ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Том II

ПЕРЕВОД С ЛАТИНСКОГО
И ПРЕДИСЛОВИЕ
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1957

11-5-4

Леонард Эйлер.

Интегральное исчисление, т. II.

Редактор *А. П. Разумовская.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.* Корректор *Л. О. Сечейко.*

Сдано в набор 1/X 1957 г. Подписано к печати 21/XI 1957 г. Бумага 70×108 1/16.
Физ. печ. л. 23. Условн. печ. л. 31,51. Уч-изд. л. 24,17. Тираж 5000 экз.
Цена книги 14 руб. 10 коп. Заказ № 1423.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

16-я типография Московского городского Совнархоза. Москва, Трехпрудный пер., д. 9.

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Общая характеристика «Интегрального исчисления» Леонарда Эйлера дана в предисловии М. Я. Выгодского к первому тому. Там же указаны те основные положения, которыми руководились в своей работе переводчики. Поэтому нет, казалось бы, нужды в отдельном предисловии к настоящему тому. Однако читатель этого издания «Интегрального исчисления» будет пользоваться им не так, как современник автора или читатель девятнадцатого века. Как правило, он не будет изучать классический труд Эйлера «от доски до доски», а, познакомившись с ним в общих чертах, он будет на выборку, в соответствии со своими интересами, внимательно читать отдельные главы и разделы. Можно быть уверенным, что со временем он прочтет таким образом весь или почти весь трехтомный трактат Эйлера, так как это сочинение и сейчас может заразить своим живым, творческим духом, дать пищу для размышлений историку, исследователю, методисту, а по богатству материала в некоторых своих частях остается непревзойденным. Все же, надо думать, описанное выше «мозаичное чтение» будет правилом, а не исключением. Поэтому для ориентировки полезна краткая справка о содержании тома — нечто вроде расширенного оглавления, тем более, что названия глав оригинала не полностью раскрывают их содержание.

* * *

Второй том «Интегрального исчисления» — это теория обыкновенных дифференциальных уравнений порядка выше первого. Основное его содержание составляет первый раздел, в котором рассматриваются дифференциальные уравнения второго порядка. В главе первой этого раздела изучаются уравнения второго порядка простейшего вида, — когда вторая производная искомой функции выражается через одно только переменное: либо через аргумент, либо через искомую функцию, либо через ее первую производную ($y''=f(x)$, $y''=f(y)$, $y''=f(y')$). Во второй главе интегрируются уравнения вида $f(x, y', y'')=0$ и $f(y, y', y'')=0$. Даже в этих главах обилие примеров и обстоятельный разбор представляющихся здесь частных случаев делают изложение Эйлера интересным и поучительным. Еще в большей мере это относится к третьей главе этого раздела:

однородные (в том или ином смысле) уравнения второго порядка, интегрированием которых занимается там Эйлер, почти не затрагиваются даже в обширных руководствах.

Семь глав первого раздела — четвертая, пятая и с седьмой по одиннадцатую — образуют теорию линейных уравнений второго порядка. Здесь почти все создано самим Эйлером, отсюда идут направления исследований. актуальные и в наше время. В первой из перечисленных глав устанавливаются общие свойства однородных и неоднородных линейных уравнений второго порядка, выясняется их связь с уравнением Риккати, подробно рассматриваются уравнения с постоянными коэффициентами. В главе пятой к линейным уравнениям второго порядка применяется созданный Эйлером метод интегрирующего множителя. Задача ставится здесь как прямая — определить для данного уравнения интегрирующий множитель, так и обратная — определить, каковы те уравнения, для которых множитель данного вида является интегрирующим. В двух главах, седьмой и восьмой, линейные уравнения второго порядка интегрируются с помощью степенных рядов. При этом Эйлер не стремится к возможно более общей постановке вопроса, а выделяет такие типы уравнений, для которых метод степенных рядов является эффективным. В силу такого подхода Эйлер занимается в седьмой главе уравнением вида $y''+ax^ny=0$, в восьмой — уравнением $x^2(a+bx^n)y''+x(c+ex^n)y'+(f+gx^n)y=0$. Он выделяет, таким образом, те типы уравнений, изучение которых привело в следующем столетии к созданию аналитической теории дифференциальных уравнений и сыграло важную роль в развитии теории функций, в частности специальных функций математической физики. Изложенные в этих главах результаты Эйлера составляют один из важнейших его вкладов в анализ. Стоит отметить, что ряды, которые строит Эйлер, сходятся в некоторой области значений аргумента, и пополнить изложение отсутствующими у Эйлера исследованиями сходимости не представляет затруднений для современного читателя. Эйлер занимается также в этих главах выяснением условий того, чтобы построенные им ряды обрывались, то есть вопросом о существовании полиномиальных решений, дополняет изложенную им выше теорию уравнения Риккати, находит случаи, когда в общем интеграле отсутствуют логарифмические члены, которые должны были бы в него входить согласно общей теории, и т. д.

Девятая глава первого раздела посвящена преобразованию линейных однородных уравнений второго порядка как с помощью замены искомой функции, так и с помощью замены независимого переменного. Применяя такие преобразования к уравнениям, рассмотренным в предыдущих двух главах, Эйлер снова получает некоторые уже ранее установленные им результаты. Но следующая глава содержит новый метод интегрирования дифференциальных уравнений — с помощью определенных интегралов (как Эйлер сам выражается — с помощью квадратур кривых). Большое значение этого метода было ясно его первооткрывателю (см., например,

§ 1016 этого тома), и в одиннадцатой главе он продолжает его развивать в сопоставлении с методом интегрирования с помощью бесконечных рядов.

Шестая глава первого раздела представляет как бы попытку проникнуть в нелинейную область с помощью метода интегрирующего множителя. Этот метод применен здесь в основном к уравнениям вида

$$(By^2+C+2Dx+bx^2)\,y''+Ay=0,$$

где A, B, C, D и b — постоянные. В конце главы решается одна из обратных задач на применение интегрирующего множителя (§ 923 и сл.). Последняя, двенадцатая глава первого раздела излагает обобщение на уравнения второго порядка метода численного интегрирования, который в первом томе был применен к уравнениям первого порядка.

Второй раздел тома значительно беднее содержанием первого. По теории дифференциальных уравнений порядка третьего и выше Эйлер мог дать только классификацию простейших таких уравнений (уравнений вида $y^n=f(u)$, где $n\geqslant 3$, а u принимается равным x, y, y', ..., $y^{(n-1)}$) с выделением отдельных типов, допускающих полное или частичное интегрирование (см. первую главу раздела), затем решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами произвольного порядка однородного (глава вторая) и неоднородного (глава третья) и сводимого к нему уравнения, которое носит теперь имя Эйлера (глава пятая). Четвертая глава раздела содержит только примеры. Однако и в этом разделе можно найти немало поучительного. Так, например, по вопросам, рассмотренным в первой главе, изложение Эйлера остается, по-видимому, наиболее полным. В теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами Эйлер не владел методом вариации произвольных постоянных, который был развит Лагранжем несколько позже выхода в свет «Интегрального исчисления». Поэтому Эйлер строит теорию неоднородного уравнения особым образом, фактически независимо от теории однородного уравнения. Применяемый при этом метод последовательного понижения порядка уравнения, сходный с тем, каким впервые проинтегрировал однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами Иоганн Бернулли, для уравнений невысокого порядка может быть удобнее метода Лагранжа. И нельзя не сказать о единственном в своем роде месте в математической литературе (см. третью главу, § 1164), где Эйлер излагает ошибочный способ решения (в случае кратных корней характеристического уравнения) с тем, чтобы потом, для пользы читателя, разъяснить характер допущенной им ошибки и лишь затем изложить верное решение!

При чтении надо учитывать также некоторые особенности терминологии и обозначений. В переводе сохранен термин «полный интеграл» в смысле «общий интеграл». Независимое переменное обычно определяется указанием, что его первый дифференциал принимается постоянным или же (гораздо реже), что его второй дифференциал равен нулю. Полные и частные производные обозначаются одинаково, но, впрочем, Эйлер часто различает их, беря частные производные в скобки. Логарифм (натуральный) обозначен курсивным l. Остальные (немногочисленные) отклонения в обозначениях от ныне общепринятых не воспроизводятся. В этом отношении настоящий том, как и все издание, воспроизводит латинское переиздание оригинала в полном собрании сочинений Эйлера. Из этого переиздания в наше перенесены все примечания редактора Л. Шлезингера—они отмечены инициалами Л. Ш. Остальные сноски сделаны переводчиком.

Леонард Эйлер

ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ ВТОРОЙ

В КОТОРОМ ИЗЛАГАЕТСЯ
МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ФУНКЦИЙ
ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО
ПО ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ
МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ
ВТОРОГО ИЛИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКОВ

INSTITVTIONVM
CALCVLI INTEGRALIS

VOLVMEN SECVNDVM

IN QVO METHODVS INVENIENDI FVNCTIONES VNIVS VARIABILIS EX DATA RELATIONE DIFFERENTIALIVM SECVNDI ALTIORISVE GRADVS PERTRACTATVR.

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.

PETROPOLI

Impensis Academiae Imperialis Scientiarum

1769.

ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
КНИГА ПЕРВАЯ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ИЛИ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО ПО ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ ВТОРОГО ИЛИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ
О РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩИХ ТОЛЬКО ДВА ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА I
ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПРОСТЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

706. *Обозначим два переменных через x и y и положим $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$. Любое уравнение, определяющее соотношение между количествами x, y, p и q, называется дифференциальным уравнением второго порядка между двумя переменными x и y.*

СЛЕДСТВИЕ 1

707. Итак, подобно тому как буква p обозначает дифференциальное отношение первого порядка, поскольку $p=\frac{dy}{dx}$, так же буква q обозначает отношение дифференциалов второго порядка. Действительно, положив, как это обычно делают, элемент dx равным постоянному, получим $dp=\frac{d^2y}{dx}$, стало быть, $q=\frac{d^2y}{dx^2}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

708. Итак, поскольку в рассматриваемое уравнение входит буква q, постольку оно является дифференциальным уравнением второго порядка. Если же буква q отсутствует, а имеется лишь p, уравнение будет дифференциальным уравнением только первого порядка; если же в нем отсутствует как p, так и q, будем иметь уравнение между x и y, и никакого иного уравнения искать не требуется.

СЛЕДСТВИЕ 3

709. Итак, требуется иметь метод для определения соотношения между переменными x и y, из которого явствовало бы, какой функцией от x является y, либо наоборот, если предложено некоторое уравнение, в которое входят как оба переменных x и y, так и количества $p=\frac{dy}{dx}$ и $q=\frac{dp}{dx}$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

710. Вводя указанным образом букву q, мы освобождаемся при рассмотрении дифференциальных уравнений второго порядка от условия рассматривать какой-либо из дифференциалов первого порядкакак постоянный. Действительно, когда мы переходим к конечным количествам, которые выражают отношение дифференциалов первого порядка, постоянство [какого-либо] дифференциала совершенно не приходится учитывать[1]). А когда дифференциальные уравнения второго порядка, как обычно, рассматриваются таким образом, что один из дифференциалов принимается постоянным, мы, вводя величины $p=\frac{dy}{dx}$ и $q=\frac{dp}{dx}$, избавляемся от дифференциального вида записи, поскольку получается уравнение, в которое входят только конечные количества[2]). И, наоборот, если дано уравнение между конечными количествами x, y, p, q, его можно привести бесконечным числом способов к обычному виду, для чего тот или другой из дифференциалов следует положить постоянным; однако все эти виды, различные по внешности, полностью согласуются между собой, так что, даже если никакой дифференциал не полагаем постоянным, мы можем осуществить приведение к обычному виду.

---

[1]) Consideratio differentialis constantis ne locum quidem habere potest.

[2]) Species differentialium penitus tollitur, dum aequatio tantum quantitates finitas complectitur.

ПОЯСНЕНИЕ 2

711. Следовательно, нам прежде всего надлежит вкратце показать, каким образом уравнение в дифференциалах второго порядка, записанное обычным образом, можно привести к нашему виду, какой бы дифференциал мы ни принимали постоянным. Пусть ds есть тот дифференциал, который принят постоянным, так что отношение этого дифференциала к dx вследствие того, что $\frac{dy}{dx}=p$, выражается через p и, возможно, через самые переменные x и y. Итак, мы полагаем $ds=v\,dx$, причем v должно быть конечным количеством. А поскольку в уравнении встречаются d^2x и d^2y или во всяком случае какой-либо из этих дифференциалов, вместо d^2x будем писать $ds\,d\frac{dx}{ds}$, так как вследствие того, что ds постоянная величина, имеем $ds\,d\frac{dx}{ds}=d^2x$. Следовательно, будем иметь $d^2x=ds\,d\frac{1}{v}=-\frac{ds\,dv}{v^2}$. Таким же образом, записывая d^2y в виде $ds\cdot d\frac{dy}{ds}=ds\,d\frac{p}{v}$, получаем $d^2y=\frac{ds\,(v\,dp-p\,dv)}{v^2}$. А так как v выражается через p, x, y, получим

$$dv=M\,dx+N\,dy+P\,dp=dx\,(M+Np+Pq),$$

так как $dp=q\,dx$ и, таким образом,

$$d^2x=-\frac{dx^2}{v}(M+Np+Pq)$$

и

$$d^2y=\frac{dx^2}{v}(qv-Mp-Np^2-P\,pq).$$

При подстановке вместо d^2x и d^2y этих значений в уравнение в нем останутся только дифференциалы первого порядка, и, после того как все они будут выражены через dx, с помощью деления на dx дифференциалы будут исключены полностью из уравнения. Наоборот, если предложено подобное уравнение между x, y, p и q, то оно преобразуется к обычному виду, когда принимается постоянным некоторый элемент ds, если, во-первых, везде вместо p напишем $\frac{dy}{dx}$, а вместо q напишем $\frac{1}{dx}d\frac{dy}{dx}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}$, причем пока еще не учитывается постоянство какого-либо элемента [1]). Но вследствие того, что $ds=v\,dx$ есть постоянное количество, мы получаем дополнительно

$$v\,d^2x+dv\,dx=0,$$

или, так как

$$dv=M\,dx+N\,dy+Pd\frac{dy}{dx},$$

будем иметь

$$v\,d^2x+M\,dx^2+N\,dx\,dy+P\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx}=0,$$

---

[1]) Ubi quidem nullius adhuc elementi constantis ratio est habita.

откуда по желанию можно исключить либо d^2x, либо d^2y и можно также получить бесконечно много эквивалентных видов, не исключая ни тот, ни другой дифференциал.

ПОЯСНЕНИЕ 3

712. Итак, из изложенного отлично видно, какое преимущество имеет то выражение в конечном виде, в котором мы здесь представляем дифференциальные уравнения второго порядка, по сравнению с обычными: одно и то же уравнение при обычном его представлении может быть дано бесконечным множеством способов в соответствии с тем, какой элемент полагаем постоянным, тогда как при нашем способе выражения одно и то же уравнение всегда приводится к одному и тому же виду. Поэтому, если при нашем способе получаются различные уравнения, то несомненно, что они выражают различные соотношения между переменными x и y, в то время как при обычном способе выражения самые различные дифференциальные уравнения второго порядка могут определять одно и то же соотношение, и чрезвычайно затруднительно выбрать из этих уравнений такое, которое наиболее удобно для решения. Так как мы разыскиваем метод, с помощью которого по некоторому предложенному уравнению между четырьмя количествами x, y, p и q можно было бы определить соотношение между двумя переменными x и y, а этот вопрос, мне представляется, превышает человеческие силы[1]), то следует начать с простейших случаев. Простейшими же случаями, несомненно, являются те, когда в предложенное уравнение входят только два количества, а именно, либо только x и q, либо y и q, либо p и q, то есть если q есть функция либо только от x, либо только от y, либо только от p. Рассмотрение таких случаев составляет предмет этой главы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

713. Дифференциальное выражение второго порядка называется простым, если, положив $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, получаем величину q в виде функции либо только от x, либо только от y, либо только от p.

СЛЕДСТВИЕ 1

714. Стало быть, мы имеем три вида простых дифференциальных выражений второго порядка в соответствии с тем, выражается ли величина q функцией только от p, либо только от x, либо только от y. В этой главе надлежит научить, как их решать.

СЛЕДСТВИЕ 2

715. Следовательно, если X обозначает функцию только от x, Y — функцию только от y и P — функцию только от p, то три вида этих простых выражений суть:

$$1)\quad q = X, \qquad 2)\quad q = Y, \qquad 3)\quad q = P;$$

в них содержится простейший случай $q = \text{Const}$.

[1]) Haec quaestio vires humanes superare videtur.

СЛЕДСТВИЕ 3

716. Если мы хотим записать эти выражения обычным образом, то, так как $q = \frac{dp}{dx} = \frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx}$, получим $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, принимая элемент dx постоянным; принимая же постоянным элемент dy, получим $q = -\frac{dy\, d^2x}{dx^3}$; если же ни тот, ни другой элемент не полагаем постоянным, то будем иметь $q = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}$; все эти формулы в значительной мере усложняют рассматриваемые выражения.

СЛЕДСТВИЕ 4

717. Если, как это часто бывает, принимается постоянным элемент $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, то будем иметь $dx\, d^2x + dy\, d^2y = 0$; откуда окончательное выражение для самого q вследствие того, что $d^2y = -\frac{dx\, d^2x}{dy}$, получается в виде $q = -\frac{(dx^2 + dy^2)\, d^2x}{dx^3\, dy}$, либо на основании того, что $d^2x = -\frac{dy\, d^2y}{dx}$, оно получается в виде $q = \frac{(d^2x + dy^2)\, d^2y}{dx^4}$.

ПОЯСНЕНИЕ

718. Мы отказываемся от того, чтобы записывать дифференциальные уравнения второго порядка с помощью обычных отношений [дифференциалов], так как при этом выражения сами по себе простые могут чрезвычайно усложняться. Мы будем пользоваться установленными здесь положениями, чтобы получить решение простых выражений указанного вида[1]).

ЗАДАЧА 92

719. *Полагая $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, найти зависимость между переменными x и y, если q есть некоторая функция только от p.*

РЕШЕНИЕ

Итак, пусть $q = P$, где обозначаем через P какую угодно функцию только от p. Так как $q = \frac{dp}{dx}$, мы получим $dp = P\,dx$, откуда

$$dx = \frac{dp}{P} \quad \text{и} \quad dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{P}.$$

Отсюда, интегрируя, мы получаем

$$x = a + \int \frac{dp}{P} \quad \text{и} \quad y = b + \int \frac{p\,dp}{P},$$

[1]) Ratione hic stabilita utamur, indeque resolutionem hujusmodi formularum simplicium doceamus.

так что как x, так и y выражаются через одно и то же новое переменное p. Так как при этих двух интегрированиях появились два новых постоянных a и b, этот интеграл следует рассматривать как полный[1]).

СЛЕДСТВИЕ 1

720. Если уравнение $q=P$, интегрирование которого мы здесь изложили, привести к обычному виду, полагая dx постоянным, то оно преобразуется в уравнение $d^2y=dx^2 f\left(\frac{dy}{dx}\right)$, так как $q=\frac{d^2y}{dx^2}$. Это есть дифференциальное уравнение второго порядка, в котором отсутствуют сами переменные x и y.

СЛЕДСТВИЕ 2

721. Мы получаем такую же форму этого уравнения, если полагаем постоянным элемент dy или другое дифференциальное выражение, в которое не входят сами переменные x и y, хотя бы $\sqrt{dx^2+dy^2}$. Следовательно, таким способом можно проинтегрировать любое дифференциальное уравнение второго порядка, в которое не входят сами переменные x и y.

СЛЕДСТВИЕ 3

722. Если же принимаем постоянным такой элемент, как $y\,dx-x\,dy$, так что $y\,d^2x-x\,d^2y=0$, то вследствие того, что

$$q=\frac{1}{dx}\,d\,\frac{dy}{dx}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3},$$

получим

$$q=\frac{(y\,dx-x\,dy)\,d^2x}{x\,dx^3}=\frac{(y\,dx-x\,dy)\,d^2y}{y\,dx^3},$$

и это выражение, если оно равно функции только от $p=\frac{dy}{dx}$, может быть проинтегрировано.

СЛЕДСТВИЕ 4

723. Если P есть постоянное количество, так что $q=f$, будем иметь

$$x=a+\frac{p}{f} \quad \text{и} \quad y=b+\frac{p^2}{2f},$$

откуда

$$y=b+\frac{f}{2}(x-a)^2$$

или

$$y=\frac{1}{2}fx^2-afx+\frac{1}{2}a^2f+b,$$

или, меняя запись постоянных[2]),

$$y=\frac{1}{2}fx^2+Cx+D.$$

[1]) Здесь заявление о полноте полученного интеграла, поскольку он содержит два постоянных, сделано без обоснования. Но этот пункт разъясняется несколько ниже, в § 724.

[2]) Mutata forma constantium — буквально: меняя вид постоянных.

ПОЯСНЕНИЕ

724. Поскольку, очевидно, дифференциальное уравнение второго порядка требует двух интегрирований, при этом, если оба интегрирования произведены в общем виде, появляются два новых постоянных, и в этом состоит критерий того, является ли полученный таким образом интеграл полным. Действительно, точно так же, как полное интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка вводит одно произвольное постоянное, так же, если дифференциальное уравнение будет второго порядка, в полный интеграл войдут два новых постоянных, а если дифференциальное уравнение третьего или высшего порядка, то три или большее число постоянных. Те же задачи, решение которых приводит к таким дифференциальным уравнениям высших порядков, по своей природе таковы, что определение решения требует соответствующего количества постоянных. Соответственно этому для уравнения $q=f$, или, полагая dx постоянным, $d^2y=f\,dx^2$, полное интегральное уравнение $y=\frac{1}{2}fx^2+Cx+D$ включает два новых постоянных C и D, что также будет видно из последующих примеров.

ПРИМЕР 1

725. *Найти полный интеграл дифференциального уравнения второго порядка $ad^2y=dx\,dy$, в котором постоянным полагаем элемент dx.*

Если положим $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$, получим $d^2y=q\,dx^2$, и отсюда $aq=p$ и $P=\frac{p}{a}$. Вследствие этого получаем, интегрируя

$$x=\int\frac{adp}{p}=C+alp\,^{1)}\quad\text{и}\quad y=\int a\,dp=D+ap.$$

Так как $p=\frac{y-D}{a}$, будем иметь

$$x=C+al\frac{y-D}{a},$$

что является полным интегральным уравнением, содержащим два постоянных C и D.

ПРИМЕР 2

726. *Определить соотношение между x и y, полагая dx постоянным, так, чтобы*

$$\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dx\,d^2y}=a.$$

Положив $dy=p\,dx$, будем иметь $d^2y=dp\,dx$, так как dx — постоянное количество. Поэтому наше уравнение будет $\frac{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}{-dp}\,dx=a$,

---

1) Напоминаем, что lp у Эйлера обозначает логарифм p, обычно — логарифм натуральный.

откуда

$$dx = \frac{-a\,dp}{(1+p^2)^{3/2}} \quad \text{и} \quad dy = \frac{-ap\,dp}{(1+p^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя, мы находим

$$x = A - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{и} \quad y = B + \frac{a}{\sqrt{1+p^2}},$$

откуда заключаем, что

$$(A-x)^2 + (y-B)^2 = a^2.$$

СЛЕДСТВИЕ

727. Если x и y обозначают прямоугольные координаты кривой, то выражение $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dx\,d^2y}$ дает радиус соприкасающегося круга. Найденное интегральное уравнение показывает, что для того, чтобы этот радиус был постоянным и равным a, кривая должна быть окружностью радиуса a.

ПРИМЕР 3

728. *Полагая* $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ *и принимая этот элемент постоянным, определить соотношение между* x *и* y *так, чтобы* $\frac{ds\,dy}{d^2x} = \frac{a\,dx}{dy}$.

Положив $dy = p\,dx$, будем иметь $ds = dx\sqrt{1+p^2}$ и, так как ds есть постоянное, то есть $d^2x\sqrt{1+p^2} + \frac{p\,dx\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = 0$,

$$d^2x = \frac{-p\,dx\,dp}{1+p^2}.$$

Таким образом, предложенное уравнение переходит в следующее:

$$\frac{p\,dx^2\sqrt{1+p^2}}{-p\,dx\,dp}(1+p^2) = \frac{a}{p},$$

или же

$$dx = \frac{-a\,dp}{p(1+p^2)^{3/2}} \quad \text{и} \quad dy = \frac{-a\,dp}{(1+p^2)^{3/2}},$$

следовательно, $y = D - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$. В первой из предыдущих формул мы положим $p = \frac{1}{r}$, и тогда

$$dx = \frac{ar^2\,dr}{(1+r^2)^{3/2}} = \frac{a\,dr}{\sqrt{1+r^2}} - \frac{a\,dr}{(1+r^2)^{3/2}},$$

откуда интегрированием находим

$$x = C - \frac{ar}{\sqrt{1+r^2}} + al\left(r + \sqrt{1+r^2}\right)$$

или

$$x = C - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + al\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{p}.$$

ПРИМЕР 4

729. *Полагая* $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ *и принимая этот элемент постоянным, надо получить* $\frac{ds\,dy}{d^2x}=a\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}$ [1].

Если положим, как раньше, $dy=p\,dx$, приходим к интегрированию такого уравнения:

$$\frac{-dx\left(1+p^2\right)^{3/2}}{dp}=a\operatorname{arctg}p,$$

то есть

$$dx=\frac{-a\,dp}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}\operatorname{arctg}p \quad \text{и} \quad dy=\frac{-ap\,dp}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}\operatorname{arctg}p.$$

Теперь, так как $d\operatorname{arctg}p=\frac{dp}{1+p^2}$, будем иметь

$$x=\frac{-ap}{\sqrt{1+p^2}}\operatorname{arctg}p-a\int\frac{p\,dp}{\left(1+p^2\right)^{3/2}},$$

$$y=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\operatorname{arctg}p-a\int\frac{dp}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}.$$

На основании этого мы получаем

$$x=C-\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\operatorname{arctg}p$$

и

$$y=D-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}+\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\operatorname{arctg}p.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

730. Если x — абсцисса, а y — аппликата кривой, радиус соприкасающегося круга кривой должен быть пропорционален углу, который касательная к кривой образует с осью [x-ов]. Отсюда ясно, что эта кривая должна быть некоторой спиралью, которая разворачивается вокруг начала координат [2].

СЛЕДСТВИЕ 2

731. Если обозначим тот угол, тангенс которого есть p, через φ, будем иметь $p=\operatorname{tg}\varphi$, поэтому

$$x=C-a\cos\varphi-a\varphi\sin\varphi$$

и

$$y=D-a\sin\varphi+a\varphi\cos\varphi,$$

и, следовательно,

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi=C\cos\varphi+D\sin\varphi-a.$$

---

[1]) Обозначение Эйлера: Ang. tang $\frac{dy}{dx}$.

[2]) circa originem abscissarum se evolventem

СЛЕДСТВИЕ 3

732. Для того чтобы при $\varphi=0$ исчезали как x, так и y, надо положить $C=a$ и $D=0$; тогда

$$x=a-a\cos\varphi-a\varphi\sin\varphi$$

и

$$y=-a\sin\varphi+a\varphi\cos\varphi.$$

Отсюда при весьма малых значениях угла получаем

$$x=-\frac{1}{2}a\varphi^2+\frac{1}{8}a\varphi^4 \quad \text{и} \quad y=-\frac{1}{3}a\varphi^3+\frac{1}{30}\varphi^5.$$

Следовательно, приближенно[1])

$$\frac{x^3}{y^2}=-\frac{9}{8}a, \text{ то есть } y^2=-\frac{8x^3}{9a}.$$

ЗАДАЧА 93

733. *Определить соотношение между двумя переменными x и y, если, при $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$, количество q есть функция только от x (которая пусть будет X).*

РЕШЕНИЕ

Так как $q=X$, то $q\,dx=dp=X\,dx$, откуда, интегрируя, получаем $p=\int X\,dx+C$, а отсюда вследствие того, что $dy=p\,dx$, находим

$$y=\int dx\int X\,dx+Cx+D.$$

Но

$$\int dx\int X\,dx=x\int X\,dx-\int Xx\,dx,$$

что сразу проверяется дифференцированием.

Таким образом, полное интегральное уравнение, определяющее соотношение между двумя переменными x и y, имеет вид

$$y=x\int X\,dx-\int Xx\,dx+Cx+D.$$

В него входят два произвольных постоянных C и D, и оно будет алгебраическим, если оба дифференциальных выражения $X\,dx$ и $Xx\,dx$ допускают интегрирование[2]).

СЛЕДСТВИЕ 1

734. Следовательно, если $q=0$, или же, полагая dx постоянным, $d^2y=0$, то есть $X=0$, полным интегральным уравнением будет $y=Cx+D$.

[1]) Proxime.

[2]) Трудно сказать, каков смысл термина алгебраический в этом утверждении. Буквально его принимать нельзя, как показывает хотя бы пример $X=\frac{1}{1+x^2}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

735. Те дифференциальные уравнения второго порядка, которые можно проинтегрировать указанным способом, полагая dx равным постоянному, содержатся в записи $d^2y = X\,dx^2$, так что первое интегрирование дает $dy = dx \int X\,dx + C$, а второе — $y = \int dx \int X\,dx + Cx + D$.

СЛЕДСТВИЕ 3

736. Если же принимается постоянным дифференциал dy, то, так как $p = \frac{dy}{dx}$, будем иметь $dp = -\frac{dy\,d^2x}{dx^2} = q\,dx$, и вид уравнений, которые можно таким образом проинтегрировать, есть $-dy\,d^2x = X\,dx^3$.

СЛЕДСТВИЕ 4

737. Если постоянным полагаем элемент $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, то, поскольку $dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$, будем иметь

$$dp = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2} = \frac{-ds^2 d^2x}{dx^2 dy} = q\,dx.$$

Следовательно, форма уравнений, которые можно проинтегрировать таким способом, есть

$$-ds^2\,d^2x = X\,dx^3 dy.$$

Так как имеем также

$$dp = q\,dx = +\frac{ds^2 d^2y}{dx^3},$$

эти уравнения можно представить в виде $ds^2\,d^2y = X\,dx^4$.

ПОЯСНЕНИЕ

738. Из изложенного ясно, насколько важно освободиться от представления дифференциальных уравнений второго порядка в обычном виде, когда принимается постоянным некоторый элемент, и привести их к установленному здесь виду. Действительно, если предложено уравнение $ds^2\,d^2y = X\,dx^4$, причем полагаем постоянным элемент $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, то далеко не очевидно, каким образом следует приступить к его интегрированию. Согласно же нашему методу, если положим $dy = p\,dx$, так что

$$ds = dx\sqrt{1 + p^2} \quad \text{и} \quad d^2y = pd^2x + dx\,dp,$$

мы придадим этому уравнению следующий вид:

$$dx^2(1 + p^2)(p\,d^2x + dx\,dp) = X\,dx^4,$$

то есть

$$(p\,d^2x + dx\,dp)(1 + p^2) = X\,dx^2.$$

А поскольку постоянным является ds и, следовательно, также и $ds^2 = dx^2(1 + p^2)$, будем иметь

$$d^2x\,(1 + p^2) + p\,dx\,dp = 0 \quad \text{или} \quad d^2x = \frac{-p\,dx\,dp}{1 + p^2},$$

а потому

$$p\,d^2x+dx\,dp=\frac{dx\,dp}{1+p^2},$$

так что получим $dp=X\,dx$, и это уравнение уже очень легко решить. Здесь, конечно, следует воспользоваться и тем, что выше[1]) изложено относительно интегрирования простых дифференциальных выражений.

ПРИМЕР 1

739. *Найти полный интеграл* [*уравнения*] $d^2y=ax^n dx^2$, *полагая* dx *постоянным.*

Так как $\frac{d^2y}{dx}=ax^n dx$, мы получаем интегрированием, учитывая, что dx равно постоянному,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{n+1}x^{n+1}+C,$$

откуда, снова интегрируя, получаем

$$y=\frac{a}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}+Cx+D.$$

Тут следует отдельно рассмотреть случай $n=-1$ и $n=-2$.

I. Итак, если $n=-1$, имеем $\frac{d^2y}{dx}=\frac{a\,dx}{x}$, откуда $\frac{dy}{dx}=alx+C$, и, следовательно, так как $dy=a\,dxlx+C\,dx$, новое интегрирование дает $y=axlx-ax+Cx+D$. Если вместо $C-a$ напишем C, мы получим

$$y=ax\,lx+Cx+D.$$

II. Если $n=-2$, то есть $\frac{d^2y}{dx}=\frac{a\,dx}{x^2}$, получаем $\frac{dy}{dx}=\frac{-a}{x}+C$, откуда

$$y=-alx+Cx+D.$$

ПРИМЕР 2

740. *Найти полный интеграл* [*уравнения*]

$$\frac{ds^2\,d^2y}{dx^4}=\frac{1}{a}\cos\frac{x}{c},$$

полагая $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ *постоянным.*

Из вышеизложенного [§ 717] ясно, что $\frac{ds^2\,d^2y}{dx^4}=q$, так что предложенное уравнение это $q=\frac{1}{a}\cos\frac{x}{c}$, откуда получаем $q\,dx=dp=\frac{dx}{a}\cos\frac{x}{c}$ и, интегрируя, находим

$$p=\frac{c}{a}\sin\frac{x}{c}+C=\frac{dy}{dx}.$$

Поэтому

$$y=-\frac{c^2}{a}\cos\frac{x}{c}+Cx+D,$$

что и есть полное интегральное уравнение.

---

1) § 733.

ЗАДАЧА 94

741. *Если величина q равна некоторой функции только от y (которую обозначим через Y), найти полное интегральное уравнение в [переменных] x и y. При этом полагаем $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$.*

РЕШЕНИЕ

Так как $q = Y = \frac{dp}{dx}$, то $dx = \frac{dp}{Y}$, и отсюда $p\,dx = dy = \frac{p\,dp}{Y}$. Это приводит к уравнению с разделенными переменными p и y: $p\,dp = Y dy$, интегрирование которого дает

$$\frac{1}{2}p^2 = \int Y\,dy + \frac{1}{2}C \quad \text{и} \quad p = \sqrt{C + 2\int Y dy} = \frac{dy}{dx}.$$

Отсюда далее получаем, что $x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int Y dy}}$,

и это новое интегрирование вводит еще одну произвольную постоянную, так что мы имеем таким образом полное интегральное уравнение в [переменных] x и y.

СЛЕДСТВИЕ 1

742. Так как $q = \frac{dp}{dx}$ и $dx = \frac{dy}{p}$, то $q = \frac{p\,dp}{dy}$. Поэтому, поскольку предложенное уравнение есть $q = Y$, получим $\frac{p\,dp}{dy} = Y$, отсюда $p\,dp = Y\,dy$, и, таким образом, сразу получается предыдущее интегрирование.

СЛЕДСТВИЕ 2

743. Так как, принимая элемент dx постоянным, имеем $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, проинтегрированные нами уравнения будут вида $d^2y = Y\,dx^2$. Интеграция их в этом виде становится очевидной после умножения на dy, а именно

$$\frac{1}{2}dy^2 = dx^2 \int Y\,dy + \frac{1}{2}C\,dx^2,$$

так как dx постоянное, и отсюда следует, что $dx = \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int Y\,dy}}$, как выше.

ПОЯСНЕНИЕ

744. Итак, вот пример дифференциальных уравнений, преобразуемых в интегрируемые с помощью подходящего множителя. Отсюда заключаем, что метод множителя может быть использован также и для этих уравнений, но будет уместно полнее развить этот метод позже, так как его применение имеет существенное значение главным образом для дифференциальных уравнений высших порядков, когда разделение переменных не может нам помочь. По этой же причине мы уже ранее [§ 447, т. I] рекомендовали метод интегрирования с помощью множителей и ставили его выше метода разделения переменных.

ПРИМЕР 1

745. *Найти полный интеграл, если имеем [уравнение]* $a^2\,d^2y = y\,dx^2$, *где полагаем* dx *постоянным.*

Умножим предложенное уравнение на $2dy$, что дает

$$2a^2\,dy\,d^2y = 2y\,dy\,dx^2.$$

Так как dx есть постоянное, получаем интеграл

$$a^2\,dy^2 = y^2\,dx^2 + C\,dx^2.$$

Отсюда следует, что

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2+C}},$$

и новое интегрирование дает нам

$$x = al\,(y + \sqrt{y^2+C}) - alb.$$

Обозначая через e число, логарифм которого $= 1$, получаем отсюда, что

$$be^{x/a} = y + \sqrt{y^2+C},$$

и, избавляясь от иррациональности,

$$b^2e^{2x/a} - 2bye^{x/a} = C,$$

так что

$$y = \frac{1}{2}\,be^{x/a} - \frac{C}{2b}\,e^{-\frac{x}{a}}.$$

Меняя запись постоянных C и b, получим

$$y = Ce^{\frac{x}{a}} + De^{-\frac{x}{a}},$$

что является полным интегральным уравнением.

ПРИМЕР 2

746. *Найти полный интеграл, если имеем [уравнение]* $a^2\,d^2y + y\,dx^2 = 0$ *и полагаем* dx *постоянным.*

После умножения на $2dy$ находим интеграл уравнения

$$2a^2\,dy\,d^2y + 2y\,dy\,dx^2 = 0$$

в виде

$$a^2\,dy^2 + y^2\,dx^2 = c^2\,dx^2,$$

откуда получаем

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{c^2-y^2}},$$

и новое интегрирование дает нам

$$x = a\arcsin\frac{y}{c} + b\ ^{1)}.$$

---

1) У Эйлера: $x = a\,\mathrm{Ang}\cdot\sin\frac{y}{c} + b$.

Следовательно, будем иметь

$$\frac{y}{c}=\sin\frac{x-b}{a}=\cos\frac{b}{a}\sin\frac{x}{a}-\sin\frac{b}{a}\cos\frac{x}{a},$$

или, заменяя постоянные b и c так, чтобы

$$c\cos\frac{b}{a}=C \quad \text{и} \quad -c\sin\frac{b}{a}=D,$$

получим

$$y=C\sin\frac{x}{a}+D\cos\frac{x}{a}$$

Если сохраним первоначальную запись[1]), получим

$$y=c\sin\left(\frac{x}{a}+\alpha\right).$$

СЛЕДСТВИЕ

747. Этот пример может быть решен на основании предыдущего, так как

$$e^{u\sqrt{-1}}=\cos u+\sqrt{-1}\sin u \quad \text{и} \quad e^{-u\sqrt{-1}}=\cos u-\sqrt{-1}\sin u$$

и, наоборот,

$$\cos u\sqrt{-1}=\frac{1}{2}e^{u}+\frac{1}{2}e^{-u} \quad \text{и} \quad \sin u\sqrt{-1}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}e^{u}-\frac{1}{2\sqrt{-1}}e^{-u}.$$

ПРИМЕР 3

748. *Найти полный интеграл, если имеем [уравнение]* $d^2y\sqrt{ay}=dx^2$ *где полагаем* dx *постоянным.*

Так как имеем $2dy\,d^2y=\frac{2dy}{\sqrt{ay}}dx^2$, то, интегрируя, получим

$$dy^2=\frac{4dx^2\sqrt{y}}{\sqrt{a}}+4n\,dx^2=\frac{4dx^2(\sqrt{y}+n\sqrt{a})}{\sqrt{a}},$$

откуда

$$2dx=\frac{dy\sqrt[4]{a}}{\sqrt{\sqrt{y}+\sqrt{a}}}.$$

Пусть, удобства ради, $n\sqrt{a}=b$ и $\sqrt{y}=z$, так что

$$dy=2z\,dz \quad \text{и} \quad \frac{dx\sqrt{n}}{\sqrt{b}}=\frac{z\,dz}{\sqrt{b+z}}.$$

Интегрируя последнее соотношение, находим

$$\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{b}}=\frac{2}{3}(z-2b)\sqrt{b+z}+C,$$

или, возвращаясь к прежним обозначениям,

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a}}=\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2\sqrt{c})\sqrt{\sqrt{y}+\sqrt{c}}+C,$$

---

[1]) Retenta prima forma.

где c и C суть два произвольных постоянных. Итак, будем иметь

$$\frac{3(x+f)}{2\sqrt[4]{a}}=(\sqrt{y}-2\sqrt{c})\sqrt{\sqrt{y}+\sqrt{c}},$$

полагая $C=\frac{-f}{\sqrt[4]{a}}$, а возведя в квадрат, получим

$$\frac{9(x+f)^2}{4\sqrt{a}}=y\sqrt{y}-3y\sqrt{c}+4c\sqrt{c}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

749. Обычная форма уравнений, которые можно проинтегрировать таким образом, полагая элемент dx постоянным, есть $d^2y=Y\,dx^2$, и интегрируемость таких уравнений становится очевидной после умножения на dy. Если же принимается постоянным элемент dy, то, так как $q=\frac{dp}{dx}$ и $p=\frac{dy}{dx}$, будем иметь $q=-\frac{dy\,d^2x}{dx^3}$; обычной формой таких уравнений будет, следовательно, $dy\,d^2x=-Y\,dx^3$. В свою очередь, полагая элемент $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ постоянным, так что $dx\,d^2x+dy\,d^2y=0$, получим вследствие того, что $dp=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^2}$, либо $q=-\frac{ds^2\,d^2x}{dx^3dy}$, либо $q=\frac{ds^2d^2y}{dx^4}$; это приводит к следующему виду уравнений:

$$-\frac{ds^2\,d^2x}{dx^3\,dy}=Y \quad \text{или} \quad \frac{ds^2\,d^2y}{dx^4}=Y.$$

Эти уравнения после умножения на dy можно проинтегрировать, хотя это уже менее очевидно. Подобным же образом, если мы полагаем постоянным элемент $y\,dx$, так что $y\,d^2x+dx\,dy=0$ и $d^2x=-\frac{dx\,dy}{y}$, получаем уравнение следующего вида $\left(\text{потому, что } dp=\frac{d^2y}{dx}+\frac{dy^2}{y\,dx}\right)$: $y\,d^2y+dy^2=Yy\,dx^2$. Левая часть становится интегрируемой после умножения на любую функцию, зависящую только от $y\,dy$ и $y\,dx$, следовательно, и после умножения на $\frac{y\,dy}{y^2\,dx^2}$, а этот множитель одновременно делает интегрируемой также и правую часть $Yy\,dx^2$.

Итак, разобрав эти простейшие случаи дифференциальных уравнений второго порядка, которые уже не представляют каких-либо трудностей, перейдем к более трудным, и прежде всего к таким уравнениям, в которые не входит одно из двух переменных x и y; следовательно, предлагаемые уравнения содержат только три буквы x, p и q либо y, p и q, причем в обоих случаях исследование проводится почти одинаковым образом[1]).

---

[1]) Utriusque enim ratio fere perinde est comparata.

ГЛАВА II

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА, В КОТОРЫЕ НЕ ВХОДИТ ОДНО ИЗ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЗАДАЧА 95

750. *Положим* $dy = p\,dx$ *и* $dp = q\,dx$ *и пусть дано некоторое уравнение относительно трех величин* x, p *и* q, *в которое не входит другое переменное* y; *определить соотношение между переменными* x *и* y.

РЕШЕНИЕ

В предложенное уравнение входят три количества x, p и q. Вместо q напишем его значение $\frac{dp}{dx}$, и мы получим дифференциальное уравнение первого порядка, в которое входят только два переменных количества x и p, и это уравнение надо решать в соответствии с правилами первой части и определить его интеграл. После же того как этот интеграл найден, причем, для того чтобы он был полным, он должен содержать произвольную постоянную, мы можем из него определить либо p через x, либо x через p. В первом случае, когда можно определить p через x, так что p равно некоторой функции только от x, которая пусть будет X, мы вследствие того, что $p = X$, получим $p\,dx = dy = X\,dx$, откуда найдем $y = \int X\,dx + \text{Const}$, и это уравнение определяет искомое соотношение между x и y. Во втором случае, когда x определяется через p и равно некоторой функции P только от p, так что $x = P$, будем иметь

$$y = \int p\,dx = \int p\,dP \quad \text{или} \quad y = Pp - \int P\,dp.$$

Если же нет возможности определить ни x через p, ни p через x, то следует посмотреть, нельзя ли выразить оба эти количества через новое переменное u так, чтобы получить $x = V$ и $p = U$; тогда мы найдем $y = \int U\,dV$.

СЛЕДСТВИЕ 1

751. Таким образом, решение дифференциальных уравнений второго порядка состоит в том, что они сводятся к дифференциальному уравнению первого порядка относительно двух переменных x и p, и если последнее может быть проинтегрировано, то одновременно мы проинтегрируем исходное уравнение [второго порядка], причем добавляется какое-то новое постоянное.

СЛЕДСТВИЕ 2

752. Если предложенное уравнение относительно x, p и q таково, что либо измерение q не выше первого, либо уравнение может быть приведено к такому виду, то мы получаем простое дифференциальное уравнение, в которое дифференциалы входят только в первой степени, и при этом следует использовать те правила, что были изложены раньше.

СЛЕДСТВИЕ 3

753. Если же количество q входит в более высоком измерении, или же оно входит в уравнение трансцендентно, то следует попытаться применить приемы, которые изложены в конце предшествующей части, в связи с решением таких уравнений.

ПОЯСНЕНИЕ

754. Если в уравнение относительно x, p и q буква q входит в первом измерении, так что, положив $q = \frac{dp}{dx}$, мы приходим к простому дифференциальному уравнению, то главные случаи, когда интегрирование удается, таковы:

1) если это уравнение допускает разделение переменных;

2) если одно из переменных p и x с учетом также дифференциалов имеет измерение не выше первого;

3) если оба переменных x и p во всех членах дают одно и то же измерение, в каковом случае уравнение называется однородным.

Случаи менее очевидные, на которых мы останавливались выше[1]), здесь мы не упоминаем.

Затем, если величина q входит в более высоком измерении или даже трансцендентным образом, главные случаи, когда мы получаем решение, в соответствии с изложенным выше, таковы:

1) если предложено какое-угодно уравнение относительно x и q, причем p отсутствует;

2) если уравнение содержит только p и q; оба эти случая мы уже рассматривали в предыдущей главе;

3) если в заданном уравнении оба переменных p и q везде дают одно и то же число измерений;

4) если в уравнении относительно x, p и q одна из двух букв — либо x, либо p — входит в первом измерении, и, наконец,

---

[1]) Имеется в виду I том.

5) если уравнение составлено так, что, полагая $x = v^{\mu}$, $p = z^{\mu+\nu}$ и $q = t^{\nu}$, мы получим однородное уравнение относительно v, z и t, т. е. такое, что эти переменные везде дают одно и то же число измерений.

В соответствии с указанными случаями мы дадим примеры.

ПРИМЕР 1

755. *Определить соотношение между x и y, если при dx постоянном выражение* $\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y}$ *равно заданной функции одного x, которая пусть будет* $=X$.

Полагая $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, будем иметь

$$\frac{(1+p^2)^{3/2}}{q} = X = \frac{(1+p^2)^{3/2}\,dx}{dp},$$

и потому

$$\frac{dx}{X} = \frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}}.$$

Так как здесь переменные x и p разделены, то интегрирование дает

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{dx}{X}.$$

Обозначим $\int \frac{dx}{X}$ через V и будем считать этот интеграл полным; V является функцией от x. Итак,

$$p = V\sqrt{1+p^2} \quad \text{и} \quad p = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}.$$

Поэтому

$$dy = p\,dx = \frac{V\,dx}{\sqrt{1-V^2}},$$

откуда мы получаем

$$y = \int \frac{V\,dx}{\sqrt{1-V^2}}.$$

Кроме того, мы находим элемент

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+p^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-V^2}}$$

и, интегрируя, получаем

$$\int dx\sqrt{1+p^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-V^2}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

756. Если x и y суть ортогональные координаты кривой, выражение $\frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$ дает ее радиус кривизны, следовательно, мы определили кривую, радиус кривизны которой равен какой угодно функции абсциссы x.

СЛЕДСТВИЕ 2

757. Итак, пусть радиус кривизны должен быть обратно пропорционален абсциссе x. Принимая, что $X = \frac{a^2}{2x}$, мы получаем

$$V = \int \frac{2x\,dx}{a^2} = \frac{x^2 + ab}{a^2},$$

откуда

$$y = \int \frac{(x^2 + ab)\,dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 + ab)^2}},$$

и это соотношение дает кривые, образуемые упругой пластинкой[1]).

СЛЕДСТВИЕ 3

758. Если $V = x$, то есть $X = \frac{1}{nx^{n-1}}$, то, опуская постоянное слагаемое, мы находим $y = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}}$, и этот интеграл может быть выражен алгебраически в тех случаях, когда либо $n = \frac{1}{2i+1}$, либо $n = \frac{-1}{2i}$, обозначая через i целое положительное число[2]).

ПРИМЕР 2

759. *Определить соотношение между x и y, если, полагая dx постоянным, имеем*

$$dx\,(dx^2 + dy^2) + x\,dy\,d^2y = ad^2y\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Полагая $dy = p\,dx$, мы вследствие того, что $d^2y = dp\,dx$, приведем наше уравнение к виду

$$dx\,(1 + p^2) + xp\,dp = a\,dp\sqrt{1 + p^2}$$

и путем деления на $\sqrt{1 + p^2}$ получим интегрируемую форму, что дает нам

$$x\sqrt{1 + p^2} = ap + b,$$

то есть $x = \frac{ap + b}{\sqrt{1 + p^2}}$. А так как

$$y = \int p\,dx = px - \int x\,dp,$$

то будем иметь

$$y = \frac{ap^2 + bp}{\sqrt{1 + p^2}} - \int \frac{dp\,(ap + b)}{\sqrt{1 + p^2}},$$

---

[1]) a lamina elastica formatas.—Имеются в виду формы равновесия упругой линии.

[2]) Интеграл y с помощью подстановки $x^n = t$ при $n = \frac{1}{2i+1}$ приводится к рассмотренному в § 122 (I т.), при $n = \frac{-1}{2i}$ —к рассмотренному в § 123 [Л. Ш.].

и, выполняя интегрирование, найдем

$$y=\frac{ap^2+bp}{\sqrt{1+p^2}}-a\sqrt{1+p^2}-b\,l\,\frac{p+\sqrt{1+p^2}}{n},$$

либо, иначе,

$$y=\frac{bp-a}{\sqrt{1+p^2}}-b\,l\,\frac{p+\sqrt{1+p^2}}{n}.$$

Таким образом, оба переменных x и y выражаются через p. А так как из полученного выше следует, что

$$p=\frac{ab+x\sqrt{a^2+b^2-x^2}}{x^2-a^2}$$

и

$$\sqrt{1+p^2}=\frac{bx+a\sqrt{a^2+b^2-x^2}}{x^2-a^2},$$

то после подстановки этих значений найдем

$$y=\frac{a\,(a^2+b^2-x^2)+bx\sqrt{a^2+b^2-x^2}}{bx+a\sqrt{a^2+b^2-x^2}}-b\,l\,\frac{b+\sqrt{a^2+b^2-x^2}}{n\,(x-a)}$$

или, иначе,

$$y=\sqrt{a^2+b^2-x^2}-b\,l\,\frac{b+\sqrt{a^2+b^2-x^2}}{n\,(x-a)}.$$

СЛЕДСТВИЕ

760. Если принять постоянное b, которое вводит первое интегрирование, равным нулю, то зависимость между x и y будет алгебраической, а именно $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Если же b не равно нулю, то интегральное уравнение является трансцендентным и содержит логарифмы.

ПРИМЕР 3

761. *Определить соотношение между x и y, если, полагая dx постоянным, имеем*

$$a^2d^2y\sqrt{a^2+x^2}+a^2\,dx\,dy=x^2\,dx^2.$$

Полагая $dy=p\,dx$, получим уравнение в виде

$$a^2\,dp\sqrt{a^2+x^2}+a^2\,p\,dx=x^2\,dx,$$

либо в виде

$$dp+\frac{p\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x^2\,dx}{a^2\sqrt{a^2+x^2}},$$

в которое переменное p входит только в первом измерении. Так как

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right),$$

это уравнение становится интегрируемым после умножения на $x+\sqrt{a^2+x^2}$, и тогда получаем

$$p\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)=\int\frac{x^2\,dx\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}{a^2\sqrt{a^2+x^2}},$$

то есть

$$p\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{x^3}{3a^2}.$$

Но

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{3}(x^2-2a^2)\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

Отсюда

$$p\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)=\frac{(x^2-2a^2)\sqrt{a^2+x^2}+x^3}{3a^2}+C.$$

Умножая последнее равенство на $\sqrt{a^2+x^2}-x$, что дает нам

$$a^2p=\frac{-x^2-2a^2+2x\sqrt{a^2+x^2}}{3}+C\sqrt{a^2+x^2}-Cx,$$

и учитывая, что $dy=p\,dx$, после интегрирования получаем

$$a^2y=-\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}a^2x+\frac{2}{9}(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{1}{2}Cx^2+C\int dx\sqrt{a^2+x^2}.$$

Если постоянное C исчезает, зависимость между x и y будет алгебраической, а именно:

$$9a^2y+6a^2x+x^3=2(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}.$$

ПРИМЕР 4

762. *Полагая dx постоянным, найти интеграл следующего дифференциального уравнения второго порядка:*

$$(a^2\,dy^2+x^2\,dx^2)\,d^2y=n\,x\,dx^3\,dy.$$

Имеем $dy=p\,dx$ и, так как $d^2y=dp\,dx$, получаем

$$(a^2p^2+x^2)\,dp=n\,px\,dx.$$

Поскольку это уравнение является однородным, мы полагаем $x=pu$, и, следовательно,

$$p^2(a^2+u^2)\,dp=np^2u\,(p\,du+u\,dp),$$

или же

$$\frac{dp}{p}=\frac{nu\,du}{a^2+(1-n)\,u^2},$$

и это после интегрирования дает нам

$$lp=\frac{n}{2(1-n)}\,l\,[a^2+(1-n)\,u^2]+\text{Const}.$$

Отсюда следует, что

$$p=C\,[a^2+(1-n)\,u^2]^{\frac{n}{2(1-n)}}$$

а также

$$x = Cu\,[a^2 + (1-n)\,u^2]^{\frac{n}{2(1-n)}}.$$

Поскольку мы теперь получаем

$$y = px - \int x\,dp \quad \text{и} \quad dp = Cnu\,du\,[a^2 + (1-n)\,u^2]^{\frac{3n-2}{2(1-n)}},$$

будем иметь

$$y = C^2 u\,[a^2 + (1-n)\,u^2]^{\frac{n}{1-n}} - nC^2 \int u^2\,du\,[a^2 + (1-n)\,u^2]^{\frac{2n-1}{1-n}}.$$

В том случае, когда $n = 1$, мы находим

$$lp = \frac{u^2}{2a^2} + C \quad \text{и} \quad u = a\sqrt{2\,l\,\frac{p}{c}},$$

откуда

$$x = ap\sqrt{2\,l\,\frac{p}{c}} \quad \text{и} \quad y = ap^2\sqrt{2\,l\,\frac{p}{c}} - a\int p\,dp\sqrt{2\,l\,\frac{p}{c}}.$$

СЛЕДСТВИЕ

763. При $n = \frac{1}{2}$ получаем

$$x = Cu\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}u^2}$$

и

$$y = C^2u\left(a^2 + \frac{1}{2}u^2\right) - \frac{C^2u^3}{6} + D = C^2u\left(a^2 + \frac{1}{3}u^2\right) + D,$$

так что зависимость между x и y выражается алгебраически, и это же будет иметь место при $n = \frac{2}{3}$, и при $n = \frac{3}{4}$, и при $n = \frac{4}{5}$ и т. д.

ПРИМЕР 5

764. *Полагая dx постоянным, проинтегрировать дифференциальное уравнение второго порядка*

$$a\,dx\,dy^2 + x^2 dx\,d^2y = nx\,dy\sqrt{dx^4 + a^2d^2y^2}.$$

Принимая во внимание, что $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, так что $d^2y = q\,dx^2$, мы можем привести наше уравнение к виду

$$ap^2 + qx^2 = npx\sqrt{1 + a^2q^2},$$

однородному относительно p и x. Поэтому мы положим $p = ux$, так что

$$au^2 + q = nu\sqrt{1 + a^2q^2}.$$

А так как

$$dp = q\,dx = u\,dx + x\,du,$$

мы получаем, что

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{q-u}.$$

Из уравнения относительно q и u следует, что

$$q = \frac{au^2 + nu\sqrt{1 - n^2a^2u^2 + a^4u^4}}{n^2a^2u^2 - 1}$$

и

$$q - u = \frac{u(1 + au - n^2a^2u^2) + nu\sqrt{1 - n^2a^2u^2 + a^4u^4}}{n^2a^2u^2 - 1},$$

так что

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} \cdot \frac{n^2a^2u^2 - 1}{1 + au - n^2a^2u^2 + n\sqrt{1 - n^2a^2u^2 + a^4u^4}}.$$

Следовательно, x выражается через u, а значит, также и $p = ux$ выражается через u. Отсюда мы получаем

$$y = \int p\,dx = \int ux\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

765. Рассмотренное дифференциальное уравнение преобразуется в уравнение

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}\,\frac{1 + au - n^2a^2u^2 - n\sqrt{1 - n^2a^2u^2 + a^4u^4}}{n^2 - 1 - 2au + (n^2 - 1)a^2u^2}.$$

Отсюда легче усмотреть способ интегрирования.

СЛЕДСТВИЕ 2

766. Заслуживает быть отмеченным случай $n^2 = 2$, когда имеем

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}\,\frac{1 + au - 2a^2u^2 - (1 - a^2u^2)\sqrt{2}}{(1 - au)^2},$$

то есть

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}\,\frac{1 + 2au - (1 + au)\sqrt{2}}{1 - au} = \frac{du\,(1 - \sqrt{2})}{u} + \frac{a\,du\,(3 - 2\sqrt{2})}{1 - au},$$

откуда следует:

$$lx = (1 - \sqrt{2})\,lu - (3 - 2\sqrt{2})\,l(1 - au) + \mathrm{Const},$$

либо, иначе,

$$xu^{\sqrt{2}-1}(1 - au)^{3 - 2\sqrt{2}} = C.$$

ПРИМЕР 6

767. *Найти интеграл уравнения*

$$dx^3\,dy - x\,ds^2 d^2y = a\,dx\,ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2},$$

принимая постоянным элемент $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Полагая $dy = p\,dx$, будем иметь $ds = dx\sqrt{1 + p^2}$ и, так как $d^2s = 0$, получаем

$$d^2x = -\frac{p\,dp\,dx}{1 + p^2} = \frac{-pq\,dx^2}{1 + p^2},$$

принимая, что $dp = q\,dx$. Заодно находим, что

$$d^2y = pd^2x + dp\,dx = \frac{-p^2q\,dx^2}{1+p^2} + q\,dx^2 = \frac{q\,dx^2}{1+p^2},$$

вследствие чего

$$\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2} = \frac{q\,dx^2}{\sqrt{1+p^2}}.$$

После подстановки полученных выражений в наше уравнение мы приведем его к виду

$$p - qx = aq.$$

Продифференцировав последнее, найдем, что $-x\,dq = a\,dq$, следовательно, $dq = 0$ и $q = \frac{1}{c}$. Поэтому $p = \int q\,dx = \frac{x+a}{c}$, и то же самое значение мы получаем из уравнения $p = (x+a)\,q$ без интегрирования. Тогда

$$y = \int p\,dx = \frac{x^2+2ax}{2c} + b,$$

что является полным интегральным уравнением с двумя постоянными b и c.

ПРИМЕР 7

768. *Определить интеграл дифференциального уравнения второго порядка*

$$dx^3\,dy - x\,ds^2d^2y = \frac{b\,dx^4\,ds^2\,d^2x}{\sqrt{dx^8 + a^2ds^4\,(d^2y)^2}},$$

принимая элемент $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ *постоянным.*

Полагая $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, мы получаем вследствие того, что $ds = dx\sqrt{1+p^2}$ и $d^2s = 0$,

$$d^2x = \frac{-pq\,dx^2}{1+p^2} \quad \text{и} \quad d^2y = \frac{-dx\,d^2x}{dy} = \frac{-d^2x}{p} = \frac{q\,dx^2}{1+p^2}.$$

Следовательно, $ds^2d^2y = q\,dx^4$, и наше уравнение получается в виде

$$p - qx = \frac{bq}{\sqrt{1+a^2q^2}}.$$

Дифференцируя, будем иметь

$$-x\,dq = \frac{b\,dq}{(1+a^2q^2)^{3/2}}.$$

Отсюда мы заключаем, что либо $dq = 0$, либо

$$x = \frac{-b}{(1+a^2q^2)^{3/2}}.$$

В первом случае $q = \frac{1}{c}$ и $p = \frac{x}{c} + \frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}$, откуда

$$y = \int p\,dx = \frac{x^2}{2c} + \frac{bx}{\sqrt{c^2+a^2}} + f.$$

Во втором случае, когда $x = \frac{-b}{(1+a^2q^2)^{3/2}}$, получаем

$$p = \frac{-bq}{(1+a^2q^2)^{3/2}} + \frac{bq}{\sqrt{1+a^2q^2}} = \frac{a^2bq^3}{(1+a^2q^2)^{3/2}}.$$

А так как

$$dx = \frac{+3a^2bq\,dq}{(1+a^2q^2)^{3/2}},$$

то

$$dy = p\,dx = \frac{3a^4b^2q^4\,dq}{(1+a^2q^2)^4},$$

и после приведений

$$y = \frac{-\frac{1}{2}b^2q - a^2b^2q^3}{(1+a^2q^2)^3} + \frac{1}{2}b^2\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^3}.$$

Справедлива формула

$$\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^{n+1}} = \frac{q}{2n(1+a^2q^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^n}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^3} = \frac{q}{4(1+a^2q^2)^2} + \frac{3}{4}\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^2}$$

и

$$\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^2} = \frac{q}{2(1+a^2q^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dq}{1+a^2q^2} = \frac{q}{2(1+a^2q^2)} + \frac{1}{2a}\operatorname{Arctg} aq.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^3} = \frac{q}{4(1+a^2q^2)^2} + \frac{3q}{8(1+a^2q^2)} + \frac{3}{8a}\operatorname{Arctg} aq.$$

Поэтому

$$y = \frac{-b^2q(1+2a^2q^2)}{2(1+a^2q^2)^3} + \frac{b^2q}{8(1+a^2q^2)^2} + \frac{3b^2q}{16(1+a^2q^2)} + \frac{3b^2}{16a}\operatorname{Arctg} aq,$$

причем

$$x = \frac{-b}{(1+a^2q^2)^{3/2}}.$$

Отсюда следует, что

$$1 + a^2q^2 = \sqrt[3]{\frac{b^2}{x^2}},$$

и, таким образом, мы можем получить в явном виде зависимость между x и y. Впрочем, этот интеграл, как мы видели выше [§ 723], является только частным.

ЗАДАЧА 96

769. *Положим $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$; пусть дано некоторое уравнение относительно y, p и q, так что переменное x в него не входит; требуется найти интегральное уравнение, связывающее x и y.*

РЕШЕНИЕ

Поскольку $q = \frac{dp}{dx}$ и $dx = \frac{dy}{p}$, будем иметь $q = \frac{p\,dp}{dy}$. После подстановки в уравнение, связывающее y, p и q, вместо q его значения $\frac{p\,dp}{dy}$ получается дифференциальное уравнение первого порядка, содержащее только два переменных p и y, и следует пытаться решить это уравнение с помощью изложенных выше методов. После же того, как найдено интегральное уравнение, в которое входят p и y, из него либо p определяется через y, либо y определяется через p, с учетом того, как удобнее произвести следующее интегрирование. Если можно удобным образом определить y через p, так что y равняется некоторой функции одного p, которая будет P, то есть $y = P$, мы получим $dx = \frac{dP}{p}$, откуда $x = \int \frac{dP}{p} = \frac{P}{p} + \int \frac{P\,dp}{p^2}$. Если же можно удобнее определить p через y, так что $p = Y$, обозначая через Y некоторую функцию только от y, то, поскольку $dx = \frac{dy}{p}$, мы получим $x = \int \frac{dy}{Y}$. Если же нам не удается ни то, ни другое, мы, вводя новое переменное u, выражаем через него оба количества p и y, так что $p = U$ и $y = V$, причем U и V являются функциями только от u. Отсюда будем иметь $dx = \frac{dV}{U}$ и $x = \frac{dV}{U}$. Таким образом, с помощью двукратного интегрирования получаем полный интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 1

770. Согласно изложенному методу решение дифференциальных уравнений второго порядка приводит к дифференциальному уравнению первого порядка, и если решение последнего оказывается возможным, то тем самым оказывается возможным получить интеграл первого уравнения.

СЛЕДСТВИЕ 2

771. Если уравнение относительно y, p и q таково, что из него можно удобным образом получить значение q, так что q равняется функции только от y и p, которая пусть будет T, получим $p\,dp = T\,dy$, что является простым дифференциальным уравнением первого порядка.

СЛЕДСТВИЕ 3

772. Если же подобного рода преобразование не удается вследствие того, что буква q встречается в более высокой степени, либо находится под знаками радикалов, либо даже входит трансцендентно, получается дифференциальное уравнение первого порядка, но сложное, и оно должно быть исследовано с помощью методов, изложенных выше.

ПОЯСНЕНИЕ 1

773. Поскольку лишь в немногих случаях можно проинтегрировать дифференциальное уравнение первого порядка, полезно и здесь на них указывать и иллюстрировать такие случаи примерами. Вместе с тем и в остальных случаях следует рассматривать вопрос как решенный, поскольку самое большее, чего можно требовать при рассмотрении дифференциальных уравнений более высоких порядков, это то, чтобы их решение сводилось к решению уравнений низшего порядка. Ведь в Анализе те вопросы, которые предшествуют в порядке рассмотрения, систематически рассматриваются как разрешенные, даже если для этого многого не хватает, чтобы таким образом уменьшить количество

требований. Так, например, хотя мы еще очень далеки от того, чтобы быть в состоянии решать алгебраические уравнения всех степеней, поскольку до сих пор в наших силах решать уравнения степени не выше четвертой, однако в высшем Анализе мы считаем решение всех этих уравнений известным. И это нас даже не ограничивает, поскольку практически может быть достаточным приближенное решение, которое возможно с любой желательной точностью. Подобным же образом, поскольку мы изложили метод приближенного решения дифференциальных уравнений первого порядка, мы с полным основанием можем рассматривать всю эту проблему как целиком решенную, когда мы можем свести к ней решение дифференциальных уравнений высших порядков. Поэтому в настоящей второй части мы будем считать вопрос полностью исчерпанным, как только мы свели дифференциальное уравнение второго порядка к уравнению первого порядка.

ПОЯСНЕНИЕ 2

774. Итак, дифференциальные уравнения второго порядка, которые сводятся указанным образом к дифференциальным уравнениям первого порядка, образованы таким способом, что, полагая $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, мы устраняем из них переменное x и получаем уравнение относительно только трех переменных y, p и q. Следовательно, те случаи, когда подобное уравнение оказывается возможным решить, суть двух родов, причем к первому из них мы отнесем случаи, когда в уравнение q входит в первом измерении, так что q можно приравнять некоторой функции только от y и p. Поскольку, таким образом, имеем $q = \frac{p\,dp}{dy} = f(y, p)$[1], каковую функцию обозначим через T, то решение удается: 1) если T есть однородная функция первого измерения от y и p; 2) если получаем $T = \frac{P}{y+Q}$, обозначая через P и Q некоторые функции только от p, откуда следует

$$P\,dy = y\,pd\,p + Qp\,dp.$$

Сюда же относится случай, когда

$$T = \frac{P}{y+Qy^n};$$

3) если имеем $T = p(Yp+Z)$, где Y и Z являются какими угодно функциями от y, потому что тогда уравнение

$$dp = Yp\,dy + Z\,dy$$

вследствие того, что p входит в него только в первом измерении, является интегрируемым, и сюда же надо отнести тот случай, когда

$$T = p(Yp + Zp^n).$$

Что касается случаев второго рода, когда величина q входит в более высоком измерении, или находится под знаками радикалов, или даже входит трансцендентным образом, то уравнение относительно y, p и q оказывается разрешимым: 1) если, положив $q = pu$, так что будем

[1]) Обозначение Эйлера: $f:(y$ и $p)$.

иметь $u=\frac{dp}{dy}$, получаем однородное уравнение относительно y и p, т. е. такое, в котором y и p везде дают одно и то же число измерений, как бы, впрочем, ни входило в уравнение u; 2) если в уравнение между y, p и u, которое получается после подстановки $q=pu$, одно из двух переменных — либо y, либо p — входит в первом измерении; 3) если, полагая $y=v^{\mu}$, $p=z^{\mu+\nu}$ и $u=t^{\nu}$, получаем однородное уравнение относительно трех переменных v, z и t; ведь решение подобного рода уравнений было изложено выше [§ 698, т. I].

ПРИМЕР 1

775. *Найти полный интеграл дифференциального уравнения второго порядка*

$$d^2y+A\,dx\,dy+By\,dx^2=0,$$

полагая элемент dx постоянным.

Полагая $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$, мы получим наше уравнение в виде

$$q+Ap+By=0,$$

или

$$p\,dp+Ap\,dy+By\,dy=0.$$

Так как последнее уравнение однородное, полагаем $p=vy$ и получим

$$v^2y\,dy+vy^2\,dv+Avy\,dy+By\,dy=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{y}+\frac{v\,dv}{v^2+Av+B}=0.$$

Пусть $v^2+Av+B=(v+\alpha)(v+\beta)$, так что $\alpha+\beta=A$ и $\alpha\beta=B$. Будем иметь

$$\frac{dy}{y}+\frac{\alpha\,dv}{(\alpha-\beta)(v+\alpha)}-\frac{\beta\,dv}{(\alpha-\beta)(v+\beta)}=0.$$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$ly+\frac{\alpha}{\alpha-\beta}l(v+\alpha)-\frac{\beta}{\alpha-\beta}l(v+\beta)=C,$$

то есть

$$y=a(v+\beta)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}(v+\alpha)^{\frac{-\alpha}{\alpha-\beta}},$$

так что

$$p=vy=av(v+\beta)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}(v+\alpha)^{\frac{-\alpha}{\alpha-\beta}}.$$

Вместе с тем

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{dy}{vy},$$

откуда вследствие того, что $\frac{dy}{y}=\frac{-v\,dv}{v^2+Av+B}$, получаем

$$dx=\frac{-dv}{v^2+Av+B}=\frac{dv}{(\alpha-\beta)(v+\alpha)}-\frac{dv}{(\alpha-\beta)(v+\beta)}$$

и

$$x=\frac{1}{\alpha-\beta}l\frac{v+\alpha}{v+\beta}+\text{Const}.$$

Правда, это решение может быть легче получено следующим образом. Так как мы имеем

$$\frac{dy}{y}=\frac{-v\,dv}{(v+\alpha)(v+\beta)} \quad \text{и} \quad dx=\frac{-dv}{(v+\alpha)(v+\beta)},$$

то

$$\frac{dy}{y}+\alpha\,dx=\frac{-dv}{v+\beta} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{y}+\beta\,dx=\frac{-dv}{v+\alpha},$$

откуда

$$ly+\alpha x=la-l(v+\beta), \quad ly+\beta x=lb-l(v+\alpha).$$

Следовательно,

$$v+\beta=\frac{a}{y}e^{-\alpha x} \quad \text{и} \quad v+\alpha=\frac{b}{y}e^{-\beta x},$$

так что получаем

$$\alpha-\beta=\frac{1}{y}(be^{-\beta x}-ae^{-\alpha x}),$$

а отсюда, изменяя постоянные

$$y=\mathfrak{A}e^{-\alpha x}+\mathfrak{B}e^{-\beta x},$$

причем такое интегрирование применимо тогда, когда α и β суть вещественные и неравные количества. Так как мы положили

$$v^2+Av+B=(v+\alpha)(v+\beta),$$

то

$$\alpha=\frac{1}{2}A+\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}, \quad B=\frac{1}{2}A-\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}.$$

Таким образом, в соответствии с тем, будет ли выражение $\frac{1}{4}A^2-B$ положительным, отрицательным или исчезающим, следует рассмотреть три случая:

1) Пусть $\frac{1}{2}A=m$ и $\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}=n$, тогда полный интеграл предложенного уравнения есть

$$y=\mathfrak{A}e^{-(m+n)x}+\mathfrak{B}e^{-(m-n)x}=e^{-mx}(\mathfrak{A}e^{-nx}+\mathfrak{B}e^{nx}).$$

2) Пусть $\frac{1}{2}A=m$ и $\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}=n\sqrt{-1}$; так как

$$e^{nx\sqrt{-1}}=\cos nx+\sqrt{-1}\sin nx$$

и

$$e^{-nx\sqrt{-1}}=\cos nx-\sqrt{-1}\sin nx,$$

то, меняя постоянные, получаем

$$y=e^{-mx}(\mathfrak{B}\cos nx+\mathfrak{D}\sin nx)=\mathfrak{C}e^{-mx}\cos(nx+\mathfrak{n}).$$

3) Пусть $\frac{1}{2}A=m$ и $\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}=0$, т. е. соответственно первому случаю пусть $n=0$; так как $e^{-nx}=1-nx$ и $e^{nx}=1+nx$ [1]), получаем

$$y=e^{-mx}(\mathfrak{B}+\mathfrak{D}x).$$

---

[1]) Конечно, эти равенства — приближенные и представляют разложение по степеням бесконечно малой величины nx, оборванное на членах первой степени.

СЛЕДСТВИЕ 1

776. Итак, для нахождения интеграла предложенного уравнения надлежит исследовать корни уравнения $v^2+Av+B=0$, и, когда последние найдены, легко указать полный интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 2

777. Рассмотренное квадратное уравнение $v^2+Av+B=0$ имеет замечательную аналогию с предложенным уравнением

$$d^2y+A\,dy\,dx+By\,dx^2=0,$$

из которого оно получается, если вместо y, $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ писать 1, v, v^2.

СЛЕДСТВИЕ 3

778. Если, образовав указанное алгебраическое уравнение v^2+Av+ $+B=0$, мы определили его множитель $v+\alpha$, мы можем сразу по этому множителю получить частный интеграл $y=\mathfrak{A}e^{-\alpha x}$, и подобным же образом второй множитель $v+\beta$ дает частный интеграл $y=\mathfrak{B}e^{-\beta x}$, а объединяя эти интегралы, получаем полный интеграл $y=\mathfrak{A}e^{-\alpha x}+\mathfrak{B}e^{-\beta x}$.

ПОЯСНЕНИЕ

779. Ниже[1]) излагается более легкий метод для того же типа дифференциальных уравнений второго порядка, который к тому же применим к уравнениям вида

$$d^2y+P\,dy\,dx+Q\,dx^2=0,$$

где P и Q суть какие угодно функции от x, и этот метод распространяется даже на уравнения вида

$$d^2y+P\,dy\,dx+Q\,dx^2=X\,dx^2,$$

где через X обозначена произвольная функция от x. Этот метод основан на том обстоятельстве, что в уравнениях указанного типа переменное y вместе со своими дифференциалами dy и d^2y везде входит в первом измерении или даже в нулевом, и, используя это обстоятельство, решение можно свести к решению уравнения первого порядка, а тем самым задачу следует рассматривать как завершенную. Но, хотя таким образом дифференциальное уравнение второго порядка сводится к дифференциальному уравнению первого порядка, следует все же предостеречь от того, чтобы это сведение принимать за интегрирование, ибо это сведение произведено только с помощью подходящей подстановки, а если хотим получить полный интеграл, то два интегрирования по-прежнему следует еще произвести, и при этом будет введено столько же произвольных постоянных. Все это мы ясно видим в последнем примере и в предшествующих.

[1]) См. гл. IV.

ПРИМЕР 2

780. *Предложено дифференциальное уравнение второго порядка*

$$ab\,d^2y = dx\sqrt{y^2\,dx^2 + a^2\,dy^2}.$$

Определить его интеграл.

Если положить $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, это уравнение переходит в следующее:

$$abq = \sqrt{y^2 + a^2p^2} = \frac{abp\,dp}{dy} \qquad \left(\text{так как } q = \frac{p\,dp}{dy}\right).$$

Так как это уравнение однородно, мы полагаем $p = \frac{y}{u}$ и получаем

$$y\,dy\sqrt{1 + \frac{a^2}{u^2}} = \frac{aby}{u^3}(u\,dy - y\,du),$$

или

$$u^2\,dy\sqrt{a^2 + u^2} = abu\,dy - aby\,du,$$

откуда

$$\frac{dy}{y} = \frac{ab\,du}{abu - u^2\sqrt{a^2 + u^2}}.$$

Полагая $\sqrt{a^2 + u^2} = su$, получим $u^2 = \frac{a^2}{s^2 - 1}$,

$$\frac{du}{u} = \frac{-s\,ds}{s^2 - 1} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{y} = \frac{-bs\,ds}{bs^2 - as - b} = \frac{-s\,ds}{s^2 - 2ns - 1},$$

если обозначим $\frac{a}{b}$ через $2n$. Итак,

$$\frac{2dy\sqrt{n^2+1}}{y} = \frac{-ds\,(n + \sqrt{n^2+1})}{s - n - \sqrt{n^2+1}} + \frac{ds\,(n - \sqrt{n^2+1})}{s - n + \sqrt{n^2+1}},$$

откуда

$$y^{2\sqrt{n^2+1}} = \frac{C\,(s - n + \sqrt{n^2+1})^{n - \sqrt{n^2+1}}}{(s - n - \sqrt{n^2+1})^{n + \sqrt{n^2+1}}}.$$

Следовательно, y выражается через s, так что мы положим $y = S$, и отсюда получаем

$$u = \frac{a}{\sqrt{s^2 - 1}} \quad \text{и} \quad p = \frac{S\sqrt{s^2 - 1}}{a},$$

а также

$$dx = \frac{a\,dS}{S\sqrt{s^2 - 1}}, \quad \text{то есть } dx = \frac{-as\,ds}{(s^2 - 2ns - 1)\sqrt{s^2 - 1}}.$$

Эту формулу можно привести к рациональному виду и проинтегрировать с помощью логарифмов или круговых функций [1])

[1]) Arcus circulares, т. е. дуг окружности.

ПРИМЕР 3

781. *Найти интеграл уравнения*

$$\frac{(p^2+y^2)\sqrt{p^2+y^2}}{2p^2+y^2-qy}=ny,$$

полагая $dy=p\,dx$ *и* $dp=q\,dx$.

Так как $q=\frac{p\,dp}{dy}$, получаем

$$dy\,(p^2+y^2)\sqrt{p^2+y^2}=2np^2y\,dy+ny^3\,dy-ny^2p\,dp.$$

Вследствие однородности этого уравнения полагаем $p=uy$ и получаем

$$y^3dy\,(u^2+1)^{3/2}=2nu^2y^3\,dy+ny^3\,dy-nu^2y^3\,dy-nuy^4\,du,$$

откуда находим

$$\frac{dy}{y}=\frac{-nu\,du}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}-nu^2-n}=\frac{nu\,du}{(u^2+1)(n-\sqrt{u^2+1})},$$

так что y определяется через u. Поэтому мы определяем через u величину $p=uy$ и находим

$$dx=\frac{dy}{uy}=\frac{n\,du}{(u^2+1)(n-\sqrt{u^2+1})}.$$

В том случае, когда $n=1$, получаем

$$\frac{dy}{y}=\frac{-u\,du}{(u^2+1)(\sqrt{u^2+1}-1)}=\frac{-du\,(1+\sqrt{u^2+1})}{u\,(u^2+1)}$$

и

$$dx=\frac{-du\,(1+\sqrt{u^2+1})}{u^2\,(u^2+1)}.$$

А так как

$$\int\frac{du}{u\,(u^2+1)}=l\,\frac{u}{\sqrt{u^2+1}},\quad\int\frac{du}{u^2(u^2+1)}=-\frac{1}{u}-\operatorname{Arctg}u,$$

$$\int\frac{du}{u\sqrt{u^2+1}}=l\,\frac{\sqrt{u^2+1}-1}{u},\quad\int\frac{du}{u^2\sqrt{u^2+1}}=-\frac{\sqrt{u^2+1}}{u},$$

то отсюда находим

$$y=\frac{C\sqrt{u^2+1}}{\sqrt{u^2+1}-1}=C\left(1+\frac{1}{\sqrt{u^2+1}-1}\right)$$

и

$$x=D+\frac{1+\sqrt{u^2+1}}{u}+\operatorname{Arctg}u.$$

Отсюда находим

$$\sqrt{u^2+1}=\frac{y}{y-a}\quad\text{и}\quad u=\frac{\sqrt{2ay-a^2}}{y-a},$$

так что

$$x=D+\sqrt{\frac{2y-a}{a}}+\operatorname{Arccos}\frac{y-a}{a};$$

эти формулы, вводя угол φ, косинус которого равен $\frac{y-a}{a}$, можно более удобным образом представить в виде

$$y = \frac{a}{1-\cos\varphi} \quad \text{и} \quad x = \zeta + \varphi + \cot\frac{\varphi}{2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

782. Из уравнения с разделенными переменными, которое мы сначала получили, найдем частное решение, полагая u равным такому постоянному количеству, чтобы исчезал знаменатель, т. е. полагая $u = \sqrt{n^2-1}$, отсюда $p = y\sqrt{n^2-1}$ и $dx\sqrt{n^2-1} = \frac{dy}{y}$, что дает

$$ly = la + x\sqrt{n^2-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

783. Тогда, когда $n=1$, в отмеченном частном случае оказывается, что $y=a$, при любом значении второго переменного; действительно, при этом $u=0$, отсюда следует, что и $p=0$, и уравнение $dy = p\,dx$ не определяет количество x.

ПОЯСНЕНИЕ

784. Если y обозначает радиус-вектор, проведенный из фиксированной точки к некоторой кривой, и x — угол, который образует этот радиус с некоторой вполне определенной прямой, то формула

$$\frac{(p^2+y^2)\sqrt{p^2+y^2}}{2p^2+y^2-qy}$$

выражает радиус кривизны этой кривой. Таким образом, в рассмотренном примере мы ищем кривую, обладающую тем свойством, что ее радиус кривизны равен величине ny, и в том случае, когда $n=1$, мы нашли решение в виде $y=a$, т. е. при такой постановке вопроса мы получаем окружность. То же можно получить и из интегрального уравнения $y = \frac{C\sqrt{u^2+1}}{\sqrt{u^2+1}-1}$, если положить постоянное C равным нулю. Тогда необходимо принять, что $u=0$ и $p=0$, так что угол x не определяется. Кроме окружности [уравнению] удовлетворяет также бесконечное множество других кривых. Так, если $n>1$, частное решение $ly = la + x\sqrt{n^2-1}$ дает логарифмическую спираль, кроме которой решениями являются и другие кривые в бесконечном числе. В тех же случаях, когда $n<1$, нет ни одного частного решения такого типа, а следует фактически проинтегрировать выражения для $\frac{dy}{y}$ и dx.

ПРИМЕР 4

785. *Полагая $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, найти такое соотношение между x и y, чтобы*

$$\frac{(p^2+y^2)\sqrt{p^2+y^2}}{2p^2+y^2-qy} = a.$$

Поскольку $q=\frac{p\,dp}{dy}$, полагаем $p^2+y^2=z^2$ и, так как $p\,dp=q\,dy$, мы получим

$$q\,dy+y\,dy=z\,dz, \text{ то есть } q+y=\frac{z\,dz}{dy}.$$

Предложенное уравнение преобразуется к следующему виду:

$$z^3=a(2z^2-y^2-qy)=a\left(2z^2-\frac{yz\,dz}{dy}\right),$$

или

$$z^2\,dy=2az\,dy-ay\,dz,$$

откуда

$$\frac{dy}{y}=\frac{a\,dz}{2az-z^2}, \text{ то есть } \frac{2dy}{y}=\frac{dz}{z}+\frac{dz}{2a-z}.$$

Интегрируя, мы находим

$$y^2=\frac{Cz}{2a-z} \quad \text{и} \quad p^2=z^2-\frac{Cz}{2a-z}=\frac{-Cz+2az^2-z^3}{2a-z}.$$

Так как $z=\frac{2ay^2}{C+y^2}$, то

$$p^2=\frac{4a^2y^4}{(C+y^2)^2}-y^2=\frac{y^2\,[4a^2y^2-(C+y^2)^2]}{(C+y^2)^2}.$$

Отсюда мы получаем

$$dx=\frac{(C+y^2)\,du}{y\sqrt{4a^2y^2-(C+y^2)^2}},$$

и, обозначая y^2 через u, будем иметь

$$dx=\frac{(C+u)\,du}{2u\sqrt{4a^2u-(C+u)^2}}.$$

Чтобы облегчить решение этого уравнения, мы положим

$$u=2a^2-C+2a\cos(\varphi\sqrt{a^2-C}),$$

так что

$$dx=\frac{-a\,d\varphi\,[a+\cos(\varphi\sqrt{a^2-C})]}{2a^2-C+2a\cos(\varphi\sqrt{a^2-C})}$$

или

$$2dx=-d\varphi-\frac{C\,d\varphi}{2a^2-C+2a\cos(\varphi\sqrt{a^2-C})}$$

После интегрирования получаем

$$2x=\zeta-\varphi-\operatorname{Arccos}\frac{m+\cos\varphi}{1+m\cos\varphi},$$

где мы положили $m=\frac{2a\sqrt{a^2-C}}{2a^2-C}$, и поэтому

$$C=\frac{2a^2\sqrt{1-m^2}}{1+\sqrt{1-m^2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2-C}=\frac{ma}{1+\sqrt{1-m^2}}.$$

Отсюда

$$y^2=\frac{2a^2(1+m\cos\varphi)}{1+\sqrt{1-m^2}},$$

так что мы получаем

$$\cos\varphi = \frac{y^2\,(1+\sqrt{1-m^2})-2a^2}{2ma^2}$$

и

$$\frac{m+\cos\varphi}{1+m\cos\varphi} = \frac{y^2\,(1+\sqrt{1-m^2})-2a^2\,(1-m^2)}{my^2\,(1+\sqrt{1-m^2})}$$

СЛЕДСТВИЕ 1

786. Так как $y^2 = \dfrac{2a^2\,(1+m\cos\varphi)}{1+\sqrt{1-m^2}}$, то

$$y^2 = a^2+b^2+2ab\cos\varphi,$$

если мы положим $b = \dfrac{a\,(1-\sqrt{1-m^2})}{m}$, откуда

$$m = \frac{2ab}{a^2+b^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{1-m^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Таким образом,

$$2x = \zeta-\varphi-\operatorname{Arccos}\frac{2ab+(a^2+b^2)\cos\varphi}{a^2+b^2+2ab\cos\varphi},$$

то есть

$$2x = \zeta-\varphi-\operatorname{Arcsin}\frac{(a^2+b^2)\sin\varphi}{y^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

787. Если радиус-вектор y и угол x относятся к кривой, как выше, то эта кривая должна быть окружностью, описанной радиусом $=a$. Действительно, тогда как $y^2 = a^2+b^2-2ab\cos\varphi$, имеем $dx = \dfrac{d\varphi\,(a^2-ab\cos\varphi)}{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$, отсюда следует, что

$$x = \zeta+\operatorname{Arctg}\frac{a\sin\varphi}{a\cos\varphi-b}$$

и геометрическое применение этого соотношения делает вопрос очевидным.

ПРИМЕР 5

788. *Пусть предложено уравнение*

$$d^2y\,(y\,dy+a\,dx) = dy\,(dx^2+dy^2);$$

принимая элемент dx постоянным, найти его интеграл.

Положив $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, мы получаем

$$q\,(py+a) = p\,(1+p^2).$$

Так как $q = \dfrac{p\,dp}{dy}$, будем иметь

$$dp\,(py+a) = dy\,(1+p^2)$$

или

$$dy-\frac{py\,dp}{1+p^2} = \frac{a\,dp}{1+p^2}.$$

Интегрирование дает нам

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}+b,$$

откуда

$$y=ap+b\sqrt{1+p^2}$$

и

$$x=\int\frac{dy}{p}=alp+bl(p+\sqrt{1+p^2})+C.$$

Таким образом x и y выражаются через одно и то же переменное p. Если принять постоянное $b=0$, получаем частный интеграл

$$y=ap \text{ и } x=alp+C=al\frac{y}{a}+C,$$

или в показательных функциях $y=Ce^{x/a}$. Если же принять $b=a$, то, учитывая, что

$$p+\sqrt{1+p^2}=\frac{y}{a} \quad\text{и}\quad p=\frac{y^2-a^2}{2ay},$$

получим

$$x=al\frac{y^2-a^2}{2a^2}+C,$$

или

$$y^2=a^2+Ce^{x/a}.$$

ПРИМЕР 6

789. *Найти интеграл дифференциального уравнения второго порядка*

$$dy^2-y\,d^2y=n\sqrt{dx^2dy^2+a^2(d^2y)^2},$$

полагая dx *постоянным.*

Пусть $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$. Тогда имеем

$$p^2-qy=n\sqrt{p^2+a^2q^2}$$

и, полагая здесь $q=pu$, так что $\frac{p\,dp}{dy}=pu$, откуда $dp=u\,dy$, получим это уравнение в виде

$$p^2-puy=np\sqrt{1+a^2u^2}$$

или

$$p-uy=n\sqrt{1+a^2y^2}.$$

Дифференцируя это уравнение и принимая во внимание, что $dp=u\,dy$, находим

$$-y\,du=\frac{na^2u\,du}{\sqrt{1+a^2u^2}}.$$

Отсюда или $du=0$, или $y=\frac{-na^2u}{\sqrt{1+a^2u^2}}$.

1) В том случае, когда $du=0$, получаем $u=\alpha$, $p=\alpha y+\beta$ и $dx=\frac{dy}{\alpha y+\beta}$, откуда $\alpha x=l(\alpha y+\beta)+C$.

2) Если $y = \frac{-na^2u}{\sqrt{1+a^2u^2}}$, будем иметь

$$p = uy + n\sqrt{1+a^2u^2} = \frac{n}{\sqrt{1+a^2u^2}}.$$

Таким образом,

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{-a^2\,du}{1+a^2u^2} \qquad \text{и} \quad x = -a \operatorname{arctg} au + C.$$

Так как $u = \frac{y}{a\sqrt{n^2a^2-y^2}}$, получаем искомое уравнение относительно x и y в виде

$$\frac{b-x}{a} = \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{n^2a^2-y^2}} = \arcsin \frac{y}{na},$$

откуда

$$y = na \sin \frac{b-x}{a}.$$

Однако это соотношение следует рассматривать только как частный интеграл.

ГЛАВА III

ОБ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ОБ УРАВНЕНИЯХ, КОТОРЫЕ ПРИВОДЯТСЯ К ТАКОМУ ВИДУ

ЗАДАЧА 97

790. *Выяснить природу однородных дифференциальных уравнений второго порядка и привести их к конечному виду, полагая*

$$dy = p\,dx \text{ и } dp = q\,dx.$$

РЕШЕНИЕ

Принимая постоянным элемент dx, мы будем называть дифференциальное уравнение второго порядка, записанное обычным образом, однородным, если, считая не только сами переменные x и y, но также и их дифференциалы dx и dy, а равно и d^2y имеющими первое измерение, мы получим уравнение, все члены которого одного и того же измерения, как, например, уравнение

$$x^2\,d^2y + x\,dx^2 + y\,dy^2 = 0,$$

где каждый член третьего измерения. Поэтому, если мы положим $\frac{dy}{dx} = p$, а также $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = q$, то следует считать букву p нулевого измерения, а букву q надо считать имеющей измерение, равное минус единице. Поэтому дифференциальное уравнение второго порядка, приведенное к принятой нами здесь форме, когда оно содержит только конечные количества x, y, p и q, будет однородным, если, приписывая буквам x и y первое измерение, а букве p нулевое, тогда как букве q приписывается измерение, равное минус единице, мы получим в каждом члене уравнения одно и то же измерение. Наоборот, всякий раз, когда будет иметь место такое свойство в уравнении относительно четырех количеств x, y, p и q, это уравнение будет однородным, и эта однородность будет вполне очевидной, если такое уравнение записано в обычном виде.

СЛЕДСТВИЕ 1

791. Итак, если в таком однородном уравнении относительно x, y, p и q мы произведем замену $y=ux$ и $q=\frac{v}{x}$, то все члены будут содержать x в одной и той же степени, и после сокращения на эту степень мы получим уравнение, содержащее только три переменные u, v и p.

СЛЕДСТВИЕ 2

792. Следовательно, отличительный признак однородного уравнения относительно четырех количеств x, y, p и q состоит в том, что, полагая $y=ux$ и $q=\frac{v}{x}$, мы совершенно исключаем из расчета количество x.

СЛЕДСТВИЕ 3

793. Таким образом, выполнив ту подстановку, с помощью которой получается уравнение относительно трех количеств u, v и p, мы можем из него определить по желанию либо p через u и v, либо v через p и u, либо u через v и p.

ПОЯСНЕНИЕ

794. Мы определили понятие однородности для дифференциальных уравнений второго порядка таким же образом, каким мы его использовали в дифференциальных уравнениях первого порядка. Но в последних однородность можно было определять только по переменным x и y, поскольку дифференциалы, естественно, должны иметь одинаковое с ними измерение. В дифференциальных же уравнениях второго порядка, кроме самих переменных x и y, следует учитывать при подсчете измерений также и букву q, а именно ей надо приписать измерение, равное минус единице; буква же p, очевидно, в этот подсчет не входит, так как она, как бы она ни входила в уравнение, не нарушает однородности. Познать же природу однородных дифференциальных уравнений второго порядка имеет большое значение, так как их решение может быть сведено к решению дифференциальных уравнений первого порядка и, если последнее удается, то тем самым будут проинтегрированы исходные дифференциальные уравнения второго порядка. Более подробно мы это покажем при разборе следующей задачи.

ЗАДАЧА 98

795. *Предложено однородное дифференциальное уравнение второго порядка; свести его решение к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка.*

РЕШЕНИЕ

После приведения уравнения к принятой здесь форме, полагая $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$, так что получается уравнение относительно четырех конечных количеств x, y, p и q, следует положить $y=ux$ и $q=\frac{v}{x}$. Поскольку уравнение является однородным, мы полностью исключаем, таким образом, количество x и, следовательно, получаем уравнение относительно трех количеств u, v и p, из которого одно из этих количеств следует определить через два остальных. Теперь же, так как $dy = p\,dx$, будем иметь $u\,dx + x\,du = p\,dx$, а отсюда $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$. Затем вследствие того, что $dp = q\,dx$, будем иметь также $dp = \frac{v\,dx}{x}$, и поэтому $\frac{dx}{x} = \frac{dp}{v}$. Из этих двух значений для $\frac{dx}{x}$ мы получаем, что $\frac{du}{p-u} = \frac{dp}{v}$, или $v\,du = p\,dp - u\,dp$. Таким образом, если из нашего уравнения количество v определяется через p и u, мы получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно двух переменных p и u, и, если его интегрирование окажется в наших возможностях, так что p выразится через u, можно будет проинтегрировать и уравнение $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$, в котором переменные x и u разделены; следовательно, x будет выражено через u, и поэтому получаем $y = ux$; или же в полученном интеграле сразу вместо u подставим $\frac{y}{x}$ и найдем искомое уравнение между x и y.

СЛЕДСТВИЕ 1

796. Итак, все дело сводится к интегрированию этого простого дифференциального уравнения $v\,du = p\,dp - u\,dp$, и если это интегрирование можно выполнить с помощью изложенных выше правил, то тем самым будет проинтегрировано дифференциальное уравнение второго порядка.

СЛЕДСТВИЕ 2

797. Очевидно также, что решение уравнений указанного вида требует двойного интегрирования, и поэтому появятся два произвольных постоянных количества, что и даст нам полный интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 3

798. Если же интегрирование уравнения $v\,du = p\,dp - u\,dp$ не удается, все же мы извлекаем большую пользу из того, что мы свели к нему задачу, так как выше изложен общий метод приближенного определения интегралов всех дифференциальных уравнений первого порядка.

ПОЯСНЕНИЕ

799. Итак, является стоящим труда делом тщательно рассмотреть те случаи, когда уравнение $v\,du = p\,dp - u\,dp$ допускает интегрирование. По этой причине мы рассмотрим, каковой должна быть функция v, зависящая только от p и u, чтобы это имело место. Прежде всего, очевидно, что это уравнение проинтегрируется, если v будет однородной функцией первой степени от p и u, потому что тогда само это уравнение является однородным и может быть проинтегрировано с помощью изложенных выше правил. Затем интегрирование удастся также тогда, когда v есть любая функция только от p, потому что в этом случае второе переменное u имеет измерение не выше первого, и интегралом

уравнения $du+\frac{u\,dp}{v}=\frac{p\,dp}{v}$ будет

$$e^{\int\frac{dp}{v}}u=\int\frac{e^{\int\frac{dp}{v}}p\,dp}{v}.$$

В-третьих, завершить интегрирование возможно, если v является какой угодно функцией от количества $p-u$. Действительно, полагая $p-u=s$, так что v есть функция только от s, наше уравнение, так как $p=s+u$, получим в виде $v\,du=s\,ds+s\,du$, поэтому $du=\frac{s\,ds}{v-s}$ и $u=\int\frac{s\,ds}{v-s}$. Таким образом, это интегрирование сведено к применению простых формул. В-четвертых, наше уравнение $v\,du=s\,ds+s\,du$ (сохраняем обозначение $s=p-u$) может быть решено, если $v=s+\frac{Ps}{Qu+Ru^n}$, причем P, Q, R обозначают любые функции только от s. Действительно, тогда получаем уравнение $P\,du=Qu\,ds+Ru^n\,ds$. В-пятых, очевидно также, что если имеем $v=s+Vs^2+Us^n$, причем V и U обозначают какие угодно функции одного u, мы можем провести интегрирование, так как наше уравнение приводится к виду $Vs\,du+Us^{n-1}\,du=ds$. Да и вообще, если интегрируемым является дифференциальное уравнение $ds=Z\,du$, где Z есть функция двух переменных s и u, то, так как наше уравнение вида $s\,ds=(v-s)\,du$, мы получим во всех случаях, допускающих интегрирование, что $v=s+Zs$.

ПРИМЕР 1

800. *Пусть предложено дифференциальное уравнение*

$$x^2\,d^2y=x\,dx\,dy+ny\,dx^2;$$

принимая элемент dx постоянным, найти его интеграл.

Положим $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$. Получаем уравнение $qx^2=px+ny$, откуда, подставив $y=ux$, получим $qx=p+nu=v$, так что v является функцией первого измерения от p и u, и наше уравнение $(p+nu)du=$ $=p\,dp-u\,dp$ оказывается однородным. Итак, мы имеем $nu\,du+p\,du+$ $+u\,dp=p\,dp$ и, интегрируя, получим

$$C+nu^2+2pu=p^2$$

и

$$p=u+\sqrt{C+(n+1)u^2}.$$

Следовательно, получаем уравнение

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{\sqrt{C+(n+1)u^2}}$$

и, снова интегрируя, находим

$$lx=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,l\,\frac{u\sqrt{n+1}+\sqrt{C+(n+1)u^2}}{D},$$

или

$$Dx^{\sqrt{n+1}}=u\sqrt{n+1}+\sqrt{C+(n+1)u^2},$$

откуда следует

$$D^2x^{2\sqrt{n+1}}-2Dx^{\sqrt{n+1}}u\sqrt{n+1}=C.$$

Пусть $D=f\sqrt{n+1}$ и $C=g(n+1)$, так что мы получаем $f^2x^{2\sqrt{n+1}}-2fx^{\sqrt{n+1}}u=g$, причем $u=\frac{y}{x}$. В том случае, когда $n=-1$, вследствие того, что тогда $\frac{dx}{x}=\frac{du}{\alpha}$, получаем $\alpha l\frac{x}{a}=u=\frac{y}{x}$, откуда $y=\alpha xl\frac{x}{a}$. Если же $n+1$ является числом отрицательным, то интегрирование введет также углы.

СЛЕДСТВИЕ 1

801. Пусть $n=0$, тогда полным интегралом уравнения $x^2d^2y=x\,dx\,dy$ будет $f^2x^2-2fy=g$, каковой случай сам по себе является очевидным. Действительно, из $\frac{d^2y}{dy}=\frac{dx}{x}$ вытекает, что

$$\frac{dy}{dx}=fx \quad \text{и} \quad 2y=fx^2-\frac{g}{f}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

802. Пусть $n=3$, тогда полным интегралом уравнения $x^2d^2y=x\,dx\,dy+3y\,dx^2$ будет $f^2x^4-2fxy=g$. Мы получим то же самое, если вместо $\sqrt{n+1}$ подставим -2. Действительно,

$$\frac{f^2}{x^4}-\frac{2fy}{x^3}=g \quad \text{и} \quad f^2-2f\,xy=gx^4,$$

и в обоих случаях приходим к выражению

$$y=\frac{\alpha}{x}+\beta x^3.$$

ПРИМЕР 2

803. *Пусть предложено уравнение*

$$\frac{x^2\,d^2y}{dx}=\sqrt{mx^2\,dy^2+ny^2\,dx^2};$$

найти его полный интеграл, принимая элемент dx постоянным.

Так как $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$, мы получим уравнение

$$qx^2=\sqrt{mp^2x^2+ny^2},$$

которое после подстановки $y=ux$ с учетом того, что $q=\frac{v}{x}$, преобразуется к виду

$$qx=\sqrt{mp^2+nu^2}=v.$$

Так как $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=\frac{dp}{v}$, будем иметь

$$du\sqrt{mp^2+nu^2}=(p-u)\,dp,$$

что является однородным уравнением. Поэтому полагаем $p=su$ и получим

$$du\sqrt{ms^2+n}=(s-1)(s\,du+u\,ds).$$

Отсюда

$$\frac{du}{u}=\frac{(s-1)\,ds}{\sqrt{ms^2+n-s^2+s}}$$

и, следовательно,

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{(s-1)\,u}=\frac{ds}{\sqrt{ms^2+n-s^2+s}}\,.$$

Таким образом, как $u=\frac{y}{x}$, так и x определяются через одно и то же переменное s.

ПРИМЕР 3

804. *Пусть предложено уравнение*

$$nx^3d^2y=(y\,dx-x\,dy)^2;$$

найти его интеграл, принимая постоянным элемент dx.

Полагая $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$, мы получим [уравнение]

$$nx^3q=(y-px)^2=nx^2v$$

$\left(\text{так как } q=\frac{v}{x}\right)$. Если теперь сделать подстановку $y=ux$, будем иметь

$$nv=(u-p)^2 \quad \text{и} \quad \frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=\frac{dp}{v}=\frac{n\,dp}{(u-p)^2}\,,$$

откуда следует $n\,dp=p\,du-u\,du$. Это уравнение после подстановки $p-u=s$ переходит в [уравнение] $n\,du+n\,ds=s\,du$, или, иначе, $du=\frac{n\,ds}{s-n}$, откуда $u=nl\,\frac{s-n}{\alpha}$. А тогда вследствие того, что $p-u=s$, будем иметь

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{s}=\frac{n\,ds}{s\,(s-n)} \quad \text{и} \quad lx=l\,\frac{s-n}{\beta s}\,,$$

откуда

$$x=\frac{s-n}{\beta s} \quad \text{и} \quad y=nxl\,\frac{s-n}{\alpha}\,.$$

Так как мы получили, что $s=\frac{n}{1-\beta x}$, то

$$y=nxl\,\frac{n\beta x}{\alpha\,(1-\beta x)}\,.$$

СЛЕДСТВИЕ

805. Легче решить уравнение $nx^3q=(y-px)^2$, полагая $y-px=z$, откуда следует, что $-x\,dp=dz$. Поэтому, учитывая, что $q\,dx=dp$, получаем

$$nx^3\,dp=z^2\,dx=-nx^2\,dz,$$

и отсюда следует, что

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-\frac{n}{z} \quad \text{или} \quad \frac{x-a}{ax}=\frac{n}{y-px}\,.$$

Таким образом,

$$y-px=\frac{nax}{x-a}=\frac{y\,dx-x\,dy}{dx}\,.$$

Поэтому

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} = \frac{na\,dx}{x(x-a)} \quad \text{и} \quad \frac{y}{x} = nl\frac{x}{x-a} + C,$$

как выше.

ПРИМЕР 4

806. *Пусть предложено следующее уравнение:*

$$(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2} = n\,dx\,d^2y\sqrt{x^2 + y^2};$$

найти его интеграл, принимая dx постоянным.

Полагая $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, мы приведем наше уравнение к следующему виду:

$$(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2} = nq\sqrt{x^2 + y^2}.$$

После подстановки $y = ux$ и $q = \frac{v}{x}$ это уравнение переходит в следующее:

$$(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2} = nv\sqrt{1 + u^2}.$$

А так как имеем $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{v}$, то, учитывая, что

$$v = \frac{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}{u\sqrt{1+u^2}},$$

находим

$$(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}du = n(p - u)\,dp\sqrt{1 + u^2}.$$

Решение последнего уравнения не является очевидным. Однако, вводя в вычисление углы и полагая $p = \operatorname{tg}\varphi$ и $u = \operatorname{tg}\omega$, мы найдем $dp = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, $du = \frac{d\omega}{\cos^2\omega}$,

$$\sqrt{1 + p^2} = \frac{1}{\cos\varphi}, \qquad \sqrt{1 + u^2} = \frac{1}{\cos\omega} \qquad \text{и} \qquad p - u = \frac{\sin(\varphi - \omega)}{\cos\varphi\cos\omega},$$

откуда

$$\frac{1}{\cos^3\varphi}\,\frac{d\omega}{\cos^2\omega} = \frac{n\sin(\varphi - \omega)}{\cos\varphi\cos\omega}\,\frac{1}{\cos\omega}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

или

$$d\omega = n\,d\varphi\sin(\varphi - \omega) = d\varphi - (d\varphi - d\omega).$$

Следовательно,

$$d\varphi = \frac{d\varphi - d\omega}{1 - n\sin(\varphi - \omega)}.$$

Положив теперь $\varphi - \omega = \psi$, получим

$$\varphi = \int\frac{d\psi}{1 - n\sin\psi} \qquad \text{и} \qquad \omega = \int\frac{d\psi}{1 - n\sin\psi} - \psi.$$

Отсюда, так как $p = \operatorname{tg}\varphi$ и $u = \operatorname{tg}\omega$, находим

$$\frac{dx}{x} = \frac{du\cos\varphi\cos\omega}{\sin\psi} = \frac{d\omega\cos\varphi}{\sin\psi\cos\omega} = \frac{n\,d\psi\cos\varphi}{\cos\omega(1 - n\sin\psi)}.$$

В том случае, когда $n=1$, мы получаем:

$$d\varphi=\frac{d\psi}{1-\sin\psi}=\frac{d\psi\,(1+\sin\psi)}{\cos^2\psi},$$

следовательно,

$$\varphi=\operatorname{tg}\psi+\frac{1}{\cos\psi}+\alpha=\frac{1+\sin\psi}{\cos\psi}+\alpha,$$

$$\omega=\frac{1+\sin\psi}{\cos\psi}+\alpha-\psi \quad \text{и} \quad \frac{dx}{x}=\frac{d\varphi\cos\varphi}{\cos\omega}=\frac{d\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi}.$$

А так как $\varphi-\alpha=\sqrt{\frac{1+\sin\psi}{1-\sin\psi}}$, будем иметь

$$\sin\psi=\frac{(\varphi-\alpha)^2-1}{(\varphi-\alpha)^2+1},\quad \cos\psi=\frac{2(\varphi-\alpha)}{(\varphi-\alpha)^2+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{dx}{x}=\frac{d\varphi\cos\varphi\,[(\varphi-\alpha)^2+1]}{2(\varphi-\alpha)\cos\varphi+(\varphi-\alpha)^2\sin\varphi-\sin\varphi}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

807. Если в случае $n=1$ положить постоянное α равным бесконечности, получим $\sin\psi=1$, откуда $\psi=90^\circ$ и $\omega=\varphi-90^\circ$, и вместе с тем

$$\frac{dx}{x}=\frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Отсюда следует, что $x=a\sin\varphi$ и $u=-\cot\varphi$, а потому $y=-a\cos\varphi$ и $x^2+y^2=a^2$.

СЛЕДСТВИЕ 2

808. В том же случае, $n=1$, если не полагать постоянное α бесконечно большим, числитель дроби, которой равно выражение $\frac{dx}{x}$, является, к нашему удобству, дифференциалом знаменателя. Таким образом,

$$x=a\,[(\varphi-\alpha)^2\sin\varphi-\sin\varphi+2(\varphi-\alpha)\cos\varphi].$$

Вместе с тем

$$\omega=\varphi-\operatorname{Arctg}\frac{(\varphi-\alpha)^2-1}{2(\varphi-\alpha)},$$

и поэтому

$$u=\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\omega=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\frac{(\varphi-\alpha)^2-1}{2(\varphi-\alpha)}}{1+\frac{(\varphi-\alpha)^2-1}{2(\varphi-\alpha)}\operatorname{tg}\varphi}$$

или

$$\frac{y}{x}=\frac{2(\varphi-\alpha)\sin\varphi-(\varphi-\alpha)^2\cos\varphi+\cos\varphi}{(\varphi-\alpha)^2\sin\varphi-\sin\varphi+2(\varphi-\alpha)\cos\varphi}.$$

Следовательно,

$$y=-a\,[(\varphi-\alpha)^2\cos\varphi-\cos\varphi-2(\varphi-\alpha)\sin\varphi]$$

и

$$\sqrt{x^2+y^2}=(\varphi-\alpha)^2+1.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

809. Можно выполнить интегрирование также и в общем случае. Действительно, так как мы имеем

$$d\varphi=\frac{d\psi}{1-n\sin\psi} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{x}=\frac{nd\varphi\cos\varphi}{\cos\omega},$$

то

$$\varphi+\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\arccos\frac{n-\sin\psi}{1-n\sin\psi}.$$

Отсюда, полагая $(\varphi+\alpha)\sqrt{1-n^2}=\theta$, мы получаем

$$\cos\theta=\frac{n-\sin\psi}{1-n\sin\psi}$$

и, следовательно,

$$\sin\psi=\frac{n-\cos\theta}{1-n\cos\theta} \quad \text{и} \quad \cos\psi=\frac{\sin\theta\sqrt{1-n^2}}{1-n\cos\theta}.$$

Но, так как $\omega=\varphi-\psi$, будем иметь

$$\frac{dx}{x}=\frac{nd\varphi\cos\varphi(1-n\cos\theta)}{\cos\varphi\sin\theta\sqrt{1-n^2}+\sin\varphi(n-\cos\theta)}.$$

Поскольку же $d\theta=d\varphi\sqrt{1-n^2}$, то дифференциал знаменателя этой дроби равен

$$-d\varphi\sin\varphi\sin\theta\sqrt{1-n^2}+d\varphi\cos\varphi\cos\theta(1-n^2)$$
$$+n\,d\varphi\cos\varphi-d\varphi\cos\varphi\cos\theta+d\varphi\sin\varphi\sin\theta\sqrt{1-n^2},$$

что приводится к $nd\varphi\cos\varphi(1-n\cos\theta)$, то есть к числителю. Таким образом,

$$x=a[\cos\varphi\sin\theta\sqrt{1-n^2}+\sin\varphi(n-\cos\theta)],$$

или же

$$x=a\cos\omega(1-n\cos\theta),$$

и потому

$$y=ux=a\sin\omega(1-n\cos\theta).$$

Итак, отправляясь от угла θ, ищем угол ψ такой, чтобы

$$\sin\psi=\frac{n-\cos\theta}{1-n\cos\theta} \quad \text{и} \quad \cos\psi=\frac{\sin\theta}{1-n\cos\theta}\sqrt{1-n^2}.$$

Вместе с тем получаем

$$\omega=\frac{\theta}{\sqrt{1-n^2}}-\alpha-\psi,$$

и полный интеграл будет

$$x=a(1-n\cos\theta)\cos\omega \quad \text{и} \quad y=a(1-n\cos\theta)\sin\omega.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

810. Однако, если число n больше единицы, то это интегрирование приводит к мнимостям, и для того чтобы устранить это неудобство, следует заметить, что интегралом уравнения $d\varphi=\frac{d\psi}{1-n\sin\psi}$ является

$$\varphi+\alpha=\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\,l\,\frac{\sqrt{n-1}(1+\sin\psi)+\sqrt{n+1}(1-\sin\psi)}{\sqrt{n-1}(1+\sin\psi)-\sqrt{n-1}(1-\sin\psi)}.$$

Поэтому, если положим $(\varphi+\alpha)\sqrt{n^2-1}=\theta$, так что

$$d\theta=d\varphi\sqrt{n^2-1} \quad \text{и} \quad \omega=\varphi-\psi=\frac{\theta}{\sqrt{n^2-1}}-\alpha-\psi,$$

то будем иметь

$$\frac{e^{\theta}+1}{e^{\theta}-1}=\frac{\sqrt{(n-1)(1+\sin\psi)}}{\sqrt{(n+1)(1-\sin\psi)}}=\frac{(n-1)(1+\sin\psi)}{\cos\psi\sqrt{n^2-1}},$$

откуда находим

$$\sin\psi=\frac{e^{\theta}+2n+e^{-\theta}}{ne^{\theta}+2+ne^{-\theta}} \quad \text{и} \quad \cos\psi=\frac{(e^{\theta}-e^{-\theta})\sqrt{n^2-1}}{ne^{\theta}+2+ne^{-\theta}}.$$

Таким образом, по углу θ определяются углы ψ, φ и ω. А так как

$$\frac{dx}{x}=\frac{nd\varphi\cos\varphi}{\cos\omega}=\frac{n\,d\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi},$$

то получим

$$\frac{dx}{x}=\frac{n\,d\varphi\cos\varphi\,(ne^{\theta}+2+ne^{-\theta})}{\cos\varphi\,(e^{\theta}-e^{-\theta})\sqrt{n^2-1}+\sin\varphi\,(e^{\theta}+2n+e^{-\theta})},$$

причем снова, к нашему удобству, оказывается, что числитель является как раз дифференциалом знаменателя, что сразу устанавливается дифференцированием. Следовательно, получаем

$$x=a\left[\cos\varphi\,(e^{\theta}-e^{-\theta})\sqrt{n^2-1}+\sin\varphi\,(e^{\theta}+2n+e^{-\theta})\right]$$

или

$$x=a\cos\omega\,(ne^{\theta}+2+ne^{-\theta})$$

и, так как $u=\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\omega$, то

$$y=a\sin\omega\,(ne^{\theta}+2+ne^{-\theta}).$$

Таким образом, по углу θ прежде всего надо определить угол ψ так, чтобы

$$\sin\psi=\frac{e^{\theta}+2n+e^{-\theta}}{ne^{\theta}+2+ne^{-\theta}} \quad \text{и} \quad \cos\psi=\frac{(e^{\theta}-e^{-\theta})\sqrt{n^2-1}}{ne^{\theta}+2+ne^{-\theta}},$$

а найдя ψ, берем угол $\omega=\frac{\theta}{\sqrt{n^2-1}}-\alpha-\psi$; полученные для x и y формулы дадут полный интеграл, так как в них входят два постоянных a и α.

