ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Том I

ПЕРЕВОД С ЛАТИНСКОГО
С. Я. ЛУРЬЕ *и* М. Я. ВЫГОДСКОГО

ПРЕДИСЛОВИЕ
М. Я. ВЫГОДСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1956

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ ПЕРВОГО ТОМА «ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ» Л. ЭЙЛЕРА

Трехтомное «Интегральное исчисление» Эйлера завершает грандиозный курс математического анализа и его геометрических приложений; первым звеном этого курса является двухтомное «Введение в анализ бесконечно малых» (1748, 1749), вторым—«Дифференциальное исчисление» (1755)[1]. К работе над «Интегральным исчислением» Эйлер приступил в октябре 1759 г. Через четыре года, в декабре 1763 г., Эйлер сообщал (в письме к X. Гольдбаху), что рукопись «Интегрального исчисления» завершена полностью. Но, по-видимому, в течение ряда лет, протекших до печатания «Интегрального исчисления» (первый том вышел в 1768 г., второй—в 1769 г., третий—в 1770 г.), Эйлер вносил в рукопись существенные дополнения; так, в главе VI второго раздела первого тома он излагает «не так давно найденные результаты» относительно интегрирования (в алгебраическом виде) уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}}=\frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}}.$$

Эти результаты были впервые опубликованы Эйлером в 1767 г., т. е за год до публикации первого тома «Интегрального исчисления».

Термин «интегральное исчисление» в эпоху Эйлера употреблялся в гораздо более широком смысле, чем теперь. Лишь небольшая часть труда Эйлера посвящена интегрированию функций; остальные разделы охватывают интегрирование дифференциальных уравнений—обыкновенных и с частными производными. Как и всегда, излагая материал строго систематически и в высшей степени популярно, Эйлер почти в каждой главе доводит изложение до результатов, открытых буквально в последние дни перед написанием трактата. Огромное большинство этих новых результатов принадлежит самому Эйлеру. В «Интегральном исчислении» эта манера Эйлера особенно ощутительна, так как теория дифференциальных уравнений находилась в это время в стадии интенсивной разработки, тогда как материал «Введения в анализ» и «Дифференциального исчисления» в значительной мере приобрел устоявшиеся формы.

С другой стороны, методика изложения в «Интегральном исчислении» во многих отношениях ближе к современной, чем в предшествующих частях курса. Например, интегрирование функций или элементарные методы

[1]) Русские переводы этих работ:

Леонард Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, т. 1, ОНТИ, 1936.

Леонард Эйлер, Дифференциальное исчисление, Гостехиздат, 1949.

интегрирования дифференциальных уравнений излагаются и сейчас почти в той же форме, в какой их впервые изложил Эйлер. Причиной этого является, пожалуй, то обстоятельство, что в упомянутых разделах ведущую роль играет формальный элемент, и непревзойденное конструктивное мастерство Эйлера оказало определяющее влияние на всю позднейшую учебную литературу.

Конечно, доверие Эйлера к силе аналитического аппарата и к индуктивно найденным закономерностям потребовало позднее новой, более углубленной трактовки вопросов существования и единственности. Но даже и там, где Эйлер игнорирует количественные оценки, позднейшие исследования сохранили многие структурные черты изложения Эйлера; чтобы убедиться в этом, достаточно познакомиться, скажем, с эйлеровой теорией приближенного интегрирования дифференциальных уравнений (см., например, в настоящем томе §§ 650—667).

В предисловии к новейшему изданию «Интегрального исчисления» [1]) Л. Шлезингер, высказывая мысль, что Эйлер пришел бы к количественному методу, если бы он «поставил задачу действительно определить величину допущенной погрешности», говорит, что история математики еще должна осветить вопрос, почему математики XVIII века и в их числе такие, как Эйлер и Лагранж, не пошли по пути, который спустя несколько десятилетий проложили Гаусс, Больцано, Коши и Абель. На этот вопрос мы сделали попытку ответить во вступительном слове к «Дифференциальному исчислению» Эйлера [2]); мы полагаем, что высказанные там соображения применимы в полной мере и к «Интегральному исчислению» Эйлера.

Нет сомнения в том, что «Интегральное исчисление» Эйлера знаменует историческую эпоху в развитии математического анализа. Но этим не ограничивается значение этого труда. Идейное его богатство и по настоящее время не исчерпано полностью. В кратком очерке показать это нелегко, и поэтому мы предпочитаем отослать читателя к недавно опубликованным статьям [3]) Н. И. Симонова и Ф. И. Франкля, оставляя за собой возможность позднее вернуться к этой теме, отметив и некоторые пункты несогласия с упомянутыми авторами.

Не случайно поэтому, что «Интегральное исчисление» издавалось чаще, чем другие курсы Эйлера; Петербургская академия наук издавала его четырежды: в 1768—1770 гг., в 1792—1793 гг., в 1824—1827 гг. и в 1895 г. (в последнем издании—только третий том). Эйлер лишился зрения в 1766 г. и корректур «Интегрального исчисления» читать не мог. Поэтому в первом издании оказалось большое количество ошибок, лишь частично исправленных в последующих трех. Редакторам новейшего издания латинского оригинала Л. Шлезингеру и Ф. Энгелю мы обязаны очень тщательным исправлением текста.

«Интегральное исчисление» не раз переводилось на живые языки, но в переводе на русский язык оно появляется впервые. Объем работы и ее срочность сделали необходимым разделить труд перевода между несколь-

[1]) Leonhardi Euleri, Opera omnia, v. 1, Берлин, 1913.

[2]) И несколько подробнее в статье «Математическая строгость в 18 веке», Институт истории естествознания АН СССР, Труды совещания по истории естествознания, 1947, стр. 183—190.

[3]) Н. И. Симонов, О научном наследии Леонарда Эйлера в области дифференциальных уравнений,—Историко-математические исследования под ред. Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича, Гостехиздат, 1954, стр. 513—595.

Ф. И. Франкль, Об исследованиях Л. Эйлера в области теории уравнений в частных производных,—там же, стр. 596—624.

кими лицами; при этом были приняты меры к обеспечению единства принципов перевода и терминологии. Вернейшим способом достижения этой цели является стремление добиваться возможно большей близости перевода к оригиналу. В тех случаях, когда такая близость могла бы помешать правильному пониманию мысли Эйлера, переводчики первого тома предпочитали дать необходимые пояснения в примечаниях.

Конечно, перевод математического трактата нельзя приравнять к переводу художественного произведения, но все же слова А. С. Пушкина: «подстрочный перевод никогда не может быть верным», сказанные им по поводу французского перевода «Потерянного рая» Мильтона, в известной мере справедливы и по отношению к научному сочинению. Язык «Интегрального исчисления» Эйлера труднее, чем язык других его курсов, может быть, потому, что на стилистическую обработку у автора не хватило времени, но, пожалуй, в большей мере вследствие новизны тематики. В «Интегральном исчислении» гораздо больше «беллетристических» пояснений, гипотетических высказываний и общих оценок. Во всех подобных случаях мы стремились к точному воспроизведению мысли автора, а не буквы, а в примечаниях приводили соответствующие выдержки из латинского текста. Содержащиеся в примечаниях математические и исторические пояснения принадлежат М. Я. Выгодскому. Были использованы также примечания Л. И. Шлезингера и Ф. Энгеля; они отмечены инициалами Л. Ш. и Ф. Э. Слова, добавленные переводчиками по стилистическим соображениям, заключены в квадратные скобки.

В ряде случаев обозначения Эйлера заменены, но в таких случаях всегда указываются обозначения оригинала. В вопросе о том, какие обозначения подлежат изменению, а какие нет, мы старались придерживаться новейшего издания «Интегрального исчисления».

Пользуемся случаем выразить глубокую признательность З. Г. Либину за его помощь в работе над переводом.

М. Я. Выгодский

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ ПЕРВЫЙ

ГДЕ ИЗЛАГАЮТСЯ ОСНОВНЫЕ НАЧАЛА МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ВПЛОТЬ ДО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

INSTITVTIONVM CALCVLI INTEGRALIS

VOLVMEN PRIMVM

IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRINCIPIIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.

PETROPOLI

Impensis Academiae Imperialis Scientiarum

1768.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ ВООБЩЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1

1. *Интегральное исчисление есть метод, посредством которого по данному соотношению между дифференциалами количеств находят соотношение между самими количествами, а действие, с помощью которого это достигается, называется интегрированием.*

СЛЕДСТВИЕ 1

2. Значит, в то время как дифференциальное исчисление учит находить соотношение между дифференциалами по данному соотношению между переменными количествами, интегральное исчисление дает метод решения обратной задачи [1]).

СЛЕДСТВИЕ 2

3. В анализе [2]) постоянно попарно противоставляются друг другу два действия, как, например, вычитание противоставляется сложению, деление—умножению, извлечение корня—возведению в степень. Подобным же образом интегральное исчисление противоставляется дифференциальному исчислению.

СЛЕДСТВИЕ 3

4. Если предложено некоторое соотношение между двумя переменными количествами x и y, то дифференциальное исчисление дает метод разыскания отношения дифференциалов [3]) $dy : dx$; если же, наоборот, по этому отношению дифференциалов требуется определить соотношение самих количеств x и y, то эта задача относится к интегральному исчислению.

ПОЯСНЕНИЕ [4]) 1

5. В дифференциальном исчислении [5]) я уже отметил, что задачу разыскания дифференциалов нужно понимать не в абсолютном, а в относи-

---

[1]) В оригинале methodum inversam suppeditat (дает обратный метод).

[2]) Под анализом Эйлер понимает как алгебру (анализ конечных количеств), так и анализ бесконечно малых.

[3]) Эйлер всюду пользуется обозначениями ∂x, ∂y и т. д., т. е. символ d обозначает курсивной буквой.

[4]) Scholion.

[5]) Л. Эйлер, Дифференциальное исчисление, перевод с латинского, вступительная статья и примечания М. Я. Выгодского, Гостехиздат, 1946, § 120, стр. 105. Далее цитируется «Дифференциальное исчисление».

тельном смысле; это значит, что если y есть некоторая функция от x, то нужно определить не столько сам ее дифференциал dy, сколько его отношение к дифференциалу dx. Действительно, так как все дифференциалы сами по себе равны нулю [1]), то какова бы ни была функция y количества x, всегда $dy = 0$; таким образом, в абсолютном смысле здесь чего-нибудь большего нельзя и искать. Правильная же постановка вопроса такова: x получает бесконечно малое, т. е. исчезающее [2]) приращение dx; требуется определить, как относится к dx приращение, которое вследствие этого получает функция y. Правда, оба приращения $= 0$; однако между ними существует определенное отношение, которое и находится надлежащим образом в дифференциальном исчислении. Так, если $y = x^2$, то, как доказывается в дифференциальном исчислении, $\frac{dy}{dx} = 2x$; и это отношение приращений верно лишь в том случае, если приращение dx, которым порождается dy, считать равным нулю [3]). Тем не менее, после того как сделано это предостережение об истинном понятии дифференциала, допустимо пользоваться и общепринятыми выражениями, в которых о дифференциалах говорится как бы в абсолютном смысле, лишь бы мысленно всегда иметь в виду истину. Так, мы вправе сказать: если $y = x^2$, то $dy = 2x\,dx$. Правда, если бы кто-либо сказал, что $dy = 3x\,dx$ или что $dy = 4x\,dx$, то и это не будет ложным, ибо также и эти равенства имеют место вследствие того, что $dx = 0$ и $dy = 0$. Но лишь первое равенство согласуется с истинным отношением $\frac{dy}{dx} = 2x$.

ПОЯСНЕНИЕ 2

6. У англичан дифференциальное исчисление называется методом флюксий; сообразно с этим интегральное исчисление называется у них «обратным методом флюксий», поскольку интегральное исчисление ведет обратно от флюксий к текущим количествам [4]). Дело в том, что количества, которые мы называем переменными, англичане называют более удобным наименованием «текущие количества», а их бесконечно малые или исчезающие приращения называют флюксиями, так что для них флюксии — это то же, что для нас дифференциалы [5]).

Это отличие в наименованиях уже настолько укоренилось, что вряд ли следует ожидать, чтобы когда-либо было достигнуто согласование. Я право же охотно заимствовал бы у англичан их словесные выражения, но обозначения, которыми пользуемся мы, на мой взгляд, заслуживают

---

[1]) Дифференциальное исчисление, стр. 91—93, а также предисловие переводчика, стр. 25—29.

[2]) evanescens; у Эйлера этот термин обозначает количество, равное нулю (оно мыслится как постоянное).

[3]) neque hanc incrementorum rationem esse veram nisi incrementum dx ex quo dy nascitur, nihilo aequale statuatur.

[4]) quantitates fluentes, отсюда название «флюенты», т. е. «текущие» (подразумевается — количества).

[5]) Английские математики, следуя Ньютону, обычно называли дифференциалы «моментами»; понятие же флюксии соответствовало теперешнему понятию производной (за аргумент принималось время или иная величина, пропорциональная времени). Различие между флюксией и моментом, конечно, в данной связи несущественно, так как Эйлер рассматривает по сути дела (см. предыдущий пункт) лишь отношения дифференциалов, а они соответственно равны отношениям производных по времени.

безусловного предпочтения перед обозначениями англичан. Однако так как вышло уже много книг, написанных тем и другим способом, то такого рода согласование не принесло бы никакой пользы[1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2

7. *Поскольку дифференциал какой-либо функции от x имеет вид $X\,dx$, пусть теперь предложено такое дифференциальное выражение $X dx$, в котором X есть какая-либо функция от x; тогда та функция, дифференциал которой $= X\,dx$, называется его интегралом и обозначается знаком $\int$, поставленным спереди*[2]), *так что* $\int X\,dx$ *обозначает то переменное количество, дифференциал которого* $= X\,dx$.

СЛЕДСТВИЕ 1

8. Значит, в интегральном исчислении должно быть объяснено, каким образом надлежит находить интеграл данного дифференциального выражения $X\,dx$, т. е. ту функцию от x, дифференциал которой $= X\,dx$ и которая обозначается записью $\int X\,dx$.

СЛЕДСТВИЕ 2

9. Подобно тому как буква d есть знак дифференцирования, букву $\int$ мы применяем как знак интегрирования; поэтому эти два знака взаимно противоположны и как бы уничтожают друг друга, т. е. $\int dX$ будет $= X$: ведь зна́ком $\int dX$ обозначается то количество, дифференциал которого есть dX, а таким количеством и является X.

СЛЕДСТВИЕ 3

10. Так как дифференциалы следующих функций от x

$$x^2, \; x^n, \; \sqrt{a^2-x^2}$$

суть

$$2x\,dx, \quad nx^{n-1}\,dx, \quad -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

то, пользуясь знаком интегрирования $\int$, мы, очевидно, получим:

$$\int 2x\,dx = x^2; \quad \int nx^{n-1}\,dx = x^n; \quad \int -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{a^2-x^2}.$$

Отсюда яснее видно, как применяется этот знак.

---

[1]) huiusmodi conciliatio nullum usum esset habitura.

[2]) Эйлер пользуется общепринятой в его время записью знака интеграла S, т. е. курсивным начертанием буквы s. Это обозначение введено Лейбницем, который употреблял его уже в рукописи в 1675 г. В печати оно появилось в 1684 г. Буква s есть сокращенное обозначение слова summa (так Лейбниц называл интеграл). Термин «интеграл» (от слова integer—целый) введен Яковом Бернулли в 1690 г.

ПОЯСНЕНИЕ 1

11. На первый взгляд представляется, что здесь в расчет входит только одно переменное количество, и все же мы утверждаем, что как в дифференциальном, так и в интегральном исчислении всегда рассматривается отношение двух или большего числа дифференциалов. Действительно, хотя здесь появляется только одно переменное количество x, однако на самом деле рассматриваются два количества: второе — это сама функция, за дифференциал которой мы принимаем $X\,dx$. Если обозначить ее буквой y, то будем иметь $dy = Xdx$, т. е. $\frac{dy}{dx} = X$. Таким образом, здесь предполагается отношение дифференциалов $dy : dx$, которое $= X$; отсюда будем иметь $y = \int X\,dx$, и надо считать, что этот интеграл мы находим не столько из самого дифференциала Xdx (который при всяких обстоятельствах $= 0$), сколько из его отношения к dx. Кстати сказать, знак $\int$ обычно толкуется как начальная буква слова «сумма» [1]). Это толкование возникло из мало подходящего представления [2]), согласно которому интеграл рассматривается как сумма всех дифференциалов, и допустить его можно не с бо́льшим правом, чем широко распространенное представление, будто линии состоят из точек.

ПОЯСНЕНИЕ 2

12. Интегральное исчисление применяется гораздо шире, чем к интегрированию выражений, содержащих только одно переменное. В этом частном случае мы находим функцию одного переменного по данному выражению ее дифференциала; таким же образом интегральное исчисление должно быть распространено на разыскание функции двух или большего числа переменных, когда задано какое-либо соотношение между дифференциалами. Далее, интегральное исчисление не ограничивается только дифференциалами первого порядка, но должно также дать правила, с помощью которых можно находить функции как одного, так и двух или большего числа переменных, когда дано некоторое соотношение между дифференциалами второго или более высокого порядка. Вот почему мы построили определение интегрального исчисления таким образом, чтобы оно включало в себя все вышеупомянутые исследования. В этом определении под словом «дифференциалы» надо понимать дифференциалы любого порядка, а говоря о соотношении, которое задается между ними, я употребил слово *соотношение* для того, чтобы оно имело более широкий смысл, чем слово *отношение*, которое казалось бы выражающим сравнение лишь двух дифференциалов. На основании сказанного мы можем установить следующее подразделение интегрального исчисления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3

13. *Интегральное исчисление разделяется на две части. Первая из них излагает метод нахождения функции одного переменного по тому или иному данному соотношению между ее дифференциалами как первого, так и более высокого порядка.*

---

[1]) См. предыдущее подстрочное примечание.
[2]) ex conceptu parum idoneo.

Вторая же часть содержит метод нахождения функции двух или большего числа переменных, когда предложено соотношение между ее дифференциалами первого или какого-либо более высокого порядка.

СЛЕДСТВИЕ 1

14. Итак, функция, которую требуется найти по данному соотношению дифференциалов, может содержать лишь одно переменное, а может содержать и два или большее число, и в зависимости от этого интегральное исчисление удобно разделить на две главные части, изложению которых мы посвящаем две книги.

СЛЕДСТВИЕ 2

15. Итак, всегда предметом интегрального исчисления является нахождение функций либо одного, либо многих переменных, причем, разумеется, задается какое-нибудь соотношение между дифференциалами первого или какого-нибудь более высокого порядка.

ПОЯСНЕНИЕ

16. Так как мы здесь отнесли к первой части интегрального исчисления разыскание функций одного переменного по данному соотношению дифференциалов, то может показаться, что надо ввести еще ряд частей соответственно числу переменных, входящих в функцию, так чтобы вторая часть содержала функции двух переменных, третья—трех, четвертая—четырех и т. д. Однако же в этих последующих частях применяется почти один и тот же метод, так что, если мы будем в состоянии находить функции, содержащие два переменных, то станет достаточно ясным и переход к функциям, содержащим большее число переменных. Вот почему мы нашли удобным объединить нахождение функций двух и большего числа переменных и составить из этого лишь одну часть интегрального исчисления, которая будет изложена во второй книге.

Не лишне отметить, что эта вторая часть еще никогда не излагалась в руководствах, хотя ее применение в механике, и особенно в учении о жидкостях, принесло бы очень большую пользу. Но так как в этой области почти ничего еще не исследовано, кроме первых зачатков, то наша вторая книга интегрального исчисления будет весьма мало плодотворной, и от нее не следует ожидать многого сверх упоминания о том, чего еще остается желать. Однако, как мне кажется, уже и это принесет большую пользу для дальнейшего развития науки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4

17. *Каждая из двух книг, составляющих интегральное исчисление, удобно подразделяется на части, сообразно порядку дифференциалов, из соотношения которых нужно найти искомую функцию. Именно: первая часть имеет дело с соотношением между дифференциалами первого порядка*[1]*, а вторая—с соотношением между дифференциалами второго порядка; сюда же можно отнести и дифференциалы высших порядков, так как найденные результаты пока еще скудны.*

---

[1]) primi gradus; дословно «первой ступени».

СЛЕДСТВИЕ 1

18. Итак, каждая из двух книг будет состоять из двух частей. В первой из них будет рассматриваться соотношение между дифференциалами первого порядка; во второй же мы встретимся с такими интегрированиями, где задается соотношение между дифференциалами второго или более высоких порядков.

СЛЕДСТВИЕ 2

19. Таким образом, в первой части первой книги ставится задача о разыскании такой функции переменного x $\left(\text{положим эту функцию } = y \text{ и } \frac{dy}{dx} = p\right)$, чтобы выполнялось некоторое заданное соотношение между тремя количествами x, y, p. Иначе говоря: дано некоторое уравнение с этими тремя количествами; требуется найти природу этой функции, т. е. уравнение между x и y, не содержащее p.

СЛЕДСТВИЕ 3

20. Задачи же второй части первой книги будут ставиться так: положим $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ и т. д. и пусть предложено какое-либо уравнение, содержащее количества x, y, p, q и т. д.; требуется найти выражение функции y через x или уравнение, связывающее x и y.

ПОЯСНЕНИЕ 1

21. Бо́льшую часть того, что до сих пор было сделано в интегральном исчислении, надо будет отнести к первой части первой книги, так как на разработку ее [материала] геометры направили свои усилия в первую очередь; в той области, которая составляет содержание второй части, сделано мало, а вторая наша книга до сих пор оставалась почти пустой. Что касается первой части первой книги, которой главным образом исчерпывается содержание нашего сочинения, то она в свою очередь разбивается на ряд разделов сообразно с типом заданного соотношения между количествами x, y и $p = \frac{dy}{dx}$. Соотношение будет самым простым по сравнению с другими, когда $p = \frac{dy}{dx}$ равняется какой-либо функции от x, так что, полагая эту функцию $= X$, имеем $\frac{dy}{dx} = X$ или $dy = X\,dx$. В этом случае все дело сводится к интегрированию дифференциального выражения $X\,dx$. Об этой операции мы уже упоминали выше. Ее обычно называют интегрированием простых дифференциальных выражений[1]) или интегрированием дифференциальных выражений, содержащих только одно переменное. Дело сведется к тому же, если $p = \frac{dy}{dx}$ будет равняться функции одного только количества y, ибо взаимная связь количеств x и y такова, что каждое из них можно рассматривать как функцию другого. Значит, и этот случай надо отнести к первому разделу. Если же $p = \frac{dy}{dx}$

[1]) В оригинале formularum—формул.

будет равно выражению, содержащему оба количества x и y, то будем иметь дифференциальное уравнение вида $P\,dx+Q\,dy=0$, где P и Q суть какие-либо выражения [1]), составленные из x, y и постоянных количеств. Хотя геометры пролили немало пота над интегрированием такого рода уравнений, однако они продвинулись лишь едва дальше нескольких случаев довольно частного характера. Если же p определяется через x и y более сложным образом, так что его значение не может быть представлено явно, например, если

$$p^5=x^2p^3-xyp+x^5-y^5,$$

то остается неизвестным даже и путь, на котором можно пытаться отыскать отсюда соотношение между x и y; поэтому то немногое, что можно здесь сказать по этому поводу, будет помещено вместе с вышеупомянутыми случаями во втором разделе первой части первой книги. Итак, из всего нашего сочинения выяснится в гораздо большей степени то, чего еще остается желать, чем то, что уже сделано, ибо первое по сравнению со вторым нужно считать лишь ничтожной частицей.

ПОЯСНЕНИЕ 2

22. В каждой из частей, о которых сказано выше, бывает и так, что надо отыскать не одну какую-либо функцию, а несколько сразу, причем ни одну из них нельзя определить без помощи остальных, как в обыкновенной алгебре, где для решения задачи бывает нужно ввести в исчисление несколько неизвестных, которые потом надо определить с помощью стольких же уравнений. Может, например, случиться, что надо найти такие две функции y и z количества x, чтобы

$$x\,dy+az^2\,dx=0 \quad \text{и} \quad x^2\,dz+bxy\,dy=c\,dy.$$

Отсюда могли бы составиться новые подразделения нашего сочинения. Но здесь, как и в обыкновенной алгебре, все дело сводится к исключению одной буквы, чтобы в дальнейшем остались только два переменных в одном уравнении. Поэтому, как мне кажется, нет нужды усложнять изложение.

ПОЯСНЕНИЕ 3

23. Во второй книге интегрального исчисления, где отыскивается функция двух или большего числа переменных по данному соотношению между дифференциалами, разбираемые задачи гораздо более разнообразны. Пусть надо найти функцию z двух переменных x и t, и пусть $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ означает отношение ее дифференциала к dx, когда переменным считается только x, а $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ — отношение ее дифференциала к dt, когда за переменное принимается только t [2]). Первая часть будет содержать задачи следу-

[1]) expressiones.

[2]) Для обозначения частных производных Эйлер пользуется записью $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ и т. п., где скобки употребляются, чтобы отличить частные производные от обыкновенных; см. подстрочное примечание к § 4 (стр. 9). Поскольку обозначения обыкновенных и частных дифференциалов у Эйлера одинаковы, мы для сохранения этого единообразия пользуемся всюду знаком d.

ющего рода: предложено некоторое определенное соотношение между количествами x, t, z и $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$; задача состоит в том, чтобы найти уравнение, связывающее только количества x, t и z. Отсюда будет видно, какой функцией от x и t является z. Во второй части, кроме выражений $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ и $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, в расчет войдут еще выражения $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx\,dt}\right)$ и $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ [1]. Их смысл нужно понимать так: положим $\left(\frac{dz}{dx}\right)=p$ и $\left(\frac{dz}{dt}\right)=q$; здесь p и q снова будут некоторыми функциями от x и t. Тогда при обозначениях, сходных с прежними, будем иметь:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\left(\frac{dp}{dx}\right);\quad \left(\frac{d^2z}{dx\,dt}\right)=\left(\frac{dp}{dt}\right)=\left(\frac{dq}{dx}\right);\quad \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\left(\frac{dq}{dt}\right).$$

По данному соотношению, связывающему эти выражения и предыдущие, а вместе с тем и сами количества x, t, z, надлежит найти уравнение, связывающее только эти три количества x, t, z. Такого рода задачи часто встречаются в механике и гидравлике при исследовании движения упругих тел и жидкостей. Поэтому крайне желательно, чтобы этот второй раздел второй книги интегрального исчисления был разработан со всей тщательностью. Но нам не понадобится распространять это исследование на дифференциалы высших порядков, так как до сих пор не изучались еще никакие вопросы, которые потребовали бы столь значительного развития интегрального исчисления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5

24. *Если функции, которые в интегральном исчислении должны быть найдены по соотношению между дифференциалами, не могут быть представлены алгебраически, то они называются трансцендентными, поскольку их подсчет* [2] *превосходит* (transcendit) *силы обыкновенного анализа* [3].

СЛЕДСТВИЕ 1

25. Итак, всякий раз, как интегрирование не удается [4], надо считать функцию, которую требуется получить путем интегрирования, трансцендентной. Так, если дифференциальное выражение Xdx не допускает интегрирования, то его интеграл, обозначаемый $\int Xdx$, есть трансцендентная функция от x.

СЛЕДСТВИЕ 2

26. Отсюда понятно, что если y будет трансцендентной функцией от x, то и обратно x будет трансцендентной функцией от y, и в результате такого обращения получаются новые трансцендентные функции.

---

[1] В оригинале $\left(\frac{d\,dz}{dx\,dx}\right)$, $\left(\frac{d\,dz}{dx\,dt}\right)$, $\left(\frac{d\,dz}{dt\,dt}\right)$.

[2] ratio—здесь это слово надо, повидимому, понимать в его первоначальном смысле (счет, подсчет), а не в специальном математическом (отношение).

[3] То есть алгебры.

[4] Non succedit; см. ниже § 30.

СЛЕДСТВИЕ 3

27. Соответственно различным частям и разделам интегрального исчисления возникают еще более многочисленные роды трансцендентных функций; более того, их число возрастает беспредельно. Отсюда ясно, какое множество количеств из числа всех возможных нам еще неизвестно.

ПОЯСНЕНИЕ 1

28. Еще до того, как мы вступили в область анализа бесконечно малых, мы имели возможность познакомиться с некоторыми видами трансцендентных функций. Первый из них нам дало учение о логарифмах; ведь если y означает логарифм от x, так что $y = lx$[1]), то y безусловно будет трансцендентной функцией от x; таким образом, логарифмы представляют собой как бы первый вид трансцендентных функций. Затем, так как из уравнения $y = lx$ в свою очередь $x = e^y$[2]), то также и x безусловно будет трансцендентной функцией от y; такие функции называются показательными. Далее, рассмотрение углов открыло нам другой род трансцендентных функций: так, если угол, синус которого $= s$, мы положим $= \varphi$, так что $\varphi = \operatorname{Arcsin} s$[3]), то нет никакого сомнения, что φ есть трансцендентная и, более того, бесконечно многозначная [4]) функция от s. Так как, обращая, мы получаем $s = \sin \varphi$[5]), то синус s будет также трансцендентной функцией угла φ[6]). Хотя с этими трансцендентными функциями мы познакомились без помощи интегрального исчисления, однако же мы сталкиваемся с ними уже, так сказать, на самом пороге интегрального исчисления; а их природа нам уже так хорошо известна, что их почти что можно причислить к алгебраическим функциям. Поэтому в интегральном исчислении, коль скоро найденные там трансцендентные функции можно свести к логарифмам или углам, мы всегда смотрим на них как на алгебраические.

ПОЯСНЕНИЕ 2

29. Интегральное исчисление возникло из обращения дифференциального исчисления, и потому оно приводит нас к познанию нового рода величин наравне с остальными обратными методами. Так, если от новичка, только что приступившего к изучению начал математики, не требуется ничего, кроме знания целых положительных чисел, то, овладев сложением, он тотчас же переходит к обратному действию, т. е. к вычитанию; тогда он приобретает понятие об отрицательных числах. Затем, изучив умножение и перейдя к делению, он там получит понятие о дробях. Далее, изучив возведение в степень, он с помощью обратного действия предпримет извлечение корней; так как это часто не удается, то ученик приобретет понятие об иррациональных числах, и это знание считается достаточным

[1]) Обозначение lx Эйлер употребляет как для натуральных («гиперболических») логарифмов, так и для логарифмов с любым основанием (см. §§ 3, 9 и 87). Там, где рассматриваются натуральные логарифмы, это специально оговаривается (ср. § 43).

[2]) В соответствии со сказанным в предыдущем примечании здесь e—произвольное число.

[3]) В оригинале Arc. sin. s.

[4]) infinitiformis.

[5]) В оригинале sin. Ф.

[6]) Слово «синус» в этой фразе употреблено не в смысле наименования функции, а как название величины s, которая рассматривается как синус угла φ.

на протяжении всего обыкновенного анализа[1]). Сходным же образом и интегральное исчисление, если интегрирование не удается, открывает нам новый род трансцендентных количеств. Ведь от всех [выражений] можно взять дифференциал, но не от всех дифференциалов можно взять интеграл.

ПОЯСНЕНИЕ 3

30. Сразу же после первых попыток выполнить интегрирование [2]) нельзя отнести искомые функции к трансцендентным; часто бывает, что и алгебраический интеграл удается получить лишь с помощью искусственных приемов. Если же искомая функция будет трансцендентной, то надо тщательно рассмотреть, не удастся ли привести ее к вышеупомянутым простейшим видам, т. е. к логарифмам или к углам; в этом случае решение можно поставить наравне с алгебраическим. Если и это не удалось бы, то все же следует искать простейший вид трансцендентных функций, к которому можно было бы свести искомую функцию. Для практических же целей гораздо удобнее находить сколь угодно близкие к истине значения трансцендентных функций [3]). С этой целью значительная часть интегрального исчисления отводится отысканию таких бесконечных рядов, которые содержали бы значения этих функций.

ТЕОРЕМА

31. *Все функции, найденные с помощью интегрального исчисления, неопределенны и требуют определения; последнее надо получить из условия задачи, решение которой они дают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Всегда существует бесконечное число функций, имеющих один и тот же дифференциал, поскольку дифференциал функции $P+C$, какое бы значение ни придать постоянному C, всегда один и тот же и равен dP. Поэтому и обратно, если предложен дифференциал dP, то интеграл есть $P+C$, где вместо C можно положить какое угодно постоянное количество. Отсюда ясно, что та функция, дифференциал которой дан и равен dP, есть неопределенная функция, так как она содержит произвольное постоянное количество. Оказывается, что то же с необходимостью имеет место, если нужно определить функцию по какому угодно соотношению между дифференциалами: она всегда будет пополняться произвольным постоянным

---

[1]) haecque cognitio per totam Analysin communem sufficiens censetur. Под «обыкновенным анализом» здесь, как и всюду, имеется в виду алгебра. Мысль Эйлера не вполне ясна. Видимо, он хочет сказать, что в алгебре не рассматривают никаких других обратных действий, кроме вышеперечисленных; дифференциальное же исчисление (см. ниже) не приводит к новым трансцендентностям. Таким образом, лишь в интегральном исчислении возникнет потребность в новых трансцендентных количествах. Следует отметить, что в 60-х годах XVIII века, когда писалось «Интегральное исчисление», теория логарифмов в курс алгебры не включалась. Во «Введении в анализ» (§§ 96—113, стр. 100—114 русского перевода) учение о логарифмах излагается как нечто новое для читателя. Здесь (§ 102) логарифмическая функция рассматривается как обратная по отношению к показательной. Логарифмы впервые были включены в курс алгебры Эйлером в 1770 г. (Эйлер, Алгебра, §§ 220—255).

[2]) Подразумевается, конечно, что первые попытки оказались неудачными.

[3]) Longe commodissimum est, ut valores functionum transcendentium vero proxime exhibeantur. Дословно: «гораздо удобнее, чтобы значения функций выражались как можно ближе к истине».

количеством, между тем как в соотношении дифференциалов не обнаруживалось никакого следа этого количества. Значит, функция, найденная с помощью интегрального исчисления, определится тогда, когда упомянутому произвольному постоянному будет дано определенное значение; его всегда даст условие задачи, решение которой привело к этой функции.

СЛЕДСТВИЕ 1

32. Если функция y от x определяется из какого-либо соотношения между дифференциалами, то благодаря вошедшему произвольному постоянному она может быть определена таким образом, чтобы, положив $x=a$, мы имели бы $y=b$. После этого функция станет определенной, и при любом значении, которое будет дано количеству x, функция y получит определенное значение.

СЛЕДСТВИЕ 2

33. Если функция y определяется из соотношения между дифференциалами второго порядка, то она будет содержать две произвольные постоянные, поэтому она допускает определение по двум условиям[1]), и ее можно определить так, чтобы при $x=a$ не только количество y получило данное значение b, но также и отношение $\frac{dy}{dx}$ стало равным данному значению c.

СЛЕДСТВИЕ 3

34. Если y есть функция двух переменных x и t, найденная из соотношения между дифференциалами, то она также содержит произвольное постоянное; последнее может быть определено таким образом, чтобы при $t=a$ получилось заданное уравнение, т. е. уравнение, выражающее природу какой-либо заданной кривой[2]).

ПОЯСНЕНИЕ

35. Вышеупомянутое определение интегральных функций, т. е. функций, найденных с помощью интегрального исчисления, в каждом отдельном случае легко вытекает из условия разбираемой задачи. Оно не

---

[1]) В оригинале duplicem determinationem admittit, т. е. дословно: «допускает двойное определение».

[2]) Здесь Эйлер странным образом смешивает два различных вопроса. В первой половине фразы речь идет об уравнении вида $P\,dy+Q\,dx+R\,dt=0$, которое во всей его общности изучается в третьем томе «Интегрального исчисления» (задача 3, § 22 и след.). Там выведено и условие интегрируемости этого уравнения. Общий интеграл этого уравнения действительно содержит произвольную постоянную. Однако в общем случае нельзя найти такое значение постоянной, чтобы при $t=a$ получить $y=f(x)$, где $f(x)$—наперед данная функция.

Наперед данную функцию $f(x)$ можно при известных ограничительных условиях получить в том случае, когда мы имеем уравнение в частных производных вида $F\left(t, x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}\right)=0$. Частные случаи такого уравнения Эйлер тоже рассматривает в третьем томе «Интегрального исчисления» (задачи 10, 11 и след., § 73 и след.), где явно оговаривается, что общее решение содержит произвольную функцию (а не произвольное постоянное). Очевидно, во второй части фразы имеется в виду именно случай одного уравнения с частными производными, тогда как первая часть относится к случаю уравнения в полных дифференциалах (или, что то же, к системе двух уравнений с частными производными).

создает никаких трудностей, разве что без нужды решение будет сведено к дифференциалам, между тем как его можно было бы получить с помощью обыкновенного анализа; в последнем случае, так же, как в алгебре, как бы вводятся лишние корни. Но так как это определение [1]) производится только применительно к каждому отдельному случаю, то здесь, где мы излагаем метод интегрирования вообще, мы будем стараться отыскивать интегралы во всей полноте, т. е. так, чтобы постоянные, вошедшие в результате интегрирования, оставались произвольными; мы будем определять их только в том случае, если какое-либо условие будет нас к этому вынуждать. Заметим, что простейшим является такое определение функций от x, при котором они сами делаются исчезающими, когда $x=0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6

36. *Говорят, что найден полный интеграл, когда искомая функция, [заключая в себе] произвольное постоянное, представляется со всей общностью. Если же это постоянное уже определено тем или иным образом, то интеграл называют частным.*

СЛЕДСТВИЕ 1

37. Поэтому в любом случае существует только один полный интеграл; частных же интегралов можно получить бесконечно много. Так, полный интеграл дифференциала $x\,dx$ есть $\frac{1}{2}x^2+C$; частными же интегралами являются $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}x^2+1$, $\frac{1}{2}x^2+2$ и т. д. в бесконечном множестве.

СЛЕДСТВИЕ 2

38. Полный интеграл содержит в себе все частные интегралы; все они могут быть легко образованы из полного интеграла. Обратно же из частных интегралов полный интеграл не становится известным. Но, как будет видно в дальнейшем, в ряде случаев существует способ нахождения полного интеграла по частному.

ПОЯСНЕНИЕ

39. Иногда легко найти частный интеграл по соображению или по догадке. Так, например, пусть требуется найти такую функцию y от x, чтобы было $dy+y^2\,dx=dx+x^2\,dy$; это уравнение очевидно удовлетворяется, если взять $y=x$. Но это—частный интеграл, так как он не содержит никакого произвольного постоянного. Полный же интеграл, как оказывается, есть $y=\frac{1+Cx}{C+x}$; он содержит в себе указанный выше частный интеграл, который получится, если взять $C=\infty$. Точно так же, если взять $C=0$, то отсюда получается другой интеграл $y=\frac{1}{x}$, который так же удовлетворяет вышеприведенному уравнению, как и первый $y=x$. Вообще все частные интегралы, которые удовлетворяют уравнению, должны получиться из общей формулы $y=\frac{1+Cx}{C+x}$, если мы будем давать произвольному

---

[1]) То есть разыскание постоянных.

постоянному C все новые и новые значения; так, например, если взять $C = 1$, то получается $y = 1$. Часто бывает так, что хотя некоторый частный интеграл является алгебраическим, однако же полный интеграл трансцендентный. Пусть, например, задано уравнение $dy + ydx = dx + x\,dy$; сразу же ясно, что оно удовлетворяется, если положить $y = x$, но это — частный интеграл; полный же интеграл, содержащий произвольное постоянное C, есть $y = x + Ce^{-x}$, где через e обозначено число, логарифм которого $= 1$; очевидно, функция y является трансцендентной всегда, за исключением лишь того случая, когда берется $C = 0$.

Этих общих замечаний, предваряющих изложение самого интегрального исчисления (поскольку они относятся ко всем интегрированиям), пожалуй, достаточно, а теперь, после того как мы объяснили строение сочинения, мы приступим к изложению предмета.

ОБЗОР ВСЕГО СОЧИНЕНИЯ ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

КНИГА ПЕРВАЯ: она излагает метод разыскания функции от одного переменного по какому-либо данному соотношению между дифференциалами и содержит две части:

Часть первая: когда это данное соотношение содержит только дифференциалы первого порядка.

Часть вторая: когда это данное соотношение содержит дифференциалы второго или более высокого порядка.

