \delta x$ и dx принимается постоянным.

Ищем теперь значения $\delta \int V dx$, пользуясь равенством

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (dx \delta V - dV \delta x),$$

где полагаем для краткости $dV = L dv + dW$ и $\delta V = L \delta v + \delta W$, так что

$$dW = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \text{и т. д.}$$

Тогда, как мы уже видели выше,

$$\begin{aligned} \delta \int V dx = V \delta x + \int L dx \delta v - L dv \delta x + \\ + \int dx \left(N \omega + \frac{P d\omega}{dx} + \frac{Q d^2\omega}{dx^2} + \frac{R d^3\omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right). \end{aligned}$$

Если здесь вместо dv и δv подставить их уже найденные значения, получим

$$dx \delta v - dv \delta x = dx \int dx \left(\mathfrak{N}' \omega + \frac{\mathfrak{P}' d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}' d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}' d^3\omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right).$$

Теперь полагаем $\int L dx = I$, где интеграл берется так, что он исчезает в начале; в конце же пусть имеем $I = A$. Тогда

$$\int L (dx \delta v - dv \delta x) = \int (A - I) dx \mathfrak{N}' \omega + \frac{\mathfrak{P}' d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}' d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}' d^3\omega}{dx^3} + \text{и т. д.}$$

Подставим вместо \mathfrak{N}' , \mathfrak{P}' , \mathfrak{Q}' , \mathfrak{R}' и т. д. их вышеуказанные значения и положим ради сокращения вычислений

$$\begin{aligned} N + (A - I)\mathfrak{N} + (A - I)(\mathfrak{X} - \mathfrak{Z})n &= N', \\ P + (A - I)\mathfrak{P} + (A - I)(\mathfrak{X} - \mathfrak{Z})p &= P', \\ Q + (A - I)\mathfrak{Q} + (A - I)(\mathfrak{X} - \mathfrak{Z})q &= Q', \\ R + (A - I)\mathfrak{R} + (A - I)(\mathfrak{X} - \mathfrak{Z})r &= R' \end{aligned}$$

и т. д.

Тогда, очевидно, получаем искомую вариацию в виде

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int dx \left(N' \omega + \frac{P' d\omega}{dx} + \frac{Q' d^2\omega}{dx^2} + \frac{R' d^3\omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \right).$$

Эта формула преобразуется дальше к такому же выражению, как в конце решения задачи 9 (§ 110), так что подробное изложение излишне.

СЛЕДСТВИЕ 1

120. Итак, здесь интегральное выражение $\int V dx$, вариацию которого мы нашли, построено таким образом, что функция V содержит интегральное выражение $\int \mathfrak{B} dx$, а \mathfrak{B} в свою очередь содержит другое интегральное выражение $\int \mathfrak{b} dx$, тогда как функция \mathfrak{b} уже не содержит больше интегральных выражений.

СЛЕДСТВИЕ 2

121. Если, однако, и эта функция \mathfrak{b} содержит еще интегральное выражение, то достаточно очевидно, как тогда найти решение; в этом случае значения N' , P' , Q' , R' и т. д. содержат дополнительные члены, зависящие от последнего интегрального выражения.

ПОЯСНЕНИЕ

122. Как бы ни было сложно интегральное выражение $\int V dx$, изложенные выше правила вполне достаточны для нахождения его вариации, даже если это выражение усложняется до бесконечности. Таким образом, в данной главе найдены вариации любых выражений с двумя переменными, как свободных от интегралов, так и содержащих один или несколько интегралов. Вопрос решен, следовательно, вполне удовлетворительно, и ничего больше желать не остается. Поэтому мы перейдем к выражениям, содержащим три переменные и прежде всего к таким, что соотношение между переменными дается двумя уравнениями, стало быть два переменных могут рассматриваться как функции третьего, все равно известно ли это двойное соотношение заранее, или оно подлечит определению из свойств вариации.



ГЛАВА V

О ВАРИАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТРИ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ПОСЛЕДНИМИ

ЗАДАЧА 12

123. Пусть предложено выражение, содержащее три переменные x, y, z вместе с их дифференциалами любого порядка. Найти его вариацию, получающуюся из вариаций всех трех переменных.

РЕШЕНИЕ

Пусть W — заданное выражение, для которого ищем сперва варьированное значение $W + \delta W$; оно получается, если вместо переменных x, y, z писать их варьированные значения

$$x + \delta x, \quad y + \delta y, \quad z + \delta z,$$

и соответственно вместо их дифференциалов писать

$$dx + d\delta x, \quad dy + d\delta y, \quad dz + d\delta z$$

и т. д. Если вычесть значение W , то остается вариация δW . Отсюда ясно, что эта вариация получается при помощи обычного дифференцирования, если только вместо знака дифференцирования d писать знак вариации δ . При этом безразлично, в каком месте между знаками дифференцирования ставить знак вариации δ , как мы уже выше доказали; поэтому можно будет ставить знак вариации всегда на последнее место, что при переходе к интегральным выражениям является наиболее удобным, как это в достаточной мере видно из того, что изложено выше относительно интегральных выражений, содержащих два переменных.

СЛЕДСТВИЕ 1

124. Так как можно и z , и y рассматривать как функции x , то если положить

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dx} = p,$$

получаем

$$\delta p = \frac{d\delta y - p d\delta x}{dx} \quad \text{и} \quad \delta p = \frac{d\delta z - p d\delta x}{dx},$$

а выведенные отсюда подобным же образом формулы не отличаются от приведенных выше.

СЛЕДСТВИЕ 2

125. Положим

$$\delta y - p \delta x = \omega \quad \text{и} \quad \delta z - p \delta x = w;$$

тогда

$$d\delta y - p d\delta x - q dx \delta x = d\omega \quad \text{и} \quad d\delta z - p d\delta x - q dx \delta x = dw,$$

где, конечно, принято, что

$$\frac{dp}{dx} = q \quad \text{и} \quad \frac{dp}{dx} = q.$$

Отсюда ясно, что

$$\delta p - q \delta x = \frac{d\omega}{dx} \quad \text{и} \quad \delta p - q \delta x = \frac{dw}{dx}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

126. Если далее положить

$$\frac{dq}{dx} = r; \quad \frac{dq}{dx} = r; \quad \frac{dr}{dx} = s; \quad \frac{dr}{dx} = \text{f} \quad \text{и т. д.}$$

получим подобным образом для постоянного dx ,

$$\delta q - r \delta x = \frac{d^2\omega}{dx^2}; \quad \delta q - r \delta x = \frac{d^2w}{dx^2};$$

$$\delta r - s \delta x = \frac{d^3\omega}{dx^3}; \quad \delta r - \text{f} \delta x = \frac{d^3w}{dx^3};$$

и т. д.

ПОЯСНЕНИЕ 1

127. Итак, если требуется варьировать выражение, имеющее конечное, бесконечное или исчезающее значение, то на основании этих правил вариация находится точно так же, как и выше; единственное отличие этих правил от вышеприведенных заключается в том, что приходится ввести двойного рода производные, из которых одни обозначаются латинскими буквами p, q, r, s и т. д., а другие — немецкими буквами p, q, r, f и т. д. Причиной этого является то обстоятельство, что здесь можно два переменных y и z рассматривать как функции x . Если, однако, задается всего одно уравнение между тремя координатами или же требуется найти это уравнение, то введенные здесь буквы p и p не имеют определенных значений, так как в этом случае дроби $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ могут принимать какие угодно значения. Но если эти буквы отбросить и оперировать самими дифференциалами, тогда вариация и в этом случае находится на основании изложенных в решении правил.

ПОЯСНЕНИЕ 2

128. Я уже отметил выше [§ 12—24], что случай трех переменных, соотношение между которыми определяется двумя уравнениями, существенно отличается от того случая, когда это соотношение определяется одним уравнением. Это различие лучше всего иллюстрировать геометрически, толкуя три переменные как три координаты, и такое число координат нужно вводить в вычисления не только тогда, когда вопрос относится к поверхностям, но и тогда, когда исследуются кривые, не лежащие в одной плоскости. А как раз в последнем случае, чтобы определить кривую требуются два уравнения между тремя координатами, так что любые две из них могут рассматриваться как функции третьей. Однако природа поверхности определяется уже только одним уравнением между тремя координатами, так что лишь какую-либо одну из них можно считать функцией остальных двух. Отсюда получается большое различие в самом исследовании. Таким образом, данная глава дает средства для нахождения кривых, не лежащих в одной плоскости и обладающих каким-либо свойством максимума или минимума.

ЗАДАЧА 13

129. Пусть V — какая угодно функция трех переменных x, y, z , а также их дифференциалов любого порядка, причем всем трем переменным придаются какие угодно вариации. Найти вариацию интеграла $\int V dx$.

РЕШЕНИЕ

Какие бы дифференциалы не входили в функцию V , мы можем их исключить при помощи подстановок

$$\begin{aligned} dy &= p dx; & dp &= q dx; & dq &= r dx; & dr &= s dx \text{ и т. д.,} \\ dz &= \rho dx; & d\rho &= \sigma dx; & d\sigma &= \tau dx; & d\tau &= \eta dx \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

и количество V будет тогда функцией конечных количеств x, y, z, p, q, r, s и т. д., ρ, σ, τ, η и т. д. Его дифференциал, следовательно, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} dV &= M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{ и т. д.} \\ &+ \mathfrak{N} dz + \mathfrak{P} d\rho + \mathfrak{Q} d\sigma + \mathfrak{R} d\tau + \mathfrak{S} d\eta + \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Путем замены знаков дифференциала d знаками δ получаем таким же образом вариацию δV . На основании вышесказанного и в этом случае трех переменных имеем

$$\delta \int V dx = \int (V d\delta x + dx \delta V) = V \delta x + \int (dx \delta V - dV \delta x).$$

После подстановки получим

$$\begin{aligned} \frac{dx \delta V - dV \delta x}{dx} &= M \delta x + N \delta y + P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{ и т. д.} \\ &+ \mathfrak{N} \delta z + \mathfrak{P} \delta \rho + \mathfrak{Q} \delta \sigma + \mathfrak{R} \delta \tau + \text{ и т. д.} \\ &- M \delta x - N p \delta x + P q \delta x - Q r \delta x - R s \delta x - \text{ и т. д.} \\ &- \mathfrak{N} \rho \delta x + \mathfrak{P} \sigma \delta x - \mathfrak{Q} \tau \delta x - \mathfrak{R} \eta \delta x - \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Полагая для краткости

$$\delta y - p \delta x = \omega \quad \text{и} \quad \delta z - r \delta x = \nu$$

и считая элемент dx постоянным, получаем на основании §§ 125 и 126:

$$\begin{aligned} \delta p - q \delta x &= \frac{d\omega}{dx}; & \delta p - q \delta x &= \frac{d\nu}{dx}; \\ \delta q - r \delta x &= \frac{d^2\omega}{dx^2}; & \delta q - r \delta x &= \frac{d^2\nu}{dx^2}; \\ \delta r - s \delta x &= \frac{d^3\omega}{dx^3}; & \delta r - s \delta x &= \frac{d^3\nu}{dx^3} \end{aligned}$$

и т. д.

Отсюда искомая вариация удобно выражается в следующей форме:

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int dx \left\{ \begin{aligned} N\omega + \frac{P d\omega}{dx} + \frac{Q d^2\omega}{dx^2} + \frac{R d^3\omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \\ \mathfrak{N}\nu + \frac{\mathfrak{P} d\nu}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} d^2\nu}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3\nu}{dx^3} + \text{и т. д.} \end{aligned} \right\}$$

Как и выше [§ 80—85], она приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= + \int \omega dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{и т. д.} \right) \\ &+ \int \nu dx \left(\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \text{и т. д.} \right) \\ &+ V \delta x + \omega \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ &+ \text{const} + \nu \left(\mathfrak{P} - \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{R}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{d\omega}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{d\nu}{dx} \left(\mathfrak{Q} - \frac{d\mathfrak{R}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{S}}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{d^2\omega}{dx^2} \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{d^2\nu}{dx^2} \left(\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{S}}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ &+ \frac{d^3\omega}{dx^3} (S - \text{и т. д.}) \\ &+ \frac{d^3\nu}{dx^3} (\mathfrak{S} - \text{и т. д.}) \\ &+ \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Характер этого выражения уже ясен из вышесказанного, и следует принять также во внимание то, что было сказано о прибавлении постоянной.

СЛЕДСТВИЕ 1

130. В этом решении оба переменных y и z должны рассматриваться как функции x , либо уже заранее известные, либо определяемые:

впоследствии по свойствам вариаций. Но интеграл $\int V dx$ имеет определенное значение только в том случае, когда как y , так и z определяются через x .

СЛЕДСТВИЕ 2

131. Если выражение $V dx$ само по себе интегрируемо, без предположения определенного соотношения между тремя переменными, вариация интеграла $\int V dx$ не может содержать никаких интегральных выражений, так что должно быть одновременно и

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{и т. д.} = 0,$$

и

$$\mathfrak{N} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \text{и т. д.} = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

132. Обратное, если эти два уравнения имеют место, это является критерием того, что дифференциальное выражение $V dx$ само по себе интегрируемо без предположения определенного соотношения между переменными.

ПРИМЕР

133. Чтобы лучше иллюстрировать этот критерий возьмем выражение такого вида, интегрируемое само по себе. Пусть

$$\int V dx = \frac{z dy}{x dz} = \frac{pz}{xp},$$

так что

$$V = -\frac{pz}{x^2p} + \frac{p}{x} + \frac{zq}{xp} - \frac{zpq}{xp^2}.$$

Продифференцировав, получаем $N = 0$ и

$$P = -\frac{z}{x^2p} + \frac{1}{x} - \frac{zq}{xp^2}; \quad Q = \frac{z}{xp}$$

и далее

$$\mathfrak{N} = -\frac{P}{x^2p} + \frac{q}{xp} - \frac{pq}{xp^2},$$

$$\mathfrak{P} = \frac{pz}{x^2p^2} - \frac{zq}{xp^2} + \frac{2zpq}{xp^3} \quad \text{и} \quad \mathfrak{Q} = -\frac{zp}{xp^2}.$$

В качестве первого уравнения, так как $N = 0$, должно быть

$$-\frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0, \quad \text{т. е.} \quad P - \frac{dQ}{dx} = \text{const};$$

в том, что это уравнение удовлетворяется, немедленно убеждаемся путем дифференцирования Q .

В качестве второго уравнения имеем

$$\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\Omega}{dx^2} = 0.$$

Поскольку отсюда следует

$$\int \mathfrak{R} dx = \mathfrak{P} - \frac{d\Omega}{dx},$$

то прежде всего необходимо, чтобы следующее выражение было интегрируемым:

$$\mathfrak{R} dx = -\frac{p dx}{x^2 p} + \frac{q dx}{xp} - \frac{\dot{p} dx}{xp^2},$$

откуда, в силу того, что $q dx = dp$, следует, что

$$\int \mathfrak{R} dx = \frac{p}{xp}.$$

Остается показать, что

$$\frac{d\Omega}{dx} = \mathfrak{P} - \int \mathfrak{R} dx = \frac{pz}{x^2 p^2} - \frac{zq}{xp^2} + \frac{2zp\dot{\Omega}}{xp^3} - \frac{p}{xp}.$$

Но продифференцировав $\Omega = -\frac{zp}{xp^2}$, мы получаем полное совпадение обеих частей равенства.

ПОЯСНЕНИЕ 1

134. Поскольку вопрос сводится к тому, чтобы интеграл $\int V dx$ принял максимальное или минимальное значение, то прежде всего обе интегральные части его вариации должны, и при том порознь, равняться нулю, так как вариации берутся любые; итак, вариация $\delta \int V dx$ всегда должна исчезать, и отсюда вытекают следующие два уравнения:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{и т. д.} = 0$$

и

$$\mathfrak{R} - \frac{d\mathfrak{P}}{dx} + \frac{d^2\Omega}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}}{dx^4} - \text{и т. д.} = 0.$$

Этим выражается двойное соотношение между тремя переменными x , y , z , так что y и z действительно могут рассматриваться как функции x . Но так как эти два уравнения являются дифференциальными уравнениями, и притом, как правило, порядка выше единицы, то при интегрировании появляются в формулах постоянные, и их столько, сколько составляет сумма порядков этих уравнений. Эти постоянные должны быть определены таким образом, чтобы для начала и для конца интегрирования выражения $\int V dx$ были выполнены определенные условия. А это сводится к тому, что внеинтегральные члены вариации должны

обращаться в нуль. Прежде всего надо определить постоянные в согласии с заданными для начала условиями, причем в соответствии с природой задачи, бесконечно малые¹⁾

$$\omega, \mathfrak{B}, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d\mathfrak{B}}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2}, \frac{d^2\mathfrak{B}}{dx^2} \text{ и т. д.}$$

обычно получают определенные значения. То же самое относится к концу пути интегрирования, и все эти [условия] определяют постоянные, введенные интегрированием.

ПОЯСНЕНИЕ 2

135. Весьма полезно заметить здесь, что все члены, из которых состоит вариация $\delta \int V dx$, автоматически делятся на два класса, из которых один содержит только выражения, связанные с переменностью y , т. е. с его зависимостью от x , причем так, как если бы количество z рассматривалось как постоянное, второй же класс содержит аналогичные выражения, связанные только с переменностью z , как если бы постоянным было количество y . Отсюда можно заключить, что если ввести еще четвертое переменное v , которое также можно рассматривать как функцию x , то к этим двум классам нужно будет прибавить третий, содержащий аналогичные члены, зависящие только от переменности v . Таким образом, данное здесь решение можно считать таким, которое охватывает какое угодно число переменных, лишь бы между этими переменными было задано столько уравнений, что их можно было рассматривать как функции одной из них. Стало быть, хотя в этой главе мы говорим только о трех переменных, следует понимать, что все это относится к любому их числу, если только задаются такие условия, в силу которых по одному переменному определяются все остальные. Но такие условия по необходимости связаны с интегральным выражением вида $\int V dx$. Действительно, если в количество V входят несколько переменных, то выражение $\int V dx$ может принимать определенное значение только в том случае, когда все переменные можно рассматривать как функции одного из них, например x . Однако совсем иначе обстоит дело с интегральными выражениями, в которые входят два или большее число переменных, совершенно не зависящих друг от друга.

ЗАДАЧА 14

136. Пусть функция V содержит, кроме переменных x, y, z и их дифференциалов любого порядка, еще интегральное выражение $v = \int \mathfrak{B} dx$, где \mathfrak{B} есть какая угодно функция тех же переменных x, y, z и их дифференциалов. Найти вариацию интеграла $\int V dx$.

¹⁾ У Эйлера — particulae, т. е. частицы.

РЕШЕНИЕ

Чтобы по крайней мере исключить из выкладок дифференциалы, положим, как и выше:

$$\begin{aligned} dy &= p dx; & dp &= q dx; & dq &= r dx; & dr &= s dx & \text{и т. д.}, \\ dz &= \wp dx; & d\wp &= \varrho dx; & d\varrho &= \tau dx; & d\tau &= \upsilon dx & \text{и т. д.}, \end{aligned}$$

так что после дифференцирования функции V получается

$$\begin{aligned} dV &= L dv + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \dots \text{и т. д.} \\ &+ \mathfrak{R} dz + \mathfrak{P} d\wp + \mathfrak{Q} d\varrho + \mathfrak{R} d\tau + \dots \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Вместе с тем, так как $dv = \mathfrak{B} dx$, имеем

$$\begin{aligned} d\mathfrak{B} &= M' dx + N' dy + P' dp + Q' dq + R' dr + \dots \text{и т. д.} \\ &+ \mathfrak{N}' dz + \mathfrak{P}' d\wp + \mathfrak{Q}' d\varrho + \mathfrak{R}' d\tau + \dots \text{и т. д.}, \end{aligned}$$

где мы вследствие нехватки букв пользовались теми же буквами, что и выше, но со штрихом. Отсюда мы получим одновременно вариации количеств V и \mathfrak{B} . Если требуется найти вариацию $\delta \int V dx$, то имеем прежде всего, как выше,

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int (dx \delta V - dV \delta x),$$

где значение V не отличается от предыдущего за исключением того, что в дифференциал dV теперь входит слагаемое $L dv = L \mathfrak{B} dx$, а в вариацию δV — слагаемое $L \delta v = L \delta \int \mathfrak{B} dx$; искомая вариация $\delta \int V dx$ тоже выражается, как выше, если только добавить член

$$\int L (dx \delta \int \mathfrak{B} dx - \mathfrak{B} dx \delta x) = \int L dx (\delta \int \mathfrak{B} dx - \mathfrak{B} \delta x).$$

Но так как интегральное выражение $\int \mathfrak{B} dx$ — такое же, как рассмотренное в предыдущей задаче, то, если положить, как и там,

$$\delta y - p \delta x = \omega \quad \text{и} \quad \delta z - \wp \delta x = \nu,$$

и принять элемент dx постоянным, получим

$$\delta \int \mathfrak{B} dx - \mathfrak{B} \delta x = \int dx \left\{ \begin{aligned} &N' \omega + \frac{P' d\omega}{dx} + \frac{Q' d^2 \omega}{dx^2} + \frac{R' d^3 \omega}{dx^3} + \dots \text{и т. д.} \\ &\mathfrak{N}' \nu + \frac{\mathfrak{P}' d\nu}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}' d^2 \nu}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R}' d^3 \nu}{dx^3} + \dots \text{и т. д.} \end{aligned} \right\}$$

Положим далее, что интеграл $\int L dx = I$ взят таким образом, что он в начальной точке интегрирования исчезает, в то время как в конечной точке имеем $I = A$; тогда получим на всем протяжении интегрирования¹⁾, что

$$\int L dx (\delta \int \mathfrak{B} dx - \mathfrak{B} \delta x) = \int (A - I) dx \left\{ \begin{aligned} &N' \omega + \frac{P' d\omega}{dx} + \frac{Q' d^2 \omega}{dx^2} + \dots \text{и т. д.} \\ &\mathfrak{N}' \nu + \frac{\mathfrak{P}' d\nu}{dx} + \frac{\mathfrak{Q}' d^2 \nu}{dx^2} + \dots \text{и т. д.} \end{aligned} \right\}$$

¹⁾ pro tota integratione extensione, т. е. в любой точке пути интегрирования, иначе говоря, для любого допустимого значения независимого переменного.

Теперь введем следующие сокращения:

$$N + (A - I)N' = N^0; \quad \mathfrak{N} + (A - I)\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}^0;$$

$$P + (A - I)P' = P^0; \quad \mathfrak{P} + (A - I)\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^0;$$

$$Q + (A - I)Q' = Q^0; \quad \mathfrak{Q} + (A - I)\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}^0;$$

$$R + (A - I)R' = R^0 \quad \mathfrak{R} + (A - I)\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}^0$$

и т. д.

и т. д.

Тогда, очевидно, искомая вариация выразится в виде

$$\delta \int V dx = V \delta x + \int dx \left\{ \begin{array}{l} N^0 \omega + \frac{P^0 d\omega}{dx} + \frac{Q^0 d^2\omega}{dx^2} + \frac{R^2 d^3\omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \\ \mathfrak{N}^0 \omega + \frac{\mathfrak{P} d\omega}{dx} + \frac{\mathfrak{Q} d^2\omega}{dx^2} + \frac{\mathfrak{R} d^3\omega}{dx^3} + \text{и т. д.} \end{array} \right\}$$

Развертывая это выражение так, как сделано выше, получим:

$$\begin{aligned} \delta \int V dx = & + \int \omega dx \left(N^0 - \frac{dP^0}{dx} + \frac{d^2Q^0}{dx^2} - \frac{d^3R^0}{dx^3} + \frac{d^4S^0}{dx^4} - \text{и т. д.} \right) \\ & + \int \omega dx \left(\mathfrak{N}^0 - \frac{d\mathfrak{P}^0}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{Q}^0}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{R}^0}{dx^3} + \frac{d^4\mathfrak{S}^0}{dx^4} - \text{и т. д.} \right) \\ & + V \delta x + \omega \left(P^0 - \frac{dQ^0}{dx} + \frac{d^2R^0}{dx^2} - \frac{d^3S^0}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ & + \text{const} + \omega \left(\mathfrak{P}^0 - \frac{d\mathfrak{Q}^0}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{R}^0}{dx^2} - \frac{d^3\mathfrak{S}^0}{dx^3} + \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{d\omega}{dx} \left(Q^0 - \frac{dR^0}{dx} + \frac{d^2S^0}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{d\omega}{dx} \left(\mathfrak{Q}^0 - \frac{d\mathfrak{R}^0}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{S}^0}{dx^2} - \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{d^2\omega}{dx^2} \left(R^0 - \frac{dS^0}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{d^2\omega}{dx^2} \left(\mathfrak{R}^0 - \frac{d\mathfrak{S}^0}{dx} + \text{и т. д.} \right) \\ & + \frac{d^3\omega}{dx^3} (S^0 - \text{и т. д.}) \\ & + \frac{d^3\omega}{dx^3} (\mathfrak{S}^0 - \text{и т. д.}) \\ & + \text{и т. д.,} \end{aligned}$$

и пусть никому не режет глаз знак нуля при буквах — он означает не показатель и употреблен только для того, чтобы их отличать от тех же букв, но лишенных его.

СЛЕДСТВИЕ 1

137. Итак, если интеграл $\int V dx$ должен принимать максимальное или минимальное значение, то требуется приравнять нулю первые два члена найденного для вариации выражения, так что получается два дифференциальных уравнения, при помощи которых находится искомая зависимость обоих переменных y и z от x .

СЛЕДСТВИЕ 2

138. Хотя здесь условия, которые предполагаются для пределов интегрирования, покамест явно не используются, они все же входят в расчет в скрытой форме, поскольку I и A определены с использованием этих пределов. Но при исследовании дифференциальных уравнений эти условия снова выпадают из расчета; в самом деле, если исключается интегральное выражение $\int L dx = I$, то исключается также постоянное количество A .

СЛЕДСТВИЕ 3

139. Однако, когда эти дифференциальные уравнения решены и притом в самом общем виде, так что в формулы входит столько произвольных постоянных, сколько требуется выполнить интегрирование, тогда надо обратиться к условиям на обеих конечных точках интегрирования выражения $\int V dx$, так как по этим условиям должны быть определены указанные постоянные из остальных внеинтегральных членов вариации.

ПОЯСНЕНИЕ

140. Решение этой задачи выполнено таким образом, что достаточно ясно, как следует получать вариации более сложных выражений, например, когда функция V содержит большее число интегральных выражений или же когда в состав функции \mathfrak{B} входят новые интегралы. Точно так же теперь ясно, как надо находить вариации тогда, когда подобные интегральные выражения содержат более трех переменных, и заниматься более подробно этим вопросом не только скучно, но и излишне. Поэтому перейдем к другой, гораздо более сложной части этой теории, когда в силу имеющихся соотношений между переменными два или большее число переменных совершенно не зависят друг от друга.