ПОЯСНЕНИЕ 3

811. Так как может показаться, что в основном интегрирование нашего уравнения удалось благодаря случайности, то стоит труда разобраться в причинах этой удачи, — не окажется ли возможным яснее усмотреть, на чем это интегрирование основано[1]). Итак, поскольку

$$\varphi=\psi+\omega \quad \text{и} \quad d\varphi=\frac{d\psi}{1-n\sin\psi},$$

[1]) Cum hic praecipua pars integrationis fortuito successisse videatur, operae pretium erit in eius causam inquirere, num forte ratio integrandi clarius perspici queat.

а отсюда

$$d\omega = \frac{n\,d\psi\,\sin\psi}{1-n\sin\psi} = n\,d\varphi\sin\psi,$$

то уравнение $\frac{dx}{x} = \frac{n\,d\varphi\cos\varphi}{\cos\omega}$ вследствие того, что $\cos\varphi = \cos\psi\cos\omega - \sin\psi\sin\omega$, преобразуется в следующее:

$$\frac{dx}{x} = n\,d\varphi\,\cos\psi - \frac{n\,d\varphi\,\sin\psi\sin\omega}{\cos\omega}.$$

Так как

$$d\varphi = \frac{d\psi}{1-n\sin\psi} \quad \text{и} \quad n\,d\varphi\sin\psi = d\omega,$$

наше уравнение приводится к интегрируемой форме

$$\frac{dx}{x} = \frac{n\,d\psi\cos\psi}{1-n\sin\psi} - \frac{d\omega\sin\omega}{\cos\omega},$$

откуда получаем

$$x = \frac{a\cos\omega}{1-n\sin\psi} \quad \text{и} \quad y = \frac{a\sin\omega}{1-n\sin\psi}$$

(так как $y = ux = x\operatorname{tg}\omega$). Вот в общем виде интегрирование нашего уравнения. Соотношение между углами ω и ψ таково, что

$$d\omega = \frac{n\,d\psi\sin\psi}{1-n\sin\psi},$$

и при этом

$$x = \frac{a\cos\omega}{1-n\sin\psi} \quad \text{и} \quad y = \frac{a\sin\omega}{1-n\sin\psi}.$$

Поэтому, если положим $\sqrt{x^2+y^2} = z$, так чтобы

$$x = z\cos\omega \quad \text{и} \quad y = z\sin\omega,$$

то найдем $z = \frac{a}{1-n\sin\psi}$ и $\sin\psi = \frac{z-a}{nz}$, откуда $d\omega = \frac{(z-a)\,d\psi}{a}$.

А так как

$$d\psi = \frac{a\,dz}{z\sqrt{n^2z^2-(z-a)^2}},$$

то

$$d\omega = \frac{(z-a)\,dz}{z\sqrt{n^2z^2-(z-a)^2}},$$

откуда угол ω определяется через z. Если для уничтожения иррациональности мы положим

$$\sqrt{n^2z^2-(z-a)^2} = s\,(nz+z-a),$$

то получим

$$z = \frac{a\,(s^2+1)}{(n+1)\,s^2-n+1} \quad \text{и} \quad d\omega = \frac{2nds\,(s^2-1)}{(s^2+1)\,[(n+1)\,s^2-(n-1)]},$$

т. е.

$$d\omega = \frac{2ds}{s^2+1} - \frac{2ds}{(n+1)\,s^2-n+1}.$$

Интегрирование этого уравнения очевидно.

ЗАДАЧА 99

812. *Пусть дифференциальное уравнение второго порядка только тогда становится однородным, когда переменному y приписывается измерение, равное n; свести его интегрирование к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка.*

РЕШЕНИЕ

Положим $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, так что получаем уравнение относительно четырех конечных количеств x, y, p и q. Мы рассмотрим, каково должно быть это уравнение, чтобы оно оказалось однородным. Итак, прежде всего, если мы принимаем, что x первого измерения, а переменное y n-го измерения, то количеству $p = \frac{dy}{dx}$ следует приписать измерение, равное $n-1$, а количеству q — измерение, равное $n-2$. Поэтому мы полагаем

$$y = x^n u, \quad p = x^{n-1} t \quad \text{и} \quad q = x^{n-2} v.$$

Так как $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, мы получим

$$x\,du + nu\,dx = t\,dx \quad \text{и} \quad x\,dt + (n-1)\,t\,dx = v\,dx,$$

и отсюда следует

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{t - nu} = \frac{dt}{v - (n-1)\,t}.$$

Таким образом

$$du\,[v - (n-1)\,t] = dt\,(t - nu).$$

Но после того как в уравнении относительно x, y, p и q сделаны вышеуказанные подстановки, переменное x по условию будет исключено, так что получится уравнение относительно только трех переменных u, t и v, из которого можно будет определить букву v через t и u. После подстановки этого значения для v получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно двух переменных u и t, откуда можно определить t через u. С помощью уравнения $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t - nu}$ определим x через u, а отсюда, вследствие того, что $u = \frac{y}{x^n}$, получим интегральное уравнение между x и y, и оно является полным, так как найдено двойным интегрированием.

СЛЕДСТВИЕ 1

813. Итак, отличительным признаком уравнений относительно x, y, p и q, которые можно трактовать указанным способом, является то, что, полагая $y = x^n u$, $p = x^{n-1} t$ и $q = x^{n-2} v$, можно так определить показатель n, что переменное x путем деления полностью исключается из вычислений.

СЛЕДСТВИЕ 2

814. Если получим $n = 0$, то уравнение составлено таким образом, что, приписывая как y, так и его дифференциалам нулевое измерение, приходим к однородному уравнению. Очевидно, в этом случае только переменное x и его дифференциалы рассматриваются как обладающие измерением.

СЛЕДСТВИЕ 3

815. Наоборот, если измерение приписывается только переменному y, таким образом, что оно вместе со своими дифференциалами dy и d^2y везде дает одно и то же число измерений, показатель n является бесконечно большим.

ПОЯСНЕНИЕ

816. Если только одно переменное x вместе со своими дифференциалами во всех членах дает одно и то же число измерений, то, так как $n=0$, имеем $u=y$, а в уравнении между x, y, p и q следует положить $p=\frac{t}{x}$ и $q=\frac{v}{x^2}$, после чего переменное x исключается из расчета и получается уравнение относительно y, t и v. С помощью этого уравнения мы сводим количество переменных в дифференциальном уравнении $dy(v+t)=t\,dt$ только к двум и после решения последнего получаем, что $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{t}$. Интегрирование последнего уравнения не связано ни с какими трудностями потому, что y выражается через t.

Во втором же случае, когда одно только переменное y вместе со своими дифференциалами дает во всех членах одно и то же измерение, и поэтому надо принять показатель n равным бесконечности, решение следует выполнить другим способом, который вскоре [§ 822] будет изложен (если только мы не пожелаем свести этот случай к предыдущему перестановкой переменных x и y).

ПРИМЕР 1

817. *Пусть предложено дифференциальное уравнение*

$$x^2\,d^2y=\alpha y\,dx^2+\beta x\,dx\,dy;$$

принимая элемент dx постоянным, найти его интеграл.

Мы обнаруживаем здесь, что все члены будут второго измерения, если считать имеющим измерение только переменное x вместе с его дифференциалом dx. Таким образом, имеем $n=0$. Если мы положим $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$, то получим уравнение $qx^2=\alpha y+\beta px$ и, произведя замену $p=\frac{t}{x}$ и $q=\frac{v}{x^2}$, находим $v=\alpha y+\beta t$. Таким образом, приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\alpha y\,dy+(\beta+1)\,t\,dy=t\,dt$$

и, так как оно однородно, полагаем $t=yz$ и получаем

$$\alpha\,dy+(\beta+1)\,z\,dy=yz\,dz+z^2\,dy,$$

или

$$\frac{dy}{y}=\frac{z\,dz}{\alpha+(\beta+1)\,z-z^2}.$$

Пусть $\alpha+(\beta+1)\,z-z^2=(f+z)\,(g-z)$, так что

$$\alpha=fg \quad \text{и} \quad \beta+1=g-f.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{dy}{y} = -\frac{f}{f+g}\cdot\frac{dz}{f+z} + \frac{g}{f+g}\cdot\frac{dz}{f-z},$$

откуда, интегрируя, находим

$$ly = C - \frac{f}{f+g}\,l(f+z) - \frac{g}{f+g}\,l(g-z),$$

то есть

$$y\,(f+z)^{\frac{f}{f+g}}(g-z)^{\frac{g}{f+g}} = a.$$

Вместе с тем $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{(f+z)(g-z)}$,

то есть

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{f+g}\cdot\frac{dz}{f+z} + \frac{1}{f+g}\,\frac{dz}{g-z}.$$

Отсюда получаем

$$x = b\left(\frac{f+z}{g-z}\right)^{\frac{1}{f+g}} \quad \text{или} \quad \frac{f+z}{g-z} = \left(\frac{x}{b}\right)^{f+g}.$$

А так как, следовательно, $z = \frac{gx^{f+g} - fb^{f+g}}{b^{f+g} + x^{f+g}}$, подставляя это значение, мы получим

$$(f+g)\,b^g x^f y = a\,(b^{f+g} + x^{f+g}),$$

или же, полагая $\frac{a}{f+g} = c$,

$$y = c\left(\frac{b^f}{x^f} + \frac{x^g}{b^g}\right),$$

причем $g - f = \beta + 1$ и $g + f = \sqrt{(\beta+1)^2 + 4\alpha}$[1]).

СЛЕДСТВИЕ

818. Так как в рассматриваемом уравнении оба переменных x и y везде входят в одном и том же измерении, можно это уравнение трактовать также по способу, примененному в предыдущей задаче.

ПРИМЕР 2

819. *Найти интеграл дифференциального уравнения второго порядка, содержащего только два члена, а именно*

$$d^2y = cx^\alpha y^\beta\,dx^{2-\gamma}\,dy^\gamma,$$

полагая dx постоянным.

Полагая $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, мы получим уравнение в виде $q = cx^\alpha y^\beta p^\gamma$, и показатель n здесь можно определить таким образом, чтобы, полагая $y = x^n u$, $p = x^{n-1}t$ и $q = x^{n-2}v$, возможно было исключить с помощью деления переменное x. Таким образом, следует принять

$$\alpha + \beta n + \gamma\,(n-1) - n + 2 = 0,$$

[1]) Когда $f + g = 0$, получаем полный интеграл в виде $x^g\,(c + b\log x)$, где c и b — произвольные постоянные [Л. Ш.].

или $n=\dfrac{-\alpha+\gamma-2}{\beta+\gamma-1}$. При этом получаем $v=cu^\beta t^\gamma$. Следовательно, подлежащее решению диферфенциальное уравнение первого порядка будет вида

$$cu^\beta t^\gamma\,du-(n-1)\,t\,du=t\,dt-nu\,dt.$$

После того как мы определим из этого уравнения переменное t через u, надо проинтегрировать соотношение $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{du}{t-nu}$, и тогда, так как $u=\dfrac{y}{x^n}$, получим искомое интегральное уравнение между x и y.

Только тот случай, когда $\beta+\gamma=1$, и, следовательно, n бесконечно велико, требует особого рассмотрения (что излагается ниже [§ 822]), если только не одновременно $\gamma=\alpha+2$, так как тогда показатель n полностью остается в нашем произволе, а уравнение получаем однородное.

ПРИМЕР 3

820. *Пусть предложено уравнение*

$$x^4\,d^2y=x^3\,dx\,dy+2xy\,dx\,dy-4y^2\,dx^2,$$

где полагаем элемент dx постоянным; найти его интеграл.

Здесь очевидно, что если y и его дифференциалы dy и d^2y будут второго измерения, а x и dx — первого измерения, то все члены будут шестого измерения. Поэтому, когда мы, положив $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$, приходим к уравнению

$$x^4q=x^3p+2xyp-4y^2,$$

мы делаем в нем подстановку

$$y=x^2u,\ \ p=xt\quad \text{и}\ \ q=v.$$

Получаем

$$v=t+2ut-4u^2.$$

Так как $n=2$, наше дифференциальное уравнение будет

$$du\,(v-t)=dt\,(t-2u),$$

и оно преобразуется в уравнение

$$2u\,du\,(t-2u)=dt\,(t-2u),$$

откуда заключаем, что либо $t=2u$, либо $t=u^2+c$. Оба эти случая рассмотрим в отдельности.

1) Если $t=2u$, получаем, так как $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{du}{t-2u}$, что $du=0$, и поэтому $u=C$. Вследствие этого $y=Cx^2$, что является частным интегралом, удовлетворяющим предложенному уравнению.

2) Если $t=u^2+c$, получаем $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{du}{u^2-2u+c}$, и здесь следует рассмотреть три случая:

Во-первых, если постоянное $c=1$, будем иметь

$$l\,\frac{x}{a}=\frac{1}{1-u}=\frac{x^2}{x^2-y}\qquad \text{или}\qquad x^2=(x^2-y)\,l\,\frac{x}{a}.$$

Во-вторых, если постоянное $c=1-f^2$, получим $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{du}{(u-1)^2-f^2}$, откуда следует

$$lx = \frac{-1}{2f} l \frac{f+u-1}{f-u+1} + C.$$

Так как $u = \frac{y}{x^2}$, мы получим

$$x = a\left(\frac{(f+1)x^2-y}{(f-1)x^2+y}\right)^{\frac{1}{2f}}.$$

В-третьих, если постоянное $c = 1 + f^2$, то $\frac{dx}{x} = \frac{du}{(u-1)^2+f^2}$, и это после интегрирования дает нам

$$l\frac{x}{a} = \frac{1}{f}\operatorname{Arctg}\frac{u-1}{f} \quad \text{или} \quad \frac{u-1}{f} = \frac{y-x^2}{fx^2} = \operatorname{tg}\left(fl\frac{x}{a}\right).$$

Таким образом, в соответствии со значением произвольного постоянного C либо интегрирование удается в алгебраической форме, либо оно приводит к логарифмам, либо к круговым функциям[1]), и поэтому результат не может быть выражен в общем виде.

ПОЯСНЕНИЕ

821. Найденный нами первым частный интеграл $y = Cx^2$ нельзя получить ни из одной из тех формул, которыми выражается полный интеграл. Тем не менее он удовлетворяет предложенному дифференциальному уравнению второго порядка. Таким образом, этот пример хорошо иллюстрирует то, что было выше изложено [§§ 546, 564, т. I] относительно того парадоксального явления, когда, как иногда бывает, дифференциальному уравнению удовлетворяет зависимость в конечном виде, которая вовсе не содержится в полном интеграле. Итак, мы видим, что это парадоксальное явление имеет место также и для дифференциального уравнения второго порядка. Следует ли рассматривать это уравнение $y = Cx^2$ как интеграл, это уже другой вопрос, который пока никак не следует считать разрешенным. Хотя в данном случае нужно рассматривать предложенное уравнение как разлагающееся на множители, из одного из которых получается эта зависимость $y = Cx^2$, но мы далеки от того, чтобы считать возможным ограничиться этим объяснением. Причина в том, что, как нам представляется, главное — обстоятельно рассмотреть тот вопрос, геометрического или иного происхождения, решение которого привело к данному уравнению. При этом в большинстве случаев не составит труда выяснить, удовлетворяет ли по сути поставленного вопроса то, что удовлетворяет дифференциальному уравнению. Например, пусть надо определить падение тяжелого тела с высоты $= a$. Когда оно находится на высоте x над землей, его скорость равна $\sqrt{a-x}$, а элемент времени $dt = \frac{-dx}{\sqrt{a-x}}$. Здесь очевидно, что дифференциальному уравнению мы удовлетворим, если положим $x = a$, так что время t остается неопределенным. Однако это совершенно не подходит по сути вопроса, решением которого является только интеграл $t = 2\sqrt{a-x}$.

[1]) Vel ab angulis pendet.

ЗАДАЧА 100

822. *Свести интегрирование дифференциального уравнения второго порядка к дифференциальному уравнению первого порядка, если во всех его членах переменное y со своими дифференциалами dy и d^2y дает одно и то же измерение.*

РЕШЕНИЕ

Положим $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$. Тогда уравнение будет таким, что все три переменные y, p, q везде дают одно и то же измерение, тогда как переменное x вовсе не принимается во внимание при подсчете измерений. В соответствии с этим, если мы положим $p = uy$ и $q = vy$, то во все члены войдет одна и та же степень y, и после ее исключения путем деления мы получим уравнение только с тремя переменными x, u и v. Из него одно из переменных определится через два остальные, так что v будет равно некоторой функции только от x и u. Вследствие же того, что $p = uy$, получим $dy = uy\,dx$, а так как $dp = q\,dx$, то $u\,dy + y\,du = vy\,dx$. Отсюда следует, что

$$\frac{dy}{y} = u\,dx \quad \text{и} \quad \frac{dy}{y} = \frac{v\,dx - du}{u}.$$

Поэтому $du + u^2dx = v\,dx$, и это дифференциальное уравнение содержит только два переменных x и u. Итак, если можно это уравнение проинтегрировать и таким образом определить соотношение между x и u, то остается только исследовать интеграл от выражения $u\,dx$. Найдя этот интеграл, получим $ly = \int u\,dx$ и таким образом находим интегральное уравнение между x и y, в которое входят два произвольных постоянных, так как мы выполнили два интегрирования, и вследствие этого оно представляет полный интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 1

823. Итак, изложенный способ сводит интегрирование рассматриваемых уравнений к интегрированию дифференциального уравнения $du + u^2dx = v\,dx$. Если последнее удается решить, то тем самым проинтегрированы исходные уравнения, так как интегрирование выражения $u\,dx$ не представляет затруднений.

СЛЕДСТВИЕ 2

824. Так как $\frac{dy}{y} = u\,dx$, получаем $y = e^{\int u\,dx}$ и, подставляя это выражение в предложенное дифференциальное уравнение второго порядка, мы его сразу приводим к дифференциальному уравнению первого порядка. Действительно, имеем

$$\frac{dy}{dx} = p = e^{\int u\,dx}u \quad \text{и} \quad \frac{dp}{dx} = q = \frac{e^{\int u\,dx}(du + u^2dx)}{dx},$$

и при этом экспоненциал сам собою исключается из уравнения.

СЛЕДСТВИЕ 3

825. Так же и наоборот, если дано дифференциальное уравнение первого порядка $du + u^2\,dx = v\,dx$, в котором v есть какая угодно функция от x и u, то оно преобразуется, если положить $u = \frac{dy}{y\,dx}$, в дифференциальное уравнение второго порядка такого вида, что переменное y и его дифференциалы dy и d^2y дают везде одно и то же измерение.

ПОЯСНЕНИЕ 1

826. Это сведéние дифференциальных уравнений первого порядка к уравнениям второго порядка представляется противоречащим законам Анализа, однако оно иногда не бесполезно. Действительно, так как можно трактовать соответствующие дифференциальные уравнения второго порядка с помощью других методов, представляя их интегралы либо в виде рядов, либо в конечном виде, то одновременно мы найдем интегралы дифференциальных уравнений первого порядка, которые во многих случаях едва ли можно было бы обнаружить другим способом. Мы увидим также в дальнейшем [главы VII, VIII], что такие дифференциальные уравнения второго порядка, в которые переменное y входит в измерении не выше первого, могут быть удобным образом проинтегрированы с помощью рядов, а к тому же иногда эти ряды обрываются, так что мы получаем интегралы в виде конечных выражений. Помимо этого, предложенная для таких дифференциальных уравнений первого порядка: $du + u^2\,dx = v\,dx$ подстановка $u = \frac{dy}{y\,dx}$ тем более достойна внимания, что, полагая элемент dx постоянным, получаем $du = \frac{d^2y}{y\,dx} - \frac{dy^2}{y^2\,dx}$, откуда следует, что $dy + u^2\,dx = \frac{d^2y}{y\,dx}$, следовательно, два члена при этом объединяются в один.

ПОЯСНЕНИЕ 2

827. Здесь, прежде всего, полезно знать те случаи, когда уравнение $du + u^2\,dx = v\,dx$ допускает интегрирование. С этой целью мы примем, что $du = V\,dx$ есть общий вид таких разрешимых уравнений, где V — некоторая функция от x и u. Тогда очевидно, что если $v = u^2 + V$, интегрирование удается. Это будет иметь место, во-первых, если $V = \frac{X}{U}$, где через X обозначаем функцию только от x, а через U — функцию только от u. Второй случай, — когда V есть однородная функция нулевого измерения от x и u. Третий, — когда $V = Xu + \Xi u^n$, где обозначаем через X и Ξ любые функции только от x. Четвертый, — когда $V = \frac{1}{Px + Qx^n}$, где обозначаем через P и Q любые функции только от u. Таким же образом мы получаем остальные случаи, исходя из других интегрируемых видов.

ПРИМЕР 1

828. *Найти интеграл уравнения*

$$\alpha y\,d^2y + \beta\,dy^2 = \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

принимая элемент dx постоянным.

Положив $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, получим уравнение

$$\alpha yq + \beta p^2 = \frac{yp}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Это уравнение после подстановки $p = uy$ и $q = vy$ переходит в следующее:

$$\alpha v + \beta u^2 = \frac{u}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad \text{или} \quad v = \frac{u}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{\beta u^2}{\alpha}.$$

Таким образом, нужно решить такое уравнение:

$$du + u^2\,dx = \frac{u\,dx}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{\beta u^2\,dx}{\alpha}.$$

Принимая $u = \frac{1}{s}$, получаем

$$ds + \frac{s\,dx}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}} = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)dx$$

и после умножения на $\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ и интегрирования находим

$$s\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\int dx\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Пусть $x + \sqrt{a^2+x^2} = t^\alpha$, тогда имеем $a^2 = t^{2\alpha} - 2t^\alpha x$, и отсюда

$$x = \frac{t^{2\alpha} - a^2}{2t^\alpha} = \frac{1}{2}t^\alpha - \frac{1}{2}a^2t^{-\alpha} \quad \text{и} \quad dx = \frac{\alpha}{2}dt\left(t^{\alpha-1} + a^2t^{-\alpha-1}\right).$$

Таким образом,

$$st = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\int\frac{\alpha}{2}dt\left(t^\alpha + a^2t^{-\alpha}\right)$$

или

$$st = C + \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{a^2t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right).$$

Затем имеем $\frac{dy}{y} = u\,dx = \frac{dx}{s}$, а из дифференциального уравнения следует, что

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\frac{dx}{s} = \frac{ds}{s} + \frac{dx}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Поэтому

$$\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)ly = ls + \frac{1}{\alpha}\,l\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) = lst + D.$$

Следовательно, $y = B(st)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$. Ввиду этого, полагая $C = \frac{\alpha+\beta}{2}A$, мы получаем

$$y = B\left(A + \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{a^2t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}},$$

причем

$$x = \frac{1}{2}\left(t^\alpha - a^2t^{-\alpha}\right) \quad \text{или} \quad t = \left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Таким образом, уравнение между x и y таково[1]):

$$Cy^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = A + \frac{1}{\alpha+1}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{a^2}{1-\alpha}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

829. Рассмотренный только что пример таков, что его можно весьма легко решить другим способом, а именно, после того как мы помножим уравнение

$$\alpha yq + \beta p^2 = \frac{yp}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

на $\frac{dx}{yp}$, оно преобразуется с учетом того, что $q\,dx = dp$ и $p\,dx = dy$, в уравнение

$$\frac{\alpha\,dp}{p} + \frac{\beta\,dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

каждый член которого можно проинтегрировать. Следовательно, получаем

$$p^\alpha y^\beta = C^\alpha\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right),$$

и отсюда

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}}\,dy = C\,dx\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Последнее уравнение после нового интегрирования дает найденный выше интеграл. Общий же вид уравнений, которые можно решить указанным способом, есть

$$P\,dp + Y\,dy + X\,dx = 0,$$

причем P есть функция от p, Y — функция от y и X — функция от x; это уравнение в принятой нами форме запишется как $Pq+Yp+X=0$.

Итак, мы здесь видим, как можно проинтегрировать даже дифференциальное уравнение второго порядка с помощью подходящего множителя. Этот метод, который оказался весьма полезным при интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка, тем более заслуживает разработки, что он применим даже к дифференциальным уравнениям высших порядков, и мы ниже [гл. V] познакомимся с более подробным изложением этого вопроса.

ПРИМЕР 2

830. *Пусть предложено уравнение*

$$xy\,d^2y = y\,dx\,dy + x\,dy^2 + \frac{bx\,dy^2}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

где элемент dx *принимается постоянным; найти его интеграл.*

---

[1]) При $\alpha=1$ получаем $Cy^{1+\beta} = A + \frac{t^2}{2} + a^2 lt$, при $\alpha=-1$ получаем $Cy^{1-\beta} = A + lt + a\frac{t^2}{2}$, где $t = \left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ [Л. Ш.].

Положив $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, находим

$$xyq = yp + xp^2 + \frac{\text{в}xp^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

После подстановок $p = uy$ и $q = vy$, уравнение переходит в

$$xv = u + u^2x + \frac{bu^2x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

откуда получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$du + u^2\,dx = \frac{u\,dx}{x} + u^2\,dx + \frac{bu^2\,du}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

или

$$\frac{x\,du - u\,dx}{u^2} = \frac{bx\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Интегралом этого уравнения является

$$C - \frac{x}{u} = -b\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{или} \quad u = \frac{x}{C + b\sqrt{a^2 - x^2}},$$

следовательно,

$$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{C + b\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

После подстановки $\sqrt{a^2 - x^2} = t$, так что $x\,dx = -t\,dt$, получаем

$$\frac{dy}{y} = \frac{-t\,dt}{C + bt} = -\frac{dt}{b} + \frac{C\,dt}{b(C + bt)}$$

и

$$ly = -\frac{t}{b} + \frac{C}{b^2}\,l(C + bt) + lc.$$

Пусть $C = nb^2$, тогда

$$l\frac{y}{c} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{b} + nl\frac{nb + \sqrt{a^2 - x^2}}{b},$$

где c и n — произвольные постоянные.

ГЛАВА IV

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА, В КОТОРЫЕ ОДНО ИЗ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ВХОДИТ В ПЕРВОМ ИЗМЕРЕНИИ

ЗАДАЧА 101

831. *Пусть предложено уравнение следующего вида:* $d^2y+P\,dx\,dy+$ $+Qy\,dx^2=0$, *причем элемент* dx *принимаем постоянным, а* P *и* Q *суть какие угодно функции только от* x; *привести его к дифференциальному уравнению первого порядка.*

РЕШЕНИЕ

Положив $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$, мы приведем предложенное уравнение к виду $q+Pp+Qy=0$. Если в этом уравнении мы, следуя ранее изложенному методу, положим $p=uy$ и $q=vy$, то получим следующее уравнение между x, u и v: $v+Pu+Q=0$. Отсюда $v=-Pu-Q$. Вместе с тем имеем

$$dy=uy\,dx \quad \text{и} \quad u\,dy+y\,du=vy\,dx,$$

так что $\frac{dy}{y}=u\,dx=\frac{v\,dx-du}{u}$. Поэтому, подставляя вместо v его значение, получим

$$du+u^2\,dx+Pu\,dx+Q\,dx=0.$$

Решив это уравнение, будем иметь $ly=\int u\,dx$. Но и без этих подстановок, полагая сразу в предложенном уравнении $y=e^{\int u\,dx}$, откуда следует

$$dy=e^{\int u\,dx}u\,dx \quad \text{и} \quad d^2y=e^{\int u\,dx}(du\,dx+u^2\,dx^2),$$

мы получим предыдущее дифференциальное уравнение первого порядка

$$du+u^2\,dx+Pu\,dx+Q\,dx=0,$$

так как после указанных подстановок экспоненциал $e^{\int u\,dx}$ не будет входить в наши вычисления. От решения последнего дифференциального уравнения зависит интегрирование предложенного дифференциального уравнения второго порядка.

СЛЕДСТВИЕ 1

832. Указанное дифференциальное уравнение первого порядка можно представить несколькими способами в различных, весьма сходных между собой видах. Например, если положим $u = Mz$, получаем

$$M\,dz + z(dM + PM\,dx) + M^2z^2\,dx + Q\,dx = 0.$$

Здесь в качестве M можно принять такую функцию от x, чтобы член, содержащий букву z, исчезал, что будет иметь место, если

$$dM + MP\,dx = 0 \quad \text{или} \quad M = Ce^{-\int P\,dx}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

833. В подобном же виде получаем уравнение, полагая $u = \frac{K}{z}$, так как тогда имеем

$$\frac{-K\,dz}{z^2} + \frac{dK}{z} + \frac{K^2\,dx}{z^2} + \frac{KP\,dx}{z} + Q\,dx = 0,$$

или

$$K\,dz - z(dK + KP\,dx) - Qz^2\,dx - K^2\,dx = 0,$$

где второй член слева тоже исчезает, если принять $K = Ce^{-\int P\,dx}$.

СЛЕДСТВИЕ 3

834. В более общем виде можно произвести подобное преобразование, полагая $u = K + Mz$. При этом получаем

$$dK + M\,dz + z\,dM + K^2\,dx + 2KMz\,dx + M^2z^2\,dx^2$$
$$+ KP\,dx + MPz\,dx + Q\,dx = 0,$$

и после группировки слагаемых находим

$$M\,dz + z(dM + 2KM\,dx + MP\,dx) + M^2z^2\,dx^2$$
$$+ dK + K^2\,dx + KP\,dx + Q\,dx = 0.$$

В этом уравнении второй слева член выпадает, если принять

$$M = Ce^{-\int dx\,(2K+P)} \quad \text{или} \quad K = \frac{-dM - MP\,dx}{2M\,dx}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

835. Еще более общая, сходная с предыдущими, форма уравнения получается, если принять $u = \frac{K + Mz}{L + Nz}$. Тогда

$$dz(LM - KN) + L\,dK - K\,dL + z(L\,dM - M\,dL + N\,dK - K\,dN)$$
$$+ z^2(N\,dM - M\,dN) + (K + Mz)^2\,dx$$
$$+ P(K + Mz)(L + Nz)\,dx + Q(L + Nz)^2\,dx = 0,$$

что приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned}0 = dz(LM - KN) + z[L\,dM - M\,dL + N\,dK - K\,dN +\\ + 2KM\,dx + P(KN + LM)\,dx + 2LNQ\,dx]\\ + z^2(N\,dM - M\,dN + M^2\,dx + MNP\,dx + N^2Q\,dx)\\ + L\,dK - K\,dL + K^2\,dx + KLP\,dx + L^2Q\,dx.\end{aligned}$$

Здесь в качестве K, L, M и N следует выбрать такие функции x, чтобы получить уравнение в наиболее удобном для решения виде.

ПОЯСНЕНИЕ

836. Так как дифференциальные уравнения второго порядка такого рода, что в них переменное y входит в первом измерении, встречаются весьма часто, геометры с полным основанием положили много труда и усилий на решение уравнения

$$du + u^2\,dx + Pu\,dx + Q\,dx = 0.$$

Это уравнение даже в более общем виде может быть представлено следующим образом:

$$dz + Pz\,dx + Rz^2\,dx + Q\,dx = 0.$$

На замечательный [частный] случай последнего уравнения: $dz + z^2\,dx = ax^n\,dx$ некогда указал граф Риккати в весьма заслуживающем внимания исследовании по математическому анализу[1]). Среди преобразований для последнего случая особенно заслуживает быть отмеченной замена $x = t^{\frac{2}{n+2}}$, что даст

$$dz + \frac{2}{n+2}z^2 t^{\frac{-n}{n+2}}\,dt = \frac{2a}{n+2}t^{\frac{n}{n+2}}\,dt,$$

откуда, полагая $z = Ct^{\frac{n}{n+2}}v$, получаем

$$(n+2)Ct^{\frac{n}{n+2}}\,dv + Cnt^{\frac{-2}{n+2}}v\,dt + 2C^2t^{\frac{n}{n+2}}v^2\,dt = 2at^{\frac{n}{n+2}}\,dt,$$

или

$$(n+2)C\,dv + \frac{Cnv\,dt}{t} + 2C^2v^2\,dt = 2a\,dt.$$

Таким образом, в последнее уравнение не входит никакая неопределенная степень t. Если затем положим $v = \frac{\alpha}{t} + s$, то получим

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{(n+2)C\alpha\,dt}{t^2} + (n+2)C\,ds + \frac{nCs\,dt}{t} + 2C^2s^2\,dt\\ &+\frac{nC\alpha\,dt}{t^2} \qquad\qquad\qquad\quad + \frac{4C^2\alpha s\,dt}{t}\\ &+\frac{2C^2\alpha^2\,dt}{t^2}\end{aligned}\right\} = 2a\,dt.$$

---

[1]) Acta erud., 1723, p. 509, Suppl. t VIII, 1724, p. 66. К этому также Dan. Bernoulli, Acta erud. 1725, p. 473. См. Интегральное исчисление, т. I § 441 [Л. Ш.], а также §§ 940—943, 955—966.

Принимая здесь $\alpha = \frac{-n}{4C}$, находим

$$(n+2)C\,ds + 2C^2s^2\,dt = 2a\,dt - \frac{n(n+4)\,dt}{8t^2}.$$

Эта форма представляется простейшей.

ТЕОРЕМА

837. *Если дифференциальному уравнению второго порядка*

$$d^2y + P\,dx\,dy + Qy\,dx^2 = 0,$$

где элемент dx принимается постоянным, удовлетворяют частные интегралы $y = M$ и $y = N$ такие, что отношение $M : N$ не является постоянным, то полным интегралом этого уравнения является $y = \alpha M + \beta N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как значения $y = M$ и $y = N$ удовлетворяют предложенному уравнению, то имеем

$$d^2M + P\,dx\,dM + QM\,dx^2 = 0$$

и

$$d^2N + P\,dx\,dN + QN\,dx^2 = 0,$$

откуда ясно, что уравнению удовлетворяет также $y = \alpha M + \beta N$, так как

$$\alpha(d^2M + P\,dx\,dM + QM\,dx^2) + \beta(d^2N + P\,dx\,dN + QN\,dx^2) = 0.$$

Вследствие того, что в этот интеграл $y = \alpha M + \beta N$ входят два постоянных α и β, которые могут быть заданы произвольно, он необходимо является полным интегралом, если только N не есть кратное M.

СЛЕДСТВИЕ 1

838. Итак, по данным двум частным интегралам уравнения указанного вида можно образовать его полный интеграл, если только исходные два интеграла отличны друг от друга.

СЛЕДСТВИЕ 2

839. Если положить $y = e^{\int u\,dx}$, т. е. $u = \frac{dy}{y\,dx}$, получаем уравнение

$$du + u^2\,dx + Pu\,dx + Q\,dx = 0.$$

Если этому уравнению удовлетворяют значения $u = \frac{dM}{M\,dx}$ и $u = \frac{dN}{N\,dx}$, то ему удовлетворяет также значение $u = \frac{\alpha\,dM + \beta\,dN}{(\alpha N + \beta M)\,dx}$.

СЛЕДСТВИЕ 3

840. Таким образом, если имеем два частных интеграла $u = R$ и $u = S$ уравнения $du + u^2\,dx + Pu\,dx + Q\,dx = 0$, то, так как $M = e^{\int R\,dx}$ и

$N = e^{\int S\,dx}$, полным интегралом будет выражение

$$u = \frac{\alpha e^{\int R\,dx} R + \beta e^{\int S\,dx} S}{\alpha e^{\int R\,dx} + \beta e^{\int S\,dx}}$$

или

$$u = R + \frac{\beta e^{\int S\,dx}(S - R)}{\alpha e^{\int R\,dx} + \beta e^{\int S\,dx}}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

841. Весьма большое значение имеет то обстоятельство, что для уравнений рассматриваемого типа можно указать полный интеграл по двум известным частным интегралам. Очень часто бывает, что известен один частный интеграл, но в него входит знак радикала, и вследствие двузначности последнего тем самым определяются два частных интеграла. Так, например, если уравнению

$$du + u^2\,dx + Pu\,dx + Q\,dx = 0$$

удовлетворяет значение $u = T + \sqrt{V}$, то ему же удовлетворяет $u = T - \sqrt{V}$, откуда получается полный интеграл

$$u = T + \sqrt{V} - \frac{2\beta\sqrt{V}}{\alpha e^{2\int dx\,\sqrt{V}} + \beta}$$

или

$$u = T + \frac{\alpha e^{2\int dx\,\sqrt{V}}\sqrt{V} - \beta\sqrt{V}}{\alpha e^{2\int dx\,\sqrt{V}} + \beta}.$$

Если бы оказалось, что $\sqrt{V}$ мнимое количество, то мы положили бы $\sqrt{V} = X\sqrt{-1}$. Так как $e^{\pm\int dx\,\sqrt{V}} = \cos\int X\,dx \pm \sqrt{-1}\sin\int X\,dx$, получим

$$u = T + \frac{(\alpha - \beta)\cos\int X\,dx + (\alpha + \beta)\sin\int X\,dx \cdot \sqrt{-1}}{(\alpha + \beta)\cos\int X\,dx + (\alpha - \beta)\sin\int X\,dx\,\sqrt{-1}} \cdot X\sqrt{-1},$$

или же, полагая $(\alpha - \beta)\sqrt{-1} = \gamma$ и $\alpha + \beta = \delta$,

$$u = T + \frac{\gamma\cos\int X\,dx - \delta\sin\int X\,dx}{\delta\cos\int X\,dx + \gamma\sin\int X\,dx} \cdot X$$

либо также

$$u = T + X\,\mathrm{tg}\left(\int X\,dx + \zeta\right).$$

ЗАДАЧА 102

842. *Найти полный интеграл дифференциального уравнения второго порядка*

$$d^2y + Ay\,dx + By\,dx^2 = 0,$$

считая элемент dx постоянным.

РЕШЕНИЕ

Положив $y = e^{\int u\,dx}$, приходим к уравнению

$$du + u^2\,dx + Au\,dx + B\,dx = 0$$

или

$$dx = \frac{-du}{u^2 + Au + B},$$

которому удовлетворим, придавая u такое постоянное значение, чтобы получилось $u^2 + Au + B = 0$, т. е. полагая

$$u = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{\frac{1}{4}A^2 - B}.$$

Таким образом, поскольку получаем два частных интеграла вида $y = e^{\int u\,dx}$, то, если положить $\sqrt{\frac{1}{4}A^2 - B} = n$, полным интегралом будет

$$y = e^{-\frac{1}{2}Ax}(\alpha e^{nx} + \beta e^{-nx}).$$

Если же n есть мнимое число, положим $n = m\sqrt{-1}$, тогда

$$y = e^{-\frac{1}{2}Ax}(\alpha \cos mx + \beta \sin mx) = Ce^{-\frac{1}{2}Ax}\sin(mx + \gamma).$$

Если же $n = 0$, получаем

$$y = e^{-\frac{1}{2}Ax}(\alpha + \beta x).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

843. Итак, для того чтобы найти интеграл предложенного уравнения, надо решить алгебраическое уравнение

$$u^2 + Au + B = 0,$$

которое получается из предложенного $d^2y + A\,dy\,dx + By\,dx^2 = 0$ заменой y, dy, d^2y на u^0, u^1, u^2 и отбрасыванием элемента dx. Два корня этого алгебраического уравнения определяют полный интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 2

844. Очевидно, что если множителями уравнения $u^2 + Au + B = 0$ являются $u + f$ и $u + g$, т. е. имеем значения $u = -f$ и $u = -g$, то полным интегралом будет $y = \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx}$. А если $g = f$, то $y = e^{-fx}(\alpha + \beta x)$.

СЛЕДСТВИЕ 3

845. Если множители уравнения $u^2+Au+B=0$ мнимые, а в этом случае оно будет вида

$$u^2+2fu\cos\zeta+f^2=0,$$

то получаем

$$u=-f\cos\zeta\pm f\sqrt{-1}\sin\zeta,$$

откуда следует, что полным интегралом будет

$$y=e^{-fx\cos\zeta}[\alpha\cos(fx\sin\zeta)+\beta\sin(fx\sin\zeta)],$$

или

$$y=Ce^{-fx\cos\zeta}\sin(fx\sin\zeta+\gamma).$$

ПОЯСНЕНИЕ

846. Тот же полный интеграл можно найти обычным методом из уравнения $dx=\frac{-du}{u^2+Au+B}$; действительно, полагая

$$u^2+Au+B=(u+f)(u+g),$$

получаем

$$(g-f)\,dx=\frac{du}{u+g}-\frac{du}{u+f} \quad \text{и} \quad Ce^{(g-f)x}=\frac{u+g}{u+f},$$

откуда

$$u=\frac{g-Cfe^{(g-f)x}}{Ce^{(g-f)x}-1}$$

или

$$u=\frac{-\alpha fe^{gx}+\beta ge^{fx}}{\alpha e^{gx}-\beta e^{fx}}.$$

Поэтому

$$\int u\,dx=-\int\frac{\alpha fe^{(g-f)}-\beta g}{\alpha e^{(g-f)x}-\beta}\,dx=-\int\frac{u\,du}{(u+f)(u+g)}$$

и, следовательно,

$$\int u\,dx=\frac{f}{g-f}\,l(u+f)-\frac{g}{g-f}\,l(u+g),$$

откуда находим

$$y=e^{\int u\,dx}=C(u+f)^{\frac{f}{g-f}}(u+g)^{\frac{-g}{g-f}}.$$

Вместе с тем

$$u+f=\frac{\beta(g-f)e^{fx}}{\alpha e^{gx}-\beta e^{fx}} \quad \text{и} \quad u+g=\frac{\alpha(g-f)e^{gx}}{\alpha e^{gx}-\beta e^{fx}},$$

что дает нам, с изменением постоянного C,

$$y=\frac{Ce^{\frac{f^2x}{g-f}}e^{\frac{-g^2x}{g-f}}}{(\alpha e^{gx}-\beta e^{fx})^{\frac{f-g}{g-f}}}=Ce^{-(f+g)x}(\alpha e^{gx}-\beta e^{fx}),$$

т. е. $y=\alpha e^{-fx}+\beta e^{-gx}$, как раньше. Это ясно показывает, насколько удобным является построение полного интеграла по двум частным.

ЗАДАЧА 103

847. *Пусть предложено дифференциальное уравнение второго порядка*

$$d^2y+\frac{A\,dy\,dx}{x}+\frac{By\,dx^2}{x^2}=0,$$

где элемент dx принимается постоянным; найти его полный интеграл.

РЕШЕНИЕ

Положим $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$. Получаем уравнение

$$q+\frac{Ap}{x}+\frac{By}{x^2}=0 \text{ или } q=\frac{-Ap}{x}-\frac{By}{x^2}.$$

Пусть теперь $p=\frac{uy}{x}$, тогда

$$dy=\frac{uy\,dx}{x} \text{ и } dp=\frac{u\,dy+y\,du}{x}-\frac{uy\,dx}{x^2}=-\frac{A\,dy}{x}-\frac{By\,dx}{x^2},$$

откуда находим

$$\frac{dy}{y}=\frac{u\,dx}{x}=\frac{u\,dx-B\,dx-x\,du}{xu+Ax},$$

или

$$x\,du+B\,dx+u^2\,dx+(A-1)u\,dx=0.$$

Отсюда следует, что $\frac{dx}{x}=\frac{-du}{u^2+(A-1)u+B}$. Этому уравнению мы, в частности, удовлетворим, полагая $u^2+(A-1)u+B=0$.

Пусть, во-первых, $u^2+(A-1)u+B=(u+f)(u+g)$; тогда, в частности, $ly=-flx$ и $y=x^{-f}$, соответственно, $y=x^{-g}$. Поэтому общий интеграл есть

$$y=\alpha x^{-f}+\beta x^{-g}.$$

Если $g=f$, принимаем $g=f-\omega$ при исчезающем ω и получаем

$$x^{-g}=x^{-f}x^{\omega}=x^{-f}(1+\omega lx),$$

следовательно, в этом случае

$$y=x^{-f}(\alpha+\beta lx).$$

Пусть, наконец,

$$u^2+(A-1)u+B=u^2+2fu\cos\zeta+f^2,$$

тогда $u=-f(\cos\zeta\pm\sqrt{-1}\sin\zeta)$, следовательно, в частности,

$$y=x^{-f\cos\zeta}\cdot x^{\pm f\sqrt{-1}\sin\zeta}=x^{-f\cos\zeta}[\cos(f\sin\zeta\,lx)\pm\sqrt{-1}\cdot\sin(f\sin\zeta\,lx)].$$

Таким образом, общим интегралом будет

$$y=Cx^{-f\cos\zeta}\sin(f\sin\zeta\cdot lx+\gamma).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

848. Итак, полным интегралом уравнения

$$d^2y+(f+g+1)\frac{dy\,dx}{x}+\frac{fgy\,dx^2}{x^2}=0$$

является

$$y = \alpha x^{-f} + \beta x^{-g},$$

а для уравнения

$$d^2y + (2f+1)\frac{dy\,dx}{x} + \frac{f^2y\,dx^2}{x^2} = 0$$

полным интегралом будет

$$y = x^{-f}(\alpha + \beta lx).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

849. Если же предложенное уравнение будет следующего вида:

$$d^2y + (1 + 2f\cos\zeta)\frac{dy\,dx}{x} + \frac{f^2y\,dx^2}{x^2} = 0,$$

то его полным интегралом является

$$y = Cx^{-f\cos\zeta}\sin(f\sin\zeta\cdot lx + \gamma).$$

ПОЯСНЕНИЕ

850. Таким же образом решается дифференциальное уравнение второго порядка

$$d^2y - \frac{ndy\,dx}{x} + Ax^n\,dy\,dx + Bx^{2n}y\,dx^2 = 0.$$

Действительно, положим $dy = x^n yu\,dx$; так как

$$d^2y = x^n y\,dx\,du + nx^{n-1}yu\,dx^2 + x^{2n}yu^2\,dx^2,$$

то, деля на y, находим

$$x^n\,dx\,du + nx^{n-1}u\,dx^2 + x^{2n}u^2\,dx^2 - nx^{n-1}u\,dx^2 + Ax^{2n}u\,dx^2 + Bx^{2n}\,dx^2 = 0.$$

Отсюда получаем

$$du + x^n u^2\,dx + Ax^n u\,dx + Bx^n\,dx = 0,$$

следовательно,

$$x^n\,dx = \frac{-du}{u^2 + Au + B}\,.$$

В частности, этому уравнению удовлетворим, полагая $u^2 + Au + B = 0$, откуда получаем два постоянных значения для u, из которых одно пусть будет $-f$, а другое $-g$. В соответствии с этим получаем частные интегралы

$$y = e^{\frac{-f}{n+1}x^{n+1}} \quad \text{и} \quad y = e^{\frac{-g}{n+1}x^{n+1}}.$$

Пусть, для краткости записи, $\frac{x^{n+1}}{n+1} = t$. Тогда полным интегралом будет

$$y = \alpha e^{-ft} + \beta e^{-gt},$$

разумеется, в том случае, когда

$$u^2 + Au + B = (u+f)(u+g).$$

Для случая же, когда $u^2+Au+B=(u+f)^2$, получаем

$$y=e^{-ft}(\alpha+\beta t).$$

В том же случае, когда

$$u^2+Au+B=u^2+2fu\cos\zeta+f^2;$$

получим

$$y=Ce^{-ft\cos\zeta}\sin(ft\sin\zeta+\gamma).$$

Этот способ интегрирования может быть применен и к уравнению такого вида:

$$d^2y-\frac{dx\,dy}{X}+AX\,dy\,dx+BX^2y\,dx^2=0,$$

где X обозначает какую угодно функцию от x. Действительно, положим $dy=Xuy\,dx$, или $\frac{dy}{y}=Xu\,dx$. Тогда

$$X\,dx=\frac{-du}{u^2+Au+B},$$

откуда, полагая $\int X\,dx=t$, получим полный интеграл так же, как и ранее. А именно:

1) если $A=f+g$ и $B=fg$, интегралом будет

$$y=\alpha e^{-ft}+\beta e^{-gt};$$

2) если $A=2f$ и $B=f^2$, интегралом будет

$$y=e^{-ft}(\alpha+\beta t);$$

3) если $A=2f\cos\zeta$ и $B=f^2$, интегралом будет

$$y=Ce^{-ft\cos\zeta}\sin(ft\sin\zeta+\gamma).$$

ЗАДАЧА 104

851. *Свести интегрирование следующего дифференциального уравнения второго порядка:*

$$d^2y+P\,dy\,dx+Qy\,dx^2=X\,dx^2$$

к дифференциальному уравнению первого порядка, если P, Q и X обозначают какие угодно функции от x, а элемент dx считается постоянным.

РЕШЕНИЕ

Здесь мы будем действовать особым образом и введем вместо y два новых неизвестных. А именно, мы положим $y=uv$, и, так как

$$dy=u\,dv+v\,du \quad \text{и} \quad d^2y=u\,d^2v+2du\,dv+v\,d^2u,$$

наше уравнение будет преобразовано к виду

$$u\,d^2v+2du\,dv+v\,d^2u+Pu\,dx\,dv+Pv\,dx\,du+Quv\,dx^2=X\,dx^2.$$

Теперь одно из неизвестных v определим так, чтобы исчезли те члены, в которые входит буква u, что произойдет, если

$$d^2v + P\,dx\,dv + Qv\,dx^2 = 0.$$

Отсюда, как показано выше [§ 831], v определяется через x, и, когда это сделано, остается уравнение

$$2du\,dv + v\,d^2u + Pv\,dx\,du = X\,dx^2,$$

из которого, поскольку v уже выражено через x, должно быть определено количество u. Мы полагаем $du = s\,dx$ и получаем

$$v\,ds + 2s\,dv + Psv\,dx = X\,dx.$$

Это уравнение после умножения на $ve^{\int P\,dx}$ становится интегрируемым. Действительно, получаем

$$v^2se^{\int P\,dx} = \int e^{\int P\,dx} Xv\,dx$$

и, следовательно,

$$s = \frac{e^{-\int P\,dx}}{v^2} \int e^{\int P\,dx} Xv\,dx$$

и

$$u = \int \frac{e^{-\int P\,dx}\,dx}{v^2} \int e^{\int P\,dx} Xv\,dx.$$

Таким образом, поскольку неизвестное v определяется из уравнения

$$d^2v + P\,dx\,dv + Qv\,dx^2 = 0,$$

интегралом предложенного уравнения будет

$$y = v \int \frac{e^{-\int P\,dx}\,dx}{v^2} \int e^{\int P\,dx} Xv\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

852. Чтобы свести интегрирование к дифференциальному уравнению первого порядка, полагаем $v = e^{\int t\,dx}$, причем количество t определяется из следующего уравнения:

$$dt + t^2\,dx + Pt\,dx + Q\,dx = 0.$$

Когда это выполнено, искомым интегралом будет

$$y = e^{\int t\,dx} \int e^{-\int (P+2t)\,dx} \int e^{\int (P+t)\,dx} X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

853. Так как $(P+t)\,dx = -\frac{dt}{t} - \frac{Q\,dx}{t}$, то получаем

$$e^{\int (P+t)\,dx} = \frac{1}{t} e^{-\int \frac{Q\,dx}{t}}$$

и отсюда

$$y = e^{\int t\,dx} \int e^{\int \frac{Q\,dx}{t} - \int t\,dx} t\,dx \int e^{-\int \frac{Q\,dx}{t}} X \frac{dx}{t},$$

и здесь два интегрирования дают полный интеграл.

ПОЯСНЕНИЕ 1

854. Можно осуществить то же самое интегрирование другим способом, который ближе примыкает к ранее использованному. А именно, положим в предложенном уравнении $dy = ty\,dx + v\,dx$, где v обозначает некоторую функцию от x, которая подлежит определению по функции X. А так как имеем

$$d^2y = y\,dt\,dx + (ty\,dx + v\,dx)\,t\,dx + dv\,dx,$$

то, проделав подстановку, найдем

$$y\,dt\,dx + t^2y\,dx^2 + Pty\,dx^2 + Qy\,dx^2 + tv\,dx^2 + dv\,dx + Pv\,dx^2 - X\,dx^2 = 0.$$

Каждую группу слагаемых в этом уравнении, как ту, что содержит множитель y, так и свободную от y, в отдельности приравниваем нулю и, таким образом, получаем следующие два уравнения:

$$dt + t^2\,dx + Pt\,dx + Q\,dx = 0$$

и

$$dv + tv\,dx + Pv\,dx = X\,dx.$$

Первое из этих уравнений определяет, как и раньше, t через x, а из второго получаем

$$e^{\int (P+t)\,dx} = \int e^{\int (P+t)\,dx} X\,dx.$$

Затем из принятого нами соотношения $dy - ty\,dx = v\,dx$ следует

$$e^{-\int t\,dx} y = \int e^{-\int t\,dx} v\,dx.$$

Если здесь мы подставим вместо v найденное его значение, получим интеграл в том же виде, что и в предыдущем пункте.

ПОЯСНЕНИЕ 2

855. Как видно, из этих преобразований следует, что интегрирование предложенного уравнения

$$d^2y + P\,dy\,dx + Qy\,dx^2 = X\,dx^2$$

зависит от интегрирования уравнения

$$d^2v + P\,dv\,dx + Qv\,dx^2 = 0,$$

поскольку, если удастся решить второе, то можно найти интеграл первого. Однако вовсе не следует заключать отсюда, что, наоборот, если для решения последнего наших сил недостаточно, то и первое уравнение ни в коем случае нельзя проинтегрировать. Напротив, легко указать бесчисленное множество случаев, когда первое уравнение допускает интегрирование, в то время как последнее остается неразрешимым. Действительно, пусть $P=0$ и $Q=\alpha x$. Несомненно, второе уравнение $d^2v + \alpha xv\,dx^2 = 0$ до сих пор нельзя было решить никаким способом[1]), так как, полагая $v = e^{\int t\,dx}$, приведем его к виду

$$dt + t^2dx + \alpha x\,dx = 0.$$

Однако отсюда вовсе не следует, что исходное уравнение

$$d^2y + \alpha xy\,dx^2 = X\,dx^2$$

всегда оказывается неприступным, так как можно указать сколько угодно значений для X, при которых интегрирование удается. В самом деле, считая y некоторой функцией только от x, мы найдем X в виде такой функции, что уравнению будет удовлетворять принятое для y значение. Например, если положить $y=\frac{\beta x}{\alpha}$, то, так как $d^2y=0$, получим, что $X=\beta x^2$, и, таким образом, уравнению

$$d^2y + \alpha xy\,dx^2 = \beta x^2\,dx^2$$

удовлетворяет интеграл $y=\frac{\beta x}{\alpha}$. Впрочем, этот интеграл — только частный интеграл и в связи с этим можно усомниться, удастся ли также найти полный интеграл. И действительно, если мы положим $y=\frac{\beta x}{\alpha}+z$, то для того, чтобы найти полный интеграл, получаем уравнение $d^2z + \alpha xz\,dx^2 = 0$, и так как оно не допускает решения, очевидно, что в общем случае нельзя получить выражение для полного интеграла, если второе уравнение не допускает интегрирования.

ЗАДАЧА 105

856. *Найти полный интеграл следующего дифференциального уравнения второго порядка*

$$d^2y + A\,dy\,dx + By\,dx^2 = X\,dx^2,$$

где X обозначает какую угодно функцию только от x, а элемент dx считаем постоянным.

РЕШЕНИЕ

Положив $y=uv$, мы приведем данное уравнение к таким двум уравнениям:

$$d^2v + A\,dv\,dx + Bv\,dx^2 = 0$$

[1]) См. § 929, при $n=1$ [Л. Ш.].

и

$$v\,d^2u + 2dv\,du + Av\,dx\,du = X\,dx^2.$$

Так как из первого уравнения значение v определяется через x, то полный интеграл находим из второго уравнения в виде

$$y = v\int \frac{e^{-Ax}dx}{v^2}\int e^{Ax}\,Xv\,dx,$$

так как в данном случае $P = A$. Поскольку двойное интегрирование в выражении для y дает полный интеграл, в качестве v достаточно взять частный интеграл первого уравнения, что ясно также и из общего решения. А так как для решения первого уравнения нужно составить квадратное уравнение $t^2 + At + B = 0$, то для характеристики полного интеграла надлежит рассмотреть три случая.

I. Если $t^2 + At + B = (t+f)(t+g)$, так что $A = f+g$ и $B = fg$, то $v = \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx}$. Возьмем сначала только частный интеграл $v = e^{-fx}$; так как $A = f+g$, то

$$y = e^{-fx}\int e^{(f-g)x}\,dx\int e^{gx}\,X\,dx.$$

Пусть $e^{(f-g)x}\,dx = dR$ и $\int e^{gx}\,X\,dx = S$, так что

$$y = e^{-fx}\int S\,dR = e^{-fx}\left(RS - \int R\,dS\right).$$

Но $R = \frac{1}{f-g}\,e^{(f-g)x}$, откуда следует, что

$$y = \frac{1}{f-g}\,e^{-gx}S - \frac{1}{f-g}\,e^{-fx}\int e^{fx}X\,dx$$

или

$$(f-g)\,y = e^{-gx}\int e^{gx}\,X\,dx - e^{-fx}\int e^{fx}X\,dx.$$

Мы получили бы тот же самый интеграл, если бы воспользовались другим частным интегралом $v = e^{-gx}$.

Вообще же, полагая $v = \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx}$, обозначим, как и выше,

$$\frac{e^{-(f+g)x}\,dx}{v^2} = dR \quad \text{и} \quad \int e^{(f+g)x}\,Xv\,dx = S,$$

так что подобно тому, как выше,

$$y = v\int S\,dR = v\,(RS - \int R\,dS).$$

Представим R в виде $\frac{Ce^{\lambda x}}{v}$; так как $dv = -dx\,(\alpha f e^{-fx} + \beta g e^{-gx})$, то

$$dR = \frac{Ce^{\lambda x}\,dx\,(\alpha\lambda e^{-fx} + \beta\lambda e^{-gx} + \alpha f e^{-fx} + \beta g e^{-gx})}{v^2}.$$

Для того чтобы dR имело заданное значение, должно быть $\lambda = -g$ и $C\alpha\,(f-g) = 1$. Так как $C = \frac{1}{\alpha\,(f-g)}$, получаем, что

$$R = \frac{e^{-gx}}{\alpha\,(f-g)\,v} \quad \text{и} \quad R\,dS = \frac{1}{\alpha\,(f-g)}\,e^{fx}\,X\,dx.$$

Таким образом,

$$S = \alpha \int e^{gx} X\, dx + \beta \int e^{fx} X\, dx,$$

откуда заключаем, что

$$y = v\left(\frac{e^{-gx}}{(f-g)\, v} \int e^{gx} X\, dx + \frac{\beta e^{-gx}}{\alpha\,(f-g)\, v} \int e^{fx} X\, dx - \frac{1}{\alpha\,(f-g)} \int e^{fx}\, X\, dx \right),$$

или совершенно так же, как и раньше,

$$(f-g)\, y = e^{-gx} \int e^{gx}\, X\, dx - e^{-fx} \int e^{fx}\, X\, dx.$$

II. Если $t^2 + At + B = (t+f)^2$, то есть $A = 2f$ и $B = f^2$, мы получаем из первого уравнения, что $v = e^{-fx}\,(\alpha + \beta x)$. Положим, как и выше,

$$\frac{e^{-2fx}\, dx}{v^2} = dR \quad \text{и} \quad \int e^{2fx} Xv\, dx = S.$$

Таким образом, $y = v\left(RS - \int R\, dS \right)$. А так как $dR = \frac{dx}{(\alpha + \beta x)^2}$, то

$$R = -\frac{1}{\beta\,(\alpha + \beta x)} = -\frac{e^{-fx}}{\beta v}$$

$$S = \alpha \int e^{fx} X\, dx + \beta \int e^{fx} Xx\, dx = \int e^{fx} X\, dx\, (\alpha + \beta x).$$

Поэтому

$$vRS = -\frac{\alpha}{\beta}\, e^{-fx} \int e^{fx} X\, dx - e^{-fx} \int e^{fx}\, Xx\, dx \quad \text{и} \quad \int R\, dS = -\frac{1}{\beta} \int e^{fx} X\, dx,$$

откуда следует, что

$$y = e^{-fx}\, x \int e^{fx} X\, dx - e^{-fx} \int e^{fx} Xx\, dx.$$

Или, иначе, так как $d(e^{fx} y) = dx \int e^{fx} X\, dx$, то в более сжатой форме

$$y = e^{-fx} \int dx \int e^{fx} X\, dx.$$

III. Если $t^2 + At + B = t^2 + 2ft \cos\zeta + f^2$, то есть $A = 2f\cos\zeta$ и $B = f^2$, то получаем

$$v = e^{-fx\cos\zeta} \sin(fx \sin\zeta + \gamma).$$

Положим

$$\frac{e^{-2fx\cos\zeta}\, dx}{v^2} = \frac{dx}{\sin^2(fx\sin\zeta + \gamma)} = dR$$

и

$$e^{2fx\cos\zeta}\, Xv\, dx = e^{fx\cos\zeta}\, X\, dx \sin(fx \sin\zeta + \gamma) = dS,$$

так чтобы иметь $y = vRS - v \int R\, dS$. А так как

$$R = -\frac{1}{f\sin\zeta}\, \frac{\cos(fx\sin\zeta + \gamma)}{\sin(fx\sin\zeta + \gamma)},$$

то получаем

$$vRS = -\frac{1}{f\sin\zeta} e^{-xf\cos\zeta}\cos(fx\sin\zeta+\gamma)\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx \sin(fx\sin\zeta+\gamma)$$

и

$$\int R\,dS = -\frac{1}{f\sin\zeta}\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\cos(fx\sin\zeta+\gamma).$$

Поэтому будем иметь

$$fy\sin\zeta = +e^{-fx\cos\zeta}\sin(fx\sin\zeta+\gamma)\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\cos(fx\sin\zeta+\gamma)$$
$$-e^{fx\cos\zeta}\cos(fx\sin\zeta+\gamma)\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\sin(fx\sin\zeta+\gamma).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

857. Если в этом последнем интеграле положим $fx\sin\zeta=\varphi$, то получим

$$fe^{fx\cos\zeta} y\sin\zeta = (\sin\gamma\cos\varphi+\cos\gamma\sin\varphi)\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx(\cos\gamma\cos\varphi-\sin\gamma\sin\varphi)$$
$$+(\sin\gamma\sin\varphi-\cos\gamma\cos\varphi)\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx(\sin\gamma\cos\varphi+\cos\gamma\sin\varphi),$$

то есть

$$fe^{fx\cos\zeta} y\sin\zeta =$$
$$+\sin\gamma\cos\gamma\cos\varphi\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\cos\varphi-\sin^2\gamma\cos\varphi\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\sin\varphi$$
$$+\cos^2\gamma\sin\varphi\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\cos\varphi-\sin\gamma\cos\gamma\sin\varphi\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\sin\varphi$$
$$+\sin^2\gamma\sin\varphi\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\cos\varphi+\sin\gamma\cos\gamma\sin\varphi\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\sin\varphi$$
$$-\sin\gamma\cos\gamma\cos\varphi\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\cos\varphi-\cos^2\gamma\cos\varphi\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\sin\varphi.$$

Отсюда видно, что угол γ полностью исключается из вычислений; действительно, получаем

$$fe^{fx\cos\zeta} y\sin\zeta = \sin\varphi\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\cos\varphi-\cos\varphi\int e^{fx\cos\zeta} X\,dx\sin\varphi.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

858. Мы видим, таким образом, что если вместо одного уравнения мы составляем два подлежащие интегрированию уравнения, то достаточно знать только частный интеграл одного из них. Действительно, в обоих предшествующих случаях постоянные α и β, входящие в полный интеграл, сами собою выпадают из наших вычислений, а в третьем случае то же самое происходит с постоянным γ.

ПРИМЕР

859. *Найти интеграл уравнения*

$$d^2y + A\,dy\,dx + By\,dx^2 = dx^2\,[n(n-1)\,x^{n-2} + nAx^{n-1} + Bx^n],$$

где элемент dx принимаем постоянным.

Этот пример составлен таким образом, что данному уравнению, очевидно, удовлетворяет значение $y = x^n$, что и составляет его частный интеграл. Итак, для того чтобы найти полный интеграл, положим $A = f + g$ и $B = fg$. А так как [в данном случае]

$$X = fgx^n + n(f+g)\,x^{n-1} + n(n-1)\,x^{n-2},$$

то

$$\int e^{gx} X\,dx = fe^{gx}\,x^n + ne^{gx}\,x^{n-1} + \alpha$$

и

$$\int e^{fx} X\,dx = ge^{fx}\,x^n + ne^{fx}\,x^{n-1} + \beta.$$

Таким образом, в соответствии с найденными нами формулами получаем полный интеграл в виде

$$(f-g)\,y = fx^n + nx^{n-1} + \alpha e^{-gx} - gx^n - nx^{n-1} - \beta e^{-fx},$$

или, иначе,

$$y = x^n + \frac{\alpha}{f-g}\,e^{-gx} - \frac{\beta}{f-g}\,e^{-fx}.$$

Меняя запись постоянных, получаем

$$y = x^n + \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx}.$$

Если бы мы имели $g = f$, то следовало бы положить $g = f + \omega$ при исчезающем ω, и, так как [тогда] $e^{-gx} = e^{-fx}\cdot e^{-\omega x} = e^{-fx}(1-\omega x)$, получим

$$y = x^n + e^{-fx}(\alpha + \beta x),$$

если вместо $\alpha + \beta$ и $-\beta\omega$ будем писать [соответственно] α и β. Если же

$$f = a + b\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad g = a - b\sqrt{-1},$$

то получаем

$$y = x^n + e^{-ax}\,(\alpha e^{-bx\sqrt{-1}} + \beta e^{bx\sqrt{-1}}),$$

или, меняя запись постоянных и учитывая, что

$$e^{\pm bx\sqrt{-1}} = \cos bx \pm \sqrt{-1}\sin bx,$$

находим

$$y = x^n + e^{-ax}\,(\alpha\cos bx + \beta\sin bx).$$

ПОЯСНЕНИЕ

860 Вообще, если частным интегралом уравнения вида

$$d^2y + A\,dy\,dx + By\,dx^2 = X\,dx^2$$

является значение $y=t$, то легко найти полный интеграл, полагая $y=t+z$. Действительно, в силу нашего допущения имеем

$$d^2t+A\,dt\,dx+Bt\,dx^2=X\,dx^2.$$

Поэтому, выполнив указанную подстановку, получим

$$d^2z+A\,dz\,dx+Bz\,dx^2=0,$$

откуда, если $A=f+g$ и $B=fg$, находим

$$z=\alpha e^{-fx}+\beta e^{-gx}.$$

Таким образом, полным интегралом является выражение

$$y=t+\alpha e^{-fx}+\beta e^{-gx}$$

в соответствии с тем, что мы уже видели в предыдущем примере.

ЗАДАЧА 106

861. *Предложено дифференциальное уравнение второго порядка*

$$d^2y-\frac{n\,dy\,dx}{x}+Ax^n\,dy\,dx+Bx^{2n}y\,dx^2=X\,dx^2,$$

причем элемент dx считаем постоянным, а X — любая функция только от x; определить его полный интеграл.

РЕШЕНИЕ

Можно решить это уравнение, как и выше, исходя из подстановки $y=uv$, но мы воспользуемся здесь другим методом для того, чтобы посредством несложной подстановки свести эту задачу к предыдущей. А именно, мы положим $x^n\,dx=dt$, так что $x^{n+1}=(n+1)\,t$, и при этой подстановке функция X перейдет в T — некоторую функцию от t. Чтобы нас не затрудняло допущение о постоянстве элемента dx, мы устраним это условие, полагая $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$, и получим, таким образом, уравнение

$$q-\frac{np}{x}+Ax^np+Bx^{2n}y=X.$$

Теперь, так как $dx=\frac{dt}{x^n}$, то $p=\frac{x^n\,dy}{dt}$, и поэтому, полагая уже элемент dt постоянным, получаем

$$dp=\frac{nx^{n-1}\,dx\,dy}{dt}+\frac{x^nd^2y}{dt}=q\,dx=\frac{q\,dt}{x^n}.$$

Следовательно,

$$q=\frac{nx^{n-1}dy}{dt}+\frac{x^{2n}\,d^2y}{dt^2},$$

и, таким образом, наше уравнение принимает вид

$$\frac{x^{2n}\,d^2y}{dt^2}+\frac{nx^{n-1}\,dy}{dt}-\frac{nx^{n-1}dy}{dt}+\frac{Ax^{2n}\,dy}{dt}+Bx^{2n}y=X.$$

Пусть $Xx^{-2n}=\theta$, и это количество в силу того, что $x^{n+1}=(n+1)t$, можно рассматривать как функцию только от t. Итак, получаем

$$d^2y+A\,dy\,dt+By\,dt^2=\theta\,dt^2,$$

и в этом уравнении элемент dt рассматривается как постоянный. Интеграл этого уравнения определяется, как показано выше [§ 856].

I. Если $A=f+g$ и $B=fg$, получаем интеграл в виде

$$(f-g)y=e^{-gt}\int e^{gt}\theta\,dt-e^{-ft}\int e^{ft}\theta\,dt.$$

Если здесь вернуться к значениям $dt=x^n dx$ и $\theta=Xx^{-2n}$, сохраняя для краткости обозначение $t=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, то получим выражение y через x в следующем виде:

$$(f-g)y=e^{-gt}\int e^{gt}x^{-n}X\,dx-e^{-ft}\int e^{ft}x^{-n}X\,dx.$$

II. Если $A=2f$ и $B=f^2$, то интеграл имеет вид

$$y=e^{-ft}t\int e^{ft}\theta\,dt-e^{-ft}\int e^{ft}\theta t\,dt,$$

или

$$y=e^{-ft}\int dt\int e^{ft}\theta\,dt,$$

следовательно, y выражается через x в таком виде:

$$y=e^{-ft}\int x^n dx\int e^{ft}x^{-n}X\,dx.$$

III. Если, наконец, $A=2f\cos$ и $B=f^2$, то интеграл получаем в виде

$$fe^{ft\cos\zeta}y\sin\zeta=\sin\varphi\int e^{ft\cos\zeta}\theta\,dt\cos\varphi-\cos\varphi\int e^{ft\cos\zeta}\theta\,dt\sin\varphi,$$

причем $\varphi=ft\sin\zeta$, то есть $\varphi=\frac{f\sin\zeta}{n+1}x^{n+1}$, так как $t=\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Поэтому интегралом предложенного уравнения будет

$$fe^{ft\cos\zeta}y\sin\zeta=\sin\varphi\int e^{ft\cos\zeta}x^{-n}X\,dx\cos\varphi-\cos\varphi\int e^{ft\cos\zeta}x^{-n}X\,dx\sin\varphi.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

862. Если $n=0$, рассматриваемое уравнение переходит в такое же, какое мы имели в предыдущей задаче, стоит только положить $t=x$, и мы получим таким образом интеграл этого уравнения.

СЛЕДСТВИЕ 2

863. Пусть теперь $n=-1$. Тогда наше уравнение принимает вид

$$d^2y+(A+1)\frac{dy\,dx}{x}+\frac{By\,dx^2}{x^2}=X\,dx^2.$$

При этом будем иметь $t=lx$ и $e^{\lambda t}=x^\lambda$, и в указанном выше третьем случае угол $\varphi=f\sin\zeta lx$.

ПОЯСНЕНИЕ

864. Тот метод, которым мы здесь пользовались для интегрирования дифференциальных уравнений рассмотренного типа, не представляется достаточно естественным, поскольку он применим едва ли не только к уравнениям этого типа. А так как при рассмотрении дифференциального уравнения первого порядка определение множителей, которые делают эти уравнения интегрируемыми, оказалось весьма полезным, мы попытаемся показать применение этого метода к дифференциальным уравнениям второго порядка. Здесь нет основания ожидать настолько общих результатов, чтобы этот метод оказался подходящим чуть ли не для всех видов уравнений. Однако, если мы сможем его использовать хотя бы в малой мере, это надо будет считать заслуживающим внимания вкладом в математический анализ[1]). Но с помощью этого метода можно достаточно удобным образом трактовать прежде всего такие дифференциальные уравнения, в которых одно из переменных y со своими дифференциалами нигде не превышает первого измерения, и это указывает на путь, следуя по которому этот метод надлежит развивать далее[2]).

---

[1]) Sed quantillum etiam praestare potuerimus, id haud contemnendum, Analyseos incrementum spectari debebit.

[2]) Hincque via perspicietur, quomodo eam magis excoli oporteat.

ГЛАВА V

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ С ПОМОЩЬЮ МНОЖИТЕЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, В КОТОРЫХ ОДНО ИЗ ПЕРЕМЕННЫХ НЕ ПРЕВЫШАЕТ ПЕРВОГО ИЗМЕРЕНИЯ

ЗАДАЧА 107

835. *Пусть предложено уравнение*

$$d^2y + A\,dx\,dy + By\,dx^2 = X\,dx^2,$$

где X обозначает какую угодно функцию от x, а элемент dx считается постоянным. Найти такую функцию от x, после умножения на которую заданное уравнение становится интегрируемым.

РЕШЕНИЕ

Положим $dy = p\,dx$, чтобы получить уравнение в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$dp + Ap\,dx + By\,dx = X\,dx.$$

Пусть это уравнение становится интегрируемым после умножения на некоторую функцию V от x. Таким образом,

$$Vdp + AVp\,dx + BVy\,dx = VX\,dx,$$

причем, поскольку правая часть $VX\,dx$ должна быть интегрируемой, то то же самое должно иметь место для левой части. Но сразу видно, что в интеграл этой левой части должно входить слагаемое Vp. Поэтому мы положим этот интеграл равным $Vp + S$, так что $Vp + S = \int VX\,dx$, откуда следует, что

$$dS = -p\,dV + AVp\,dx + BVy\,dx,$$

или

$$dS = dy\left(AV - \frac{dV}{dx}\right) + BVy\,dx.$$

Последнее выражение можно сделать интегрируемым, приняв $V=e^{\lambda x}$; действительно, тогда

$$dS=e^{\lambda x}((A-\lambda)\,dy+By\,dx) \text{ и } S=(A-\lambda)\,e^{\lambda x}y,$$

причем λ надо подобрать таким образом, чтобы

$$A\lambda-\lambda^2=B, \text{ то есть } \lambda^2-A\lambda+B=0.$$

Стало быть тогда получаем

$$e^{\lambda x}p+(A-\lambda)\,e^{\lambda x}y=\int e^{\lambda x}X\,dx,$$

или

$$dy+(A-\lambda)\,y\,dx=e^{-\lambda x}\,dx\int e^{\lambda x}X\,dx,$$

и последнее соотношение после умножения на $e^{(A-\lambda)x}$ снова оказывается интегрируемым, что дает

$$e^{(A-\lambda)x}y=\int e^{(A-2\lambda)x}\,dx\int e^{\lambda x}X\,dx.$$

Но λ — корень уравнения $\lambda^2-A\lambda+B=0$; мы обозначим оба корня этого уравнения через f и g, и пусть $\lambda=f$, тогда $A-\lambda=g$ и интегральное уравнение принимает вид

$$e^{gx}y=\int e^{(g-f)x}dx\int e^{fx}X\,dx$$

или

$$e^{gx}y=\frac{1}{g-f}\,e^{(g-f)x}\int e^{fx}X\,dx-\frac{1}{g-f}\int e^{gx}X\,dx,$$

что преобразуется в найденную выше [§ 856] форму:

$$y=\frac{1}{g-f}\,e^{-fx}\int e^{fx}X\,dx-\frac{1}{g-f}\,e^{-gx}X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

866. Итак, предложенное уравнение или полученное из него уравнение

$$dp+Ap\,dx+By\,dx=X\,dx$$

становится интегрируемым после умножения на $e^{\lambda x}$, причем $\lambda^2-A\lambda+B=0$; таким образом мы получаем два множителя: как e^{fx}, так и e^{gx}.

СЛЕДСТВИЕ 2

867. После умножения рассматриваемого уравнения на множитель e^{fx} получаем его интеграл в виде

$$dy+gy\,dx=e^{-fx}\,dx\int e^{fx}X\,dx,$$

следовательно, оно с помощью интегрирования приводится к дифференциальному уравнению первого порядка, которое опять-таки становится интегрируемым путем умножения на e^{gx}.

ПОЯСНЕНИЕ

868. Множитель V надо было определить так, чтобы выражение

$$dy\left(AV-\frac{dV}{dx}\right)+BVy\,dx$$

само по себе оказалось интегрируемым. А так как V есть функция одного только x и интегралом для этого выражения будет $y\left(AV-\frac{dV}{dx}\right)$, то отсюда с необходимостью следует, что

$$A\,dV-\frac{d^2V}{dx}=BV\,dx,\quad \text{или}\quad d^2V-A\,dx\,dV+BV\,dx^2=0,$$

и от интегрирования этого уравнения зависит определение искомого множителя V. Однако достаточно иметь только частный интеграл этого уравнения. Действительно, поскольку исходное уравнение преобразуется в интегрируемое, то произвольное постоянное, необходимое для получения полного интеграла, будет введено самим интегрированием.

ЗАДАЧА 108

869. *Пусть предложено уравнение*

$$d^2y+P\,dy\,dx+Qy\,dx^2=X\,dx^2,$$

где P, Q и X любые функции от x, а элемент dx считается постоянным. Требуется найти множитель V, который должен быть функцией только от x и после умножения на который уравнение становится интегрируемым.

РЕШЕНИЕ

Так как после умножения на V получается интегрируемое уравнение

$$Vd^2y+VP\,dy\,dx+VQy\,dx^2=VX\,dx^2,$$

мы положим интеграл левой части равным $V\,dy+Sy\,dx$, поскольку он не может иметь иной формы, и тогда должно иметь место [соотношение]

$$VP\,dy\,dx+VQy\,dx^2=dy\,dV+S\,dy\,dx+y\,dS\,dx.$$

Так как S обязательно должно быть функцией только от x, мы получаем, что

$$VP\,dx=dV+S\,dx\quad \text{и}\quad VQ\,dx=dS.$$

Отсюда следует, что $S=VP-\frac{dV}{dx}$, и поэтому множитель V должен быть определен из следующего уравнения:

$$VQ\,dx=V\,dP+P\,dV-\frac{d^2V}{dx},$$

или

$$d^2V-P\,dV\,dx+V\,dx\,(Q\,dx-dP)=0.$$

Если можно решить это уравнение или если хотя бы известен какой-либо его частный интеграл, мы получаем множитель V, и интегралом предложенного уравнения будет

$$V\,dy + y\,(VP\,dx - dV) = dx \int VX\,dx.$$

Так как это соотношение становится интегрируемым после умножения на $\frac{1}{V^2}e^{\int P\,dx}$, мы получаем интеграл в виде

$$\frac{y}{V}e^{-\int P\,dx} = \int \frac{dx}{V^2}e^{\int P\,dx} \int VX\,dx,$$

или

$$y = e^{-\int P\,dx} V \int e^{\int P\,dx}\frac{dx}{V^2} \int VX\,dx.$$

В этом выражении двойной знак интеграла вводит два произвольных постоянных, что и дает полный интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 1

870. Таким образом, определение множителя V также зависит от решения дифференциального уравнения второго порядка, которое надо, однако, считать более простым, чем предложенное, потому что в него не входит функция X, а количество V со своими дифференциалами dV и d^2V входит в него только в первом измерении.

СЛЕДСТВИЕ 2

871. Если мы положим $V = e^{\int v\,dx}$, то количество v будет определяться следующим дифференциальным уравнением первого порядка:

$$dv + v^2\,dx - Pv\,dx + Q\,dx - dP = 0.$$

Если только имеется частный интеграл этого уравнения, то интегрирование заданного уравнения может быть доведено до конца.

СЛЕДСТВИЕ 3

872. Если же множитель V задан, то можно, в свою очередь, определить характер уравнения, которое интегрируется с помощью этого множителя. Действительно, тогда будем иметь либо

$$Q = \frac{dP}{dx} + \frac{P\,dV}{V\,dx} - \frac{d^2V}{Vdx^2},$$

то есть

$$dP + \frac{P\,dV}{V} = Q\,dx - \frac{d^2V}{V\,dx},$$

либо, интегрируя,

$$PV = \frac{dV}{dx} + \int QV\,dx, \quad \text{или} \quad P = \frac{dV}{V\,dx} + \frac{\int QV\,dx}{V}.$$

ПРИМЕР 1

873. *Определить вид дифференциального уравнения второго порядка*

$$d^2y + P\,dy\,dx + Qy\,dx^2 = X\,dx^2,$$

которое обращается в интегрируемое путем умножения на $e^{\lambda x}$.

Пусть множитель $V = e^{\int v\,dx} = e^{\lambda x}$, тогда $v = \lambda$, и нам надлежит удовлетворить следующему уравнению:

$$\lambda^2\,dx - \lambda P\,dx + Q\,dx - dP = 0,$$

откуда получаем $Q = \lambda P - \lambda^2 + \frac{dP}{dx}$. Прежде всего это будет иметь место, если P и Q — постоянные величины, и тогда, положив $P = A$ и $Q = B$, следует определить λ из уравнения $\lambda^2 - A\lambda + B = 0$, что составляет разобранный выше [§ 865] случай. Кроме того, какова бы ни была функция P от x, если только $Q = \lambda P - \lambda^2 + \frac{dP}{dx}$, то уравнение после умножения на $e^{\lambda x}$ становится интегрируемым, причем интегралом будет соотношение

$$e^{\lambda x}(dy + y\,dx\,(P - \lambda)) = dx \int e^{\lambda x} X\,dx,$$

то есть

$$dy + (P - \lambda)\,y\,dx = e^{-\lambda x}\,dx \int e^{\lambda x}\,X\,dx.$$

Последнее соотношение после умножения на $e^{\int P\,dx - \lambda x}$ и интегрирования дает

$$y = e^{-\int P\,dx + \lambda x} \int e^{\int P\,dx - 2\lambda x}\,dx \int e^{\lambda x} X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ

874. Пусть $P = A + \alpha x$ и $Q = B + \beta x$. Тогда

$$B + \beta x = A\lambda + \alpha\lambda x - \lambda^2 + \alpha,$$

следовательно, $B = A\lambda - \lambda^2 + \alpha$ и $\beta = \alpha\lambda$. Таким образом, поскольку $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, коэффициенты A, B, α, β должны быть таковы, чтобы имело место равенство

$$B\alpha^2 = A\alpha\beta - \beta^2 + \alpha^3, \text{ то есть } B\alpha^2 + \beta^2 = \alpha\,(A\beta + \alpha^2).$$

ПРИМЕР 2

875. *Определить вид дифференциального уравнения второго порядка*

$$d^2y + P\,dy\,dx + Qy\,dx^2 = X\,dx^2,$$

которое обращается в интегрируемое путем умножения на $e^{\int v\,dx}$, *причем* $v = \frac{\lambda}{x} + \mu x^n$.

Так как должно иметь место [равенство]

$$dv + v^2\,dx - Pv\,dx + Q\,dx - dP = 0,$$

мы получим

$$-\frac{\lambda}{x^2} + \mu n x^{n-1} - \frac{\lambda P}{x} - \mu P x^n + \frac{\lambda^2}{x^2} + 2\lambda\mu x^{n-1} + \mu^2 x^{2n} + Q - \frac{dP}{dx} = 0.$$

Следовательно,

$$Q = \frac{\lambda(1-\lambda)}{x^2} - (2\lambda + n)\,\mu x^{n-1} - \mu^2 x^{2n} + \frac{\lambda P}{x} + \mu P x^n + \frac{dP}{dx}\,.$$

Положим $P = \frac{\alpha}{x} + \beta x^n$, тогда

$$Q = \frac{1}{x^2}(\lambda - \lambda^2 + \alpha\lambda - \alpha) + x^{n-1}(\beta\lambda + \alpha\mu + \beta n - 2\lambda\mu - n\mu) + x^{2n}(\mu\beta - \mu^2).$$

Пусть $Q = \frac{\gamma}{x^2} + \delta x^{n-1} + \varepsilon x^{2n}$. Тогда должно быть

$$\lambda^2 - (\alpha + 1)\lambda + \alpha + \gamma = 0, \qquad \beta(\lambda + n) + \mu(\alpha - 2\lambda - n) = \delta$$

и

$$\mu(\beta - \mu) = \varepsilon,$$

откуда определяются не только буквы λ и μ, входящие в множитель, но также и некоторое соотношение между буквами α, β, γ, δ, ε.

Например, если положить $\gamma = 0$ и $\delta = 0$, получим $(\lambda - \alpha)(\lambda - 1) = 0$ и отсюда $\lambda = \alpha$. Тогда имеем $(\beta - \mu)(\alpha + n) = 0$, следовательно, $\alpha = \lambda = -n$, а $\mu^2 - \mu\beta + \varepsilon = 0$. Очевидно, что уравнение

$$d^2y + dx\,dy\left(\beta x^n - \frac{n}{x}\right) + \varepsilon x^{2n} y\,dx^2 = X\,dx^2$$

допускает множитель $e^{\int v\,dx}$, где $v = -\frac{n}{x} + \mu x^n$, причем μ должно быть таково, чтобы $\mu^2 - \beta\mu + \varepsilon = 0$. Таким образом, получаем множитель

$$V = \frac{1}{x^n}\,e^{\frac{\mu}{n+1}x^{n+1}} \quad \text{и} \quad e^{\int P\,dx} = \frac{1}{x^n}\,e^{\frac{\beta}{n+1}x^{n+1}}$$

Поэтому, если положить $\frac{1}{n+1}x^{n+1} = t$, получим

$$y = x^n e^{-\beta t}\,\frac{1}{x^n}\,e^{\mu t}\int e^{\beta t - 2\mu t}\,x^n\,dx \int \frac{e^{\mu t}\,X\,dx}{x^n}$$

или

$$y = e^{(\mu-\beta)t}\int e^{(\beta-2\mu)t}\,x^n\,dt \int \frac{e^{\mu t}\,X\,dx}{x^n}\,.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

876. Если принять, что $\gamma = 0$ и $\varepsilon = 0$, получаем

$$\mu = \beta, \quad \beta(\alpha - \lambda) = \delta \quad \text{и} \quad (\lambda - \alpha)(\lambda - 1) = 0,$$

откуда $\lambda = 1$ и $\delta = (\alpha - 1)\beta$. Поэтому

$$P = \frac{\alpha}{x} + \beta x^n, \qquad Q = (\alpha - 1)\,\beta x^{n-1}.$$

и множителем уравнения

$$d^2y+\left(\frac{\alpha}{x}+\beta x^n\right)dx\,dy+(\alpha-1)\,\beta x^{n-1}y\,dx^2=X\,dx^2$$

будет $V=e^{\int v\,dx}$ при условии, что $v=\frac{1}{x}+\beta x^n$; таким образом, $V=xe^{\frac{\beta}{n+1}x^{n+1}}$ и $e^{\int P\,dx}=x^\alpha e^{\frac{\beta}{n+1}x^{n+1}}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

877. Следовательно, в этом случае, полагая $\frac{1}{n+1}x^{n+1}=t$, получаем интеграл в виде

$$y=x^{1-\alpha}\int x^{\alpha-2}e^{-\beta t}\,dx\int e^{\beta t}Xx\,dx.$$

Представить этот интеграл в более простом виде нельзя, потому что в общем случае выражение $e^{-\beta t}x^{\alpha-2}dx$ не допускает интегрирования.

ПОЯСНЕНИЕ

878. Поскольку определение множителей, которые делают интегрируемым уравнение вида

$$d^2y+P\,dx\,dy+Qy\,dx^2=X\,dx^2,$$

требует решения уравнения

$$d^2V-P\,dV\,dx+V\,dx\,(Q\,dx-dP)=0,$$

а это уравнение относится к уравнениям вида

$$d^2y+P\,dx\,dy+Qy\,dx^2=0,$$

то следует рассмотреть [вопрос], каким образом нужно решать последнее уравнение с помощью множителей. Если обозначить через V некоторую функцию только от x, являющуюся множителем последнего уравнения, мы снова придем к уравнению предыдущего вида

$$d^2V-P\,dV\,dx+V\,dx\,(Q\,dx-dP)=0,$$

а если обозначим через U множитель этого уравнения, являющийся функцией от x, то он определяется уравнением

$$d^2U+P\,du\,dx+QU\,dx^2=0.$$

Таким образом, достаточно решить одно из указанных двух уравнений. Так же и выше мы приходили к последнему уравнению, когда мы полагали $y=uv$. Нет ничего удивительного, что любое из этих двух уравнений зависит от второго из них, так как предыдущее получается из последующего, если положить $U=e^{-\int P\,dx}V$, а последующее получается из предыдущего, если положить $V=e^{\int P\,dx}U$, что легко проверить[1]).

[1]) Uti tentanti facile patebit.

Итак, мы не можем устранить этим способом затруднения при интегрировании, если таковые встретятся. Поэтому надо исследовать, не можем ли мы добиться цели с помощью такого множителя, в который входят оба переменных x и y и их дифференциалы dx и dy, или $p=\frac{dy}{dx}$ Но легко усмотреть, что если дифференциалы не входят в множитель, то мы не добьемся цели. Действительно, пусть множитель представляет собою функцию V только от x и y, тогда первому члену d^2y будет соответствовать в интеграле слагаемое $V\,dy$, которое в результате дифференцирования дает, полагая $dV=M\,dx+N\,dy$, выражение $N\,dy^2$, не фигурирующее в уравнении и к тому же такое, что оно не может сократиться с другими слагаемыми в интеграле. Поэтому мы попытаемся использовать множитель такого вида, что в него входит и отношение дифференциалов $p=\frac{dy}{dx}$, а поскольку y и его дифференциалы везде входят в одном и том же измерении, то то же самое свойство должно обязательно иметь место и для множителя: действительно, если бы они входили в разных измерениях, то взятые порознь слагаемые одного и того же измерения должны были бы удовлетворять условиям задачи.

ЗАДАЧА 109

879. *Принимая элемент dx постоянным, установить условия, чтобы множитель вида $Mp+Ny$, причем $p=\frac{dy}{dx}$, а M и N являются функциями от x, делал интегрируемым уравнение*

$$d^2y+P\,dx\,dy+Qy\,dx^2=0,$$

где P и Q — функции x.

РЕШЕНИЕ

Так как $dy=p\,dx$, наше уравнение будет вида

$$dp+Pp\,dx+Qy\,dx=0,$$

и после умножения на $Mp+Ny$ получаем уравнение

$$\left.\begin{aligned} Mp\,dp+Ny\,dp+MPp\,dy+NPy\,dy+NQy^2\,dy \\ +MQy\,dy \end{aligned}\right\}=0,$$

которое должно быть интегрируемым. В соответствии с теми слагаемыми, в которые входит множителем дифференциал dp, в интеграл должны входить слагаемые $\frac{1}{2}Mp^2+Nyp$, и в силу этого мы положим этот интеграл $=\frac{1}{2}Mp^2+Nyp+S$. А так как дифференциал этого выражения должен дать нам предыдущее уравнение, получаем

$$\begin{aligned} dS=MPp\,dy+NPy\,dy+NQy^2\,dx \\ +MQy\,dy \\ -\frac{1}{2}p^2\,dM-yp\,dN \\ -Np\,dy, \end{aligned}$$

и, следовательно, это выражение должно быть интегрируемым. Но так как в него должны входить только дифференциалы первого порядка dx и dy, то необходимо, чтобы количество p исключалось из этого выражения. Поэтому, если положим $dM = M'dx$ и $dN = N'dx$, то с учетом соотношения $p\,dx = dy$ первая группа слагаемых, содержащая p, должна обращаться в нуль. Таким образом,

$$MPp\,dy - \frac{1}{2}M'p\,dy - Np\,dy = 0,$$

или, иначе,

$$MP - \frac{1}{2}M' - N = 0,$$

то есть

$$N = MP - \frac{dM}{2dx}.$$

Следовательно, будем иметь

$$dS = y\,dy\,(NP + MQ - N') + NQy^2\,dx,$$

и интегралом этого выражения является

$$S = \frac{1}{2}y^2\,(NP + MQ - N') \text{ либо } S = y^2\int NQ\,dx.$$

Так как эти две формы должны совпадать, то получаем уравнение

$$NP + MQ - \frac{dN}{dx} = 2\int NQ\,dx,$$

или

$$N\,dP + P\,dN + M\,dQ + Q\,dM - \frac{d^2N}{dx} - 2NQ\,dx = 0.$$

Это уравнение вместе с уравнением $N = MP - \frac{dM}{2dx}$ определяет искомые условия, и мы приходим, таким образом, к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2}Mp^2 + Nyp + \frac{1}{2}y^2\left(NP + MQ - \frac{dN}{dx}\right) = C.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

880. Если даны функции P и Q и по ним надо определить функции M и N, то, так как $N = MP - \frac{dM}{2dx}$, будем иметь

$$dN = M\,dP + P\,dM - \frac{d^2M}{2dx},$$

а функция M определяется следующим уравнением:

$$\frac{d^3M}{2dx^2} - \frac{3P\,d^2M}{2dx} + \left(P^2 - \frac{5dP}{2dx} + 2Q\right)dM + M\left(2P\,dP - \frac{d^2P}{dx} - 2PQ\,dx + dQ\right) = 0.$$

Вследствие наличия в нем дифференциалов третьего порядка, от этого уравнения пользы мало.

СЛЕДСТВИЕ 2

881. Если же задан множитель $Mp+Ny$, то само уравнение определяется следующим образом. Во-первых, находим $P=\frac{N}{M}+\frac{dM}{2M\,dx}$, а затем из соотношения

$$dQ+\frac{Q\,dM}{M}-\frac{2NQ\,dx}{M}=\frac{d^2N}{M\,dx}-\frac{d(PN)}{M}$$

после умножения на $Me^{-2\int\frac{N\,dx}{M}}$ и интегрирования получаем

$$MQe^{-2\int\frac{N\,dx}{M}}=\int e^{-2\int\frac{N\,dx}{M}}\left(\frac{d^2N}{dx}-d(PN)\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3

882. Обозначим этот интеграл через Z. Имеем

$$Z=e^{-2\int\frac{N\,dx}{M}}\left(\frac{dN}{dx}-PN\right)+\int e^{-2\int\frac{N\,dx}{M}}\left(\frac{2N\,dN}{M}-\frac{2PN^2\,dx}{M}\right).$$

Последнее слагаемое правой части после подстановки в него значения P принимает вид

$$\int e^{-2\int\frac{N\,dx}{M}}\left(\frac{2N\,dN}{M}-\frac{2N^3\,dx}{M^2}-\frac{N^2\,dM}{M^2}\right).$$

Интегралом этого выражения, очевидно, является $e^{-2\int\frac{N\,dx}{M}}\frac{N^2}{M}$ и, таким образом,

$$Z=e^{-2\int\frac{N\,dx}{M}}\left(\frac{dN}{dx}-\frac{N\,dM}{2M\,dx}\right)+C.$$

Поэтому

$$Q=\frac{C}{M}e^{2\int\frac{N\,dx}{M}}+\frac{dN}{M\,dx}-\frac{N\,dM}{2M^2dx}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

883. Итак, если предложено уравнение

$$\frac{d^2y}{dx}+\left(\frac{N}{M}+\frac{dM}{2M\,dx}\right)dy+y\left(\frac{C\,dx}{M}e^{2\int\frac{N\,dx}{M}}+\frac{dN}{M}-\frac{N\,dM}{2M^2}\right)=0,$$

то после умножения на $\frac{M\,dy}{dx}+N$ получаем его интеграл в виде

$$\frac{M\,dy^2}{2\,dx^2}+\frac{Ny\,dy}{dx}+\frac{1}{2}y^2\left(Ce^{\int\frac{N\,dx}{M}}+\frac{N^2}{M}\right)=\text{Const}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

884. Поскольку мы можем в качестве M и N брать любые функции от x, мы получаем, таким образом, бесчисленное множество различных видов дифференциальных уравнений второго порядка, которые могут

быть проинтегрированы с помощью множителя $\frac{M\,dy}{dx}+Ny$. Разумеется, общей формой таких уравнений, которые интегрируются с помощью указанного множителя, является, как мы видели,

$$\frac{d^2y}{dx}+\frac{dy}{2M\,dx}(dM+2N\,dx)+\frac{y]}{2M^2}(2M\,dN-N\,dM+2CMe^{\int\frac{N\,dx}{M}})=0,$$

причем интегралом будет выражение

$$\frac{M\,dy^2}{2dx^2}+\frac{Ny\,dy}{dx}+\frac{1}{2}y^2\left(\frac{N^2}{M}+Ce^{2\int\frac{N\,dx}{M}}\right)=\text{Const.}$$

Легко видеть, что экспоненциальные слагаемые, умноженные на постоянную C, можно опустить в обоих выражениях, так как эта постоянная входит только в указанные слагаемые[1]). Если же мы приведем экспоненциальные члены к алгебраическому виду, полагая $e^{2\int\frac{N\,dx}{M}}=L$, то получим $\frac{2N\,dx}{M}=\frac{dL}{L}$ и $N=\frac{M\,dL}{2L\,dx}$. Отсюда

$$dN=\frac{M\,d^2L}{2L\,dx}+\frac{dL\,dM}{2L\,dx}-\frac{M\,dL^2}{2L^2\,dx}.$$

Таким образом, приходим к следующему виду [уравнения]:

$$\frac{d^2y}{dx}+\frac{dy}{2dx}\left(\frac{dM}{M}+\frac{dL}{L}\right)+\frac{1}{2}y\left(\frac{d^2L}{L\,dx}+\frac{dL\,dM}{2LM\,dx}-\frac{dL^2}{L^2\,dx}+\frac{[2CL\,dx}{M}\right)[=0].$$

После умножения на $\frac{M\,dy}{dx}+\frac{My\,dL}{2L\,dx}$ получаем его интеграл в виде

$$\frac{Mdy^2}{2dx^2}+\frac{My\,dL\,dy}{2L\,dx^2}+\frac{1}{2}y^2\left(\frac{M\,dL^2}{4L^2dx}+CL\right)=\text{Const.}$$

Если же мы положим $\frac{dM}{M}+\frac{dL}{L}=\frac{2dK}{K}$, так что $M=\frac{K^2}{L}$, то получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dx}+\frac{dy}{dx}\frac{dK}{K}+\frac{1}{2}y\left(d\frac{dL}{L\,dx}-\frac{dL^2}{2L^2dx}+\frac{dK\,dL}{KL\,dx}+\frac{2CL^2\,dx}{K^2}\right)=0;$$

после умножения его на $\frac{K^2}{L}\left(\frac{dy}{dx}+\frac{y\,dL}{2L\,dx}\right)$ находим интеграл

$$\frac{K^2}{2L}\left(\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{y\,dL\,dy}{L\,dx^2}+y^2\left(\frac{dL^2}{4L^2dx^2}+\frac{CL^2}{K^2}\right)\right)=\text{Const.}$$

ПРИМЕР 1

885. *Пусть* $K=x^m(a+x)^n$ *и* $L=x^\mu(a+x)^\nu$.

Тогда

$$\frac{dK}{Kdx}=\frac{m}{x}+\frac{n}{a+x}=\frac{ma+(m+n)x}{x(a+x)}$$

---

[1]) ... ubi perspicuum est partem exponentialem constanti C affectam utrinque omitti posse, cum ea sola ista proprietate sit praedita.

и

$$\frac{dL}{L\,dx}=\frac{\mu}{x}+\frac{\nu}{a+x}\,.$$

Поэтому коэффициентом при $\frac{1}{2}y\,dx$ будет выражение

$$-\frac{\mu}{x^2}-\frac{\nu}{(a+x)^2}-\frac{\mu^2}{2x^2}-\frac{\mu\nu}{x(a+x)}-\frac{\nu^2}{2(a+x)^2}+\frac{m\mu}{x^2}+\frac{m\nu+n\mu}{x(a+x)}+\frac{n\nu}{(a+x)^2}$$
$$+2Cx^{2\mu-2m}(a+x)^{2\nu-2n},$$

то есть

$$\frac{\mu(2m-\mu-2)}{2x^2}+\frac{m\nu+n\mu-\mu\nu}{x(a+x)}+\frac{\nu(2n-\nu-2)}{2(a+x)^2}+2Cx^{2\mu-2m}(a+x)^{2\nu-2n}.$$

Здесь полезно отметить следующие случаи.

I. Пусть $m=\mu+1$ и $n=\nu$. Коэффициентом при $\frac{1}{2}y\,dx$ будет [выражение]

$$\frac{\mu^2+4C}{2x^2}+\frac{\nu(\mu+1)}{x(a+x)}+\frac{\nu(\nu-2)}{2(a+x)^2}\,.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{d^2y}{dx}+dy\left(\frac{\mu+1}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)+\frac{1}{4}\,y\,dx\left[\frac{\mu^2+4C}{x^2}+\frac{2\nu(\mu+1)}{x(a+x)}+\frac{\nu(\nu-2)}{(a+x)^2}\right]=0;$$

после умножения на

$$x^{\mu+2}(a+x)^{\nu}\left[\frac{dy}{dx}+\left(\frac{\mu}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)\frac{y}{2}\right]$$

и интегрирования получаем

$$\frac{1}{2}\,x^{\mu+2}(a+x)^{\nu}\left[\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{y\,dy}{dx}\left(\frac{\mu}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\,y^2\left(\frac{\mu^2+4C}{x^2}+\frac{2\mu\nu}{x(a+x)}+\frac{\nu^2}{(a+x)^2}\right)\right]=\mathrm{Const}.$$

II. Пусть $m=\mu+\frac{1}{2}$ и $n=\nu+\frac{1}{2}$. Коэффициентом при $\frac{1}{2}y\,dx$ будет выражение

$$\frac{\mu(\mu-1)}{2x^2}+\frac{2\mu\nu+\mu+\nu+4C}{2x(a+x)}+\frac{\nu(\nu-1)}{2(a+x)^2}\,.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{d^2y}{dx}+dy\left(\frac{2\mu+1}{2x}+\frac{2\nu+1}{2(a+x)}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\,y\,dx\left(\frac{\mu(\mu-1)}{x^2}+\frac{2\mu\nu+\mu+\nu+4C}{x(a+x)}+\frac{\nu(\nu-1)}{(a+x)^2}\right)=0.$$

После умножения на

$$x^{\mu+1}(a+x)^{\nu+1}\left(\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\,y\left(\frac{\mu}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)\right)$$

и интегрирования получаем

$$\frac{1}{2} x^{\mu+1}(a+x)^{\nu+1}\left[\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{y\,dy}{dx}\left(\frac{\mu}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4} y^2\left(\frac{\mu^2}{x^2}+\frac{2\mu\nu+4C}{x(a+x)}+\frac{\nu^2}{(a+x)^2}\right)\right]=\text{Const}.$$

III. Пусть $m=\mu$ и $n=\nu+1$. Коэффициентом при $\frac{1}{2} y\,dx$ будет выражение

$$\frac{\mu(\mu-2)}{2x^2}+\frac{\mu(\nu+1)}{x(a+x)}+\frac{\nu^2+4C}{2(a+x)^2}.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{d^2y}{dx}+dy\left(\frac{\mu}{x}+\frac{\nu+1}{a+x}\right)+\frac{1}{4} y\,dx\left(\frac{\mu(\mu-2)}{x^2}+\frac{2\mu(\nu+1)}{x(a+x)}+\frac{\nu^2+4C}{(a+x)^2}\right)=0.$$

После умножения на

$$x^{\mu}(a+x)^{\nu+2}\left(\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2} y\left(\frac{\mu}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)\right)$$

и интегрирования получаем

$$\frac{1}{2} x^{\mu}(a+x)^{\nu+2}\left[\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{y\,dy}{dx}\left(\frac{\mu}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4} y^2\left(\frac{\mu^2}{x^2}+\frac{2\mu\nu}{x(a+x)}+\frac{\nu^2+4C}{(a+x)^2}\right)\right]=\text{Const}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

886. Пусть в первом случае имеем $\nu=2$, $C=-\frac{1}{4}\mu^2$. Тогда получаем уравнение

$$\frac{d^2y}{dx}+\frac{(\mu+1)a+(\mu+3)x}{x(a+x)}dy+\frac{(\mu+1)y\,dx}{x(a+x)}=0.$$

После его умножения на

$$x^{\mu+2}(a+x)^2\left(\frac{dy}{dx}+\frac{\mu a+(\mu+2)x}{2x(a+x)} y\right)$$

и интегрирования находим

$$\frac{1}{2} x^{\mu+2}(a+x)^2\left(\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{\mu a+(\mu+2)x}{x(a+x)}\cdot\frac{y\,dy}{dx}+y^2\left(\frac{\mu}{x(a+x)}+\frac{1}{(a+x)^2}\right)\right)=\text{Const}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

887. Пусть в третьем случае имеем $\mu=2$ и $4C=-\nu^2$. Тогда получаем уравнение

$$\frac{d^2y}{dx}+dy\frac{2a+(\nu+3)x}{x(a+x)}+\frac{(\nu+1)y\,dx}{x(a+x)}=0.$$

После умножения на

$$x^2(a+x)^{\nu+2}\left(\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}y\left(\frac{2}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)\right)$$

находим его интеграл

$$\frac{1}{2}x^2(a+x)^{\nu+2}\left[\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{y\,dy}{dx}\left(\frac{2}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)+y^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x(a+x)}\right)\right]=\text{Const}.$$

ПРИМЕР 2

888. *Пусть* $K=x^m(a^2+x^2)^n$ *и* $L=x^\mu(a^2+x^2)^\nu$.
Тогда

$$\frac{dK}{K\,dx}=\frac{m}{x}+\frac{2nx}{a^2+x^2} \quad \text{и} \quad \frac{dL}{L\,dx}=\frac{\mu}{x}+\frac{2\nu x}{a^2+x^2},$$

и дифференциальное уравнение второго порядка приводится к следующему виду:

$$\frac{d^2y}{dx}+dy\left(\frac{m}{x}+\frac{2nx}{a^2+x^2}\right)+\frac{1}{2}y\,dx\left\{\begin{aligned}&\frac{\mu(2m-\mu-2)}{2x^2}+\frac{2n\mu+2\nu(m-\mu+1)}{a^2+x^2}\\&+\frac{2\nu(2n-\nu-2)x^2}{(a^2+x^2)^2}+\frac{2Cx^{2\mu-2m}}{(a^2+x^2)^{2n-2\nu}}\end{aligned}\right\}=0.$$

После умножения на

$$x^{2m-\mu}(a^2+x^2)^{2n-\nu}\left(\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}y\left(\frac{\mu}{x}+\frac{2\nu x}{a^2+x^2}\right)\right)$$

находим его интеграл

$$\frac{1}{2}x^{2m-\mu}(a^2+x^2)^{2n-\nu}\left\{\begin{aligned}&\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{y\,dy}{dx}\left(\frac{\mu}{x}+\frac{2\nu x}{a^2+x^2}\right)\\&+\frac{1}{4}y^2\left(\left(\frac{\mu}{x}+\frac{2\nu x}{a^2+x^2}\right)^2+\frac{4Cx^{2\mu-2m}}{(a^2+x^2)^{2n-2\nu}}\right)\end{aligned}\right\}=\text{Const}.$$

Мы укажем здесь случаи, когда дифференциальное уравнение второго порядка приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx}+dy\left(\frac{m}{x}+\frac{2nx}{a^2+x^2}\right)+\frac{1}{2}y\,dx\left(D+\frac{E}{x^2}+\frac{F}{a^2+x^2}+\frac{Gx^2}{(a^2+x^2)^2}\right)=0.$$

I. Полагаем $\mu=m$ и $\nu=n$; тогда

$$D=2C,\quad E=\frac{1}{2}m(m-2),\qquad F=2n(m+1)$$

и

$$G=2n(n-2).$$

II. Полагаем $\mu=m-1$ и $\nu=n$; тогда

$$D=0,\quad E=2C+\frac{1}{2}(m-1)^2,\qquad F=2n(m+1)$$

и

$$G=2n(n-2).$$

III. Полагаем $\mu = m - 1$ и $2n - 2\nu = -1$, или, иначе, $\nu = n + \frac{1}{2}$; тогда последнее слагаемое будет $\frac{2C(a^2+x^2)}{x^2} = 2C + \frac{2Ca^2}{x^2}$. Следовательно, $D = 2C$, $E = 2Ca^2 + \frac{1}{2}(m-1)^2$, $F = 2(mn+n+1)$, $G = \frac{1}{2}(2n+1)(2n-5)$.

IV. Полагаем $\mu = m$ и $2n - 2\nu = 1$, то есть $\nu = n - \frac{1}{2}$; тогда последнее слагаемое будет $\frac{2C}{a^2+x^2}$, и, таким образом,

$$D = 0,\quad E = \frac{1}{2} m(m-2),\quad F = 2C + 2mn + 2n - 1,\quad G = \frac{1}{2}(2n-1)(2n-3).$$

V. Полагаем $\mu = m + 1$ и $\nu = n - \frac{1}{2}$; тогда последнее слагаемое будет $\frac{2Cx^2}{a^2+x^2} = 2C - \frac{2Ca^2}{a^2+x^2}$. Таким образом,

$$D = 2C,\quad E = \frac{1}{2}(m+1)(m-2),\qquad F = -2Ca^2 + 2n(m+1),$$

$$G = \frac{1}{2}(2n-1)(2n-3).$$

VI. Пусть $\mu = m - 1$ и $\nu = n - \frac{1}{2}$; тогда последнее слагаемое будет $\frac{2C}{x^2(a^2+x^2)} = \frac{2C}{a^2x^2} - \frac{2C}{a^2(a^2+x^2)}$. Таким образом,

$$D = 0,\qquad E = \frac{2C}{a^2} + \frac{1}{2}(m-1)^2,\qquad F = \frac{-2C}{a^2} + 2mn + 2n - 2,$$

$$G = \frac{1}{2}(2n-1)(2n-3).$$

VII. Пусть $\mu = m + 1$ и $2n - 2\nu = 2$, то есть $\nu = n - 1$; тогда последнее слагаемое будет $\frac{2Cx^2}{(a^2+x^2)^2}$. Следовательно,

$$D = 0,\quad E = \frac{1}{2}(m+1)(m-3),\quad F = 2n(m+1),\quad G = 2C + 2(n-1)^2.$$

VIII. Пусть $\mu = m + 2$ и $\nu = n - 1$; тогда последнее слагаемое будет $\frac{2Cx^4}{(a^2+x^2)^2} = 2C - \frac{2Ca^2}{a^2+x^2} - \frac{2Ca^2x^2}{(a^2+x^2)^2}$ и, следовательно,

$$D = 2C,\qquad E = \frac{1}{2}(m+2)(m-4),$$

$$F = -2Ca^2 + 2mn + 2n + 2,\qquad G = -2Ca^2 + 2(n-1)^2.$$

IX. Пусть $\mu = m$ и $\nu = n - 1$; тогда последнее слагаемое будет

$$\frac{2C}{a^2+x^2} = \frac{2C}{a^2(a^2+x^2)} - \frac{2Cx^2}{a^2(a^2+x^2)^2},$$

следовательно,

$$D = 0,\qquad E = \frac{1}{2} m(m-2),$$

$$F = \frac{2C}{a^2} + 2mn + 2n - 2,\qquad G = -\frac{2C}{a^2} + 2(n-1)^2.$$

X. Пусть $\mu = m - 1$ и $\nu = n - 1$; тогда последнее слагаемое будет

$$\frac{2C}{x^2(a^2+x^2)^2} = \frac{2C}{a^4x^2} - \frac{4C}{a^4(a^2+x^2)} + \frac{2Cx^2}{a^4(a^2+x^2)^2}$$

и, таким образом,

$$D = 0, \quad E = \frac{2C}{a^4} + \frac{1}{2}(m-1),$$

$$F = \frac{-4C}{a^4} + 2mn + 2n - 4,$$

$$G = \frac{2C}{a^4} + 2(n-1)^2.$$

ЗАДАЧА 110

889. *Считая элемент dx постоянным, найти полный интеграл следующего дифференциального уравнения второго порядка:*

$$\frac{d^2y}{dx} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dK}{K} + \frac{1}{2}y\left(d\frac{dL}{L\,dx} - \frac{dL^2}{2L^2\,dx} + \frac{dK\,dL}{KL\,dx} + \frac{2CL^2\,dx}{K^2}\right) = 0,$$

где K и L обозначают любые функции от x.

РЕШЕНИЕ

Так как данное уравнение становится интегрируемым после умножения на $\frac{K^2}{L}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y\,dL}{2L\,dx}\right)$, его полным интегралом, как мы выше [§ 884] видели, является

$$\frac{K^2}{2L}\left(\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y\,dL}{2L\,dx}\right)^2 + \frac{CL^2}{K^2}y^2\right) = \text{Const},$$

и это дифференциальное уравнение первого порядка снова надо интегрировать. Поскольку это интегрирование, вследствие наличия неопределенного постоянного, является весьма трудной задачей, то мы сначала будем искать только частный интеграл, считая постоянное равным нулю[1]). Итак, из уравнения

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y\,dL}{2L\,dx}\right)^2 + \frac{CL^2}{K^2}y^2 = 0$$

после извлечения корня находим

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y\,dL}{2L\,dx} = \frac{Ly}{K}\sqrt{-C}, \text{ то есть } \frac{dy}{y} + \frac{dL}{2L} = \frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C},$$

откуда получаем

$$y\sqrt{L} = \alpha e^{\int \frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}.$$

Так как исходному дифференциальному уравнению второго порядка удовлетворяют оба значения,

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{L}}e^{\int \frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}} \quad \text{и} \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{L}}e^{-\int \frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}},$$

[1]) Ea constans neglecta.

то ему удовлетворяет также их сумма; а так как при этом вводятся два произвольных постоянных, то полным интегралом дифференциального уравнения будет

$$y=\frac{\alpha}{\sqrt{L}}e^{\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}+\frac{\beta}{\sqrt{L}}e^{-\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}.$$

Это выражение подходит, если $\sqrt{-C}$ вещественное количество[1]; если же это количество мнимое, то

$$y=\frac{\gamma}{\sqrt{L}}\sin\left(\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{C}+\zeta\right).$$

Таким образом, получаем полный интеграл предложенного дифференциального уравнения второго порядка.