КНИГА ВТОРАЯ: она излагает метод разыскания функций двух или большего числа переменных по какому-либо данному соотношению между дифференциалами и содержит две части:

Часть первая: когда это данное соотношение содержит только дифференциалы первого порядка.

Часть вторая: когда это данное соотношение содержит дифференциалы второго или более высокого порядка.

ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
КНИГА ПЕРВАЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ИЛИ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО ПО КАКОМУ-НИБУДЬ ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ
ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ГЛАВА I

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

40. *Дифференциальное выражение* р а ц и о н а л ь н о, *когда дифференциал dx переменного x, функцию которого надо найти, умножается на рациональную функцию от x; иными словами, если X обозначает рациональную функцию от x, то дифференциальное выражение $X\,dx$ называется рациональным.*

СЛЕДСТВИЕ 1

41. Следовательно, в этой главе мы ищем такую функцию от x (обозначим ее через y), чтобы $\frac{dy}{dx}$ равнялось рациональной функции от x, т. е. (если положить, что такая функция$=X$), чтобы $\frac{dy}{dx}=X$.

СЛЕДСТВИЕ 2

42. Поэтому надо найти такую функцию от x, дифференциал которой$=X\,dx$; интеграл этой функции, который обозначается $\int X\,dx$, даст искомую функцию.

СЛЕДСТВИЕ 3

43. Если P есть такая функция от x, что ее дифференциал $dP=X\,dx$, то, поскольку и количество $P+C$ имеет тот же дифференциал, полный интеграл предложенного выражения $X\,dx$ есть $P+C$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

44. К первой части первой книги относятся такого рода задачи, где требуется найти функцию одного переменного x по данному соотношению между дифференциалами первого порядка. Таким образом, если искомая функция $=y$ и $\frac{dy}{dx}=p$, то нужно достичь того, чтобы можно было, когда задано какое-либо уравнение с тремя количествами x, y и p, найти отсюда свойство функции y, т. е. уравнение между x и y, не содержащее буквы p. Однако эта задача, поставленная столь общим образом, повидимому, настолько превосходит силы анализа, что никогда нельзя надеяться на ее решение. Поэтому нам следует приложить свои усилия к простейшим случаям; из них прежде всего мы сталкиваемся с тем случаем, когда p равняется какой-либо функции от x, скажем X; тогда $\frac{dy}{dx}=X$ или $dy=X\,dx$, так что требуется отыскать интеграл $y=\int X\,dx$; этому и посвящен первый раздел. Однако вследствие многообразия видов функции X и этот случай весьма широк и связан с очень многими трудностями. Вот почему мы решили в настоящей главе разобрать только такие задачи, где функция X рациональна с тем, чтобы далее перейти к иррационным и, наконец, к трансцендентным функциям. Таким образом, эту часть удобно подразделить на два раздела. В первом должно быть изложено интегрирование простых выражений, в которых $p=\frac{dy}{dx}$ есть функция только количества x; во втором же надлежит изучить способ интегрирования в том случае, когда предложено какое-либо уравнение между x, y и p. Так как эти два раздела, и главным образом первый, более всего разработаны геометрами, они и займут наибольшую часть всего сочинения.

ПОЯСНЕНИЕ 2

45. Первоосновы интегрирования нужно почерпнуть из дифференциального исчисления, подобно тому как основы деления заимствуются из умножения, а извлечения корней — из способа возведения в степень.

Когда количество, которое требуется дифференцировать, состоит из нескольких членов, как, например, $P+Q-R$, его дифференциал есть $dP+dQ-dR$; поэтому и наоборот, если дифференциальное выражение будет состоять из нескольких членов, как, например, $P\,dx+Q\,dx-R\,dx$, то его интеграл будет $\int P\,dx+\int Q\,dx-\int R\,dx$, т. е. каждый член надо интегрировать по отдельности. Далее, поскольку дифференциал количества aP есть $a\,dP$, интегралом дифференциального выражения $aP\,dx$ будет $a\int P\,dx$, т. е. на какое постоянное количество умножается дифференциальное выражение, на такое же следует умножать и интеграл. Таким образом, если дифференциальное выражение есть $aP\,dx+bQ\,dx+$ $+cR\,dx$, то какие бы функции от x ни обозначались буквами P, Q, R, интеграл будет $a\int P\,dx+b\int Q\,dx+c\int R\,dx$, так что интегрирование нужно выполнить лишь для отдельных выражений $P\,dx$, $Q\,dx$ и $R\,dx$. После этого надо еще добавить произвольное постоянное C, чтобы получить полный интеграл.

ЗАДАЧА 1

46. *Найти такую функцию от x, чтобы ее дифференциал был $=ax^n\,dx$, т. е. интегрировать дифференциальное выражение $ax^n\,dx$.*

РЕШЕНИЕ

Так как дифференциал степени x^m равен $mx^{m-1}\,dx$, то и обратно $\int mx^{m-1}\,dx=m\int x^{m-1}\,dx=x^m$; поэтому $\int x^{m-1}\,dx=\frac{1}{m}x^m$.

Пусть $m-1=n$, т. е. $m=n+1$; тогда

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad \text{и} \quad a\int x^n\,dx=\frac{a}{n+1}x^{n+1}.$$

Следовательно, полный интеграл предложенного дифференциального выражения $ax^n\,dx$ будет $\frac{a}{n+1}x^{n+1}+C$. Правильность этого видна хотя бы из того, что дифференциал этого выражения действительно оказывается $=ax^n\,dx$. Это интегрирование всегда имеет место, какое бы числовое значение мы ни придали показателю n: положительное или отрицательное, целое или дробное или даже иррациональное.

Исключение составляет только один случай: когда показатель $n=$ $=-1$, т. е. когда требуется интегрировать выражение $\frac{a\,dx}{x}$. Но в дифференциальном исчислении мы показали, что если lx обозначает гиперболический логарифм от x, то его дифференциал будет $=\frac{dx}{x}$; отсюда мы обратно заключаем, что $\int\frac{dx}{x}=lx$, а $\int\frac{a\,dx}{x}=alx$. Поэтому после прибавления произвольного постоянного полный интеграл выражения $\frac{a\,dx}{x}$ будет $=alx+C=lx^a+C$; если же положить lc вместо C, то он выразится в виде lcx^a.

СЛЕДСТВИЕ 1

47. Итак, интеграл дифференциального выражения $ax^n\,dx$ всегда алгебраический, за исключением только того случая, когда $n=-1$; тогда интеграл выражается при помощи логарифмов, каковые следует отнести к числу трансцендентных функций. Именно:

$$\int \frac{a\,dx}{x} = alx + C = lcx^a.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

48. При положительных значениях показателя n надо хорошо запомнить следующие интегрирования, как наиболее часто встречающиеся:

$$\int a\,dx = ax + C, \quad \int ax\,dx = \frac{a}{2}x^2 + C, \quad \int ax^2\,dx = \frac{a}{3}x^3 + C,$$

$$\int ax^3\,dx = \frac{a}{4}x^4 + C, \quad \int ax^4\,dx = \frac{a}{5}x^5 + C, \quad \int ax^5\,dx = \frac{a}{6}x^6 + C.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

49. Если n — отрицательное число, то, положив $n=-m$, получим:

$$\int \frac{a\,dx}{x^m} = \frac{a}{1-m}x^{1-m} + C = \frac{-a}{(m-1)\,x^{m-1}} + C.$$

Отметим следующие простейшие случаи:

$$\int \frac{a\,dx}{x^2} = -\frac{a}{x} + C, \quad \int \frac{a\,dx}{x^3} = -\frac{a}{2x^2} + C, \quad \int \frac{a\,dx}{x^4} = -\frac{a}{3x^3} + C,$$

$$\int \frac{a\,dx}{x^5} = -\frac{a}{4x^4} + C, \quad \int \frac{a\,dx}{x^6} = -\frac{a}{5x^5} + C$$

и т. д.

СЛЕДСТВИЕ 4

50. Интегралы получаются отсюда и тогда, когда n обозначает дробные числа. Пусть сначала $n=\frac{m}{2}$; тогда

$$\int a\,dx\sqrt{x^m} = \frac{2a}{m+2}\,x\sqrt{x^m} + C.$$

Отметим следующие случаи:

$$\int a\,dx\sqrt{x} = \frac{2a}{3}x\sqrt{x} + C, \quad \int ax\,dx\sqrt{x} = \frac{2a}{5}x^2\sqrt{x} + C,$$

$$\int ax^2\,dx\sqrt{x} = \frac{2a}{7}x^3\sqrt{x} + C, \quad \int ax^3\,dx\sqrt{x} = \frac{2a}{9}x^4\sqrt{x} + C.$$

СЛЕДСТВИЕ 5

51. Положим теперь $n=-\frac{m}{2}$; будем иметь:

$$\int \frac{a\,dx}{\sqrt{x^m}} = \frac{2a}{2-m}\,\frac{x}{\sqrt{x^m}} + C = \frac{-2a}{(m-2)\sqrt{x^{m-2}}} + C.$$

Отметим следующие случаи:

$$\int \frac{a\,dx}{\sqrt{x}} = 2a\sqrt{x} + C, \quad \int \frac{a\,dx}{x\sqrt{x}} = \frac{-2a}{\sqrt{x}} + C, \quad \int \frac{a\,dx}{x^2\sqrt{x}} = \frac{-2a}{3x\sqrt{x}} + C,$$

$$\int \frac{a\,dx}{x^3\sqrt{x}} = \frac{-2a}{5x^2\sqrt{x}} + C.$$

СЛЕДСТВИЕ 6

52. Если вообще положим $n = \frac{\mu}{\nu}$, то получится:

$$\int ax^{\frac{\mu}{\nu}}\,dx = \frac{\nu a}{\mu+\nu} x^{\frac{\mu+\nu}{\nu}} + C,$$

или через радикалы:

$$\int a\,dx \sqrt[\nu]{x^\mu} = \frac{\nu a}{\mu+\nu} \sqrt[\nu]{x^{\mu+\nu}} + C.$$

Если же положить $n = \frac{-\mu}{\nu}$, то получится:

$$\int \frac{a\,dx}{x^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{\nu a}{\nu-\mu} x^{\frac{\nu-\mu}{\nu}} + C,$$

или через радикалы:

$$\int \frac{a\,dx}{\sqrt[\nu]{x^\mu}} = \frac{\nu a}{\nu-\mu} \sqrt[\nu]{x^{\nu-\mu}} + C.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

53. Хотя я решил посвятить эту главу изучению только рациональных функций, однако эти иррациональности появились столь непринужденно, что их можно рассматривать как рациональные функции. Добавим еще, что отсюда [1]) можно находить интегралы и более сложных выражений, если вместо x подставлять функции какой-либо другой переменной z. Так, если мы положим $x = f + gz$, то будем иметь $dx = g\,dz$; поэтому, написав $\frac{a}{g}$ вместо a, получим:

$$\int a\,dz\,(f+gz)^n = \frac{a}{(n+1)g}(f+gz)^{n+1} + C.$$

В особом же случае, когда $n = -1$:

$$\int \frac{a\,dz}{f+gz} = \frac{a}{g}\,l\,(f+gz) + C.$$

Далее, если $n = -m$, то будем иметь:

$$\int \frac{a\,dz}{(f+gz)^m} = \frac{-a}{(m-1)\,g\,(f+gz)^{m-1}} + C.$$

Если положить $n = \frac{\mu}{\nu}$, то получим:

$$\int a\,dz\,(f+gz)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\nu a}{(\nu+\mu)\,g}(f+gz)^{\frac{\mu}{\nu}+1} + C;$$

[1]) То есть из общей формулы § 46.

если же положить $n = -\frac{\mu}{\nu}$, то найдем:

$$\int \frac{a\,dz}{(f+gz)^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{\nu a(f+gz)}{(\nu-\mu)\,g\,(f+gz)^{\frac{\mu}{\nu}}} + C.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

54. Кроме того, заслуживает быть отмеченным следующее замечательное свойство. Здесь требуется найти такую функцию y, чтобы $dy = ax^n\,dx$; поэтому, если мы положим $\frac{dy}{dx} = p$, то будем иметь соотношение $p = ax^n$, из которого надо найти функцию y, а так как

$$y = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C,$$

то в силу соотношения $ax^n = p$ будем иметь также $y = \frac{px}{n+1} + C$. Таким образом, мы имеем здесь случай, когда соотношение дифференциалов задается некоторым уравнением, связывающим x, y и p, о котором уже известно, что оно удовлетворяется уравнением $y = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$. Однако последнее будет уже не полным, а лишь частным интегралом для соотношения, содержащегося в уравнении $y = \frac{px}{n+1} + C$, так как этот интеграл не содержит нового постоянного, которое не входило бы в дифференциальное соотношение. Полный же интеграл есть $y = \frac{aD}{n+1}x^{n+1} + C$, содержащий новую постоянную D; действительно, из этого уравнения получаем $\frac{dy}{dx} = aDx^n = p$, а поэтому $y = \frac{px}{n+1} + C$. Хотя это свойство относится не к настоящей главе, однако его было полезно отметить.

ЗАДАЧА 2

55. *Найти такую функцию от x, чтобы ее дифференциал был $= X\,dx$, где X обозначает любую целую рациональную функцию от x, т. е. определить интеграл $\int X\,dx$.*

РЕШЕНИЕ

Так как X есть целая рациональная функция от x, то она должна представляться выражением вида

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \quad \text{и т. д.}$$

Согласно предшествующей задаче искомый интеграл есть

$$\int X\,dx = C + \alpha x + \frac{1}{2}\beta x^2 + \frac{1}{3}\gamma x^3 + \frac{1}{4}\delta x^4 + \frac{1}{5}\varepsilon x^5 + \frac{1}{6}\zeta x^6 + \text{ и т. д.}$$

и вообще, если

$$X = \alpha x^{\lambda} + \beta x^{\mu} + \gamma x^{\nu} + \quad \text{и т. д.,}$$

то получим:

$$\int X\,dx = C + \frac{\alpha}{\lambda+1}x^{\lambda+1} + \frac{\beta}{\mu+1}x^{\mu+1} + \frac{\gamma}{\nu+1}x^{\nu+1} + \quad \text{и т. д.,}$$

где показатели λ, μ, ν и т. д. могут также обозначать как отрицательные, так и дробные числа: надо только отметить, что при $\lambda = -1$ будем иметь $\int \frac{a\,dx}{x} = alx$; этот случай единственный, который следует отнести к категории трансцендентных.

ЗАДАЧА 3

56. *Пусть X означает любую рациональную дробную функцию от x; описать способ, при помощи которого можно было бы найти интеграл выражения $X\,dx$.*

РЕШЕНИЕ

Пусть $X = \frac{M}{N}$, причем M и N — целые функции от x. Прежде всего надо посмотреть, не будет ли высшая степень количества x в числителе M такой же, как в знаменателе N, или еще большей. В таком случае из дроби $\frac{M}{N}$ надо исключить [1]) при помощи деления целую часть. Интегрирование ее не сопряжено ни с какими трудностями; поэтому все дело сводится к интегрированию такой дроби $\frac{M}{N}$, у которой в числителе M высшая степень x меньше, чем в знаменателе N.

Затем надо найти все множители знаменателя N как простые, если они окажутся вещественными, так и парновещественные [2]), т. е. такие, которые заменяют пару простых мнимых множителей; одновременно с этим надо посмотреть, все ли эти множители неравные или не все. Дело в том, что для случая равенства множителей [вид] разложения дроби $\frac{M}{N}$ на простейшие дроби [3]) должен быть установлен иным образом, чем в том случае, когда частные дроби, сумма которых равна предложенной дроби $\frac{M}{N}$, порождаются отдельными множителями, а именно: простой множитель $a + bx$ порождает дробь

$$\frac{A}{a+bx};$$

если два множителя равны друг другу, т. е. если знаменатель N имеет множитель $(a + bx)^2$, то он порождает дроби

$$\frac{A}{(a+bx)^2} + \frac{B}{a+bx};$$

из множителя $(a + bx)^3$ получаются три дроби:

$$\frac{A}{(a+bx)^3} + \frac{B}{(a+bx)^2} + \frac{C}{a+bx}$$

и т. д.

---

[1]) В оригинале употреблен термин elicere, т. е. «извлечь».

[2]) duplices reales.

[3]) Способ этого разложения изложен Эйлером во «Введении в анализ бесконечно малых», §§ 39—45 (русский перевод стр. 47—62) и §§ 199—210 (стр. 183—196).

Что же касается парного множителя вида $a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2$, то, если нет другого множителя, равного ему, он даст частную дробь

$$\frac{A+Bx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2};$$

если же знаменатель N содержит два таких множителя, равных между собой, то они порождают две частные дроби вида:

$$\frac{A+Bx}{(a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2)^2}+\frac{C+Dx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2};$$

если же множителем знаменателя N будет куб $(a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2)^3$, то из него возникают три частные дроби вида:

$$\frac{A+Bx}{(a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2)^3}+\frac{C+Dx}{(a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2)^2}+\frac{E+Fx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}$$

и т. д.

Когда предложенная дробь $\frac{M}{N}$ будет указанным образом разложена на все свои простейшие дроби, все они будут содержаться в одном из следующих выражений:

$$\frac{A}{(a+bx)^n} \quad \text{или} \quad \frac{A+Bx}{(a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2)^n}.$$

Каждую из них нужно интегрировать отдельно, помножив ее на dx. Сумма всех этих интегралов будет значением искомой функции

$$\int X\,dx=\int\frac{M}{N}\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

57. Итак, при интегрировании всех выражений вида $\frac{M}{N}\,dx$ все дело сводится к интегрированию двух выражений:

$$\int\frac{A\,dx}{(a+bx)^n} \quad \text{и} \quad \int\frac{(A+Bx)\,dx}{(a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2)^n},$$

в которых вместо n последовательно пишутся числа 1, 2, 3, 4 и т. д.

СЛЕДСТВИЕ 2

58. Интеграл первого вида мы нашли уже выше (§ 53), откуда, очевидно, будем иметь:

$$\int\frac{A\,dx}{a+bx}=\frac{A}{b}\,l\,(a+bx)+\text{Const},$$

$$\int\frac{A\,dx}{(a+bx)^2}=\frac{-A}{b\,(a+bx)}+\text{Const},$$

$$\int\frac{A\,dx}{(a+bx)^3}=\frac{-A}{2b\,(a+bx)^2}+\text{Const},$$

и вообще:

$$\int\frac{A\,dx}{(a+bx)^n}=\frac{-A}{(n-1)\,b\,(a+bx)^{n-1}}+\text{Const}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

59. Для решения предложенной задачи не остается, следовательно, ничего иного, как научиться интегрировать выражение

$$\int \frac{(A+Bx)\,dx}{(a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2)^n}$$

сначала для случая $n=1$, а затем для случаев $n=2$, $n=3$, $n=4$ и т. д.

ПОЯСНЕНИЕ 1

60. Если бы мы не стремились избежать мнимостей, то все дело можно было бы уже выполнить на основании изложенного выше; именно, разложив знаменатель N на все его простые множители, будь то действительные или мнимые, мы всегда сможем разложить предложенную дробь на частные дроби вида $\frac{A}{a+bx}$ или $\frac{A}{(a+bx)^n}$, и так как интегрирование их не представляет трудностей, то мы получим интеграл всего выражения $\frac{M}{N}dx$. Но тогда будет довольно утомительно попарно соединять мнимые слагаемые[1]), чтобы получилось вещественное выражение; однако этого безусловно требует суть дела.

ПОЯСНЕНИЕ 2

61. Здесь мы всегда исходим из предпосылки, что у нас есть возможность разложить на множители каждую целую функцию, хотя алгебра и поныне отнюдь не доведена до такого состояния, чтобы такое разложение можно было выполнить на деле. Но из подобной предпосылки в анализе исходят всегда: по мере того как мы продвигаемся вперед, мы принимаем как бы за известное то, что осталось позади, хотя бы оно не было достаточно исследовано; в данном же случае можно удовлетвориться тем, что все множители могут быть найдены по методу приближений с любой точностью. Точно так же, когда мы дальше продвинемся вперед в интегральном исчислении, мы будем считать как бы известными интегралы всех выражений вида $X\,dx$, какую бы функцию от x ни означала буква X, и мы будем считать, что достигли очень большого успеха, если нам удастся привести к такому виду более трудные интегралы. Практическому же применению это нисколько не вредит, поскольку значения выражений вида $\int X\,dx$ можно определять с любой точностью, как мы покажем в дальнейшем. Как бы то ни было, для интегрирования рассматриваемых здесь выражений разложение знаменателя N на его множители совершенно необходимо, так как эти множители по отдельности входят в выражение интеграла; лишь в очень немногих (и притом в совершенно очевидных) случаях можно обойтись без этого разложения. Так, например, если предложено выражение $\frac{x^{n-1}\,dx}{1+x^n}$, то, положив $x^n=v$, сразу видим, что оно перейдет в выражение $\frac{dv}{n(1+v)}$, интеграл которого есть $\frac{1}{n}l(1+v)=$

---

[1]) Binas partes imaginarias... coniungere, т. е. «соединять попарно [сопряженные] мнимые части». И в дальнейшем мы часто переводим термин partes по смыслу словом «слагаемые», «члены» и т. п.

$=\frac{1}{n}l(1+x^n)$. Здесь не было нужды в разложении на множители. Но случаи такого рода настолько очевидны, что обращение с ними не требует никаких особых объяснений.

ЗАДАЧА 4

62. *Найти интеграл вида*

$$y=\int\frac{(A+Bx)\,dx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}.$$

РЕШЕНИЕ

Хотя числитель состоит из двух слагаемых[1]) $A\,dx+Bx\,dx$, но второе $Bx\,dx$ может быть устранено следующим образом. Так как

$$l\,(a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2)=\int\frac{-2ab\,dx\cos\zeta+2b^2x\,dx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2},$$

то, умножив это уравнение на $\frac{B}{2b^2}$ и отняв из предложенного, получим:

$$y-\frac{B}{2b^2}l\,(a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2)=\int\frac{\left(A+\frac{Ba\cos\zeta}{b}\right)dx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2},$$

так что остается проинтегрировать только это выражение. Для краткости положим $A+\frac{Ba\cos\zeta}{b}=C$, так что будем иметь выражение

$$\int\frac{C\,dx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2},$$

которое можно представить так:

$$\int\frac{C\,dx}{a^2\sin^2\zeta+(bx-a\cos\zeta)^2}.$$

Сделаем подстановку $bx-a\cos\zeta=av\sin\zeta$, тогда $dx=\frac{a\,dv\sin\zeta}{b}$, вследствие чего наше выражение получит вид

$$\int\frac{Ca\,dv\sin\zeta:b}{a^2\sin^2\zeta\,(1+v^2)}=\frac{C}{ab\sin\zeta}\int\frac{dv}{1+v^2}.$$

Но из дифференциального исчисления мы знаем, что

$$\int\frac{dv}{1+v^2}=\operatorname{arctg}v=\operatorname{arctg}\frac{bx-a\cos\zeta}{a\sin\zeta},$$

а так как $C=\frac{Ab+Ba\cos\zeta}{b}$, то наш интеграл будет

$$\frac{Ab+Ba\cos\zeta}{ab^2\sin\zeta}\operatorname{arctg}\frac{bx-a\cos\zeta}{a\sin\zeta}.$$

Поэтому интеграл предложенного выражения

$$\frac{(A+Bx)\,dx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}$$

---

[1]) См. предыдущую сноску.

будет
$$\frac{B}{2b^2}\, l\,(a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2)+\frac{Ab+Ba\cos\zeta}{ab^2\sin\zeta}\operatorname{arctg}\frac{bx-a\cos\zeta}{a\sin\zeta}.$$
Чтобы этот интеграл стал полным, надо еще прибавить произвольное постоянное C.

СЛЕДСТВИЕ 1

63. Если к $\operatorname{arctg}\frac{bx-a\cos\zeta}{a\sin\zeta}$ прибавим $\operatorname{arctg}\frac{\cos\zeta}{\sin\zeta}$ (так как мы можем себе представить, что он содержится в постоянном, которое надо прибавить), то получится $\operatorname{arctg}\frac{bx\sin\zeta}{a-bx\cos\zeta}$, так что будем иметь:
$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}$$
$$=\frac{B}{2b^2}\, l\,(a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2)+\frac{Ab+Ba\cos\zeta}{ab^2\sin\zeta}\operatorname{arctg}\frac{bx\sin\zeta}{a-bx\cos\zeta}$$
с прибавлением постоянной C.

СЛЕДСТВИЕ 2

64. Если бы мы пожелали, чтобы этот интеграл исчезал при $x=0$, то надо постоянную C взять равной $\frac{-B}{2b^2}\, la^2$, и тогда получится:
$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}$$
$$=\frac{B}{b^2}\, l\,\frac{\sqrt{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}}{a}+\frac{Ab+Ba\cos\zeta}{ab^2\sin\zeta}\operatorname{arctg}\frac{bx\sin\zeta}{a-bx\cos\zeta}.$$
Таким образом, этот интеграл зависит частью от логарифмов, частью от круговых дуг или углов.

СЛЕДСТВИЕ 3

65. Если буква B исчезает, то исчезает и часть, зависящая от логарифмов, и получается:
$$\int\frac{A\,dx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}=\frac{A}{ab\sin\zeta}\operatorname{arctg}\frac{bx\sin\zeta}{a-bx\cos\zeta}+C.$$
Таким образом, этот интеграл выражается только через угол.

СЛЕДСТВИЕ 4

66. Если угол ζ прямой, а значит $\cos\zeta=0$ и $\sin\zeta=1$, то будем иметь:
$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{B}{b^2}\, l\,\frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}+\frac{A}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C.$$
Если же угол ζ равен $60°$, а значит $\cos\zeta=\frac{1}{2}$ и $\sin\zeta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, получится:
$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{a^2-abx+b^2x^2}=\frac{B}{b^2}\, l\,\frac{\sqrt{a^2-abx+b^2x^2}}{a}+\frac{2Ab+Ba}{ab^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{bx\sqrt{3}}{2a-bx}.$$

В том же случае, когда $\zeta = 120°$, а значит $\cos\zeta = -\frac{1}{2}$ и $\sin\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, получится:

$$\int \frac{(A+Bx)\,dx}{a^2+abx+b^2x^2} = \frac{B}{b^2}\,l\,\frac{\sqrt{a^2+abx+b^2x^2}}{a} + \frac{2Ab-Ba}{ab^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{bx\sqrt{3}}{2a+bx}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

67. Здесь особо замечательным оказывается, что в случае $\zeta = 0$, когда знаменатель, принимающий вид $a^2 - 2abx + b^2x^2$, становится квадратом, интеграл перестает зависеть от угла.

Действительно, если положить угол ζ бесконечно малым, то будем иметь $\cos\zeta = 1$ и $\sin\zeta = \zeta$; поэтому логарифмическая часть есть $\frac{B}{b^2}\,l\,\frac{a-bx}{a}$, а другое слагаемое

$$\frac{Ab+Ba}{ab^2\zeta}\operatorname{arctg}\frac{bx\zeta}{a-bx} = \frac{(Ab+Ba)\,x}{ab\,(a-bx)},$$

так как тангенс бесконечно малой дуги $\frac{bx\zeta}{a-bx}$ равен самой дуге; таким образом, это слагаемое становится алгебраическим. Поэтому получим формулу

$$\int \frac{(A+Bx)\,dx}{(a-bx)^2} = \frac{B}{b^2}\,l\,\frac{a-bx}{a} + \frac{(Ab+Ba)\,x}{ab\,(a-bx)} + \mathrm{Const},$$

справедливость которой очевидна из предыдущего; действительно,

$$\frac{A+Bx}{(a-bx)^2} = \frac{-B}{b\,(a-bx)} + \frac{Ab+Ba}{b\,(a-bx)^2}.$$

Но

$$\int \frac{-B\,dx}{b\,(a-bx)} = \frac{B}{b^2}\,l\,(a-bx) - \frac{B}{b^2}\,la = \frac{B}{b^2}\,l\,\frac{a-bx}{a},$$

$$\int \frac{(Ab+Ba)\,dx}{b\,(a-bx)^2} = \frac{Ab+Ba}{b^2\,(a-bx)} - \frac{Ab+Ba}{ab^2} = \frac{(Ab+Ba)\,x}{ab\,(a-bx)},$$

если оба эти интегрирования определить с тем расчетом, чтобы при $x = 0$ интегралы исчезали.

ПОЯСНЕНИЕ 2

68. Если в дробном дифференциальном выражении $\frac{M\,dx}{N}$ наивысшая степень x в числителе M на одну единицу ниже, чем в знаменателе N, то соответствующий член можно устранить тем же способом, каким мы пользовались здесь. Именно, пусть

$$M = Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{ и т. д.}$$

и

$$N = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \text{ и т. д.}$$

Положим $\frac{M\,dx}{N} = dy$. Так как

$$dN = n\alpha x^{n-1}\,dx + (n-1)\,\beta x^{n-2}\,dx + (n-2)\,\gamma x^{n-3}\,dx + \text{ и т. д.},$$

то

$$\frac{A\,dN}{n\alpha N} = \frac{dx}{N}\left(Ax^{n-1} + \frac{(n-1)\,A\beta}{n\alpha}\,x^{n-2} + \frac{(n-2)\,A\gamma}{n\alpha}\,x^{n-3} + \text{ и т. д.}\right).$$

Если вычесть это значение из dy, то останется

$$dy - \frac{A\,dN}{n\alpha N} = \frac{dx}{N}\left(\left(B - \frac{(n-1)A\beta}{n\alpha}\right)x^{n-2} + \left(C - \frac{(n-2)A\gamma}{n\alpha}\right)x^{n-3} + \text{ и т. д.}\right).$$

Поэтому, если для краткости положить

$$B - \frac{(n-1)A\beta}{n\alpha} = \mathfrak{B},\quad C - \frac{(n-2)A\gamma}{n\alpha} = \mathfrak{C},\quad D - \frac{(n-3)A\delta}{n\alpha} = \mathfrak{D} \quad \text{ и т. д.,}$$

то получится:

$$y = \frac{A}{n\alpha}\,lN + \int \frac{dx\,(\mathfrak{B}x^{n-2} + \mathfrak{C}x^{n-3} + \mathfrak{D}x^{n-4} + \text{ и т. д.})}{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \text{ и т. д.}} = \int \frac{M\,dx}{N}.$$

Стало быть этим способом все дробные дифференциальные выражения можно свести к таким, у которых высшая степень в числителе двумя или несколькими единицами меньше, чем в знаменателе.

ЗАДАЧА 5

69. *Интегральное выражение*

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{(a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2)^{n+1}}$$

преобразовать в другое сходное, в котором степень знаменателя была бы на единицу ниже.

РЕШЕНИЕ

Положим для краткости $a^2 - 2abx\cos\zeta + b^2x^2 = X$ и

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{X^{n+1}} = y.$$

В силу равенства

$$dX = -2ab\,dx\cos\zeta + 2b^2x\,dx$$

имеем:

$$d\,\frac{C + Dx}{X^n} = \frac{-n\,(C + Dx)\,dX}{X^{n+1}} + \frac{D\,dx}{X^n}$$

и, следовательно,

$$\frac{C + Dx}{X^n} = \int \frac{2nb\,(C + Dx)\,(a\cos\zeta - bx)\,dx}{X^{n+1}} + \int \frac{D\,dx}{X^n}.$$

Поэтому будем иметь:

$$y + \frac{C + Dx}{X^n} = \int \frac{dx\,(A + 2nCab\cos\zeta + x\,(B + 2nDab\cos\zeta - 2nCb^2) - 2nDb^2x^2)}{X^{n+1}} + \int \frac{D\,dx}{X^n}.$$

Теперь в первом из этих двух выражений определим буквы C и D так, чтобы числитель делился на X. Очевидно, для этого необходимо, чтобы он был $= -2nDX\,dx$, откуда получаем:

$$A + 2nCab\cos\zeta = -2nDa^2$$

и

$$B + 2nDab\cos\zeta - 2nCb^2 = 4nDab\cos\zeta$$

или же $B-2nCb^2=2nDab\cos\zeta$, а отсюда

$$2nDa=\frac{B-2nCb^2}{b\cos\zeta}.$$

Из первого же условия имеем:

$$2nDa=\frac{-A-2nCab\cos\zeta}{a}.$$

Приравняв друг другу эти два выражения, получим:

$$Ba+Ab\cos\zeta-2nCab^2\sin^2\zeta=0,$$

или

$$C=\frac{Ba+Ab\cos\zeta}{2nab^2\sin^2\zeta},$$

откуда

$$B-2nCb^2=\frac{Ba\sin^2\zeta-Ba-Ab\cos\zeta}{a\sin^2\zeta}=\frac{-Ab\cos\zeta-Ba\cos^2\zeta}{a\sin^2\zeta};$$

таким образом, находим:

$$D=\frac{-Ab-Ba\cos\zeta}{2na^2b\sin^2\zeta}.$$

Стало быть, давая буквам C и D значения

$$C=\frac{Ba+Ab\cos\zeta}{2nab^2\sin^2\zeta},\quad D=\frac{-Ab-Ba\cos\zeta}{2na^2b\sin^2\zeta},$$

будем иметь:

$$y+\frac{C+Dx}{X^n}=\int\frac{-2nDdx}{X^n}+\int\frac{Ddx}{X^n}=-(2n-1)D\int\frac{dx}{X^n},$$

так что

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{X^{n+1}}=\frac{-C-Dx}{X^n}-(2n-1)D\int\frac{dx}{X^n}$$

или

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{X^{n+1}}=\frac{-Ba^2-Aab\cos\zeta+(Ab^2+Bab\cos\zeta)\,x}{2na^2b^2\sin^2\zeta\,X^n}+\frac{(2n-1)(Ab+Ba\cos\zeta)}{2na^2b\sin^2\zeta}\int\frac{dx}{X^n}.$$

Поэтому, если выражение $\int\frac{dx}{X^n}$ будет известно, то можно будет определить и интеграл $\int\frac{(A+Bx)\,dx}{X^{n+1}}$.

СЛЕДСТВИЕ 1

70. Так как при прежнем обозначении, $X=a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2$, имеем:

$$\int\frac{dx}{X}=\frac{1}{ab\sin\zeta}\operatorname{arctg}\frac{bx\sin\zeta}{a-bx\cos\zeta}+\text{Const},$$

то получим:

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{X^2}=\frac{-Ba^2-Aab\cos\zeta+(Ab^2+Bab\cos\zeta)\,x}{2a^2b^2\sin^2\zeta X}$$
$$+\frac{Ab+Ba\cos\zeta}{2a^3b^2\sin^3\zeta}\operatorname{arctg}\frac{bx\sin\zeta}{a-bx\cos\zeta}+\text{Const}.$$

Если положить $B=0$ и $A=1$, то будем иметь:

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{-a\cos\zeta + bx}{2a^2b\sin^2\zeta X} + \frac{1}{2a^3b\sin^3\zeta}\operatorname{arctg}\frac{bx\sin\zeta}{a-bx\cos\zeta} + \text{Const}.$$

Итак, интеграл $\int \frac{(A+Bx)\,dx}{X^2}$ не содержит логарифмов.

СЛЕДСТВИЕ 2

71. Так как

$$\int \frac{dx}{X^3} = \frac{-a\cos\zeta + bx}{4a^2b\sin^2\zeta X^2} + \frac{3}{4a^2\sin^2\zeta}\int \frac{dx}{X^2} + \text{Const},$$

то после подстановки найденного выше значения получим:

$$\int \frac{dx}{X^3} = \frac{-a\cos\zeta + bx}{4a^2b\sin^2\zeta X^2} + \frac{3(-a\cos\zeta + bx)}{2\cdot 4a^4b\sin^4\zeta X} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4a^5b\sin^5\zeta}\operatorname{arctg}\frac{bx\sin\zeta}{a-bx\cos\zeta}.$$

Отсюда далее следует

$$\int \frac{dx}{X^4} = \frac{-a\cos\zeta + bx}{6a^2b\sin^2\zeta X^3} + \frac{5(-a\cos\zeta + bx)}{4\cdot 6a^4b\sin^4\zeta X^2} + \frac{3\cdot 5(-a\cos\zeta + bx)}{2\cdot 4\cdot 6a^6b\sin^6\zeta X} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6a^7b\sin^7\zeta}\operatorname{arctg}\frac{bx\sin\zeta}{a-bx\cos\zeta}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

72. Продолжая и далее последовательно поступать таким же образом, получим все интегралы вида

$$\int \frac{dx}{X},\quad \int \frac{dx}{X^2},\quad \int \frac{dx}{X^3},\quad \int \frac{dx}{X^4} \quad \text{и т. д.}$$

Из них первый выражается только через круговую дугу, а остальные содержат, кроме того, и алгебраические члены.

ПОЯСНЕНИЕ

73. Нам достаточно знать интегралы $\int \frac{dx}{X^{n+1}}$, так как выражение $\int \frac{(A+Bx)\,dx}{X^{n+1}}$ легко к ним приводится; действительно, его можно представить в виде:

$$\frac{1}{2b^2}\int \frac{2Ab^2dx + 2Bb^2x\,dx - 2Bab\,dx\cos\zeta + 2Bab\,dx\cos\zeta}{X^{n+1}},$$

но это выражение в силу того, что $2b^2x\,dx - 2ab\,dx\cos\zeta = dX$, переходит в такое:

$$\frac{1}{2b^2}\int \frac{B\,dX}{X^{n+1}} + \frac{1}{b}\int \frac{(Ab+Ba\cos\zeta)\,dx}{X^{n+1}}.$$

Но $\int \frac{dX}{X^{n+1}} = -\frac{1}{nX^n}$, откуда получим:

$$\int \frac{(A+Bx)\,dx}{X^{n+1}} = \frac{-B}{2nb^2X^n} + \frac{Ab+Ba\cos\zeta}{b}\int \frac{dx}{X^{n+1}}.$$

следовательно, нужно знать лишь интегралы $\int \frac{dx}{X^{n+1}}$, а их мы только что нашли.

Теперь у нас есть все вспомогательные средства, необходимые для интегрирования всевозможных дробных выражений $\frac{M}{N}\,dx$, где M и N — целые функции от x. Таким образом, мы обладаем возможностью находить интегралы всех выражений вида $\int V dx$, где V есть любая рациональная функция от x. Относительно этих выражений следует заметить, что если интегралы не будут алгебраическими, то их всегда можно выразить через логарифмы или углы. Итак, нам остается только разъяснить этот метод на нескольких примерах.

ПРИМЕР 1

74. *Предложено дифференциальное выражение* $\frac{(A+Bx)\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$; *найти его интеграл.*

Так как переменная x имеет меньше измерений в числителе, чем в знаменателе, то данная дробь вовсе не содержит целой части. Далее, надо учесть особенности знаменателя: имеет ли он два простых действительных множителя или нет? Если да, то не равны ли эти множители? Следовательно, мы должны разобрать три случая.