ГЛАВА VI

О ВАРИАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТРИ ПЕРЕМЕННЫХ, СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ КОТОРЫМИ ВЫРАЖАЕТСЯ ОДНИМ ЕДИНСТВЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ

ЗАДАЧА 15

141. Пусть задано уравнение между тремя переменными x , y и z , которым придаются какие угодно вариации δx , δy , δz . Найти вариации производных первого порядка

$$p = \left(\frac{dz}{dx} \right) \quad \text{и} \quad p' = \left(\frac{dz}{dy} \right).$$

РЕШЕНИЕ

Поскольку задано одно единственное уравнение между тремя переменными, то какое-либо из них может рассматриваться как функция остальных двух. Итак, пусть z — функция x и y . Здесь нужно помнить, что выражение $\left(\frac{dz}{dx} \right) = p$ обозначает отношение дифференциалов количеств z и x , если в заданном уравнении только они рассматриваются как переменные, а третье количество y рассматривается как постоянное: аналогично определяется второе выражение $p' = \left(\frac{dz}{dy} \right)$. Подобным образом и вариации δx , δy , δz можно рассматривать как бесконечно малые функции двух переменных x и y , так как если они и зависят от третьего переменного z , то оно само является функцией x и y . Отсюда ясно, что означают выражения

$$\left(\frac{d\delta z}{dx} \right), \quad \left(\frac{d\delta z}{dy} \right),$$

а также

$$\left(\frac{d\delta x}{dx} \right), \left(\frac{d\delta x}{dy} \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{d\delta y}{dx} \right), \left(\frac{d\delta y}{dy} \right).$$

Поскольку варьированное значение выражения $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ есть

$$p + \delta p = \frac{d(z + \delta z)}{d(x + \delta x)},$$

то, поскольку здесь переменное y рассматривается как постоянное, имеем при этом условии

$$p + \delta p = \left(\frac{dz + d\delta z}{dx + d\delta x}\right) = \left(\frac{dx}{dx} + \frac{d\delta z}{dx} - \frac{dz d\delta x}{dx^2}\right),$$

так как вариации δdx и δdz исчезают по сравнению с dx и dz ¹⁾. Отсюда, на основании того, что $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$, получаем искомую вариацию

$$\delta p = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) - \left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot \left(\frac{d\delta x}{dx}\right) = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) - p \left(\frac{d\delta x}{dx}\right).$$

Смысл этих формул ясен, поскольку здесь δx и δz являются функциями x и y , а y рассматривается как постоянное. Подобным же образом находим, что

$$\delta p' = \left(\frac{d\delta y}{dy}\right) - p' \left(\frac{d\delta x}{dy}\right),$$

где уже переменное x рассматривается как постоянное.

СЛЕДСТВИЕ 1

142. Здесь мы все сводим к двум переменным x и y и рассматривали как их функции не только третье переменное z , но также и все три вариации δx , δy , δz . Однако ясно, что эти три переменные можно как угодно перемещать между собой.

СЛЕДСТВИЕ 2

143. Достаточно пользоваться вышеуказанными двумя формулами для двух первых производных, так как остальные [первые производные] выражаются через них, а именно

$$\left(\frac{dx}{dz}\right) = \frac{1}{p}; \quad \left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{p'}$$

и

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-p}{p'}, \quad \left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{-p'}{p},$$

где p и p' суть функции x и y .

СЛЕДСТВИЕ 3

144. Если найдены вариации производных

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{и} \quad p' = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

¹⁾ В первом издании вместо dx и dz напечатано соответственно x и z . [Ф. Э.]

то вариации остальных производных легко выражаются через них, а именно:

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{dx}{dz}\right) &= -\frac{\delta p}{p^2} = -\frac{1}{p^2}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + \frac{1}{p}\left(\frac{d\delta x}{dx}\right), \\ \delta\left(\frac{dy}{dz}\right) &= -\frac{\delta p'}{p'^2} = -\frac{1}{p'^2}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) + \frac{1}{p'}\left(\frac{d\delta y}{dy}\right), \\ \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) &= -\frac{\delta p}{p'} + \frac{p\delta p'}{p'^2} = -\frac{1}{p'}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + \frac{p}{p'}\left(\frac{d\delta x}{dx}\right) + \frac{p}{p'^2}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) - \frac{p}{p'}\left(\frac{d\delta y}{dy}\right).\end{aligned}$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

145. Прежде всего я замечу здесь, что эти дифференциальные выражения имеют определенный смысл только тогда, когда два дифференциала сопоставляются друг другу так, что при этом третье переменное, если их три, либо все остальные переменные, если их больше трех, рассматриваются как постоянные. В данном случае, когда задается или, по крайней мере, предполагается заданным одно единственное уравнение между тремя переменными x , y и z , выражение $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ имеет определенный смысл, только когда третье переменное y считается постоянным, что обычно отмечают, заключая это выражение в скобки; хотя без ущерба можно было бы их опустить, потому что никакого иного смысла нельзя придать этому выражению. Чтобы лучше пояснить вопрос, допустим, что задано некоторое уравнение между тремя переменными x , y , z , и из него можно выделить z таким образом, чтобы значение z равнялось определенной функции x и y . Если взять дифференциал этой функции, то получим $dz = p dx + p' dy$, где p и p' — определенные функции x и y , и притом такие, что $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right)$. Если теперь рассматривать y как постоянное, то имеем $dz = p dx$, то есть $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$; если же рассматривать как постоянное x , то получим $p' = \left(\frac{dz}{dy}\right)$. Далее ясно, что если рассматривать z как постоянное, то получим $\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{p'}$, но такого рода выражения надлежит исключить, когда z , а также вариации δx , δy и δz рассматриваются как функции x и y .

ПОЯСНЕНИЕ 2

146. Этот предмет можно еще яснее иллюстрировать при помощи геометрии. Пусть наши три переменные x , y , z обозначают три координаты Ax , Xy , YZ (см. рис. 4, стр. 318). Тогда заданное между ними уравнение определяет некоторую поверхность, на которой находится конец координаты $YZ = z$, которую можно рассматривать как определенную функцию остальных двух координат $Ax = x$ и $Xy = y$, так что если придавать произвольные значения координатам x и y , то третья $YZ = z$ определяется из заданного уравнения. Если теперь рассматривается какая-либо другая поверхность, бесконечно мало отличающаяся от первой, то мы сравниваем эти обе поверхности таким образом, что любая точка z измененной поверхности сопоставляется с некоторой точкой Z

заданной поверхности, но так, чтобы расстояние Zz было бесконечно малым. Тогда появятся вариации, которые равны

$$\delta x = Ax - AX = Xx; \quad \delta y = xy - XY \quad \text{и} \quad \delta z = yz - YZ,$$

и поскольку они полностью в нашем произволе и никоим образом друг от друга не зависят, их можно рассматривать как функции x и y , причем ни одна из них не зависит от остальных, и все они задаются совершенно произвольно. Так как отсюда понятно, что соседняя поверхность должна отличаться от заданной, то никак не должно быть

$$\delta z = p \delta x + p' \delta y,$$

если на заданной поверхности имеем

$$dz = p dx + p' dy,$$

в противном случае точка z будет находиться на прежней поверхности. Поэтому в качестве вариаций δx , δy и δz надо задать три функции переменных x и y таким образом, чтобы имело место не равенство

$$\delta z = p \delta x + p' \delta y,$$

а отклонение от этого равенства. При этом следует особенно иметь в виду, что эти функции настолько общие, что разрывные при этом не исключаются, и вариация может быть отлична от нуля, если угодно, в одной единственной точке или, по крайней мере, на очень малом участке. И, чтобы здесь уже не оставалось повода для сомнений, особо отметим, что из предположения, что z является такой функцией x и y , для которой

$$dz = p dx + p' dy,$$

вовсе не следует равенство

$$\delta z = p \delta x + p' \delta y,$$

как мы полагали выше, потому что здесь z придается своя вариация никак не зависящая от вариаций x и y .

ЗАДАЧА 16

147. Пусть задано уравнение между тремя переменными x , y , z , которым приписываются произвольные вариации δx , δy , δz . Найти вариации производных второго порядка

$$q = \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right), \quad q' = \left(\frac{d^2 z}{dx dy} \right) \quad \text{и} \quad q'' = \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right).$$

РЕШЕНИЕ ¹⁾

Здесь опять z рассматривается как функция x и y ; точно так же функциями этих количеств являются все три вариации δx , δy , δz , друг от друга не зависящие. В предыдущей проблеме мы положили

$$p = \left(\frac{dz}{dx} \right) \quad \text{и} \quad p' = \left(\frac{dz}{dy} \right).$$

¹⁾ Излагаемое ниже решение содержит ошибку, исправленную впоследствии Пуассоном. Подробнее см. в этом томе статью переводчика, стр. 442—443.

С помощью этих выражений находим, что

$$q = \left(\frac{dp}{dx} \right), \quad q' = \left(\frac{dp}{dy} \right) = \left(\frac{dp'}{dx} \right) \quad \text{и} \quad q'' = \left(\frac{dp'}{dy} \right),$$

причем мы здесь должны учитывать выражения для δp и $\delta p'$, которые мы получили выше:

$$\delta p = \left(\frac{d\delta z}{dx} \right) - p \left(\frac{d\delta x}{dx} \right) \quad \text{и} \quad \delta p' = \left(\frac{d\delta z}{dy} \right) - p' \left(\frac{d\delta y}{dy} \right).$$

Идя подобным же образом дальше, мы получим сперва

$$\delta q = \left(\frac{d\delta p}{dx} \right) - q \left(\frac{d\delta x}{dx} \right),$$

где $\left(\frac{d\delta p}{dx} \right)$ находится путем дифференцирования значения δp при постоянном y и деления дифференциала на dx . Отсюда получается

$$\left(\frac{d\delta p}{dx} \right) = \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2} \right) - q \left(\frac{d\delta x}{dx} \right) - p \left(\frac{d^2\delta x}{dx^2} \right),$$

поскольку $q = \left(\frac{dp}{dx} \right)$.

Отсюда заключаем, что

$$\delta q = \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2} \right) - 2q \left(\frac{d\delta x}{dx} \right) - p \left(\frac{d^2\delta x}{dx^2} \right).$$

Таким же способом, поскольку $q' = \left(\frac{dp}{dy} \right)$, находим

$$\delta q' = \left(\frac{d\delta p}{dy} \right) - q' \left(\frac{d\delta y}{dy} \right),$$

но

$$\left(\frac{d\delta p}{dy} \right) = \left(\frac{d^2\delta z}{dx dy} \right) - q' \left(\frac{d\delta x}{dx} \right) - p \left(\frac{d^2\delta x}{dx dy} \right),$$

поэтому

$$\delta q' = \left(\frac{d^2\delta z}{dx dy} \right) - q' \left(\frac{d\delta x}{dx} \right) - q' \left(\frac{d\delta y}{dy} \right) - p \left(\frac{d^2\delta x}{dx dy} \right).$$

Для второго значения $q' = \left(\frac{dp'}{dx} \right)$ тем же способом получим

$$\delta q' = \left(\frac{d^2\delta z}{dx dy} \right) - q' \left(\frac{d\delta x}{dx} \right) - q' \left(\frac{d\delta y}{dy} \right) - p' \left(\frac{d^2\delta y}{dx dy} \right).$$

Это выражение отличается от предыдущего, вследствие чего требуется более тщательная проверка¹⁾. Что же касается третьего выражения $q'' = \left(\frac{dp'}{dy} \right)$, мы получаем, что

$$\delta q'' = \left(\frac{d^2\delta z}{dy^2} \right) - 2q'' \left(\frac{d\delta y}{dy} \right) - p' \left(\frac{d^2\delta y}{dy^2} \right).$$

¹⁾... Cujus valoris ab illo discrepantia incommodum involvit mox accuratius examinandum. Как Эйлер пытается выйти из положения, видно из следующего параграфа. См. об этом статью переводчика в этом томе, стр. 442—443.

ПОЯСНЕНИЕ 1

148. Исследуя причину расхождения в значениях вариации $\delta q'$, проистекающего из двойного выражения [количества q'],

$$q' = \left(\frac{dp}{dy} \right) = \left(\frac{dp'}{dx} \right),$$

замечу следующее: в формулах, выражающих вариации, либо количество x , либо количество y считается постоянным, как это показывает знаменатель каждого члена. Но если мы оставляем количество x постоянным, то, как бы при этом ни изменялось количество y , суть дела требует, чтобы и вариации количества x не изменялись. Однако именно это случается, если вариация δx будет зависеть также от y , и то же самое нужно иметь в виду относительно количества y , когда оно считается постоянным. Отсюда ясно, что если допускать, чтобы вариации δx и δy зависели от обоих переменных x и y , то это будет находиться в противоречии с предположением, что то или другое переменное считается постоянным. Таким образом, можно выйти из положения только так, что мы вариацию x будем считать независимой от y , а вариацию δy независимой от x . Но если δx определяется только через x , а δy только через y , то будет и

$$\left(\frac{d\delta x}{dy} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d\delta y}{dx} \right) = 0,$$

а также

$$\left(\frac{d^2\delta x}{dx dy} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2\delta y}{dx dy} \right) = 0$$

и расхождение между двумя найденными значениями $\delta q'$ исчезает.

ПОЯСНЕНИЕ 2

149. Мы избегнем счастливейшим образом всех сомнений в этом вопросе, если будем придавать вариации только количеству z , а остальные количества x и y будем оставлять не варьированными, так что $\delta x = 0$ и $\delta y = 0$, чем мы не только облегчим вычисления, но и вряд ли ограничим применение вариационного исчисления. Ибо если мы сравниваем поверхность с другой очень близкой к ней, то ничто нам не мешает ставить в соответствие каждой точке заданной поверхности такую точку варьированной поверхности, которая имеет те же координаты x и y , так что только третья координата z претерпевает вариацию. Это предположение при переходе к интегральным выражениям тем более необходимо, что мы всегда приходим к таким интегральным выражениям, которые требуют двойного интегрирования, причем один раз только x , а другой раз только y рассматривается как переменное. Если, следовательно, не считать вариации этих количеств равными нулю, то возникают очень большие неудобства в выкладках. Данная часть теории и без того чрезвычайно трудна и будет мало пользы от того, если мы еще увеличим эти трудности. Поэтому я буду вести изложение таким образом, что в дальнейшем буду всегда считать вариации количеств x и y равными нулю и буду предполагать лишь, что к третьему переменному z прибавляется какая угодно вариация δz , которая является функцией x и y , или непрерывной, или прерывной.

ЗАДАЧА 17

150. Пусть z есть какая угодно функция x и y , и ей придается вариация δz , также зависящая от x и y ; найти вариации всех производных любого порядка.

РЕШЕНИЕ

Для производных первого порядка имеем два выражения

$$p = \left(\frac{dz}{dx} \right) \quad \text{и} \quad p' = \left(\frac{dz}{dy} \right);$$

их вариации при отсутствии вариаций y количеств x и y , согласно выше найденному, имеют следующие значения:

$$\delta p = \left(\frac{d\delta x}{dx} \right) \quad \text{и} \quad \delta p' = \left(\frac{dz}{dy} \right).$$

Для производных второго порядка имеем следующие три выражения:

$$q = \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right), \quad q' = \left(\frac{d^2 z}{dx dy} \right) \quad \text{и} \quad q'' = \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right),$$

так что

$$q = \left(\frac{dp}{dx} \right), \quad q' = \left(\frac{dp}{dy} \right) = \left(\frac{dp'}{dx} \right) \quad \text{и} \quad q'' = \left(\frac{dp'}{dy} \right).$$

Их вариации, согласно предыдущей задаче, поскольку $\delta x = 0$ и $\delta y = 0$, равны

$$\delta q = \left(\frac{d^2 \delta z}{dx^2} \right), \quad \delta q' = \left(\frac{d^2 \delta z}{dx dy} \right), \quad \delta q'' = \left(\frac{d^2 \delta z}{dy^2} \right).$$

Подобным же образом при переходе к производным третьего порядка имеем следующие четыре выражения:

$$r = \left(\frac{d^3 z}{dx^3} \right), \quad r' = \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy} \right), \quad r'' = \left(\frac{d^3 z}{dx dy^2} \right), \quad r''' = \left(\frac{d^3 z}{dy^3} \right),$$

вариации которых, очевидно, выражаются в виде

$$\delta r = \left(\frac{d^3 \delta z}{dx^3} \right), \quad \delta r' = \left(\frac{d^3 \delta z}{dx^2 dy} \right), \quad \delta r'' = \left(\frac{d^3 \delta z}{dx dy^2} \right), \quad \delta r''' = \left(\frac{d^3 \delta z}{dy^3} \right),$$

откуда непосредственно видно, как находятся вариации производных более высокого порядка.

СЛЕДСТВИЕ 1

151. Отсюда уже ясно, что в общем случае производная любого порядка

$$\left(\frac{d^{\mu+\nu} z}{dx^{\mu} dy^{\nu}} \right)$$

имеет вариацию

$$\left(\frac{d^{\mu+\nu} \delta z}{dx^{\mu} dy^{\nu}} \right)$$

и в этом виде содержатся все предыдущие формулы.

СЛЕДСТВИЕ 2

152. Отсюда также ясно, что путем введения вместо дифференциалов первого порядка букв p, p' , вместо дифференциалов второго порядка букв q, q', q'' , вместо дифференциалов третьего порядка букв r, r', r'', r''' , вместо дифференциалов четвертого порядка букв s, s', s'', s''', s^{IV} и т. д. мы исключили дифференциалы из формул, как мы исключали и выше дифференциалы введения подобных букв.

ПОЯСНЕНИЕ

153. Так как оба переменных x и y совершенно не зависят друг от друга, так что одно из них может сохранять постоянное значение, в то время как второе принимает все возможные для него значения, то очевидно, что дифференциальное выражение $\frac{dy}{dx}$, поскольку оно не будет иметь определенного смысла, никогда не сможет встретиться в нашем исчислении. Напротив, поскольку количество z является определенной функцией x и y , выражения $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ и остальные выше рассмотренные имеют определенный смысл, и только они могут встречаться в [нашем] исчислении. Далее, так как все относящиеся к данной теории вопросы таковы, что z может рассматриваться как функция x и y , то полностью исключаются также выражения такие, как $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, где количество z считается постоянным, и всякие иные выражения, кроме упомянутых выше. Таким образом, все члены, свободные от интегралов, кроме переменных x, y, z , содержат только те дифференциальные выражения, вариации которых были выше даны.

ЗАДАЧА 18

154. Пусть z — функция x и y , и пусть ей придастся вариация δz , зависящая каким-либо образом от x и y . Пусть далее V — произвольная функция переменных x, y, z , а также их дифференциалов любого порядка. Найти вариацию δV .

РЕШЕНИЕ

Чтобы из выражения V исключить все дифференциалы, положим как мы делали до сих пор,

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad p' = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

$$q = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \quad q' = \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right), \quad q'' = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right),$$

$$r = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right), \quad r' = \left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right), \quad r'' = \left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right), \quad r''' = \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$$

и т. д.

Для вариаций этих выражений, зависящих от вариаций z , получаем, вводя для простоты обозначение $\delta z = \omega$, причем это количество надо

рассматривать как произвольную функцию переменных x и y :

$$\begin{aligned}\delta p &= \left(\frac{d\omega}{dx} \right), & \delta p' &= \left(\frac{d\omega}{dy} \right), \\ \delta q &= \left(\frac{d^2\omega}{dx^2} \right), & \delta q' &= \left(\frac{d^2\omega}{dx dy} \right), & \delta q'' &= \left(\frac{d^2\omega}{dy^2} \right), \\ \delta r &= \left(\frac{d^3\omega}{dx^3} \right), & \delta r' &= \left(\frac{d^3\omega}{dx^2 dy} \right), & \delta r'' &= \left(\frac{d^3\omega}{dx dy^2} \right), & \delta r''' &= \left(\frac{d^3\omega}{dy^3} \right),\end{aligned}$$

и т. д.

После этих подстановок заданная функция V становится функцией количеств $x, y, z, p, p', q, q', q'', r, r', r'', r'''$ и т. д. Стало быть ее дифференциал имеет такой вид:

$$\begin{aligned}dV &= L dx + M dy + N dz + P dp + Q dq + R dr \\ &\quad + P' dp' + Q' dq' + R' dr' \\ &\quad \quad + Q'' dq'' + R'' dr'' \\ &\quad \quad \quad + R''' dr'''\end{aligned}$$

и т. д.

Теперь, так как выражение V варьируется лишь постольку, поскольку варьируются входящие в него количества, а оба переменных x и y остаются неизменными, то искомая вариация будет

$$\begin{aligned}\delta V &= N \delta z + P \delta p + Q \delta q + R \delta r \\ &\quad + P' \delta p' + Q' \delta q' + R' \delta r' \\ &\quad \quad + Q'' \delta q'' + R'' \delta r'' \\ &\quad \quad \quad + R''' \delta r'''\end{aligned}$$

и т. д.

Если же вместо вариации δz писать ω , то после подстановки найденных выше вариаций получим:

$$\begin{aligned}\delta V &= N\omega + P \left(\frac{d\omega}{dx} \right) + Q \left(\frac{d^2\omega}{dx^2} \right) + R \left(\frac{d^3\omega}{dx^3} \right) \\ &\quad + P' \left(\frac{d\omega}{dy} \right) + Q' \left(\frac{d^2\omega}{dx dy} \right) + R' \left(\frac{d^3\omega}{dx^2 dy} \right) \\ &\quad \quad + Q'' \left(\frac{d^2\omega}{dy^2} \right) + R'' \left(\frac{d^3\omega}{dx dy^2} \right) \\ &\quad \quad \quad + R''' \left(\frac{d^3\omega}{dy^3} \right)\end{aligned}$$

и т. д.

Закон образования этого выражения, очевиден и в случае, когда встречаются дифференциалы еще более высоких порядков.

СЛЕДСТВИЕ 1

155. Так как ω рассматривается как функция переменных x и y , то смысл отдельных слагаемых, составляющих вариацию δV , является вполне определенным, и, следовательно, последняя вариация должна считаться вполне определенной.

СЛЕДСТВИЕ 2

156. Каким бы образом ни входили дифференциалы в выражение V , поскольку оно должно считаться принимающим вполне определенное значение, из него всегда могут быть исключены дифференциалы при помощи выше указанных подстановок.

СЛЕДСТВИЕ 3

157. Если наши три переменные отнести к некоторой поверхности, так что они будут ее координатами, $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ (рис. 6), то одна только координата $YZ = z$ должна везде получать бесконечно малое приращение $Zz = \delta z = \omega$, так что точки z попадают на другую поверхность, бесконечно мало отличающуюся от заданной.

ПОЯСНЕНИЕ

158. Здесь может возникнуть следующее сомнение: количество z мы рассматриваем как функцию x и y ; поскольку мы количествам x и y не придаем никаких вариаций, то после подстановки в выражение V вместо z его значения, зависящего от x и y , получается функция одних только x и y , и может казаться, что тогда не возникнет никакой вариации. Но нужно иметь в виду, что хотя z рассматривается как функция x и y , эта функция чаще всего неизвестна, а именно тогда, когда еще только требуется определить ее из вариационного условия. Если она, напротив, известна заранее, то при определении вариации функцию z все же следует вначале рассматривать как неизвестную и никак не следует подставлять вместо нее ее значение, выраженное через x и y , прежде чем не будет найдена ее вариация, так как последняя зависит только от z .

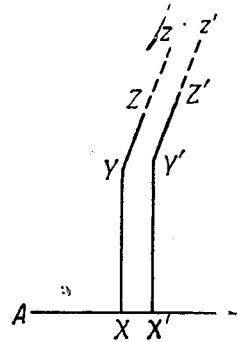


Рис. 6.



ГЛАВА VII

**О ВАРИАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ,
СОДЕРЖАЩИХ ТРИ ПЕРЕМЕННЫХ, ИЗ КОТОРЫХ
ОДНА РАССМАТРИВАЕТСЯ КАК ФУНКЦИЯ
ОСТАЛЬНЫХ ДВУХ**

ЗАДАЧА 19

159. Разъяснить природу указанных интегральных выражений и объяснить способ, при помощи которого находятя их вариации.

РЕШЕНИЕ

Интегральные выражения, которые встречаются в такого рода вычислениях, сильно отличаются от тех, которые обычно задаются в случае двух переменных, поскольку мы имеем здесь три переменных x , y и z , из которых одно — z — рассматривается как функция двух остальных x и y , хотя при нахождении вариации эта функция должна рассматриваться как неизвестная. В самом деле, если налицо интеграл вида $\int V dx$, где V содержит два переменных x и y , из которых y зависит от x , то мы можем рассматривать его как нечто вроде суммы всех элементарных значений $V dx$ для всех значений x . А когда налицо три переменных x , y и z , из которых z зависит от x и y , то соответствующие интегралы получаются, если собрать все элементы, относящиеся ко всем значениям как x , так и y , и таким образом здесь требуется двойное интегрирование: одно по всем значениям x , а другое — по всем значениям y . Таким образом, эти интегралы должны иметь вид $\iint V dx dy$, что обозначает двойное интегрирование. Последнее должно быть выполнено таким образом, что сперва переменное y рассматривается как постоянное, а интеграл $\int V dx$ вычисляется для определенных пределов; и так как при этом x принимает либо заданное значение, либо зависящее от y , то интеграл $\int V dx$ превращается в функцию только от y . Остается только эту функцию умножить на dy и об-

разовать интеграл $\int dy \int V dx$. Итак, этот интеграл $\int dy \int V dx$ должен рассматриваться как эквивалентный интегралу $\iint V dx dy$. Можно также, в обратном порядке, вначале рассматривать количество x как постоянное и вычислить интеграл $\int V dy$ для предписанных значений; этот интеграл можно рассматривать как функцию x и получить интеграл $\int dx \int V dy$. При этом безразлично, каким способом воспользоваться для получения двойного интеграла $\iint V dx dy$.

Поскольку в данном разделе встречаются только интегралы вида $\iint V dx dy$, то весь вопрос сводится к тому, чтобы показать, как надо находить их вариации. Но поскольку мы принимаем, что количества x и y не получают вариаций, то из вышедоказанного легко следует, что

$$\delta \iint V dx dy = \iint \delta V dx dy,$$

где δV обозначает вариацию V . Здесь снова нужно двойное интегрирование, которое выполняется вышеуказанным способом.

СЛЕДСТВИЕ 1

160. Если положим $\iint V dx dy = W$, то поскольку $\int dx \int V dy = W$, получим, продифференцировав только по x , что

$$\int V dy = \left(\frac{dW}{dx} \right).$$

Затем, продифференцировав по y , получаем

$$V = \left(\frac{d^2 W}{dx dy} \right),$$

откуда ясно, что интеграл W обладает тем свойством, что

$$V = \left(\frac{d^2 W}{dx dy} \right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

161. Поскольку здесь должно выполняться двойное интегрирование, то появляются два произвольных количества; при этом одно интегрирование вводит не постоянное количество, а произвольную функцию переменного x , которую обозначим через X , а второе интегрирование — произвольную функцию переменного y , которую обозначим через Y . Таким образом, полный интеграл есть

$$\iint V dx dy = W + X + Y.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

162. Проверим полученное решение. Имеем сперва

$$\int V dy = \left(\frac{dW}{dx} \right) + \left(\frac{dX}{dx} \right),$$

так как $\left(\frac{dY}{dy} \right) = 0$. Но тогда получим

$$V = \left(\frac{d^2W}{dx dy} \right),$$

поскольку ни X , ни $\frac{dX}{dx}$ не зависят от y . Итак, если $\left(\frac{d^2W}{dx dy} \right) = V$, то полным интегралом будет

$$\iint V dx dy = W + X + Y.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

163. Все же совершенно необходимо более тщательно исследовать характер подобных двойных интегральных выражений $\iint V dx dy$, что

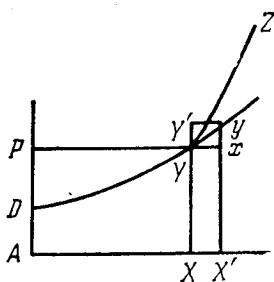


Рис. 7.