СЛЕДСТВИЕ 1

890. Итак, мы в состоянии указать интеграл дифференциального уравнения первого порядка

$$\left(\frac{dy}{dx}+\frac{y\,dL}{2L\,dx}\right)^2+\frac{CL^2y^2}{K^2}=\frac{AL}{K^2},$$

которое само по себе является достаточно трудным, а именно

$$y=\frac{\alpha}{\sqrt{L}}e^{\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}+\frac{\beta}{\sqrt{L}}e^{-\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}},$$

предполагая при этом, что постоянные α и β определены должным образом в соответствии со значением постоянного A.

СЛЕДСТВИЕ 2

891. Умножая на $\sqrt{L}$ и дифференцируя, получим

$$dy\sqrt{L}+\frac{y\,dL}{2\sqrt{L}}=\frac{\alpha L\,dx}{K}\sqrt{-C}\cdot e^{\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}-\frac{\beta L\,dx}{K}\sqrt{-C}\cdot e^{-\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y\,dL}{2L\,dx}=\frac{\sqrt{-C}L}{K}\left(\alpha e^{\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}-\beta e^{-\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}\right)$$

и, таким образом,

$$\frac{AL}{K^2}=\frac{-CL}{K^2}\left(\alpha e^{\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}-\beta e^{-\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}\right)^2$$
$$+\frac{CL}{K^2}\left(\alpha e^{\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}+\beta e^{-\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}\right)^2.$$

Следовательно, $A=4C\alpha\beta$, или $\beta=\frac{A}{4C\alpha}$.

---

[1]) При $C=0$ полным интегралом будет

$$y=\frac{1}{\sqrt{L}}\left(\alpha+\beta\int\frac{L\,dx}{K}\right)\ [\text{Л. П.}].$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

892. Хотя и оказалось возможным проинтегрировать заданное уравнение с помощью подходящего множителя, однако второе интегрирование представлялось связанным с большими трудностями. Все же иногда с помощью подстановки можно облегчить решение полученного дифференциального уравнения первого порядка. Действительно, положим $y=\frac{z}{\sqrt{L}}$, так что $dy\sqrt{L}+\frac{y\,dL}{2\sqrt{L}}=dz$. Получим [уравнение]

$$\left(\frac{dz}{dx\sqrt{L}}\right)^2+\frac{CLz^2}{K^2}=\frac{AL}{K^2}.$$

Отсюда $\frac{dz}{dx}=\frac{L}{K}\sqrt{A-Cz^2}$ или, иначе, $\frac{dz}{\sqrt{A-Cz^2}}=\frac{L\,dx}{K}$, что после интегрирования дает

$$l[z\sqrt{-C}+\sqrt{A-Cz^2}]=\int\frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}+lB.$$

Таким образом, мы получаем вышеприведенный интеграл.

Впрочем, несколько удобнее можно представить наше дифференциальное уравнение второго порядка следующим образом. Считая P и R какими угодно функциями от x и принимая элемент dx постоянным, мы получим после двух интегрирований полный интеграл уравнения

$$d^2y-dy\left(\frac{dP}{P}+\frac{dR}{R}\right)-y\left(d\,\frac{dP}{P}-\frac{dP\,dR}{PR}+\frac{a^2R^2\,dx^2}{P^2}\right)=0$$

в виде

$$y=\alpha Pe^{a\int\frac{R\,dx}{P}}+\beta Pe^{-a\int\frac{R\,dx}{P}},$$

если только a является вещественным количеством. Однако, если $a=0$, то

$$y=P\left(\alpha+\beta\int\frac{R\,dx}{P}\right).$$

А если $a^2=-c^2$, то получаем

$$y=\alpha P\sin\left(\beta+c\int\frac{R\,dx}{P}\right).$$

Вместе с тем это уравнение становится интегрируемым после умножения на $\frac{1}{R^2\,dx^2}\left(dy-\frac{y\,dP}{P}\right)$, и первый интеграл получаем при этом в виде

$$\frac{1}{2R^2\,dx^2}\left(\left(dy-\frac{y\,dP}{P}\right)^2-\frac{a^2R^2}{P^2}y^2\,dx^2\right)=\mathrm{Const}.$$

Отсюда ясно, что удобно произвести в исходном дифференциальном уравнении второго порядка подстановку $y=Pz$, с помощью которой оно преобразуется к виду

$$d^2z+dz\left(\frac{dP}{P}-\frac{dR}{R}\right)-\frac{a^2R^2}{P^2}z\,dx^2=0,$$

и это последнее уравнение становится непосредственно интегрируемым после умножения на $\frac{P^2\,dz}{R^2\,dx^2}$. А если мы положим $\frac{P}{R}=S$, получим уравнение

$$d^2z+\frac{dS\,dz}{S}-\frac{a^2z\,dx^2}{S^2}=0,$$

для которого множителем является $\frac{S^2\,dz}{dx^2}$, что сразу дает интеграл

$$\frac{S^2\,dz^2}{2dx^2}-\frac{1}{2}a^2z^2=\text{Const}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

893. Наоборот, исходя из этого самого простого вида [уравнения]

$$S^2\,d^2z+S\,dS\,dz-a^2z\,dx^2=0,$$

которое становится интегрируемым после умножения на dz, мы можем образовать более сложные формы, полагая $z=\frac{y}{P}$ и $S=\frac{P}{R}$. Хотя в общем виде все это достаточно прозрачно, однако в конкретных примерах большей частью такое преобразование оказывается достаточно замаскированным, так что оно может ускользнуть от внимания. Например, в случае, рассмотренном в § 888 под номером IX, будем считать $m=2$ и $C=(n-1)^2a^2$, следовательно, получим $D=0$, $E=0$, $F=2n\ (n+1)$ и $G=0$. Мы придем, таким образом, к уравнению

$$\frac{d^2y}{dx}+2dy\left(\frac{1}{x}+\frac{nx}{a^2+x^2}\right)+\frac{n\,(n+1)\,y\,dx}{a^2+x^2}=0,$$

или

$$d^2y+\frac{2\,dx\,dy\,(a^2+(n+1)\,x^2)}{x\,(a^2+x^2)}+\frac{n\,(n+1)\,y\,dx^2}{a^2+x^2}=0,$$

которое становится интегрируемым с помощью множителя

$$x^2\,(a^2+x^2)^{n+1}\left(\frac{dy}{dx}+\frac{y\,(a^2+nx^2)}{x\,(a^2+x^2)}\right).$$

Интегралом будет

$$\frac{1}{2}x^2\,(a^2+x^2)^{n+1}\left(\left(\frac{dy}{dx}+\frac{y\,(a^2+nx^2)}{x\,(a^2+x^2)}\right)^2+\frac{(n-1)^2\,a^2y^2}{(a^2+x^2)^2}\right)=\text{Const}.$$

Следовательно, частным интегралом будет

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}+\frac{(n-1)\,x\,dx}{a^2+x^2}=\pm\frac{(n-1)\,a\,dx\sqrt{-1}}{a^2+x^2},$$

и отсюда заключаем, что

$$xy\,(a^2+x^2)^{\frac{n-1}{2}}=\alpha\left(\frac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}}\right)^{\pm\frac{n-1}{2}}.$$

Следовательно, сумма этих двух частных интегралов даст полный интеграл

$$y=\frac{\alpha}{x}\left(a-x\sqrt{-1}\right)^{-n+1}+\frac{\beta}{x}\left(a+x\sqrt{-1}\right)^{-n+1}.$$

В рассматриваемом случае наше уравнение приводится к весьма простому виду с помощью подстановки

$$y=\frac{z}{x}(a^2+x^2)^{\frac{1-n}{2}}$$

но усмотреть основания для этой подстановки и найти ее — труднее.

ЗАДАЧА 111

894. *Принимая элемент dx постоянным, определить условия, при которых дифференциальное уравнение второго порядка*

$$d^2y+P\,dx\,dy+Qy\,dx^2=0$$

становится интегрируемым с помощью множителя следующего вида:

$$\frac{y\,dx^2}{L\,dy^2+My\,dy\,dx+Ny^2\,dx^2},$$

где буквами L, M, N, P, Q обозначены функции от x.

РЕШЕНИЕ

Будем рассматривать знаменатель указанной дроби в виде

$$(dy+Ry\,dx)(dy+Sy\,dx).$$

Легко заметить, что интеграл должен иметь вид

$$V+l\frac{dy+Ry\,dx}{dy+Sy\,dx}=\mathrm{Const}.$$

Следовательно, мы должны получить предложенное уравнение, дифференцируя последнее соотношение. В результате находим

$$dV+\frac{(S-R)\,y\,dx\,d^2y+(R-S)\,dx\,dy^2+y\,dx\,dy\,(dR-dS)+y^2\,dx^2\,(S\,dR-R\,dS)}{(dy+Ry\,dx)\,(dy+Sy\,dx)}=0$$

и после приведения к общему знаменателю будем иметь

$$(S-R)\,y\,dx\,d^2y+(R-S)\,dx\,dy^2+y\,dx\,dy\,(dR-dS)+y^2\,dx^2\,(S\,dR-R\,dS)$$
$$+dV\,dy^2+(R+S)\,y\,dx\,dy\,dV+RSy^2\,dx^2\,dV=0.$$

Положим $dV=(S-R)dx$, чтобы получить уравнение, в котором можно сократить на y. Таким образом, получается уравнение

$$(S-R)\,d^2y+dy\,(dR-dS)+y\,dx\,(S\,dR-R\,dS)$$
$$+(S^2-R^2)\,dx\,dy+RS\,(S-R)y\,dx^2=0.$$

Здесь, для того чтобы получить совпадение с предложенным уравнением, надо положить

$$P=(R+S)+\frac{dR-dS}{(S-R)\,dx}\quad\text{и}\quad Q=RS+\frac{S\,dR-R\,dS}{(S-R)\,dx}.$$

Если функции P и Q принимают эти значения, то уравнение

$$d^2y+P\,dx\,dy+Qy\,dx^2=0$$

после умножения на

$$\frac{(S-R)\,y\,dx}{(dy+Ry\,dx)\,(dy+Sy\,dx)}$$

дает интеграл

$$\int (S-R)\,dx+l\,\frac{dy+Ry\,dx}{dy+Sy\,dx}=\text{Const}.$$

Если положим $S=M+N$ и $R=M-N$, то

$$P=2M-\frac{dN}{N\,dx} \quad \text{и} \quad Q=M^2-N^2+\frac{dM}{dx}-\frac{M\,dN}{N\,dx}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

895. Итак, какие бы функции от x мы не подставили вместо M и N, если по ним мы определим функции

$$P=2M-\frac{dN}{N\,dx} \quad \text{и} \quad Q=M^2-N^2+\frac{dM}{dx}-\frac{M\,dN}{N\,dx},$$

то интегралом уравнения

$$d^2y+P\,dx\,dy+Qy\,dx^2=0$$

будет

$$2\int N\,dx+l\,\frac{dy+(M-N)\,y\,dx}{dy+(M+N)\,y\,dx}=\text{Const}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

896. Если положить $y=e^{\int z\,dx}$, то наше дифференциальное уравнение получается в виде уравнения первого порядка

$$dz+z^2dx+Pz\,dx+Q\,dx=0,$$

и, следовательно, его интегралом будет

$$2\int N\,dx+l\,\frac{z+M-N}{z+M+N}=\text{Const}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

897. Если мы пожелаем, чтобы $P=0$ с целью получить уравнение вида $d^2y+Qy\,dx^2=0$, надо принять $2M=\frac{dN}{N\,dx}$. Тогда $Q=\frac{dM}{dx}-M^2-N^2$, и интегральным уравнением будет

$$2\int N\,dx+l\,\frac{dy+(M-N)\,y\,dx}{dy+(M+N)\,y\,dx}=\text{Const}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

898. Вообще же, если постоянное полагаем равным или $+\infty$, или $-\infty$, то получаем частный интеграл: или

$$dy+(M+N)\,y\,dx=0,$$

или

$$dy + (M-N)\,y\,dx = 0,$$

откуда следует, что

$$\text{либо } y = \alpha e^{-\int (M+N)\,dx}, \text{ либо } y = \beta e^{-\int (M-N)\,dx}$$

Таким образом, находим полный интеграл нашего уравнения

$$y = e^{-\int M\,dx}\left(\alpha e^{-\int N\,dx} + \beta e^{\int N\,dx}\right).$$

ПРИМЕР 1

899. *Пусть* $M=\alpha$ *и* $N=\beta$, *тогда* $P=2\alpha$ *и* $Q=\alpha^2-\beta^2$.

Таким образом, для уравнения

$$d^2y + 2\alpha\,dx\,dy + (\alpha^2-\beta^2)\,y\,dx^2 = 0$$

интегралом будет

$$2\beta x + l\,\frac{dy+(\alpha-\beta)\,y\,dx}{dy+(\alpha+\beta)\,y\,dx} = \mathrm{Const}.$$

В конечных же количествах полный интеграл получается в виде

$$y = e^{-\alpha x}(Ae^{-\beta x} + Be^{\beta x}).$$

В том случае, когда $\beta^2 = -\gamma^2$, уравнение

$$d^2y + 2\alpha\,dx\,dy + (\alpha^2+\gamma^2)\,y\,dx^2 = 0$$

после двукратного интегрирования дает

$$y = Ae^{-\alpha x}\sin(\gamma x + C).$$

Если же $\gamma = 0$, то интегралом уравнения

$$d^2y + 2\alpha\,dx\,dy + \alpha^2 y\,dx^2 = 0$$

будет

$$y = e^{-\alpha x}(A + Bx).$$

ПРИМЕР 2

900. *Если* $M=\frac{\alpha}{x}$ *и* $N=\beta x^n$, *то* $P=\frac{2\alpha-n}{x}$ *и* $Q=\frac{\alpha^2}{x^2}-\beta^2x^{2n}-\frac{\alpha}{x^2}-\frac{\alpha n}{x^2}=\frac{\alpha(\alpha-n-1)}{x^2}-\beta^2x^{2n}$.

Следовательно, первым интегралом уравнения

$$d^2y + \frac{(2\alpha-n)\,dx\,dy}{x} + \frac{\alpha(\alpha-n-1)\,y\,dx^2}{x^2} - \beta^2x^{2n}y\,dx^2 = 0$$

будет

$$\frac{2\beta}{n+1}\,x^{n+1} + l\,\frac{x\,dy+(\alpha-\beta x^{n+1})\,y\,dx}{x\,dy+(\alpha+\beta x^{n+1})\,y\,dx} = \mathrm{Const}.$$

Вторым же интегралом будет

$$y = x^{-\alpha}\left(Ae^{\frac{-\beta x^{n+1}}{n+1}} + Be^{\frac{\beta x^{n+1}}{n+1}}\right).$$

Если $\beta=0$, то получаем

$$y=x^{-\alpha}(A+Bx^{n+1}),$$

если же $\beta^2=-\gamma^2$, то

$$y=Ax^{-\alpha}\sin\left(\frac{\gamma}{n+1}x^{n+1}+C\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

901. Положим $n=2\alpha$, так что получаем следующее уравнение:

$$d^2y-\frac{\alpha(\alpha+1)\,y\,dx^2}{x^2}-\beta^2x^{4\alpha}y\,dx^2=0.$$

Его полным интегралом будет

$$y=x^{-\alpha}\left(Ae^{\frac{-\beta}{2\alpha+1}x^{2\alpha+1}}+Be^{\frac{\beta}{2\alpha+1}x^{2\alpha+1}}\right).$$

Если же $\beta=0$, то получаем интеграл

$$y=x^{-\alpha}(A+Bx^{2\alpha+1}),$$

а если $\beta^2=-\gamma^2$, получаем интеграл

$$y=Ax^{-\alpha}\sin\left(\frac{\gamma}{2\alpha+1}x^{2\alpha+1}+C\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

902. Положим $\alpha=-1$, так что имеем уравнение

$$d^2y-\frac{\beta^2y\,dx^2}{x^4}=0.$$

Стало быть, интегралом этого уравнения будет

$$y=x\left(Ae^{\frac{\beta}{x}}+Be^{-\frac{\beta}{x}}\right).$$

Здесь следует заметить, что если $\beta^2=-\gamma^2$, то

$$y=Ax\sin\left(\frac{\gamma}{x}+C\right).$$

ПРИМЕР 3

903. *Положим*

$$N=\frac{Ax^m}{\alpha+\beta x^n},$$

так что $\dfrac{dN}{N\,dx}=\dfrac{m}{x}-\dfrac{\beta nx^{n-1}}{\alpha+\beta x^n}$, *и примем, что*

$$M=\frac{m}{2x}-\frac{\beta nx^{n-1}}{2(\alpha+\beta x^n)}.$$

Тогда [§ 895] $P=0$ и

$$Q=\frac{-m}{2x^2}-\frac{\beta n(n-1)x^{n-2}}{2(\alpha+\beta x^n)}+\frac{\beta^2 n^2 x^{2n-2}}{2(\alpha+\beta x^n)^2}$$
$$-\frac{m^2}{4x^2}+\frac{\beta m n x^{n-2}}{2(\alpha+\beta x^n)}-\frac{\beta^2 n^2 x^{2n-2}}{4(\alpha+\beta x^n)^2}$$
$$-\frac{A^2 x^{2m}}{(\alpha+\beta x^n)^2},$$

то есть

$$Q=\frac{-m(m+2)}{4x^2}+\frac{n(m-n+1)\beta x^{n-2}}{2(\alpha+\beta x^n)}+\frac{\beta^2 n^2 x^{2n-2}-4A^2x^{2m}}{4(\alpha+\beta x^n)^2}.$$

Так как $\int M\,dx=\frac{1}{2}\,lN$, получаем интеграл уравнения $d^2y+Qy\,dx^2=$ $=0$ в виде

$$y=\frac{1}{\sqrt{N}}\left(Ce^{-\int N\,dx}+De^{\int N\,dx}\right).$$

Можно несколькими способами упростить выражение для Q, а именно так, чтобы числитель последнего слагаемого [в выражении для Q] делился на $\alpha+\beta x^n$.

I. Пусть $m=n-1$ и $A^2=\frac{1}{4}\beta^2 n^2$, тогда $Q=-\frac{n^2-1}{4x^2}$ и, вместе с тем,

$$N=\frac{\frac{1}{2}\beta n x^{n-1}}{\alpha+\beta x^n} \quad \text{и} \quad \int N\,dx=\frac{1}{2}\,l(\alpha+\beta x^n).$$

Отсюда получаем интеграл уравнения $d^2y-\frac{(n^2-1)\,y\,dx^2}{4x^2}=0$ в виде

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^{n-1}}}(C+D\alpha+D\beta x^n).$$

II. Пусть $2m=-2$, то есть $m=-1$, и $4A^2=\alpha^2n^2$. Тогда

$$Q=\frac{1}{4x^2}-\frac{n^2\beta x^{n-2}}{2(\alpha+\beta x^n)}+\frac{\beta n^2 x^{n-2}-\alpha n^2 x^{-2}}{4(\alpha+\beta x^n)},$$

то есть $Q=\frac{1-n^2}{4x^2}$, как и выше.

III. Пусть $2m=-n-2$, то есть

$$m=\frac{-n-2}{2},$$

и

$$4A^2=-\frac{\alpha^3 n^2}{\beta}.$$

Тогда

$$Q=\frac{-(n^2-4)}{16x^2}-\frac{3n^2\beta x^{n-2}}{4(\alpha+\beta x^n)}+\frac{n^2(\beta^2x^{n-2}-\alpha\beta x^{-2}+\alpha^2x^{-n-2})}{4\beta(\alpha+\beta x^n)},$$

то есть

$$Q=\frac{4-n^2}{16x^2}+\frac{n^2(\alpha^2x^{-n-2}-\alpha\beta x^{-2}-2\beta^2x^{-n-2})}{4\beta(\alpha+\beta x^n)}.$$

Это выражение переходит в следующее:

$$Q=\frac{4-n^2}{16x^2}+\frac{n^2}{4\beta}(\alpha x^{-n-2}-2\beta x^{-2})=\frac{4-9n^2}{16x^2}+\frac{n^2\alpha}{4\beta x^{n+2}}.$$

Поэтому, поскольку имеем

$$N=+\frac{n\alpha\sqrt{-\alpha}}{2\sqrt{\beta}}\cdot\frac{x^{-\frac{n+2}{2}}}{\alpha+\beta x^n},$$

получим, что

$$\int N\,dx=\frac{n\alpha\sqrt{-\alpha}}{2\sqrt{\beta}}\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x^n)\,x^{\frac{n+2}{2}}}.$$

Положим $n=\frac{2}{3}$, так что $m=-\frac{4}{3}$, $Q=\frac{\alpha}{9\beta x^{\frac{8}{3}}}$ и

$$N=\frac{\alpha\sqrt{-\alpha}}{3\sqrt{\beta}}\cdot\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{\alpha+\beta x^{\frac{2}{3}}}.$$

Отсюда

$$\int N\,dx=\frac{\alpha\sqrt{-\alpha}}{3\sqrt{\beta}}\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x^{\frac{2}{3}})\,x^{\frac{4}{3}}}.$$

Таким образом, интегралом уравнения

$$d^2y+\frac{\alpha}{9\beta x^{\frac{8}{3}}}\,y\,dx^2=0$$

будет

$$y=\frac{1}{\sqrt{N}}\left(Ce^{-\int N\,dx}+De^{\int N\,dx}\right).$$

Если же принять, что $n=-\frac{2}{3}$, а, следовательно, $m=-\frac{2}{3}$ и $Q=\frac{\alpha}{9\beta x^{\frac{4}{3}}}$

то находим

$$N=\frac{-\alpha\sqrt{-\alpha}}{3\sqrt{\beta}}\,\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{\alpha+\beta x^{-\frac{2}{3}}}$$

и

$$\int N\,dx=\frac{-\alpha\sqrt{-\alpha}}{3\sqrt{\beta}}\int\frac{x^{\frac{1}{3}}\,dx}{\alpha x+\beta x^{\frac{1}{3}}}=\frac{-\alpha\sqrt{-\alpha}}{3\sqrt{\beta}}\int\frac{dx}{\alpha x^{\frac{2}{3}}+\beta},$$

так что уравнение

$$d^2y+\frac{\alpha y\,dx^2}{9\beta x^{\frac{4}{3}}}=0$$

интегрируется таким же образом [как выше].

ПОЯСНЕНИЕ 1

904. Итак, уравнение $d^2y + Ax^m y\,dx^2 = 0$ можно проинтегрировать в следующих случаях: $m = 0$, $m = -4$, $m = -\frac{4}{3}$, $m = -\frac{8}{3}$ [и $m = -2$, т. е. при $m = -2 \pm \frac{2}{1}$ и $m = -2 \pm \frac{2}{3}$. Если же сверх того положим $N = \frac{Ax^\lambda}{\alpha + \beta x^n + \gamma^{2n}}$, мы сможем подобным же образом проинтегрировать это уравнение для тех случаев, когда $m = -2 \pm \frac{2}{5}$, и в этих случаях допускает интегрирование также дифференциальное уравнение первого порядка

$$dz + z^2\,dx + Ax^m\,dx = 0.]$$

Однако исследование этих случаев интегрируемости является слишком трудоемким, чтобы излагать его здесь более подробным образом, тем паче, что в дальнейшем [гл. VII, задача 118, особенно § 943] будет получен более удобный метод для рассмотрения всех этих случаев.

ПОЯСНЕНИЕ 2

905. Из изложенного можно усмотреть, какой пользы следует ожидать от определения множителей, с помощью которых становятся интегрируемыми дифференциальные уравнения второго порядка, хотя рассмотренные здесь примеры только в незначительной степени иллюстрируют этот метод. Но я здесь рассматривал только некоторые виды множителей, однако нет никакого сомнения, что можно также использовать с неменьшим успехом многие другие виды. Далее, в этой главе мы рассматривали только такие дифференциальные уравнения второго порядка, в которых одно из переменных y вместе со своими дифференциалами dy и d^2y везде входит в первом измерении. Но этот же метод распространяется и на другие виды уравнений того же порядка; и хотя до сих пор им мало занимались[1]), однако не бесполезно будет дать его дальнейшие приложения, изложив интегрирование с помощью множителей других дифференциальных уравнений второго порядка, которые, по-видимому, очень трудно решить иными методами.

[1]) См. работу Эйлера «De aequationibus differentialibus secundi gradus», Novi comment. acad. Sc. Petrop. 7 (1758/9), 1761, стр. 163 (№ 265 по списку Энестрема; также в Opera Omnia, Ser. I, vol. 22). Относительно уравнений, рассмотренных в этой V главе, см. также Эйлера «Observatio singularis circa aequationes differentiales lineares», Nova acta acad. Sc. Petrop. 14, 1805, стр. 52 (№ 220 по списку Энестрема; также в Opera Omnia, Ser. I, vol 23) [Л. Ш.].

ГЛАВА VI

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДРУГИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ПОДХОДЯЩИХ МНОЖИТЕЛЕЙ

ЗАДАЧА 112

906. *Пусть предложено уравнение следующего вида:*

$$d^2y + \frac{Ay\,dx^2}{(By^2+C+2Dx+Ex^2)^2} = 0,$$

причем элемент dx полагаем постоянным; найти множитель, который делает это уравнение интегрируемым.

РЕШЕНИЕ

Попробуем искать такой множитель в виде $2P\,dy + 2Qy\,dx$, где P и Q— функции от x, и интеграл произведения

$$2d^2y\,(P\,dy + Qy\,dx) + \frac{2Ay\,dx^2\,(P\,dy+Qy\,dx)}{(By^2+C+2Dx+Ex^2)^2} = 0$$

представляем в виде

$$P\,dy^2 + 2Qy\,dx\,dy + V\,dx^2 = \mathrm{Const}\cdot dx^2,$$

где V — функция, содержащая оба переменных x и y. Отсюда получаем равенство

$$+\,dP\,dy^2 + 2y\,dx\,dQ\,dy + 2Q\,dx\,dy^2 + dx^2\,dV - \frac{2Ay\,dx^2\,(P\,dy+Qy\,dx)}{(By^2+C+2Dx+Ex^2)^2} = 0.$$

При интегрировании из этого соотношения нельзя будет определить значения V, если только не имеем $dP + 2Q\,dx = 0$. А тогда получаем

$$dV = \frac{Ay\,(2P\,dy - y\,dP)}{(By^2+C+2Dx+Ex^2)^2} - 2y\,dy\frac{dQ}{dx}.$$

Интегралом этого выражения, считая переменным только y и предполагая, что оно допускает интегрирование, будет

$$\frac{-AP}{B(By^2+C+2Dx+Ex^2)}-y^2\frac{dQ}{dx}=V.$$

Следовательно, если мы полагаем y постоянным, должно иметь место [равенство]

$$-\frac{A\,dP\,(By^2+C+2Dx+Ex^2)+2AP\,dx\,(D+Ex)}{B(By^2+C+2Dx+Ex^2)^2}-y^2\frac{d^2Q}{dx}$$
$$=\frac{-Ay^2\,dP}{(By^2+C+2Dx+Ex^2)^2}.$$

Оно удовлетворяется, если $\frac{d^2Q}{dx^2}=0$ и

$$-dP\,(C+2Dx+Ex^2)+2P\,dx\,(D+Ex)=0.$$

Надо показать, что эти два условия могут удовлетворяться одновременно. Но второе из них дает нам

$$\frac{dP}{P}=\frac{2D\,dx+2Ex\,dx}{C+2Dx+Ex^2},$$

так что $P=C+2Dx+Ex^2$, откуда

$$Q=-\frac{dP}{2\,dx}=-D-Ex.$$

Следовательно, $\frac{dQ}{dx}=-E$ и $\frac{d^2Q}{dx^2}=0$. Стало быть, искомым множителем будет

$$2\,dy\,(C+2Dx+Ex^2)-2y\,dx\,(D+Ex),$$

и, таким образом, получаем интеграл в виде

$$\frac{dy^2}{dx^2}(C+2Dx+Ex^2)-\frac{2y\,dy}{dx}(D+Ex)$$
$$-\frac{A(C+2Dx+Ex^2)}{B(By^2+C+2Dx+Ex^2)}+Ey^2=\text{Const},$$

или же, добавляя слева и справа $\frac{A}{B}$, в виде

$$\frac{dy^2}{dx^2}(C+2Dx+Ex^2)-\frac{2y\,dy}{dx}(D+Ex)$$
$$+\frac{Ay^2}{By^2+C+2Dx+Ex^2}+Ey^2=\text{Const}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

907. Итак, уравнение $d^2y+\frac{a^2y\,dx^2}{(y^2+x^2)^2}=0$, где $A=a^2$, $B=1$, $C=0$, $D=0$ и $E=1$, становится интегрируемым с помощью множителя $2x^2\,dy-2yx\,dx$, и его интегралом будет

$$\frac{x^2\,dy^2}{dx^2}-\frac{2xy\,dy}{dx}+y^2+\frac{a^2y^2}{y^2+x^2}=b^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

908. Если в этом уравнении положим $y = ux$, то, поскольку $dy = u\,dx + x\,du$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &x^2u^2 + \frac{2ux^3\,du}{dx} + \frac{x^4\,du^2}{dx^2} + \frac{a^2u^2}{1+u^2} \\ &- 2x^2u^2 - \frac{2ux^3\,du}{dx} \\ &+ x^2u^2 \end{aligned}\right\} = b^2,$$

или же

$$\frac{x^4\,du^2}{dx^2} = \frac{b^2 + (b^2 - a^2)\,u^2}{1+u^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{b^2 + (b^2 - a^2)\,u^2}},$$

откуда как x, так и y определяются через u.

СЛЕДСТВИЕ 3

909. Подобным же образом можно проинтегрировать уравнение и в общем случае. Действительно, примем ради краткости

$$C + 2Dx + Ex^2 = Bz^2.$$

Тогда $D + Ex = \frac{Bz\,dz}{dx}$, и наше уравнение запишется в виде

$$\frac{Bz^2\,dy^2}{dx^2} - \frac{2Byz\,dy\,dz}{dx^2} + Ey^2 + \frac{Ay^2}{B(y^2+z^2)} = \frac{K}{B}.$$

Положив здесь $y = uz$, получим

$$\frac{Bz^4\,du^2}{dx^2} - \frac{Bu^4z^2\,dz^2}{dx^2} + Eu^2z^2 + \frac{Au^2}{B(1+u^2)} = \frac{K}{B}.$$

Так как $\frac{z^2\,dz^2}{dx^2} = \frac{(D+Ex)^2}{B^2}$, отсюда следует

$$\frac{Bz^4\,du^2}{dx^2} + \frac{CE - D^2}{B}\,u^2 = \frac{K + (K - A)\,u^2}{B(1+u^2)},$$

то есть

$$\frac{B^2z^4\,du^2}{dx^2} = \frac{K + (K - A + D^2 - CE)\,u^2 + (D^2 - CE)\,u^4}{1+u^2}.$$

Таким образом, подставляя вместо z его значение, получаем

$$\frac{dx}{C + 2Dx + Ex^2} = \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{K + (K - A + D^2 - CE)\,u^2 + (D^2 - CE)\,u^4}}.$$

Следовательно, x определяется через u, значит [через u определяется] также

$$y = uz = u\sqrt{\frac{C + 2Dx + Ex^2}{B}}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

910. Здесь легко усмотреть подстановку, с помощью которой можно привести к более удобному виду как само предложенное дифференциальное уравнение второго порядка, так и его множитель. Действительно, положив для сокращения $C+2Dx+Ex^2=Bz^2$, мы преобразуем наше уравнение

$$d^2y+\frac{Ay\,dx^2}{B^2(y^2+z^2)}=0$$

с помощью подстановки $y=uz$ в [уравнение]

$$z\,d^2u+2\,dz\,du+u\,d^2z+\frac{Au\,dx^2}{B^2z^3(1+u^2)}=0,$$

множителем которого является

$$2B(z^2\,dy-yz\,dz),\quad \text{то есть } 2Bz^3\,du,$$

либо попросту $z^3\,du$. А так как $dz=\dfrac{dx\,(D+Ex)}{Bz}$, то

$$d^2z=\frac{E\,dx^2}{Bz}-\frac{dx\,dz\,(D+Ex)}{Bz^2}=\frac{E\,dx^2}{Bz}-\frac{dx^2\,(D+Ex)^2}{B^2z^3}=\frac{(CE-D^2)\,dx}{B^2z^3}.$$

Таким образом, $z^3\,d^2z=\dfrac{CE-D^2}{B^2}\,dx^2$, так что наше уравнение после умножения на $z^3\,du$ приводится к следующему, очевидно, интегрируемому виду:

$$z^4\,du\,d^2u+2z^3\,dz\,du^2+\frac{CE-D^2}{B^2}\,u\,du\,dx^2+\frac{Au\,du\,dx^2}{B^2(1+u^2)^2}=0,$$

причем интегралом будет

$$\frac{1}{2}z^4\,du^2+\frac{CE-D^2}{2B^2}\,u^2\,dx^2-\frac{A\,dx^2}{2B^2(1+u^2)}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Const}\cdot dx^2.$$

Так как z является функцией только от x, то сразу бросается в глаза, как произвести новое интегрирование, потому что

$$z^2\,du=dx\sqrt{\mathrm{Const}+\frac{D^2-CE}{B^2}\,u^2+\frac{A}{B^2(1+u^2)}},$$

и здесь переменные u и x уже отделены. Кроме того, здесь следует отметить, что та функция, которую мы приравняли z, удовлетворяет уравнению $z^3d^2z=\alpha\,dx^2$, хотя смысл этого не очевиден[1]). Но после умножения этого уравнения на $\dfrac{2\,dz}{z^3}$ получаем, что $2\,dz\,d^2z=\dfrac{2\alpha\,dx^2\,dz}{z^3}$. Интегралом последнего уравнения будет $dz^2=\beta\,dx^2-\dfrac{\alpha\,dx^2}{z^2}$, или же $dx=\dfrac{z\,dz}{\sqrt{\beta z^2-\alpha}}$, откуда затем получаем $\beta x+\gamma=\sqrt{\beta z^2-\alpha}$, следовательно, $\beta z^2=\alpha+\gamma^2+2\beta\gamma x+\beta^2x^2$, что и является нашим выражением [для z].

[1]) Caeterum hic notetur functionem pro z assumtam satisfacere aequationi $z^3d^2z=\alpha\,dx^2$, cum tamen eius ratio non sit manifesta.

ЗАДАЧА 113

911. *Полагая элемент dx постоянным, определить общий вид тех дифференциальных уравнений второго порядка, которые интегрируются с помощью множителя вида $My\,dx+N\,dy$.*

РЕШЕНИЕ

Так как множитель может быть преобразован с помощью подстановки $y=Ru$ к весьма простому виду $S\,du$, мы преобразуем с помощью этой подстановки само дифференциальное уравнение второго порядка к виду

$$d^2u+P\,dx\,du+\frac{U\,dx^2}{S}=0.$$

Последнее слагаемое в левой части[1]) интегрируется само по себе после умножения на $S\,du$, если только U обозначает произвольную функцию от u, тогда как R, S и P — функции только от x. Так как уравнение

$$S\,du\,d^2u+PS\,dx\,du^2+U\,dx^2\,du=0$$

должно интегрироваться, то, если полагаем интеграл в виде

$$\frac{1}{2}S\,du^2+dx^2\int U\,du=\frac{1}{2}C\,dx^2,$$

необходимо, чтобы

$$\frac{1}{2}dS\,du^2=PS\,dx\,du^2,\ \text{то есть}\ P\,dx=\frac{dS}{2S}.$$

Поэтому уравнение следующего общего вида:

$$d^2u+\frac{dS\,du}{2S}+\frac{U\,dx^2}{S}=0$$

после умножения на $S\,du$ и интегрирования дает

$$S\,du^2=dx^2\left(C-2\int U\,du\right).$$

После нового интегрирования получаем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{S}}=\int\frac{du}{\sqrt{C-2\int U\,du}}.$$

Так как все это очевидно, мы обратимся к более сложным видам, полагая $u=\frac{y}{R}$, так что U будет уже функцией от $\frac{y}{R}$. При этом имеем

$$du=\frac{dy}{R}-\frac{y\,dR}{R^2}\quad\text{и}\quad d^2u=\frac{d^2y}{R}-\frac{2\,dR\,dy}{R^2}-\frac{y\,d^2R}{R^2}+\frac{2y\,dR^2}{R^3}.$$

Таким образом, наше уравнение будет вида

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2y}{R}-\dfrac{2dR\,dy}{R^2}-\dfrac{yd^2R}{R^2}+\dfrac{2ydR^2}{R^3}+\dfrac{U\,dx^2}{S}\\[2ex] \quad+\dfrac{dS\,dy}{2RS}\qquad\qquad-\dfrac{yd\,R\,dS}{2R^2S}\end{array}\right\}=0,$$

1) У Эйлера коротко: postremum membrum (aequationes).

и оно становится интегрируемым после умножения на $\frac{S}{R^2}(R\,dy - y\,dR)$. Чтобы получить указанный выше вид уравнения, полагаем $S = \alpha R^4$, и [таким образом] уравнение

$$\frac{d^2y}{R} - \frac{y\,d^2R}{R^2} + \frac{U\,dx^2}{\alpha R^4} = 0$$

становится интегрируемым после умножения на $\alpha R^2(R\,dy - y\,dR)$. Или, иначе, уравнение

$$R\,d^2y - y\,d^2R - \frac{dx^2}{R^2} f\left(\frac{y}{R}\right)^{1)} = 0$$

становится интегрируемым после умножения на $R\,dy - y\,dR$. Для того чтобы больше замаскировать путь, приводящий к интегрированию, положим [2]) $f\left(\frac{y}{R}\right) = \frac{\alpha y}{R} + V$, так что V — однородная функция нулевого измерения от y и R, а также положим $y\,d^2R = \frac{\alpha y\,dx^2}{R^3}$, и тогда получаем

$$R\,d^2y + \frac{V\,dx^2}{R^2} = 0, \quad \text{то есть} \quad d^2y + \frac{V\,dx^2}{R^3} = 0,$$

а это уравнение становится интегрируемым после умножения на $R(R\,dy - y\,dR)$. Поскольку же $d^2R = \frac{\alpha\,dx^2}{R^3}$, то, как мы видели выше [§ 910],

$$R = \sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2}.$$

Поэтому, раз V является однородной функцией нулевого измерения от y и $R = \sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2}$, уравнение

$$d^2y + \frac{V\,dx^2}{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

становится интегрируемым после умножения на

$$(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)\,dy - (\beta + \gamma x)\,y\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

912. Если мы полагаем $R = \sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2}$, то наше уравнение после умножения на $R^2\,dy - Ry\,dR$ принимает вид

$$R^2\,dy\,d^2y - Ry\,dR\,d^2y + \frac{V\,dx^2\,(R\,dy - y\,dR)}{R^2} = 0,$$

и его интегралом будет

$$\frac{1}{2}R^2\,dy^2 - Ry\,dR\,dy + \int y\,dy\,(R\,d^2R + dR^2) + dx^2 \int V d\,\frac{y}{R} = \mathrm{Const}\cdot dx^2.$$

Здесь

$$R\,d^2R + dR^2 = d\,(R\,dR) = d\,(\beta + \gamma x) = \gamma\,dx^2,$$

так что интегралом является

$$R^2\,dy^2 - 2Ry\,dR\,dy + \gamma y^2\,dx^2 + dx^2 \int V d\,\frac{y}{R} = \mathrm{Const}\cdot dx^2.$$

---

[1]) У Эйлера $f : \frac{y}{R}$.

[2]) Ut via ad integrationem perveniendi magis occultetur. ...

СЛЕДСТВИЕ 2

913. Вследствие того, что V является функцией только от $\frac{y}{R}$, выражение $\int V d\frac{y}{R}$ [1] есть интеграл. Положив для дальнейшего интегрирования $y = Ru$ и $\int V\,du = U$, получаем

$$R^4\,du^2 - R^2u^2\,dR^2 + \gamma R^2u^2\,dx^2 + 2U\,dx^2 = G\,dx^2$$

или же

$$R^4\,du^2 = dx^2\,[G - 2U + (\beta^2 - \alpha\gamma)\,u^2],$$

и отсюда

$$\frac{dx}{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2} = \frac{du}{\sqrt{G - 2U + (\beta^2 - \alpha\gamma)\,u^2}},$$

а затем

$$y = u\sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

914. Итак, уравнение $d^2y + \frac{V\,dx^2}{R^3} = 0$, где $R = \sqrt{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2}$, гораздо более общее, чем то уравнение, которое мы рассматривали в предыдущей задаче [§ 906], потому, что здесь можно принять в качестве V любую однородную функцию нулевого измерения от y и R. Действительно, если положим $V = \frac{AR^3y}{(my^2 + R^2)^2}$, то получаем первоначально рассмотренное уравнение. Однако тот метод, с помощью которого мы получили наше уравнение, показывает, что оно в частном случае приводится к указанному выше сложному виду, поскольку то соотношение, откуда это уравнение получено,

$$R\,d^2y - y\,d^2R + \frac{dx^2}{R^2}f\left(\frac{y}{R}\right) = 0,$$

очевидно, допускает интегрирование после умножения на $R\,dy - y\,dR$ [2]. В самом деле,

$$R\,d^2y - y\,d^2R = d\,(R\,dy - y\,dR)$$

и

$$\frac{R\,dy - y\,dR}{R^2} = d\,\frac{y}{R}.$$

Отсюда после умножения получаем

$$(R\,dy - y\,dR)\,d\,(R\,dy - y\,dR) + dx^2 f\left(\frac{y}{R}\right)d\,\frac{y}{R} = 0,$$

---

[1] Quia V est functio ipsius $\frac{y}{R}$, formulae $\int Vd\frac{y}{R}$ integrale habetur. — Смысл этой фразы, по нашему пониманию, в том, что $\int Vd\frac{y}{R}$ является действительно квадратурой.

[2] Caeterum ex methodo, qua illam aequationem elicuimus, apparet, eam per restrictionem ad hanc formam occultam esse perductam, cum ea aequatio; unde est nata, ..., perspicue integrationem admittat, si per $R\,dy - y\,dR$ multiplicetur.

и оба слагаемых в этом уравнении интегрируются, каждое в отдельности. В уравнении же, которое получается отсюда, способ интегрирования усмотреть труднее, и он еще более замаскирован в последующих уравнениях

ЗАДАЧА 114

915. *Проинтегрировать следующее уравнение:*

$$y^2\,d^2y + y\,dy^2 + Ax\,dx^2 = 0$$

с помощью интегрирующего множителя[1]*, считая элемент dx постоянным.*

РЕШЕНИЕ

Тщетно будем пытаться применить здесь множитель вида $L\,dy + M\,dy$. Поэтому мы попытаемся [воспользоваться] выражением

$$3L\,dy^2 + 2M\,dx\,dy + N\,dx^2,$$

и интеграл уравнения, которое получается после [умножения на такой множитель, запишем в виде[2]

$$Ly^2\,dy^3 + My^2\,dx\,dy^2 + Ny^2\,dx^2\,dy + V\,dx^3 = C\,dx^3.$$

Дифференцирование этого соотношения приводит к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} dx^3\,dV &= 3Ly\,dy^4 + 2My\,dx\,dy^3 + Ny\,dx^2\,dy^2 + 2AMx\,dx^3\,dy + ANx\,dx^4 \\ &- 2Ly\,dy^4 - y^2\,dx\,dy^3\left(\frac{dL}{dx}\right) + 3ALx\,dx^2\,dy^2 - y^2\,dx^3\,dy\left(\frac{dN}{dx}\right) \\ &- y^2\,dy^4\left(\frac{dL}{dy}\right) - 2My\,dx\,dy^3 - y^2\,dx^2\,dy^2\left(\frac{dM}{dx}\right) \\ &- y^2\,dx\,dy^3\left(\frac{dM}{dy}\right) - 2Ny\,dx^2\,dy^2 \\ &- y^2\,dx^2\,dy^2\left(\frac{dN}{dy}\right)^{3)}. \end{aligned}$$

Для того чтобы можно было проинтегрировать это выражение, нужно, чтобы слагаемые, содержащие dy^4, dy^3 и dy^2, исчезали. Отсюда, во-первых, заключаем, что

$$L - y\left(\frac{dL}{dy}\right) = 0,$$

где $\left(\frac{dL}{dy}\right)$ получается при дифференцировании L, полагая x постоянным. Стало быть, если x рассматривается как постоянное количество, то будем иметь $\frac{dL}{L} = \frac{dy}{y}$, следовательно, $L = yf(x)$.

---

[1]) У Эйлера нет здесь, как и вообще, термина «интегрирующий множитель». Он говорит и тут об интегрировании с «помощью» множителя, который делает его (уравнение) интегрируемым (ope multiplicatoris eam integrabilem reddentis). Но буквальный перевод был бы слишком тяжеловесен.

[2]) Перевод здесь имеет характер пояснения. У Эйлера сказано уже слишком кратко: ac ponatur producti untegrale.

[3]) Здесь, как и везде в аналогичных местах, скобки обозначают частные производные.

Но мы пренебрежем этой функцией от x, т. е. вместо нее подставим единицу, так что $L=y$ и $\left(\frac{dL}{dx}\right)=0$. Следовательно, во-вторых, должно быть $\left(\frac{dM}{dy}\right)=0$. Поэтому мы примем $M=0$, хотя M может обозначать также любую функцию от x, поскольку мы убедимся, что при таком предположении задача может быть решена. В-третьих, получаем также

$$-Ny+3Axy+y^2\left(\frac{dN}{dy}\right)=0.$$

Следовательно, полагая x постоянным, получим $3Ax\,dy=N\,dy+y\,dN$, откуда $Ny=3Axy$, то есть $N=3Ax$, причем мы опять пренебрегаем функцией от x, которая должна входить здесь вместо постоянного. Итак, поскольку мы таким образом нашли, что $L=y$, $M=0$ и $N=3Ax$, получаем $dV=-3Ay^2\,dy+3A^2x^2\,dx$. Так как это соотношение сразу интегрируется, а именно $V=-Ay^3+A^2x^3$, то множителем, который делает наше уравнение интегрируемым, будет [выражение]

$$3y\,dy^2+3Ax\,dx^2,$$

а интегралом уравнения, которое получаем после умножения, будет [1])

$$y^3\,dy^3+3Axy^2\,dx^2\,dy-Ay^3\,dx^3+A^2x^3\,dx^3=C\,dx^3.$$

Ввиду [наличия] постоянного C это полный интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 1

916. Левая часть этого интеграла может быть с удобством разложена на три множителя [2]). Если обозначить множители, на которые разлагается выражение z^3-A, через $(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$, так что

$$\alpha=\sqrt[3]{A},\quad \beta=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A}\quad \text{и}\quad \gamma=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A},$$

то найденный интеграл будет

$$\left(\frac{y\,dy}{dx}-\alpha y+\alpha^2x\right)\left(\frac{y\,dy}{dx}-\beta y+\beta^2x\right)\left(\frac{y\,dy}{dx}-\gamma y+\gamma^2x\right)=C,$$

причем

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\qquad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=0\qquad \text{и}\qquad \alpha\beta\gamma=A.$$

Положив $\frac{y\,dy}{dx}=z$, получим такое выражение:

$$z^3+3Axyz-Ay^3+A^2x^3,$$

и, если обозначим его множитель через $z-p-q$, то

$$z^3-3pqz-p^3-q^3=0,$$

стало быть,

$$p=y\sqrt[3]{A}\quad \text{и}\quad q=-x\sqrt[3]{A^2}.$$

---

[1]) Et producti integrale habebitur ...

[2]) Huius integralis membrum primum commode in tres factores resolvi potest.

СЛЕДСТВИЕ 2

917. Итак, если мы положим постоянное $C=0$, получаем три частных интеграла:

$$y\,dy-\alpha y\,dx+\alpha^2 x\,dy=0;$$

вместо α подставляем β и γ, имеем

$$y\,dy-\beta y\,dx+\beta^2 x\,dx=0$$

и

$$y\,dy-\gamma y\,dx+\gamma^2 x\,dx=0.$$

Отсюда после подстановки $y=ux$ следует $\frac{dx}{x}=\frac{-u\,du}{u^2-\alpha u+\alpha^2}$. Снова интегрируя, будем иметь

$$lx=l\,\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\alpha u+u^2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\frac{u\sqrt{3}}{2\alpha-u}+\mathrm{Const.}$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

918. Полученное дифференциальное уравнение первого порядка трудно опять проинтегрировать. Можно освободиться от степеней дифференциалов, полагая $dy=p\,dx$ и $y=ux$, откуда получаем $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$. Действительно, будем иметь

$$x^3(u^3p^3+3Au^2p-Au^3+A^2)=C,$$

и это выражение после перехода к логарифмам и дифференцирования дает нам

$$\frac{dx}{x}+\frac{u^2dp\,(up^2+A)+u\,du\,(up^3+2Ap-Au)}{u^3p^3+3Au^2p-Au^3+A^2}=0,$$

что после подстановки $\frac{du}{p-u}$ вместо $\frac{dx}{x}$ переходит в [уравнение]

$$du\,(up^2+A)^2+u^2(p-u)\,dp\,(up^2+A)=0.$$

А деля на up^2+A, получаем

$$A\,du+up^2\,du+pu^2\,dp-u^3\,dp=0,$$

что, полагая $p=\frac{q}{u}$, преобразуем к несколько более простому виду, а именно

$$A\,du+q\,dq+qu\,du-u^2\,dq=0.$$

Этому [уравнению], если положить $A=m^3$, в частности, удовлетворяет $q=mu-m^2$, однако, по-видимому, едва ли можно обнаружить таким образом полный интеграл. Впрочем, это же уравнение относительно p и u можно непосредственно получить из исходного дифференциального уравнения второго порядка, потому что в последнем оба переменных x и y во всех слагаемых дают одно и то же число измерений. Действительно, если положить $dy = p\,dx$ и $y = ux$, уравнение переходит в

$$u^2 x\,dp + up^2\,dx + A\,dx = 0$$

или же

$$\frac{dx}{x} = \frac{-u^2\,dp}{A+up^2} = \frac{du}{p-u},$$

а это и есть предыдущее уравнение.

ПОЯСНЕНИЕ 2

919. Однако иногда предложенное уравнение может быть полностью проинтегрировано, а поэтому могут быть проинтегрированы и те уравнения, которые из него получаются. Впрочем, это получается весьма странным способом — переходом от нашего уравнения к дифференциальному уравнению третьего порядка¹). Действительно, так как имеем

$$yd\frac{y\,dy}{dx} + Ax\,dx = 0,$$

то, полагая $\frac{dx}{y} = dv$, получим

$$yd\frac{dy}{dv} + Ax\,dx = 0, \quad \text{или же} \quad d\frac{dy}{dv} + Ax\,dv = 0;$$

если здесь принять элемент dv постоянным и снова продифференцировать, найдем

$$\frac{d^3y}{dv} + A\,dx\,dv = 0, \quad \text{то есть} \quad d^3y + Ay\,dv^3 = 0.$$

Этот вид уравнения [§ 1117] таков, что если ему, в частности, удовлетворяют $y = P$, $y = Q$, $y = R$, то ему удовлетворяет также $y = DP + EQ + FR$. Но ведь этому уравнению удовлетворяет $y = e^{-\alpha v}$, если $\alpha^3 = A$, и, так как согласно следствию 1 все три величины α, β, γ определяются одинаковым образом, получаем полный интеграл

$$y = De^{-\alpha v} + Ee^{-\beta v} + Fe^{-\gamma v},$$

откуда, так как $Ax = -\frac{d^2y}{dv^2}$, будем иметь

$$x = \frac{-D\alpha^2 e^{-\alpha v} - E\beta^2 e^{-\beta v} - F\gamma^2 e^{-\gamma v}}{A},$$

или же, меняя постоянные и учитывая, что $A = \alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3$,

$$x = +\mathfrak{A}e^{-\alpha v} + \mathfrak{B}e^{-\beta v} + \mathfrak{C}e^{-\gamma v},$$

$$y = -\mathfrak{A}\alpha e^{-\alpha v} - \mathfrak{B}\beta e^{-\beta v} - \mathfrak{C}\gamma e^{-\gamma v}.$$

Следовательно, полный интеграл уравнения

$$A\,du + q\,dq + qu\,du - u^2 dq = 0$$

содержится в таких формулах:

$$u = \frac{-\mathfrak{A}\alpha e^{-\alpha v} - \mathfrak{B}\beta e^{-\beta v} - \mathfrak{C}\gamma e^{-\gamma v}}{\mathfrak{A}e^{-\alpha v} + \mathfrak{B}e^{-\beta v} + \mathfrak{C}e^{-\gamma v}}$$

¹) Hoc autem prorsus singulari ratione praestatur, aequationem illam adeo ad differentialia tertii ordinis evehendo

и

$$q = \frac{\mathfrak{A}\alpha^2 e^{-\alpha v} + \mathfrak{B}\beta^2 e^{-\beta v} + \mathfrak{C}\gamma^2 e^{-\gamma v}}{\mathfrak{A}e^{-\alpha v} + \mathfrak{B}e^{-\beta v} + \mathfrak{C}e^{-\gamma v}},$$

так как $q = pu = \frac{y\,du}{x\,dx} = \frac{dy}{x\,dv}$. Это есть замечательный пример интегрирования, которое едва ли выполнимо с помощью прямого метода.

ЗАДАЧА 115

920. *Предложено уравнение*

$$2y^3\,d^2y + y^2\,dy^2 + X\,dx^2 = 0,$$

причем элемент dx считаем постоянным; найти множитель, который делает это уравнение интегрируемым, если $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2$.

РЕШЕНИЕ

Здесь тщетно было бы пытаться применить множители вида

$$L\,dy + M\,dx \quad \text{и} \quad L\,dy^2 + M\,dx\,dy + N\,dx^2;$$

поэтому мы примем множитель в виде

$$2L\,dy^3 + M\,dx^2\,dy + N\,dx^3,$$

а интеграл представим в виде

$$Ly^3\,dy^4 + My^3\,dx^2\,dy^2 + 2N\,dx^3\,dy + S\,dx^4 = 0,$$

откуда с помощью дифференцирования получаем

$$\begin{aligned} dx^4\,dS = {} & 2Ly^2\,dy^5 + My^2\,dx^2\,dy^3 + Ny^2\,dx^3\,dy^2 + MX\,dx^4\,dy + NX\,dx^5 \\ & - 3Ly^2\,dy^5 + 2LX\,dx^2\,dy^3 - y^3\,dx^3\,dy^2\left(\frac{dM}{dx}\right) - 2y^3\,dx^4\,dy\left(\frac{dN}{dx}\right) \\ & - y^3\,dy^5\left(\frac{dL}{dy}\right) - 3My^2\,dx^2\,dy^3 - 6Ny^2\,dx^3\,dy^2 \\ & - y^3\,dx^2\,dy^3\left(\frac{dM}{dy}\right) - 2y^3\,dx^3\,dy^2\left(\frac{dN}{dy}\right), \end{aligned}$$

где L рассматривается как функция только от y. Для того чтобы уничтожились члены, содержащие dy^5, должно быть

$$-L - \frac{y\,dL}{dy} = 0 \quad \text{и} \quad L = \frac{1}{y}.$$

Затем, для того чтобы уничтожились члены, в которые входит dy^3, должно быть

$$-2My^2 + \frac{2X}{y} - y^3\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0;$$

полагая же x постоянным, получаем

$$dM + \frac{2M\,dy}{y} = \frac{2X\,dy}{y^4},$$

что после умножения на y^2 и интегрирования дает

$$My^2 = P - \frac{2X}{y} \quad \text{и} \quad M = \frac{P}{y^2} - \frac{2X}{y^3},$$

где через P обозначена какая угодно функция от x. Для того же, чтобы устранить слагаемые, содержащие dy^2, надо положить

$$-5Ny^2 - y\frac{dP}{dx} + \frac{2dX}{dx} - 2y^3\left(\frac{dN}{dy}\right) = 0,$$

и, принимая x постоянным, [получаем]

$$2y^3\,dN + 5Ny^2\,dy = \frac{2dX}{dx}\,dy - \frac{dP}{dx}\,y\,dy.$$

Это уравнение после деления на $\sqrt{y}$ и интегрирования дает

$$2Ny^{\frac{5}{2}} = \frac{4\,dX}{dx}\sqrt{y} - \frac{2\,dP}{3\,dx}\,y\sqrt{y},$$

причем мы пренебрегаем функцией от x, которую надо было добавить, и поэтому радикал $\sqrt{y}$ сократится[1]). Итак, будем иметь $N = \frac{2\,dX}{y^2\,dx} - \frac{dP}{3y\,dx}$, и вследствие этого

$$dS = dy\left(\frac{PX}{y^2} - \frac{2X^2}{y^3} - \frac{4y\,d^2X}{dx^2} + \frac{2y^2\,d^2P}{3\,dx^2}\right) + \frac{2X\,dX}{y^2} - \frac{X\,dP}{3y},$$

откуда с помощью интегрирования [получаем]

$$S = \frac{X^2}{y^2} - \frac{PX}{y} - \frac{2y^2\,d^2X}{dx^2} + \frac{2y^3\,d^2P}{y\,dx^2} + \int\left(\frac{P\,dX}{y} + \frac{2X\,dP}{3y} + \frac{2y^2\,d^3X}{dx^2} - \frac{2y^2\,d^3P}{9\,dx^2}\right),$$

что выражается в конечном виде, если $P = 0$, так как $d^3X = 0$, поскольку $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Таким образом, получаем

$$L = \frac{1}{y}, \quad M = -\frac{2X}{y^3} \text{ и } N = \frac{2\,dX}{y^2\,dx},$$

а также

$$S = \frac{X^2}{y^2} - \frac{2y^2\,d^2X}{dx^2} + \text{Const}.$$

Отсюда следует, что интегральным уравнением является

$$y^2\,dy^4 - 2X\,dx^2\,dy^2 + 4y\,dX\,dx^2\,dy + \frac{X^2\,dx^4}{y^2} - 2y^2\,dx^2\,d^2X = C\,dx^4.$$

Таким образом, предложенное уравнение

$$2y^3\,d^2y + y^2\,dy^2 + dx^2(\alpha + \beta x + \gamma x^2) = 0$$

становится интегрируемым после умножения на

$$\frac{2\,dy^3}{y^3} - \frac{2(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,dx^2\,dy}{y^3} + \frac{2\,dx^3(\beta + 2\gamma x)}{y^2},$$

причем интегралом является

$$y^2\,dy^4 - 2\,dx^2\,dy^2(\alpha + \beta x + \gamma x^2) + 4y\,dx^3\,dy(\beta + 2\gamma x)$$
$$- 4\gamma y^2\,dx^4 + \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2\,dx^4}{y^2} = C\,dx^4,$$

то есть

$$(y^2\,dy^2 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,dx^2)^2 + 4y^3\,dx^3\,dy(\beta + 2\gamma x) - 4\gamma y^4\,dx^4 = Cy^2\,dx^4.$$

---

[1]) Quoniam irrationalitas $\sqrt{y}$ in calculum non ingreditur.

ПОЯСНЕНИЕ 1

921. Этот интеграл настолько сложно обнаружить, что, как нам представляется, его едва ли можно было бы найти другим методом. Вместе с тем он так построен, что не видно никакого метода для дальнейшего интегрирования и поэтому можно оценить первое интегрирование как такое, от которого мало пользы. Однако таким же образом, каким мы, исходя из других оснований, вывели полный интеграл в предыдущей задаче, можно и здесь найти такой интеграл, и это тем более заслуживает быть отмеченным, что предложенное уравнение, если его рассматривать само по себе, решается весьма трудно. Действительно, положим, как и выше, $dx = y\,dv$, и так как

$$d^2y = dx\,d\frac{dy}{dx} = y\,dv\,d\frac{dy}{y\,dv},$$

то, считая уже элемент dv постоянным, будем иметь

$$d^2y = y\,dv\left(\frac{d^2y}{y\,dv} - \frac{dy^2}{y^2\,dv}\right) = d^2y - \frac{dy^2}{y}.$$

Таким образом, наше уравнение приводится к следующему виду:

$$2y^3\,d^2y - y^2\,dy^2 + y^2\,dv^2\,(\alpha + \beta x + \gamma x^2) = 0,$$

или

$$2y\,d^2y - dy^2 + dv^2\,(\alpha + \beta x + \gamma x^2) = 0,$$

и после нового дифференцирования это дает нам

$$2y\,d^3y + y\,dv^3\,(\beta + 2\gamma x) = 0,$$

или

$$2d^3y + dv^3\,(\beta + 2\gamma x) = 0.$$

Снова дифференцируя, получаем

$$2d^4y + 2\gamma y\,dv^4 = 0, \text{ то есть } d^4y + \gamma y\,dv^4 = 0,$$

и, если это уравнение каким-либо образом будет решено, то можно будет выразить значение y через v, получим также $x = \int y\,dv$, или без интегрирования $x = -\frac{d^3y}{\gamma dv^3} - \frac{\beta}{2\gamma}$. Но очевидно, что последнему дифференциальному уравнению четвертого порядка удовлетворяет $y = e^{\lambda v}$, если только $\lambda^4 + \gamma = 0$. Поэтому мы положим $\gamma = -n^4$, и мы получим четыре значения для λ: $\lambda = \pm n$ и $\lambda = \pm\sqrt{-1}$. Таким образом [§§ 1125, 1128], полным интегралом этого дифференциального уравнения будет

$$y = Ae^{nv} + Be^{-nv} + C\sin(nv + \zeta),$$

а отсюда

$$x = +\frac{A}{n}e^{nv} - \frac{B}{n}e^{-nv} - \frac{C}{n}\cos(nv + \zeta) + \frac{\beta}{2n^4},$$

и, следовательно, эти значения удовлетворяют также предложенному уравнению относительно x и y, если только между постоянными A, B, C и ζ будет установлена такая зависимость, чтобы они соответствовали количеству α. Итак, после подстановки соответствующих значений мы должны получить

$$\alpha + \beta x - n^4x^2 + \frac{2y\,d^2y - dy^2}{dv^2} = 0,$$

где достаточно рассмотреть только постоянные слагаемые, к которым надлежит отнести и те, что содержат квадраты синуса и косинуса угла $nv+\zeta$, потому что комбинация таких [членов] дает постоянное количество. Так как имеем

$$2y = 2Ae^{nv} + 2Be^{-nv} + 2C\sin(nv+\zeta),$$
$$\frac{d^2y}{dv^2} = n^2Ae^{nv} + n^2Be^{-nv} - n^2C\sin(nv+\zeta),$$
$$\frac{dy}{dv} = nAe^{nv} + nBe^{-nv} + nC\cos(nv+\zeta),$$
$$x = \frac{A}{n}e^{nv} - \frac{B}{n}e^{-nv} - \frac{C}{n}\cos(nv+\zeta) + \frac{\beta}{2n^4},$$

то получаем упомянутые члены соответственно в виде

$$\beta x \longleftrightarrow \frac{\beta^2}{2n^4},$$
$$-n^4x^2 \longleftrightarrow 2n^2AB - n^2C^2\cos(nv+\zeta)^2 - \frac{\beta^2}{4n^4},$$
$$2y\frac{d^2y}{dv^2} \longleftrightarrow 4n^2AB - 2n^2C^2\sin(nv+\zeta)^2,$$
$$-\frac{dy^2}{dv^2} \longleftrightarrow 2n^2AB - n^2C^2\cos(nv+\zeta)^2.$$

Следовательно,

$$\alpha + 8n^2AB - 2n^2C^2 + \frac{\beta^2}{4n^4} = 0,$$

и потому

$$C = \sqrt{\frac{\alpha}{2n^2} + \frac{\beta^2}{8n^6} + 4AB},$$

то есть

$$\alpha = 2n^2(C^2 - 4AB) - \frac{\beta^2}{4n^4}$$

и

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 2n^2(C^2 - 4AB) - \left(\frac{\beta}{2n^2} - n^2x\right)^2.$$

Итак, остаются три неопределенные постоянные A, B и ζ, так что нет никаких сомнений в том, что полученные для x и y формулы представляют полный интеграл.

ПОЯСНЕНИЕ 2

922. Те дифференциальные уравнения второго порядка, которые мы рассматривали в последних двух задачах, можно привести к сходному виду. Действительно, если положим $y\,dy = \frac{1}{2}dz$, то есть $y^2 = z$, то первое из них,

$$y(y\,d^2y + dy^2) + X\,dx^2 = 0,$$

где $X = Ax$ или $X = \alpha + \beta x$, приводится к следующему виду:

$$\frac{1}{2}d^2z\sqrt{z} + X\,dx^2 = 0,$$

и множителем, который делает его интегрируемым, будет $\frac{3}{4}\frac{dz^2}{\sqrt{z}}+3X\,dx^2$. Второе же уравнение

$$y^2(2y\,d^2y+dy^2)+X\,dx^2=0,$$

где $X=\alpha+\beta x+\gamma x^2$, приводится к виду

$$\frac{4}{3}z^{\frac{5}{3}}d^2z+X\,dx^2=0,$$

если положить $y=z^{\frac{2}{3}}$. Это дает

$$dy=\frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}dz \quad \text{и} \quad d^2y=\frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}d^2z-\frac{2}{9}z^{-\frac{4}{3}}dz^2$$

и, следовательно, $2y\,d^2y+dy^2=\frac{4}{3}z^{\frac{1}{3}}d^2z$. Это уравнение становится интегрируемым с помощью множителя

$$\frac{16dz^3}{27z^{\frac{5}{3}}}-\frac{4X\,dx^2\,dz}{3z^{\frac{7}{3}}}+\frac{2dX\,dx^2}{z^{\frac{4}{3}}}.$$

Отсюда мы заключаем, что для уравнения $d^2z+\frac{2X\,dx^2}{\sqrt{z}}=0$ множителем будет $dz^2+4X\,dx^2\sqrt{z}$, а для уравнения

$$d^2z+\frac{3X\,dx^2}{4z\sqrt[3]{z^2}}=0$$

множителем будет

$$dz^3-\frac{9X\,dx^2\,dz}{4\sqrt[3]{z^2}}+\frac{27}{8}dX\,dx^2\sqrt[3]{z},$$

или же для общего обозрения

для уравнения	множителем будет
$d^2z+\frac{X\,dx^2}{\sqrt{z}}=0,$	$dz^2+2X\,dx^2\sqrt{z},$
$d^2z+\frac{X\,dx^2}{z^3\sqrt{z^2}}=0,$	$dz^3-\frac{3X\,dx^2\,dz}{\sqrt[3]{z^2}}+\frac{9}{2}dX\,dx^2\sqrt[3]{z}.$

Впрочем, эти интегрирования весьма заслуживают того, чтобы быть отмеченными, поскольку их можно произвести с помощью дифференциальных уравнений высшего порядка. Так как из уравнения

$$d^3y+A\,dv\,d^2y+B\,dv^2\,dy+Cy\,dv^3=0,$$

где dv считается постоянным [§ 1117], получаем

$$y=\mathfrak{A}e^{\alpha v}+\mathfrak{B}e^{\beta v}+\mathfrak{C}e^{\gamma v},$$

где α, β, γ будут корнями уравнения

$$r^3+Ar^2+Br+C=0,$$

и, полагая $dv=\frac{dx}{y}$, а следовательно,

$$d^2y=dv\,d\frac{dy}{dv}=\frac{dx}{y}\,d\frac{y\,dy}{dx}$$

и

$$d^3y=dv^2\,d\frac{d^2y}{dv^2}=dv^2\,d\left(\frac{1}{dv}\,d\,\frac{dy}{dv}\right)=\frac{dx^2}{y^2}\,d\left(\frac{y}{dx}\,d\frac{y\,dy}{dx}\right),$$

находим, считая уже постоянным dx, что

$$d^2y=d^2y+\frac{dy^2}{y}$$

и

$$d^3y=\frac{1}{y^2}\,d\,(y\,(yd^2y+dy^2))=d^3y+\frac{4dy\,d^2y}{y}+\frac{dy^3}{y^2}\text{ [1]}.$$

Отсюда, умножая на y^2, [получаем]

$$y^2d^3y+4y\,dy\,d^2y+dy^3+A\,dx\,(yd^2\,y+dy^2)+B\,dx^2\,dy+C\,dx^3=0,$$

что после интегрирования дает

$$y^2\,d^2y+y\,dy^2+Ay\,dx\,dy+By\,dx^2+(Cx+D)\,dx^2=0$$

и, следовательно, это уравнение может быть проинтегрировано, как выше.

ЗАДАЧА 116

923. *Определить условия для функций P, Q, R и L, M, N, чтобы дифференциальное уравнение второго порядка*

$$d^2y+P\,dy^2+Q\,dx\,dy+R\,dx^2=0$$

становилось интегрируемым с помощью множителя

$$3L\,dy^2+2M\,dx\,dy+N\,dx^2.$$

РЕШЕНИЕ

После умножения интегрирование слагаемых, в которые входит d^2y, дает [выражение]

$$L\,dy^3+M\,dx\,dy^2+N\,dx^2\,dy,$$

поэтому интеграл берем в виде

$$L\,dy^3+M\,dx\,dy^2+N\,dx^2\,dy+V\,dx^3=C\,dx^3,$$

и дифференциал этого выражения должен быть равен произведению предложенного выражения на множитель, откуда получаем

$$\begin{aligned}dx^3\,dV=3LP\,dy^4&+3LQ\,dx\,dy^3&&+3LR\,dx^2\,dy^2\\ &+2MP&&+2MQ&&+2MR\,dx^3\,dy\\ -\left(\frac{dL}{dy}\right)&-\left(\frac{dL}{dx}\right)&&+NP&&+NQ&&+NR\,dx^4\\ &-\left(\frac{dM}{dy}\right)&&-\left(\frac{dM}{dx}\right)&&-\left(\frac{dN}{dx}\right)\\ &&&-\left(\frac{dN}{dy}\right).\end{aligned}$$

---

[1] Из текста ясен смысл этих необычных для нашего глаза записей: слева дифференциалы вычисляются при независимом переменном v, справа—при независимом переменном x.

Следовательно, здесь должно быть

$$3LP-\left(\frac{dL}{dy}\right)=0,$$

$$3LQ+2MP-\left(\frac{dL}{dx}\right)-\left(\frac{dM}{dy}\right)=0,$$

$$3LR+2MQ+NP-\left(\frac{dM}{dx}\right)-\left(\frac{dN}{dy}\right)=0.$$

Вместе с тем будем иметь

$$dV=\left(2MR+NQ-\left(\frac{dN}{dx}\right)\right)dy+NR\,dx,$$

и это выражение должно интегрироваться, а из вышеприведенных уравнений находим

$$P=\frac{1}{3L}\left(\frac{dL}{dy}\right),\quad Q=\frac{1}{3L}\left(\frac{dL}{dx}\right)+\frac{1}{3L}\left(\frac{dM}{dy}\right)-\frac{2M}{9L^2}\left(\frac{dL}{dy}\right)$$

и

$$R=\frac{1}{3L}\left(\frac{dM}{dx}\right)+\frac{1}{3L}\left(\frac{dN}{dy}\right)-\frac{N}{9L^2}\left(\frac{dL}{dy}\right)-\frac{2M}{9L^2}\left(\frac{dL}{dx}\right)-\frac{2M}{9L^2}\left(\frac{dM}{dy}\right)+\frac{4M^2}{27L^3}\left(\frac{dL}{dy}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

924. Если L, M и N будут функциями только от x, то получим $P=0$, $Q=\frac{dL}{3L\,dx}$ и $R=\frac{dM}{3L\,dx}-\frac{2M\,dL}{9L^2\,dx}$, откуда следует, что

$$dV=\left(\frac{2M\,dM}{3L\,dx}-\frac{4M^2\,dL}{9L^2\,dx}+\frac{N\,dL}{3L\,dx}-\frac{dN}{dx}\right)dy+\frac{N\,dM}{3L}-\frac{2MN\,dL}{9L^2},$$

причем коэффициент при dy должен быть постоянным. Поэтому после деления на $L^{\frac{1}{3}}$ найдем

$$\frac{C\,dx}{\sqrt[3]{L}}=\frac{2M\,dM}{3L\sqrt[3]{L}}-\frac{4M^2\,dL}{9L^2\sqrt[3]{L}}+\frac{N\,dL}{3L\sqrt[3]{L}}-\frac{dN}{\sqrt[3]{L}}$$

и, интегрируя, получаем

$$C\int\frac{dx}{\sqrt[3]{L}}=\frac{MM}{3L\sqrt[3]{L}}-\frac{N}{\sqrt[3]{L}},\quad \text{т. е.}\quad N=\frac{M^2}{3L}-CL^{\frac{1}{3}}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{L}}.$$

Следовательно,

$$V=Cy+\int\left(\frac{dM}{3L}-\frac{2M\,dL}{9L^2}\right)\left(\frac{M^2}{3L}-CL^{\frac{1}{3}}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{L}}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

925. Пусть $M=S\sqrt[3]{L^2}$, тогда

$$dM=dS\sqrt[3]{L^2}+\frac{2S\,dL}{3\sqrt[3]{L}}$$

и

$$V=Cy+\frac{1}{3}\int\frac{dS}{\sqrt[3]{L}}\left(\frac{1}{3}S^2\sqrt[3]{L}-CL^{\frac{1}{3}}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{L}}\right),$$

$$V = Cy + \frac{1}{27} S^3 - \frac{1}{3} C \int dS \int \frac{dx}{\sqrt[3]{L}},$$

а вместе с тем

$$N = \frac{1}{3} S^2 \sqrt[3]{L} - CL^{\frac{1}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{L}} = \left(\frac{1}{3} S^2 - C \int \frac{dx}{\sqrt[3]{L}}\right) \sqrt[3]{L}$$

и также $P = 0$, $Q = \frac{dL}{3L\,dx}$ и $R = \frac{dS}{3dx\sqrt[3]{L}}$. Поэтому уравнение

$$d^2y + \frac{dL\,dy}{3L} + \frac{dS\,dx}{3\sqrt[3]{L}} = 0$$

становится интегрируемым с помощью множителя

$$3L\,dy^2 + 2S\,dx\,dy\,\sqrt[3]{L^2} + dx^2\left(\frac{1}{3} S^2 - C \int \frac{dx}{\sqrt[3]{L}}\right) \sqrt[3]{L},$$

а интегралом его будет

$$L\,dy^3 + S\,dx\,dy^2\,\sqrt[6]{L^2} + dx^2\,dy\left(\frac{1}{3} S^2 - C \int \frac{dx}{\sqrt[3]{L}}\right) \sqrt[3]{L} + Cy\,dx^3 + \frac{1}{27} S^3\,dx^3 - \frac{1}{3} C\,dx^3 \int dS \int \frac{dx}{\sqrt[3]{L}} = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

926. Последнее выражение, какое бы значение ни придать постоянному C, должно давать интеграл [дифференциального уравнения]. Поэтому при $C = 0$ для уравнения

$$d^2y + \frac{dL\,dy}{3L} + \frac{dS\,dx}{3\sqrt[3]{L}} = 0$$

множителем будет

$$3L\,dy^2 + 2S\,dx\,dy\,\sqrt[3]{L^2} + \frac{1}{3} S^2\,dx^2\,\sqrt[3]{L},$$

а интегралом будет

$$L\,dy^3 + S\,dx\,dy^2\,\sqrt[3]{L^2} + \frac{1}{3} S^2\,dx^2\,dy\,\sqrt[3]{L} + \frac{1}{27} S^3\,dx^3 = D\,dx^3,$$

или

$$\left(dy\,\sqrt[3]{L} + \frac{1}{3} S\,dx\right)^3 = D\,dx^3.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

927. Исходя из этих же условий, можно определить функци[и] L, M, N, когда даны функции P, Q и R, если только соблюдается послед[]нее условие интегрируемости[1]). Например, если $P = \frac{n}{y}$, $Q = ($ а R — функция только от x, пусть $R = X$, так что получаем уравнени[е]

[1]) Quatenus quidem postrema conditio integrabilitatis patitur. Речь идет, видимо, об условии интегрируемости в том виде, в каком оно приведено в кон[це] § 923: $dV = \ldots$

в виде

$$d^2y+\frac{n\,dy^2}{y}+X\,dx^2=0,$$

и, если множитель уравнения полагаем [равным]

$$3L\,dy^2+2M dx\,dy+N\,dx^2,$$

так что интегралом будет

$$L\,dy^3+M\,dx\,dy^2+N\,dx^2\,dy+V\,dx^3=C\,dx^3,$$

тогда во-первых, $\frac{3nL}{y}-\left(\frac{dL}{dy}\right)=0$, и, если считать x постоянным, $\frac{dL}{L}=\frac{3n\,dy}{y}$, откуда $L=Sy^{3n}$, где обозначаем через S функцию от x. Затем имеем

$$\frac{2nM}{y}-y^{3n}\frac{dS}{dx}-\left(\frac{dM}{dy}\right)=0,$$

и, если считать x постоянным,

$$dM-\frac{2n\,M dy}{y}+\frac{dS}{dx}y^{3n}\,dy=0,$$

что после умножения на y^{-2n} и интегрирования дает

$$y^{-2n}\,M+\frac{dS}{(n+1)\,dx}\,y^{n+1}=T \text{ (функции от } x).$$

Следовательно,

$$M=Ty^{2n}-\frac{dS}{(n+1)\,dx}\,y^{3n+1}.$$

В-третьих, мы должны иметь

$$3S\,Xy^{3n}+\frac{nN}{y}-\frac{dT}{dx}y^{2n}+\frac{d^2S}{(n+1)\,dx^2}\,y^{3n+1}-\frac{dN}{dy}=0,$$

откуда, полагая x постоянным, получаем

$$dN-\frac{nN\,dy}{y}+\frac{dT}{dx}\,y^{2n}dy-\frac{d^2S}{(n+1)\,dx^2}\,y^{3n+1}\,dy-3S\,Xy^{3n}\,dy=0,$$

что после умножения на y^{-n} и интегрирования дает

$$y^{-n}\,N+\frac{dT}{(n+1)\,dx}\,y^{n+1}-\frac{d^2S}{2\,(n+1)^2\,dx^2}\,y^{2n+2}-\frac{3S\,X}{2n+1}\,y^{2n+1}=U \text{ (функция от } x)$$

или

$$N=Uy^n-\frac{dT}{(n+1)\,dx}\,y^{2n+1}+\frac{d^2S}{2\,(n+1)^2\,dx^2}\,y^{3n+2}+\frac{3S\,X}{2n+1}\,y^{3n+1}.$$

Ит этих отношений следует:

$$dV=dy\left\{\begin{array}{l} 2TXy^{2n}-\dfrac{2X\,dS}{(n+1)\,dx}\,y^{3n+1}-\dfrac{dU}{dx}\,y^n+\dfrac{d^2T}{(n+1)\,dx^2}\,y^{2n+1} \\ \qquad -\dfrac{d^3S}{2\,(n+1)^2\,dx^3}\,y^{3n+2}-\dfrac{3d\,(SX)}{(2n+1)\,dx}\,y^{3n+1} \end{array}\right\}$$

$$+X\,dx\left(Uy^n-\frac{dT}{(n+1)\,dx}\,y^{2n+1}+\frac{d^2S}{2\,(n+1)^2\,dx^2}\,y^{3n+2}+\frac{3S\,X}{2n+1}\,y^{3n+1}\right),$$

и для того, чтобы это выражение можно было проинтегрировать, должно быть

$$2y^{2n}\,d(TX)-2y^{3n+1}\frac{d(XdS)}{(n+1)\,dx}-y^n\frac{d^2U}{dx}+y^{2n+1}\frac{d^3T}{(n+1)\,dx^2}$$

$$-y^{3n+2}\frac{d^4S}{2(n+1)^2\,dx^3}-3y^{3n+1}\frac{d^2(SX)}{(2n+1)\,dx}-n\,UXy^{n-1}\,dx+\frac{(2n+1)\,XdT}{(n+1)}y^{2n}$$

$$-\frac{(3n+2)\,Xd^2S}{2(n+1)^2\,dx}y^{3n+1}-\frac{3(3n+1)\,SX^2\,dx}{(2n+1)}y^{3n}=0.$$

Но здесь отдельные степени y, поскольку они не равны, должны в отдельности уничтожаться. Поэтому степень y^{n-1} дает $U=0$, вследствие чего степень y^n также обращается в нуль. Степень y^{2n} дает

$$(2n+2)\,T\,dX+(2n+2)\,X\,dT+(2n+1)\,X\,dT=0,$$

то есть $X^{2n+2}T^{4n+3}=A$, тогда как степень y^{2n+1} дает $d^3T=0$, то есть $T=\alpha+\beta x+\gamma x^2$. Для обращения в нуль степени y^{3n} требуется, чтобы $S=0$, если только не [имеет места равенство] $n=-\frac{1}{3}$, и в этом случае исчезают также сразу степени y^{3n+1} и y^{3n+2}. Итак, раз $U=0$, $S=0$ и $T=\alpha+\beta x+\gamma x^2$, откуда следует, что $X=B(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{-4n-3}{2n+2}}$, то уравнение $d^2y+\frac{ndy^2}{y}+B(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{-4n-3}{2n+2}}dx^2=0$ становится интегрируемым с помощью множителя $2(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\,y^{2n}\,dy-\frac{dx(\beta+2\gamma x)}{n+1}y^{2n+1}$.

ПОЯСНЕНИЕ 2

928. Хотя еще далеко от того, чтобы можно было рассматривать этот метод как достаточно развитый, однако примеры, рассмотренные в этой главе, в полной мере показывают, какие результаты можно от него ожидать[1]), и поэтому, как представляется, следует особенно рекомендовать геометрам развивать этот метод. А так как те методы, которыми надлежит пользоваться при решении дифференциальных уравнений второго порядка, изложены нами достаточно полно, мы переходим к следующей главе, в которой покажем, как интегрировать такие уравнения с помощью бесконечных рядов, если только это может быть сделано удобным образом[2]).

---

[1]) abunde declarant, quanta incrementa inde expectare queamus.

[2]) Приводим последнюю фразу в оригинале: Quoniam igitur methodi, quibus in resolutione aequationum differentio-differentialium uti convenit, satis luculenter sunt expositae, ad sequens caput progrediamur, ubi integrationem huiusmodi aequationum, quatenus quidem id commode fieri potest, per series infinitas ostendemus.

В этом месте, как и в некоторых других, Эйлер как бы подчеркивает разницу между собственно решением дифференциального уравнения и интегрированием этого уравнения с помощью бесконечного ряда, хотя именно Эйлер больше всех своих современников сделал, для того чтобы стерлась грань между решением в конечном виде и в виде бесконечного ряда.

ГЛАВА VII

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ $dy^2 + ax^n y\,dx^2 = 0$ С ПОМОЩЬЮ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

ЗАДÂЧА 117

929. *Проинтегрировать с помощью бесконечного ряда дифференциальное уравнение второго порядка $d^2y + ax^n\,y\,dx^2 = 0$, принимая элемент dx постоянным.*

РЕШЕНИЕ

Мы ищем здесь ряд, расположенный по степеням x, который выражает значение y, и так как в одном из членов нашего уравнения количество x вместе со своим дифференциалом dx имеет нулевое измерение, а в другом оно имеет измерение $n+2$, то очевидно, что показатели степеней x должны возрастать или убывать с разностью $n+2$.

I. Пусть, во-первых, показатели возрастают. Составим ряд

$$y = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+n+2} + Cx^{\lambda+2n+4} \text{ и т. д.}$$

Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda(\lambda-1)Ax^{\lambda-2} + (\lambda+n+2)(\lambda+n+1)Bx^{\lambda+n} + \text{ и т. д.},$$

$$ax^ny = \qquad aAx^{\lambda+n} + \text{ и т. д.},$$

откуда ясно, что первый член должен отдельно обращаться в нуль, так что $\lambda(\lambda-1)=0$. Поэтому надо принять либо $\lambda=0$, либо $\lambda=1$, и таким образом получаем двойной ряд [1])

$$\begin{aligned} y = A &+ Bx^{n+2} + Cx^{2n+4} + Dx^{3n+6} + Ex^{4n+8} + \text{ и т. д.}\\ &+ \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^{n+3} + \mathfrak{C}x^{2n+5} + \mathfrak{D}x^{3n+7} + \mathfrak{E}x^{4n+9} + \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

После подстановки его в уравнение мы должны получить

$$\begin{aligned} 0 = (n+2)(n+1)Bx^n &+ (2n+4)(2n+3)Cx^{2n+2} + (3n+6)(3n+5)Dx^{3n+4} + \text{ и т. д.}\\ +aA \qquad &\qquad +aB \qquad\qquad\qquad +aC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = (n+3)(n+2)\mathfrak{B}x^{n+1} &+ (2n+5)(2n+4)\mathfrak{C}x^{2n+3} + (3n+7)(3n+6)\mathfrak{D}x^{3n+5} + \text{ и т. д.}\\ +a\mathfrak{A} \qquad &\qquad +a\mathfrak{B} \qquad\qquad\qquad +a\mathfrak{C} \end{aligned}$$

---

[1]) Duplex series — в смысле суммы двух рядов.

Отсюда, поскольку буквы A и $\mathfrak{A}$ остаются в нашем произволе, мы выразим через них остальные следующим образом:

$$B=\frac{-aA}{(n+1)(n+2)};\quad C=\frac{-aB}{2(2n+3)(n+2)};\quad D=\frac{-aC}{3(3n+5)(n+2)} \text{ и т. д.,}$$

$$\mathfrak{B}=\frac{-a\mathfrak{A}}{(n+3)(n+2)};\quad \mathfrak{C}=\frac{-a\mathfrak{B}}{2(2n+5)(n+2)};\quad \mathfrak{D}=\frac{-a\mathfrak{C}}{3(3n+7)(n+2)} \text{ и т. д.}$$

Таким образом мы получаем следующее выражение для полного интеграла:

$$\begin{aligned}y=A&-\frac{aAx^{n+2}}{1(n+1)\cdot(n+2)}+\frac{a^2Ax^{2n+4}}{1\cdot 2(n+1)(2n+3)\cdot(n+2)^2}-\\&-\frac{a^3Ax^{3n+6}}{1\cdot 2\cdot 3(n+1)(2n+3)(3n+5)\cdot(n+2)^3}+\text{ и т. д.}\\&+\mathfrak{A}x-\frac{a\mathfrak{A}x^{n+3}}{1(n+3)(n+2)}+\frac{a^2\mathfrak{A}x^{3n+5}}{1\cdot 2(n+3)(2n+5)\cdot(n+2)^2}-\\&-\frac{a^3\mathfrak{A}x^{5n+7}}{1\cdot 2\cdot 3(n+3)(2n+5)(3n+7)\cdot(n+2)^3}+\text{ и т. д.}\end{aligned}$$

II. Пусть показатели убывают. Составим ряд

$$y=Ax^{\lambda}+Bx^{\lambda-n-2}+Cx^{\lambda-2n-4}+\text{ и т. д.}$$

Получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda(\lambda-1)Ax^{\lambda-2}+(\lambda-n-2)(\lambda-n-3)Bx^{\lambda-n-4}+\text{ и т. д.,}$$

$$ax^ny=aAx^{\lambda+n}+aBx^{\lambda-2}+\qquad\text{ и т. д.}$$

Но так как здесь член $x^{\lambda+n}$ не имеет себе подобного, он не может уничтожаться, и поэтому мы не получаем тут никакого решения для уравнения.

СЛЕДСТВИЕ 1

930. Найденный для y двойной ряд[1]) представляет полный интеграл дифференциального уравнения второго порядка $d^2y+ax^ny\,dx^2=0$, так как буквы A и $\mathfrak{A}$ остаются в нашем произволе. Если же мы придадим буквам A и $\mathfrak{A}$ определенные значения, получим частные интегралы.

СЛЕДСТВИЕ 2

931. Если положить $n+2=m$, то есть $n=m-2$, то полный интеграл уравнения

$$d^2y+ax^{m-2}y\,dx^2=0$$

более удобным образом выразится в следующем виде:

$$\begin{aligned}y=A&-\frac{aAx^m}{1(m-1)\cdot m}+\frac{a^2Ax^{2m}}{1\cdot 2(m-1)(2m-1)\cdot m^2}-\frac{a^3Ax^{3m}}{1\cdot 2\cdot 3(m-1)(2m-1)(3m-1)\cdot m^3}+\text{ и т. д.}\\&+\mathfrak{A}x-\frac{a\mathfrak{A}x^{m+1}}{1(m+1)\cdot m}+\frac{a^2\mathfrak{A}x^{2m+1}}{1\cdot 2(m+1)(2m+1)\cdot m^2}-\\&-\frac{a^3\mathfrak{A}x^{3m+1}}{1\cdot 2\cdot 3(m+1)(2m+1)(3m+1)\cdot m^3}+\text{ и т. д.}\end{aligned}$$

[1]) В оригинале здесь: geminata series (т. е. спаренный, сдвоенный ряд).

СЛЕДСТВИЕ 3

932. Если показатель m положителен и больше единицы, эти ряды тем лучше сходятся, чем меньшее значение придается количеству x; в других же случаях практически эти ряды не могут быть использованы[1]), если только их нельзя преобразовать в другие сходящиеся ряды.

ПОЯСНЕНИЕ 1

933. Однако бывают случаи, когда эти ряды совершенно не могут быть использованы, что происходит, если какой-либо из составляющих знаменатели множителей исчезает, так что все последующие члены возрастают до бесконечности[2]), и в таких случаях следует преобразовать ряд к другому виду. Это, прежде всего, встречается в случае $m=0$, т. е. $n=-2$, когда все члены обоих рядов, кроме первых, становятся бесконечно большими. Правда, в этом случае уравнение, которое теперь имеет вид $d^2y+\frac{ay\,dx^2}{x^2}=0$, может быть проинтегрировано особым способом, так как оно однородно; действительно, можно найти такую степень x, при подстановке которой вместо y уравнение удовлетворяется. А именно, положим $y=x^\lambda$ и получим $\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}+ax^{\lambda-2}=0$, т. е. $\lambda^2-\lambda+a=0$, откуда следует, что $\lambda=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-a}$, и так как имеем два значения для λ, то полным интегралом будет

$$y=Ax^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a}}+Bx^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a}}.$$

Это соотношение для случая, когда $a>\frac{1}{4}$, принимает вид

$$y=Ax^{\frac{1}{2}}\sin\left[\left(a-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}lx+\alpha\right].$$

Отсюда ясно, что в случае $a=\frac{1}{4}$ имеем

$$y=(A+Blx)\sqrt{x}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

934. В остальных случаях, которые приводят к затруднениям, либо $m=\frac{1}{i}$, либо $m=-\frac{1}{i}$, где i обозначает любое целое число. В том случае, когда $m=\frac{1}{i}$, только первый ряд является неподходящим, а в случае, когда $m=-\frac{1}{i}$, не подходит только второй. Поэтому, полагая в одном случае $A=0$, а во втором $\mathfrak{A}=0$, будем иметь только один подходящий ряд, который представляет частный интеграл. Однако,

[1]) Aliis vero casibus in praxi hae series adhiberi nequeunt.
[2]) Sicque omnes termini sequentes in infinitum excrescant.

если известен частный интеграл, который пусть будет $y=P$, можно получить полный интеграл уравнения

$$d^2y+ax^{m-2}y\,dx^2=0,$$

полагая $y=Pz$, так как тогда

$$Pd^2z+2dP\,dz+zd^2P+ax^{m-2}Pz\,dx^2=0,$$

и, [вместе с тем], по предположению,

$$d^2P+ax^{m-2}P\,dx^2=0.$$

Отсюда следует

$$Pd^2z+2dP\,dz=0,$$

то есть

$$P^2dz=C\,dx \quad \text{и} \quad z=C\int\frac{dx}{P^2}.$$

Но так как P — это бесконечный ряд, то отсюда нельзя определить значение z[1]). Однако в указанных здесь случаях одна часть интеграла должна содержать логарифм x, и это объясняется тем, что $\frac{x^0}{0}$ эквивалентно lx[2]). Поэтому в уравнении

$$d^2y+ax^{m-2}y\,dx^2=0$$

мы полагаем $y=p+q\,lx$ и, так как

$$dy=dp+\frac{q\,dx}{x}+dq\,lx,$$

будем иметь

$$d^2p+\frac{2dx\,dq}{x}-\frac{q\,dx^2}{x^2}+d^2q\,lx+apx^{m-2}dx^2+aqx^{m-2}dx^2lx=0.$$

Здесь необходимо, чтобы слагаемые, содержащие lx, отдельно уничтожились, так что получаются следующие два уравнения:

$$d^2q+aqx^{m-2}dx^2=0$$

и

$$d^2p+\frac{2dx\,dq}{x}-\frac{q\,dx^2}{x^2}+apx^{m-2}dx^2=0,$$

где в качестве q следует принять тот из двух указанных выше рядов, который остается в силе в рассматриваемом случае, а когда этот ряд составлен, то из последнего уравнения количество p легко выражается в виде ряда.

Подобного рода случаи будут рассмотрены в последующих примерах. [Здесь] мы только отметим, что это преобразование осуществляется

---

[1]) Cum autem P sit series infinita, hinc valorem ipsius z cognoscere haud licet. Надо полагать, что Эйлер говорит здесь о практической стороне вопроса.

[2]) At casibus illis memoratis pars integralis logarithmum ipsius x involvit, quod vel inde intelligitur, quod $\frac{x^0}{0}$ aequivaleat ipsi lx.

таким же образом, если вместо lx подставляем $lx+\alpha$, так что, после того как найдены p и q, будем иметь

$$y=\alpha q+p+q\,lx, \quad \text{т. е.} \quad y=p+ql\beta x^{1)}.$$

ПРИМЕР 1

935. *Решить с помощью рядов уравнение*

$$d^2y+\frac{ay\,dx^2}{x}=0$$

(*m принимаем равным единице*).

Полагаем $y=p+q\,lx$. Нужно принять

$$q=\mathfrak{A}x-\frac{a\mathfrak{A}\,x^2}{1\cdot 2}+\frac{a^2\mathfrak{A}\,x^3}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3}-\frac{a^3\mathfrak{A}x^4}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4}+\text{ и т. д.},$$

вместо чего будем писать для краткости

$$q=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}x^2+\mathfrak{C}x^3+\mathfrak{D}x^4+\text{ и т. д.}$$

Что касается p, определяем его из уравнения

$$\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{2dq}{x\,dx}-\frac{q}{x^2}+\frac{ap}{x}=0.$$

А именно, положим

$$p=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ и т. д.}$$

и получим после подстановки

$$\left.\begin{array}{llllll} & 2C & +6Dx & +12Ex^2 & +20Fx^3 & +30Gx^4+\text{ и т. д.} \\ +2\mathfrak{A}\frac{1}{x} & +4\mathfrak{B} & +6\mathfrak{C} & +8\mathfrak{D} & +10\mathfrak{E} & +12\mathfrak{F} \\ -\mathfrak{A} & -\mathfrak{B} & -\mathfrak{C} & -\mathfrak{D} & -\mathfrak{E} & -\mathfrak{F} \\ +aA & +aB+ & aC+aD & +aE & +aF & \end{array}\right\}=0.$$

Так как коэффициенты $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ и т. д. уже даны, находим $A=-\frac{\mathfrak{A}}{a}$; количество B не определяется, тогда как

$$C=\frac{-3\mathfrak{B}}{2}-\frac{aB}{1\cdot 2}=\frac{+3a\,\mathfrak{A}}{1^3\cdot 2^2}-\frac{aB}{1\cdot 2},$$

$$D=\frac{-5\mathfrak{C}}{6}-\frac{aC}{2\cdot 3}=\frac{-5a^2\,\mathfrak{A}}{1^2\cdot 2^3\cdot 3^2}-\frac{aC}{2\cdot 3},$$

$$E=\frac{-7\mathfrak{D}}{12}-\frac{aD}{3\cdot 4}=\frac{+7a^3\,\mathfrak{A}}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^2}-\frac{aD}{3\cdot 4},$$

$$F=\frac{-9\mathfrak{E}}{20}-\frac{aE}{4\cdot 5}=\frac{-9a^4\,\mathfrak{A}}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^3\cdot 5^2}-\frac{aE}{4\cdot 5}$$

и т. д.,

---

1) Впервые Эйлер применил (к дифференциальному уравнению, которое рассматривается ниже, в § 978) подобные соображения в работе «Animadversiones in rectificationem ellipsis», Opuscula varii argumenti 2, 1750, стр. 121 (№ 154 по списку Энестрема; также в Opera Omnia, ser. I, vol. 20) [Л. Ш.].

где вместо B можно писать 0, если только в интеграле $y=p+qlx$ мы добавим слагаемое aq, которое порождается буквой B[1]) и, таким образом,

$$p=A+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+ \quad \text{и т. д.}$$

Здесь имеем

$$C=\frac{3a\mathfrak{A}}{1^3.2^2}, \quad D=\frac{-14a^2\mathfrak{A}}{1^3.2^3.3^2}, \quad E=\frac{+70a^3\mathfrak{A}}{1^3.2^3.3^3.4^2}, \quad F=\frac{-404a^4\mathfrak{A}}{1^3.2^3.3^3.4^3.5^2} \text{ и т. д.,}$$

причем следует заметить, что

$$14=3\cdot 3+5\cdot 1, \quad 70=4\cdot 14+7\cdot 1\cdot 2, \quad 404=5\cdot 70+9\cdot 1\cdot 2\cdot 3,$$

а в следующем члене $2688=6\cdot 404+11\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ и окончательно

$$y=p+aq+qlx.$$

ПРИМЕР 2

936. *Решить с помощью рядов уравнение*

$$d^2y+\frac{ay\,dx^2}{x^3}=0$$

(*m принимаем равным* -1).

Полагаем $y=p+aq+qlx$. Тогда нужно принять

$$q=A-\frac{aA}{1\cdot 2x}+\frac{a^2A}{1\cdot 2^2\cdot 3x^2}-\frac{a^3A}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4x^3}+ \quad \text{и т. д.,}$$

вместо чего будем писать для краткости

$$q=A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x^3}+\frac{E}{x^4}+ \quad \text{и т. д.,}$$

тогда как количество p надо определить из уравнения

$$d^2p+\frac{2dq\,dx}{x}-\frac{q\,dx^2}{x^2}+\frac{ap\,dx^2}{x^3}=0.$$

Итак, пусть

$$p=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}+\frac{\mathfrak{C}}{x}+\frac{\mathfrak{D}}{x^2}+\frac{\mathfrak{E}}{x^3}+\frac{\mathfrak{F}}{x^4}+ \quad \text{и т. д.,}$$

откуда после подстановки получаем

$$\left.\begin{array}{llllll}
\frac{a\mathfrak{A}}{x^2}+\frac{a\mathfrak{B}}{x^3} & +\frac{a\mathfrak{C}}{x^4} & +\frac{a\mathfrak{D}}{x^5} & +\frac{a\mathfrak{E}}{x^6} & +\frac{a\mathfrak{F}}{x^7}+ & \text{и т. д.} \\
-A-B & -C & -D & -E & -F & \\
\quad\;\; -2B & -4C & -6D & -8E & -10F & \\
\quad\;\; +2\mathfrak{C} & +6\mathfrak{D} & +12\mathfrak{E} & +20\mathfrak{F} & +30\mathfrak{G} &
\end{array}\right\}=0,$$

и коэффициенты $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ и т. д. определяются таким образом,

[1]) Quae ex littera B oritur.

что имеем $\mathfrak{A}=\frac{A}{a}$; второй коэффициент $\mathfrak{B}$ не определяется, тогда как

$$\mathfrak{C}=\frac{3B}{1\cdot 2}-\frac{a\mathfrak{B}}{1\cdot 2}=\frac{-3aA}{1^3\cdot 2^2}-\frac{a\mathfrak{B}}{1\cdot 2},$$
$$\mathfrak{D}=\frac{5C}{2\cdot 3}-\frac{a\mathfrak{C}}{2\cdot 3}=\frac{5a^2A}{2^3\cdot 3^2}-\frac{a\mathfrak{C}}{2\cdot 3},$$
$$\mathfrak{E}=\frac{7\mathfrak{D}}{3\cdot 4}-\frac{a\mathfrak{D}}{3\cdot 4}=\frac{-7a^3A}{2^2\cdot 3^3\cdot 4^2}-\frac{a\mathfrak{D}}{3\cdot 4},$$
$$\mathfrak{F}=\frac{9\mathfrak{E}}{4\cdot 5}-\frac{a\mathfrak{E}}{4\cdot 5}=\frac{9a^4A}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^3\cdot 5^2}-\frac{a\mathfrak{E}}{4\cdot 5},$$

и т. д.

Если принять, что можно сделать без ущерба для общности $\mathfrak{B}=0$, так что получаем

$$p=\mathfrak{A}x+\frac{\mathfrak{C}}{x}+\frac{\mathfrak{D}}{x^2}+\frac{\mathfrak{E}}{x^3}+\frac{\mathfrak{F}}{x^4}+\quad \text{и т. д.},$$

то будем иметь

$$\mathfrak{C}=\frac{-3aA}{1^3\cdot 2^2},\quad \mathfrak{D}=\frac{+14a^2A}{1^3\cdot 2^3\cdot 3^2},\quad \mathfrak{E}=\frac{-70a^2A}{1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 4^2},\quad \mathfrak{F}=\frac{+404a^2A}{1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 4^3\cdot 5^2}\quad \text{и т. д.},$$

и эти значения сходны с предыдущими.

ПРИМЕР 3

937. *Решить с помощью рядов уравнение*

$$d^2y+\frac{ay\,dx^2}{x\sqrt{x}}=0.$$

$\left(m\ \textit{принимаем равным}\ \frac{1}{2}\right)$.

Положим $y=p+aq+q\,lx$. Тогда надо принять

$$q=\mathfrak{A}x-\frac{4a\mathfrak{A}}{1\cdot 3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{16a^2\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^2-\frac{64a^3\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{256a^4\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^3-\ \text{и т. д.},$$

вместо чего будем писать для краткости

$$q=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}x^{\frac{3}{2}}+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^{\frac{5}{2}}+\mathfrak{E}x^3+\mathfrak{F}x^{\frac{7}{2}}+\mathfrak{G}x^4+\quad \text{и т. д.},$$

тогда как количество p надо определить из уравнения

$$d^2p+\frac{2dx\,dq}{x}-\frac{q\,dx^2}{x^2}+\frac{ap\,dx^2}{x\sqrt{x}}=0.$$

Итак, пусть

$$p=\Delta+Ax^{\frac{1}{2}}+Bx+Cx^{\frac{3}{2}}+Dx^2+Ex^{\frac{5}{2}}+Fx^3+\quad \text{и т. д.}$$

После подстановки получаем

$$\left.\begin{array}{llllllll}
\frac{a\Delta}{x\sqrt{x}} & +\frac{aA}{x} & +\frac{aB}{\sqrt{x}} & +aC & +aD\sqrt{x} & +aEx & +aFx\sqrt{x}+ & \text{и т. д.}\\
 & -\mathfrak{A} & -\mathfrak{B} & -\mathfrak{C} & -\mathfrak{D} & -\mathfrak{E} & -\mathfrak{F} & \\
 & +2\mathfrak{A} & +3\mathfrak{B} & +4\mathfrak{C} & +5\mathfrak{D} & +6\mathfrak{E} & +7\mathfrak{F} & \\
 & -\frac{A}{4} & +0 & +\frac{3}{4}C & +2D & +\frac{15}{4}E & +6F & +\frac{35}{4}G
\end{array}\right\}=0.$$

Отсюда следует, что

$$A=\frac{-\mathfrak{A}}{a},\qquad \Delta=\frac{-\mathfrak{A}}{4a^2},$$

но B не определяется, а затем

$$C=\frac{-4aB}{1\cdot 3}-\frac{8\mathfrak{B}}{1\cdot 3}=\frac{-4aB}{1\cdot 3}+\frac{8\cdot 4a\mathfrak{A}}{1^2\cdot 3^2},$$

$$D=\frac{-4aC}{2\cdot 4}-\frac{12\mathfrak{C}}{2\cdot 4}=\frac{-4aC}{2\cdot 4}-\frac{12\cdot 16\cdot a^2\mathfrak{A}}{1\cdot 3\cdot 2^2\cdot 4^2},$$

$$E=\frac{-4aD}{3\cdot 5}-\frac{16\mathfrak{D}}{3\cdot 5}=\frac{-4aD}{3\cdot 5}+\frac{16\cdot 64\cdot a^3\mathfrak{A}}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3^2\cdot 5^2},$$

$$F=\frac{-4aE}{4\cdot 6}-\frac{20\mathfrak{E}}{4\cdot 6}=\frac{-4aE}{4\cdot 6}-\frac{20\cdot 256\cdot a^4\mathfrak{A}}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 4^2\cdot 6^2}$$

и т. д.

Если же принять $B=0$, так что

$$p=\frac{-\mathfrak{A}}{4a^2}-\frac{\mathfrak{A}}{a}\sqrt{x}+*+Cx\sqrt{x}+Dx^2+Ex^2\sqrt{x}+Fx^3+\quad \text{и т. д.},$$

найдем

$$C=\frac{8\cdot 4a\mathfrak{A}}{1^2\cdot 3^2},\qquad D=\frac{-100\cdot 16a^2\mathfrak{A}}{1^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 4^2},\qquad E=\frac{1884\cdot 64a^3\mathfrak{A}}{1^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 5^2},$$

$$F=\frac{-52\,416\cdot 256a^4\mathfrak{A}}{1^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\quad \text{и т. д.},$$

где следует заметить, что

$$100=2\cdot 4\cdot 8+1\cdot 3\cdot 12,\qquad 1884=3\cdot 5\cdot 100+1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 16,$$

$$52\,416=4\cdot 6\cdot 1884+1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 20.$$

ПРИМЕР 4

938. *Решить с помощью рядов уравнение*

$$d^2y+\frac{ay\,dx^2}{x^2\sqrt{x}}=0$$

$\left(m \text{ полагаем равным } -\frac{1}{2}\right)$.

Положим $y=p+\alpha p+qlx$. Тогда надо принять

$$q=A-\frac{4aA}{1\cdot 3}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{16a^2A}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4}x^{-1}-\frac{64a^3A}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5}x^{-\frac{3}{2}}+\quad \text{и т. д.},$$

вместо чего будем писать для краткости

$$q=A+Bx^{-\frac{1}{2}}+Cx^{-1}+Dx^{-\frac{3}{2}}+Ex^{-2}+Fx^{-\frac{5}{2}}+\quad \text{и т. д.},$$

а букву p надо определить из уравнения

$$d^2p+\frac{2dx\,dq}{x}-\frac{q\,dx^2}{x^2}+\frac{ap\,dx^2}{x^2\sqrt{x}}=0.$$

Пусть

$$p=\Delta x+\mathfrak{A}\sqrt{x}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}x^{-\frac{1}{2}}+\mathfrak{D}x^{-1}+\mathfrak{E}x^{-\frac{3}{2}}+\mathfrak{F}x^{-2}+\mathfrak{G}x^{-\frac{5}{2}}+\quad \text{и т. д.}$$

После подстановки получаем

$$\left.\begin{array}{llllllll}
\dfrac{a\Delta}{x\sqrt{x}}+ & \dfrac{a\mathfrak{A}}{x^2}+ & \dfrac{a\mathfrak{B}}{x^2\sqrt{x}}+ & \dfrac{a\mathfrak{C}}{x^3}+ & \dfrac{a\mathfrak{D}}{x^3\sqrt{x}}+ & \dfrac{a\mathfrak{E}}{x^4}+ & \dfrac{a\mathfrak{F}}{x^4\sqrt{x^4}}+ & \text{и т. д.}\\
 & -A & -B & -C & -D & -E & -F & \\
 & & -B & -2C & -3D & -4E & -5F & \\
-\frac{1}{4}\mathfrak{A} & & +\frac{3}{4}\mathfrak{C} & +2\mathfrak{D} & +\frac{15}{4}\mathfrak{E} & +6\mathfrak{F} & +\frac{35}{4}\mathfrak{G} &
\end{array}\right\}=0,$$

откуда мы можем определить

$$\mathfrak{A}=\frac{A}{a}\quad\text{и}\quad\Delta=\frac{\mathfrak{A}}{4a}=\frac{A}{4a^2},$$

но $\mathfrak{B}$ не определяется; затем получаем

$$\mathfrak{C}=\frac{-4a\mathfrak{B}}{1\cdot3}+\frac{8B}{1\cdot3}=\frac{-4a\mathfrak{B}}{1\cdot3}-\frac{8\cdot4aA}{1^2\cdot3^2},$$

$$\mathfrak{D}=\frac{-4a\mathfrak{C}}{2\cdot4}+\frac{12C}{2\cdot4}=\frac{-4a\mathfrak{C}}{2\cdot4}+\frac{12\cdot16a^2A}{1\cdot3\cdot2^2\cdot4^2},$$

$$\mathfrak{E}=\frac{-4a\mathfrak{D}}{3\cdot5}+\frac{16\mathfrak{D}}{3\cdot5}=\frac{-4a\mathfrak{D}}{3\cdot6}-\frac{16\cdot64a^3A}{1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3^2\cdot5^2},$$

$$\mathfrak{F}=\frac{-4a\mathfrak{E}}{4\cdot6}+\frac{20E}{4\cdot6}=\frac{-4a\mathfrak{E}}{4\cdot6}+\frac{20\cdot256a^4A}{1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot4^2\cdot6^2},$$

и т. д.

Если же мы примем $\mathfrak{B}=0$, то получим

$$\mathfrak{C}=\frac{-8\cdot4aA}{1^2\cdot3^2},\quad\mathfrak{D}=\frac{+100\cdot16a^2A}{1^2\cdot3^2\cdot2^2\cdot4^2},\quad\mathfrak{E}=\frac{-1884\cdot64a^3A}{1^2\cdot3^2\cdot2^2\cdot4^2\cdot3^2\cdot5^2}\quad\text{и т. д.},$$

и эти числа следуют одно за другим, как и выше.

ПОЯСНЕНИЕ

939. Из этих примеров видно, каким образом следует находить и в остальных случаях, когда $m=\pm\frac{1}{i}$, те ряды, которые являются решением уравнения

$$d^2y+ax^{m-2}y\,dx^2=0;$$

заметим при этом, что если $m=+\frac{1}{i}$, для q надо брать следующий ряд:

$$q=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}x^{1+\frac{1}{i}}+\mathfrak{C}x^{1+\frac{2}{i}}+\mathfrak{D}x^{1+\frac{3}{i}}+\quad\text{и т. д.},$$

тогда как p выражается в виде такого ряда:

$$p=A+Bx^{\frac{1}{i}}+Cx^{\frac{2}{i}}+Dx^{\frac{3}{i}}+\quad\text{и т. д.}$$

Коэффициенты этого ряда определяются по коэффициентам предыдущего ряда так же, как и выше. Если же $m=-\frac{1}{i}$, для q надо брать ряд

$$q=A+Bx^{-\frac{1}{i}}+Cx^{-\frac{2}{i}}+Dx^{-\frac{3}{i}}+\quad\text{и т. д.},$$

а для p ряд следует принять в следующем виде:

$$p = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^{1-\frac{1}{i}} + \mathfrak{C}x^{1-\frac{2}{i}} + \mathfrak{D}x^{1-\frac{3}{i}} + \quad \text{и т. д.}$$

При этом отдельные коэффициенты можно определить, как и раньше, за исключением одного. И вообще следует придерживаться этого приема всякий раз, как мы получаем при решении общего уравнения ряды, коэффициенты которых в некоторых случаях обращаются в бесконечность, что большей частью указывает на то, что надо ввести логарифмы. Правда, это же самое уравнение $d^2y + ax^ny\,dx^2 = 0$ может быть также решено с помощью рядов и другими способами, если его преобразовать предварительно к другому виду. При этом может статься, что соответствующий ряд в определенных случаях будет обрываться, так что, помимо всего, интеграл в таком случае может быть действительно определен[1]), и поэтому мы изложим здесь подобное весьма заслуживающее внимания преобразование.

ЗАДАЧА 118

940. *Преобразовать дифференциальное уравнение второго порядка*

$$d^2y + ax^ny\,dx^2 = 0$$

к такому виду, чтобы его можно было удобным образом решить с помощью бесконечных рядов.

РЕШЕНИЕ

Воспользуемся подстановкой $y = e^{\int p\,dx}z$, где p пусть будет некоторой функцией от x, такой, что уравнение при этом решается удобным образом. Итак, получаем

$$dy = e^{\int p\,dx}(dz + pz\,dx)$$

и

$$d^2y = e^{\int p\,dx}(d^2z + 2p\,dx\,dz + z\,dx\,dp + p^2z\,dx^2).$$

Следовательно, предложенное уравнение преобразуется в [уравнение]

$$d^2z + 2p\,dx\,dz + z\,dx\,dp + p^2z\,dx^2 + ax^nz\,dx^2 = 0,$$

где p надо выбрать таким образом, чтобы

$$p^2 + ax^n = 0, \quad \text{то есть} \quad p = x^{\frac{n}{2}}\sqrt{-a}.$$

Поэтому положим $a = -c^2$ и $n = 2m$, так что приходим к уравнению

$$d^2y - c^2x^{2m}y\,dx^2 = 0.$$

Это уравнение, если положить

$$p = cx^m \quad \text{и} \quad y = e^{\int p\,dx}z = e^{\frac{c}{m+1}x^{m+1}}z,$$

представится в виде

$$d^2z + 2cx^m dx\,dz + mcz^{m-1}z\,dx^2 = 0,$$

---

[1]) Здесь у Эйлера то же различение, что и выше (см. § 928): уравнение интегрируется с помощью бесконечного ряда, но действительно решается тогда, когда этот ряд обрывается, т. е. когда решение получается в конечном виде.