I. Пусть знаменатель имеет два равных множителя и пусть он $=(a+bx)^2$; тогда дробь $\frac{A+Bx}{(a+bx)^2}$ разлагается на две:

$$\frac{Ab-Ba}{b\,(a+bx)^2}+\frac{B}{b\,(a+bx)},$$

а следовательно,

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx)^2}=\frac{Ba-Ab}{b^2\,(a+bx)}+\frac{B}{b^2}\,l\,(a+bx)+\mathrm{Const}.$$

Если интеграл нужно определить так, чтобы при $x=0$ он исчезал, то находим:

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx)^2}=\frac{(Ab-Ba)\,x}{ab\,(a+bx)}+\frac{B}{b^2}\,l\,\frac{a+bx}{a}.$$

II. Пусть знаменатель имеет два неравных множителя, так что предложенное выражение имеет вид

$$\frac{A+Bx}{(a+bx)\,(f+gx)}\,dx.$$

Эта дробь разлагается на две частные дроби:

$$\frac{Ab-Ba}{bf-ag}\cdot\frac{dx}{a+bx}+\frac{Ag-Bf}{ag-bf}\cdot\frac{dx}{f+gx},$$

откуда получается искомый интеграл

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx)\,(f+gx)}=\frac{Ab-Ba}{b\,(bf-ag)}\,l\,\frac{a+bx}{a}+\frac{Ag-Bf}{g\,(ag-bf)}\,l\,\frac{f+gx}{f}+\mathrm{Const}.$$

Положим

$$\frac{Ab-Ba}{b\,(bf-ag)}=m+n,\quad \frac{Bf-Ag}{g\,(bf-ag)}=m-n,$$

так что интеграл примет вид

$$ml\frac{(a+bx)(f+gx)}{af}+nl\frac{f(a+bx)}{a(f+gx)}.$$

Будем иметь:

$$2m=\frac{B(bf-ag)}{bg(bf-ag)}=\frac{B}{bg},$$

$$2n=\frac{2Abg-Bag-Bbf}{bg(bf-ag)}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{(a+bx)(f+gx)}=\frac{B}{2bg}\,l\frac{(a+bx)(f+gx)}{af}+\frac{2Abg-B(ag+bf)}{2bg(bf-ag)}\,l\frac{f(a+bx)}{a(f+gx)}.$$

III. Пусть оба простых множителя знаменателя мнимые; в таком случае знаменатель будет иметь вид $a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2$. В этом случае (он был уже разобран выше, § 64), будем иметь:

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}$$

$$=\frac{B}{b^2}\,l\frac{\sqrt{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}}{a}+\frac{Ab+Ba\cos\zeta}{ab^2\sin\zeta}\operatorname{arctg}\frac{bx\sin\zeta}{a-bx\cos\zeta}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

75. Во втором случае при $f=a$, $g=-b$ получим:

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{-B}{2b^2}\,l\frac{a^2-b^2x^2}{a^2}+\frac{A}{2ab}\,l\frac{a+bx}{a-bx}.$$

Отсюда следует, что по отдельности

$$\int\frac{A\,dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{A}{2ab}\,l\frac{a+bx}{a-bx}+C$$

и

$$\int\frac{Bx\,dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{-B}{2b^2}\,l\frac{a^2-b^2x^2}{a^2}=\frac{B}{b^2}\,l\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}+C.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

76. В третьем случае, если положить $\cos\zeta=0$, будем иметь:

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{B}{b^2}\,l\frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}+\frac{A}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C$$

и отсюда по отдельности

$$\int\frac{A\,dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{A}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C$$

и

$$\int\frac{Bx\,dx}{a^4+b^2x^2}=\frac{B}{b^2}\,l\frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}+C.$$

ПРИМЕР 2

77. *Предложено дифференциальное выражение* $\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$, *где показатель* $m-1$ *меньше, чем* n. *Определить интеграл.*

В последней главе «Дифференциального исчисления»[1]) мы нашли, что простейшие дроби, на которые разлагается дробь $\frac{x^{m-1}}{1+x^n}$, если принять π за меру двух прямых углов, содержатся в следующем общем выражении:

$$\frac{2\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin\frac{m(2k-1)\pi}{n}-2\cos\frac{m(2k-1)\pi}{n}\left(x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)}{n\left(1-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+x^2\right)},$$

куда вместо k надо последовательно подставлять все числа 1, 2, 3 и т. д. до тех пор, пока $2k-1$ не начнет превосходить число n[2]). Если это выражение помножить на dx и сравнить с нашим общим выражением

$$\frac{(A+Bx)\,dx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2},$$

то будем иметь $a=1,\ b=1,\ \zeta=\frac{(2k-1)\pi}{n}$,

$$A=\frac{2}{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin\frac{m(2k-1)\pi}{n}+\frac{2}{n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}\cos\frac{m(2k-1)\pi}{n}$$

или

$$A=\frac{2}{n}\cos\frac{(m-1)(2k-1)\pi}{n}$$

и

$$B=-\frac{2}{n}\cos\frac{m(2k-1)\pi}{n},$$

откуда

$$Ab+Ba\cos\zeta=\frac{2}{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin\frac{m(2k-1)\pi}{n},$$

и поэтому интеграл этого члена будет

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{m(2k-1)\pi}{n}\,l\sqrt{1-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+x^2}$$

$$+\frac{2}{n}\sin\frac{m(2k-1)\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}}{1-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}}.$$

Если же n — нечетное число, то сюда, кроме того, присоединяется дробь $\frac{\pm dx}{n(1+x)}$, интеграл которой есть $\pm\frac{1}{n}l(1+x)$; верхний знак соответствует случаю, когда m нечетное, а нижний, когда m четное. Поэтому

---

[1]) Часть II, § 417, пример 1, стр. 569 русского перевода.

[2]) quoad $2k-1$ numerum n superare incipiat. Из дальнейшего (см. конец настоящего параграфа) ясно, что случай $2k-1=n$ (при нечетном n) исключается.

искомый интеграл $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$ выразится следующим образом:

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{m\pi}{n}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{m\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{1-x\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{3m\pi}{n}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{3\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{3m\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{1-x\cos\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{5m\pi}{n}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{5\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{5m\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{5\pi}{n}}{1-x\cos\frac{5\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{7m\pi}{n}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{7\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{7m\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{7\pi}{n}}{1-x\cos\frac{7\pi}{n}}$$

и т. д.

соответственно нечетным числам, меньшим, чем n; таким образом, мы получим весь интеграл для случая, когда n — четное число; если же n — нечетное число, то к этому выражению присоединяется слагаемое $\pm\frac{1}{n}l(1+x)$ в зависимости от того, будет ли число m нечетным или четным, так что, если $m=1$, то присоединяется $+\frac{1}{n}l\,(1+x)$.

СЛЕДСТВИЕ 1

78. Возьмем $m=1$; тогда имеем выражение $\int\frac{dx}{1+x^n}$ и для различных значений n получаем:

I. $\int\frac{dx}{1+x}=l\,(1+x)$,

II. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x$,

III. $$\int\frac{dx}{1+x^3}=-\frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{3}\,l\sqrt{1-2x\cos\frac{\pi}{3}+x^2}$$

$$+\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{3}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{3}l\,(1+x).$$

IV. $$\int\frac{dx}{1+x^4}=\left\{\begin{aligned}&-\frac{2}{4}\cos\frac{\pi}{n}\,l\sqrt{1-2x\cos\frac{\pi}{4}+x^2}\\&+\frac{2}{4}\sin\frac{\pi}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{\pi}{4}}{1-x\cos\frac{\pi}{4}}\\&-\frac{2}{4}\cos\frac{3\pi}{4}\,l\sqrt{1-2x\cos\frac{3\pi}{4}+x^2}\\&+\frac{2}{4}\sin\frac{3\pi}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{3\pi}{4}}{1-x\cos\frac{3\pi}{4}}.\end{aligned}\right.$$

$$\text{V.}\quad \int \frac{dx}{1+x^5} = \begin{cases} -\frac{2}{5}\cos\frac{\pi}{5}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{\pi}{5}+x^2} \\ +\frac{2}{5}\sin\frac{\pi}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sin\frac{\pi}{5}}{1-x\cos\frac{\pi}{5}} \\ -\frac{2}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{3\pi}{5}+x^2} \\ +\frac{2}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sin\frac{3\pi}{5}}{1-x\cos\frac{3\pi}{5}}+\frac{1}{5}l(1+x). \end{cases}$$

$$\text{VI.}\quad \int \frac{dx}{1+x^6} = \begin{cases} -\frac{2}{6}\cos\frac{\pi}{6}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{\pi}{6}+x^2} \\ +\frac{2}{6}\sin\frac{\pi}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sin\frac{\pi}{6}}{1-x\cos\frac{\pi}{6}} \\ -\frac{2}{6}\cos\frac{3\pi}{6}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{3\pi}{6}+x^2} \\ +\frac{2}{6}\sin\frac{3\pi}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sin\frac{3\pi}{6}}{1-x\cos\frac{3\pi}{6}} \\ -\frac{2}{6}\cos\frac{5\pi}{6}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{5\pi}{6}+x^2} \\ +\frac{2}{6}\sin\frac{5\pi}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sin\frac{5\pi}{6}}{1-x\cos\frac{5\pi}{6}}. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

79. Подставив вместо синусов и косинусов их значения там, где это можно сделать без затруднений, получаем:

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = -\frac{1}{3}\, l\sqrt{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}+\frac{1}{3}l(1+x),$$

или

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\, l\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}.$$

Далее, так как $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{3\pi}{4}$, имеем:

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = +\frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\frac{\sqrt{1+x\sqrt{2}+x^2}}{\sqrt{1-x\sqrt{2}+x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

Наконец,

$$\int \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\, l\frac{\sqrt{1+x\sqrt{3}+x^2}}{\sqrt{1-x\sqrt{3}+x^2}}+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4}.$$

ПРИМЕР 3

80. *Предложено дифференциальное выражение* $\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^n}$, *где показатель* $m-1$ *меньше, чем* n. *Определить его интеграл.*

Часть дробной функции $\frac{x^{m-1}}{1-x^n}$, проистекающая из какого-либо множителя, представляется следующим выражением:

$$\frac{2\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2mk\pi}{n}-2\cos\frac{2mk\pi}{n}\left(x-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}{n\left(1-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+x^2\right)}.$$

Сопоставление его с нашим выражением

$$\frac{A+Bx}{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}$$

дает

$$a=1,\quad b=1,\quad \zeta=\frac{2k\pi}{n};$$

$$A=\frac{2}{n}\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2mk\pi}{n}+\frac{2}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{2mk\pi}{n},\qquad B=-\frac{2}{n}\cos\frac{2mk\pi}{n};$$

значит,

$$Ab+Ba\cos\zeta=\frac{2}{n}\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2mk\pi}{n}.$$

Поэтому интеграл, получаемый отсюда, будет

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{2km\pi}{n}\,l\sqrt{1-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{2km\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{2k\pi}{n}}{1-x\cos\frac{2k\pi}{n}}$$

Сюда надо вместо k последовательно подставлять все числа 0, 1, 2, 3 и т. д.[1]), пока $2k$ не превзойдет n.

---

[1]) В этом абзаце содержится ряд ошибок; правда, они погашают друг друга, и результаты оказываются верными. Эйлер утверждает, что в выражение

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{2km\pi}{n}\,l\sqrt{1-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{2km\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{2k\pi}{n}}{1-x\cos\frac{2k\pi}{n}}\qquad\text{(A)}$$

надо подставлять все значения $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, не превосходящие n; из последующего ясно, что это не оговорка, ибо в упомянутое выражение он действительно подставляет и значение $k=0$ и (в случае четного n) значение $k=\frac{n}{2}$. Но в соответствующих случаях корни знаменателя $1-x^n$ вещественны, так что выражение (A) не подходит. Интересно отметить, что в § 77, где интегрируется выражение $\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$, Эйлер подобной ошибки не делает.

Подстановка $2k=n$ приводит выражение (A) к виду $-\frac{2}{n}\cos m\pi l\sqrt{1+2x+x^2}$; Эйлер преобразует последнее выражение к виду $-\frac{\cos m\pi}{n}l(1+x)$. Здесь допущена вторая ошибка (пропущен коэффициент 2), вследствие чего результат оказывается верным. Повидимому, таким же образом «исправляется» ошибка и при $k=0$.

При $k=0$ соответствующее слагаемое интеграла становится равным $-\frac{1}{n}l(1-x)$, а когда n есть четное число, последнее слагаемое интеграла возникает, если положить $2k=n$; следовательно, оно будет равно

$$-\frac{2}{n}\cos m\pi l\sqrt{1+2x+x^2}=-\frac{\cos m\pi}{n}l(1+x).$$

Если число m четное, то будем иметь $\cos m\pi=+1$, если же m нечетное, то $\cos m\pi=-1$.

Ввиду изложенного интеграл $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^n}$ выражается следующим образом:

$$-\frac{1}{n}l(1-x)$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{2m\pi}{n}l\sqrt{1-2x\cos\frac{2\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{2m\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{2\pi}{n}}{1-x\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{4m\pi}{n}l\sqrt{1-2x\cos\frac{4\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{4m\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{4\pi}{n}}{1-x\cos\frac{4\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{6m\pi}{n}l\sqrt{1-2x\cos\frac{6\pi}{n}+x^2}+\frac{2}{n}\sin\frac{6m\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{6\pi}{n}}{1-x\cos\frac{6\pi}{n}}$$

и т. д.

СЛЕДСТВИЕ

81. Пусть $m=1$ и будем вместо n последовательно подставлять числа 1, 2, 3 и т. д.; тогда мы получим следующие интегрирования:

I. $$\int\frac{dx}{1-x}=-l(1-x).$$

II. $$\int\frac{dx}{1-x^2}=-\frac{1}{2}l(1-x)+\frac{1}{2}l(1+x)=\frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}.$$

III. $$\int\frac{dx}{1-x^3}=-\frac{1}{3}l(1-x)-\frac{2}{3}\cos\frac{2\pi}{3}l\sqrt{1-2x\cos\frac{2\pi}{3}+x^2}+\frac{2}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{2\pi}{3}}{1-x\cos\frac{2\pi}{3}}.$$

IV. $$\int\frac{dx}{1-x^4}=-\frac{1}{4}l(1-x)-\frac{2}{4}\cos\frac{2\pi}{4}l\sqrt{1-2x\cos\frac{2\pi}{4}+x^2}+\frac{2}{4}\sin\frac{2\pi}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{2\pi}{4}}{1-x\cos\frac{2\pi}{4}}+\frac{1}{4}l(1+x)$$

$$\text{V.}\quad \int \frac{dx}{1-x^5} = \begin{cases} -\frac{1}{5}\, l\,(1-x) - \frac{2}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{2\pi}{5}+x^2} \\ \qquad + \frac{2}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sin\frac{2\pi}{5}}{1-x\cos\frac{2\pi}{5}} \\ \qquad - \frac{2}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{4\pi}{5}+x^2} \\ \qquad + \frac{2}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sin\frac{4\pi}{5}}{1-x\cos\frac{4\pi}{5}}. \end{cases}$$

$$\text{VI.}\quad \int \frac{dx}{1-x^6} = \begin{cases} -\frac{1}{6}\, l\,(1-x) - \frac{2}{6}\cos\frac{2\pi}{6}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{2\pi}{6}+x^2} \\ \qquad + \frac{2}{6}\sin\frac{2\pi}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sin\frac{2\pi}{6}}{1-x\cos\frac{2\pi}{6}} \\ \qquad - \frac{2}{6}\cos\frac{4\pi}{6}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{4\pi}{6}+x^2} \\ \qquad + \frac{2}{6}\sin\frac{4\pi}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sin\frac{4\pi}{6}}{1-x\cos\frac{4\pi}{6}} + \frac{1}{6}\, l\,(1+x) \end{cases}$$

ПРИМЕР 4

82. *Дано дифференциальное выражение*

$$\frac{(x^{m-1}+x^{n-m-1})\,dx}{1+x^n}, \quad \textit{где} \quad n > m-1;$$

определить его интеграл.

Из примера 2 ясно, что любая часть интеграла имеет следующий общий вид:

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{im\pi}{n}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{i\pi}{n}+x^2} + \frac{2}{n}\sin\frac{im\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{i\pi}{n}}{1-x\cos\frac{i\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n}\cos\frac{i(n-m)\pi}{n}\, l\sqrt{1-2x\cos\frac{i\pi}{n}+x^2} + \frac{2}{n}\sin\frac{i(n-m)\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{i\pi}{n}}{1-x\cos\frac{i\pi}{n}},$$

где i есть любое нечетное число, не большее, чем n [1]). Но

$$\cos\frac{i(n-m)\pi}{n} = \cos\left(i\pi - \frac{im\pi}{n}\right) = -\cos\frac{im\pi}{n}$$

---

[1]) Таким образом, случай $i=n$ Эйлер не исключает, что видно и из дальнейшего. Проистекающая отсюда ошибка не влияет на результат вследствие того, что соответствующие члены суммы взаимно уничтожаются. Ср. подстрочное примечание к § 80.

и

$$\sin\frac{i(n-m)\pi}{n}=\sin\left(i\pi-\frac{im\pi}{n}\right)=+\sin\frac{im\pi}{n}.$$

Следовательно, логарифмические члены взаимно уничтожаются, и слагаемое интеграла в общем своем виде будет

$$+\frac{4}{n}\sin\frac{im\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{i\pi}{n}}{1-x\cos\frac{i\pi}{n}}.$$

Положим для удобства угол $\frac{\pi}{n}=\omega$, тогда будем иметь:

$$\begin{aligned}\int\frac{(x^{m-1}+x^{n-m-1})\,dx}{1+x^n}=&+\frac{4}{n}\sin m\omega\operatorname{arctg}\frac{x\sin\omega}{1-x\cos\omega}\\&+\frac{4}{n}\sin 3m\omega\operatorname{arctg}\frac{x\sin 3\omega}{1-x\cos 3\omega}\\&+\frac{4}{n}\sin 5m\omega\operatorname{arctg}\frac{x\sin 5\omega}{1-x\cos 5\omega}\\&\vdots\\&+\frac{4}{n}\sin im\omega\operatorname{arctg}\frac{x\sin i\omega}{1-x\cos i\omega},\end{aligned}$$

где i есть наибольшее нечетное число, не превышающее показателя n. Если само число n нечетное, то слагаемое, возникающее из подстановки $i=n$, исчезает, так как $\sin m\pi=0$. Отметим еще, что весь этот интеграл выражается только через углы.

СЛЕДСТВИЕ

83. Таким же образом находится и следующий интеграл, в котором останутся одни только логарифмы, причем попрежнему $\frac{\pi}{n}=\omega$:

$$\begin{aligned}\int\frac{(x^{m-1}-x^{n-m-1})\,dx}{1+x^n}=&-\frac{4}{n}\cos m\omega l\sqrt{1-2x\cos\omega+x^2}\\&-\frac{4}{n}\cos 3m\omega l\sqrt{1-2x\cos 3\omega+x^2}\\&-\frac{4}{n}\cos 5m\omega l\sqrt{1-2x\cos 5\omega+x^2}\\&\vdots\\&-\frac{4}{n}\cos im\omega l\sqrt{1-2x\cos i\omega+x^2},\end{aligned}$$

до тех пор, пока нечетное число i не превзойдет показателя n[1]).

ПРИМЕР 5

84. *Предложено дифференциальное выражение*

$$\frac{(x^{m-1}-x^{n-m-1})\,dx}{1-x^n},\quad \text{где}\quad n>m-1;$$

определить его интеграл.

---

[1]) Ср. подстрочное примечание к § 82.

На основании примера 3 можно найти любую часть интеграла; положив для краткости $\frac{\pi}{n} = \omega$, будем иметь:

$$\frac{2}{n}\cos 2km\omega l\sqrt{1-2x\cos 2k\omega+x^2}+\frac{2}{n}\sin 2km\omega \operatorname{arctg}\frac{x\sin 2k\omega}{1-x\cos 2k\omega}$$
$$+\frac{2}{n}\cos 2k(n-m)\omega l\sqrt{1-2x\cos 2k\omega+x^2}$$
$$-\frac{2}{n}\sin 2k(n-m)\omega \operatorname{arctg}\frac{x\sin 2k\omega}{1-x\cos 2k\omega}$$

Но

$$\cos 2k(n-m)\omega = \cos(2k\pi - 2km\omega) = \cos 2km\omega$$

и

$$\sin 2k(n-m)\omega = \sin(2k\pi - 2km\omega) = -\sin 2km\omega,$$

вследствие чего этот общий член переходит в

$$\frac{4}{n}\sin 2km\omega \operatorname{arctg}\frac{x\sin 2k\omega}{1-x\cos 2k\omega}.$$

Отсюда составляется следующее интегрирование:

$$\int\frac{(x^{m-1}-x^{n-m-1})\,dx}{1-x^n} = +\frac{4}{n}\sin 2m\omega \operatorname{arctg}\frac{x\sin 2\omega}{1-x\cos 2\omega}$$
$$+\frac{4}{n}\sin 4m\omega \operatorname{arctg}\frac{x\sin 4\omega}{1-x\cos 4\omega}$$
$$+\frac{4}{n}\sin 6m\omega \operatorname{arctg}\frac{x\sin 6\omega}{1-x\cos 6\omega}$$

и т. д.;

четные числа возрастают до тех пор, пока не превзойдут показателя n[1].

СЛЕДСТВИЕ

85. Отсюда же получается и следующее интегрирование $\left(\text{попрежнему } \frac{\pi}{n} = \omega\right)$:

$$\int\frac{(x^{m-1}+x^{n-m-1})\,dx}{1-x^n} = -\frac{2}{n}l(1-x)$$
$$-\frac{4}{n}\cos 2m\omega l\sqrt{1-2x\cos 2\omega+x^2}$$
$$-\frac{4}{n}\cos 4m\omega l\sqrt{1-2x\cos 4\omega+x^2}$$
$$-\frac{4}{n}\cos 6m\omega l\sqrt{1-2x\cos 4\omega+x^2}$$

и т. д.;

также и здесь четные числа не следует продолжать дальше числа n[2].

---

[1]) Ср. подстрочное примечание к § 82.

[2]) При четном n формула настоящего параграфа неверна: вместо последнего ее члена, имеющего вид $+\frac{4}{n}l\sqrt{1+2x+x^2}$, надо взять член $(-1)^{m-1}\frac{2}{n}l(1+x)$. См. подстрочные примечания к §§ 80 и 82. Издатели полного собрания сочинений Эйлера, исправившие ошибку в § 80, не внесли соответствующего исправления в настоящий параграф.

ПРИМЕР 6

86. *Предложено дифференциальное выражение*

$$dy = \frac{dx}{x^3(1+x)(1-x^4)};$$

найти его интеграл.

Дробная функция, являющаяся множителем при dx, по разложении знаменателя на множители равна $\frac{1}{x^3(1+x)^2(1-x)(1+x^2)}$; она разлагается на следующие простейшие дроби:

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4(1+x)^2} - \frac{9}{8(1+x)} + \frac{1}{8(1-x)} + \frac{1+x}{4(1+x)^2} = \frac{dy}{dx},$$

откуда с помощью интегрирования получается:

$$y = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + lx + \frac{1}{4(1+x)} - \frac{9}{8}l(1+x) - \frac{1}{8}l(1-x)$$
$$+\frac{1}{8}l(1+x^2) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x.$$

Это выражение преобразуется к виду

$$y = C + \frac{-2+2x+5x^2}{4x^2(1+x)} - l\frac{1+x}{x} + \frac{1}{8}l\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x.$$

ПОЯСНЕНИЕ

87. Нам удалось разработать эту главу так, что в этом круге вопросов не остается желать ничего большего. Во всех тех случаях, когда требуется найти такую функцию y от x, чтобы $\frac{dy}{dx}$ равнялось рациональной функции от x, интегрирование не представляет никакой трудности, разве что правила алгебры окажутся недостаточными для нахождения отдельных множителей знаменателя; но тогда мы имеем дело с недостатком, который надо отнести за счет алгебры, а не за счет излагаемого здесь метода интегрирования. Далее следует также обратить особое внимание на то, что во всех случаях, когда $\frac{dy}{dx}$ равняется рациональной функции от x, функция y, если она не алгебраическая, не содержит никаких других трансцендентных количеств, кроме логарифмов и углов. При этом необходимо заметить, что здесь под логарифмами надо всегда подразумевать логарифмы гиперболические, так как дифференциал от lx равен $\frac{dx}{x}$ только в том случае, если взять гиперболический логарифм. Впрочем, преобразовать гиперболические логарифмы в обыкновенные чрезвычайно легко, так что приложение исчисления к практическим вопросам из-за этого не наталкивается ни на какие трудности. Поэтому нам надо теперь перейти к тем случаям, когда выражение $\frac{dy}{dx}$ равно иррациональной функции от x. Здесь прежде всего надо заметить, что всякий раз, как эту функцию[1]) можно будет с помощью подходящей подстановки привести к рациональному виду,

[1]) Здесь речь идет, очевидно, о приведении к рациональному виду дифференциала dy, а не отношения $\frac{dy}{dx}$.

рассматриваемый случай будет сведен к задачам настоящей главы. Так, если бы мы имели $dy = \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$, то ясно, что, положив $x = z^6$, откуда $dx = 6z^5\,dz$, получим:

$$dy = \frac{(1+z^3-z^4)}{1+z^2}\cdot 6z^5\,dz,$$

так что

$$\frac{dy}{dz} = -6z^7+6z^6+6z^5-6z^4+6z^2-6+\frac{6}{1+z^2},$$

откуда находим интеграл

$$y = -\frac{3}{4}z^8+\frac{6}{7}z^7+z^6-\frac{6}{5}z^5+2z^3-6z+6\operatorname{arctg} z$$

и, восстановив прежнее обозначение[1]),

$$y = -\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

---

[1]) restituto valore.

ГЛАВА II

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ЗАДАЧА 6

88. *Предложено дифференциальное выражение*

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}};$$

найти его интеграл.

РЕШЕНИЕ

Два множителя количества $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ либо действительны, либо нет.

I. В первом случае[1]) предложенное выражение будет иметь вид: $dy = \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(f+gx)}}$. Для уничтожения иррациональности положим

$$(a + bx)(f + gx) = (a + bx)^2 z^2;$$

тогда будем иметь:

$$x = \frac{f - az^2}{bz^2 - g},$$

а значит,

$$dx = \frac{2(ag - bf)\, z\, dz}{(bz^2 - g)^2}$$

и

$$\sqrt{(a + bx)(f + gx)} = -\frac{(ag - bf)\, z}{bz^2 - g},$$

откуда

$$dy = \frac{-2dz}{bz^2 - g} = \frac{2dz}{g - bz^2} \quad \text{и} \quad z = \sqrt{\frac{f + gx}{a + bx}}.$$

Поэтому, если у букв b и g одинаковые знаки, то интеграл выразится через логарифмы, если же разные, то через углы.

---

[1]) Случай равных действительных корней Эйлер не рассматривает, так как в этом случае интегрируемое выражение становится рациональным.

II. Во втором случае будем иметь:

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}}$$

Положим

$$b^2x^2-2abx\cos\zeta+a^2=(bx-az)^2,$$

тогда

$$-2bx\cos\zeta+a=-2bxz+az^2$$

и

$$x=\frac{a(1-z^2)}{2b(\cos\zeta-z)},$$

откуда

$$dx=\frac{a\,dz\,(1-2z\cos\zeta+z^2)}{2b(\cos\zeta-z)^2}$$

и

$$\sqrt{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}=\frac{a(1-2z\cos\zeta+z^2)}{2(\cos\zeta-z)}.$$

Значит,

$$dy=\frac{dz}{b(\cos\zeta-z)} \quad \text{и} \quad y=-\frac{1}{b}\,l(\cos\zeta-z).$$

Но

$$z=\frac{bx-\sqrt{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}}{a},$$

поэтому

$$y=-\frac{1}{b}\,l\,\frac{a\cos\zeta-bx+\sqrt{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2}}{a}$$

или

$$y=\frac{1}{b}\,l\,(-a\cos\zeta+bx+\sqrt{a^2-2abx\cos\zeta+b^2x^2})+C.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

89. Способ, использованный в последнем случае, имеет более широкое применение и может быть употреблен для интегрирования выражения

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

всякий раз, как γ есть положительное количество; действительно, так как $b=\sqrt{\gamma}$ и $a\cos\zeta=\frac{-\beta}{2\sqrt{\gamma}}$, то получается:

$$y=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,l\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}}+x\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}\right)+C,$$

или

$$y=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,l\left(\frac{1}{2}\beta+\gamma x+\sqrt{\gamma(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}\right)+C.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

90. Что касается первого случая, то в силу

$$\int\frac{2dz}{g-bz^2}=\frac{1}{\sqrt{bg}}\,l\,\frac{\sqrt{g}+z\sqrt{b}}{\sqrt{g}-z\sqrt{b}} \quad \text{и} \quad \int\frac{2dz}{g+bz^2}=\frac{2}{\sqrt{gb}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$$

будем иметь следующие случаи:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(f+gx)}} = \frac{1}{\sqrt{bg}}\, l\, \frac{\sqrt{g(a+bx)}+\sqrt{b(f+gx)}}{\sqrt{g(a+bx)}-\sqrt{b(f+gx)}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-a)(f+gx)}} = \frac{1}{\sqrt{bg}}\, l\, \frac{\sqrt{g(bx-a)}+\sqrt{b(f+gx)}}{\sqrt{g(bx-a)}-\sqrt{b(f+gx)}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-a)(gx-f)}} = \frac{1}{\sqrt{bg}}\, l\, \frac{\sqrt{g(bx-a)}+\sqrt{b(gx-f)}}{\sqrt{g(bx-a)}-\sqrt{b(gx-f)}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a-bx)(f-gx)}} = \frac{-1}{\sqrt{bg}}\, l\, \frac{\sqrt{g(a-bx)}+\sqrt{b(f-gx)}}{\sqrt{g(a-bx)}-\sqrt{b(f-gx)}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a-bx)(f+gx)}} = \frac{2}{\sqrt{bg}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b(f+gx)}}{\sqrt{g(a-bx)}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a-bx)(gx-f)}} = \frac{2}{\sqrt{bg}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b(gx-f)}}{\sqrt{g(a-bx)}} + C.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

91. Из этих шести интегрирований первые четыре все подходят под случай, рассмотренный в следствии 1, а два последних — под формулу $dy = \frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2}}$; положим, например, в предпоследнем выражении

$$af = \alpha, \quad ag - bf = \beta, \quad bg = \gamma;$$

тогда из него, если удвоить дугу [1]), получим интеграл

$$y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\gamma(\alpha+\beta x-\gamma x^2)}}{\beta-2\gamma x}.$$

Через косинус же он выразится так:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \arccos \frac{\beta-2\gamma x}{\sqrt{\beta^2+4\alpha\gamma}} + C;$$

справедливость этой формулы явствует из дифференцирования.

ПОЯСНЕНИЕ 1

92. Из решения этой задачи ясно, что и более общее выражение $\frac{X\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$, где X есть какая-либо рациональная функция от x, можно интегрировать, применяя приемы предыдущей главы. Действительно, если вместо x ввести переменное z, которое превращает радикал в рациональное выражение, то и X также перейдет в рациональную функцию от z. То же имеет место в еще более общем случае, когда количество X при обозначении $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = u$ будет какой-либо рациональной функцией количеств x и u. Действительно, в этом случае с помощью примененной подстановки получится рациональное дифференциальное выражение, ибо как вместо x, так и вместо u пишутся выражения, рациональные

[1]) То есть если применить формулу $2 \operatorname{arctg} m = \operatorname{arctg} \frac{2m}{1-m^2}$.

относительно z. То же самое можно выразить и так: если функция X не содержит никакой другой иррациональности, кроме $\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$, то интеграл выражения $X\,dx$ найти можно, так как с помощью подстановки это дифференциальное выражение можно преобразовать в рациональное.

ПОЯСНЕНИЕ 2

93. Если же предложено какое угодно иррациональное дифференциальное выражение, то прежде всего надо посмотреть, нельзя ли преобразовать его в рациональное при помощи какой-либо подстановки. Если это удастся, то интегрирование может быть произведено по правилам предшествующей главы. Вместе с тем понятно, что интеграл, если он не алгебраический, не будет содержать никаких других трансцендентных количеств, кроме логарифмов и углов.

Если же невозможно найти никакой подстановки, пригодной для этой цели, то надо отказаться от труда интегрирования, поскольку мы не в состоянии выразить этот интеграл ни алгебраически, ни при помощи логарифмов или углов. Так, если $X\,dx$ будет таким дифференциальным выражением, которое никак не может быть приведено к рациональному виду, то его интеграл $\int X\,dx$ придется отнести к новому роду трансцендентных функций, и нам не останется ничего другого, как пытаться найти для него значение, сколь угодно близкое к истине[1]). Но, допустив существование нового рода трансцендентных количеств, мы сможем свести к нему интегрирование бесчисленных других выражений. Итак, прежде всего надо прилагать усилия к тому, чтобы для какого-либо рода отметить простейшее выражение, введение которого позволило бы определить интегралы остальных выражений. Это приводит нас к чрезвычайно важному вопросу: каким образом следует приводить интегрирование более сложных выражений к более простым? Но прежде чем приступить к этому, рассмотрим другие выражения, которые при помощи подходящей подстановки можно освободить от иррациональности, подобно тому как дифференциальное выражение $X\,dx$, по доказанному, можно преобразовать в рациональное всякий раз, как X будет рациональной функцией количеств x и $u=\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$, т. е. когда не будет входить никакая другая иррациональность, кроме квадратного корня из выражения вида $\alpha+\beta x+\gamma x^2$.

ЗАДАЧА 7

94. *Предложено дифференциальное выражение* $X\,dx\,(a+bx)^{\frac{\mu}{\nu}}$, *в котором* X *обозначает какую-нибудь рациональную функцию от* x. *Освободить его от иррациональности.*

РЕШЕНИЕ

Положим

$$a+bx=z^{\nu},$$

чтобы получить

$$(a+bx)^{\frac{\mu}{\nu}}=z^{\mu}.$$

---

[1]) Ut eius valorem vero proxime assignare conemur.

Так как $x=\frac{z^\nu-a}{b}$, то после этой подстановки функция X превратится в рациональную функцию количества z; пусть эта функция будет Z. Так как $dx=\frac{\nu}{b}z^{\nu-1}\,dz$, наше дифференциальное выражение примет такой вид: $\frac{\nu}{b}Zz^{\mu+\nu-1}\,dz$; это выражение рационально, а потому его можно интегрировать по правилам предыдущей главы, и интеграл, если он не будет алгебраическим, выразится через логарифмы и углы.

СЛЕДСТВИЕ 1

95. При помощи этой подстановки можно решить более общую задачу Положим $(a+bx)^{\frac{1}{\nu}}=u$, и пусть буква V обозначает какую-нибудь рациональную функцию двух количеств x и u. Поскольку V после того, как будет положено $x=\frac{u^\nu-a}{b}$, становится рациональной функцией количества u, выражение $V\,dx=\frac{\nu}{b}Vu^{\nu-1}\,du$ будет рациональным.

СЛЕДСТВИЕ 2

96. Точно так же, если в выражение $X\,dx$ будут входить две иррациональные функции одного и того же количества $a+bx$, а именно $(a+bx)^{\frac{1}{\nu}}=u$ и $(a+bx)^{\frac{1}{n}}=v$, то, положив $a+bx=z^{n\nu}$, получим $x=\frac{z^{n\nu}-a}{b}$, $u=z^n$ и $v=z^\nu$; поскольку вследствие этого X становится рациональной функцией от z, а $dx=\frac{n\nu}{b}z^{n\nu-1}\,dz$, выражение $X\,dx$ после этой подстановки будет рациональным.

СЛЕДСТВИЕ 3

97. Таким же образом становится понятным и следующее. Положим

$$(a+bx)^{\frac{1}{\lambda}}=u,\quad (a+bx)^{\frac{1}{\mu}}=v,\quad (a+bx)^{\frac{1}{\nu}}=t \text{ и т. д.}$$

Пусть буква X обозначает какую-нибудь рациональную функцию количеств x, u, v, t и т. д.; тогда дифференциальное выражение $X\,dx$ становится рациональным, если положить $a+bx=z^{\lambda\mu\nu}$. В самом деле, будем иметь:

$$x=\frac{z^{\lambda\mu\nu}-a}{b};\quad u=z^{\mu\nu},\quad v=z^{\lambda\nu},\quad t=z^{\lambda\mu} \text{ и т. д.}$$

и

$$dx=\frac{\lambda\mu\nu}{b}z^{\lambda\mu\nu-1}\,dz.$$

ПРИМЕР

98. Пусть предложено выражение $dy=\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$. Положив $1+x=z^6$, найдем $dy=\frac{-6z^3\,dz\,(1-z^6)}{1-z}$, или

$$dy=-6dz\,(z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8),$$

откуда, итегрируя,

$$y = C - \frac{3}{2} z^4 - \frac{6}{5} z^5 - z^6 - \frac{6}{7} z^7 - \frac{3}{4} z^8 - \frac{2}{3} z^9$$

и, восстанавливая [прежнее переменное],

$$y = C - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(1+x)^2} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{(1+x)^5} - 1 - x - \frac{6}{7}(1+x)\sqrt[6]{1+x}$$
$$- \frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{1+x} - \frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}.$$

Итак, интеграл выражается даже алгебраически.

ЗАДАЧА 8

99. *Предложено дифференциальное выражение* $X\,dx\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$, *где* X *обозначает какую угодно рациональную функцию от* x. *Освободить его от иррациональности.*

РЕШЕНИЕ

Положим

$$\frac{a+bx}{f+gx} = z^\nu.$$

Тогда

$$\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = z^\mu,$$

$$x = \frac{a - fz^\nu}{gz^\nu - b} \quad \text{и} \quad dx = \frac{\nu(bf - ag)\, z^{\nu-1}\, dz}{(gz^\nu - b)^2}.$$

Таким образом, вместо X получится рациональная функция от z; если положить ее равной Z, то наше дифференциальное выражение примет вид

$$\frac{\nu(bf-ag)\, Zz^{\mu+\nu-1}\, dz}{(gz^\nu - b)^2}.$$

Так как это выражение рационально, то его можно интегрировать по правилам гл. I.

СЛЕДСТВИЕ 1

100. Положим $\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{\nu}} = u$; если X будет какой-нибудь рациональной функцией двух количеств x и u, то дифференциальное выражение $X\,dx$ с помощью, примененной выше подстановки преобразуется в рациональное, и поэтому способ интегрирования известен.

СЛЕДСТВИЕ 2

101. Если X будет рациональной функцией количества x и количеств вида

$$\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = u, \quad \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{\mu}} = v, \quad \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{\nu}} = t,$$

взятых в любом числе, то дифференциальное выражение $X\,dx$ станет рациональным, если применить подстановку $\frac{a+bx}{f+gx}=z^{\lambda\mu\nu}$, откуда

$$x=\frac{a-fz^{\lambda\mu\nu}}{gz^{\lambda\mu\nu}-b} \quad \text{и} \quad u=z^{\mu\nu}, \quad v=z^{\lambda\nu}, \quad t=z^{\lambda\mu}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

102. В этих случаях приведение к рациональному виду удается, несмотря на то, что входят несколько иррациональных выражений по той причине, что все они одновременно делаются рациональными в результате одной и той же подстановки, при которой и само количество x выражается рационально через новое переменное z. Если же предложенный дифференциал содержит такие два иррациональных выражения, которые не могут быть оба одновременно сделаны рациональными с помощью одной и той же подстановки (даже если бы этого можно было достигнуть для каждого в отдельности), то приведение к рациональному виду не может иметь места, если не случится, что дифференциал можно разбить на два слагаемых, каждое из которых содержит только одно иррациональное выражение. Пусть, например, предложено дифференциальное выражение

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}.$$

Умножив его числитель и знаменатель на $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}$, получим:

$$dy=\frac{dx\sqrt{1+x^2}}{2x^2}+\frac{dx\sqrt{1-x^2}}{2x^2},$$

и каждое из двух слагаемых можно отдельно сделать рациональным и интегрировать.

Получается:

$$y=C-\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{2x}+\frac{1}{2}\,l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\text{ [1]}.$$

Но здесь удобнее всего уничтожить иррациональность, положив в первом слагаемом $\sqrt{1+x^2}=px$, а во втором $\sqrt{1-x^2}=qx$. Действительно, хотя отсюда получается:

$$x=\frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \quad \text{и} \quad x=\frac{1}{\sqrt{1+q^2}},$$

однако для dy получается рациональное выражение

$$dy=\frac{-p^2\,dp}{2(p^2-1)}-\frac{q^2\,dq}{2(1+q^2)}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

103. Что касается общих выражений, которые можно освободить от иррациональности, то вряд ли можно преподать какие-либо более

---

[1] В первом издании опечатка: $y=C-\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{2x}+\ldots$

действенные указания; добавим пока тот случай, когда функция X содержит два радикальных выражения $\sqrt{a+bx}$ и $\sqrt{f+gx}$. Положив

$$a+bx=(f+gx)\,t^2,$$

получим:

$$x=\frac{a-ft^2}{gt^2-b},$$

и [так как]

$$\sqrt{a+bx}=\frac{t\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{gt^2-b}}, \quad \sqrt{f+gx}=\frac{\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{gt^2-b}},$$

то в дифференциальном выражении будет содержаться только одно иррациональное выражение $\sqrt{gt^2-b}$, которое легко устранить при помощи новой подстановки, как мы объяснили в задаче 6.