удобнее всего выполняется при помощи теории поверхностей. Пусть по-прежнему x и y ортогональные координаты в плоскости основания $AX = x$ и $XY = y$ (рис. 7), а перпендикулярно к ним восстанавливаем в точке Y третью координату $YZ = z$, которая приводит нас к точке некоторой поверхности. Если координаты x и y возрастают на свои дифференциалы $XX' = dx$ и $YY' = dy$, то в плоскости основания возникает элементарный параллелограмм $YxyY' = dx dy$, которому соответствует элемент интеграла. Если речь идет об объеме, охватываемом данной поверхностью, то его элемент есть $z dx dy$, а весь объем =

$= \iint z dx dy$; если речь идет о самой поверхности¹⁾, то, положив $dz = p dx + p' dy$, получим, что ее элемент, соответствующий прямоугольнику $dx dy$, есть $dx dy \sqrt{1 + p^2 + p'^2}$, так что вся площадь поверхности равна $\iint dx dy \sqrt{1 + p^2 + p'^2}$. Из этих примеров мы видим, какова в общем случае сущность двойного интегрального выражения $\iint V dx dy$. Итак, если ищем значение такого интеграла, которому соответствует область $ADYX$ плоскости основания, то сначала считаем x постоянным и находим простой интеграл $\int V dy$, причем количество y берется по величине таким, как длина XY , доведенная до кривой DY , и оно, по свойствам этой кривой, является определенной функцией x . Таким образом, $dx \int V dy$ выражает элемент рассматриваемого интеграла, соответствующий прямоугольнику $XYxX' = y dx$, интеграл

¹⁾ Si superficies ipsa quaeretur; имеется в виду определение площади поверхности.

которого $\int dx \int V dy$, содержащий одно только переменное x , дает окончательное значение, соответствующее всей области $ADYX$, если только при обоих интегрированиях соответствующим образом определяются прибавляемые постоянные.

ПОЯСНЕНИЕ 2

164. Указанным способом должно выполняться вычисление такого рода двойных интегралов, если они относятся к заданной заранее фигуре на плоскости основания, например $ADYX$. Если мы, однако, хотим оба интегрирования оставлять неопределенными, так что вначале при постоянном x ищем интеграл $\int V dy$, который, будучи умножен на dx , соответствует элементарному прямоугольнику $X'YyX' = y dx$, а затем при интегрировании выражения $\int dx \int V dy$ таким же образом представляем себе количество $y = XY$, считая только x переменным. При этом получается значение интеграла, соответствующее неопределенному прямоугольнику $APYX = xy$, если только соответствующим образом определить постоянные, входящие в оба интегрирования. Если и остальные границы области, не только линии $X'Y$ и $P'Y$, рассматривать как неопределенные, то интеграл $\iint V dx dy$ будет содержать две функции $X + Y$, обе неопределенные, из которых одна зависит только от x , другая только от y . Если мы все это хотим приспособить к вычислению максимумов и минимумов, то мы должны выполнять интегрирование изложенным здесь неопределенным способом, так как свойство максимума или минимума, которое должно соответствовать определенной области $ADYX$, обязательно должно соответствовать и любой неопределенной области, например $APYX$ ¹⁾.

ЗАДАЧА 20

165. Пусть V — произвольное выражение, содержащее три переменные x, y, z и их дифференциалы. Найти вариацию двойного интеграла $\iint V dx dy$, если количеству z , рассматриваемому как функция x и y придаются любые вариации.

РЕШЕНИЕ

Чтобы исключить дифференциалы, положим

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad p' = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

$$q = \left(\frac{dp}{dx}\right), \quad q' = \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right), \quad q'' = \left(\frac{dp'}{dy}\right),$$

$$r = \left(\frac{dq}{dx}\right), \quad r' = \left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{dq'}{dx}\right), \quad r'' = \left(\frac{dq'}{dy}\right) = \left(\frac{dq''}{dx}\right), \quad r''' = \left(\frac{dq''}{dy}\right)$$

и т. д.

¹⁾ Здесь имеется в виду, конечно, весьма близкая к $ADYX$ «неопределенная область».

и тогда превращается в функцию конечных величин $x, y, z, p, p', q, q', q'', r, r', r'', r'''$ и т. д. Ее дифференциал равен

$$\begin{aligned} dV = L dx + M dy + N dz + P dp + Q dq + R dr \\ + P' dp' + Q' dq' + R' dr' \\ + Q'' dq'' + R'' dr'' \\ + R''' dr''' \end{aligned}$$

и т. д.,

что дает также вариацию δV . Но тогда, согласно сказанному в предыдущей задаче, получаем искомую вариацию в виде

$$\begin{aligned} \delta \iint V dx dy = \iint dx dy (N \delta z + P \delta p + Q \delta q + R \delta r \\ + P' \delta p' + Q' \delta q' + R' \delta r' \\ + Q'' \delta q'' + R'' \delta r'' \\ + R''' \delta r''') \end{aligned}$$

и т. д.

Положим теперь, как мы это сделали в § 154, $\delta z = \omega$, где ω можно рассматривать как произвольную функцию двух переменных x и y . Тогда для указанной вариации имеем:

$$\begin{aligned} \delta \iint V dx dy = \iint dx dy (N\omega + P \left(\frac{d\omega}{dx}\right) + Q \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) + R \left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) \\ + P' \left(\frac{d\omega}{dx}\right) + Q' \left(\frac{d^2\omega}{dx dy}\right) + R \left(\frac{d^3\omega}{dx^2 dy}\right) \\ + Q'' \left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) + R'' \left(\frac{d^3\omega}{dx dy^2}\right) \\ + R''' \left(\frac{d^3\omega}{dy^3}\right)) \end{aligned}$$

и т. д.

СЛЕДСТВИЕ 1

166. Итак, если известен вид обеих функций z и $\delta z = \omega$, то есть вид их зависимости от переменных x и y , то согласно вышеизложенному можно найти вариацию двойного интеграла $\iint V dx dy$, каким бы образом количество V не зависело от переменных x, y, z и их дифференциалов.

СЛЕДСТВИЕ 2

167. Таким образом, весь вопрос сводится к вычислению найденного двойного интегрального выражения, так как оно состоит из нескольких слагаемых, то нужно для каждого слагаемого в отдельности выполнить двойное интегрирование так, как разъяснено выше.

ПОЯСНЕНИЕ

168. Если, однако, вид функции z неизвестен, а требуется еще найти его из вариационного условия, так что сама вариация $\delta z = \omega$ остается неопределенной — а именно так обстоит дело, если требуется,

чтобы интеграл $\iint V dx dy$ принимал максимальное или минимальное значение, — тогда совершенно необходимо, чтобы отдельные члены найденной вариации $\delta \iint V dx dy$ были так преобразованы, чтобы везде после знака двойного интегрирования стояли не производные вариации $\delta z = \omega$, а сами вариации; преобразованием такого рода мы уже пользовались применительно к выражениям, содержащим только два переменных. Такое преобразование, поскольку оно для двойных интегралов — менее привычное, требует более детального разъяснения. С этой целью замечу, что при такого рода преобразовании появляются простые интегралы, в которых только одно из количеств x и y считается переменным, а второе — постоянным. Чтобы без нужды не вводить в связи с этим новых обозначений, установим, что выражение $\int T dx$ означает интеграл дифференциального выражения $T dx$, при постоянном y ; точно так же надо подразумевать, что в выражении $\int T dy$ только количество y следует считать переменным, что ясно тем более потому, что без этого условия указанные интегралы не будут иметь никакого определенного смысла. Поэтому в дальнейшем не будет необходимости указывать в случае, когда T зависит от обоих переменных x и y , какое из них в простых интегралах $\int T dx$ или $\int T dy$ считается постоянным и какое переменным, — переменным считается всегда только то количество, дифференциал которого входит в данный интеграл. Но в двойных интегралах $\iint V dx dy$ всегда нужно иметь в виду, что одно интегрирование выполняется при переменности одного только x , а второе — при переменности одного только y , и при этом безразлично, какое интегрирование выполняется первым.

ЗАДАЧА 21

169. Преобразовать вариацию двойного интеграла $\iint V dx dy$, найденную в предыдущей задаче, таким образом, чтобы под знаком интеграла встречалась только вариация $\delta z = \omega$, но не ее производные.

РЕШЕНИЕ

Чтобы выполнять преобразование в возможно более общем виде, положим, что T и v — какие угодно функции переменных x и y , и рассмотрим двойной интеграл $\iint T dx dy \left(\frac{dv}{dx} \right)$, который представим в виде $\int dy \int T dx \left(\frac{dv}{dx} \right)$, так что при вычислении интеграла $\int T dx \left(\frac{dv}{dx} \right)$ только количество x рассматривается как переменное. Но тогда $dx \left(\frac{dv}{dx} \right) = dv$, так как y принимается за постоянное, и следовательно,

$$\int T dv = Tv - \int v dT,$$

где, поскольку в дифференциале dT принимается в расчет только переменное x , вместо dT следует писать, чтобы это было ясно, $dx \left(\frac{dT}{dx} \right)$,

так что

$$\int T dx \left(\frac{dv}{dx} \right) = Tv - \int v dx \left(\frac{dT}{dx} \right).$$

Таким образом наше выражение преобразуется к следующему виду:

$$\iint T dx dy \left(\frac{dv}{dx} \right) = \int Tv dy - \iint v dx dy \left(\frac{dT}{dx} \right).$$

Подобным способом, меняя местами переменные, получим, что

$$\iint T dx dy \left(\frac{dv}{dy} \right) = \int Tv dx - \iint v dx dy \left(\frac{dT}{dy} \right).$$

Предположив это, как нечто вроде леммы, получим следующее преобразование вариации, найденной в предыдущей задаче:

$$\begin{aligned} \iint P dx dy \left(\frac{d\omega}{dx} \right) &= \int P\omega dy - \iint \omega dx dy \left(\frac{dP}{dx} \right), \\ \iint P' dx dy \left(\frac{d\omega}{dy} \right) &= \int P'\omega dx - \iint \omega dx dy \left(\frac{dP'}{dy} \right). \end{aligned}$$

Для преобразования следующих членов положим $\left(\frac{d\omega}{dx} \right) = v$, так что $\left(\frac{d^2\omega}{dx^2} \right) = \left(\frac{dv}{dx} \right)$, откуда находим, что

$$\iint Q dx dy \left(\frac{d^2\omega}{dx^2} \right) = \int Q dy \left(\frac{dv}{dx} \right) - \iint dx dy \left(\frac{dQ}{dx} \right) \left(\frac{dv}{dx} \right),$$

и после подобного же преобразования последнего члена будем иметь

$$\iint Q dx dy \left(\frac{d^2\omega}{dx^2} \right) = \int Q dy \left(\frac{dv}{dx} \right) - \int \omega dy \left(\frac{dQ}{dx} \right) + \iint \omega dx dy \left(\frac{d^2Q}{dx^2} \right).$$

С помощью той же подстановки находим, что $\left(\frac{d^2\omega}{dx dy} \right) = \left(\frac{dv}{dy} \right)$, поэтому

$$\iint Q' dx dy \left(\frac{d^2\omega}{dx dy} \right) = \int Q' dx \left(\frac{dv}{dx} \right) - \iint dx dy \left(\frac{dQ'}{dx} \right) \left(\frac{dv}{dy} \right)$$

или

$$\begin{aligned} \iint Q' dx dy \left(\frac{d^2\omega}{dx dy} \right) &= \int Q' dx \left(\frac{dv}{dx} \right) - \int \omega dy \left(\frac{dQ'}{dy} \right) + \\ &+ \iint \omega dx dy \left(\frac{d^2Q'}{dx dy} \right). \end{aligned}$$

Это выражение, поскольку

$$\int Q' dx \left(\frac{dv}{dx} \right) = Q'\omega - \int \omega dx \left(\frac{dQ'}{dx} \right),$$

принимает вид

$$\begin{aligned} \iint Q' dx dy \left(\frac{d^2\omega}{dx dy} \right) &= Q'\omega - \int \omega dx \left(\frac{dQ'}{dx} \right) + \\ &+ \iint \omega dx dy \left(\frac{d^2Q'}{dx dy} \right) - \int \omega dy \left(\frac{dQ'}{dy} \right). \end{aligned}$$

Для третьего выражения того же порядка получим аналогично

$$\iint Q'' dx dy \left(\frac{d^2\omega}{dy^2} \right) = \int Q'' dx \left(\frac{dv}{dy} \right) - \int \omega dx \left(\frac{dQ''}{dy} \right) + \iint \omega dx dy \left(\frac{d^2Q''}{dy^2} \right).$$

Далее, так как $\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$, где по-прежнему $v = \left(\frac{d\omega}{dx}\right)$; получаем

$$\iint R dx dy \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) = \int R dy \left(\frac{dv}{dx}\right) - \int v dy \left(\frac{dR}{dx}\right) + \iint v dx dy \left(\frac{d^2R}{dx^2}\right)$$

и

$$\iint v dx dy \left(\frac{d^2R}{dx^2}\right) = \int \omega dy \left(\frac{d^2R}{dx^2}\right) - \iint \omega dx dy \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right),$$

так что

$$\begin{aligned} \iint R dx dy \left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) &= \int R dy \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) - \int dy \left(\frac{d\omega}{dx}\right) \left(\frac{dR}{dx}\right) + \\ &+ \int \omega dy \left(\frac{d^2R}{dx^2}\right) - \iint \omega dx dy \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right). \end{aligned}$$

Затем, поскольку $\left(\frac{d^3\omega}{d^2x dy}\right) = \left(\frac{d^2v}{dx dy}\right)$, имеем

$$\begin{aligned} \iint R' dx dy \left(\frac{d^2v}{dx dy}\right) &= R'v - \int v dx \left(\frac{dR'}{dx}\right) + \\ &+ \iint v dx dy \left(\frac{d^2R'}{dx dy}\right) - \int v dy \left(\frac{dR'}{dy}\right), \end{aligned}$$

и так как здесь

$$\iint v dx dy \left(\frac{d^2R'}{dx dy}\right) = \int \omega dy \left(\frac{d^2R'}{dx dy}\right) - \iint \omega dx dy \left(\frac{d^3R'}{dx^2 dy}\right),$$

закключаем, что

$$\begin{aligned} \iint R' dx dy \left(\frac{d^3\omega}{dx^2 dy}\right) &= R' \left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \int \left(\frac{d\omega}{dx}\right) dx \left(\frac{dR'}{dx}\right) + \int \omega dy \left(\frac{d^2R'}{dx dy}\right) \\ &- \int \left(\frac{d\omega}{dx}\right) dy \left(\frac{dR'}{dy}\right) - \iint \omega dx dy \left(\frac{d^3R'}{dx^2 dy}\right). \end{aligned}$$

Путем перестановки x и y отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \iint R'' dx dy \left(\frac{d^3\omega}{dx dy^2}\right) &= R'' \left(\frac{d\omega}{dy}\right) - \int \left(\frac{d\omega}{dy}\right) dy \left(\frac{dR''}{dy}\right) + \\ &+ \int \omega dx \left(\frac{d^2R''}{dx dy}\right) - \int \left(\frac{d\omega}{dy}\right) dx \left(\frac{dR''}{dx}\right) - \iint \omega dx dy \left(\frac{d^3R''}{dx dy^2}\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \iint R''' dx dy \left(\frac{d^3\omega}{dy^3}\right) &= \int R''' dx \left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right) - \int \left(\frac{d\omega}{dy}\right) dx \left(\frac{dR'''}{dy}\right) + \\ &+ \int \omega dx \left(\frac{d^2R'''}{dy^2}\right) - \iint \omega dx dy \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right). \end{aligned}$$

После подстановки этих значений находим:

$$\begin{aligned} \delta \iint V dx dy &= \iint \omega dx dy \left[N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) \right. \\ &- \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{d^2Q'}{dx dy}\right) - \left(\frac{d^3R'}{dx^2 dy}\right) \\ &+ \left(\frac{d^2Q''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^3R''}{dx dy^2}\right) \\ &\left. - \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int P \omega dy + \int Q dy \left(\frac{d\omega}{dx} \right) - \int \omega dy \left(\frac{dQ}{dx} \right) + Q' \omega \\
& + \int P' \omega dx - \int \omega dx \left(\frac{dQ'}{dx} \right) - \int \omega dy \left(\frac{dQ'}{dy} \right) \\
& + \int Q'' dx \left(\frac{d\omega}{dy} \right) - \int \omega dx \left(\frac{dQ''}{dy} \right) \\
& + \int R dy \left(\frac{d^2\omega}{dx^2} \right) + R' \left(\frac{d\omega}{dx} \right) - \int \left(\frac{d\omega}{dx} \right) dx \left(\frac{dR'}{dx} \right) - \\
& \quad - \int \left(\frac{d\omega}{dy} \right) dy \left(\frac{dR''}{dy} \right) + \int R''' dx \left(\frac{d^2\omega}{dy^2} \right) \\
& - \int \left(\frac{d\omega}{dx} \right) dy \left(\frac{dR}{dx} \right) + R'' \left(\frac{d\omega}{dy} \right) - \int \left(\frac{d\omega}{dx} \right) dy \left(\frac{dR'}{dy} \right) - \\
& \quad - \int \left(\frac{d\omega}{dy} \right) dx \left(\frac{dR''}{dx} \right) - \int \left(\frac{d\omega}{dy} \right) dx \left(\frac{dR'''}{dy} \right) \\
& + \int \omega dy \left(\frac{d^2R}{dx^2} \right) + \int \omega dy \frac{d^2R'}{dx dy} + \int \omega dx \left(\frac{d^2R''}{dx dy} \right) + \int \omega dx \left(\frac{d^2R'''}{dy^2} \right).
\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1

170. Первый член этого выражения достаточно прозрачен, остальные члены можно удобнее располагать так, чтобы способ их построения стал ясным¹⁾:

$$\begin{aligned}
& \int \omega dy \left\{ \begin{array}{l} \left(P - \left(\frac{dQ}{dx} \right) + \left(\frac{d^2R}{dx^2} \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{dQ'}{dy} \right) + \left(\frac{d^2R'}{dx dy} \right) - \text{и т. д.} \right. \\ \left. + \left(\frac{d^2R''}{dy^2} \right) \right\} + \\
& + \int \omega dx \left\{ \begin{array}{l} \left(P' - \left(\frac{dQ''}{dy} \right) + \left(\frac{d^2R'''}{dy^2} \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{dQ'}{dx} \right) + \left(\frac{d^2R''}{dx dy} \right) - \text{и т. д.} \right. \\ \left. + \left(\frac{d^2R'}{dx^2} \right) \right\} \\
& + \int \left(\frac{d\omega}{dx} \right) dy \left\{ \begin{array}{l} Q - \left(\frac{dR}{dx} \right) + \text{и т. д.} \\ - \left(\frac{dR'}{dy} \right) \end{array} \right\} + \\
& + \int \left(\frac{d\omega}{dy} \right) dx \left\{ \begin{array}{l} Q'' - \left(\frac{dR'''}{dy} \right) + \text{и т. д.} \\ - \left(\frac{dR''}{dx} \right) \end{array} \right\} \\
& + \int \left(\frac{d^2\omega}{dx^2} \right) dy (R - \text{и т. д.}) + \int \left(\frac{d^2\omega}{dy^2} \right) dx (R''' - \text{и т. д.}) + \text{и т. д.} \\
& + \omega \left\{ \begin{array}{l} Q' - \left(\frac{dR'}{dx} \right) + \text{и т. д.} \\ - \left(\frac{dR''}{dy} \right) \end{array} \right\} + \frac{d\omega}{dx} (R' - \text{и т. д.}) + \frac{d\omega}{dy} (R'' - \text{и т. д.}) + \text{и т. д.}
\end{aligned}$$

¹⁾ ut earum ratio comprehendatur.

СЛЕДСТВИЕ 2

171. И при беглом рассмотрении этой формулы легко увидеть, как ее надо продолжать в том случае, если количество V содержит производные более высокого порядка.

СЛЕДСТВИЕ 3

172. В этих интегралах в том случае, когда они содержат дифференциал dy , количество x рассматривается как постоянное, и притом такое, которое соответствует одному из пределов интегрирования; в тех интегралах, которые содержат дифференциал dx , y является постоянным и его значение соответствует одному из пределов интегрирования, откуда ясно, что на границе области интегрирования как x , так и y должны принимать постоянные значения.

ПОЯСНЕНИЕ 1

173. Итак, это выражение для вариации приспособлено к тому случаю, когда для пределов интегрирования как x , так и y принимают постоянные значения. Например, если речь идет о поверхности, то интеграл $\iint V dx dy$ должен быть отнесен к прямоугольнику $APYX$ (рис. 7, стр. 380) в плоскости основания; значение этого интеграла должно быть определено так, чтобы он исчезал, если положить $x=0$ и $y=0$, и это начальные значения [указанных переменных], а когда это выполнено, надо положить $x=AX$ и $y=AP$, а это их конечные значения. В соответствии с этим вычисляется и найденная вариация. Поскольку ищется такая поверхность, для которой определенным указанным образом интеграл $\iint V dx dy$ принимает максимальное или минимальное значение, то прежде всего необходимо, чтобы первая часть вариации, представляющая собой двойной интеграл, была равна нулю, какова бы ни была вариация $\delta z = \omega$, откуда получается следующее уравнение:

$$0 = N - \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right) + \text{и т. д.}$$

$$- \left(\frac{dP'}{dy}\right) + \left(\frac{d^2Q'}{dx dy}\right) - \left(\frac{d^3R'}{dx^2 dy}\right)$$

$$+ \left(\frac{d^2Q''}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^3R''}{dx dy^2}\right)$$

$$- \left(\frac{d^3R'''}{dy^3}\right)$$

и оно выражает характер поверхности, обладающей таким свойством. Константы, которые появляются при двойном интегрировании, должны быть определены так, как это соответствует остальным слагаемым в вариации.

ПОЯСНЕНИЕ 2

174. Чтобы это весьма трудное исследование проиллюстрировать примером, поставим задачу определения поверхности, которая имеет минимальную площадь среди всех тех, под которыми находится заданный объем.

Для этой цели нужно потребовать, чтобы двойной интеграл

$$\iint dx dy [z + a \sqrt{1 + p^2 + p'^2}]$$

был максимум или минимум¹⁾. А так как $V = z + a \sqrt{1 + p^2 + p'^2}$, то

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 1,$$

так что

$$P = \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}}$$

и

$$P' = \frac{ap'}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}}.$$

Таким образом,

$$dV = N dz + P dp + P' dp',$$

где

$$dz = p dx + p' dy.$$

Поэтому характер искомой поверхности выражается уравнением

$$N - \left(\frac{dP}{dx}\right) - \left(\frac{dP'}{dy}\right) = 0, \quad \text{то есть} \quad 1 = \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP'}{dy}\right).$$

Но

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{a}{(1 + p^2 + p'^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(1 + p'^2) \left(\frac{dp}{dx}\right) - pp' \left(\frac{dp'}{dx}\right) \right],$$

$$\left(\frac{dP'}{dy}\right) = \frac{a}{(1 + p^2 + p'^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(1 + p^2) \left(\frac{dp'}{dy}\right) - pp' \left(\frac{dp}{dy}\right) \right],$$

где нужно иметь в виду, что $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right)$. Отсюда получается уравнение

$$\frac{(1 + p^2 + p'^2)^{\frac{3}{2}}}{a} = (1 + p'^2) \left(\frac{dp}{dx}\right) - 2pp' \left(\frac{dp}{dx}\right) + (1 + p^2) \left(\frac{dp'}{dy}\right).$$

Как исследовать это уравнение, неясно, хотя легко видеть, что этому уравнению удовлетворяет как сферическая поверхность $z^2 = c^2 - x^2 - y^2$, так и цилиндрическая поверхность $z^2 = c^2 - y^2$.

1) Сопоставить с «Methodus inveniendi lineas curvas...», гл. V. [Ф. Э.]



ДОПОЛНЕНИЕ, СОДЕРЖАЩЕЕ ИЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СЛУЧАЕВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Поскольку до сих пор для интегрирования дифференциальных уравнений были указаны многочисленные и сильно отличающиеся между собой методы, возникает весьма важный вопрос, нельзя ли найти один единый метод, который позволяет интегрировать все те дифференциальные уравнения, которые до сих пор удалось решить. Нет никакого сомнения, что открытие такого метода было бы большим достижением для всего анализа. Многие математики полагают, что такой метод дает разделение переменных, поскольку все проинтегрированные дифференциальные уравнения или проинтегрированы таким образом, или легко могут быть решены этим методом. Но для применения этого метода необходимы подстановки, которые большей частью требуют не меньше остроумия, чем решение основного вопроса, и часто они найдены только случайно. Кроме того, этот метод никак не распространяется на дифференциальные уравнения второго и более высокого порядка, и те, кто до сих пор исследовали такие уравнения, вынуждены были прибегнуть к помощи других приемов. Поэтому метод разделения переменных нельзя рассматривать как единый и наиболее общий¹⁾ метод, который содержит в себе все интеграции, которые до сих пор удалось.

2. Такой универсальный метод, как мне кажется, я дал уже давно, показав, что можно всегда найти такое количество, после умножения на которое уравнение — все равно, первого или более высокого порядка — становится интегрируемым, так что при этом не требуется никакого трудного обнаруживаемого преобразования²⁾. Поэтому я без колебаний заявляю³⁾, что этот метод приведения дифференциальных уравнений к интегрируемому виду с помощью множителей является

¹⁾ latissime patentem.

²⁾ См. работу Эйлера (№ 44 по списку Энестрема) «О бесконечно многих кривых одного и того же рода. Или метод нахождения уравнений для бесконечно многих кривых одного и того же рода» (De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis). Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, стр. 174 первой пагинации, стр. 180 второй пагинации, особенно § 36 и § 38; также в Opera Omnia, Ser. I, vol 22. См. также в том же томе Opera Omnia работу № 269 и в 23 томе работы № 429, 650, 720 (по списку Энестрема), кроме того, Интегральное исчисление, т. I, §§ 443—530 и т. II, §§ 865—927. [Л. III.]

³⁾ Ex quo non dubito ... pronuntiare.

наиболее широко применимым и наиболее соответствующим сущности вопроса; нет такой до сих пор выполненной интеграции, которая не удалась бы этим путем. Действительно, поскольку любое дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $P dx + Q dy = 0$, где буквы P и Q обозначают какие угодно функции двух переменных x и y , всегда имеется такой множитель M , также зависящий от переменных x и y , что после умножения [на него] выражение $MP dx + MQ dy$ становится интегрируемым, поэтому интеграл этого количества, приравненный произвольной постоянной, дает интеграл предложенного дифференциального уравнения $P dx + Q dy = 0$, и эти же соображения могут быть применены также к дифференциальным уравнениям более высокого порядка. Более подробно я не хочу распространяться по этому поводу; однако я хочу показать преимущество этого метода над методом разделения переменных даже в таких случаях, где это меньше всего можно ожидать, и заодно разъяснить здесь крайнюю полезность этого метода.

3. Если в дифференциальном уравнении переменные x и y уже разделены, то вопрос надо рассматривать как решенный, поскольку дифференциальное уравнение

$$X dx + Y dy = 0,$$

где X означает функцию одного x и Y функцию одного y , немедленно интегрируется в виде

$$\int X dx + \int Y dy = \text{const.}$$

Но очень часто бывает так, что этим путем не находится наиболее простая форма интеграла, а к ней надо еще прийти длинными окольными путями. Например, из уравнения

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

сперва находим логарифмический интеграл

$$lx + ly = la,$$

откуда тут же получается алгебраический интеграл $xy = a$. Но уравнение

$$\frac{dx}{a^2 + x^2} + \frac{dy}{a^2 + y^2} = 0$$

дает после обычного интегрирования

$$\text{arctg } \frac{x}{a} + \text{artg } \frac{y}{a} = \text{const } ^1),$$

откуда не так легко получить алгебраическую форму интеграла

$$\frac{x+y}{a^2-xy} = C.$$

А если задать дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2}} = 0,$$

¹ В первом издании ошибочно

Ang. tang x + Ang. tang y = const [Л. Ш.]