и так как здесь x встречается либо в нулевом, либо в $m+1$ измерении, то мы примем значение z [в виде]

$$z=Ax^{\lambda}+Bx^{\lambda+m+1}+Cx^{\lambda+2m+2}+\quad\text{и т. д.}$$

и после подстановки [этого выражения] получаем

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(\lambda-1)Ax^{\lambda-2}+(\lambda+m+1)(\lambda+m)Bx^{\lambda+m-1}+\quad\text{и т. д.}\\ \qquad+2\lambda Ac\\ \qquad+mAc\end{array}\right\}=0,$$

откуда ясно, что следует принять либо $\lambda=0$, либо $\lambda=1$. Следовательно, получаем двойной ряд такого вида:

$$\begin{aligned}z&=A+Bx^{m+1}+Cx^{2m+2}+Dx^{3m+3}+Ex^{4m+4}+\quad\text{и т. д.}\\&+\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}x^{m+2}+\mathfrak{C}x^{2m+3}+\mathfrak{D}x^{3m+4}+\mathfrak{E}x^{4m+5}+\quad\text{и т. д.}\end{aligned}$$

и после его подстановки [в уравнение] находим

$$\left.\begin{array}{llll}(m+1)mBx^{m-1} & +2(m+1)(2m+1)Cx^{2m} & +3(m+1)(3m+2)Dx^{3m+1} & +\text{ и т. д.}\\ +mAc & +2(m+1)Bc & +4(m+1)Cc & \\ & +mBc & +mCc & \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{llll}(m+1)(m+2)\mathfrak{B}x^{m} & +2(m+1)(2m+3)\mathfrak{C}x^{2m+1} & +3(m+1)(3m+4)\mathfrak{D}x^{3m+2} & +\text{ и т. д.}\\ +2\mathfrak{A}c & +2(m+2)\mathfrak{B}c & +2(2m+3)\mathfrak{C}c & \\ +m\mathfrak{A}c & +m\mathfrak{B}c & +m\mathfrak{C}c & \end{array}\right\}=0.$$

Отсюда коэффициенты обоих рядов определяются следующим образом:

$$\begin{array}{l|l}B=\dfrac{-mAc}{m(m+1)} & \mathfrak{B}=\dfrac{-(m+2)\mathfrak{A}c}{(m+2)(m+1)}\\ C=\dfrac{-(3m+2)Bc}{2(2m+1)(m+1)} & \mathfrak{C}=\dfrac{-(3m+4)\mathfrak{B}c}{2(2m+3)(m+1)}\\ D=\dfrac{-(5m+4)Cc}{3(3m+2)(m+1)} & \mathfrak{D}=\dfrac{-(5m+6)\mathfrak{C}c}{3(3m+4)(m+1)}\\ E=\dfrac{-(7m+6)Dc}{4(4m+3)(m+1)} & \mathfrak{E}=\dfrac{-(7m+8)\mathfrak{D}c}{4(4m+5)(m+1)}\\ \qquad\text{и т. д.} & \qquad\text{и т. д.,}\end{array}$$

причем два коэффициента A и $\mathfrak{A}$ остаются неопределенными, так что этот интеграл следует рассматривать как полный.

Другой способ.

Если исходить из ряда, в котором показатели x убывают, надо положить $2\lambda+m=0$, то есть $m=-2\lambda$, так что наше уравнение получается в виде

$$d^2y-c^2x^{-4\lambda}y\,dx^2=0,$$

и если в нем положить

$$p=cx^{-2\lambda}\quad\text{и}\quad y=e^{\int p\,dx}z=e^{\frac{-c}{2\lambda-1}x^{-2\lambda+1}}z,$$

то оно переходит в [уравнение]

$$d^2z+2cx^{-2\lambda}\,dx\,dz-2\lambda cx^{-2\lambda-1}z\,dx^2=0.$$

Итак, положим

$$z=Ax^{\lambda}+\beta x^{3\lambda-1}+Cx^{5\lambda-2}+Dx^{7\lambda-3}+\quad\text{и т. д}$$

и после подстановки этого ряда получим

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(\lambda-1)Ax^{\lambda-2}+(3\lambda-1)(3\lambda-2)Bx^{3\lambda-3}\\ \qquad\qquad +(5\lambda-2)(5\lambda-3)Cx^{5\lambda-4} \quad \text{и т. д.}\\ +2\lambda Acx^{-\lambda-1}+2(3\lambda-1)BC+2(5\lambda-2)Cc\\ \qquad\qquad +2(7\lambda-3)Dc\\ -2\lambda Ac \qquad -2\lambda Bc-2\lambda Cc\\ \qquad\qquad -2\lambda Dc\end{array}\right\}=0,$$

откуда коэффициенты определяются следующим образом:

$$B=\frac{-\lambda(\lambda-1)A}{(4\lambda-2)c}=\frac{-\lambda(\lambda-1)A}{2(2\lambda-1)c},$$

$$C=\frac{-(3\lambda-1)(3\lambda-2)B}{(8\lambda-4)c}=\frac{-(3\lambda-1)(3\lambda-2)B}{4(2\lambda-1)c},$$

$$D=\frac{-(5\lambda-2)(5\lambda-3)C}{(12\lambda-6)c}=\frac{-(5\lambda-2)(5\lambda-3)C}{6(2\lambda-1)c},$$

$$E=\frac{-(7\lambda-3)(7\lambda-4)D}{(16\lambda-8)c}=\frac{-(7\lambda-3)(7\lambda-4)D}{8(2\lambda-1)c} \quad \text{и т. д.}$$

Здесь в нашем произволе остается значение только одной буквы A, и поэтому полученный ряд представляет только частный интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 1

941. Из первого решения явствует, что один из рядов обрывается всякий раз, когда

$$(2i+1)m+2i=0, \text{ то есть } m=\frac{-2i}{2i+1},$$

а второй ряд обрывается всякий раз, когда

$$(2i-1)m+2i=0, \text{ то есть } m=\frac{-2i}{2i-1},$$

причем здесь i обозначает любое целое число. Таким образом, в этих случаях только частный интеграл может быть выражен в конечном виде.

СЛЕДСТВИЕ 2

942. Второе решение дает конечный ряд всякий раз, когда либо

$$(2i+1)\lambda-i=0, \quad \text{либо} \quad (2i-1)\lambda-i=0,$$

то есть когда

$$\lambda=\frac{i}{2i\pm1} \quad \text{и} \quad m=\frac{-2i}{\pm1},$$

как и выше. В остальных же случаях этот ряд продолжается до бесконечности[1]).

СЛЕДСТВИЕ 3

943. Итак, в тех случаях, когда уравнение

$$d^2y-c^2x^n\,dx^2=0,$$

---

[1]) In infinitum excurrit.

а также уравнение

$$du + u^2\,dx = c^2x^n\,dx,$$

которое получается из первого подстановкой $y = e^{\int u\,dx}$, допускают только частный интеграл, имеем $n = \frac{-4i}{2i \pm 1}$, где i обозначает любое целое число [1]).

ПОЯСНЕНИЕ

944. Впрочем, достаточно найти частный интеграл, потому что по нему легко определить полный интеграл. Действительно, так как в интеграл входит буква c, тогда как дифференциальное уравнение содержит только [ее] квадрат c^2, то можно равным образом положить в интеграле как $+c$, так и $-c$. Отсюда следует, что если частный интеграл — это $y = P + cQ$, то и $y = P - cQ$ тоже будет частным интегралом, и поэтому полным интегралом будет

$$y = \alpha(P + cQ) + \beta(P - cQ), \text{ то есть } y = \alpha P + \beta cQ.$$

Для того чтобы это объяснить более ясно, применим [этот прием] с целью получить другое решение уравнения

$$d^2y - c^2x^{-4\lambda}y\,dx^2 = 0,$$

в котором положим ради краткости $\frac{1}{1-2\lambda}x^{1-2\lambda} = t$ и примем $y = e^{ct}z$, а [тогда] найдем, что [§ 940]

$$z = Ax^\lambda - \frac{\lambda(\lambda-1)A}{2(2\lambda-1)c}x^{3\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)(3\lambda-1)(3\lambda-2)A}{2\cdot 4(2\lambda-1)^2c^2}x^{5\lambda-2}$$
$$- \frac{\lambda(\lambda-1)(3\lambda-1)(3\lambda-2)(5\lambda-2)(5\lambda-3)A}{2\cdot 4\cdot 6(2\lambda-1)^3c^3}x^{7\lambda-3} + \text{ и т. д.}$$

Для того чтобы в этом выражении отделить члены, которые делятся на четные степени c, от тех, которые делятся на нечетные степени, будем писать $z = P - cQ$, так что P и Q уже содержат только четные степени c, и тогда одним частным интегралом будет

$$y = e^{ct}(P - cQ),$$

другим—

$$y = e^{-ct}(P + cQ),$$

и поэтому полным интегралом будет

$$y = \frac{1}{2}P(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct}) - \frac{1}{2}cQ(\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct}).$$

Отсюда следует, что если c есть число мнимое, или, иначе, $c^2 = -b^2$, так что уравнение будет вида

$$d^2y + b^2x^{-4\lambda}y\,dx^2 = 0,$$

то получаем

$$z = P - bQ\sqrt{-1}$$

и

$$e^{ct} = e^{bt\sqrt{-1}} = \cos bt + \sqrt{-1}\cdot\sin bt,$$

[1]) Сопоставить с §§ 436—441 (I том).

следовательно,

$$y=P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\cos bt+\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{-1}\sin bt\right)$$

$$-bQ\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\cos bt+\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{-1}\sin bt\right)\sqrt{-1}.$$

Пусть $\frac{\alpha+\beta}{2}=\gamma$ и $\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{-1}=\delta$, в этом случае полный интеграл выражается следующим образом:

$$y=P(\gamma\cos bt+\delta\sin bt)-bQ(\delta\cos bt-\gamma\sin bt),$$

то есть

$$y=(\gamma P-\delta bQ)\cos bt+(\delta P+\gamma bQ)\sin bt.$$

Теперь мы разберем те случаи, которые интегрируются указанным способом.

ПРИМЕР 1

945. *Найти интеграл уравнения*

$$d^2y-c^2y\,dx^2=0.$$

Здесь имеем $\lambda=0$ и $z=A$, а также $t=x$, откуда получаем (вследствие того, что $P=A$ и $Q=0$) полный интеграл в виде

$$y=\alpha e^{cx}+\beta e^{-cx}.$$

В случае же, когда $c^2=-b^2$ и уравнение имеет вид

$$d^2y+b^2y\,dx^2,$$

полным интегралом будет

$$y=\gamma\cos bx+\delta\sin bx.$$

ПРИМЕР 2

946. *Найти интеграл уравнения*

$$d^2y-c^2x^{-4}y\,dx^2=0.$$

Здесь, так как $\lambda=1$, имеем $z=Ax$ и $t=-\frac{1}{x}$. Отсюда вследствие того, что $P=0$ и $Q=0$, получаем

$$y=(\alpha e^{ct}+\beta e^{-ct})\,x.$$

В том же случае, когда $c^2=-b^2$, находим интеграл уравнения

$$d^2y+b^2x^{-4}y\,dx^2=0$$

в виде

$$y=(\alpha\cos bt+\beta\sin bt)\,x,$$

где $t=-\frac{1}{x}$.

ПРИМЕР 3

947. *Найти интеграл уравнения*

$$d^2y-c^2x^{-\frac{4}{3}}y\,dx^2=0.$$

Так как $\lambda=\frac{1}{3}$, то $B=-\frac{A}{3c}$ и $z=Ax^{\frac{1}{3}}-\frac{A}{3c}$, а также $t=3x^{\frac{1}{3}}$, откуда $P=x^{\frac{1}{3}}$ и $Q=\frac{1}{3c^2}$. Следовательно, интегралом будет

$$y=(\alpha e^{ct}+\beta e^{-ct})\,x^{\frac{1}{3}}-(\alpha e^{ct}-\beta e^{-ct})\,\frac{1}{8c}.$$

В том же случае, когда $c^2=-b^2$, интегралом уравнения

$$d^2y+b^2x^{-\frac{4}{3}}\,y\,dx^2=0$$

будет

$$y=(\alpha\cos bt+\beta\sin bt)\,x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3b}(\beta\cos bt-\alpha\sin bt).$$

ПРИМЕР 4

948. *Найти интеграл уравнения*

$$d^2y-c^2x^{-\frac{8}{3}}y\,dx^2=0.$$

Так как $\lambda=\frac{2}{3}$, то $B=\frac{A}{3c}$ и $z=Ax^{\frac{2}{3}}+\frac{A}{3c}x$. Таким образом, $P=x^{\frac{2}{3}}$ и $Q=\frac{-x}{3c^2}$. Итак, полагая $t=-3x^{-\frac{1}{3}}$, представим интеграл в виде

$$y=x^{\frac{2}{3}}(\alpha e^{ct}+\beta e^{-ct})+\frac{x}{3c}(\alpha e^{ct}-\beta e^{-ct}).$$

В том же случае, когда $c^2=-b^2$, интегралом уравнения

$$d^2y+b^2x^{-\frac{8}{3}}y\,dx^2=0$$

будет

$$y=x^{\frac{2}{3}}(\alpha\cos bt+\beta\sin bt)-\frac{x}{3b}(\beta\cos bt-\alpha\sin bt).$$

ПРИМЕР 5

949. *Найти интеграл уравнения*

$$d^2y-c^2x^{-\frac{8}{5}}\,y\,dx^2=0.$$

Так как $\lambda=\frac{2}{5}$, то $B=\frac{-3A}{5c}$ и $C=\frac{3A}{5^2c^2}$. Отсюда

$$z=Ax^{\frac{2}{5}}-\frac{3A}{5c}x^5+\frac{3A}{5^2c^2}$$

и, следовательно,

$$P=x^{\frac{2}{5}}+\frac{3}{5^2c^2},\quad Q=\frac{3}{5c^2}\,x^{\frac{1}{5}}.$$

Полагая $t=5x^{\frac{1}{5}}$, получим интеграл в виде

$$y=\left(x^{\frac{2}{5}}+\frac{3}{5^2c^2}\right)(\alpha e^{ct}+\beta e^{-ct})-\frac{3}{5c}\,x^{\frac{1}{5}}\,(\alpha e^{ct}-\beta e^{-ct}).$$

В том же случае, когда $c^2 = -b^2$, интегралом уравнения

$$d^2y + b^2x^{-\frac{8}{5}}y\,dx^2 = 0$$

будет

$$y = \left(x^{\frac{2}{5}} - \frac{3}{5^2b^2}\right)(\alpha\cos bt + \beta\sin bt) + \frac{3}{5c}x^{\frac{1}{5}}(\beta\cos bt - \alpha\sin bt).$$

ЗАДАЧА 119

950. *Определить полный интеграл дифференциального уравнения второго порядка*

$$d^2y - c^2x^{\frac{-4i}{i-1}}y\,dx^2 = 0,$$

где i обозначает любое целое число.

РЕШЕНИЕ

Положим ради краткости $t = -(2i-1)x^{\frac{-1}{2i-1}}$, следовательно, $x^{\frac{1}{2i-1}} = -\frac{2i-1}{t}$, и если примем, что $y = e^{ct}z$, то в том ряду, который мы найдем как значение z,

$$z = Ax^{\frac{i}{2i-1}} + Bx^{\frac{i+1}{2i-1}} + Cx^{\frac{i+2}{2i-1}} + Dx^{\frac{i+3}{2i-1}} + \text{ и т. д.},$$

коэффициенты, вследствие того, что $\lambda = \frac{+i}{2i-1}$, будут выражаться следующим образом:

$$B = \frac{i(i-1)A}{2(2i-1)c},\quad C = \frac{(i+1)(i-2)B}{4(2i-1)c},\quad D = \frac{(i+2)(i-3)C}{6(2i-1)c}\quad \text{и т. д.}$$

Подставляя эти значения и вводя выражение $x^{\frac{1}{2i-1}} = \frac{-(2i-1)}{t}$, получим, что

$$z = Ax^{\frac{i}{2i-1}}\left(1 - \frac{i(i-1)}{2ct} + \frac{i(i^2-1)(i-2)}{2\cdot 4\,c^2t^2} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6\,c^3t^3} + \text{ и т. д.}\right)$$

или же, в другом виде,

$$z = \frac{A}{t^i}\left(1 - \frac{i(i-1)}{2ct} + \frac{i(i^2-1)(i-2)}{2\cdot 4\,c^2t^2} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot c^3t^3} + \text{ и т. д.}\right).$$

Отсюда следует, что полный интеграл предложенного уравнения выражается так:

$$y = t^{-i}\left(1 + \frac{i(i^2-1)(i-2)}{2\cdot 4\,c^2t^2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i-4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\,c^4t^4} + \text{ и т. д.}\right)(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})$$
$$- t^{-i}\left(\frac{i(i-1)}{2ct} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6\,c^3t^3} + \text{ и т. д.}\right)(\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct}),$$

где в обеих прогрессиях закон образования отдельных членов вполне очевиден.

СЛЕДСТВИЕ 1

951. Таким образом, для уравнения

$$d^2y + b^2x^{\frac{-4i}{2i-1}}y\,dx^2 = 0$$

полным интегралом будет

$$y=t^{-i}\left(1-\frac{i\,(i^2-1)\,(i-2)}{2\cdot 4\,b^2t^2}+\frac{i\,(i^2-1)\,(i^2-4)\,(i^2-9)\,(i-4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\,b^4t^2}-\text{ и т. д.}\right)\cdot(\alpha\cos bt+\beta\sin bt)$$
$$+t^{-i}\left(\frac{i\,(i-1)}{2\,bt}-\frac{i\,(i^2-1)\,(i^2-4)\,(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6\,b^3t^3}+\frac{i\,(i^2-1)\,(i^2-4)\,(i^2-9)\,(i^2-16)\,(i-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\,b^5t^5}-\text{ и т. д.}\right)\cdot(\beta\cos bt-\alpha\sin bt),$$

где сохраняется [обозначение] $t=-(2i-1)\,x^{\frac{-1}{2i-1}}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

952. Если i — число отрицательное, то все равно такое интегрирование удается произвести. Действительно, для уравнения

$$d^2y-c^2x^{\frac{-4i}{i+1}}y\,dx^2=0$$

интегралом будет

$$y=t^{i}\left(1+\frac{i\,(i^2-1)\,(i+2)}{2\cdot 4\,c^2t^2}+\frac{i\,(i^2-1)\,(i^2-4)\,(i^2-9)\,(i+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\,c^4t^4}+\text{ и т. д.}\right)\cdot(\alpha e^{ct}+\beta e^{-ct})$$
$$-t^{i}\left(\frac{i\,(i+1)}{2ct}+\frac{i\,(i^2-1)\,(i^2-4)\,(i+3)}{2\cdot 4\cdot 6\,c^3t^3}+\frac{i\,(i^2-1)\,(i^2-4)\,(i^2-9)\,(i^2-16)\,(i+5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\,c^5t^5}+\text{ и т. д.}\right)\cdot(\alpha e^{ct}-\beta e^{-ct}),$$

где полагаем $t=(2i+1)\,x^{\frac{1}{2i+1}}$.

СЛЕДСТВИЕ 3

953. Подобным же образом, полагая $t=(2i+1)\,x^{\frac{1}{2i+1}}$, находим полный интеграл уравнения

$$d^2y+b^2x^{\frac{-4i}{2i+1}}y\,dx^2=0$$

в виде

$$y=t^{i}\left(1-\frac{i\,(i^2-1)\,(i+2)}{2\cdot 4\,b^2t^2}+\frac{i\,(i^2-1)\,(i^2-4)\,(i^2-9)\,(i+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\,b^4t^4}-\text{ и т. д.}\right)\cdot(\alpha\cos bt+\beta\sin bt)$$
$$+t^{i}\left(\frac{i\,(i+1)}{2bt}-\frac{i\,(i^2-1)\,(i^2-4)\,(i+3)}{2\cdot 4\cdot 6\,b^3t^3}+\frac{i\,(i^2-1)\,(i^2-4)\,(i^2-9)\,(i^2-16)\,(i+5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\,b^5t^5}-\text{ и т. д.}\right)\cdot(\beta\cos bt-\alpha\sin bt).$$

СЛЕДСТВИЕ 4

954. Если положить в выражениях, содержащих синус и косинус,

$$\alpha=C\sin\zeta\quad\text{и}\quad\beta=C\cos\zeta,$$

то наши формулы упростятся следующим образом:

$$\alpha \cos bt + \beta \sin bt = C \sin (bt + \zeta) \quad \text{и} \quad \beta \cos \beta t - \alpha \sin bt = C \cos (bt + \zeta),$$

где уже C и ζ являются произвольными постоянными, обеспечивающими полноту интеграла.

ПОЯСНЕНИЕ

955. Из изложенного мы получаем превосходное средство для того, чтобы определять случаи интегрируемости дифференциального уравнения первого порядка вида

$$du + u^2\,dx + ax^n\,dx = 0,$$

а заодно, чтобы находить его полный интеграл. Действительно, указанное уравнение получается из уравнения

$$d^2y + ax^n y\,dx^2 = 0,$$

если положить $z = e^{\int u\,dx}$, и, наоборот, из последнего получается первое, если положить $u = \frac{dy}{y\,dx}$. А так как можно определить интеграл последнего уравнения в тех случаях, когда показатель $n = \frac{-4i}{2i \pm 1}$, то в этих же случаях можно определить и интеграл дифференциального уравнения первого порядка, причем, однако, надлежит разобрать два случая соответственно тому, будет ли $a = -c^2$ отрицательным числом или положительным: $a = +b^2$. Итак, рассмотреть эти два случая является делом, заслуживающим внимания.

ЗАДАЧА 120

956. *Определить интеграл уравнения*

$$du + u^2\,dx - c^2 x^{\frac{-4i}{2i+1}}\,dx = 0,$$

причем i обозначает любое целое как положительное, так и отрицательное число.

РЕШЕНИЕ

С помощью подстановки $u = \frac{dy}{y\,dx}$ это уравнение преобразуется в следующее:

$$d^2y - c^2 x^{\frac{-4i}{2i+1}} y\,dx^2 = 0;$$

интеграл последнего уравнения, полагая элемент dx постоянным, мы определили. Очевидно, положив $t = (2i+1)\,x^{\frac{1}{2i+1}}$, имеем

$$y = (\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct}) \cdot \left(t^i + \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2 \cdot 4\,c^2}\,t^{i-2} \right.$$
$$\left. + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8\,c^4}\,t^{i-4} + \text{и т. д.} \right)$$
$$- (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct}) \left(\frac{i(i+1)}{2c}\,t^{i-1} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6\,c^3}\,t^{i-3} \right.$$
$$\left. + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i^2-16)(i+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10\,c^5}\,t^{i-5} + \text{и т. д.} \right).$$

Примем ради краткости

$$y=(\alpha e^{ct}+\beta e^{-ct})P-(\alpha e^{ct}-\beta e^{-ct})Q$$

и, так как

$$dt=x^{\frac{-2i}{2i+1}}\,dx,\quad \text{то есть}\quad dx=x^{\frac{2i}{2i+1}}\,dt,$$

получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\alpha e^{ct}+\beta e^{-ct})(dP-cQ\,dt)+(\alpha e^{ct}-\beta e^{-ct})(cP\,dt-dQ)}{x^{\frac{2i}{2i+1}}\,dt},$$

то есть

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha e^{ct}(dP+cP\,dt-dQ-cQ\,dt)+\beta e^{-ct}(dP-cP\,dt+dQ-cQ\,dt)}{x^{\frac{2i}{2i+1}}\,dt}.$$

Вместе с тем имеем

$$\frac{dP}{dt}=it^{i-1}+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)}{2\cdot 4c^2}t^{i-3}+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i^2-16)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8c^4}t^{i-5}+\ \text{и т. д.},$$

$$cQ=\frac{i(i+1)}{2}t^{i-1}+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot 4\cdot 6c^2}t^{i-3}$$
$$+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i^2-16)(i+5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10c^4}t^{i-5}+\ \text{и т. д.},$$

$$cP=ct^i+\frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot 4c}t^{i-2}+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8c^3}t^{i-4}+\ \text{и т. д.},$$

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{i(i^2-1)}{2c}t^{i-2}+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)}{2\cdot 4\cdot 6c^3}t^{i-4}+\ \text{и т. д.},$$

откуда находим, что

$$\frac{dP-cQ\,dt}{dt}=\frac{-i(i-1)}{2}t^{i-1}-\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6c^2}t^{i-3}$$
$$-\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i^2-16)(i-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10c^4}t^{i-5}-\ \text{и т. д.},$$

$$\frac{cP\,dt-dQ}{dt}=ct^i+\frac{i(i^2-1)(i-2)}{2\cdot 4c}t^{i-2}+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i-4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8c^3}t^{i-4}+\ \text{и т. д.}$$

Положим для сокращения

$$P=t^i+\frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot 4c^2}t^{i-2}+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8c^4}t^{i-4}+\ \text{и т. д.},$$

$$Q=\frac{i(i+1)}{2c}t^{i-1}+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot 4\cdot 6c^3}t^{i-3}$$
$$+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i^2-16)(i+5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10c^5}t^{i-5}+\ \text{и т. д.},$$

$$R=t^i+\frac{i(i^2-1)(i-2)}{2\cdot 4c^2}t^{i-2}+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i-4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8c^4}t^{i-4}+\ \text{и т. д.},$$

$$S=\frac{i(i-1)}{2c}t^{i-1}+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6c^3}t^{i-3}$$
$$+\frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i^2-16)(i-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10c^5}t^{i-5}+\ \text{и т. д.},$$

так что

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\alpha e^{ct}+\beta e^{-ct})(-cS)+(\alpha e^{ct}-\beta e^{-ct})(cR)}{x^{\frac{2i}{2i+1}}}.$$

Поэтому, поскольку

$$u=\frac{dy}{y\,dx},$$

полным интегралом нашего уравнения будет

$$\frac{1}{c}\,x^{\frac{2i}{2i+1}}u=\frac{(\alpha e^{ct}-\beta e^{-ct})\,R-(\alpha e^{ct}+\beta e^{-ct})\,S}{(\alpha e^{ct}+\beta e^{-ct})\,P-(\alpha e^{ct}-\beta e^{-ct})\,Q},$$

или же

$$\frac{1}{c}\,x^{\frac{2i}{2i+1}}\,u=\frac{\alpha e^{ct}(R-S)-\beta e^{-ct}(R+S)}{\alpha e^{ct}(P-Q)+\beta e^{-ct}(P+Q)},$$

и этот интеграл является полным, так как отношение постоянных $\alpha:\beta$ произвольно.

СЛЕДСТВИЕ 1

957. Четыре выражения P, Q, R, S, которые в отдельных случаях, когда i целое число, обрываются, находятся в такой зависимости между собой, что, во-первых,

$$R=P-\frac{dQ}{c\,dt} \quad \text{и} \quad S=Q-\frac{dP}{c\,dt},$$

и, вместе с тем,

$$dP+dR=\frac{+2iR\,dt}{t} \quad \text{и} \quad dQ+dS=\frac{2iS\,dt}{t}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

958. Итак, полагая либо $\alpha=0$, либо $\beta=0$, можем определить частные алгебраические интегралы уравнения

$$du+u^2\,dx-c^2x^{\frac{-4i}{2i+1}}\,dx=0,$$

а именно

$$\frac{1}{c}\,x^{\frac{2i}{2i+1}}\,u=\frac{R-S}{P-Q} \quad \text{и} \quad \frac{1}{c}\,x^{\frac{2i}{2i+1}}\,u=\frac{-S-R}{P+Q}.$$

Таким образом, их можно охватить одной формулой

$$\frac{1}{c}\,x^{\frac{2i}{2i+1}}\,u=\frac{-S\pm R}{P\mp Q}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

959. При различных значениях числа i получаем следующим образом как количество t, так и буквы P, Q, R, S. Прежде всего, очевидно, что если $i=0$, то $t=x$, а также $P=1$, $Q=0$, $R=1$ и $S=0$. Остальные случаи мы представим в следующей таблице:

$i=-1, \quad t=-\frac{1}{x}$ $P=\frac{1}{t}, \quad Q=0$ $R=\frac{1}{t}, \quad S=\frac{1}{ct^2}$	$i=1, \quad t=3x^{\frac{1}{3}}$ $P=t, \quad Q=\frac{1}{c}$ $R=t, \quad S=0$
$i=-2, \quad t=-\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}$ $P=\frac{1}{t^2}, \quad Q=\frac{1}{ct^3}$ $R=\frac{1}{t^2}+\frac{3}{c^2t^4}, \quad S=\frac{3}{ct^3}$	$i=2, \quad t=5x^{\frac{1}{5}}$ $P=t^2+\frac{3}{c^2}, \quad Q=\frac{3}{c}t$ $R=t^2, \quad S=\frac{1}{c}t$
$i=-3, \quad t=\frac{-5}{x^{\frac{1}{5}}}$ $P=\frac{1}{t^3}+\frac{1\cdot 3}{c^2t^5}$ $Q=\frac{3}{ct^4}$ $R=\frac{1}{t^3}+\frac{3\cdot 5}{c^2t^5}$ $S=\frac{6}{ct^4}+\frac{3\cdot 5}{c^3t^6}$	$i=3, \quad t=7x^{\frac{1}{7}}$ $P=t^3+\frac{3\cdot 5}{c^2}t$ $Q=\frac{6}{c}t^2+\frac{3\cdot 5}{c^3}$ $R=t^3+\frac{1\cdot 3}{c^2}t$ $S=\frac{3}{c}t^2$
$i=-4, \quad t=-\frac{7}{x^{\frac{1}{7}}}$ $P=\frac{1}{t^4}+\frac{3\cdot 5}{c^2t^6}$ $Q=\frac{6}{ct^5}+\frac{3\cdot 5}{c^3t^7}$ $R=\frac{1}{t^4}+\frac{3\cdot 3\cdot 5}{c^2t^6}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{c^4t^8}$ $S=\frac{10}{ct^5}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{c^3t^7}$	$i=4, \quad t=9x^{\frac{1}{9}}$ $P=t^4+\frac{3\cdot 3\cdot 5}{c^2}t^2+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{c^4}$ $Q=\frac{10}{c}t^3+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{c^3}t$ $R=t^4+\frac{3\cdot 5}{c^2}t^2$ $S=\frac{6}{c}t^3+\frac{3\cdot 5}{c^3}t$
$i=-5, \quad t=\frac{-9}{x^{\frac{1}{9}}}$ $P=\frac{1}{t^5}+\frac{3\cdot 3\cdot 5}{c^2t^7}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{c^4t^9}$ $Q=\frac{10}{ct^6}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{c^3t^8}$ $R=\frac{1}{t^5}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{c^2t^7}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{c^4t^9}$ $S=\frac{15}{ct^6}+\frac{4\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{c^3t^8}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{c^8t^{10}}$	$i=5, \quad t=11x^{\frac{1}{11}}$ $P=t^5+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{c^2}t^3+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{c^4}t$ $Q=\frac{15}{c}t^4+\frac{4\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{c^3}t^2+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{c^5}$ $R=t^5+\frac{3\cdot 3\cdot 5}{c^2}t^3+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{c^4}t$ $S=\frac{10}{c}t^4+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{c^3}t^2$

$$i = -6, \qquad t = \frac{-11}{x^{\frac{1}{11}}}$$

$$P = \frac{1}{t^6} + \frac{3\cdot5\cdot7}{c^2t^8} + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{c^4t^{10}}$$

$$Q = \frac{15}{ct^7} + \frac{4\cdot3\cdot5\cdot7}{c^3t^9} + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{c^5t^{11}}$$

$$R = \frac{1}{t^6} + \frac{2\cdot3\cdot5\cdot7}{c^2t^8} + \frac{5\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{c^4t^{10}} + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{c^6t^{12}}$$

$$S = \frac{21}{ct^7} + \frac{4\cdot5\cdot7\cdot9}{c^3t^9} + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{c^5t^{11}}$$

$$i = 6, \qquad t = 13x^{\frac{1}{13}}$$

$$P = t^6 + \frac{2\cdot3\cdot5\cdot7}{c^2}t^4 + \frac{5\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{c^4}t^2 + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{c^6}$$

$$Q = \frac{21}{c}t^5 + \frac{4\cdot5\cdot7\cdot9}{c^3}t^3 + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{c^4}t$$

$$R = t^6 + \frac{3\cdot5\cdot7}{c^2}t^4 + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{c^4}t^2$$

$$S = \frac{15}{c}t^5 + \frac{4\cdot3\cdot5\cdot7}{c^3}t^3 + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{c^6}t.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

960. Если внимательно рассмотреть эти формулы, то можно обнаружить новое соотношение между значениями букв P, Q, R, S, которое состоит в том, что всегда $PR - QS = t^{2i}$. Справедливость этого сначала может быть обнаружена по индукции, вместе с тем ее можно доказать, исходя из вышеприведенных соотношений. Действительно, если подставить значения

$$R = P - \frac{dQ}{c\,dt} \quad \text{и} \quad S = Q - \frac{dP}{c\,dt}$$

в уравнения

$$dP + dR = \frac{2iR\,dt}{t} \quad \text{и} \quad dQ + dS = \frac{2iS\,dt}{t},$$

то получим следующие два уравнения:

$$2dP - \frac{d^2Q}{c\,dt} = \frac{2iP\,dt}{t} - \frac{2i\,dQ}{ct} \quad \text{и} \quad 2dQ - \frac{d^2P}{c\,dt} = \frac{2iQ\,dt}{t} - \frac{2i\,dP}{ct}.$$

Помножив первое на P, а второе на Q и сложив их, получаем

$$2P\,dP - 2Q\,dQ + \frac{Q\,d^2P - P\,d^2Q}{c\,dt} = \frac{2i\,dt}{t}(P^2 - Q^2) + \frac{2i}{ct}(Q\,dP - P\,dQ).$$

Пусть

$$P^2 - Q^2 = M \quad \text{и} \quad \frac{Q\,dP - P\,dQ}{c\,dt} = N.$$

Тогда

$$dM + dN = \frac{2i\,dt}{t}(M + N), \text{ то есть } \frac{dM + dN}{M + N} = \frac{2i\,dt}{t},$$

откуда, интегрируя, [находим] $M+N=Ct^{2i}$. Но имеем также

$$M+N=P\left(P-\frac{dQ}{c\,dt}\right)-Q\left(Q-\frac{dP}{c\,dt}\right)=PR-QS$$

и очевидно также, что постоянное C надо принять равным единице.

ЗАДАЧА 121

961. *Определить полный интеграл уравнения*

$$du+u^2\,dx+b^2x^{\frac{-4i}{2i+1}}\,dx=0,$$

где i обозначает любое целое число как положительное, так и отрицательное.

РЕШЕНИЕ

С помощью подстановки $u=\frac{dy}{y\,dx}$ преобразуем заданное уравнение в такое:

$$d^2y+b^2x^{\frac{-4i}{2i+1}}\,y\,dx^2=0,$$

где элемент dx считается постоянным, и интеграл которого указан выше. А именно, положив

$$t=(2i+1)\,x^{\frac{1}{2i+1}},$$

мы нашли (§§ 953, 954):

$$y=c\left(t^i-\frac{i\,(i^2-1)\,(i+2)}{2\cdot 4b^2}t^{i-2}+\frac{i\,(i^2-1)\,(i^2-4)\,(i^2-9)\,(i+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8b^4}t^{i-4}-\text{ и т. д.}\right)\sin(bt+\zeta)+$$
$$+c\left(\frac{i\,(i+1)}{2b}t^{i-1}-\frac{i\,(i^2-1)\,(i^2-4)\,(i+3)}{2\cdot 4\cdot 6b^3}t^{i-3}+\text{ и т. д.}\right)\cos(bt+\zeta)$$

вместо чего ради сокращения будем писать

$$y=CP\sin(bt+\zeta)+CQ\cos(bt+\zeta).$$

Отсюда получаем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C\,(dP-bQ\,dt)\sin(bt+\zeta)+C\,(dQ+bP\,dt)\cos(bt+\zeta)}{x^{\frac{2i}{2i+1}}\,dt},$$

учитывая, что

$$dt=x^{\frac{-2i}{2i+1}}\,dx,\quad\text{то есть}\quad dx=x^{\frac{2i}{2i+1}}\,dt.$$

Поэтому, поскольку $u=\frac{dy}{y\,dx}$, будем иметь

$$u=\frac{(dP-bQ\,dt)\sin(bt+\zeta)+(dQ+bP\,dt)\cos(bt+\zeta)}{x^{\frac{2i}{2i+1}}\,dt\,[P\sin(bt+\zeta)+Q\cos(bt+\zeta)]}.$$

Положим

$$P+\frac{dQ}{b\,dt}=R\qquad\text{и}\qquad Q-\frac{dP}{b\,dt}=S,$$

так что

$$\frac{1}{b}x^{\frac{2i}{2i+1}}u = \frac{R\cos(bt+\zeta)-S\sin(bt+\zeta)}{P\sin(bt+\zeta)+Q\cos(bt+\zeta)},$$

где

$$P = t^i - \frac{i(i^2-1)(i+2)}{2\cdot 4b^2}t^{i-2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10b^4}t^{i-4} - \text{ и т. д.},$$

$$Q = \frac{i(i+1)}{2b}t^{i-1} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{2\cdot 4\cdot 6b^3}t^{i-3} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i^2-16)(i+5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10b^5}t^{i-5} - \text{ и т. д.},$$

$$R = t^i - \frac{i(i^2-1)(i-2)}{2\cdot 4b^2}t^{i-2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i-4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8b^4}t^{i-4} - \text{ и т. д.},$$

$$S = \frac{i(i-1)}{2b}t^{i-1} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6b^3}t^{i-3} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i^2-16)(i-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10b^5}t^{i-5} - \text{ и т. д.},$$

причем этот интеграл является полным ввиду того, что содержит угол ζ.

СЛЕДСТВИЕ 1

962. Итак, значения четырех букв P, Q, R, S находятся в такой взаимной зависимости, что, во-первых,

$$R = P + \frac{dQ}{b\,dt} \quad \text{и} \quad S = Q - \frac{dP}{b\,dt}$$

и, вместе с тем очевидно, что

$$dP + dR = \frac{2iR\,dt}{t} \quad \text{и} \quad dQ + dS = \frac{2iS\,dt}{t}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

963. Отсюда получаем также, что имеет место равенство $PR + QS = t^{2i}$, которое выводится из формул, указанных в предыдущей задаче [§ 960], если положить $c^2 = -b^2$, причем Q и S переходят в $Q\sqrt{-1}$ и $S\sqrt{-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 3

964. Этот случай отличается от предыдущего также тем, что здесь нет никаких частных алгебраических интегралов. Действительно, какое бы значение ни придавать постоянному углу ζ, интеграл всегда будет заключать в себе синус и косинус некоторого угла.

ПОЯСНЕНИЕ 1

965. Итак, для уравнения

$$du + u^2\,dx + b^2x^{\frac{-4i}{2i+1}}\,dx = 0$$

полным интегралом будет

$$\frac{1}{b}\,x^{\frac{2i}{2i+1}}u=\frac{R\cos(bt+\zeta)-S\sin(bt+\zeta)}{P\sin(bt+\zeta)+Q\cos(bt+\zeta)},$$

где полагаем $t=(2i+1)\,x^{\frac{1}{2i+1}}$. Для отдельных значений числа i количество t, равно как и буквы P, Q, R, S, получаются следующим образом: во-первых, если $i=0$, то

$$P=1,\ Q=0,\ R=1 \text{ и } S=0, \text{ а также } t=x,$$

так что интегралом будет

$$\frac{1}{b}u=\frac{\cos(bx+\zeta)}{\sin(bx+\zeta)};$$

остальные же случаи представлены в следующей таблице:

$i=-1,\quad t=-\frac{1}{x}$ $P=\frac{1}{t},\quad Q=0$ $R=\frac{1}{t},\quad S=\frac{1}{bt^2}$	$i=1,\quad t=3x^{\frac{1}{3}}$ $P=t,\quad Q=\frac{1}{b}$ $R=t,\quad S=0$
$i=-2,\quad t=-\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}$ $P=\frac{1}{t^2},\quad Q=\frac{1}{bt^3}$ $R=\frac{1}{t^2}-\frac{3}{b^2t^4},\quad S=\frac{3}{bt^3}$	$i=2,\quad t=5x^{\frac{1}{5}}$ $P=t^2-\frac{3}{b^2},\quad Q=\frac{3}{b}t$ $R=t^2,\quad S=\frac{1}{b}t$
$i=-3,\quad t=\frac{-5}{x^{\frac{1}{5}}}$ $P=\frac{1}{t^3}-\frac{1\cdot3}{b^2t^5},\quad Q=\frac{3}{bt^4}$ $R=\frac{1}{t^3}-\frac{3\cdot5}{b^2t^5},\quad S=\frac{6}{bt^4}-\frac{3\cdot5}{b^3t^6}$	$i=3,\quad t=7x^{\frac{1}{7}}$ $P=t^3-\frac{3\cdot5}{b^2}t,\quad Q=\frac{6}{b}t^2-\frac{3\cdot5}{b^3}$ $R=t^3-\frac{1\cdot3}{b^2}t,\quad S=\frac{3}{b}t^2$
$i=-4,\quad t=-\frac{7}{x^{\frac{1}{7}}}$ $P=\frac{1}{t^4}-\frac{3\cdot5}{b^2t^6}$ $Q=\frac{6}{bt^5}-\frac{3\cdot5}{b^3t^7}$ $R=\frac{1}{t^4}-\frac{3\cdot3\cdot5}{b^2t^6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{b^4t^8}$ $S=\frac{10}{bt^5}-\frac{3\cdot5\cdot7}{b^3t^7}$	$i=4,\quad t=9x^{\frac{1}{9}}$ $P=t^4-\frac{3\cdot3\cdot5}{b^2}t^2+\frac{3\cdot5\cdot7}{b^4}$ $Q=\frac{10}{b}t^3-\frac{3\cdot5\cdot7}{b^3}t$ $R=t^4-\frac{3\cdot5}{b^2}t^2$ $S=\frac{6}{b}t^3-\frac{3\cdot5}{b^3}t$

$$i=-5,\qquad t=\frac{-9}{x^{\frac{1}{9}}}$$

$$P=\frac{1}{t^5}-\frac{3\cdot3\cdot5}{b^2t^7}+\frac{3\cdot5\cdot7}{b^4t^9}$$

$$Q=\frac{10}{bt^6}-\frac{3\cdot5\cdot7}{b^3t^8}$$

$$R=\frac{1}{t^5}-\frac{3\cdot5\cdot7}{b^2t^7}+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{b^4t^9}$$

$$S=\frac{15}{bt^6}-\frac{4\cdot3\cdot5\cdot7}{b^3t^8}+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{b^5t^{10}}$$

$$i=5,\qquad t=11x^{\frac{1}{11}}$$

$$P=t^5-\frac{3\cdot5\cdot7}{b^2}t^3+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{b^4}t$$

$$Q=\frac{15}{b}t^4-\frac{4\cdot3\cdot5\cdot7}{b^3}t^2+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{b^5}$$

$$R=t^5-\frac{3\cdot3\cdot5}{b^2}t^3+\frac{3\cdot5\cdot7}{b^4}t$$

$$S=\frac{10}{b}t^4-\frac{3\cdot5\cdot7}{b^3}t^2$$

$$i=-6,\qquad t=\frac{-11}{x^{\frac{1}{11}}}$$

$$P=\frac{1}{t^6}-\frac{3\cdot5\cdot7}{b^2t^8}+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{b^4t^{10}}$$

$$Q=\frac{15}{bt^7}-\frac{4\cdot3\cdot5\cdot7}{b^3t^9}+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{b^5t^{11}}$$

$$R=\frac{1}{t^6}-\frac{2\cdot3\cdot5\cdot7}{b^2t^8}+\frac{5\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{b^4t^{10}}-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{b^6t^{12}}$$

$$S=\frac{21}{bt^7}-\frac{4\cdot5\cdot7\cdot9}{b^3t^9}+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{b^5t^{11}}$$

$$i=6,\qquad t=13x^{\frac{1}{13}}$$

$$P=t^6-\frac{2\cdot3\cdot5\cdot7}{b^2}t^4+\frac{5\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{b^4}t^2-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{b^6}$$

$$Q=\frac{21}{b}t^5-\frac{4\cdot5\cdot7\cdot9}{b^3}t^3+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{b^5}t$$

$$R=t^6-\frac{3\cdot5\cdot7}{b^2}t^4+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{b^4}t^2$$

$$S=\frac{15}{b}t^5-\frac{4\cdot3\cdot5\cdot7}{b^3}t^3+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{b^5}t.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

966. Найденная форма интеграла помогает[1]) преобразовать предложенное уравнение

$$du+u^2\,dx+Ax^{\frac{-4i}{2i+1}}\,dx=0$$

к более простому виду. Действительно, прежде всего надо положить

$$x^{\frac{2i}{2i+1}}u=v,\qquad\text{то есть}\qquad u=x^{\frac{-2i}{2i+1}}v,$$

[1]) Modum suppeditat.

что дает

$$x^{\frac{-2i}{2i+1}}\,dv-\frac{2i}{2i+1}\,x^{\frac{-4i-1}{2i+1}}\,v\,dx+x^{\frac{-4i}{2i+1}}v^2\,dx+Ax^{\frac{-4i}{2i+1}}\,dx=0,$$

то есть

$$dv-\frac{2i}{2i+1}\cdot\frac{v\,dx}{x}+x^{\frac{-2i}{2i+1}}v^2\,dx+Ax^{\frac{-2i}{2i+1}}\,dx=0.$$

Затем положим $t=(2i+1)\,x^{\frac{1}{2i+1}}$; будем иметь

$$dt=x^{\frac{-2i}{2i+1}}\,dx \qquad \text{и} \qquad \frac{dt}{t}=\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{dx}{x},$$

откуда следует, что

$$dv-\frac{2iv\,dt}{t}+v^2\,dt+A\,dt=0.$$

Пусть, кроме того, $v=\frac{i}{t}+z$, так что получаем

$$-\frac{i\,dt}{t^2}+dz-\frac{2i^2\,dt}{t^2}-\frac{2iz\,dt}{t}+\frac{i^2\,dt}{t^2}+\frac{2iz\,dt}{t}+z^2\,dt+A\,dt=0,$$

то есть

$$dz+z^2\,dt-\frac{i\,(i+1)\,dt}{t^2}+A\,dt=0,$$

и последнее уравнение интегрируется всякий раз, когда i — целое число.

Таким же образом и уравнение

$$du+u^2\,dx+Ax^n\,dx=0$$

может быть преобразовано более общо так: положив $u=x^\lambda v$ и $v=z-\frac{1}{2}\lambda x^{-\lambda-1}$, получаем

$$dz+x^\lambda z^2\,dx+\frac{1}{4}\lambda\,(\lambda+2)\,x^{-\lambda-2}\,dx+Ax^{n-\lambda}\,dx=0,$$

и это уравнение, если положить затем $x^\lambda\,dx=dt$, то есть $x^{\lambda+1}=(\lambda+1)\,t$, переходит в [уравнение]

$$dz+z^2\,dt+\frac{\lambda\,(\lambda+2)\,dt}{4\,(\lambda+1)^2t^2}+A\,(\lambda+1)^{\frac{n-2\lambda}{\lambda+1}}\,t^{\frac{n-2\lambda}{\lambda+1}}\,dt=0.$$

Последнее уравнение интегрируется, когда $n=\frac{-4i}{2i+1}$, и отсюда, выбирая произвольным образом число λ, мы можем получить бесчисленное количество [интегрируемых] видов. Если принять $\lambda=-1$, будем иметь $t=lx$ и

$$dz+z^2\,dt-\frac{1}{4}\,dt+Ae^{(n+2)t}\,dt=0.$$

ГЛАВА VIII

О РЕШЕНИИ ДРУГИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

ЗАДАЧА 122

967. *Выявить общий вид дифференциальных уравнений второго порядка, которые решаются удобным образом с помощью рядов, и определить их интегралы.*

РЕШЕНИЕ

Прежде всего, нет возможности удобным образом решать с помощью рядов уравнения, если в них переменное y со своими дифференциалами dy и d^2y имеет где-либо измерение выше первого. Причина в том, что при подстановке вместо y бесконечного ряда мы встретимся с чрезмерно обременительными вычислениями, если это количество где-либо входит в более высоком измерении. Таким образом, уравнения подобного рода охватываются выражением

$$d^2y + M dx\, dy + N y\, dx^2 = X\, dx^2.$$

Вместе с тем, для того, чтобы какой угодно член ряда, которым мы выражаем y, определялся только через ему предшествующий, что является наиболее замечательным случаем разрешимости, нужно, чтобы [в уравнение] входили члены относительно переменного x только двух родов, имея в виду при этом, какое измерение дают x и его дифференциал dx[1]). Таким образом, если мы отбросим член Xdx^2, то уравнения, разрешимые рассматриваемым способом, охватываются следующим выражением:

$$x^2(a + bx^n)\, d^2y + x(c + ex^n)\, dx\, dy + (f + gx^n)\, y\, dx^2 = 0.$$

Для решения этого уравнения составим [ряд]

$$y = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+n} + Cx^{\lambda+2n} + Dx^{\lambda+3n} + \text{ и т. д.}$$

---

[1]) Duplicis tantum generis terminos ratione alterius variabilis x inesse oportet, siquidem ad dimensiones, quas ipsa x cum suo differentiali dx constituit, respiciamus.

После подстановки этого ряда должна обращаться в нуль такая сумма рядов:

$$
\begin{array}{llllll}
\lambda(\lambda-1)Aax^{\lambda} & +(\lambda+n)(\lambda+n-1)Bax^{\lambda+n} & +(\lambda+2n)(\lambda+2n-1)Cax^{\lambda+2n} & + \text{ и т. д.} \\
 & +\ \lambda(\lambda-1)Ab & +\ (\lambda+n)(\lambda+n-1)Bb & \\
+\ \lambda Ac & +\ (\lambda+n)Bc & +\ (\lambda+2n)Cc & \\
 & +\ \lambda Ae & +\ (\lambda+n)Be & \\
+\ Af & +\ Bf & +\ Cf & \\
 & +\ Ag & +\ Bg &
\end{array}
$$

Итак, прежде всего, здесь надо так выбрать показатель λ, чтобы

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0,$$

и соответственно в остальных [колонках] надо положить

$$((\lambda+n)(\lambda+n-1)a+(\lambda+n)c+f)B=-(\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g)A,$$

$$((\lambda+2n)(\lambda+2n-1)a+(\lambda+2n)c+f)C$$
$$=-((\lambda+n)(\lambda+n-1)b+(\lambda+n)e+g)B,$$

$$((\lambda+3n)(\lambda+3n-1)a+(\lambda+3n)c+f)D$$
$$=-((\lambda-2n)(\lambda+2n-1)b+(\lambda+2n)e+g)C$$

и т. д.

Таким образом, мы, имея

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0$$

и полагая для сокращения

$$\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g=h,$$

получим

$$(n(n+2\lambda-1)a+nc)B=-hA,$$
$$(2n(2n+2\lambda-1)a+2nc)C=-(n(n+2\lambda-1)b+ne+h)B,$$
$$(3n(3n+2\lambda-1)a+3nc)D=-(2n(2n+2\lambda-1)b+2ne+h)C,$$

и т. д.

Следовательно, если только a не равно нулю, мы найдем для λ два значения, а именно

$$\lambda=\frac{a-c\pm\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a},$$

и поэтому получим для y два ряда, которые в любом сочетании[1]) дают полный интеграл предложенного уравнения.

Другой способ[2]).

Если предложено уравнение

$$x^2(a+bx^n)\,d^2y+x(c+ex^n)\,dx\,dy+(f+gx^n)\,y\,dx^2=0,$$

то можно составить также ряд, расположенный в обратном порядке[3]),

$$y=Ax^{\lambda}+Bx^{\lambda-n}+Cx^{\lambda-2n}+Dx^{\lambda-3n}+ \text{ и т. д.},$$

---

[1]) Utcunque combinatae. — Конечно, Эйлер имеет в виду только сложение этих рядов после их умножения на произвольные множители; что таким образом из частных интегралов линейного однородного уравнения 2-го порядка получается общий, доказано в 4-й главе этого раздела.

[2]) Aliter.

[3]) Ordine retrogrado.

и тогда в нуль должно обращаться [следующее выражение]:

$$
\begin{array}{llllll}
+\lambda(\lambda-1)Abx^{\lambda+n} & + & (\lambda-n)(\lambda-n-1)Bbx^{\lambda} & + & (\lambda-2n)(\lambda-2n-1)Cbx^{\lambda-n} & + \text{ и т. д.} \\
 & + & \lambda(\lambda-1)Aa & + & (\lambda-n)(\lambda-n-1)Ba & \\
+\lambda\qquad Ae & + & (\lambda-n)Be & + & (\lambda-2n)Ce & \\
 & + & \lambda Ac & + & (\lambda-n)Bc & \\
+\qquad Ag & + & Bg & + & Cg & \\
 & + & Af & + & Bf &
\end{array}
$$

Таким образом, здесь надо выбрать показатель λ так, чтобы

$$\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g=0.$$

Вместе с тем, если положим

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=h,$$

то коэффициенты будут определяться следующим образом:

$$
\begin{aligned}
n((n-2\lambda+1)b-e)B &= -hA,\\
2n((2n-2\lambda+1)b-e)C &= -(n(n-2\lambda+1)a-nc+h)B,\\
3n((3n-2\lambda+1)b-e)D &= -(2n(2n-2\lambda+1)a-2nc+h)C,
\end{aligned}
$$

и т. д.

СЛЕДСТВИЕ 1

968. Из первого решения получаем, что принятый [нами] ряд оборвется на каком-нибудь месте, если

$$in(in+2\lambda-1)b+ine+h=0,$$

или же

$$(\lambda+in)(\lambda+in-1)b+(\lambda+in)e+g=0,$$

то есть

$$\left.\begin{array}{l}\lambda^2b+\lambda(2in-1)b+in(in-1)b\\ \quad+\lambda e\qquad\qquad\quad +ine+g\end{array}\right\}=0,$$

где i обозначает положительное целое число.

СЛЕДСТВИЕ 2

969. Итак, наше уравнение допускает интегрирование, если буквы f и g находятся в таком соответствии, что

$$f=-\lambda(\lambda-1)a-\lambda c \quad \text{и} \quad g=-(\lambda-in)(\lambda+in-1)b-(\lambda+in)e,$$

или

$$f=-\mu(\mu-1)a-\mu c \quad \text{и} \quad g=-\nu(\nu-1)b-\nu e,$$

где числа μ и ν взяты таким образом, чтобы $\nu-\mu$ делилось на показатель n[1]).

СЛЕДСТВИЕ 3

970. Отсюда получаем

$$\mu=\frac{a-c\pm\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a} \quad \text{и} \quad \nu=\frac{b-e\pm\sqrt{(b-e)^2-4bg}}{2b},$$

[1]) Конечно, в утверждении, что «уравнение допускает интегрирование, ...», интегрирование надо понимать, как интегрирование в конечном виде.

и наше уравнение будет иметь алгебраический интеграл, если $\nu-\mu=in$, где i обозначает целое положительное число, т. е. если

$$in=\frac{c}{2a}-\frac{e}{2b}\pm\frac{\sqrt{(b-e)^2-4bg}}{2b}\mp\frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

971. Если при определении искомого ряда случится так, что показатель λ — мнимое число, то следует принять во внимание, что

$$x^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=x^\alpha\cdot e^{\beta\sqrt{-1}lx}=x^\alpha[\cos(\beta lx)+\sqrt{-1}\sin(\beta lx)],$$

и поэтому оба ряда можно скомбинировать так, чтобы интеграл сохранял вещественный вид.

ПОЯСНЕНИЕ

972. Как то, так и другое решение дает в общем случае два ряда для переменного y, соответственно двум значениям показателя λ, и комбинация этих рядов представляет полный интеграл. А именно: при первом решении мы получаем для показателя λ следующие два значения:

$$\lambda=\frac{a-c\pm\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a},$$

а при втором решении [для того же показателя] имеем

$$\lambda=\frac{b-e\pm\sqrt{(b-e)^2-4bg}}{2b}.$$

Таким образом, полный интеграл можно выразить двояко, и хотя эти два представления полного интеграла могут быть совершенно различными [1]), и к тому же иной раз в одном из этих рядов показатели будут мнимые, тогда как в другом они вещественные, — однако оба эти представления должны быть равносильными. Вместе с тем, может случиться и так, что одно из решений или даже оба непригодны для представления полного интеграла, так как дают только один ряд. Это затруднение может представиться как для одного, так и для другого решения в двух случаях. А именно: для первого решения тогда, когда, определяя λ из уравнения

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0,$$

мы получим для λ только одно значение, что будет иметь место либо при $a=0$, либо при $4af=(a-c)^2$; в первом случае будем иметь только $\lambda=-\frac{f}{c}$, тогда как второе значение λ как бы уходит на бесконечность [2]); во втором же случае оба значения λ становятся равными между собой, а именно $\lambda=\frac{a-c}{2a}$. То же самое затруднение имеет место и для второго решения, если $b=0$ или $4bg=(b-e)^2$. Отсюда ясно, что может случиться так, что при одном из решений встретимся с указанным затруднением, тогда как другое избавлено от него, но может также случиться, что оба решения с изъяном вследствие этого затруднения. Поэтому нужно показать, каким образом даже в этих случаях следует

[1]) Maxime diversae.

[2]) Altero ipsius λ valore quasi in infinitum abeunte. Это выражение показывает, насколько близки современные представления в подобных вопросах к Эйлеровым.

находить полный интеграл. Заодно мы рассмотрим также те случаи, когда оба значения λ — мнимые числа, так как для того, чтобы избавиться от мнимых количеств[1]), нужно прибегнуть к особому приему. Сверх того, определение как одного, так и второго ряда для y связано с трудностями всякий раз, когда оба значения λ отличаются одно от другого на число, которое делится на показатель n, и рассмотрение этих случаев также требует разъяснений.

ЗАДАЧА 123

973. *Предложено дифференциальное уравнение второго порядка*

$$x^2(a+bx^n)\,d^2y+x(c+ex^n)\,dx\,dy+(f+gx^n)\,y\,dx^2=0.$$

Выразить его полный интеграл в виде рядов в том случае, когда либо оба ряда по восходящим степеням для y сливаются в один, либо один из них оказывается невозможным.

РЕШЕНИЕ

Пусть взят ряд

$$y=Ax^\lambda+Bx^{\lambda+n}+Cx^{\lambda+2n}+Dx^{\lambda+3n}+\ \text{и т. д.}$$

Если случится так, что два значения λ, определяемые из уравнения

$$\lambda(\lambda-1)\,a+\lambda c+f=0$$

либо оказываются равными, либо таковы, что их разность делится на n, то значение y, кроме степеней x, содержит также логарифм x. Поэтому [934] при решении уравнения мы сразу положим $y=u+vlkx$, так что $y=u+vlx+\alpha v$, где α обозначает какое угодно постоянное количество. Отсюда следует, что

$$dy=du+\frac{v\,dx}{x}+dvlkx \quad \text{и} \quad d^2y=d^2u+\frac{2\,dx\,dv}{x}-\frac{v\,dx^2}{x^2}+d^2\,vlkx,$$

и после подстановки этих значений наше уравнение приводится к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} x^2(a+bx^n)\,d^2u+2x(a+bx^n)\,dx\,dv-(a+bx^n)\,v\,dx^2\\ +x(e+ex^n)\,dx\,du+(c+ex^n)\,v\,dx^2\\ +(f+gx^n)\,u\,dx^2\\ +(x^2(a+bx^n)\,d^2v+x(c+ex^n)\,dx\,dv+(f+gx^n)\,v\,dx^2)\,lkx \end{aligned}\right\}=0,$$

где последний член, содержащий логарифм, должен отдельно обращаться в нуль. Таким образом, мы положим

$$v=Ax^\lambda+Bx^{\lambda+n}+Cx^{\lambda+2n}+Dx^{\lambda+3n}+\ \text{и т. д.},$$

где показателю λ должно быть придано то значение из уравнения

$$\lambda(\lambda-1)\,a+\lambda c+f=0,$$

которое не приводит к каким-либо затруднениям, а что касается остальных коэффициентов, то, полагая

$$\lambda(\lambda-1)\,b+\lambda e+g=nh,$$

[1]) Ad imaginariam speciem tollendam — буквально: чтобы избавиться от мнимой породы.

мы получим для них [следующие соотношения]:

$$\begin{aligned}
((n+2\lambda-1)\,a+c)\,B+hA&=0,\\
2\,((2n+2\lambda-1)a+c)\,C+((n+2\lambda-1)\,b+e)\,B+hB&=0,\\
3\,((3n+2\lambda-1)\,a+c)\,D+2\,((2n+2\lambda-1)\,b+e)\,C+hC&=0,\\
4\,((4n+2\lambda-1)\,a+c)\,E+3\,((3n+2\lambda-1)\,b+e)\,D+hD&=0, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

После того, как эти коэффициенты определены указанным образом, причем первый из них A остается в нашем произволе, мы полагаем

$$u=\Delta+\mathfrak{A}x^{\lambda}+\mathfrak{B}x^{\lambda+n}+\mathfrak{C}x^{\lambda+2n}+\mathfrak{D}x^{\lambda+3n}+ \text{ и т. д.};$$

если подставить это значение в первое уравнение вместе с найденным для v рядом, то [получаем, что] следующие ряды должны быть равны нулю:

$$x^2\,(a+bx^n)\,\frac{d^2\Delta}{dx^2}+x\,(c+ex^n)\,\frac{d\Delta}{dx}+(f+gx^n)\,\Delta$$

$$\begin{array}{lll}
+\lambda(\lambda-1)\,\mathfrak{A}ax^{\lambda} & +(\lambda+n)(\lambda+n-1)\,\mathfrak{B}ax^{\lambda+n} & +(\lambda+2n)(\lambda+2n-1)\,\mathfrak{C}ax^{\lambda+2n}+ \text{ и т. д.}\\
 & +\lambda\,(\lambda-1)\,\mathfrak{A}b & +(\lambda+n)\,(\lambda+n-1)\,\mathfrak{B}b\\
+\lambda\mathfrak{A}c & +(\lambda+n)\,\mathfrak{B}c & +(\lambda+2n)\,\mathfrak{C}c\\
 & +\lambda\mathfrak{A}e & +(\lambda+n)\,\mathfrak{B}e\\
+\mathfrak{A}f & +\mathfrak{B}f & +\mathfrak{C}f\\
 & +\mathfrak{A}g & +\mathfrak{B}g\\
+2\lambda Aa & +2\,(\lambda+n)\,Ba & +2\,(\lambda+2n)\,Ca\\
 & +2\lambda Ab & +2\,(\lambda+n)\,Bb\\
+A\,(c-a) & +B\,(c-a) & +C\,(c-a)\\
 & +A\,(e-b) & +B\,(e-b)
\end{array}$$

А так как

$$\lambda\,(\lambda-1)\,a+\lambda c+f=0 \quad \text{и} \quad \lambda\,(\lambda-1)\,b+\lambda e+g=nh,$$

то это выражение преобразуется к следующему виду:

$$x^2\,(a+bx^n)\,\frac{d^2\Delta}{dx^2}+x\,(c+ex^n)\,\frac{d\Delta}{dx}+(f+gx^n)\,\Delta$$

$$\begin{array}{lll}
+((2\lambda-1)\,a+c)\,Ax^{\lambda} & +((2n+2\lambda-1)\,a+c)\,Bx^{\lambda+n} & +((4n+2\lambda-1)\,a+c)\,Cx^{\lambda+2n}+ \text{ и т. д.}\\
 & +((2\lambda-1)\,b+e)\,A & +((2n+2n-1)\,b+e)\,B\\
 & +n\,((n+2\lambda-1)\,a+c)\,\mathfrak{B} & +2n\,((2n+2\lambda-1)\,a+c)\,\mathfrak{C}\\
 & & +n\,((n+2\lambda-1)\,b+e)\,\mathfrak{B}\\
 & +nh\mathfrak{A} & +nh\mathfrak{B}
\end{array}$$

Здесь Δ обозначает те члены ряда

$$\mathfrak{A}\,x^{\lambda}+\mathfrak{B}x^{\lambda+n}+ \text{ и т. д.},$$

которые надо расположить сначала, так что в порядке убывания имеем

$$\Delta=\mathfrak{a}x^{\lambda-n}+\mathfrak{b}x^{\lambda-2n}+\mathfrak{c}x^{\lambda-3n}+\ \ldots\ +\mathfrak{i}\,x^{\lambda-in}.$$

Относительно того, каким образом составляется в том или ином случае это начало [ряда], нужно заметить следующее[1]):

[1]) Quod principium quomodo quovis casu sit constituendum, sequentia sunt observanda.

I. Эти первые члены должны отсутствовать, если не имеет места [соотношение]

$$(\lambda - in)(\lambda - in - 1)a + (\lambda - in)c + f = 0.$$

А так как

$$\lambda(\lambda - 1)a + \lambda c + f = 0,$$

то из первого соотношения следует, что

$$\lambda = in + \frac{a - c - \sqrt{(a-c)^2 - 4af}}{2a},$$

а из второго, — что

$$\lambda = \frac{a - c + \sqrt{(a-c)^2 - 4af}}{2a},$$

и оба эти значения не могут совпадать, если мы не примем в одном из них отрицательный, а в другом положительный знак перед радикалом. Если же приравнять эти значения, найдем

$$in = \frac{1}{a}\sqrt{(a-c)^2 - 4af},$$

то есть

$$i^2n^2a^2 = (a-c)^2 - 4af,$$

и отсюда

$$f = \frac{(a-c)^2}{4a} - \frac{1}{4}i^2n^2a,$$

следовательно,

$$\lambda = \frac{a-c}{2a} + \frac{1}{2}in.$$

Итак, если заданное уравнение составлено таким образом, что

$$ina = \sqrt{(a-c)^2 - 4af},$$

то, полагая

$$\lambda = \frac{(a-c)}{2a} + \frac{1}{2}in,$$

а для v принимая ряд

$$v = Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda+n} + \text{ и т. д.},$$

надлежит составить второй ряд (u) следующим образом:

$$u = \mathfrak{i}x^{\lambda-in} + \ \ldots\ + \mathfrak{a}x^{\lambda-n} + \mathfrak{A}x^{\lambda} + \mathfrak{B}x^{\lambda+n} + \mathfrak{C}x^{\lambda+2n} + \text{ и т. д.}$$

Это тот случай, когда два значения λ, определяемые из уравнения

$$\lambda(\lambda - 1)a + \lambda c + f = 0,$$

отличаются одно от другого на число, которое делится на n, и при этом следует заметить, что ряд v надо начинать с большего значения λ, а ряд u надо начинать с меньшего значения λ.

II. Начальные члены Δ не могут быть опущены, если только не имеем

$$(2\lambda - 1)a + c = 0,$$

и в этом случае $\lambda=\frac{a-c}{2}$. Это есть тот случай, когда оба корня уравнения

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0$$

оказываются равными, стало быть, $f=\frac{(a-c)^2}{4a}$. Этот случай содержится в предыдущем, если там принять $i=0$. Итак, указанным способом получаем решение в тех случаях, когда два значения λ равны между собой или когда их разность делится на показатель n. Таким образом, полный интеграл определяется двумя рядами v и u по восходящим степеням, причем ряд v умножается на lx.

СЛЕДСТВИЕ 1

974. Итак, когда в предложенном уравнении коэффициенты a, c и f таковы, что корни уравнения

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0$$

суть $\lambda=\mu$ и $\lambda=\mu-in$, где i обозначает целое положительное число, полный интеграл этого уравнения имеет вид

$$y=u+\alpha v+vlx.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

975. Здесь можно определить оба количества v и u также из следующих уравнений:

$$\text{I.}\quad x^2(a+bx^n)d^2v+x(c+ex^n)dx\,dv+(f+gx^n)v\,dx^2=0,$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{aligned} x^2(a+bx^n)d^2u+x(c+ex^n)dx\,du+(f+gx^n)u\,dx^2\\ +2x(a+bx^n)dx\,dv-(a+bx^n)v\,dx^2\\ +(c+ex^n)v\,dx^2\end{aligned}\right\}=0,$$

полагая

$$v=Ax^\mu+Bx^{\mu+n}+Cx^{\mu+2n}+Dx^{\mu+3n}+\text{ и т. д.},$$

$$u=\mathfrak{A}x^{\mu-in}+\mathfrak{B}x^{\mu-in+n}+\mathfrak{C}x^{\mu-in+2n}+\mathfrak{D}x^{\mu-in+3n}+\text{и т. д.}$$

Очевидно, что при подстановке этих рядов можно определить все коэффициенты по одному из них.

ПОЯСНЕНИЕ

976. Таким образом, в упомянутых нами случаях можно представить полный интеграл предложенного уравнения в виде восходящих рядов, если дополнительно использовать логарифм x, тогда как без этого приема мы находим только частный интеграл. Действительно, когда уравнение $\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0$ имеет два корня, разность которых делится на показатель n, пусть $\lambda=\mu$ и $\lambda=\mu-in$, то по первому методу можно определить только тот ряд, который начинается со степени x^μ; если же мы вместо y подставим другой ряд, который начинается со степени $x^{\mu-in}$, то окажется, что коэффициент некоторого члена бесконечно велик, и поэтому все следующие также становятся бесконечно большими, но это затруднение устраняется, к счастью, введением логарифма x.

Полезно проиллюстрировать использование этого способа решения на нескольких примерах.

ПРИМЕР 1

977. *Найти полный интеграл дифференциального уравнения второго порядка*

$$x\,d^2y + dx\,dy + gx^{n-1}y\,dx^2 = 0$$

в виде восходящего ряда.

Приводя это уравнение к нашему виду, будем иметь

$$x^2d^2y + x\,dx\,dy + gx^ny\,dx^2 = 0,$$

так что здесь $a=1$, $b=0$, $c=1$, $e=0$ и $f=0$. Отсюда следует, что $\lambda(\lambda-1)+\lambda=0$, то есть $\lambda^2=0$, следовательно, оба значения для λ одинаковы и $=0$. Поэтому, если положить $y=u+av+vlx$, то приходим к решению таких уравнений:

$$\text{I.}\quad x^2d^2v + x\,dx\,dv - gx^nv\,dx^2 = 0$$

и

$$\text{II.}\quad \left.\begin{aligned} x^2d^2y + x\,dx\,du + gx^nu\,dx \\ +2x\,dx\,dv \end{aligned}\right\}=0.$$

Итак, принимаем

$$v = A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \text{ и т. д.}$$

и

$$u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^n + \mathfrak{C}x^{2n} + \mathfrak{D}x^{2n} + \text{ и т. д.},$$

и первое уравнение дает нам

$$\left.\begin{array}{llll} n(n-1)Bx^n + & 2n(2n-1)Cx^{2n} + & 3n(3n-1)Dx^{3n} + & \text{и т. д.} \\ +nB \quad + & 2nC \quad + & 3nD & \\ +Ag \quad + & Bg \quad + & Cg & \end{array}\right\}=0,$$

откуда находим

$$B=\frac{-Ag}{n^2},\quad C=\frac{-Bg}{4n^2},\quad D=\frac{-Cg}{9n^2},\quad E=\frac{-Dg}{16n^2}\quad \text{и т. д.}$$

Вместе с тем другое уравнение дает

$$\left.\begin{array}{llll} n^2\mathfrak{B}x^n & +4n^2\mathfrak{C}x^{2n} & +9n^2\mathfrak{D}x^{3n}+ & \text{и т. д.} \\ +\mathfrak{A}g & +\mathfrak{B}g & +\mathfrak{C}g & \\ +2nB & +4nC & +6nD & \end{array}\right\}=0,$$

откуда получаем

$$\mathfrak{B}=\frac{-\mathfrak{A}g}{n^2}-\frac{2B}{n},\quad \mathfrak{C}=\frac{-\mathfrak{B}g}{4n^2}-\frac{2C}{2n},\quad \mathfrak{D}=\frac{-\mathfrak{C}g}{9n^2}-\frac{2D}{3n}\quad \text{и т. д.}$$

Здесь мы можем спокойно принять, что $\mathfrak{A}=0$, так как те члены, которые порождаются $\mathfrak{A}$ [1]), содержатся в слагаемом av. Вследствие же того, что

$$B=\frac{-Ag}{n^2},\qquad C=\frac{+Ag^2}{1\cdot 4n^4},\qquad D=\frac{-Ag^3}{1\cdot 4\cdot 9n^6},\qquad E=\frac{+Ag^4}{1\cdot 4\cdot 9\cdot 16n^8}\quad \text{и т. д.},$$

будем иметь

$$\mathfrak{B}=\frac{2Ag}{n^3},\qquad \mathfrak{C}=\frac{-2Ag^2}{4n^5}-\frac{2Ag^2}{2\cdot 1\cdot 4n^5}=\frac{-6Ag^2}{2\cdot 1\cdot 4n^5},$$

$$\mathfrak{D}=\frac{6Ag^3}{2\cdot 1\cdot 4\cdot 9n^7}+\frac{2Ag^3}{3\cdot 1\cdot 4\cdot 9n^7}=\frac{22Ag^3}{2\cdot 3\cdot 1\cdot 4\cdot 9n^7},$$

---

[1]) Ex $\mathfrak{A}$ oriundi.

$$\mathfrak{E} = \frac{-22Ag^4}{2\cdot3\cdot1\cdot4\cdot9\cdot16n^9} - \frac{2Ag^4}{4\cdot1\cdot4\cdot9\cdot16n^9} = \frac{-100Ag^4}{2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot4\cdot9\cdot16n^9},$$

$$\mathfrak{F} = \frac{100Ag^5}{2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot4\cdot9\cdot16\cdot25n^{11}} + \frac{2Ag^5}{5\cdot1\cdot4\cdot9\cdot16\cdot25n^{11}} = \frac{548Ag^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot4\cdot9\cdot16\cdot25n^{11}} \text{ и т. д.,}$$

и отсюда получаем такие значения:

$$\mathfrak{B} = \frac{2Ag}{n^3}, \quad \mathfrak{C} = \frac{-6Ag^2}{1\cdot8n^5}, \quad \mathfrak{D} = \frac{22Ag^3}{1\cdot8\cdot27n^7}, \quad \mathfrak{E} = \frac{-100Ag^4}{1\cdot8\cdot27\cdot64n^9},$$

$$\mathfrak{F} = \frac{548Ag^5}{1\cdot8\cdot27\cdot64\cdot125n^{11}}, \qquad \mathfrak{G} = \frac{-3528Ag^6}{1\cdot8\cdot27\cdot64\cdot125\cdot216n^{13}} \text{ и т. д.,}$$

где числители 2, 6, 22, 100, 548, 3528 и т. д. определяются каждый по двум предыдущим:

$$6 = 3\cdot2 - 1\cdot0, \quad 22 = 5\cdot6 - 4\cdot2, \quad 100 = 7\cdot22 - 9\cdot6,$$

$$548 = 9\cdot100 - 16\cdot22, \quad 3528 = 11\cdot548 - 25\cdot100 \text{ и т. д.}$$

В силу этого интеграл представится в следующем виде:

$$y = \frac{2Ag}{n^3}x^n - \frac{6Ag^2}{1\cdot8n^5}x^{2n} + \frac{22Ag^3}{1\cdot8\cdot27n^7}x^{3n} - \frac{100Ag^4}{1\cdot8\cdot27\cdot64n^9}x^{4n} + \text{и т. д.}$$

$$+ A\left(1 - \frac{g}{n^2} + \frac{g^2}{1\cdot4n^4}x^{2n} - \frac{g^3}{1\cdot4\cdot9n^6}x^{3n} + \frac{g^4}{1\cdot4\cdot9\cdot16n^8}x^{4n} - \text{и т. д.}\right) lx$$

$$+ \alpha - \frac{\alpha g}{n^2}x^n + \frac{\alpha g^2}{1\cdot4n^4}x^{2n} - \frac{\alpha g^3}{1\cdot4\cdot9n^6}x^{3n} + \frac{\alpha g^4}{1\cdot4\cdot9\cdot16n^8}x^{4n} - \text{и т. д.,}$$

где A и α — два произвольных постоянных.

ПРИМЕР 2

978. *Представить полный интеграл дифференциального уравнения второго порядка*

$$x(1 - x^2)d^2y - (1 + x^2)dx\,dy + xy\,dx^2 = 0$$

с помощью восходящих рядов[1]).

Уравнение после приведения к принятому нами виду таково:

$$x^2(1 - x^2)d^2y - x(1 + x^2)dx\,dy + x^2y\,dx^2 = 0;$$

таким образом, имеем $n = 2$, $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$, $e = -1$, $f = 0$ и $g = 1$, откуда находим для уравнения $\lambda(\lambda - 1) - \lambda = 0$ корни $\lambda = 0$ и $\lambda = 2$, разность между которыми при делении на $n = 2$ дает 1. Итак, полагая $y = u + \alpha v + vlx$, мы должны принять, что

$$v = Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \text{и т. д.}$$

и

$$u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^4 + \mathfrak{D}x^6 + \mathfrak{E}x^8 + \text{и т. д.,}$$

и эти ряды нужно определить из следующих уравнений:

$$\text{I.}\quad x^2(1 - x^2)d^2v - x(1 + x^2)dx\,dv + x^2v\,dx^2 = 0,$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{aligned} &x^2(1 - x^2)d^2u - x(1 + x^2)dx\,du + x^2u\,dx^2 \\ &+ 2x(1 - x^2)dx\,dv - 2v\,dx^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

---

[1]) Этому уравнению (см. также §§ 1074—1076) удовлетворяет периметр эллипса с осями 1 и $x < 1$. См. работу Эйлера, указанную в примечании к § 934 [Л. Ш.].

Следовательно, для определения первого ряда будем иметь

$$\left.\begin{array}{lllll} & 2Ax^2 + 12Bx^4 & + 30Cx^6 & + 56Dx^8 & + \text{и т. д.} \\ & -2A & -12B & -30C & \\ -2A & -4B & -6C & -8D & \\ & -2A & -4B & -6C & \\ & +A & +B & +C & \end{array}\right\} = 0,$$

и, таким образом,

$$2\cdot 4B = 1\cdot 3A, \qquad 4\cdot 6C = 3\cdot 5B, \qquad 6\cdot 8D = 5\cdot 7C \quad \text{и т. д.},$$

то есть

$$B = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}A, \qquad C = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}A, \qquad D = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}A \quad \text{и т. д.}$$

Из второго же уравнения получаем

$$\left.\begin{array}{lllll} & 2\mathfrak{B}x^2 + 12\mathfrak{C}x^4 & + 30\mathfrak{D}x^6 & + 56\mathfrak{E}x^8 & + \text{и т. д.} \\ & -2\mathfrak{B} & -12\mathfrak{C} & -30\mathfrak{D} & \\ -2\mathfrak{B} & -4\mathfrak{C} & -6\mathfrak{D} & -8\mathfrak{E} & \\ & -2\mathfrak{B} & -4\mathfrak{C} & -6\mathfrak{D} & \\ +\mathfrak{A} & +\mathfrak{B} & +\mathfrak{C} & +\mathfrak{D} & \\ +4A & +8B & +12C & +16D & \\ & -4A & -8B & -12C & \\ -2A & -2B & -2C & -2D & \end{array}\right\} = 0,$$

и, следовательно, должно быть

$$\mathfrak{A} + 2A = 0, \qquad 2\cdot 4\mathfrak{C} - 1\cdot 3\mathfrak{B} + 6B - 4A = 0,$$

$$4\cdot 6\mathfrak{D} - 3\cdot 5\mathfrak{C} + 10C - 8B = 0,$$

$$6\cdot 8\mathfrak{E} - 5\cdot 7\mathfrak{D} + 14D - 12C = 0 \quad \text{и т. д.}$$

А так как

$$B = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}A, \qquad C = \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}B, \qquad D = \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8}C \quad \text{и т. д.},$$

то находим $\mathfrak{A} = -2A$ и, вместе с тем,

$$\begin{array}{ll} 2\cdot 4\mathfrak{C} - 1\cdot 3\mathfrak{B} - \dfrac{2\cdot 7}{2\cdot 4}A = 0, & \mathfrak{C} = \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\mathfrak{B} + \dfrac{2\cdot 7}{2^2 4^2}A, \\ 4\cdot 6\mathfrak{D} - 3\cdot 5\mathfrak{C} - \dfrac{2\cdot 21}{4\cdot 6}B = 0, & \mathfrak{D} = \dfrac{3\cdot 5}{4\cdot 6}\mathfrak{C} + \dfrac{2\cdot 21}{4^2 6^2}B, \\ 6\cdot 8\mathfrak{E} - 5\cdot 7\mathfrak{D} - \dfrac{2\cdot 43}{6\cdot 8}C = 0, & \mathfrak{E} = \dfrac{5\cdot 7}{6\cdot 8}\mathfrak{D} + \dfrac{2\cdot 43}{6^2 8^2}C, \\ 8\cdot 10\mathfrak{F} - 7\cdot 9\mathfrak{E} - \dfrac{2\cdot 73}{8\cdot 10}D = 0, & \mathfrak{F} = \dfrac{7\cdot 9}{8\cdot 10}\mathfrak{E} + \dfrac{2\cdot 73}{8^2 10^2}D \quad \text{и т. д.} \end{array}$$

Итак, если принять $\mathfrak{A} = -2A$, то значение буквы $\mathfrak{B}$ можно назначить произвольно, и ничто не мешает положить ее равной нулю, поскольку выше введено уже постоянное α.

ПРИМЕР 3

979. *Представить с помощью восходящих рядов интеграл дифференциального уравнения второго порядка*

$$x^2(1 + bx^2)\,d^2y + x(-5 + ex^2)\,dx\,dy + (5 + gx^2)\,y\,dx^2 = 0.$$

Так как здесь $a=1$, $c=-5$ и $f=5$, получаем уравнение $\lambda(\lambda-1)-5\lambda+5=0$, или $\lambda^2-6\lambda+5=0$, корни которого $\lambda=1$ и $\lambda=5$ и разность этих корней 4 делится на $n=2$. Поэтому положим $y=u+\alpha v+vlx$ и примем, что

$$v=Ax^5+Bx^7+Cx^9+Dx^{11}+Ex^{13}+\text{ и т. д.}$$

и

$$u=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}x^3+\mathfrak{C}x^5+\mathfrak{D}x^7+\text{ и т. д.}$$

Подлежат решению следующие уравнения:

$$\text{I.}\quad x^2(1+bx^2)\,d^2v+x(-5+ex^2)\,dx\,dv+(5+gx^2)\,v\,dx^2=0,$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{aligned}x^2(1+bx^2)\,d^2u+x(-5+ex^2)\,dx\,du+(5+gx^2)\,u\,dx^2\\ +2x(1+bx^2)\,dx\,dv-(1+bx^2)\,v\,dx^2\\ +(-5+ex^2)\,v\,dx^2\end{aligned}\right\}=0,$$

и первое из них дает нам

$$\left.\begin{array}{lllll} & 5\cdot4Ax^5 & +7\cdot6Bx^7 & +9\cdot8Cx^9 & +11\cdot10Dx^{11}+\text{ и т. д.}\\ -5\cdot5A & -5\cdot7B & -5\cdot9C & -5\cdot11D & \\ +5A & +5B & +5C & +5D & \\ & +5\cdot4Ab & +7\cdot6Bb & +9\cdot8Cb & \\ & +5Ae & +7Be & +9Ce & \\ & +Ag & +Bg & +Cg & \end{array}\right\}=0,$$

а из второго получаем

$$\left.\begin{array}{llllll} & & +2\cdot3\mathfrak{B}x^3 & +4\cdot5\mathfrak{C}x^5 & +6\cdot7\mathfrak{D}x^7 & +8\cdot9\mathfrak{E}x^9+\text{ и т. д.}\\ -5\mathfrak{A}x & +5\cdot3\mathfrak{B} & -5\cdot5\mathfrak{C} & -5\cdot7\mathfrak{D} & -5\cdot9\mathfrak{E} & \\ +5\mathfrak{A} & +5\mathfrak{B} & +5\mathfrak{C} & +5\mathfrak{D} & +5\mathfrak{E} & \\ & & +2\cdot3\mathfrak{B}b & +4\cdot5\mathfrak{C}b & +6\cdot7\mathfrak{D}b & \\ & +\mathfrak{A}e & +3\mathfrak{B}e & +5\mathfrak{C}e & +7\mathfrak{D}e & \\ & +\mathfrak{A}g & +\mathfrak{B}g & +\mathfrak{C}g & +\mathfrak{D}g & \\ & & +2\cdot5A & +2\cdot7B & +2\cdot9C & \\ & & -6A & -6B & -6C & \\ & & & +2\cdot5Ab & +2\cdot7Bb & \\ & & & -Ab & -Bb & \\ & & & +Ae & +Be & \end{array}\right\}=0.$$

Из первых [равенств] следует:

$$12B+A(20b+5e+g)=0,$$
$$32C+B(42b+7e+g)=0,$$
$$60D+C(72b+9e+g)=0$$

и т. д.

то есть

$$2\cdot6B+A(4\cdot5b+5e+g)=0,$$
$$4\cdot8C+B(6\cdot7b+7e+g)=0,$$
$$6\cdot10D+C(8\cdot9b+9e+g)=0$$

и т. д.

Из вторых [равенств] следует:

$$-4\mathfrak{B}+\mathfrak{A}(e+g)=0,$$
$$0\mathfrak{C}+\mathfrak{B}(2\cdot3b+3e+g)+4A=0,$$
$$2\cdot6\mathfrak{D}+\mathfrak{C}(4\cdot5b+5e+g)+8B+A(9b+e)=0,$$
$$4\cdot8\mathfrak{E}+\mathfrak{D}(6\cdot7b+7e+g)+12C+B(13b+e)=0$$

и т. д.

По первым формулам буквы B, C, D и т. д. определяются через A, а из следующих формул вторая определяет $\mathfrak{B}=\frac{-4A}{2\cdot 3b+3e+g}$, из первой же находим $\mathfrak{A}=\frac{4\mathfrak{B}}{e+g}$, тогда как $\mathfrak{C}$ может быть выбрано по произволу, а затем определяются остальные коэффициенты $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ и т. д.

ПОЯСНЕНИЕ

980. Этот пример представляет нам возможность заметить некоторые странные явления. Действительно, хотя полный интеграл в общем случае содержит lx, однако в некоторых случаях он оказывается свободным от логарифма. В самом деле, пусть, во-первых, $g=-e$, тогда $\mathfrak{B}=0$, причем $\mathfrak{A}$ остается неопределенным, а, вместе с тем, вследствие того, что $\mathfrak{B}=0$, надо принять $A=0$, $B=0$, $C=0$ и т. д., таким образом, $v=0$. Но затем получаем

$$2\cdot 6\mathfrak{D}+4\mathfrak{C}(5b+e)=0,$$
$$4\cdot 8\mathfrak{E}+6\mathfrak{D}(7b+e)=0,$$
$$6\cdot 10\mathfrak{F}+8\mathfrak{E}(9b+e)=0 \text{ и т. д.,}$$

где $\mathfrak{C}$ есть второе произвольное постоянное, и полным интегралом уравнения

$$x^2(1+bx^2)\,d^2y+x(-5+ex^2)\,dx\,dy+(5-ex^2)\,y\,dx^2=0$$

будет

$$y=\mathfrak{A}x-*+\mathfrak{C}x^5+\mathfrak{D}x^7+\mathfrak{E}x^9+\mathfrak{F}x^{11}+\text{и т. д.,}$$

который к тому же выражается в конечном виде, если $e=-(2i+5)\,b$, где считаем i принимающим значения 0, 1, 2, 3, 4 и т. д.

Во-вторых, если

$$2\cdot 3b+3e+g=0, \quad \text{то есть} \quad g=-6b-3e,$$

то $\mathfrak{B}=-\frac{1}{2}\mathfrak{A}(3b+e)$, и тогда $A=0$, $B=0$, $C=0$ и т. д., следовательно, $v=0$. Затем находим

$$\mathfrak{D}=-\frac{1}{6}\mathfrak{C}(7b+e), \qquad \mathfrak{E}=-\frac{1}{8}\mathfrak{D}(9b+e), \qquad \mathfrak{F}=-\frac{1}{10}\mathfrak{E}(11b+e) \text{ и т. д.}$$

и, следовательно,

$$y=\mathfrak{A}x-\frac{1}{8}\mathfrak{A}(3b+e)\,x^3+\mathfrak{C}x^5+\mathfrak{D}x^7+\text{и т. д.,}$$

где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ остаются в нашем произволе.

В-третьих, если

$$4\cdot 5b+5e+g=0, \quad \text{то есть} \quad g=-20b-5e,$$

то, прежде всего, получаем $B=0$, $C=0$, $D=0$ и т. д., а потому $v=Ax^5$. Вместе с тем,

$$\mathfrak{B}=-\mathfrak{A}(5b+e), \quad -\mathfrak{B}(14b+2e)+4A=0,$$

то есть

$$\mathfrak{B}=\frac{2A}{7b+e},$$

откуда $A = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}(5b+e)(7b+e)$, а затем

$$2\cdot 6\mathfrak{D} + A(9b+e) = 0,$$
$$4\cdot 8\mathfrak{E} + 2\mathfrak{D}(11b+e) = 0,$$
$$6\cdot 10\mathfrak{F} + 2\mathfrak{E}(13b+e) = 0 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, коэффициенты $\mathfrak{B}$, A, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ и т. д. определяются через $\mathfrak{A}$, тогда как $\mathfrak{C}$ остается в нашем произволе и, следовательно, в этом случае полным интегралом будет

$$y = Ax^5lx + \mathfrak{C}x^5 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^3 + * + \mathfrak{D}x^7 + \mathfrak{E}x^9 + \text{и т. д.},$$

причем это выражение будет конечным, если $(2i+5)b+e=0$.

ПРИМЕР 4

981. *Найти в алгебраическом виде полный интеграл уравнения*

$$x^2(1+bx^2)d^2y - x(5+7bx^2)\,dx\,dy + 6(1+3bx^2)\,y\,dx^2 = 0$$

[*которое получается*], *если в предыдущем примере положить* $e=-7b$ *и* $g=15b$.

Итак, будем иметь $\mathfrak{B} = +2\mathfrak{A}b$, $A=0$, $\mathfrak{D}=0$, $\mathfrak{E}=0$, и поэтому $v=0$ и $u = \mathfrak{A}x + 2\mathfrak{A}bx^3 + \mathfrak{C}x^5$, откуда, считая $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ какими-либо постоянными, получаем полный интеграл

$$y = \mathfrak{A}x(1+2bx^2) + \mathfrak{C}x^5.$$

Следовательно, частными интегралами будут

$$y = \alpha x(1+2bx^2), \qquad y = \alpha x^5, \qquad y = \alpha x(1+bx^2)^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

982. Положив $y = e^{\int z\,dx}$, так что $z = \frac{dy}{y\,dx}$, найдем, что полным интегралом следующего дифференциального уравнения первого порядка:

$$x^2(1+bx^2)\,dz + x^2(1+bx^2)\,z^2\,dx - x(5+7bx^2)\,z\,dx + 5(1+3bx^2)\,dx = 0$$

будет

$$z = \frac{\mathfrak{A}(1+6bx^2)+5\mathfrak{C}x^4}{\mathfrak{A}x(1+2bx^2)+\mathfrak{C}x^6}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

983. Дифференциальное уравнение второго порядка становится интегрируемым после деления на $x^2(1+bx^2)^2$, и его интегралом будет

$$\frac{x\,dy - 5y\,dx}{x(1+bx^2)} = C\,dx, \quad \text{или} \quad dy - \frac{5y\,dx}{x} = C\,dx\,(1+bx^2),$$

что дает после деления на x^5 интеграл

$$\frac{y}{x^5} = \frac{-C}{4x^4} - \frac{bC}{2x^2} + D,$$

то есть

$$y = -\frac{1}{4}Cx(1+2bx^2) + Dx^5,$$

как и выше.

ПОЯСНЕНИЕ

984. Мы до сих пор не нашли полного интеграла для нашего общего уравнения с помощью восходящих рядов в том случае, когда $a=0$ и, следовательно, $\lambda c+f=0$. В этом случае мы находим для показателя λ только одно значение $\lambda=\frac{-f}{c}$, которое дает лишь частный интеграл, да и тот отпадает, если только $c=0$. Но так как в этом случае $a=0$, то коэффициент b обязательно должен быть [в уравнении], и поэтому полный интеграл может быть представлен с помощью нисходящих рядов, так как уравнение $\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g=0$ всегда имеет два корня, по которым мы получим два ряда. Правда, и здесь может встретиться то затруднение, что оба корня λ либо оказываются равными, либо их разность делится на показатель n. Однако, чтобы обойти это затруднение, мы можем применить то же средство, которым мы воспользовались в последней задаче, а именно ввести ряд, умноженный на lx, поэтому излишне было бы здесь повторять эти выкладки[1]). Остается показать, каким образом надлежит представить полный интеграл с помощью бесконечных рядов в том случае, когда оба корня λ как для восходящих, так и для нисходящих рядов оказываются мнимыми.

ЗАДАЧА 124

985. *Предложено дифференциальное уравнение второго порядка*

$$x^2(a+bx^n)d^2y+x(c+ex^n)dx\,dy+(f+gx^n)y\,dx^2=0;$$

представить его полный интеграл с помощью восходящих рядов в том случае, когда уравнение

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0$$

имеет мнимые корни.

РЕШЕНИЕ

Из вышеизложенного (§ 971) следует, что в таком случае надо положить

$$y=v\sin(\mu lx)+u\cos(\mu lx),$$

откуда

$$dy=\left(dv-\frac{\mu u\,dx}{x}\right)\sin(\mu\,lx)+\left(\frac{\mu v\,dx}{x}+du\right)\cos(\mu\,lx)$$

и

$$d^2y=\left(d^2v-\frac{2\mu\,dx\,du}{x}+\frac{\mu u\,dx^2}{x^2}-\frac{\mu^2 v\,dx^2}{x^2}\right)\sin(\mu\,lx)$$
$$+\left(d^2u+\frac{2\mu\,dx\,dv}{x}-\frac{\mu v\,dx^2}{x^2}-\frac{\mu^2 u\,dx^2}{x^2}\right)\cos(\mu\,lx).$$

Подставив эти выражения и приравняв нулю в отдельности те члены, которые содержат $\sin(\mu\,lx)$, и те, которые содержат $\cos(\mu\,lx)$, получим следующие два уравнения:

$$\text{I.}\quad \left.\begin{aligned} x^2(a+bx^n)d^2v+x(c+ex^n)dx\,dv+(f+gx^n)v\,dx^2\\ -2\mu x(a+bx^n)dx\,du-\mu^2(a+bx^n)v\,dx^2\\ +\mu(a+bx^n)u\,dx^2\\ -\mu(c+ex^n)u\,dx^2\end{aligned}\right\}=0,$$

[1]) Istam evolutionem.

$$\text{II.}\quad \left.\begin{aligned} x^2(a+bx^n)\,d^2u + x(c+ex^n)\,dx\,du + (f+gx^n)\,u\,dx^2 \\ +2\mu x(a+bx^n)\,dx\,dv - \mu^2(a+bx^n)\,u\,dx^2 \\ -\mu(a+bx^n)\,v\,dx^2 \\ +\mu(c+ex^n)\,v\,dx^2 \end{aligned}\right\} = 0;$$

количества v и u берем в виде восходящих рядов:

$$v = Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda+n} + Cx^{\lambda+2n} + Dx^{\lambda+3n} + \text{ и т. д.},$$
$$u = \mathfrak{A}x^{\lambda} + \mathfrak{B}x^{\lambda+n} + \mathfrak{C}x^{\lambda+2n} + \mathfrak{D}x^{\lambda+3n} + \text{ и т. д.},$$

и после подстановки этих рядов из первого уравнения получаем

$$\begin{array}{lll}
\lambda(\lambda-1)Aax^{\lambda} & +(\lambda+n)(\lambda+n-1)Bax^{\lambda+n} & +(\lambda+2n)(\lambda+2n-1)Cax^{\lambda+2n} + \text{ и т. д.} \\
 & +\lambda(\lambda-1)Ab & +(\lambda+n)(\lambda+n-1)Bb \\
+\lambda Ac & +(\lambda+n)Bc & +(\lambda+2n)Cc \\
 & +\lambda Ae & +(\lambda+n)Be \\
+Af & +Bf & +Cf \\
 & +Ag & +Bg \\
-2\mu\lambda\mathfrak{A}a & -2\mu(\lambda+n)\mathfrak{B}a & -2\mu(\lambda+2n)\mathfrak{C}a \\
 & -2\mu\lambda\mathfrak{A}b & -2\mu(\lambda+n)\mathfrak{B}b \\
-\mu^2Aa & +\mu^2Ba & -\mu^2Ca \\
 & -\mu^2Ab & -\mu^2Bb \\
+\mu\mathfrak{A}a & +\mu\mathfrak{B}a & +\mu\mathfrak{C}a \\
 & +\mu\mathfrak{A}b & +\mu\mathfrak{B}b \\
-\mu\mathfrak{A}c & -\mu\mathfrak{B}c & -\mu\mathfrak{C}c \\
 & -\mu\mathfrak{A}e & -\mu\mathfrak{B}e
\end{array}$$

Второе уравнение легко получается отсюда перестановкой латинских и готических букв и, кроме этого, изменением знака числа μ.

Итак, первая степень x^{λ} в первом и во втором уравнении приводит к равенствам

$$A(\lambda(\lambda-1)a + \lambda c + f - \mu^2 a) - \mu\mathfrak{A}(2\lambda a - a + c) = 0,$$
$$\mathfrak{A}(\lambda(\lambda-1)a + \lambda c + f - \mu^2 a) + \mu A(2\lambda a - a + c) = 0,$$

откуда с необходимостью следует, что как

$$2\lambda a - a + c = 0,$$

так и

$$\lambda(\lambda-1)a + \lambda c + f - \mu^2 a = 0.$$

Следовательно, $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{c}{2a}$, и после подстановки этого значения в последнее равенство получаем

$$-a\left(\frac{1}{4} - \frac{c^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{2} - \frac{c^2}{2a} + f = \mu^2 a = -\frac{a}{4} + \frac{c}{2} - \frac{c^2}{4a} + f,$$

то есть

$$\mu^2 a = \frac{4af - (a-c)^2}{4a}$$

и, следовательно,

$$\mu = \frac{\sqrt{4af - (a-c)^2}}{2a} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{a-c}{2a}.$$

Отсюда ясно, что это решение имеет место, если $4af > (a-c)^2$, — в том именно случае, когда предыдущее решение [§ 967] становилось мнимым. При этом количества A и $\mathfrak{A}$ остаются в нашем произволе.

Что касается членов с $x^{\lambda+n}$, то в обоих уравнениях они приводят к следующим равенствам:

$$B((\lambda+n)(\lambda+n-1)a+(\lambda+n)c+f-\mu^2 a)+A(\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g-\mu^2 b) \\ -\mu\mathfrak{B}(2(\lambda+n)a-a+c)-\mu\mathfrak{A}(2\lambda b-b+e)=0$$

и

$$\mathfrak{B}((\lambda+n)(\lambda+n-1)a+(\lambda+n)c+f-\mu^2 a)+\mathfrak{A}(\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g-\mu^2 b) \\ +\mu B(2(\lambda+n)a-a+c)+\mu A(2\lambda b-b+e)=0.$$

Положим для сокращения

$$(\lambda+n)(\lambda+n-1)a+(\lambda+n)c+f-\mu^2 a=n^2 a=\alpha,$$
$$\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g-\mu^2 b=\beta,$$
$$2(\lambda+n)a-a+c=2na=\gamma,$$
$$2\lambda b-b+e=\delta.$$

Тогда будем иметь

$$B\alpha+A\beta-\mu\mathfrak{B}\gamma-\mu\mathfrak{A}\delta=0$$

и

$$\mathfrak{B}\alpha+\mathfrak{A}\beta+\mu B\gamma+\mu A\delta=0,$$

откуда следует, что

$$B=\frac{-A(\alpha\beta+\mu^2\gamma\delta)+\mu\mathfrak{A}(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\alpha^2+\mu^2\gamma^2}$$

и

$$\mathfrak{B}=\frac{-\mathfrak{A}(\alpha\beta+\mu^2\gamma\delta)-\mu A(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\alpha^2+\mu^2\gamma^2}.$$

Но в соответствии с введенными значениями

$$\alpha=n^2 a,\quad \beta=\frac{(ae-bc)(a-c)}{2a^2}-\frac{bf}{a}+g,\quad \gamma=2na,\quad \delta=\frac{ae-bc}{a},$$

и, таким образом, исходя из A и $\mathfrak{A}$, определим B и $\mathfrak{B}$, а по ним затем C, $\mathfrak{C}$; D, $\mathfrak{D}$ и т. д.

ПРИМЕР 1

986. *Пусть $c=a$ и $f=a$, так что $\mu=1$. Надо найти интеграл следующего уравнения:*

$$x^2(a+bx^n)\,d^2y+x(a+ex^n)\,dx\,dy+(a+gx^n)\,y\,dx^2=0.$$

Итак, здесь $\lambda=0$ и $\mu=1$, поэтому мы положим

$$y=v\sin lx+u\cos lx,$$

а v и u возьмем в виде рядов

$$v=A+Bx^n+Cx^{2n}+Dx^{3n}+\text{ и т. д.},$$
$$u=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x^n+\mathfrak{C}x^{2n}+\mathfrak{D}x^{3n}+\text{ и т. д.},$$

где коэффициенты A и $\mathfrak{A}$ могут быть выбраны произвольным образом. Так как $\alpha=na^2$, $\beta=g-b$, $\gamma=2na$ и $\delta=e-b$, мы найдем, прежде всего,

$$B=\frac{-A(n^2a(g-b)+2na(e-b))+\mathfrak{A}(n^2a(e-b)-2na(g-b))}{n^4a^2+4n^2a^2},$$

или, иначе,

$$B = \frac{-A\,(n\,(g-b)+2\,(e-b))+\mathfrak{A}\,(n\,(e-b)-2\,(g-b))}{na\,(n^2+4)}$$

и

$$\mathfrak{B} = \frac{-\mathfrak{A}\,(n\,(g-b)+2\,(e-b))-A\,(n\,(e-b)-2\,(g-b))}{na\,(n^2+4)}.$$

Для следующих коэффициентов получаем

$$C\,(2n\,(2n-1)\,a+2na+a-a)+B\,(n\,(n-1)\,b+ne+g-b)$$
$$-\mathfrak{C}\,(4na-a+a)-\mathfrak{B}\,(2nb-b+e)=0,$$

то есть

$$4n^2Ca+B\,((n^2-n-1)\,b+ne+g)-4n\,\mathfrak{C}a-\mathfrak{B}\,((2n-1)\,b+e)=0,$$

и

$$4n^2\mathfrak{C}a+\mathfrak{B}\,((n^2-n-1)\,b+ne+g)+4n\,Ca+B\,((2n-1)\,b+e)=0,$$

а помножив первое из этих равенств на n и сложив его с последним, мы получим

$$4n\,(n^2+1)\,Ca+B\,[(n^3-n^2+n-1)\,b+(n^2+1)\,e+ng]$$
$$+\mathfrak{B}\,[-(n^2+1)\,b+g]=0,$$

откуда

$$C = \frac{-B\,((n-1)\,(n^2+1)\,b+(n^2+1)\,e+ng)+\mathfrak{B}\,((n^2+1)\,b-g)}{4na\,(n^2+1)}$$

и

$$\mathfrak{C} = \frac{-\mathfrak{B}\,((n-1)\,(n^2+1)+(n^2+1)\,e+ng)-B\,((n^2+1)\,b-g)}{4na\,(n^2+1)}.$$

Затем находим

$$9n^2Da+C\,((4n^2-2n-1)\,b+2ne+g)-6n\,\mathfrak{D}a-\mathfrak{C}\,((4n-1)\,b+e)=0,$$
$$9n^2\mathfrak{D}a+\mathfrak{C}\,((4n^2-2n-1)\,b+2ne+g)+6n\,Da+C\,((4n-1)b+e)=0,$$

и, умножив первое из этих равенств на $3n$, а второе на 2 и сложив, получим

$$3n\,(9n^2+4)\,Da+C\,[(12n^3-6n^2+5n-2)\,b+2\,(3n^2+1)\,e+3ng]$$
$$+\mathfrak{C}\,[(-4n^2-n-2)\,b+ne+2g]=0,$$

откуда определяем

$$D = \frac{-C\,((12n^3-6n^2+5n-2)\,b+2\,(3n^2+1)\,e+3ng)+\mathfrak{C}\,((4n^2+n+2)\,b-ne-2g)}{3n\,(9n^2+4)\,a},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{-\mathfrak{C}\,((12n^3-6n^2+5n-2)\,b+2\,(3n^2+1)\,e+3ng)-C\,((4n^2+n+2)\,b-ne-2g)}{3n\,(9n^2+4)\,a}.$$

Вообще же по любым коэффициентам M и $\mathfrak{M}$ следующие коэффициенты N и $\mathfrak{N}$ определяются с помощью таких формул:

$$in\,(i^2n^2+4)\,Na$$
$$+M\,((i\,(i-1)^2\,n^3-i\,(i-1)\,n^2+(3i-4)\,n-2)\,b+i\,(i-1)\,n^2e+2e+ing)$$
$$-\mathfrak{M}\,((2\,(i-1)\,n^2+(i-2)\,n+2)\,b-(i-2)\,ne-2g)=0,$$
$$in\,(i^2n^2+4)\,\mathfrak{N}a$$
$$+\mathfrak{M}\,((i\,(i-1)^2\,n^3-i\,(i-1)\,n^2+(3i-4)\,n-2)\,b+i\,(i-1)\,n^2e+2e+ing)$$
$$+M\,((2\,(i-1)\,n^2+(i-2)\,n+2)\,b-(i-2)\,ne-2g)=0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

987. Если количества b, e, g таковы, что два соответствующих друг другу коэффициента N и $\mathfrak{N}$ исчезают, то исчезают и все следующие, и полный интеграл выражается в конечном виде. Так, например, для того чтобы исчезли B и $\mathfrak{B}$, должно быть

$$2(g-b)=n(e-b) \text{ и } n(g-b)=-2(e-b),$$

откуда следует, что $g=e=b$, и в исходном уравнении, таким образом, содержится множитель $a+bx^n$.

СЛЕДСТВИЕ 2

988. Вообще же интеграл выражается в конечном виде тогда, когда

$$g=\left((i-1)n^2+\frac{1}{2}(i-2)n+1\right)b-\frac{1}{2}(i-2)ne,$$

где через i обозначено любое положительное целое число, причем

$$e=-(2(i-1)n-1)b.$$

Отсюда следует, что

$$g=((i-1)^2n^2+1)b.$$

ПРИМЕР 2

989. *Принимаем $n=1$ и пусть $e=-b$ и $g=2b$. Определить полный интеграл уравнения*

$$x^2(a+bx)d^2y+x(a-bx)\,dx\,dy+(a+2bx)\,y\,dx^2=0.$$

Из только что найденных формул получаем

$$B=\frac{-A(g+2e-3b)+\mathfrak{A}(e+b-2g)}{5a}=\frac{3Ab-4\mathfrak{A}b}{5a}$$

и

$$\mathfrak{B}=\frac{3\mathfrak{A}b+4Ab}{5a},$$

вместе с тем,

$$C=\frac{-B(2e+g)+\mathfrak{B}(2b-g)}{5a}=0 \text{ и } \mathfrak{C}=0.$$

Поэтому будем иметь

$$v=A+\frac{(3A-4\mathfrak{A})b}{5a}x \text{ и } u=\mathfrak{A}+\frac{(3\mathfrak{A}+4A)b}{5a}x,$$

и отсюда находим полный интеграл

$$y=A\sin lx+\mathfrak{A}\cos lx+\frac{bx}{5a}((3A-4\mathfrak{A})\sin lx+(3\mathfrak{A}+4A)\cos lx).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

990. Если положить $\mathfrak{A}=0$, получим частный интеграл

$$y=A\left(\sin lx+\frac{3bx}{5a}\sin lx+\frac{4bx}{5a}\cos lx\right).$$

Если же принять $A=0$, получим другой частный интеграл

$$y=\mathfrak{A}\left(\cos lx-\frac{4bx}{5a}\sin lx+\frac{3bx}{5a}\cos lx\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

991. С помощью подстановки $y = e^{\int s\,dx}$ наше уравнение приводится к следующему:

$$x^2 (a + bx)\,ds + x^2 (a + bx)\,s^2\,dx + x\,(a - bx)\,s\,dx + (a + 2bx)\,dx = 0,$$

интегралом которого будет $s = \frac{dy}{y\,dx}$, и отсюда этот интеграл определяется.

Последнее уравнение можно преобразовать в различные другие формы.

ПОЯСНЕНИЕ

992. Подобным же образом можно осуществить интегрирование с помощью нисходящих рядов, если показатели отдельных членов оказываются мнимыми, и не составляло бы труда отдельно изложить это. Однако достаточно и того, что сказано, для разъяснения, к каким предосторожностям следует прибегать при решении уравнений с помощью бесконечных рядов. Наибольшую же пользу приносят эти разложения тем, что мы можем установить, каковы те дифференциальные уравнения второго порядка, для которых можно указать, [правда], только частный алгебраический интеграл, и такие случаи были приведены выше в § 969. Затем подобное же интегрирование с помощью бесконечных рядов может быть равным образом распространено на уравнения следующего вида:

$$x^2 (a + bx^n + \beta x^{2n})\,d^2y + x\,(c + ex^n + \varepsilon x^{2n})\,dx\,dy + (f + gx^n + \gamma x^{2n})\,y dx^2 = 0.$$

Только здесь какой угодно член искомого ряда определяется через два предшествующих, так что если исчезают два рядом стоящих члена, то и все последующие также становятся равными нулю[1]). Однако, если в уравнение входит также свободный от y член, то решение в виде рядов становится более легким, и поэтому я считаю, что такое обстоятельство заслуживает упоминания. Например, если предложено следующее уравнение:

$$x^2 d^2y - x\,dx\,dy + ax^n\,y dx^2 = bx^m\,dx^2,$$

то ряд должен начинаться со степени x^m, и мы положим

$$y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \text{ и т. д.};$$

отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{llll} m\,(m-1)\,Ax^m + & (m+n)\,(m+n-1)\,Bx^{m+n} + & (m+2n)\,(m+2n-1)\,Cx^{m+2n} + & \text{и т. д.} \\ -mA & -(m+n)\,B & -(m+n)\,C & \\ -b & +Aa & +Ba & \end{array}\right\} = 0,$$

откуда

$$A = \frac{b}{m\,(m-2)}, \quad B = \frac{-Aa}{(m+n)\,(m+n-2)}, \quad C = \frac{-Ba}{(m+2n)\,(m+2n-2)} \quad \text{и т. д.}$$

---

[1]) См. работы Эйлера «Constructio aequationis differentio-differentialis $Ay\,du^2 + (B + Cu)\,du\,dy + (D + Eu + Fu^2)\,d^2y = 0$ sumto elemento du constante», Novi comment. acad. sc. Petrop. 8 (1760/1), 1763, стр. 150 и «Specimen transformationis singularis serierum», Nova acta acad. sc. Petrop. 12 (1794), 1801, p. 58 (№ 254 и 710 по списку Энестрема; также в Opera Omnia, ser. I, vol. 22 и 16) [Л. Ш.].

При этом встречаются многие заслуживающие быть отмеченными [случаи], которые можно разрешить с помощью указанных выше правил [1]). Однако более всего полезным в этом вопросе оказывается преобразование предложенного уравнения с помощью подстановок в другие уравнения, решение которых посредством рядов является более простым. Так как это может быть сделано различными способами, то этот предмет следует более подробно рассмотреть в следующей главе, притом для уравнений вида

$$L\,d^2y + M\,dx\,dy + Ny\,dx^2 = 0,$$

так как для других видов такое преобразование редко оказывается применимым [2]).

---

[1]) Ubi quidem multa observanda occurunt, quae per praecepta supra data expedire licet.

[2]) Raro locum invenit.

ГЛАВА IX

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВИДА $L\,d^2y+M\,dx\,dy+Ny\,dx^2=0$

ЗАДАЧА 125

993. *Преобразовать к иному виду дифференциальное уравнение второго порядка*

$$L\,d^2y+M\,dx\,dy+Ny\,dx^2=0$$

с помощью подстановки $y=e^{\int P\,dx}z$, *причем* L, M, N — *какие угодно функции от* x, *а элемент* dx *принимается постоянным.*

РЕШЕНИЕ

Поскольку имеем $\frac{dy}{y}=P\,dx+\frac{dz}{z}$ [§ 940], то мы получим с помощью дифференцирования

$$\frac{d^2y}{y}-\frac{dy^2}{y^2}=dx\,dP+\frac{d^2z}{z}-\frac{dz^2}{z^2},$$

следовательно,

$$\frac{d^2y}{y}=\frac{d^2z}{z}+\frac{2P\,dx\,dz}{z}+dx\,dP+P^2\,dx^2.$$

Таким образом, поскольку наше уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{L\,d^2y}{y}+\frac{M\,dx\,dy}{y}+N\,dx^2=0,$$

выполнив подстановку, получим

$$\frac{L\,d^2z}{z}+\frac{2LP\,dx\,dz}{z}+L\,dx\,dP+LP^2\,dx^2+\frac{M\,dx\,dz}{z}+MP\,dx^2+N\,dx^2=0,$$

или же, умножая на z,

$$L\,d^2z+(2LP+M)\,dx\,dz+z\,dx\,(L\,dP+LP^2\,dx+MP\,dx+N\,dx)=0,$$

где в качестве P можно принять какую угодно функцию от x, и, таким образом, получается бесчисленное множество уравнений относительно двух переменных x и z.

СЛЕДСТВИЕ 1

994. Стало быть, если указанное преобразованное уравнение можно проинтегрировать или решить с помощью ряда, то по найденному значению для z получим $y=e^{\int P\,dx}$

СЛЕДСТВИЕ 2

995. Преобразованное уравнение сходно с заданным в том отношении, что в нем переменное z вместе со своими дифференциалами dz и d^2z везде входит в первой степени, — таким же образом, как и y в предложенном уравнении.

СЛЕДСТВИЕ 3

996. Если случится, что оба уравнения, как предложенное, так и преобразованное, одинаково удобно решаются с помощью рядов, то таким образом могут быть получены несколько решений одного и того же уравнения.