Переходя теперь к другим случаям, мы должны в первую очередь рассмотреть дифференциальное выражение

$$x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

которое вследствие своей простоты имеет очень большое значение во всем анализе. Здесь мы принимаем, что буквы m, n, μ, ν означают целые числа; если бы эти числа не были целыми, их было бы легко привести к такому виду. Так, например, если бы мы имели $x^{-\frac{1}{3}}\,dx\,(a+b\sqrt{x})^{\frac{\mu}{\nu}}$, то нужно было бы подставить $x=u^6$; отсюда $dx=6u^5\,du$, после чего получается:

$$6u^3\,du\,(a+bu^3)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Далее можно принять, что n имеет положительное значение; действительно, если бы этот показатель был отрицательным и мы имели бы, скажем,

$$x^{m-1}\,dx\,(a+bx^{-n})^{\frac{\mu}{\nu}},$$

то положим $x=\frac{1}{u}$, и получится выражение

$$-u^{-m-1}\,du\,(a+bu^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

подобное первоначальному; таким образом, нам надо исследовать, в каких случаях первоначальное выражение может быть освобождено от иррациональности.

ЗАДАЧА 9

104. *Определить случаи, когда дифференциальное выражение*

$$x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

можно привести к рациональному виду.

РЕШЕНИЕ

Прежде всего ясно, что если $\nu=1$, т. е. если $\frac{\mu}{\nu}$ — целое число, то выражение само по себе рационально и нет надобности ни в какой подстановке. Если же $\frac{\mu}{\nu}$ — дробь, то надо пользоваться подстановкой и притом двоякой.

I. Положим

$$a+bx^n=u^\nu,$$

чтобы получилось $(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}=u^\mu$; тогда будем иметь:

$$x^n=\frac{u^\nu-a}{b},$$

откуда

$$x^m=\left(\frac{u^\nu-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},$$

и поэтому

$$x^{m-1}\,dx=\frac{\nu}{nb}\,u^{\nu-1}\,du\left(\frac{u^\nu-a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}},$$

вследствие чего наше выражение примет вид:

$$\frac{\nu}{nb}\,u^{\mu+\nu-1}\,du\left(\frac{u^\nu-a}{b}\right)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Отсюда ясно, что всякий раз, как показатель $\frac{m-n}{n}$ и, значит, $\frac{m}{n}$ будет целым числом, положительным или отрицательным, это выражение рационально.

II. Положим

$$a+bx^n=x^nz^\nu,$$

так что

$$x^n=\frac{a}{z^\nu-b}$$

и

$$(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{a^{\frac{\mu}{\nu}}z^\mu}{(z^\nu-b)^{\frac{\mu}{\nu}}};$$

тогда

$$x^m=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{(z^\nu-b)^{\frac{m}{n}}},$$

откуда

$$x^{m-1}\,dx=\frac{-\nu a^{\frac{m}{n}}z^{\nu-1}\,dz}{n(z^\nu-b)^{\frac{m}{n}+1}}.$$

Поэтому наше выражение примет вид:

$$\frac{-\nu a^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}}z^{\mu+\nu-1}\,dz}{n(z^\nu-b)^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}+1}}.$$

откуда ясно, что наше выражение будет рациональным всякий раз, как $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ будет целым числом.

Легко понять, что невозможно придумать другие подстановки, пригодные для этой цели[1]).

Поэтому мы приходим к выводу, что иррациональное выражение

$$x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

можно освободить от иррациональности, если либо $\frac{m}{n}$, либо $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ будет целым числом.

СЛЕДСТВИЕ 1

105. Если $\frac{m}{n}$ — целое число, то случай является легким сам по себе. Действительно, положим $m=in$, и пусть $x^n=v$, тогда $x^m=v^i$; поэтому наше выражение получит вид $\frac{i}{m}\,v^{i-1}\,dv\,(a+bv)^{\frac{\mu}{\nu}}$ и может быть освобождено от иррациональности, как в задаче 7.

СЛЕДСТВИЕ 2

106. Если же $\frac{m}{n}$ не есть целое число, то для того, чтобы было возможно приведение к рациональному виду, необходимо, чтобы $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ было целым числом, но это возможно только в том случае, если $\nu=n$, а поэтому $m+\mu$ должно быть кратным числа $n=\nu$.

СЛЕДСТВИЕ 3

107. Поэтому, если выражение

$$x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

может быть приведено к рациональному виду, то и выражение

$$x^{m\pm\alpha n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}\pm\beta}$$

[1]) Facile autem intelligitur alias substitutiones huic scopo idoneas excogitari non posse. Случаи интегрируемости, рассмотренные здесь Эйлером, были указаны уже в письме Ньютона к Лейбницу от 24 октября 1676 г. (Ньютон, Математические работы, ГТТИ, 1937, стр. 238—240). Эйлер впервые высказал утверждение, что эти случаи единственные. Слова Эйлера «легко понять, что невозможно придумать другие подстановки, пригодные для этой цели», можно было бы принять за утверждение, что этот факт легко доказать. Такое толкование, однако, совершенно исключается, ибо в § 110 Эйлер говорит, что он, не колеблясь, утверждает невозможность других рационализирующих подстановок, и в подтверждение ссылается на то, что совершенно не видно, какая подстановка могла бы привести к цели. Вслед за этим специально оговаривает, что этот аргумент нельзя рассматривать как доказательство. Итак, слова «легко понять...» означают не что иное, как наличие субъективной уверенности, основанной на опыте.

Утверждение Эйлера было доказано лишь в 1853 г. П. Л. Чебышевым для случая, когда показатели степени рациональны, которым ограничивается и Эйлер. (П. Л. Чебышев, Полное собрание сочинений, т. II, Издательство АН СССР, 1947, стр. 52—69). Соответствующая теорема для случая иррациональных показателей была доказана Д. Д. Мордухай-Болтовским (Известия Казанского университета, 1926).

допускает такое же приведение, какие бы целые числа ни были взяты для α и β. Значит, для того чтобы распознать случаи, когда приведение возможно, достаточно положить $m < n$ и $\mu < \nu$.

СЛЕДСТВИЕ 4

108. Если $m = 0$, то имеем выражение $\frac{dx}{x}(a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$; оно всегда подходит под первый случай и приводится к рациональному виду, если положить

$$x^n = \frac{u^\nu - a}{b};$$

действительно, оно преобразуется в выражение

$$\frac{\nu u^{\mu+\nu-1}\, du}{n(u^\nu - a)}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

109. Так как выражение $x^{m-1}\, dx\, (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ можно привести к рациональному виду всякий раз, как $m = in$ (где i означает любое целое число — положительное или отрицательное), и так как эти случаи очевидны сами по себе, то стоит, нам кажется, рассмотреть более тщательно остальные случаи, допускающие это приведение. Для этой цели положим $\nu = n$, а также $m < n$ и $\mu < n$. Необходимо, чтобы $m + \mu = n$. Отсюда получатся следующие простейшие в своем роде типы, приводимые к рациональному виду:

I. $dx\,(a + bx^2)^{\frac{1}{2}}$.

II. $dx\,(a + bx^3)^{\frac{2}{3}}$, $x\,dx\,(a + bx^3)^{\frac{1}{3}}$.

III. $dx\,(a + bx^4)^{\frac{3}{4}}$, $x^2\,dx\,(a + bx^4)^{\frac{1}{4}}$.

IV. $dx\,(a + bx^5)^{\frac{4}{5}}$, $x\,dx\,(a + bx^5)^{\frac{3}{5}}$, $x^2\,dx\,(a + bx^5)^{\frac{2}{5}}$, $x^3\,dx\,(a + bx^5)^{\frac{1}{5}}$.

V. $dx\,(a + bx^6)^{\frac{5}{6}}$, $x^4\,dx\,(a + bx^6)^{\frac{1}{6}}$.

Стало быть, допускают приведение и следующие выражения:

$$x^{\pm 2\alpha}\, dx\,(a + bx^2)^{\frac{1}{2} \pm \beta},$$

$$x^{\pm 3\alpha}\, dx\,(a + bx^3)^{\frac{2}{3} \pm \beta}, \quad x^{1 \pm 3\alpha}\, dx\,(a + bx^3)^{\frac{1}{3} \pm \beta},$$

$$x^{\pm 4\alpha}\, dx\,(a + bx^4)^{\frac{3}{4} \pm \beta}, \quad x^{2 \pm 4\alpha}\, dx\,(a + bx^4)^{\frac{1}{4} \pm \beta},$$

$$x^{\pm 5\alpha}\, dx\,(a + bx^5)^{\frac{4}{5} \pm \beta}, \quad x^{1 \pm 5\alpha}\, dx\,(a + bx^5)^{\frac{3}{5} \pm \beta},$$

$$x^{2 \pm 5\alpha}\, dx\,(a + bx^5)^{\frac{2}{5} \pm \beta},$$

$$x^{3 \pm 5\alpha}\, dx\,(a + bx^5)^{\frac{1}{5} \pm \beta},$$

$$x^{\pm 6\alpha}\, dx\,(a + bx^6)^{\frac{5}{6} \pm \beta}, \quad x^{4 \pm 6\alpha}\, dx\,(a + bx^6)^{\frac{1}{6} \pm \beta}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

110. Но хотя бы выражение $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ и нельзя было освободить от иррациональности, все же всегда возможно свести к нему интегрирование всех выражений вида $x^{m\pm n\alpha-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}\pm\beta}$, так что, если рассматривать интеграл первого выражения как известный, можно найти интегралы и этих выражений. Так как такое приведение приносит в анализе очень большую пользу, необходимо его здесь изложить. Впрочем, мы, не колеблясь, утверждаем здесь, что, кроме тех случаев, которые, как мы здесь показали, допускают приведение к рациональному виду, нет никаких других, которые можно было бы освободить от иррациональности при помощи какой-либо подстановки. Так, если предложено выражение $\frac{dx}{\sqrt{a+bx^3}}$, то невозможно подставить вместо x такую рациональную функцию от z, чтобы $a+bx^3$ стало допускать извлечение квадратного корня. Правда, можно возразить, что для нашей цели было бы достаточно подставить вместо x хотя бы иррациональную функцию от z, лишь бы в знаменатель $\sqrt{a+bx^3}$ вошла иррациональность, которая уничтожала бы подобную ей иррациональность, содержащуюся в числителе dx, таким же образом, как это получается в выражении $\frac{dx}{\sqrt[3]{a+bx^3}}$, если применить подстановку $x=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{z^3-b}}$. Но хотя здесь, правда, и вышло удачно, совершенно не видно, каким образом это могло бы произойти в предыдущем случае. Однако же я отнюдь не хочу, чтобы вышесказанное рассматривалось как доказательство[1]).

ЗАДАЧА 10

111. *Привести интегрирование выражения*

$$\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

к интегрированию выражения $\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим функцию $x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$; так как дифференциал ее

$$\left(max^{m-1}dx+mbx^{m+n-1}dx+\frac{n(\mu+\nu)}{\nu}bx^{m+n-1}dx\right)(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

то

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}=ma\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}+\frac{(m\nu+n\mu+n\nu)b}{\nu}\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

откуда получается:

$$\int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{\nu x^m(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{(m\nu+n\mu+n\nu)b}-\frac{m\nu a}{(m\nu+n\mu+n\nu)b}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

---

[1]) Hoc tamen minime pro demonstratione haberi volo.

СЛЕДСТВИЕ 1

112. Так как отсюда получается также

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{x^m\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{ma} - \frac{(m\nu+n\mu+n\nu)\,b}{m\nu a}\int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

то вместо m напишем $m-n$ и будем иметь следующее приведение:

$$\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{x^{m-n}\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{(m-n)\,a} - \frac{(m\nu+n\mu)\,b}{(m-n)\nu a}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

113. Итак, если считать интеграл $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ известным, то можно получить также интегралы вида $\int x^{m\pm n-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ и, идя далее подобным же образом, получить все интегралы вида $\int x^{m\pm\alpha n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$.

ЗАДАЧА 11

114. *Привести интегрирование выражения* $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$ *к интегрированию выражения* $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$.

РЕШЕНИЕ

Дифференциал функции $x^m\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$ может быть выражен следующим образом:

$$\left(ma-\frac{(m\nu+n\mu+n\nu)\,a}{\nu}\right)x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} + \frac{m\nu+n\mu+n\nu}{\nu}\,x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1},$$

откуда выводится

$$x^m\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = -\frac{(n\mu+n\nu)\,a}{\nu}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} + \frac{m\nu+n\mu+n\nu}{\nu}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1};$$

поэтому получим:

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = \frac{\nu x^m\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m\nu+n\,(\mu+\nu)} + \frac{n\,(\mu+\nu)\,a}{m\nu+n\,(\mu+\nu)}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

115. Далее из того же уравнения получаем:

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{-\nu x^m\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{n\,(\mu+\nu)\,a}+\frac{m\nu+n\,(\mu+\nu)}{n\,(\mu+\nu)\,a}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}.$$

Теперь напишем $\mu-\nu$ вместо μ, и тогда получим такое приведение:

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}=\frac{-\nu x^m\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{n\mu a}+\frac{m\nu+n\mu}{n\mu a}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

116. Поэтому, если допустить, что интеграл $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ известен, то можно получить и интегралы $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}\pm 1}$, а, подвигаясь таким же образом дальше, также и интегралы $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}\pm\beta}$, где β означает любое целое число.

СЛЕДСТВИЕ 3

117. Если сопоставить сказанное с предшествующим, то все интегралы вида

$$\int x^{m\pm\alpha n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}\pm\beta}$$

могут быть приведены к интегрированию $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$, и следовательно, все они зависят от одной и той же трансцендентной функции.

ПОЯСНЕНИЕ 1

118. Из дифференциала выражения $x^m\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$, расположенного следующим образом:

$$mx^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}+\frac{n\mu}{\nu}\,bx^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1},$$

мы получаем такое приведение:

$$\int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}=\frac{\nu x^m\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{n\mu b}-\frac{m\nu}{n\mu b}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

и, кроме того, если вместо m и μ написать $m-n$ и $\mu+\nu$, получим такое обратное приведение:

$$\int x^{m-n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}=\frac{x^{m-n}\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m-n}-\frac{n\,(\mu+\nu)\,b}{\nu\,(m-n)}\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Таким образом, приведение достигается здесь при помощи одной операции, тогда как данные выше формулы требуют двукратного приведения. Мы получили отсюда шесть приведений; так как они весьма достопримечательны, мы их приводим все вместе.

$$\text{I.} \int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{[m\nu+n(\mu+\nu)]b} - \frac{m\nu a}{[m\nu+n(\mu+\nu)]b}\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

$$\text{II.} \int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{(m-n)a} - \frac{(m\nu+n\mu)b}{(m-n)\nu a}\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

$$\text{III.} \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = \frac{\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m\nu+n(\mu+\nu)} + \frac{n(\mu+\nu)a}{m\nu+n(\mu+\nu)}\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

$$\text{IV.} \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1} = \frac{-\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{n\mu a} + \frac{m\nu+n\mu}{n\mu a}\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

$$\text{V.} \int x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1} = \frac{\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{n\mu b} - \frac{m\nu}{n\mu b}\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

$$\text{VI.} \int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1} = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m-n} - \frac{n(\mu+\nu)b}{\nu(m-n)}\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

119. По поводу этих приведений надо прежде всего заметить, что [в каждом из них] первое выражение интегрируется алгебраически, если коэффициент последнего выражения исчезает. Так:

Из I, если $m=0$, $\int x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \dfrac{\nu(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{n(\mu+\nu)b}$;

из II, если $\frac{\mu}{\nu} = \frac{-m}{n}$, $\int x^{m-n-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{-m}{n}} = \dfrac{x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{-m}{n}+1}}{(m-n)a}$;

из IV, если $\frac{\mu}{\nu} = \frac{-m}{n}$, $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{-m}{n}-1} = \dfrac{x^m(a+bx^n)^{\frac{-m}{n}}}{ma}$;

из V, если $m=0$, $\int x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1} = \dfrac{\nu(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}{n\mu b}$.

Далее, заслуживают быть отмеченными те случаи, в которых коэффициент последнего выражения делается бесконечным; тогда приведение не может состояться, а первое выражение имеет своеобразный интеграл, который должен быть получен отдельно. В первом приведении § 118 это происходит, когда $\frac{\mu+\nu}{\nu} = \frac{-m}{n}$, и выражение $x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{-m}{n}-1}$, если положить $a+bx^n = x^n z^n$ или $x^n = \frac{a}{z^n-b}$, переходит в $\frac{-z^{-m-1}\,dz}{z^n-b}$; интеграл этого выражения следует определять по правилам первой главы.

Во втором приведении это происходит при $m=n$, причем выражение $\int \frac{dx}{x}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$, если положить $a+bx^n=z^\nu$ или $x^n=\frac{z^\nu-a}{b}$, переходит в $\int \frac{\nu z^{\mu+\nu-1}\,dz}{n(z^\nu-a)}$.

В третьем приведении это происходит при $\frac{\mu}{\nu}=\frac{-m}{n}-1$, причем выражение $\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}}$, если положить $a+bx^n=x^n z^n$ или $x^n=\frac{a}{z^n-b}$, переходит в $\int \frac{-z^{-m+n-1}\,dz}{z^n-b}$ или, если положить $z=\frac{1}{u}$, в $\int \frac{u^{m-1}\,du}{1-bu^n}$ [1]).

В четвертом приведении это происходит при $\mu=0$; тогда выражение $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{a+bx^n}$ рационально само по себе.

В пятом то же самое происходит при $\mu=0$, в шестом — при $m=n$, причем выражение $\int \frac{dx}{x}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$, если положить $a+bx^n=z^\nu$, переходит в $\frac{\nu}{n}\int \frac{z^{\mu+2\nu-1}\,dz}{z^\nu-a}$.

ПРИМЕР 1

120. *Найти интеграл выражения* $\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, *где показателю* m *даются положительные значения.*

В этом случае ввиду того, что $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $\mu=-1$, $\nu=2$, первое приведение дает

$$\int \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x^m\sqrt{1-x^2}}{m+1}+\frac{m}{m+1}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда в зависимости от того, берутся ли для m нечетные или четные числа, получим:

для нечетных чисел

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{4}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{6}x^5\sqrt{1-x^2}+\frac{5}{6}\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и т. д.;}$$

---

[1]) В оригинале ошибка: вместо $\int \frac{u^{m-1}\,du}{1-bu^n}$ напечатано

$$\int \frac{u^{m+2n-1}\,du}{1-bu^n}=\frac{-u^{m+n}}{(m+n)b}-\frac{u^m}{mb^2}+\frac{1}{b^2}\int \frac{u^{m-1}\,du}{a-bu^n}.$$

для четных чисел

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2}+\frac{4}{5}\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{7}x^6\sqrt{1-x^2}+\frac{6}{7}\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

и т. д.

Далее, так как

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad \text{и} \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

то мы получим следующие интегралы:

для первой группы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$
$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x,$$
$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\arcsin x,$$
$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\arcsin x,$$
$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{8}x^7+\frac{1\cdot 7}{6\cdot 8}x^5+\frac{1\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x\right)\sqrt{1-x^2}+$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\arcsin x;$$

для второй группы

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$
$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2},$$
$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{5}x^4+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 5}x^2+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\sqrt{1-x^2},$$
$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{7}x^6+\frac{1\cdot 6}{5\cdot 7}x^4+\frac{1\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^2+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

121. Значит, и вообще для выражения $\int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, если для краткости положим $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2i} = J$, получим следующий интеграл:

$$\int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = J\arcsin x - J\left(x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^5+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^7+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2i-2)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2i-1)}x^{2i-1}\right)\sqrt{1-x^2}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

122. Равным образом для выражения $\int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, если для краткости положим $\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2i}{3\cdot5\cdot7\ldots(2i+1)}=K$, получим следующий интеграл (исчезающий при $x=0$):

$$\int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=K-K\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2i-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2i}x^{2i}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

ПРИМЕР 2

123. *Найти интеграл выражения* $\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *в тех случаях, когда для* m *берутся отрицательные числа.*

Здесь надо пользоваться вторым приведением, которое дает

$$\int \frac{x^{m-3}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}{m-2}+\frac{m-1}{m-2}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

откуда ясно, что при $m=1$ будет $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Далее, при $m=2$ выражение $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ после подстановки $1-x^2=z^2$ переходит в выражение $\frac{-dz}{1-z^2}$, интеграл которого равен

$$-\frac{1}{2}l\,\frac{1+z}{1-z}=-\frac{1}{2}l\,\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}=-l\,\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Отсюда мы получаем два ряда интегрирований:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-l\,\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}=l\,\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x},$$
$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$
$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{4x^4}+\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}},$$
$$\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{6x^6}+\frac{5}{6}\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}$$

и т. д.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$
$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3}+\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}},$$
$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5}+\frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}$$

и т. д.

Отсюда получится, как в двух предыдущих следствиях,

$$\int \frac{dx}{x^{2i+1}\sqrt{1-x^2}}$$

$$= Jl\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} - J\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3x^4}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5x^6}+\ldots+\frac{2\cdot 4\ldots(2i-2)}{3\cdot 5\ldots(2i-1)\,x^{2i}}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{dx}{x^{2i+2}\sqrt{1-x^2}} = C - K\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4x^5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2i-1)}{2\cdot 4\ldots 2ix^{2i+1}}\right)\sqrt{1-x^2}\,{}^{1}).$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

124. Теперь можно уже без труда найти интегралы вида

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}$$

для всех чисел m [2]) и для нечетных μ. Наши общие приведения [3]), приспособленные для этого, таковы:

$$\text{I.}\quad \int x^{m+1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} = \frac{-x^m(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}}{m+\mu+2} + \frac{m}{m+\mu+2}\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}.$$

$$\text{II.}\quad \int x^{m-3}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} = \frac{x^{m-2}(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}}{m-2} + \frac{m+\mu}{m-2}\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}.$$

$$\text{III.}\quad \int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1} = \frac{x^m(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}}{m+\mu+2} + \frac{\mu+2}{m+\mu+2}\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}.$$

$$\text{IV.}\quad \int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1} = \frac{-x^m(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}}{\mu} + \frac{m+\mu}{\mu}\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}.$$

$$\text{V.}\quad \int x^{m+1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}-1} = \frac{-x^m(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}}{\mu} + \frac{m}{\mu}\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}.$$

$$\text{VI.}\quad \int x^{m-3}(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1} = \frac{x^{m-2}(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}}{m-2} + \frac{\mu+2}{m-2}\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}.$$

Действительно, если положить $\mu=-1$, то четыре последних приведения дают:

$$\int x^{m-1}\,dx\sqrt{1-x^2} = \frac{x^m\sqrt{1-x^2}}{m+1} + \frac{1}{m+1}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} - (m-1)\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} - m\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int x^{m-3}\,dx\sqrt{1-x^2} = \frac{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}{m-2} + \frac{1}{m-2}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

---

[1]) В оригинале $\int \frac{dx}{x^{2i}\sqrt{1-x^2}} = C - \ldots$

[2]) То есть как для положительных, так и для отрицательных (целых) m.

[3]) См. § 118.

откуда получаются интегрирования для случаев[1]) $\mu=1$ и $\mu=-3$, а отсюда далее и остальные.

ПОЯСНЕНИЕ 2

125. Что касается других иррациональных выражений, более сложных, то для них вряд ли можно дать правила, при помощи которых их можно привести к более простому виду. В каждом отдельном случае, когда такие выражения встречаются, приведение по большей части напрашивается само собой, если только эти выражения вообще допускают приведение. Так, например, если будем иметь выражение $\int \frac{P\,dx}{Q^{n+1}}$, то, будет ли число n целым или дробным, это выражение всегда можно свести к другому выражению вида $\int \frac{S\,dx}{Q^n}$, которое считается более простым. Действительно, так как

$$d\frac{R}{Q^n}=\frac{Q\,dR-nR\,dQ}{Q^{n+1}},$$

то, положив $\int \frac{P\,dx}{Q^{n+1}}=y$, будем иметь:

$$y+\frac{R}{Q^n}=\int \frac{P\,dx+Q\,dR-nR\,dQ}{Q^{n+1}}.$$

Теперь определим R так, чтобы $P\,dx+Q\,dR-nR\,dQ$ делилось на Q или, поскольку $Q\,dR$ уже имеет множитель Q, чтобы $P\,dx-nR\,dQ$ равнялось $QT\,dx$; тогда получится:

$$y+\frac{R}{Q^n}=\int \frac{dR+T\,dx}{Q^n}$$

или

$$\int \frac{P\,dx}{Q^{n+1}}=-\frac{R}{Q^n}+\int \frac{dR+T\,dx}{Q^n}.$$

Но функцию R всегда можно определить так, чтобы выражение $P\,dx-nR\,dQ$ получило множитель Q; правда, выполнить это в общем виде нельзя; однако же если мы попытается сделать это на отдельных примерах, то скоро заметим, что это всегда удается. Здесь же я принимаю, что P и Q — целые функции, а тогда всегда можно будет получить такую же функцию и для R. Если случайно окажется, что $dR+T\,dx=0$, то заданное выражение будет иметь алгебраический интеграл, который таким образом будет найден. В противном же случае это выражение можно будет и дальше приводить к другим, в которых показатель знаменателя последовательно уменьшается на единицу, и если n — целое число, то в конце концов дело сведется к выражению вида $\frac{V\,dx}{Q}$, которое несомненно является простейшим. Так как в этой главе вряд ли можно предложить еще что-нибудь, что могло бы помочь в интегрировании иррациональных выражений, то мы перейдем к изложению метода интегрирования этих выражений при помощи бесконечных рядов.

---

[1]) Имеются в виду соответствующие случаи интеграла $\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}$.

ДОБАВЛЕНИЕ

ЗАДАЧА

Предложено выражение $dy=(x+\sqrt{1+x^2})^n dx$; *найти его интеграл.*

РЕШЕНИЕ

Если положить $x+\sqrt{1+x^2}=u$, то $x=\frac{u^2-1}{2u}$ и $dx=\frac{du(u^2+1)}{2u^2}$, вследствие чего наше выражение получит вид

$$dy=\frac{1}{2}u^{n-2}\,du\,(u^2+1),$$

а следовательно, его интеграл

$$y=\frac{u^{n+1}}{2(n+1)}+\frac{u^{n-1}}{2(n-1)}+\text{Const}.$$

будет всегда алгебраическим (исключаются случаи $n=1$ и $n=-1$).

СЛЕДСТВИЕ 1

Ясно, что и выражение такого более общего вида

$$dy=(x+\sqrt{1+x^2})^n X\,dx$$

можно интегрировать тем же способом, лишь бы X было рациональной функцией от x. Действительно, если положить $x=\frac{u^2-1}{2u}$, то вместо X получается рациональная функция от u; пусть она $=U$; тогда получается:

$$dy=\frac{1}{2}Uu^{n-2}\,du\,(u^2+1).$$

Это выражение либо рационально, если n — целое число, либо легко приводится к рациональности, если n — дробное число.

СЛЕДСТВИЕ 2

Так как $\sqrt{1+x^2}=\frac{u^2+1}{2u}$, то, положив $\sqrt{1+x^2}=v$, можно будет проинтегрировать выражение

$$dy=(x+\sqrt{1+x^2})^n X\,dx$$

также и в том случае, если X будет любой рациональной функцией количеств x и v. Действительно, при подстановке $x=\frac{u^2-1}{2u}$ функция X переходит в рациональную функцию от одного u; положив ее равной U, получим, как и раньше,

$$dy=\frac{1}{2}Uu^{n-2}\,du\,(u^2+1).$$

ПРИМЕР

Пусть предложено выражение $dy = \left(ax + b\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n dx$. Положив $x = \frac{u^2-1}{2u}$, получим:

$$dy = \frac{a(u^2-1)+b(u^2+1)}{2u} \cdot \frac{1}{2} u^{n-2}\, du\, (u^2+1)$$

или

$$dy = \frac{1}{4} u^{n-3}\, du\, (a(u^4-1) + b(u^4+2u^2+1));$$

интеграл этого выражения есть

$$y = \frac{a+b}{4(n+2)} u^{n+2} + \frac{b}{2n} u^n + \frac{b-a}{4(n-2)} u^{n-2} + \mathrm{Const}.$$

Он является алгебраическим, исключая лишь те случаи, когда либо $n=2$, либо $n=-2$, либо же $n=0$.

ГЛАВА III

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

ЗАДАЧА 12

126. *Выразить при помощи бесконечного ряда интеграл дифференциального выражения* $dy = X\,dx$, *где* X — *дробная рациональная функция от* x.

РЕШЕНИЕ

Так как X — дробная рациональная функция, ее значение всегда можно развернуть таким образом, чтобы было

$$X = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \text{ и т. д.},$$

где коэффициенты A, B, C и т. д. составляют рекуррентный ряд, который определяется из знаменателя дроби[1]). Поэтому помножим отдельные члены на dx и проинтегрируем; в результате этого интеграл y выразится следующим рядом:

$$y = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{Cx^{m+2n+1}}{m+2n+1} + \text{ и т. д.} + \mathrm{Const};$$

если в ряде для X встретится член вида $\frac{M}{x}$, то вследствие этого в интеграл войдет член Mlx.

ПОЯСНЕНИЕ

127. Так как интеграл $\int X\,dx$, если он не является алгебраическим, выражается через логарифмы и углы, то, следовательно, значения логарифмов и углов можно представить при помощи бесконечных рядов. Уже во «Введении»[2]) мы привели несколько рядов такого рода; однако не только эти ряды, но и бесконечное число других можно получить путем интегрирования. Будет полезным пояснить это на примерах, в которых мы будем разлагать в ряды главным образом такого рода

---

[1]) «Введение в анализ бесконечно малых», т. I, § 63 (стр. 81 русского перевода).

[2]) «Введение в анализ бесконечно малых», т. I, гл. VI—VIII.

выражения, знаменатель которых двучлен; затем, однако, мы рассмотрим еще несколько случаев, когда знаменатель является трехчленом или многочленом. Но в первую очередь мы будем при этом выбирать такие выражения, у которых дробь может быть преобразована в другую, имеющую знаменателем двучлен.

ПРИМЕР 1

128. *Проинтегрировать дифференциальное выражение* $\frac{dx}{a+x}$ *при помощи ряда.*

Пусть $y=\int\frac{dx}{a+x}$; тогда $y=l(a+x)+\text{Const}$. Значит, если определить интеграл так, чтобы он исчезал при $x=0$, то $y=l(a+x)-la$.

Но так как

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\frac{x^4}{a^5}-\text{ и т. д.},$$

получим, находя интеграл тем же способом,

$$y=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\frac{x^5}{5a^5}-\text{ и т. д.},$$

откуда получается уже известный результат:

$$l(a+x)=la+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 1

129. Если мы возьмем x отрицательным, так что $dy=\frac{-dx}{a-x}$, то таким же образом обнаружится, что

$$l(a-x)=la-\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}-\text{и т. д.}$$

Комбинируя эти ряды, получим:

$$l(a^2-x^2)=2la-\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^4}{2a^4}-\frac{x^6}{3a^6}-\frac{x^8}{4a^8}-\text{ и т. д.}$$

и

$$l\frac{a+x}{a-x}=\frac{2x}{a}+\frac{2x^3}{3a^3}+\frac{2x^5}{5a^5}+\frac{2x^7}{7a^7}+\text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

130. Эти два последних ряда получаются путем интегрирования выражений

$$\frac{-2x\,dx}{a^2-x^2}=-2x\,dx\left(\frac{1}{a^2}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{x^4}{a^6}+\text{ и т. д.}\right)$$

и

$$\frac{2a\,dx}{a^2-x^2}=2a\,dx\left(\frac{1}{a^2}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{x^4}{a^6}+\text{ и т. д.}\right).$$

Но

$$\int\frac{-2x\,dx}{a^2-x^2}=l(a^2-x^2)-la^2,\quad\text{а}\quad\int\frac{2a\,dx}{a^2-x^2}=l\frac{a+x}{a-x},$$

так что мы могли бы обойтись уже одними этими формулами, интегрируя их с помощью рядов.

ПРИМЕР 2

131. *Проинтегрировать дифференциальное выражение* $\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$ *при помощи ряда.*

Пусть $dy=\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$; поскольку $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, этот угол можно будет выразить при помощи бесконечного ряда. Так как

$$\frac{a}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}-\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^4}{a^5}-\frac{x^6}{a^7}+\frac{x^8}{a^9}-\text{ и т. д.},$$

то, интегрируя, будем иметь:

$$y=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}=\frac{x}{a}-\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}-\frac{x^7}{7a^7}+\text{ и т. д.}$$

ПРИМЕР 3

132. *Выразить при помощи рядов интегралы выражений* $\frac{dx}{1+x^3}$ *и* $\frac{x\,dx}{1+x^3}$.

Так как

$$\frac{1}{1+x^3}=1-x^3+x^6-x^9+x^{12}-\text{ и т. д.},$$

то

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=x-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{10}x^{10}+\frac{1}{13}x^{13}-\text{ и т. д.}$$

и

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^3}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{8}x^8-\frac{1}{11}x^{11}+\frac{1}{14}x^{14}-\text{ и т. д.}$$

Но согласно § 77 мы будем иметь с помощью логарифмов и углов

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}l(1+x)-\frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{3}\,l\sqrt{1-2x\cos\frac{\pi}{3}+x^2}+\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{3}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}},$$

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^3}=-\frac{1}{3}l(1+x)-\frac{2}{3}\cos\frac{2\pi}{3}\,l\sqrt{1-2x\cos\frac{\pi}{3}+x^2}+\frac{2}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\frac{\pi}{3}}{1-x\cos\frac{\pi}{3}}.$$

Но $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда получается:

$$\int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}l(1+x)-\frac{1}{3}l\sqrt{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x},$$

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^3}=-\frac{1}{3}l(1+x)+\frac{1}{3}l\sqrt{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x},$$

причем интегралы, как и ряды, берутся так, чтобы они исчезали при $x=0$.

СЛЕДСТВИЕ 1

133. Если теперь сложить эти ряды, получается:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2-x} = x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{8}x^8-\frac{1}{10}x^{10}-\frac{1}{11}x^{11}+\text{и т. д.},$$

а если вычесть второй из первого, получим:

$$\frac{2}{3}l\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}} = x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8-\frac{1}{10}x^{10}+\frac{1}{11}x^{11}+\text{и т. д.},$$

что также

$$=\frac{1}{3}l\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}=\frac{1}{3}l\frac{(1+x)^3}{1+x^3}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

134. Так как $\int\frac{x^2\,dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}l(1+x^3)$, то получим таким же образом

$$\frac{1}{3}l(1+x^3)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{12}x^{12}+\text{и т. д.}$$

Если прибавить этот ряд к предыдущим, то будут встречаться все степени x.

ПРИМЕР 4

135. *Выразить при помощи ряда интеграл*

$$y=\int\frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^4}.$$

Так как

$$\frac{1}{1+x^4}=1-x^4+x^8-x^{12}+x^{16}-\text{и т. д.},$$

то

$$y=x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9+\frac{1}{11}x^{11}-\frac{1}{13}x^{13}-\frac{1}{15}x^{15}+\text{и т. д.}$$

Но согласно § 82, где надо взять $m=1$, а $n=4$ и положить $\frac{\pi}{4}=\omega$, этот же интеграл будет равен

$$y=\sin\omega\operatorname{arctg}\frac{x\sin\omega}{1-x\cos\omega}+\sin3\omega\operatorname{arctg}\frac{x\sin3\omega}{1-x\cos3\omega}.$$

Но $\frac{\pi}{4}=\omega=45^\circ$, поэтому $\sin\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin3\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos3\omega=$ $=\frac{-1}{\sqrt{2}}$. Значит, получим:

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}-x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}+x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

ПРИМЕР 5

136. *Выразить при помощи ряда интеграл*

$$y = \int \frac{(1+x^4)\,dx}{1+x^6}.$$

Так как $\frac{1}{1+x^6} = 1 - x^6 + x^{12} - x^{18} + x^{24} -$ и т. д., то

$$y = x + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{17}x^{17} - \text{ и т. д.}$$

Но согласно § 82, где надо взять $m=1$, $n=6$ и $\omega = \frac{\pi}{6} = 30°$, имеем:

$$y = \frac{2}{3}\sin\omega \operatorname{arctg}\frac{x\sin\omega}{1-x\cos\omega} + \frac{2}{3}\sin 3\omega \operatorname{arctg}\frac{x\sin 3\omega}{1-x\cos 3\omega} + \frac{2}{3}\sin 5\omega \operatorname{arctg}\frac{x\sin 5\omega}{1-x\cos 5\omega}.$$

Но $\sin\omega = \frac{1}{2}$, $\cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 3\omega = 1$, $\cos 3\omega = 0$, $\sin 5\omega = \frac{1}{2}$, $\cos 5\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; следовательно,

$$y = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2-x\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2+x\sqrt{3}}$$

или

$$y = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2} + \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

137. Пусть

$$z = \int \frac{x^2\,dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{15}x^{15} - \frac{1}{21}x^{21} + \text{ и т. д.};$$

если положить $x^3 = u$, то

$$z = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} u = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3.$$

Отсюда образуется такой смешанный ряд:

$$x + \frac{n}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 - \frac{n}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{13}x^{13} + \frac{n}{15}x^{15} + \frac{1}{17}x^{17} - \text{ и т. д.},$$

сумма которого есть

$$\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4} + \frac{n}{3}\operatorname{arctg} x^3.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

138. Если здесь взять $n = -1$ и соединить воедино оба угла [1]), то получится:

$$\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x-4x^3+4x^5-x^7}{1-4x^2+4x^4-3x^6};$$

---

[1]) То есть воспользоваться соотношением $\operatorname{Arctg} a + \operatorname{Arctg} b = \operatorname{Arctg}\frac{a+b}{1-ab}$

эта дробь путем деления числителя и знаменателя на $1-x^2+x^4$ приводится к виду $\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$, а это — тангенс тройного угла, тангенс которого есть x, так что

$$\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\operatorname{arctg}x;$$

на то же самое явно указывает и найденный нами ряд.

ПРИМЕР 6

139. *Проинтегрировать при помощи ряда выражение*

$$dy=\frac{(x^{m-1}+x^{n-m-1})\,dx}{1+x^n}.$$

Так как $\frac{1}{1+x^n}=1-x^n+x^{2n}-x^{3n}+x^{4n}-$ и т. д., то будем иметь:

$$y=\frac{x^m}{m}+\frac{x^{n-m}}{n-m}-\frac{x^{m+n}}{n+m}-\frac{x^{2n-m}}{2n-m}+\frac{x^{2n+m}}{2n+m}+\frac{x^{3n-m}}{3n-m}-\text{ и т. д.}$$

Согласно § 82 этот ряд выражает сумму нескольких круговых дуг (их можно видеть в § 82).

СЛЕДСТВИЕ

140. Если предложено выражение $dz=\frac{(x^{m-1}-x^{n-m-1})\,dx}{1-x^n}$, то, поскольку $\frac{1}{1-x^n}=1+x^n+x^{2n}+x^{3n}+$ и т. д., найдем таким же образом:

$$z=\frac{x^m}{m}-\frac{x^{n-m}}{n-m}+\frac{x^{n+m}}{n+m}-\frac{x^{2n-m}}{2n-m}+\frac{x^{2n+m}}{2n+m}-\frac{x^{3n-m}}{3n-m}+\text{и т. д.}$$

Значение этого выражения получено в § 84.

ПРИМЕР 7

141. *Проинтегрировать при помощи ряда выражение* $dy=\frac{(1+2x)\,dx}{1+x+x^2}$. Прежде всего этот интеграл, очевидно, есть $y=l(1+x+x^2)$. Чтобы обратить его в ряд, надо помножить числитель и знаменатель данного выражения на $1-x$, так что получится:

$$dy=\frac{(1+x-2x^2)\,dx}{1-x^3},$$

а так как

$$\frac{1}{1-x^3}=1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+\ldots\text{ и т. д.},$$

то, интегрируя, получим:

$$y=x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{2x^6}{6}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^8}{8}-\frac{2x^9}{9}+\text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 1

142. Таким же образом можно найти $y=l(1+x+x^2+x^3)$ при помощи ряда.

Действительно, так как $y+l(1-x)=l(1-x^4)$, то

$$y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{10}}{10}+ \text{ и т. д.}$$
$$-x^4 \qquad\qquad\qquad -\frac{x^8}{2} \qquad\qquad - \text{ и т. д.}$$

или

$$y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{3x^8}{8}+\frac{x^9}{9}+ \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

143. С другой стороны, дробь $\frac{1+2x}{1+x+x^2}$, развернутая в рекуррентный ряд, дает

$$1+x-2x^2+x^3+x^4-2x^5+x^6+x^7-2x^8+ \text{ и т. д.},$$

откуда, интегрируя, получаем тот же ряд, что и выше.