то, вообще говоря, не ясно, выражается ли интеграл каждого слагаемого при помощи круговых дуг или логарифмов. Тем не менее интеграл этого уравнения выражается алгебраически следующим образом¹⁾:

$$C^2(x-y)^2 + 2\gamma C y + \beta C(x+y) + 2\alpha C + \frac{1}{4}\beta^2 - \alpha\gamma = 0,$$

причем эта, конечно, еще простейшая форма может быть получена из трансцендентного интеграла только длинными окольными путями.

4. Но в этих случаях видно, каким образом можно прийти к алгебраическому виду²⁾. Однако несколько лет тому назад я показал такие интеграции, где даже это невозможно. Например, если задать уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} = 0^3),$$

то оно не может быть проинтегрировано при помощи логарифмов или круговых дуг, и следовательно, исключается указанный выше путь для получения алгебраического интеграла: тем не менее я показал, что интеграл данного уравнения, и притом полный интеграл, может быть выражен алгебраически в следующем виде:

$$0 = 2C + (C^2 - 1)(x^2 + y^2) - 2(1 + C^2)xy + 2Cx^2y^2,$$

где C обозначает постоянную, введенную при интегрировании. И даже для гораздо более общего уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha + 2\beta x + \delta x^2 + 2\delta x^3 + \varepsilon x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{\alpha + 2\beta y + \gamma y^2 + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4}} = 0$$

получается полный интеграл

$$\begin{aligned} 0 = & 2\alpha C + \beta^2 - \alpha\gamma + 2[(\beta C - \alpha\delta)(x+y) + (C^2 - \alpha\varepsilon)(x^2 + y^2)] + \\ & + 2[(\gamma C - C^2 - \alpha\varepsilon - \beta\delta)xy + 2(\delta C - \beta\varepsilon)xy(x+y) + \\ & + (2\varepsilon C + \delta^2 - \gamma\varepsilon)x^2y^2, \end{aligned}$$

где C опять обозначает произвольное количество, введенное интегрированием. Эти случаи ясно показывают, что разделение переменных, которое в этих дифференциальных уравнениях уже выполнено, ровно ничего не дает для получения их интегралов в алгебраической форме;

¹⁾ См. Интегральное исчисление, т. I, § 580.

²⁾ См. работы Эйлера № 211, 251, 252, 263, 261, 264, 345 (по списку Энестрема) в Opera Omnia, Ser. I, vol. 20 и срав. также с работами № 506, 581, 582, 605, 676, 714, 818 в Opera Omnia, Ser. I, vol. 21 и работой Лагранжа «Об интегрировании некоторых дифференциальных уравнений, в которых переменные разделены, но каждый член в отдельности не интегрируется» (Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable), Miscellanea Taurin 4, 1766/9, II, стр. 28-Oeuvres de Lagrange, t. II, стр. 5. В работе № 251 Эйлер заявляет, что он впервые рассматривал эти алгебраические интегральные зависимости тогда, когда в 1751 году по поручению Берлинской Академии давал отзыв о работе графа Фавьяно (Fagnano) под названием «Математические произведения» (Produzioni matematiche; Pesaro, 1750). [Л. III.]

³⁾ См. работу Эйлера № 347 (по списку Энестрема), Opera Omnia. Ser. I, vol. 20. стр. 338 и Интегральное исчисление, т. I, § 632. [Л. III.]

поэтому действительно требуется такой метод, при помощи которого эти интегралы можно было бы сразу находить из дифференциальных уравнений, а для этой цели вовсе не стыдно напрячь все усилия ума.

5. Я заметил, однако, что можно достигнуть этой цели при помощи подходящих множителей, после умножения на которые дифференциальные уравнения оказываются интегрируемыми в таком виде, что интеграл получается сразу в алгебраической форме. Для пояснения я начну с первого из предложенных уравнений $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$, которое после умножения на xy сразу дает $y dx + x dy = 0$. Интеграл этого уравнения есть $xy = C$. Таким образом, уравнение, в котором переменные уже разделены, преобразуется в другое, также допускающее интегрирование, причем видно, что метод интегрирования с помощью множителей дает то, чего нельзя ожидать от метода разделения переменных. То же самое имеет место для уравнения

$$\frac{m dx}{x^m} + \frac{n dy}{y^n} = 0,$$

которое после умножения на $x^m y^n$ дает интеграл $x^m y^n = C$, в то время как исходное уравнение сперва приводит к логарифмам. Подобным образом, если уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

умножить на $\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(x+y)^2}$, то получается уравнение

$$\frac{dx(1+y^2) + dy(1+x^2)}{(x+y)^2} = 0,$$

которое немедленно интегрируется и дает интеграл

$$\frac{-1+xy}{x+y} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{x+y}{1-xy} = a.$$

А такое уравнение, как

$$\frac{2dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0,$$

следует умножить на

$$\frac{(x^2+1)^2(1+y^2)}{(2xy+x^2-1)^2},$$

что дает

$$\frac{2dx(1+x^2)(1+y^2) + dy(x^2+1)^2}{(2xy+x^2-1)^2} = 0,$$

откуда получаем интеграл

$$\frac{x^2y-2x-y}{2xy+x^2-1} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{2x+y-x^2y}{2xy+x^2-1} = a.$$

6. Против этих примеров, где алгебраические интегралы найдены без помощи разделения переменных, можно возразить, что множители, дающие эти результаты, найдены из тех самых трансцендентных интегралов, к которым непосредственно приводит разделение переменных, и что, следовательно, преимущество метода множителей этим никак не доказано. На это возражение я отвечаю прежде всего, что вышеприве-

денные примеры были решены подобным образом на основании найденных принципов интегрирования еще до того, как было выполнено интегрирование посредством логарифмов, значит, надо считать, что последними при этом вовсе не пользовались. Хотя я и признаю, что в последних примерах подходящие множители могут быть легко найдены посредством интегрирования при помощи круговых дуг, все же и этот способ интегрирования мог быть легко найден еще до того, как было установлено, что интеграл выражения $\frac{dx}{1+x^2}$ является дугой круга соответствующей тангенсу x . Но в случае вышеприведенного уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = 0,$$

для которого удается найти полный алгебраический интеграл, уже не остается никакого сомнения, так как интегралы обоих слагаемых не могут быть найдены ни при помощи логарифмов, ни при помощи круговых дуг, и относятся к классу трансцендентных функций, пока еще не исследованному; следовательно, нельзя считать, что разделение переменных в какой-либо мере помогло получить алгебраический интеграл. Тем более это относится к более общему уравнению, приведенному в § 4, интеграл которого я нашел совсем иным способом¹⁾.

7. Однако метод, которым я пользовался, является до такой степени неясным, что непонятно, каким образом найти другой путь нахождения того же интеграла; а поскольку методом разделения переменных здесь ничего получить нельзя, я не надеялся получить здесь что-либо при помощи интегрирующих множителей, так как я сам тогда стоял на той точке зрения, что путем применения множителей нельзя получить больше того, что дает разделение переменных, поскольку имеем дело с дифференциалами только первого порядка. Но затем при более внимательном рассмотрении я убедился в том, что каждый раз, когда удастся получить полный интеграл дифференциального уравнения, то из него всегда можно извлечь такие множители, после применения которых уравнение не только становится интегрируемым, но дает после интегрирования именно тот же самый, уже известный интеграл. Но при этом необходимо, чтобы был найден полный интеграл, так как по частным интегралам, очевидно, нельзя сделать никаких заключений. В самом деле, если предложено дифференциальное уравнение

$$P dx + Q dy = 0$$

и если его полный интеграл откуда-либо известен в виде уравнения, содержащего переменные x и y и постоянные, входящие в само дифференциальное уравнение, то он содержит, кроме того, еще новое постоянное, целиком находящееся в нашем произволе. Если обозначить ее буквой C и определить ее из интегрального уравнения, то получается $C = V$, где V — некоторая определенная функция x и y ; после дифференцирования этого уравнения получим $0 = dV$, а дифференциал dV по необходимости должен включать в себя дифференциальное выражение $P dx + Q dy$ так, чтобы

$$dV = M (P dx + Q dy),$$

¹⁾ См. в связи с этим в настоящем томе статью переводчика: О работе Л. Эйлера «Изложение некоторых особых случаев...».

а из этого равенства немедленно получается множитель M , приводящий к интегралу $C = V$.

8. Чтобы иллюстрировать эту операцию несколькими примерами, возьмем сперва уравнение

$$\frac{m dx}{x} + \frac{n dy}{y} = 0,$$

полный интеграл которого есть $x^m y^n = C$, и после дифференцирования получим

$$0 = mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1} dy,$$

то есть

$$0 = x^m y^n \left(\frac{m dx}{x} + \frac{n dy}{y} \right),$$

откуда явствует, что множителем, приводящим к этому интегралу, является $x^m y^n$.

Далее, поскольку полный интеграл уравнения

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

есть

$$1 - xy = C(x + y),$$

то здесь произвольная постоянная получается в виде

$$C = \frac{1 - xy}{x + y},$$

что после дифференцирования дает

$$0 = \frac{-dx(1+y^2) - dy(1+x^2)}{(x+y)^2},$$

то есть

$$0 = \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(x+y)^2} \left(\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} \right),$$

откуда находим искомый множитель

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(x+y)^2}.$$

Займемся далее уравнением

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{\alpha + 2\beta y + \gamma y^2}} = 0$$

полный интеграл которого

$$C^2(x-y)^2 - 2C(\alpha + \beta x + \beta y + \gamma xy) + \beta^2 - \alpha\gamma = 0$$

дает сперва

$$C = \frac{\alpha + \beta(x+y) + \gamma xy - \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta(x+y) + \alpha\gamma(x^2+y^2) + 4\beta\gamma xy(x+y) + 4\beta^2 xy + \gamma^2 x^2 y^2}}{(x-y)^2},$$

то есть

$$C = \frac{\alpha + \beta(x+y) + \gamma xy - \sqrt{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)(\alpha + 2\beta y + \gamma y^2)}}{(x-y)^2},$$

или, более компактно,

$$\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{C} = \alpha + \beta(x + y) + \gamma xy + \sqrt{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)(\alpha + 2\beta y + \gamma y^2)},$$

откуда после дифференцирования получаем

$$0 = dx(\beta + \gamma y) + dy(\beta + \gamma x) + \frac{dx(\beta + \gamma x)\sqrt{\alpha + 2\beta y + \gamma y^2}}{\sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2}} + \frac{dy(\beta + \gamma y)\sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2}}{\sqrt{\alpha + 2\beta y + \gamma y^2}}.$$

Таким образом, искомый множитель будет

$$M = (\beta + \gamma x)\sqrt{\alpha + 2\beta y + \gamma y^2} + (\beta + \gamma y)\sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2}.$$

9. Подобным же образом для более сложного уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2 + 2\delta x^3 + \varepsilon x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{\alpha + 2\beta y + \gamma y^2 + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4}} = 0$$

из вышеуказанного его полного интеграла может быть найден соответствующий множитель M , по которому можно было бы сразу найти этот интеграл, если бы множитель был заранее известен. Однако я берусь здесь за решение гораздо более трудной задачи, хотя первая попытка еще не привела к окончательному результату: я хочу дать как бы предварительный набросок нового, очень желательного метода, с помощью которого можно находить множитель, делающий интегрируемым предложенное дифференциальное уравнение указанного рода. Для этой цели прежде всего полезно заметить, что если известен один такой множитель, то из него можно легко найти бесчисленное количество других множителей, выполняющих ту же задачу. В самом деле, если M — множитель, делающий интегрируемым дифференциальное уравнение

$$P dx + Q dy = 0,$$

так что

$$\int M (P dx + Q dy) = V,$$

то интегральным уравнением будет $V = C$. Но выражение

$$dV = M (P dx + Q dy)$$

после умножения на любую функцию количества V равным образом остается интегрируемым. Следовательно, выражение $Mf(V)$, какова бы ни была функция V , обозначенная через $f(V)$, всегда является подходящим множителем, так как выражение

$$(P dx + Q dy) Mf(V) = dVf(V)$$

интегрируемо. Стало быть, из бесконечного числа этих множителей нужно в каждом отдельном случае выбрать тот, который максимально облегчает задачу и при помощи которого интеграл, если он только алгебраический, получается в наиболее простой форме. В самом деле, если действительно существует алгебраический интеграл, то все же может случиться, что мы даже не будем подозревать возможность его существования, если только мы не применили подходящего множителя. Что это так, достаточно ясно видно из вышеприведенных примеров.

то есть

$$m\beta\gamma xy + n\gamma y - f + \frac{1}{2}n\alpha = C(\alpha + \beta x + \gamma y).$$

Если вместо C писать $C + \frac{1}{2}n$, то получаем более компактную форму

$$m\beta\gamma xy - \frac{1}{2}n\beta x + \frac{1}{2}n\gamma y - f = C(\alpha + \beta x + \gamma y).$$

11. Выясним теперь, при каких условиях дифференциальное уравнение вида

$$\frac{h dx}{Ax^2 + Bx + C} + \frac{k dy}{Dy^2 + Ey + F} = 0$$

можно сделать интегрируемым по этому способу. А именно, сравнение с вышенайденными значениями дает

$$\begin{aligned} A &= hm\beta^2\gamma, & D &= km\beta\gamma^2, \\ B &= h\beta\gamma(m\alpha + n), & E &= k\beta\gamma(m\alpha - n), \\ C &= h\gamma\left(f + \frac{1}{2}n\alpha\right), & F &= k\beta\left(f - \frac{1}{2}n\alpha\right). \end{aligned}$$

Поскольку здесь играют роль только отношения букв, то можно вместо первых уравнений положить

$$\beta = Ak \quad \text{и} \quad \gamma = Dh,$$

откуда получаются остальные:

$$m = \frac{1}{ADh^2k^2}; \quad \alpha = \frac{Bk + Eh}{2}; \quad n = \frac{Bk - Eh}{2ADh^2k^2};$$

и

$$f = \frac{ACk^2 + DFh^2}{2ADh^2k^2}.$$

Кроме того, получается следующее условие:

$$\frac{4AC - B^2}{h^2} = \frac{4DF - E^2}{k^2}.$$

Если оно имеет место, то подходящим множителем будет

$$M = \frac{(Ax^2 + Bx + Cx)(Dy^2 + Ey + F)}{hk \left[\frac{1}{2}(Bk + Eh) + Akx + Dhy \right]^2},$$

а получающееся таким образом интегральное уравнение после умножения на hk принимает вид

$$\begin{aligned} xy - \frac{(Bk - Eh)x}{4Dh} + \frac{(Bk - Eh)y}{4Ak} - \frac{ACk^2 - DFh^2}{2ADhk} &= \\ &= G \left[\frac{1}{2}(Bk + Eh) + Akx + Dhy \right]. \end{aligned}$$

Без изменения произвольного постоянного G этому уравнению может быть придана еще следующая форма:

$$\left(x + \frac{B}{2A} - GDh\right) \left(y + \frac{E}{2D} - GAk\right) = G^2ADhk + \frac{(4AC - B^2)k^2 + (4DF - E^2)h^2}{3ADhk}$$

или

$$\left(\frac{2Ax+B}{h} + G\right) \left(\frac{2Dy+E}{k} + G\right) = G^2 + \frac{4AC-BE}{2h^2} + \frac{4DF-E^2}{2k^2}.$$

12. Итак, налицо довольно интересная теорема, хотя ее справедливость достаточно очевидна на основании других положений.

Если дифференциальное уравнение

$$\frac{h dx}{Ax^2+Bx+C} + \frac{k dy}{Dy^2+Ey+F} = 0$$

составлено таким образом, что

$$\frac{4AC-B^2}{h^2} = \frac{4DF-E^2}{k^2},$$

то его полный интеграл является алгебраическим и выражается следующим уравнением

$$\frac{2Ax+B}{h} \cdot \frac{2Dy+E}{k} + G \left(\frac{2Ax+B}{h} + \frac{2Dy+E}{k} \right) = \frac{4AC-B^2}{2h^2} + \frac{4DF-E^2}{2k^2},$$

где G означает произвольное постоянное, введенное интегрированием. Этот интеграл находится путем умножения заданного дифференциального уравнения на множитель

$$\frac{(Ax^2+Bx+C)(Dy^2+Ey+F)}{\left(\frac{2Ax+B}{h} + \frac{2Dy+E}{k}\right)^2}.$$

13. Точно так же как мы поступали с множителем M вида

$$\frac{XY}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2},$$

мы можем поступать также с множителями более сложного вида, что, однако, в общем не дает преимуществ. Все же определим множитель

$$M = \frac{XY}{(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2},$$

так, чтобы интегрировалось уравнение вида

$$\frac{Y dx + X dy}{(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2} = 0.$$

В ходе интегрирования получаем уравнение

$$\frac{-Y}{(\beta + \delta y)(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)} + \Gamma(y) = \frac{-X}{(\gamma + \delta x)(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)} + \Delta(x),$$

которое преобразуется к виду

$$\frac{X}{\gamma + \delta x} - \frac{Y}{\beta + \delta y} = (\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)(\Delta(x) - \Gamma(y)),$$

так что, очевидно, надо положить

$$\Delta(x) = \frac{\zeta x + \eta}{\gamma + \delta x} \quad \text{и} \quad \Gamma(y) = \frac{\xi y + \theta}{\beta + \delta y},$$

для того, чтобы исключить члены, содержащие оба переменных одновременно. Следовательно, отсюда получим

$$\frac{X}{\gamma + \delta x} - \frac{Y}{\beta + \delta y} = \eta y + \frac{(\alpha + \beta x)(\zeta x + \eta)}{\gamma + \delta x} - \theta \cdot x - \frac{(\alpha + \gamma y)(\zeta y + \theta)}{\beta + \delta y} + f - f$$

откуда

$$\begin{aligned} X &= (\alpha + \beta x)(\zeta x + \eta) - (\gamma + \delta x)(\theta x + f), \\ Y &= (\alpha + \gamma y)(\zeta y + \theta) - (\beta + \delta y)(\eta y + f), \end{aligned}$$

или, развертывая,

$$\begin{aligned} X &= (\beta\zeta - \delta\theta)x^2 + (\alpha\zeta + \eta\beta - \gamma\theta - \delta f)x + \alpha\eta - \gamma f, \\ Y &= (\gamma\zeta - \delta\eta)y^2 + (\alpha\zeta + \gamma\theta - \beta\eta - \delta f)y + \alpha\theta - \beta f. \end{aligned}$$

Таким образом, получается интеграл

$$\frac{\zeta x + \eta}{\gamma + \delta x} - \frac{X}{(\gamma + \delta x)(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)} = \text{const.}$$

После подстановки найденного значения X он принимает следующий вид:

$$\frac{\zeta xy + \eta y + \theta x + f}{\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy} = \text{const.}$$

14. Если привести данное дифференциальное уравнение снова к виду

$$\frac{h dx}{Ax^2 + Bx + C} + \frac{k dy}{Dy^2 + Ey + F} = 0,$$

то должно быть

$$\begin{aligned} A &= h(\beta\zeta - \delta\theta), & D &= k(\gamma\zeta - \delta\eta), \\ B &= h(\alpha\zeta + \beta\eta - \gamma\theta - \delta f), & E &= k(\alpha\zeta + \gamma\theta - \beta\eta - \delta f), \\ C &= h(\alpha\eta - \gamma f), & F &= k(\alpha\theta - \beta f). \end{aligned}$$

Первые два уравнения дают

$$\theta = \frac{\beta\zeta}{\delta} - \frac{A}{\delta h}; \quad \eta = \frac{\gamma\zeta}{\delta} - \frac{D}{\delta k};$$

а следующие два —

$$f = \frac{\alpha\zeta}{\delta} - \frac{Bk - Eh}{2\delta h k} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{2A\gamma k - 2D\beta h}{Bk - Eh}.$$

Таким образом, из последних двух уравнений получаем

$$\begin{aligned} \frac{2Ck(A\gamma k - D\beta h)}{Bk - Eh} &= \frac{\gamma}{2}(Bk + Eh) - Dah, \\ \frac{2Fh(A\gamma k - D\beta h)}{Bk - Eh} &= \frac{\beta}{2}(Bk + Eh) - Aak. \end{aligned}$$

После исключения a получим отсюда

$$\frac{2(ACk^2 - DFh^2)(Ak\gamma - Dh\beta)}{Bk - Eh} = \frac{1}{2}(Ak\gamma - Dh\beta)(Bk + Eh).$$

Но поскольку уравнение

$$Ak\gamma - Dh\beta = 0,$$

не может иметь места, так как в противном случае было бы $\delta = 0$, и количества θ , η , f были бы бесконечными — в этом случае, как сле-

дует особенно отметить, интегральное уравнение дало бы $\text{const} = \text{const}$, что ничего не означает, — то должно быть

$$4(ACk^2 - DFh^2) = B^2k^2 - E^2h^2,$$

то есть

$$\frac{4AC - B^2}{h^2} = \frac{4DF - E^2}{k^2},$$

как и выше. Здесь следует особенно обратить внимание на то, что даже если оставить неопределенными буквы β , γ и ζ , интегральное уравнение будет отличаться от предыдущего только на постоянное количество; в самом деле, имеем

$$\frac{2\zeta hk}{Bk - Eh} + \frac{k(2Ax + B) + h(2Dy + E)}{2(Ak\gamma - Dh\beta)xy + (Bk - Eh)(3x + \gamma y) + 2(Ck\beta - Fh\gamma)} = \text{const}$$

или

$$\frac{\gamma ky(2Ax + B) + \beta k(Bx + 2C) - 3hx(2Dy + E) - \gamma h(Ey + 2F)}{k(2Ax + B) + h(2Dy + E)} = \text{const},$$

что дает правильное выражение интеграла, какие бы значения ни принимали буквы β и γ . Поскольку это не очевидно, нужно показать, что части этих выражений, содержащие множители β и γ , взятые в отдельности, дают одно и то же соотношение между x и y . В самом деле, если составить два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{2Akxy + Bky - Ey - 2F}{2Akx + 2Dy + Bk + E} &= \text{const}, \\ -\frac{2Dhxy - Ehx + Bkx + 2Ck}{2Akx + 2Dhy + Bk + Ek} &= \text{const}, \end{aligned}$$

а затем первое из них умножить на Dh , а второе на Ak , то в сумме получается

$$\frac{Ak(Bk - Eh)x + Dh(Bk - Eh)y + 2ACK^2 - 2DFh^2}{2Akx + 2Dhy + Bk + Eh},$$

что имеет постоянное значение $\frac{Bk - Eh}{2}$, поскольку

$$\frac{2ACK^2 - 2DFh^2}{Bk + Eh} = \frac{Bk - Eh}{2},$$

и отсюда вытекает наше утверждение.

15. Перейду теперь к более трудной форме уравнения, а именно

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

и пусть множитель, делающий его интегрируемым, имеет вид

$$M = P\sqrt{X} + Q\sqrt{Y},$$

так что в интегрируемом виде уравнение есть

$$(Pdx + Qdy) + \left(\frac{Qdx\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} + \frac{Pdy\sqrt{X}}{\sqrt{Y}} \right) = 0.$$

Надо, чтобы оба члена в левой части этого уравнения были интегрируемы. Тогда для первого члена имеем

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

а интеграл второй части напишем в виде $2V\sqrt{XY}$, откуда

$$Q = 2X\left(\frac{dV}{dx}\right) + V\frac{dX}{dx}$$

и

$$P = 2Y\left(\frac{dV}{dy}\right) + V\frac{dY}{dy}$$

и, вследствие предыдущего условия,

$$2Y\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right) + \frac{3dY}{dy}\left(\frac{dV}{dy}\right) + V\frac{d^2Y}{dy^2} = 2X\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) + \frac{3dX}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right) + V\frac{d^2X}{dx^2}.$$

Из этого уравнения, если вместо V взять определенную функцию x и y , можно видеть, какие получаются подходящие значения для функций X и Y .

16. Придадим сперва V постоянное значение, скажем, $V = 1$; тогда придем к следующему условию:

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{d^2X}{dx^2},$$

что возможно только тогда, если оба члена в отдельности равны постоянному количеству, которое пусть будет $2a$; отсюда получим

$$X = ax^2 + bx + c \quad \text{и} \quad Y = ay^2 + dy + e,$$

откуда далее

$$P = \frac{dY}{dy} = 2ay + d \quad \text{и} \quad Q = \frac{dX}{dx} = 2ax + b.$$

Таким образом, получается полное интегральное уравнение

$$2axy + dx + by + 2\sqrt{XY} = \text{const.}$$

Следовательно, дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + dy + e}} = 0.$$

делается интегрируемым при помощи множителя

$$M = (2ay + d)\sqrt{ax^2 + bx + c} + (2ax + b)\sqrt{ay^2 + dy + e},$$

откуда получается полный интеграл:

$$2axy + dx + by + 2\sqrt{(ax^2 + bx + c)(ay^2 + dy + e)} = C$$

или после устранения иррациональности:

$$C^2 - 2C(2axy + dx + by) = (4ae - d^2)x^2 + (4ac - b^2)y^2 + 2bdxy + 4bex + 4cay + 4ce.$$

Это уравнение — гораздо более общее, чем то, которое я приводил в § 3.