ПОЯСНЕНИЕ 1

997. Уравнения, которые удобным образом могут быть решены с помощью рядов [§§ 967, 985], охватываются следующим представлением:

$$x^2(a+bx^n)\,d^2x + x(c+ex^n)\,dx\,dy + (f+gx^n)\,y\,dx^2 = 0,$$

где, следовательно,

$$L = x^2(a+bx^n), \quad M = x(c+ex^n), \quad N = f+gx^n,$$

а для того, чтобы преобразованное уравнение приводилось к подобному же виду, надо положить $LP = x(\mu+\nu x^n)$, откуда $P = \frac{\mu+\nu x^n}{x(a+bx^n)}$. Отсюда следует, что

$$dP = \frac{-\mu a - \mu(n+1)bx^n + \nu(n-1)ax^n - \nu bx^{2n}}{x^2(a+bx^n)^2}\,dx,$$

и поэтому

$$L\,dP + LP^2\,dx + MP\,dx$$

$$=\left\{\begin{matrix} -\mu a - (n+1)\mu bx^n + (n-1)\nu ax^n - \nu bx^{2n} \\ +\mu^2 + 2\mu\nu x^n \qquad\qquad\qquad\qquad + \nu^2x^{2n} \\ +\mu c + \mu ex^n + \nu cx^n \qquad\qquad\qquad + \nu ex^{2n} \end{matrix}\right\} : a+bx^n,$$

где должно выполняться деление на $a+bx^n$. Принимаем, что частное $=\mu h + \nu kx^n$, стало быть,

$$\mu = a - c + ah, \quad \nu = b - e + bk$$

и, кроме того, $2\mu\nu - (n+1)\mu b + (n-1)\nu a + \mu e + \nu c = \mu bh + \nu ak$. Если в последнее равенство подставить предыдущие значения, получим

$$(h-k+n)\,(bc-ae) = nab(h-k) + ab(h-k)^2,$$

откуда либо

$$h - k = \frac{be-ae}{ab}, \quad \text{либо} \quad h-k = -n.$$

Итак, одна из букв h и k остается в нашем произволе, и преобразованное уравнение получается в виде

$$x^2(a+bx^n)\,d^2z + x\,[2\mu + c + (2\nu+e)\,x^n]\,dx\,dz$$
$$+\,[f + \mu h + (g+\nu k)\,x^n]\,z\,dx^2 = 0.$$

Решение этого уравнения как с помощью восходящих, так и с помощью нисходящих рядов приводит к одинаковым степеням x. Сама же подстановка будет

$$y=x^{\frac{a-c}{a}+h}(a+bx^n)^{\frac{bc-ae}{nab}-\frac{(h-k)}{n}}z.$$

Для того чтобы [в это выражение] не входила только одна степень x, надо положить $h-k=-n$. Не имеет никакого значения, каким образом здесь выбирается h, поэтому принимаем $h=0$, получаем $k=n$, и, таким образом, подстановка будет

$$y=x^{\frac{a-c}{a}}(a+bx^n)^{\frac{bc-ae}{nab}+1}z,$$

что приводит к следующему уравнению:

$$x^2(a+bx^n)\,d^2z+x(2a-c+(2(n+1)\,b-e)\,x^n)\,dx\,dz$$
$$+(f+(n(n+1)\,b-ne+g)\,x^n)\,z\,dx^2=0.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

998. Мы видели выше, в § 970, что предложенное уравнение относительно x и y допускает алгебраический интеграл, если имеем

$$\frac{c}{2a}-\frac{e}{2b}\;..\;\frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}\;..\;\frac{\sqrt{(b-e)^2-4bg}}{2b}=in;$$

если мы рассмотрим таким же образом преобразованное уравнение, получим, что алгебраический интеграл может быть указан, если

$$-\frac{c}{2a}+\frac{e}{2b}\;..\;\frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}\;..\;\frac{\sqrt{(b-c)^2-4bg}}{2b}-n=in.$$

Объединяя оба эти условия, мы можем заключить, что уравнению удовлетворяет алгебраический интеграл, если только следующее выражение:

$$\frac{bc-ae}{2ab}\;..\;\frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}\;..\;\frac{\sqrt{(b-e)^2-4bg}}{2b}$$

представляет число, делящееся на показатель n. Здесь я применил знак .. для обозначения положительности и отрицательности совместно. Поэтому [алгебраический] интеграл существует в том случае, когда выражение $\frac{bc-ae\pm bh\pm ak}{2nab}$ представляет целое число, либо положительное, либо отрицательное. Здесь мы положили

$$f=\frac{(a-c)^2-h^2}{4a}\quad\text{и}\quad g=\frac{(b-e)^2-k^2}{4b}.$$

ПРИМЕР

999. *Пусть предложено уравнение*

$$x^2(1-x^2)\,d^2y+x(1+2mx^2)\,dx\,dy-m(m+1)\,x^2y\,dx^2=0.$$

Определить те случаи, когда может быть найден только частный алгебраический интеграл.

В этом примере $a=1$, $b=-1$, $c=1$, $e=2m$, $f=0$, $g=-m(m+1)$ и $n=2$. Следовательно, получаем

$$h=\sqrt{(a-c)^2-4af}=0$$

и

$$k=\sqrt{(b-e)^2-4bg}=\sqrt{(2m+1)^2-4m(m+1)},$$

то есть $k=\pm 1$. Итак, выражением, которое равно целому числу, является $\frac{-1-2m\pm 1}{-4}$, откуда m получается в двух видах:

$$\text{либо } 2m+2=\pm 4i, \quad \text{либо } 2m=\pm 4i,$$

то есть

$$\text{либо } m=\pm 2i-1, \quad \text{либо } m=\pm 2i.$$

Итак, если только m — целое число, либо положительное, либо отрицательное, то может быть найден частный алгебраический интеграл. А подстановкой, дающей преобразованное уравнение, является $y=(1-x^2)^{\frac{-1-2m}{-2}+1}z=(1-x^2)^{\frac{2m+3}{2}}z$, и само преобразованное уравнение будет

$$x^2(1-x^2)\,d^2z+x\,(1-2(m+3)x^2)\,dx\,dz-(m+2)(m+3)\,x^2z\,dx^2=0.$$

Очевидно, что оно получается из исходного уравнения, если вместо m писать $-m-3$. Сами же интегралы мы определим, полагая, с учетом того, что $\lambda^2=0$,

$$y=A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+Ex^8+\quad \text{и т. д.},$$

откуда следует

$$\left.\begin{array}{lllll}
2Bx^2 & +12Cx^4 & +30Dx^6 & +56Ex^8+ & \text{и т. д.} \\
 & -2B & -12C & -30D & \\
+2B & +4C & +6D & +8D & \\
 & +4mB & +8mC & +12mD & \\
-m(m+1)A & -m(m+1)B & -m(m+1)C & -m(m+1)D &
\end{array}\right\}=0.$$

Следовательно, определение коэффициентов произойдет следующим образом:

$$B=\frac{m(m+1)}{4}A, \qquad C=\frac{(m-1)(m-2)}{16}B, \qquad D=\frac{(m-3)(m-4)}{36}C \qquad \text{и т. д.}$$

Если также положим

$$z=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x^2+\mathfrak{C}x^4+\mathfrak{D}x^6+\mathfrak{E}x^8+\quad \text{и т. д.},$$

то найдем

$$\mathfrak{B}=\frac{(m+2)(m+3)}{4}\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{C}=\frac{(m+4)(m+5)}{16}\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{D}=\frac{(m+6)(m+7)}{36}\mathfrak{C} \quad \text{и т. д.}$$

ЗАДАЧА 126

1000. *Преобразовать дифференциальное уравнение второго порядка*

$$L\,d^2y+M\,dx\,dy+Ny\,dx^2=0$$

с помощью подстановки $\frac{dy}{y}=\frac{Pz\,dx^2}{dz}$ *в другое уравнение того же вида* [1]).

[1]) В следующем абзаце постановка задачи уточняется.

РЕШЕНИЕ

Конечно, здесь ставится вопрос о том, какую функцию от x надо принять в качестве P для того, чтобы после подстановки переменное z вместе со своими дифференциалами dz и d^2z везде входило в первом измерении. А так как $\frac{dy}{y}=\frac{Pz\,dx^2}{dz}$, то получим с помощью дифференцирования

$$\frac{d^2y}{y}-\frac{dy^2}{y^2}=\frac{-Pz\,dx^2d^2z}{dz^2}+\frac{z\,dx^2dP}{dz}+P\,dx^2$$

и

$$\frac{d^2y}{y}=\frac{-Pz\,dx^2d^2z}{dz^2}+\frac{z\,dx^2dP}{dz^2}+P\,dx^2,$$

и после подстановки этих выражений будем иметь

$$\frac{-LPz\,dx^2d^2z}{dz^2}+\frac{Lz\,dx^2dP}{dz}+LP\,dx^2+\frac{LP^2z^2dx^4}{dz}+\frac{MPz\,dx^3}{dz}+N\,dx^2=0.$$

Итак, положим $LP+N=0$, или, иначе, $P=\frac{-N}{L}$; после умножения на $\frac{-dz^2}{Pz\,dx^2}$ найдем

$$L\,d^2z-\frac{L\,d\,P\,dz}{P}-LPz\,dx^2-M\,dx\,dz=0,$$

то есть

$$L\,d^2z-M\,dx\,dz-\frac{L\,dN\,dz}{N}+dL\,dz+Nz\,dx^2=0.$$

Следовательно, заданное уравнение с помощью подстановки $\frac{dy}{y}=\frac{-Nz\,dx^2}{L\,dz}$ преобразуется в уравнение

$$L\,d^2z+\left(\frac{dL}{dx}-M-\frac{L\,dN}{N\,dx}\right)dx\,dz+Nz\,dx^2=0.$$

Таким образом, если отсюда может быть определено значение z, то мы получим также выражение для y через x.

СЛЕДСТВИЕ 1

1001. Если, наоборот, в этом преобразованном уравнении положить $\frac{dz}{z}=\frac{-Ny\,dx^2}{L\,dy}$, то получается исходное уравнение. Следовательно, эти два уравнения так связаны одно с другим, что одно получается из другого с помощью одинаковых преобразований.

СЛЕДСТВИЕ 2

1002. Если в преобразованном уравнении положить вслед за первой подстановкой [§ 993] $\frac{dz}{z}=Q\,dx+\frac{dv}{v}$, то получим такое новое преобразованное уравнение:

$$L\,d^2v+\left(2LQ+\frac{dL}{dx}-M-\frac{L\,dN}{N\,dx}\right)dx\,dv$$
$$+v\,dx\left(L\,dQ+LQ^2dx+Q\,dL-MQ\,dx-\frac{LQ\,dN}{N}+N\,dx\right)=0,$$

которое, следовательно, выводится из предложенного уравнения подстановкой $\frac{dy}{y}=\frac{-Nv\,dx^2}{L\,(dv+Qv\,dx)}$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

1003. Комбинируя те две подстановки, которыми мы пользовались в двух предыдущих задачах, приходим к общей подстановке следующего вида:

$$\frac{dy}{y}=\frac{P\,dz+Qz\,dx}{R\,dz+Sz\,dx}\,dx.$$

Если сделать эту подстановку в уравнении

$$L\,d^2y+M\,dx\,dy+Ny\,dx^2=0,$$

то надо так определить функции P, Q, R, S, чтобы в получающемся уравнении переменное z вместе со своими дифференциалами нигде не входило в измерении выше первого. Однако мы получаем члены, куда входит dz^2, и, для того чтобы их уничтожить, надо положить

$$L\,dx\,(P^2+QR-PS)+L\,(R\,dP-P\,dR)+MPR\,dx+NR^2\,dx=0,$$

то есть

$$Q=\frac{PS}{R}-\frac{P^2}{R}-\frac{dP}{dx}+\frac{P\,dR}{R\,dx}-\frac{MP}{L}-\frac{NR}{L}.$$

Тем самым приходим к следующему уравнению:

$$L\,d^2z\,(PS-QR)+L\,dz\,(R\,dQ-Q\,dR+S\,dP-P\,dS)$$
$$+dx\,dz\,(2LPQ+M\,(QR+PS)+2NRS)+Lz\,dx\,(S\,dQ-Q\,dS+Q^2dx)+$$
$$+Sz\,dx^2\,(MQ+NS)=0.$$

Правда, это уравнение легче получить, применяя обе указанные подстановки поочередно.

ПОЯСНЕНИЕ 2

1004. На изложенное здесь преобразование следует тем более обратить внимание, что даже если преобразованное уравнение допускает решение, то предложенное уравнение может тем не менее решаться не без затруднений. Действительно, если определена функция от x, которая при подстановке вместо z удовлетворяет преобразованному уравнению, то для того, чтобы найти значение y, нужно определить, сверх того, интеграл уравнения $\frac{dy}{y}=-\frac{Nz\,dx^2}{L\,dz}$, и здесь, хотя переменные x и y разделены, могут возникнуть значительные трудности при вычислении интеграла. Следовательно, может получиться так, что с помощью этой подстановки оказывается возможным определить интегралы таких уравнений, которые едва ли можно получить прямым путем. Конечно, если случается так, что интеграл преобразованного уравнения может быть определен либо с помощью какого-либо из вышеизложенных методов, либо с помощью ряда, который обрывается, то тогда можно получить также интеграл самого предложенного уравнения. А если в последнем случае нам известен только частный интеграл, то все-таки по этому интегралу всегда можно определить полный интеграл уравнений такого типа. Ведь если уравнению

$$L\,d^2y + M\,dx\,dy + Ny\,dx^2 = 0$$

удовлетворяет, в частности, значение $y = X$, то полагаем $y = Xv$ и получаем тогда

$$\left.\begin{aligned} LX\,d^2v + 2L\,dX\,dv + Lv\,d^2X \\ + MX\,dx\,dv + Mv\,dx\,dX \\ + NXv\,dx^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

А так как по предположению $X = y$ удовлетворяет уравнению, будем иметь

$$L\,d^2X + M\,dx\,dX + NX\,dx^2 = 0$$

и

$$LXd^2v + (2L\,dX + MX\,dx)\,dv = 0,$$

то есть

$$\frac{d^2v}{dv} + \frac{2dX}{X} + \frac{M\,dx}{L} = 0.$$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$X^2\,dv = Ce^{-\int \frac{M\,dx}{L}}$$

и затем

$$v = \int \frac{C\,dx}{X^2}\,e^{-\int \frac{M\,dx}{L}}.$$

Таким образом, полным интегралом будет

$$y = CX \int \frac{dx}{X^2}\,e^{-\int \frac{M\,dx}{L}},$$

следовательно, он может быть выведен из какого угодно частного интеграла $y = X$.

ПРИМЕР

1005. *Преобразовать дифференциальное уравнение второго порядка*

$$x^2(a + bx^n)\,d^2y + x(c + ex^n)\,dx\,dy + fy\,dx^2 = 0$$

и проинтегрировать его с помощью ряда.

Так как здесь мы имеем $L = x^2(a + bx^n)$, $M = x(c + ex^n)$ и $N = f$, следует воспользоваться такой подстановкой: $\frac{dy}{y} = \frac{-fz\,dx^2}{x^2(a + bx^n)\,dx}$, которая приводит наше уравнение к виду

$$x^2(a + bx^n)\,d^2z + x(2a - c + ((n + 2)\,b - e)\,x^n)\,dx\,dz + fz\,dx^2 = 0.$$

Если для решения этого уравнения положим

$$z = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+n} + Cx^{\lambda+2n} + \quad \text{и т. д.},$$

то должно быть

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda(2a-c)+f=0,$$

то есть

$$\lambda^2 a+\lambda(a-c)+f=0,$$

следовательно,

$$\lambda=\frac{-a+c\pm\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}.$$

Согласно § 970 ряд обрывается, если выражение

$$-\frac{c}{2a}+\frac{e}{2b}-\frac{n}{2}\pm\left(\frac{e}{2b}-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}=in,$$

где i обозначает целое положительное число, т. е.

$$-\frac{c}{2a}+\frac{e}{b}-\frac{1}{2}-n\pm\frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}=in,$$

либо

$$-\frac{c}{2a}+\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}=in.$$

Если же мы находим указанным образом решение предложенного уравнения в виде ряда, то этот ряд обрывается при условии, что

$$\frac{c}{2a}-\frac{e}{2b}\pm\frac{b-e}{2b}\pm\frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}=in,$$

т. е. что либо

$$\frac{c}{2a}-\frac{e}{b}+\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}=in,$$

либо

$$\frac{c}{2a}-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}=in.$$

Отсюда понятно, что интеграл может быть выражен в конечном виде, будет ли число i целым положительным или целым отрицательным. Оба эти случая мы получали уже при первой подстановке (§ 998), так что эта новая подстановка не дает никаких новых случаев интегрируемости.

ПОЯСНЕНИЕ 1

1006. Все же, для того чтобы было ясно, каким образом можно по конечному значению для z получить конечное значение для y, рассмотрим уравнение[1])

$$x^2(a+bx^2)\,d^2y+x(3a+ex^2)\,dx\,dy-24ay\,dx^2=0,$$

где $n=2$, $c=3a$ и $f=-24a$. Применив подстановку $\frac{dy}{y}=\frac{24az\,dx^2}{x^2(a+bx^2)\,dz}$, мы преобразуем его к виду

$$x^2(a+bx^2)\,d^2z+x[-a+(4b-e)x^2]\,dx\,dz-24az\,dx^2=0,$$

[1]) В оригинале: contemplemur casum.

откуда для восходящего ряда получаем

$$\lambda^2-2\lambda-24=0,\quad \text{то есть}\quad (\lambda-6)(\lambda+4)=0.$$

Полагаем

$$z=Ax^{-4}+Bx^{-2}+C+Dx^2+\quad \text{и т. д.},$$

следовательно,

$$\left.\begin{array}{lllll} 20Aax^{-4} & +6Bax^{-2} & * & +2Dax^2+ & \text{и т. д.}\\ & +20Ab & +6Bb & * & \\ +4Aa & +2Ba & * & -2Da & \\ & -4A(4b-e) & -2B(4b-e) & * & \\ -24Aa & -24Ba & -24Ca & -24Da & \end{array}\right\}=0.$$

Таким образом, поскольку $D=0$, то следующие члены все уничтожаются. Вместе с тем имеем

$$16Ba=4A(b+e),\qquad 24Ca=-2Bb+2Be,$$

откуда

$$B=\frac{b+e}{4a}A,\qquad C=\frac{e-b}{12a}B=\frac{e^2-b^2}{48a^2}A,$$

следовательно,

$$z=A\left(\frac{1}{x^4}+\frac{b+e}{4ax^2}+\frac{e^2-b^2}{48a^2}\right)=\frac{A\,(48a^2+12a(b+e)\,x^2+(e^2-b^2)\,x^4)}{48a^2x^4}.$$

Отсюда следует, что

$$dz=A\,dx\left(\frac{-4}{x^5}-\frac{b+e}{2ax^3}\right)=\frac{-A\,dx}{2ax^5}(8a+(b+e)\,x^2).$$

Итак,

$$\frac{dy}{y}=\frac{-(48a^2+12a\,(b+e)x^2+(e^2-b^2)\,x^4)}{x\,(a+bx^2)\,(8a+(b+e)\,x^2)},$$

или же, разбивая на слагаемые,

$$\frac{dy}{y}=\frac{-6dx}{x}+\frac{(5b-e)\,x\,dx}{a+bx^2}+\frac{2\,(b+e)\,x\,dx}{8a+(b+e)x^2},$$

откуда интегрированием получаем

$$y=\frac{A}{x^6}(a+bx^2)^{\frac{5b-e}{2b}}(8a+(b+e)\,x^2).$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

1007. В этом случае то, что по найденному значению z оказалось возможным удобным образом определить количество y, может представляться случайной удачей, однако следующим образом можно в общем виде показать, что это должно всегда получаться. Действительно, поскольку заданное уравнение

$$L\,d^2y+M\,dx\,dy+Ny\,dx^2=0$$

с помощью подстановки $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{Nz\,dx^2}{L\,dz}$ преобразуется в уравнение

$$L\,d^2z-M\,dx\,dz-\frac{L\,dN\,dz}{N}+dL\,dz+Nz\,dx^2=0,$$

то, если последнее разделить на Ldz, получаем

$$\frac{d^2z}{dz}-\frac{M\,dx}{L}-\frac{dN}{N}+\frac{dL}{L}=-\frac{Nz\,dx^2}{L\,dz}=\frac{dy}{y},$$

откуда с помощью интегрирования находим

$$y=\frac{\alpha L\,dz}{N\,dx}\,e^{-\int\frac{M\,dx}{L}}$$

Таким образом, когда найдено значение z, сразу получаем без последующего интегрирования значение y.

Далее, так как $dy=\frac{-Nyz\,dx^2}{L\,dz}$, то

$$dy=-\alpha z\,dx\,e^{-\int\frac{M\,dx}{L}},$$

следовательно,

$$y\,dy=\frac{-\alpha^2Lz\,dz}{N}\,e^{-2\int\frac{M\,dx}{L}}$$

На эти соотношения тем более следует обратить внимание, что, исходя из них, мы можем предложенное уравнение свести к преобразованному только длинными обходными путями[1]). Действительно, то выражение, которое подставляем вместо y, приводит к дифференциальному уравнению третьего порядка, каковое, впрочем, очевидным образом интегрируется и дает то уравнение, которое здесь получено. Таким образом, здесь мы встречаемся с тем случаем, когда надо найти такие подстановки, которые хотя и приводят к дифференциалам третьего порядка, однако с помощью интегрирования сводятся, как выясняется, ко вторым дифференциалам.

ЗАДАЧА 127

1008. *Преобразовать с помощью подстановки* $y=\frac{P\,dz}{dx}$ *дифференциальное уравнение второго порядка*

$$L\,d^2y+M\,dx\,dy+Ny\,dx^2=0$$

в другое дифференциальное уравнение также второго порядка.

РЕШЕНИЕ

Так как $y=\frac{P\,dz}{dx}$, то

$$dy=\frac{P\,d^2z+dP\,dz}{dx}\quad\text{и}\quad d^2y=\frac{P\,d^3z+2\,dP\,d^2z+dz\,d^2P}{dx},$$

и после подстановки этих выражений получаем следующее дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$LP\,d^3z+2L\,dP\,d^2z+L\,dz\,d^2P+MP\,dx\,d^2z+M\,dx\,dP\,dz+NP\,dx^2\,dz=0.$$

Мы предполагаем, что это уравнение таково, что оно оказывается

---

[1]) Quod ex iis aequatio proposita nonnisi per plures ambages ad transformatam reduci possit.

интегрируемым после умножения на некоторую функцию от x, и пусть эта функция будет Q. Итак, интегрируемым должно быть следующее выражение:

$$LPQ\,d^3z+2LQ\,dP\,d^2z+MPQ\,dx\,d^2z+LQdz\,d^2P$$
$$+MQ\,dx\,dP\,dz+NPQ\,dx^2\,dz=0,$$

и пусть его интегралом является

$$LPQ\,d^2z+S\,dx\,dz+Tz\,dx^2=C\,dx^2.$$

Отсюда получаем

$$d^2z\,(2LQ\,dP+MPQ\,dx)=d^2z\,(d(LPQ)+S\,dx),$$
$$dz\,(LQ\,d^2P+MQ\,dx\,dP+NPQ\,dx^2)=dz\,(dx\,dS+T\,dx^2)$$

и $z\,dx^2\,dT=0$; таким образом, T — постоянное количество. Отсюда также следует, что

$$S\,dx=LQ\,dP-LP\,dQ-PQ\,dL+MPQ\,dx,$$

откуда с учетом предыдущей зависимости получаем

$$T\,dx^2=LQ\,d^2P+MQ\,dx\,dP+NPQ\,dx^2-LQ\,d^2P-L\,dP\,dQ-Q\,dP\,dL$$
$$+LP\,d^2Q+L\,dP\,dQ+P\,dQ\,dL+PQ\,d^2L+P\,dQ\,dL+Q\,dP\,dL$$
$$-MP\,dx\,dQ-MQ\,dx\,dP-PQ\,dx\,dM,$$

или

$$T\,dx^2=Pd^2\,(LQ)-P\,dx\,d\,(MQ)+PNQ\,dx^2.$$

Так как T — количество постоянное, положим $T=\alpha$, мы можем отсюда легко определить функцию P, а именно

$$P=\frac{\alpha\,dx^2}{d^2(LQ)-dx\,d\,(MQ)+NQ\,dx^2},$$

и, принимая это значение для P, преобразуем предложенное уравнение с помощью подстановки $y=\frac{P\,dz}{dx}$ в следующее:

$$LPQ\,d^2z+dz\,(LQ\,dP-LP\,dQ-PQ\,dL+MPQ\,dx)+\alpha z\,dx^2=C\,dx^2.$$

Здесь можно опустить постоянное C, так как z можно увеличить на постоянное количество. Затем разделим это уравнение на PQ, что дает

$$L\,d^2z+dz\left(\frac{L\,dP}{P}-\frac{LdQ}{Q}-dL+M\,dx\right)+\frac{\alpha z\,dx^2}{PQ}=0,$$

или же, подставляя в последний член значение P,

$$L\,d^2z+dz\left(\frac{L\,dP}{P}-\frac{d(LQ)}{Q}+M\,dx\right)+\frac{z}{Q}\,(d^2\,(LQ)-dx\,d\,(MQ)+NQ\,dx^2)=0,$$

причем здесь можно принять в качестве Q какую угодно функцию от x.

СЛЕДСТВИЕ 1

1009. Предыдущую [§ 1000] подстановку можно отсюда вывести, полагая

$$d^2\,(LQ)-dx\,d\,(MQ)=0,$$

откуда следует, что

$$d\,(LQ)-MQ\,dx=C\,dx,$$

то есть

$$e^{-\int \frac{M\,dx}{L}} LQ = C \int e^{-\int \frac{M\,dx}{L}} dx + D.$$

А если здесь принять $C=0$, то получим

$$Q = \frac{D}{L} e^{+\int \frac{M\,dx}{L}} \quad \text{и} \quad P = \frac{\alpha\,dx^2}{NQ\,dx^2} = \frac{\alpha}{NQ},$$

то есть $P = \frac{\alpha L}{N} e^{-\int \frac{M\,dx}{L}}$, как выше [§ 1001].

СЛЕДСТВИЕ 2

1010. Если же положим

$$d^2(LQ) - dx\,d(MQ) = dX\,dx,$$

так что

$$P = \frac{\alpha\,dx}{dX + NQ\,dx},$$

то получим

$$d(LQ) - MQ\,dx = X\,dx + A\,dx$$

и затем, интегрируя, находим

$$e^{-\int \frac{M\,dx}{L}} LQ = \int e^{-\int \frac{M\,dx}{L}} dx\,(X + A) + B$$

и

$$Q = \frac{1}{L} e^{\int \frac{M\,dx}{L}} \int e^{-\int \frac{M\,dx}{L}} dx\,(X + A) + \frac{B}{L} e^{\int \frac{M\,dx}{L}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1011. Положим $\int e^{-\int \frac{M\,dx}{L}} X\,dx = e^{-\int \frac{M\,dx}{L}} V$ и $A=0$, $B=0$; тогда $X = \frac{dV}{dx} - \frac{MV}{L}$ и $Q = \frac{V}{L}$; таким образом,

$$P = \frac{\alpha\,dx}{\frac{d^2V}{dx} - \frac{M}{L}\,dV - V d\,\frac{M}{L} + \frac{N}{L}\,dx}.$$

Следовательно, если положить $V=\alpha$, то будем иметь

$$Q = \frac{\alpha}{L}, \quad P = \frac{L^2\,dx}{LN\,dx - L\,dM + M\,dL}$$

и получаем окончательно уравнение

$$L\,d^2z + dz\left(\frac{L\,dP}{P} + M\,dx\right) + \frac{z\,dx\,(LN\,dx - L\,dM + M\,dL)}{L} = 0.$$

ПОЯСНЕНИЕ

1012. Все это, однако, является слишком общим, чтобы отсюда можно было сделать какие-либо заключения для общего использования. Впрочем, как бы ни выбиралось преобразование и как бы ни определялось в виде ряда решение преобразованного уравнения, оно, как видно, не обрывается ни в каких случаях, кроме тех, когда само предложенное уравнение и, стало быть, уравнение, которое получается из него с помощью первой подстановки, имеют решение в виде где-либо обрывающегося ряда. Отсюда ясно, что вряд ли можно получить какие-либо новые случаи интегрируемости с помощью такого рода преобразований. Впрочем, если до сих пор мы вводили с помощью подстановки вместо переменного y другое переменное z, а переменное x, из степеней которого образовывали ряды, мы сохраняли, то теперь мы вкратце исследуем вопрос — как надо выполнять преобразование, при котором вместо x вводится другое переменное t. Здесь, прежде всего, укажем на то, что как первоначально принимается постоянным элемент dx, так в уже преобразованном уравнении нужно принимать постоянным элемент dt. Конечно, здесь мы обозначаем через t некоторую произвольную функцию[1]) от x, которая, впрочем, должна быть таковой, чтобы получающееся уравнение не было слишком сложным.

ЗАДАЧА 128

1013. *В предложенном дифференциальном уравнении второго порядка*

$$L\,d^2y+M\,dx\,dy+Ny\,dx^2=0$$

ввести вместо количества x другое количество t, которое является какой-либо функцией от x.

РЕШЕНИЕ

Поделив уравнение на dx, мы представим его в виде

$$Ld\frac{dy}{dx}+M\,dy+Ny\,dx=0,$$

чтобы уже в дальнейшем не рассматривать элемент dx, который принимался раньше постоянным. Так как t равно некоторой функции от x, то, следовательно, $dt=P\,dx$, или же $dx=\frac{dt}{P}$, и таким образом, находим

$$L\,d\frac{P\,dy}{dt}+M\,dy+\frac{Ny\,dt}{P}=0,$$

или же, считая элемент dt постоянным,

$$LP\,d^2y+L\,dP\,dy+M\,dt\,dy+\frac{Ny\,dt^2}{P}=0,$$

где остается только во все конечные выражения, в которые до сих пор входило переменное x, ввести вместо него переменное t.

ПРИМЕР

1014. *Предложено уравнение*

$$x^2(a+bx^n)\,d^2y+x(c+ex^n)\,dx\,dy+(f+gx^n)\,y\,dx^2=0,$$

ввести в него вместо выражения $h+kx^n$ [переменное] t.

Стало быть, полагаем

$$t=h+kx^n$$

[1]) Hic igitur t scribetur loco certae cujuspiam functionis ipsius x.

и будем иметь

$$dt = nkx^{n-1}\,dx,$$

следовательно,

$$P = nkx^{n-1} \text{ и } dP = n(n-1)\,kx^{n-2}\,dx = \frac{(n-1)\,dt}{x}.$$

Поэтому получаем

$$nkx^{n+1}(a+bx^n)\,d^2y + (n-1)\,x\,dt\,dy\,(a+bx^n) + x\,(c+ex^n)\,dt\,dy + \frac{(f+gx^n)\,y\,dt^2}{nkx^{n-1}} = 0$$

или, иначе,

$$nk(a+bx^n)\,d^2y + \frac{(n-1)\,dt\,dy\,(a+bx^n) + dt\,dy\,(c+ex^n)}{x^n} + \frac{(f+gx^n)\,y\,dt^2}{nkx^{2n}} = 0.$$

А так как вместе с тем $x^n = \frac{t-h}{k}$, то после подстановки этого значения находим

$$n(ak-bh+bt)\,d^2y + \frac{(n-1)\,dt\,dy\,(ak-bh+bt) + dt\,dy\,(ck-eh+et)}{t-h} + \frac{(fk-gh+gt)\,y\,dt^2}{n\,(t-h)^2} = 0.$$

Конечно, здесь везде встречается $t-h$, так что уравнение получится более простым, если вместо $t-h$ писать u, а это то же самое, что вместо степени x^n писать количество u; однако это не приносит никакой пользы при получении новых рядов.

СЛЕДСТВИЕ

1015. Если в общем уравнении [§ 1013] вместо x^m мы пожелаем писать t, то будем иметь

$$dt = mx^{m-1}\,dx \text{ и } P = mx^{m-1}$$

и, так как

$$dP = m(m-1)\,x^{m-2}\,dx = \frac{(m-1)\,dt}{x},$$

получаем следующее уравнение:

$$mLx^{m-1}\,d^2y + \frac{(m-1)L\,dt\,dy}{x} + M\,dt\,dy + \frac{Ny\,dt^2}{mx^{m-1}} = 0,$$

то есть

$$mL\,d^2y + \frac{(m-1)L\,dt\,dy}{t} + \frac{Mx\,dt\,dy}{t} + \frac{Nx^2y\,dt^2}{mt^2} = 0.$$

ПОЯСНЕНИЕ

1016. Нет необходимости в дальнейшем рассмотрении такого рода преобразований [дифференциальных] уравнений потому, что на основании изложенного можно без труда получить все удобные в применении преобразования [1]). Зато будет дан другой, вполне своеобразный [2]), метод

[1]) Cum ex his fontibus haud difficulter omnes transformationes ad usum idoneae derivari queant.

[2]) Prorsus singularis.

для представления интегралов такого рода дифференциальных уравнений второго порядка. При этом используются интегральные выражения, в которые входят два переменных, причем одно из них при интегрировании рассматривается как постоянное. Так, пусть P есть некоторая функция двух переменных x и u, и мы положим $y=\int P\,dx$, рассматривая u при интегрировании как постоянное; этот интеграл $\int P\,dx$ будет функцией от x и u, и, если его определить так, чтобы он исчезал, когда полагаем $x=0$, а затем принять $x=a$[1]), получим функцию только от u, равную y, и если она удовлетворяет некоторому предложенному дифференциальному уравнению относительно u и y, то решением этого уравнения будет выражение $y=\int P\,dx$, которое можно рассматривать как его [уравнения] интеграл. И таким образом могут быть представлены интегралы бесчисленного множества дифференциальных уравнений второго порядка, которые, по-видимому, совершенно недоступны другим методам[2]). При этом, хотя выражение $\int P\,dx$, в котором количество u рассматривается как постоянное, фактически может не интегрироваться, однако его интеграл[3]) в данном вопросе можно принимать как известный, так как его значение во всяком случае может быть определено приближенным способом. Очевидно, если x считать абсциссой и если P обозначает прямоугольную аппликату, ей соответствующую, то выражение $\int P\,dx$ представляет площадь, определяемую абсциссой x этой кривой; когда же полагаем $x=a$, получается определенная площадь, значение которой равно $y=\int P\,dx$ согласно только что данным определениям, и, стало быть, эта площадь, как обычно выражаются, может быть определена в виде квадратуры кривой. Поэтому будет удобно назвать этот способ интегрирования построением с помощью квадратур[4]). Но здесь прежде всего надлежит учесть те соображения, в силу которых мы различаем частные и полные интегралы: надо особенно предостеречь от того, чтобы рассматривать найденные таким способом интегралы как полные, если только они не содержат двух произвольных постоянных. А так как одному и тому же дифференциальному уравнению соответствует бесчисленное множество частных интегралов, не следует удивляться, если мы будем находить указанным способом для одного и того же предложенного уравнения несколько различных интегралов.

Эти рассмотрения являются почти полностью новыми, и до сих пор они никем не были изложены, за исключением некоторых примеров,

---

[1]) Si deinceps statuatur $x=a$... — Это значит на современном языке, что интеграл $\int P\,dx$ рассматривается как определенный с пределами интегрирования 0 и a

[2]) Quae aliis methodis prorsus intractabiles videntur.

[3]) Ejus integrale...; конечно, логичнее звучало бы: этот интеграл (his integrale).

[4]) Эйлер выбирает это название, так как он, задаваясь подынтегральной функцией в определенном интеграле, конструирует те дифференциальные уравнения второго порядка, решением которых является исходный определенный интеграл. Отсюда и название следующей главы.

которые, право, я уже давно приводил[1]). Но не следует из-за этого сомневаться в том, что этот метод, если его более тщательно разработать, приведет со временем к весьма замечательным вкладам в Анализ[2]).

---

[1]) См. письма Эйлера к Даниилу Бернулли от 1734 г., опубликованные Энестремом в Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, стр. 126, особенно стр. 140 (также в Opera Omnia, Ser. III, vol. 12), и работы Эйлера № 44, 45, 52, 70, 274 по списку Энестрема: «De infinitis curvis eiusdem generis», Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1734/5), 1740, стр. 174; «Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis», там же, стр. 184; «Solutio problematum rectificationem ellipsis requirentium», Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1736), 1741, стр. 86; «De constructione aequationum», Comment. acad. sc. Petrop. 9 (1737), 1744, стр. 85; «Constructio aequationis differentio-differentialis $Ay\,du^2+(B+Cu)\,du\,dy+(D+Eu+Fu^2)\,d^2y=0$ sumto elemento dx constante», Novi Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1760/1), 1763, стр. 150 [Л. Ш.].

[2]) Ex quo dubitare non licet, quin ista methodus, si diligentius excolatur, aliquando forte praeclara incrementa in Analysin sit allatura.

ГЛАВА X

О ПОСТРОЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТУР КРИВЫХ[1]

ЗАДАЧА 129

1017. *Пусть* $y=\int V\,dx$, *где* V *обозначает какую угодно функцию двух количеств* x и u, *из которых, однако,* u *при интегрировании рассматривается как постоянное, и пусть после интегрирования полагаем* $x=a$, *так что* y *равняется некоторой функции от* u; *определить значение* $\frac{dy}{du}$|, *рассматривая уже* u *как переменное.*

РЕШЕНИЕ

Так как $\int V\,dx$ представляет некоторую функцию двух количеств x и u, дифференциал которой, когда полагаем u постоянным, есть $V\,dx$, то, если как u, так и x рассматриваются как переменные, дифференциал равенства $y=\int V\,dx$[2]) будет иметь такой вид: $dy=V\,dx+$ $+U du$; а так как это есть настоящий дифференциал[3]), то необходимо, чтобы $\left(\frac{dV}{du}\right)=\left(\frac{dU}{dx}\right)$[4]). С другой стороны, поскольку V является заданной функцией от x и u, следует положить $dV=Pdx+Qdu$, и будем иметь $\left(\frac{dV}{du}\right)=Q$, следовательно, $\left(\frac{dU}{dx}\right)=Q$. Рассматривая здесь u снова как постоянное, получаем, что $dU=Q\,dx$ и $U=\int Q\,dx$, причем при этом интегрировании только x является переменным. Вследствие этого, если рассматривать это значение $\int Q\,dx$ как извест-

---

[1]) Разъяснение смысла этого заголовка см. в § 1016, в частности примечание 4.

[2]) В оригинале differentiale aequationis.

[3]) Verum differentiale; в современной терминологии — точный дифференциал.

[4]) Еще раз напоминаем, что круглыми скобками Эйлер обозначает частные производные.

ное, поскольку мы можем его определить с помощью квадратур, получаем, что $dy = V\,dx + du \int Q\,dx$. Но мы ищем тот дифференциал [переменного] y, который определяется изменением только u. Так как это $dy = du \int Q\,dx$, то искомое значение $\frac{dy}{du}$ равно $\int Q\,dx$, конечно, если после интегрирования положить и здесь $x = a$.

СЛЕДСТВИЕ 1

1018. Поскольку $y = \int V\,dx$ есть функция от x и u, а при интегрировании выражения $V\,dx$, в котором u рассматривается как постоянное, может добавиться вместо постоянного какая угодно функция от u, функция y сама по себе является неопределенной, однако она сразу определится, раз интеграл $\int V\,dx$ принимается таким, чтобы он исчезал при $x = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2

1019. Если соблюдается условие, чтобы y исчезал при $x = 0$, какое бы значение ни приписывать второму количеству u, то будем иметь также $y + du\left(\frac{dy}{du}\right) = 0$, когда $x = 0$, и, следовательно, $\left(\frac{dy}{du}\right) = 0$[1]. Отсюда ясно, что $\int Q\,dx = \frac{dy}{du}$ тоже должен быть определен так, чтобы он исчезал при $x = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3

1020. Так как $y = \int V\,dx$, то $\left(\frac{dy}{dx}\right) = V$, откуда

$$\left(\frac{d^2y}{du\,dx}\right) = \left(\frac{dV}{du}\right).$$

Если же положить $\left(\frac{dy}{du}\right) = Z$, то будем иметь также $\left(\frac{d^2y}{du\,dx}\right) = \left(\frac{dZ}{dx}\right)$, следовательно, $\left(\frac{dZ}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{du}\right)$.

Поэтому, рассматривая u как постоянное, получим

$$dZ = dx\left(\frac{dV}{du}\right) \quad \text{и} \quad Z = \int dx\left(\frac{dV}{du}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{dy}{du}\right) = \int dx\left(\frac{dV}{du}\right)\text{[2]}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

1021. Стало быть, если после интегрирований, произведенных таким образом, чтобы интегралы исчезали при $x = 0$, положить $x = a$,

[1] Подразумевается: при $x = 0$.

[2] Здесь, собственно, нет ничего нового по сравнению с § 1017, и последнее равенство может быть сразу написано, так как $Q = \left(\frac{dV}{du}\right)$.

то как значение $y=\int V\,dx$, так и $\left(\frac{dy}{du}\right)-\int dx\left(\frac{dV}{du}\right)$ будет определенной функцией от u.

СЛЕДСТВИЕ 5

1022. Действуя таким же образом и дальше[1]), найдем

$$\frac{d^2y}{du^2}=\int dx\left(\frac{d^2V}{du^2}\right).$$

Поэтому, если L, M и N обозначают любые функции от u, то

$$\frac{L\,d^2y}{du^2}+\frac{M\,dy}{du}+Ny=\int dx\left[L\left(\frac{d^2V}{du^2}\right)+M\left(\frac{dV}{du}\right)+NV\right],$$

и все дело сводится к тому, чтобы это выражение допускало интегрирование.

ПОЯСНЕНИЕ

1023. Очевидно, если даны функции L, M, N от u, то надо искать такую функцию V двух переменных x и u, чтобы выражение

$$\left[L\left(\frac{d^2V}{du^2}\right)+M\left(\frac{dV}{du}\right)+NV\right]dx,$$

где u рассматривается как постоянное, было вполне интегрируемым[2]), а его интеграл надо для определенности выбирать таким, чтобы он исчезал, когда полагаем $x=0$. Вместе с тем надо принять $x=a$, и если указанный интеграл исчезает также и в этом случае, то будем иметь

$$\frac{L\,d^2y}{du^2}+\frac{M\,dy}{du}+Ny=0,$$

и, следовательно, этому уравнению удовлетворяет значение $y=\int V\,dx$, определенное по указанному правилу. Однако задача найти по заданным функциям L, M и N функцию V является в высшей степени неопределенной и не может быть в общем случае решена с помощью известных до сих пор методов. Поэтому следует ее рассматривать в обратном порядке, так, чтобы, задаваясь функцией V, определять остальные функции L, M и N[3]). Таким образом мы придем к дифференциальным уравнениям второго порядка, чьи интегралы можно будет определить указанным способом, и это даст значительную выгоду, когда к этим уравнениям нельзя применить другие методы. Если же указанный интеграл

$$\int\left[L\left(\frac{d^2V}{du^2}\right)+M\left(\frac{dV}{du}\right)+NV\right]dx$$

---

[1]) Simili modo ulterius progrediendo.

[2]) Absolute fiat integrabilis.

[3]) Ut sumta functione V alterae L, M et N indagentur.

не исчезает, когда полагаем $x=a$, а представляет заданную функцию U от u, то значение $y=\int V\,dx$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{L\,d^2y}{du^2}+\frac{M\,dy}{du}+Ny=U.$$

Так как последнее уравнение можно бесчисленным множеством способов преобразовывать к другим видам, то определяются также интегралы и в этих случаях, и это оказывается удобным и тогда, когда мы получаем только частные интегралы, потому что большей частью можно по ним без труда найти полный интеграл.

ЗАДАЧА 130

1024. *Найти дифференциальные уравнения второго порядка вида*

$$\frac{L\,d^2y}{du^2}+\frac{M\,dy}{du}+Ny=U,$$

где L, M и N — функции от u, элемент которого du здесь принимается постоянным, чьи интегралы могут быть построены с помощью квадратур [1]).

РЕШЕНИЕ

Пусть V является некоторой функцией двух переменных u и x и пусть интеграл $\int V\,dx$, где количество u рассматривается как постоянное, берется так, чтобы он исчезал при $x=0$; вместе с тем полагаем $x=a$, где a обозначает некоторое постоянное количество, чтобы $\int V\,dx$ выражал уже некоторую функцию только от u, и этой функции приравнивается количество y, так что $y=\int V\,dx$. Поскольку отсюда следует:

$$\frac{dy}{du}=\int dx\left(\frac{dV}{du}\right) \text{ и } \frac{d^2y}{du^2}=\int dx\left(\frac{d^2V}{du^2}\right),$$

причем эти интегралы тоже берутся так, чтобы они исчезали при $x=0$, и вместе с тем принимаем [в них] $x=a$, то надо найти такие функции L, M, N от u, чтобы выражение

$$\int dx\left[L\left(\frac{d^2V}{du^2}\right)+M\left(\frac{dV}{du}\right)+NV\right]$$

было вполне интегрируемым; при этом интеграл определяется так [2]), чтобы он равнялся U, когда полагаем $x=a$. Если все это выполнено, то очевидно, что принятое нами выражение $y=\int V\,dx$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{L\,d^2y}{du^2}+\frac{M\,dy}{du}+Ny=U.$$

---

[1]) В оригинале: quarum integrale ope constructionis per quadratures exhiberi possit.

[2]) Fiat absolute integrabilis, ejusque integrale i ta determinetur... И тут надо было бы заменить «его интеграл» на «этот интеграл».

СЛЕДСТВИЕ 1

1025. Итак, выбор функции V не целиком в нашем произволе, а следует всеми средствами стремиться к тому[1]), чтобы выражение

$$\int dx\left[L\left(\frac{d^2V}{du^2}\right)+M\left(\frac{dV}{du}\right)+NV\right]$$

интегрировалось бы непосредственно.

СЛЕДСТВИЕ 2

1026. Стало быть, на этом основании сразу исключается бесчисленное множество выражений, непригодных для указанной цели, и к ним относятся $V=UP$, где U – функция только от u и P — функция только от x, так как тогда мы имели бы

$$y=U\int P\,dx,\quad \frac{dy}{du}=\frac{dU}{du}\int P\,dx \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{du^2}=\frac{d^2U}{du^2}\int P\,dx,$$

так что из их комбинации нельзя получить непосредственно интегрируемого выражения, поскольку в них входит один и тот же интеграл.

ПРИМЕР 1

1027. *Пусть* $V=x^n\sqrt{\frac{u^2+x^2}{c^2-x^2}}$ *и* $y=\int x^n dx\sqrt{\frac{u^2+x^2}{c^2-x^2}}$, *где интеграл исчезает при* $x=0$, *а в нем принимаем* $x=a$[2]).

Итак, будем иметь

$$\left(\frac{dV}{du}\right)=x^n\frac{u}{\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2V}{du^2}\right)=x^n\frac{x^2}{(u^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{c^2-x^2}},$$

и интегрируемым должно быть следующее выражение:

$$x^n\,dx\left(\frac{Lx^2}{(u^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{c^2-x^2}}+\frac{Mu}{\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}}+N\sqrt{\frac{u^2+x^2}{c^2-x^2}}\right),$$

то есть

$$\frac{x^n dx}{(u^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{c^2-x^2}}\left[Lx^2+Mu(u^2+x^2)+N(u^2+x^2)^2\right].$$

Пусть интеграл[3]) равен $\frac{x^{n+1}\sqrt{c^2-x^2}}{\sqrt{u^2+x^2}}$. Так как его дифференциалом будет

$$\frac{(n+1)x^n(c^2-x^2)(u^2+x^2)-x^{n+2}(u^2+x^2)-x^{n+2}(c^2-x^2)}{(u^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{c^2-x^2}}dx,$$

---

[1]) Sed ad hoc potissimum est spectandum, ut...

[2]) Как выше, подразумевается, что эта подстановка выполняется после того, как интегрирование произведено, т. е. $x=a$ есть верхний предел интеграла, которым выражается y.

[3]) То есть интеграл от предыдущего выражения.

то есть

$$\frac{x^n dx}{(u^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{c^2-x^2}}\left\{\begin{matrix}(n+1)\,c^2u^2+(n+1)\,c^2x^2-(n+1)\,u^2x^2-(n+1)\,x^4\\ -c^2x^2 \qquad\qquad -u^2x^2\end{matrix}\right\},$$

то из сравнения с заданными выражениями получаем

$$Mu^3+Nu^4=(n+1)\,c^2u^2,$$
$$L+Mu+2Nu^2=nc^2-(n+2)\,u^2$$

и

$$N=-(n+1).$$

Отсюда находим

$$Mu=(n+1)\,(c^2+u^2),$$

то есть

$$M=\frac{(n+1)\,(c^2+u^2)}{u},$$

и

$$L=-(n+1)\,(c^2+u^2)+2\,(n+1)\,u^2+nc^2-(n+2)\,u^2,$$

то есть

$$L=-c^2-u^2.$$

Поэтому будем иметь

$$-\frac{(c^2+u^2)\,d^2y}{du^2}+\frac{(n+1)\,(c^2+u^2)\,dy}{u\,du}-(n+1)\,y=\frac{a^{n+1}\sqrt{c^2-a^2}}{\sqrt{a^2+u^2}},$$

и этому уравнению удовлетворяет $y=\int x^n dx\sqrt{\frac{u^2+x^2}{c^2-x^2}}$, где интегрирование выполняется так, как указано.

СЛЕДСТВИЕ 1

1028. Таким образом, если принять $a=c$, то интегральное выражение

$$y=\int x^n dx\sqrt{\frac{u^2+x^2}{c^2-x^2}},$$

в котором после интегрирования полагаем $x=c$, представляет интеграл уравнения

$$u\,(c^2+u^2)\,d^2y-(n+1)\,(c^2+u^2)\,du\,dy+(n+1)\,uy\,du^2=0,$$

т. е. [уравнения]

$$d^2y-\frac{(n+1)\,du\,dy}{u}+\frac{(n+1)\,y\,du^2}{c^2+u^2}=0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1029. Пусть $n=1$; с помощью интегрирования находим

$$\int x\,dx\sqrt{\frac{u^2+x^2}{c^2-x^2}}=\frac{1}{4}(c^2+u^2)\arcsin\frac{2x^2-c^2+u^2}{c^2+u^2}$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{c^2u^2+c^2x^2-u^2x^2-x^4}-\frac{1}{4}(c^2+u^2)\arcsin\frac{-c^2+u^2}{c^2+u^2}+\frac{1}{2}cu.$$

и, полагая $x=c$, будем иметь

$$y=\frac{1}{4}\ (c^2+u^2)\arccos\frac{u^2-c^2}{c^2+u^2}+\frac{1}{2}cu,$$

следовательно,

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u\arccos\frac{u^2-c^2}{c^2+u^2}$$

и

$$\frac{d^2y}{du^2}=\frac{1}{2}\arccos\frac{u^2-c^2}{c^2+u^2}-\frac{cu}{c^2+u^2},$$

и эти выражения, очевидно, удовлетворяют уравнению[1])

$$d^2y-\frac{2\,du\,dy}{u}+\frac{2\,y\,du^2}{c^2+u^2}=0.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1030. В этом случае интеграл может быть выражен также следующим образом:

$$y=\frac{1}{4}\ (c^2+u^2)\arcsin\frac{2cu}{c^2+a^2}+\frac{1}{2}cu,$$

или же, так как его любое кратное также удовлетворяет [уравнению],

$$y=(c^2+u^2)\arcsin\frac{2cu}{c^2+u^2}+2cu.$$

Но [уравнению] удовлетворяет также $y=c^2+u^2$, поэтому полным интегралом является

$$y=\alpha\ (c^2+u^2)\arcsin\frac{2cu}{c^2+u^2}+2\alpha\,cu+\beta\,(c^2+u^2).$$

ПОЯСНЕНИЕ

1031. Что уравнению удовлетворяет значение $y=c^2+u^2$, можно заключить из найденного интеграла, так как ведь $\operatorname{Arcsin}\frac{2cu}{c^2+u^2}$ есть функция многозначная и может возрастать на 2π, а интеграл может возрастать на $2\pi\,(c^2+u^2)$. Но вообще должна удовлетворять [уравнению] и разность обоих интегралов, следовательно, должно удовлетворять уравнению также $y=2\pi\,(c^2+u^2)$ и, общим образом, $y=\beta\,(c^2+u^2)$. В этом случае легко усмотреть, почему принятое выражение удовлетворяет общему уравнению, даже если нельзя его развернуть с помощью интегрирования. Очевидно также, что $n+1$ должно быть положительным числом, потому что иначе условие, чтобы интеграл исчезал при $x=0$, не может быть выполнено[2]).

---

[1]) В формулах этого параграфа, как и во всем «Интегральном исчислении», имеем не Arcsin, Arccos, а Angsin, Angcos. Можно было бы думать, что Эйлер здесь имеет в виду однозначные ветви этих функций, так как он использует соотношение $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{u^2-c^2}{c^2+u^2}=\arccos\frac{u^2-c^2}{c^2+u^2}$, но это опровергается текстом § 1031.

[2]) При $n+1$ действительно получается расходящийся интеграл, а так как для Эйлера путь интегрирования мог быть только отрезком вещественной прямой, он не мог обойти особой точки $x=0$.

ПРИМЕР 2

1032. *Принимаем*

$$V = x^{n-1}(u^2+x^2)^{\mu}(c^2-x^2)^{\nu}.$$

Тогда

$$\left(\frac{dV}{du}\right) = 2\mu u x^{n-1}(u^2+x^2)^{\mu-1}(c^2-x^2)^{\nu}$$

и

$$\left(\frac{d^2V}{du^2}\right) = 2\mu x^{n-1}(c^2-x^2)^{\nu}\left[(u^2+x^2)^{\mu-1}+2(\mu-1)u^2(u^2+x^2)^{\mu-2}\right],$$

то есть

$$= 2\mu x^{n-1}(c^2-x^2)^{\nu}(u^2+x^2)^{\mu-2}\left[(2\mu-1)u^2+x^2\right].$$

Таким образом, полностью интегрироваться должно следующее выражение:

$$\int x^{n-1}\,dx\,(c^2-x^2)^{\nu}(u^2+x^2)^{\mu-2}\left\{\begin{array}{l} 2\mu\left[(2\mu-1)u^2+x^2\right]L \\ +2\mu u(u^2+x^2)M+(u^2+x^2)^2N \end{array}\right\},$$

то есть

$$\int x^{n-1}\,dx\,(c^2-x^2)^{\nu}(u^2+x^2)^{\mu-2}\left\{\begin{array}{ll} 2\mu(2\mu-1)Lu^2 & +2\mu Lx^2+Nx^4 \\ +2\mu Mu^3 & +2\mu Mux^2 \\ +Nu^4 & +2Nu^2x^2 \end{array}\right\}.$$

Интеграл положим равным $x^n(u^2+x^2)^{\mu-1}(c^2-x^2)^{\nu+1}$, и так как его дифференциалом будет

$$x^{n-1}\,dx\,(u^2+x^2)^{\mu-2}(c^2-x^2)\big(n(u^2+x^2)(c^2-x^2)$$
$$+2(\mu-1)x^2(c^2-x^2)-2(\nu+1)x^2(u^2+x^2)\big),$$

то найдем

$$2\mu(2\mu-1)Lu^2+2\mu Mu^3+Nu^4 = nc^2u^2,$$
$$2\mu L+2\mu Mu+2Nu^2 = nc^2-nu^2+2(\mu-1)c^2-2(\nu+1)u^2,$$
$$N = -n-2(\mu-1)-2(\nu+1) = -n-2\mu-2\nu.$$

Но если из первого уравнения

$$2\mu(2\mu-1)L+2\mu Mu+Nu^2 = nc^2$$

вычесть второе, получим

$$4\mu(\mu-1)L-Nu^2 = (n+2\nu+2)u^2-2(\mu-1)c^2,$$

то есть

$$4\mu(\mu-1)L = -2(\mu-1)(u^2+c^2),$$

откуда

$$L = \frac{-c^2-u^2}{2\mu}.$$

Подставив это значение в первое уравнение, получаем

$$-(2\mu-1)(c^2+u^2)+2\mu Mu-(n+2\mu+2\nu)u^2 = nc^2,$$

то есть

$$2\mu Mu = (n+2\mu-1)c^2+(n+4\mu+2\nu-1)u^2,$$

следовательно,

$$M = \frac{(n+2\mu-1)(c^2+u^2)}{2\mu u} + \frac{\mu+\nu}{\mu} u.$$

Если $n>0$, то вышеуказанный интеграл исчезает, когда полагаем $x=0$, поэтому, если положить $x=a$, получим такое уравнение:

$$-\frac{(c^2+u^2)\,d^2y}{2\mu\,du^2} + \frac{(n+2\mu-1)(c^2+u^2)\,dy}{2\mu u\,du} + \frac{(\mu+\nu)\,u\,dy}{\mu\,du}$$
$$-(n+2\mu+2\nu)\,y = a^n (a^2+u^2)^{\mu-1}(c^2-a^2)^{\nu+1},$$

интегралом которого является

$$y = \int x^{n-1}\,dx\,(u^2+x^2)^{\mu}(c^2-x^2)^{\nu},$$

причем интеграл здесь берется так, чтобы он исчезал, когда полагаем $x=0$, после чего принимаем $x=a$.

СЛЕДСТВИЕ 1

1033. Если принять $a=c$, чтобы последняя часть была $=0$[1]), если только показатель $\nu+1$ больше нуля, то выражение

$$y = \int x^{n-1}\,dx\,(u^2+x^2)^{\mu}(c^2-x^2)^{\nu},$$

в котором полагаем $x=c$ после интегрирования, произведенного таким образом, чтобы при $x=0$ было $y=0$, становится интегралом уравнения

$$u(c^2+u^2)\,d^2y - (n+2\mu-1)(c^2+u^2)\,du\,dy$$
$$-2(\mu+\nu)\,u^2\,du\,dy + 2\mu(n+2\mu+2\nu)\,uy\,du^2 = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1034. Пусть

$$n+2\mu-1=\alpha \quad\text{и}\quad n+4\mu+2\nu-1=\beta,$$

тогда

$$2\mu=\alpha+1-n \quad\text{и}\quad 2\nu=\beta+1-n-2\alpha-2+2n=\beta-1+n-2\alpha,$$

и интегралом уравнения

$$u(c^2+u^2)\,d^2y-(\alpha c^2+\beta u^2)\,du\,dy+(\alpha+1-n)(\beta-\alpha+n)\,uy\,du^2=0$$

будет

$$y=\int x^{n-1}\,dx\,(u^2+x^2)^{\frac{\alpha+1-n}{2}}(c^2-x^2)^{\frac{\beta-1+n-2\alpha}{2}}$$

где полагаем $x=c$, если только $n>0$ и $\beta-1+n>2\alpha$.

ПОЯСНЕНИЕ

1035. Это построение вполне подходит для уравнения

$$x^2(a+bx^n)\,d^2z+x(c+ex^n)\,dx\,dz+(f+gx^n)\,z\,dx^2=0.$$

Действительно, во-первых, здесь без ущерба для общности можно принять $n=2$, полагая $x^n=u^2$. Вместе с тем, как мы видели выше,

[1]) Речь идет о правой части дифференциального уравнения, полученного в конце предыдущего параграфа.

в § 997, если положить

$$z = x^{\frac{a-c}{a}+h} (a+bx)^{\frac{bc-ae}{nab}+1} y\,^{1)},$$

то уравнение переходит в

$$x^2 (a+bx^n) d^2y + x[2a - c + 2ah + (2b - e + 2nb + 2bh) x^n] dx\, dy$$
$$+ [f + ah - ch + ah^2 + (g + (b - e + nb + bh)(n+h)) x^n] y\, dx^2 = 0,$$

и если выбрать здесь h так, чтобы $ah^2 + (a-c)h + f = 0$, то получаем уравнение такого вида, построение которого мы дали. Однако в особых случаях могут встретиться трудности, и в следующих примерах указано, как их надо преодолевать.

ПРИМЕР 3

1036. *Пусть* $V = e^{mux} x^n (c-x)^\nu$.

Тогда

$$\left(\frac{dV}{du}\right) = me^{mux} x^{n+1} (c-x)^\nu \text{ и } \left(\frac{d^2V}{du^2}\right) = m^2 e^{mux} x^{n+2} (c-x)^\nu.$$

Стало быть, нужно сделать интегрируемым выражение

$$e^{mux} x^n dx (c-x)^\nu (m^2Lx^2 + mMx + N).$$

Его интеграл возьмем в виде $e^{mux}x^{n+1}(c-x)^{\nu+1}$, и, следовательно, дифференциал этого выражения должен быть равен дифференциалу выражения, приведенного выше. Так как последний есть

$$e^{mux}x^n dx (c-x)^\nu [mux(c-x) + (n+1)(c-x) - (\nu+1)x],$$

то находим

$$N = (n+1)c, \quad mM = mcu - (n+\nu+2), \quad m^2L = -mu.$$

Теперь примем $x = a$, и тогда выражение

$$y = \int e^{mux}x^n dx (c-x)^\nu$$

будет интегралом уравнения

$$-\frac{u\,d^2y}{m\,du^2} + \frac{cu\,dy}{du} - \frac{(n+\nu+2)\,dy}{m\,du} + (n+1)\,cy = e^{mau} a^{n+1} (c-a)^{\nu+1}.$$

Здесь можно положить $m = 1$; принимая $c = a$, получаем, что интегралом уравнения

$$u\,d^2y - au\,du\,dy + (n+\nu+2)\,du\,dy - (n+1)\,ay\,du^2 = 0$$

будет

$$y = \int e^{ux}x^n dx (a-x)^\nu,$$

где после интегрирования полагаем $x = a$, если только $\nu + 1 > 0$ и $n + 1 > 0$, чтобы интеграл мог быть сделан исчезающим при $x = 0$.

---

1) В § 997 эта подстановка дана только при $h = 0$, но следует заметить, что приведенное дальше уравнение получается из последнего уравнения § 997, если положить $z = x^h y$ [Л. Ш.].

СЛЕДСТВИЕ 1

1037. Если здесь положить $y = e^{\int z\,du}$, то

$$u\,dz + uz^2\,du - auz\,du + (n+\nu+2)\,z\,du - (n+1)\,a\,du = 0,$$

и интегралом этого уравнения будет

$$z = \frac{dy}{y.du} = \frac{\int e^{ux} x^{n+1}\,dx\,(a-x)^{\nu}}{\int e^{ux} x^{n}\,dx\,(a-x)^{\nu}}.$$

Если же положить $z = \frac{1}{2}a + v$, то указанное уравнение преобразуется в уравнение

$$u\,dv + uv^2\,du + (n+\nu+2)\,v\,du - \frac{1}{4}a^2u\,du - \frac{1}{2}(n-\nu)\,a\,du = 0,$$

которое, если положить $v = u^{-n-\nu-2}s$, переходит в

$$u^{-n-\nu-1}\,ds + u^{-2n-2\nu-3}s^2\,du - \frac{1}{4}a^2u\,du - \frac{1}{2}(n-\nu)\,a\,du = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1038. Пусть, далее,

$$u^{-n-\nu-2}\,du = dt, \quad \text{то есть } u^{-n-\nu-1} = -(n+\nu+1)\,t,$$

так что

$$ds + s^2\,dt - \frac{1}{4}a^2u^{2n+2\nu+4}\,dt - \frac{1}{2}(n-\nu)\,u^{2n+2\nu+3}\,dt = 0.$$

Таким образом, и это уравнение может быть построено[1]). Пусть

$$-(n+\nu+1)\,t = r,$$

тогда

$$ds - \frac{s^2\,dr}{n+\nu+1} + \frac{a^2 r^{\frac{-2n-2\nu-4}{n+\nu+1}}\,dr}{4(n+\nu+1)} + \frac{(n-\nu)\,r^{\frac{-2n-2\nu-3}{n+\nu+1}}\,dr}{2(n+\nu+1)} = 0,$$

и это уравнение, если положить $s = -(n+\nu+1)\,q$, переходит в

$$dq + q^2\,dr - \frac{a^2 r^{\frac{-2n-2\nu-4}{n+\nu+1}}\,dr - 2(n-\nu)\,r^{\frac{-2n-2\nu-3}{n+\nu+1}}\,dr}{u\,(n+\nu+1)^2} = 0,$$

где

$$u = r^{\frac{-1}{n+\nu+1}} \quad \text{и} \quad z = \frac{1}{2}a - (n+\nu+1)\,r^{\frac{n+\nu+2}{n+\nu+1}}\,q.$$

ПОЯСНЕНИЕ

1039. Так как для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{du} - a\,dy + \frac{(n+\nu+2)\,dy}{u} - \frac{(n+1)\,ay\,du}{u} = 0$$

---

[1]) Подразумевается: с помощью квадратур кривых, т. е. оно получается, исходя из некоторого наперед выбранного его решения в виде определенного интеграла.

интегралом является

$$y=\int e^{ux}x^n\,dx\,(a-x)^\nu,$$

то мы рассмотрим, каким образом это уравнение можно преобразовать к другим видам. Во-первых, пусть $u=\alpha t^\lambda$, следовательно,

$$du=\alpha\lambda t^{\lambda-1}\,dt.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{\alpha\lambda}\,d\frac{dy}{t^{\lambda-1}\,dt}-a\,dy+\frac{(n+\nu+2)\,dy}{\alpha t^\lambda}-\frac{\lambda(n+1)\,ay\,dt}{t}=0,$$

а принимая уже элемент dt постоянным, будем иметь

$$\frac{d^2y}{\alpha\lambda t^{\lambda-1}\,dt}-\frac{(\lambda-1)\,dy}{\alpha\lambda t^\lambda}-a\,dy+\frac{(n+\nu+2)\,dy}{\alpha t^\lambda}-\frac{\lambda(n+1)\,ay\,dt}{t}=0,$$

то есть

$$d^2y-\alpha\lambda at^{\lambda-1}\,dt\,dy+\frac{(\lambda n+\lambda\nu+\lambda+1)\,dt\,dy}{t}-\alpha\lambda^2(n+1)\,at^{\lambda-2}\,y\,dt^2=0,$$

и интегралом этого уравнения является

$$y=\int e^{\alpha t^\lambda x}\,x^n\,dx\,(a-x)^\nu.$$

Затем положим

$$\frac{dy}{y}=P\,dt+\frac{dz}{z},$$

так что

$$z=e^{-\int P\,dt}\,y,$$

и получим [§ 993]

$$d^2z+2P\,dt\,dz-\alpha\lambda at^{\lambda-1}\,dt\,dz+(\lambda n+\lambda\nu+\lambda+1)\frac{dt\,dx}{t}+z\,dt\,dP$$
$$+z\,dt^2\left[P^2-\alpha\lambda at^{\lambda-1}\,P+\frac{(\lambda n+\lambda\nu+\lambda+1)\,P}{t}-\alpha\lambda^2(n+1)\,at^{\lambda-2}\right]=0.$$

Для того чтобы уничтожить члены, в которые входит элемент dz, примем

$$P=\frac{1}{2}\alpha\lambda at^{\lambda-1}-\frac{(\lambda n+\lambda\nu+\lambda+1)}{2t}$$

и придем к уравнению

$$d^2z-z\,dt^2\left[\frac{(\lambda n+\lambda\nu+\lambda)^2-1}{4t^2}+\frac{1}{2}\alpha\lambda^2(n-\nu)\,at^{\lambda-2}+\frac{1}{4}\alpha^2\lambda^2a^2t^{2\lambda-1}\right]=0\ ^{1)},$$

интегралом которого, следовательно, будет

$$z=e^{-\frac{1}{2}\alpha at^\lambda}\,t^{\frac{\lambda n+\lambda\nu+\lambda+1}{2}}\int e^{\alpha t^\lambda x}\,x^n\,dx\,(a-x)^\nu.$$

Если же $\nu=n$, $\lambda^2(2n+1)^2-1=0$, то есть

$$\lambda=\frac{\pm1}{2n+1}\ \text{ и }\ \alpha=\pm\frac{2}{\lambda}=\pm2(2n+1),$$

---

[1]) $z=e^{-\frac{1}{2}\alpha^2t^\lambda}\,t^{\frac{\lambda n+\lambda\nu+\lambda+1}{2}}\,y$ [Л. Ш.].

то получим уравнение

$$d^2z - a^2zt^{\frac{\pm 2}{2n+1}-2}dt^2 = 0,$$

интегралом которого будет

$$z = e^{\pm(2n+1)at^{\frac{\pm 1}{2n+1}}}t^{\pm\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\int e^{\pm 2(2n+1)t^{\frac{\pm 1}{2n+1}}x}x^n\,dx\,(a-x)^n.$$

Или, иначе, для уравнения

$$d^2z - a^2t^{2\lambda-2}z\,dt^2 = 0$$

интегралом является

$$z = e^{-\frac{a}{\lambda}t^\lambda}t\int e^{\frac{2x}{\lambda}t^\lambda}x^{\pm\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{2}}dx\,(a-x)^{\pm\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{2}};$$

и мы здесь воспользуемся случаем, чтобы более общим образом рассмотреть интегрирование подобного рода.

ПРИМЕР 4

1040. *Пусть P и Q — некоторые функции от u и пусть*

$$y = P\int e^{Qx}x^{n-1}\,dx\,(a-x)^{\nu-1},$$

где, конечно, после интегрирования полагаем $x = a$. Ищем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{Ld^2y}{du^2} + \frac{M\,dy}{du} + Ny = 0,$$

интегралом которого является указанное значение y.

Для сокращения вычислений положим $dP = P'\,du$ и $dP' = P''\,du$, а также $dQ = Q'\,du$ и $dQ' = Q''\,du$, отсюда получаем

$$\frac{dy}{du} = P'\int e^{Qx}x^{n-1}\,dx\,(a-x)^{\nu-1} + PQ'\int e^{Qx}x^n\,dx\,(a-x)^{\nu-1}$$

и

$$\frac{d^2y}{du^2} = P''\int e^{Qx}x^{n-1}\,dx\,(a-x)^{\nu-1} + 2P'Q'\int e^{Qx}x^n\,dx\,(a-x)^{\nu-1}$$
$$+ PQ''\int e^{Qx}x^n\,dx\,(a-x)^{\nu-1} + PQ'^2\int e^{Qx}x^{n+1}\,dx\,(a-x)^{\nu-1}.$$

Таким образом, мы находим

$$L\frac{d^2y}{du^2} + \frac{M\,dy}{du} + Ny$$
$$= \int e^{Qx}x^{n-1}\,dx\,(a-x)^{\nu-1}\left\{\begin{matrix} LP'' + 2LP'Q'x + LPQ''x + LPQ'^2x^2 \\ + MP' + MPQ'x + NP \end{matrix}\right\},$$

и этот интеграл принимаем $= e^{Qx}x^n(a-x)^\nu$, так что он исчезает, когда полагаем $x = a$, если только $\nu > 0$, и он исчезает также при $x = 0$, если только $n > 0$. И так как дифференциалом этого выражения является

$$e^{Qx}x^{n-1}\,dx\,(a-x)^{\nu-1}\,[Qx(a-x) + na - (n+\nu)\,x],$$

то, сравнивая его с уже найденным выражением, получаем

$$LP'' + MP' + NP = na,$$
$$2LP'Q' + LPQ'' + MPQ' = aQ - (n + \nu)$$

и

$$LPQ'^2 = -Q, \quad \text{то есть} \quad L = \frac{-Q}{PQ'^2},$$

следовательно,

$$M = \frac{aQ}{PQ'} - \frac{n+\nu}{PQ'} + \frac{2P'Q}{P^2Q'^2} + \frac{Q'^2}{PQ'^3}$$

и

$$N = \frac{na}{P} + \frac{P''Q}{P^2Q'^2} - \frac{MP'}{P},$$

так что дифференциальное уравнение второго порядка этим определяется.

СЛЕДСТВИЕ 1

1041. Если нам желательно, чтобы было $M = 0$, то должно быть

$$aQ - (n + \nu) + \frac{2P'Q}{PQ'} + \frac{QQ''}{Q'^2} = 0,$$

и после умножения на $\frac{Q'\,du}{Q}$ получаем уравнение

$$\frac{2dP}{P} + a\,dQ - \frac{(n+\nu)\,dQ}{Q} + \frac{dQ'}{Q'} = 0,$$

интегралом которого является

$$\frac{e^{aQ}P^2Q'}{Q^{n+\nu}} = \text{Const},$$

или

$$P = Ce^{-\frac{1}{2}aQ}Q^{\frac{n+\nu}{2}}\sqrt{\frac{du}{dQ}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1042. Пусть $Q = 2au^\lambda$, тогда $Q' = 2a\lambda u^{\lambda-1}$ и

$$P = Ce^{-\alpha a u^\lambda} u^{\frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}}.$$

Следовательно[1]),

$$L = -\frac{1}{2a\lambda^2} e^{\alpha a u^\lambda} u^{\frac{-\lambda(n+\nu+1)+3}{2}}$$

и

$$N = \frac{na}{P} + \frac{Q\,d^2P}{P^2\,dQ^2}.$$

[1]) Принимается $C = 1$.

Но так как

$$\frac{Q}{dQ^2}=\frac{u^{-\lambda+2}}{2\alpha\lambda^2\,du^2},$$

и

$$\frac{dP}{P}=-\alpha\lambda a u^{\lambda-1}du+\frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}\,\frac{du}{u},$$

получим

$$\frac{d^2P}{P}=-\alpha\lambda(\lambda-1)\,au^{\lambda-2}\,du^2-\frac{\lambda(n+\nu-1)-1}{2}\,\frac{du^2}{u^2}+\alpha^2\lambda^2a^2u^{2\lambda-2}\,du^2$$
$$-\alpha\lambda a[\lambda(n+\nu-1)+1]+\frac{[\lambda(n+\nu-1)+1]^2}{4},$$

то есть

$$\frac{d^2P}{P}=\alpha^2\lambda^2a^2u^{2\lambda-2}\,du^2-\alpha\lambda^2(n+\nu)\,au^{\lambda-2}\,du^2+\frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{4}\,\frac{du^2}{u^2},$$

откуда

$$na+\frac{Q}{dQ^2}\,\frac{d^2P}{P}=\frac{1}{2}\,\alpha a^2u^{\lambda}+\frac{1}{2}(n-\nu)\,a+\frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{8\alpha\lambda^2}\,u^{-\lambda}$$

и

$$N=e^{\alpha a u^{\lambda}}u^{\frac{-\lambda(n+\nu-1)-1}{2}}\left[\frac{1}{2}\,\alpha a^2u^{\lambda}+\frac{1}{2}(n-\nu)\,a+\frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{8\alpha\lambda^2}\,u^{-\lambda}\right].$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1043. Таким образом, будем иметь

$$\frac{N}{L}=-2\alpha\lambda^2u^{\lambda-2}\left[\frac{1}{2}\,\alpha a^2u^{\lambda}+\frac{1}{2}(n-\nu)\,a+\frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{8\alpha\lambda^2}\,u^{-\lambda}\right],$$

и интегралом уравнения

$$\frac{d^2y}{du^2}=y\left[\alpha^2\lambda^2a^2u^{2\lambda-2}+\alpha\lambda^2(n-\nu)\,au^{\lambda-2}+\frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{4u^2}\right]$$

будет

$$y=e^{-\alpha a u^{\lambda}}u^{\frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}}\int e^{2\alpha u^{\lambda}x}x^{n-1}\,dx\,(a-x)^{\nu-1}.$$

Положим

$$\alpha=\frac{1}{\lambda},\quad \lambda(n-\nu)=f,\quad \text{то есть}\quad \nu=n-\frac{f}{\lambda}\quad \text{и}\quad \frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{4}=g,$$

откуда

$$n=\frac{f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}\quad \text{и}\quad \nu=\frac{-f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda};$$

интегралом уравнения

$$d^2y=y\,du^2\,(a^2u^{2\lambda-2}+afu^{\lambda-2}+gu^{-2})$$

будет

$$y=e^{\frac{-a}{\lambda}u^{\lambda}}u^{\frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}}\int e^{\frac{2x}{\lambda}u^{\lambda}}x^{n-1}\,dx\,(a-x)^{\nu-1},$$

то есть

$$y=e^{\frac{-a}{\lambda}u^{\lambda}}u^{\frac{1+\sqrt{1+4g}}{2}}\int e^{\frac{2x}{\lambda}u^{\lambda}}x^{\frac{f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}}\,dx\,(a-x)^{\frac{-f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}}$$

СЛЕДСТВИЕ 4

1044. Если положить

$$a=\frac{-1}{\lambda},\qquad \lambda(n-\nu)=-f\qquad \text{и}\qquad \frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{4}=g,$$

то

$$n=\frac{-f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}\qquad \text{и}\qquad \nu=\frac{f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda},$$

и, таким образом, интегралом уравнения

$$d^2y=y\,du^2\,(a^2u^{2\lambda-2}+afu^{\lambda-2}+gu^{-2}),$$

которое совпадает с предыдущим, будет

$$y=e^{\frac{a}{\lambda}u^\lambda}u^{\frac{1+\sqrt{1+4g}}{2}}\int e^{\frac{-2x}{\lambda}u^\lambda}x^{\frac{-f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}}dx\,(a-x)^{\frac{+f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}},$$

причем необходимо, чтобы было $n>0$ и $\nu>0$.

ПРИМЕР 5

1045. *Положим* $y=\int dx\,(a^2-x^2)^{\nu-1}\cos au^\lambda x$, *где после интегрирования принимаем* $x=a$, *так что* y *равняется некоторой функции от* u; *найти дифференциальное уравнение второго порядка, которому эта функция удовлетворяет.*

Так как имеем

$$\frac{dy}{du}=-a\lambda u^{\lambda-1}\int x\,dx\,(a^2-x^2)^{\nu-1}\sin au^\lambda x$$

и

$$\frac{d^2y}{du^2}=\int x\,dx\,(a^2-x^2)^{\nu-1}\left[-a\lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2}\sin au^\lambda x-a^2\lambda^2u^{2\lambda-2}x\cos au^\lambda x\right],$$

то отсюда

$$\frac{L\,d^2y}{du^2}+\frac{M\,dy}{du}+Ny$$

$$=\int(a^2-x^2)^{\nu-1}dx\left\{\begin{matrix}N\cos au^\lambda x-a\lambda Mu^{\lambda-1}x\sin au^\lambda x-a\lambda(\lambda-1)Lu^{\lambda-2}x\sin au^\lambda x\\ -a^2\lambda^2Lu^{2\lambda-2}x^2\cos au^\lambda x\end{matrix}\right\}.$$

Возьмем интеграл в виде $(a^2-x^2)^\nu\sin au^\lambda x$, так что он исчезает как при $x=0$, так и при $x=a$, и мы найдем из сопоставления этих выражений

$$L=\frac{u^{-\lambda+2}}{a\lambda^2},\qquad M=\frac{2\lambda\nu-\lambda+1}{a\lambda^2}u^{-\lambda+1},\qquad N=aa^2u^\lambda.$$

Поэтому интегралом уравнения

$$\frac{d^2y}{du^2}+(2\lambda\nu-\lambda+1)\frac{dy}{u\,du}+a^2\lambda^2a^2u^{2\lambda-2}y=0$$

будет

$$y=\int dx\,(a^2-x^2)^{\nu-1}\cos au^\lambda x.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

1046. Стало быть, если положить $\nu=\frac{\lambda-1}{2\lambda}$ и $\alpha=\frac{1}{\lambda}$, то для уравнения

$$\frac{d^2y}{du^2}+a^2u^{2\lambda-2}y=0$$

интегралом будет

$$y=\int dx\,(a^2-x^2)^{\frac{-\lambda-1}{2\lambda}}\cos\frac{1}{\lambda}u^\lambda x,$$

если только после интегрирования полагаем $x=a$, а интеграл берется так, чтобы он исчезал при $x=0$.

СЛЕДСТВИЕ 2

1047. Итак, пусть $\frac{-\lambda-1}{2\lambda}=i$ (целому числу), то есть $\lambda=\frac{-1}{2i+1}$; интегралом уравнения

$$d^2y+a^2u^{\frac{-4i-4}{2i+1}}y\,du^2=u$$

является

$$y=\int dx\,(a^2-x^2)^i\cos\frac{1}{\lambda}u^\lambda x,$$

что, действительно, может быть вычислено. Очевидно, мы получаем [здесь] указанные выше[1]) случаи интегрируемости.

ПОЯСНЕНИЕ

1048. Когда мы полагаем $y=\int V\,dx$, где V — какая угодно функция от u и x, причем при этом интегрировании только x рассматривается как переменное, нет нужды обязательно определять интеграл так, чтобы он исчезал при $x=0$, а достаточно, чтобы он исчезал при некотором $x=b$[2]). Если это имеет место, полагаем затем $x=a$, так чтобы y равнялось некоторой функции от u, которую можно выразить с помощью квадратур, поскольку мы здесь с полным основанием постулируем, что от нас не требуется интегрировать простые выражения[3]). И это значение y, выраженное через u, представляет интеграл некоторого дифференциального уравнения второго порядка

$$L\,d^2y+M\,du\,dy+Ny\,du^2=U\,du^2,$$

причем, однако, необходимо, чтобы следующее выражение

$$\int dx\left[L\left(\frac{d^2V}{du^2}\right)+M\left(\frac{dV}{du}\right)+NV\right]$$

---

[1]) § 951.

[2]) Sed sufficit ut certo quodam casu $x=b$ evanescat.

[3]) Quam per quadraturas assignare licet, quandoquidem hic integrationem formularum simplicium nobis concedi jure postulamus. — Под интегрированием простых выражений Эйлер здесь, видимо, понимает интегрирование функций. Он выражает здесь тот взгляд, что решением для дифференциального уравнения является и приведение к квадратуре.

могло быть действительно проинтегрировано, и этот интеграл также должен быть взят таким образом, чтобы он исчезал, когда полагаем $x=b$, и вместе с тем, когда полагаем $x=a$, чтобы он был $=U$.

ЗАДАЧА 131

1049. *Пусть P и Q — функции от x, а K — функция от u, и пусть*

$$y=\int P\,dx\,(K+Q)^n,$$

причем интеграл берется так, чтобы он исчезал при $x=b$, и в нем полагаем $x=a$, так что y оказывается функцией от u; найти дифференциальное уравнение второго порядка относительно y и u, которому удовлетворяет это значение y.

РЕШЕНИЕ

Пусть $dK=K'du$ и $dK'=K''du$; так как

$$y=\int (K+Q)^n P\,dx,$$

то

$$\frac{dy}{du}=\int nK'(K+Q)^{n-1}P\,dx,$$

и, снова дифференцируя, имеем

$$\frac{d^2y}{du^2}=\int [nK''(K+Q)^{n-1}+n(n-1)K'^2(K+Q)^{n-2}]\,P\,dx.$$

Таким образом, обозначая через L, M, N функции от u, получаем выражение

$$\frac{L\,d^2y}{du^2}+\frac{M\,dy}{du}+Ny=\int P\,dx\,(K+Q)^{n-2}\left\{\begin{matrix} N(K+Q)^2+nMK'(K+Q) \\ +nLK''(K+Q)+n(n-1)LK'^2\end{matrix}\right\}$$

$$=\int P\,dx\,(K+Q)^{n-2}\left\{\begin{matrix} NK^2+nMKK'+NLKK''+n(n-1)LK'^2 \\ +2NKQ+nMK'Q+nLK''Q+NQ^2\end{matrix}\right\}.$$

Поскольку оно должно интегрироваться, мы примем, что [этот] интеграл

$$=R(K+Q)^{n-1}+\text{Const},$$

причем он должен исчезать, когда полагаем, как и выше, $x=b$, а R является функцией только от x. Так как дифференциалом указанного выражения будет

$$(K+Q)^{n-2}[K\,dR+Q\,dR+(n-1)R\,dQ],$$

то мы должны иметь

$$[NK^2+nMKK'+nLKK''+n(n-1)LK'^2]\,P\,dx$$
$$+(2NK+nMK'+nLK'')PQ\,dx+NPQ^2\,dx$$
$$=K\,dR+Q\,dR+(n-1)R\,dQ.$$

Таким образом, здесь должны находиться члены двоякого рода: одни из них, очевидно, свободны от u, в другие же входит функция K, и их следует приравнивать в отдельности. С этой целью мы положим

$$NK^2+nMKK'+nLKK''+n(n-1)LK'^2=A+\alpha K,$$
$$2NK+nMK'+nLK''=B+\beta K$$

и

$$N=C+\gamma K.$$

Исключая из первых двух уравнений M, находим

$$-NK^2+n(n-1)LK'^2=A+\alpha K-BK-\beta K^2,$$

и отсюда, так как $N=C+\gamma K$, заключаем, что

$$L=\frac{A+(\alpha-B)K-(\beta-C)K^2+\gamma K^3}{n(n-1)K'^2},$$

следовательно,

$$M=\frac{B+\beta K-2NK-nLK''}{nK'},$$

и таким образом по функции K определяются буквы L, M и N, причем A, α, B, β, C, γ обозначают какие угодно постоянные. А теперь остается удовлетворить уравнению

$$(A+\alpha K)P\,dx+(B+\beta K)PQ\,dx+(C+\gamma K)PQ^2\,dx$$
$$=K\,dR+Q\,dR+(n-1)R\,dQ,$$

и, приравнивая здесь в отдельности члены и того и другого рода, получаем

$$P\,dx(A+BQ+CQ^2)=Q\,dR+(n-1)R\,dQ,$$
$$P\,dx(\alpha+\beta Q+\gamma Q^2)=dR,$$

откуда

$$\frac{A+BQ+CQ^2}{\alpha+\beta Q+\gamma Q^2}=Q+\frac{(n-1)R\,dQ}{dR},$$

то есть

$$\frac{(n-1)R\,dQ}{dR}=\frac{A+(B-\alpha)Q+(C-\beta)Q^2-\gamma Q^3}{\alpha+\beta Q+\gamma Q^2},$$

следовательно,

$$\frac{dR}{R}=\frac{(n-1)\,dQ(\alpha+\beta Q+\gamma Q^2)}{A+(B-\alpha)Q+(C-\beta)Q^2-\gamma Q^3},$$

так что по функции Q определяется функция R; вместе с тем

$$P\,dx=\frac{(n-1)R\,dQ}{A+(B-\alpha)Q+(C-\beta)Q^2-\gamma Q^3}.$$

Теперь уже интеграл $R(K+Q)^{n-1}+\mathrm{Const}$ переходит, если положить $x=a$, в функцию U, и принятое заранее значение

$$y=\int\frac{(n-1)R\,dQ\,(K+Q)^n}{A+(B-\alpha)Q+(C-\beta)Q^2-\gamma Q^3}$$

будет интегралом следующего дифференциального уравнения второго порядка:

$$L\,d^2y+M\,du\,dy+Ny\,du=U\,du^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

1050. Так как в качестве Q можно взять любую функцию от x, то ничто не мешает нам положить $Q = x$. А тогда R надо определять из уравнения

$$\frac{dR}{R} = \frac{(n-1)\,dx\,(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}{A + (B-\alpha)\,x + (C-\beta)\,x^2 - \gamma x^3},$$

и, беря в качестве K любую функцию от u, получим

$$y = (n-1)\int \frac{R\,dx\,(K+x)^n}{A + (B-\alpha)\,x + (C-\beta)\,x^2 - \gamma x^3},$$

где интеграл берется так, чтобы он исчезал, когда полагаем $x = b$, а вслед затем надо принять $x = a$.

СЛЕДСТВИЕ 2

1051. По функции K дифференциальное уравнение второго порядка образуется следующим образом: полагаем

$$L = \frac{A - (B-\alpha)\,K + (C-\beta)\,K^2 + \gamma K^3}{n\,(n-1)\,dK^2}\,du^2,$$

$$M = \frac{B - (2C-\beta)\,K - 2\gamma K^2}{n\,dK}\,du - \frac{L\,d^2K}{du\;dK}$$

и

$$N = C + \gamma K.$$

Затем в выражении $R\,(K+x)^{n-1} + \mathrm{Const}$, которое составляется так, чтобы оно исчезало, когда $x = b$, мы полагаем $x = a$, и пусть получающаяся при этом функция от u обозначена через U; тогда [искомое] дифференциальное уравнение второго порядка будет

$$L\,d^2y + M\,du\,dy + Ny\,du^2 = U du^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1052. Если выражение $R\,(K+x)^{n-1} + \mathrm{Const}$ составлено таким образом, что оно исчезает в обоих случаях — при $x = b$ и при $x = a$, или, лучше сказать, границы интегрирования устанавливаются таким образом, чтобы это имело место, то принятое для y выражение удовлетворяет следующему уравнению:

$$L\,d^2y + M du\,dy + Ny\,du^2 = 0;$$

если затем это уравнение будем преобразовывать к другим видам, то можно будет указать интегралы и для них.

ЗАДАЧА 132

1053. *Пусть P, Q суть функции от x, а K — функция от u, и полагаем $y = \int e^{KQ} P\,dx$, причем интеграл берется так, что он исчезает при $x = b$, а затем полагаем в нем $x = a$; y равняется функции от u, которая удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению второго порядка, каковое надлежит определить.*

РЕШЕНИЕ

Так как $y = \int e^{KQ} P\,dx$, то будем иметь

$$\frac{dy}{du} = \int e^{KQ} K' PQ\,dx$$

и

$$\frac{d^2y}{du^2} = \int e^{NQ} P\,dx\,(K''Q + K'^2Q^2),$$

и поэтому

$$\frac{L\,d^2y}{du^2} + \frac{M dy}{du} + Ny = \int e^{KQ} P\,dx\,(N + MK'Q + LK''Q + LK'^2Q^2),$$

а этот интеграл полагаем равным $e^{KQ}R + \mathrm{Const}$, причем это выражение исчезает при $x = b$. Тогда надо положить

$$dR + KR\,dQ = P\,dx\,[N + (MK' + LK'')\,Q + LK'^2Q^2],$$

и в силу указанных выше соображений [§ 1049]

$$LK'^2 = A + \alpha K, \quad MK' + LK'' = B + \beta K, \quad N = C + \gamma K;$$

получим

$$L = \frac{A + \alpha K}{K'^2} \quad \text{и} \quad M = \frac{B + \beta K}{K'} - \frac{LK''}{K'},$$

а также найдем следующие уравнения:

$$dR = P\,dx\,(C + BQ + AQ^2),$$
$$R\,dQ = P\,dx\,(\gamma + \beta Q + \alpha Q^2),$$

откуда заключаем, что

$$\frac{dR}{R} = \frac{dQ\,(C + BQ + AQ^2)}{\gamma + \beta Q + \alpha Q^2}.$$

Найдя же функцию R, будем иметь

$$P\,dx = \frac{R\,dQ}{\gamma + \beta Q + \alpha Q^2},$$

так что

$$y = \int e^{KQ} \frac{R\,dQ}{\gamma + \beta Q + \alpha Q^2}.$$

Если же выражение $e^{KQ}R + \mathrm{Const}$ обращается, когда полагаем $x = a$, в функцию U, то дифференциальное уравнение второго порядка, которому отвечает этот интеграл, будет

$$L\,d^2y + M du\,dy + Ny\,du^2 = U du^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

1054. Здесь можно, как и выше, вместо Q писать x, и тогда

$$\frac{dR}{R} = \frac{dx\,(C + Bx + Ax^2)}{\gamma + \beta x + \alpha x^2}$$

и

$$y = e^{Kx} \frac{R\,dx}{\gamma + \beta x + \alpha x^2},$$

а U получается из выражения $e^{Kx}R + \text{Const}$, когда полагаем $x = a$. Значение же R может быть представлено в различных видах в соответствии со значениями коэффициентов α, β, γ[1]).

СЛЕДСТВИЕ 2

1055. Вместо же K можно принять какую угодно функцию от u, и от свойств этой функции будет зависеть [наше] дифференциальное уравнение второго порядка[2]). Действительно, мы имеем

$$L = \frac{A + \alpha K}{dK^2}\,du^2,$$
$$M = \frac{B + \beta K}{dK}\,du - \frac{(A + \alpha K)\,du\,d^2K}{dK^3}$$

и

$$N = C + \gamma K,$$

следовательно, дифференциальное уравнение второго порядка будет

$$\frac{(A + \alpha K)\,d^2y}{dK^2} + \frac{(B + \beta K)\,dy}{dK} - \frac{(A + \alpha K)\,d^2K dy}{dK^3} + (C + \gamma K)\,y = U.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1056. Так как здесь количество u не входит в формулы, то безразлично, какую функцию от u принять в качестве L, так что можно даже без ущерба для общности положить $K = u$, лишь бы учитывалось, какой элемент принимается постоянным[3]).

ПОЯСНЕНИЕ 1

1057. Стало быть, если принять $K = u$, а также принять постоянным элемент du, так что $d^2K = 0$, то можно построить следующее уравнение:

$$\frac{(A + \alpha u)\,d^2y}{du^2} + \frac{(B + \beta u)\,dy}{du} + (C + \gamma u)\,y = U,$$

где U является функцией от u такого рода, как нами указано. Подобным же образом на основании предыдущей задачи [§ 1051] может быть построено уравнение

$$[A - (B - \alpha)\,u + (C - \beta)\,u^2 + \gamma u^3]\,\frac{d^2y}{du^2} + (n + 1)\,[B - (2C - \beta)\,u - 2\gamma u^2]\,\frac{dy}{du}$$
$$+ n\,(n - 1)(C + \gamma u)\,y = U,$$

---

[1]) Valor autem ipsius R, pro ratione coëfficientium α, β, γ varias formas induere potest.

[2]) Pro K autem quaecuque functio ipsius u accipi potest, a cujus indole aequatio differentio—differentialis pendet.

[3]) Dummodo ratio elementi, quod constans assumitur, habeatur.

которое следует считать не менее общим, чем получающееся из него при замене K какой-либо функцией от u. Действительно, отсюда могут быть выведены все эти виды, если вместо u будем писать какую угодно функцию от t и dt будем принимать постоянным. Вследствие этого настоящее уравнение оказывается значительно более общим, чем то, которое выше мы решали в общем виде с помощью бесконечных рядов. Однако большей частью эти уравнения составлены так, что выполнить их интегрирование другими методами нет возможности, и поэтому указанный здесь метод представляется вполне заслуживающим того, чтобы геометры приложили все силы для его дальнейшей разработки.

ПОЯСНЕНИЕ 2

1058. При отыскании построений указанного рода я шел следующим путем: сперва, как бы по догадке, я принимал некоторое дифференциальное выражение $\int V dx = y$, в котором V была некоторой функцией от u и x и где, впрочем, u рассматривалось как постоянное, и отсюда, придавая x подходящее значение, получал дифференциальное уравнение второго порядка относительно u и y, которому удовлетворяет принятое выражение. Однако здесь надо заметить, что это интегральное выражение не находится всецело в нашем произволе, а должно обладать некоторыми определенными свойствами, чтобы после выполнения всех действий дело сводилось к дифференциальному уравнению второго порядка. Поскольку, однако, такой выбор был возможен только по догадке, мы подметили только немногие выражения такого рода, которые приводят к поставленной цели, и тем менее можно надеяться на то, чтобы как-нибудь получить таким путем заданное дифференциальное уравнение второго порядка, так что, по-видимому, главным образом случаю надо приписать те построения, которые мы здесь изложили. Но так как и по сей день мы весьма далеки от решения задачи отыскать для любого предложенного дифференциального уравнения второго порядка то выражение, которое представляет его интеграл, и, по-видимому, даже не ясно, получит ли когда-либо эта задача решение, то тем более нужно прилагать усилия для того, чтобы по крайней мере в частных случаях мы могли определять интегрирующее выражение по свойствам предложенного уравнения, чем мы некоторым образом прокладываем путь к непосредственному решению. Для этой же цели могут быть с пользой применены те бесконечные ряды, с помощью которых, как мы выше показали, решаются такого рода уравнения. Поэтому в следующей главе я изложу метод нахождения по бесконечному ряду, содержащему решение некоторого дифференциального уравнения второго порядка, формулы для интеграла этого уравнения.

ГЛАВА XI

О ПОСТРОЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ИХ РЕШЕНИЮ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

ЗАДАЧА 133

1059. *Предложен бесконечный ряд*

$$A+Bs+Cs^2+\ldots+Ms^{i-1}+Ns^i+ \quad \text{и т. д.,}$$

в котором пусть

$$B=\frac{0m+h}{1n+k}A, \quad C=\frac{1m+h}{2n+k}B, \quad D=\frac{2m+h}{3n+k}C,$$

и вообще $N=\frac{(i-1)m+h}{in+K}M$; *выразить его сумму в виде интеграла* [1]).

РЕШЕНИЕ

Обозначим искомую сумму через z, так что

$$z=A+Bs+Cs^2+Ds^3+\ldots+Ms^{i-1}+Ns^i+ \quad \text{и т. д.,}$$

и, дифференцируя, получим

$$\frac{s\,dz}{ds}=0A+1Bs+2Cs^2+3Ds^3+\ldots+(i-1)Ms^{i-1}+iNs^i+ \quad \text{и т. д.,}$$

а комбинируя это выражение с предыдущим, найдем

$$\frac{ms\,dz}{ds}+hz=hA+(m+h)Bs+(2m+h)Cs^2+\ldots$$
$$+[(i-1)m+h]Ms^{i-1}+(im+h)Ns^i+ \quad \text{и т. д.,}$$

но затем таким же образом получаем

$$\frac{nsdz}{ds}+kz=kA+(n+k)Bs+(2n+k)Cs^2+\ldots$$
$$+[(i-1)n+k]Ms^{i-1}+(in+k)Ns^i+ \quad \text{и т. д.,}$$

[1]) Ejus summam per formulam integralem exprimere.

следовательно, поскольку

$$(n+k)B=hA, \quad (2n+k)C=(m+h)B \text{ и т. д.},$$

будем иметь

$$\frac{ns\,dz}{ds}+kz=kA+hAs+(m+h)Bs^2+(2m+h)Cs^3+ \text{ и т. д.},$$

откуда, очевидно, получается

$$\frac{ns\,dz}{ds}+kz=kA+\frac{ms^2dz}{ds}hsz$$

или же

$$s\,dz(n-ms)+z\,ds(k-hs)=k\,A\,ds,$$

то есть

$$dz+\frac{z\,ds\,(k-hs)}{s\,(n-ms)}=\frac{kA\,ds}{s\,(n-ms)}.$$

Так как теперь имеем

$$\frac{ds\,(k-hs)}{s\,(n-ms)}=\frac{k\,ds}{ns}+\frac{(mk-nh)\,ds}{n\,(n-ms)},$$

а это уравнение становится интегрируемым при умножении на

$$s^{\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}},$$

то получаем

$$(n-ms)^{\frac{nh-mk}{ma}}s^{\frac{k}{n}}z=Ak\int s^{\frac{k}{n}-1}ds\,(n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}-1},$$

и этот интеграл надо брать так, чтобы, когда полагаем $s=0$, было $z=A$; заметив это, найдем

$$z=Aks^{-\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{mk-nh}{mn}}\int s^{\frac{k}{n}-1}ds\,(n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

1060. В особом решении нуждается случай $m=0$, когда имеем

$$dz+\frac{z\,ds\,(k-hs)}{ns}=\frac{Ak\,ds}{ns};$$

после умножения на $s^{\frac{k}{n}}e^{\frac{-hs}{n}}$ это уравнение дает

$$e^{\frac{-hs}{n}}s^{\frac{k}{n}}z=\frac{Ak}{n}\int e^{\frac{-hs}{n}}s^{\frac{k}{n}-1}ds,$$

откуда

$$z=\frac{Ak}{n}e^{\frac{hs}{n}}s^{\frac{-k}{n}}\int e^{\frac{-hs}{n}}s^{\frac{k}{n}-1}ds,$$

где интеграл берется так, чтобы $z=A$, когда полагаем $s=0$.

СЛЕДСТВИЕ 2

1061. Случай $n=0$ также должен быть решен отдельно. Действительно, уравнение

$$dz+z\,ds\left(\frac{hs-k}{ms^2}\right)=-\frac{Ak\,ds}{ms^2}$$

надо множить на $s^{\frac{h}{m}}\,e^{\frac{k}{ms}}$, и тогда найдем интеграл

$$e^{\frac{k}{ms}}\,s^{\frac{h}{m}}\,z=-\frac{Ak}{m}\int e^{\frac{k}{ms}}\,s^{\frac{h}{m}-2}\,ds,$$

откуда

$$z=-\frac{Ak}{m}\,e^{\frac{-k}{ms}}\,s^{\frac{-h}{m}}\int e^{\frac{k}{ms}}\,s^{\frac{h}{m}-2}\,ds.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1062. Если бы было и $m=0$ и $n=0$, то, так как $N=\frac{h}{k}M$, наш ряд был бы геометрическим, а наше уравнение было бы

$$z\,ds\,(k-hs)=Ak\,ds,$$

то есть

$$z=\frac{Ak}{k-hs},$$

как, очевидно, требуется по сути дела.

ПОЯСНЕНИЕ

1063. Прежде всего, здесь заслуживает быть отмеченным тот случай, когда $k=0$ и сумма z может быть выражена без знака интеграла. Действительно, получаем

$$(n-ms)^{\frac{h}{m}}\,z=\mathrm{Const}$$

и, так как при $s=0$ должно быть $z=A$, будем иметь

$$\mathrm{Const}=An^{\frac{b}{m}},$$

следовательно,

$$z=An^{\frac{h}{m}}\,(n-ms)^{\frac{-h}{m}},\ \text{то есть}\ z=A\left(\frac{n}{n-ms}\right)^{\frac{h}{m}},$$

или также

$$z=A\left(1-\frac{ms}{n}\right)^{\frac{-h}{m}}.$$

Правда, интегрирование удается также и в том случае, когда $k=n$; действительно, тогда

$$(n-ms)^{\frac{h}{m}-1}\,sz=An\int ds\,(n-ms)^{\frac{h}{m}-2},$$

и этот интеграл равен

$$\mathrm{Const}-\frac{An\,(n-ms)^{\frac{h}{m}-1}}{h-m}.$$

А так как при $s=0$ имеем $z=A$, то получим

$$0=\mathrm{Const}-\frac{A}{h-m}\,n^{\frac{h}{m}},$$

и поэтому

$$z=\frac{An}{(h-m)\,s}\left[\left(\frac{n}{n-ms}\right)^{\frac{h}{m}-1}-1\right]=\frac{An}{(h-m)\,s}\left[\left(1-\frac{ms}{n}\right)^{1-\frac{h}{m}}-1\right].$$

Далее, мы усматриваем, что интегрирование может быть выполнено в случае $k=2n$, так как тогда имеем

$$(n-ms)^{\frac{h}{m}-2}s^2z=2An\int s\,ds\,(n-ms)^{\frac{h}{m}-3},$$

и этот интеграл

$$=\mathrm{Const}-\frac{2Ans}{h-2m}(n-ms)^{\frac{h}{m}-2}+\frac{2An}{h-2m}\int ds\,(n-ms)^{\frac{h}{m}-2},$$

то есть

$$=\mathrm{Const}-\frac{2Ans}{h-2m}(n-ms)^{\frac{h}{m}-2}-\frac{2\,An\,(n-ms)^{\frac{h}{m}-1}}{(h-m)(h-2m)},$$

где

$$\mathrm{Const}=\frac{2An^{\frac{h}{m}}}{(h-m)(h-2m)},$$

и, следовательно,

$$z=\frac{2An^2}{(h-m)(h-2m)s^2}\left[\left(\frac{n}{n-ms}\right)^{\frac{h}{m}-2}-1-\frac{(h-2m)\,s}{n}\right].$$

Таким же образом интегрирование осуществляется также и в случаях $k=3n$, $k=4n$ и т. д.

ЗАДАЧА 134

1064. *Предложен следующий бесконечный ряд:*

$$A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}u+C\mathfrak{C}u^2+D\mathfrak{D}u^3+\ldots+M\mathfrak{M}u^{i-1}+N\mathfrak{N}u^i+\text{ и т. д.},$$

причем закон коэффициентов таков:

$$B=\frac{0m+h}{1n+k}A,\quad C=\frac{1m+h}{2n+k}B,\quad D=\frac{2m+h}{3n+k}C,\ldots,\quad N=\frac{(i-1)\,m+h}{in+k}M,$$

$$\mathfrak{B}=\frac{0\mu+\eta}{1\nu+\theta}\mathfrak{A},\quad \mathfrak{C}=\frac{1\mu+\eta}{2\nu+\theta}\mathfrak{B},\quad \mathfrak{D}=\frac{2\mu+\eta}{3\nu+\theta}\mathfrak{C},\ldots,\quad \mathfrak{N}=\frac{(i-1)\,\mu+\eta}{i\nu+\theta}\mathfrak{M};$$

выразить его сумму в виде интеграла.

РЕШЕНИЕ

Обозначив сумму [через y]:

$$y=A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}u+C\mathfrak{C}u^2+D\mathfrak{D}u^3+E\mathfrak{E}u^4+\text{ и т. д.},$$

рассмотрим ряд, образованный следующим образом:

$$z=A+Bux+Cu^2x^2+Du^3x^3+Eu^4x^4+\text{ и т. д.}$$

Его сумма, если положить $ux=s$, как мы только что нашли [§ 1059] есть

$$z=Aks^{-\frac{k}{n}}(n-ms)^{\frac{mk-nh}{mn}}\int s^{\frac{k}{n}-1}ds\,(n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}-1},$$

где интеграл определен так, что при $s=0$ имеем $z=A$.

Образуем интегральное выражение такого вида:

$$V=\int Pz\,dx=\int P\,dx\,(A+Bux+Cu^2x^2+Du^3x^3+\text{ и т. д.}),$$

в котором u рассматривается как постоянное, а в качестве P берем такую функцию от x, чтобы иметь

$$\int Px\,dx=\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\int P\,dx,\quad \int Px^2\,dx=\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}\int Px\,dx,\quad \int Px^3\,dx=\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}\int Px^2\,dx \text{ и т. д.}$$

Конечно, в этих интегралах, которые берутся согласно данному правилу, переменному x придается затем некоторое заданное значение[1]).

Поскольку отсюда получаем, что

$$\int Px\,dx=\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\int P\,dx,\quad \int Px^2\,dx=\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\int P\,dx,\quad \int Px^3\,dx=\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}\int P\,dx \text{ и т. д.},$$

то будем иметь

$$V=\left(A+\frac{B\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}u+\frac{C\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}u^2+\frac{D\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}u^3+\text{ и т. д.}\right)\int P\,dx,$$

откуда, очевидно, следует, что

$$y=\frac{\mathfrak{A}V}{\int P\,dx}=\frac{\mathfrak{A}\int Pz\,dx}{\int P\,dx}.$$

Таким образом, так как значение z известно, остается только определить функцию P от x, удовлетворяющую указанным условиям. Но вообще должно быть:

$$\int Px^i\,dx=\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\int Px^{i-1}\,dx=\frac{(i-1)\mu+\eta}{i\nu+\theta}\int Px^{i-1}\,dx,$$

и так как достаточно, чтобы это равенство имело место только для какого-то определенного случая, когда [количеству] x придается заданное значение, то мы вообще положим

$$(i\nu+\theta)\int Px^i\,dx=[(i-1)\mu+\eta]\int Px^{i-1}\,dx+x^iQ,$$

так чтобы для границ интегрирования[2]) было $Q=0$. Стало быть, дифференцируя, получим

$$(i\nu+\theta)Px^i\,dx=(i\mu-\mu+\eta)Px^{i-1}\,dx+x^idQ+ix^{i-1}Q\,dx,$$

или же, деля на x^{i-1},

$$(i\nu+\theta)Px\,dx=(i\mu-\mu+\eta)P\,dx+xdQ+iQ\,dx,$$

[1]) Postquam scilicet in his integralibus data lege sumtis variabili x datus quidem valor fuerit tributus. — Иными словами, рассматриваются определенные интегралы, зависящие от параметра u.

[2]) Pro terminis integralibus. Это выражение, применение которого сократило бы Эйлеру многие формулировки, когда у него речь идет об определенных интегралах, появляется здесь в этом томе впервые и в дальнейшем встречается только эпизодически.

а так как это равенство должно оставаться в силе для всех значений i, то мы из него выводим два уравнения:

$$\nu Px\,dx = \mu P\,dx + Q\,dx$$

и

$$\theta Px\,dx = (\eta - \mu)\,P\,dx + x\,dQ,$$

откуда двумя способами находим

$$P\,dx = \frac{Q\,dx}{\nu x - \mu} \quad \text{и} \quad P\,dx = \frac{x\,dQ}{\theta x - (\eta - \mu)}\,.$$

Поэтому, деля одно значение на другое, получаем

$$\frac{x\,dQ}{Q\,dx} = \frac{\theta x + \mu - \eta}{\nu x - \mu}\,, \text{ т. е. } \frac{dQ}{Q} = \frac{dx\,(\theta x + \mu - \eta)}{x\,(\nu x - \mu)}\,,$$

что преобразуется в

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\eta - \mu}{\mu x}\,dx + \frac{\mu\theta + \mu\nu - \eta\nu}{\mu\,(\nu x - \mu)}\,dx.$$

Отсюда, интегрируя, найдем

$$Q = x^{\frac{\eta}{\mu} - 1}\,(\nu x - \mu)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1} \text{ умнож. на Const,}$$

или же

$$Q = -\,x^{\frac{\eta}{\mu} - 1}\,(\mu - \nu x)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1},$$

следовательно,

$$P\,dx = x^{\frac{\eta}{\mu} - 1}\,dx\,(\mu - \nu x)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}},$$

и поскольку

$$(i\nu + \theta)\int Px^i\,dx = [(i-1)\mu + \eta]\int Px^{i-1}\,dx - x^{i + \frac{\eta}{\mu} - 1}\,(\mu - \nu x)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1},$$

если эти интегралы берутся таким образом, что они исчезают, когда $x = 0$, и вместе с тем принимается $x = \frac{\mu}{\nu}$ то, как и требует наша гипотеза,

$$\int Px^i\,dx = \frac{(i-1)\,\mu + \eta}{i\nu + \theta}\int Px^{i-1}\,dx.$$

Конечно, при этом необходимо, чтобы было

$$i + \frac{\eta}{\mu} - 1 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1 > 0.$$

Если это условие осуществляется, то сумма предложенного ряда выражается следующим образом:

$$y\int x^{\frac{\eta}{\mu} - 1}\,dx\,(\mu - \nu x)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}} = \mathfrak{A}\int x^{\frac{\eta}{\mu} - 1}\,z\,dx\,(\mu - \nu x)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}},$$

причем

$$z = Aks^{\frac{-k}{n}}\,(n - ms)^{\frac{mk - nh}{mn}}\int s^{\frac{k}{n} - 1}\,ds\,(n - ms)^{\frac{nh - mk}{mn} - 1},$$

и этот интеграл берется так, чтобы было $z = A$, когда полагаем $s = 0$. Когда же найден этот интеграл, вместо s надо написать ux, и после подстановки этого значения для z в предыдущую формулу количество u нужно рассматривать как постоянное, пока интегрирования не будут выполнены по указанному правилу. Тогда действительно в качестве y получим функцию от u, выражающую сумму предложенного ряда.

СЛЕДСТВИЕ 1

1065. Так как для спаренных коэффициентов нашего ряда принят одинаковый закон построения[1]), то можно переставлять между собой ряды A, B, C, D и т. д. и $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д., так что по указанному методу получаются две формулы для выражения суммы ряда.

СЛЕДСТВИЕ 2

1066. Хотя функция Q не входит в полученные выражения[2]), ее, однако, нужно знать, так как по ней должны быть установлены границы интегрирования, так, чтобы для обеих границ было $Q=0$. Очевидно, эти границы суть $x=0$ и $x=\frac{\mu}{\nu}$, если только $i+\frac{\eta}{\mu}-1>0$ и $\frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}+1>0$, где i — целое положительное число.

СЛЕДСТВИЕ 3

1067. При определении функции Q надо отдельно рассмотреть те случаи, когда либо $\mu=0$, либо $\nu=0$. В первом случае при $\mu=0$ имеем

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{dx\,(\theta x-\eta)}{\nu x^2}=\frac{\theta\,dx}{\nu x}-\frac{\eta\,dx}{\nu x^2},$$

откуда

$$Q=e^{\frac{\eta}{\nu x}}\,x^{\frac{\theta}{\nu}}.$$

Во втором случае, когда $\nu=0$, имеем

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{dx\,(\theta x+\mu-\eta)}{-\mu x}=-\frac{\theta\,dx}{\mu}+\frac{\eta-\mu}{\mu}\cdot\frac{dx}{x}$$

и, таким образом,

$$Q=e^{\frac{-\theta x}{\mu}}\,x^{\frac{\eta}{\mu}-1}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

1068. Добавленные таким образом построения вполне сходны с теми, которые изложены в предыдущей главе, поскольку дело также сводится к интегральному выражению вида $\int V\,dx$, в котором V — функция двух переменных u и x, причем переменное u считается при интегрировании постоянным, а после интегрирования переменному x припи-

[1]) Quia in geminatis coëfficientibus nostrae seriei similis lex progressionis assumitur; смысл этой, пожалуй, чересчур краткой формулировки вполне понятен, если вспомнить условие задачи 134.

[2]) Подразумевается: для суммы ряда. В оригинале сказано: Etsi functio Q non in calculum ingreditur ... Буквальный перевод (хотя функция Q не входит в вычисление...) исказил бы смысл.

сывается некоторое данное значение. Однако последнее построение распространяется на случаи, которые не охватываются предыдущим методом, поскольку может статься, что количество z содержит сложные трансцендентные функции[1]). Также, и наоборот, мы видим, что предыдущий метод может быть применен к уравнениям такого рода, которые не могут быть решены с помощью рядов, какие мы здесь рассматриваем, и поэтому, как нам представляется, в Анализе таким путем могут быть получены достойные внимания новые результаты[2]).

ЗАДАЧА 135

1069. *Предложено дифференциальное уравнение второго порядка*

$$x^2(a+bx^n)\,d^2y + x(c+ex^n)\,dx\,dy + (f+gx^n)\,y\,dx^2 = 0.$$

Представить значение y в виде интеграла[3]).

РЕШЕНИЕ I

Приведенное выше уравнение (§ 967) развернем в ряд следующим образом: положив

$$y = x^\lambda(A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + Ex^{4n} + \text{ и т. д.}),$$

мы придадим первому показателю λ значение корня уравнения

$$\lambda(\lambda-1)a + \lambda c + f = 0,$$

и тогда, положив ради краткости

$$\lambda(\lambda-1)b + \lambda e + g = h,$$

будем иметь

$$B = \frac{-h}{n\,[na+(2\lambda-1)\;a+c]}\,A,$$

$$C = \frac{-n^2b-(2\lambda-1)\,nb-ne-h}{2n\,[2na+(2\lambda-1)\,a+c]}\,B,$$

$$D = \frac{-4n^2b-2\,(2\lambda-1)\,nb-2ne-h}{3n\,[3na+(2\lambda-1)\,a+c]}\,C$$

и, следовательно, если обозначить два каких-либо смежных члена указанного ряда через $Mx^{(i-1)\,n}+Nx^{in}$, то в общем виде получим

$$N = \frac{-(i-1)^2n^2b-(2\lambda-1)\,(i-1)\,nb-(i-1)\,ne-h}{in\,[ina+(2\lambda-1)\,a+c]}\,M.$$

В этом выражении, поскольку знаменатель уже содержит те множители, которые мы раньше [§ 1064] определили, мы разложим и числитель на множители и, приравняв его нулю, найдем

$$(i-1)\,n = -\frac{1}{2}(2\lambda-1) - \frac{e}{2b} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(2\lambda-1)^2 + \frac{(2\lambda-1)\,e}{2b} + \frac{e^2}{4b^2} - \frac{h}{b}},$$

то есть

$$(i-1)\,n = -\frac{1}{2}(2\lambda-1) - \frac{e}{2b} \pm \sqrt{(b-e)^2 - 4bg}.$$

[1]) Quandoquidem fieri potest, ut quantitas z functiones maxime transcendentes involvat.