ПРИМЕР 8

144. *Проинтегрировать выражение* $dy=\frac{dx}{1-2x\cos\zeta+x^2}$ *при помощи ряда.*

Согласно § 64, где [надо взять] $A=1$, $B=0$, $a=1$, $b=1$, интеграл этого выражения есть

$$y=\frac{1}{\sin\zeta}\operatorname{arctg}\frac{x\sin\zeta}{1-x\cos\zeta},$$

а с помощью рекуррентного ряда находим:

$$\frac{1}{1-2x\cos\zeta+x^2}=1+2x\cos\zeta+(4\cos^2\zeta-1)x^2+(8\cos^3\zeta-4\cos\zeta)x^3$$
$$+(16\cos^4\zeta-12\cos^2\zeta+1)x^4+(32\cos^5\zeta-32\cos^3\zeta+6\cos\zeta)x^5+ \text{ и т. д.}$$

Помножив этот ряд на dx и проинтегрировав, получим искомый интеграл. Преобразовав степени $\cos\zeta$ в косинусы кратных углов, находим:

$$y=x+\frac{1}{2}x^2(2\cos\zeta)+\frac{1}{3}x^3(2\cos2\zeta+1)+\frac{1}{4}x^4(2\cos3\zeta+2\cos\zeta)$$
$$+\frac{1}{5}x^5(2\cos4\zeta+2\cos2\zeta+1)+\frac{1}{6}x^6(2\cos5\zeta+2\cos3\zeta+2\cos\zeta)+ \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 1

145. Если положить

$$dz=\frac{(1-x\cos\zeta)\,dx}{1-2x\cos\zeta+x^2},$$

то в интеграле § 63 будет $A=1$, $B=-\cos\zeta$, $a=1$ и $b=1$, и поэтому

$$z=-\cos\zeta\, l\sqrt{1-2x\cos\zeta+x^2}+\sin\zeta\operatorname{arctg}\frac{x\sin\zeta}{1-x\cos\zeta},$$

а с помощью ряда, так как [1])

$$\frac{1-x\cos\zeta}{1-2x\cos\zeta+x^2}=1+x\cos\zeta+x^2\cos2\zeta+x^3\cos3\zeta+x^4\cos4\zeta+ \text{ и т. д.},$$

[1]) Ряд $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$, представляющий дробь $\frac{1-x\cos\zeta}{1-2x\cos\zeta+x^2}$, определяется рекуррентным соотношением $a_{n+1}=2a_n\cos\zeta-a_{n+1}$, причем $a_0=1$ и $a_1=\cos\zeta$. Отсюда находим $a_2=2\cos^2\zeta-1=\cos2\zeta$, $a_3=2\cos2\zeta\cos\zeta-\cos\zeta=(\cos\zeta+\cos3\zeta)-\cos\zeta=\cos3\zeta$ и т. д.

мы получаем:

$$z = x + \frac{1}{2}x^2\cos\zeta + \frac{1}{3}x^3\cos 2\zeta + \frac{1}{4}x^4\cos 3\zeta + \frac{1}{5}x^5\cos 4\zeta + \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

146. С другой стороны, так как

$$dz = \frac{dx\,(-x\cos\zeta + \cos^2\zeta + \sin^2\zeta)}{1 - 2x\cos\zeta + x^2},$$

то

$$z = -\cos\zeta\, l\sqrt{1 - 2x\cos\zeta + x^2} + \sin^2\zeta \int \frac{dx}{1 - 2x\cos\zeta + x^2}.$$

Поэтому для $y = \int \frac{dx}{1 - 2x\cos\zeta + x^2}$ получается другой бесконечный ряд, к которому присоединен логарифм, а именно:

$$y = \frac{\cos\zeta}{\sin^2\zeta}\, l\sqrt{1 - 2x\cos\zeta + x^2} + \frac{1}{\sin^2\zeta}\left(x + \frac{1}{2}x^2\cos\zeta + \frac{1}{3}x^3\cos 2\zeta + \frac{1}{4}x^4\cos 3\zeta + \text{ и т. д.}\right).$$

ЗАДАЧА 12а[1])

147. *Проинтегрировать иррациональное дифференциальное выражение $dy = x^{m-1}\,dx\,(a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ при помощи бесконечного ряда.*

РЕШЕНИЕ

Пусть $a^{\frac{\mu}{\nu}} = c$, тогда

$$dy = cx^{m-1}\,dx\left(1 + \frac{b}{a}x^n\right)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

причем мы принимаем, что c не является мнимым количеством[2]). Так как

$$\left(1 + \frac{b}{a}x^n\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = 1 + \frac{\mu b}{1\nu \cdot a}x^n + \frac{\mu(\mu-\nu)b^2}{1\nu\cdot 2\nu\cdot a^2}x^{2n} + \frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)b^3}{1\nu\cdot 2\nu\cdot 3\nu\cdot a^3}x^{3n} + \text{ и т. д.},$$

то, интегрируя, будем иметь:

$$y = c\left(\frac{x^m}{m} + \frac{\mu b}{1\nu\cdot a}\cdot\frac{x^{m+n}}{m+n} + \frac{\mu(\mu-\nu)b^2}{1\nu\cdot 2\nu\cdot a^2}\cdot\frac{x^{m+2n}}{m+2n} + \frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)b^3}{1\nu\cdot 2\nu\cdot 3\nu\cdot a^3}\cdot\frac{x^{m+3n}}{m+3n} + \text{и т. д.}\right).$$

Этот ряд продолжается до бесконечности, исключая лишь тот случай, когда $\frac{\mu}{\nu}$ — целое положительное число.

Если же в случае, когда ν — четное число, количество a будет отрицательным, наше выражение надо будет представить так:

$$dy = x^{m-1}\,dx\,(bx^n - a)^{\frac{\mu}{\nu}} = b^{\frac{\mu}{\nu}}x^{m+\frac{\mu n}{\nu}-1}\,dx\left(1 - \frac{a}{b}x^{-n}\right)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

[1]) В подлиннике по ошибке здесь дан вторично заголовок «задача 12».

[2]) Этой оговоркой Эйлер исключает случай отрицательного a при четном ν; см. ниже.

а так как

$$\left(1-\frac{a}{b}x^{-n}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}=1-\frac{\mu a}{1\nu\cdot b}x^{-n}+\frac{\mu(\mu-\nu)a^2}{1\nu\cdot 2\nu\cdot b^2}x^{-2n}-\frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)a^3}{1\nu\cdot 2\nu\cdot 3\nu\cdot b^3}x^{-3n}+\text{ и т. д.},$$

то, интегрируя, будем иметь:

$$y=b^{\frac{\mu}{\nu}}\left(\frac{\nu x^{m+\frac{\mu n}{\nu}}}{m\nu+\mu n}-\frac{\mu a}{1\nu\cdot b}\cdot\frac{\nu x^{m+\frac{(\mu-\nu)n}{\nu}}}{m\nu+(\mu-\nu)n}+\frac{\mu(\mu-\nu)a^2}{1\nu\cdot 2\nu\cdot b^2}\cdot\frac{\nu x^{m+\frac{(\mu-2\nu)n}{\nu}}}{m\nu+(\mu-2\nu)n}-\text{ и т. д.}\right).$$

Если a и b — положительные числа, можно применять и то и другое разложение.

ПРИМЕР 1

148. *Проинтегрировать выражение* $dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *при помощи ряда.*

Прежде всего из сказанного выше ясно, что $y=\arcsin x$, а следовательно, и этот угол выразится через бесконечный ряд. Действительно, так как

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8+\text{ и т. д.},$$

то

$$y=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{x^9}{9}+\text{ и т. д.},$$

при этом то и другое выражение определено так, чтобы при $x=0$ оно исчезало.

СЛЕДСТВИЕ 1

149. Если $x=1$, то ввиду того, что $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, будет

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}+\text{ и т. д.}$$

Если же положить $x=\frac{1}{2}$, то в силу того, что $\arcsin\frac{1}{2}=30^\circ=\frac{\pi}{6}$, будем иметь:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^3\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2^5\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^7\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 2^9\cdot 9}+\text{ и т. д.}$$

Если сложить десять членов этого ряда, то получим 0,52359877; помножив на 6, получим 3,14159262; это число отличается от истинного только в восьмом знаке.

СЛЕДСТВИЕ 2

150. Если предложено выражение $dy=\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$, то, положив $x=u^2$, получим:

$$dy=\frac{2u\,du}{\sqrt{u^2-u^4}}=\frac{2\,du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Следовательно, $y=2\arcsin u=2\arcsin\sqrt{x}$, а с помощью ряда получим:

$$y=2\left(u+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{u^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{u^7}{7}+\text{ и т. д.}\right),$$

или

$$y=2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^2}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^3}{7}+\text{ и т. д.}\right)\sqrt{x}.$$

ПРИМЕР 2

151. *Проинтегрировать выражение* $dy=dx\sqrt{2ax-x^2}$ *при помощи ряда.*

Положив $x=u^2$, получим $dy=2u^2\,du\sqrt{2a-u^2}$; при помощи приведения I (§ 118), если $n=2$, $m=1$, $a=2a$, $b=-1$, $\mu=1$, $\nu=2$, получим:

$$\int u^2\,du\sqrt{2a-u^2}=-\frac{1}{4}u(2a-u^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}a\int du\sqrt{2a-u^2}.$$

Теперь при помощи третьего приведения, если взять $m=1$, $a=2a$, $b=-1$, $n=2$, $\mu=-1$, $\nu=2$, получается:

$$\int du\sqrt{2a-u^2}=\frac{1}{2}u\sqrt{2a-u^2}+a\int\frac{du}{\sqrt{2a-u^2}};$$

но

$$\int\frac{du}{\sqrt{2a-u^2}}=\arcsin\frac{u}{\sqrt{2a}}=\arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}},$$

поэтому

$$\int u^2\,du\sqrt{2a-u^2}=-\frac{1}{4}u(2a-u^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}au\sqrt{2a-u^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}$$
$$=\frac{1}{4}u(u^2-a)\sqrt{2a-u^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}.$$

Следовательно,

$$y=\frac{1}{2}(x-a)\sqrt{2ax-x^2}+a^2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}.$$

Для нахождения же ряда имеем:

$$dy=dx\sqrt{2ax}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=x^{\frac{1}{2}}dx\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a}-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\cdot\frac{x^2}{4a^2}-\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^3}{8a^3}-\text{ и т. д.}\right)\sqrt{2a}$$

и отсюда, интегрируя, получаем:

$$y=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5\cdot2a}-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\cdot\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7\cdot4a^2}-\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9\cdot8a^3}-\text{ и т. д.}\right)\sqrt{2a},$$

или

$$y=\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{5\cdot2a}-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\cdot\frac{x^3}{7\cdot4a^2}-\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^4}{9\cdot8a^3}-\text{ и т. д.}\right)2\sqrt{2ax}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

152. Этот интеграл легче найти, полагая $x=a-v$, откуда получается $dy=-dv\sqrt{a^2-v^2}$ и при помощи приведения III [§ 118]

$$\int dv\sqrt{a^2-v^2}=\frac{1}{2}v\sqrt{a^2-v^2}+\frac{1}{2}a^2\int\frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}},$$

откуда

$$y=C-\frac{1}{2}v\sqrt{a^2-v^2}-\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{v}{a},$$

или

$$y=C-\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}-\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{a-x}{a}.$$

Для того чтобы было $y=0$ при $x=0$, нужно взять $C=\frac{1}{2}a^2\arcsin 1$, так что

$$y=-\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arccos\frac{a-x}{a}.$$

Действительно,

$$\arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{2}\arccos\frac{a-x}{a}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

153. Если положить $x=\frac{a}{2}$, то получается $y=\frac{-a^2\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi a^2}{6}$, а разложение в ряд дает

$$y=2a^2\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^3}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 7\cdot 2^5}-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9\cdot 2^7}-\text{ и т. д.}\right),$$

откуда заключаем, что

$$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}+6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^2}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 7\cdot 2^4}-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9\cdot 2^6}-\text{ и т. д.}\right),$$

а согласно доказанному выше [§ 149]

$$\pi=3\left(1+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^6}+\text{ и т. д.}\right);$$

из сопоставления этих двух рядов можно получить много других.

ПРИМЕР 3

154. *Проинтегрировать выражение* $dy=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ *при помощи ряда.*

Интеграл этого выражения, взятый так, чтобы при $x=0$ он исчезал, есть $y=l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, а так как

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\text{ и т. д.},$$

то тот же интеграл, выраженный через ряд, будет

$$y=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\text{ и т. д.}$$

ПРИМЕР 4

155. *Проинтегрировать выражение* $dy=\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ *при помощи ряда.*

Интегрирование дает $y=l\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$; это выражение исчезает, если положить $x=1$. Но ввиду того, что

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4x^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6x^7}+ \text{ и т. д.},$$

этот же интеграл будет

$$y=C+lx-\frac{1}{2\cdot 2x^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6}- \text{ и т. д.}$$

Для того чтобы это выражение исчезало при $x=1$, постоянная определяется так, что

$$y=lx+\frac{1}{2\cdot 2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\left(1-\frac{1}{x^4}\right)+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\left(1-\frac{1}{x^6}\right)+ \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ

156. Если положить $x=1+u$, то получается:

$$dy=\frac{du}{\sqrt{2u+u^2}}=\frac{du}{\sqrt{2u}}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{du}{\sqrt{2u}}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{u^2}{4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{u^3}{8}- \text{ и т. д.}\right),$$

откуда, интегрируя, будем иметь:

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{u}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7\cdot 8}+ \text{ и т. д.}\right),$$

или

$$y=\left(1-\frac{1u}{2\cdot 3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3u^2}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5u^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+ \text{ и т. д.}\right)\sqrt{2u}\,.$$

ПРИМЕР 5

157. *Проинтегрировать выражение* $dy=\frac{dx}{(1-x)^n}$ *при помощи ряда.*

С помощью интегрирования получается:

$$y=\frac{1}{(n-1)(1-x)^{n-1}}-\frac{1}{n-1}$$

(y делается равным 0, если $x=0$), или

$$y=\frac{(1-x)^{-n+1}-1}{n-1}\,.$$

С помощью же ряда имеем:

$$dy=dx\left(1+nx+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+ \text{ и т. д.}\right),$$

вследствие чего тот же интеграл выразится так:

$$y=x+\frac{nx^2}{2}+\frac{n(n+1)x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{n(n+1)(n+2)x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+ \text{ и т. д.}$$

Также и отсюда ясно, что

$$(n-1)y+1=\frac{1}{(1-x)^{n-1}}\,.$$

ПОЯСНЕНИЕ

158. Этот способ слишком ясен, чтобы надо было подробнее на нем останавливаться; поэтому я изложу здесь другой менее очевидный способ получения рядов, который часто может принести в анализе исключительную пользу.

ЗАДАЧА 13

159. *Предложено дифференциальное выражение*

$$dy = x^{m-1}\,dx\,(a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}.$$

Обратить его интеграл в ряд другим способом.

РЕШЕНИЕ 1

Положим $y = (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} z$; тогда

$$dy = (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}\left(dz(a + bx^n) + \frac{n\mu}{\nu}\,bx^{n-1}z\,dx\right),$$

откуда получается:

$$x^{m-1}\,dx = dz(a + bx^n) + \frac{n\mu}{\nu}\,bx^{n-1}\,z\,dx,$$

или

$$\nu x^{m-1}\,dx = \nu\,dz\,(a + bx^n) + n\mu bx^{n-1}\,z\,dx.$$

Прежде чем отыскивать ряд, которым определяется значение z, надо заметить, что в случае, когда x исчезает, мы имеем[1]):

$$dy = a^{\frac{\mu}{\nu}-1}\,x^{m-1}\,dx = a^{\frac{\mu}{\nu}}\,dz,$$

так что $dz = \frac{1}{a}\,x^{m-1}\,dx$.

[1]) Поясним ход мысли Эйлера. Предполагается, что m — целое число (как видно из § 161, допускается, что оно может быть и отрицательным и равным нулю). Относительно числа n, повидимому, предполагается, что оно целое положительное, ибо ниже (см. решение 2 настоящего параграфа) ряд $z = Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n}$ назван «нисходящим». Эйлер ищет разложение z в ряд по методу неопределенных коэффициентов в предположении, что такое разложение возможно. При этом он не исключает невозможности такого разложения, ибо ниже прямо указывает случаи невозможности (см. § 161). В «первом решении» разыскивается разложение в ряд, расположенный по возрастающим степеням x, и Эйлер хочет объяснить, почему в этом разложении не равные нулю коэффициенты могут быть лишь при членах степени $m + in$ (где через i мы вместе с Эйлером обозначаем натуральное число). Мотивировка состоит в следующем. В уравнениях

$$dy = x^{m-1}\,dx\,(a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}, \tag{1}$$

$$dy = (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}\left[dz\,(a + bx^n) + \frac{n\mu}{\nu}\,bx^{n-1}z\,dx\right] \tag{2}$$

отбрасываются слагаемые bx^n и $\frac{n\mu}{\nu}\,bx^{n-1}z\,dx$ и сопоставляются полученные два выра-

Поэтому положим

$$z = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \text{и т. д.}$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{dz}{dx} = mAx^{m-1} + (m+n)\,Bx^{m+n-1} + (m+2n)\,Cx^{m+2n-1} + \text{и т. д.}$$

Подставим эти ряды вместо z и $\frac{dz}{dx}$ в уравнение

$$\frac{\nu dz}{dx}(a+bx^n) + n\mu bx^{n-1}z - \nu x^{m-1} = 0;$$

расположив каждый из членов по степеням x, получим такое уравнение:

$$\left.\begin{array}{llll} m\nu aAx^{m-1} & + (m+n)\,\nu aBx^{m+n-1} & + (m+2n)\,\nu aCx^{m+2n-1} & + \text{и т. д.} \\ -\nu & + \quad m\nu bA & + (m+n)\,\nu bB & \\ & + \quad n\mu bA & + \quad n\mu bB & \end{array}\right\} = 0,$$

откуда, положив каждый из членов равным нулю, определим введенные коэффициенты[1]) при помощи следующих формул:

$$m\nu aA - \nu = 0, \quad \text{откуда } A = \frac{1}{ma},$$

$$(m+n)\,\nu aB + (m\nu + n\mu)\,bA = 0, \qquad B = -\frac{(m\nu + n\mu)\,b}{(m+n)\,\nu a}A,$$

жения дифференциала dy. Получается уравнение

$$dz = \frac{1}{a}x^{m-1}\,dx. \tag{3}$$

Отбрасывание производится в предположении, что $x=0$. Если считать, что n есть целое положительное число, то такое отбрасывание по существу правомерно. Эйлер мог бы сослаться на § 88 «Дифференциального исчисления» (стр. 92 русского перевода), где говорится об исчезающих количествах, которые исчезают не только по сравнению с конечной величиной, но и по сравнению с другим исчезающим количеством. На современном математическом языке это означало бы, что отбрасываемые количества оказывают влияние на главные члены правых частей уравнений (1) и (2). Относительно уравнения (1) это совершенно очевидно; в уравнении же (2) главная часть слагаемого $\frac{n\mu}{\nu}bx^{n-1}z\,dx$, как и главная часть слагаемого $bx^n\,dz$, имеет относительно x порядок $p+n-1$, где p — низкая степень искомого разложения.

Таким образом, при $n \geqslant 1$ уравнение (3) будет верным с точностью до главных членов и разложение z должно начаться (при $a \neq 0$) с члена степени m.

Отсюда Эйлер без дальнейших пояснений заключает, что разложение z должно иметь вид

$$z = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \ldots, \tag{4}$$

и это, действительно, почти очевидно, если обратить внимание на вид правой части уравнения (1) и заметить, что разложения правых частей (1) и (2) при подстановке (4) будут состоять из соответственно подобных членов.

Эйлер, повидимому, точно воспроизводит соображения, которые привели его к мысли искать разложение вида (4). В самом деле, несколько ниже (см. второе решение) он ищет по аналогии с (4) разложение вида

$$z = Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + \ldots, \tag{5}$$

которое никак нельзя мотивировать рассуждениями, аналогичными вышеприведенным.

[1]) coefficientes ficti.

$$(m+2n)\nu aC+((m+n)\nu+n\mu)\,bB=0,\qquad C=-\frac{((m+n)\nu+n\mu)\,b}{(m+2n)\nu a}B,$$

$$(m+3n)\nu aD+((m+2n)\nu+n\mu)\,bC=0,\qquad D=-\frac{((m+2n)\nu+n\mu)\,b}{(m+3n)\nu a}C$$

[и т. д.].

Таким образом, любой коэффициент без труда определится из предыдущего, а тогда будем иметь:

$$y=(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}\,(Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+\text{ и т. д.}).$$

РЕШЕНИЕ 2

Подобно тому как мы взяли здесь ряд, восходящий по степеням x, точно так же мы можем составить и нисходящий ряд:

$$z=Ax^{m-n}+Bx^{m-2n}+Cx^{m-3n}+Dx^{m-4n}+\text{ и т. д.},$$

так что

$$\frac{dz}{dx}=(m-n)\,Ax^{m-n-1}+(m-2n)\,Bx^{m-2n-1}+(m-3n)\,Cx^{m-3n-1}+\text{ и т. д.}$$

Подставив эти ряды, получим:

$$\left.\begin{array}{llll}(m-n)\nu bAx^{m-1}+(m-n)\nu aAx^{m-n-1}+(m-2n)\nu aBx^{m-2n-1} & & & \\ & & +(m-3n)\nu a\,Cx^{m-3n-1}+\text{ и т. д.} & \\ +\ n\mu bA+(m-2n)\nu bB & +(m-3n)\nu bC & & +(m-4n)\nu bD \\ -\nu \qquad +\ n\mu bB & +n\mu bC & & +n\mu bD\end{array}\right\}=0.$$

Отсюда буквы A, B, C и т. д. определяются следующим образом:

$$(m-n)\nu bA+n\mu bA-\nu=0,\ \text{откуда}\ A=\frac{\nu}{(m-n)\nu+n\mu}\cdot\frac{1}{b},$$

$$(m-n)\nu aA+(m-2n)\nu bB+n\mu bB=0,\qquad B=\frac{-(m-n)\nu}{(m-2n)\nu+n\mu}\cdot\frac{a}{b}A,$$

$$(m-2n)\nu aB+(m-3n)\nu bC+n\mu bC=0,\qquad C=\frac{-(m-2n)\nu}{(m-3n)\nu+n\mu}\cdot\frac{a}{b}B,$$

$$(m-3n)\nu aC+(m-4n)\nu bD+n\mu bD=0,\qquad D=\frac{-(m-3n)\nu}{(m-4n)\nu+n\mu}\cdot\frac{a}{b}C,$$

где опять закон следования этих букв очевиден.

СЛЕДСТВИЕ 1

160. Первый из этих рядов замечателен тем, что в случае, когда $(m+in)\nu+n\mu=0$, т. е. когда $-\frac{m}{n}-\frac{\mu}{\nu}=i$, он обрывается и дает алгебраический интеграл. Второй же ряд обрывается всякий раз, как $m-in=0$, т. е. $\frac{m}{n}=i$, где i означает целое положительное число.

СЛЕДСТВИЕ 2

161. Оба эти ряда имеют некоторое неудобство, состоящее в том, что ими не всегда можно пользоваться. Действительно, когда либо $m=0$, либо $m+in=0$, нельзя пользоваться первым рядом: когда же

$(m-in)\nu+n\mu=0$, т. е. $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}=i$, делается невозможным использование второго, так как члены во всех упомянутых случаях стали бы бесконечными.

СЛЕДСТВИЕ 3

162. Но здесь, кстати, на помощь приходит то обстоятельство, что всякий раз, как один из этих рядов нельзя применить, всегда можно использовать другой, за исключением лишь тех случаев, в которых и $-\frac{m}{n}$ и $\frac{\mu}{\nu}+\frac{m}{n}$ — целые положительные числа. Но так как при этом $\nu=1$, то мы имеем целые рациональные выражения, и эти случаи не представляют никаких трудностей.

СЛЕДСТВИЕ 4

163. Оба ряда для z можно объединить следующим образом. Пусть первый ряд $=P$, второй $=Q$, так что можно принять как $z=P$, так и $z=Q$. Чтобы соединить оба ряда, можно взять $z=\alpha P+\beta Q$, где $\alpha+\beta=1$.

ПОЯСНЕНИЕ

164. Однако же из того, что мы даем два ряда для z, отнюдь не следует, что эти два ряда равны друг другу. Действительно, значения y, получающиеся отсюда, вовсе не должны быть равны друг другу: они должны только отличаться друг от друга на постоянную величину. Так, если обозначить первый найденный нами ряд через P, а второй через Q, то, поскольку из первого получается $y=(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}P$, а из второго $y=(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}Q$, количество $(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}(P-Q)$ безусловно будет постоянным[1]), а поэтому $P-Q=C(a+bx^n)^{-\frac{\mu}{\nu}}$.

Конечно, как тот, так и другой ряд дает лишь частный интеграл, так как он не содержит никакой постоянной, которая не содержалась бы уже в дифференциальном выражении. Однако этим же способом можно найти для z и полное значение. Действительно, сверх прежде взятого ряда P или Q можно положить

$$z=P+\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n}+\delta x^{3n}+\varepsilon x^{4n}+\ \text{и т. д.}$$

После подстановки ряд P определяется как раньше; что же касается второго, нового, ряда, то надо сделать так, чтобы получилось

$$\left.\begin{array}{lllll} n\nu a\beta x^{n-1} & +2n\nu a\gamma x^{2n-1} & +3n\nu a\delta x^{3n-1} & +4n\nu a\varepsilon x^{4n-1}+ & \text{и т. д.} \\ +n\mu b\alpha+ & n\nu b\beta & +2n\nu b\gamma & +3n\nu b\delta & \\ + & n\mu b\beta & +n\mu b\gamma & +n\mu b\delta & \end{array}\right\}=0.$$

---

[1]) Эйлеру хорошо известно (см. § 169), что один из рядов P, Q может сходиться при таких значениях x, при которых другой расходится. Однако он этим не смущается, так как он вообще оперирует с рядами формально, безотносительно к тому, сходятся ли они или расходятся. См. «Дифференциальное исчисление», §§ 109—111, стр. 100—101.

Отсюда определяются

$$\beta=\frac{-\mu b}{\nu a}\cdot\alpha,\quad \gamma=\frac{-(\mu+\nu)\,b}{2\nu a}\cdot\beta,\quad \delta=\frac{-(\mu+2\nu)\,b}{3\nu a}\cdot\gamma,\quad \varepsilon=\frac{-(\mu+3\nu)\,b}{4\nu a}\cdot\delta \text{ и т. д.},$$

так что получится

$$z=P+\alpha\left(1-\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{b}{a}\,x^n+\frac{\mu(\mu+\nu)}{\nu\cdot 2\nu}\cdot\frac{b^2}{a^2}\,x^{2n}-\frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)}{\nu\cdot 2\nu\cdot 3\nu}\cdot\frac{b^3}{a^3}\,x^{3n}+\text{и т. д.}\right),$$

или

$$z=P+\alpha\left(1+\frac{b}{a}\,x^n\right)^{-\frac{\mu}{\nu}},$$

откуда

$$y=P\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}+\alpha a^{\frac{\mu}{\nu}};$$

это — полный интеграл, так как постоянная α остается произвольной.

ПРИМЕР 1

165. *Проинтегрировать этим способом выражение* $dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *при помощи ряда.*

При сопоставлении с установленным общим видом получим $a=1$, $b=-1$, $m=1$, $n=2$, $\mu=1$, $\nu=2$, откуда, если положить $y=z\sqrt{1-x^2}$, первое решение

$$z=Ax+Bx^3+Cx^5+Dx^7+\text{ и т. д.}$$

дает

$$A=1,\quad B=\frac{2}{3}A,\quad C=\frac{4}{5}B,\quad D=\frac{6}{7}C,\quad E=\frac{8}{9}D \text{ и т. д.},$$

откуда выводим

$$y=\left(x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^5+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^7+\text{и т. д.}\right)\sqrt{1-x^2};$$

этот интеграл исчезает при $x=0$; значит, $y=\arcsin x$.

Пытаться применить здесь второй способ бесполезно, ибо $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}=1$.

СЛЕДСТВИЕ 1

166. Если положить $x=1$, то на первый взгляд кажется, что $y=0$, так как $\sqrt{1-x^2}=0$; однако надо обратить внимание на то, что в этом случае сумма бесконечного ряда становится бесконечной[1]); поэтому ничто не мешает тому, чтобы $y=\frac{\pi}{2}$. Если положим $x=\frac{1}{2}$, то $y=30^\circ=\frac{\pi}{6}$, а потому

$$\frac{\pi}{6}=\left(1+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 4^2}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 4^3}+\text{ и т. д.}\right)\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

---

[1]) Чтобы убедиться в том, что сумма ряда

$$1+\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}+\dots \tag{1}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

167. Подобным же образом, если предложено выражение $dy=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, находим:

$$y=\left(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^5-\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^7+\text{ и т. д.}\right)\sqrt{1+x^2}$$

и вместе с тем

$$y=l\,(x+\sqrt{1+x^2}).$$

ПРИМЕР 2

168. *Проинтегрировать этим способом выражение* $dy=\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ *при помощи ряда.*

Здесь $m=0$, $n=2$, $\mu=1$, $\nu=2$, $a=1$ и $b=-1$. Значит, надо пользоваться вторым рядом, взяв

$$z=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=Ax^{-2}+Bx^{-4}+Cx^{-6}+Dx^{-8}+\text{ и т. д.}$$

Получится:

$$A=1,\quad B=\frac{2}{3}A,\quad C=\frac{4}{5}B,\quad D=\frac{6}{7}C\text{ и т. д.}$$

Отсюда заключаем, что

$$y=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3x^4}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5x^6}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7x^8}+\text{ и т. д.}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

С другой стороны, интегрирование дает $y=l\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$; эти значения согласуются[1]), так как оба они исчезают при $x=1$ [2]).

бесконечна, нам достаточно сравнить его с рядом

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 5\cdot 7}+\dots,$$

который совпадает с рядом

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots \qquad (2)$$

Однако ничто не дает основания полагать, что так рассуждал и Эйлер. Скорее всего он опирается на заранее известное равенство

$$\arcsin x=\left(x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^5+\dots\right)\sqrt{1-x^2}$$

и, подставляя сюда $x=1$, заключает, что

$$1+\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}+\dots=\frac{\arcsin 1}{0}=\infty.$$

Ср. § 14 вступительной статьи к «Дифференциальному исчислению» (стр. 28—29).

[1]) convenіunt.

[2]) К этому месту Л. Шлезингер дает следующее подстрочное примечание: «Так как при $x=1$ сумма ряда становится бесконечной, то отсюда не следует, что для этого значения x произведение ряда на $\sqrt{1-x^2}$ исчезает; ср. § 166».

В самом деле, в § 166 Эйлер говорит, что первый сомножитель произведения

$$\left(x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^5+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^7+\dots\right)\sqrt{1-x^2} \qquad (1)$$

обращается при $x=1$ в бесконечность, а потому «ничто не мешает» выражению (1)

СЛЕДСТВИЕ 1

169. Так как этот ряд сходится только при $x>1$, а в этом случае выражение $\sqrt{1-x^2}$ становится мнимым, то этот ряд совершенно бесполезен[1]).

СЛЕДСТВИЕ 2

170. Если предложено $dy=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, то для y получается тот же ряд, умноженный на $\sqrt{-1}$, и будем иметь:

$$y=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3x^4}+\frac{2\cdot4}{3\cdot5x^6}+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7x^8}+\text{ и т. д.}\right)\sqrt{x^2-1}.$$

Полагая же $x=\frac{1}{u}$, получим $dy=\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$ и $y=C-\arcsin u$ или

$$y=C-\arcsin\frac{1}{x},$$

быть равным $\frac{\pi}{2}$. Нелишним будет дополнительно отметить, что произведение

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3x^4}+\frac{2\cdot4}{3\cdot5x^6}+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7x^8}+\ldots\right)\sqrt{1-x^2} \tag{2}$$

и в самом деле не исчезает при $x=1$, а «обращается» в $i\frac{\pi}{2}$. Ошибка Эйлера тем более примечательна, что Эйлер легко мог бы ее избежать, если бы положил в выражении (2) $x=\frac{1}{z}$. Тогда оно преобразовалось бы к виду

$$i\left(z+\frac{2}{3}z^2+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}z^5+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}z^7+\ldots\right)\sqrt{1-z^2}. \tag{3}$$

Если сопоставить (1) и (3) и учесть, что при $x=1$ произведение (1) дает $\frac{\pi}{2}$, то станет ясным, что произведение (2) при $x=1$ дает $i\frac{\pi}{2}$.

Не кто иной, как Эйлер, еще за 20 лет до написания «Интегрального исчисления» (в 1749 г.) обнаружил многозначность логарифмической функции комплексного переменного. С другой стороны, Эйлер специально обращает внимание на то, что выражение $\sqrt{1-x^2}$ становится мнимым при $|x|>1$, т. е. как раз для тех значений x, при которых рассматриваемый ряд сходится (см. § 169). Однако Эйлер не указывает, с каким из значений $l\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ «согласуется» значение произведения (2). Так как Эйлер, повидимому, ограничивается положительными значениями x (не меньшими, чем 1), то все значения в $l\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ имеют вид $-i\varphi$, где φ — одно из значений аргумента комплексного числа $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$. Поскольку Эйлер полагает $A=0$, это значение аргумента должно содержаться между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. При этих оговорках произведение (2) «согласуется» с выражением $l\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}+i\frac{\pi}{2}$.

[1]) haec series nullius est usus.

где надо взять $C=0$, так как этот ряд исчезает, если положить $x=\infty$; таким образом, $y=-\arcsin\frac{1}{x}$; это согласуется с [разложением], полученным выше [§ 165], если положить $\frac{1}{x}=u$.

ПРИМЕР 3

171. *Проинтегрировать этим способом выражение* $dy=\frac{dx}{\sqrt{a+bx^4}}$ *при помощи ряда.*

В этом случае $m=1$, $n=4$, $\mu=1$, $\nu=2$; поэтому, если положить $y=z\sqrt{a+bx^4}$, первое решение дает

$$z=Ax+Bx^5+Cx^9+Dx^{13}+ \text{ и т. д.},$$

где

$$A=\frac{1}{a}, \quad B=\frac{-3b}{5a}A, \quad C=\frac{-7b}{9a}B, \quad D=\frac{-11b}{13a}C \text{ и т. д.},$$

так что

$$y=\left(\frac{x}{a}-\frac{3bx^5}{5a^2}+\frac{3\cdot 7b^2x^9}{5\cdot 9a^3}-\frac{3\cdot 7\cdot 11b^3x^{13}}{5\cdot 9\cdot 13a^4}+ \text{ и т. д.}\right)\sqrt{a+bx^4}.$$

Здесь, однако, имеет место и второе решение, если положить

$$z=Ax^{-3}+Bx^{-7}+Cx^{-11}+Dx^{-15}+\text{и т. д.},$$

где

$$A=\frac{-1}{b}, \quad B=\frac{-3a}{5b}A, \quad C=\frac{-7a}{9b}B, \quad D=\frac{-11a}{13b}C \text{ и т. д.},$$

откуда заключаем, что

$$y=-\left(\frac{1}{bx^3}-\frac{3a}{5b^2x^7}+\frac{3\cdot 7a^2}{5\cdot 9b^3x^{11}}-\frac{3\cdot 7\cdot 11a^3}{5\cdot 9\cdot 13b^4x^{15}}+ \text{ и т. д.}\right)\sqrt{a+bx^4};$$

из этих рядов первый исчезает при $x=0$, второй же — при $x=\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 1

172. Следовательно, разность этих двух рядов есть постоянная величина[1]), т. е.

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{x}{a}-\frac{3bx^5}{5a^2}+\frac{3\cdot 7b^2x^9}{5\cdot 9a^3}-\frac{3\cdot 7\cdot 11b^3x^{13}}{5\cdot 9\cdot 13a^4}+ \text{ и т. д.} \\ +\frac{1}{bx^3}-\frac{3a}{5b^2x^7}+\frac{3\cdot 7a^2}{5\cdot 9b^3x^{11}}-\frac{3\cdot 7\cdot 11a^3}{5\cdot 9\cdot 13b^4x^{15}}+ \text{ и т. д.}\end{array}\right\}\sqrt{a+bx^4}=\mathrm{Const}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

173. Собирая члены этих двух рядов, будем иметь:

$$\frac{a+bx^4}{abx^3}-\frac{3}{5}\cdot\frac{a^3+b^3x^{12}}{a^2b^2x^7}+\frac{3\cdot 7}{5\cdot 9}\cdot\frac{a^5+b^5x^{20}}{a^3b^3x^{11}}- \text{ и т. д.}=\frac{C}{\sqrt{a+bx^4}}.$$

---

[1]) Первый ряд сходится только при $|x|\leqslant\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, а второй — только при $|x|\geqslant\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, так что ряд § 173 сходится только при $x=\pm\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$. См. подстрочное примечание к § 164.

Какое бы мы значение ни придавали x в этих выражениях, для C всегда получится одно и то же количество[1]).

СЛЕДСТВИЕ 3

174. Так, если $a=1$ и $b=1$, то этот ряд, помноженный на $\sqrt{1+x^4}$, будет всегда равен постоянному, т. е.

$$\left(\frac{1+x^4}{x^3}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1+x^{12}}{x^7}+\frac{3\cdot7}{5\cdot9}\cdot\frac{1+x^{20}}{x^{11}}-\text{ и т. д.}\right)\sqrt{1+x^4}=C.$$

Так как при $x=1$ получается

$$C=\left(1-\frac{3}{5}+\frac{3\cdot7}{5\cdot9}-\frac{3\cdot7\cdot11}{5\cdot9\cdot13}+\text{ и т. д.}\right)2\sqrt{2},$$

то, следовательно, этому же значению равен и данный выше ряд, какое бы значение ни придавать количеству x.

СЛЕДСТВИЕ 4

175. Этот последний ряд с чередующимися знаками легко преобразовать с помощью разностей[2]) в другой ряд, снабженный одинаковыми знаками, откуда заключаем, что та же постоянная

$$C=\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1\cdot3}{5\cdot9}+\frac{1\cdot3\cdot5}{5\cdot9\cdot13}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{5\cdot9\cdot13\cdot17}+\text{ и т. д.}\right)\sqrt{2};$$

этот ряд сходится довольно быстро, и C будет приближенно равно $\frac{13}{7}$.

ПОЯСНЕНИЕ

176. Изложенный [в § 159] метод состоит в том, что образуется некий неопределенный ряд[3]), а его определение выводится из природы дела. В пользе этого метода лучше всего можно убедиться при решении дифференциальных уравнений; однако и для нашей нынешней цели он часто применяется с пользой. При помощи этого же метода обратные трансцендентные количества, как, например, показательные количества, а также синусы и косинусы углов, выражаются через ряды; хотя эти ряды уже известны из другого источника, однако будет полезно изложить здесь способ их отыскания при помощи интегрирования, так как таким же путем могут быть открыты и другие замечательные ряды.

ЗАДАЧА 14

177. *Обратить в ряд показательное количество* $y=a^x$.

---

[1]) Количеству x можно (см. предыдущее примечание) придавать только два значения: $x=+\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ и $x=-\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$; для C получаются два значения, равных по абсолютной величине, но отличающихся знаками.

[2]) См. «Дифференциальное исчисление», ч. II, § 7, стр. 214.

[3]) Ista methodus in hoc consistit, ut series quaedam indefinita fingatur.

РЕШЕНИЕ

Беря логарифмы, получаем $ly = xla$ и, дифференцируя, $\frac{dy}{y} = dxla$, или $\frac{dy}{dx} = yla$. Отсюда следует найти выражение y через ряд. Хотя полный интеграл имеет более общее выражение, но надо обратить внимание на то, что в нашем случае при $x = 0$ должно получиться $y = 1$. Поэтому образуем для y такой ряд:

$$y = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ и т. д.},$$

откуда получается:

$$\frac{dy}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{ и т. д.}$$

Подставив эти ряды в уравнение $\frac{dy}{dx} - yla = 0$, будем иметь:

$$\left.\begin{array}{l} A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \text{ и т. д.} \\ -la - Ala - Bla - Cla - Dla \end{array}\right\} = 0,$$

откуда коэффициенты определяются так:

$$A = la, \quad B = \frac{1}{2}Ala, \quad C = \frac{1}{3}Bla, \quad D = \frac{1}{4}Cla \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что

$$y = a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{x^2(la)^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3(la)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4(la)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.}$$

Это есть тот самый хорошо известный ряд, который дан во «Введении» [1].