17. Придадим теперь функции V значение

$$V = \frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2}.$$

В самом деле, если показатель вначале оставить неопределенным, то быстро выясняется, что нужно взять именно значение 2. Итак,

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{-2\beta}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^3}; \quad \left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{-2\gamma}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^3};$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) = \frac{6\beta^2}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^4} \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right) = \frac{6\gamma^2}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^4}.$$

После подстановки этих значений получается

$$12\beta^2 X - \frac{6\beta dx}{dx} (\alpha + \beta x + \gamma y) + \frac{d^2 X}{dx^2} (\alpha + \beta x + \gamma y)^2 =$$

$$= 12\gamma^2 Y - \frac{6\gamma dy}{dy} (\alpha + \beta x + \gamma y) + \frac{d^2 Y}{dy^2} (\alpha + \beta x + \gamma y)^2.$$

Поскольку в левой части y , а в правой части x не превышает размерности 2, то ясно, что в выражениях

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

переменные x и y должны иметь ту же размерность, так как в противном случае смешанные члены, содержащие как x , так и y , не могли бы быть равны друг другу. Поскольку в силу этого функции X и Y могут быть степени не выше четвертой, положим

$$X = Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E$$

и

$$Y = \mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}.$$

После подстановки получаем в левой части

$$12\beta^2 A x^4 + 24\beta^2 B x^3 + 12\beta^2 C x^2 + 24\beta^2 D x + 12\beta^2 E -$$

$$- 24\beta^2 A \quad - 36\beta^2 B \quad - 12\beta^2 C \quad - 12\beta^2 D \quad - 12\alpha\beta D +$$

$$+ 12\beta^2 A \quad - 24\alpha\beta A \quad - 36\alpha\beta B \quad - 12\alpha\beta C \quad + 2\alpha^2 C \quad +$$

$$+ 12\beta^2 B \quad + 2\beta^2 C \quad + 4\alpha\beta C \quad +$$

$$+ 24\alpha\beta A \quad + 24\alpha\beta B \quad + 12\alpha^2 B \quad +$$

$$+ 12\alpha^2 A \quad -$$

$$- 24\beta\gamma A x^3 y - 36\beta\gamma B x^2 y - 12\beta\gamma C xy - 12\beta\gamma D y +$$

$$+ 24\beta\gamma A \quad + 24\beta\gamma B \quad + 4\beta\gamma C \quad + 4\alpha\gamma C \quad +$$

$$+ 24\alpha\gamma A \quad + 24\alpha\gamma B \quad +$$

$$+ 12\gamma^2 A x^2 y^2 + 12\gamma^2 B xy^2 + 2\gamma^2 C y^2,$$

что упорядочивается следующим образом:

$$12\gamma^2 Ax^2 y^2 + 12\gamma^2 Bxy^2 + 12\gamma(2\alpha A - \beta B)x^2 y +$$

$$+ 2\gamma^2 Cy^2 + 8\gamma(3\alpha B - \beta C)xy + 2(6\alpha^2 A - 6\alpha\beta B + \beta^2 C)x^2 +$$

$$+ 4\gamma(\alpha C - 3\beta D)y + 4(3\alpha^2 B - 2\alpha\beta C + 3\beta^2 D)x +$$

$$+ 2(\alpha^2 C - 6\alpha\beta D + 6\beta^2 E).$$

Подобным образом получим для правой части

$$\begin{aligned}
 & 12\beta^2\mathfrak{A}x^2y^2 + 11\beta^2\mathfrak{B}x^2y + 12\beta(2\alpha\mathfrak{A} - \gamma\mathfrak{B})xy^2 + 2\beta^2\mathfrak{C}x^2 + \\
 & + 8\beta(3\alpha\mathfrak{B} - \gamma\mathfrak{C})xy + 2(6\alpha^2\mathfrak{A} - 6\alpha\gamma\mathfrak{B} + \gamma^2\mathfrak{C})y^2 + \\
 & + 4\beta(\alpha\mathfrak{C} - 3\gamma\mathfrak{D})x + 4(3\alpha^2\mathfrak{B} - 2\alpha\gamma\mathfrak{C} + 3\gamma^2\mathfrak{D})y + \\
 & + 2(\alpha^2\mathfrak{C} - 6\alpha\gamma\mathfrak{D} + 6\gamma^2\mathfrak{E}).
 \end{aligned}$$

18. Приравнивая попарно соответствующие члены в обоих выражениях, получим следующие уравнения:

$$\begin{array}{l|l}
 x^2y^2 & \gamma^2A = \beta^2\mathfrak{A}, \\
 x^2y & 2\alpha\gamma A - \beta\gamma B = \beta^2\mathfrak{B}, \\
 xy^2 & \gamma^2B = 2\alpha\beta\mathfrak{A} - \beta\gamma\mathfrak{B}, \\
 x^2 & 6\alpha^2A - 6\alpha\beta B + \beta^2C = \beta^2\mathfrak{C}, \\
 y^2 & \gamma^2C = 6\alpha^2\mathfrak{A} - 6\alpha\gamma\mathfrak{B} + \gamma^2\mathfrak{C}, \\
 xy & 3\alpha\gamma B - \beta\gamma C = 3\alpha\beta\mathfrak{B} - \beta\gamma\mathfrak{C}, \\
 x & 3\alpha^2B - 2\alpha\beta C + 3\beta^2D = \alpha^3\mathfrak{C} - 3\beta\gamma\mathfrak{D}, \\
 y & \alpha\gamma C - 3\beta\gamma D = 3\alpha^2\mathfrak{B} - 2\alpha\gamma\mathfrak{C} + 3\gamma^2\mathfrak{D}, \\
 1 & \alpha^2C - 6\alpha\beta D + 6\beta^2E = \alpha^2\mathfrak{C} - 6\alpha\gamma\mathfrak{D} + 6\gamma^2\mathfrak{E}.
 \end{array}$$

Первые три уравнения определяют только два количества:

$$\beta = \frac{2\alpha A \sqrt{\mathfrak{A}}}{B \sqrt{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B} \sqrt{A}} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{2\alpha \mathfrak{A} \sqrt{A}}{B \sqrt{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B} \sqrt{A}}.$$

Четвертое и пятое уравнения определяют только одно

$$C - \mathfrak{C} = \frac{3(\mathfrak{A}B^2 - A\mathfrak{B}^2)}{2A\mathfrak{A}} = \frac{3}{2} \left(\frac{B^2}{A} - \frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}} \right),$$

что следует также из шестого уравнения. Поэтому положим

$$C = \frac{3B^2}{2A} + n \quad \text{и} \quad \mathfrak{C} = \frac{3\mathfrak{B}^2}{2\mathfrak{A}} + n.$$

Седьмое и восьмое уравнения также определяют только одно количество:

$$\frac{D \sqrt{A} + \mathfrak{D} \sqrt{\mathfrak{A}}}{B \sqrt{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B} \sqrt{A}} = \frac{A\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{A}B^2 - B\mathfrak{B} \sqrt{A\mathfrak{A}} + 2nA\mathfrak{A}}{4A\mathfrak{A} \sqrt{A\mathfrak{A}}},$$

или

$$D \sqrt{A} + \mathfrak{D} \sqrt{\mathfrak{A}} = \frac{B^3}{4A \sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{B}^3}{4\mathfrak{A} \sqrt{\mathfrak{A}}} + \frac{nB}{2 \sqrt{A}} + \frac{n\mathfrak{B}}{2 \sqrt{\mathfrak{A}}}.$$

Поэтому положим

$$D = \frac{B^3}{4A^2} + \frac{nB}{2A} + \frac{m}{2 \sqrt{A}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{B}^3}{4\mathfrak{A}^2} + \frac{n\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}} - \frac{m}{2 \sqrt{\mathfrak{A}}},$$

что после подстановки в последнее уравнение дает

$$24(AE - \mathfrak{A}\mathfrak{E}) = \frac{3B^4}{2A^2} + \frac{6nB^2}{A} + \frac{12mB}{\sqrt{A}} - \frac{3\mathfrak{B}^4}{2\mathfrak{A}^2} - \frac{6n\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}} + \frac{12m\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}}}.$$

Поэтому удобно положить

$$E = \frac{B^4}{16A^3} + \frac{nB^2}{4A^2} + \frac{mB}{2A\sqrt{A}} + \frac{l}{A}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{B}^4}{16\mathfrak{A}^3} + \frac{n\mathfrak{B}^2}{4\mathfrak{A}^2} - \frac{m\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}\sqrt{\mathfrak{A}}} + \frac{l}{\mathfrak{A}}.$$

19. Но поскольку мы приняли, что $V = \frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2}$, имеем

$$Q = \frac{-4\beta(Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E)}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^3} + \frac{2(2Ax^3 + 3Bx^2 + Cx + D)}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2},$$

$$P = \frac{-4\gamma(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^3} + \frac{2(2\mathfrak{A}y^3 + 3\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}y + \mathfrak{D})}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2},$$

то есть

$$Q = \frac{2\gamma(2Ax^3 + 3Bx^2 + Cx + D) + 2(2\alpha A - 3\beta)x^3 + 2(3\alpha B - \beta C)x^2 +}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^3} + \frac{2(\alpha C - 3\beta D)x + 2(\alpha D - 2\beta E)}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2},$$

$$P = \frac{2\beta x(2\mathfrak{A}y^3 + 3\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}y + \mathfrak{D}) + 2(2\alpha\mathfrak{A} - \gamma\mathfrak{B})y^3 + 2(3\alpha\mathfrak{B} - \gamma\mathfrak{C})y^2 +}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^3} + \frac{2(\alpha\mathfrak{C} - 3\gamma\mathfrak{D})y + 2(\alpha\mathfrak{D} - 3\gamma\mathfrak{E})}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2}.$$

Теперь нужно найти интеграл выражения $P dx + Q dy$ и, если добавить к нему

$$\frac{2\sqrt{XY}}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2},$$

то сумма, будучи приравнена постоянному количеству, даст полный интеграл уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0.$$

Чтобы получить этот интеграл, заметим на основании полученных выше значений P и Q , что должно быть в отдельности

$$\int Q dy = \frac{2\beta(Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E)}{\gamma(\alpha + \beta x + \gamma y)^2} - \frac{2(2Ax^3 + 3Bx^2 + Cx + D)}{\gamma(\alpha + \beta x + \gamma y)} + \Gamma(x),$$

$$\int P dx = \frac{2\gamma(\mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E})}{\beta(\alpha + \beta x + \gamma y)^2} - \frac{2(2\mathfrak{A}y^3 + 3\mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}y + \mathfrak{D})}{\beta(\alpha + \beta x + \gamma y)} + \Delta(y),$$

причем эти два выражения должны быть равны между собой. С этой целью положим

$$\Gamma(x) = \frac{2(Ax^2 + Bx + N)}{3\gamma} \quad \text{и} \quad \Delta(y) = \frac{2(\mathfrak{A}y^2 + \mathfrak{B}y + \mathfrak{N})}{3\gamma},$$

так что получаем:

$\frac{1}{2} \beta \gamma (a + \beta x + \gamma y)^2 \int Q dy$	$\frac{1}{2} \beta \gamma (a + \beta x + \gamma y)^2 \int P dx$
$+ A\gamma^2 x^2 y^2$	$+ \mathfrak{A}\beta^2 x^2 y^2$
$+ B\gamma^2 x y^2$	$+ \beta (2\mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\gamma) x y^2$
$+ \gamma (2A\alpha - B\beta) x^2 y$	$+ \mathfrak{B}\beta^2 x^2 y$
$+ N\gamma y^2$	$+ (\mathfrak{A}\alpha^2 - \mathfrak{B}\alpha\gamma + \mathfrak{A}\gamma^2) y^2$
$+ (A\alpha^2 - B\alpha\beta + N\beta^2) x^2$	$+ \mathfrak{A}\beta^2 x^2$
$+ \gamma (2B\alpha - C\beta + N\beta) xy$	$+ \mathfrak{C} (2\mathfrak{B}\alpha - \mathfrak{C}\gamma + 2\mathfrak{A}\gamma) xy$
$+ \gamma (2N\alpha - D\beta) y$	$+ (\mathfrak{B}\alpha^2 - \mathfrak{C}\alpha\gamma + \mathfrak{D}\gamma^2 + 2\mathfrak{A}\alpha\gamma) y$
$+ (B\alpha^2 - C\alpha\beta + D\beta^2 + 2N\alpha\beta) x$	$+ \beta (2\mathfrak{N}\alpha - \mathfrak{D}\gamma) x$
$+ E\beta^2 - D\alpha\beta + N\alpha^2$	$+ \mathfrak{C}\gamma^2 - \mathfrak{D}\alpha\gamma + \mathfrak{A}\alpha^2$

20. Эти условия полностью совпадают с предыдущими (§ 18), если только положить

$$N = \frac{1}{6} C \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{6} \mathfrak{C}.$$

Разделив обе части уравнения на $\beta\gamma$, получим выражение

$$\frac{1}{2} (a + \beta x + \gamma y)^2 \int Q dx,$$

которое после подстановки ранее найденных значений дает

$$\begin{aligned} & x^2 y^2 \sqrt{A\mathfrak{A}} + Bxy^2 \sqrt{\frac{\mathfrak{A}}{A}} + \mathfrak{B}x^2 y \sqrt{\frac{A}{\mathfrak{A}}} + \frac{1}{6} Cy^2 \sqrt{\frac{\mathfrak{A}}{A}} + \frac{1}{6} \mathfrak{C}x^2 \sqrt{\frac{A}{\mathfrak{A}}} + \\ & + \left(\frac{B\mathfrak{B}}{\sqrt{A\mathfrak{A}}} - \frac{2}{3} n \right) xy + \left(\frac{B^2\mathfrak{B}}{4A\sqrt{A\mathfrak{A}}} - \frac{nB}{3A} + \frac{n\mathfrak{B}}{6\sqrt{A\mathfrak{A}}} - \frac{m}{2\sqrt{\mathfrak{A}}} \right) y + \\ & + \left(\frac{B\mathfrak{B}^2}{4\mathfrak{A}\sqrt{A\mathfrak{A}}} - \frac{n\mathfrak{B}}{3\mathfrak{A}} + \frac{nB}{6\sqrt{A\mathfrak{A}}} + \frac{m}{2\sqrt{\mathfrak{A}}} \right) x + \frac{B^2\mathfrak{B}^2}{16A\mathfrak{A}\sqrt{A\mathfrak{A}}} + \\ & + \frac{n(B\sqrt{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B}\sqrt{A})^2}{24A\mathfrak{A}\sqrt{A\mathfrak{A}}} - \frac{nB\mathfrak{B}}{4A\mathfrak{A}} + \frac{m(B\sqrt{\mathfrak{A}} - \mathfrak{B}\sqrt{A})}{3A\mathfrak{A}} + \frac{l}{\sqrt{A\mathfrak{A}}}. \end{aligned}$$

Обозначая это выражение для краткости через S , получим полный интеграл

$$\frac{S + \sqrt{XY}}{(a + \beta x + \gamma y)^2} = \text{const}$$

или

$$S + \sqrt{XY} = \text{const} (B\sqrt{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B}\sqrt{A} + 2Ax\sqrt{\mathfrak{A}} + 2\mathfrak{A}y\sqrt{A})^2,$$

что можно записать также в более удобной форме:

$$S + \sqrt{XY} = \text{const} \left(\frac{B}{\sqrt{A}} + \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}}} + 2x\sqrt{A} + 2y\sqrt{\mathfrak{A}} \right)^2.$$

Итак, если функции X и Y определены как указано выше, то мы получаем, таким образом, полный интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0.$$

21. Это исследование можно выполнить в несколько более общем виде, придавая функции V значение

$$\frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2}.$$

Для более удобного выполнения вычислений замечу, что путем прибавления к переменным x и y постоянных значений можно привести это выражение к виду

$$\frac{1}{(a + xy)^2},$$

а после того, как вычисления произведены, нетрудно вернуться к прежним значениям. Итак, буду рассматривать дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

и полагаю, что его можно сделать интегрируемым при помощи множителя $P\sqrt{X} + Q\sqrt{Y}$, так что требуется интегрировать уравнение

$$(P dx + Q dy) + \left(\frac{Q dx \sqrt{Y}}{\sqrt{X}} + \frac{P dy \sqrt{X}}{\sqrt{Y}} \right) = 0.$$

Положим интеграл второго члена равным $2V\sqrt{XY}$, так что, как мы видели выше:

$$Q = 2X \left(\frac{dV}{dx} \right) + V \frac{dX}{dx} \quad \text{и} \quad P = 2Y \left(\frac{dV}{dy} \right) + V \frac{dY}{dy}.$$

Но $V = \frac{1}{(a + xy)^2}$, поэтому

$$\left(\frac{dV}{dx} \right) = \frac{-2y}{(a + xy)^3} \quad \text{и} \quad \left(\frac{dV}{dy} \right) = \frac{-2x}{(a + xy)^3}.$$

Итак, имеем

$$Q = \frac{-4Xy}{(a + xy)^3} + \frac{dX}{dx} \frac{1}{(a + xy)^2}$$

и

$$P = \frac{-4Yx}{(a + xy)^3} + \frac{dY}{dy} \frac{1}{(a + xy)^2}.$$

Теперь нужно добиться того, чтобы выражение $P dx + Q dy$ было интегрируемым и с этой целью возьмем интеграл от него двумя способами, а именно как при постоянном y , так и при постоянном x ; тогда получим:

$$\int P dx = \frac{4Y}{y^2(a + xy)} - \frac{2aY}{y^2(a + xy)^2} - \frac{dY}{y dy} \frac{1}{a + xy} + \frac{\Gamma(y)}{y^2},$$

$$\int Q dy = \frac{4X}{x^2(a + xy)} - \frac{2aX}{x^2(a + xy)^2} - \frac{dX}{x dx} \frac{1}{a + xy} + \frac{\Delta(x)}{x^2},$$

а эти два выражения должны быть равны между собой. Итак, умножив на $x^2y^2(a + xy)^2$, будем иметь

$$4x^2Y(a + xy) - 2ax^2Y - \frac{x^2y dY}{dy}(a + xy) + x^2\Gamma(y)(a + xy)^2 =$$

$$= 4y^2X(a + xy) - 2ay^2X - \frac{xy^2dX}{dx}(a + xy) + y^2\Delta(x) \cdot (a + xy)^2,$$

вследствие чего положим

$$\begin{aligned} X &= Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E, & \Delta(x) &= Lx^2 + Mx + N, \\ Y &= \mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}, & \Gamma(y) &= \mathfrak{L}y^2 + \mathfrak{M}y + \mathfrak{N}, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{dX}{dx} = 4Ax^3 + 6Bx^2 + 2Cx + 2D$$

и

$$\frac{dY}{dy} = 4\mathfrak{A}y^3 + 6\mathfrak{B}y^2 + 2\mathfrak{C}y + 2\mathfrak{D}.$$

Тогда наши выражения прикипают вид

$x^2y^2(a+xy)^2 \int Q dy$	$x^2y^2(a+xy)^2 \int P dx$
$+ Lx^4y^4$	$+ \mathfrak{L}x^4y^4$
$+ Mx^3y^4$	$+ 2\mathfrak{B}x^3y^4$
$+ 2Bx^4y^3$	$+ \mathfrak{M}x^4y^3$
$+ Nx^2y^4$	$- 2a\mathfrak{A}x^2y^4$
$+ 2(C+aL)x^3y^3$	$+ 2(\mathfrak{C}+a\mathfrak{L})x^3y^3$
$- 2aAx^4y^2$	$+ \mathfrak{N}x^4y^2$
$+ 2(3D+aM)x^2y^3$	$- 2a\mathfrak{B}x^2y^3$
$- 2aBx^3y^2$	$+ 2(3\mathfrak{D}+a\mathfrak{M})x^3y^2$
$+ a^2Lx^2y^2$	$+ a^2\mathfrak{L}x^2y^2$
$+ 2(2E+aN)xy^3$	$+ 0xy^3$
$+ 0x^3y$	$+ 2(2\mathfrak{E}+a\mathfrak{N})x^3y$
$+ (2aD+a^2M)xy^2$	$+ 0xy^2$
$+ 0x^2y$	$+ (2a\mathfrak{D}+a^2\mathfrak{M})x^2y$
$+ (2aE+a^2N)y^2$	$+ 0y^2$
$+ 0x^2$	$+ (2a\mathfrak{D}+a^2\mathfrak{N})x^2$

22. Приравнивание соответствующих членов определяет следующие количества:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= L; & M &= 2\mathfrak{B}; & \mathfrak{M} &= 2B; & N &= -2a\mathfrak{A}; & \mathfrak{N} &= -2aA; \\ \mathfrak{B} &= C; & D &= -a\mathfrak{B}; & \mathfrak{D} &= -aB; & E &= a^2\mathfrak{A}; & \mathfrak{C} &= a^2A, \end{aligned}$$

так что получается такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E}} + \frac{dy}{\sqrt{\frac{E}{a^2}y^4 - \frac{2D}{a}y^3 + Cy^2 - 2aBy + a^2A}} = 0,$$

полный интеграл которого есть

$$\text{const} = \frac{2Bx^2y - \frac{2D}{a}xy^2 - 2aAx^2 - \frac{2E}{a}y^2 + 2Cxy - 2aBx + 2Dy + 2\sqrt{XY}}{(a+xy)^2}.$$

Замечу здесь, что путем подстановки $y = \frac{-a}{z}$ оно приводится к вышеуказанному уравнению

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E}} + \frac{dz}{\sqrt{Az^4 + 2Bz^3 + Cz^2 + 2Dz + E}} = 0.$$

Стало быть, интеграл этого уравнения теперь получен с помощью вполне естественных способов интегрирования, в то время как раньше я его получил только косвенным путем¹⁾. Итак, интегралом будет

$$Ax^2z^2 + Bxz(x+z) + Cxz + D(x+z) + E + G(x-z)^2 = \\ = \sqrt{(Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E)(Az^4 + 2Bz^3 + Cz^2 + 2Dz + E)},$$

и после освобождения от иррациональности он приводится к виду

$$G^2(x-z)^4 + 2G[Ax^2z^2 + Bxz(x+z) + Cxz + D(x+z) + E] + \\ + (B^2 - AC)x^2z^2 - 2ADxz(x+z) - AE(x+z)^2 - 2BDxz - \\ - 2BE(x+z) + D^2 - CE = 0.$$

Это уравнение может быть приведено и к такому, совпадающему с предыдущим, виду:

$$(2AG + B^2 - AC)x^2z^2 + 2(BG - AD)xz(x+z) + (G^2 - AE)(x+z)^2 - \\ - 2(2G^2 + BD - CG)xz + 2(DG - BE)(x+z) + 2EG + D^2 - CE = 0.$$

23. Если мы теперь хотим выяснить, при каких условиях дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E}} + \frac{dy}{\sqrt{Ay^4 + 2By^3 + Cy^2 + 2Dy + E}} = 0$$

допускает интегрирование²⁾, примем, что это уравнение получается из предыдущего посредством подстановки

$$z = \frac{fy + g}{hy + k}.$$

Тогда новое интегральное уравнение будет вида

$$(2AG + B^2 - AC)x^2(fy + g)^2 + 2(BG - AD)x(fy + g)(hxy + kx + fy + g) + \\ + (G^2 - AE)(hxy + kx + fy + g)^2 - 2(2G^2 - CG + BD)x(fy + g)(hy + k) + \\ + 2(DG - BE)(hy + k)(hxy + kx + fy + g) + \\ + (2EG + D^2 - CE)(hy + k)^2 = 0.$$

При этом коэффициенты \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} , \mathfrak{E} получаются из количеств f , g , h , k следующим образом:

$$\mathfrak{A}(fk - gh)^2 = Af^4 + 2Bf^3h + Cf^2h^2 + 2Dfh^3 + Eh^4, \\ \mathfrak{B}(fk - gh)^2 = 2Afg^3 + Bf^2(3gh + fk) + Cfh(fk + gh) + Dh^2(3fk + gh) + 2Eh^3k, \\ \mathfrak{C}(fk - gh)^2 = 6Afg^2 + 6Bfg(fk + gh) + C(fk + gh)^2 + \\ + 6Dhk(fk + gh) + 6Eh^2k^2 + 2Cfghk, \\ \mathfrak{D}(fk - gh)^2 = 2Afg^3 + Bg^2(gh + 3fk) + Cgk(fk + g) + Dk^2(fk + 3gh) + 2Ehk^3, \\ \mathfrak{E}(fk - gh)^2 = Ag^4 + 2Bg^3k + Cg^2k^2 + 2Dgk^3 + Ek^4.$$

24. Посмотрим, каким образом выкладки, связанные с этой проблемой, выполняются в общем виде. Итак, пусть предложено уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

¹⁾ См. примечание в конце § 6 этой работы Эйлера.

²⁾ integrationem admittat; очевидно, в смысле: обладает алгебраическим интегралом.

которое должно стать интегрируемым после умножения на множитель $P\sqrt{X} + Q\sqrt{Y}$, и пусть его интеграл есть

$$\int (P dx + Q dy) + \frac{2\sqrt{XY}}{(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2} = \text{const.}$$

Тогда, как видели, имеем

$$Q = \frac{-4X(\beta + \delta y)}{(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^3} + \frac{dX}{dx(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2},$$

$$P = \frac{-4Y(\gamma + \delta x)}{(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^3} + \frac{dY}{dy(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2},$$

откуда получаем

$$(\gamma + \delta x)^2 (\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2 \int Q dy = 2(\beta\gamma - \alpha\delta)X +$$

$$+ \left(4\delta X - (\gamma + \delta x) \frac{dX}{dx} \right) (\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy) + (\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2 \Delta(x)$$

и, подобным же образом,

$$(\beta + \delta y)^2 (\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2 \int P dx = 2(\beta\gamma - \alpha\delta)Y +$$

$$+ \left(4\delta Y - (\beta + \delta y) \frac{dY}{dy} \right) (\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy) + (\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2 \Gamma(y).$$

Эти два выражения нужно согласовать друг с другом так, чтобы при делении первого на $(\gamma + \delta x)^2$, а второго на $(\beta + \delta y)^2$ получалась одна и та же функция. Поэтому необходимо, чтобы первое выражение делилось на $(\gamma + \delta x)^2$, а второе на $(\beta + \delta y)^2$, и прежде всего следует удовлетворить этому требованию.

25. Развернем первое выражение, выделяя слагаемые, зависящие от y :

- I. $2(\beta\gamma - \alpha\delta)X + 4\delta(\alpha + \beta x)X - (\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x) \frac{dX}{dx} + (\alpha + \beta x)^2 \Delta(x)$;
- II. $+ y(\gamma + \delta x) \left(4\delta X - (\gamma + \delta x) \frac{dX}{dx} + (\alpha + \beta x) \Delta(x) \right)$;
- III. $+ y^2 (\gamma + \delta x)^2 \Delta(x)$.