[2]) Здесь Эйлер снова подчеркивает перспективность метода интегрирования предыдущей главы.

[3]) Valorem ipsius y per formulam integralem construere.

Положим ради краткости

$$\sqrt{(b-e)^2-4bg}=q,$$

так что

$$(i-1)\,n=\frac{-(2\lambda-1)\,b-e\pm q}{2b},$$

и тогда наше соотношение становится

$$N=\frac{-\left[(i-1)\,nb+\frac{1}{2}(2\lambda-1)\,b+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}q\right]\left[(i-1)\,nb+\frac{1}{2}(2\lambda-1)\,b+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}q\right]}{inb\,[ina+(2\lambda-1)\,a+c]}\,M.$$

Положим теперь $x^n=u$ и представим полученный ряд таким образом:

$$\frac{y}{x^\lambda}=A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}u+C\mathfrak{C}u^2+\ldots+M\mathfrak{M}u^{i-1}+N\mathfrak{N}u^i+\ \text{ и т. д.}$$

Закон для двойных коэффициентов в этом ряде будет таков:

$$N=\frac{(i-1)\,nb+\frac{1}{2}(2\lambda-1)\,b+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}q}{-inb}\,M$$

и

$$\mathfrak{N}=\frac{(i-1)nb+\frac{1}{2}(2\lambda-1)\,b+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}q}{ina+(2\lambda-1)\,a+c}\,\mathfrak{M},$$

а так как этот ряд подобен тому, который мы построили раньше, то мы произведем сравнение и получим

$$m=nb,\quad h=\frac{1}{2}(2\lambda-1)\,b+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}q,$$
$$n=-nb\quad\text{и}\quad k=0,$$
$$\mu=nb,\quad \eta=\frac{1}{2}(2\lambda-1)\,b+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}q,$$
$$\nu=na\quad\text{и}\quad \theta=(2\lambda-1)\,a+c.$$

Таким образом, мы прежде всего будем искать количество z, а для того чтобы из-за буквы x не получалось двузначности, мы воспользуемся вместо буквы x примененной в предыдущей задаче буквой t, так что пусть $ut=s$, и, так как $k=0$, на основании § 1063 будем иметь

$$z=A\,(1+s)^{\frac{-(2\lambda-1)\,b-e+q}{2nb}}=A\,(1+ut)^{\frac{-(2\lambda-1)\,b-e+q}{2nb}}.$$

Когда найдено это значение, в последующих интегрированиях количество u будем рассматривать как постоянное и, поскольку то, что выше [§ 1064] было [обозначено] y, теперь есть $\frac{y}{x^\lambda}$, а t есть то, что выше было [обозначено] x, получим

$$\frac{y}{x^\lambda}\int t^{\frac{\eta}{\mu}-1}\,dt\,(\mu-\nu t)^{\frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}}=\mathfrak{A}\int t^{\frac{\eta}{\mu}-1}\,z\,dt\,(\mu-\nu t)^{\frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}}.$$

Так как здесь $u=x^n$, то мы можем написать сразу это значение вместо u, и, следовательно,

$$Z=A\,(1+x^nt)^{\frac{-(2\lambda-1)\,b-e+q}{2nb}},$$

и при этих интегрированиях буква x должна рассматриваться как постоянная. Если при этом

$$i+\frac{\eta}{\mu}-1>0 \quad \text{и} \quad \frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}+1>0,$$

то эти интегралы надо брать таким образом, чтобы они исчезали, когда $t=0$, после чего [переменному] t надо приписать значение $t=\frac{\mu}{\nu}=\frac{b}{a}$. Поскольку единица является наименьшим значением для i, достаточно, чтобы было

$$\frac{(2\lambda-1)b+e+q}{2nb}>0$$

и, вместе с тем,

$$\frac{(2\lambda-1)ab+2bc-ae-aq}{2nab}+1>0.$$

А теперь, поскольку

$$\int t^{\frac{\eta}{\mu}-1}dt\,(\mu-\nu t)^{\frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}}$$

является постоянным количеством, а нашему уравнению, кроме y, равным образом удовлетворяет также любое его кратное, то его интеграл выражается в таком виде:

$$y=Cx^{\lambda}\int t^{\frac{\eta}{\mu}-1}\,z\,dt\,(\mu-\nu t)^{\frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}},$$

где

$$z=(1+x^n t)^{\frac{-(2\lambda-1)b-e+q}{2nb}}.$$

РЕШЕНИЕ II

1071[1]). Если переставить между собою спаренные коэффициенты[2]), так что

$$\begin{aligned}
m&=nb, & h&=\frac{1}{2}(2\lambda-1)b+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}q,\\
n&=na, & k&=(2\lambda-1)a+c,\\
\mu&=nb, & \eta&=\frac{1}{2}(2\lambda-1)b+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}q,\\
\nu&=-nb, & \theta&=0,
\end{aligned}$$

а λ взять из уравнения

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0,$$

то, прежде всего, положим $x^n t=s$ и будем искать z в виде

$$z=Aks^{\frac{-k}{n}}(n-ms)^{\frac{mk-nh}{mn}}\int s^{\frac{k}{n}-1}ds\,(n-ms)^{\frac{nh-mk}{mn}-1},$$

[1]) В первом издании «Интегрального исчисления» этот параграф занумерован 1071 вместо правильного 1070, но и все следующие параграфы имеют соответствующие номера: 1072, 1073 и т. д. Поэтому для удобства ссылок и сопоставлений мы, следуя примеру Opera Omnia, сохраняем и здесь эту нумерацию.

[2]) Coefficientes geminatos.

причем интеграл определен таким образом, чтобы при $s=0$ было $z=A$, а это значение A является произвольным. Тогда, рассматривая x как постоянное, будем иметь

$$y=Cx^{\lambda}\int t^{\frac{\eta}{\mu}-1}z\,dt\,(\mu-\nu t)^{\frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}},$$

где интеграл берется так, чтобы он исчезал, когда положим $t=0$, и вместе с тем принимаем $t=\frac{\mu}{\nu}$, если только $\frac{\eta}{\mu}>0$ и $1-\frac{\eta}{\mu}>0$ (так как $\theta=0$). Заметим здесь, что z определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{Ak-z(k-hs)}{s(n-ms)}.$$

РЕШЕНИЕ III

1072. С помощью нисходящего ряда будем решать предложенное уравнение [§ 967] следующим образом. Положив

$$y=x^{\lambda}(A+Bx^{-n}+Cx^{-2n}+Dx^{-3n}+\text{ и т. д.}),$$

надо определить показатель λ из уравнения

$$\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g=0,$$

и тогда, положив

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=h,$$

будем иметь

$$B=\frac{-h}{n[nb-(2\lambda-1)b-e]}A,$$

$$C=\frac{-n^2a+(2\lambda-1)na-nc-h}{2n[2nb-(2\lambda-1)b-e]}B$$

и вообще

$$N=\frac{-(i-1)^2n^2a+(2\lambda-1)(i-1)na+(i+1)nc-h}{in[inb-(2\lambda-1)b-e]}M.$$

Это равенство, если положить $\sqrt{(a-c)^2-4af}=p$, после разложения на множители представится в виде[1])

$$N=\frac{-\left[(i-1)na-\frac{1}{2}(2\lambda-1)a-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}p\right]\left[(i-1)na-\frac{1}{2}(2\lambda-1)a-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}p\right]}{ina[inb-(2\lambda-1)b-e]}M.$$

Если теперь мы положим $x^{-n}=u$ и составим следующий ряд:

$$\frac{y}{x^{\lambda}}=A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}u+C\mathfrak{C}u^2+\ldots+M\mathfrak{M}u^{i-1}+N\mathfrak{N}u^i+\text{и т. д.},$$

то будем иметь

$$N=\frac{(i-1)na-\frac{1}{2}(2\lambda-1)a-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}p}{-ina}M$$

и

$$\mathfrak{N}=\frac{(i-1)na-\frac{1}{2}(2\lambda-1)a-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}p}{inb-(2\lambda-1)b-e}\mathfrak{M},$$

[1]) Ita per factores exhibetur.

и, сравнивая с общим построением, получим

$$m = na, \quad h = -\frac{1}{2}(2\lambda - 1)a - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}p,$$
$$n = -na \quad \text{и} \quad k = 0,$$
$$\mu = na, \quad \eta = -\frac{1}{2}(2\lambda - 1)a - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}p,$$
$$\nu = nb \quad \text{и} \quad \theta = -(2\lambda - 1)b - e.$$

Положим здесь $s = ut = x^{-n}t$, тогда

$$z = A(1+s)^{\frac{-h}{m}} = A(1+x^{-n}t)^{\frac{-h}{m}},$$

и после того, как найдено это значение, мы получим, считая теперь переменным только количество t, следующее построение:

$$y = Cx^{\lambda}\int t^{\frac{\eta}{\mu}-1} z\,dt\,(\mu - \nu t)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}},$$

где границы интегрирования установлены таким образом, чтобы на обеих границах было

$$t^{\frac{\eta}{\mu}}(\mu - \nu t)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}+1} = 0.$$

РЕШЕНИЕ IV

1073. И здесь можно переставить между собой спаренные коэффициенты, и тогда

$$m = na, \quad h = -\frac{1}{2}(2\lambda - 1)a - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}p,$$
$$n = nb, \quad k = -(2\lambda - 1)b - e,$$
$$\mu = na, \quad \eta = -\frac{1}{2}(2\lambda - 1)a - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}p,$$
$$\nu = -na \quad \text{и} \quad \theta = 0.$$

Как и раньше [§ 1072], берем λ из уравнения

$$\lambda(\lambda - 1)b + \lambda e + g = 0$$

и принимаем $\sqrt{(a-c)^2 - 4af} = p$; полагая $s = x^{-n}t$, ищем z из уравнения

$$\frac{dz}{ds} = \frac{Ak - z(k - hs)}{s(n - ms)}$$

таким образом, чтобы, когда $s = 0$, было $z = A$, откуда получаем

$$z = Aks^{\frac{-k}{n}}(n - ms)^{\frac{mk - nh}{mn}}\int s^{\frac{k}{n}-1}ds\,(n - ms)^{\frac{nh - mk}{mn}-1},$$

и, рассматривая теперь x как постоянное, найдем

$$y = Cx^{\lambda}\int t^{\frac{\eta}{\mu}-1} z\,dt\,(\mu - \nu t)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}},$$

где границы интегрирования надо взять таким образом, чтобы на обеих было

$$t^{\frac{\eta}{\mu}}(\mu - \nu t)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}+1} = 0.$$

ПОЯСНЕНИЕ

1074. Каждое из этих построений можно представить несколькими способами, так как не только λ может иметь два значения, но и радикальные выражения для p и q обладают двумя знаками. И такие построения дают решение вопроса иным путем, чем предыдущие; для того чтобы это отчетливее выявить, рассмотрим уравнение [§ 978]

$$x^2(1-x^2)\,d^2y - x(1+x^2)\,dx\,dy + x^2y\,dx^2 = 0.$$

Итак, здесь $a=1$, $b=-1$, $c=-1$, $e=-1$, $f=0$ и $g=1$, а также $n=2$. Следовательно, при первых двух построениях получается $\lambda(\lambda-1)-\lambda=0$, стало быть, либо $\lambda=0$, либо $\lambda=2$, и вместе с тем $q=\pm 2$. Таким образом, первое построение дает $\lambda=0$, $m=-2$, $h=\mp 1$, $n=2$, $k=0$, $\mu=-2$, $\eta=\pm 1$, $\nu=2$, $\theta=-2$. Отсюда получаем

$$z=(1+x^2t)^{\mp\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad y=C\int t^{\mp\frac{1}{2}-1}z\,dt\,(1+t)^{\pm\frac{1}{2}-1}.$$

Пусть выбраны нижние знаки, так что

$$z=\sqrt{1+x^2t} \quad \text{и} \quad y=C\int\frac{z\,dt}{(1+t)\sqrt{t(1+t)}}.$$

Покажем, каким образом эти выражения удовлетворяют [уравнению]. Действительно, считая только x переменным, найдем

$$\frac{dz}{dx}=\frac{xt}{\sqrt{1+x^2t}} \quad \text{и} \quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{1}{(1+x^2t)^{\frac{3}{2}}},$$

следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=C\int\frac{xt\,dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1+x^2t)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=C\int\frac{t\,dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1+x^2t)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда получаем

$$x^2(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x(1+x^2)\frac{dy}{dx}+x^2y=C\int\frac{x^2\,dt\,(1-x^2t^2)}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1+x^2t)^{\frac{3}{2}}},$$

и интеграл в этом выражении равен $\dfrac{2Cx^2\sqrt{t}}{\sqrt{(1+t)(1+x^2t)}}$. Так как он исчезает как в случае $t=0$, так и в случае $t=\infty$, то построение нашего уравнения [с помощью формулы]

$$y=C\int\frac{z\,dt}{(1+t)\sqrt{t(1+t)}}=C\int\frac{dt\sqrt{1+x^2t}}{(1+t)\sqrt{t(1+t)}}$$

должно быть завершено следующим образом: полагая x постоянным, производим интегрирование так, чтобы интеграл исчезал при $t=0$, после чего принимаем $t=\infty$, и та функция от x, которую получаем как [значение] y, удовлетворяет предложенному уравнению.

Если же мы выберем второе построение, то, взяв $\lambda=0$, будем иметь $m=-2$, $h=\pm 1$, $n=2$, $k=-2$, $\mu=-2$, $\eta=\mp 1$, $\nu=2$, $\theta=0$, а z так должно быть определено из уравнения

$$\frac{dz}{ds}=\frac{-2A+z(2\pm s)}{s(2+2s)},$$

где $s=x^2t$, чтобы при $s=0$ было $z=A$.

Пусть выбран верхний знак. Тогда имеем

$$dz - \frac{z\,ds\,(2+s)}{2s\,(1+s)} = \frac{-A\,ds}{s\,(1+s)}$$

и, помножив это уравнение на $\frac{\sqrt{1+s}}{2}$, получим интеграл

$$\frac{z\sqrt{1+s}}{s} = \text{Const} - A\int\frac{ds}{s^2\sqrt{1+s}},$$

то есть

$$z = A - \frac{As}{\sqrt{1+s}}\,l\,\frac{1+\sqrt{1+s}}{\sqrt{s}} + \frac{Bs}{\sqrt{1+s}},$$

что при $s=0$ дает $z=A$, каково бы ни было B. Затем получаем

$$y = C\int t^{\frac{1}{2}-1}z\,dt\,(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \text{ то есть } y = C\int\frac{z\,dt}{\sqrt{t\,(1+t)}},$$

но не легко показать, каким образом это значение удовлетворяет уравнению. Тем более указанный метод заслуживает развития [1]).

ПРИМЕР

1075. *Представить те построения дифференциального уравнения второго порядка*

$$x^2(1-x^2)\,d^2y - x\,(1+x^2)\,dx\,dy + x^2y\,dx^2 = 0,$$

которые получаются из предыдущей задачи.

Так как $n=2$, $a=1$, $b=-1$, $c=-1$, $e=-1$, $f=0$ и $g=1$, то для первого построения имеем либо $\lambda=0$, либо $\lambda=2$, откуда получаем [такие случаи].

1) Если $\lambda=0$, то, как мы только-что нашли,

$$m=-2,\; h=\mp 1,\; n=2,\; k=0,\; \mu=-2,\; \eta=\pm 1,\; \nu=2,\; \theta=-2,$$

так что

$$z = (1+x^2t)^{\mp\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad y = C\int t^{\mp\frac{1}{2}-1}z\,dt\,(1+t)^{\pm\frac{1}{2}-1},$$

и таким образом получаем два построения [2]); одно из них:

$$z = \sqrt{1+x^2t} \quad \text{и} \quad y = C\int\frac{z\,dt}{(1+t)\sqrt{t\,(1+t)}},$$

а второе:

$$z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2t}} \quad \text{и} \quad y = C\int\frac{z\,dt}{t\sqrt{t\,(1+t)}}.$$

2) Если $\lambda=2$, то, поскольку $q=\pm 2$, имеем

$$m=-2,\; h=-2\mp 1,\quad n=2,\quad k=0,\; \mu=-2,$$
$$\eta=-2\pm 1,\quad \nu=2,\quad \theta=2,$$

[1]) Hocque magis ista methodus excoli meretur.

[2]) Термин «построение» (constructio) в ходе изложения этой главы постепенно становится синонимом термина «решение» (подразумевается: дифференциального уравнения в виде квадратуры). Это отражено в переводе.

откуда

$$z=(1+x^2t)^{\frac{-2\mp 1}{2}} \quad \text{и} \quad y=Cx^2\int t^{+1\mp\frac{1}{2}-1} z\,dt\,(1+t)^{\pm\frac{1}{2}}.$$

Таким образом будем иметь два построения; одно из них:

$$z=(1+x^2t)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{и} \quad y=Cx^2\int\frac{z\,dt\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}},$$

а второе:

$$z=(1+x^2t)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad y=Cx^2\int\frac{z\,dt\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}.$$

Для второго построения в общем виде имеем:

3) Если $\lambda=0$, то, переставляя соответствующие обозначения, получим

$$m=-2,\quad h=\pm 1,\quad n=2,\quad k=-2,\quad \mu=-2,$$
$$\eta=\mp 1,\quad \nu=2,\quad \theta=0$$

и теперь, положив $x^2t=s$, прежде всего будем искать z из уравнения

$$\frac{dz}{ds}=\frac{-2A+z(2\pm s)}{2s(1+s)},$$

так чтобы при $s=0$ было $z=A$, а тогда будем иметь

$$y=C\int t^{\pm\frac{1}{2}-1} z\,dt\,(1+t)^{\mp\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, отсюда получаются два построения; одно из них:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{-2A+z(2+s)}{2s(1+s)} \quad \text{и} \quad y=C\int\frac{z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}},$$

а второе:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{-2A+z(2-s)}{2s(1+s)} \quad \text{и} \quad y=C\int\frac{z\,dt\sqrt{1+t}}{t\sqrt{t}}.$$

4) Если $\lambda=2$, будем иметь

$$m=-2,\quad h=-2\pm 1,\quad n=2,\quad k=2,\quad \mu=-2,$$
$$\eta=-2\mp 1,\quad \nu=2,\quad \theta=0$$

и, положив, как и раньше, $x^2t=s$, будем искать z из уравнения

$$\frac{dz}{ds}=\frac{2A-z[2+(2\mp 1)s]}{2s(1+s)},$$

и тогда получим

$$y=Cx^2\int t^{\pm\frac{1}{2}} z\,dt\,(1+t)^{-\frac{2\mp 1}{2}},$$

откуда тоже получаются два построения; одно из них:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{2A-z(2+s)}{2s(1+s)} \quad \text{и} \quad y=Cx^2\int\frac{z\,dt\sqrt{t}}{(1+t)\sqrt{1+t}},$$

а второе:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{2A-z(2+3s)}{2s(1+s)} \quad \text{и} \quad y=Cx^2\int\frac{z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}.$$

Из третьего решения прежде всего получаем

$$-\lambda(\lambda-1)-\lambda+1=0, \text{ то есть } \lambda^2=1,$$

и, следовательно,

$$\lambda=\pm 1 \text{ и } p=\sqrt{4}=\pm 2.$$

Таким образом:

5) Если взять $\lambda=+1$, будем иметь

$$m=2, \quad h=\mp 1, \quad n=-2, \quad k=0, \quad \mu=2, \quad \eta=\pm 1,$$
$$\nu=-2, \quad \theta=2,$$

и, следовательно,

$$z=\left(1+\frac{t}{x^2}\right)^{\pm\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad y=Cx\int t^{\pm\frac{1}{2}-1} z\,dt\,(1+t)^{-1\mp\frac{1}{2}},$$

так что снова получаем два построения; одно из них:

$$z=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+t} \quad \text{и} \quad y=Cx\int\frac{z\,dt}{(1+t)\sqrt{t(1+t)}},$$

а второе:

$$z=\frac{x}{\sqrt{x^2+t}} \quad \text{и} \quad y=Cx\int\frac{z\,dt}{t\sqrt{t(1+t)}}.$$

6) Если взять $\lambda=-1$, будем иметь

$$m=2, \; h=2\mp 1, \; n=-2, \; k=0, \; \mu=2, \; \eta=2\pm 1,$$
$$\nu=-2, \quad \theta=-2,$$

и, следовательно,

$$z=\left(1+\frac{t}{x^2}\right)^{-1\pm\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad y=\frac{C}{x}\int t^{\pm\frac{1}{2}} z\,dt\,(1+t)^{\mp\frac{1}{2}},$$

откуда вытекают два построения; одно из них:

$$z=\frac{x}{\sqrt{x^2+t}} \quad \text{и} \quad y=\frac{C}{x}\int\frac{z\,dt\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}},$$

а второе:

$$z=\frac{x^3}{(x^2+t)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{и} \quad y=\frac{C}{x}\int\frac{z\,dt\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}}.$$

Наконец, из четвертого решения заключаем:

7) Если $\lambda=+1$, то

$$m=2, \; h=\pm 1, \; n=-2, \; k=2, \; \mu=2, \; \eta=\mp 1,$$
$$\nu=-2, \quad \theta=0.$$

Положив теперь $s=\frac{t}{x^2}$, ищем z из уравнения

$$\frac{dz}{ds}=\frac{-2A+z(2\mp s)}{2s(1+s)},$$

так чтобы при $s=0$ было $z=A$, а тогда будем иметь

$$y=Cx\int t^{\mp\frac{1}{2}-1} z\,dt\,(1+t)^{\pm\frac{1}{2}},$$

откуда получаем **два построения**; одно из них:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{-2A+z(2-s)}{2s(1+s)} \quad \text{и} \quad y=Cx\int\frac{z\,dt\sqrt{1+t}}{t\sqrt{t}},$$

а второе:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{-2A+z(2+s)}{2s(1+s)} \quad \text{и} \quad y=Cx\int\frac{z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}.$$

8) Если $\lambda=-1$, получаем

$$m=2,\ h=2\pm 1,\ n=-2,\ k=-2,\ \mu=2,\ \eta=2\mp 1,$$
$$\nu=-2,\quad \theta=0$$

и, положив $\frac{t}{x^2}=s$, мы должны искать z из уравнения

$$\frac{dz}{ds}=\frac{+2A-z[2+(2\pm 1)s]}{2s(1+s)},$$

так чтобы при $s=0$ было $z=A$; после чего будем иметь

$$y=\frac{C}{x}\int t^{\mp\frac{1}{2}}z\,dt(1+t)^{-1\pm\frac{1}{2}},$$

и таким образом получаются два построения; одно из них:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{2A-z(2+3s)}{2s(1+s)} \quad \text{и} \quad y=\frac{C}{x}\int\frac{z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}},$$

а второе:

$$\frac{dz}{ds}=\frac{2A-z(2+s)}{2s(1+s)} \quad \text{и} \quad y=\frac{C}{x}\int\frac{z\,dt\sqrt{t}}{(1+t)\sqrt{1+t}}.$$

Итак, всего мы вывели шестнадцать построений.

ПОЯСНЕНИЕ

1076. Попытаемся показать, каким образом предложенному уравнению удовлетворяют те построения, которые представляются наиболее сложными, и с этой целью мы выберем последнее построение из 4) [§ 1075], когда имеем

$$dz+\frac{z\,ds(2+3s)}{2s(1+s)}=\frac{A\,ds}{s(1+s)}.$$

Это уравнение после умножения на $s\sqrt{1+s}$ дает интеграл

$$sz\sqrt{1+s}=A\int\frac{ds}{\sqrt{1+s}}=2A\sqrt{1+s}+B,$$

т. е.

$$z=\frac{2A}{s}+\frac{B}{s\sqrt{1+s}}.$$

Для того чтобы при $s=0$ было $z=A$, должно быть $B=-2A$, так что

$$z=\frac{2A(\sqrt{1+s}-1)}{s\sqrt{1+s}}=\frac{2A}{tx^2}-\frac{2A}{tx^2\sqrt{1+tx^2}}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{-4A}{tx^3}+\frac{2A(2+3tx^2)}{tx^3(1+tx^2)^{\frac{3}{2}}}$$

и

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\frac{12A}{tx^4}-\frac{6A(2+5tx^2+4t^2x^4)}{tx^4(1+tx^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

А так как имеем $y=C\int\frac{x^2z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}$, то

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=2C\int\frac{xz\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}+C\int\frac{x^2\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

и

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=2C\int\frac{z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}+4C\int\frac{x\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}\left(\frac{dz}{dx}\right)+C\int\frac{x^2\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$$

и, следовательно,

$$x(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x(1+x^2)\frac{dy}{dx}+x^2y=C\int\frac{dt}{\sqrt{t(1+t)}}\cdot\left(\frac{2Ax^2}{t}+\frac{2Ax^2(1+4tx^2+3t^2x^2)}{t(1+tx^2)^{\frac{5}{2}}}\right),$$

а этот интеграл равен

$$\frac{-4ACx^2\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}}+\frac{4ACx^2\sqrt{1+t}}{(1+tx^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}}=\frac{4ACx^2\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{(1+tx^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right),$$

что может быть представлено в следующем виде:

$$-2Cx^4\left[3z+x\left(\frac{dz}{dx}\right)\sqrt{t(1+t)}\right]$$

или же таким образом:

$$-2Cx^4\frac{2A+z}{1+tx^2}\sqrt{t(1+t)}.$$

Но это выражение становится $=0$, во-первых, если $t=-1$, а затем также если $t=0$, и поэтому найденное для y значение

$$y=D\int\frac{dt}{t\sqrt{t(1+t)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+tx^2}}\right)$$

должно быть определено при интегрировании так, чтобы оно исчезало, когда $t=0$; после чего полагаем $t=-1$. Или же, полагая $t=-v$, будем иметь

$$y=D\int\frac{dv}{v\sqrt{v(1-v)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-vx^2}}\right),$$

где интеграл берется так, чтобы он исчезал при $v=0$, после чего принимаем $v=1$.

Этого примера достаточно, чтобы показать, каким образом представленные построения удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка. Правда, иногда, если количество z выражается трансцендентно, например, через логарифмы, установить соответствие можно только с помощью чрезвычайно обременительных вычислений.

ЗАДАЧА 136

1077. *Положим* $y = C\int (1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda}\,dt$, *где при интегрировании количество* x *рассматривается как постоянное, а затем границы интегрирования определяются таким образом, чтобы* y *равнялось определенной функции от* x. *Найти дифференциальные уравнения второго порядка вида*

$$Lx^2\frac{d^2y}{dx^2} + Mx\frac{dy}{dx} + Ny = 0,$$

которым удовлетворяет эта функция.

РЕШЕНИЕ

Так как на основании установленных выше положений имеем

$$\frac{dy}{dx} = C\int \lambda t(1+t)^{\nu-1}\ (a+tx)^{\lambda-1}\,dt$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C\int \lambda(\lambda-1)t^2(1+t)^{\nu-1}\ (a+tx)^{\lambda-2}\,dt,$$

получим

$$\begin{aligned}
&Lx^2\frac{d^2y}{dx^2} + Mx\frac{dy}{dx} + Ny \\
&= C\int (1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda-2}\,dt\,[\lambda(\lambda-1)Lt^2x^2 + \lambda Mtx(a+tx) + N(a+tx^2)] \\
&\qquad = C\int (1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda-2}\,dt\left\{\begin{aligned} Na^2 + 2Natx + Nt^2x^2 & \\ +\lambda Matx + \lambda Mt^2x^2 & \\ +\lambda(\lambda-1)Lt^2x^2 & \end{aligned}\right\},
\end{aligned}$$

и это выражение должно полностью интегрироваться, когда принимаем x постоянным[1]). Итак, положим интеграл равным

$$C(1+t)^{\nu}(a+tx)^{\lambda-1}(Pa^2 + Qatx),$$

где P и Q обозначают какие угодно функции от x. Его дифференциалом будет

$$\begin{gathered}
C(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda-2}\,dt\,[\nu(a+tx)(Pa^2+Qatx) + \\
+(\lambda-1)x(1+t)(Pa^2+Qatx) + Qax(1+t)(a+tx)] \\
= C(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda-2}\,dt
\end{gathered}$$

$$\times\left\{\begin{array}{lll}
+\nu Pa^3 & +\nu Qa^2tx & +\nu Qat^2x^2 \\
+(\lambda-1)Pa^2x & +\nu Pa^2tx & +(\lambda-1)Qat^2x^2 \\
+Qa^2x & +(\lambda-1)Pa^2tx & +Qat^2x^2 \\
 & +(\lambda-1)Qatx^2 & \\
 & +Qa^2tx & \\
 & +Qatx^2 &
\end{array}\right\},$$

и из сравнения этого выражения с предыдущим находим

$$\begin{gathered}
N = \nu Pa + (\lambda-1)Px + Qx, \\
2N + \lambda M = (\nu+1)Qa + (\lambda+\nu-1)Pa + \lambda Qx, \\
N + \lambda M + \lambda(\lambda-1)L = (\lambda+\nu)Qa.
\end{gathered}$$

[1]) Quae formula sumta x constante absolute integrabilis esse debet.

Вычтя из суммы первого и третьего уравнений второе, получим

$$\lambda(\lambda-1)L=-(\lambda-1)Pa+(\lambda-1)Px+(\lambda-1)Qa-(\lambda-1)Qx,$$

следовательно,

$$\lambda L=(a-x)(Q-P), \quad \text{т. е.} \quad L=\frac{1}{\lambda}(a-x)(Q-P).$$

Вычитание из второго уравнения удвоенного первого дает

$$\lambda M=(\lambda-\nu-1)Pa-2(\lambda-1)Px+(\nu+1)Qa+(\lambda-2)Qx,$$

то есть

$$\lambda M=[(\nu+1)a+(\lambda-2)x](Q-P)+\lambda(a-x)P.$$

Таким образом, если взять в качестве P и Q какие угодно функции от x и определить функции L, M, N так, чтобы

$$L=\frac{1}{\lambda}(a-x)(Q-P),$$

$$M=\frac{1}{\lambda}[(\nu+1)a+(\lambda+2)x](Q-P)+(a-x)P,$$

$$N=x(Q-P)+(\nu a+\lambda x)P,$$

то дифференциальному уравнению второго порядка

$$Lx^2d^2y+Mx\,dx\,dy+Ny\,dx^2=0$$

будет удовлетворять интегральное выражение

$$y=C\int(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda}\,dt,$$

где x рассматривается как постоянное, если только границы интегрирования установлены таким образом, чтобы на каждой из них исчезало выражение

$$(1+t)^{\nu}(a+tx)^{\lambda-1}(Pa+Qtx).$$

(Следует также отметить, что эти границы не должны зависеть от x.) Однако сразу видно, что указанное выражение становится $=0$ в случае $t=-1$, если только $\nu>0$. Затем оно исчезает также тогда, когда $t=\infty$, если только $\nu+\lambda-1+1$ есть отрицательное число, т. е. если $\nu+\lambda<0$. Таким образом, если $\nu>0$ и $\nu+\lambda<0$, интеграл

$$y=C\int(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda}\,dt$$

надо брать так, чтобы он исчезал, когда $t=-1$, а затем полагать $t=\infty$, и та функция от x, которая получается как значение y, будет удовлетворять предложенному уравнению.

СЛЕДСТВИЕ 1

1078. Так как функции P и Q не входят в интегральное выражение, принятое для y, то очевидно, что это выражение удовлетворяет всем дифференциальным уравнениям второго порядка, какие бы значения ни придавались буквам P и Q.

СЛЕДСТВИЕ 2

1079. Итак, если принять $Q=P$, то то же интегральное выражение

$$y=C\int(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda}\,dt$$

удовлетворяет также следующему дифференциальному уравнению первого порядка:

$$(a-x)\,x\,dy+(\nu a+\lambda x)\,y\,dx=0.$$

Действительно, интегралом этого уравнения является

$$y=\frac{D(a-x)^{\lambda+n}}{x^{\nu}},$$

и это значение вообще удовлетворяет также нашему дифференциальному уравнению второго порядка, что быстро обнаружится при проверке [1]).

СЛЕДСТВИЕ 3

1080. Таким образом, значение интеграла

$$y=C\int(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda}\,dt,$$

взятого в определенных границах [2]), должно совпадать с алгебраическим выражением

$$y=\frac{D(a-x)^{\lambda+\nu}}{x^{\nu}},$$

если только $\nu>0$ и $\lambda+\nu<0$.

ПОЯСНЕНИЕ

1081. Итак, мало что осталось выяснить в интегрировании, которое изложено в предыдущей задаче. Однако сведéние интегрального выражения

$$y=C\int(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda}\,dt$$

к

$$y=\frac{D(a-x)^{\lambda+\nu}}{x^{\nu}}$$

весьма заслуживает внимания (первое сводится ко второму, если полагаем $t=\infty$ в интеграле, взятом так, чтобы он исчезал, когда $t=-1$). Мы положим $\lambda+\nu=-\mu$, так чтобы μ и ν были положительными числами, и тогда

$$C\int\frac{(1+t)^{\nu-1}\,dt}{(a+tx)^{\mu+\nu}}=\frac{D}{x^{\nu}(a-x)^{\mu}}.$$

---

1) Id quod tentanti max patebit.

2) Secundum terminos definitos.

Или же, положив $1+t=z$, будем иметь

$$C\int\frac{z^{\nu-1}\,dz}{(a-x+xz)^{\mu+\nu}}=\frac{D}{x^{\nu}(a-x)^{\mu}},$$

причем границами этого интеграла являются $z=0$ и $z=\infty$. Впрочем, это замечание не существенное[1]). Действительно, положив $a-x=ux$, будем иметь

$$\frac{C}{x^{\mu+\nu}}\int\frac{z^{\nu-1}\,dz}{(u+z)^{\mu+\nu}}=\frac{D}{x^{\mu+\nu}u^{\mu}},$$

и, следовательно, выражение $\int\frac{z^{\nu-1}\,dz}{(u+z)^{\mu+\nu}}$, где интеграл таков, что он исчезает при $z=0$, а затем принимается $z=\infty$, принимает вид $\frac{A}{u^{\mu}}$, причем A обозначает постоянное количество, не зависящее от u. Однако оно зависит от показателей μ и ν по закону, который легко подметить при рассмотрении [отдельных] случаев. А именно, если положим

$$\int\frac{z^{\nu-1}\,dz}{(u+z)^{\mu+\nu}}=\frac{A}{u^{\mu}},$$

то при $\nu=1$ этот интеграл дает нам $-\frac{1}{\mu(u+z)^{\mu}}+\frac{1}{\mu u^{\mu}}$, и, принимая $z=\infty$, получим $\frac{1}{\mu u^{\mu}}$, так что в этом случае $A=\frac{1}{\mu}$. Если же $\nu=2$, то интегрирование также удается, и мы находим $A=\frac{1}{\mu(\mu+1)}$; если $\nu=3$, получаем

$$A=\frac{1\cdot2}{\mu(\mu+1)(\mu+2)};$$

если же $\nu=4$, то

$$A=\frac{1\cdot2\cdot3}{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)},$$

откуда вообще заключаем, что

$$A=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(\nu-1)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu-1)}.$$

В силу этого, произведя интегрирование согласно установленному правилу, будем иметь

$$\frac{1}{\mu+1}\,\frac{2}{\mu+2}\,\frac{3}{\mu+3}\cdots\frac{\nu-1}{\mu+\nu-1}=\mu u^{\mu}\int\frac{z^{\nu-1}\,dt}{(u+z)^{\mu+\nu}}.$$

Если же показатель ν — не целое число, то значение A определяется с помощью интерполирования указанной формулы, составленной в виде произведения. Конечно, при этом войдет квадратура круга[2]), если по-

---

[1]) Verum etiam haec observatio non magni est momenti.

[2]) Quadratura scilicet circuli ingredietur — то есть число π.

казатель ν содержит дробь $\frac{1}{2}$, однако об интерполированиях такого рода более подробно будем говорить в другом месте, а здесь неуместно более полно рассматривать этот вопрос[1]).

Нам остается последняя глава этого раздела, в которой излагается приближенное интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка.

---

[1]) Если положить $x=\frac{z}{u-z}$, то рассматриваемый интеграл представится в виде

$$\int\limits_0^\infty \frac{z^{\nu-1}\,dz}{(u+z)^{\nu+\mu}}=\frac{1}{u^\mu}\int\limits_0 x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}\,dx.$$

В связи с этим см. том 1, §§ 356—396, а также работы Эйлера № 19, 122, 254 и 321 по списку Энестрема, помещенные также в томах 14 и 17 Opera Omnia, ser. I.: «Dè progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dare nequeunt», Comment. acad. sc. Petrop. 5 (1739/1), 1738, стр. 36; «De productis ex infinitis factoribus ortis», там же 11 (1739), 1750, стр. 3: «De expressione integralium per factores», Novi comment. acad. sc. Petrop. 6 (1756/7), 1761, стр. 115; «Observationes circa integralia formularum $\int x^{p-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ posito post integrationem $x=1$, Misc. Taur. 3 (1762/5), 1766, стр. 156 второй пагинации [Л. Ш.].

ГЛАВА XII

О ПРИБЛИЖЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЗАДАЧА 137

1082. *Пусть предложено какое-либо дифференциальное уравнение второго порядка; объяснить начала, из которых нужно исходить при его приближенном интегрировании.*

РЕШЕНИЕ

Рассматривается предложенное уравнение между двумя переменными x и y, но, положив $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$, получим уравнение между четырьмя количествами x, y, p и q, из которого можно будет определить q таким образом, чтобы q было равно некоторой функции трех количеств x, y и p; эту функцию обозначим через V, так что $q = V$, или же $dp = V\,dx$. Здесь прежде всего надо заметить, что интегрирование, для того чтобы оно было определенным, требует двойного определения, т. е. можно почти произвольно назначить два условия, которые должны удовлетворяться. Очевидно, недостаточно, чтобы при $x = a$ было $y = b$, что, как мы видели, использовалось при интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка [§ 650, т. I], а можно, сверх того, добавить второе условие, которое пусть состоит в том, что когда $x = a$, то также $p = \frac{dy}{dx} = c$ (данному количеству). Итак, когда установлены эти определения — чтобы при $x = a$ было $y = b$ и $p = c$, — вся задача интегрирования сводится к тому, чтобы определить соответствующие значения y и p, если количеству x придаем какое-то иное значение. Действительно, если мы это осуществим, то мы полностью определим интеграл предложенного уравнения, так что ничего более нельзя будет и желать. А так как в общем случае мы этого не можем сделать, то суть приближенного решения состоит в том, чтобы придать x возможно менее отличающееся от a значение, пусть это будет $x = a + \omega$, и отыскать, насколько при этом значения количеств y и p отличаются от первоначальных b и c. В качестве исходного положения мы примем здесь[1]), что при возрастании x от a до $a+\omega$ значения количеств y и p тоже изменяются настолько мало, что вследствие этого функция V не испытывает сколько-нибудь значительного изменения. В силу этого, если мы, принимая $x=a$, $y=b$ и $p=c$, имеем $V=F$, будем считать, что количество V сохраняет то же значение F, пока x увеличивается от a вплоть до $a+\omega$. Итак, поскольку для этого весьма малого промежутка[2]) имеем $dp=F\,dx$, то, интегрируя, получим $p=Fx+\text{Const}$. А так как, когда полагаем $x=a$, должно быть $p=c$, получим $p=c+Fx-Fa$. Пусть теперь $x=a+\omega$, при этом будем иметь $p=c+F\omega$, что является значением p, соответствующим значению $x=a+\omega$. Затем, для этого весьма малого промежутка будет $dy=c\,dx$, следовательно, $y=b+cx-ac$, и для значения $x=a+\omega$ имеем $y=b+c\omega$, что является значением y, соответствующим значению $x=a+\omega$. В силу этого, если первоначальные значения суть $x=a$, $y=b$ и $p=\frac{dy}{dx}=c$, в соответствии с которыми будет $V=F$, то последующие значения, отстоящие от первоначальных на весьма малый промежуток, суть

$$x=a+\omega, \quad y=b+c\omega, \quad p=c+F\omega,$$

и если эти значения в дальнейшем рассматривать как первоначальные, то, исходя из них, можно таким же образом продвинуться на весьма малый промежуток, и, следовательно, выясняется, что можно продвинуться и на как угодно большой промежуток.

СЛЕДСТВИЕ 1

1083. Чем меньше брать рассматриваемые промежутки, тем меньше будем отступать от истины[3]), если только количества c и F не слишком велики; однако, когда они к тому же бесконечно возрастают, то очевидно, что допускаемая при определении количеств y и p ошибка становится значительной.

СЛЕДСТВИЕ 2

1084. Если бы количество c или F было чрезвычайно велико, то можно было бы в качестве данного[4]) взять промежуток, на который возрастает y или p; так, положив $c\omega=\psi$, будем иметь следующие значения:

$$x=a+\frac{\psi}{c}, \quad y=b+\psi \quad \text{и} \quad p=c+\frac{F\psi}{c}.$$

А если F оказывается весьма большим количеством, то принимаем, что значение p увеличивается на весьма малый промежуток Φ, так что $F\omega=\Phi$, и получим следующие значения:

$$x=a+\frac{\Phi}{F}, \quad y=b+\frac{c\Phi}{F} \quad \text{и} \quad p=c+\Phi.$$

---

[1]) Hic pro principio assumimus; возможен и другой перевод: Здесь для начала мы примем.

[2]) Pro hoc intervallo minimo.

[3]) Eo minus a vero aberrabitur.

[4]) Pro dato ...; очевидно, в том смысле, что именно величина этого промежутка выбирается достаточно малой.

СЛЕДСТВИЕ 3

1085. Если b есть бесконечное количество, то для определения ближайшего значения y полезно положить

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{b+c\omega}=\frac{1}{b}-\frac{c\omega}{b^2}=\frac{-c\omega}{b^2}\ ^{1)},$$

и при этом, для того чтобы рассматриваемое выражение было конечным [2]), должно быть бесконечным также количество c. В противном случае будет бесконечным не только значение y, соответствующее $x=a$, но и то значение y, которое соответствует $x=a+\omega$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

1086. Всякий раз, когда решение какой-либо задачи зависит от интегрирования некоторого дифференциального уравнения второго порядка, условия задачи дают нам два определения, из которых одно требует, чтобы, когда x придается некоторое определенное значение $x=a$, количество y принимало данное значение $y=b$, а второе — чтобы и отношение $\frac{dy}{dx}=p$ принимало данное значение $p=c$. Следовательно, если мы хотим в общем виде интегрировать некоторое дифференциальное уравнение второго порядка, то интегрирование можно производить так, чтобы, полагая $x=a$, было $y=b$ и $p=c$, причем количества a, b, c зависят от нашего произвола. Однако иногда может получиться так, что, когда полагаем $x=a$, значения y и p оказываются не вполне в нашем произволе, а уже как заданные обнаруживаются из природы уравнения, и в таких случаях нехватка этих определяющих условий восполняется другими условиями. Например, если предложено уравнение

$$x^2(a-bx)\,d^2y-2x(2a-bx)\,dx\,dy+2(3a-bx)\,y\,dx^2=6a^2dx^2,$$

то, как бы мы его ни интегрировали [3]), при $x=0$ обязательно будет $y=a$ и $\frac{dy}{dx}=p=b$, и таким образом для случая $x=0$ значения количеств y и p вовсе не находятся в нашем произволе. Вместе с тем, полный интеграл [уравнения] получается в виде

$$y=a+bx+\frac{(A+Bx)\,x^2}{a-bx},$$

и хотя здесь постоянные A и B могут быть назначены произвольно, однако всегда, когда $x=0$, получается $y=a$ и $p=b$. Таким образом, неудивительно, что в подобных случаях при заданном значении x значения количеств y и p не могут быть указаны нами произвольно [4]).

ПОЯСНЕНИЕ 2

1087. Изложенный способ приближенного интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка, сводящийся к продвижению на весьма малые промежутки, как мы уже поступали с дифференци-

---

[1]) Конечно, все эти равенства являются приближенными.

[2]) «Конечным» в смысле: ограниченным и отличным от нуля. Ср. с § 1088.

[3]) Quomodocunque ea [aequatio] per integrationem determinetur.

[4]) Quantitatun y et p valores arbitrio nostro haud permittantur.

альными уравнениями первого порядка, в некоторых случаях наталкивается на трудности и не может быть использован без привлечения [дополнительных] средств[1]). Прежде всего так получается, когда $c=\infty$,— действительно, тогда нельзя найти значения ни y, ни p, каким бы малым ни был взят промежуток ω. Подобное же затруднение мешает нам, когда функция V становится бесконечной при $x=a$, $y=b$ и $p=c$, вследствие чего оказывается $F=\infty$, и в этом случае не определяется значение p. Затем надлежит отдельно рассмотреть также те случаи, когда исчезает либо c, либо F; действительно, хотя при этом значения y и p определяются достаточно точно, однако, так как они не испытывают никаких изменений, поскольку изменение выражается более высокой степенью ω[2]), полезно исследовать это изменение, чтобы в дальнейшем меньше отойти от истины. Если же количество b оказывается бесконечным, то, как мы уже указывали, надо вместо y исследовать его обратную величину $\frac{1}{y}$. Мы тщательнее рассмотрим теперь, каким образом можно обойти упомянутые выше трудности.

ЗАДАЧА 138

1088. *Пусть при интегрировании по промежуткам*[3]) *оказывается, что в начале какого-то промежутка, когда полагаем $x=a$, $y=b$ и $p=c$, количество c либо исчезает, либо бесконечно; произвести интегрирование на этом промежутке.*

РЕШЕНИЕ

Предыдущее приближение дало $y=b+c(x-a)$, поэтому, если $c=0$, приращение y выражается более высокой степенью количества $x-a$, а именно $y=b+A(x-a)^{\lambda}$, где $\lambda>1$, причем отброшены более высокие степени, которыми мы по праву пренебрегаем по сравнению с указанной, так как промежуток $x-a$ весьма мал. Если же $c=\infty$, то значение y может быть представлено подобным же образом, $y=b+A(x-a)^{\lambda}$ где $\lambda<1$, однако так, чтобы λ было больше нуля. Таким образом, в обоих случаях исследование сводится к одному и тому же — к определению из предложенного уравнения $dp=V\,dx$ как коэффициента A, так и показателя λ. Но из указанного соотношения получаем

$$\frac{dy}{dx}=p-\lambda A(x-a)^{\lambda-1}$$

и

$$dp=\lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}\,dx,$$

и необходимо, чтобы получался этот же результат, когда в выражении $V\,dx$ полагаем

$$y=b+A(x-a)^{\lambda} \quad \text{и} \quad p=\lambda A(x-a)^{\lambda-1},$$

[1]) Nisi remedium afferatur.

[2]) Это выражение формально противоречиво, но Эйлер, конечно, не сомневался, что читатель поймет его мысль: «никаких изменений» нет — в смысле изменений первого порядка малости.

[3]) Si integrationem per intervalla instituendo.

причем очевидно, что

$$c=0, \quad \text{если} \quad \lambda>1,$$

и

$$c=\infty, \quad \text{если} \ \lambda<1.$$

Количество V есть функция от x, y, p, и в ней мы везде полагаем $x=a$, только не там, где входит выражение $x-a$, которое должно быть сохранено[1]), и вместе с тем полагаем $y=b$, если только при этом не получается $V=0$ или $V=\infty$; а в последнем случае вместо y пишем значение $b+A(x-a)^{\lambda}$ и подобным же образом вместо p пишем $\lambda A(x-a)^{\lambda-1}$. Затем отбрасываются более высокие степени выражения $x-a$ и удерживаются низшие[2]), так что для V получается выражение вида $C(x-a)^{\mu}$, которое должно быть равно выражению $\lambda(\lambda-1)\times\times A(x-a)^{\lambda-2}$, и отсюда определяются как введенный нами коэффициент A, так и показатель λ, а следовательно, мы находим приближенные значения

$$y=b+A(x-a)^{\lambda} \ \text{ и } \ p=\lambda A(x-a)^{\lambda-1},$$

и они будут тем менее отклоняться от истины, чем меньше разность между a и x. Тот же случай, когда $\lambda=1$, сам по себе ясен, а к тому же он рассмотрен в предыдущей задаче, так как только в этом случае для количества c получается конечное значение[3]).

СЛЕДСТВИЕ 1

1089. Если для функции V получается конечное значение, когда $c=\infty$, а тогда должно быть $\lambda<1$ и выражение $\lambda(\lambda-1)\ A\ (x-a)^{\lambda-2}$ этому конечному значению не может быть равно, то имеем случай, сам по себе не связанный с какими-либо трудностями, когда значение y даже при самом малом превышении x над a действительно оказывается бесконечным.

СЛЕДСТВИЕ 2

1090. Это можно легче усмотреть на примере $dp=6x\,dx$. Имеем здесь

$$p=c+3x^2-3a^2=\frac{dy}{dx},$$

откуда

$$y=b+(c-3a^2)(x-a)+x^3-a^3,$$

то есть

$$y=b-ac+2a^3+(c-3a^2)\,x+x^3.$$

Таким образом, если постоянное c принимается бесконечным, то значение y всегда будет бесконечным, за исключением только случая $x=a$.

СЛЕДСТВИЕ 3

1091. Если же, когда принимаем $c=0$, а в этом случае должно быть $\lambda>1$, функция V принимает конечное, и к тому же, когда полагаем $x=a$ и $y=b$, постоянное значение, она будет равна $\lambda(\lambda-1)\times$

[1]) ... Nisi quatenus formula $x-a$ inest, quae relinquatur.

[2]) Rejiciantur autem formulae $x-a$ potestates altiores prae inferioribus.

[3]) См. сноску 2 к § 1085.

$\times A(x-a)^{\lambda-2}$, если принять $\lambda=2$ и $2A=$ этому постоянному значению. Так, в предыдущем примере $V=6a=2A$, откуда $A=3a$, и приближенно получаем $y=b+3a(x-a)^2$, что совпадает с найденным интегралом, который при $c=0$ имеет вид

$$y=b+2a^3-3a^2x+x^3=b+(x+2a)(x-a)^2.$$

Это выражение переходит в предыдущее, когда $x=a$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

1092. Когда полагаем $c=0$, функция V, если в ней принять $x=a$, $y=b$ и $p=c=0$, получает либо бесконечно большое, либо конечное, либо к тому же исчезающее значение. В первом случае, когда $V=\infty$, для того чтобы этой функции могло быть равно выражение $\lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}$ при $x=a$, необходимо, чтобы было $\lambda<2$, где $\lambda>1$; для того же, чтобы определить отсюда количества A и λ, надо в функции V писать

$$y=b+A(x-a)^{\lambda} \quad \text{и} \quad p=\lambda A(x-a)^{\lambda-1},$$

а также $x=a$ там, где не встречается выражение $x-a$. Так как, по условию, в случае $x=a$ имеем $V=\infty$, то это значение [для V] получится $=C(x-a)^{-\alpha}$, и, сопоставляя его с [выражением] $\lambda(\lambda-1)\times$ $\times A(x-a)^{\lambda-2}$, определяем A и λ, если только не обнаружится, что $\lambda<1$, каковой случай несовместим с $c=0$. Во втором случае, когда V оказывается $=$ конечному количеству, надо взять $\lambda=2$, если же в третьем случае $V=0$, надо принять $\lambda>2$, так чтобы значение V содержалось в выражении

$$\lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}.$$

Однако, если должно быть $c=\infty$, то, как мы видели, не может случиться, чтобы функция V принимала конечное значение, а тем более исчезающее, если только мы не хотим допустить те несообразные случаи, когда y постоянно остается бесконечным[1]). Стало быть, тогда функция V обязательно принимает бесконечное значение, которое надо сравнить с тем, что дает выражение

$$\lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2},$$

причем λ должно быть <1[2]). Итак, отсюда явствует, что определение количества c не всегда остается в нашем произволе, а кое-когда его нам указывает самый характер уравнения. Например, если предложено уравнение $d^2y=\frac{2dx^2}{(x-a)^3}$, то

$$\frac{dy}{dx}=p=A-\frac{1}{(x-a)^2} \quad \text{и} \quad y=B+Ax+\frac{1}{x-a},$$

откуда при $x=a$ получаем

$$c=A-\frac{1}{0^2} \quad \text{и} \quad b=B+Aa+\frac{1}{0},$$

[1]) Nisi quidem casus incongruos, quibus y perpetuo maneat infinita, admittere velimus.

[2]) Tum igitur functio V necessario valorem infinitum induit cum formula $\lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}$ comparandum, ita ut sit $\lambda<1$.

следовательно,

$$A = c + \frac{1}{0^2} \quad \text{и} \quad B = b - ac - \frac{a}{0^2} + \frac{1}{0}.$$

Таким образом, для того чтобы интегральное уравнение не сводилось только к бесконечностям[1]), буквы b и c не могут не быть бесконечными.

ПОЯСНЕНИЕ 2

1093. Однако не все порядки бесконечных и исчезающих количеств содержатся в выражении $(x-a)^\lambda$ при $x=a$, как мы уже отмечали. Очевидно, выражение $x^2 lx$ при $x=0$ бесконечно больше второй степени x^2, однако, вместе с тем, оно бесконечно меньше степени $x^{2-\alpha}$, сколь бы ни была ничтожна выбираемая нами дробь α. Таким образом, если в вышеприведенном решении мы хотим так подобрать формулы, чтобы они охватывали все порядки как бесконечных, так и исчезающих количеств, то надо принять

$$y = b + A(x-a)^\lambda [l(x-a)]^\mu,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = p = \lambda A(x-a)^{\lambda-1}[l(x-a)]^\mu + \mu A(x-a)^{\lambda-1}[l(x-a)]^{\mu-1}.$$

Но когда положим $x=a$, первое слагаемое так относится к последнему, как $l(x-a)$ к 1, т. е. как $\infty : 1$, и поэтому достаточно принять

$$p = \lambda A(x-a)^{\lambda-1}[l(x-a)]^\mu,$$

откуда мы аналогичным образом заключаем, что

$$\frac{dp}{dx} = \lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}[l(x-a)]^\mu.$$

Это выражение надо сравнить с функцией V после того, как мы в ней напишем $x=a$, $y=b$ и $p=c$, или, точнее,

$$y = b + A(x-a)^\lambda [l(x-a)]^\mu \quad \text{и} \quad p = \lambda A(x-a)^{\lambda-1}[l(x-a)]^\mu,$$

и таким образом определяются как постоянное A, так и показатели λ и μ.

При таком исследовании надо иметь в виду только что сделанные указания, с помощью которых оно распространится на многие другие случаи[2]).

ЗАДАЧА 139

1094. *Изложенные выше приближения рассмотреть более тщательно, так чтобы меньше отклониться от истины, если даже промежутки выбираются несколько бо́льшими.*

РЕШЕНИЕ

Если положить $dy = p\,dx$, то дифференциальное уравнение второго порядка представится в виде $\frac{dp}{dx} = V$, откуда мы раньше определяли p

---

[1]) Ne aequatio integralis omnino in infinitis versetur.

[2]) Haec ergo tenenda sunt in ista investigatione, quo ea ad plures casus extendatur.

так, как если бы V было постоянным количеством, правда, только на чрезвычайно малом промежутке. Таким образом, мы получили $p=c+V(x-a)$, конечно, после того, как мы положили в V $x=a$, $y=b$ и $p=c$; эти первоначальные значения надо сохранять на промежутке $x-a=\omega$. Поскольку же функция V не является постоянной, так как она содержит x, y и p, на самом деле будет

$$p=c+V(x-a)-\int(x-a)\,dV.$$

Итак, мы положим

$$dV=P\,dx+Q\,dy+R\,dp,$$

следовательно,

$$dV=(P+Qp+RV)\,dx,$$

и теперь будем рассматривать количество $P+Qp+RV$ как постоянное, значение которого получается при $x=a$, $y=b$ и $p=c$, и при этом, как мы выше приняли, V переходит в F. Будем иметь

$$p=c+F(x-a)-\frac{1}{2}(P+Qc+RF)(x-a)^2.$$

Затем, так как $dy=p\,dx$, получаем отсюда

$$y=b+c(x-a)+\frac{1}{2}F(x-a)^2-\frac{1}{6}(P+Qc+RF)(x+a)^3,$$

и таким же образом можно дальше продолжать приближение. Когда же количества P, Q, R и V содержат выражение $x-a$ и его степени, причем это выражение нельзя больше рассматривать как постоянное, то это надо учитывать при интегрировании, в силу чего в приближенных рядах степени выражения $x-a$ будут возрастать не в [должном] порядке. В связи с этим уместно принять первые члены ряда для p в виде

$$p=c+A(x-a)^\lambda,$$

откуда

$$y=b+c(x-a)+\frac{A}{\lambda+1}(x-a)^{\lambda+1},$$

и поэтому

$$\frac{dp}{dx}=\lambda A(x-a)^{\lambda-1}.$$

Последнему выражению надо приравнять функцию V после того, как в ней мы написали вместо y и p указанные значения, а вместо x написали a, кроме как в выражении $x-a$, если оно встречается, и таким образом определится как показатель λ, так и коэффициент A.

Если бы c было $=0$ или $=\infty$, то это может быть учтено в нашем вычислении, если положим

$$p=f(x-a)^n+A(x-a)^\lambda,$$

откуда

$$y=b+\frac{f}{n+1}(x-a)^{n+1}+\frac{A}{\lambda+1}(x-a)^{\lambda+1},$$

и при подстановке этих значений вместо x и p в функцию V должно получиться

$$nf(x-a)^{n-1}+\lambda A(x-a)^{\lambda-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

1095. Таким образом, можно непрерывно продвигаться дальше по промежуткам, если только отдельные промежутки не выбираются бо́льшими, чем нужно, чтобы допускаемые ошибки оставались нечувствительными; но при указанной поправке эти ошибки уменьшаются настолько, что промежутки можно выбирать даже большими.

СЛЕДСТВИЕ 2

1096. Очевидно, для первого промежутка первоначальные значения $x=a$, $y=b$ и $p=c$ выбираются произвольно, а значения, найденные в конце промежутка, представляют начальные значения для второго промежутка, и, исходя из них, вычисление для этого промежутка выполняем так же, как и для первого, и так нужно непрерывно продвигаться дальше.

ПОЯСНЕНИЕ

1097. Мы дали два решения рассматриваемой задачи, причем первое, хотя и представляется весьма общим[1]), однако в некоторых случаях не может быть использовано, и, следовательно, тогда надлежит пользоваться вторым решением. Однако большей частью имеется только очень немного промежутков такого рода, что для них требуется [применить] второй метод, тогда как для всех остальных можно провести вычисление с помощью первого метода. Первое имеет место тогда, когда для некоторого промежутка количества V и c либо исчезают, либо возрастают до бесконечности, так как при этом может статься, что, каким бы малым ни выбирать промежуток, количества y и p будут претерпевать бесконечные изменения, и для их определения потребуется особое решение. Например, если предложено уравнение $d^2y+\frac{y\,dx^2}{x^2}=0$, промежуток от 0 вплоть до $x=\omega$, даже если ω принимается весьма малым, дает бесконечные изменения в значениях y и p; это усматривается из полного интеграла указанного уравнения, так как им является

$$y=Ax^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\;lx+\alpha\right),$$

и отсюда

$$p=\frac{A}{2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\;lx+\alpha\right)+\frac{A\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\;lx+\alpha\right),$$

то есть

$$p=\frac{A}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,lx+\alpha+60^\circ\right).$$

Очевидно, что при $x=0$ будет также $y=0$, но значение для p является неопределенным[2]). Кроме того, сколь бы малое значение мы ни придавали x, y также получит весьма малое значение, но такое, которое на сколь угодно малом промежутке будет то положительным, то исчезающим, то отрицательным вследствие весьма большого изменения,

[1]) Etsi latissime patere videtur.
[2]) Incertum.

которому подвержен lx, между тем как количество p проходит через все возможные изменения. То же самое еще лучше усмотреть на примере [уравнения]

$$d^2y + \frac{2dx\,dy}{x} - \frac{f^2y\,dx^2}{x^4} = 0,$$

интегралом которого является $y = A\sin\left(\frac{f}{x} + \alpha\right)$. Действительно, пока x возрастает от 0 до ω, угол $\frac{f}{x} + \alpha$ переходит от бесконечности к конечному значению, и его синус в это время бесконечное число раз изменяется от $+1$ до -1. Стало быть, когда встречаются такого рода промежутки, неудивительно, что обычные методы для приближения отказывают, так как они исходят из того положения, что изменения на весьма малых промежутках сами также крайне ничтожны; а за исключением таких промежутков указанное решение всегда может быть применено с пользой.

ПРИМЕР 1

1098. *Предложено уравнение*

$$d^2y + \frac{y\,dx^2}{fx} = 0.$$

Приближенно проинтегрировать его.

Так как имеем $dp = -\frac{y\,dx}{fx}$, то $V = \frac{-y}{fx}$. Поэтому, если в начале промежутка $x = a$, $y = b$ и $p = c$, то, чуточку продвигаясь[1]), в соответствии с первым решением[2]), поскольку

$$P = \frac{y}{fx^2} = \frac{-1}{a^2f},$$

$$Q = \frac{-1}{fx} = \frac{-1}{af} \quad \text{и} \quad R = 0,$$

получим

$$p = c - \frac{b}{af}(x-a) - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a^2f} - \frac{c}{af}\right)(x-a)^2,$$

и

$$y = b + c(x-a) - \frac{b}{2af}(x-a)^2.$$

Итак, положив $x - a = \omega$, найдем для следующего промежутка начальные значения:

$$a' = a + \omega,$$

$$b' = b + c\omega - \frac{b\omega^2}{2af}$$

и

$$c' = c - \frac{b\omega}{af} - \frac{(b-ac)\,\omega^2}{2a^2f}$$

и подобным же образом определим начальные значения для следующего промежутка. Правда, если для какого-либо промежутка получится $a = 0$, то вычисление надо выполнять особым способом. А именно,

[1]) Inde tantillum progrediendo.

[2]) Имеется в виду первый из методов, указанных в § 1094.

принимая в начале этого промежутка $x=0$, $y=b$ и $p=c$, надо положить

$$p=c+Ax^{\lambda} \quad \text{и} \quad y=b+cx+\frac{Ax^{\lambda+1}}{\lambda+1},$$

и тогда

$$\frac{dp}{dx}=\lambda Ax^{\lambda-1}=\frac{-y}{fx}=\frac{-b}{fx}-\frac{c}{f}-\frac{Ax^{\lambda}}{(\lambda+1)f};$$

это соотношение не может удовлетворяться, если только не имеем $b=0$; тогда получается $\lambda=0$ и $A=\infty$, откуда мы заключаем, что нужно положить $y=b+Axlx$, следовательно, $p=Alx+A$ и $\frac{dp}{dx}=\frac{A}{x}=\frac{-b-Axlx}{fx}$, откуда $A=-\frac{b}{f}$. Для того же чтобы можно было отсюда точнее определить p, полагаем

$$y=b+Axlx+Bx,$$

и тогда

$$p=Alx+A+B \quad \text{и} \quad \frac{dp}{dx}=\frac{A}{x},$$

откуда получаем, как и раньше, $A=\frac{-b}{f}$, а B остается неопределенным, так что будет

$$y=b-\frac{bx}{f}lx+Bx \quad \text{и} \quad p=\frac{-b}{f}lx-\frac{b}{f}+B,$$

и, следовательно, если только не имеем при $x=0$, что $b=0$, количество c обязательно бесконечно. В силу этого, если в начале промежутка имеем $x=0$, $y=b$ и $p=\infty$, то на его конце и в начале следующего промежутка получим

$$x=\omega, \qquad y=b-\frac{b\omega}{f}l\omega \quad \text{и} \quad p=\frac{-b}{f}l\omega.$$

ПРИМЕР 2

1099. *Пусть предложено уравнение*

$$x^2\,d^2y-2x\,dx\,dy+2y\,dx^2=\frac{x^2y\,dx^2}{f^2},$$

которое нужно приближенно проинтегрировать.

Так как имеем

$$\frac{dp}{dx}=\frac{2p}{x}-\frac{2y}{x^2}+\frac{y}{f^2}=V,$$

то

$$P=\frac{-2p}{x^2}+\frac{4y}{x^3},$$

$$Q=\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{f^2} \quad \text{и} \quad R=\frac{2}{x}.$$

Следовательно, если в начале какого-либо промежутка $x=a$, $y=b$, $p=c$, то, поскольку $F=\frac{2c}{a}-\frac{2b}{a^2}+\frac{b}{f^2}$, получим

$$\left(\frac{2c}{a}-\frac{2b}{a^2}+\frac{b}{f^2}\right)(x-a)-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{f^2}+\frac{2b}{af^2}\right)(x-a)^2$$

и

$$y = b + c(x-a) + \frac{1}{2}\left(\frac{2c}{a} - \frac{2b}{a^2} + \frac{b}{f^2}\right)(x-a)^2,$$

и таким образом вычисление без труда продолжается по промежуткам, если только не имеем $a=0$. В том же случае, когда $a=0$, провести вычисление на [таком] промежутке трудно, так как тогда нет возможности придать количествам b и c наперед данные значения, и это легко понять благодаря тому, что полным интегралом предложенного уравнения является

$$y = Ae^{\frac{x}{f}}x + Be^{\frac{-x}{f}}x.$$

Действительно, при $x=0$ обязательно будет $y=0$, если только мы не желаем принять коэффициенты A и B бесконечными. Если же положить $b=0$, то приближение получается сразу [1]).

[1]) Sumto autem $b=0$, approximatio est in promptu.

ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
КНИГА ПЕРВАЯ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ИЛИ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО ПО ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ ВТОРОГО ИЛИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ
О РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, СОДЕРЖАЩИХ ТОЛЬКО ДВА ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА I
ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПРОСТЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ИЛИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

ЗАДАЧА 140

1100. *Принимая постоянным элемент* dx, *найти полный интеграл выражений* $d^3y=0$, $d^4y=0$, $d^5y=0$ *и т. д. и вообще выражения* $d^ny=0$.

РЕШЕНИЕ

Поскольку dx является постоянным, уравнение $d^3y = 0$ в результате интегрирования дает $d^2y = \alpha\, dx^2$, и поэтому после нового интегрирования получаем $dy = \alpha x\, dx + \beta\, dx$, и, наконец, $y = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Подобным же образом из уравнения $d^4y = 0$ с помощью четырех кратного интегрирования находим

1) $$d^3y = \alpha\, dx^3,$$

2) $$d^2y = \alpha x\, dx^2 + \beta\, dx^2,$$

3) $$dy = \frac{1}{2}\alpha x^2\, dx + \beta x\, dx + \gamma\, dx$$

и, наконец,

4) $$y = \frac{1}{6}\alpha x^3 + \frac{1}{2}\beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

А из уравнения $d^5y = 0$ с помощью пятикратного интегрирования получаем

$$y = \frac{1}{24}\alpha x^4 + \frac{1}{6}\beta x^3 + \frac{1}{2}\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon.$$

Интеграл же уравнения $d^6y = 0$ получается в виде

$$y = \frac{1}{120}\alpha x^5 + \frac{1}{24}\beta x^4 + \frac{1}{6}\gamma x^3 + \frac{1}{2}\delta x^2 + \varepsilon x + \zeta,$$

и таким же образом можно переходить к выражениям вида $d^ny = 0$, каков бы ни был порядок, если только n является целым положительным числом.

СЛЕДСТВИЕ 1

1101. Итак, начиная с наиболее простого выражения, интегралы располагаются в следующем порядке:

Для выражений	Полными интегралами являются
$dy = 0$	$y = \alpha$
$d^2y = 0$	$y = \alpha x + \beta$
$d^3y = 0$	$y = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \gamma$
$d^4y = 0$	$y = \frac{1}{6}\alpha x^3 + \frac{1}{2}\beta x^2 + \gamma x + \delta$
и т. д.	и т. д.

СЛЕДСТВИЕ 2

1102. Так как постоянные α, β, γ и т. д. зависят от нашего произвола, можно полностью отбросить дроби, и тогда

Для выражения	Интегралами будут
$dy = 0$	$y = \alpha$
$d^2y = 0$	$y = \alpha x + \beta$
$d^3y = 0$	$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
$d^4y = 0$	$y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$
$d^5y = 0$	$y = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$
и т. д.	и т. д.

СЛЕДСТВИЕ 3

1103. Стало быть, сколько единиц в порядке дифференциального выражения, столько же произвольных постоянных содержит его полный интеграл, и в любом случае эти постоянные нужно определять по заданным условиям.

ПОЯСНЕНИЕ 1

1104. Если положить $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$, $dr = s\,dx$ и т. д., то все дифференциальные уравнения высших порядков сводятся к конечным количествам, в которых уже не принимается более во внимание тот элемент, который полагали постоянным. Таким образом, все дифференциальные уравнения можно представить в следующем виде:

Дифференциальных уравнений	Общий вид
I порядка	$p = f(x$ и $y)$
II порядка	$q = f(x,\ y$ и $p)$
III порядка	$r = f(x,\ y,\ p$ и $q)$
IV порядка	$s = f(x,\ y,\ p,\ q$ и $r)$

и т. д.,

где количества y, p, q, r, s и т. д., по исключении dx, зависят друг от друга таким образом, что $\left(\text{поскольку } dx = \frac{dy}{p} = \frac{dp}{q} = \frac{dq}{r} = \frac{dr}{s} = \frac{ds}{t}\right.$ и т. д.$\left.\vphantom{\frac{dy}{p}}\right)$ имеют место следующие соотношения:

$$
\begin{array}{llll}
q\,dy = p\,dp, & r\,dy = p\,dq, & s\,dy = p\,dr, & t\,dy = p\,ds \text{ и т. д.,} \\
r\,dp = q\,dq, & s\,dp = q\,dr, & t\,dp = q\,ds \text{ и т. д.,} & \\
s\,dq = r\,dr, & t\,dq = r\,ds \text{ и т. д.,} & & \\
t\,dr = s\,ds \text{ и т. д.} & & &
\end{array}
$$

Некоторые из этих формул интегрируются непосредственно, например,

$$\int q\,dy = \frac{1}{2}p^2, \quad \int r\,dp = \frac{1}{2}q^2, \quad \int s\,dq = \frac{1}{2}r^2, \quad \int t\,dr = \frac{1}{2}s^2 \text{ и т. д.}$$

Затем, так как $\int z\,dv = vz - \int v\,dz$, мы получаем из последних формул такие:

$$\int y\,dq = yq - \frac{1}{2}p^2, \quad \int p\,dr = pr - \frac{1}{2}q^2, \quad \int q\,ds = qs - \frac{1}{2}r^2,$$

$$\int r\,dt = rt - \frac{1}{2}s^2 \text{ и т. д.}$$

и с их помощью выводим из предыдущих, что

$$\int s\,dy = pr - \frac{1}{2}q^2, \quad \text{следовательно,} \quad \int y\,ds = ys - pr + \frac{1}{2}q^2;$$

$$\int t\,dp = qs - \frac{1}{2}r^2, \quad \text{следовательно,} \quad \int p\,dt = pt - qs + \frac{1}{2}r^2;$$

$$\int u\,dq = rt - \frac{1}{2}s^2, \quad \text{следовательно,} \quad \int q\,du = qu - rt + \frac{1}{2}s^2.$$

Затем отсюда определяем

$$\int y\,du = yu - \int u\,dy,$$

но $\frac{dy}{p} = \frac{dt}{u}$, откуда

$$\int y\,du = yu - \int p\,dt = yu - pt + qs - \frac{1}{2}r^2.$$

Таким образом, если мы опять введем дифференциалы, то получим следующие интегральные формулы:

$$\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2,$$

$$\int y\,d^3y = y\,d^2y - \frac{1}{2}dy^2,$$

$$\int y\,d^5y = y\,d^4y - dy\,d^3y + \frac{1}{2}d^2y^2,$$

$$\int y\,d^7y = y\,d^6y - dy\,d^5y + d^2y\,d^4y - \frac{1}{2}d^3y^2$$

и т. д.,

так что выражение

$$\int y\,d^ny$$

является интегрируемым всякий раз, когда n есть нечетное число.

ПОЯСНЕНИЕ 2

1105. В дифференциальных уравнениях второго порядка мы определили более простые выражения таким образом, что q равняется функции либо только от x, либо только от y, либо только от p, и эти выражения, если записывать прописными буквами функции строчных букв, можно представить в следующем виде:

либо $q = X$, либо $q = Y$, либо $q = P$.

Стало быть, мы можем подобным же образом определить более простые выражения для дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$r = X, \quad r = Y, \quad r = P, \quad r = Q,$$

так что они содержат только два переменных количества.

Для четвертого же порядка более простыми видами будут

$$s = X, \quad s = Y, \quad s = P, \quad s = Q, \quad s = R$$

и для пятого

$$t = X, \quad t = Y, \quad t = P, \quad t = Q, \quad t = R, \quad t = S,$$

и так далее для более высоких порядков.

Правда, эти виды не все одинаковым образом допускают интегрирование, поскольку некоторые из них даже ни разу [не интегрируются], некоторые только один раз, а некоторые интегрируются, пока не приводятся к соотношению между x и y[1]), и к этому типу относятся все, указанные первыми в любом порядке. Однако во всех случаях предлагается найти соотношение между двумя главными переменными x и y.

ЗАДАЧА 141

1106. *Положим* $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$, $dr = s\,dx$, $ds = t\,dx$ *и т. д. Пусть при любом порядке дифференциалов какая угодно из букв* p, q, r, s, t *и т. д. равна функции от* x, *которую обозначим* X; *найти соотношение между* x *и* y.

РЕШЕНИЕ

Во-первых, если имеем $p = X$, то, помножив на dx, получим $p\,dx = dy = X\,dx$, откуда $y = \int X\,dx$, что представляет случай простых дифференциальных выражений первого порядка.

Во-вторых, пусть $q = X$, тогда $q\,dx = dp = X\,dx$, откуда $p = \int X\,dx$ и $p\,dx = dy = dx \int X\,dx$; следовательно, $y = \int dx \int X\,dx$, или же, в простых интегралах, $y = x \int X\,dx - \int Xx\,dx$.

В-третьих, пусть $r = X$; поскольку $dq = r\,dx$, будет $q = \int X\,dx$, откуда

$$p = \int q\,dx = \int dx \int X\,dx = x \int X\,dx - \int Xx\,dx,$$

и, наконец,

$$y = \int p\,dx = \int dx \int dx \int X\,dx = \frac{1}{2}x^2 \int X\,dx - x \int Xx\,dx + \frac{1}{2} \int Xx^2\,dx.$$

В-четвертых, пусть $s = X$, находим, что $y = \int dx \int dx \int dx \int X\,dx$, и это выражение развертывается в следующее:

$$y = \frac{1}{6}x^3 \int X\,dx - \frac{1}{2}x^2 \int Xx\,dx + \frac{1}{2} \int Xx^2\,dx - \frac{1}{6} Xx^3\,dx.$$

В-пятых, пусть $t = X$, тогда $y = \int dx \int dx \int dx \int dx \int X\,dx$ или же

$$y = \frac{1}{24}x^4 \int X\,dx - \frac{1}{6}x^4 \int Xx\,dx + \frac{1}{4}x^2 \int Xx^2\,dx$$
$$- \frac{1}{6}x \int Xx^3\,dx + \frac{1}{24} \int Xx^4\,dx,$$

откуда очевиден закон, по которому надо продвигаться дальше[2]).

---

[1]) Aliae per omnes integrationes usque ad relationem inter x et y perduci possunt.

[2]) Очевидно, Эйлер получает здесь попутно формулу для преобразования n-кратного («n-повторного») интеграла в однократный.

СЛЕДСТВИЕ 1

1107. Итак, имеется столько интегральных выражений[1]), сколько единиц в порядке дифференциального уравнения, и так как любое из них вводит произвольное постоянное, то столько же постоянных войдут в интеграл, который благодаря этому становится полным, что ясно также по первоначальному виду, который содержит столько же знаков интеграла.

СЛЕДСТВИЕ 2

1108. Принимаем постоянным элемент dx; полные интегралы следующих выражений, записанных обычным образом, получаются в таком виде:

I. Если $dy = X\,dx$, то $y = \int X\,dx$;

II. Если $d^2y = X\,dx^2$, то $1y = x\int X\,dx - \int Xx\,dx$;

III. Если $d^3y = X\,dx^3$, то $2y = x^2\int X\,dx - 2x\int Xx\,dx + \int Xx^2\,dx$;

IV. Если $d^4y = X\,dx^4$, то

$$6y = x^3\int X\,dx - 3x^2\int Xx\,dx + 3x\int Xx^2\,dx - \int Xx^3\,dx;$$

V. Если $d^5y = X\,dx^5$, то

$$24y = x^4\int X\,dx - 4x^3\int Xx\,dx + 6x^2\int Xx^2\,dx - 4x\int Xx^3\,dx + \int Xx^4\,dx$$

и т. д.

ПОЯСНЕНИЕ

1109. Те выражения, которые выше мы ставили на втором месте[2]) и которые содержат функцию Y, нельзя проинтегрировать для порядка выше второго. Действительно, для третьего порядка выражение $r = Y$ никаким способом не может быть проинтегрировано[3]), хотя мы знаем, что

$$r = \frac{p\,dq}{dy} = \frac{q\,dq}{dp} = \frac{dq}{dx},$$

нельзя также определить отсюда q через y. Действительно, возьмем [это уравнение] в виде $p\,dq = Y\,dy$, причем $p\,dp = q\,dy$; так как $p = \frac{Y\,dy}{dq}$, получим, что

$$dp = \frac{dy\,dY}{dq} + Yd\frac{dy}{dq},$$

и, исключая отсюда p,

$$\frac{Y\,dy^2\,dY}{dq^2} + \frac{Y^2\,dy}{dq}\,d\,\frac{dy}{dq} = q\,dy;$$

хотя это уравнение второго порядка, оно в общем случае никоим образом не может быть решено[4]). Выражение $s = Y$ для четвертого

---

[1]) Имеются в виду те простые интегралы, суммой которых выражается искомая функция y в формулах предыдущего параграфа.

[2]) Смотреть классификацию простейших дифференциальных уравнений в § 1105.

[3]) Nullo modo integrari potest.

[4]) Neutiquam in genere resolutionem admittit. —Эти категорические утверждения невозможности (см. выше то место, к которому дана сноска 2) формулируются Эйлером без доказательства.

порядка можно проинтегрировать один раз, так как $\int s\,dy = pr - \frac{1}{2}q^2 = \int Y\,dy$, но продвинуться отсюда дальше нет возможности. Что же касается тех более простых выражений, которые мы для любого порядка оставили на последнем месте, а также на предпоследнем, то они оказываются разрешимыми, и мы займемся их интегрированием.

ЗАДАЧА 142

1140. *Положим, как и до сих пор, $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$ и т. д., и пусть буквы Y, P, Q, R и т. д. обозначают функции от соответствующих строчных букв. Найти интегралы следующих простых выражений:*

$$p = Y, \quad q = P, \quad r = Q, \quad s = R, \quad t = S \quad \text{и т. д.}$$

РЕШЕНИЕ

Первое уравнение, поскольку $p = \frac{dy}{dx}$, сразу дает $dx = \frac{dy}{Y}$, откуда $x = \int \frac{dy}{Y}$.

Так как $q = \frac{dp}{dx}$, второе уравнение $q = P$ даст $dx = \frac{dp}{P}$ и $dy = \frac{p\,dp}{P}$; отсюда, поскольку P является функцией от p, оба переменных x и y определяются через p следующим образом:

$$x = \int \frac{dp}{P} \quad \text{и} \quad y = \int \frac{p\,dp}{P}.$$

Так как $r = \frac{dq}{dx}$, то третье уравнение $r = Q$ дает $dx = \frac{dq}{Q}$, откуда $q\,dx = dp = \frac{q\,dq}{Q}$, так что $x = \int \frac{dq}{Q}$ и $p = \int \frac{q\,dq}{Q}$. Отсюда заключаем, что $p\,dx = dy = \frac{dq}{Q}\int \frac{q\,dq}{Q}$, следовательно, $y = \int \frac{dq}{Q}\int \frac{q\,dq}{Q}$. Таким образом, оба переменных x и y определяются через одно и то же переменное q, а именно

$$x = \int \frac{dq}{Q} \quad \text{и} \quad y = \int \frac{dq}{Q}\int \frac{q\,dq}{Q}.$$

Четвертое уравнение $s = R = \frac{dr}{dx}$ дает $dx = \frac{dr}{R}$, откуда получаем $r\,dx = dq = \frac{r\,dr}{R}$, так что $q = \int \frac{r\,dr}{R}$. Затем $q\,dx = dp$ дает нам $dp = \frac{dr}{R}\int \frac{r\,dr}{R}$, поэтому $p = \int \frac{dr}{R}\int \frac{r\,dr}{R}$, и, поскольку $p\,dx = dy$, будем иметь $dy = \frac{dr}{R}\int \frac{dr}{R}\int \frac{r\,dr}{R}$. Таким образом, оба главных переменных x и y определяются через r, а именно

$$x = \int \frac{dr}{R} \quad \text{и} \quad y = \int \frac{dr}{R}\int \frac{dr}{R}\int \frac{r\,dr}{R}.$$

Пятое уравнение $t = S$, если его решить таким же образом, дает

$$x = \int \frac{ds}{S} \quad \text{и} \quad y = \int \frac{ds}{S}\int \frac{ds}{S}\int \frac{ds}{S}\int \frac{s\,ds}{S},$$

и так можно легко продвигаться дальше.

СЛЕДСТВИЕ 1

1111. Из второго выражения мы видим[1]), что если x равняется функции от p, так что $x=P$, то будем иметь $y=\int p\,dP=Pp-\int P\,dp$, что, впрочем, само по себе очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 2

1112. Если же имеем $x=Q$[2]), то, поскольку $dx=dQ$,

$$q\,dx=dp=q\,dQ,\quad p=\int q\,qQ,$$

откуда

$$y=\int dQ\int q\,dQ,\ \text{т. е. } y=Q\int q\,dQ-\int qQ\,dQ.$$

Или же, так как

$$y=\int dQ\left(qQ-\int Q\,dq\right),$$

получаем, что

$$y=\frac{1}{2}qQ^2+\frac{1}{2}\int Q^2\,dq-Q\int Q\,dq,$$

либо же в таком виде:

$$2y=Q^2q-2Q\int Q\,dq+\int Q^2\,dq.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1113. Подобным же образом, если $x=R$[2]), то

$$q=\int r\,dx=\int r\,dR \text{ и } p=\int q\,dx=\int dR\int r\,dR,$$

а также

$$y=\int p\,dx=\int dR\int dR\int r\,dR,$$

или же на основании предыдущего следствия

$$2y=\int dR\left(R^2r-2R\int R\,dr+\int R^2\,dr\right).$$

Следовательно, после приведений, подобных вышеуказанным,

$$6y=R^3r-3R^2\int R\,dr+3R\int R^2\,dr-\int R^3\,dr.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

1114. Если имеем $x=S$[2]), то с помощью подобных приведений находим

$$24y=S^4s-4S^3\int S\,ds+6S^2\int S^2\,ds-4S\int S^3\,ds+\int S^4\,ds.$$

Стало быть, получим отсюда с помощью дифференцирований, в обратном порядке,

$$24p\,dS=4S^3s\,dS-12S^2\,dS\int S\,ds+12S\,dS\int S^2\,ds-4\,dS\int S^3\,ds,$$

---

[1]) Имеется в виду решение второго уравнения в § 1110.

[2]) Эйлер пишет здесь Q, R, S вместо $\int\frac{dq}{Q}$, $\int\frac{dr}{R}$, $\int\frac{ds}{S}$ в решениях третьего, четвертого и пятого уравнений § 1110.

то есть

$$6p=S^3s-3S^2\int S\,ds+3S\int S^2\,ds-\int S^3\,ds \text{ и } 2q=S^2s-2S\int S\,ds+\int S^2\,ds$$

и затем

$$r=Ss-\int S\,ds \text{ и } s=s.$$

ЗАДАЧА 143

1115. *Сохраняя те же обозначения, которыми мы пользовались до сих пор, найти интегралы следующих простых выражений:*

$$q=Y,\quad r=P,\quad s=Q,\quad t=R \text{ и т. д.}$$

РЕШЕНИЕ

Из первого выражения $q=Y$, поскольку $q=\frac{p\,dp}{dy}$, получим $p\,dp=Y\,dy$ и $p^2=2\int Y\,dy$, откуда $p=\sqrt{2\int Y\,dy}=\frac{dy}{dx}$.

Отсюда получаем $x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int Y\,dy}}$, так что x определяется через y.

Из второго выражения $r=P$, поскольку $r=\frac{q\,dp}{dp}$, получим $q\,dq=P\,dp$ и $q=\sqrt{2\int P\,dp}=\frac{p\,dp}{dy}=\frac{dp}{dx}$, откуда находим

$$x=\int\frac{dp}{\sqrt{2\int P\,dp}} \text{ и } y=\int\frac{p\,dp}{\sqrt{2\int P\,dp}}.$$

Из третьего выражения $s=Q$, поскольку $s=\frac{r\,dr}{dq}$, получаем

$$r=\sqrt{2\int Q\,dq}=\frac{q\,dq}{dp},$$

откуда следует, что $p=\int\frac{q\,dq}{\sqrt{2\int Q\,dq}}$. А так как $r=\frac{dq}{dx}$, то $dx=\frac{dp}{\sqrt{2\int Q\,dq}}$, и, ввиду того, что $p\,dx=dy$, найдем

$$x=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int Q\,dq}} \text{ и } y=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int Q\,dq}}\int\frac{q\,dq}{\sqrt{2\int Q\,dq}}.$$

Из четвертого выражения $t=R$, поскольку $t=\frac{s\,ds}{dr}$, находим $s=\sqrt{2\int R\,dr}$. Но имеем $s=\frac{dr}{dx}$, откуда $dx=\frac{dr}{\sqrt{2\int R\,dr}}$. Однако, вместе с тем, $s=\frac{r\,dr}{dx}$, поэтому $q=\int\frac{r\,dr}{\sqrt{2\int R\,dr}}$. Но так как $p=\int q\,dx$, будем иметь $p=\int\frac{dr}{\sqrt{2\int R\,dr}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{2\int R\,dr}}$ и отсюда получаем $y=\int p\,dx$. Поэтому x и y определяются через r таким образом, что

$$x=\int\frac{dr}{\sqrt{2\int R\,dr}} \quad\text{и}\quad y=\int\frac{dr}{\sqrt{2\int R\,dr}}\int\frac{dr}{\sqrt{2\int R\,dr}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{2\int R\,dr}}.$$

Из пятого выражения $u = S$, поскольку $u = \frac{t\,dt}{ds}$, определяем $t = \sqrt{2\int S\,ds} = \frac{ds}{dx}$, так что $dx = \frac{ds}{\sqrt{2\int S\,ds}}$. Вместе с тем, $t = \frac{s\,ds}{dr}$, следовательно, $r = \int \frac{s\,ds}{\sqrt{2\int S\,ds}}$. А теперь $q = \int r\,dx$, $p = \int q\,dx$ и $y = \int p\,dx$, откуда получается, что $x = \int \frac{ds}{\sqrt{2\int S\,ds}}$ и $y = \int \frac{ds}{\sqrt{2\int S\,ds}} \int \frac{ds}{\sqrt{2\int S\,ds}} \int \frac{ds}{\sqrt{2\int S\,ds}} \times \int \frac{s\,ds}{\sqrt{2\int S\,ds}}$.

ПОЯСНЕНИЕ

1116. Таковы те случаи, когда рассмотренные выше простые выражения могут быть решены, но не видно метода, с помощью которого можно разрешить остальные. Гораздо меньше встречается разрешимых случаев для более сложных выражений, в которых $\frac{d^n y}{dx^n}$ равняется функции двух или большего числа переменных количеств. Вследствие такой скудости мы могли изложить в этом разделе только очень небольшой материал. И почти для всех уравнений, которые можно разрешить с помощью найденных до сих пор методов, общим видом является

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ и т. д.} = 0,$$

причем элемент dx принимается постоянным. Положив

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx \text{ и т. д.},$$

мы можем представить их в таком виде:

$$Ay + Bp + Cq + Dr + Es + \text{ и т. д.} = 0.$$

Затем допускают решение такие уравнения, которые содержатся в следующей, более общей, форме:

$$Ay + Bp + Cq + Dr + Es + \text{ и т. д.} = X,$$

где X обозначает какую угодно функцию от x. Далее, допускают интегрирование также следующие виды уравнений, которые, впрочем, могут быть приведены к предыдущим:

$$Ay + \frac{Bp}{x} + \frac{Cq}{x^2} + \frac{Dr}{x^3} + \frac{Es}{x^4} + \text{ и т. д.} = 0$$

и

$$Ay + \frac{Bp}{x} + \frac{Cq}{x^2} + \frac{Dr}{x^3} + \frac{Es}{x^4} + \text{ и т. д.} = X.$$

Их удается решить, каков бы ни был порядок дифференциалов. Итак, наше изложение будет посвящено развитию [теории] этих уравнений[1]).

[1]) In harum ergo aequationum evolutione tractatio nostra versabitur.

ГЛАВА II

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ВИДА $Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+E\frac{d^4y}{dx^4}+$ и т. д. $=0$, ГДЕ ЭЛЕМЕНТ dx ПРИНИМАЕТСЯ ПОСТОЯННЫМ

ЗАДАЧА 144

1117. *Найти полный интеграл дифференциального уравнения третьего порядка*

$$Ay+\frac{B\,dy}{dx}+\frac{Cd^2y}{dx^2}+\frac{Dd^3y}{dx^3}=0,$$

где элемент dx принимается постоянным.

РЕШЕНИЕ

Так как A, B, C, D суть постоянные количества, то достаточно слегка присмотреться, чтобы обнаружить[1]), что рассматриваемому уравнению удовлетворяет выражение $y=e^{\lambda x}$. Действительно, так как при этом получаем

$$\frac{dy}{dx}=\lambda e^{\lambda x},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\lambda^2e^{\lambda x},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\lambda^3e^{\lambda x},$$

то после подстановки этих выражений и деления уравнения на $e^{\lambda x}$ будем иметь

$$A+\lambda B+\lambda^2C+\lambda^3D=0.$$

Отсюда определяется показатель λ, и, так как получаются для него три значения, которые пусть будут α, β, γ, мы будем иметь три удовлетворяющие [уравнению] выражения: $y=e^{\alpha x}$, $y=e^{\beta x}$, $y=e^{\gamma x}$. Но по характеру предложенного уравнения: очевидно, что если ему удовлетворяют значения $y=P$, $y=Q$, $y=R$, то ему будет удовлетворять также любое их сочетание

$$y=\mathfrak{A}P+\mathfrak{B}Q+\mathfrak{C}R.$$

[1]) Levi attentione adhibita patet.

Таким образом, по трем найденным выражениям мы определяем следующее, наиболее общее и также удовлетворяющее уравнению

$$y = \mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x},$$

и, поскольку оно содержит три произвольных постоянных $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, оно действительно является полным интегралом нашего предложенного уравнения.

СЛЕДСТВИЕ 1

1118. Стало быть, полный интеграл состоит из стольких слагаемых, сколько корней, или же сколько множителей имеет уравнение

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 = 0.$$

Если это уравнение имеет множитель $a + \lambda$, то в интеграле будет слагаемое e^{-ax}.

СЛЕДСТВИЕ 2

1119. Очевидно, что такое слагаемое является интегралом уравнения $ay + \frac{dy}{dx} = 0$. Поэтому, если имеем

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 = (a + \lambda)(b + \lambda)(c + \lambda),$$

то значения для y определяются из следующих простых уравнений:

$$ay + \frac{dy}{dx} = 0, \quad by + \frac{dy}{dx} = 0, \quad cy + \frac{dy}{dx} = 0.$$

Пусть этими значениями будут: $y = P$, $y = Q$, $y = R$, тогда интегралом предложенного уравнения будет

$$y = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R \text{ [1]}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1120. Если два корня равны между собой, положим $\beta = \alpha$, то их разность надо рассматривать как исчезающую, т. е. $\beta = \alpha + \omega$, и поскольку

$$e^{\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\omega x} = e^{\alpha x}(1 + \omega x) \text{ [2]},$$

то очевидно, что вместо $\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x}$ надо писать

$$\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\alpha x}x = e^{\alpha x}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x).$$

Если же все три корня будут равны между собой, $\alpha = \beta = \gamma$, так что уравнение будет вида

$$y + \frac{3\,dy}{a\,dx} + \frac{3\,d^2y}{a^2dx^2} + \frac{d^3y}{a^3dx^3} = 0,$$

то, поскольку $\alpha = \beta = \gamma \, (= -a)$, полным интегралом будет

$$e^{-ax}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2).$$

---

[1] Нам кажется, что повторение в этом параграфе с новой точки зрения того, что получено уже в § 1117, вызвано желанием полнее выявить родство дифференциального и алгебраического уравнений. Углубление таких аналогий повело впоследствии к открытию символических методов.

[2] См. выше, § 775.

СЛЕДСТВИЕ 4

1121. Если два корня становятся мнимыми, так что

$$\alpha=\mu+\nu\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad \beta=\mu-\nu\sqrt{-1},$$

то вместо $\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}$ нужно писать

$$e^{\mu x}\left(\mathfrak{A}e^{\nu x\sqrt{-1}}+\mathfrak{B}e^{-\nu x\sqrt{-1}}\right),$$

что приводится к следующему виду:

$$e^{\mu x}(\mathfrak{A}\cos\nu x+\mathfrak{B}\sin\nu x).$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

1122. Хотя предложенное уравнение требует трех интегрирований, прежде чем получается конечное соотношение между x и y, здесь, однако, мы получаем это соотношение одним действием, которое даже не имеет ничего общего с интегрированием[1]). Очевидно, мы по догадке нашли выражение, удовлетворяющее, как частный интеграл, уравнению[2]), и одновременно получили три выражения такого вида. Затем, исходя из природы самого уравнения, мы обнаружили, что если ему удовлетворяют в отдельности значения $y=P$, $y=Q$, $y=R$, то ему должно удовлетворять также составленное из них выражение $y=\mathfrak{A}P+\mathfrak{B}Q+\mathfrak{C}R$, и если бы это не имело места к нашему удобству, то из этих трех значений ничего больше вывести мы не могли бы. Итак, исходя из тех же начал, можно решать как бы одним действием дифференциальные уравнения подобного вида в общем случае, каков бы ни был их порядок, так что при этом определяется полный интеграл.

ПОЯСНЕНИЕ 2

1123. Так как можно в общем случае решить дифференциальное уравнение третьего порядка

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}=0,$$

полным интегралом которого будет

$$y=\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x},$$

где α, β, γ суть корни кубического уравнения

$$A+B\lambda+C\lambda^2+D\lambda^3=0,$$

то это можно заслуживающим внимания образом использовать для других уравнений, в которые преобразуется вышеуказанное. Во-первых, это уравнение может быть приведено к дифференциальному уравнению второго порядка с помощью подстановки $y=e^{\int u\,dx}$, откуда получаем

$$\frac{dy}{dx}=e^{\int u\,dx}u, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{\int u\,dx}\left(\frac{du}{dx}+u^2\right)$$

и

$$\frac{d^3y}{dx^3}=e^{\int u\,dx}\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{3u\,du}{dx}+u^3\right),$$

[1]) quae ne integratione quidem est affinis.

[2]) aequationi partacular iter satisfacientem.

так что преобразованное уравнение после деления на $e^{\int u\,dx}$ будет

$$A+Bu+Cu^2+Du^3+C\frac{du}{dx}+\frac{3Du\,du}{dx}+\frac{Dd^2u}{dx^2}=0.$$

Следовательно, поскольку $u=\frac{dy}{y\,dx}$, его интегралом является

$$u=\frac{\alpha\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\beta\mathfrak{B}e^{\beta x}+\gamma\mathfrak{C}e^{\gamma x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}}.$$

Это же уравнение может быть дальше сведено к уравнению первого порядка, если положим $dx=\frac{du}{t}$. Действительно, поскольку принимается постоянным элемент dx, получим $t\,d^2u-dt\,du=0$, т. е. $d^2u=\frac{dt\,du}{t}$, откуда $\frac{du}{dx}=t$ и $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{t\,dt}{du}$, так что получается следующее дифференциальное уравнение первого порядка:

$$A+Bu+Cu^2+Du^3+t\,(C+3Du)+\frac{Dt\,dt}{du}=0.$$

Стало быть, решение этого уравнения тоже оказывается возможным: очевидно, можно выразить значения обоих переменных u и t через одно и то же переменное x. Действительно, так как y задается через x, то прежде всего будем иметь $u=\frac{dy}{y\,dx}$. Но тогда $t+u^2=\frac{d^2y}{y\,dx^2}$, так как $\frac{du}{dx}=t$. Следовательно, если вместо y подставить найденное выше значение, то получим

$$u=\frac{\alpha\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\beta\mathfrak{B}e^{\beta x}+\gamma\mathfrak{C}e^{\gamma x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}}$$

и

$$t+u^2=\frac{\alpha^2\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\beta^2\mathfrak{B}e^{\beta x}+\gamma^2\mathfrak{C}e^{\gamma x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}},$$

если только α, β, γ суть корни уравнения

$$A+B\lambda+C\lambda^2+D\lambda^3=0.$$

Уместно также заметить, что то же уравнение [первого порядка], если положить $t+u^2=z$, преобразуется к виду

$$A+Bu+z\,(C+Du)+\frac{D\,dz}{du}\,(z-u^2)=0,$$

который представляется более общим, чем те уравнения такого же типа, которые рассматривались выше [§§ 433, 488, т. I]. Известные методы интегрирования не дают способа для решения этого уравнения, но оно весьма легко достигается, если положить

$$u=\frac{dy}{y\,dx}\quad\text{и}\quad z=\frac{d^2y}{y\,dx^2},$$

откуда получаем

$$du=\frac{d^2y}{y\,dx}-\frac{dy^2}{y^2dx}\quad\text{и}\quad dz=\frac{d^3y}{y\,dx^2}-\frac{dy\,d^2y}{y^2dx^2};$$

и, следовательно,

$$\frac{dz}{du}=\frac{y\,d^3z-dy\,d^2y}{dx\,(y\,d^2y-dy^2)}\quad\text{и}\quad z-u^2=\frac{y\,d^2y-dy^2}{y^2dx^2},$$

так что приходим к уравнению

$$A+\frac{B\,dy}{y\,dx}+\frac{C\,d^2y}{y\,dx^2}+\frac{D\,dy\,d^2y}{y^2dx^3}+\frac{Dy\,d^3y-D\,dy\,d^2y}{y^2dx^3}=0,$$

или же

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}=0,$$

решение которого уже приведено.

ПОЯСНЕНИЕ 3

1124. То дифференциальное уравнение первого порядка

$$Dt\,dt+t\,du\,(C+3Du)+du\,(A+Bu+Cu^2+Du^3)=0,$$

интеграл которого мы нашли, заслуживает более тщательного рассмотрения. Прежде всего, я замечу, что это уравнение становится интегрируемым, если его разделить на следующее выражение:

$$D^2t^3+Dt^2\,(B+2Cu+3Du^2)$$
$$+t\,(C+3Du)\,(A+Bu+Cu^2+Du^3)+(A+Bu+Cu^2+Du^3)^2.$$

Отсюда мы заключаем, что становится интегрируемым и уравнение

$$Dz\,dz-Du^2dz+z\,du\,(C+Du)+du\,(A+Bu)=0,$$

если его разделить на выражение

$$D^2z^3+Dz^2\,(B+2Cu)+z\,[AC+(3AD+BC)\,u+(BD+C^2)\,u^2]$$
$$+A^2+2ABu+(AC+B^2)\,u^2+(BC-AD)\,u^3\,{}^{1)}.$$

А оба эти делителя, если их приравнять нулю, дают частные интегралы, и отсюда получаются по три значения как для t, так и для z, и каждое в отдельности является частным интегралом [§ 574, т. I].

Таким образом, заслуживает того, чтобы им заняться, исследование в общем виде уравнения

$$y\,dy+yP\,dx+Q\,dx=0,$$

которое оказывается интегрируемым после деления на выражение

$$y^3+Ly^2+My+N.$$

С помощью разъясненных выше операций [§§ 517—527, т. I] находим

$$dL=2P\,dx,\quad dM=PL\,dx+3Q\,dx,$$
$$dN=2QL\,dx\ \text{ и }\ PN-QM=0,$$

откуда заключаем, что

$$P\,dx=\frac{1}{2}\,dL,\quad Q\,dx=\frac{dN}{2L},$$

$$dM=\frac{1}{2}\,L\,dL+\frac{3dN}{2L}\ \text{ и }\ N\,dL=\frac{M\,dN}{L},$$

то есть

$$M=\frac{NL\,dL}{dN}.$$

1) В первом издании $\ldots+(AD+BC)\,u^3$.— Исправление внесено Л. Шлезингером.

Подстановка этого значения, причем dN принимаем постоянным, дает

$$3\,dN^2 = L^2dL\,dN + 2NL^2d^2L + 2NL\,dL^2,$$

и это соотношение после умножения на dL переходит в

$$3\,dL\,dN^2 = d\,(NL^2dL^2).$$

Правда, эти уравнения решаются более удобным, хотя и своеобразным способом, если принять

$$N = \alpha Z^2 \quad \text{и} \quad L = \frac{dZ}{dz},$$

откуда, считая элемент dz постоянным, получаем $M = \frac{Z\,d^2Z}{2\,dz^2}$ и, следовательно,

$$dM = \frac{Z\,d^3Z + dZ\,d^2Z}{2\,dz^2}$$

и

$$\frac{1}{2}L\,dL + \frac{3\,dN}{2L} = \frac{dZ\,d^2Z}{2\,dz^2} + 3\alpha Z\,dz.$$

Стало быть, $d^3Z = 6\alpha\,dz^3$, поэтому

$$Z = \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta,$$

$$P\,dx = \frac{d^2Z}{2\,dz} \quad \text{и} \quad Q\,dx = \alpha Z\,dz.$$

Таким образом, полагая $Z = \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta$, мы сделаем интегрируемым уравнение

$$y\,dy + y\,\frac{d^2Z}{2\,dz} + \alpha Z\,dz = 0,$$

разделив его на такое выражение:

$$y^3 + y^2\,\frac{dZ}{dz} + y\,\frac{Z\,d^2Z}{2\,dz^2} + \alpha Z^2.$$

Кроме того, если Z разложено на множители[1]), так что будет предложено уравнение

$$y\,dy + y\,dz\,(\alpha + \beta + \gamma + 3z) + dz\,(\alpha + z)\,(\beta + z)\,(\gamma + z) = 0,$$

то делителем, который делает это уравнение интегрируемым, будет

$$[y + (\alpha + z)(\beta + z)]\,[y + (\alpha + z)\,(\gamma + z)]\,[y + (\beta + z)\,(\gamma + z)],$$

и отдельные множители этого делителя, будучи приравнены нулю, дают частные интегралы [§ 574, т. I]. А из любого такого интеграла полный интеграл получается следующим, более обычным образом. Положим

$$y = v - (\alpha + z)\,(\beta + z).$$

и тогда получаем

$$v\,dv + v\,dz\,(\gamma + z) - dv\,(\alpha + z)\,(\beta + z) = 0.$$

Затем пусть $dv = p\,dz$, тогда $v = \frac{p\,(\alpha + z)\,(\beta + z)}{p + \gamma + z}$ и, дифференцируя и подставляя $p\,dz$ вместо dv, получаем следующее уравнение:

$$dp\,(\alpha + z)\,(\beta + z)\,(\gamma + z) = dz\,[p^3 + (2\gamma - \alpha - \beta)\,p^2 + (\gamma - \alpha)\,(\gamma - \beta)\,p],$$

которое приводит к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{dz}{(\alpha + z)\,(\beta + z)\,(\gamma + z)} = \frac{dp}{p\,(p + \gamma - \alpha)\,(p + \gamma - \beta)}.$$

---

[1]) Si Z habeat factores.

ЗАДАЧА 145

1125. *Найти полный интеграл дифференциального уравнения какого угодно порядка*

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+E\frac{d^4y}{dx^4}+ \text{ и т. д.}=0,$$

где элемент dx принимается постоянным.

РЕШЕНИЕ

Очевидно, что и этому уравнению удовлетворяет выражение $y=e^{\lambda x}$, поскольку, действительно, тогда получаем

$$\frac{dy}{dx}=\lambda e^{\lambda x},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\lambda^2 e^{\lambda x},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\lambda^3 e^{\lambda x},$$

и вообще $\frac{d^ny}{dx^n}=\lambda^n e^{\lambda x}$, а после подстановки приходим к уравнению (разумеется, после того, как мы разделим на $e^{\lambda x}$)

$$A+B\lambda+C\lambda^2+D\lambda^3+E\lambda^4+ \text{ и т. д.}=0,$$

из которого надлежит определить значение λ. Отсюда для буквы λ получается столько же значений, сколько единиц в порядке предложенного дифференциального уравнения, и каждое из этих значений в равной мере удовлетворяет предложенному уравнению. Пусть эти значения суть α, β, γ, δ и т. д., частными же интегралами будут

$$y=\mathfrak{A}e^{\alpha x},\quad y=\mathfrak{B}e^{\beta x},\quad y=\mathfrak{C}e^{\gamma x} \text{ и т. д.}$$

Но по свойствам самого дифференциального уравнения очевидно, что любая комбинация какого угодно числа этих значений, а следовательно и всех их, равным образом удовлетворяет уравнению. Следовательно, поскольку комбинация всех значений

$$y=\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}+\mathfrak{C}e^{\gamma x}+\mathfrak{D}e^{\delta x}+ \text{ и т. д.}$$

содержит столько произвольных постоянных $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д., сколько единиц в порядке предложенного дифференциального уравнения, нельзя усомниться в том, что это выражение является его полным интегралом. Если порядок дифференциального уравнения повышается до n-го, так что имеем

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots+N\frac{d^ny}{dx^n}=0,$$

то и полный интеграл будет состоять из n слагаемых, которые надо определить с помощью решения алгебраического уравнения n-го порядка, а именно

$$A+B\lambda+C\lambda^2+D\lambda^3+\ldots+N\lambda^n=0.$$

Естественно, отдельные простые его множители выявляют соответствующие слагаемые в интеграле, так что если множителем является $\alpha-\lambda$, то из него получается слагаемое в интеграле $\mathfrak{A}e^{\alpha x}$, которое, как это очевидно, получается при интегрировании простого дифференциального уравнения $\alpha y-\frac{dy}{dx}=0$. Подобным же образом соединение двух множителей

$$(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)\lambda+\lambda^2$$

дает часть интеграла[1]) $\mathfrak{A}e^{\alpha x}+\mathfrak{B}e^{\beta x}$, которая вместе с тем является интегралом следующего дифференциального уравнения второго порядка:

$$\alpha\beta y-(\alpha+\beta)\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

А также вообще, если множителем указанного алгебраического уравнения является

$$a+b\lambda+c\lambda^2+f\lambda^3+\text{ и т. д.}=0,$$

то по нему, наоборот, образуется дифференциальное уравнение

$$ay+b\frac{dy}{dx}+c\frac{d^2y}{dx^2}+f\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ и т. д.}=0,$$

и если полным интегралом последнего является $y=P$, то это одновременно будет частью интеграла предложенного уравнения. Стало быть, таким образом из отдельных множителей алгебраического уравнения

$$A+B\lambda+C\lambda^2+D\lambda^3+\ldots+N\lambda^n=0$$

выводятся отдельные слагаемые искомого интеграла, а объединение этих слагаемых дает полный интеграл, так что в основном дело сводится к решению алгебраического уравнения.

СЛЕДСТВИЕ 1

1126. Итак, если все простые множители этого алгебраического уравнения будут вещественными и, вместе с тем, неравными, то интегрирование не представляет никаких трудностей. Действительно, если простым множителем будет $f+g\lambda$, то слагаемым интеграла, которое должно быть отсюда получено, является $\mathfrak{A}e^{\frac{-fx}{g}}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

1127. Если два простых множителя равны, т. е. если множителем будет $(f+g\lambda)^2$, то слагаемым в интеграле, которое должно быть отсюда получено, будет $e^{\frac{-fx}{g}}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x)$. Если множителем будет куб $(f+g\lambda)^3$, то отсюда получается в интеграле слагаемое $e^{\frac{-fx}{g}}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2)$, а из биквадратного множителя $(f+g\lambda)^4$ — слагаемое интеграла такого вида:

$$e^{\frac{-fx}{g}}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3),$$

и так далее для любого числа равных множителей, как можно заключить на основании § 1120.

СЛЕДСТВИЕ 3

1128. Если встречаются мнимые множители, то соединение двух таких множителей является вещественным трехчленным множителем, который представляется выражением

$$f^2+2fg\lambda\cos\zeta+g^2\lambda^2,$$

[1]) Integralis portionem.

откуда получаем

$$\lambda=-\frac{f}{g}(\cos\zeta\pm\sqrt{-1}\sin\zeta).$$

Сопоставляя это с § 1121, находим $\mu=\frac{-f\cos\zeta}{g}$ и $\nu=\frac{f\sin\zeta}{g}$. Поэтому слагаемым интеграла, которое должно быть получено по такому множителю, будет

$$e^{\frac{-fx\cos\zeta}{g}}\left(\mathfrak{A}\cos\frac{fx\sin\zeta}{g}+\mathfrak{B}\sin\frac{fx\sin\zeta}{g}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 4

1129. Если среди множителей встречается квадрат такого выражения:

$$(f^2+2fg\lambda\cos\zeta+g^2\lambda^2)^2,$$

т. е. если два множителя такого вида равны, то мы будем их рассматривать как различающиеся бесконечно мало, так что в одном из них вместо $\frac{f}{g}$ пусть будет $\frac{f}{g}(1+\omega)$. А поскольку

$$e^{\frac{-f\cos\zeta}{g}(1+\omega)}=e^{\frac{-fx\cos\zeta}{g}}\left(1-\frac{\omega fx}{g}\cos\zeta\right),$$

$$\cos\frac{fx\sin\zeta}{g}(1+\omega)=\cos\frac{fx\sin\zeta}{g}-\frac{\omega fx\sin\zeta}{g}\sin\frac{fx\sin\zeta}{g}$$

и

$$\sin\frac{fx\sin\zeta}{g}(1+\omega)=\sin\frac{fx\sin\zeta}{g}+\frac{\omega fx\sin\zeta}{g}\cos\frac{fx\sin\zeta}{g},$$

из этого множителя получается в интеграле слагаемое вида

$$e^{\frac{-fx\cos\zeta}{g}}\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{A}'\cos\frac{fx\sin\zeta}{g}-\mathfrak{A}'\frac{\omega fx\cos\zeta}{g}\cos\frac{fx\sin\zeta}{g}-\mathfrak{A}'\frac{\omega fx\sin\zeta}{g}\sin\frac{fx\sin\zeta}{g}\\&+\mathfrak{B}'\sin\frac{fx\sin\zeta}{g}-\mathfrak{B}'\frac{\omega fx\cos\zeta}{g}\sin\frac{fx\sin\zeta}{g}+\mathfrak{B}'\frac{\omega fx\sin\zeta}{f}\cos\frac{fx\sin\zeta}{g}\end{aligned}\right\},$$

и его надо добавить к предыдущему. С этой целью мы объединим постоянные¹), положив

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'=\mathfrak{E},\qquad \frac{-\mathfrak{A}'\omega f\cos\zeta}{g}+\frac{\mathfrak{B}'\omega f\sin\zeta}{g}=\mathfrak{G}.$$

$$\mathfrak{B}+\mathfrak{B}'=\mathfrak{F},\qquad \frac{-\mathfrak{A}'\omega f\sin\zeta}{g}-\frac{\mathfrak{B}'\omega f\cos\zeta}{g}=\mathfrak{H}.$$

При этом прежние постоянные определяются, как и раньше, и соответствующей частью интеграла будет

$$e^{\frac{-fx\cos\zeta}{g}}\left[(\mathfrak{E}+\mathfrak{G}x)\cos\frac{fx\sin\zeta}{g}+(\mathfrak{F}+\mathfrak{H}x)\sin\frac{fx\sin\zeta}{g}\right].$$

ПОЯСНЕНИЕ

1130. Итак, вот общий способ нахождения интегралов дифференциальных уравнений вида

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots+N\frac{d^ny}{dx^n}=0,$$

¹) Constantes ita contrahamus (буквально: стянем так постоянные).

изложенный в виде наставления[1]). Надо писать так, как показано на следующей схеме[2]):

Вместо y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	...	$\frac{d^ny}{dx^n}$
писать 1	z	z^2	z^3	z^4	...	z^n

Получается следующее алгебраическое уравнение:

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\ldots+Nz^n=0.$$

Следует отметить все вещественные множители этого уравнения, как простые, так и двойные, а кроме этого надо должным образом принять во внимание те случаи, когда два или большее число этих множителей равны друг другу. Тогда из следующей таблицы можно уразуметь, какие слагаемые искомого интеграла получаются из отдельных множителей:

Множители	Слагаемые интеграла
$f+gz$	$\mathfrak{A}e^{\frac{-fx}{g}}$
$(f+gz)^2$	$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x)\,e^{\frac{-fx}{g}}$
$(f+gz)^3$	$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2)\,e^{\frac{-fx}{g}}$
$(f+gz)^4$	$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3)\,e^{\frac{-fx}{g}}$
и т. д.	и т. д.
$f^2+2fgz\cos\zeta+g^2z^2$	$e^{\frac{-fx\cos\zeta}{g}}\left(\mathfrak{A}\cos\frac{fx\sin\zeta}{g}+\mathfrak{B}\sin\frac{fx\sin\zeta}{g}\right)$
$(f^2+2fgz\cos\zeta+g^2z^2)^2$	$e^{\frac{-fx\cos\zeta}{g}}\left\{\begin{matrix}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x)\cos\frac{fx\sin\zeta}{g}\\(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x)\sin\frac{fx\sin\zeta}{g}\end{matrix}\right\}$
$(f^2+2fgz\cos\zeta+g^2z^2)^3$	$e^{\frac{-fx\cos\zeta}{g}}\left\{\begin{matrix}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2)\cos\frac{fx\sin\zeta}{g}\\(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\mathfrak{c}x^2)\sin\frac{fx\sin\zeta}{g}\end{matrix}\right\}$
и т. д.	и т. д.