ПОЯСНЕНИЕ

178. Для синусов и косинусов углов приходится спускаться до дифференциалов второго порядка, из которых затем следует получить соответствующий интегральный ряд. Но так как двойное интегрирование требует двойного определения, то ряд надо образовать так, чтобы он удовлетворял двум условиям, заимствованным из природы дела. Этот же способ можно распространить и на другие изыскания, даже на такие, где мы имеем дело лишь с алгебраическими количествами. С такого рода примера мы здесь и начнем.

ЗАДАЧА 15

179. *Выражение* $y = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^n$ *обратить в ряд, расположенный по степеням* x.

РЕШЕНИЕ

Так как $ly = nl\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, то $\frac{dy}{y} = \frac{n\,dx}{\sqrt{1 + x^2}}$; теперь для уничтожения знака радикала возьмем квадраты, получится:

$$(1 + x^2)\,dy^2 = n^2y^2\,dx^2.$$

[1]) «Введение в анализ», т. I, гл. VII, §§ 114—117, стр. 115—117

Это уравнение будем снова дифференцировать, принимая dx за постоянную, в результате чего после деления на $2\,dy$ получится[1]):

$$d^2y\,(1+x^2)+x\,dx\,dy-n^2y\,dx^2=0.$$

Отсюда и надо выразить y через ряд. Но прежде всего ясно, что если $x=0$, то y будет равен 1, а если x бесконечно мал, то $y=(1+x)^n=1+nx$[2]). Поэтому образуем такой ряд:

$$y=1+nx+Ax^2+Bx^3+Cx^4+Dx^5+Ex^6+\text{ и т. д.},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=n+2Ax+3Bx^2+4Cx^3+5Dx^4+6Ex^5+\text{ и т. д.}$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2A+6Bx+12Cx^2+20Dx^3+30Ex^4+\text{ и т. д.}$$

Сделав подстановку, получим:

$$\left.\begin{array}{llllll}
2A & +6Bx & +12Cx^2 & +20Dx^3 & +30Ex^4 & +42Fx^5+\text{ и т. д.}\\
 & +2A & +6B & +12C & +20D & \\
+n & +2A & +3B & +4C & +5D & \\
-n^2-n^3 & -An^2 & -Bn^2 & -Cn^2 & -Dn^2 &
\end{array}\right\}=0.$$

Отсюда выводятся следующие определения:

$$A=\frac{n^2}{2},\quad B=\frac{n(n^2-1)}{2\cdot 3},\quad C=\frac{A(n^2-4)}{3\cdot 4},\quad D=\frac{B(n^2-9)}{4\cdot 5}\text{ и т. д.},$$

так что

$$y=1+nx+\frac{n^2}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{n^2(n^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5$$
$$+\frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7+\text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 1

180. Так как $y=(x+\sqrt{1+x^2})^n$, то, положив $z=(-x+\sqrt{1+x^2})^n$, получаем для z подобный же ряд, но только в нем x берется с отрицательным знаком. Отсюда, следовательно, вытекает:

$$\frac{y+z}{2}=1+\frac{n^2}{1\cdot 2}x^2+\frac{n^2(n^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6+\text{ и т. д.}$$

и

$$\frac{y-z}{2}=nx+\frac{n(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7+\text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

181. Если положить $x=\sqrt{-1}\sin\varphi$, то $\sqrt{1+x^2}=\cos\varphi$, откуда

$$y=(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\sqrt{-1}\sin n\varphi$$

---

[1]) В подлиннике второй дифференциал обозначается через $\partial\partial y$, а вторая производная — через $\dfrac{\partial\partial y}{\partial x^2}$.

[2]) См. подстрочное примечание к § 159.

и

$$z = (\cos - \sqrt{-1}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi - \sqrt{-1}\sin n\varphi;$$

отсюда мы заключаем:

$$\cos n\varphi = 1 - \frac{n^2}{1\cdot 2}\sin^2\varphi + \frac{n^2(n^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4\varphi - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\sin^6\varphi + \text{ и т. д.},$$

$$\sin n\varphi = n\sin\varphi - \frac{n(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^3\varphi + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin^5\varphi - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\sin^7\varphi + \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 3

182. Эти ряды могут служить для умножения углов; они обладают той особенностью, что первый обрывается только в тех случаях, в которых n — четное число, а второй — только в тех, в которых n — нечетное число.

ЗАДАЧА 16

183. *Предложен угол φ; выразить как его синус, так и косинус через бесконечный ряд.*

РЕШЕНИЕ

Пусть $y = \sin\varphi$, а $z = \cos\varphi$, тогда $dy = d\varphi\sqrt{1-y^2}$, $dz = -d\varphi\sqrt{1-z^2}$. Возьмем квадраты

$$dy^2 = d\varphi^2(1-y^2) \quad \text{и} \quad dz^2 = d\varphi^2(1-z^2);$$

продифференцируем, приняв $d\varphi$ за постоянную; получим:

$$d^2y = -y\,d\varphi^2 \quad \text{и} \quad d^2z = -z\,d\varphi^2.$$

Следовательно, y и z надо определить из одного и того же уравнения. Но для $y = \sin\varphi$ надо принять во внимание, что если φ исчезает, то y становится равным φ, а для $z = \cos\varphi$ — что если φ исчезает, то $z = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ или $z = 1 + 0\varphi$. Поэтому образуем ряды

$$y = \varphi + A\varphi^3 + B\varphi^5 + C\varphi^7 + \text{ и т. д.},$$
$$z = 1 + \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \gamma\varphi^6 + \text{ и т. д.}$$

Сделав подстановку, получим:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 3A\varphi + 4\cdot 5B\varphi^3 + 6\cdot 7C\varphi^5 + \text{ и т. д.} \\ +1 \quad + \quad A \quad + \quad B \end{array}\right\} = 0$$

и

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot 2\alpha + 3\cdot 4\beta\varphi^2 + 5\cdot 6\gamma\varphi^4 + \text{ и т. д.} \\ +1 \quad + \quad \alpha \quad + \quad \beta \end{array}\right\} = 0,$$

откуда заключаем:

$$A = \frac{-1}{2\cdot 3}, \quad B = \frac{-A}{4\cdot 5}, \quad C = \frac{-B}{6\cdot 7}, \quad D = \frac{-C}{8\cdot 9} \text{ и т. д.}$$

$$\alpha = \frac{-1}{1\cdot 2}, \quad \beta = \frac{-\alpha}{3\cdot 4}, \quad \gamma = \frac{-\beta}{5\cdot 6}, \quad \delta = \frac{-\gamma}{7\cdot 8} \text{ и т. д.}$$

Отсюда получаются хорошо известные ряды:

$$\sin\varphi = \frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{\varphi^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{\varphi^7}{1\cdot2\ldots7} + \text{ и т. д.},$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1\cdot2} + \frac{\varphi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{\varphi^6}{1\cdot2\ldots6} + \text{ и т. д.}$$

ПОЯСНЕНИЕ

184. Нам не было нужды доходить до дифференциалов второго порядка: из дифференциалов выражений $y=\sin\varphi$ и $z=\cos\varphi$, которые суть $dy = z\,d\varphi$ и $dz = -y\,d\varphi$, легко найти те же ряды. Действительно, составив, как раньше, ряды

$$y = \varphi + A\varphi^3 + B\varphi^5 + C\varphi^7 + \text{ и т. д.}$$

и

$$z = 1 + \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \gamma\varphi^6 + \text{ и т. д.}$$

сделав подстановку, получим из первого ряда:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 3A\varphi^2 + 5B\varphi^4 + 7C\varphi^6 + \text{ и т. д.} \\ -1 - \alpha \quad - \beta \quad - \gamma \end{array}\right\} = 0,$$

а из второго

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha\varphi + 4\beta\varphi^3 + 6\gamma\varphi^5 + \text{ и т. д.} \\ +1 + A \quad + B \end{array}\right\} = 0,$$

откуда выводятся такие определения:

$$\alpha = -\frac{1}{2},\quad A = \frac{\alpha}{3},\quad \beta = \frac{-A}{4},\quad B = \frac{\beta}{5},\quad \gamma = \frac{-B}{6},\quad C = \frac{\gamma}{7} \text{ и т. д.},$$

и поэтому

$$\alpha = -\frac{1}{2},\qquad \beta = +\frac{1}{2\cdot3\cdot4},\qquad \gamma = -\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} \text{ и т. д.},$$

$$A = -\frac{1}{2\cdot3},\quad B = +\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5},\quad C = -\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} \text{ и т. д.}$$

Эти значения согласуются с полученными выше. Отсюда понятно, каким образом два уравнения вместе взятые часто легче обращаются в ряды, чем если бы мы пожелали каждое из них рассматривать отдельно.

ЗАДАЧА 17

185. *Выразить через ряд значение количества y, которое должно удовлетворять уравнению*

$$\frac{m\,dy}{\sqrt{a+by^2}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{f+gx^2}}.$$

РЕШЕНИЕ

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{m}{\sqrt{b}}\, l\left(\sqrt{a+by^2} + y\sqrt{b}\right) = \frac{n}{\sqrt{g}}\, l\left(\sqrt{f+gx^2} + x\sqrt{g}\right) + C,$$

откуда выводим

$$y=\frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{f+gx^2}+x\sqrt{g}}{h}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}-\frac{a}{2\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{f+gx^2}-x\sqrt{g}}{k}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}},$$

беря постоянные h и k так, чтобы $hk=f$. Отсюда мы убеждаемся в том, что, если x взять исчезающим, то

$$y=\frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{f}+x\sqrt{g}}{h}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}-\frac{a}{2\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{f}-x\sqrt{g}}{k}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}$$

или

$$y=\frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}-a\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}\right)+\frac{nx}{2m\sqrt{f}}\left(\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}+a\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}\right).$$

Положив $y=A+Bx$, будем иметь $B=\frac{n\sqrt{A^2b+a}}{m\sqrt{f}}$, так что постоянную B можно будет определить из постоянной

$$A=\frac{1}{2\sqrt{b}}\left(\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}-a\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}\right).$$

Обратно,

$$\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}=A\sqrt{b}+\sqrt{a+bA^2}$$

и

$$a\left(\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}}\right)^{\frac{n\sqrt{b}}{m\sqrt{g}}}=-A\sqrt{b}+\sqrt{a+bA^2}.$$

Теперь для нахождения ряда возведем предложенное уравнение в квадрат:

$$m^2(f+gx^2)\,dy^2=n^2(a+by^2)\,dx^2$$

и продифференцируем его еще раз, взяв dx постоянным, так что после деления на $2dy$ получится:

$$m^2\,d^2y\,(f+gx^2)+m^2gx\;dx\,dy-n^2by\,dx^2=0.$$

Теперь для y образуем ряд

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\text{ и т. д.};$$

подставив его, получим:

$$\left.\begin{array}{llll} 2m^2fC & +6m^2fDx & +12m^2fEx^2 & +20m^2fFx^3+\text{ и т. д.} \\ & & +\;2m^2gC & +\;6m^2gD \\ & +m^2gB & +\;2m^2gC & +\;3m^2gD \\ -n^2bA & -n^2bB & -\;n^2bC & -\;n^2bD \end{array}\right\}=0.$$

Поскольку A и B даны, остальные буквы определяются следующим образом:

$$C = \frac{n^2 b}{2m^2 f} A,$$
$$D = \frac{n^2 b - m^2 g}{2\cdot 3m^2 f} B, \quad E = \frac{n^2 b - 4m^2 g}{3\cdot 4m^2 f} C,$$
$$F = \frac{n^2 b - 9m^2 g}{4\cdot 5m^2 f} D, \quad G = \frac{n^2 b - 16m^2 g}{5\cdot 6m^2 f} E,$$
$$H = \frac{n^2 b - 25m^2 g}{6\cdot 7m^2 f} F, \quad I = \frac{n^2 b - 36m^2 g}{7\cdot 8m^2 f} G,$$

и таким образом ряд для y будет известен.

ПРИМЕР 1

186. *Трансцендентную функцию $c^{\arcsin x}$ выразить через ряд, расположенный по степеням x.*

Положим $y = c^{\arcsin x}$, тогда $ly = lc\cdot\arcsin x$ и $\frac{dy}{y} = \frac{dxlc}{\sqrt{1-x^2}}$, откуда $dy^2(1-x^2) = y^2 dx^2 (lc)^2$ и, дифференцируя,

$$d^2y(1-x^2) - x\,dx\,dy - y\,dx^2(lc)^2 = 0.$$

Теперь заметим, что если положить x исчезающим, то будем иметь $y = c^x = 1 + xlc$. Поэтому образуем ряд

$$y = 1 + xlc + Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5 + \text{ и т. д.};$$

подставив его, будем иметь:

$$\left.\begin{array}{lllll} 1\cdot 2A & +2\cdot 3Bx & +3\cdot 4Cx^2 & +4\cdot 5Dx^3 & +5\cdot 6Ex^4 + \text{ и т. д.} \\ & -1\cdot 2A & -2\cdot 3B & -3\cdot 4C & \\ -lc & & -2A & -3B & -4C \\ -(lc)^2 & -(lc)^3 & -A(lc)^2 & -B(lc)^2 & -C(lc)^2. \end{array}\right\}$$

Отсюда определяются остальные коэффициенты следующим образом:

$$A = \frac{(lc)^2}{1\cdot 2}, \quad C = \frac{4+(lc)^2}{3\cdot 4} A, \quad E = \frac{16+(lc)^2}{5\cdot 6} C \text{ и т. д.},$$
$$B = \frac{(1+(lc)^2)\,lc}{2\cdot 3}, \quad D = \frac{9+(lc)^2}{4\cdot 5} B, \quad F = \frac{25+(lc)^2}{6\cdot 7} D \text{ и т. д.}$$

Пусть для краткости $lc = \gamma$, тогда

$$c^{\arcsin x} = 1 + \gamma x + \frac{\gamma^2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\gamma(1+\gamma^2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{\gamma^2(4+\gamma^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4$$
$$+ \frac{\gamma(1+\gamma^2)(9+\gamma^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{\gamma^2(4+\gamma^2)(16+\gamma^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \text{ и т. д.}$$

ПРИМЕР 2

187. *Полагая $x = \sin\varphi$, найти ряд, расположенный по степеням x, который выражал бы синус угла $n\varphi$.*

Положим $y = \sin n\varphi$ и заметим, что когда φ исчезает, получается $x = \varphi$ и $y = n\varphi = nx$, т. е. $y = 0 + nx$, что и есть начало искомого ряда.

Теперь имеем:

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad n\,d\varphi = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

и, взяв квадраты,

$$(1-x^2)\,dy^2 = n^2\,dx^2\,(1-y^2),$$

откуда

$$d^2y\,(1-x^2) - x\,dx\,dy + n^2y\,dx^2 = 0.$$

Поэтому образуем следующий ряд:

$$y = nx + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + Dx^9 + \text{ и т. д.}$$

Подставив его, будем иметь:

$$\left.\begin{array}{lllll} 2\cdot 3Ax & +\,4\cdot 5Bx^3 & +\,6\cdot 7Cx^5 & +\,8\cdot 9Dx^7 & + \text{ и т. д.} \\ & -2\cdot 3A & -4\cdot 5B & -6\cdot 7C & \\ -n & -3A & -5B & -7C & \\ +n^3 & +n^2A & +n^2B & +n^2C & \end{array}\right\} = 0.$$

Отсюда определяем:

$$A = \frac{-n(n^2-1)}{2\cdot 3}, \quad B = \frac{-(n^2-9)A}{4\cdot 5}, \quad C = \frac{-(n^2-25)B}{6\cdot 7} \text{ и т. д.},$$

так что

$$y = nx - \frac{n(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7 + \text{ и т. д.}$$

или

$$\sin n\varphi = n\sin\varphi - \frac{n(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^3\varphi + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin^5\varphi - \text{ и т. д.}$$

ПОЯСНЕНИЕ

188. Так как этот ряд обрывается только в тех случаях, когда n — нечетное число, то для случаев с четным n надо заметить, что этот ряд можно удобно выразить через произведение $\sin\varphi$ на другой ряд, расположенный по степеням $\cos\varphi$. Для нахождения этого ряда положим $\cos\varphi = u$, тогда

$$\sin n\varphi = z\sin\varphi = z\sqrt{1-u^2},$$

откуда ввиду того, что

$$d\varphi = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

получится в результате дифференцирования

$$-\frac{n\,du\cos n\varphi}{\sqrt{1-u^2}} = dz\sqrt{1-u^2} - \frac{zu\,du}{\sqrt{1-u^2}}$$

или

$$-n\,du\cos n\varphi = dz\,(1-u^2) - zu\,du;$$

это выражение, если его еще раз дифференцировать, приняв u за постоянную, дает

$$-\frac{n^2\,du^2\sin n\varphi}{\sqrt{1-u^2}} = d^2z\,(1-u^2) - 3u\,du\,dz - z\,du^2 = -n^2z\,du^2,$$

так как $\dfrac{\sin n\varphi}{\sqrt{1-u^2}} = z$.

Поэтому искомый ряд для $z = \dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ должен быть получен из уравнения

$$d^2z\,(1-u^2) - 3u\,du\,dz - z\,du^2 + n^2z\,du^2 = 0,$$

причем надо отметить, что так как $u = \cos\varphi$, то тогда u исчезает (в этом случае $\varphi = 90°$), будем иметь либо $z = 0$, если n — четное число, либо $z = 1$, если $n = 4\alpha + 1$, либо $z = -1$, если $n = 4\alpha - 1$. Каждый из этих случаев должен быть обращен в ряд особо. Чтобы обнаружить начало каждого ряда, положим $\varphi = 90° - \omega$; тогда при исчезающем ω получаем: $u = \cos\varphi = \omega$, $\sin\varphi = 1$, $\sin n\varphi = \sin(90°\cdot n - n\omega) = z$.

Теперь для отдельных случаев:

I. Если $n = 4\alpha$, то $z = -\sin n\omega = -nu$.

II. Если $n = 4\alpha + 1$, то $z = \cos n\omega = 1$.

III. Если $n = 4\alpha + 2$, то $z = \sin n\omega = +nu$.

IV. Если $n = 4\alpha + 3$, то $z = -\cos n\omega = -1$.

Отсюда выводятся ряды, уже достаточно известные.

ГЛАВА IV

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

ЗАДАЧА 18

189. *Пусть* X *обозначает алгебраическую функцию от* x. *Найти интеграл выражения* $X\,dx\,lx$.

РЕШЕНИЕ

Найдем интеграл $\int X\,dx$; пусть он равен Z; так как дифференциал количества $Z\,lx$ есть $dZ\,lx + \frac{Z\,lx}{x}$, то

$$Z\,lx = \int dZ\,lx + \int \frac{Z\,dx}{x},$$

и поэтому

$$\int dZ\,lx = \int X\,dx\,lx = Z\,lx - \int \frac{Z\,dx}{x}.$$

Таким образом, интегрирование предложенного выражения приведено к интегрированию выражения $\frac{Z\,dx}{x}$, которое, если Z будет алгебраической функцией от x, уже не содержит логарифма, и поэтому с ним можно поступать согласно данным выше правилам. Если же $\int X\,dx$ не может быть выражен алгебраически, то этот способ не приносит никакой пользы, и будет целесообразно удовольствоваться обозначением интеграла $\int X\,dx\,lx$ и находить его значение с помощью приближения. Исключение составляет случай $X = \frac{1}{x}$, когда, очевидно, имеем:

$$\int \frac{dx}{x}\,lx = \frac{1}{2}(lx)^2 + C.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

190. Если предложено выражение $X\,dx\,lV$, где V обозначает какую-либо функцию[1]) от x, и если положить $\int X\,dx = Z$, то тем же способом [найдем, что] интеграл заданного выражения будет $= Z\,lV - \int \frac{Z\,dV}{V}$; таким образом, он приводится к алгебраическому выражению, если только Z выражается алгебраически.

СЛЕДСТВИЕ 2

191. В связи с особым случаем $\frac{dx}{x}\,lx$ надо заметить следующее: если положим $lx = u$ и U есть любая алгебраическая функция от u, то интегрирование выражения $\frac{U\,dx}{x}$ не будет представлять трудности, так как в силу $\frac{dx}{x} = du$ оно переходит в выражение $U\,du$, и его интегрирование относится к предыдущим главам.

ПОЯСНЕНИЕ

192. Это приведение основывается на том, что так как

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy \text{ [2])},$$

то, обратно, $xy = \int y\,dx + \int x\,dy$, и поэтому $\int y\,dx = xy - \int x\,dy$, так что этим путем интегрирование выражения $y\,dx$ всегда приводится к интегрированию выражения $x\,dy$. Поэтому если предложено какое угодно выражение $V\,dx$ и если функцию V можно разложить на такие два множителя, скажем $V = PQ$, что оказывается возможным найти интеграл $\int P\,dx = S$, то в силу $P\,dx = dS$ будем иметь $V\,dx = PQ\,dx = Q\,dS$ и, следовательно,

$$\int V\,dx = QS - \int S\,dQ.$$

Такого рода приведение приносит большую пользу в тех случаях, когда выражение $\int S\,dQ$ проще предложенного выражения $\int V\,dx$ и [особенно, когда] оно вдобавок может быть приведено таким же образом к [еще] более простому. Иногда же весьма кстати случается, что таким путем в конце концов приходят к выражению, сходному с предложенным; в этом случае равным образом интегрирование получается. Так, например, если после дальнейшего приведения мы нашли бы $\int S\,dQ = T + n\int V\,dx$, то имели бы $\int V\,dx = QS - T - n\int V\,dx$, а отсюда

$$\int V\,dx = \frac{QS - T}{n+1}.$$

[1]) Как видно из дальнейшего, предполагается, что V выражается через x алгебраически.

[2]) В оригинале $\partial.xy$: точка играет роль скобок.

Итак, это приведение приносит большую пользу в тех случаях, когда оно приводит либо к более простому, либо к тому же самому выражению. Исходя из этого положения, дадим ряд важных случаев, в которых выражение $X\,dx\,lx$ либо допускает интегрирование, либо может быть удобно выражено при помощи ряда.

ПРИМЕР 1

193. *Найти интеграл дифференциального выражения $x^n dx\,lx$, где n обозначает какое угодно число.*

Так как $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, то

$$\int x^n\,dx\,lx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,lx - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,d(lx)$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,lx - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,lx - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1},$$

поэтому

$$\int x^n\,dx\,lx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(lx - \frac{1}{n+1}\right).$$

Таким образом, это выражение интегрируемо до конца.

СЛЕДСТВИЕ 1

194. Полезно будет заметить простейшие случаи, когда n целое число, положительное или отрицательное:

$$\int dx\,ln\,x = x\,lx - x, \qquad \int \frac{dx}{x^2}\,lx = -\frac{1}{x}\,lx - \frac{1}{x},$$

$$\int x\,dx\,lx = \frac{1}{2}x^2\,lx - \frac{1}{4}x^2, \qquad \int \frac{dx}{x^3}\,lx = -\frac{1}{2x^2}\,lx - \frac{1}{4x^2},$$

$$\int x^2\,dx\,lx = \frac{1}{3}x^3\,lx - \frac{1}{9}x^3, \qquad \int \frac{dx}{x^4}\,lx = -\frac{1}{3x^3}\,lx - \frac{1}{9x^3},$$

$$\int x^3\,dx\,lx = \frac{1}{4}x^4\,lx - \frac{1}{16}x^4, \qquad \int \frac{dx}{x^5}\,lx = -\frac{1}{4x^4}\,lx - \frac{1}{16x^4}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

195. Случай $\int \frac{dx}{x}\,lx = \frac{1}{2}(lx)^2$, как совершенно исключительный, мы уже отметили выше. Он получается также и приведением к исходному выражению. Действительно, при помощи вышеуказанного приведения имеем:

$$\int \frac{dx}{x}\,lx = lx\cdot lx - \int lx\cdot d(lx) = (lx)^2 - \int \frac{dx}{x}\,lx,$$

и отсюда $2\int \frac{dx}{x}\,lx = (lx)^2$, а следовательно,

$$\int \frac{dx}{x}\,lx = \frac{1}{2}(lx)^2.$$

ПРИМЕР 2

196. *Выразить интеграл выражения*

$$\frac{dx}{1-x}lx$$

при помощи ряда.

Приведение, которое применялось выше, [само по себе] дает мало выгоды, ибо получается:

$$\int\frac{dx}{1-x}lx = l\frac{1}{1-x}\cdot lx - \int\frac{dx}{x}l\frac{1}{1-x}.$$

Но так как

$$l\frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \text{и т. д.},$$

то

$$\int\frac{dx}{x}l\frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{25}x^5 + \text{ и т. д.},$$

и поэтому

$$\int\frac{dx}{1-x}lx = l\frac{1}{1-x}\cdot lx - x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{25}x^5 - \text{ и т. д.}$$

Этот интеграл исчезает в случае $x=0$; действительно, хотя lx в этом случае обращается в бесконечность[1]), однако

$$l\frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots \text{ и т. д.}$$

исчезает таким образом, что даже после умножения на lx он обращается в нуль, ибо вообще $x^n lx = 0$ при $x=0$, если только n — положительное число.

СЛЕДСТВИЕ 1

197. Если положить $1-x=u$, то получим:

$$\frac{dx}{1-x}lx = -\frac{du}{u}l(1-u) = \frac{du}{u}l\frac{1}{1-v},$$

и поэтому

$$\int\frac{dx}{1-x}lx = C + u + \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{9}u^3 + \frac{1}{16}u^4 + \frac{1}{25}u^5 + \text{ и т. д.}$$

Для того чтобы это выражение исчезало при $x=0$, т. е. при $u=1$, следует взять

$$C = -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \frac{1}{25} - \text{ и т. д. } = -\frac{1}{6}\pi^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

198. Итак, если принять $1-x=u$, т. е. $x+u=1$, то будут равны между собой следующие выражения:

$$-lx\cdot lu - x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{16}x^4 - \text{ и т. д.}$$

$$= -\frac{1}{6}\pi^2 + u + \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{9}u^3 + \frac{1}{16}u^4 + \text{ и т. д.},$$

[1]) In infinitum abit.

т. е. будем иметь:

$$\frac{1}{6}\pi^2 - lx \cdot lu = x + u + \frac{1}{4}(x^2 + u^2) + \frac{1}{9}(x^3 + u^3) + \frac{1}{16}(x^4 + u^4) + \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 3

199. Этот ряд лучше всего сходится, если положить $x = u = \frac{1}{2}$, а в этом случае будем иметь:

$$\frac{1}{6}\pi^2 - (l2)^2 = 1 + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 9} + \frac{1}{8\cdot 16} + \frac{1}{16\cdot 25} + \frac{1}{32\cdot 36} + \text{ и т. д.}$$

Следовательно, мы имеем сумму ряда

$$x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{25}x^5 + \text{ и т. д.}$$

не только для $x = 1$, когда она равна $\frac{\pi^2}{6}$, но и для $x = \frac{1}{2}$, когда она равна $\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2}(l2)^2$.

СЛЕДСТВИЕ 4

200. Если положим $x = \frac{1}{3}$ и $u = \frac{2}{3}$, то сумма ряда

$$1 + \frac{5}{3^2\cdot 4} + \frac{9}{3^3\cdot 9} + \frac{17}{3^4\cdot 16} + \frac{33}{3^5\cdot 25} + \frac{65}{3^6\cdot 36} + \text{ и т. д.},$$

общий член которого $= \frac{1+2^n}{3^n n^2}$, окажется равной $\frac{1}{6}\pi^2 - l3 \cdot l\frac{3}{2}$, но отсюда нельзя найти сумму ряда

$$x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \text{ и т. д.}$$

по отдельности для случаев $x = \frac{1}{3}$ и $x = \frac{2}{3}$.

ПРИМЕР 3

201. *Найти интеграл выражения* $\frac{dx}{(1-x)^2}lx$ *и обратить его в ряд.*

Так как $\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}$, то

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2}lx = \frac{1}{1-x}lx - \int \frac{dx}{x(1-x)},$$

но ввиду того, что $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$, имеем:

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = lx + l\frac{1}{1-x},$$

откуда находим интеграл

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2}lx = \frac{lx}{1-x} - lx - l\frac{1}{1-x} = \frac{xlx}{1-x} - l\frac{1}{1-x},$$

взятый так, чтобы он исчезал при $x = 0$.

Теперь для того, чтобы найти ряд удобнейшим образом, положим $1-x=u$; наше выражение примет вид

$$\frac{-du}{u^2}l(1-u)=\frac{du}{u^2}l\frac{1}{1-u}=\frac{du}{u^2}\left(u+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{4}u^4+\frac{1}{5}u^5+\text{ и т. д.}\right).$$

Поэтому, интегрируя, находим:

$$\int\frac{dx}{(1-x)^2}lx=C+lu+\frac{u}{1\cdot2}+\frac{u^2}{2\cdot3}+\frac{u^3}{3\cdot4}+\frac{u^4}{4\cdot5}+\text{ и т. д.}$$

Чтобы и это выражение исчезало при $x=0$, т. е. при $u=1$, необходимо, чтобы

$$C=-\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}-\text{ и т. д.}=-1.$$

Ввиду того, что $x=1-u$, получим:

$$\frac{u}{1\cdot2}+\frac{u^2}{2\cdot3}+\frac{u^3}{3\cdot4}+\frac{u^4}{4\cdot5}+\text{ и т. д.}$$
$$=1-lu+\frac{(1-u)\,l(1-u)}{u}+lu=1+\frac{(1-u)\,l(1-u)}{u}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

202. Таким же образом, если $dy=\frac{du}{u\sqrt{u}}l\frac{1}{1-u}$, то

$$y=-\frac{2}{\sqrt{u}}l\frac{1}{1-u}+\int\frac{2\,du}{(1-u)\sqrt{u}},$$

и, положив $u=x^2$, получим:

$$\int\frac{2\,du}{(1-u)\sqrt{u}}=4\int\frac{dx}{1-x^2}=2l\frac{1+x}{1-x}.$$

Следовательно,

$$y=2l\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}-\frac{2}{\sqrt{u}}l\frac{1}{1-u},$$

а так как, разлагая в ряд, имеем:

$$dy=\frac{du}{u\sqrt{u}}\left(u+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{4}u^4+\text{ и т. д.}\right),$$

то получим также

$$y=2\sqrt{u}+\frac{2}{2\cdot3}u\sqrt{u}+\frac{2}{3\cdot5}u^2\sqrt{u}+\frac{2}{4\cdot7}u^3\sqrt{u}+\text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

203. Если же мы помножим на $\frac{\sqrt{u}}{2}$, то получим:

$$u+\frac{u^2}{2\cdot3}+\frac{u^3}{3\cdot5}+\frac{u^4}{4\cdot7}+\frac{u^5}{5\cdot9}+\text{ и т. д.}=\sqrt{u}\cdot l\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}+l(1-u),$$

а эта сумма равна также

$$=(1+\sqrt{u})\,l(1+\sqrt{u})+(1-\sqrt{u})\,l(1-\sqrt{u}).$$

Если взять $u=1$, то $(1-\sqrt{u})\,l(1-\sqrt{u})=0$, и мы получим:

$$1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{6\cdot 11}+\text{ и т. д. }=2l2.$$

ЗАДАЧА 19

204. *Пусть P означает функцию от x. Найти интеграл выражения $dy=dP\,(lx)^n$.*

РЕШЕНИЕ

При помощи приведения, показанного выше, получается:

$$y=P\,(lx)^n-\int P\,d\,(lx)^n=P\,(lx)^n-n\int\frac{P\,dx}{x}\,(lx)^{n-1},$$

откуда, положив $\int\frac{P\,dx}{x}=Q$, будем иметь таким же образом

$$\int\frac{P\,dx}{x}(lx)^{n-1}=Q\,(lx)^{n-1}-(n-1)\int\frac{Q\,dx}{x}\,(lx)^{n-2}.$$

Если мы будем и дальше подвигаться таким же образом и если окажется возможным взять следующие интегралы:

$$\int\frac{P\,dx}{x}=Q,\quad \int\frac{Q\,dx}{x}=R,\quad \int\frac{R\,dx}{x}=S,\quad \int\frac{S\,dx}{x}=T\text{ и т. д.},$$

то получим искомый интеграл

$$\int dP\,(lx)^n=P\,(lx)^n-nQ\,(lx)^{n-1}$$
$$+n(n-1)\,R\,(lx)^{n-2}-n(n-1)(n-2)\,S\,(lx)^{n-3}+\text{ и т. д.}$$

Если показатель n — целое положительное число, то интеграл выразится в конечном виде.

ПРИМЕР 1

205. *Найти интеграл выражения* $x^m dx\,(lx)^2$. Здесь $n=2$, а $P=\frac{x^{m+1}}{m+1}$, откуда $Q=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$ и $R=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$. Отсюда мы получаем:

$$\int x^m\,dx\,(lx)^2=x^{m+1}\left(\frac{(lx)^2}{m+1}-\frac{2lx}{(m+1)^2}+\frac{2\cdot 1}{(m+1)^3}\right).$$

Этот интеграл исчезает при $x=0$, если только $m+1>0$.

СЛЕДСТВИЕ 1

206. Следовательно, при $x=1$ получается $\int x^m\,dx\,(lx)^2=\frac{2\cdot 1}{(m+1)^3}$, а из предшествующего [§ 193] ясно, что, если выражение $\int x^m\,dx\,lx$ проинтегрировать так, чтобы интеграл исчезал при $x=0$, то при $x=1$ получится $\int x^m\,dx\,lx=\frac{-1}{(m+1)^2}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

207. Если же $m=-1$, так что имеем выражение $\frac{dx}{x}(lx)^2$, то его интеграл будет $\int \frac{dx}{x}(lx)^2=\frac{1}{3}(lx)^3$; это — единственный случай, который надо исключить из общей формулы.

ПРИМЕР 2

208. *Найти интеграл выражения* $x^{m-1}dx\,(lx)^3$. В этом случае $n=3$ и $P=\frac{x^m}{m}$, откуда

$$Q=\frac{x^m}{m^2},\quad R=\frac{x^m}{m^3}\quad \text{и}\quad S=\frac{x^m}{m^4};$$

поэтому искомый интеграл есть

$$\int x^{m-1}dx\,(lx)^3=x^m\left(\frac{(lx)^3}{m}-\frac{3\,(lx)^2}{m^2}+\frac{3\cdot 2\,lx}{m^3}-\frac{3\cdot 2\cdot 1}{m^4}\right).$$

Этот интеграл исчезает при $x=0$, если только $m>0$.

СЛЕДСТВИЕ 1

209. Если в интервале, взятом так, чтобы он исчезал при $x=0$, положить затем $x=1$, то будем иметь:

$$\int x^{m-1}dx=\frac{1}{m},\quad \int x^{m-1}dx\,lx=-\frac{1}{m^2},\quad \int x^{m-1}dx\,(lx)^2=+\frac{1\cdot 2}{m^3}$$

и

$$\int x^{m-1}dx\,(lx)^3=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{m^4}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

210. В случае же $m=0$ интеграл будет

$$\int \frac{dx}{x}(lx)^3=\frac{1}{4}(lx)^4;$$

стало быть, его нельзя определить так, чтобы он исчезал при $x=0$, ибо в этом случае было бы необходимо прибавить бесконечную постоянную. Но этот интеграл исчезает при $x=1$.

ПРИМЕР 3

211. *Найти интеграл выражения* $x^{m-1}dx\,(lx)^n$. Так как здесь $P=\frac{x^m}{m}$, то

$$Q=\frac{x^m}{m^2},\quad R=\frac{x^m}{m^3},\quad S=\frac{x^m}{m^4}\ \text{и т. д.},$$

откуда искомый интеграл

$$\int x^{m-1}dx\,(lx)^n=$$

$$=x^m\left(\frac{(lx)^n}{m}-\frac{n\,(lx)^{n-1}}{m^2}+\frac{n\,(n-1)\,(lx)^{n-2}}{m^3}-\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(lx)^{n-3}}{m^4}+\text{ и т. д.}\right).$$

В случае же $m=0$ имеем:

$$\int \frac{dx}{x}(lx)^n = \frac{1}{n+1}(lx)^{n+1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

212. Если $m>0$, то найденный интеграл исчезает при $x=0$; далее, если взять $x=1$, то интеграл будет

$$\int x^{m-1}\,dx\,(lx)^n = \pm\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{m^{n+1}},$$

где знак $+$ имеет силу, если n — четное число, а нижний знак $-$, если n нечетное.

СЛЕДСТВИЕ 2

213. Эта двойственность устраняется, если вместо lx написать $-l\frac{1}{x}$; тогда, проведя интегрирование таким же образом и положив $x=1$, получим:

$$\int x^{m-1}\,dx\left(l\frac{1}{x}\right)^n = +\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{m^{n+1}}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

214. Если показатель n — дробное число, то найденный интеграл выражается через бесконечный ряд; так, например, если $n=-\frac{1}{2}$, получается:

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{lx}} = x^m\left(\frac{1}{m\sqrt{lx}} + \frac{1}{2m^2(lx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1\cdot 3}{4m^3(lx)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{8m^4(lx)^{\frac{7}{2}}} + \text{и т. д.}\right).$$

Сначала, пока x берется растущим от 0 до 1, этот ряд можно представить следующим образом:

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{l\frac{1}{x}}} = \frac{x^m}{\sqrt{l\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2\,lx} + \frac{1\cdot 3}{4m^3(lx)^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{8m^4(lx)^3} + \text{и т. д.}\right)\text{[1]}.$$

Если показатель n отрицательный, то хотя бы он был и целым, найденный интеграл будет все же продолжаться до бесконечности. Но в этом случае[2] интегрирование можно провести другим способом, при помощи которого интеграл приводится в конце концов к выражению вида $\int\frac{T\,dx}{lx}$, интегрирование которого никаким способом не может быть сделано более простым. Это приведение мы покажем в следующей задаче.

---

[1] Чтобы устранить мнимости, Эйлер выносит $\frac{1}{\sqrt{lx}}$ за скобки и преобразует к виду $\frac{1}{\sqrt{-l\frac{1}{x}}}$; то же преобразование делается под знаком интеграла.

[2] То-есть при целом отрицательном n.

ЗАДАЧА 20

215. *Последовательно сводить интегрирование выражения* $dy = \frac{X\,dx}{(lx)^n}$ *ко все более простым выражениям.*

РЕШЕНИЕ

Предложенное выражение представим так:

$$dy = Xx \cdot \frac{dx}{x(lx)^n},$$

и так как $\int \frac{dx}{x(lx)^n} = \frac{-1}{(n-1)(lx)^{n-1}}$, то

$$y = \frac{-Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{1}{(lx)^{n-1}}\,d(Xx).$$

Поэтому, если мы будем последовательно полагать

$$d(Xx) = P\,dx, \quad d(Px) = Q\,dx, \quad d(Qx) = R\,dx \quad \text{и т. д.},$$

то, продолжая это приведение, получим:

$$y = \frac{-Xx}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{Px}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{Qx}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} - \text{и т. д.};$$

[суммирование продолжается до тех пор], пока, наконец, не дойдем до интеграла

$$+\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int \frac{V\,dx}{lx},$$

так что всякий раз, как n будет положительным целым числом, интегрирование в конце концов приведется к такого рода выражению.