Это выражение должно делиться на $(\gamma + \delta x)^2$. Поскольку третий член сам по себе делится на это выражение, напишем второй член в виде

$$(\alpha + \beta x) \Delta(x) + 2\delta X = (\gamma + \delta x) R,$$

а первый член тогда будет равен

$$2(\beta\gamma - \alpha\delta)X + 2\delta(\alpha + \beta x)X + (\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)R + (\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x) \frac{dX}{dx},$$

что приводится к такому виду:

$$(\gamma + \delta x) \left(2\beta X + (\alpha + \beta x)R - (\alpha + \beta x) \frac{dX}{dx} \right).$$

Следовательно, выражение

$$2\beta X + (\alpha + \beta x) \left(R - \frac{dX}{dx} \right)$$

должно делиться на $\gamma + \delta x$. Этому условию мы удовлетворяем, полагая

$$R = \frac{\beta}{\delta} \Delta(x) - \frac{\alpha + \beta x}{\delta} \Delta'(x) + (\gamma + \delta x) S,$$

откуда

$$X = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{2\delta^2} \Delta(x) - \frac{(\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)}{2\delta^2} \Delta'(x) + \frac{(\gamma + \delta x)^2}{2\delta} S,$$

так что первый член будет равен

$$(\gamma + \delta x)^2 \left(\frac{\beta}{\delta} R - \frac{(\alpha + \beta x) dR}{2\delta dx} \right) + \frac{1}{2} (\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)^2 S,$$

то есть

$$(\gamma + \delta x)^2 \left(\frac{\beta^2}{\delta^2} \Delta(x) - \frac{\beta(\alpha + \beta x)}{\delta^2} \Delta'(x) + \frac{(\alpha + \beta x)^2}{2\delta^2} \Delta''(x) + \frac{\beta(\gamma + \delta x)}{\delta} S - \frac{(\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)}{2\delta} \frac{dS}{dx} \right).$$

Тогда второй член равен

$$y(\gamma + \delta x)^2 \left\{ \frac{2\beta}{\delta} \Delta(x) - \frac{(\alpha + \beta x)}{\delta} \Delta'(x) + \frac{(\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)}{2\delta^2} \Delta''(x) + (\gamma + \delta x) S - \frac{(\gamma + \delta x)^2}{2\delta} \frac{dS}{dx} \right\},$$

а третий —

$$y^2(\gamma + \delta x)^2 \Delta(x).$$

Таким образом, выражение

$$(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2 \int Q dy$$

равно

$$\begin{aligned} & \frac{\beta^2}{\delta^2} \Delta(x) + \frac{2\beta}{\delta} y \Delta(x) + y^2 \Delta(x) - \frac{\beta(\alpha + \beta x)}{\delta^2} \Delta'(x) - \\ & - \frac{\alpha + \beta x}{\delta} y \Delta'(x) + \frac{(\alpha + \beta x)^2}{2\delta^2} \Delta''(x) + \frac{(\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)}{2\delta^2} y \Delta''(x) + \\ & + \frac{\beta}{\delta} (\gamma + \delta x) S + (\gamma + \delta x) y S - \frac{(\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x)}{2\delta} \frac{dS}{dx} - \frac{(\gamma + \delta x)^2}{2\delta} y \frac{dS}{dx}, \end{aligned}$$

или, в более удобной форме,

$$\begin{aligned} & \frac{(\beta + \delta y)^2}{\delta^2} \Delta(x) - \frac{(\alpha + \beta x)(\beta + \delta y)}{\delta^2} \Delta'(x) + \frac{(\alpha + \beta x)(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)}{2\delta^2} \Delta''(x) + \\ & + \frac{(\gamma + \delta x)(\beta + \delta y)}{\delta} S - \frac{(\gamma + \delta x)(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)}{2\delta} \frac{dS}{dx}, \end{aligned}$$

что должно равняться второму выражению, то есть

$$\begin{aligned} & \frac{(\gamma + \delta x)^2}{\delta^2} \Gamma(y) - \frac{(\alpha + \gamma y)(\gamma + \delta x)}{\delta^2} \Gamma'(y) + \\ & + \frac{(\alpha + \gamma y)(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)}{2\delta^2} \Gamma''(y) + \frac{(\beta + \delta y)(\gamma + \delta x)}{\delta} \mathfrak{E} - \\ & - \frac{(\beta + \delta y)(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)}{2\delta} \frac{d\mathfrak{E}}{dy}. \end{aligned}$$

26. Если теперь положить

$$\Delta(x) = \delta^2 (Ax^2 + 2Bx + C) \quad \text{и} \quad S = \delta (Dx^2 + 2Ex + F)$$

и соответственно

$$\Gamma(y) = \delta^2 (\mathfrak{A}y^2 + 2\mathfrak{B}y + \mathfrak{C}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{E} = \delta (\mathfrak{D}y^2 + 2\mathfrak{E}y + \mathfrak{F}),$$

то наши выражения в развернутом виде равны

$(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2 \int Q dy$	$(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)^2 \int P dx$
$ \begin{aligned} &+ \delta^2 A x^2 y^2 \\ &+ 2\delta^2 B x y^2 \\ &+ \delta (\beta A - \gamma D + \delta E) x^2 y \\ &+ \delta^2 C y^2 \\ &+ \delta (\beta E - \alpha D) x^2 \\ &+ (2\beta \delta B + (\beta \gamma - \alpha \delta) A - \gamma^2 D + \delta^2 F) x y \\ &+ (\alpha \gamma A - 2\alpha \delta B + 2\beta \delta B - \gamma^2 E + \gamma \delta F) y \\ &(\beta \delta F + (\beta \gamma - \alpha \delta) E - \alpha \gamma D) x \\ &+ \alpha^2 A - 2\alpha \beta B + \beta^2 C - \alpha \gamma E + \beta \gamma F \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &+ \delta^2 \mathfrak{A} x^2 y^2 \\ &+ \delta (\gamma \mathfrak{A} - \beta \mathfrak{D} + \delta \mathfrak{E}) x y^2 \\ &+ 2\delta^2 \mathfrak{B} x^2 y \\ &+ \delta (\gamma \mathfrak{E} - \alpha \mathfrak{D}) y^2 \\ &+ \delta^2 \mathfrak{C} x^2 \\ &+ (2\gamma \delta \mathfrak{B} + (\beta \gamma - \alpha \delta) \mathfrak{A} - \beta^2 \mathfrak{D} + \delta^2 \mathfrak{F}) x y \\ &+ (\gamma \delta \mathfrak{F} + (\beta \gamma - \alpha \delta) \mathfrak{E} - \alpha \beta \mathfrak{D}) y \\ &+ (\alpha \beta \mathfrak{A} - 2\alpha \delta \mathfrak{B} + 2\gamma \delta \mathfrak{E} - \beta^2 \mathfrak{E} + \beta \delta \mathfrak{F}) x \\ &+ \alpha^2 \mathfrak{A} - 2\alpha \gamma \mathfrak{B} + \gamma^2 \mathfrak{E} - \alpha \beta \mathfrak{E} + \beta \gamma \mathfrak{F} \end{aligned} $

откуда следуют только нижеуказанные шесть определений:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A} &= A, \\
 \mathfrak{B} &= \frac{\beta A - \gamma D}{2\delta} + \frac{1}{2} E, \\
 \mathfrak{E} &= \frac{\beta E - \alpha D}{\delta}, \\
 \mathfrak{D} &= \frac{2\gamma \delta B - \gamma^2 A - \delta^2 C}{\alpha \delta - \beta \gamma}, \\
 \mathfrak{E} &= \frac{2\alpha \beta B - \alpha \gamma A - \beta \delta C}{\alpha \delta - \beta \gamma}, \\
 \mathfrak{F} &= F - \frac{\gamma E}{\delta} - \frac{\alpha \beta \gamma A - 2\alpha \beta \delta B + \beta^2 \delta C}{\delta (\alpha \delta - \beta \gamma)},
 \end{aligned}$$

которые достаточны для выполнения вышеуказанных условий. Поскольку все буквы A, B, C, D, E, F вместе с $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ остаются в нашем произволе, то отсюда получаем функцию

$$\begin{aligned}
 2X &= \delta^2 D x^4 + 2\delta (\delta E + \gamma D - \beta A) x^3 + (\delta^2 F + 4\gamma \delta E + \gamma^2 D - 2\beta \delta B - \\
 &- (\beta \gamma + 3\alpha \delta) A) x^2 + 2 (\gamma \delta F + \gamma^2 E - \alpha \gamma A - 2\alpha \delta B) x + \gamma^2 F - 2\alpha \gamma B + (\beta \gamma - \alpha \delta) C.
 \end{aligned}$$

27. Дальше я не буду продолжать эти выкладки, поскольку считаю достаточным, что указан прямой и соответствующий сущности вопроса метод, который приводит к тем совершенно особым интегрированиям, что были получены мною прежде, исходя из совсем иных положений¹⁾. Для дальнейшего развития данной теории интереснее более глубоко исследовать этот новый метод. С этой целью, замечу, что можно применять другой вид множителя, при помощи которого уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

становится интегрируемым. А именно, положим, что множитель $M = P + Q\sqrt{XY}$ таков, что интегрироваться должно следующее выражение:

$$\left(\frac{P dx}{\sqrt{X}} + Q dy \sqrt{X} \right) + \left(\frac{P dy}{\sqrt{Y}} + Q dx \sqrt{Y} \right) = 0.$$

¹⁾ См. выше, примечание к § 4. [Л. III.]

Представим первую часть интеграла в виде $2R\sqrt{X}$, а вторую — в виде $2S\sqrt{Y}$, так, чтобы полный интеграл был равен ·

$$R\sqrt{X} + S\sqrt{Y} = \text{const.}$$

Отсюда после развертывания получим

$$P = \frac{R dX}{dx} + 2X \left(\frac{dR}{dx} \right); \quad P = \frac{S dY}{dy} + 2Y \left(\frac{dS}{dy} \right);$$

$$Q = 2 \left(\frac{dR}{dy} \right); \quad Q = 2 \left(\frac{dS}{dx} \right).$$

Поскольку, таким образом, должно быть

$$\left(\frac{dR}{dy} \right) = \left(\frac{dS}{dx} \right),$$

то выражение $R dx + S dy$, очевидно, должно быть интегрируемым. Не обязательно, чтобы оно обладало алгебраическим интегралом, важно лишь то, чтобы для него удовлетворялось условие интегрируемости¹⁾.

28. Итак, положим

$$R = \frac{y}{\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2} \quad \text{и} \quad S = \frac{x}{\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2},$$

так что

$$Q = \frac{2\alpha - 2\gamma x^2 y^2}{(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)^2}$$

и

$$P = \frac{y dX}{dx (\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)} - \frac{2X y^2 (\beta + 2\gamma xy)}{(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)^2}.$$

В то же время

$$P = \frac{x dY}{dy (\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)} - \frac{2Y x^2 (\beta + 2\gamma xy)}{(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2)^2},$$

так что

$$(\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2) P = \frac{y dX}{dx} (\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2) - 2y^2 X (\beta + 2\gamma xy) =$$

$$= \frac{X dY}{dx} (\alpha + \beta xy + \gamma x^2 y^2) - 2x^2 Y (\beta + 2\gamma xy).$$

Положим

$$X = Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E,$$

а также

$$Y = \mathfrak{A}y^4 + 2\mathfrak{B}y^3 + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}y + \mathfrak{E}.$$

Тогда для того, чтобы оба вышестоящих выражения были равны между собой, требуется, чтобы было

$$\beta = 0, \quad B = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad D = 0, \quad \mathfrak{D} = 0.$$

Указанные выражения тогда соответственно равны:

$$I = -2\gamma Cx^3y^3 + 4\alpha Ax^3y - 4\gamma Exy^3 + 2\alpha Cxy$$

$$II = -2\gamma \mathfrak{C}x^3y^3 + 4\alpha \mathfrak{A}xy^3 - 4\gamma \mathfrak{E}x^3y + 2\alpha \mathfrak{C}xy,$$

¹⁾ ut integrationis charachere sit praedita.

откуда

$$\mathfrak{E} = C, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{-\mathfrak{E}}{A} = \frac{-E}{\mathfrak{A}}, \quad \text{то есть } \mathfrak{A}\mathfrak{E} = AE.$$

Следовательно,

$$X = Ax^4 + Cx^2 - \frac{\alpha}{\gamma} \mathfrak{A}, \quad Y = \mathfrak{A}y^4 + Cy^2 - \frac{\alpha}{\gamma} A$$

и полным интегралом уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Cx^2 - \frac{\alpha}{\gamma} \mathfrak{A}}} + \frac{dy}{\sqrt{\mathfrak{A}y^4 + Cy^2 - \frac{\alpha}{\gamma} A}} = 0$$

будет

$$y \sqrt{Ax^4 + Cx^2 - \frac{\alpha}{\gamma} \mathfrak{A}} + x \sqrt{\mathfrak{A}y^4 + Cy^2 - \frac{\alpha}{\gamma} A} = \text{const} (x + \gamma x^2 y^2).$$

29. Из этих примеров легко видеть, что требуется почти что новый вид анализа, который позволит получать подобные операции в определенном порядке и расширить их применение; однако от этой цели мы пока что еще очень далеки. Но и то, что я выше изложил, имеет большее значение, поскольку это говорит об универсальности принципа интегрирования, упомянутого вначале: ведь именно с его помощью, применяя подходящие множители, оказались выполнимыми многие интегрирования, которые казались очень трудными и превосходящими возможности известных методов. Когда я впервые¹⁾ пришел к этим интегрированиям, я не видел никакого другого пути, чтобы прийти к ним, кроме того, которым я тогда пользовался²⁾. В самом деле, я не заметил тогда, что каждый раз, когда получен полный интеграл любого дифференциального уравнения, то из него можно получить множитель, который делает это уравнение интегрируемым. Но такое заключение никак не верно в том случае, когда интеграл является лишь частным. Поэтому характер этих частных интегрирований, которые я в свое время нашел на основании того же упомянутого другого способа, совсем иной, и пока не видно, каким образом их можно получить прямым и естественным путем³⁾.

30. Но тем более стоит подробнее исследовать характер этих частных интегрирований, рассматривая для этой цели простейшие случаи. Например, я нашел, что дифференциальное уравнение

$$dx \sqrt{1+x^2} + dy \sqrt{1+y^2} + ny dx + nx dy = 0$$

имеет частный интеграл

$$x^2 + y^2 + 2xy \sqrt{1+n^2} = n^2$$

и я также нашел бесчисленное количество интегралов дифференциальных уравнений такого рода, которые не зависят ни от логарифмов, ни от квадратуры круга. Поэтому данное уравнение будем рассматри-

¹⁾ См. примечание¹⁾ к § 4. [Л. Ш.]

²⁾ Это указание находится уже в работе (№ 269 по списку Энестрема) «Об интегрировании дифференциальных уравнений» (De integratione aequationum differentialium), Novi comment. acad. sc. Petrop. 8 (1760/1), 1763, стр. 3. см. особ. Problema 7, § 48; также в Opera Omnia, ser. I, vol. 22. [Л. Ш.]

³⁾ Сопоставить с введением к работе № 251 (по списку Энестрема), Opera Omnia, ser. I, vol. 20 [Л. Ш.]

вать так, будто оно не может быть проинтегрировано в логарифмах. Итак, здесь прежде всего ставится вопрос, каким прямым путем можно найти указанный частный интеграл по дифференциальному уравнению. А затем, какого вида должно быть дифференциальное уравнение для того, чтобы существовал такой частный интеграл. В связи с этими вопросами замечу прежде всего, что вышеуказанное алгебраическое уравнение является полным интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = 0.$$

В самом деле, из указанного алгебраического уравнения следует, что

$$x + y\sqrt{1+n^2} = n\sqrt{1+x^2}$$

и

$$y + x\sqrt{1+n^2} = n\sqrt{1+y^2},$$

так что как $\sqrt{1+x^2}$, так и $\sqrt{1+y^2}$ рационально выражаются через x и y . Но тогда путем дифференцирования получим

$$\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{dy + dx\sqrt{1+n^2}}{x}$$

и

$$\frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{dx + dy\sqrt{1+n^2}}{n}.$$

Но если произвольные кратные этих уравнений прибавить к уравнению

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = 0,$$

то всегда получается дифференциальное уравнение, для которого указанное алгебраическое уравнение является только частным интегралом. Стало быть, вообще дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx + Px dx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{dy + Qy dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{P dy + Q dx + (P dx + Q dy)\sqrt{1+n^2}}{n}$$

имеет частный интеграл

$$x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{1+n^2} = n^2.$$

Если $P = x$ и $Q = y$, то получается дифференциальное уравнение

$$dx\sqrt{1+x^2} + dy\sqrt{1+y^2} = \frac{xdy + ydx + (xdx + ydy)\sqrt{1+n^2}}{n},$$

а из интеграла получается

$$x dx + y dy = -(x dy + y dx)\sqrt{1+n^2}.$$

Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению

$$dx\sqrt{1+x^2} + dy\sqrt{1+y^2} + nx dy + ny dx = 0,$$

которое обладает указанным выше частным интегралом.

31. Перейдем теперь к более общим случаям. Положим, что полный интеграл уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

уже найден и пусть это будет $W = \text{const}$. Заметим, что в этом случае всегда оба радикала \sqrt{X} и \sqrt{Y} выражаются в виде рациональных функций от x и y . Итак, пусть

$$\sqrt{X} = R \quad \text{и} \quad \sqrt{Y} = S,$$

так что

$$\frac{dX}{\sqrt{X}} = 2dR \quad \text{и} \quad \frac{dY}{\sqrt{Y}} = 2dS.$$

Пусть P — функция одного x и Q — функция одного y ; тогда составим уравнение

$$\frac{dx + P dX}{\sqrt{X}} + \frac{dy + Q dY}{\sqrt{Y}} - 2P dR - 2Q dS = 0,$$

для которого алгебраическое уравнение $W = \text{const}$ несомненно является частным интегралом. Если P и Q выбраны так, что выражение $P dR + Q dS$ допускает интегрирование, а его интеграл равен V , то возникает трансцендентное уравнение

$$\int \frac{dx + P dX}{\sqrt{X}} + \int \frac{dy + Q dY}{\sqrt{Y}} - 2V = \text{const},$$

которому удовлетворяет уравнение $W = \text{const}$ или выведенные отсюда уравнения $\sqrt{X} = R$ и $\sqrt{Y} = S$ в качестве частных интегралов. Нам представляется, что такое рассуждение приводит к частным интегралам указанного вида, которые весьма трудно было бы найти иным путем¹⁾.

¹⁾ Tale ergo ratiocinium viam ad hujusmodi integrationes particulares alioquin inventu difficillimas patefacere videtur.



КОММЕНТАРИИ ПЕРЕВОДЧИКА

ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ Л. ЭЙЛЕРА В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Работы Эйлера по теории уравнений с частными производными в большей части собраны в томе III его «Интегрального исчисления», хотя они продолжались и после выхода в свет этого сочинения. В «Интегральном исчислении» уравнениям с частными производными посвящен основной отдел третьего тома, озаглавленный «Метод определения функций двух и многих переменных по данному соотношению между дифференциалами любого порядка». Этот отдел, занимающий более двух третей третьего тома, представляет собою первую в истории математики монографию по уравнениям в частных производных, причем почти все содержащиеся в ней результаты принадлежат лично Эйлеру. *Эйлер является, таким образом, основоположником теории уравнений в частных производных.*

Начиная с этих работ Эйлера, возникших на почве его исследований в области гидродинамики, теории упругости и акустики, теория уравнений в частных производных находится в центре развития математики. В этой области математики, теснейшим образом связанной с физикой (неслучайно термины «уравнения в частных производных» и «уравнения математической физики» употребляются практически равнозначно), работал и работает ряд крупнейших ученых всех стран. Большие заслуги в этой отрасли принадлежат русским и советским математикам, таким, как академик М. В. Остроградский в прошлом веке, академики С. Н. Бернштейн, И. Г. Петровский, С. Л. Соболев и многие другие в наше время.

Подробный анализ работ Эйлера в области уравнений в частных производных нужен тем более потому, что в западноевропейской литературе встречаются попытки принизить его заслуги. Так, английский автор У. У. Р. Бол¹⁾ доходит до утверждения, что результаты в этой области, содержащиеся в «Интегральном исчислении» Эйлера, якобы принадлежат Лагранжу и были внесены лишь задним числом во второе издание этой работы. На деле же работы Лагранжа, на которые ссылается Бол, начали публиковаться лишь через два года после выхода первого

¹⁾ W. W. R. Ball, A short account of the history of mathematics, Лондон, 1893, стр. 412. В расширенное французское издание под редакцией Фрейнда и Монтессю (Histoire des mathématiques, т. II, Париж, 1912, стр. 94) неправильное утверждение Бола вошло даже в усиленной форме.

издания тома III «Интегрального исчисления» Эйлера, а второе издание представляет точную перепечатку первого.

«Метод определения...» делится на две части, причем в первой рассматривается проблема отыскания функций двух независимых переменных, а во второй — проблема отыскания функций трех или более независимых переменных. Первая часть распадается на три раздела, посвященных соответственно уравнениям первого, второго и третьего и более высоких порядков. Во всей работе исследуются только единичные уравнения, но не системы.

В этой работе Эйлер подводит итог своим исследованиям по уравнениям в частных производных, начатым в конце 40-х годов XVIII века. Однако он не включил в книгу ряд своих важнейших результатов в этой области. Дело в том, что Эйлер нашел многочисленные частные решения линейных уравнений в частных производных, встречающихся в механике, и показал, как из них путем линейной комбинации можно найти более общие решения. Он, однако, сомневался в том, что таким путем, применяя бесконечные суммы, можно получить общее решение в задачах с неаналитическими начальными данными. Лишь гораздо позже было доказано, что сомнения Эйлера были необоснованны.

В результате своих сомнений Эйлер включил в свою книгу только те общие решения, которые он мог получить в явном виде при помощи произвольных функций. О возможности получения общих решений в виде бесконечных сумм частных решений он говорит лишь мимоходом в нескольких местах, выражая при этом каждый раз свои сомнения.

Уравнениями в частных производных Эйлер занимался главным образом в связи с потребностями механики сплошных сред, а уравнения, которые при этом возникают, — всегда второго или более высокого порядка. Однако система исследования требовала начать с более простого случая — с уравнений первого порядка, т. е. с уравнений, содержащих лишь первые производные искомой функции z :

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \quad (1)$$

Значительная часть результатов Эйлера в этом вопросе содержится в ранее опубликованной работе «Определение функций из данного дифференциального соотношения»¹⁾.

Эйлер, в частности, дал общее решение линейного уравнения первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial y} = V(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + U(x, y), \quad (2)$$

где U и V — произвольные функции («Интегральное исчисление», т. III, проблема 23)²⁾.

Кроме того, в книге даны общие решения многочисленных нелинейных уравнений, причем каждый раз решение дается в квадратурах³⁾. Ряд нелинейных уравнений Эйлер сводит к линейным (проблемы 11, 12, 13, 14 и др.) при помощи преобразования

$$d(z - px - qy) = -x dp - y dq \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

¹⁾ Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, т. IX за 1762—1763 гг. (1764 г.).

²⁾ Здесь и далее ссылки на проблемы и пункты тома III «Интегрального исчисления» приведены в тексте в скобках.

³⁾ Общим решением уравнений первого порядка Эйлер еще не обладал. Оно было найдено значительно позже Шарпи и дальше разработано Коши.

широко известного под названием «преобразования Лежандра», хотя Лежандру в год окончания «Интегрального исчисления» было всего одиннадцать лет¹⁾. В других задачах он использует несимметричное преобразование

$$d(z - qy) = p dx - y dq$$

(проблема 17 и др.). Фактически — правда, без раскрытия геометрического смысла — Эйлер пользуется при решении уравнений первого порядка теми линиями интегральной поверхности, которые в настоящее время называются *характеристиками*. Он подчеркивает, что произвольная функция, входящая всегда в выражение общего решения, может быть «разрывной». При этом следует иметь в виду, что Эйлер употребляет слова «непрерывный» («*continuuus*») и «разрывный» («*discontinuuus*») не в современном смысле: под «*functio discontinua*» Эйлер понимал такую функцию, которую нельзя для всех значений независимой переменной выразить одним и тем же аналитическим выражением (формулой). Следовательно, «рвутся» не значения функции, но ее аналитические выражения. Точно так же разрывной Эйлер считал функцию, вообще не имеющую аналитического выражения или, как он выражается, такую, которую «можно получить даже так, что описывается произвольная кривая, причем абсцисса обозначается через x , а ординаты дают функцию y » (см. пункт 37). Над тем, что карандаш или перо, которым мы описываем кривую, в действительности дает на бумаге не кривую, а полосу, и что точное определение кривой таким способом получить нельзя, — над этим Эйлер, как вообще математики XVIII века, не задумывался. Но по существу Эйлер сделал в этом вопросе важнейшее открытие: он впервые ввел, хотя и в нестрогой форме, понятие *неаналитической функции*. И действительно, произвольная функция, входящая в общее решение уравнения первого порядка, является, вообще говоря, неаналитической.

Было бы, однако, неправильной модернизацией заменять термины Эйлера «непрерывная функция» и «разрывная функция» современными терминами «аналитическая функция» и «неаналитическая функция», так как Эйлер современным понятием аналитической функции еще не владел. Именно в связи с этим, как мы увидим далее, он и не достиг полной ясности в вопросе об общем решении уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

и вообще уравнений эллиптического типа.

Мысль о необходимости введения в анализ неаналитических функций пришла Эйлеру в связи с исследованием проблемы распространения звука, проблемы, которой Эйлер занимался в течение почти всей своей научной деятельности и в связи с которой он получил важнейшие свои результаты по уравнениям в частных производных.

Впервые эта мысль появляется у Эйлера в его работе «О колебании струн»²⁾. Лагранж об этом говорит следующее: «Г. Эйлер, я думаю,

¹⁾ Согласно письму Эйлера к Гольдбаху от 17 декабря 1763 г. рукопись «Интегрального исчисления» была закончена в 1763 г.

²⁾ L. Euler, De vibratione chordarum exercitatio, Nova Acta eruditorum, 1749.

первый, который ввел в анализ этот новый вид функций (т. е. неаналитические функции. — Ф. Ф.) в проблеме о колеблющихся струнах»¹⁾.

Как известно, согласно результату Даламбера²⁾, отклонение точки струны (рассматриваемой как линия) от положения равновесия определяется при малых отклонениях из уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Здесь t — время, x — координата вдоль струны в положении равновесия и

$$a = \sqrt{\frac{k}{\rho q}}, \quad (4a)$$

где k — сила натяжения струны, ρ — плотность ее материала и q — ее поперечное сечение.

В случае постоянства поперечного сечения общее решение уравнения (4), согласно Даламберу, есть

$$z = f(x - at) + g(x + at), \quad (5)$$

где f и g — произвольные функции. Даламбер, признававший вообще только аналитические функции, считал, что f и g должны быть аналитическими; но тогда становится непонятным, каково должно быть движение струны в случае, когда начальное отклонение допускает разрыв производных. Если, наоборот, допускать такой разрыв первой или более высоких производных, то становится понятным физический смысл параметра a , имеющего размерность скорости: *a есть скорость распространения разрыва вдоль струны* (скорость распространения волны), причем первый член правой части уравнения (5) означает волну, движущуюся в сторону растущих x , а второй член — волну, движущуюся в сторону убывающих x . Общее движение струны получается путем наложения указанных двух волн.

Эйлер первый понял, что уравнение Даламбера (4) отражает процесс распространения волн. Например, в своей работе «Разъяснения о движении колеблющихся струн»³⁾ Эйлер, рассматривая струну AB , отклоненную в начальный момент времени только на участке AD , и точку x ($Ax > AD$), говорил: «точка x остается в покое в течение времени $\frac{xD}{a}$ » (стр. 26 работы).

Совершенно аналогичное положение имеем в случае движения воздуха в трубе постоянного сечения с малыми продольными отклонениями равновесия. Эти продольные отклонения удовлетворяют также уравнению (4), причем на этот раз скорость равна

$$a = \sqrt{c \frac{p}{\rho}}, \quad (4b)$$

где p — давление, ρ — плотность воздуха, c — безразмерная постоянная. Эйлер считал эту постоянную равной единице; впоследствии Лаплас

¹⁾ J. La Grange, Nouv. rech. sur la nature et la propagation du son, Miscellanea taurinensia, т. II за 1760—1761 гг., p. 19.

²⁾ J. D'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde étendue mise en vibration, Hist. Ac. Berlin, 3, 1747 (1749).

³⁾ L. Euler, Éclaircissements sur le mouvement des cordes vibrantes, Miscellanea taurinensia, т. III, 1762—1765.

показал, что она равна

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v},$$

где C_p и C_v — удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме.

Следовательно, решение (5) также остается в силе, а это значит, что a в данном случае представляет собой скорость распространения звуковых волн в воздухе (газе)¹⁾.

Таким образом, *строгое доказательство формулы (4б) для скорости звука*, выведенной еще раньше элементарными средствами, но менее строго Ньютоном, требует введения неаналитических функций, допускающих разрывные производные.

Сам Эйлер говорит об этом в своей работе «О распространении звука»²⁾:

«В настоящее время, после того как г. Лагранж полностью подтвердил мое решение, и притом совершенно неопровержимо, я не сомневаюсь в том, что скоро будет признана необходимость разрывных функций в анализе, тем более, что это — единственное средство для объяснения распространения звука».

Спор по поводу допустимости неаналитических функций и вместе с этим по поводу скорости звука продолжался между Эйлером и Даламбером в течение многих лет. Даламбер отказывался признавать как неаналитические функции, так и формулу для скорости звука (4б). Эйлер замечает по этому поводу (*Opera omnia*, ser. 3, т. I, стр. 431): «В самом деле, когда я дал свое общее решение для колебания струн, которое охватывает также те случаи, когда струна в начальный момент имеет неправильную форму, не выражающуюся никаким уравнением, оно казалось сначала подозрительным некоторым крупным математикам. Г. Даламбер предпочел даже утверждать, что в этом случае абсолютно невозможно определить движение струны, лишь бы не допустить моего решения, хотя оно формально ничем не отличается от его решения в других случаях», т. е. в случае аналитических начальных данных.

Заметим в связи с этим, что применение разрывных в современном смысле решений в теории волнового уравнения полностью оправдано благодаря работе советского академика С. Л. Соболева, который ввел понятие «предельных решений» волнового уравнения, имеющее большое принципиальное значение; предельное решение может иметь разрывные первые производные или даже не иметь производных.