Кроме того, для каждого множителя в отдельности надо писать различные постоянные буквы, чтобы общее их число давало полный интеграл.

ПРИМЕР 1

1131. *Определить полный интеграл дифференциального уравнения четвертого порядка*

$$y-\frac{2\,dy}{dx}+\frac{2\,d^2y}{dx^2}-\frac{2\,d^3y}{dx^3}+\frac{2\,d^4y}{dx^4}=0.$$

---

[1]) In compendium contractam.

[2]) Ut iste laterculus indicat (буквально: как показывает этот кирпичик).

Отсюда получается алгебраическое уравнение

$$1-2z+2z^2-2z^3+z^4=0,$$

которое разлагается на множители $(1-z)^2\ (1+z^2)$; первый из этих множителей, поскольку $f=1$ и $g=-1$, дает в интеграле слагаемое $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x)\,e^x$, а второй множитель, поскольку $f=1$, $\cos\zeta=0$, $g=1$ и $\sin\zeta=1$, дает слагаемое $\mathfrak{A}\cos x+\mathfrak{B}\sin x$. Таким образом, искомым полным интегралом будет

$$y=(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x)\,e^x+\mathfrak{C}\cos x+\mathfrak{D}\sin x,$$

где содержатся четыре произвольных постоянных.

Если мы хотим, чтобы при $x=0$ было $y=0$, то надо положить $\mathfrak{A}+\mathfrak{C}=0$. Если в этом случае должно также исчезать $\frac{dy}{dx}$, то, поскольку

$$\frac{dy}{dx}=(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{B}x)\,e^x-\mathfrak{C}\sin x+\mathfrak{D}\cos x,$$

надо положить $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{D}=0$. Если, кроме того, должно исчезать $\frac{d^2y}{dx^2}$, то, поскольку

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}+\mathfrak{B}x)\,e^x-\mathfrak{C}\cos x-\mathfrak{D}\sin x,$$

надо положить $\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}-\mathfrak{C}=0$. Таким образом, мы удовлетворим этим трем условиям, принимая $\mathfrak{C}=-\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}=-\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}=0$, так что интегралом будет

$$y=\mathfrak{A}\,(1-x)\,e^x-\mathfrak{A}\cos x.$$

ПРИМЕР 2

1132. *Проинтегрировать дифференциальное уравнение четвертого порядка*

$$Ay+C\frac{d^2y}{dx^2}+E\frac{d^4y}{dx^4}=0,$$

где элемент dx принимается постоянным.

Алгебраическим уравнением, которое дает интеграл, будет

$$A+Cz^2+Ez^4=0,$$

и оно всегда имеет два сдвоенных [1]) вещественных множителя, которые могут быть в одном из двух видов:

либо

$$(a^2+2maz+nz^2)\,(a^2-2maz+nz^2),$$

либо

$$(a^2+mz^2)\,(a^2+nz^2).$$

В первом случае имеем

$$A=a^4,\quad C=2na^2-4m^2a^2,\quad E=n^2,$$

а во втором

$$A=a^4,\quad C=(m+n)\,a^2,\qquad E=mn.$$

Но первый член A всегда может быть представлен в виде биквадрата a^4, и первое решение будет иметь место, если E является положи-

[1]) Duplicatos.

тельным числом и $2n^2a - C$, т. е. $2\sqrt{AE} - C$ также положительно, следовательно, если $4AE > C^2$. Второе же решение имеет место, если $C^2 > 4AE$. Следовательно, нужно определить, к какому именно классу относятся отдельные множители, и таким образом находим следующие случаи:

I. Если все четыре простых множителя являются вещественными, то будем иметь

$$A + Cz^2 + Ez^4 = (a+z)(a-z)(b+z)(b-z)$$

и получаем уравнение

$$a^2b^2y - (a^2+b^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^4y}{dx^4} = 0,$$

полным интегралом которого будет

$$y = \mathfrak{A}e^{ax} + \mathfrak{B}e^{-ax} + \mathfrak{C}e^{bx} + \mathfrak{D}e^{-bx}.$$

Если к тому же $b = a$, то для соответствующего уравнения

$$a^4y - \frac{2a^2d^2y}{dx^2} + \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

полным интегралом будет

$$y = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)e^{ax} + (\mathfrak{C} + \mathfrak{D}x)e^{-ax}.$$

II. Если вещественны два простых множителя, а два множителя мнимы, будем иметь

$$A + Cz^2 + Ez^4 = (a+z)(a-z)(b^2+z^2),$$

и получается уравнение

$$a^2b^2y + (a^2-b^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^4y}{dx^4} = 0,$$

полным интегралом которого будет

$$y = \mathfrak{A}e^{ax} + \mathfrak{B}e^{-ax} + \mathfrak{C}\cos bx + \mathfrak{D}\sin bx.$$

III. Если все простые множители суть мнимые, то нужно рассмотреть два случая:

1) Если

$$A + Cz^2 + Ez^4 = (a^2+z^2)(b^2+z^2),$$

то для уравнения

$$a^2b^2y + (a^2+b^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

полным интегралом будет

$$y = \mathfrak{A}\cos ax + \mathfrak{B}\sin ax + \mathfrak{C}\cos bx + \mathfrak{D}\sin bx.$$

2) Если

$$A + Bz^2 + Ez^4 = (a^2 + 2az\cos\zeta + z^2)(a^2 - 2az\cos\zeta + z^2),$$

то для уравнения

$$a^4y - \frac{2a^2d^2y}{dx^2}\cos 2\zeta + \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

полным интегралом является

$$y = e^{+ax\cos\zeta}(\mathfrak{A}\cos(ax\sin\zeta) + \mathfrak{B}\sin(ax\sin\zeta)) + e^{-ax\cos\zeta}(\mathfrak{C}\cos(ax\sin\zeta) + \mathfrak{D}\sin(ax\sin\zeta)).$$

Если к тому же в первом случае имеем $b=a$, а во втором случае — $\cos\zeta=0$, то полным интегралом уравнения

$$a^4y+\frac{2a^2d^2y}{dx^2}+\frac{d^4y}{dx^4}=0$$

будет

$$y=(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x)\cos ax+(\mathfrak{C}+\mathfrak{D}x)\sin ax.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

1133. Итак, поскольку можно определить интеграл уравнения

$$Ay+\frac{C\,d^2y}{dx^2}+\frac{E\,d^4y}{dx^4}=0,$$

то можно проинтегрировать все уравнения, которые из него выводятся. Но это уравнение после умножения на $2y$ приводится с помощью интегрирования к дифференциальному уравнению третьего порядка

$$Ay^2+\frac{C\,dy^2}{dx^2}+\frac{2E\,dy\,d^3y-E\,(d^2y)^2}{dx^4}=\text{Const}.$$

Однако в найденном выше интеграле постоянные $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ можно определить таким образом, чтобы это постоянное (Const) исчезало, и, следовательно, мы располагаем полным интегралом следующего уравнения:

$$Ay^2+\frac{C\,dy^2}{dx^2}+\frac{2E\,dy\,d^3y-E(d^2y)^2}{dx^4}=0.$$

Теперь положим $y=e^{\int v\,dx}$, так что $v=\frac{dy}{y\,dx}$. Вследствие того, что $\frac{dy}{dx}=$ $=e^{\int v\,dx}v$, получим

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{\int v\,dx}\left(\frac{dv}{dx}+v^2\right)$$

и также

$$\frac{d^3y}{dx^3}=e^{\int v\,dx}\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{3v\,dv}{dx}+v^3\right).$$

Наше уравнение принимает следующий вид:

$$A+Cv^2+E\left(\frac{2v\,d^2v}{dx^2}+\frac{4v^2dv}{dx}+v^4-\frac{dv^2}{dx^2}\right)=0.$$

Далее, пусть $dx=\frac{dv}{s}$, так что

$$s=\frac{dv}{dx}=\frac{d^2y}{y\,dx^2}-\frac{dy^2}{y^2dx^2},$$

тогда

$$\frac{d^2v}{dx}=ds \quad \text{и} \quad \frac{d^2v}{dx^2}=\frac{s\,ds}{dv},$$

и таким образом получается такое дифференциальное уравнение первого порядка:

$$A+Cxv+E\left(\frac{2vs\,ds}{dv}-s^2+4v^2s+v^4\right)=0.$$

Соотношение между v и s для этого уравнения определяется по найденному соотношению между x и y следующим образом:

$$v=\frac{dy}{y\,dx} \quad \text{и} \quad s=\frac{y\,d^2y-dy^2}{y^2\,dx^2}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

1134. Если мы сохраним постоянное, которое введено выше интегрированием, так что будем иметь

$$Ay^2+\frac{C\,dy^2}{dx^2}+\frac{2E\,dy\,d^3y-E\,(d^2y)^2}{dx^4}=G,$$

то в полном интеграле, который выражает y через x, постоянные $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ могут быть определены соответственно этому количеству G. Итак, положим теперь $dx=\frac{dy}{u}$, следовательно, $\frac{dy}{dx}=u$, и тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{u\,du}{dy} \quad \text{и} \quad \frac{d^3y}{dx^2}=d\,\frac{u\,du}{dy}\,.$$

Таким образом, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{u}{dy}\,d\,\frac{u\,du}{dy}$. Отсюда получается дифференциальное уравнение второго порядка

$$Ay^2+Cu^2+E\left(\frac{2u^2}{dy}d\,\frac{u\,du}{dy}-\frac{u^2du^2}{dy^2}\right)=G,$$

и здесь элемент, который принят постоянным, не входит в рассмотрение. Следовательно, ничто не мешает тому, чтобы принять постоянным dy, и тогда получаем

$$Ay^2+Cu^2+E\left(\frac{2u^3\,d^2u}{dy^2}+\frac{u^2\,du^2}{dy^2}\right)=G.$$

Итак, это последнее уравнение тоже можно проинтегрировать.

Если же мы положим $y^2=p$ и $u^2=q$, то, принимая постоянным элемент dp, получим следующее уравнение:

$$Ap+Cq+E\left(\frac{4pq\,d^2q+2q\,dp\,dq-p\,dq^2}{dp^2}\right)=G.$$

Если же мы в том же уравнении положим $u=r^{2/3}$, то получим

$$Ay^2+Cr^{4/3}+\frac{4}{3}\,Er^{5/3}\,\frac{d^2r}{dy^2}=G.$$

Интегрирование этих уравнений без указанного приведения [1]) представляется весьма затруднительным.

ЗАДАЧА 146

1135. *Предложено дифференциальное уравнение какого угодно порядка*

$$a^ny\pm\frac{d^ny}{dx^n}=0,$$

где постоянным принимается элемент dx; найти его полный интеграл.

РЕШЕНИЕ

Алгебраическим уравнением, которое служит для решения, является $a^n\pm z^n=0$; при его решении надлежит рассмотреть два случая в соответствии с тем, берется ли верхний или нижний знак.

---

[1]) Sine hoc snbsidio (буквально: без этой помощи).

I. Пусть имеет место верхний знак, так что предложено уравнение

$$a^n y+\frac{d^n y}{dx^n}=0.$$

Вещественными множителями выражения a^n+z^n являются

$$a^2-2az\cos\frac{\pi}{n}+z^2,\quad a^2-2az\cos\frac{3\pi}{n}+z^2,$$

$$a^2-2az\cos\frac{5\pi}{n}+z^2 \quad \text{и т. д.},$$

и среди них последний — это или

$$a^2-2az\cos\frac{n\pi}{n}+z^2,$$

или

$$a^2-2az\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+z^2$$

в соответствии с тем, будет ли n или $n-1$ нечетным числом, причем в первом из этих случаев вместо множителя второй степени $a^2+2az+z^2$ надо подставить корень из него $a+z$.

Таким образом, полным интегралом рассматриваемого уравнения будет

$$y=+e^{ax\cos\frac{\pi}{n}}\left(\mathfrak{A}\cos\left(ax\sin\frac{\pi}{n}\right)+\mathfrak{B}\sin\left(ax\sin\frac{\pi}{n}\right)\right)$$
$$+e^{ax\cos\frac{3\pi}{n}}\left(\mathfrak{C}\cos\left(ax\sin\frac{3\pi}{n}\right)+\mathfrak{D}\sin\left(ax\sin\frac{3\pi}{n}\right)\right)$$
$$+e^{ax\cos\frac{5\pi}{n}}\left(\mathfrak{E}\cos\left(ax\sin\frac{5\pi}{n}\right)+\mathfrak{F}\sin\left(ax\sin\frac{5\pi}{n}\right)\right)$$
$$\text{и т. д.},$$

и последним слагаемым в этом выражении, если n — нечетное число, будет $\mathfrak{N}e^{-ax}$. Этот интеграл может быть также выражен в виде

$$y=\mathfrak{A}e^{ax\cos\frac{\pi}{n}}\cos\left(ax\sin\frac{\pi}{n}+\mathfrak{a}\right)+\mathfrak{B}e^{ax\cos\frac{3\pi}{n}}\cos\left(ax\sin\frac{3\pi}{n}+\mathfrak{b}\right)$$
$$+\mathfrak{C}e^{ax\cos\frac{5\pi}{n}}\cos\left(ax\sin\frac{5\pi}{n}+\mathfrak{c}\right)+\mathfrak{D}e^{ax\cos\frac{7\pi}{n}}\cos\left(ax\sin\frac{7\pi}{n}+\mathfrak{d}\right)$$
$$\text{и т. д.},$$

и это выражение нужно продолжать до тех пор, покуда не получаются прежние члены.

II. Если имеет место нижний знак, т. е. предложено уравнение

$$a^n y-\frac{d^n y}{dx^n}=0,$$

вещественными множителями выражения a^n-z^n будут

$$a-z,\quad a^2-2az\cos\frac{2\pi}{n}+z^2,\quad a^2-2az\cos\frac{4\pi}{n}+z^2,$$
$$a^2-2az\cos\frac{6\pi}{n}+z^2 \quad \text{и т. д.},$$

и последним из них, если n — четное число, будет $a+z$, если же n — нечетное, то

$$a^2-2az\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+z^2.$$

Поэтому полным интегралом этого уравнения будет

$$y=\mathfrak{A}e^{ax}+e^{ax\cos\frac{2\pi}{n}}\left(\mathfrak{B}\cos ax\sin\frac{2\pi}{\pi}+\mathfrak{C}\sin ax\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$+e^{ax\cos\frac{4\pi}{n}}\left(\mathfrak{D}\cos ax\sin\frac{4\pi}{n}+\mathfrak{E}\sin ax\sin\frac{4\pi}{n}\right)$$
$$+e^{ax\cos\frac{6\pi}{n}}\left(\mathfrak{F}\cos ax\sin\frac{6\pi}{n}+\mathfrak{G}\sin ax\sin\frac{6\pi}{n}\right)$$

и т. д.,

и этот интеграл может быть представлен также в таком виде:

$$y=\mathfrak{A}e^{ax}+\mathfrak{B}e^{ax\cos\frac{2\pi}{n}}\cos\left(ax\sin\frac{2\pi}{n}+\mathfrak{b}\right)$$
$$+\mathfrak{C}e^{ax\cos\frac{4\pi}{n}}\cos\left(ax\sin\frac{4\pi}{n}+\mathfrak{c}\right)+\mathfrak{D}e^{ax\cos\frac{6\pi}{n}}\cos\left(ax\sin\frac{6\pi}{n}+\mathfrak{d}\right)$$

и т. д.

Это выражение надо продолжать до тех пор, пока получаются члены, отличные от предыдущих.

ПОЯСНЕНИЕ 1

1136. Итак, для различных значений показателя n интегралы получаются в следующем виде $\left(\text{причем сначала приведем их для уравнения } a^ny+\frac{d^ny}{dx^n}=0\right)$.

I. Интегралом уравнения $ay+\frac{dy}{dx}=0$ является

$$y=\mathfrak{A}e^{-ax}.$$

II. Интегралом уравнения $a^2y+\frac{d^2y}{dx^2}=0$ является

$$y=\mathfrak{A}\cos(ax+\mathfrak{a}).$$

III. Интегралом уравнения $a^3y+\frac{d^3y}{dx^3}=0$ является

$$y=\mathfrak{A}e^{\frac{1}{2}ax}\cos\left(\frac{ax\sqrt{3}}{2}+\mathfrak{a}\right)+\mathfrak{B}e^{-ax}.$$

IV. Интегралом уравнения $a^4y+\frac{d^4y}{dx^4}=0$ является

$$y=\mathfrak{A}e^{\frac{ax}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{ax}{\sqrt{2}}+\mathfrak{a}\right)+\mathfrak{B}e^{\frac{-ax}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{ax}{\sqrt{2}}+\mathfrak{b}\right).$$

V. Интегралом уравнения $a^5y+\frac{d^5y}{dx^5}=0$ является

$$y=\mathfrak{A}e^{ax\cos 36^\circ}\cos(ax\sin 36^\circ+\mathfrak{a})+\mathfrak{B}e^{-ax\cos 72^\circ}\cos(ax\sin 72^\circ+\mathfrak{b})+\mathfrak{C}e^{-ax}.$$

VI. Интегралом уравнения $a^6y+\frac{d^6y}{dx^6}=0$ является

$$y=\mathfrak{A}e^{\frac{ax\sqrt{3}}{2}}\cos\left(\frac{1}{2}ax+\mathfrak{a}\right)+\mathfrak{B}\cos(ax+\mathfrak{b})+\mathfrak{C}e^{\frac{-ax\sqrt{3}}{2}}\cos\left(\frac{1}{2}ax+\mathfrak{c}\right)$$

и т. д.

Таким же образом для второго вида уравнения

$$a^ny-\frac{d^ny}{dx^n}=0$$

мы получаем следующие интегралы, соответствующие более простым значениям показателя n.

I. Интегралом уравнения $ay-\frac{dy}{dx}=0$ является

$$y=\mathfrak{A}e^{ax}.$$

II. Интегралом уравнения $a^2y-\frac{d^2y}{dx^2}=0$ является

$$y=\mathfrak{A}e^{ax}+\mathfrak{B}e^{-ax}.$$

III. Интегралом уравнения $a^3y-\frac{d^3y}{dx^3}=0$ является

$$y=\mathfrak{A}e^{ax}+\mathfrak{B}e^{-\frac{1}{2}ax}\cos\left(\frac{ax\sqrt{3}}{2}+\mathfrak{b}\right).$$

IV. Интегралом уравнения $a^4y-\frac{d^4y}{dx^4}=0$ является

$$y=\mathfrak{A}e^{ax}+\mathfrak{B}\cos(ax+\mathfrak{b})+\mathfrak{C}e^{-ax}.$$

V. Интегралом уравнения $a^5y-\frac{d^5y}{dx^5}=0$ является

$$y=\mathfrak{A}e^{ax}+\mathfrak{B}e^{ax\cos 72^\circ}\cos(ax\sin 72^\circ+\mathfrak{b})+\mathfrak{C}e^{-ax\cos 36^\circ}\cos(ax\sin 36^\circ+\mathfrak{c}).$$

VI. Интегралом уравнения $a^6y-\frac{d^6y}{dx^6}=0$ является

$$y=\mathfrak{A}e^{ax}+\mathfrak{B}e^{\frac{1}{2}ax}\cos\left(\frac{ax\sqrt{3}}{2}+\mathfrak{b}\right)+\mathfrak{C}e^{-\frac{1}{2}ax}\cos\left(\frac{ax\sqrt{3}}{2}+\mathfrak{c}\right)+\mathfrak{D}e^{-ax};$$

и так можно идти дальше, сколько угодно.

ПОЯСНЕНИЕ 2

1137. Хотя тот метод, которым я здесь пользовался, легко приводит к интегралам уравнений рассмотренного выше вида, он целиком отходит, однако, от принципов интегрирования[1]). Действительно, законы интегрирования требуют, чтобы мы интегрировали дифференциальное уравнение более высокого порядка поочередно соответствующее число раз, пока не дойдем до конечного соотношения между двумя переменными, и поскольку каждое в отдельности интегрирование вводит произвольное постоянное, то только таким образом получается полный интеграл. Однако здесь мы построили окончательный интеграл как бы одним

[1]) A principiis tamen integrationis omnino abhorret.

действием, со всеми постоянными, которые делают его полным. Разумеется, на самом деле, мы только по догадке получили несколько частных интегралов, а характер уравнения позволил удобным образом образовать по ним полный интеграл. Между тем, если мы хотим строго соблюдать законы интегрирования, то когда предложено, допустим, дифференциальное уравнение четвертого порядка, нужно четыре раза интегрировать, причем первое интегрирование приведет к дифференциальному уравнению третьего порядка, а тогда это уравнение с помощью нового интегрирования сведется к дифференциальному уравнению второго порядка, которое после следующего интегрирования приводится к первому порядку, а это последнее, наконец, будучи еще раз проинтегрировано, дает искомое соотношение между двумя переменными. Можно и таким образом решать уравнения рассмотренного здесь вида с приведением последовательными интегрированиями к более простым порядкам, однако при этом мы найдем те же интегралы, которые получили здесь. Впрочем, так как этот метод применим не только к рассмотренным здесь видам, а с его помощью можно проинтегрировать и такое более общее уравнение:

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,d^2y}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \text{ и т. д.,}$$

где X обозначает какую угодно функцию от x, и для решения этого уравнения предыдущий метод совершенно недостаточен, я применю новый метод сразу к этому более общему виду.

ГЛАВА III

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,d^2y}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \frac{E\,d^4y}{dx^4} + \text{ и т. д.}$$

ЗАДАЧА 147

1138. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,d^2y}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{N\,d^ny}{dx^n},$$

где принимается постоянным элемент dx, а X обозначает какую угодно функцию от x; найти функцию от x, после умножения на которую указанное уравнение становится интегрируемым.

РЕШЕНИЕ

Пусть $P\,dx$ тот множитель, который мы ищем. Так как первая часть уравнения X после умножения на него интегрируема, условия для множителя надо определить по второй части. Легко, впрочем, заметить, что выражение для этого множителя должно быть вида $e^{\lambda x}$, так что подлежит определению количество λ. Итак, пусть $e^{\lambda x}dx$ — множитель. Должно быть интегрируемым следующее выражение:

$$e^{\lambda x}dx\left(Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,d^2y}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{N\,d^ny}{dx^n}\right),$$

вследствие чего мы примем его интеграл в виде

$$e^{\lambda x}\left(A'y + \frac{B'dy}{dx} + \frac{C'd^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{M'd^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Стало быть, чтобы дифференциал этого выражения совпадал с вышеуказанным, поскольку он равен

$$e^{\lambda x}dx\left\{\lambda A'y + \frac{\lambda B'dy}{dx} + \frac{\lambda C'd^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{\lambda M'\,d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{A'dy}{dx} + \frac{B'd^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{M'd^ny}{dx^n}\right),$$

необходимо, чтобы

$$A' = \frac{A}{\lambda},\quad B' = \frac{B-A'}{\lambda},\quad C' = \frac{C-B'}{\lambda},\quad D' = \frac{D-C'}{\lambda},\ \ldots,\ M' = \frac{M-L'}{\lambda},$$

а также, чтобы $M' = N$. Отсюда получаем

$$A' = \frac{A}{\lambda},$$

$$B' = \frac{B}{\lambda} - \frac{A}{\lambda^2},$$

$$C' = \frac{C}{\lambda} - \frac{B}{\lambda^2} + \frac{A}{\lambda^3},$$

$$D' = \frac{D}{\lambda} - \frac{C}{\lambda^2} + \frac{B}{\lambda^3} - \frac{A}{\lambda^4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M' = \frac{M}{\lambda} - \frac{L}{\lambda^2} + \frac{K}{\lambda^3} - \ldots \pm \frac{A}{\lambda^n}$$

и

$$0 = \frac{N}{\lambda} - \frac{M}{\lambda^2} + \frac{L}{\lambda^3} - \ldots \mp \frac{A}{\lambda^{n+1}},$$

причем из последнего уравнения нужно определить количество λ; это уравнение получается в виде

$$A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 + E\lambda^4 - \ldots \pm N\lambda^n = 0,$$

и отсюда для λ определяется n значений и столько же определяется множителей. Покажем, как для отдельных значений показателя n получаются эти выражения.

I. Если $n = 1$, то будет $A - B\lambda = 0$, и тогда

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B.$$

II. Если $n = 2$, то будет $A - B\lambda + C\lambda^2 = 0$, и тогда

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B - C\lambda \quad \text{и} \quad B' = \frac{B\lambda - A}{\lambda^2} = C.$$

III. Если $n = 3$, то будет $A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 = 0$, и тогда

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B - C\lambda + D\lambda^2, \quad B' = \frac{B\lambda - A}{\lambda^2} = C - D\lambda, \quad C' = \frac{C\lambda^2 - B\lambda + A}{\lambda^3} = D.$$

IV. Если $n = 4$, то будет $A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 + E\lambda^4 = 0$, и тогда

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B - C\lambda + D\lambda^2 - E\lambda^3, \quad B' = \frac{B\lambda - A}{\lambda^2} = C - D\lambda + E\lambda^2,$$

$$C' = \frac{C\lambda^2 - B\lambda + A}{\lambda^3} = D - E\lambda, \quad D' = \frac{D\lambda^3 - C\lambda^2 + B\lambda - A}{\lambda^4} = E.$$

V. Если $n = 5$, то будет $A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 + E\lambda^4 - F\lambda^5 = 0$, и тогда

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B - C\lambda + D\lambda^2 - E\lambda^3 + F\lambda^4,$$

$$B' = \frac{B\lambda - A}{\lambda^2} = C - D\lambda + E\lambda^2 - F\lambda^3,$$

$$C' = \frac{C\lambda^2 - B\lambda + A}{\lambda^3} = D - E\lambda + F\lambda^2,$$

$$D' = \frac{D\lambda^3 - C\lambda^2 + B\lambda - A}{\lambda^4} = E - F\lambda,$$

$$E' = \frac{E\lambda^4 - D\lambda^3 + C\lambda^2 - B\lambda + A}{\lambda^5} = F$$

и так далее.

Если же найден множитель $e^{\lambda x}dx$, то первым членом уравнения будет

$$\int e^{\lambda x}X\,dx,$$

и предложенное уравнение, которое является дифференциальным уравнением порядка n, с помощью интегрирования приводится к следующему уравнению порядка на единицу меньшего:

$$\int e^{\lambda x}X\,dx=e^{\lambda x}\left(A'y+B'\frac{dy}{dx}+C'\frac{d^2y}{dx^2}+\ldots+M'\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

1139. Следовательно, после выполнения этого первого интегрирования предложенное уравнение понизится на один порядок и, после определения коэффициентов A', B', C' и т. д. из вышеуказанных формул, интегральное уравнение можно представить в следующем виде:

$$e^{-\lambda x}\int e^{\lambda x}X\,dx=A'y+B'\frac{dy}{dx}+C'\frac{d^2y}{dx^2}+\ldots+M'\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1140. Поскольку первый член

$$e^{-\lambda x}\int e^{\lambda x}X\,dx$$

является функцией от x, содержащей произвольное постоянное, то, если вместо него будем писать X', это уравнение будет иметь такой же вид, как и предложенное, поэтому оно снова может быть проинтегрировано таким же способом и приведено к дифференциальному уравнению порядка $n-2$, которое будет следующего вида:

$$X''=A''y+B''\frac{dy}{dx}+C''\frac{d^2y}{dx^2}+\ldots+L''\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1141. Идя таким образом дальше, мы придем, наконец, к дифференциальному уравнению первого порядка

$$X^{(n-1)}=A^{(n-1)}y+B^{(n-1)}\frac{dy}{dx},$$

которое подобным же способом приводится к конечному уравнению

$$X^{(n)}=A^{(n)}y,$$

каковое выражает соотношение между переменными x и y.

ПОЯСНЕНИЕ

1142. Итак, это есть метод последовательного интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков рассматриваемого вида, и при этом нужно столько раз интегрировать, сколько единиц в порядке предложенного дифференциального уравнения. Стало быть, все дело сводится к последовательному определению коэффициентов, которые надо находить по предшествующим коэффициентам с помощью множителя. Однако вообще закон, по которому эти коэффициенты последовательно определяются по предыдущим, не настолько очевиден, чтобы можно было усмотреть, каков окончательный вид интеграла. Правда, так как из предыдущей главы мы знаем, что в том случае, когда первый член X исчезает, то даже окончательный интеграл определяется по достаточно простому закону, мы можем с основанием подозревать, что это и здесь имеет место и что мы весьма легко отыщем этот закон, если шаг за шагом будем переходить от низших порядков к высшим. Но в первом же случае, когда дифференциальное уравнение первого порядка, $X = Ay + B\dfrac{dy}{dx}$, множителем будет $e^{\lambda x}dx$, если $A - \lambda B = 0$, так что $\lambda = \dfrac{A}{B}$, и, поскольку $A' = \dfrac{A}{\lambda} = B$, интегралом будет

$$\int e^{\lambda x}X\,dx = Be^{\lambda x}y, \quad \text{то есть} \quad e^{-\lambda x}\int e^{\lambda x}X\,dx = By.$$

Подобно этому мы рассмотрим уравнения более высоких порядков и отыщем окончательный вид их интеграла.

ЗАДАЧА 148

1143. *Предложено дифференциальное уравнение второго порядка*

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2}.$$

С помощью двукратного интегрирования найти соотношение между x и y,

РЕШЕНИЕ

Пусть $e^{\lambda x}dx$ — множитель, который делает это уравнение непосредственно интегрируемым. Будем иметь $A - B\lambda + C\lambda^2 = 0$ и находим

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B - C\lambda \quad \text{и} \quad B' = \frac{B\lambda - A}{\lambda^2} = C.$$

Обозначим

$$e^{-\lambda x}\int e^{\lambda x}X\,dx = X'.$$

После одного интегрирования получаем уравнение

$$X' = A'y + B'\frac{dy}{dx}.$$

Пусть его множителем является $e^{\mu x}dx$; будем иметь $A' - B'\mu = 0$ и полагаем $A'' = \dfrac{A'}{\mu} = B$. Положив

$$e^{-\mu x}\int e^{\mu x}X'\,dx = X'',$$

получим $X'' = A''y$, что является уравнением дважды проинтегрированным и выражающим искомое соотношение между x и y.

Итак, поскольку здесь $A'' = B'$ и $B' = C$, то $A'' = C$. Затем после подстановки значений для A' и B' уравнение $A' - B'\mu = 0$ принимает вид

$$B - C\lambda - C\mu = 0, \quad \text{то есть} \quad B - C(\lambda + \mu) = 0.$$

Так как из этого уравнения получаем $\lambda+\mu=\frac{B}{C}$, то очевидно, что $\lambda+\mu$ равняется сумме обоих корней уравнения $A-B\lambda+C\lambda^2=0$. А так как λ есть один из корней этого уравнения, то μ обязательно обозначает его второй корень. Поэтому, если мы по предложенному уравнению составим, как мы делали в предыдущей главе, уравнение $A+Bz+Cz^2$, то его корнями будут $z=-\lambda$ и $z=-\mu$. Это значит, что если мы его множители возьмем в виде $C(\alpha+z)(\beta+z)$, то буквы α и β дадут значения λ и μ. Отсюда, поскольку

$$X'=e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx,$$

получаем

$$X''=e^{-\beta x}\int e^{(\beta-\alpha)x}\,dx\int e^{\alpha x}X\,dx.$$

Но

$$\int e^{(\beta-\alpha)x}\,dx\int e^{\alpha x}X\,dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\,e^{(\beta-\alpha)x}\int e^{\alpha x}X\,dx-\frac{1}{\beta-\alpha}\int e^{\beta x}X\,dx,$$

откуда заключаем, что

$$X''=\frac{1}{\beta-\alpha}\,e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx+\frac{1}{\alpha-\beta}\,e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx.$$

Поэтому полным интегралом предложенного уравнения является

$$Cy=\frac{1}{\beta-\alpha}\,e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx+\frac{1}{\alpha-\beta}\,e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx,$$

где буквы α и β надо выбрать так, чтобы

$$A+Bz+Cz^2=C\,(\alpha+z)\,(\beta+z).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

1144. Если оба указанные множителя равны, т. е. $\beta=\alpha$, будем иметь

$$X''=e^{-\alpha x}\int dx\int e^{\alpha x}X\,dx=e^{-\alpha x}x\int e^{\alpha x}X\,dx-e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}Xx\,dx,$$

и таким образом в случае

$$A+Bz+Cz^2=C\,(\alpha+z)^2$$

интегралом нашего уравнения будет

$$Cy=e^{-\alpha x}\left(x\int e^{\alpha x}X\,dx-\int e^{\alpha x}Xx\,dx\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1145. Если оба множителя мнимы, что имеет место, когда

$$A+Bz+Cz^2=C\,(f^2+2fz\cos\theta+z^2),$$

то

$$\alpha=f\left(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\right)$$

и

$$\beta=f\left(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta\right),$$

откуда

$$e^{\alpha x} = e^{fx\cos\theta}\left[\cos(fx\sin\theta) + \sqrt{-1}\sin(fx\sin\theta)\right]$$

и

$$e^{\beta x} = e^{fx\cos\theta}\left[\cos(fx\sin\theta) - \sqrt{-1}\sin(fx\sin\theta)\right],$$

а также

$$\beta - \alpha = -2\sqrt{-1}\,f\sin\theta.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1146. Для того чтобы легче было подставлять эти значения, обозначим для краткости

$$e^{fx\cos\theta} = m, \qquad \cos(fx\sin\theta) = p \quad \text{и} \quad \sin(fx\sin\theta) = q,$$

так что

$$e^{\alpha x} = mp + mq\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad e^{\beta x} = mp - mq\sqrt{-1}.$$

Отсюда находим

$$\int e^{\alpha x}X\,dx = \int mpX\,dx + \int mqX\,dx\sqrt{-1}$$

и

$$\int e^{\beta x}X\,dx = \int mpX\,dx - \int mqX\,dx\sqrt{-1}.$$

При этом

$$e^{-\alpha x} = \frac{p - q\sqrt{-1}}{m} \quad \text{и} \quad e^{-\beta x} = \frac{p + q\sqrt{-1}}{m}.$$

СЛЕДСТВИЕ

1147. Таким образом получаем

$$e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx = \frac{p}{m}\int mpX\,dx - \frac{q\sqrt{-1}}{m}\int mpX\,dx + \frac{p\sqrt{-1}}{m}\int mqX\,dx + \frac{q}{m}\int mqX\,dx,$$

а беря $\sqrt{-1}$ с отрицательным знаком, находим $e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx$ и, вычитая это выражение из предыдущего, определяем разность

$$-\frac{2q\sqrt{-1}}{m}\int mpX\,dx + \frac{2p\sqrt{-1}}{m}\int mqX\,dx,$$

которая должна делиться на [1])

$$\beta - \alpha = -2\sqrt{-1}\,f\sin\theta.$$

Отсюда находим интеграл

$$Cy = \frac{q}{mf\sin\theta}\int mpX\,dx - \frac{p}{mf\sin\theta}\int mqX\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 5

1148. Если подставить вместо m, p, q принятые для них значения, то интегралом нашего уравнения, если

$$A + Bz + Cz^2 = C(f^2 + 2fz\cos\theta + z^2),$$

[1]) ... quae forma inde subtracta relinquit ..., hocque residuum dividi debet par.

будет

$$Cy = e^{-fx\cos\theta}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sin(fx\sin\theta)}{f\sin\theta}\displaystyle\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\cos(fx\sin\theta)\\ -\dfrac{\cos(fx\sin\theta)}{f\sin\theta}\displaystyle\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\sin(fx\sin\theta)\end{array}\right\}.$$

Стало быть, это выражение равносильно предыдущему, если α и β принимают мнимые значения.

ЗАДАЧА 149

1149. *Пусть предложено дифференциальное уравнение третьего порядка*

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3};$$

найти его полный интеграл с помощью трехкратного интегрирования.

РЕШЕНИЕ

Обозначим множитель через $e^{\lambda x}dx$, тогда должно быть

$$A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 = 0.$$

Мы положим

$$A' = B - C\lambda + D\lambda^2,\qquad B' = C - D\lambda\quad\text{и}\quad C' = D$$

и, принимая

$$e^{-\lambda x}\int e^{\lambda x}X\,dx = X',$$

получим после одного интегрирования уравнение

$$X' = A'y + B'\frac{dy}{dx} + C'\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Далее, примем его множитель в виде $e^{\mu x}dx$, так что

$$A' - B'\mu + C'\mu^2 = 0,$$

и положим

$$A'' = B' - C'\mu\quad\text{и}\quad B'' = C'.$$

Обозначая

$$e^{-\mu x}\int e^{\mu x}X'\,dx = X'',$$

получим второе интегральное уравнение

$$X'' = A''y + B''\frac{dy}{dx},$$

которого множитель будет $e^{\nu x}dx$, полагая $A'' - B''\nu = 0$. Приняв $A''' = B''$, найдем третье интегральное уравнение

$$e^{-\nu x}\int e^{\nu x}X''\,dx = A'''y = Dy.$$

Итак, надо отыскать количества λ, μ, ν. Но, во-первых,

$$A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 = 0,$$

следовательно,

$$B - C(\lambda+\mu) + D(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) = 0,$$

и так как

$$A'' = C - D(\lambda + \mu) \quad \text{и} \quad B'' = D,$$

то, в-третьих, получаем

$$C - D(\lambda + \mu + \nu) = 0.$$

Из этого последнего равенства видно, что $\lambda + \mu + \nu$ равняется сумме корней первого уравнения, для которого λ является одним из корней. А что μ и ν представляют остальные корни, мы покажем следующим образом. Рассмотрим уравнение

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 = 0.$$

Если один из его корней есть $z = -\lambda$, т. е. одним из множителей его является $\lambda + z$, уравнение делится на него, и тогда получим

$$Dz^2 + (C - D\lambda)z + B - C\lambda + D\lambda^2 = 0,$$

что представляет именно второе уравнение $C'z^2 + B'z + A' = 0$, корнями которого являются $z = -\mu$ и $z = -\nu$, т. е. множителями будут $(\mu + z)(\nu + z)$, как показано в предыдущей задаче. Поэтому, если множителями выражения

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3$$

будут

$$D(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z),$$

то для нахождения окончательного интеграла полагаем

$$e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx = X', \qquad e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X'\,dx = X'' \quad \text{и} \quad e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X''\,dx = X'''$$

и будем иметь

$$Dy = X'''.$$

Но с помощью приведения интегралов, как мы выше видели, получаем

$$X'' = \frac{1}{\beta - \alpha}\,e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx + \frac{1}{\alpha - \beta}\,e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx,$$

а затем отсюда

$$\int e^{\gamma x}X''\,dx = \frac{1}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)}\,e^{(\gamma - \alpha)x}\int e^{\alpha x}X\,dx - \frac{1}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)}\int e^{\gamma x}X\,dx$$
$$+ \frac{1}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)}\,e^{(\gamma - \beta)x}\int e^{\beta x}X\,dx - \frac{1}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)}\int e^{\gamma x}X\,dx,$$

где два последние члена приводятся к

$$\frac{1}{(\alpha - \gamma)(\gamma - \beta)}\int e^{\gamma x}X\,dx.$$

Поэтому искомым интегралом будет

$$Dy = \frac{e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} + \frac{e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

1150. Если два множителя выражения $A+Bz+Cz^2+Dz^3$ равны, положим $\gamma=\beta$, то

$$\int e^{\beta x}X''\,dx=\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\,e^{(\beta-\alpha)x}\int e^{\alpha x}X\,dx-\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\int e^{\beta x}X\,dx+\frac{1}{\alpha-\beta}\,x\int e^{\beta x}X\,dx-\frac{1}{\alpha-\beta}\int e^{\beta x}Xx\,dx,$$

и, таким образом, интеграл в этом случае будет

$$Dy=\frac{e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx-e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx}{(\beta-\alpha)^2}+\frac{e^{-\beta x}x\int e^{\beta x}X\,dx-e^{-\beta x}\int e^{\beta x}Xx\,dx}{\alpha-\beta}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1151. Если равны все три множителя, т. е. $\alpha=\beta=\gamma$, то

$$e^{\alpha x}X''=\int dx\int e^{\alpha x}X\,dx=x\int e^{\alpha x}X\,dx-\int e^{\alpha x}Xx\,dx$$

и

$$e^{\alpha x}X'''=\int e^{\alpha x}X''\,dx=\int dx\int dx\int e^{\alpha x}X\,dx,$$

то есть

$$e^{\alpha x}X'''=\frac{1}{2}\,x^2\int e^{\alpha x}X\,dx-x\int e^{\alpha x}Xx\,dx+\frac{1}{2}\int e^{\alpha x}Xx^2\,dx,$$

откуда получаем в этом случае интеграл

$$Dy=\frac{1}{2}\,e^{-\alpha x}\left(x^2\int e^{\alpha x}X\,dx-2x\int e^{\alpha x}Xx\,dx+\int e^{\alpha x}Xx^2\,dx\right)$$

или же

$$Dy=e^{-\alpha x}\int dx\int dx\int e^{\alpha x}X\,dx.$$

ПОЯСНЕНИЕ

1152. Также и в общем случае, без какого бы то ни было приведения интегралов, интеграл нашего уравнения может быть представлен в виде

$$Dy=e^{-\gamma x}\int e^{(\gamma-\beta)x}\,dx\int e^{(\beta-\alpha)x}\,dx\int e^{\alpha x}X\,dx,$$

полагая

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3=D\,(\alpha+z)\,(\beta+z)\,(\gamma+z).$$

Здесь, прежде всего, представляется заслуживающим быть отмеченным то, что три буквы α, β, γ могут каким угодно образом быть переставлены между собою, так что это интегральное выражение можно изменить шестью способами. Также и в предыдущей задаче [§ 1143], где встречаются только два множителя

$$C\,(\alpha+z)\,(\beta+z)=A+Bz+Cz^2,$$

полный интеграл уравнения

$$X=Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}$$

может быть представлен в виде

$$Cy = e^{-\beta x}\int e^{(\beta-\alpha)x}\,dx\int e^{\alpha x}X\,dx,$$

а при перестановке букв α и β также и следующим образом:

$$Cy = e^{-\alpha x}\int e^{(\alpha-\beta)x}\,dx\int e^{\beta x}X\,dx.$$

Если усмотреть равенство этих выражений, что легко обнаруживается при соответствующей попытке, то становится ясным, как меняются предыдущие выражения. Действительно, пусть $e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx = X'$, тогда в вышеприведенной формуле

$$Dy = e^{-\gamma x}\int e^{(\gamma-\beta)x}\,dx\int e^{\beta x}X'\,dx;$$

и так как этому равно выражение

$$Dy = e^{-\beta x}\int e^{(\beta-\gamma)x}\,dx\int e^{\gamma x}X'\,dx,$$

то будем иметь, подставляя значение для X',

$$Dy = e^{-\beta x}\int e^{(\beta-\gamma)x}\,dx\int e^{(\gamma-\alpha)x}\,dx\int e^{\alpha x}X\,dx,$$

что отличается от первой формулы только тем, что переставлены буквы β и γ. Однако то, что можно также переставить буквы β и γ с α, таким способом труднее показать, но это очевидно, если сделать указанные при решении приведения, а также на основании свойств самого решения.

ЗАДАЧА 150

1153. *Пусть предложено дифференциальное уравнение четвертого порядка*

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + E\frac{d^4y}{dx^4},$$

где элемент dx принимается постоянным, а X обозначает какую угодно функцию от x. Найти его интеграл.

РЕШЕНИЕ

Мы прибегнем к помощи алгебраического выражения, которое легко образуется по предложенному уравнению

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 = P.$$

Пусть оно разложено на свои простые множители, так что

$$P = E(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z).$$

Тогда множителем, который делает интегрируемым наше уравнение, будет $e^{\lambda x}dx$, принимая λ равной одной из букв α, β, γ, δ. Итак, примем $\lambda=\alpha$, так что множителем будет $e^{\alpha x}dx$, и, положив $e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx = X'$, получим после одного интегрирования уравнение

$$X' = A'u + \dot{B}'\frac{dy}{dx} + C'\frac{d^2y}{dx^2} + D'\frac{d^3y}{dx^3},$$

где A', B', C', D' определяются таким образом, чтобы

$$A' = \frac{A}{\alpha}, \quad B' = \frac{B\alpha - A}{\alpha^2}, \quad C' = \frac{C\alpha^2 - B\alpha + A}{\alpha^3}, \quad D' = \frac{D\alpha^3 - C\alpha^2 + B\alpha - A}{\alpha^4},$$

то есть

$$A' = \frac{A}{\alpha}, \quad B' = \frac{B - A'}{\alpha}, \quad C' = \frac{C - B'}{\alpha}, \quad D' = \frac{D - C'}{\alpha},$$

либо также

$$A = A'\alpha, \quad B = B'\alpha + A', \quad C = C'\alpha + B', \quad D = D'\alpha + C'.$$

Из этих определений вытекает, что если положить

$$A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 = Q,$$

то это выражение Q получается из выражения P, если последнее разделить на $\alpha + z$, так что

$$Q = \frac{P}{\alpha + z} = E(\beta + z)(\gamma + z)(\delta + z).$$

Следовательно, мы произведем второе интегрирование таким же образом с помощью множителя $e^{\beta x}\,dx$ и, положив

$$e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X'\,dx = X'',$$

получим интегральное уравнение

$$X'' = A''y + B''\frac{dy}{dx} + C''\frac{d^2y}{dx^2},$$

беря коэффициенты A'', B'', C'' так, чтобы

$$A'' + B''z + C''z^2 = \frac{P}{(\alpha + z)(\beta + z)} = E(\gamma + z)(\delta + z).$$

Далее, интегрируя это уравнение с помощью множителя $e^{\gamma x}\,dx$, мы найдем, если положить $e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X'\,dx = X''$,

$$X''' = A'''y + B'''\frac{dy}{dx},$$

причем

$$A''' + B'''z = \frac{P}{(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z)} = E(\delta + z).$$

И, наконец, с помощью множителя $e^{\delta x}\,dx$, положив

$$e^{-\delta x}\int e^{\delta x}X'''\,dx = X'''',$$

находим окончательный интеграл

$$X'''' = A''''y,$$

причем

$$A'''' = E.$$

Итак, собрав все это, получим искомый интеграл

$$Ey = e^{-\delta x}\int e^{(\delta - \gamma)x}\,dx \int e^{(\gamma - \beta)x}\,dx \int e^{(\beta - \alpha)x}\,dx \int e^{\alpha x}X\,dx,$$

и это выражение можно построить, уже без каких бы то ни было обходных путей, по разложению первоначального выражения

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$$

на множители, а именно

$$P = E(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z)(\delta + z).$$

При этом нужно отметить, что в каком бы порядке ни переставлять буквы α, β, γ, δ, для Ey всегда должно получаться одно и то же значение.

СЛЕДСТВИЕ 1

1154. Поскольку имеем $X' = e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X\,dx$, то, как мы уже видели,

$$X'' = e^{-\beta x}\int e^{\beta x} X'\,dx = e^{-\beta x}\left(\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{\beta-\alpha}\int e^{\alpha x}X\,dx - \frac{1}{\beta-\alpha}\int e^{\beta x}X\,dx\right),$$

то есть

$$X'' = \frac{e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx}{\beta-\alpha} + \frac{e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx}{\alpha-\beta}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1155. Далее, так как $X''' = e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x} X''\,dx$, то, произведя подобным же образом приведение, получаем

$$X''' = \frac{e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)} + \frac{e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + \frac{e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)},$$

что приводится к следующему виду:

$$X''' = \frac{e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + \frac{e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1156. Отсюда подобным же образом получается значение X'''', причем достаточно вывести первый член, так как из него сразу образуются остальные, вследствие перестановочности [букв]. Таким образом находим интеграл нашего уравнения в виде следующего выражения:

$$Ey = \frac{e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)} + \frac{e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)} + \frac{e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)} + \frac{e^{-\delta x}\int e^{\delta x}X\,dx}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

1157. Если два корня или несколько корней равны между собой, либо мнимы, то найденные интегралы нужно преобразовать, и мы сразу исследуем это преобразование. Впрочем, последняя форма для интеграла представляется весьма подходящей для таких преобразований. Так, в случае равенства множителей, если, [например], $\delta=\gamma$, нужно произвести приведение только двух последних членов, и, для того чтобы это сделать, положим $\delta=\gamma-\omega$. Тогда предпоследний член будет равен $-\frac{e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx}{\omega(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$, а что касается последнего члена, следует заметить, что

$$\frac{1}{\alpha-\delta}=\frac{1}{\alpha-\gamma+\omega}=\frac{1}{\alpha-\gamma}-\frac{\omega}{(\alpha-\gamma)^2} \text{ и } \frac{1}{\beta-\delta}=\frac{1}{\beta-\gamma}-\frac{\omega}{(\beta-\gamma)^2},$$

следовательно,

$$\frac{1}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}=\frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}+\frac{\omega(2\gamma-\alpha-\beta)}{(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2},$$

откуда

$$\frac{1}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}=\frac{1}{\omega(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}+\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2}.$$

Но тогда в числителе имеем

$$e^{-\delta x}=e^{-\gamma x}(1+\omega x) \quad \text{и} \quad e^{\delta x}=e^{\gamma x}(1-\omega x),$$

и, таким образом,

$$e^{-\delta x}\int e^{\delta x}X\,dx=e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx+e^{-\gamma x}\omega x\int e^{\gamma x}X\,dx-\omega e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}Xx\,dx.$$

Следовательно, так как слагаемые, разделенные на ω, взаимно уничтожаются, два последние члена получаются в таком виде:

$$\frac{(2\gamma-\alpha-\beta)e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx}{(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2}+\frac{e^{-\gamma x}x\int e^{\gamma x}X\,dx-e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}Xx\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}.$$

Это выражение получается также из первого вида [интеграла]. Таким же образом можно решить задачу в общем случае.

ЗАДАЧА 151

1158. *Предложено дифференциальное уравнение какого угодно порядка*

$$X=Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots+N\frac{d^ny}{dx^n},$$

причем элемент dx принимается постоянным, а X обозначает какую угодно функцию от x. Найти его интеграл.

РЕШЕНИЕ

По этому уравнению образуется алгебраическое выражение

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots+Nz^n=P,$$

которое разлагается на простые множители, так что

$$P=N(\alpha+z)\,(\beta+z)\,(\gamma+z)\,\ldots\,(\nu+z),$$

и число этих множителей n. В силу этого, если мы будем последовательно производить указанным образом интегрирования, мы придем, наконец, к такому окончательному интегральному уравнению:

$$Ny=e^{-\nu x}\int e^{(\nu-\lambda)x}dx\int e^{(\lambda-\lambda)x}dx\int\ldots\int e^{(\beta-\alpha)x}dx\int e^{\alpha x}X\,dx,$$

т. е., поскольку можно переставлять между собой множители, будем иметь

$$Ny = e^{-\alpha x}\int e^{(\alpha-\beta)x}\,dx\int e^{(\beta-\gamma)x}\,dx\int\ldots\int e^{(\mu-\nu)x}\,dx\int e^{\nu x}X\,dx.$$

Но это выражение с помощью приведений, подобных тем, которыми мы пользовались выше, можно разбить на следующие слагаемые, для более удобного представления каковых положим ради краткости

$$\begin{gathered}(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\ldots(\nu-\alpha)=\alpha',\\ (\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)\ldots(\nu-\beta)=\beta',\\ (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)\ldots(\nu-\gamma)=\gamma',\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)\ldots(\mu-\nu)=\nu',\end{gathered}$$

а именно,

$$Ny=\frac{1}{\alpha'}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx+\frac{1}{\beta'}e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx+\frac{1}{\gamma'}e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx+\ldots+\frac{1}{\nu'}e^{-\nu x}\int e^{\nu x}X\,dx.$$

Однако нет нужды перемножать столько множителей для определения значений α', β', γ' и т. д., поскольку имеем

$$\frac{P}{N(\alpha+z)}=(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)\ldots(\nu+z),$$

и, очевидно, что эта формула дает значение α', если в нее подставить $z=-\alpha$. Но в таком случае исчезает как числитель, так и знаменатель дроби $\frac{P}{N(\alpha+z)}$, и поэтому ее значением является $\frac{dP}{N\,dz}$. В силу этого, поскольку

$$P=A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots+Nz^n,$$

получим

$$\frac{dP}{dz}=B+2Cz+3Dz^2+\ldots+nNz^{n-1},$$

и если обозначим это выражение через Q, то очевидно, что

$$\alpha'=\frac{Q}{N},\ \text{если положим } z=-\alpha,$$

$$\beta'=\frac{Q}{N},\ \text{если положим } z=-\beta,$$

$$\gamma'=\frac{Q}{N},\ \text{если положим } z=-\gamma,$$

и т. д.

А так как после подстановки этих значений интегральное уравнение можно разделить на N, получаем следующие значения:

$$\begin{gathered}B-2C\alpha+3D\alpha^2-4E\alpha^3+\ldots\pm nN\alpha^{n-1}=\mathfrak{A},\\ B-2C\beta+3D\beta^2-4E\beta^3+\ldots\pm nN\beta^{n-1}=\mathfrak{B},\\ B-2C\gamma+3D\gamma^2-4E\gamma^3+\ldots\pm nN\gamma^{n-1}=\mathfrak{C},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ B-2C\nu+3D\nu^2-4E\nu^3+\ldots\pm nN\nu^{n-1}=\mathfrak{N},\end{gathered}$$

и после того, как они образованы, найдем искомый интеграл в виде

$$y=\frac{1}{\mathfrak{A}}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx+\frac{1}{\mathfrak{B}}e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx+\frac{1}{\mathfrak{C}}e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx+ \quad \text{и т. д.,}$$

пока не будут учтены все множители[1]).

СЛЕДСТВИЕ 1

1159. Так как имеем

$$\alpha'=\frac{\mathfrak{A}}{N},\quad \beta'=\frac{\mathfrak{B}}{N},\quad \gamma'=\frac{\mathfrak{C}}{N}\quad \text{и т. д.,}$$

то

$$\mathfrak{A}=N\alpha',\quad \mathfrak{B}=N\beta',\quad \mathfrak{C}=N\gamma'\quad \text{и т. д.}$$

Вследствие этого, поскольку

$$P=A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots+Nz^n=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)\ldots(\nu+z),$$

получим

$$\mathfrak{A}=\frac{P}{\alpha+z},\ \text{если положим } z=-\alpha,$$

$$\mathfrak{B}=\frac{P}{\beta+z},\ \text{если положим } z=-\beta,$$

$$\mathfrak{C}=\frac{P}{\gamma+z},\ \text{если положим } z=-\gamma,$$

и так далее.

СЛЕДСТВИЕ 2

1160. Итак, правило для определения полного интеграла предложенного уравнения

$$X=Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots+N\frac{d^ny}{dx^n}$$

получается такое. По этому уравнению образуется следующее алгебраическое выражение:

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots+Nz^n=P,$$

и мы ищем все простые множители, которые пусть будут

$$\alpha+z,\quad \beta+z,\quad \gamma+z,\quad \delta+z\quad \text{и т. д.}$$

и число которых равно числу n. Тогда для каждого из этих множителей определяются следующие постоянные количества: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д., так что

$$\mathfrak{A}=\frac{P}{\alpha+z},\ \text{если полагаем } z=-\alpha, \text{ т. е.}$$

$$\mathfrak{A}=B-2C\alpha+3D\alpha^2-4E\alpha^3+\ldots\pm nN\alpha^{n-1};$$

$$\mathfrak{B}=\frac{P}{\beta+z},\ \text{если полагаем } z=-\beta, \text{ т. е.}$$

$$\mathfrak{B}=B-2C\beta+3D\beta^2-4E\beta^3+\ldots\pm nN\beta^{n-1};$$

$$\mathfrak{C}=\frac{P}{z+\gamma},\ \text{если полагаем } z=-\gamma, \text{ т. е.}$$

$$\mathfrak{C}=B-2C\gamma+3D\gamma^2-4E\gamma^3+\ldots\pm nN\gamma^{n-1};$$

и т. д.

---

[1]) Quoad omnes factores fuerint in computum ducti.

Когда найдены все эти количества, получаем искомый интеграл

$$y = \frac{1}{\mathfrak{A}} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X\, dx + \frac{1}{\mathfrak{B}} e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X\, dx + \frac{1}{\mathfrak{C}} e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X\, dx + \quad \text{и т. д.},$$

который состоит из стольких слагаемых, сколько было простых множителей в выражении P.

СЛЕДСТВИЕ 3

1161. Таким образом, поскольку интеграл состоит из стольких слагаемых, сколько единиц в порядке предложенного дифференциального уравнения, и поскольку каждое слагаемое вследствие интегрирования вводит произвольное постоянное, очевидно, что интеграл, найденный с помощью указанного правила, является полным.

ПОЯСНЕНИЕ

1162. Итак, интегрирование дифференциальных уравнений рассмотренного вида не связано более ни с какими трудностями, если только можно определить все простые множители указанного алгебраического выражения P, или же, что сводится к тому же, все корни, числом n, следующего алгебраического уравнения:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n = 0.$$

Правда, здесь встречаются два рода случаев, когда при этом интегрировании возникают значительные затруднения, а именно, когда два или большее число указанных простых множителей равны между собой, либо когда они мнимы. Впрочем, в этом последнем случае все неудобство сводится только к тому, что в некоторые слагаемые найденного здесь интеграла входят мнимые количества, которые, однако, при приведении взаимно уничтожаются. В первом же случае те слагаемые, которые образуются с помощью равных множителей, оказываются бесконечными, но с противоположными знаками и такими, что при объединении они тем не менее дают конечное количество, значение которого можно определить только весьма непрямым путем. Следует при этом определенным образом отметить, что в том и другом случае нет никаких затруднений при определении остальных слагаемых интеграла, соответствующих неравным множителям. Но метод, который приспособлен для такой цели, будет разъяснен мной в следующей задаче.

ЗАДАЧА 152

1163. *Предложено дифференциальное уравнение какого угодно порядка*

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + E\frac{d^4y}{dx^4} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n}.$$

При условии, что образованное по этому уравнению алгебраическое выражение

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Nz^n$$

имеет два или большее число равных между собою простых множителей, определить соответствующую этим множителям часть интеграла.

РЕШЕНИЕ

Пусть, для первого случая, равны между собою два множителя $\alpha+z$ и $\beta+z$, т. е. $\beta=\alpha$, и пусть остающийся множитель выражения P есть Q, так что имеем

$$P=(\alpha+z)(\beta+z)Q=(\alpha+z)^2 Q.$$

Если положить $z=-\alpha$, то Q переходит в $\mathfrak{C}$. Если лишь вначале буквы α и β рассматривать как различные, только не в количестве Q, которое в обоих случаях будет одно и то же, то для обоих слагаемых интеграла, которые получаются по этим двум множителям, будем иметь

$$\mathfrak{A}=(\beta-\alpha)\,\mathfrak{C} \text{ и } \mathfrak{B}=(\alpha-\beta)\,\mathfrak{C}.$$

А те слагаемые в интеграле, которые получаются отсюда, обозначим буквой v, и таким образом

$$(\beta-\alpha)\,\mathfrak{C}v=e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx-e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx,$$

откуда, дифференцируя, находим

$$(\beta-\alpha)\,\mathfrak{C}\,dv=-\alpha e^{-\alpha x}dx\int e^{\alpha x}X\,dx+\beta e^{-\beta x}dx\int e^{\beta x}X\,dx.$$

К этому равенству добавим предыдущее, умноженное на $\beta\,dx$, и получим

$$(\beta-\alpha)\,\mathfrak{C}\,dv+(\beta-\alpha)\,\mathfrak{C}\beta v\,dx=(\beta-\alpha)\,e^{-\alpha x}dx\int e^{\alpha x}X\,dx,$$

что после деления на $\beta-\alpha$ и умножения на $e^{-\alpha x}$ дает нам, поскольку $\beta=\alpha$, интеграл

$$\mathfrak{C}e^{\alpha x}v=\int dx\int e^{\alpha x}X\,dx.$$

Вследствие этого вместо двух слагаемых, которые получаются из равных множителей $\alpha+z$ и $\beta+z$, следует писать такое выражение:

$$v=\frac{1}{\mathfrak{C}}e^{-\alpha x}\int dx\int e^{\alpha x}X\,dx,$$

где $\mathfrak{C}$ получается из $\frac{P}{(\alpha+z)^2}$, если положить $z=-\alpha$ [1]).

Теперь допустим, что в выражении P есть три равных простых множителя, так что $\alpha+z=\beta+z=\gamma+z$, причем сначала мы будем их рассматривать как различные.

Итак, положим

$$P=(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)Q,$$

и пусть Q переходит в $\mathfrak{M}$, когда полагаем $z=-\alpha$; для слагаемых же интеграла получаем

$$\mathfrak{A}=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\,\mathfrak{M},\quad \mathfrak{B}=(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)\,\mathfrak{M},$$
$$\mathfrak{C}=(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\,\mathfrak{M}.$$

---

[1]) См. замечание Эйлера в конце этого параграфа.

Если обозначить сумму трех слагаемых интеграла, которую мы хотим определить, буквой v, то отсюда получаем

$$\mathfrak{M}v = \frac{e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + \frac{e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}.$$

А так как вместе с тем

$$\frac{1}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{1}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + \frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} = 0,$$

то, дифференцируя, найдем

$$\frac{\mathfrak{M}\,dv}{dx} = \frac{-\alpha e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} - \frac{\beta e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} - \frac{\gamma e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} = 0.$$

Если к этому равенству добавить исходное после умножения его на α, получим

$$\mathfrak{M}\left(\frac{dv}{dx}+\alpha v\right) = \frac{e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx}{\gamma-\beta} + \frac{e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx}{\beta-\gamma}.$$

Это уравнение мы снова продифференцируем, что дает

$$\mathfrak{M}\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{\alpha\,dv}{dx}\right) = \frac{-\beta e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx}{\gamma-\beta} - \frac{\gamma e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx}{\beta-\gamma},$$

и если прибавить к этому равенству предыдущее, умноженное на $\beta=\alpha$, получаем

$$\mathfrak{M}\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{2\alpha\,dv}{dx}+\alpha^2v\right) = e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}X\,dx = e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx;$$

и здесь уже все неудобства устранены. После умножения последнего уравнения на $e^{\alpha x}\,dx$ и интегрирования будем иметь

$$\mathfrak{M}e^{\alpha x}\left(\frac{dv}{dx}+\alpha v\right) = \int dx\int e^{\alpha x}X\,dx,$$

а это уравнение после умножения на dx опять оказывается интегрируемым, что дает

$$\mathfrak{M}e^{\alpha x}v = \int dx\int dx\int e^{\alpha x}X\,dx.$$

В силу этого, если выражение P имеет множитель третьей степени $(\alpha+z)^3$, надо искать такое количество $\mathfrak{M}$, чтобы $\mathfrak{M}=\frac{P}{(\alpha+z)^3}$, когда полагаем $z=-\alpha$, и получающееся отсюда слагаемое интеграла имеет вид

$$\frac{1}{\mathfrak{M}}e^{-\alpha x}\int dx\int dx\int e^{\alpha x}X\,dx.$$

Таким же образом, если выражение P имеет четыре равных множителя, так что $P=(\alpha+z)^4Q$, надо взять $\mathfrak{M}=\frac{P}{(\alpha+z)^4}$, т. е. $\mathfrak{M}=Q$, полагая $z=-\alpha$, и возникающим отсюда слагаемым интеграла будет

$$\frac{1}{\mathfrak{M}}e^{-\alpha x}\int dx\int dx\int dx\int e^{\alpha x}X\,dx.$$

Таким же образом легко решаются и те случаи, когда выражение P имеет большее число равных множителей.

ЗАМЕЧАНИЕ

Все это решение ошибочно вследствие того, что хотя можно рассматривать количества α, β, γ и т. д., которые мы положили равными, как различные, однако для отдельных слагаемых ошибочно допускалось, что количество $\mathfrak{M}$ принимает одно и то же значение. Действительно, так как буквы α, β, γ и т. д. рассматриваются как отличающиеся одна от другой бесконечно мало, то и значения, обозначенные буквой $\mathfrak{M}$, следует признать разнящимися бесконечно мало, вследствие чего, поскольку отдельные слагаемые интеграла становятся бесконечно большими и в их разложениях бесконечные члены взаимно уничтожаются, бесконечно малые различия в значениях буквы $\mathfrak{M}$ приводят к конечным слагаемым. Исправление этих ошибок можно найти в следующей задаче 154, причем все равные множители объединяются в особое уравнение. Однако я предпочел оставить труд исправления этой ошибки прилежным читателям, а не устранить из этого произведения указанную погрешность. Ведь часто более полезно сохранить ошибки, в которые случается впасть даже при всей опытности, так как изучающим этот предмет на них лучше учиться тому, насколько нужно быть осмотрительным, чтобы не заблуждаться в рассуждениях [1]).

СЛЕДСТВИЕ 1

1164. Здесь, конечно, достойно замечания то, что выражения

$$dv+\alpha v\,dx,\quad d^2v+2\alpha\,dx\,dv+\alpha^2v\,dx^2,$$
$$d^3v+3\alpha\,dx\,d^2v+3\alpha^2\,dx^2\,dv+\alpha^3v^3\,dx^3$$

и вообще выражение

$$d^nv+\frac{n}{1}\alpha\,dx\,d^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\alpha^2\,dx^2\,d^{n-2}v+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\alpha^3\,dx^3\,d^{n-3}v+\text{и т. д.}$$

после умножения на $e^{\alpha x}$ допускает последовательно столько интегрирований, сколько единиц содержит показатель n, причем последним интегралом будет $e^{\alpha x}v$.

---

[1]) См. §§ 1251, 1274. Интегрирование дифференциального уравнения, предложенного в этой задаче, выполняется по способу, указанному и обоснованному Коши в работе под заглавием Exercices de Mathématiques (1826). Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, II-e Série, t. VI, Paris, 18881, стр. 252, следующим образом.

Пусть α, β, γ и т. д. суть все различные корни алгебраического уравнения

$$P(z)=A+Bz+Cz^2+\ldots+Nz^n=0,$$

и обозначим коэффициент при степени $(z-\alpha)^{-1}$ в разложении выражения $\frac{e^{z(x-u)}}{P(z)}$ по восходящим степеням $z-\alpha$ через

$$E_\alpha\frac{e^{z(x-u)}}{P(z)}$$

(резидю для корня α) и аналогично для остальных корней β, γ и т. д. Затем, пусть Y есть общее решение дифференциального уравнения

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+\ldots+N\frac{d^ny}{dx^n}=0;$$

тогда общим решением предложенного уравнения будет

$$y=\int X(u)\left\{E_\alpha\frac{e^{z(x-u)}}{P(z)}+E_\beta\frac{e^{z(x-u)}}{P(z)}+\text{ и т. д.}\right\}du+Y,$$

где интеграл исчезает при каком угодно определенном значении u, и, вместе с тем, полагаем $u=x$ [Л. Ш.].

СЛЕДСТВИЕ 2

1165. Впрочем, причина этого явления очевидна на основании того, что если последовательно дифференцировать выражение $e^{\alpha x}v$, принимая элемент dx постоянным, то получаются вышеуказанные дифференциальные выражения, умноженные на $e^{\alpha x}$, так что

$$d^n(e^{\alpha x}v)=e^{\alpha x}\left(d^n v+\frac{n}{1}\alpha\,dx\,d^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2\,dx^2\,d^{n-2}v+\text{ и т. д.}\right)$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1166. Заслуживает также быть упомянутым другое обстоятельство, которое обнаруживается при вышеуказанном решении, а именно, если брать какие угодно числа α, β, γ, δ и т. д., то

$$\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\beta-\alpha}=0,$$

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=0,$$

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}+\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+\frac{1}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}=0$$

и т. д.,

сколько бы чисел ни было взято.

СЛЕДСТВИЕ 4

1167. Если выражение P после разложения на простые множители взять в виде

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)\ldots(\mu+z)(\nu+z),$$

то ранее найденное представление интеграла (§ 1158), а именно

$$Ny=e^{-\alpha x}\int e^{(\alpha-\beta)x}dx\int e^{(\beta-\gamma)x}dx\int e^{(\gamma-\delta)x}dx\ldots\int e^{(\mu-\nu)x}dx\int e^{\nu x}X\,dx,$$

не приводит ни к каким затруднениям при наличии равных множителей, но другое выражение [§ 1160], когда интеграл представляется в виде суммы слагаемых, получающихся из отдельных множителей, и которое оказывается гораздо более пригодным для использования, в этом случае значительно труднее получить.

ПОЯСНЕНИЕ

1168. Обстоятельство, замеченное в следствии 3, заслуживает тем большего внимания, что его можно отнести также к обычной арифметике[1]), и там оно, как представляется, может быть широко использовано, тем более, что его доказательство совершенно не очевидно и

---

[1]) ...quod etiam ad Arithmeticam vulgarem transferri potest.

искать его надо в более глубоких частях анализа. Поэтому я считаю, что не отклонюсь в сторону, если уделю здесь место этой замечательной арифметической теореме, тем паче, что изложенное здесь решение задачи не будет вполне законченным без доказательства этой теоремы.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

1169. *Если имеем сколько угодно чисел a, b, c, d и т. д. и если из любого из них вычитаются остальные и образуются следующие произведения:*

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e) \text{ и т. д.} = \mathfrak{A},$$
$$(b-a)(b-c)(b-d)(b-e) \text{ и т. д.} = \mathfrak{B},$$
$$(c-a)(c-b)(c-d)(c-e) \text{ и т. д.} = \mathfrak{C},$$
$$(d-a)(d-b)(d-c)(d-e) \text{ и т. д.} = \mathfrak{D}$$

и т. д.,

то всегда получим

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{C}}+\frac{1}{\mathfrak{D}}+\text{ и т. д.}=0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Рассмотрим в соответствии с началами, изложенными во *Введении в анализ*[1]), такую дробь:

$$\frac{Z}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d) \text{ и т. д.}},$$

где Z обозначает целую рациональную функцию от z, такую, что высшая степень z в ней меньше числа множителей знаменателя. Эта дробь может быть разложена на простые дроби, сумме которых она равна, а именно

$$\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-b}+\frac{C}{z-c}+\frac{D}{z-d}+\text{ и т. д.}$$

Чтобы выполнить это разложение, мы положим, что указанный числитель $Z=z^n$, причем n является целым числом, меньшим числа множителей, содержащихся в знаменателе. Тогда указанные выше числители определяются следующим образом:

$$A=\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d) \text{ и т. д.}},$$
$$B=\frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d) \text{ и т. д.}},$$
$$C=\frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d) \text{ и т. д.}}$$

и т. д.

Следовательно, так как эти дроби, взятые со знаком минус, а именно

$$\frac{A}{a-z}+\frac{B}{b-z}+\frac{C}{c-z}+\frac{D}{d-z}+\text{ и т. д.},$$

[1]) См. Леонард Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, т. I, М.—Л., 1936, гл. 2, стр. 46 и след.

будучи прибавлены к предложенной дроби, дают нуль, если z есть последнее из предложенных чисел a, b, c, d и т. д., число которых заведомо больше, чем $n+1$, то полагаем

$$(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(a-z)=\mathfrak{A},$$
$$(b-a)(b-c)(b-d)\ldots(b-z)=\mathfrak{B},$$
$$(c-a)(c-b)(c-d)\ldots(c-z)=\mathfrak{C},$$
$$(d-a)(d-b)(d-c)\ldots(d-z)=\mathfrak{D}$$
$$\text{и т. д.,}$$
$$(z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-y)=\mathfrak{Z},$$

и предложенной дробью будет $\frac{z^n}{\mathfrak{Z}}$. А отсюда очевидно, что сумма всех этих дробей будет

$$\frac{a^n}{\mathfrak{A}}+\frac{b^n}{\mathfrak{B}}+\frac{c^n}{\mathfrak{C}}+\frac{d^n}{\mathfrak{D}}+\ldots+\frac{z^n}{\mathfrak{Z}}=0,$$

если только $n+1$ меньше числа слагаемых. Стало быть, если положим $n=0$, получим рассматриваемый в теореме случай.

СЛЕДСТВИЕ 1

1170. Если это применить к выше определенным (§ 1160) числам $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и т. д., где, впрочем, надо указать на небольшое различие в том, как образуются множители, то обнаруживается, что

$$+\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{C}}+\frac{1}{\mathfrak{D}}+\text{ и т. д.}=0,$$
$$-\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}-\frac{\beta}{\mathfrak{B}}-\frac{\gamma}{\mathfrak{C}}-\frac{\delta}{\mathfrak{D}}-\text{ и т. д.}=0,$$
$$+\frac{\alpha^2}{\mathfrak{A}}+\frac{\beta^2}{\mathfrak{B}}+\frac{\gamma^2}{\mathfrak{C}}+\frac{\delta^2}{\mathfrak{D}}+\text{ и т. д.}=0,$$
$$-\frac{\alpha^3}{\mathfrak{A}}-\frac{\beta^3}{\mathfrak{B}}-\frac{\gamma^3}{\mathfrak{C}}-\frac{\delta^3}{\mathfrak{D}}-\text{ и т. д.}=0$$
$$\text{и т. д.,}$$

пока мы не дойдем до такого выражения:

$$\pm\frac{\alpha^{n-1}}{\mathfrak{A}}\pm\frac{\beta^{n-1}}{\mathfrak{B}}\pm\frac{\gamma^{n-1}}{\mathfrak{C}}\pm\frac{\delta^{n-1}}{\mathfrak{D}}\pm\text{ и т. д.},$$

и эта сумма уже не исчезает больше, а равна дроби $\frac{1}{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

1171. Это можно получить также путем разложения того выражения, которое рассматривалось в теореме. Действительно, если положить его равным

$$\frac{z^{n-1}}{(z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-y)},$$

причем число всех букв a, b, c и т. д. $=n$, то, так как числитель z^{n-1} имеет столько измерений, сколько множителей есть в знаменателе, целая часть, содержащаяся в этой дроби, равна единице; указанная часть сохраняется при разложении дроби и применительно к упомянутому случаю она дает $\frac{1}{N}$.

ПОЯСНЕНИЕ

1172. Только после доказательства этой теоремы можно ясно показать a posteriori, каким образом полученный выше (§ 1160) интеграл удовлетворяет предложенному там дифференциальному уравнению. Действительно, принимая во внимание выражения из § 1170, мы, последовательно дифференцируя найденный выше интеграл

$$y=\frac{1}{\mathfrak{A}}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx+\frac{1}{\mathfrak{B}}e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx\ +\ \text{и т. д.},$$

будем получать

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx-\frac{\beta}{\mathfrak{B}}e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx-\text{и т. д.},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=+\frac{\alpha^2}{\mathfrak{A}}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx+\frac{\beta^2}{\mathfrak{B}}e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx+\ \text{и т. д.},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{\alpha^3}{\mathfrak{A}}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx-\frac{\beta^3}{\mathfrak{B}}e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx-\text{и т. д.}$$

и т. д.

вплоть до

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^n}=\pm\frac{\alpha^{n-1}}{\mathfrak{A}}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx\pm\frac{\beta^{n-1}}{\mathfrak{B}}e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx\pm\text{и т. д.},$$

и отсюда получается дифференциальное выражение

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\mp\frac{\alpha^n}{\mathfrak{A}}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx\mp\frac{\beta^n}{\mathfrak{B}}e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx\mp\ \text{и т. д.}$$
$$\pm\left(\frac{\alpha^{n-1}}{\mathfrak{A}}+\frac{\beta^{n-1}}{\mathfrak{B}}+\frac{\gamma^{n-1}}{\mathfrak{C}}+\ \text{и т. д.}\right)X,$$

последний член которого переходит в $\frac{1}{N}X$.

Если же мы все эти выражения, каждое в отдельности, помножим соответственно на количества A, B, C, D, ..., N, то, поскольку

$$A-B\alpha+C\alpha^2-D\alpha^3+\ldots\mp N\alpha^n=0,$$
$$A-B\beta+C\beta^2-D\beta^3+\ldots\mp N\beta^n=0$$

и т. д.

вследствие того, что $\alpha+z$, $\beta+z$, $\gamma+z$ и т. д. являются множителями выражения

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots+Nz^n,$$

мы, очевидно, получим

$$Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots+N\frac{d^ny}{dx^n}=X,$$

что является тем самым дифференциальным уравнением, которое было предложено вначале.

ЗАДАЧА 153

1173. *Предложено дифференциальное уравнение какого угодно порядка*

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n},$$

и образованное по этому уравнению алгебраическое выражение

$$P = A + Bz + Cz^2 - Dz^3 + \ldots + Nz^n$$

имеет два простых мнимых множителя, содержащихся в двойном множителе $f^2 + 2fz\cos\theta + z^2$. *Найти соответствующие слагаемые интеграла.*

РЕШЕНИЕ

Пусть эти два мнимых множителя суть $\alpha + z$ и $\beta + z$, так что

$$\alpha = f(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) \text{ и } \beta = f(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta),$$

так как

$$(\alpha + z)(\beta + z) = f^2 + 2fz\cos\theta + z^2.$$

Положим

$$P = (f^2 + 2fz\cos\theta + z^2)\,Q,$$

где

$$Q = A' + B'z + C'z^2 + \ldots + N'z^{n-2}.$$

Так как слагаемые интеграла, получающиеся из этих двух простых мнимых множителей, суть

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx + \frac{1}{\mathfrak{B}}e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx = v,$$

то надо эти мнимые значения привести к вещественному виду. Но $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ будут мнимыми количествами, которые получаются из выражения

$$(f\cos\theta \mp \sqrt{-1}\,f\sin\theta + z)\,Q,$$

если вместо z писать

$$-f\cos\theta \mp \sqrt{-1}\,f\sin\theta.$$

Выполнив эту подстановку, будем иметь

$$Q = A' - B'\cos\theta + C'f^2\cos 2\theta - D'f^3\cos 3\theta + \text{ и т. д.}$$
$$\mp\sqrt{-1}\,B'f\sin\theta \pm \sqrt{-1}\,C'f^2\sin 2\theta \mp \sqrt{-1}\,D'f^3\sin 3\theta \pm \text{ и т. д.}$$

Положим ради краткости

$$A' - B'f\cos\theta + C'f^2\cos 2\theta - D'f^3\cos 3\theta + \text{ и т. д.} = \mathfrak{M}$$

и

$$-B'f\sin\theta + C'f^2\sin 2\theta - D'f^3\sin 3\theta + \text{ и т. д.} = \mathfrak{N},$$

так что $Q = \mathfrak{M} \pm \mathfrak{N}\sqrt{-1}$, где из двух знаков верхний имеет силу для букв α и $\mathfrak{A}$, а нижний — для букв β и $\mathfrak{B}$. Таким образом, отсюда получаем

$$\mathfrak{A} = -2\sqrt{-1}\,f\sin\theta\,(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}) \text{ и } \mathfrak{B} = +2\sqrt{-1}\,f\sin\theta\,(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}),$$

и поэтому

$$2v\sqrt{-1}\,f\sin\theta = -\frac{e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx}{\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1}}+\frac{e^{-\beta x}\int e^{\beta x}X\,dx}{\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1}}.$$

Но мы имеем

$$e^{\alpha x}=e^{fx\cos\theta}\left[\cos(fx\sin\theta)+\sqrt{-1}\sin(fx\sin\theta)\right]$$

и

$$e^{\beta x}=e^{fx\cos\theta}\left[\cos(fx\sin\theta)-\sqrt{-1}\sin(fx\sin\theta)\right].$$

Пусть для краткости угол $fx\sin\theta=\varphi$, тогда

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{-1}\,v(\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2)\,f\sin\theta\\
&\quad=-\left(\mathfrak{M}-\mathfrak{N}\sqrt{-1}\right)e^{-fx\cos\theta}\left(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\left(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right)\\
&\quad+\left(\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1}\right)e^{-fx\cos\theta}\left(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right)\times\\
&\qquad\qquad\times\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\left(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi\right)\\
&\quad=e^{-fx\cos\theta}\,2\sqrt{-1}\,(\mathfrak{M}\sin\varphi+\mathfrak{N}\cos\varphi)\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\cos\varphi\\
&\quad-e^{-fx\cos\theta}\,2\sqrt{-1}\,(\mathfrak{M}\cos\varphi-\mathfrak{N}\sin\varphi)\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\sin\varphi.
\end{aligned}$$

В силу этого мы получим искомую часть интеграла в виде

$$v=\frac{1}{(\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2)\,f\sin\theta}\left\{\begin{aligned}&+e^{-fx\cos\theta}(\mathfrak{M}\sin\varphi+\mathfrak{N}\cos\varphi)\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\cos\varphi\\&-e^{-fx\cos\theta}(\mathfrak{M}\cos\varphi-\mathfrak{N}\sin\varphi)\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\sin\varphi\end{aligned}\right\},$$

где $\varphi=fx\sin\theta$.

СЛЕДСТВИЕ 1

1174. Стало быть, основная часть дела состоит здесь в определении мнимого выражения $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1}$, которое должно быть найдено из количества Q путем подстановки вместо z мнимого значения

$$-f\left(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\right),$$

и это получается удобным образом, поскольку вместо z^n следует писать

$$(-f)^n\left(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1175. Так как $Q=\frac{P}{f^2+2fz\cos\theta+z^2}$, то можно определить также из этого выражения с помощью той же подстановки мнимое количество $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1}$. Однако при этом следует заметить, что при указанной подстановке исчезают как числитель P, так и знаменатель. Отсюда очевидно, что значение этого выражения получается, как обычно, из такой дроби:

$$\frac{dP}{2(f\cos\theta+z)\,dz}=\frac{dP}{-2\sqrt{-1}\,f\sin\theta\,dz}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1176. Стало быть, поскольку

$$\frac{dP}{dz}=B+2Cz+3Dz^2+4Ez^3+\ldots+nNz^{n-1},$$

то, если положим

$$\mathfrak{P}=B-2Cf\cos\theta+3Df^2\cos 2\theta-4Ef^3\cos 3\theta+\ldots\pm nNf^{n-1}\cos(n-1)\theta,$$

$$\mathfrak{Q}=\quad -2Cf\sin\theta+3Df^2\sin 2\theta-4Ef^3\sin 3\theta+\ldots\pm nNf^{n-1}\sin(n-1)\theta,$$

так что, выполнив подстановку, будем иметь

$$\frac{dP}{dz}=\mathfrak{P}+\sqrt{-1}\,\mathfrak{Q},$$

мы получим

$$\mathfrak{M}+\sqrt{-1}\,\mathfrak{N}=\frac{\mathfrak{P}+\sqrt{-1}\,\mathfrak{Q}}{-2\sqrt{-1}\,f\sin\theta}=\frac{-\mathfrak{Q}+\sqrt{-1}\,\mathfrak{P}}{2f\sin\theta},$$

и отсюда

$$\mathfrak{M}=\frac{-\mathfrak{Q}}{2f\sin\theta}\text{ и }\mathfrak{N}=\frac{\mathfrak{P}}{2f\sin\theta}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

1177. Итак, мы непосредственно получаем выражение для слагаемого в интеграле, соответствующего двойному множителю $f^2+2fz\cos\theta+z^2$, исходя из количества P и из производных от него количеств $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$, причем полагаем $fx\sin\theta=\varphi$:

$$v=\frac{2e^{-fx\cos\theta}}{\mathfrak{P}^2+\mathfrak{Q}^2}\left\{\begin{aligned}&(\mathfrak{P}\cos\varphi-\mathfrak{Q}\sin\varphi)\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\cos\varphi\\&+(\mathfrak{P}\sin\varphi+\mathfrak{Q}\cos\varphi)\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\sin\varphi\end{aligned}\right\}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

1178. Итак, сколько бы двойных множителей ни имело выражение

$$P=A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{ и т. д.},$$

для каждого из них с помощью указанных правил легко определяются соответствующие слагаемые в интеграле, и так как это не мешает определять те слагаемые в интеграле, которые соответствуют простым множителям, равны ли те между собой или не равны, то, объединяя все эти слагаемые в одну сумму, мы получим полный интеграл предложенного дифференциального уравнения. Однако эти правила недостаточны, если среди двойных множителей два или большее число оказываются равными. Действительно, подобного рода случаи требуют особого рассмотрения, сходного с тем, которое было использовано в случае двух или большего числа равных между собой простых множителей. Все же, чтобы не растягивать чрезмерно мое изложение, достаточно будет рассмотреть случай двух равных между собой двойных множителей, так как, исходя из этого, легко распространить метод на случай большего числа.

ЗАДАЧА 154

1179. *Предложено дифференциальное уравнение какого угодно порядка*

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Пусть образованное по этому уравнению алгебраическое выражение

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$$

имеет двойной множитель в квадрате

$$(f^2 + 2fz\cos\theta + z^2)^2.$$

Найти соответствующую ему часть интеграла.

РЕШЕНИЕ

Стало быть, полагаем $P = (f^2 + 2fz\cos\theta + z^2)\,Q$, и пусть

$$Q = A' + B'z + C'z^2 + \ldots + N'z^{n-1}.$$

Прежде всего примем, что не переменные[1]) мнимые количества суть

$$\alpha = f\left(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta\right)$$

и

$$\beta = f\left(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta\right),$$

так что

$$P = (\alpha + z)^2(\beta + z)^2\,Q.$$

На основании того, что было уже выше сказано (§ 1163) о двух простых, равных между собою множителях, мы принимаем, что выражение

$$\frac{P}{(\alpha+z)^2} = (\beta + z)^2\,Q,$$

когда в нем полагаем $z = -\alpha$, переходит в $\mathfrak{A}$, а выражение

$$\frac{P}{(\beta+z)^2} = (\alpha + z)^2\,Q,$$

когда в нем полагаем $z = -\beta$, переходит в $\mathfrak{B}$. Когда найдены эти количества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, получающиеся отсюда слагаемые в интеграле можно представить в виде

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}e^{-\alpha x}\int dx\int e^{\alpha x}X\,dx + \frac{1}{\mathfrak{B}}e^{-\beta x}\int dx\int e^{\beta x}X\,dx = v,$$

и, так как они содержат мнимые количества, их надлежит привести к вещественному виду. Как в предыдущей задаче, мы примем

$$\mathfrak{M} = A' - B'f\cos\theta + C'f^2\cos 2\theta - D'f^3\cos 3\theta + \text{ и т. д.},$$
$$\mathfrak{N} = \quad - B'f\sin\theta + C'f^2\sin 2\theta - D'f^3\sin 3\theta + \text{ и т. д.},$$

и количество Q при подстановке $z = -\alpha = -f\left(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta\right)$ переходит в $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}$, а при подстановке $z = -\beta = -f(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta)$ переходит в $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}$.

---

[1]) Non curantes.

А так как мы заодно имеем

$$(\beta-\alpha)^2=\left(-2\sqrt{-1}\,f\sin\theta\right)^2=-4f^2\sin^2\theta$$

и этому равно также $(\alpha-\beta)^2$, то

$$\mathfrak{A}=-4f^2\sin^2\theta\left(\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1}\right) \text{ и } \mathfrak{B}=-4f^2\sin^2\theta\left(\mathfrak{M}-\mathfrak{N}\sqrt{-1}\right).$$

Таким образом

$$-4f^2\sin^2\theta\,(\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2)\,v=\left(\mathfrak{M}-\mathfrak{N}\sqrt{-1}\right)e^{-\alpha x}\int dx\int e^{\alpha x}X\,dx$$
$$+\left(\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1}\right)e^{-\beta x}\int dx\int e^{\beta x}X\,dx.$$

Но, если положить $fx\sin\theta=\varphi$, то, как мы видели [§ 1173],

$$e^{\alpha x}=e^{fx\cos\theta}\left(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right),$$
$$e^{-\alpha x}=e^{-fx\cos\theta}\left(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi\right),$$
$$e^{\beta x}=e^{fx\cos\theta}\left(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi\right),$$
$$e^{-\beta x}=e^{-fx\cos\theta}\left(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right),$$

и вследствие этого правая часть предыдущего уравнения переходит в

$$+e^{-fx\cos\theta}\left[\mathfrak{M}\cos\varphi-\mathfrak{N}\sin\varphi-\mathfrak{N}\sqrt{-1}\cos\varphi-\mathfrak{M}\sqrt{-1}\sin\varphi\right]$$
$$\times\int dx\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\left(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi\right)$$
$$+e^{-fx\cos\theta}\left[\mathfrak{M}\cos\varphi-\mathfrak{N}\sin\varphi+\mathfrak{N}\sqrt{-1}\cos\varphi+\mathfrak{M}\sqrt{-1}\sin\varphi\right]$$
$$\times\int dx\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\left(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi\right),$$

и здесь мнимые слагаемые взаимно уничтожаются. Таким образом мы получаем

$$v=\frac{\left\{\begin{array}{l}-e^{-fx\cos\theta}(\mathfrak{M}\cos\varphi-\mathfrak{N}\sin\varphi)\int dx\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\cos\varphi\\ -e^{-fx\cos\theta}(\mathfrak{N}\cos\varphi+\mathfrak{M}\sin\varphi)\int dx\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\sin\varphi\end{array}\right\}}{2(\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2)f^2\sin^2\theta}$$

либо в таком виде:

$$v=\frac{-e^{-fx\cos\theta}}{2(\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2)f^2\sin\theta^2}\left\{\begin{array}{l}+(\mathfrak{M}\cos\varphi-\mathfrak{N}\sin\varphi)\int dx\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\cos\varphi\\ +(\mathfrak{M}\sin\varphi+\mathfrak{N}\cos\varphi)\int dx\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\sin\varphi\end{array}\right\},$$

и в этом выражении мнимые количества полностью устранены.

ЗАМЕЧАНИЕ

Это решение тоже нуждается в значительной поправке, сделать которую предоставляем усердию читателей[1]).

[1]) Правильное решение можно получить из решения, указанного в примечании к § 1163 [Л. Ш.].

СЛЕДСТВИЕ 1

1180. Так как мнимое выражение $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1}$ получается из количества Q, если вместо z написать

$$-f\left(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\right),$$

то при той же подстановке оно получается также из выражения

$$\frac{P}{(f^2+2fz\cos\theta+z^2)^3}.$$

Правда, здесь как числитель, так и знаменатель при этом исчезают.

СЛЕДСТВИЕ 2

1181. Следовательно, то же значение получается также из выражения

$$\frac{dP}{4\,dz\,[f^3\cos\theta+f^2z\,(1+2\cos^2\theta)+3fz^2\cos\theta+z^3]},$$

и так как здесь снова встречается то же самое затруднение, то оно получается также из выражения

$$\frac{d^2P}{4\,dz^2\,[f^2\,(1+2\cos^2\theta)+6fz\cos\theta+3z^2]}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1182. Во-первых, мы положим в знаменателе

$$z=-f(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$$

и получим тогда выражение

$$\frac{-d^2P}{8f^2\,dz^2\sin^2\theta}.$$

Затем, поскольку

$$\frac{d^2P}{2\,dz^2}=C+3Dz+6Ez^2+\ldots+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}Nz^{n-2},$$

мы положим для краткости

$$\mathfrak{P}=C-3Df\cos\theta+6Ef^2\cos 2\theta-\ldots\pm\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}Nf^{n-2}\cos(n-2)\,\theta,$$

$$\mathfrak{Q}=-3Df\sin\theta+6Ef^2\sin 2\theta-\ldots\pm\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}Nf^{n-2}\sin(n-2)\,\theta,$$

так что после подстановки

$$\frac{d^2P}{2\,dz^2}=\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sqrt{-1},$$

и поэтому

$$\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1}=\frac{-\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}\sqrt{-1}}{4f^2\sin^2\theta}.$$

Отсюда получаем

$$\mathfrak{M}=\frac{-\mathfrak{P}}{4f^2\sin^2\theta}\ \text{ и }\ \mathfrak{N}=\frac{-\mathfrak{Q}}{4f^2\sin^2\theta}.$$

Итак, можно подставить эти значения в найденную часть интеграла,

СЛЕДСТВИЕ 4

1183. После того, как выполнена подстановка, часть интеграла, соответствующая двойному множителю в квадрате $(f^2+2fz\cos\theta+z^2)^2$ получается в виде

$$v=\frac{2e^{-fx\cos\theta}}{\mathfrak{P}^2+\mathfrak{Q}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{P}\cos\varphi-\mathfrak{Q}\sin\varphi)\int dx\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\cos\varphi\\+(\mathfrak{P}\sin\varphi+\mathfrak{Q}\cos\varphi)\int dx\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\sin\varphi\end{array}\right\},$$

где φ обозначает угол $fx\sin\theta$.

ПОЯСНЕНИЕ

1184. Если сравнить это выражение с тем, которое мы нашли при решении предыдущей задачи, то едва ли будет нужда в фактическом проведении подобных рассмотрений для более сложных случаев. Так, если количество

$$P=A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots+Nz^n$$

имеет двойной множитель в кубе

$$(f^2+2fz\cos\theta+z^2)^3,$$

то количества $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ надо определить таким образом, чтобы

$$\mathfrak{P}=D-4Ef\cos\theta+10Ff^2\cos 2\theta-20Gf^3\cos 3\theta+\ldots\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}Nf^{n-3}\cos(n-3)\theta,$$

$$\mathfrak{Q}=-4Ef\sin\theta+10Ff^2\sin 2\theta-20Gf^3\sin 3\theta+\ldots\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}Nf^{n-3}\sin(n-3)\theta,$$

а когда они найдены, то соответствующая часть интеграла получается в виде

$$\frac{2e^{-fx\cos\theta}}{\mathfrak{P}^2+\mathfrak{Q}^2}\left\{\begin{array}{l}+(\mathfrak{P}\cos\Phi-\mathfrak{Q}\sin\Phi)\int dx\int dx\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\cos\Phi\\+(\mathfrak{P}\sin\Phi+\mathfrak{Q}\cos\Phi)\int dx\int dx\int e^{fx\cos\theta}X\,dx\sin\Phi\end{array}\right\}.$$

Теперь уже дальнейшее рассмотрение не связано ни с какими серьезными трудностями. Поэтому мне представляется, что решение уравнения, предложенного в этой главе, является завершенным настолько, что ничего большего желать нельзя. Впрочем, отличной иллюстрацией для этих рассуждений будет применение указанных правил к отдельным примерам, и следующая глава посвящается этому. Однако перед этим я укажу замечательное свойство рассмотренных уравнений общего вида, которое, как мне представляется, найдет большие приложения в анализе.

ЗАДАЧА 155

1185. *Предложено дифференциальное уравнение какого угодно порядка*

$$X=Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots+N\frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}}.$$

Если соответствующее ему алгебраическое выражение

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^{m+n}$$

состоит из двух множителей $P = QR$, пусть

$$Q = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \ldots + \mathfrak{N}z^m$$

и

$$R = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}z + \mathfrak{c}z^2 + \ldots + \mathfrak{n}z^n,$$

то требуется свести интегрирование этого уравнения к интегрированию двух более простых уравнений.

РЕШЕНИЕ

Если мы рассмотрим первую форму интеграла (§ 1158), то мы без труда придем к заключению, что после того, как проинтегрировано уравнение

$$X = \mathfrak{A}v + \mathfrak{B}\frac{dv}{dx} + \mathfrak{C}\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + \mathfrak{N}\frac{d^mv}{dx^m}$$

и определено значение v через x и X, значение для y в предложенном уравнении получается из уравнения

$$v = \mathfrak{a}y + \mathfrak{b}\frac{dy}{dx} + \mathfrak{c}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \mathfrak{n}\frac{d^ny}{dx^n}\,.$$

В самом деле, это можно показать сразу, подставляя найденные из последнего уравнения значения для v и его дифференциалов. Действительно, мы получаем

$$\begin{array}{llll} X = \mathfrak{A}\mathfrak{a}y & + \mathfrak{A}\mathfrak{b}\dfrac{dy}{dx} & + \mathfrak{A}\mathfrak{c}\dfrac{d^2y}{dx^2} & + \mathfrak{A}\mathfrak{d}\dfrac{d^3y}{dx^3} + \text{ и т. д.} \\ & + \mathfrak{B}\mathfrak{a} & + \mathfrak{B}\mathfrak{b} & + \mathfrak{B}\mathfrak{c} \\ & & + \mathfrak{C}\mathfrak{a} & + \mathfrak{C}\mathfrak{b} \\ & & & + \mathfrak{D}\mathfrak{a} \end{array}$$

А так как по условию имеем $P = QR$, то получаем, перемножая ряды Q и R, что обязательно

$$A = \mathfrak{A}\mathfrak{a},\quad B = \mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a},\quad C = \mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a} \text{ и т. д.},$$

так что это последнее уравнение сводится к предложенному уравнению.

СЛЕДСТВИЕ 1

1186. Если мы ограничимся только случаем простых множителей, то интеграл первого уравнения выразится с помощью членов такого вида:

$$v = \Gamma e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx \text{ и т. д.},$$

а интеграл второго уравнения с помощью членов вида

$$y = \Delta e^{-\beta x}\int e^{\beta x}v\,dx \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1187. Стало быть, если в отдельные члены второго интеграла подставим члены первого интеграла, то получим

$$y = \Gamma\Delta e^{-\beta x} \int e^{(\beta-\alpha)x}\, dx \int e^{\alpha x} X\, dx,$$

и это выражение приводится к следующему:

$$y = \frac{\Gamma\Delta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X\, dx - e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X\, dx\right).$$

Члены последнего вида непосредственно определяются с помощью интегрирования предложенного уравнения.

СЛЕДСТВИЕ 3

1188. Если бы здесь было $\beta = \alpha$, то без всяких приведений сразу получалось бы выражение

$$y = \Gamma\Delta e^{-\alpha x} \int dx \int e^{\alpha x} X\, dx,$$

найденное выше для случая двух простых, равных между собой множителей. Поскольку все дело сводится к разложению на множители, либо на простые, либо на двойные вещественные, то предложенное уравнение очень легко решить ранее изложенным способом.

ГЛАВА IV

ПРИЛОЖЕНИЕ ИЗЛОЖЕННОГО В ПРЕДЫДУЩЕЙ ГЛАВЕ МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ К ПРИМЕРАМ

ЗАДАЧА 156

1189. *Предложено такое дифференциальное уравнение:*

$$X = a^n y + \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Найти его полный интеграл.

РЕШЕНИЕ

Итак, здесь $P = a^n + z^n$. Тут прежде всего заметим, что если n — нечетное число, то будет простой множитель $a + z$, из которого получается в интеграле слагаемое

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} e^{-ax} \int e^{ax} X\, dx,$$

причем $\mathfrak{A}$ обозначает то значение, которое принимает выражение $\frac{P}{a+z}$, когда в нем полагаем $z = -a$, и так как это значение равно также $\frac{dP}{dz} = nz^{n-1}$, то, поскольку $n - 1$ есть число четное, будем иметь $\mathfrak{A} = na^{n-1}$. Таким образом это слагаемое интеграла

$$= \frac{1}{na^{n-1}} e^{-ax} \int e^{ax} X\, dx.$$

Все остальные множители имеют вид

$$a^2 - 2az \cos\theta + z^2, \quad \text{где} \quad \theta = \frac{(2i+1)\pi}{n},$$

причем i обозначает какое угодно целое число, а π обозначает угол, равный двум прямым. Из сравнения этого выражения с задачей 153 и следствием 1 получаем $f = -a$. А так как $z = a(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$, мы заключаем из выражения $\frac{dP}{dz}$, что

$$\mathfrak{P} = na^{n-1}\cos(n-1)\theta \;\text{ и }\; \mathfrak{Q} = na^{n-1}\sin(n-1)\theta.$$

А так как
$$\cos n\theta = -1 \text{ и } \sin n\theta = 0,$$
то будем иметь
$$\mathfrak{P} = -na^{n-1}\cos\theta \text{ и } \mathfrak{Q} = na^{n-1}\sin\theta.$$

В силу этого, если положим $fx\sin\theta = -ax\sin\theta = \varphi$, получим часть интеграла, соответствующую какому угодно двойному множителю, в виде
$$\frac{2e^{ax\cos\theta}}{na^{n-1}}\left\{\begin{aligned}&(-\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)\int e^{-ax\cos\theta}X\,dx\cos\varphi\\ &+(-\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi)\int e^{-ax\cos\theta}X\,dx\sin\varphi\end{aligned}\right\},$$
или же
$$\frac{-2e^{ax\cos\theta}}{na^{n-1}}\left(\cos(\theta-\varphi)\int e^{-ax\cos\theta}X\,dx\cos\varphi - \sin(\theta-\varphi)\int e^{-ax\cos\theta}X\,dx\sin\varphi\right),$$
а если подставить значение φ, то в виде
$$\frac{-2e^{ax\cos\theta}}{na^{n-1}}\left\{\begin{aligned}&\cos(\theta+ax\sin\theta)\int e^{-ax\cos\theta}X\,dx\cos(ax\sin\theta)\\ &+\sin(\theta+ax\sin\theta)\int e^{-ax\cos\theta}X\,dx\sin(ax\sin\theta)\end{aligned}\right\}.$$

Теперь же вместо θ последовательно подставляем углы $\frac{\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, $\frac{5\pi}{n}$, $\frac{7\pi}{n}$ и т. д., покуда они меньше, чем π, и все эти выражения объединяем в одну сумму, к которой следует сверх того добавить, в том случае когда n есть нечетное число, первоначально найденное выражение
$$\frac{1}{na^{n-1}}e^{-ax}\int e^{ax}X\,dx,$$
и это дает нам искомый интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 1

1190. В этом же случае, когда n есть нечетное число, последним значением для θ является π, что, однако, мы обязаны здесь опустить, так как при этом значении последнее слагаемое в интеграле получается в виде
$$\frac{2e^{-ax}}{na^{n-1}}\int e^{ax}X\,dx,$$
поскольку
$$ax\sin\theta = 0 \text{ и } \cos\theta = -1.$$

Оно получается удвоенным по сравнению с надлежащим значением, и причиной этому то, что при $\theta = \pi$ выражение $a^2 + 2az + z^2$ уже больше не является множителем, а множителем будет корень квадратный из него, $a + z$. В силу этого последний случай было необходимо трактовать отдельно.

СЛЕДСТВИЕ 2

1191. Если $X = 0$, то интегральные выражения переходят в произвольные постоянные, и множитель
$$a^2 - 2az\cos\theta + z^2$$

дает в интеграле слагаемое

$$\frac{-2e^{ax\cos\theta}}{na^{n-1}}[A\cos(\theta+ax\sin\theta)+\mathfrak{A}\sin(\theta+ax\sin\theta)],$$

которое приводится к виду

$$Ae^{ax\cos\theta}\cos(\zeta+ax\sin\theta),$$

где ζ обозначает какой угодно постоянный угол, как мы уже нашли выше [§ 1135].

ЗАДАЧА 157

1192. *Предложено следующее дифференциальное уравнение*:

$$X=a^n y-\frac{d^n y}{dx^n}.$$

Найти его полный интеграл.

РЕШЕНИЕ

Получающееся при этом алгебраическое выражение $P=a^n-z^n$ всегда имеет простой множитель $a-z$, откуда получается в интеграле слагаемое $\frac{1}{\mathfrak{A}}e^{ax}\int e^{-ax}X\,dx$, если $\mathfrak{A}=\frac{P}{z-a}$, когда $z=a$. Итак, поскольку имеем также $\mathfrak{A}=\frac{dP}{dz}=-nz^{n-1}$, то $\mathfrak{A}=-na^{n-1}$, и таким образом это слагаемое в интеграле будет

$$=\frac{-1}{na^{n-1}}e^{ax}\int e^{-ax}X\,dx.$$

Затем, если n — число четное, а следовательно, $n-1$ — число нечетное, то множителем будет также $a+z$, что дает в интеграле слагаемое

$$=\frac{1}{na^{n-1}}e^{-ax}\int e^{ax}X\,dx.$$

Все остальные множители в P являются двойными и имеют вид $a^2-2az\cos\theta+z^2$, считая угол $\theta=\frac{2i\pi}{n}$. При сравнении этого выражения с вышепримененным [§ 1173] в общем виде $f^2+2fz\cos\theta+z^2$ получаем $f=-a$. Из выражения $\frac{dP}{dz}=-nz^{n-1}$ надо получить $\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sqrt{-1}$, полагая $z=a(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$, откуда находим

$$\mathfrak{P}=-na^{n-1}\cos(n-1)\theta \text{ и } \mathfrak{Q}=-na^{n-1}\sin(n-1)\theta,$$

т. е., поскольку $\cos n\theta=1$ и $\sin n\theta=0$, имеем

$$\mathfrak{P}=-na^{n-1}\cos\theta \text{ и } \mathfrak{Q}=na^{n-1}\sin\theta.$$

Обозначая теперь угол $ax\sin\theta$ через φ, получим в интеграле (по § 1177) слагаемое

$$\frac{2e^{ax\cos\theta}}{na^{n-1}}\left\{\begin{aligned}&(-\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)\int e^{-ax\cos\theta}X\,dx\cos\varphi\\&+(-\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi)\int e^{-ax\cos\theta}X\,dx\sin\varphi\end{aligned}\right\},$$

которое, как и выше [§ 1189], приводится к такому виду:

$$\frac{-2e^{ax\cos\theta}}{na^{n-1}}\left\{\begin{aligned}&\cos(\theta+ax\sin\theta)\int e^{-ax\cos\theta}X\,dx\cos(ax\sin\theta)\\ &-\sin(\theta+ax\sin\theta)\int e^{-ax\cos\theta}X\,dx\sin(ax\sin\theta)\end{aligned}\right\}.$$

Здесь вместо θ надо теперь последовательно подставлять углы $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}$ и т. д., покуда они меньше, чем π, и все эти слагаемые вместе с первоначально найденным, а также вместе со вторым из полученных выше, если n есть четное число, будучи объединены в одну сумму, дадут искомый интеграл, т. е. значение для y.

СЛЕДСТВИЕ

1193. Поскольку двойной множитель в общем виде $a^2-2az\cos\theta+$ $+z^2$ не дает при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ простых вещественных множителей $a-z$ и $a+z$, а дает их квадраты, это является причиной того, что получающиеся в этих случаях слагаемые интеграла оказываются удвоенными по сравнению с теми, какие надлежит взять.

ЗАДАЧА 158

1194. *Предложено следующее дифференциальное уравнение:*

$$X=y+\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots+\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Найти его полный интеграл.

РЕШЕНИЕ

Получающееся при этом алгебраическое выражение имеет вид

$$P=1+z+z^2+z^3+z^4+\ldots+z^n,$$

и надо исследовать все его множители. Так как

$$P=\frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

то следует взять все множители выражения $1-z^{n+1}$, за исключением $1-z$. Отсюда, прежде всего, видно, что если $n+1$ — четное число, то простым множителем будет $1+z$, откуда получается в интеграле слагаемое $\frac{1}{\mathfrak{A}}e^{-x}\int e^xX\,dx$, где $\mathfrak{A}=\frac{P}{1+z}=\frac{1-z^{n+1}}{1-z^2}$, когда $z=-1$. Следовательно, получаем также $\mathfrak{A}=\frac{(n+1)z^n}{2z}$ и, таким образом, $\mathfrak{A}=\frac{1}{2}(n+1)$, так что соответствующее слагаемое в интеграле будет равно

$$\frac{2}{n+1}e^{-x}\int e^xX\,dx.$$

Что касается двойных множителей, они будут вида $1-2z\cos\theta+z^2$, если принять угол $\theta=\frac{2i\pi}{n+1}$, так что, по § 1173, $f=-1$. Надо рассмотреть выражение

$$\frac{dP}{dz}=\frac{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}}{(1-z)^2},$$

которое при подстановке $z=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ переходит в $\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sqrt{-1}$, так что имеем

$$\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sqrt{-1}$$
$$=\frac{1-(n+1)\cos n\theta+n\cos(n+1)\theta-(n+1)\sqrt{-1}\sin n\theta+n\sqrt{-1}\sin(n+1)\theta}{1-2\cos\theta+\cos 2\theta-2\sqrt{-1}\sin\theta+\sqrt{-1}\sin 2\theta}.$$

А поскольку

$$\sin(n+1)\theta=0 \text{ и } \cos(n+1)\theta=1,$$

получим

$$\sin n\theta=-\sin\theta \text{ и } \cos n\theta=\cos\theta,$$

и поэтому

$$\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sqrt{-1}=\frac{n+1-(n+1)\cos\theta+(n+1)\sqrt{-1}\sin\theta}{-2\cos\theta+2\cos\theta^2-2\sqrt{-1}\sin\theta(1-\cos\theta)},$$

то есть

$$\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sqrt{-1}=\frac{(n+1)(1-\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}{2(1-\cos\theta)(-\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta)}.$$

Умножаем числитель и знаменатель этой дроби на $-\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ и получаем

$$\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sqrt{-1}=\frac{-(n+1)(1+\cos\theta-2\cos\theta^2-\sqrt{-1}\sin\theta(1-2\cos\theta))}{2(1-\cos\theta)}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{P}=-\frac{1}{2}(n+1)(1+2\cos\theta)$$

и

$$\mathfrak{Q}=\frac{1}{2}(n+1)\frac{\sin\theta(1-2\cos\theta)}{1-\cos\theta},$$

откуда

$$\mathfrak{P}^2+\mathfrak{Q}^2=\frac{(n+1)^2}{2(1-\cos\theta)}.$$

Вместе с тем, полагая угол $-x\sin\theta=\varphi$, найдем, что

$$\mathfrak{P}\cos\varphi-\mathfrak{Q}\sin\varphi=\frac{-(n+1)(\cos(\theta-\varphi)-\cos(2\theta-\varphi))}{2(1-\cos\theta)},$$
$$\mathfrak{P}\sin\varphi+\mathfrak{Q}\cos\varphi=\frac{+(n+1)(\sin(\theta-\varphi)-\sin(2\theta-\varphi))}{2(1-\cos\theta)};$$

а поскольку

$$\cos a-\cos b=2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}$$

и

$$\sin a-\sin b=-2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2},$$

получаем отсюда

$$\mathfrak{P}\cos\varphi-\mathfrak{Q}\sin\varphi=\frac{-(n+1)\sin\frac{1}{2}(3\theta-2\varphi)}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

и

$$\mathfrak{P}\sin\varphi+\mathfrak{Q}\cos\varphi=\frac{-(n+1)\cos\frac{1}{2}(3\theta-2\varphi)}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

Таким образом, искомым слагаемым в интеграле будет

$$\frac{-4}{n+1} e^{x\cos\theta} \sin\frac{1}{2}\theta \left\{ \begin{array}{l} \sin\frac{1}{2}(3\theta+2x\sin\theta)\int e^{-x\cos\theta}X\,dx\cos(x\sin\theta) \\ -\cos\frac{1}{2}(3\theta+2x\sin\theta)\int e^{-x\cos\theta}X\,dx\sin(x\sin\theta) \end{array} \right\}.$$

Итак, мы будем последовательно подставлять вместо θ углы

$$\frac{2\pi}{n+1},\ \frac{4\pi}{n+1},\ \frac{6\pi}{n+1} \text{ и т. д.},$$

покуда они меньше, чем π, и все эти слагаемые соберем в одну сумму, к которой, если $n+1$ — четное число, прибавляется сверх того $\frac{2}{n+1}e^{-x}\int e^{x}X\,dx$, и таким образом будет получено значение y.

СЛЕДСТВИЕ 1

1195. Если предложенное уравнение продолжено до бесконечности, так что n — бесконечное число, то первые углы θ все будут бесконечно малыми и притом в бесконечно большом числе, пока отношение четного числа $2i$ к $n+1$ не начнет становиться конечным, а после этого для θ будут получаться конечные значения, возрастающие в арифметической прогрессии с разностью $\frac{2\pi}{n+1}$ вплоть до π, число которых также бесконечно.

СЛЕДСТВИЕ 2

1196. Пока угол θ бесконечно мал, порождаемая его значениями часть интеграла получается в виде

$$\frac{-\theta^2 e^{x}}{n+1}\left[(3+2x)\int e^{-x}X\,dx-2\int e^{-x}Xx\,dx\right],$$

и так как она делится на куб бесконечности, то даже бесконечное множество таких выражений следует считать исчезающим.

СЛЕДСТВИЕ 3

1197. Если бы мы имели $X=0$, так что надо было бы определить интеграл уравнения

$$0=y+\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots+\frac{d^ny}{dx^n},$$

то для произвольного слагаемого этого интеграла получаем

$$e^{x\cos\theta}\left[A\sin\frac{1}{2}(3\theta+2x\sin\theta)+\mathfrak{A}\cos\frac{1}{2}(3\theta+2x\sin\theta)\right],$$

либо в более простом виде

$$Ae^{x\cos\theta}\cos(\zeta+x\sin\theta).$$

Следовательно, если n — бесконечное число, то в качестве θ можно принять какой угодно угол и произвольным частным интегралом этого уравнения будет

$$y=Ae^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta+\zeta),$$

причем ζ также какой угодно угол.

ПОЯСНЕНИЕ

1198. Однако для дифференциального уравнения, продолженного до бесконечности,

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^4y}{dx^4} + \text{ и т. д.},$$

где X обозначает какую угодно функцию от x, интеграл можно выразить более удобным образом, чем с помощью суммы бесчисленного числа исчезающих слагаемых указанного выше вида. Такой вопрос требует более сложного исследования[1]), к тому же до сих пор, как нам представляется, для таких целей Анализ развит еще недостаточно[2]). Но в тех случаях, когда X есть целая рациональная функция, положим

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{и т. д.},$$

нет никаких трудностей, так как, принимая

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ и т. д. } + v,$$

мы всегда можем так определить эти коэффициенты α, β, γ и т. д., чтобы после подстановки получалось такое уравнение:

$$0 = v + \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^3v}{dx^3} + \text{ и т. д.}$$

Ему, в частности, удовлетворяет значение

$$v = Ae^{x \cos\theta} \cos(x \sin\theta + \zeta),$$

когда берем в качестве ζ и θ какие угодно углы. Но по данному значению для X находим

$$\alpha = a - b,\ \beta = b - 2c,\ \gamma = c - 3d,\ \delta = d - 4e,\ \varepsilon = e - 5f \text{ и т. д.}$$

И вообще, поскольку

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \text{ и т. д.},$$

то очевидно, что всегда, полагая $y = X - \frac{dX}{dx} + v$, исходное уравнение преобразуем в

$$0 = v + \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^3v}{dx^3} + \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 4

1199. Вот, следовательно, вопреки ожиданиям, полностью проинтегрировано продолженное до бесконечности дифференциальное уравнение

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^4y}{dx^4} + \text{и т. д.},$$

для которого, как мы уже знаем,

$$y = X - \frac{dX}{dx} + Ae^{x \cos\theta} (x \sin\theta + \zeta),$$

---

[1]) Quaestio est altioris indaginis.