ПРИМЕР 1

216. *Найти интеграл дифференциального выражения*

$$dy = \frac{x^{m-1}\,dx}{(lx)^2}.$$

Здесь $n = 2$, а $X = x^{m-1}$, откуда $P = mx^{m-1}$, а следовательно, интеграл

$$y = \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(lx)^2} = -\frac{x^m}{lx} + \frac{m}{1}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{lx},$$

а от выражения $\frac{x^{m-1}\,dx}{lx}$ интеграл можно взять только в случае $m = 0$, когда $\int \frac{dx}{x\,lx} = llx$. Но если $m = 0$, то интегрирование предложенного выражения даже и не зависит от последнего интеграла, ибо имеем в законченном виде:

$$y = \int \frac{dx}{x(lx)^2} = -\frac{1}{lx} + C.$$

ПРИМЕР 2

217. *Отыскать интеграл дифференциального выражения* $dy = \frac{x^{m-1}\,dx}{(lx)^n}$ *для случаев, когда* n *есть целое положительное число.*

Так как $X = x^{m-1}$, то

$$P = \frac{d\,(Xx)}{dx} = mx^{m-1},$$

но тогда

$$Q = \frac{d\,(Px)}{dx} = m^2 x^{m-1}, \quad R = m^3 x^{m-1}, \quad S = m^4 x^{m-1} \text{ и т. д.}$$

Поэтому интеграл будет иметь такой вид:

$$y = \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(lx)^n} = -\frac{x^m}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{mx^m}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} - \frac{m^2x^m}{(n-1)(n-2)(n-3)(lx)^{n-3}} - \ldots + \frac{m^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{lx}.$$

СЛЕДСТВИЕ

218. Подставляя вместо n последовательно числа 1, 2, 3, 4 и т. д., получим следующие приведения:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(lx)^2} = -\frac{x^m}{lx} + \frac{m}{1} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{lx},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(lx)^3} = -\frac{x^m}{2\,(lx)^2} - \frac{mx^m}{2\cdot 1\,lx} + \frac{m^2}{2\cdot 1} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{lx},$$

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(lx)^4} = -\frac{x^m}{3\,(lx)^3} - \frac{mx^m}{3\cdot 2\,(lx)^2} - \frac{m^2x^m}{3\cdot 2\cdot 1\,lx} + \frac{m^3}{3\cdot 2\cdot 1} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{lx}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

219. Эти интегрирования зависят от выражения $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{lx}$; если положить $x^m = z$, то в силу $x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m}\,dz$ и $lx = \frac{1}{m}\,lz$ это выражение приводится к простейшему виду $\int \frac{dz}{lz}$. Если бы можно было найти этот интеграл, то он принес бы огромную пользу в анализе, но никакими средствами его до сих пор не удалось выразить ни через логарифмы, ни через углы, а как его выразить при помощи ряда, мы покажем ниже (§ 228). Повидимому, это выражение $\int \frac{dz}{lz}$ представляет особый вид трансцендентных функций, который безусловно заслуживает весьма тщательного изучения. Это же трансцендентное количество часто встречается при интегрировании показательных выражений. Мы решили рассмотреть их в этой же главе, так как они столь тесно связаны с логарифмическими функциями, что каждый из этих двух родов функций легко обратить в другой. Так, например, только что рассмотренное выражение $\frac{dz}{lz}$, если положить $lz = x$, так что $z = e^x$ и $dz = e^x\,dx$, преобразуется в показательное выражение $e^x \frac{dx}{x}$, интегрирование которого, стало быть, равным образом недоступно для нас. Итак, мы здесь будем изучать выражения, поддающиеся обработке, но такие, которые при помощи простой подстановки нельзя привести к алгебраическому виду. Так, например, если V — какая-либо функция от v, а $v = a^x$, то выражение $V\,dx$ в силу того, что $x = \frac{lv}{la}$ и $dx = \frac{dv}{vla}$, переходит в выражение $\frac{V\,dv}{vla}$, которое по отношению к переменному v является алгебраическим. Стало

быть, мы исключаем [из рассмотрения] выражения вроде $\frac{a^x\,dx}{\sqrt{1+a^{nx}}}$, так как они, если положить $a^x = v$, не представляют никакого затруднения.

ЗАДАЧА 21

220. *Отыскать интеграл дифференциального выражения* $a^x X\,dx$, *где* X *обозначает какую-либо функцию от* x.

РЕШЕНИЕ 1

Так как $d(a^x) = a^x\,dx\,la$, то, обратно, $\int a^x\,dx = \frac{1}{la}a^x$; поэтому, если разложить предложенное выражение на множители $X \cdot a^x\,dx$, то с помощью приведения будем иметь:

$$\int a^x X\,dx = \frac{1}{la}a^x X - \frac{1}{la}\int a^x\,dX.$$

Если, далее, положим $dX = P\,dx$, так что

$$\int a^x P\,dx = \frac{1}{la}a^x P - \frac{1}{la}\int a^x\,dP,$$

то получится такое приведение:

$$\int a^x X\,dx = \frac{1}{la}a^x X - \frac{1}{(la)^2}a^x P + \frac{1}{(la)^2}\int a^x\,dP.$$

Далее, если положить $dP = Q\,dx$, то будем иметь такое приведение:

$$\int a^x X\,dx = \frac{1}{la}a^x X - \frac{1}{(la)^2}a^x P + \frac{1}{(la)^3}a^x Q + \frac{1}{(la)^3}\int a^x\,dQ.$$

Так, полагая, далее, $dQ = R\,dx$, $dR = S\,dx$ и т. д., можно продвигаться вперед, пока не дойдем до выражения, которое либо интегрируется, либо является простейшим в своем роде.

РЕШЕНИЕ 2

Можно разложить это выражение на множители и другим образом. Положим $\int X\,dx = P$ или $X\,dx = dP$. Если придать выражению вид $a^x \cdot dP$, то будем иметь:

$$\int a^x X\,dx = a^x P - la\int a^x P\,dx.$$

Подобным образом, если положить $\int P\,dx = Q$, получим:

$$\int a^x X\,dx = a^x P - la \cdot a^x Q + (la)^2\int a^x Q\,dx.$$

Далее, положим $\int Q\,dx = R$ и получим:

$$\int a^x X\,dx = a^x P - la \cdot a^x Q + (la)^2 a^x R - (la)^3\int a^x R\,dx.$$

Таким путем можно подвигаться последовательно вперед насколько желательно, пока мы не дойдем до выражения, которое либо интегрируется, либо является простейшим в своем роде.

СЛЕДСТВИЕ 1

221. Первым решением можно пользоваться всегда, так как функции P, Q, R и т. д. получаются путем дифференцирования функции X, ибо

$$P=\frac{dX}{dx}, \quad Q=\frac{dP}{dx}, \quad R=\frac{dQ}{dx} \text{ и т. д.}$$

Поэтому, если X — целая рациональная функция, то в конце концов придем к выражению $\int a^x\,dx=\frac{1}{la}\cdot a^x$; стало быть, в этом случае интеграл может быть выражен в законченном виде.

СЛЕДСТВИЕ 2

222. Второе решение имеет место только в том случае, если можно взять интеграл P выражения $X\,dx$; его можно продолжать только до тех пор, пока удается брать последовательные интегралы

$$\int P\,dx=Q, \quad \int Q\,dx=R \text{ и т. д.}$$

ПРИМЕР 1

223. *Найти интеграл выражения $a^x x^n\,dx$, где n обозначает целое положительное число.*

Так как в этом случае $X=x^n$, то, применяя первое решение, будем иметь:

$$\int a^x x^n\,dx=\frac{1}{la}\cdot a^x x^n-\frac{n}{la}\int a^x x^{n-1}\,dx.$$

Подставляем сюда вместо n последовательно числа 0, 1, 2, 3 и т. д. Поскольку в первом случае $[n=0]$ интеграл известен, получим следующие интегралы:

$$\int a^x\,dx=\frac{1}{la}a^x,$$

$$\int a^x x\,dx=\frac{1}{la}a^x x-\frac{1}{(la)^2}a^x,$$

$$\int a^x x^2\,dx=\frac{1}{la}a^x x^2-\frac{2}{(la)^2}a^x x+\frac{2\cdot 1}{(la)^3}a^x,$$

$$\int a^x x^3\,dx=\frac{1}{la}a^x x^3-\frac{3}{(la)^2}a^x x^2+\frac{3\cdot 2}{(la)^3}a^x x-\frac{3\cdot 2\cdot 1}{(la)^4}a^x \text{ и т. д.,}$$

откуда приходим к общему выводу, что для любого показателя n

$$\int a^x x^n\,dx=a^x\left(\frac{x^n}{la}-\frac{nx^{n-1}}{(la)^2}+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(la)^3}-\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{(la)^4}+\text{ и т. д.}\right).$$

К этому выражению надо еще прибавить произвольную постоянную, чтобы получить полный интеграл.

СЛЕДСТВИЕ

224. Если интеграл надо определить так, чтобы он исчезал при $x=0$, то

$$\int a^x\,dx=\frac{1}{la}a^x-\frac{1}{la},$$

$$\int a^x x\,dx=a^x\left(\frac{x}{la}-\frac{1}{(la)^2}\right)+\frac{1}{(la)^2},$$

$$\int a^x x^2\,dx=a^x\left(\frac{x^2}{la}-\frac{2x}{(la)^2}+\frac{2\cdot 1}{(la)^3}\right)-\frac{2\cdot 1}{(la)^3},$$

$$\int a^x x^3\,dx=a^x\left(\frac{x^3}{la}-\frac{3x^2}{(la)^2}+\frac{3\cdot 2x}{(la)^3}-\frac{3\cdot 2\cdot 1}{(la)^4}\right)+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{(la)^4} \text{ и т. д.}$$

ПРИМЕР 2

225. *Отыскать интеграл выражения* $\frac{a^x\,dx}{x^n}$, *если* n *обозначает целое положительное число.*

В этом примере удобно применить второе решение; так как здесь $X=\frac{1}{x^n}$, то $P=\frac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}}$ и отсюда получается такое приведение:

$$\int\frac{a^x\,dx}{x^n}=\frac{-a^x}{(n-1)\,x^{n-1}}+\frac{la}{n-1}\int\frac{a^x\,dx}{x^{n-1}}.$$

Очевидно, что при $n=1$ отсюда нельзя ничего получить, — это есть как раз упомянутый выше случай $\int\frac{a^x\,dx}{x}$, представляющий собой особый вид трансцендентных функций. Допустив этот вид, мы сможем выразить через него интегралы в следующих случаях:

$$\int\frac{a^x\,dx}{x^2}=C-\frac{a^x}{1\cdot x}+\frac{la}{1}\int\frac{a^x\,dx}{x},$$

$$\int\frac{a^x\,dx}{x^3}=C-\frac{a^x}{2x^2}-\frac{a^x la}{2\cdot 1x}+\frac{(la)^2}{2\cdot 1}\int\frac{a^x\,dx}{x},$$

$$\int\frac{a^x\,dx}{x^4}=C-\frac{a^x}{3x^3}-\frac{a^x la}{3\cdot 2x^2}-\frac{a^x\,(la)^2}{3\cdot 2\cdot 1x}+\frac{(la)^3}{3\cdot 2\cdot 1}\int\frac{a^x\,dx}{x},$$

откуда получим в общем виде

$$\int\frac{a^x\,dx}{x^n}=C-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{a^x la}{(n-1)(n-2)\,x^{n-2}}-\frac{a^x\,(la)^2}{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,x^{n-3}}-\ldots-\frac{a^x\,(la)^{n-2}}{(n-1)\,(n-2)\ldots 1x}+\frac{(la)^{n-1}}{(n-1)\,(n-2)\ldots 1}\int\frac{a^x\,dx}{x}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

226. Стало быть, если допустить трансцендентное количество $\int\frac{a^x\,dx}{x}$, то мы выражение $a^x x^m\,dx$, будет ли показатель m положительным или отрицательным целым числом, интегрировать сможем. При этом в первом случае интегрирование не зависит от этого нового трансцендентного количества.

СЛЕДСТВИЕ 2

227. Если же m — дробное число, то ни первое, ни второе решение не доводит дела до конца, но каждое из них дает для интеграла бес-

конечный ряд. Так, например, если $m = -\frac{1}{2}$, то из первого решения мы будем иметь:

$$\int \frac{a^x\,dx}{\sqrt{x}} = a^x\left(\frac{1}{la} + \frac{1}{2x(la)^2} + \frac{1\cdot 3}{4x^2(la)^3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{8x^3(la)^4} + \text{ и т. д.}\right) : \sqrt{x} + C,$$

а из второго

$$\int \frac{a^x\,dx}{\sqrt{x}} = C + \frac{a^x}{\sqrt{x}}\left(\frac{2x}{1} - \frac{4x^2 la}{1\cdot 3} + \frac{8x^3(la)^2}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{16x^4(la)^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \text{ и т. д.}\right).$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

228. Трансцендентное количество $\int \frac{a^x\,dx}{x}$ можно выразить при помощи ряда, расположенного по степеням x. Действительно, так как

$$a^x = 1 + xla + \frac{x^2(la)^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3(la)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ и т. д.},$$

то

$$\int \frac{a^x\,dx}{x} = C + lx + \frac{xla}{1} + \frac{x^2(la)^2}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{x^3(la)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3} + \frac{x^4(la)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4} + \text{ и т. д.}$$

Если же вместо a мы возьмем число, гиперболический логарифм которого единица, и обозначим это число буквой e, то будем иметь:

$$\int \frac{e^x\,dx}{x} = C + lx + \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.}$$

Полагая в этой формуле $e^x = z$, так что $x = lz$, мы сможем проинтегрировать упомянутое выше выражение $\frac{dz}{lz}$ при помощи ряда

$$\int \frac{dz}{lz} = C + llz + \frac{lz}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{(lz)^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\,\frac{(lz)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4}\,\frac{(lz)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.}$$

Для того чтобы этот интеграл исчезал при $z = 0$, постоянная C должна быть бесконечной [1]); поэтому отсюда нельзя сделать никаких выводов для других случаев. Такое же неудобство будет иметь место в том случае, если мы будем делать интеграл исчезающим при $z = 1$, ибо

---

[1]) Л. Маскерони в своем комментарии к «Интегральному исчислению» Эйлера, вышедшем в 1792 г., доказал, что при $0 < x < 1$ интеграл $\int \frac{dz}{z}$ представляется (сходящимся) рядом

$$A + l(-lz) + \frac{lz}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{(lz)^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3}\,\frac{(lz)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots,$$

где A — постоянная, и что если интеграл должен обращаться в нуль при $x = 0$, то для A надо взять значение

$$A = 0{,}577215664901532\ \ldots$$

(постоянная Эйлера — Маскерони). У Эйлера эта постоянная была введена и вычислена уже в «Дифференциальном исчислении» (ч. II, § 143, стр. 303—304) в связи с суммированием гармонической прогрессии $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}$. Сочинение Маскерони помещено в качестве приложения к «Интегральному исчислению» в XII томе первой серии полного собрания сочинений Эйлера (L. Euleri, Opera omnia, series I, v. XII, 1914).

$llz = l0$ станет бесконечным. Кроме того, ясно, что если интеграл будет вещественным при значениях z, меньших единицы, когда lz отрицательно, то при значениях, больших единицы, он станет мнимым, и обратно. Итак, природа этой трансцендентной функции распознается мало.

ПОЯСНЕНИЕ 2

229. Если интегрирование не удается или если найденные выше [§§ 223, 225] ряды оказываются неудобными, то, разложив в ряд количество a^x, можно сразу же без всяких других вспомогательных средств представить интеграл выражения $a^x X\,dx$ в виде ряда; именно, будем иметь:

$$\int a^x X\,dx = \int X\,dx + \frac{la}{1}\int Xx\,dx + \frac{(la)^2}{1\cdot 2}\int Xx^2\,dx + \frac{(la)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\int Xx^3\,dx + \text{ и т. д.}$$

Так, если $X = x^n$, будем иметь:

$$\int a^x x^n\,dx = C + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}\,la}{1\,(n+2)} + \frac{x^{n+3}\,(la)^2}{1\cdot 2\,(n+3)} + \frac{x^{n+4}\,(la)^3}{1\cdot 2\cdot 3\,(n+4)} + \text{ и т. д.},$$

причем надо отметить, что, если n — целое отрицательное число, скажем $n = -i$, то вместо $\frac{x^{n+i}}{n+i}$ надо писать lx.

ПРИМЕР 3

230. *Выразить интеграл выражения* $\frac{a^x\,dx}{1-x}$ *через бесконечный ряд.*

Применяя первое решение, получим $\left(\text{здесь } X = \frac{1}{1-x}\right)$:

$$P = \frac{dX}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad Q = \frac{dP}{dx} = \frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}, \quad R = \frac{dQ}{dx} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4} \text{ и т. д.},$$

а отсюда — следующий ряд:

$$\int \frac{a^x\,dx}{1-x} = a^x\left(\frac{1}{(1-x)\,la} - \frac{1}{(1-x)^2\,(la)^2} + \frac{1\cdot 2}{(1-x)^3(la)^3} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4(la)^4} + \text{и т. д.}\right).$$

Другие ряды можно найти, если разложить в ряд либо a^x, либо дробь $\frac{1}{1-x}$. Но удобнее всего, повидимому, тот, который получим предположительно, образуя ряд[1]). Для краткости примем за a число e, так что $le = 1$, и положим $dy = \frac{e^x\,dx}{1-x}$, или

$$\frac{dy}{dx}(1-x) - 1 - x - \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{и т. д.} = 0.$$

Теперь для y образуем такой ряд:

$$y = \int \frac{e^x\,dx}{1-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{ и т. д.}$$

---

[1]) Quae seriem fingendo eruitur.

После подстановки получится:

$$\left.\begin{array}{l} B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4+ \text{ и т. д.} \\ \quad -B \quad -2C \quad -3D \quad -4E \\ -1-1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{6} \quad -\frac{1}{24} \end{array}\right\} = 0,$$

откуда определяем:

$$B=1, \quad C=\frac{1}{2}(1+1) \quad D=\frac{1}{3}\left(1+1+\frac{1}{2}\right),$$

$$E=\frac{1}{4}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right), \quad F=\frac{1}{5}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right) \text{ и т. д.}$$

ЗАДАЧА 22

231. *Отыскать интеграл дифференциального выражения* $dy=x^{nx}\,dx$ *и выразить его через бесконечный ряд.*

РЕШЕНИЕ

Нет более удобного способа, чем обращение показательного выражения x^{nx} в бесконечный ряд; получится:

$$x^{nx}=1+nxlx+\frac{n^2x^2(lx)^2}{1\cdot 2}+\frac{n^3x^3(lx)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{n^4x^4(lx)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+ \text{ и т. д.}$$

Помножив это выражение на dx и проинтегрировав каждый член в отдельности, получим:

$$\int dx = x,$$

$$\int x\,dx\,lx = x^2\left(\frac{lx}{2}-\frac{1}{2^2}\right),$$

$$\int x^2\,dx\,(lx)^2 = x^3\left(\frac{(lx)^2}{3}-\frac{2lx}{3^2}+\frac{2\cdot 1}{3^3}\right),$$

$$\int x^3\,dx\,(lx)^3 = x^4\left(\frac{(lx)^3}{4}-\frac{3(lx)^2}{4^2}+\frac{3\cdot 2lx}{4^3}-\frac{3\cdot 2\cdot 1}{4^4}\right),$$

$$\int x^4\,dx\,(lx)^4 = x^5\left(\frac{(lx)^4}{5}-\frac{4(lx)^3}{5^2}+\frac{4\cdot 3(lx)^2}{5^3}-\frac{4\cdot 3\cdot 2lx}{5^4}+\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5^5}\right)$$

и т. д.

Таким образом, если подставить эти ряды и расположить их по степеням lx, то искомый интеграл выразится через следующее бесчисленное количество бесконечных рядов:

$$\begin{aligned} y=\int x^{nx}\,dx = x\Big(&1-\frac{nx}{2^2}+\frac{n^2x^2}{3^2}-\frac{n^3x^3}{4^4}+\frac{n^4x^4}{5^5}- \text{ и т. д.}\Big) \\ +\frac{nx^2lx}{1}\Big(&\frac{1}{2^1}-\frac{nx}{3^2}+\frac{n^2x^2}{4^3}-\frac{n^3x^3}{5^4}+\frac{n^4x^4}{6^5}- \text{ и т. д.}\Big) \\ +\frac{n^2x^3(lx)^2}{1\cdot 2}\Big(&\frac{1}{3^1}-\frac{nx}{4^2}+\frac{n^2x^2}{5^3}-\frac{n^3x^3}{6^4}+\frac{n^4x^4}{7^5}- \text{ и т. д.}\Big) \\ +\frac{n^3x^4(lx)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\Big(&\frac{1}{4^1}-\frac{nx}{5^2}+\frac{n^2x^2}{6^3}-\frac{n^3x^3}{7^4}+\frac{n^4x^4}{8^5}- \text{ и т. д.}\Big). \end{aligned}$$

Этот интеграл взят так, чтобы он исчезал при $x=0$.

СЛЕДСТВИЕ

232. Если по выполнении интегрирования таким способом положить $x=1$, то значение интеграла $\int x^{nx}\,dx$ будет равно следующему ряду:

$$1-\frac{n}{2^2}+\frac{n^2}{3^3}-\frac{n^3}{4^4}+\frac{n^4}{5^5}-\frac{n^5}{6^6}+\text{ и т. д.}$$

Этот ряд в высшей степени достопримечателен изяществом построения своих членов.

ПОЯСНЕНИЕ

233. Таким же способом находим интеграл следующего вида:

$$y=\int x^{nx}x^m\,dx=\int x^m\,dx\left(1+nxlx+\frac{n^2x^2\,(lx)^2}{1\cdot 2}+\frac{n^3x^3(lx)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{ и т. д.}\right).$$

Проинтегрировав каждый член в отдельности, получим:

$$\int x^m\,dx=\frac{x^{m+1}}{m+1},$$

$$\int x^{m+1}dx\,lx=x^{m+2}\left(\frac{lx}{m+2}-\frac{1}{(m+2)^2}\right),$$

$$\int x^{m+2}\,dx\,(lx)^2=x^{m+3}\left(\frac{(lx)^2}{m+3}-\frac{2lx}{(m+3)^2}+\frac{2\cdot 1}{(m+3)^3}\right),$$

$$\int x^{m+3}\,dx\,(lx)^3=x^{m+4}\left(\frac{(lx)^3}{m+4}-\frac{3\,(lx)^2}{(m+4)^2}+\frac{3\cdot 2\,lx}{(m+4)^3}-\frac{3\cdot 2\cdot 1}{(m+4)^4}\right)$$

и т. д.

Если мы определим интеграл так, чтобы он исчезал при $x=0$, а затем положим $x=1$, то для этого случая значение интеграла $\int x^{nx}x^m\,dx$ выразится следующим весьма замечательным рядом:

$$\frac{1}{m+1}-\frac{n}{(m+2)^2}+\frac{n^2}{(m+3)^3}-\frac{n^3}{(m+4)^4}+\frac{n^4}{(m+5)^5}-\text{ и т. д.}$$

Очевидно, этот ряд не может иметь места во всех тех случаях, когда m — целое отрицательное число.

Я не присоединяю сюда других примеров показательных выражений, так как по большей части их интегралы выражаются крайне неизящно, а способ обращения с ними здесь в достаточной мере изложен. Однако же особого внимания заслуживают выражения, допускающие интегрирование в законченном виде и содержащиеся в следующей формуле: $e^x(dP+P\,dx)$. Очевидно, интеграл этого выражения есть e^xP. Но для случаев такого рода трудно дать правила нахождения интеграла; по большей части здесь надо предоставить место догадке. Так, например, если будет предложено выражение $\frac{e^x x\,dx}{(1+x)^2}$, то нетрудно догадаться, что интеграл, если его можно взять, должен иметь такой вид: $\frac{e^x z}{1+x}$.

Сравнение дифференциала

$$\frac{e^x\,(dz\,(1+x)+xz\,dx)}{(1+x)^2}$$

с предложенным выражением дает

$$dz\,(1+x)+xz\,dx=x\,dx,$$

откуда сразу же ясно, что $z=1$, а если бы это не было само собой ясным, то на основании правил судить было бы трудно. Поэтому я перехожу к другому роду трансцендентных выражений, уже включенных в анализ, а именно, выражений, содержащих либо углы, либо синусы и тангенсы углов.

ГЛАВА V

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ УГЛЫ ИЛИ СИНУСЫ УГЛОВ

ЗАДАЧА 23

234. *Предложено дифференциальное выражение* $X\,dx \arcsin x$ [1]; *отыскать его интеграл.*

РЕШЕНИЕ

Так как $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, то предложенное выражение мы разложим на множители следующим образом: $\arcsin x\, X\,dx$. Если уже $X\,dx$ допускает интегрирование, причем $\int X\,dx = P$, то наш интеграл будет

$$\int X\,dx \arcsin x = P \arcsin x - \int \frac{P\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

следовательно, дело уже сведено к интегрированию алгебраического выражения; правила для такого интегрирования даны выше.

Впрочем, если $X = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то интеграл, очевидно, будет

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x = \frac{1}{2} (\arcsin x)^2.$$

Это — единственный случай, когда в интеграл входит квадрат угла.

ПРИМЕР 1

235. *Интегрировать выражение* $dy = x^n\,dx \arcsin x$.

Так как $P = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, мы будем иметь:

$$y = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

---

[1]) В V и следующих главах автор пользуется обозначениями Ang. $\sin x$, Ang. $\cos x$, Ang. tang. x.

Отсюда для различных значений n интегралы найдутся при помощи § 120. Это следующие интегралы:

$$\int dx \arcsin x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - 1,$$

$$\int x\,dx \arcsin x = \frac{1}{2}x^2 \arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin x,$$

$$\int x^2\,dx \arcsin x = \frac{1}{3}x^3 \arcsin x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3},$$

$$\int x^3\,dx \arcsin x = \frac{1}{4}x^4 \arcsin x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x\right)\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\arcsin x.$$

Они взяты так, что исчезают при $x = 0$.

ПРИМЕР 2

236. *Интегрировать выражение* $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$.

Так как

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} = P,$$

то искомый интеграл будет

$$y = C - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \frac{dx\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

и таким образом получим:

$$y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x = C - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + x.$$

ПРИМЕР 3

237. *Интегрировать выражение* $dy = \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\arcsin x$.

Здесь

$$P = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

откуда получим:

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{1-x^2}$$

или

$$y = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + l\sqrt{1-x^2}.$$

Этот интеграл исчезает при $x = 0$.

ПОЯСНЕНИЕ

238. Подобным же образом интегрируется выражение

$$dy = X\,dx \arccos x.$$

Действительно, так как

$$d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

то, полагая $\int X\,dx = P$, будем иметь:

$$y = P\arccos x + \int \frac{P\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Мало того, если предложено выражение $dy = X\,dx \operatorname{arctg} x$, то полагаем $\int X\,dx = P$, и в силу

$$d\operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}$$

интеграл будет

$$y = \int X\,dx \operatorname{arctg} x = P\operatorname{arctg} x - \int \frac{P\,dx}{1+x^2}.$$

Стало быть, всякий раз как $\int X\,dx$ может быть дан алгебраически, интегрирование приводится к алгебраическому выражению, и таким образом надо считать, что дело завершено. Но так как в эти выражения входил угол, синус, косинус или тангенс которого был $= x$, рассмотрим теперь также и такого рода выражения, в которые входит квадрат или более высокая степень этого угла.

ЗАДАЧА 24

239. *Пусть φ обозначает угол, синус или тангенс которого есть какая-либо функция от x, причем $d\varphi = u\,dx$, и пусть предложено выражение $dy = X\,dx\,\varphi^n$; надо его интегрировать.*

РЕШЕНИЕ

Пусть $\int X\,dx = P$, так что имеем $dy = \varphi^n\,dP$; интегрируя, получим:

$$y = \varphi^n P - n\int \varphi^{n-1} Pu\,dx.$$

Подобным же образом пусть теперь будет $\int Pu\,dx = Q$; тогда

$$\int \varphi^{n-1} Pu\,dx = \varphi^{n-1} Q - (n-1)\int \varphi^{n-2} Qu\,dx;$$

затем, полагая $\int Qu\,dx = R$, имеем:

$$\int \varphi^{n-2} Qu\,dx = \varphi^{n-2} R - (n-2)\int \varphi^{n-3} Ru\,dx.$$

Таким образом, степень угла φ непрестанно понижается, пока, наконец, не дойдем до выражения, свободного от угла φ; это будет всегда выполнимым, если только n — целоеположительное число и если можно взять один за другим[1]) интегралы

$$\int X\,dx = P, \quad \int Pu\,dx = Q, \quad \int Qu\,dx = R \quad \text{и т. д.};$$

если эти интегралы не берутся, то интегрирование предпринято безуспешно.

ПРИМЕР

240. *Пусть φ есть угол, синус которого $= x$, так что $d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Интегрировать выражение $dy = \varphi^n\,dx$.*

Очевидно,

$$X = 1, \quad P = x, \quad Q = \int \frac{P\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}, \quad R = \int \frac{Q\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x,$$

$$S = \frac{R\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}, \quad T = x \quad \text{и т. д.}$$

Найдя эти выражения, получим:

$$y = \int \varphi^n\,dx = \varphi^n x + n\varphi^{n-1}\sqrt{1-x^2} - n(n-1)\varphi^{n-2}x$$

$$- n(n-1)(n-2)\varphi^{n-3}\sqrt{1-x^2} + \text{ и т. д.}$$

Следовательно, для различных значений показателя n будем иметь:

$$\int \varphi\,dx = \varphi x + \sqrt{1-x^2} - 1,$$

$$\int \varphi^2\,dx = \varphi^2 x + 2\varphi\sqrt{1-x^2} - 2\cdot 1x,$$

$$\int \varphi^3\,dx = \varphi^3 x + 3\varphi^2\sqrt{1-x^2} - 3\cdot 2\varphi x - 3\cdot 2\cdot 1\sqrt{1-x^2} + 6$$

и т. д.

Эти интегралы определены так, чтобы они исчезали при $x = 0$.

ПОЯСНЕНИЕ

241. Если $X\,dx = u\,dx = d\varphi$, то интеграл выражения $\varphi^n\,d\varphi$ есть $\frac{1}{n+1}\varphi^{n+1}$; равным образом, если Φ — какая-либо функция угла φ, то интегрирование выражения $\Phi u\,dx = \Phi\,d\varphi$ не представляет никакой трудности. Гораздо большее значение имеют выражения, содержащие синусы, косинусы и тангенсы углов, интегрирование которых имеет широчайшее применение во всем Анализе, так как в особенности задачи теоретической астрономии приводятся к такого рода выражениям. Первоначальные же основы должны быть получены из дифференциального исчисления. Так как

$$d\sin n\varphi = n\,d\varphi\cos n\varphi, \quad d\cos n\varphi = -n\,d\varphi\sin n\varphi, \quad d\operatorname{tg} n\varphi = \frac{n\,d\varphi}{\cos^2 n\varphi},$$

$$d\operatorname{ctg} n\varphi = \frac{-n\,d\varphi}{\sin^2 n\varphi}, \quad d\frac{1}{\sin n\varphi} = \frac{-n\,d\varphi\cos n\varphi}{\sin^2 n\varphi}, \quad d\frac{1}{\cos n\varphi} = \frac{n\,d\varphi\sin n\varphi}{\cos^2 n\varphi},$$

[1]) Dummodo... haec integralia continuo sumere liceat.

мы получим отсюда следующие элементарные интегрирования:

$$\int d\varphi \cos n\varphi = \frac{1}{n}\sin n\varphi, \quad \int d\varphi \sin n\varphi = -\frac{1}{n}\cos n\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^2 n\varphi} = \frac{1}{n}\operatorname{tg} n\varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{\sin^2 n\varphi} = -\frac{1}{n}\operatorname{ctg} n\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \cos n\varphi}{\sin^2 n\varphi} = -\frac{1}{n\sin n\varphi}, \quad \int \frac{d\varphi \sin n\varphi}{\cos^2 n\varphi} = \frac{1}{n\cos n\varphi},$$

а из них вытекает сразу же интегрирование дифференциальных выражений следующего вида:

$$d\varphi\,(A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{ и т. д.}),$$

так как интеграл, очевидно, равен

$$A\varphi + B\sin\varphi + \frac{1}{2}C\sin 2\varphi + \frac{1}{3}D\sin 3\varphi + \frac{1}{4}E\sin 4\varphi + \text{ и т. д.}$$

Далее следует привлечь на помощь те [формулы] сочетания углов, которые излагаются в элементарной математике, а именно:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta),$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta),$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta),$$

$$= \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha).$$

Исходя из них, можно произведения нескольких синусов и косинусов разложить на простые синусы или косинусы.

ЗАДАЧА 25

242. *Найти интеграл выражения*[1]) $d\varphi \sin^n\varphi$.

РЕШЕНИЕ

Представим это выражение разложенным на два множителя: $\sin^{n-1}\varphi\cdot d\varphi\sin\varphi$. Так как $\int d\varphi\sin\varphi = -\cos\varphi$, то

$$\int d\varphi\sin^n\varphi = -\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi + (n-1)\int d\varphi\sin^{n-2}\varphi\cos^2\varphi.$$

Отсюда в силу $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ будем иметь:

$$\int d\varphi\sin^n\varphi = -\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi + (n-1)\int d\varphi\sin^{n-2}\varphi - (n-1)\int d\varphi\sin^n\varphi.$$

Так как в этом уравнении последнее выражение подобно предложенному, то отсюда получается такое приведение:

$$\int d\varphi\sin^n\varphi = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi + \frac{n-1}{n}\int d\varphi\sin^{n-2}\varphi,$$

[1]) Эйлер пишет: $\sin\cdot\varphi^n$, $\cos\cdot\varphi^n$.

и наше интегрирование приводится к более простому выражению: $d\varphi \sin^{n-2}\varphi$. Но так как самые простые случаи

$$\int d\varphi \sin^0\varphi = \varphi \quad \text{и} \quad \int d\varphi \sin\varphi = -\cos\varphi$$

известны, то тем самым подготовляется путь ко все бо́льшим и бо́льшим показателям:

$$\int d\varphi \sin^0\varphi = \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin\varphi = -\cos\varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^2\varphi = -\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^3\varphi = -\frac{1}{3}\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^4\varphi = -\frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^5\varphi = -\frac{1}{5}\sin^4\varphi\cos\varphi - \frac{1\cdot 4}{3\cdot 5}\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cos\varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^6\varphi = -\frac{1}{6}\sin^5\varphi\cos\varphi - \frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\varphi$$

и т. д.

СЛЕДСТВИЕ 1

243. Всякий раз, когда n — нечетное число, интеграл выражается только через синус и косинус; если же n — четное число, то интеграл, кроме того, содержит и самый угол и является поэтому трансцендентной функцией.

СЛЕДСТВИЕ 2

244. Поэтому в тех случаях, когда n — нечетное число, необходимо прежде всего отметить, что если даже угол или дуга φ возрастает до бесконечности, интеграл все же не может возрасти далее определенного предела, тогда как если n — четное число, интеграл возрастает до бесконечности.

ПОЯСНЕНИЕ

245. Таким же образом следует поступать с выражением $d\varphi\cos^n\varphi$; будучи разложено на множители $\cos^{n-1}\varphi\cdot d\varphi\cos\varphi$, оно дает

$$\int d\varphi\cos^n\varphi = \cos^{n-1}\varphi\sin\varphi + (n-1)\int d\varphi\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi$$

$$= \cos^{n-1}\varphi\sin\varphi + (n-1)\int d\varphi\cos^{n-2}\varphi - (n-1)\int d\varphi\cos^n\varphi.$$

Так как последнее выражение подобно предложенному, отсюда получается:

$$\int d\varphi\cos^n\varphi = \frac{1}{n}\sin\varphi\cos^{n-1}\varphi + \frac{n-1}{n}\int d\varphi\cos^{n-2}\varphi.$$

Так как в случаях $n=0$ и $n=1$ интегрирование очевидно, то ясно, как последовательно переходить ко все более высоким степеням:

$$\int d\varphi \cos^0\varphi = \varphi,$$

$$\int d\varphi \cos\varphi = \sin\varphi,$$

$$\int d\varphi \cos^2\varphi = \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi,$$

$$\int d\varphi \cos^3\varphi = \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi,$$

$$\int d\varphi \cos^4\varphi = \frac{1}{4}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\varphi,$$

$$\int d\varphi \cos^5\varphi = \frac{1}{5}\sin\varphi\cos^4\varphi + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 5}\sin\varphi\cos^2\varphi + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\sin\varphi,$$

$$\int d\varphi \cos^6\varphi = \frac{1}{6}\sin\varphi\cos^5\varphi + \frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}\sin\varphi\cos^3\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\varphi$$

и т. д.

ЗАДАЧА 26

246. *Найти интеграл выражения* $d\varphi \sin^m\varphi \cos^n\varphi$.

РЕШЕНИЕ

Чтобы легче выполнить это, рассмотрим произведение $\sin^\mu\varphi\cos^\nu\varphi$, дифференциал которого есть

$$\mu\, d\varphi \sin^{\mu-1}\varphi\cos^{\nu+1}\varphi - \nu\, d\varphi \sin^{\mu+1}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi.$$

Теперь, смотря по тому, будем ли мы подставлять в первый член $\cos^2\varphi = 1-\sin^2\varphi$ или во второй $\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$, получается либо

$$d(\sin^\mu\varphi\cos^\nu\varphi) = +\mu\, d\varphi \sin^{\mu-1}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi - (\mu+\nu)\, d\varphi \sin^{\mu+1}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi.$$

либо

$$d(\sin^\mu\varphi\cos^\nu\varphi) = -\nu\, d\varphi \sin^{\mu-1}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi + (\mu+\nu)\, d\varphi \sin^{\mu-1}\varphi\cos^{\nu+1}\varphi.$$

Отсюда получаем два приведения:

$$\text{I. } \int d\varphi \sin^{\mu+1}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi = -\frac{1}{\mu+\nu}\sin^\mu\varphi\cos^\nu\varphi + \frac{\mu}{\mu+\nu}\int d\varphi \sin^{\mu-1}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi.$$

$$\text{II. } \int d\varphi \sin^{\mu-1}\varphi\cos^{\nu+1}\varphi = \frac{1}{\mu+\nu}\sin^\mu\varphi\cos^\nu\varphi + \frac{\nu}{\mu+\nu}\int d\varphi \sin^{\mu-1}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi.$$

Поэтому предложенное выражение $\int d\varphi \sin^m\varphi\cos^n\varphi$ последовательно приводится ко все более простым степеням как $\sin\varphi$, так и $\cos\varphi$ до тех пор, пока одна [из этих функций] или совсем исчезнет или останется в простейшем виде; в последнем случае интегрирование само собой очевидно, так как

$$\int d\varphi \sin^m \varphi \cos \varphi = +\frac{1}{m+1}\sin^{m+1}\varphi \quad \text{и} \quad \int d\varphi \sin\varphi \cos^n \varphi = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}\varphi.$$

ПРИМЕР

247. *Найти интеграл выражения* $d\varphi \sin^8 \varphi \cos^7 \varphi$.

С помощью первого приведения при $\mu = 7$ и $\nu = 8$ получаем:

$$\int d\varphi \sin^8 \varphi \cos^7 \varphi = -\frac{1}{15}\sin^7 \varphi \cos^8 \varphi + \frac{7}{15}\int d\varphi \sin^6 \varphi \cos^7 \varphi.$$

Это выражение преобразуем с помощью второго приведения

$$\int d\varphi \sin^6 \varphi \cos^7 \varphi = \frac{1}{13}\sin^7 \varphi \cos^6 \varphi + \frac{6}{13}\int d\varphi \sin^6 \varphi \cos^5 \varphi$$

и таким образом будем продвигаться все дальше:

$$\int d\varphi \sin^6 \varphi \cos^5 \varphi = -\frac{1}{11}\sin^5 \varphi \cos^6 \varphi + \frac{5}{11}\int d\varphi \sin^4 \varphi \cos^5 \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^4 \varphi \cos^5 \varphi = \frac{1}{9}\sin^5 \varphi \cos^4 \varphi + \frac{4}{9}\int d\varphi \sin^4 \varphi \cos^3 \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^4 \varphi \cos^3 \varphi = -\frac{1}{7}\sin^3 \varphi \cos^4 \varphi + \frac{3}{7}\int d\varphi \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi = \frac{1}{5}\sin^3 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{2}{5}\int d\varphi \sin^2 \varphi \cos \varphi,$$

$$\int d\varphi \sin^2 \varphi \cos \varphi = -\frac{1}{3}\sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{1}{3}\int d\varphi \cos \varphi \qquad \left(+\frac{1}{3}\sin\varphi\right)$$

Отсюда получается интеграл предложенного выражения

$$\int d\varphi \sin^8 \varphi \cos^7 \varphi = -\frac{1}{15}\sin^7 \varphi \cos^8 \varphi + \frac{1\cdot 7}{15\cdot 13}\sin^7 \varphi \cos^6 \varphi$$

$$-\frac{1\cdot 7\cdot 6}{15\cdot 13\cdot 11}\sin^5 \varphi \cos^6 \varphi + \frac{1\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{15\cdot 13\cdot 11\cdot 9}\sin^5 \varphi \cos^4 \varphi - \frac{1\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{15\cdot 13\cdot 11\cdot 9\cdot 7}\sin^3 \varphi \cos^4 \varphi$$

$$+\frac{1\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{15\cdot 13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5}\sin^3 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{1\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{15\cdot 13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}\sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{1\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{15\cdot 13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}\sin \varphi.$$

ПОЯСНЕНИЕ

248. Но всегда, когда встречаются такие случаи, лучше произведение $\sin^m \varphi \cos^n \varphi$ разлагать на синусы или косинусы кратных углов, после чего отдельные сла́гаемые интегрируются без всякого труда. Кстати, я здесь [лишь] ради краткости обозначил угол просто буквой φ, и общность нисколько не увеличится, если выразить его через $\alpha\varphi + \beta$, так же как [употребленное] прежде выражение $\arcsin x$ имеет столь же

широкий смысл, как если бы вместо x была написана какая угодно функция [1]).