Даламбер, упрямо не признавая неаналитические (разрывные) функций, закрыл себе этим дорогу к пониманию проблемы скорости звука и пришел, наконец, к следующему безнадежному выводу: «Мы видим, таким образом, что даже если сделать предположения наиболее благоприятные для вычислений, не представляется возможным привести к точным аналитическим формулам законы движения частиц воздуха, а следовательно, и объяснить этими формулами распространение звука, известное нам из опыта»³⁾.

¹⁾ L. Euler, *Éclaircissements sur le mouvement des cordes vibrantes*, *Miscellanea taurinensia*, т. III. 1762—1765.

²⁾ L. Euler, *De la propagation du son*, *Mém. Ac. Berl.*, 15, 1759 (*Opera omnia*, Ser. 3, т. I, § 25).

³⁾ J. D'Alembert, *Suite de recherches sur le mouvement des fluides*, § 16. *Opuscules mathematiques*, т. V, 1768, стр. 144.

Справедливо придавая большое значение введению неаналитических функций в теорию уравнений в частных производных, Эйлер, однако, ошибочно полагал, что общее решение задачи колебания струны не может быть найдено путем разложения по гармоникам, т. е. по синусоидальным колебаниям, согласно методу Д. Бернулли. Он писал по этому поводу: «Теперь легко согласятся со мною в том, что мы совершенно не знаем, как можно это движение (т. е. то, при котором в начальный момент была отклонена только часть струны. — $\Phi. \Phi.$) каким бы то ни было образом представить при помощи синусоид»¹⁾.

Как мы уже говорили, Эйлер не считал, вообще говоря, возможным представление общих решений линейных уравнений в частных производных в виде рядов, образованных из частных решений (см. сказанное выше на стр. 420).

Изложение теории уравнений второго порядка для функций двух независимых переменных Эйлер начинает в томе III «Интегрального исчисления» с теории преобразования к другим независимым переменным, причем пользуется функциональным определителем этого преобразования, который теперь обычно называется «якобианом», хотя К. Г. Якоби жил в XIX веке. Исследуется также вопрос о преобразовании уравнения при заменах зависимой переменной z через v , а именно $z = vp$, $z = v + p$, где $p = p(x, y)$ — заданная функция.

Далее дается общее решение при помощи произвольных функций простейших уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= P(x, y), & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= P \frac{\partial z}{\partial x} + Q, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= P, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= P \frac{\partial z}{\partial x} + Q, \end{aligned}$$

которые легко приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям (проблемы 41—45).

Далее (проблема 46) Эйлер рассматривает уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = az,$$

к которому сводится, как известно, телеграфное уравнение.

Эйлер дает частные решения вида

$$z = Ae^{ax + \frac{ay}{a}}$$

и

$$z = B \sin(mx - ny), \quad \text{или} \quad z = B \cos(mx - ny),$$

где $mn = a$, и указывает на возможность получения более общих решений в виде линейных комбинаций решений этого вида. Что же касается возможности получения общего решения этим путем, он высказывает сомнения, о которых мы уже говорили.

Затем Эйлер ставит следующий вопрос (проблема 47): дано наиболее общее линейное уравнение второго порядка, содержащее только смешанную вторую производную,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} + Rz + S = 0,$$

1) См. цитированную выше работу в *Miscellanea taurinensia*, т. III, стр. 26.

и спрашивается, при каких соотношениях между P, Q, R, S удается записать общее решение в явном виде. Для этой цели Эйлер пользуется преобразованием $z = e^V v$, где $v = v(x, y)$ — заданная функция. Если для v получится уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + T \frac{\partial v}{\partial x} + e^{-V} S = 0, \quad (6a)$$

то уравнение (6), очевидно, сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Условием приводимости (6) к (6a) являются, как показывает Эйлер, равенства

$$P = T - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Q = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad R = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - T \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}.$$

Общее решение уравнения (6) — последовательными приближениями, или в квадратурах при помощи функции Римана, или численным способом — Эйлеру еще не было известно. Вообще метод решения линейных уравнений в частных производных при помощи некоторых фундаментальных решений и квадратур, основы которого заложил, по-видимому, Пуассон, у Эйлера еще не встречается.

После этого Эйлер переходит к волновому уравнению (проблема 48)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Вводя новые координаты $t = x + ay$, $u = x - ay$, т. е., выражаясь современной терминологией, вводя характеристические координаты, Эйлер получает общее решение

$$z = f(t) + F(u) = f(x + ay) + F(x - ay).$$

Исторически очень интересны замечания Эйлера в пункте 301 относительно уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

обычно, но не вполне справедливо, называемого «уравнением Лапласа» (коэффициент a^2 при помощи преобразования можно привести к единице).

Эйлер записывает общее действительное решение в виде

$$z = f(x + ay \sqrt{-1}) + F(x - ay \sqrt{-1})$$

и констатирует, что если функции f и F «непрерывные», т. е. аналитические, то они должны иметь форму $P \pm Q \sqrt{-1}$, т. е. быть комплексно-сопряженными. Но будучи убежденным в том, что и в этом случае общее решение должно быть представлено при помощи произвольных и, вообще говоря, «разрывных» функций, Эйлер не допускает мысли, что функции f и F в данном случае по сути дела должны быть аналитическими, хотя на самом деле они именно таковы.

Следует отметить, что еще в 1752 г. Даламбер показал¹⁾, что уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (7)$$

¹⁾ J. D' Alembert, Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides, Paris, 1752, § 59, стр. 61.

являются условиями формальной дифференцируемости функции

$$\zeta = \xi + i\eta = \zeta(z), \quad (7a)$$

где $z = x + iy$, а Эйлер в 1777 г. показал¹⁾, что уравнения (7) являются условиями конформности отображения. Но что функции ξ , η , удовлетворяющие уравнениям (7), автоматически являются «непрерывными», т. е. в окрестности любой точки выражаются в степенных рядах, об этом не догадывались ни Даламбер, ни Эйлер: у них отсутствовало строгое определение аналитичности функции.

Таким образом, Эйлер достиг ясности в отношении качественного характера общего решения уравнений гиперболического, но не эллиптического типа

Начиная с проблемы 49, Эйлер приступает к рассмотрению гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. Он каждый раз переходит к характеристическим координатам, т. е. к таким, для которых из вторых производных остается только смешанная производная

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t},$$

и ищет условия, при которых решение задачи сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям. После разбора ряда более простых случаев он исследует *общее линейное уравнение гиперболического типа с переменными коэффициентами* (проблема 51)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2P \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (P^2 - Q^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + R \frac{\partial z}{\partial y} + S \frac{\partial z}{\partial x} + Tz + V = 0. \quad (8)$$

Эйлер вводит общие характеристические координаты

$$t = \int p [dx + (P + Q) dy], \quad u = \int q [dx + (P - Q) dy], \quad (8a)$$

где p и q — интегрирующие множители. После этого уравнение принимает вид

$$-4Q^2 pq \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + Nq \frac{\partial z}{\partial u} + Mp \frac{\partial z}{\partial t} + Tz + V = 0$$

(так что задача сведена к проблеме 47, которую Эйлер, как мы видели, решает только в тех случаях, когда задача сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям).

Как уже сказано, общего метода решения задачи у Эйлера не было, но само введение характеристических координат в общем виде является крупной его заслугой.

Одной из наиболее интересных глав тома III «Интегрального исчисления» является четвертая глава второго раздела первой части.

В ней рассматривается уравнение

$$(x + y)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + m(x + y) \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) + nz = 0. \quad (9)$$

¹⁾ L. Euler, De representatione superfaciei sphaericae super plano, Acta Ac. Sc. Petr., т. I за (1777) г. (1778). В этой работе, связанной с картографическими исследованиями Эйлера, он впервые вводит понятие конформного отображения. Эйлер решает в этой статье общую задачу конформного отображения области сферы на плоскую область, т. е. задачу, предельным случаем которой является конформное отображение плоской области на плоскую область. Термин «конформный» ввел несколько позднее в 1789 г. петербургский академик Ф. П. Шуберт.

Это уравнение, изученное впервые Эйлером, часто называют *уравнением Эйлера — Пуассона*. Пуассон¹⁾ нашел его общее решение, пригодное для нецелых m ($0 < m < \frac{1}{2}$) и $n=0$ и не требующее дифференцируемости произвольных функций, при помощи которых оно выражается, решение Эйлера, имеющее ряд практических преимуществ, в то же время требует в общем случае бесконечно многократной дифференцируемости этих функций. Распространенное также в литературе название «уравнение Дарбу» неверно: сам Дарбу в своих «Лекциях по общей теории поверхностей»²⁾ ссылается в этом вопросе на Эйлера и Пуассона. Самое общее решение этого уравнения, как и линейных уравнений гиперболического типа вообще, было найдено Риманом.

Уравнение Эйлера — Пуассона (9) и его решение, данное Эйлером, впоследствии нашло большое число применений в газовой динамике, что указывает на чрезвычайную важность этого исследования Эйлера (см. ниже).

Очень интересно и характерно для стиля работы Эйлера, каким образом он пришел к этому уравнению и как он получил его общее решение. Остановимся на этом вопросе несколько подробнее.

Мы уже упомянули работу Эйлера «О распространении звука», опубликованную в «Мемуарах Берлинской Академии наук» за 1759 г.; в этой работе даны общие дифференциальные уравнения для смещений частиц воздуха при звуковых колебаниях и рассматривается решение задачи движения воздуха в трубе постоянного сечения (плоские звуковые волны). В двух дополнениях к этой работе, напечатанных там же, исследуется случай цилиндрических волн, в котором Эйлеру не удалось записать общее решение, а затем случай сферических волн, где это ему удалось³⁾. Если p, q, r — смещения частиц, то имеем:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (10)$$

и аналогичные уравнения для q и r .

В случае цилиндрических волн смещения u направлены перпендикулярно к некоторой оси (например, оси z) и зависят только от времени t от расстояния r от этой оси. Если ввести зависимую переменную $s = \frac{u}{r}$, то на основании уравнения (10) получим в этом случае

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = 0. \quad (11)$$

В случае сферических волн смещения u направлены от некоторого центра (источника звука); если r — расстояние данной точки от источника звука и если снова ввести величину $s = \frac{u}{r}$, то получим:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} - \frac{4}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = 0. \quad (11a)$$

1) S. Poisson, Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, Journal de l'Ecole polytechnique 12, ch. 19, 1823.

2) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, I. 4, ch. 3.

3) Краткое резюме этой работы содержится в письме Эйлера к Лагранжу от 1 января 1760 г., опубликованном в Miscellanea taurinensia, т. II.

В связи с этим Эйлер исследовал общее уравнение

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial s}{\partial r} = 0. \quad (12)$$

Сначала он искал частное решение в виде

$$s = P(r) \sin(at + \alpha),$$

что дает

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dP}{dr} + m^2 P = 0 \quad \left(m = \frac{a^2}{a^2} \right).$$

Дальнейшие подстановки

$$P = e^{\int p dr}, \quad r^\nu p = q, \quad r^{\nu-1} = \frac{1}{\rho}$$

приводят к уравнению Риккати

$$\frac{dq}{d\rho} - \frac{q^2}{\nu-1} - \frac{m^2}{\nu-1} \rho^{-\frac{2\nu}{\nu-1}} = 0, \quad (13)$$

которое интегрируется в явном виде, когда ν — четное число. Таким образом, Эйлер получил для сферических волн

$$u = \frac{E \sin(mr + \xi) \sin(mat + \alpha)}{r^2} - \frac{mE \cos(mr + \xi) \sin(mat + \alpha)}{r}.$$

Это обстоятельство, как рассказывает сам Эйлер¹⁾, навело его на мысль о существовании решения вида

$$u = \frac{A}{r^2} \Phi(r + at) + \frac{B}{r} \Phi'(r + at),$$

что подтвердилось при условии $B = -A$.

Таким образом, Эйлер получил общее решение задачи сферических волн:

$$u = \frac{1}{r^2} \Phi(r + at) - \frac{1}{r} \Phi'(r + at) + \frac{1}{r^2} \Psi(r - at) - \frac{1}{r} \Psi'(r - at). \quad (14)$$

О связи исследуемого уравнения в частных производных с уравнением Риккати говорится также в «Интегральном исчислении», т. III, пункт 346.

После решения задачи сферических волн естественно было выяснить, имеют ли физический смысл остальные случаи, когда уравнение Риккати (13) решается в явном виде, и решается ли уравнение (12) в этих случаях в явном виде. Все это подтвердилось.

В 1772 г. Эйлер публикует работу «О движении воздуха в трубах»²⁾, часть результатов которой ко времени написания тома III «Интегрального исчисления» уже была известна Эйлеру, как можно заключить по примечанию в пункте 342. В этой работе Эйлер рассматривает распространение звука в трубе переменного сечения. Если пренебречь влиянием силы тяжести (Эйлер его учитывает), то полученное Эйлером уравнение для малых смещений и скоростей принимает вид

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial(Uu)}{\partial x}, \quad (15)$$

¹⁾ Opera omnia, Ser. 3, т. I, стр. 493.

²⁾ L. Euler, De motu aeris in tubis, Novi Comm. Ac. Sc. Petr., t. XVI за 1771 г. (1772).

где u — смещение частицы, x — координата поперечного сечения, измеренная вдоль трубы, и

$$U = \frac{d \ln \Omega}{dx},$$

где Ω — площадь поперечного сечения.

Положим, что

$$\Omega = cx^{\alpha}. \quad (16)$$

Если принять, что труба — поверхность вращения, то это значит, что образующая есть парабола

$$r = Cx^{\frac{\alpha}{2}} \quad (16a)$$

(если $\alpha < 0$, то имеем, конечно, кривую типа гиперболы). В таком случае

$$U = \frac{\alpha}{x},$$

и если ввести обозначение

$$s = \frac{u}{x},$$

то уравнение (15) принимает вид

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{2+\alpha}{x} \frac{\partial s}{\partial x},$$

т. е. приводится к уравнению (12). Следовательно, если α — четное число, то связанное с данным уравнением уравнение Риккати решается в явном виде.

В «Интегральном исчислении» Эйлер показывает, что при помощи характеристических координат уравнение (12) сводится к уравнению (9), где $m = \frac{\nu}{2}$, $n = 0$, которое он решает при целых m в явном виде формулой, содержащей две произвольные функции и конечное число их производных, т. е. посредством некоторого обобщения решения для сферических волн (проблема 53, случай 1, прибавление 1).

Заметим, что в работе «О движении воздуха в трубах» Эйлер решает задачу о распространении звука в трубах в явном виде для труб еще гораздо более сложных форм, чем рассмотренные выше, причем пользуется методами, изложенными в «Интегральном исчислении» (т. III, ч. 1, разд. II, гл. V).

Другой проблемой, которая привела Эйлера к уравнению (9), была проблема колебания струн переменной толщины.

Этой проблеме Эйлер посвятил несколько статей.

Уравнение (4) в этом случае остается в силе, только скорость распространения волны a зависит от координаты x .

Если $a^2 = c^2 x^{\frac{4m}{2m-1}}$, то получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 x^{\frac{4m}{2m-1}} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (17)$$

которое после введения характеристических координат также сводится к уравнению (9), причем $n = 0$ (проблема 53, случай 2, прибавление 1).

Часть приведенных по данному вопросу результатов Эйлер опубликовал еще значительно раньше в статьях «О движении струн переменной толщины» и «Об интеграции уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{b}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{c}{x^2} z$ »¹⁾.

Последнее уравнение также приводится при помощи характеристических координат к уравнению (9) (проблема 53, случай 1).

Решение уравнения (9) Эйлер сразу записывает в виде

$$z = A(x+y)^\lambda f(x) + B(x+y)^{\lambda+1} f'(x) + \dots, \quad (18)$$

причем показатель λ находится из уравнения $\lambda^2 + (2m-1)\lambda + n = 0$, а для коэффициентов A, B, C, \dots получается рекуррентная формула

$$B = \frac{(m+\lambda)A}{2(2m+\lambda)}; \quad C = -\frac{(m+\lambda+1)B}{2(2m+\lambda+1)}; \dots$$

(проблема 52). Поскольку

$$\lambda + m = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - m - n + m^2},$$

то ясно, что ряд обрывается, если величина под корнем равна квадрату дроби со знаменателем 2, а перед корнем взят знак минус. Конкретно, если $\lambda + m + i = 0$, то ряд обрывается на $(i-2)$ -м члене. В этом случае

$$\frac{1}{2} + i - \sqrt{\frac{1}{4} - m - n + m^2} = 0, \quad \text{откуда} \quad n = (m+i)(m-i-1).$$

Общее решение равно

$$z = A(x+y)^\lambda [f(x) + F(y)] + B(x+y)^{\lambda+1} [f'(x) + F'(y)] + \dots,$$

причем A можно приравнять единице.

Как особенно интересный пример, Эйлер рассматривает случай $n = 0$, который дает

$$m = -i \quad \text{или} \quad m = i + 1 \quad (i = 0, 1, \dots).$$

Таким образом, в случае $n = 0$ ряд обрывается для любых целых положительных или отрицательных m , т. е. как раз для тех случаев, для которых соответствующее уравнение Риккати решается в явном виде.

В проблеме 53 Эйлер решает вопрос о том, когда уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - Q^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + R \frac{\partial z}{\partial x} + S \frac{\partial z}{\partial y} + T = 0$$

сводится к уравнению (9), и находит в качестве частных случаев также уравнения (12) и (17), как мы указали выше.

Проблемы 54 и 55 не дают ничего существенно нового: Эйлер еще раз непосредственно решает уравнения (12) и (17), не прибегая к общей теории.

Уравнение (9) нашло впоследствии гораздо более широкое применение, чем мог предвидеть Эйлер.

¹⁾ L. Euler, Recherches sur le mouvement des cordes inégalement grosses; Recherches sur l'intégration de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{b}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{c}{x^2} z$, Miscellanea taurinensia, т. III, 1762—1765.

Прежде всего, Риман¹⁾ показал в 1860 г., что *точное* уравнение адиабатического и обратимого движения газа в трубе постоянного сечения в случае, когда во всех частицах энтропия единицы массы одна и та же, в характеристических координатах сводится к уравнению Эйлера — Пуассона (напомним, что Эйлер дал решение этой механической задачи только для случая малых колебаний). При этом получается

$$n = 0, \quad m = \frac{3-\kappa}{2(\kappa-1)},$$

где κ — отношение теплоемкостей. В этой работе Риман разработал метод решения уравнений гиперболического типа, носящий его имя. Число m здесь, вообще говоря, не целое, так что решение Эйлера может превратиться в бесконечный ряд; однако в случае одноатомных газов имеем:

$$\kappa = \frac{5}{3}, \quad m = 1;$$

в случае двухатомных газов

$$\kappa = \frac{7}{5}, \quad m = 2,$$

так что в обоих этих случаях общее решение Эйлера применимо.

Кроме того, при очень высоких давлениях и температурах получаются хорошие результаты, если принять $\kappa = 3$, $m = 0$.

В связи с этим Л. Д. Ландау²⁾ и К. П. Станюкович³⁾ недавно получили ряд практически важных результатов, пользуясь общим решением Эйлера.

Дарбу⁴⁾ в своих «Лекциях по общей теории поверхностей» применяет уравнение Эйлера — Пуассона в дифференциальной геометрии. Как показал С. А. Чаплыгин⁵⁾, задача определения плоскопараллельных безвихревых изэнтропических течений газа сводится к уравнению

$$K \frac{\delta^2 \psi}{\delta \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} = 0, \quad (19)$$

где σ , K — функция модуля скорости, θ — угол наклона скорости и ψ — функция тока. При сверхзвуковых скоростях $K < 0$; в этом случае уравнение Чаплыгина (19) совпадает формально с частным случаем уравнения колебания струны переменной толщины (4); однако при дозвуковых скоростях K принимает положительные значения и уравнение становится эллиптическим.

Как показал автор данной статьи, при околосвуковых скоростях уравнение (19) может быть заменено приближенно уравнением (9) при $n = 0$, $m = \frac{1}{6}$ (уравнение Эйлера — Трикоми). В настоящее время советские и иностранные авторы уже решили ряд задач по околосвуковым течениям газа при помощи этого уравнения.

¹⁾ Б. Риман, О распространении волн конечной амплитуды. Сочинения, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

²⁾ Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.

³⁾ К. П. Станюкович, Теория неустановившихся движений газа. Оборонгиз, М., 1948.

⁴⁾ G. Darboux, цит. соч., I, 4, ch. 3.

⁵⁾ С. А. Чаплыгин, О газовых струях, Собрание сочинений, т. II, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

Несмотря на то, что в этом случае общее решение Эйлера превращается в бесконечный ряд, все же частные случаи этого решения, соответствующие степенным функциям ($f(x) = x^n$, $F(y) = y^n$), играют большую роль в решении задач по околосвуковым течениям¹⁾. При сверхзвуковых скоростях С. А. Христианович²⁾ заменил уравнение Чаплыгина приближенно уравнением Эйлера — Пуассона при $n = 0$ и целых m . Более точно уравнение С. А. Чаплыгина может быть замещено обобщением уравнения Эйлера — Пуассона, которое предложил и исследовал М. Б. Капилевич³⁾. В самое последнее время М. Г. Крейн⁴⁾ новыми методами нашел решение уравнения колебаний струны переменной толщины в явном виде в гораздо более общих условиях, причем для струн, сколь угодно близких к любой заданной. Разработанный им метод позволил решить впервые в явном виде ряд интегральных уравнений.

Таким образом, классическая проблема струны перемещенной толщины снова показала свою плодотворность.

В «Интегральном исчислении» (т. III, ч. 1, разд. II, гл. V), Эйлер дает метод нахождения общих решений широкого класса уравнений гиперболического типа без применения квадратур. При помощи этого метода удается выразить общие решения через произвольные функции и конечное число их производных. Этот метод сохраняет значение и в настоящее время.

Сущность метода хорошо видна из простейшего примера (проблема 56):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G \frac{\partial v}{\partial x} + Hv, \quad (20)$$

где F , G , H зависят только от x .

Требуется найти другое уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = P \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Q \frac{\partial z}{\partial x} + Rz, \quad (21)$$

где P , Q , R также зависят только от x , такое, что его общее решение получается в виде

$$z = M \frac{\partial v}{\partial x} + Nv, \quad (22)$$

где M , N — функция x ; под v в уравнении (22) подразумевается общее решение уравнения (20).

Если общее решение уравнения (21) уже известно, то мы получаем, таким образом, общее решение уравнения (20).

Если заранее заданы F , G , H , M , то, как показывает Эйлер, функция $S = \frac{N}{M}$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{ds}{dx} + \frac{G}{F} s - s^2 + \frac{C-H}{F} = 0 \quad (G - \text{постоянная}),$$

¹⁾ Ф. И. Франкль, Об одном семействе частных решений уравнения Дарбу — Трикоми, ДАН, т. 56, № 7, 1947. (Заметим кстати, что это уравнение должно правильно называться уравнением Эйлера — Трикоми).

²⁾ С. А. Христианович, Приближенное интегрирование уравнений сверхзвукового течения газа. Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 2, 1947.

³⁾ М. Б. Капилевич, Об одном уравнении смешанного эллипτικο-гиперболического типа, Математический сборник, т. 30, вып. 1, 1952.

⁴⁾ М. Г. Крейн, Теория спектральных и переходных функций одномерных краевых задач. Доклад на заседании Московского математического общества 29 декабря 1954 г., Успехи математических наук, т. IX, вып. 3, 1954.

а коэффициенты уравнения (21) находятся в виде

$$\left. \begin{aligned} P &= F, \quad Q = G + \frac{dF}{dx} - \frac{2F}{M} \frac{dM}{dx}, \\ R &= H - \frac{G}{M} \frac{dM}{dx} - \frac{F}{M} \frac{d^2M}{dx^2} + \frac{2F}{M^2} \left(\frac{dM}{dx} \right)^2 - s \frac{dF}{dx} - \frac{1}{M} \frac{dF}{dx} \frac{dM}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Проблемы 57 и 58 представляют собой приложения изложенного метода к конкретным уравнениям.

В проблеме 59 рассматривается следующая, более сложная задача. Задано уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G \frac{\partial v}{\partial x} + H, \quad (24)$$

где F, G, H зависят только от x ; требуется найти другое уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = P \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Q \frac{\partial z}{\partial x} + Rz, \quad (25)$$

общее решение которого получается из общего решения (24) при помощи преобразования

$$z = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r \frac{\partial v}{\partial x} + sv, \quad (26)$$

где r, s — функции x . Функции r, s в данном случае получаются из F, G, H при помощи двух совместных дифференциальных уравнений первого порядка, после чего находят P, Q, R .

В проблеме 60 исследуется система двух дифференциальных уравнений первого порядка, частным случаем которой является система для определения r, s , о которой только что шла речь, и устанавливается, когда решение этой системы (нелинейной) находится в явном виде.

Как мы уже отметили, этим методом пользуется Эйлер в своей работе «О движении воздуха в трубах»; его применяют в настоящее время с успехом и в других газодинамических задачах¹⁾.

Несмотря на то, что в настоящее время общее решение линейного уравнения гиперболического типа всегда может быть найдено — либо методом Римана, либо численно, пользуясь сеткой характеристик, — методы Эйлера сохраняют большое практическое значение. Дело в том, что метод Римана требует применения квадратур, выполняемых, как правило, только численно. В то же время так называемую функцию Римана, входящую в это решение, чаще всего найти трудно. С другой стороны, метод сеток, будучи численным, не дает решения в виде общих формул и часто также очень трудоемок. Напротив, решения Эйлера требуют лишь элементарных, мало трудоемких операций и дают результат в явном виде. А, как мы видели, ряд практически важных задач сводится хотя бы приближенно к уравнениям, допускающим решение методами Эйлера. Этим объясняется то обстоятельство, что некоторые из этих методов были вновь открыты современными нам авторами, не знакомыми с «Интегральным исчислением» Эйлера.

Упомянутая выше работа М. Г. Крейна является принципиально новым и практически очень важным достижением в деле отыскания возможно более общих уравнений в частных производных, допускающих решение в явном виде без квадратур.

¹⁾ См. Peres J., Quelques transformations des équations du mouvement d'un fluide compressible, C. R. Ac. Sc., Paris 219, 1844, стр. 501—504. Метод Эйлера применяется здесь к уравнению С. А. Чаплыгина (19); ссылки на Эйлера у Переса нет.

Третий раздел первой части «Интегрального исчисления», посвященный теории уравнений третьего или более высокого порядка для функций двух независимых переменных, по содержанию существенно беднее первых двух разделов ввиду большой трудности этого вопроса. Тем не менее, и он содержит очень важные результаты. В первой главе дается решение в простейшем случае, когда одна из производных высшего порядка задана. На этом примере устанавливается, что общее решение содержит столько произвольных функций (каждая от одной переменной), каков порядок уравнения.

Во второй главе рассматриваются некоторые случаи, когда одномерно-линейное дифференциальное уравнение сводится к уравнениям менее высокого порядка. Это те случаи, когда при записи уравнения в виде $L(z) = 0$ (L — однородно-линейный дифференциальный оператор) оператор L может быть представлен как произведение двух операторов M, N :

$$L(z) = M[N(z)].$$

В частности (проблема 68b), Эйлер рассматривает, таким образом, уравнение

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (27)$$

которое отличается от найденного им уравнения изгибных колебаний пластинки только знаком перед коэффициентом. На связь этого уравнения с уравнением изгибных колебаний Эйлер указывает в пункте 415.