[2]) Neque adhuc ad hunc scopum Analyseos fines satis videntur promoti.

и правую часть последнего равенства ввиду произвольности углов ζ и θ можно видоизменять до бесконечности. Этот вид интеграла надо считать эквивалентным тому весьма сложному виду, который получается из [предыдущего] решения[1]).

ЗАДАЧА 159

1200. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$X=y+\frac{n\,dy}{a\,dx}+\frac{n(n-1)\,d^2y}{1\cdot 2\cdot a^2\,dx^2}+\frac{n(n-1)(n-2)\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3a^3dx^3}+\text{ и т. д.}$$

Найти его полный интеграл, если n есть целое положительное число, так что число членов уравнения конечно.

РЕШЕНИЕ

Здесь надо рассмотреть алгебраическое выражение

$$P=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{z}{a}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{z^2}{a^2}+\text{ и т. д.}=\left(1+\frac{z}{a}\right)^n,$$

которое, следовательно, имеет только простые, равные между собою множители $z+a$. Итак, поскольку $\frac{P}{(a+z)^n}=\frac{1}{a^n}$, то по § 1163 сразу находим искомый интеграл

$$y=a^ne^{-ax}\int dx\int dx\int dx\int\ldots\int e^{ax}X\,dx,$$

пока число интегралов не станет равным значению показателя n. Но это выражение можно свести к простым интегралам с помощью приведения интегралов в общем виде, нам известного,

$$\int dx\int V\,dx=x\int V\,dx-\int Vx\,dx,$$

откуда следует

$$\int dx\int e^{ax}X\,dx=x\int e^{ax}X\,dx-\int e^{ax}Xx\,dx,$$

$$\int dx\int dx\int e^{ax}X\,dx=\frac{1}{2}x^2\int e^{ax}X\,dx-x\int e^{ax}Xx\,dx+\frac{1}{2}\int e^{ax}Xx^2\,dx,$$

$$\int dx\int dx\int dx\int e^{ax}X\,dx=$$

$$=\frac{x^3\int e^{ax}X\,dx-3x^2\int e^{ax}Xx\,dx+3x\int e^{ax}Xx^2\,dx-\int e^{ax}Xx^3\,dx}{1\cdot 2\cdot 3}$$

и т. д.

---

[1]) Продолженное до бесконечности дифференциальное уравнение, которое рассмотрено в этом и в предыдущем параграфе, допускает решение $y=X-\frac{dX}{dx}$, если $\frac{d^nX}{dx^n}$ стремится к нулю при n бесконечно возрастающем. Другого решения этого уравнения не существует. Действительно, уравнение § 1198, которому должно удовлетворять v после однократного дифференцирования, дает $v=0$, а указанная в § 1197 функция $Ae^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta+\zeta)$ в действительности не является интегралом этого уравнения, потому что в правой части уравнения при подстановке туда этой функции имеем расходящийся ряд.

Сопоставить с G. Plana (1781—1864), Nota sopra l'integrazione di un'equazione differenziale data da Euler, Memorie della Societa ital. delle Scienze, т. 18 (1820), стр. 44 [Л. Ш.].

А так как число знаков интеграла $=n$, то мы заключаем, что

$$y=\frac{a^n e^{-ax}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\left\{\begin{array}{l} x^{n-1}\int e^{ax}X\,dx-\frac{n-1}{1}x^{n-2}\int e^{ax}Xx\,dx \\ +\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}x^{n-3}\int e^{ax}Xx^2\,dx-\text{ и т. д.}\end{array}\right\};$$

и очевидно, что этот интеграл является полным, поскольку каждый отдельный интеграл содержит произвольное постоянное.

СЛЕДСТВИЕ 1

1201. Итак, если $X=0$, то полным интегралом предложенного дифференциального уравнения будет

$$y=e^{-ax}(Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+Dx^{n-4}+\ldots+Mx+N),$$

где число произвольных постоянных A, B, C и т. д. также $=n$.

СЛЕДСТВИЕ 2

1202. Если число n бесконечно, то количество a также принимается бесконечным, а именно $a=nc$; уравнение, которое надо интегрировать, продолжается до бесконечности, и будем иметь

$$X=y+\frac{dy}{c\,dx}+\frac{d^2y}{1\cdot 2c^2\,dx^2}+\frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3c^3\,dx^3}+\text{ и т. д.}$$

Однако интегральное уравнение в применении к этому случаю не дает ничего определенного[1]).

СЛЕДСТВИЕ 3

1203. Однако какой бы функцией от x ни было y, верно то, что если вместо x писать $x+\frac{1}{c}$, она переходит в

$$y+\frac{dy}{c\,dx}+\frac{d^2y}{1\cdot 2c^2\,dx^2}+\frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3c^3\,dx^3}+\text{ и т. д.},$$

а так как это выражение должно быть $=X$, то, наоборот, очевидно, что y равно такой функции от x, которая получается из X, если там вместо x писать $x-\frac{1}{c}$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

1204. Для того чтобы это было яснее видно, я замечу, что если бы было предложено какое угодно уравнение следующего вида:

$$X=Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ и т. д.},$$

то всегда можно найти без какого бы то ни было интегрирования его приближенный частный интеграл таким образом: положим

$$y=\alpha X+\beta\frac{dX}{dx}+\gamma\frac{d^2X}{dx^2}+\delta\frac{d^3X}{dx^3}+\text{ и т. д.}$$

[1]) Nullam lucem foeneratur.

Выполнив эту подстановку, будем иметь

$$\begin{array}{llll} X = A\alpha X + A\beta \dfrac{dX}{dx} + A\gamma \dfrac{d^2X}{dx^2} + A\delta \dfrac{d^3X}{dx^3} + \text{ и т. д.}, \\ \qquad\qquad\quad + B\alpha \qquad + B\beta \qquad + B\gamma \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + C\alpha \qquad + C\beta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + D\alpha \end{array}$$

и коэффициенты α, β, γ, δ и т. д. определяются так: $\alpha = \frac{1}{A}$, а остальные:

$$\beta = \frac{-B\alpha}{A} = \frac{-B}{A^2},$$

$$\gamma = \frac{-C\alpha - B\beta}{A} = \frac{-C}{A^2} + \frac{B^2}{A^3},$$

$$\delta = \frac{-D\alpha - C\beta - B\gamma}{A} = \frac{-D}{A^2} + \frac{2BC}{A^3} - \frac{B^3}{A^4},$$

$$\varepsilon = \frac{-E\alpha - D\beta - C\gamma - B\delta}{A} = \frac{-E}{A^2} + \frac{2BD + C^2}{A^3} - \frac{3B^2C}{A^4} + \frac{B^4}{A^5}$$

и т. д.

Если это применить к нашей задаче, то получаем

$$y = X - \frac{n\,dX}{1a\,dx} + \frac{n(n+1)\,d^2X}{1\cdot 2a^2\,dx^2} - \frac{n(n+1)(n+2)\,d^3X}{1\cdot 2\cdot 3a^3\,dx^3} + \text{ и т. д.}$$

Отсюда в том случае, когда $n = \infty$ и $a = nc$, заключаем, что

$$y = X - \frac{dX}{1c\,dx} + \frac{d^2X}{1\cdot 2c^2\,dx^2} - \frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3c^3\,dx^3} + \text{ и т. д.},$$

и это выражение, хотя и продолжено до бесконечности, определяет, очевидно, ту функцию от x, которая получается из X, если вместо x писать $x - \frac{1}{c}$. И если мы уже эту новую функцию обозначим через X', а также положим $y = X' + v$, то уравнение Следствия 2 переходит в уравнение

$$0 = v + \frac{dv}{c\,dx} + \frac{d^2v}{1\cdot 2c^2\,dx^2} + \frac{d^3v}{1\cdot 2\cdot 3c^3\,dx^3} + \text{ и т. д.},$$

произвольным частным интегралом которого является $v = Ae^{-ncx}x^m$, причем n — бесконечное число, а m — целое положительное число[1]).

---

[1]) Выражение $v + \frac{dx}{c\,dx} + \frac{d^2v}{1\cdot 2c^2\,dx^2} +$ и т. д. получается из функции v, если вместо x написать $x + \frac{1}{c}$, вследствие чего уравнение, которому должно удовлетворять v, не допускает никакого другого решения, кроме $v = 0$. В примерах, рассмотренных в следующих параграфах: 1209, 1212, 1217, 1224, ошибка, допущенная в §§ 1199, 1204, не сказывается; выведенные там (§ 1217) алгебраические уравнения представляют ряды, которые всегда сходятся и имеют бесконечное число корней [Л. Ш.].

ПОЯСНЕНИЕ 2

1205. Изложенное приводит меня к следующим соображениям относительно суммирования рядов. А именно, пусть имеем некоторый ряд

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & x \\ A, & B, & C, & D, & \ldots, & T, \end{matrix}$$

член которого, соответствующий значку x, пусть будет какая угодно функция T от x. Обозначим сумму всех этих членов

$$A+B+C+D+\ldots+T=y.$$

Но, очевидно, y есть такая функция от x, что если в ней вместо x писать $x-1$, то получается та же самая сумма y без последнего члена T[1]), а именно $y-T$. Но если вместо x пишем $x-1$, то функция y переходит в

$$y-\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{1\cdot 2\,dx^2}-\frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3}+\quad \text{и т. д.},$$

и отсюда получается уравнение

$$T=\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{1\cdot 2\,dx^2}+\frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3}-\frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4}+\quad \text{и т. д.},$$

которое после одного интегрирования, если обозначить $\int T\,dx=X$, становится

$$X=y-\frac{dy}{1\cdot 2\,dx}+\frac{d^2y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^2}-\frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^3}+\quad \text{и т. д.},$$

и его, как мы видим, надлежит интегрировать таким же образом, каким мы интегрировали вышеприведенное несколько более общее уравнение.

ЗАДАЧА 160

1206. *Предложено следующее дифференциальное уравнение:*

$$X=\frac{ny}{a}-\frac{n(n-1)\,dy}{1\cdot 2a^2\,dx}+\frac{n(n-1)(n-2)\,d^2y}{1\cdot 2\cdot 3a^3\,dx^2}-\quad \text{и т. д.}$$

Найти его полный интеграл.

РЕШЕНИЕ

Образуем соответствующее алгебраическое количество

$$P=\frac{n}{a}-\frac{n(n-1)z}{1\cdot 2a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)z^2}{1\cdot 2\cdot 3a^3}-\quad \text{и т. д.}=\frac{1-\left(1-\frac{z}{a}\right)^n}{z},$$

т. е. $P=\dfrac{a^n-(a-z)^n}{a^nz}$, и любой его двойной множитель будет иметь вид

$$a^2-2a(a-z)\cos 2\zeta+(a-z)^2,$$

причем угол $2\zeta=\dfrac{2i\pi}{n}$. Но это выражение переходит в

$$2a^2(1-\cos 2\zeta)-2az(1-\cos 2\zeta)+z^2,$$

[1]) Termino ultimo T mulctata.

то есть в

$$4a^2\sin^2\zeta - 4az\sin^2\zeta + z^2.$$

Из сравнения его с общим выражением $f^2 + 2fz\cos\theta + z^2$ получаем

$$f = 2a\sin\zeta \quad \text{и} \quad \cos\theta = -\sin\zeta,$$

откуда

$$\theta = 90^\circ + \zeta \quad \text{и} \quad \sin\theta = \cos\zeta,$$

где $\zeta = \frac{i\pi}{n}$. Для того же, чтобы определить соответствующее слагаемое в интеграле, рассмотрим выражение [§§ 1173—1177]

$$\frac{dP}{dz} = \frac{-a^n + [a + (n-1)z](a-z)^{n-1}}{a^n z^2},$$

где мы полагаем

$$z = -f(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

то есть

$$z = 2a\sin\zeta(\sin\zeta - \sqrt{-1}\cos\zeta) = a(1 - \cos 2\zeta - \sqrt{-1}\sin 2\zeta).$$

Таким образом

$$a - z = a(\cos 2\zeta + \sqrt{-1}\sin 2\zeta),$$

и мы получаем, что

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1}$$

$$= \frac{-1 + (n - (n-1)(\cos 2\zeta + \sqrt{-1}\sin 2\zeta))(\cos 2(n-1)\zeta + \sqrt{-1}\sin 2(n-1)\zeta)}{-4a^2\sin^2\zeta(\cos 2\zeta + \sqrt{-1}\sin 2\zeta)}.$$

А так как

$$\cos 2n\zeta = 1 \quad \text{и} \quad \sin 2n\zeta = 0,$$

то будем иметь

$$\cos 2(n-1)\zeta = \cos 2\zeta \quad \text{и} \quad \sin 2(n-1)\zeta = -\sin 2\zeta.$$

Отсюда

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{-n + n(\cos 2\zeta - \sqrt{-1}\sin 2\zeta)}{-4a^2\sin^2\zeta(\cos 2\zeta + \sqrt{-1}\sin 2\zeta)},$$

что приводится к такому виду:

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{n}{4a^2\sin^2\zeta}(\cos 2\zeta - \sqrt{-1}\sin 2\zeta + \sqrt{-1}\sin 4\zeta).$$

Отсюда заключаем, что

$$\mathfrak{P} = \frac{n}{4a^2\sin^2\zeta}(\cos 2\zeta - \cos 4\zeta) = \frac{n}{2a^2\sin\zeta}\sin 3\zeta,$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{-n}{4a^2\sin^2\zeta}(\sin 2\zeta - \sin 4\zeta) = \frac{n}{2a^2\sin\zeta}\cos 3\zeta,$$

так что

$$\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2 = \frac{n^2}{4a^4\sin^2\zeta},$$

и, положив

$$\varphi = 2ax\sin\zeta\cos\zeta = ax\sin 2\zeta,$$

найдем

$$\mathfrak{P}\cos\varphi - \mathfrak{Q}\sin\varphi = \frac{n}{2a^2\sin\zeta}\sin(3\zeta - \varphi)$$

и

$$\mathfrak{P}\sin\varphi+\mathfrak{Q}\cos\varphi=\frac{n}{2a^2\sin\zeta}\cos(3\zeta-\varphi).$$

Таким образом, отсюда получается такое слагаемое в интеграле:

$$\frac{4a^2\sin\zeta}{n}e^{2ax\sin^2\zeta}\left\{\begin{array}{c}\sin(3\zeta-\varphi)\int e^{-2ax\sin^2\zeta}X\,dx\cos\varphi\\ +\cos(3\zeta-\varphi)\int e^{-2ax\sin^2\zeta}X\,dx\sin\varphi\end{array}\right\}.$$

Здесь вместо ζ надо последовательно писать углы

$$\frac{\pi}{n},\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{3\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n}\quad \text{и т. д.},$$

пока они меньше прямого угла, а если число n — четное, то к этим слагаемым дополнительно следует прибавить

$$-\frac{2a^2}{n}e^{2ax}\int e^{-2ax}X\,dx,$$

что и даст правильное значение для y.

СЛЕДСТВИЕ 1

1207. Если $X=0$, то слагаемое в интеграле, которое порождается каким-либо из углов $\zeta=\frac{i\pi}{n}$, получается в виде

$$e^{2ax\sin^2\zeta}(A\sin(3\zeta-ax\sin 2\zeta)+B\cos(3\zeta-ax\sin 2\zeta)),$$

либо в таком виде:

$$Ae^{2ax\sin^2\zeta}\sin(\alpha+ax\sin 2\zeta),$$

причем α обозначает какой угодно постоянный угол.

СЛЕДСТВИЕ 2

1208. Если, после того как найден какой-либо частный интеграл $y=V$, удовлетворяющий предложенному уравнению, мы положим $y=V+v$, то получится следующее уравнение:

$$0=\frac{nv}{a}-\frac{n(n-1)\,dv}{1\cdot 2a^2dx}+\frac{n(n-1)(n-2)\,d^2v}{1\cdot 2\cdot 3a^3\,dx^2}-\quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, полным интегралом будет

$$y=V+Ae^{2ax\sin^2\zeta}\sin(\alpha+ax\sin 2\zeta),$$

причем в последней части этого равенства производится суммирование по всем значениям ζ [1]).

СЛЕДСТВИЕ 3

1209. Если мы примем $n=\infty$ и $a=n$, так что получится продолженное до бесконечности дифференциальное уравнение вида

$$X=y-\frac{dy}{1\cdot 2\,dx}+\frac{d^2y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^2}-\frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^3}+\frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,dx^4}-\quad \text{и т. д.},$$

---

[1]) ... ultima hac parte secundum omnes valores ipsius ζ multiplicata.

то y будет выражать сумму прогрессии, общим членом которой, соответствующим индексу x, является $T=\frac{dX}{dx}$. Следовательно, пока угол $\zeta=\frac{i\pi}{n}$ бесконечно мал, произвольным слагаемым в интеграле, поскольку $\varphi=2i\pi x$, будет

$$4i\pi e^{\frac{2i^2\pi^2}{n}x}\left\{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{3i\pi}{n}-2i\pi x\right)\int e^{\frac{-2i^2\pi^2}{n}x} X\,dx\cos(2i\pi x) \\ +\cos\left(\frac{3i\pi}{n}-2i\pi x\right)\int e^{\frac{-2i^2\pi^2}{n}x} X\,dx\sin(2i\pi x) \end{array}\right\},$$

а если мы опустим исчезающие количества, то

$$4i\pi\left[\cos(2i\pi x)\int X\,dx\sin(2i\pi x)-\sin(2i\pi x)\int X\,dx\cos(2i\pi x)\right].$$

Если здесь подставлять вместо i последовательно все целые числа 1, 2, 3 и т. д., то сумма всех получающихся таким образом выражений даст правильное и полное значение y.

ПОЯСНЕНИЕ

1210. Для предложенного уравнения можно найти частный интеграл с помощью ранее указанного метода в виде ряда дифференциалов, полагая

$$y=AX+\frac{B\,dX}{dx}+\frac{C\,d^2X}{dx^2}+\frac{D\,d^3X}{dx^3}+\frac{E\,d^4X}{dx^4}+\text{ и т. д.}$$

Действительно, выполнив подстановку, находим

$$A=\frac{a}{n},\quad B=\frac{n-1}{2n},\quad C=\frac{n^2-1}{12an},\quad D=\frac{n^2-1}{24a^2n},$$

$$E=\frac{-(n^2-1)(n^2-19)}{720a^3n}\quad\text{и т. д.},$$

но трудно в общем случае указать закон построения этого ряда. Правда, в случае $n=\infty$ и $a=n$, который, прежде всего, заслуживает быть особенно отмеченным в учении о прогрессиях, эти коэффициенты получаются такими:

$$A=1,\quad B=\frac{1}{2},\quad C=\frac{1}{12},\quad D=0,\quad E=\frac{-1}{720}\quad\text{и т. д.}$$

Отсюда следует то же самое выражение, которое я когда-то[1]) указал в общем виде для суммы. Но и когда получено это выражение для суммы, которая пусть будет $=V$, все же надлежит указать, что уравнение $y=V$ является только частным интегралом предложенного уравнения. Впрочем, полный интеграл легко получить, если только мы прибавим к V все выражения вида $A\sin(\alpha+2i\pi x)$, причем вместо i последовательно надо писать все числа 1, 2, 3, 4 и т. д., а угол α может быть

---

[1]) См. работы Эйлера № 25 и № 47 по списку Энестрема: Methodus generalis summandi progressiones, Comment. acad. Sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, стр. 68 и Inventio summae seriei ex dato termino generali, Comment. acad. sc. Petrop 8 (1736) 1741, стр. 9, также в Opera Omnia, сер. I, том 14. Сопоставить также с L. Euleri Institutiones calculi differentialis, Part. II Cap. V—VII (Opera Omnia, сер. I, т. 10, стр. 309—395) [Л. Ш.].

выбран всякий раз по произволу. А что каждое из этих значений удовлетворяет уравнению

$$0=v-\frac{dv}{2dx}+\frac{d^2v}{6\,dx^2}-\frac{d^3v}{24\,dx^3}+\frac{d^4v}{120\,dx^4}-\frac{d^5v}{720\,dx^5}+\text{ и т. д.},$$

можно очень легко показать следующим образом. Положим ради краткости $2i\pi=m$, так что $v=\sin(\alpha+mx)$; после подстановок мы должны получить

$$0=\left\{\begin{array}{c}\sin(\alpha+mx)\left(1-\frac{m^2}{6}+\frac{m^4}{120}-\text{ и т. д}\right)\\ -\cos(\alpha+mx)\left(-\frac{m}{2}+\frac{m^3}{24}-\frac{m^5}{720}+\text{и т. д}\right)\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\sin(\alpha+mx)\frac{1}{m}\sin m\\ -\cos(\alpha+mx)\frac{1}{m}\cos(m-1)\end{array}\right\},$$

но так как $m=2i\pi$, то очевидно, что как $\sin m=0$, так и $\cos m-1=0$.

ЗАДАЧА 161

1211. *Предложено следующее дифференциальное уравнение:*

$$X=y+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{a^2\,dx^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^4y}{a^4\,dx^4}+\text{ и т. д.}$$

Найти его полный интеграл.

РЕШЕНИЕ

Здесь надо образовать такое алгебраическое количество:

$$P=1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{z^2}{a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{z^4}{a^4}+\text{ и т. д.}$$

Оно, очевидно, приводится к следующему виду:

$$P=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{a}\right)^n+\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{a}\right)^n=\frac{(a+z)^n+(a-z)^n}{2a^n},$$

и его любой трехчленный множитель будет вида

$$(a+z)^2-2(a^2-z^2)\cos 2\zeta+(a-z)^2,$$

где полагаем

$$2\zeta=\frac{(2i+1)\pi}{n},\quad\text{т. е.}\quad \zeta=\frac{(2i+1)\pi}{2n}.$$

Но это выражение переходит в

$$2a^2(1-\cos 2\zeta)+2z^2(1+\cos 2\zeta)=4a^2\sin^2\zeta+4z^2\cos^2\zeta,$$

и этот общий множитель представится в виде

$$a^2\operatorname{tg}^2\zeta+z^2,$$

откуда, сравнивая с общим видом

$$f^2+2fz\cos\theta+z^2,$$

находим

$$f=-a\operatorname{tg}\zeta\quad\text{и}\quad\theta=90^\circ.$$

Отсюда получаем

$$\varphi = -ax\,\mathrm{tg}\,\zeta \quad (\S\ 1177),$$

и то значение, которое надо подставить вместо z, будет

$$-f(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = a\,\mathrm{tg}\,\zeta\sqrt{-1}.$$

При этом

$$\frac{dP}{dz} = \frac{n(a+z)^{n-1} - n(a-z)^{n-1}}{2a^n}$$

переходит в $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1}$, следовательно,

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{n}{2a}\left[\left(1+\mathrm{tg}\,\zeta\sqrt{-1}\right)^{n-1} - \left(1-\mathrm{tg}\,\zeta\sqrt{-1}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{n}{2a\cos^{n-1}\zeta}\left[\cos(n-1)\zeta + \sqrt{-1}\sin(n-1)\zeta - \cos(n-1)\zeta + \sqrt{-1}\sin(n-1)\zeta\right].$$

Таким образом $\mathfrak{P} = 0$ и $\mathfrak{Q} = \frac{n\sin(n-1)\zeta}{a}$. Но так как $n\zeta = \frac{2i+1}{2}\pi$, откуда $\cos n\zeta = 0$ и $\sin n\zeta = \pm 1$, в соответствии с тем, будет ли i четным или нечетным числом, мы получаем $\sin(n-1)\zeta = \pm\cos\zeta$, и поэтому $\mathfrak{Q} = \frac{\pm n}{a\cos^{n-2}\zeta}$.

В силу этого, поскольку $\cos\theta = 0$, из нашего множителя получается в интеграле слагаемое

$$\pm\frac{2a\cos^{n-2}\zeta}{n}\left(\cos\varphi\int X\,dx\sin\varphi - \sin\varphi\int X\,dx\cos\varphi\right),$$

или же, так как $\varphi = -ax\,\mathrm{tg}\,\zeta$,

$$\pm\frac{2a\cos^{n-2}\zeta}{n}\left\{\begin{array}{l}\sin(ax\,\mathrm{tg}\,\zeta)\int X\,dx\cos(ax\,\mathrm{tg}\,\zeta)\\ -\cos(ax\,\mathrm{tg}\,\zeta)\int X\,dx\sin(ax\,\mathrm{tg}\,\zeta)\end{array}\right\}.$$

Здесь вместо ζ подставляем последовательно углы

$$\frac{\pi}{2n},\quad \frac{3\pi}{2n},\quad \frac{5\pi}{2n},\quad \frac{7\pi}{2n} \text{ и т. д.},$$

покуда они меньше прямого, причем их надо поочередно писать со знаком $+$ и $-$. Все эти слагаемые, объединенные в одну сумму, дадут полное значение y, если только последнее слагаемое, получающееся при угле $= \frac{\pi}{2}$, что будет иметь место, если n — нечетное число, берется только в половинном размере [§ 1190].

СЛЕДСТВИЕ 1

1212. Мы сразу применим вышеизложенное к случаю $n = \infty$ и $a = nc$, т. е. предложим такое дифференциальное уравнение:

$$X = y + \frac{d^2y}{1\cdot 2c^2dx^2} + \frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4c^4dx^4} + \frac{d^6y}{1\ldots 6c^6dx^6} + \text{ и т. д.}$$

Поскольку здесь значения ζ бесконечно малы, будем иметь

$$\cos\zeta = 1 \text{ и } \mathrm{tg}\,\zeta = \zeta = \frac{(4i\pm 1)\pi}{2n},$$

откуда

$$ax\,\mathrm{tg}\,\zeta = (4i\pm 1)\,cx\frac{\pi}{2},$$

и вместо этого угла будем писать ω. Следовательно, какое угодно слагаемое интеграла будет вида

$$\pm 2c\left(\sin\omega\int X\,dx\cos\omega-\cos\omega\int X\,dx\sin\omega\right),$$

причем оба знака берутся попеременно[1]).

СЛЕДСТВИЕ 2

1213. Если только положим угол $\frac{\pi}{2}cx=\varphi$, то весь интеграл выразится таким образом:

$$\begin{aligned}\frac{y}{2c}=&+\sin\varphi\int X\,dx\cos\varphi-\cos\varphi\int X\,dx\sin\varphi\\&-\sin3\varphi\int X\,dx\cos3\varphi+\cos3\varphi\int X\,dx\sin3\varphi\\&+\sin5\varphi\int X\,dx\cos5\varphi-\cos5\varphi\int X\,dx\sin5\varphi\\&-\sin7\varphi\int X\,dx\cos7\varphi+\cos7\varphi\int X\,dx\sin7\varphi\end{aligned}$$

и т. д.,

продолжая так до бесконечности.

СЛЕДСТВИЕ 3

1214. Если положить $C=b\sqrt{-1}$, так что получается бесконечное уравнение

$$X=y-\frac{d^2y}{1\cdot2b^2dx^2}+\frac{d^4y}{1\ldots4b^4dx^4}-\frac{d^6y}{1\ldots6b^6dx^6}+\text{ и т. д.},$$

а угол $\frac{\pi}{2}bx$ обозначить через ψ, то полным интегралом будет

$$\begin{aligned}\frac{y}{b}=&+e^{-\psi}\int e^{\psi}X\,dx-e^{\psi}\int e^{-\psi}X\,dx\\&-e^{-3\psi}\int e^{3\psi}X\,dx+e^{3\psi}\int e^{-3\psi}X\,dx\\&+e^{-5\psi}\int e^{5\psi}X\,dx-e^{5\psi}\int e^{-5\psi}X\,dx\end{aligned}$$

и т. д.

ПОЯСНЕНИЕ

1215. Если по изложенному выше [§ 1204] методу будем искать для уравнения следствия 1 частный интеграл, выраженный через дифференциалы от X, и с этой целью положим

$$y=AX-\frac{B\,d^2X}{c^2dx^2}+\frac{Cd^4X}{c^4dx^4}-\frac{D\,d^6X}{c^6dx^6}+\frac{Ed^8X}{c^8dx^8}-\text{ и т. д.},$$

то мы найдем такие значения коэффициентов:

$$A=1,\quad B=\frac{1}{1\cdot2},\quad C=\frac{1}{1\ldots4},\quad D=\frac{61}{1\ldots6},$$

$$E=\frac{1385}{1\ldots8}=,\quad F=\frac{50\,521}{1\ldots10}\quad\text{и т. д.}$$

[1]) Ubi signa ambigua sibi mutuo respondent.

Если обозначим этот частный интеграл через V, а угол $\frac{\pi}{2}cx$ через φ, то полным интегралом будет

$$y = V + A\sin(\alpha+\varphi) + B\sin(\beta+3\varphi) + \\ + C\sin(\gamma+5\varphi) + D\sin(\delta+7\varphi) + \text{ и т. д.}$$

ЗАДАЧА 162

1216. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$X = y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2a^2}\frac{dy}{dx} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4a^4}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{n\ldots(n-5)}{1\ldots 6a^6}\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ и т. д.}$$

Найти его полный интеграл.

РЕШЕНИЕ

Здесь надо построить алгебраическое количество

$$P = 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2a^2}z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4a^4}z^2 + \text{ и т. д.}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n.$$

Оно получается из предыдущего, если вместо z^2 писать z. Принимая угол $\zeta = \frac{2i+1}{2n}\pi$, получим какой угодно множитель в виде $a^2\operatorname{tg}^2\zeta + z$, так что все простые множители этого выражения являются действительными. Таким образом, из сравнения этого множителя с выражением $\alpha + z$ получим $\alpha = a^2\operatorname{tg}^2\zeta$ и, принимая $\mathfrak{A} = \frac{P}{\alpha+z}$ при $z = -\alpha$, найдем слагаемое интеграла, получающееся из этого множителя в виде $\frac{1}{\mathfrak{A}}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx$. Но так как P исчезает при $z = -\alpha$, будем иметь также $\mathfrak{A} = \frac{dP}{dz}$. Дифференцируя же, находим

$$\frac{dP}{dz} = \frac{n}{4a\sqrt{z}}\left[\left(1+\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^{n-1} - \left(1-\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^{n-1}\right].$$

Итак, поскольку следует положить $\frac{\sqrt{z}}{a} = \operatorname{tg}\zeta\sqrt{-1}$, будем иметь

$$1 + \frac{\sqrt{z}}{a} = \frac{\cos\zeta + \sqrt{-1}\sin\zeta}{\cos\zeta} \quad\text{и}\quad 1 - \frac{\sqrt{z}}{a} = \frac{\cos\zeta - \sqrt{-1}\sin\zeta}{\cos\zeta},$$

откуда

$$\mathfrak{A} = \frac{n\,2\sqrt{-1}\sin(n-1)\zeta}{4a^2\operatorname{tg}\zeta\sqrt{-1}\cos^{n-1}\zeta} = \frac{n\sin(n-1)\zeta}{2a^2\sin\zeta\cos^{n-2}\zeta}.$$

Мы уже отмечали, что $\sin n\zeta = \sin(2i+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$ (где верхний знак имеет силу при четности i, а нижний — при нечетности), а тогда $\cos n\zeta = 0$, откуда $\sin(n-1)\zeta = \pm\cos\zeta$, вследствие чего получаем

$$\mathfrak{A} = \frac{\pm n}{2a^2\sin\zeta\cos^{n-3}\zeta},$$

и искомое слагаемое в интеграле находим в виде

$$\pm \frac{2a^2 \sin\zeta \cos^{n-3}\zeta}{n} e^{-a^2 \operatorname{tg}^2 \zeta x} \int e^{a^2 \operatorname{tg}^2 \zeta} X \, dx.$$

Теперь же последовательно приписываем ζ значения

$$\frac{\pi}{2n}, \quad \frac{3\pi}{2n}, \quad \frac{5\pi}{2n}, \quad \frac{7\pi}{2n} \text{ и т. д.,}$$

пока они не превышают прямого угла, и все эти слагаемые интеграла, будучи объединены в одну сумму, дадут полный интеграл, т. е. значение y.

СЛЕДСТВИЕ 1

1217. Если положим $n = \infty$ и $a = nc$, то предложенное уравнение будет продолжено до бесконечности, и мы получаем

$$X = y + \frac{dy}{1\cdot 2c^2\, dx} + \frac{d^2y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4c^4\, dx^2} + \frac{d^3y}{1 \ldots 6c^6\, dx^3} + \text{ и т. д.}$$

Возникающее отсюда алгебраическое выражение

$$P = 1 + \frac{z}{1\cdot 2c^2} + \frac{z^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4c^4} + \frac{z^3}{1 \ldots 6c^6} + \text{ и т. д.} = \frac{1}{2} e^{\frac{\sqrt{z}}{c}} + \frac{1}{2} e^{\frac{-\sqrt{z}}{c}}$$

и все его простые множители действительны. Так как ζ бесконечно мало, то $\operatorname{tg}\zeta = \zeta = \frac{2i+1}{2n}\pi$, откуда получаем общий вид множителей:

$$z + \frac{(2i+1)^2}{4}\pi^2 c^2 \quad \text{или же} \quad 1 + \frac{4z}{(2i+1)^2 \pi^2 c^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1218. Положим ради краткости угол

$$\frac{2i+1}{2}\pi = \theta,$$

тогда

$$a^2 \operatorname{tg}^2 \zeta = \theta^2 c^2$$

и, стало быть,

$$\cos\zeta = 1 \quad \text{и} \quad \frac{a^2 \sin\zeta}{n} = \theta c^2.$$

Поэтому слагаемое в интеграле будет вида

$$\pm 2\theta c^2 e^{-\theta^2 c^2 x} \int e^{\theta^2 c^2 x} X \, dx,$$

где вместо θ надо последовательно писать все такие углы, как

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{2}, \quad \frac{9\pi}{2} \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1219. Не имеет значения, берем ли мы здесь c^2 отрицательным или положительным, поэтому для бесконечного дифференциального уравнения

$$X = y + \frac{dy}{1\cdot 2b\, dx} + \frac{d^2y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4b^2 dx^2} + \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6b^3 dx^3} + \text{ и т. д.}$$

интегралом будет

$$y = 2\theta b e^{-\theta^2 bx} \int e^{\theta^2 bx} X\,dx,$$

где подставляем вместо θ последовательно все указанные углы, но уже без двузначности:

$$+\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{3\pi}{2}, \quad +\frac{5\pi}{2}, \quad -\frac{7\pi}{2} \text{ и т. д.}$$

Отсюда, если $X=0$, получаем частные интегралы вида

$$y = Ae^{-\theta^2 bx}.$$

ЗАДАЧА 163

1220. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$X = \frac{n\,dy}{a\,dx} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3a^3}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^5}\frac{d^3y}{dx^3} + \text{ и т. д.}$$

Найти его полный интеграл.

РЕШЕНИЕ

Хотя это уравнение после умножения на dx непосредственно интегрируется один раз, однако предпочтительно сохранить указанную форму, откуда следует, что

$$P = \frac{nz}{a} + \frac{n(n-1)(n-2)z^2}{1\cdot 2\cdot 3a^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)z^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^5} + \text{ и т. д.}$$

Это выражение, очевидно, можно представить и так:

$$P = \frac{\sqrt{z}}{2}\left[\left(1+\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n - \left(1-\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n\right],$$

причем сразу обнаруживается один его множитель z. Остальные же множители представляются в виде

$$\left(1+\frac{\sqrt{z}}{2}\right)^2 - 2\left(1-\frac{z}{a^2}\right)\cos 2\zeta + \left(1-\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^2;$$

если принять угол

$$2\zeta = \frac{2i\pi}{n}, \quad \text{т. е.} \quad \zeta = \frac{i\pi}{n},$$

это выражение переходит в

$$2(1-\cos 2\zeta) + \frac{2z}{a^2}(1+\cos 2\zeta).$$

Отсюда видно, что в общем случае множителем будет $a^2 \operatorname{tg}^2 \zeta + z$, что охватывает также и первый множитель z, если положить $i=0$. Отсюда, полагая $a^2 \operatorname{tg}^2 \zeta = \alpha$, находим слагаемое в интеграле, соответствующее этому множителю, в виде

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X\,dx,$$

если, положив

$$z = -a^2 \operatorname{tg}^2 \zeta, \quad \text{или} \quad \sqrt{z} = a \operatorname{tg} \zeta \sqrt{-1},$$

берем

$$\mathfrak{A} = \frac{dP}{dz} = \frac{1}{4\sqrt{z}} \left[\left(1 + \frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n - \left(1 - \frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n \right] + \frac{n}{4a} \left[\left(1 + \frac{\sqrt{z}}{a}\right)^{n-1} + \left(1 - \frac{\sqrt{z}}{a}\right)^{n-1} \right].$$

Но

$$\left(1 + \frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n = \frac{\cos n\zeta + \sqrt{-1} \sin n\zeta}{\cos^n \zeta}$$

и

$$\left(1 - \frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n = \frac{\cos n\zeta - \sqrt{-1} \sin n\zeta}{\cos^n \zeta},$$

поэтому

$$\mathfrak{A} = \frac{\sin n\zeta}{2a \operatorname{tg} \zeta \cos^n \zeta} + \frac{n \cos (n-1) \zeta}{2a \cos^{n-1} \zeta} = \frac{\pm n}{2a \cos^{n-2} \zeta},$$

поскольку $\sin n\zeta = 0$ и $\cos n\zeta = \pm 1$, соответственно тому, будет ли число i четным или нечетным. Поэтому какое угодно слагаемое в интеграле выразится таким образом:

$$\pm \frac{2a \cos^{n-2} \zeta}{n} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X \, dx,$$

где $\alpha = a^2 \operatorname{tg}^2 \zeta$. А теперь углу ζ последовательно надо приписывать значения

$$\frac{0\pi}{n}, \quad \frac{1\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{3\pi}{n} \quad \text{и т. д.},$$

покуда они не превышают прямого угла $\frac{\pi}{2}$, и все эти выражения с соответствующими знаками, будучи объединены в одну сумму, дадут полное значение y.

СЛЕДСТВИЕ 1

1221. Итак, первое слагаемое в интеграле порождается углом $= 0$, поэтому оно будет $\frac{2a}{n} \int X \, dx$, но вместо него, по указанным выше [§ 1190] соображениям относительно простых множителей, надо брать только его половину, так что этим первым слагаемым будет $\frac{a}{n} \int X \, dx$, что явствует также из того, что при $z = 0$ имеем, очевидно, $\frac{P}{z} = \frac{n}{a}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

1222. То же надо иметь в виду для последнего слагаемого, если оно порождается значением $\zeta = \frac{\pi}{2}$, что имеет место, когда n — четное число. Но так как в этом случае $\cos \zeta = 0$, то все это слагаемое в интеграле само собой исчезает.

СЛЕДСТВИЕ 3

1223. Если бы мы имели $X=0$, то для какого угодно слагаемого в интеграле мы получили бы $Ae^{-a^2 \operatorname{tg}^2 \zeta \cdot x}$, где A обозначает произвольное постоянное количество. В самом деле, уравнение

$$y = Ae^{-a^2 \operatorname{tg}^2 \zeta \cdot x}$$

было бы частным интегралом [предложенного] уравнения, если только полагаем угол

$$\zeta = \frac{i\pi}{n}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

1224. В силу этого, положив $n=\infty$ и $a=n\sqrt{b}$, мы можем проинтегрировать такое дифференциальное уравнение, продолженное до бесконечности:

$$\frac{X}{\sqrt{b}} = \frac{dy}{1\cdot b\,dx} + \frac{d^2y}{1\cdot 2\cdot 3b^2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5b^3\,dx^3} + \frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7b^4\,dx^4} + \text{ и т. д.},$$

а также уравнение, которое получается из него одним интегрированием:

$$\sqrt{b}\int X\,dx = \frac{y}{1} + \frac{dy}{1\cdot 2\cdot 3\,b\,dx} + \frac{d^2y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5b^2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7b^3\,dx^3} + \text{ и т. д.}$$

Действительно, поскольку угол $\zeta = \frac{i\pi}{n}$ бесконечно мал, будем иметь

$$\cos\zeta = 1 \quad \text{и} \quad a\operatorname{tg}\zeta = a\zeta = i\pi\sqrt{b}.$$

Следовательно,

$$\alpha = a^2\operatorname{tg}^2\zeta = i^2\pi^2 b;$$

и мы получим какое угодно слагаемое интеграла в виде

$$\pm 2\sqrt{b}\,e^{-i^2\pi^2 bx}\int e^{i^2\pi^2 bx} X\,dx.$$

Отсюда, беря первое получающееся при $i=0$ слагаемое в половинном размере, в силу указанных выше [§ 1190] соображений, получим полный интеграл

$$\frac{y}{\sqrt{b}} = \int X\,dx - 2e^{-\pi^2 bx}\int e^{\pi^2 bx} X\,dx + 2e^{-4\pi^2 bx}\int e^{4\pi^2 bx} X\,dx$$
$$- 2e^{-9\pi^2 bx}\int e^{9\pi^2 bx} X\,dx + 2e^{-16\pi^2 bx}\int e^{16\pi^2 bx} X\,dx - \text{ и т. д.}$$

ПРИМЕР

1225. *Пусть $n=6$ и $a=1$; таким образом, предлагается проинтегрировать уравнение*

$$X = \frac{6\,dy}{dx} + \frac{20\,d^2y}{dx^2} + \frac{6\,d^3y}{dx^3},$$

то есть

$$\int X\,dx = 6y + \frac{20\,dy}{dx} + \frac{6\,d^2y}{dx^2}.$$

Следовательно, значениями угла ζ и зависящих от него величин будут

$$\zeta=0,\quad 30^\circ,\quad 60^\circ,$$

$$\cos\zeta=1,\quad \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \frac{1}{2},$$

$$\alpha=0,\quad \frac{1}{3},\quad 3.$$

Отсюда получаем искомый интеграл

$$y=\frac{1}{6}\int X\,dx-\frac{3}{16}e^{-\frac{1}{3}x}\int e^{\frac{1}{3}x}X\,dx+\frac{1}{48}e^{-3x}\int e^{3x}X\,dx,$$

и тот, кто будет проверять, обнаружит, что этот интеграл удовлетворяет уравнению.

ГЛАВА V

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2\,d^2y}{dx^2} + \frac{Dx^3\,d^3y}{dx^3} + \frac{Ex^4\,d^4y}{dx^4} + \text{ и т. д.}$$

ЗАДАЧА 164

1226. *Предложено дифференциальное уравнение следующего вида:*

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2\,d^2y}{dx^2} + \frac{Dx^3\,d^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{Nx^n\,d^ny}{dx^n}.$$

Определить функцию от x, после умножения на которую это уравнение становится интегрируемым.

РЕШЕНИЕ

Как можно быстро установить, задача решается простой степенной функцией от x. Итак, пусть интегрируемым является уравнение

$$Xx^\lambda\,dx = Ax^\lambda y\,dx + Bx^{\lambda+1}\,dy + \frac{Cx^{\lambda+2}\,d^2y}{dx} + \ldots + \frac{Nx^{\lambda+n}\,d^ny}{dx^{n-1}},$$

а его интегралом —

$$\int Xx^\lambda\,dx = A'x^{\lambda+1}y + \frac{B'x^{\lambda+2}\,dy}{dx} + \frac{C'x^{\lambda+3}\,d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{M'x^{\lambda+n}\,d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

Так как дифференциал последнего выражения должен быть равен предыдущему, то мы приходим к таким соотношениям:

$$A = (\lambda+1)A', \quad \text{откуда} \quad (\lambda+1)A' = A,$$

$$B = (\lambda+2)B' + A', \quad \text{откуда} \quad (\lambda+1)(\lambda+2)B' = (\lambda+1)B - A,$$

$$C = (\lambda+3)C' + B', \quad \text{»} \quad (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)C' = (\lambda+1)(\lambda+2)C - (\lambda+1)B + A,$$

$$D = (\lambda+4)D' + C, \quad \text{»} \quad (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)D' = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)D - (\lambda+1)(\lambda+2)C + (\lambda+1)B - A$$

. . . .

$N = M'$ и т. д.

И действительно, следующие члены интеграла, в которые входят дифференциалы порядка d^ny и более высокого, должны исчезать, так как иначе интегрирование не удалось бы. Следовательно, поскольку в интеграле исчезает буква N', мы получаем уравнение

$$0=A-(\lambda+1)B+(\lambda+1)(\lambda+2)C-(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)D+\ldots$$
$$\pm(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)N,$$

из которого надо определить показатель λ искомой степени x^λ. Итак, надо образовать алгебраическое выражение

$$P=A+B(z-1)+C(z-1)(z-2)+D(z-1)(z-2)(z-3)+\ldots$$
$$+N(z-1)(z-2)(z-3)\ldots(z-n)$$

и отыскать все его простые множители, так чтобы

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)\text{ и т. д.},$$

принимая число этих множителей $=n$. Теперь любой множитель $z+\alpha$, будучи приравнен к нулю, дает значение $z=-\alpha$, откуда получаем степень x^α, после умножения на которую предложенное уравнение становится интегрируемым, и его интегралом будет

$$x^{-\alpha-1}\int x^\alpha X\,dx=A'y+\frac{B'x\,dy}{dx}+\frac{C'x^2\,d^2y}{dx^2}+\frac{D'x^3\,d^3y}{dx^3}+\ldots+\frac{Nx^{n-1}\,d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\,.$$

В последнем уравнении порядок дифференциалов на единицу ниже. При этом проинтегрированное уравнение определяется через предложенное таким образом, что

$$A=(\alpha+1)A',$$
$$B=(\alpha+2)B'+A';$$
$$C=(\alpha+3)C'+B',$$
$$D=(\alpha+4)D'+C'$$
$$\text{и т. д.},$$

пока мы не доходим до последнего коэффициента N, который в обоих уравнениях один и тот же.

СЛЕДСТВИЕ 1

1227. Так как проинтегрированное уравнение сходно с предложенным, то оно снова будет интегрируемым после умножения на некоторую степень x. Действительно, для того чтобы найти эту степень, надо рассмотреть следующее алгебраическое выражение:

$$Q=A'+B'(z-1)+C'(z-1)(z-2)+D'(z-1)(z-2)(z-3)+\ldots$$
$$+N(z-1)(z-2)\ldots(z-n+1).$$

Если какой-либо простой множитель этого выражения есть $z+\mu$, то x^μ будет той степенью x, которая делает уравнение интегрируемым.

СЛЕДСТВИЕ 2

1228. Поэтому, если предложенное уравнение становится интегрируемым при умножении на степень x^α, здесь надлежит прямо указать на то, что количество Q, образуемое по проинтегрированному уравнению, зависит от предыдущего количества P, образованного по предложенному уравнению, таким образом, что $Q=\frac{P}{\alpha+z}$, в силу того, что по условию $\alpha+z$ является множителем.

ПОЯСНЕНИЕ 1

1229. Для того чтобы доказать это замечательное свойство, а именно, что $P=(\alpha+z)Q$, нужно только помножить количество Q на $\alpha+z$. Впрочем, для того чтобы это заключение было легче усмотреть, при умножении каждого члена Q нужно представить множитель в виде суммы двух слагаемых. Так, для первого члена вместо $\alpha+z$ будем писать $(\alpha+1)+(z-1)$, для второго вместо $\alpha+z$ будем писать $(\alpha+2)+(z-2)$, для третьего — $(\alpha+3)+(z-3)$, для четвертого — $(\alpha+4)+(z-4)$ и т. д., так что произведение каждого члена на множитель представится в виде двух слагаемых. Всю эту выкладку я здесь прилагаю:

$$Q=A'+B'(z-1)+C'(z-1)(z-2)+D'(z-1)(z-2)(z-3)+\text{ и т. д.}$$

$$\text{Множитель}\quad \begin{array}{c|c|c|c} \alpha+1 & \alpha+2 & \alpha+3 & \alpha+4 \\ z-1 & z-2 & z-3 & z-4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Произв.}\quad & (\alpha+1)A'+A'(z-1)+B'(z-1)(z-2)+C'(z-1)(z-2)(z-3) \\ & +(\alpha+2)B'(z-1)+(\alpha+3)C'(z-1)(z-2)+ \\ & +(\alpha+4)D'(z-1)(z-2)(z-3)+\text{ и т. д.} \end{aligned}$$

При решении же мы видели, что

$$(\alpha+1)A'=A,\ (\alpha+2)B'+A'=B,\ (\alpha+3)C'+B'=C$$

и т. д., а потому указанное произведение представится в виде

$$A+B(z-1)+C(z-1)(z-2)+D(z-1)(z-2)(z-3)+\text{ и т. д.},$$

и значение этого выражения равно P; итак, доказано то упомянутое выше замечательное свойство, что $Q=\frac{P}{\alpha+z}$.

СЛЕДСТВИЕ 3

1230. Стало быть, если значение P после разложения на простые множители представлено в виде

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)\text{ и т. д.}$$

и в соответствии с множителем $\alpha+z$ предложенное уравнение умножается на x^α и интегрируется, а затем по проинтегрированному уравнению подобным же образом составляется значение Q, то будем иметь

$$Q=N(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)\text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 4

1231. Итак, проинтегрированное уравнение, после того как оно приведено к тому же виду, что и предложенное, причем полагаем

$$x^{-\alpha-1}\int x^\alpha X\,dx=X',$$

что дает

$$X'=A'y+\frac{B'x\,dy}{dx}+\frac{C'x^2\,d^2y}{dx^2}+\frac{D'x^3\,d^3y}{dx^3}+ \text{ и т. д.},$$

может быть снова сделано интегрирусмым путем умножения на какую-либо из указанных степеней x^β, x^γ, x^δ и т. д., и эти степени делают интегрируемым также и предложенное уравнение.

ПОЯСНЕНИЕ 2

1232. Прежде чем проследить, каким образом продолжать эти интегрирования, следует отдельно рассмотреть тот случай предложенного общего уравнения, когда первый член уравнения X обращается в нуль. Действительно, в этом случае можно использовать то удобное обстоятельство, что полный интеграл можно получить сразу без повторных интегрирований, и притом таким же путем, каким мы воспользовались выше в главе II [§ 1125]. Мы решили не посвящать этому случаю специальной главы, так как исследование его гораздо легче и так как не стоит приводить слишком много правил[1]).

ЗАДАЧА 165

1233. *Предложено дифференциальное уравнение какого угодно порядка*

$$0=Ay+\frac{Bx\,dy}{dx}+\frac{Cx^2\,d^2y}{dx^2}+\frac{Dx^3\,d^3y}{dx^3}+ \text{ и т. д.},$$

в котором переменное y вместе со своими дифференциалами нигде не превышает первого измерения, а другое переменное x входит в нулевом измерении. Найти его полный интеграл.

РЕШЕНИЕ

Очевидно, что мы можем, в частности, удовлетворить этому уравнению, принимая y равным некоторой степени x. Итак, положим, что $y=x^\mu$, и после подстановки и деления всех членов на x^μ придем к уравнению

$$0=A+\mu B+\mu(\mu-1)C+\mu(\mu-1)(\mu-2)D+ \text{ и т. д.},$$

откуда нужно определить показатель μ. Или же, если мы построим согласно правилам предыдущей задачи по предложенному уравнению алгебраическое выражение

$$P=A+B(z-1)+C(z-1)(z-2)+D(z-1)(z-2)(z-3)+ \text{ и т. д.}$$

и разложим его на простые множители, так что будем иметь

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z) \text{ и т. д.},$$

то очевидно, что мы удовлетворим первому уравнению, полагая (считаем $\mu=z-1$)

$$\mu=-\alpha-1, \text{ или } \mu=-\beta-1, \text{ или } \mu=-\gamma-1 \text{ и т. д.},$$

и, следовательно, каждый множитель дает нам частный интеграл. Итак, поскольку число множителей равно наибольшему из порядков диф-

[1]) Ne praecepta nimis multiplicari videantur.

ференциалов, мы заключаем отсюда, что полным интегралом предложенного уравнения будет

$$y = \mathfrak{A}x^{-\alpha-1} + \mathfrak{B}x^{-\beta-1} + \mathfrak{C}x^{-\gamma-1} + \mathfrak{D}x^{-\delta-1} + \text{ и т. д.}$$

Здесь надо только заметить, что если два или большее число этих простых множителей равны между собою, то надо изменить форму интеграла таким же образом, каким мы сделали это выше, во второй главе. А именно, поскольку рассмотренные там уравнения приводятся к разбираемому теперь виду, если вместо x писать в них lx, мы получаем следующие правила:

1) Если выражение P имеет множитель $(\alpha+z)^2$, то это дает в интеграле слагаемое

$$x^{-\alpha-1}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}lx).$$

2) Если выражение P имеет множитель $(\alpha+z)^3$, то отсюда получается в интеграле слагаемое

$$x^{-\alpha-1}[\mathfrak{A}+\mathfrak{B}lx+C(lx)^2].$$

3) Если выражение P имеет множитель $(\alpha+z)^4$, то отсюда получается в интеграле слагаемое

$$x^{-\alpha-1}[\mathfrak{A}+\mathfrak{B}lx+\mathfrak{C}(lx)^2+\mathfrak{D}(lx)^3].$$

Если встречаются мнимые множители, то получающиеся отсюда слагаемые приводятся к вещественному виду с помощью обычного представления мнимых количеств, как будет показано в следствиях.

СЛЕДСТВИЕ 1

1234. Если выражение P имеет два простых мнимых множителя, содержащихся в записи $f^2+2fz\cos\theta+z^2$, то из сравнения ее с произведением $(\alpha+z)(\beta+z)$ получим

$$\alpha = f\left(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\right) \quad \text{и} \quad \beta = f\left(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta\right),$$

откуда следует, что

$$x^{-\alpha} = x^{-f\cos\theta}x^{-f\sqrt{-1}\sin\theta} = x^{-f\cos\theta}e^{-\sqrt{-1}\,f\sin\theta\cdot lx}.$$

Но

$$e^{-u\sqrt{-1}} = \cos u - \sqrt{-1}\sin u,$$

и поэтому мы получим

$$x^{-\alpha-1} = x^{-f\cos\theta}\,\frac{\cos(f\sin\theta\cdot lx)-\sqrt{-1}\sin(f\sin\theta\cdot lx)}{x}.$$

Так как таким же образом выражается $x^{-\beta-1}$ с изменением знака при $\sqrt{-1}$, то из двойного множителя $f^2+2fz\cos\theta+z^2$ получается в интеграле слагаемое

$$x^{-f\cos\theta-1}[\mathfrak{A}\cos(f\sin\theta\cdot lx)+\mathfrak{B}\sin(f\sin\theta\cdot lx)],$$

которое может быть также представлено в виде

$$\mathfrak{A}x^{-f\cos\theta-1}\cos(\mathfrak{a}+f\sin\theta\cdot lx),$$

причем $\mathfrak{a}$ обозначает произвольный постоянный угол.

СЛЕДСТВИЕ 2

1235. Подобным же образом, если имеются равные множители, как

$$(\alpha+z)^2(\beta+z)^2=(f^2+2fz\cos\theta+z^2)^2,$$

то для букв α и β мы получим те же мнимые значения, что и раньше, и при приведении мнимых количеств найдем соответствующие слагаемые интеграла в виде

$$x^{-f\cos\theta-1}\left[\mathfrak{A}\cos(\mathfrak{a}+f\sin\theta\, lx)+\mathfrak{B}lx\cos(\mathfrak{b}+f\sin\theta\, lx)\right],$$

где содержатся четыре произвольные постоянные $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

СЛЕДСТВИЕ 3

1236. Итак, отсюда очевидно, каким образом нужно составлять отдельные слагаемые в интеграле по множителям выражения P, как простым, так и двойным, как неравным, так и равным, и как из этих слагаемых образовать весь полный интеграл.

ПОЯСНЕНИЕ

1237. Итак, все дело сводится к тому, чтобы разложить на вещественные либо простые, либо двойные множители алгебраическое выражение, которое строится по дифференциальному уравнению:

$$P=A+B(z-1)+C(z-1)(z-2)+D(z-1)(z-2)(z-3)+\text{и т. д.}$$

Большей частью в этом и состоит главная трудность, так как подобного рода выражения обычно мало исследуются. Но так как решение этого вопроса в равной мере относится и к общему уравнению, рассмотрение которого я предпринял в этой главе, то все, что можно по этому поводу указать, предпочтительнее изложить в связи с общим уравнением, и в силу этого я возвращаюсь к решению последнего. Здесь считаю необходимым заметить только то, что если для общего уравнения

$$X=Ay+\frac{Bx\,dy}{dx}+\frac{Cx^2d^2y}{dx^2}+\frac{Dx^3d^3y}{dx^3}+\text{ и т. д.}$$

каким-либо образом найден частный интеграл, положим $y=V$, где V есть некоторая функция от x, то тогда, полагая $y=V+v$, приходим к уравнению

$$0=Av+\frac{Bx\,dv}{dx}+\frac{Cx^2\,d^2v}{dx^2}+\frac{Dx^3\,d^3v}{dx^3}+\text{ и т. д.}$$

Если теперь вместо v написать полный интеграл последнего уравнения, найденный по правилам решения нашей задачи, получим полный интеграл исходного уравнения, что, конечно, дает значительное сокращение вычислений.

ЗАДАЧА 166

1238. *Предложено дифференциальное уравнение какого угодно порядка n вида*

$$X=Ay+\frac{Bx\,dy}{dx}+\frac{Cx^2\,d^2y}{dx^2}+\ldots+\frac{Nx^n\,d^ny}{dx^n}$$

Найти его интеграл с помощью n повторных интегрирований.

РЕШЕНИЕ

По данному уравнению образуем алгебраическое количество

$$P = A + B(z-1) + C(z-1)(z-2) + \ldots + N(z-1)(z-2)\ldots(z-n)$$

и ищем все его простые множители, не обращая никакого внимания на то, являются ли они вещественными или мнимыми, и таким образом представляем его в виде

$$P = N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)\ldots(\mu+z)(\nu+z),$$

причем число множителей $= n$. После этого, как мы видели в начале настоящей главы, какой угодно множитель, положим $\alpha + Z$, дает степень x^{α}, с помощью которой наше уравнение становится интегрируемым, а кроме того, мы показали, что при этом получается интеграл в виде

$$X' = A'y + \frac{B'x\,dy}{dx} + \frac{C'x^2\,d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{Nx^{n-1}d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

если для сокращения положить

$$x^{-\alpha-1}\int x^{\alpha}X\,dx = X'.$$

Здесь имеем $A' = \frac{A}{\alpha+1}$, и остальные коэффициенты получаются таким образом, как мы выше указали. Тут, впрочем, вполне достаточно напомнить, как определяется первый.

После того, как выполнено первое интегрирование и мы образовали по тому же закону в соответствии с один раз проинтегрированным уравнением количество

$$P' = A' + B'(z-1) + C'(z-1)(z-2) + \ldots + N(z-1)(z-2)\ldots(z-n+1),$$

разложение его на множители получается уже из первого выражения P, так как в § 1229 мы доказали, что

$$P' = N(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)\ldots(\mu+z)(\nu+z),$$

стало быть, что $P' = \frac{P}{\alpha+z}$. Следовательно, таким же образом множитель $\beta+z$ дает теперь степень x^{β}, умножение на которую делает интегрируемым новое уравнение. При этом интегралом будет

$$X'' = A''y + \frac{B''x\,dy}{dx} + \frac{C''x^2d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{Nx^{n-2}d^{n-2}y}{dx^{n-2}},$$

причем полагаем

$$x^{-\beta-1}\int x^{\beta}X'\,dx = X'',$$

так что

$$X'' = x^{-\beta-1}\int x^{\beta-\alpha-1}\,dx\int x^{\alpha}X\,dx,$$

а также имеем $A'' = \frac{A'}{\beta+1} = \frac{A}{(\alpha+1)(\beta+1)}$. Поэтому, если мы выполним последовательно столько интегрирований, сколько единиц содержится в показателе n, использовав таким образом все простые множители выражения P, то, наконец, мы дойдем до уравнения $X^{(n)} = A^{(n)}y$, которое и является желанным интегралом. А так как здесь мы будем иметь

$$A^{(n)} = \frac{A}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\nu+1)},$$

то очевидно, что знаменатель образуется из выражения $\frac{P}{N}$, если вместо z написать единицу. Но тогда, когда принимаем $z=1$, первое выражение, очевидно, дает $P=A$, так что знаменатель этот $=\frac{A}{N}$, а потому $A^{(n)}=N$. Это явствует также из того, что последние члены во всех уравнениях имеют один и тот же коэффициент N, следовательно, на этот же коэффициент должен быть помножен в последнем интеграле первый член y. А кроме этого имеем

$$X^{(n)}=x^{-\nu-1}\int x^{\nu-\mu-1}\,dx\int x^{\mu-\lambda-1}\,dx\ldots\int x^{\beta-\alpha-1}\,dx\int x^{\alpha}X\,dx,$$

и так как здесь числа α, β, γ и т. д. можно переставлять между собою как угодно, то искомый интеграл можно представить также в виде

$$Ny=x^{-\alpha-1}\int x^{\alpha-\beta-1}\,dx\int x^{\beta-\gamma-1}\,dx\ldots\int x^{\mu-\nu-1}\,dx\int x^{\nu}X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

1239. Стало быть, все дело здесь сводится к тому, чтобы разложить алгебраическое выражение

$$P=A+B(z-1)+C(z-1)(z-2)+D(z-1)(z-2)(z-3)+\text{ и т. д.}$$

на его простые множители, а когда они найдены, т. е. когда имеем

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)\ldots(\nu+z),$$

то отсюда легко получается искомый интеграл, и даже в нескольких видах, в соответствии с различными перестановками множителей; впрочем, все эти виды дают одно и то же значение, что еще яснее обнаружится из последующего.

СЛЕДСТВИЕ 2

1240. Так как найденное для интеграла выражение содержит столько интегрирований, сколько единиц в порядке предложенного дифференциального уравнения, то в него войдет столько произвольных постоянных, сколько требуется по свойствам полного интеграла.

ПОЯСНЕНИЕ

1241. Так как в найденный интеграл входят несколько интегрирований, то для более удобного использования следует разложить это выражение на слагаемые, каждое из которых содержит только один знак интеграла. И такое разложение можно произвести способом, подобным тому, которым мы воспользовались выше, причем здесь все дело тоже сводится к приведению выражения

$$\int x^{m-n-1}\,dx\int x^{n}X\,dx,$$

которое, очевидно, выполняется так, что получаем

$$\frac{1}{m-n}x^{m-n}\int x^{n}X\,dx-\frac{1}{m-n}\int x^{m}X\,dx.$$

Однако при этом надо заметить, что если $m=n$, то требуется применить особое приведение, и в этом случае будем иметь

$$\int \frac{dx}{x} \int x^n X\,dx = lx \int x^n X\,dx - \int x^n X\,dx\,lx.$$

Итак, мы воспользуемся этим правилом при решении следующих задач, причем мы будем последовательно рассматривать уравнения различных порядков, опустив, впрочем, первый порядок, так как интегралом уравнения

$$X = Ay + \frac{Nx\,dy}{dx}$$

будет

$$Ny = x^{-\alpha-1} \int x^\alpha X\,dx,$$

поскольку

$$P = A + N(z-1) = N(\alpha+z),$$

что не требует никаких приведений.

ЗАДАЧА 167

1242. *Предложено дифференциальное уравнение второго порядка*

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Nx^2 d^2y}{dx^2}.$$

Представить его интеграл с помощью простых интегральных выражений

РЕШЕНИЕ

Здесь

$$P = A + B(z-1) + N(z-1)(z-2).$$

Полагаем

$$P = N(\alpha+z)(\beta+z),$$

и мы найдем по предыдущему методу интеграл в виде $Ny = X$, принимая

$$x^{\beta+1}X'' = \int x^{\beta-\alpha-1}\,dx \int x^\alpha X\,dx,$$

а это выражение преобразуется в

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\,x^{\beta-\alpha} \int x^\alpha X\,dx - \frac{1}{\beta-\alpha} \int x^\beta X\,dx.$$

Таким образом,

$$Ny = \frac{x^{-\alpha-1}}{\beta-\alpha} \int x^\alpha X\,dx + \frac{x^{-\beta-1}}{\alpha-\beta} \int x^\beta X\,dx.$$

Однако здесь нужно исключить случай, когда $\beta=\alpha$. Действительно, тогда

$$x^{\alpha+1}X'' = \int \frac{dx}{x} \int x^\alpha X\,dx = lx \int x^\alpha X\,dx - \int x^\alpha X\,dx\,lx,$$

и, следовательно, в этом случае будем иметь

$$Ny = x^{-\alpha-1}\int \frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx$$

или

$$Ny = x^{-\alpha-1}\left(lx\int x^{\alpha}X\,dx - \int x^{\alpha}X\,dx\,lx\right).$$

Здесь, впрочем, более предпочтительной представляется первая форма.

СЛЕДСТВИЕ 1

1243. Если оба простых множителя мнимы, положим

$$(\alpha+z)(\beta+z) = f^2 + 2fz\cos\theta + z^2,$$

будем иметь

$$\alpha = f(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

и

$$\beta = f(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta),$$

откуда

$$\beta - \alpha = -2f\sqrt{-1}\sin\theta.$$

Но тогда

$$x^{\alpha} = x^{f\cos\theta}\left[\cos(f\sin\theta\,lx) + \sqrt{-1}\sin(f\sin\theta\,lx)\right],$$
$$x^{-\alpha} = x^{-f\cos\theta}\left[\cos(f\sin\theta\,lx) - \sqrt{-1}\sin(f\sin\theta\,lx)\right],$$

и эти же формулы при изменении знака $\sqrt{-1}$ дают x^{β} и $x^{-\beta}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

1244. Положим ради краткости угол

$$f\sin\theta\,lx = \varphi.$$

После подстановки мы получим

$$N\,xy = \frac{x^{-f\cos\theta}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)}{-2f\sqrt{-1}\sin\theta}\int x^{f\cos\theta}X\,dx\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$+\frac{x^{-f\cos\theta}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)}{2f\sqrt{-1}\sin\theta}\int x^{f\cos\theta}X\,dx\,(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

и здесь мнимые слагаемые взаимно уничтожаются сразу, так что будем иметь

$$N\,xy = \frac{x^{-f\cos\theta}}{f\sin\theta}\left(\sin\varphi\int x^{f\cos\theta}X\,dx\cos\varphi - \cos\varphi\int x^{f\cos\theta}X\,dx\sin\varphi\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1245. Итак, это найденное только что действительное выражение эквивалентно мнимому выражению, имеющему вид

$$N\,xy = \frac{x^{-\alpha}}{\beta-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx + \frac{x^{-\beta}}{\alpha-\beta}\int x^{\beta}X\,dx,$$

когда

$$(\alpha+z)(\beta+z) = f^2 + 2fz\cos\theta + z^2,$$

причем полагаем $\varphi = f\sin\theta\,lx$. Это проделанное приведение будет использовано также в последующем изложении.

ЗАДАЧА 168

1246. *Предложено дифференциальное уравнение третьего порядка*

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2\,d^2y}{dx^2} + \frac{Nx^3\,d^3y}{dx^3}.$$

Представить его интеграл с помощью простых интегральных выражений.

РЕШЕНИЕ

Так как имеем здесь

$$P = A + B(z-1) + C(z-1)(z-2) + N(z-1)(z-2)(z-3),$$

то полагаем

$$P = N(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z).$$

В связи с тем, что при интегрировании по общему методу получаем $Ny = X'''$, мы заметим, что $X''' = x^{-\gamma-1}\int x^\gamma X''\,dx$, если мы определили уже значение для X'' с помощью двух множителей $\alpha + z$ и $\beta + z$. Действительно, на основании предыдущей задачи имеем

$$X'' = \frac{x^{-\alpha-1}}{\beta-\alpha}\int x^\alpha X\,dx + \frac{x^{-\beta-1}}{\alpha-\beta}\int x^\beta X\,dx,$$

откуда следует, что

$$\int x^\gamma X''\,dx = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\int x^\alpha X\,dx - \frac{1}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\int x^\gamma X\,dx + \frac{x^{\gamma-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}\int x^\beta X\,dx - \frac{1}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}\int x^\gamma X\,dx.$$

Но мы имеем

$$\frac{1}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{1}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} = \frac{-1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)},$$

что и само собою очевидно и непосредственно следует из теоремы, доказанной в § 1169. Таким образом, искомый интеграл получается в следующем виде:

$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\int x^\alpha X\,dx + \frac{x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}\int x^\beta X\,dx + \frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\int x^\gamma X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

1247. Если выражение P имеет два равных множителя, пусть $\beta = \alpha$, то, так как тогда

$$X'' = x^{-\alpha-1}\int \frac{dx}{x}\int x^\alpha X\,dx,$$

будем иметь

$$\int x^\gamma X''\,dx = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\gamma-\alpha}\int \frac{dx}{x}\int x^\alpha X\,dx - \frac{1}{\gamma-\alpha}\int x^{\gamma-\alpha-1}\,dx\int x^\alpha X\,dx$$

и

$$\int x^{\gamma-\alpha-1}\,dx\int x^\alpha X\,dx = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\gamma-\alpha}\int x^\alpha X\,dx - \frac{1}{\gamma-\alpha}\int x^\gamma X\,dx,$$

откуда заключаем, что

$$N\,xy=\frac{x^{-\alpha}}{\gamma-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx-\frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^2}\int x^{\alpha}X\,dx+\frac{x^{-\gamma}}{(\gamma-\alpha)^2}\int x^{\gamma}X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1248. Мы приходим к той же форме интеграла, если полагаем $\gamma=\beta$; действительно, тогда

$$\int x^{\gamma}X''\,dx=\frac{x^{\beta-\alpha}}{(\beta-\alpha)^2}\int x^{\alpha}X\,dx-\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\int x^{\beta}X\,dx+\frac{1}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta}X\,dx,$$

и поэтому

$$N\,xy=\frac{x^{-\beta}}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta}X\,dx-\frac{x^{-\beta}}{(\beta-\alpha)^2}\int x^{\beta}X\,dx+\frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)^2}\int x^{\alpha}X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1249. Если же все три множителя будут равны друг другу, $\alpha=\beta=\gamma$, то получим

$$\int x^{\gamma}X''\,dx=\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx,$$

и поэтому в рассматриваемом случае интеграл в сжатом виде выражается так:

$$Nxy=x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

1250. Если имеем два мнимых множителя, а именно

$$(\alpha+z)(\beta+z)=f^2+2fz\cos\theta+z^2,$$

причем

$$\alpha=f(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$$

и

$$\beta=f(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta),$$

то последний член нашего интеграла остается все-таки действительным, потому что

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)=\gamma^2-2\gamma f\cos\theta+f^2.$$

Два же первые члена, если положить $\varphi=f\sin\theta\,lx$, получаются в виде

$$\frac{x^{-f\cos\theta}(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)\int x^{f\cos\theta}X\,dx\,(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}{-2f\sqrt{-1}\sin\theta\,[\gamma-f(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)]}$$
$$+\frac{x^{-f\cos\theta}(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)\int x^{f\cos\theta}X\,dx\,(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)}{2f\sqrt{-1}\sin\theta\,[\gamma-f(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta)]}$$

и приводятся к такому действительному выражению:

$$\frac{x^{-f\cos\theta}[\gamma\sin\varphi-f\sin(\theta+\varphi)]\int^{-\cos\theta}X\,dx\cos\varphi-x^{-f\cos\theta}[\gamma\cos\varphi-f\cos(\theta+\varphi)]\int x^{f\cos\theta}X\,dx\sin\psi}{f\sin\theta\,(\gamma^2-2\gamma f\cos\theta+f^2)}$$

ПОЯСНЕНИЕ

1251. Что касается мнимых множителей, то вообще приведение порождаемых ими интегралов осуществить нетрудно, и поэтому я не буду больше задерживаться на нем в связи с рассмотрением приведенных выше дифференциальных уравнений. Однако случай равных множителей, которые мы здесь рассматривали для отдельных порядков, следует тщательно изучить, так как выше [§§ 1163, 1179] я впал в серьезную ошибку вследствие слишком поспешного перехода к общему случаю, а я бы ее счастливо избежал, если бы пользовался там методом последних параграфов. Впрочем, этого промаха не надо опасаться при рассмотрении мнимых множителей, потому что в этом вопросе не приходится пренебрегать чем-либо в виде бесконечно малых количеств. А ведь именно это было источником тех ошибок, которые я допустил выше, и для того, чтобы яснее увидеть, в чем заключается упомянутый мало заметный промах, я разовью здесь этот пункт вместе с одним необходимым улучшением. А именно, в настоящем случае вопрос сводится к тому, чтобы определить, какое значение принимает сумма двух выражений

$$\frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\int x^{\alpha}X\,dx+\frac{x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}\int x^{\beta}X\,dx$$

при условии, что $\beta=\alpha$ и что оба слагаемых возрастают до бесконечности. С этой целью я полагаю $\beta=\alpha+\omega$, причем ω — исчезающая частица[1]), и, так как

$$x^{\beta}=x^{\alpha}x^{\omega}=x^{\alpha}e^{\omega lx}=x^{\alpha}(1+\omega\,lx),$$

а, следовательно,

$$x^{-\beta}=x^{-\alpha}(1-\omega\,lx),$$

мы получим

$$\frac{x^{-\alpha}}{\omega(\gamma-\alpha)}\int x^{\alpha}X\,dx-\frac{x^{-\alpha}(1-\omega\,lx)}{\omega(\gamma-\beta)}\int x^{\alpha}X\,dx\,(1+\omega\,lx).$$

Теперь же, поскольку

$$\frac{1}{\gamma-\alpha}=\frac{1}{\gamma-\beta+\omega}=\frac{1}{\gamma-\beta}-\frac{\omega}{(\gamma-\beta)^2},$$

первое слагаемое представляется в виде

$$\frac{x^{-\alpha}}{\omega(\gamma-\beta)}\int x^{\alpha}X\,dx-\frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\beta)^2}\int x^{\alpha}X\,dx,$$

а второе после преобразования в виде

$$-\frac{x^{-\alpha}}{\omega(\gamma-\beta)}\int x^{\alpha}X\,dx+\frac{x^{-\alpha}}{\gamma-\beta}\left[lx\int x^{\alpha}X\,dx-\int x^{\alpha}X\,dx\,lx\right].$$

Таким образом, для искомого значения при условии, что $\beta=\alpha$, находим

$$\frac{x^{-\alpha}}{\gamma-\alpha}\left(lx\int x^{\alpha}X\,dx-\int x^{\alpha}X\,dx\,lx\right)-\frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^2}\int x^{\alpha}X\,dx,$$

т. е.

$$\frac{x^{-\alpha}}{\gamma-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx-\frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^2}\int x^{\alpha}X\,dx.$$

---

[1]) Existente ω particula evanescente.

Так как второй член последнего выражения был пропущен **при применении** вышеупомянутого ошибочного метода, то заключаем **отсюда**, что здесь мы приняли во внимание различие между выражениями $\gamma-\alpha$ и $\gamma-\beta$, тогда как выше мы пренебрегли этой необходимой предосторожностью.

ЗАДАЧА 169

1252. *Предложено следующее дифференциальное уравнение четвертого порядка:*

$$X=Ay+\frac{Bx\,dy}{dx}+\frac{Cx^2\,d^2y}{dx^2}+\frac{Dx^3\,d^3y}{dx^3}+\frac{Nx^4\,d^4y}{dx^4}.$$

Представить его интеграл с помощью простых интегральных выражений.

РЕШЕНИЕ

После образования соответствующего алгебраического выражения

$$P=A+B(z-1)+C(z-1)(z-2)+D(z-1)(z-2)(z-3)$$
$$+N(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)$$

мы полагаем

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)$$

и, следуя общему правилу, получаем

$$Ny=X^{\mathrm{IV}},$$

причем

$$X^{\mathrm{IV}}=x^{-\delta-1}\int X'''x^{\delta}\,dx,$$

считая, что X''' определяется по первым трем множителям таким образом, как это сделано в предыдущей задаче [§ 1246]. Очевидно, что найденное там для Nxy значение надо теперь помножить на $x^{\delta-1}dx$, откуда получаем

$$\int x^{\delta}X'''dx=+\frac{x^{\delta-\alpha}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}\int x^{\alpha}X\,dx-\frac{1}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}\int x^{\delta}X\,dx$$
$$+\frac{x^{\delta-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)}\int x^{\beta}X\,dx-\frac{1}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)}\int x^{\delta}X\,dx$$
$$+\frac{x^{\delta-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)}\int x^{\gamma}X\,dx-\frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)}\int x^{\delta}X\,dx,$$

и здесь, в силу доказанных выше [§ 1169] положений, три последних слагаемых объединяются в $+\frac{1}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}\int x^{\delta}X\,dx$, так что искомым интегралом будет

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}\int x^{\alpha}X\,dx+\frac{x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)}\int x^{\beta}X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)}\int x^{\gamma}X\,dx+\frac{x^{-\delta}}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}\int x^{\delta}X\,dx,$$

если все множители не равны между собой. Тот же случай, когда двое или большее число множителей равны, мы изучим в следствиях.

СЛЕДСТВИЕ 1

1253. Если имеется два равных множителя, а именно $\delta=\gamma$, т. е. если

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)^2,$$

то из ранее найденного выражения для X''' [§ 1246] получаем интеграл

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)^2}\int x^\alpha X\,dx-\frac{x^{-\gamma}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)^2}\int x^\gamma X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)^2}\int x^\beta X\,dx-\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)^2}\int x^\gamma X\,dx+\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\int\frac{dx}{x}\int x^\gamma X\,dx,$$

в котором отрицательные слагаемые можно представить следующим образом:

$$\frac{x^{-\gamma}}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{(\gamma-\alpha)^2}-\frac{1}{(\gamma-\beta)^2}\right)\int x^\gamma X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1254. Если имеется три равных множителя, так что

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)^3,$$

т. е. $\delta=\gamma=\beta$, то из формулы, найденной в § 1249, получаем интеграл

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)^3}\int x^\alpha X\,dx-\frac{x^{-\beta}}{(\beta-\alpha)^3}\int x^\beta X\,dx$$
$$-\frac{x^{-\beta}}{(\beta-\alpha)^2}\int\frac{dx}{x}x^\beta X\,dx+\frac{x^{-\beta}}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^\beta X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1255. Если все четыре множителя равны между собой, так что

$$P=N(\alpha+z)^4,$$

т. е. имеем $\delta=\gamma=\beta=\alpha$, то из формулы, полученной в § 1249 для случая трех равных множителей, находим интеграл

$$Nxy=x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^\alpha X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

1256. Если имеем $\beta=\alpha$ и $\delta=\gamma$, так что множители равны попарно, следовательно, $P=N(\alpha+z)^2(\gamma+z)^2$, то по § 1247, где множители были $(\alpha+z)^2(\gamma+z)$, находим интеграл

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^\alpha X\,dx-\frac{x^{-\gamma}}{(\gamma-\alpha)^2}\int x^{\gamma-\alpha-1}\,dx\int x^\alpha X\,dx-\frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^3}\int x^\alpha X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\gamma}}{(\gamma-\alpha)^3}\int x^\gamma X\,dx+\frac{x^{-\gamma}}{(\gamma-\alpha)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^\gamma X\,dx.$$

Это выражение в силу того, что

$$\int x^{\gamma-\alpha-1}\,dx\int x^\alpha X\,dx=\frac{x^{\gamma-\alpha}}{\gamma-\alpha}\int x^\alpha X\,dx-\frac{1}{\gamma-\alpha}\int x^\gamma X\,dx,$$

приводится к следующему виду:

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx+\frac{x^{-\gamma}}{(\gamma-\alpha)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma}X\,dx$$
$$-\frac{2x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^3}\int x^{\alpha}X\,dx-\frac{2x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)^3}\int x^{\gamma}X\,dx.$$

ЗАДАЧА 170

1257. *Предложено следующее дифференциальное уравнение пятого порядка*:

$$X=Ay+\frac{Bx\,dy}{dx}+\frac{Cx^2\,d^2y}{dy^2}+\frac{Dx^3\,d^3y}{dx^3}+\frac{Ex^4\,d^4y}{dx^4}+\frac{Nx^5\,d^5y}{dx^5}.$$

Представить его интеграл с помощью простых интегральных выражений.

РЕШЕНИЕ

Так как здесь надо образовать алгебраическое количество

$$P=A+B(z-1)+C(z-1)(z-2)+\ldots+N(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5),$$

то мы полагаем

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)(\varepsilon+z),$$

и если все эти множители не равны между собою, то из предыдущего интеграла, выполнив еще одно интегрирование, мы получим искомый интеграл в виде

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\varepsilon-\alpha)}\int x^{\alpha}X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\varepsilon-\beta)}\int x^{\beta}X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)(\varepsilon-\gamma)}\int x^{\gamma}X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\delta}}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)(\varepsilon-\delta)}\int x^{\delta}X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\varepsilon}}{(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)}\int x^{\varepsilon}X\,dx.$$

В следствиях мы рассмотрим те случаи, когда два или большее число множителей равны.

СЛЕДСТВИЕ 1

1258. Если имеется два равных множителя, так что

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)^2,$$

т. е. $\varepsilon=\delta$, то на основании предыдущей задачи получаем интеграл в виде

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx-x^{-\delta}\int x^{\delta}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)^2}+\frac{x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx-x^{-\delta}\int x^{\delta}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)^2}$$
$$+\frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx-x^{-\delta}\int x^{\delta}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)^2}+\frac{x^{-\delta}}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}\int\frac{dx}{x}\int x^{\delta}X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1259. Если имеется три равных множителя, так что
$$P = N(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z),$$
то есть
$$\varepsilon = \delta = \gamma,$$
то на основании Следствия 1 предыдущей задачи заключаем:
$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx - x^{-\gamma}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)^3} - \frac{x^{-\gamma}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma} X\,dx$$
$$+ \frac{x^{-\beta}\int x^{\beta} X\,dx - x^{-\gamma}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)^3} - \frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma} X\,dx$$
$$+ \frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma} X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1260. Если равны между собою четыре множителя, так что
$$P = N(\alpha + z)(\beta + z)^4,$$
то есть
$$\varepsilon = \delta = \gamma = \beta,$$
то на основании § 1254
$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)^4}\int x^{\alpha} X\,dx - \frac{x^{-\beta}}{(\beta-\alpha)^4}\int x^{\beta} X\,dx - \frac{x^{-\beta}}{(\beta-\alpha)^3}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta} X\,dx$$
$$- \frac{x^{-\beta}}{(\beta-\alpha)^2}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta} X\,dx - \frac{x^{-\beta}}{\beta-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta} X\,dx.$$
Если же равны между собою все пять множителей, т. е.
$$P = N(\alpha + z)^5,$$
то интегралом будет
$$Nxy = x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha} X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

1261. Если P имеет два квадратных множителя, так что
$$P = N(\alpha + z)(\beta + z)^2(\gamma + z)^2,$$
то есть
$$\delta = \gamma \text{ и } \varepsilon = \beta,$$
то на основании § 1253 после необходимых приведений получаем интеграл
$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx - x^{-\beta}\int x^{\beta} X\,dx}{(\beta-\alpha)^2(\gamma-\alpha)^2} - \frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma} X\,dx - x^{-\beta}\int x^{\beta} X\,dx}{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)}$$
$$+ \frac{x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta} X\,dx - \frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma} X\,dx - x^{-\beta}\int x^{\beta} X\,dx}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)^3}$$
$$+ \frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma} X\,dx - \frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma} X\,dx - x^{-\beta}\int x^{\beta} X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)^3},$$

что затем приводится к виду

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)^2(\gamma-\alpha)^2}\int x^{\alpha}X\,dx+$$
$$+\frac{x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)^2(\gamma-\beta)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta}X\,dx-\frac{x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)^2(\gamma-\beta)^2}\int x^{\beta}X\,dx-\frac{2x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)^3}\times$$
$$\times\int x^{\beta}X\,dx+\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma}X\,dx-$$
$$-\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2}\int x^{\gamma}X\,dx-\frac{2x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)^3}\int x^{\gamma}X\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 5

1262. Если P имеет и квадратный, и кубический множитель, так что

$$P=N(\alpha+z)^2(\gamma+z)^3,$$

то есть

$$\beta=\alpha\quad\text{и}\quad\varepsilon=\delta=\gamma,$$

то на основании § 1254 получаем интеграл в виде

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^3}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx-\frac{3x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^4}\int x^{\alpha}X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)^2}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}x^{\gamma}X\,dx-\frac{2x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)^3}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma}X\,dx+\frac{3x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)^4}\int x^{\gamma}X\,dx.$$

ПОЯСНЕНИЕ

1263. На основании этих формул трудно усмотреть, каким образом нужно продолжать их построение для большего числа множителей, если некоторые из этих множителей равны между собою. Вместе с тем, те слагаемые интеграла, которые соответствуют неравным множителям, следуют очевидному закону. Однако те слагаемые, которые соответствуют равным множителям[1]), можно выразить более удобным образом, применив некоторые упрощения. Например, в случае следствия 1 мы положим ради краткости $\alpha-\delta=p$, $\beta-\delta=q$ и $\gamma-\delta=r$ и помножим выражение $x^{-\delta}\int x^{\delta}X\,dx$ на

$$\frac{1}{(p-q)(r-p)p^2}+\frac{1}{(p-q)(q-r)q^2}+\frac{1}{(r-p)(q-r)r^2},$$

то есть на

$$\frac{(q-r)q^2r^2+(r-p)p^2r^2+(p-q)p^2q^2}{(p-q)(q-r)(r-p)p^2q^2r^2}.$$

Числитель этой дроби равен

$$-(p-q)(q-r)(r-p)(pq+pr+qr)$$

и, следовательно, дробь приводится к такой:

$$\frac{-pq-pr-qr}{p^2q^2r^2}=-\frac{1}{pqr}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right).$$

[1]) В первом издании и в Opera Omnia здесь читаем не «множителям» (factoribus), «слагаемым» (partibus), но это явная описка.

Стало быть, когда имеем

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)^2,$$

то интеграл получается в виде

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)^2}\int x^\alpha X\,dx+\frac{x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)^2}\int x^\beta X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)^2}\int x^\gamma X\,dx+\frac{x^{-\delta}}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}\int\frac{dx}{x}\int x^\delta X\,dx$$
$$-\frac{x^{-\delta}}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}\left(\frac{1}{\alpha-\delta}+\frac{1}{\beta-\delta}+\frac{1}{\gamma-\delta}\right)\int x^\delta X\,dx.$$

А в том случае, когда

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)^3,$$

мы получаем [§ 1259]

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)^3}\int x^\alpha X\,dx+\frac{x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)^3}\int x^\beta X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^\gamma X\,dx-\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\left(\frac{1}{\alpha-\gamma}+\frac{1}{\beta-\gamma}\right)\int\frac{dx}{x}\int x^\gamma X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\left(\frac{1}{(\alpha-\gamma)^2}+\frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}+\frac{1}{(\beta-\gamma)^2}\right)\int x^\gamma X\,dx.$$

А тогда, когда имеем

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)^4,$$

получаем [§ 1260]

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)^4}\int x^\alpha X\,dx+\frac{x^{-\beta}}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^\beta X\,dx$$
$$-\frac{x^{-\beta}}{\alpha-\beta}\,\frac{1}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^\beta X\,dx+\frac{x^{-\beta}}{\alpha-\beta}\,\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^\beta X\,dx$$
$$-\frac{x^{-\beta}}{\alpha-\beta}\,\frac{1}{(\alpha-\beta)^3}\int x^\beta X\,dx.$$

В том же случае, когда

$$P=(\alpha+z)(\beta+z)^2(\gamma+z)^2,$$

интеграл получается в виде [§ 1261]

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)^2(\gamma-\alpha)^2}\int x^\alpha X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^\beta X\,dx-\frac{x^{-\beta}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)^2}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{2}{\gamma-\beta}\right)\int x^\beta X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^\gamma X\,dx-\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)^2}\left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{2}{\beta-\gamma}\right)\int x^\gamma X\,dx.$$

Наконец, в случае, когда

$$P=N(\alpha+z)^2(\gamma+z)^3,$$

имеем [§ 1262]

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^3}\int\frac{dx}{x}\int x^\alpha X\,dx-\frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^3}\,\frac{3}{\gamma-\alpha}\int x^\alpha X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)^2}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^\gamma X\,dx-\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)^2}\,\frac{2}{\alpha-\gamma}\int\frac{dx}{x}\int x^\gamma X\,dx$$
$$+\frac{x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)^2}\,\frac{3}{(\alpha-\gamma)^2}\int x^\gamma X\,dx.$$

Отсюда характер этих формул уже лучше виден и, вместе с тем, выявляется, что слагаемые интеграла, которые получаются из каких бы то ни было множителей, не зависят от равенства между собою остальных. В силу этого мы можем уже подойти к общей задаче.

ЗАДАЧА 171

1264. *Предложено дифференциальное уравнение какого угодно порядка вида*

$$X=Ay+\frac{Bx\,dy}{dx}+\frac{Cx^2\,d^2y}{dx^2}+\frac{Dx^3d^3y}{dx^3}+\ldots+\frac{Nx^n\,d^ny}{dx^n},$$

и алгебраическое выражение, образованное в соответствии с этим уравнением по закону

$$P=A+B(z-1)+C(z-1)(z-2)+D(z-1)(z-2)(z-3)+\ldots+N(z-1)(z-2)\ldots(z-n),$$

имеет только не равные между собою множители. Представить полное значение y[1]) *с помощью простых интегральных выражений.*

РЕШЕНИЕ

Пусть, во-первых, все простые множители выражения P действительны:

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)\ldots(\nu+z),$$

где полагаем число множителей $=n$. Как ясно из вышеизложенного, любой множитель порождает в интеграле соответствующее слагаемое. Для нахождения этих слагаемых определяются следующие значения:

1) полагаем $z=-\alpha$ и $\mathfrak{A}=\frac{P}{\alpha+z}$, т. е. $\mathfrak{A}=\frac{dP}{dz}$,

2) полагаем $z=-\beta$ и $\mathfrak{B}=\frac{P}{\beta+z}$, т. е. $\mathfrak{B}=\frac{dP}{dz}$,

3) полагаем $z=-\gamma$ и $\mathfrak{C}=\frac{P}{\gamma+z}$, т. е. $\mathfrak{C}=\frac{dP}{dz}$

и т. д.

А так как имеем

$$(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\ldots(\nu-\alpha)=\frac{\mathfrak{A}}{N},$$

то буква N из вышеприведенных выражений исключается при делении, и искомым интегралом будет

$$xy=\frac{1}{\mathfrak{A}}x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx+\frac{1}{\mathfrak{B}}x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx+\frac{1}{\mathfrak{C}}x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx+\text{ и т. д.},$$

пока не будут исчерпаны все множители.

Если же выражение P имеет мнимые множители, то приведение порождаемых ими мнимых слагаемых к действительному виду производится следующим образом. Поскольку два простых мнимых множителя дают двойной действительный множитель, мы полагаем

$$(\alpha+z)(\beta+z)=f^2+2fz\cos\theta+z^2,$$

так что

$$\alpha=f(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)\quad\text{и}\quad\beta=f(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta).$$

[1]) Valorem ipsius y completum, т. е. полный интеграл.

При этом прежде всего определяются значения букв $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Так как и та и другая получаются из выражения $\frac{dP}{dz}$, — одна, когда полагаем $z=-\alpha$, а вторая, когда полагаем $z=-\beta$, — то в самом выражении $\frac{dP}{dz}$ мы везде будем писать вместо z количество

$$-f(\cos\theta \pm \sqrt{-1}\sin\theta)$$

и получим результат в виде $\mathfrak{P} \pm \mathfrak{Q}\sqrt{-1}$. Но ясно, что

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} \text{ и } \mathfrak{B} = \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}\sqrt{-1},$$

и при этом следует отметить, что количества $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ действительны. Затем, поскольку имеем

$$x^{m+n\sqrt{-1}} = x^m e^{n\sqrt{-1}\,lx} = x^m[\cos(nlx) + \sqrt{-1}\sin(nlx)],$$

то получим, полагая ради краткости угол $f\sin\theta\cdot lx = \Phi$,

$$x^\alpha = x^{f\cos\theta}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),\quad x^{-\alpha} = x^{-f\cos\theta}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

$$x^\beta = x^{f\cos\theta}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi),\quad x^{-\beta} = x^{-f\cos\theta}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi).$$

Поэтому сумму двух слагаемых

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}x^{-\alpha}\int x^\alpha X\,dx + \frac{1}{\mathfrak{B}}x^{-\beta}\int x^\beta X\,dx$$

с учетом того, что $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2$, получим в виде

$$\frac{x^{-f\cos\theta}}{\mathfrak{P}^2+\mathfrak{Q}^2}\left\{\begin{aligned} &(\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}\sqrt{-1})(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)\times\\ &\times\int x^{f\cos\theta}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)X\,dx\\ &+(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1})(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\times\\ &\times\int x^{f\cos\theta}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)X\,dx \end{aligned}\right\}.$$

И так как в этом выражении мнимые слагаемые взаимно уничтожаются, оно приводится к следующему:

$$\frac{\left\{\begin{aligned} &2x^{-f\cos\theta}(\mathfrak{P}\cos\varphi - \mathfrak{Q}\sin\varphi)\int x^{f\cos\theta}X\,dx\cos\varphi\\ &+2x^{-f\cos\theta}(\mathfrak{Q}\cos\varphi + \mathfrak{P}\sin\varphi)\int x^{f\cos\theta}X\,dx\sin\varphi\end{aligned}\right\}}{\mathfrak{P}^2+\mathfrak{Q}^2}.$$

В подобном виде представляется интеграл всякий раз, как выражение P имеет двойной множитель вида $f^2 + 2fz\cos\theta + z^2$.

СЛЕДСТВИЕ 1

1265. Если даже некоторые из простых множителей P являются мнимыми, то это не влияет на выражения, получающиеся из действительных множителей: каждое соответствующее слагаемое, которое должно войти в интеграл, совершенно не зависит от того, каковы остальные множители.

СЛЕДСТВИЕ 2

1266. Слагаемое в интеграле, которое порождается двумя мнимыми множителями, т. е. одним двойным множителем, можно представить несколько проще, если положить

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{S}\cos\zeta \text{ и } \mathfrak{Q} = \mathfrak{S}\sin\zeta.$$

Действительно, получаем при этом

$$\frac{2}{\mathfrak{D}}\,x^{-f\cos\theta}\left[\cos(\zeta+\varphi)\int x^{f\cos\theta}X\,dx\cos\varphi+\sin(\zeta+\varphi)\int x^{f\cos\theta}X\,dx\sin\varphi\right],$$

где ζ и θ суть постоянные углы, а φ — угол переменный, так как $\varphi=f\sin\theta\,lx$.

ЗАДАЧА 172

1267. *Пусть алгебраическое количество P, образованное для дифференциального уравнения, предложенного в предыдущей задаче, имеет два простых равных множителя. Найти соответствующее слагаемое интеграла.*

РЕШЕНИЕ

Итак, в выражении, которое приведено выше,

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)\delta \text{ и т. д.},$$

мы полагаем $\beta=\alpha$; но так как тогда оба соответствующих слагаемых в интеграле становятся бесконечными, одно со знаком $+$, второе со знаком $-$, так что вместе они дают конечное слагаемое, то для того, чтобы определить последнее, мы принимаем $\beta=\alpha-\omega$, где ω обозначает исчезающее количество, и тогда

$$\mathfrak{A}=-N\omega(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\varepsilon-\alpha) \text{ и т. д.}$$

и

$$\mathfrak{B}=+N\omega(\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\varepsilon+\beta) \text{ и т. д.}$$

Теперь положим

$$\frac{P}{(\alpha+z)(\beta+z)}=\frac{P}{(\alpha+z)^2}=Q,$$

так что

$$Q=N(\gamma+z)\,(\delta+z)\,(\varepsilon+z) \text{ и т. д.}$$

Очевидно, мы будем иметь

$$\mathfrak{A}=-\omega Q, \text{ полагая } z=-\alpha,$$

и

$$\mathfrak{B}=\omega Q, \text{ полагая } z=-\beta=-\alpha+\omega,$$

и отсюда мы видим, что последнее значение Q отличается от предыдущего его значения на дифференциал dQ при

$$z=-\alpha \quad\text{и}\quad dz=\omega.$$

Таким образом, имеем

$$\mathfrak{B}=\omega\left(Q+\omega\frac{dQ}{dz}\right), \text{ когда } z=-\alpha,$$

откуда

$$\frac{1}{\mathfrak{B}}=\frac{1}{\omega Q}-\frac{dQ}{Q^2\,dz}=\frac{1}{\omega Q}+\frac{1}{\alpha z}\,d\,\frac{1}{Q},$$

где

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}=-\frac{1}{\omega Q}.$$

А поскольку, вместе с тем,

$$x^{\beta}=x^{\alpha}x^{-\omega}=x^{\alpha}(1-\omega lx) \text{ и } x^{-\beta}=x^{-\alpha}(1+\omega lx),$$

то оба искомых слагаемых интеграла суть

$$-\frac{1}{\omega Q} x^{-\alpha} \int x^{\alpha} X\,dx + \left(\frac{1}{\omega Q} + \frac{1}{dz}\, d\,\frac{1}{Q}\right) x^{-\alpha} (1+\omega lx) \int x^{\alpha} X\,dx\,(1-\omega lx).$$

Так как здесь члены, которые делятся на ω, взаимно уничтожаются, мы получаем

$$\frac{1}{Q} x^{-\alpha} \left(lx \int x^{\alpha} X\,dx - \int x^{\alpha} X\,dx\,lx\right) + \frac{1}{dz}\, d\,\frac{1}{Q}\, x^{-\alpha} \int x^{\alpha} X\,dx,$$

то есть

$$\frac{1}{Q} x^{-\alpha} \int \frac{dx}{x} \int x^{\alpha} X\,dx + \frac{1}{dz}\, d\,\frac{1}{Q}\, x^{-\alpha} \int x^{\alpha} X\,dx,$$

если только как в значении $\frac{1}{Q}$, так и в $\frac{1}{dz}\, d\,\frac{1}{Q}$ везде вместо z писать $-\alpha$. Но в силу того, что $Q = \frac{P}{(\alpha+z)^2}$, мы без труда находим отсюда эти значения.

СЛЕДСТВИЕ 1

1268. Таким образом, если алгебраическое количество P, образованное по дифференциальному уравнению, имеет квадратный множитель $(\alpha+z)^2$, то в соответствии с этим в интеграл должно войти слагаемое

$$\frac{(\alpha+z)^2}{P} x^{-\alpha} \int \frac{dx}{x} \int x^{\alpha} X\,dx + \frac{1}{dz}\, d\,\frac{(\alpha+x)^2}{P}\, x^{-\alpha} \int x^{\alpha} X\,dx,$$

где полагаем $z = -\alpha$, тогда как если бы множитель $\alpha+z$ был в единственном числе, то порождаемое им слагаемое в интеграле было бы

$$\frac{\alpha+z}{P} x^{-\alpha} \int x^{\alpha} X\,dx \quad \text{при} \quad z = -\alpha.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

1269. Так как $Q = \frac{P}{(\alpha+z)^2}$, то в случае $z = -\alpha$ будем иметь $Q = \frac{d^2P}{2\,dz^2}$. Правда, поскольку z здесь уже придано определенное значение, то отсюда нельзя получить $\frac{dQ}{dz}$, а надо воспользоваться первым [выражением для Q], согласно которому $\frac{dQ}{dz} = \frac{(\alpha+z)\,dP - 2P\,dz}{(\alpha+z)^3\,dz}$, и поскольку числитель и знаменатель этой дроби исчезают при $z = -\alpha$, то мы получаем в рассматриваемом случае

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{(\alpha+z)\,d^2P - dz\,dP}{3(\alpha+z)^2\,dz^2} = \frac{(\alpha+z)\,d^3P}{6(\alpha+z)\,dz^3} = \frac{d^3P}{6\,dz^3}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

1270. После того как найдено это значение, получаем, поскольку количество Q при том же условии $z = -\alpha$ равно $\frac{d^2P}{2\,dz^2}$,

$$\frac{1}{dz}\, d\,\frac{1}{Q} = -\frac{dQ}{Q^2\,dz} = -\frac{2\,dz\,d^3P}{3\,d^2P^2}$$

то есть

$$\frac{1}{dz}\, d\,\frac{1}{Q} = \frac{2\,dz}{3}\, d\,\frac{1}{d^2P}.$$

С помощью этих формул легче определить слагаемые интеграла, если множители выражения P не представлены явно.

ЗАДАЧА 173

1271. *Пусть алгебраическое количество P, образованное для предыдущего дифференциального уравнения, имеет кубический множитель $(\alpha+z)^3$. Определить соответствующее слагаемое интеграла.*

РЕШЕНИЕ

Итак, мы полагаем

$$P=(\alpha+z)^2(\gamma+z)R,$$

причем $\gamma=\alpha-\omega$, где ω считаем исчезающим количеством. Стало быть, то, чем раньше было Q, здесь будет $Q=(\gamma+z)R$, и при $z=-\alpha$ будем иметь $Q=-\omega R$, если в R также положим $z=-\alpha$. Затем, поскольку имеем

$$\frac{dQ}{dz}=R+\frac{(\gamma+z)\,dR}{dz}=R-\frac{\omega\,dR}{dz},$$

то при том же условии получаем

$$\frac{1}{dz}\,d\,\frac{1}{Q}=-\frac{1}{\omega^2R}+\frac{dR}{\omega R^2\,dz}=-\frac{1}{\omega^2}\,\frac{1}{R}-\frac{1}{\omega\,dz}\,d\,\frac{1}{R}.$$

В силу этого квадратный множитель $(\alpha+z)^2$ на основании решения предыдущей задачи дает в интеграле следующее слагаемое:

$$-\frac{1}{\omega R}\,x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx-\left(\frac{1}{\omega^2R}+\frac{1}{\omega\,dz}\,d\,\frac{1}{R}\right)x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx,$$

причем оба составляющие его члена бесконечно возрастают, так как $\omega=0$.

Мы присоединим сюда то слагаемое, которое порождается третьим множителем

$$\gamma+z=\alpha-\omega+z$$

и которое вследствие того, что $\frac{P}{\gamma+z}=(\alpha+z)^2R$, равно

$$\frac{1}{(\alpha+z)^2R}\,x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx$$

при $z=-\gamma=-\alpha+\omega$. Таким образом, если, как и раньше, R есть то значение, которое получается при $z=-\alpha$ с прибавлением к этому количеству частицы ω, то вместо $\frac{1}{R}$ надо писать

$$\frac{1}{R}+\frac{\omega}{dz}\,d\,\frac{1}{R}+\frac{\omega^3}{1\cdot2\,dz^2}\,d^2\,\frac{1}{R}+\text{ и т. д.}$$

при условии, что и здесь мы сохраняем значение $z=-\alpha$. Вследствие этого и с учетом того, что $\alpha+z=\omega$, мы получаем в интеграле слагаемое

$$\left(\frac{1}{\omega^2R}+\frac{1}{\omega\,dz}\,d\,\frac{1}{R}+\frac{1}{2\,dz^2}\,d^2\,\frac{1}{R}\right)x^{-\alpha+\omega}\int x^{\alpha-\omega}X\,dx.$$

Таким образом, очевидно, что указанное значение для $\frac{1}{R}$ надо вычислить до второй степени ω и в соответствии с этим же правилом следует представить второй множитель, содержащий x. С этой целью я замечу, что если мы имеем выражение вида $x^{\omega}\int x^{-\omega}V\,dx$, которое надо разложить по степеням ω, то это весьма удобно можно сделать таким способом. Положим

$$v=x^{\omega}\int x^{-\omega}V\,dx,$$

так что

$$x^{-\omega}v=\int x^{-\omega}V\,dx.$$

Дифференцируя, найдем, что $dv-\frac{\omega v\,dx}{x}=V\,dx$, и поэтому, полагая

$$v=T+\omega T'+\omega^2T''+\omega^3T'''\ +\ \text{и т. д.},$$

мы получим

$$\left.\begin{aligned}&dT+\omega\,dT'+\omega^2\,dT''+\omega^3\,dT'''\ +\ \text{и т. д.}\\ &-V\,dx-\omega T\frac{dx}{x}-\omega^2T'\frac{dx}{x}-\omega^3T''\frac{dx}{x}-\ \text{и т. д.}\end{aligned}\right\}=0,$$

размещая слагаемые по степеням ω. Таким образом,

$$T=\int V\,dx,\ T'=\int\frac{dx}{x}\int V\,dx,\ T''=\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int V\,dx\ \text{и т. д.}$$

Следовательно, так как это прилагается к $V=x^{\alpha}X$, слагаемое в интеграле, порождаемое множителем $\gamma+z=\alpha-\omega+z$, будет

$$\left(\frac{1}{\omega^2R}+\frac{1}{\omega\,dz}d\,\frac{1}{R}+\frac{1}{2\,dz^2}d^2\frac{1}{R}\right)x^{-\alpha}\Big(\int x^{\alpha}X\,dx$$
$$+\omega\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx+\omega^2\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx\Big).$$

Если его объединить со слагаемым, порождаемым множителем $(\alpha+z)^2$, то все бесконечные члены взаимно уничтожатся, и, когда количество $P=(\alpha+z)^3R$, в соответствии с кубическим множителем $(\alpha+z)^3$ в интеграл войдут слагаемые

$$\frac{1}{R}x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx+\frac{1}{dz}d\,\frac{1}{R}x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx$$
$$+\frac{1}{2\,dz^2}\,d^2\,\frac{1}{R}\,x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx,$$

причем здесь в количестве $R=\frac{P}{(\alpha+z)^3}$ везде надо писать $z=-\alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 1

1272. Метод, примененный при решении этой задачи, легко может быть распространен на любое число равных множителей. Действительно, если $(\alpha+z)^m$ является множителем количества P и если в дроби $\frac{(\alpha+z)^m}{P}$ и в ее дифференциалах после их разложения положить $z=-\alpha$, то соответствующие слагаемые в интеграле получаются в таком виде:

Множитель в количестве P	$\alpha+z$	$(\alpha+z)^2$	$(\alpha+z)^3$
Слагаемое интеграла	$\frac{\alpha+z}{P}x^{-\alpha}\int x^\alpha X\,dx$	$\frac{(\alpha+z)^2}{P}x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int x^\alpha X\,dx$	$\frac{(\alpha+z)^3}{P}x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\times\int\frac{dx}{x}\int x^\alpha X\,dx$
		$\frac{1}{dz}d\frac{(\alpha+z)^2}{P}x^{-\alpha}\int x^\alpha X\,dx$	$\frac{1}{dz}d\frac{(\alpha+z)^3}{P}x^{-\alpha}\times\int\frac{dx}{x}\int x^\alpha X\,dx$
			$\frac{1}{2\,dz^2}d^2\frac{(\alpha+z)^2}{P}x^{-\alpha}\times\int x^\alpha X\,dx$

СЛЕДСТВИЕ 2

1273. Если бы было два или большее число равных между собою двойных множителей, то при условии, что

$$\alpha=f\left(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\right)\quad\text{и}\quad\beta=f\left(\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta\right),$$

слагаемые, вычисленные по вышепримененному методу для множителей $(\alpha+z)^2$ и $(\beta+z)^2$, можно без труда объединить и привести к действительному виду.

ПОЯСНЕНИЕ

1274. В главе III этого раздела надо было воспользоваться методом, подобным тому, который применен в этой главе, и тогда не надо было бы опасаться никаких ошибок. Однако теперь было бы излишне исправлять здесь допущенные там ошибки, так как не только ясно, что при этом метод остается тем же, но и уравнение, которое рассмотрено здесь, легко может быть преобразовано к виду, который рассматривается там, и наоборот. Действительно, если бы в уравнении главы III

$$X=Ay+\frac{B\,dy}{dx}+\frac{C\,d^2y}{dx^2}+\frac{D\,d^3y}{dx^3}+\frac{E\,d^4y}{dx^4}+\text{и т. д.}$$

положить $x=lv$ и, следовательно, $dx=\frac{dv}{v}$, то функция X перейдет в функцию от v, каковая пусть будет V, и получится уравнение такого вида, какой мы здесь рассматривали. Но поскольку выше мы принимали постоянным элемент dx, то надо от этого условия избавиться, и с этой целью положим

$$dy=p\,dx,\quad dp=q\,dx,\quad dq=r\,dx,\quad dr=s\,dx\ \text{и т. д.}$$

Таким образом, получается следующее уравнение:

$$X=V=Ay+Bp+Cq+Dr+Es+Ft+\text{и т. д.}$$

Однако теперь, поскольку $dx = \frac{dv}{v}$, получаем, принимая постоянным элемент dv,

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{dy}{dx} = \frac{v\,dy}{dv}, \\
q &= \frac{dp}{dx} = \frac{v^2\,d^2y}{dv^2} + \frac{v\,dy}{dv}, \\
r &= \frac{dq}{dx} = \frac{v^3\,d^3y}{dv^3} + \frac{3v^2\,d^2y}{dv^2} + \frac{v\,dy}{dv}, \\
s &= \frac{dr}{dx} = \frac{v^4\,d^4y}{dv^4} + \frac{6v^3\,d^3y}{dv^3} + \frac{7v^2\,d^2y}{dv^2} + \frac{v\,dy}{dv}, \\
t &= \frac{ds}{dx} = \frac{v^5\,d^5y}{dv^5} + \frac{10v^4\,d^4y}{dv^4} + \frac{25v^3\,d^3y}{dv^3} + \frac{15v^2\,d^2y}{dv^2} + \frac{v\,dy}{dv}
\end{aligned}
$$

и т. д.

Поэтому получается следующее уравнение относительно v и y:

$$
\begin{array}{lllllll}
V = Ay + & \dfrac{Bv\,dz}{dv} + & \dfrac{Cv^2\,d^2y}{dv^2} + & \dfrac{Dv^3\,d^3y}{dv^3} + & \dfrac{Ev^4\,d^4y}{dv^4} + & \dfrac{Fv^5\,d^5y}{dv^5} + \text{и т. д.} \\
 & +C & +3D & +6E & +10F & \\
 & +D & +7E & +25F & & \\
 & +E & +15F & & & \\
 & +F & & & &
\end{array}
$$

интегрирование которого мы здесь покажем. Прежде всего следует заметить, что то алгебраическое количество P, которое здесь надо образовать,

$$
\begin{aligned}
P = A + (B + C + D + E + F)(z-1) + (C + 3D + 7E + 15F)(z-1)(z-2) \\
+ (D + 6E + 25F)(z-1)(z-2)(z-3) + \text{и т. д.},
\end{aligned}
$$

приводится к виду

$$
P = A + B(z-1) + C(z-1)^2 + D(z-1)^3 + E(z-1)^4 + F(z-1)^5 + \text{и т. д.},
$$

и в этом виде оно отличается от того выражения, которым мы с целью интегрирования пользовались в главе III, только тем, что там буква z обозначает то, что здесь обозначает $z-1$. В силу этого интегрирование одного из этих уравнений весьма легко сводится к интегрированию другого.

ПОСЛЕСЛОВИЕ К ПЕРВОЙ КНИГЕ

1275. Итак, это, пожалуй, все, что представляется относящимся к первой книге интегрального исчисления, в которой я решил изложить метод нахождения функций одного переменного по какому угодно заданному соотношению между дифференциалами любого порядка, и мне кажется, что эта работа изложена таким образом, что вряд ли опущено что-либо из открытого и опубликованного до сих пор касательно этого предмета другими.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика 3

ПЕРЕЧЕНЬ ГЛАВ, СОДЕРЖАЩИХСЯ ВО ВТОРОМ ТОМЕ

ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

КНИГА ПЕРВАЯ

Часть вторая или метод нахождения функций одного переменного по данному соотношению между дифференциалами второго или высших порядков

Раздел первый. О решении дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих только два переменных 9

Глава I. Об интегрировании простых дифференциальных выражений второго порядка 9

Глава II. О дифференциальных уравнениях второго порядка, в которые не входит одно из двух переменных 25

Глава III. Об однородных дифференциальных уравнениях второго порядка и об уравнениях, которые приводятся к такому виду 47

Глава IV. О дифференциальных уравнениях второго порядка, в которые одно из двух переменных входит в первом измерении 68

Глава V. Об интегрировании с помощью множителей дифференциальных уравнений второго порядка, в которых одно из переменных не превышает первого измерения 88

Глава VI. Об интегрировании других дифференциальных уравнений второго порядка с помощью подходящих множителей 114

Глава VII. О решении уравнения $dy^2+ax^n y\,dx^2=0$ с помощью бесконечных рядов 135

Глава VIII. О решении других дифференциальных уравнений второго порядка с помощью бесконечных рядов 162

Глава IX. О преобразовании дифференциальных уравнений второго порядка вида $L\,d^2y+M\,dx\,dy+Ny\,dx^2=0$ 183

Глава X. О построении дифференциальных уравнений второго порядка с помощью квадратур кривых 199

Глава XI. О построении дифференциальных уравнений второго порядка по их решению в виде бесконечных рядов 222

Глава XII. О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений второго порядка 245

Раздел второй. О решении дифференциальных уравнений третьего и высших порядков, содержащих только два переменных 257

Глава I. Об интегрировании простых дифференциальных выражений третьего или высшего порядка 257

Глава II. О решении уравнений вида $Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+$ $+E\frac{d^4y}{dx^4}+$ и т. д. $=0$, где элемент dx принимается постоянным 267

Глава III. Об интегрировании дифференциальных уравнений вида $X=Ay+\frac{B\,dy}{dx}+\frac{C\,d^2y}{dx^2}+\frac{D\,d^3y}{dx^3}+\frac{E\,d^4y}{dx^4}+$ и т. д. 285

Глава IV. Приложение изложенного в предыдущей главе метода интегрирования к примерам 317

Глава V. Об интегрировании дифференциальных уравнений вида $X=Ay+\frac{Bx\,dy}{dx}+\frac{Cx^2\,d^2y}{dx^2}+\frac{Dx^3\,d^3y}{dx^3}+\frac{Ex^4\,d^4y}{dx^4}+$ и т. д. 340