Уравнение (27) Эйлер сводит к двум уравнениям типа уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -a \frac{\partial z}{\partial y}, \quad (27a)$$

для которых он дает частные решения

$$z = e^{\lambda a (y \pm \lambda x)}, \quad z = e^{\pm \lambda^2 a x} \cos(\lambda a y + a). \quad (27b)$$

Что касается возможности представления общего решения уравнения через такие частные решения, Эйлер выражается, как всегда в аналогичных случаях, несколько неопределенно: «Путем комбинирования интегралов этого бесконечного семейства *как бы* (quasi) исчерпывается, как надо ожидать, полный интеграл (пункт 413).

Подробное (не первое) исследование изгибных колебаний пластинки Эйлер опубликовал в 1773 г.¹⁾ При помощи теоремы о моменте количества движения Эйлер получает для этих колебаний уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -b^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}, \quad (28)$$

для которого он указывает частные решения вида

$$y = \cos(\theta^2 t) \left(A \cos \frac{\theta x}{b} + B \sin \frac{\theta x}{b} + C e^{-\frac{\theta x}{b}} + D e^{-\frac{\theta x}{b}} \right). \quad (28a)$$

Далее Эйлер рассматривает общее однородно-линейное уравнение любого порядка с постоянными коэффициентами и получает его общее

¹⁾ Euler L., De motu vibratorio laminarum elasticarum, ubi plures novae vibrationum species hactenus non pertractatae evolvuntur. Novi Commentarii Acad. Sc. Petrop., т. XVII за 1772 г. (1773).

решение (ч. 1, разд. III, гл. III). Именно, для уравнения

$$A \frac{\partial^\lambda z}{\partial x^\lambda} + B \frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-1} \partial y} + C \frac{\partial^\lambda z}{\partial x^{\lambda-2} \partial y^2} + \dots = 0 \quad (29),$$

Эйлер образует характеристическое уравнение

$$Au^\lambda + Bu^{\lambda-1} + Gu^{\lambda-2} + \dots = 0. \quad (29a)$$

Если $n = \alpha$, $n = \beta$, $n = \gamma$, ... — корни этого уравнения, то общее решение Эйлер дает в виде

$$z = \Gamma(y + \alpha x) + \Delta(y + \beta x) + \Sigma(y + \gamma x) + \dots$$

Прямые $y + \alpha x = \text{const}$, $y + \beta x = \text{const}$ и т. д. мы в настоящее время называем характеристиками уравнения (29) и они играют фундаментальную роль в современной теории уравнений в частных производных. Их направления определяются уравнением Эйлера (29a) и в общем случае нелинейного уравнения. Таким образом, Эйлер положил основу теории характеристик уравнений в частных производных любого порядка.

Во второй части тома III «Интегрального исчисления» Эйлер рассматривает уравнения для функций трех независимых переменных.

Первая глава касается лишь самого понятия частных производных; во второй главе исследуется задача об определении функции трех переменных, если задана одна из ее производных первого или более высокого порядка. Обнаруживается, что общее решение содержит произвольные функции от двух независимых переменных и притом столько, каков порядок заданной производной. Кроме того, рассматриваются уравнения, в которых встречаются производные только по одной или двум переменным и которые, следовательно, сводятся к задачам, рассмотренным раньше.

В третьей главе исследуются уравнения первого порядка теми же методами, как и в случае двух независимых переменных. При этом решается ряд линейных и нелинейных задач, среди которых особо отметим решение однородно-линейного уравнения

$$L \frac{\partial v}{\partial x} + M \frac{\partial v}{\partial y} + N \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (30)$$

где $L = L(x)$; $M = M(y)$, $N = N(z)$ — любые заданные функции. Общее решение Эйлер дает в виде

$$v = f \left(\int \frac{\partial x}{L} - \int \frac{\partial z}{N}; \int \frac{\partial y}{M} - \int \frac{\partial z}{N} \right), \quad (30a)$$

т. е. используются характеристики для данного частного случая (проблема 82).

В четвертой главе Эйлер рассматривает однородно-линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Общее решение Эйлеру удастся только в том случае, если при записи уравнения в виде $L(z) = 0$ оператор L представим как произведение операторов первого порядка. В частности, для уравнения второго порядка

$$A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2D \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2E \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + 2F \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = 0; \quad (31)$$

это имеет место, если коэффициенты удовлетворяют уравнению

$$AF^2 + BE^2 + CD^2 = ABC + 2DEF. \quad (31a)$$

Заметим, что геометрический смысл условия распада оператора L на линейные заключается в том, что характеристический конус распадается на плоскости, а это для важнейших уравнений математической физики не имеет места.

В заключительном параграфе рассматриваемой части тома III «Интегрального исчисления» (пункт 510) Эйлер с сожалением отмечает, что такое важнейшее уравнение, как найденное им пространственное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (32)$$

таким способом не решается. Он указывает на существование частных решений вида

$$\Gamma(ax + \beta y + \gamma z + \delta t) \quad (33)$$

при условии

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad (33a)$$

из которых, как мы теперь знаем, можно получить общее решение путем образования бесконечных рядов.

Далее Эйлер указывает решения вида

$$v = \frac{\Gamma(t \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (34)$$

т. е. опережающий и запаздывающий потенциалы неподвижного точечного источника¹⁾. Запаздывающий потенциал играет важнейшую роль во всей современной математической физике, и, как впоследствии показал Пуассон, из этих потенциалов можно построить общее решение волнового уравнения посредством дифференцирования и квадратур. Указанное Эйлером решение

$$v = \frac{\Gamma(x \pm \sqrt{t^2 - y^2 - z^2})}{\sqrt{t^2 - y^2 - z^2}} \quad (34a)$$

также очень важно в газовой динамике: выражение

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{x^2 - \mu^2(y^2 + z^2)}}$$

есть не что иное, как потенциал неподвижного точечного источника постоянного расхода в равномерном потоке сверхзвуковой скорости.

Приходится сожалеть о том, что Эйлер не включил в «Интегральное исчисление» свой важнейший результат по уравнениям для функций трех независимых переменных, а именно решение задачи колебания мембраны²⁾.

Отклонение z точки мембраны от положения равновесия при малых колебаниях, как показывает Эйлер, сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), \quad (35)$$

т. е. к уравнению цилиндрических волн.

¹⁾ Он получен путем интегрирования скоростей частиц по радиусам-векторам для случая сферических волн; см. сказанное о работе Эйлера «О распространении звука».

²⁾ L. Euler, De motu vibratorio tympanorum, Novi Comm. Ac. Sc. Petr., т. X за 1764 г. (1766).

Эйлер находит полную систему частных решений этого уравнения (собственные колебания) как для случая прямоугольной мембраны, так и для мембраны формы круга, причем для решения последней задачи он вводит впервые *цилиндрические функции* с произвольным целым индексом — те самые функции, которые впоследствии были несправедливо названы функциями Бесселя (работа Бесселя об этих функциях вышла только в 1826 г.; до этой работы функции уже исследовались рядом авторов). Цилиндрические функции в настоящее время широко применяются в математической физике.

Этим замечанием мы заканчиваем наш обзор классических исследований Эйлера об уравнениях в частных производных, сыгравших большую роль в истории математики. Значительная часть этих исследований сохраняет актуальное значение и в настоящее время.



О РАБОТЕ Л. ЭЙЛЕРА «О ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ»

Работа Эйлера «О вариационном исчислении» подводит итоги его трудов в этой области. Эйлер был основоположником вариационного исчисления, т. е. теории экстремумов функционалов, как особого раздела математического анализа.

Отдельные задачи из этой области решались и до него, но не было общего метода.

История вопроса до Эйлера, а также первые работы самого Эйлера по вариационному исчислению изложены в интересной статье К. А. Рыбникова¹⁾, к которой отсылаем читателя.

Первая работа Эйлера по вариационному исчислению — это статья «О кратчайшей линии на произвольной поверхности, соединяющей две произвольные точки» (*De lineà brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente*, *Comm. Ac. Sc. Petr.* 3 (1728)).

В этой работе выводится дифференциальное уравнение геодезической на любой поверхности.

В следующей работе «Общее решение изопериметрической проблемы в широчайшем смысле». (*Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis*, *Comm. Ac. sc. Petr.* 6 (1732/33), 1738) дается уже общая формулировка одномерной вариационной задачи с добавочными условиями.

Например, в случае трех добавочных условий формулировка Эйлера гласит:

«Среди всех кривых, обладающих свойствами A , B и C , найти ту, которая обладает свойством D в максимальной или минимальной степени» (*Opera omnia*, сер. I, т. 25, стр. 15).

В качестве «свойства D » рассматриваются значения интегралов различного вида, взятых вдоль кривой, которым требуется придавать максимальное или минимальное значение: подинтегральные выражения содержат искомую функцию и ее первую производную; выражения, содержащие производные второго или более высокого порядка, в этой работе еще не рассматриваются. Рассматриваются лишь выражения

¹⁾ К. А. Рыбников, Первые этапы развития вариационного исчисления, Историко-математические исследования, вып. II, М. — Л., 1949.

частного вида, как

$$\int x^m ds, \quad \int x^m y^n ds, \quad \int \frac{ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$$

и другие.

Метод заключается в том, что искомая кривая заменяется ломаной с бесконечно близкими угловыми точками, причем одна из них варьируется, а вариация рассмотренного интеграла приравняется к нулю.

У Эйлера здесь еще нет того простого и изящного метода вычисления вариации интеграла посредством интегрирования по частям, который впоследствии ввел Лагранж; вместо этого вычисляются конечные разности при помощи ссылки на фигуры, без общего алгоритма.

Необходимо отметить, что при наличии добавочных условий Эйлер пользуется теми множителями, которые в литературе обычно называются «лагранжевыми», хотя Лагранж родился только в 1736 г.

В работе «Новый и легкий способ нахождения кривых, обладающих свойствами максимума или минимума» (*Curvarum maximi minime proprietate gaudentium inventio nova et facilis*, *Comm. Ac. Petr.* 7 (1736), 1741) уже рассматривается интеграл

$$\int_a^b Q dx,$$

где

$$Q = Q\left(x, y, s, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right), \quad s = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Здесь Q — произвольная¹⁾ функция своих аргументов.

Вслед за этой работой Эйлер опубликовал свою классическую книгу «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума» (*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minive proprietate gaudentes*, *Lausannae et Genevae* 1744)²⁾.

В этой работе уже дается общее «дифференциальное уравнение Эйлера» для случая, когда подинтегральная функция содержит производные сколь угодно высокого порядка.

Метод вывода тот же, что и во всех предыдущих работах, искомая кривая заменяется ломаной и варьируется конечное число ее угловых точек. Строгий предельный переход отсутствует.

В виде журнальной статьи Эйлер сдал в печать свой основной результат еще раньше; речь идет о статье «Решение одной проблемы, поставленной прославленным Даниилом Бернулли» (*Solutio problematis cuiusdam a celeberrimo Daniele Bernouio propositi*, *Comm. Ac. Sc. Petr.* 10 (1738)). Но номер петербургских «Комментариев», в котором напечатана эта статья, вышел в свет только в 1747 г.

После этой работы Эйлер в течение ряда лет не публиковал ничего нового по общим вопросам вариационного исчисления. Он вернулся к этой тематике только под влиянием переписки с молодым

¹⁾ Конечно «произвольная» в смысле произвольная допустимая в данной задаче.

²⁾ Русский перевод, М. — Л., 1934.

французским математиком Ж. Л. Лагранжем, ставшем впоследствии одним из крупнейших ученых своего времени.

Лагранж ввел тот метод вычисления вариации интеграла путем интегрирования по частям, которым мы пользуемся в настоящее время. Содержание его работы «Опыт нового метода определения максимумов и минимумов неопределенных интегралов» (*Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, Misc. Taur., t. II, 1760—1761) было Эйлеру известно по письмам Лагранжа еще до ее опубликования.

Несмотря на то, что речь шла лишь о новом методе получения результатов, уже полученных Эйлером, последний придавал этому методу очень большое значение.

Как сообщает Лагранж в своей второй работе по вариационному исчислению «О методе вариаций» (*Sur la méthode des variations*, Misc. Taur. t. IV, 1766—1769) Эйлер написал ему 2 X 1759 г. следующее:

«Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы содержит, насколько я вижу, все, чего только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после моих первых попыток я занимался едва ли не один, доведена тобою до величайшего совершенства. Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение; я, однако, решил скрывать это, пока ты не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать у тебя часть заслуженной тобою славы»¹⁾.

Исследования, на которые Эйлер намекает в этом письме, он действительно опубликовал только после выхода в свет работы Лагранжа «Опыт нового метода ...» Это — статьи «Основы вариационного исчисления» и «Аналитическое изложение метода максимумов и минимумов» (*Elementa calculi variationum; Analytica explicatio methodi maximarum et minimorum*, Novi Comm. Ac. Sc. Petr. 10 (1764), 1766).

В первой из этих работ Эйлер впервые вводит термин «вариационное исчисление». В кратком резюме работы по этому поводу говорится следующее:

«... Хотя автор долго и много об этом думал и сообщил друзьям о желательности [усовершенствования метода], тем не менее слава открытия принадлежит остроумнейшему туринскому математику Лагранжу, который одним анализом получил то же решение, которое автор прежде получал при помощи геометрических соображений. Метод этот таков, что он представляет собою новую отрасль анализа и, по-видимому, позволит существенно расширить ее границы. В связи с этим автор считает эту теорию новым исчислением, которое он называет вариационным исчислением, и основы которого он решил в этом месте сообщить и ясно изложить».

Наконец, в 1770 г. Эйлер публикует работу «О вариационном исчислении» в виде приложения к третьему тому его «Основ интегрального исчисления».

Прежде чем перейти к характеристике этой работы, заметим еще, что Эйлер вскоре после ее опубликования напечатал еще одну работу «Новый и легкий метод трактовки вариационного исчисления» (*Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi*, Nov. Comm. Ac.

¹⁾ Это бережное отношение к приоритету молодого ученого очень характерно для Эйлера.

Sc. Petr. 16 (1771)), в которой он получает вариации более строгим, ныне принятым методом, а именно при помощи дифференцирования исследуемой величины по параметру, от которого зависят исследуемые кривые или поверхности.

Работа «О вариационном исчислении» состоит из семи глав. Первая глава — вводная. Во второй главе находятся вариации функций (не функционалов). В третьей главе излагается нахождение вариации простого интеграла при наличии двух переменных (т. е. для плоских кривых), в четвертой главе — то же для случая, когда в подинтегральное выражение входят и интегралы от заданных функций обоих переменных и производных одной из них по другой.

В пятой главе рассматривается тот же вопрос при наличии трех или больше переменных, т. е. варьируются уже пространственные кривые.

Наконец, в шестой и седьмой главах исследуется вопрос, о котором еще не было речи в прежних работах Эйлера и Лагранжа: впервые рассматриваются двумерные вариационные задачи.

В шестой главе варьируются функции (не функционалы) двух переменных, а в седьмой главе — двойные интегралы по переменным x и y ; при этом подинтегральная функция может содержать частные производные искомой функции z по x и y любого порядка.

Таким образом, «уравнение Эйлера» для двумерных вариационных задач было найдено еще самим Эйлером, а не М. В. Остроградским, как ошибочно утверждается в статье «Вариационное исчисление» в БСЭ, изд. 2-е¹).

Необходимо, однако, отметить, что Эйлер еще не обладал разработанной теорией двумерного интеграла; в связи с этим он ограничивается постановкой вариационной задачи в прямоугольной области вида $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ (см. гл. VIII, § 173). Между тем, при использовании криволинейных интегралов результаты Эйлера без всяких изменений переносятся на случай области произвольной формы. В этом общем виде исследование было впервые проведено Пуассоном²). М. В. Остроградский впервые решает задачу для общего, n -мерного случая³).

В отличие от работы «Метод нахождения...» в данной работе Эйлер почти не дает примеров, считая, видно, что их имеется достаточно в литературе. Он приводит только один пример двумерной вариационной задачи (гл. VII, § 174). Речь идет о нахождении поверхности минимальной площади с заданной границей, под которой

имеется заданный объем (т. е. $\iiint z \, dx \, dy$ задан). Получается нелиней-

ное уравнение второго порядка эллиптического типа, для решения которого при заданных краевых условиях Эйлер еще не обладал никакими методами, на что он и указывает.

Откуда Эйлер пришел к этой задаче, он не говорит; но она имеет практическое значение, так как к ней приводит задача планировки земельных участков.

¹) Сам М. В. Остроградский ссылается в этом вопросе на своих предшественников Эйлера и Пуассона (ссылку см. ниже).

²) I. D. Poisson, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris 10 XI 1831.

³) M. Ostrogradsky, Sur le calcul des variations des integrales multiples, ч. I, 1834, Mém. Ac. Sc. Pét. ser. VI, 1834, т. III.

В целом изложение работы, как всегда у Эйлера, ясное и не требует подробных комментариев, за исключением одного случая.

В § 147 Эйлер вследствие допущенной ошибки приходит к противоречию, которого он не разъясняет. Во избежание этого противоречия ему приходится ограничиться частным случаем и отказаться от произвольной вариации границы варьируемой поверхности. Ошибка эта была обнаружена и исправлена С. Д. Пуассоном¹⁾. Нижеприведенный нами вывод формул вариаций частных производных принадлежит М. В. Остроградскому (см. его вышецитированную работу, а также том III Полного собрания научных трудов М. В. Остроградского (в печати)).

Идутся вариации производных

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

при одновременном варьировании переменных

$$x, y, z, \quad \text{так что} \quad \delta x = \delta x(x, y); \quad \delta y = \delta y(x, y); \quad \delta z = \delta z(x, y).$$

Очевидно, должно быть

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial(z + \delta z)}{\partial(x + \delta x)} \Big|_{y + \delta y = \text{const}} = \frac{dz}{dx + \delta x} \Big|_{y + \delta y = \text{const}} + \frac{\partial \delta z}{\partial x} = \\ &= \left(\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dx} \frac{\delta x}{x} \right) \Big|_{y + \delta y = \text{const}} + \frac{\partial \delta z}{\partial x}. \end{aligned}$$

Но при $y + \delta y = \text{const}$ имеем

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta y}{dx} = 0,$$

так что

$$\frac{dz}{dx} \Big|_{y + \delta y = \text{const}} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\delta y}{x}$$

и, следовательно,

$$\delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(z + \delta z)}{\partial(x + \delta x)} \Big|_{y + \delta y = \text{const}} - \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y = \text{const}} = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\delta x}{x} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\delta y}{x}.$$

Соответственно должно быть

$$\delta \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\delta x}{y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\delta y}{y}.$$

Эйлер вычисляет ошибочно $\delta \frac{\partial z}{\partial x}$ как

$$\frac{\partial(z + \delta z)}{\partial(x + \delta x)} \Big|_{y = \text{const}} - \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y = \text{const}}$$

и получает поэтому неправильно

$$\delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\delta x}{x}$$

¹⁾ См. цитированную выше работу.

и соответственно также неправильно

$$\delta \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \delta y}{\partial y}$$

Далее, правильно должно быть

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 (z + \delta z)}{[\partial (x + \delta x)]^2} \Big|_{y + \delta y = \text{const}} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{y = \text{const}} = \\ &= \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x} \frac{\partial \delta y}{\partial y} \frac{\partial \delta x}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial \delta x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta x}{\partial x^2} \end{aligned}$$

и соответственно

$$\delta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \delta z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x} \frac{\partial \delta x}{\partial y} \frac{\partial \delta y}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial \delta y}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta x}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial y^2}$$

В обоих случаях у Эйлера стоят неправильные выражения.

Наконец должно быть

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial (x + \delta x)} \Big|_{y + \delta y = \text{const}} \frac{\partial (z + \delta z)}{\partial (y + \delta y)} \Big|_{x + \delta x = \text{const}} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \\ &= \frac{\partial}{\partial (y + \delta y)} \Big|_{x + \delta x = \text{const}} \frac{\partial (z + \delta z)}{\partial (x + \delta x)} \Big|_{y + \delta y = \text{const}} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \\ &= \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial \delta y}{\partial y} \frac{\partial \delta x}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial \delta x}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} \right) - \\ &- \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta y}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

Вследствие вышеуказанной ошибки Эйлер получает для $\delta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ два разных неправильных выражения в зависимости от того, получено ли выражение путем дифференцирования сначала по x , а затем по y , или наоборот. Ошибки и вызванное ими противоречие отпадают лишь в том случае, если считать δx зависящим только от x , а δy — только от y . Эйлер, заметив противоречие, задним числом решает ограничиться этим случаем. В действительности, как мы видели, для такого ограничения нет оснований, если только правильно вычислить вариации частных производных.

Заметим еще, что изложение Эйлера несколько затрудняется отсутствием у него обозначения пределов определенного интеграла вида

$$\int_a^b f(x) dx.$$

В связи с этим он вынужден, как и везде в «Интегральном исчислении», выражаться, например, так: «Интеграл берется таким образом, что при $x = a$ он равняется нулю».



К РАБОТЕ «ИЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СЛУЧАЕВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Работа ставит своей целью показать возможности метода интегрирующего множителя. Эйлер указывает, что во всех случаях, когда удалось интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения в явном виде, это удастся также при помощи интегрирующего множителя.

В то же время, как замечает Эйлер, даже разделение переменных, когда оно удастся, не всегда приводит к удовлетворительному результату: интеграл может получиться в трансцендентном виде, хотя оно приводится к алгебраическому уравнению.

Так, уравнение

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

непосредственно интегрируется в виде

$$\arctg x + \arctg y = \text{const},$$

но этот интеграл представляется также в алгебраической форме

$$1 - xy = C(x + y).$$

Наибольший интерес с этой точки зрения представляет интегрирование уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2 + 2\delta x^3 + \varepsilon x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{\alpha + 2\beta y + \gamma y^2 + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4}} = 0,$$

которое непосредственно выполняется при помощи трансцендентной функции, ныне носящей название эллиптического интеграла первого рода, но приводится к алгебраическому виду (см. § 4).

Этот результат — иначе говоря, пользуясь современной терминологией, теорема сложения для эллиптических интегралов первого рода — принадлежит к числу крупных научных заслуг Эйлера. В данной работе Эйлер получает его методом интегрирующего множителя, но первоначально он нашел его иным путем.

Эллиптическими интегралами Эйлер занимался много, исходя из проблемы исследования длины дуги эллипса. Его работы по эллиптическим интегралам собраны в «Opera omnia» ser I, тт. 20, 21.

В частности, данному дифференциальному уравнению посвящены работы:

«Другая форма нового метода сравнения между собой трансцендентных величин; о сравнении дуг эллипсов» (Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi; de comparatione arcuum ellipsis, Nov. Comm. Ac. Sc. Petr. 7 (1758/59), 1761); «Интеграция уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}} \quad \text{»}$$

(Integratio aequationis ..., Nov. Comm. Ac. Sc. Petr. 12 (1766/67), 1768). «Более общий вывод формул для сравнения [длин] кривых» (Evolutio generalior formularum comparationi curvarum inserventium, Nov. Comm. Ac. Sc. Petr. 12 (1766/67), 1768).

В первой и третьей из этих работ Эйлер решает задачу обратным путем, причем в первой работе он ограничивается случаем, когда под корнем коэффициенты при x и x^3 (и соответственно при y и y^3) равны нулю. В третьей работе рассматривается общий случай.

Интеграл в этой работе задается заранее в виде

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(x^2+y^2) + 2\delta xy + \varepsilon xy(x+y) + \zeta x^2 y^2 = 0. \quad (*)$$

При решении этого уравнения относительно y появляется радикал

$$X = \sqrt{(\beta + \delta x + \varepsilon x^2)^2 - (a + 2\beta x + \gamma x^2)(\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2)},$$

и аналогичный радикал Y — при решении относительно x . На этом основании показывается, что уравнение (*) есть интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0.$$

Затем, написав X в виде

$$X = \sqrt{A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4},$$

Эйлер находит константы $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ в зависимости от A, B, C, D, E и постоянной интегрирования M , а именно:

$$\begin{aligned} \alpha &= 4(AM - B^2), & \beta &= 2B(M - C) + 4AD, \\ \gamma &= 4AE - (M - C)^2, & \delta &= M^2 - C^2 + 4(EA - BD), \\ \varepsilon &= 2D(M - C) + 4\beta E, & \zeta &= 4(EM - D^2). \end{aligned}$$

Именно эти работы Эйлер имеет в виду, когда он говорит, что он эти результаты «когда-то нашел совершенно иным путем» (§ 27).

В работе «Интеграция уравнения ...» Эйлер решает задачу прямым путем, а именно путем неоднократного перехода к новым переменным, что в конце концов приводит снова к разделению переменных, после чего интеграл элементарным путем приводится к алгебраической форме.



ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ ГЛАВ, СОДЕРЖАЩИХСЯ В ТРЕТЬЕМ ТОМЕ

ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

КНИГА ПОСЛЕДНЯЯ

Часть первая

«Определение функций двух переменных по данному соотношению между дифференциалами любого порядка»

Раздел первый. Определение функций двух переменных по данному соотношению между дифференциалами первого порядка	5
Глава I. Общее о природе дифференциальных уравнений, которыми определяются функции двух переменных	5
Глава II. О решении уравнений, в которых одна из производных любым образом выражена через конечные количества	27
Глава III. О решении уравнений, в которых одна из двух производных каким-либо образом выражается через другую	47
Глава IV. О решении уравнений, которыми задается соотношение между обеими производными и одним из трех переменных	57
Глава V. О решении уравнений, которыми задается соотношение между количествами $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ и двумя из трех переменных x, y, z	79
Глава VI. О решении уравнений, которыми задается какое-либо соотношение между обеими производными $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ и всеми тремя переменными x, y, z	98
Раздел второй. Определение функций двух переменных по данному соотношению между дифференциалами второго порядка	121
Глава I. Общее о производных второго порядка	121
Глава II. О случае, когда одна производная второго порядка как угодно задана через другие величины	132
Глава III. О случае, когда две или все производные второго порядка определяются через другие величины	156
Глава IV. Другой частный метод интегрирования таких уравнений	177
Глава V. Особое преобразование этих уравнений	199

Раздел третий. Определение функций двух переменных по данному соотношению между дифференциалами третьего или более высокого порядка	234
Глава I. О решении простейших уравнений, содержащих только одну производную	235
Глава II. Об интегрировании уравнений высшего порядка путем приведения к уравнениям низшего порядка	244
Глава III. Об интегрировании однородных уравнений, в которых все члены содержат производные одного и того же порядка	256

Часть вторая

Определение функций трех переменных по данному соотношению между дифференциалами

Глава I. О производных функций трех переменных	263
Глава II. О нахождении функций трех переменных по заданному значению какой-либо производной	270
Глава III. О решении дифференциальных уравнений первого порядка	282
Глава IV. О решении однородных дифференциальных уравнений	294

Приложение о вариационном исчислении	305
--------------------------------------	-----

Глава I. О вариационном исчислении вообще	305
Глава II. О вариации дифференциальных выражений, содержащих два переменных	316
Глава III. О вариации простых интегральных выражений, содержащих два переменных	329
Глава IV. О вариации сложных интегральных выражений, содержащих два переменных	345
Глава V. О вариации интегральных выражений, содержащих три переменных, при наличии двух соотношений между последними	358
Глава VI. О вариации дифференциальных выражений, содержащих три переменных, соотношение между которыми выражается одним-единственным уравнением	368
Глава VII. О вариации интегральных выражений, содержащих три переменных, из которых одна рассматривается как функция остальных двух	378

Дополнение, содержащее изложение некоторых особых случаев интегрирования дифференциальных уравнений	389
---	-----

КОММЕНТАРИИ ПЕРЕВОДЧИКА

Об исследованиях Л. Эйлера в области теории уравнений в частных производных	419
О работе Л. Эйлера «О вариационном исчислении»	438
К работе «Изложение некоторых особых случаев интегрирования дифференциальных уравнений»	444