Рассмотрим теперь такие выражения, в которых синус или косинус находятся в знаменателе; простейшие из них:

$$\text{I. } \frac{d\varphi}{\sin\varphi}. \quad \text{II. } \frac{d\varphi}{\cos\varphi}. \quad \text{III. } \frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}. \quad \text{IV. } \frac{d\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Интегралы этих выражений надлежит узнать прежде всего. К первому выражению применим следующие преобразования:

$$\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=\frac{d\varphi\sin\varphi}{\sin^2\varphi}=\frac{d\varphi\sin\varphi}{1-\cos^2\varphi}=\frac{-dx}{1-x^2} \quad (\text{полагаем } \cos\varphi=x), \text{ откуда}$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=-\frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}=-\frac{1}{2}l\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi},$$

ко второму

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\frac{d\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{d\varphi\cos\varphi}{1-\sin^2\varphi}=\frac{dx}{1-x^2} \quad (\text{полагаем } \sin\varphi=x); \text{ следовательно,}$$

$$\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}l\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}.$$

Интегрирование третьего и четвертого выражений, очевидно, выполняется посредством логарифмов.

Таким образом, надо будет хорошо заметить следующие интегралы:

$$\text{I.} \quad \frac{d\varphi}{\sin\varphi}=-\frac{1}{2}l\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}=l\frac{\sqrt{1-\cos\varphi}}{\sqrt{1+\cos\varphi}}=l\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi.$$

$$\text{II.} \quad \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\frac{1}{2}l\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}=l\frac{\sqrt{1+\sin\varphi}}{\sqrt{1-\sin\varphi}}=l\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi\right).$$

$$\text{III.} \quad \int\frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}=l\sin\varphi=\int\frac{d\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}=\int d\varphi\operatorname{ctg}\varphi.$$

$$\text{IV.} \quad \int\frac{d\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi}=-l\cos\varphi=\int d\varphi\operatorname{tg}\varphi.$$

Отсюда следует III + IV [2]):

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}=l\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=l\operatorname{tg}\varphi$$

ЗАДАЧА 27

249. *Найти интегралы выражений* $\frac{d\varphi\sin^m\varphi}{\cos^n\varphi}$ *и* $\frac{d\varphi\cos^m\varphi}{\sin^n\varphi}$.

РЕШЕНИЕ

Прежде всего сразу же видно, что каждое из этих двух выражений преобразуется в другое, если положить $\varphi=90^\circ-\psi$, так как при этом получается $\sin\varphi=\cos\psi$, а $\cos\varphi=\sin\psi$ и, заметим к тому же, $d\varphi=-d\psi$.

---

[1]) Nihiloque res foret generalior, si per $\alpha\varphi+\beta$ exprimeretur, quaemadmodum etiam ante haec expressio Ang.sin x aeque late patet, ac si loco x functio quaecunqe scriberetur. Видимо, Эйлер хочет сказать, что какая-либо замена переменной (например, $\varphi=\alpha\varphi_1+\beta$), произведенная в одной из формул интегрирования, не расширила бы круга элементарно интегрируемых функций.

[2]) То-есть складывая равенства III и IV.

Поэтому достаточно заняться только первым выражением. Применение первого из данных в § 246 приведений, если взять $\mu+1=m$ и $\nu-1=-n$, дает

$$\int \frac{d\varphi \sin^m \varphi}{\cos^n \varphi} = -\frac{1}{m-n}\cdot\frac{\sin^{m-1}\varphi}{\cos^{n-1}\varphi}+\frac{m-1}{m-n}\int\frac{d\varphi \sin^{m-2}\varphi}{\cos^n\varphi},$$

при этом показатель количества $\sin\varphi$ в числителе всякий раз уменьшается на два, так что в конце концов мы придем либо к $\int\frac{d\varphi}{\cos^n\varphi}$, либо к $\int\frac{d\varphi\sin\varphi}{\cos^n\varphi}=\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1}\varphi}$; поэтому нам остается заняться только выражением $\int\frac{d\varphi}{\cos^n\varphi}$. Второе же приведение, данное там же (§ 246), если принять $\mu-1=m$ и $\nu-1=-n$, дает

$$\int\frac{d\varphi\sin^m\varphi}{\cos^{n-2}\varphi}=\frac{1}{m-n+2}\,\frac{\sin^{m+1}\varphi}{\cos^{n-1}\varphi}-\frac{n-1}{m-n+2}\int\frac{d\varphi\sin^m\varphi}{\cos^n\varphi},$$

откуда получается:

$$\int\frac{d\varphi\sin^m\varphi}{\cos^n\varphi}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin^{m+1}\varphi}{\cos^{n-1}\varphi}-\frac{m-n+2}{n-1}\int\frac{d\varphi\sin^m\varphi}{\cos^{n-2}\varphi}.$$

При помощи этого приведения показатель количества $\cos\varphi$ в знаменателе всякий раз уменьшается на два, так что, наконец, мы придем или к $\int d\varphi\sin^m\varphi$, или к $\int\frac{d\varphi\sin^m\varphi}{\cos\varphi}$. Интегрирование первого из этих выражений показано уже выше, второе же выражение, если $m>1$, при помощи первого приведения преобразуется в конце концов либо к $\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$, либо к $\int\frac{d\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi}$; но интеграл первого из этих выражений равен $l\,\mathrm{tg}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi\right)$, а второго $-l\cos\varphi$.

СЛЕДСТВИЕ 1

250. Первое приведение не имеет места, когда $m=n$; в этом случае выражение $\int\frac{d\varphi\sin^n\varphi}{\cos^n\varphi}$ нельзя привести к выражению $\int\frac{d\varphi\sin^{n-2}\varphi}{\cos^n\varphi}$. Вторым же приведением можно пользоваться всегда; правда, при этом исключается случай $n=1$, но тогда интегрирование может быть осуществлено при помощи первого приведения.

СЛЕДСТВИЕ 2

251. Основой первого исключения является то, что выражение $\int\frac{d\varphi\sin^{n-2}\varphi}{\cos^n\varphi}$ интегрируемо полностью[1]) и имеет интеграл $=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin^{n-1}\varphi}{\cos^{n-1}\varphi}$.

[1]) Est absolute integrabilis. Формула I § 426, из которой получена первая формула приведения § 249, была выведена из соотношения

$$d(\sin^\mu\varphi\cos^\nu\varphi)=\mu\,d\varphi\sin^{\mu-1}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi-(\mu+\nu)\,d\varphi\sin^{\mu+1}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi.$$

В случае $\mu+\nu=0$ (т. е. при $m=n-2$) уже одно первое слагаемое правой части дает дифференциал функции $\sin^\mu\varphi\cos^\nu\varphi$ и в этом смысле «интегрируемо полностью». При обозначениях настоящего параграфа в рассматриваемом случае получается формула

$$d\left(\frac{\sin^{n-1}\varphi}{\cos^{n-1}\varphi}\right)=(n-1)\,d\varphi\,\frac{\sin^{n-2}\varphi}{\cos\varphi}.$$

Стало быть, имеем в этих случаях

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi, \qquad \int \frac{d\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi, \qquad \int \frac{d\varphi \sin^3\varphi}{\cos^5\varphi} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^4\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4\varphi.$$

ПРИМЕР 1

252. *Найти интеграл выражения* $\dfrac{d\varphi \sin^m\varphi}{\cos\varphi}$.

Первое приведение дает

$$\int \frac{d\varphi \sin^m\varphi}{\cos\varphi} = \frac{-1}{m-1}\sin^{m-1}\varphi + \int \frac{d\varphi \sin^{m-2}\varphi}{\cos\varphi}.$$

Отсюда, начиная со случаев, которые известны сами по себе, имеем:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = l\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right),$$

$$\int \frac{d\varphi \sin\varphi}{\cos\varphi} = -l\cos\varphi = l\sec\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^2\varphi}{\cos\varphi} = -\sin\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^3\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{1}{2}\sin^2\varphi + l\sec\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^4\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{1}{3}\sin^3\varphi - \sin\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^5\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{1}{4}\sin^4\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi + l\sec\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^6\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{1}{5}\sin^5\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi - \sin\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^7\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{1}{6}\sin^6\varphi - \frac{1}{4}\sin^4\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi + l\sec\varphi$$

и т. д.

ПОЯСНЕНИЕ

253. Для остальных случаев знаменателя все дело сводится к следующим приведениям:

$$\int \frac{d\varphi \sin^m\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\sin^{m+1}\varphi}{\cos\varphi} - m\int d\varphi \sin^m\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^m\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^{m+1}\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{m-1}{2}\int \frac{d\varphi \sin^m\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^m\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^{m+1}\varphi}{\cos^3\varphi} - \frac{m-2}{3}\int \frac{d\varphi \sin^m\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi \sin^m\varphi}{\cos^5\varphi} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^{m+1}\varphi}{\cos^4\varphi} - \frac{m-3}{4}\int \frac{d\varphi \sin^m\varphi}{\cos^3\varphi}$$

и т. д.

ПРИМЕР 2

254. *Найти интеграл выражения* $\frac{d\varphi}{\cos^n\varphi}$.

Второе приведение в силу $m=0$ принимает вид:

$$\int\frac{d\varphi}{\cos^n\varphi}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^{n-1}\varphi}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{d\varphi}{\cos^{n-2}\varphi};$$

так как простейшие случаи

$$\int d\varphi=\varphi \quad \text{и} \quad \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=l\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi\right)$$

уже известны, то к ним можно преобразовать и все следующие:

$$\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}+\frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\cos^4\varphi}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\cos^5\varphi}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin^2\varphi}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\cos^6\varphi}=\frac{1}{5}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^5\varphi}+\frac{1\cdot4}{3\cdot5}\,\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

и т. д.

СЛЕДСТВИЕ 1

255. Подобным образом получим такие интегрирования:

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=l\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi,\quad \int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}=-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin^4\varphi}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}-\frac{2}{3}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin^5\varphi}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^4\varphi}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi}$$

и т. д.

СЛЕДСТВИЕ 2

256. Затем имеем:

$$\int\frac{d\varphi\sin\varphi}{\cos^n\varphi}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\cos^{n-1}\varphi}$$

и

$$\int\frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin^n\varphi}=\frac{-1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin^{n-1}\varphi}.$$

Далее,

$$\int\frac{d\varphi\sin^2\varphi}{\cos^n\varphi}=\int\frac{d\varphi}{\cos^n\varphi}-\int\frac{d\varphi}{\cos^{n-2}\varphi},\quad \int\frac{d\varphi\cos^2\varphi}{\sin^n\varphi}=\int\frac{d\varphi}{\sin^n\varphi}-\int\frac{d\varphi}{\sin^{n-2}\varphi}$$

и

$$\int \frac{d\varphi \sin^3 \varphi}{\cos^n \varphi} = \int \frac{d\varphi \sin \varphi}{\cos^n \varphi} - \int \frac{d\varphi \sin \varphi}{\cos^{n-2} \varphi}, \quad \int \frac{d\varphi \cos^3 \varphi}{\sin^n \varphi} = \int \frac{d\varphi \cos \varphi}{\sin^n \varphi} - \int \frac{d\varphi \cos \varphi}{\sin^{n-2} \varphi}.$$

При помощи этих приведений можно беспрестанно подвигаться дальше.

ЗАДАЧА 28

257. *Найти интеграл выражения* $\dfrac{d\varphi}{\sin^m \varphi \cos^n \varphi}$.

РЕШЕНИЕ

Для этого случая можно приспособить приведения, примененные выше, взяв в предыдущей задаче m с отрицательным знаком; тогда

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^m \varphi \cos^n \varphi} = + \frac{1}{m+n} \cdot \frac{1}{\sin^{m+1} \varphi \cos^{n-1} \varphi} + \frac{m+1}{m+n} \int \frac{d\varphi}{\sin^{m+2} \varphi \cos^n \varphi};$$

если вместо m написать $m-2$, то отсюда после обращения[1]) получится:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^m \varphi \cos^n \varphi} = - \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{\sin^{m-1} \varphi \cos^{n-1} \varphi} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{d\varphi}{\sin^{m-2} \varphi \cos^n \varphi}.$$

Второе приведение, подобное этому, имеет вид:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^m \varphi \cos^n \varphi} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\sin^{m-1} \varphi \cos^{n-1} \varphi} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{d\varphi}{\sin^m \varphi \cos^{n-2} \varphi}.$$

Из формул этого рода простейшими являются

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = l \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = l \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi\right), \quad \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = l \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\operatorname{ctg} \varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg} \varphi,$$

из них можно получить более сложные:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} = -\frac{1}{\sin \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^4 \varphi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos^3 \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^2 \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi \cos \varphi} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin^3 \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \cos \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^6 \varphi} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\cos^5 \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^4 \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^6 \varphi \cos \varphi} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sin^5 \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi \cos \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^3 \varphi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi \cos \varphi} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^5 \varphi} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos^4 \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos^3 \varphi},$$

[1]) То есть если выразить второй интеграл через первый.

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^5\varphi\cos\varphi} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sin^4\varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi\cos\varphi}$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos^7\varphi} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\cos^6\varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos^5\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^7\varphi\cos\varphi} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sin^6\varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin^5\varphi\cos\varphi}$$

и т. д.

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} + 2\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} + 2\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\cos^4\varphi} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin\varphi\cos^3\varphi} + \frac{4}{3}\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^4\varphi\cos^2\varphi} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin^3\varphi\cos\varphi} + \frac{4}{3}\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}.$$

Таким образом, сколь угодно сложные выражения приводятся к простым, которые легко интегрировать.

СЛЕДСТВИЕ 1

258. Оба показателя: при $\sin\varphi$ и при $\cos\varphi$, можно одновременно уменьшить на двойку; действительно, по первому приведению [§ 257]

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^\mu\varphi\cos^\nu\varphi} = -\frac{1}{\mu-1}\cdot\frac{1}{\sin^{\mu-1}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi} + \frac{\mu+\nu-2}{\mu-1}\int \frac{d\varphi}{\sin^{\mu-2}\varphi\cos^\nu\varphi},$$

после чего это выражение по второму приведению при $m=\mu-2$ и $n=\nu$ дает

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^{\mu-2}\varphi\cos^\nu\varphi} = \frac{1}{\nu-1}\cdot\frac{1}{\sin^{\mu-3}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi} + \frac{\mu+\nu-4}{\nu-1}\int \frac{d\varphi}{\sin^{\mu-2}\varphi\cos^{\nu-2}\varphi},$$

откуда заключаем:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^\mu\varphi\cos^\nu\varphi} = -\frac{1}{\mu-1}\cdot\frac{1}{\sin^{\mu-1}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi} + \frac{\mu+\nu-2}{(\mu-1)(\nu-1)}\cdot\frac{1}{\sin^{\mu-3}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi} + \frac{(\mu+\nu-2)(\mu+\nu-4)}{(\mu-1)(\nu-1)}\int \frac{d\varphi}{\sin^{\mu-2}\varphi\cos^{\nu-2}\varphi}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

259. Приведя первые два члена к общему знаменателю, получим:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^\mu\varphi\cos^\nu\varphi} = \frac{(\mu-1)\sin^2\varphi-(\nu-1)\cos^2\varphi}{(\mu-1)(\nu-1)\sin^{\mu-1}\varphi\cos^{\nu-1}\varphi} + \frac{(\mu+\nu-2)(\mu+\nu-4)}{(\mu-1)(\nu-1)}\int \frac{d\varphi}{\sin^{\mu-2}\varphi\cos^{\nu-2}\varphi};$$

этим приведением можно пользоваться для сокращения вычислений всегда, исключая случаи $\mu=1$ или $\nu=1$.

ПОЯСНЕНИЕ

260. Выражения вида $\frac{d\varphi}{\sin^m\varphi\cos^n\varphi}$ можно привести к более простым также и следующим весьма удобным способом: надо умножить числи-

тель на $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, после чего получим:

$$\int\frac{d\varphi}{\sin^m\varphi\cos^n\varphi}=\int\frac{d\varphi}{\sin^{m-2}\varphi\cos^n\varphi}+\int\frac{d\varphi}{\sin^m\varphi\cos^{n-2}\varphi}.$$

Это можно продолжать до тех пор, пока в знаменателе останется только единственная степень. Так, например,

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}=\int\frac{d\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi}+\int\frac{d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}=l\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}+\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Если же предложено выражение $\int\frac{d\varphi}{\sin^n\varphi\cos^n\varphi}$, то можно использовать формулу $\sin\varphi\cos\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\varphi$, откуда, полагая $\omega=2\varphi$, будем иметь:

$$\int\frac{2^n\,d\varphi}{\sin^n 2\varphi}=2^{n-1}\int\frac{d\omega}{\sin^n\omega},$$

а это выражение решается согласно данным выше указаниям. При применении этих вспомогательных приемов к выражению $d\varphi\sin^m\varphi\cos^n\varphi$ ничего больше не требуется, если только m и n — целые числа, положительные или отрицательные. Если же они являются дробными числами, то не встречается необходимости давать какие-либо наставления, так как случаи, в которых интегрирование удается, выявляются сами собой, а каким образом интегралы, которые нельзя взять, выражаются при помощи рядов, мы изложим подробнее в следующей главе.

Теперь же мы перейдем к рассмотрению дробных выражений, у которых знаменатель есть $a+b\cos\varphi$ или степень этого выражения; такие выражения встречаются очень часто в теоретической астрономии.

ЗАДАЧА 29

261 *Отыскать интеграл дифференциального выражения*

$$\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}.$$

РЕШЕНИЕ

Самый удобный способ нахождения этого интеграла—это привести предложенное выражение к обычному виду, полагая $\cos\varphi=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, так что получится в рациональном виде $\sin\varphi=\frac{2x}{1+x^2}$, а отсюда $d\varphi\cos\varphi=$ $=\frac{2\,dx\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, и следовательно, $d\varphi=\frac{2\,dx}{1+x^2}$. Так как

$$a+b\cos\varphi=\frac{a+b+(a-b)\,x^2}{1+x^2},$$

то наше выражение получит вид

$$\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}=\frac{2\,dx}{a+b+(a-b)\,x^2};$$

это дает либо угол, либо логарифм, смотря по тому, будет ли $a>b$ или $a<b$.

В случае $a > b$ найдем:

$$\int \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(a-b)x}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

в случае же $a < b$

$$\int \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\, \frac{\sqrt{b^2-a^2}+x(b-a)}{\sqrt{b^2-a^2}-x(b-a)}.$$

Но

$$x = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi};$$

сделав эту подстановку, имеем:

$$2\operatorname{arctg}\frac{(a-b)x}{\sqrt{a^2-b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{2x\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-(a-b)x^2}$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{2\sin\varphi\sqrt{a^2-b^2}}{(a+b)(1+\cos\varphi)-(a-b)(1-\cos\varphi)} = \operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi\sqrt{a^2-b^2}}{a\cos\varphi+b}.$$

Поэтому для случая $a > b$ получим:

$$\int \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi\sqrt{a^2-b^2}}{a\cos\varphi+b},$$

или

$$\int \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin\frac{\sin\varphi\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos\varphi},$$

или

$$\int \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arccos\frac{a\cos\varphi+b}{a+b\cos\varphi},$$

а для случая $a < b$

$$\int \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\, \frac{\sqrt{b+a}\,(1+\cos\varphi)+\sqrt{b-a}\,(1-\cos\varphi)}{\sqrt{b+a}\,(1+\cos\varphi)-\sqrt{b-a}\,(1-\cos\varphi)},$$

или

$$\int \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\, \frac{a\cos\varphi+b+\sin\varphi\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos\varphi}.$$

В случае же $b=a$ интеграл равен $\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$, откуда

$$\int \frac{d\varphi}{1+\cos\varphi} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Эти интегралы исчезают при $\varphi = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1

262. Для выражения $\frac{d\varphi\sin\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{-d\cos\varphi}{a+b\cos\varphi}$ интеграл, взятый так, чтобы он исчезал при $\varphi=0$, равен $\frac{1}{b}\, l\, \frac{b+a}{a+b\cos\varphi}$; таким образом, имеем:

$$\int \frac{d\varphi\sin\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{b}\, l\, \frac{a+b}{a+b\cos\varphi}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

263. Что касается выражения $\frac{d\varphi \cos\varphi}{a+b\cos\varphi}$, то оно преобразуется в $\frac{d\varphi}{b}-\frac{a\,d\varphi}{b\,(a+b\cos\varphi)}$; значит, интеграл может быть выражен через решение задачи [29]:

$$\int \frac{d\varphi \cos\varphi}{a+b\cos\varphi}=\frac{\varphi}{b}-\frac{a}{b}\int \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

264. После того как это интегрирование выполнено, можно найти также интеграл выражения $\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$, где n — целое число; повидимому, удобнее всего получается, как кажется, вид интеграла при таком предположении [1]):

$$\int \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}=\frac{A\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}+m\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi},$$

откуда находим:

$$A=\frac{-b}{a^2-b^2}, \qquad m=\frac{a}{a^2-b^2}.$$

$$\int \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^3}=\frac{(A+B\cos\varphi)\sin\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}+m\int\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2},$$

откуда находим:

$$A=\frac{-b}{a^2-b^2}, \qquad B=\frac{-b^2}{2a\,(a^2-b^2)}, \qquad m=\frac{2a^2+b^2}{2a\,(a^2-b^2)}.$$

Таким же образом можно продолжать исследование, переходя ко все более высоким степеням, — работа, конечно, довольно скучная.

Но задача может быть разрешена с большой легкостью следующим образом. Рассмотрим более общее выражение $\frac{d\varphi\,(f+g\cos\varphi)}{(a+b\cos\varphi)^{n+1}}$ и положим

$$\int \frac{d\varphi\,(f+g\cos\varphi)}{(a+b\cos\varphi)^{n+1}}=\frac{A\sin\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}+\int\frac{d\varphi\,(B+C\cos\varphi)}{(a+b\cos\varphi)^n}.$$

Взяв дифференциалы, получим такое уравнение:

$$f+g\cos\varphi=A\cos\varphi\,(a+b\cos\varphi)+nAb\sin^2\varphi+(B+C\cos\varphi)\,(a+b\cos\varphi).$$

Так как $\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi$, оно принимает такой вид:

$$\left.\begin{array}{lll} -f & -g\cos\varphi & +Ab\cos^2\varphi \\ +nAb & +Aa\cos\varphi & -nAb\cos^2\varphi \\ +Ba & +Bb\cos\varphi & +Cb\cos^2\varphi \\ & +Ca\cos\varphi & \end{array}\right\}=0,$$

---

[1]) Quod fingendo integralis forma commodissime praestari videtur.

откуда, приравняв каждый член нулю, находим:

$$A=\frac{ag-bf}{n(a^2-b^2)},\quad B=\frac{af-bg}{a^2-b^2},\quad C=\frac{(n-1)(ag-bf)}{n(a^2-b^2)}.$$

В итоге получается такое приведение:

$$\int\frac{d\varphi\,(f+g\cos\varphi)}{(a+b\cos\varphi)^{n+1}}$$

$$=\frac{(ag-bf)\sin\varphi}{n(a^2-b^2)(a+b\cos\varphi)^n}+\frac{1}{n(a^2-b^2)}\int\frac{d\varphi\,(n(af-bg)+(n-1)(ag-bf)\cos\varphi)}{(a+b\cos\varphi)^n}$$

С помощью этого приведения дойдем, наконец, до выражения

$\int\frac{d\varphi\,(h+k\cos\varphi)}{a+b\cos\varphi}$, а этот интеграл $=\frac{k}{b}\varphi+\frac{bh-ak}{b}\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$

известен из сказанного выше. Ясно, однако, что всегда будет $k=0$.

ПОЯСНЕНИЕ 2

265. Встречаются также такие выражения, в которые входит еще вдобавок показательное количество $e^{\alpha\varphi}$, содержащее угол φ в показателе. Представляется желательным показать, как надлежит поступать с такими выражениями, так как на этом получит наилучшее освещение изложенный выше метод приведений. Дело в том, что с помощью вышеуказанного приведения мы здесь приходим к выражению, сходному с предложенным, откуда можно получить и самый интеграл. С этой целью заметим, что $\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\varphi}$.

ЗАДАЧА 30

266. *Найти интеграл дифференциального выражения*

$$dy=e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^n\varphi.$$

РЕШЕНИЕ

Приняв $e^{\alpha\varphi}\,d\varphi$ за дифференциальный множитель, получим:

$$y=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\varphi}\sin^n\varphi-\frac{n}{\alpha}\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi;$$

таким же образом найдем:

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi$$

$$=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\varphi}\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi-\frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\,((n-1)\sin^{n-2}\varphi\cos^2\varphi-\sin^n\varphi),$$

а так как $\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$, последнее выражение приводится к следующему:

$$(n-1)\int e^{\alpha\varphi}d\varphi\sin^{n-2}\varphi-n\int e^{\alpha\varphi}d\varphi\sin^n\varphi,$$

откуда имеем:

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^n\varphi$$

$$=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\varphi}\sin^n\varphi-\frac{n}{\alpha^2}e^{\alpha\varphi}\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi+\frac{n(n-1)}{\alpha^2}\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^{n-2}\varphi-\frac{n^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^n\varphi.$$

Поэтому, если соединить последнее выражение с первым, получится:

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi \sin^n\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}\sin^{n-1}\varphi\,(\alpha\sin\varphi - n\cos\varphi)}{\alpha^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2+n^2}\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^{n-2}\varphi.$$

Очевидно, в двух случаях интеграл получается в законченном виде, именно при $n=0$ и $n=1$, причем [1])

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha\varphi} - \frac{1}{\alpha} \quad \text{и} \quad \int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}(\alpha\sin\varphi - \cos\varphi)}{\alpha^2+1} + \frac{1}{\alpha^2+1},$$

а к этим интегралам приводятся все следующие, в которых n есть целое число, большее единицы.

СЛЕДСТВИЕ 1

267. Так, если $n=2$, мы получаем такое интегрирование:

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^2\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}\sin\varphi\,(\alpha\sin\varphi - 2\cos\varphi)}{\alpha^2+4} + \frac{1\cdot 2}{\alpha(\alpha^2+4)}e^{\alpha\varphi} - \frac{1\cdot 2}{\alpha(\alpha^2+4)};$$

если же $n=3$, — такое:

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^3\varphi$$

$$= \frac{e^{\alpha\varphi}\sin^2\varphi\,(\alpha\sin\varphi - 3\cos\varphi)}{\alpha^2+9} + \frac{2\cdot 3e^{\alpha\varphi}(\alpha\sin\varphi - \cos\varphi)}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)} + \frac{2\cdot 3}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)},$$

причем интегралы взяты так, что они исчезают при $\varphi=0$.

СЛЕДСТВИЕ 2

268. Если, определив таким образом интегралы, положим $\alpha\varphi = -\infty$, так, чтобы $e^{\alpha\varphi}$ исчезало, то получим, очевидно, общую формулу

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^n\varphi = \frac{n(n-1)}{\alpha^2+n^2}\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^{n-2}\varphi,$$

а стало быть, интегралы для этого случая [2]) $\alpha\varphi = -\infty$ будут

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi = -\frac{1}{\alpha}, \quad \int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin\varphi = \frac{1}{\alpha^2+1},$$

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^2\varphi = \frac{-1\cdot 2}{\alpha(\alpha^2+4)},$$

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^3\varphi = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)},$$

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^4\varphi = \frac{-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{\alpha(\alpha^2+4)(\alpha^2+16)},$$

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^5\varphi = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)(\alpha^2+25)}.$$

---

[1]) В нижеследующих двух интегралах добавлены соответственно члены $-\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{1}{\alpha^2+1}$ с тем расчетом, чтобы каждый из этих интегралов обращался в нуль при $\varphi=0$.

[2]) В нынешних обозначениях

$$\int_0^{-\infty} e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^n\varphi = \frac{n(n-1)}{\alpha^2+n^2}\int_0^{\infty} e^{\alpha\varphi}\,d\varphi\sin^{n-2}\varphi.$$

Предполагается, что $\alpha > 0$. Аналогично для нижеследующих формул.

СЛЕДСТВИЕ 3

269. Поэтому, если будет предложен такой бесконечный ряд:

$$s = 1 + \frac{1\cdot 2}{\alpha^2+4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(\alpha^2+4)(\alpha^2+16)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{(\alpha^2+4)(\alpha^2+16)(\alpha^2+36)} + \text{и т. д.},$$

то

$$s = -\alpha \int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi\, (1 + \sin^2\varphi + \sin^4\varphi + \sin^6\varphi + \text{и т. д.})$$

или

$$s = -\alpha \int \frac{e^{\alpha\varphi}\, d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

где после интегрирования положено $\alpha\varphi = -\infty$.

ЗАДАЧА 31

270. *Отыскать интеграл дифференциального выражения* $e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos^n\varphi$.

РЕШЕНИЕ

Поступая таким же образом, как и выше, получим:

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos^n\varphi = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi}\cos^n\varphi + \frac{n}{\alpha}\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \sin\varphi \cos^{n-1}\varphi,$$

а затем

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \sin\varphi\cos^{n-1}\varphi$$
$$= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi}\sin\varphi\cos^{n-1}\varphi - \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi}\, d\varphi\, (\cos^n\varphi - (n-1)\cos^{n-2}\varphi\, \sin^2\varphi).$$

Это последнее выражение переходит в

$$-(n-1)\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos^{n-2}\varphi + n\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos^n\varphi,$$

так что

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos^n\varphi$$
$$= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi}\cos^n\varphi + \frac{n}{\alpha^2} e^{\alpha\varphi}\sin\varphi\cos^{n-1}\varphi + \frac{n(n-1)}{\alpha^2}\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi\cos^{n-2}\varphi - \frac{n^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi \cos^n\varphi,$$

откуда получаем:

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi\cos^n\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}\cos^{n-1}\varphi\,(\alpha\cos\varphi + n\sin\varphi)}{\alpha^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2+n^2}\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi\cos^{n-2}\varphi.$$

Отсюда простейшие случаи:

$$\int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\varphi} + C, \quad \int e^{\alpha\varphi}\, d\varphi\cos\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}(\alpha\cos\varphi + \sin\varphi)}{\alpha^2+1} + C.$$

К ним приводятся все последующие, в которых n — целое положительное число.

ПОЯСНЕНИЕ

271. Если разъяснены простейшие случаи, то открывается и другой путь для нахождения интеграла предложенных выражений, а также и следующего более общего $e^{\alpha\varphi}\,d\varphi \sin^m\varphi \cos^n\varphi$. Действительно, так как произведение $\sin^m\varphi \cos^n\varphi$ можно разложить в сумму нескольких синусов или косинусов, каждый из которых имеет вид $M\sin\lambda\varphi$ или $M\cos\lambda\varphi$, то интегрирование сводится к интегрированию одного из двух выражений: $e^{\alpha\varphi}\,d\varphi \sin\lambda\varphi$ или $e^{\alpha\varphi}\,d\varphi \cos\lambda\varphi$. Положим $\lambda\varphi = \omega$; тогда будем иметь:

$$e^{\alpha\varphi}\,d\varphi \sin\lambda\varphi = \frac{1}{\lambda}\, e^{\frac{\alpha}{\lambda}\omega}\, d\omega \sin\omega \quad \text{и} \quad e^{\alpha\varphi}\,d\varphi \cos\lambda\varphi = \frac{1}{\lambda}\, e^{\frac{\alpha}{\lambda}\omega}\, d\omega \cos\omega;$$

их интегралы на основании предыдущего таковы:

$$\int e^{\frac{\alpha}{\lambda}\omega}\, d\omega \sin\omega = \frac{\lambda e^{\frac{\alpha}{\lambda}\omega}(\alpha\sin\omega - \lambda\cos\omega)}{\alpha^2+\lambda^2} = \frac{\lambda e^{\alpha\varphi}(\alpha\sin\lambda\varphi - \lambda\cos\lambda\varphi)}{\alpha^2+\lambda^2},$$

$$\int e^{\frac{\alpha}{\lambda}\omega}\, d\omega \cos\omega = \frac{\lambda e^{\frac{\alpha}{\lambda}\omega}(\alpha\cos\omega + \lambda\sin\omega)}{\alpha^2+\lambda^2} = \frac{\lambda e^{\alpha\varphi}(\alpha\cos\lambda\varphi + \lambda\sin\lambda\varphi)}{\alpha^2+\lambda^2},$$

откуда, наконец, получаем:

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi \sin\lambda\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}(\alpha\sin\lambda\varphi - \lambda\cos\lambda\varphi)}{\alpha^2+\lambda^2}$$

и

$$\int e^{\alpha\varphi}\,d\varphi \cos\lambda\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}(\alpha\cos\lambda\varphi + \lambda\sin\lambda\varphi)}{\alpha^2+\lambda^2}.$$

Если бы я сразу же вместо $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ написал в общей формуле $\sin\lambda\varphi$ и $\cos\lambda\varphi$, то не было бы нужды в последнем приведении; но так как оно не представляет никакой трудности, то я отдал предпочтение краткости.

ГЛАВА VI

О РАЗЛОЖЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ В РЯДЫ, РАСПОЛОЖЕННЫЕ ПО СИНУСАМ И КОСИНУСАМ КРАТНЫХ УГЛОВ

ЗАДАЧА 32

272. *Представить интеграл выражения* $\frac{d\varphi}{1+n\cos\varphi}$ *в виде ряда, расположенного по синусам кратных углов.*

РЕШЕНИЕ

После того как обычным образом получено разложение в ряд

$$\frac{1}{1+n\cos\varphi}=1-n\cos\varphi+n^2\cos^2\varphi-n^3\cos^3\varphi+n^4\cos^4\varphi-\text{ и т. д.},$$

степени косинуса обращаем в косинусы кратных углов при помощи формул, данных во «Введении»[1]). Прежде всего для нечетных степеней имеем:

$$\cos\varphi=\cos\varphi,$$

$$\cos^3\varphi=\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{1}{4}\cos 3\varphi,$$

$$\cos^5\varphi=\frac{10}{16}\cos\varphi+\frac{5}{16}\cos 3\varphi+\frac{1}{16}\cos 5\varphi,$$

$$\cos^7\varphi=\frac{35}{64}\cos\varphi+\frac{21}{64}\cos 3\varphi+\frac{7}{64}\cos 5\varphi+\frac{1}{64}\cos 7\varphi,$$

$$\cos^9\varphi=\frac{126}{256}\cos\varphi+\frac{84}{256}\cos 3\varphi+\frac{36}{256}\cos 5\varphi+\frac{9}{256}\cos 7\varphi+\frac{1}{256}\cos 9\varphi.$$

При этом надо заметить, что, вообще, если положить

$$\cos^{2\lambda-1}\varphi=A\cos\varphi+B\cos 3\varphi+C\cos 5\varphi+D\cos 7\varphi+E\cos 9\varphi+\text{ и т. д.},$$

то будем иметь:

$$A=2\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2\lambda-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ 2\lambda}=\frac{2}{2^{2\lambda-1}}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{14}{4}\cdots\frac{4\lambda-2}{\lambda},$$

$$B=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}A,\quad C=\frac{\lambda-2}{\lambda+2}B,\quad D=\frac{\lambda-3}{\lambda+3}C,\quad E=\frac{\lambda-4}{\lambda+4}D\ \text{ и т. д.},$$

[1]) «Введение в анализ бесконечно малых», т. I, гл. XIV, § 261.

а для четных степеней имеем:

$$\cos^0\varphi = 1,$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi,$$

$$\cos^4\varphi = \frac{3}{8} + \frac{4}{8}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi,$$

$$\cos^6\varphi = \frac{10}{32} + \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{6}{32}\cos 4\varphi + \frac{1}{32}\cos 6\varphi,$$

$$\cos^8\varphi = \frac{35}{128} + \frac{56}{128}\cos 2\varphi + \frac{28}{128}\cos 4\varphi + \frac{8}{128}\cos 6\varphi + \frac{1}{128}\cos 8\varphi.$$

Вообще, если положить

$$\cos^{2\lambda}\varphi = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos 2\varphi + \mathfrak{C}\cos 4\varphi + \mathfrak{D}\cos 6\varphi + \mathfrak{E}\cos 8\varphi + \text{ и т. д.},$$

то будем иметь:

$$\mathfrak{A} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ (2\lambda-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \dots\ 2\lambda} = \frac{1}{2^{2\lambda-1}}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{14}{4}\cdots\frac{4\lambda-2}{\lambda},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{2\lambda}{\lambda+1}\mathfrak{A},\quad \mathfrak{C} = \frac{\lambda-1}{\lambda+2}\mathfrak{B},\quad \mathfrak{D} = \frac{\lambda-2}{\lambda+3}\mathfrak{C},\quad \mathfrak{E}\frac{\lambda-3}{\lambda+4}\mathfrak{D} \text{ и т. д.}$$

Если теперь подставить эти значения, то получится:

$$\frac{1}{1+n\cos\varphi}$$

$$\begin{array}{llllll}
= 1 & -\,n\cos\varphi + & \frac{1}{2}n^2\cos 2\varphi - & \frac{1}{4}n^3\cos 3\varphi + & \frac{1}{8}n^4\cos 4\varphi - & \frac{1}{16}n^5\cos 5\varphi + \text{ и т. д.} \\
+\frac{1}{2}n^2 & -\frac{3}{4}n^3 & +\frac{4}{8}n^4 & -\frac{5}{16}n^5 & +\frac{6}{32}n^6 & -\frac{7}{64}n^7 \\
+\frac{3}{8}n^4 & -\frac{10}{16}n^5 & +\frac{15}{32}n^6 & -\frac{21}{64}n^7 & +\frac{28}{128}n^8 & -\frac{36}{296}n^9 \\
+\frac{10}{32}n^6 & -\frac{35}{64}n^7 & +\frac{56}{128}n^8 & -\frac{84}{256}n^9 & & \\
+\frac{35}{128}n^8. & & & & &
\end{array}$$

Отсюда ясно, что если положить

$$\frac{1}{1+n\cos\varphi} = A - B\cos\varphi + C\cos 2\varphi - D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi - \text{ и т. д.},$$

то

$$A = 1 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{8}n^4 + \frac{10}{32}n^6 + \text{ и т. д.},$$

или

$$A = 1 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}n^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}n^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}n^8 + \text{ и т. д.}$$

Таким образом, очевидно, что

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}.$$

Точно так же

$$B=n+\frac{3}{4}n^3+\frac{10}{16}n^5+ \text{ и т. д.} =\frac{2}{n}\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}n^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}n^6+ \text{ и т. д.}\right),$$

а следовательно,

$$B=\frac{2}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}-1\right).$$

Впрочем, и это значение и следующие можно с меньшим трудом определить следующим образом. Так как

$$\frac{1}{1+n\cos\varphi}=A-B\cos\varphi+C\cos 2\varphi-D\cos 3\varphi+E\cos 4\varphi- \text{ и т. д.},$$

то, помножив это равенство на $1+n\cos\varphi$, в силу формулы

$$\cos\varphi\cos\lambda\varphi=\frac{1}{2}\cos(\lambda-1)\varphi+\frac{1}{2}\cos(\lambda+1)\varphi$$

получим:

$$\begin{aligned}1=A\quad &-B\cos\varphi+C\cos 2\varphi-D\cos 3\varphi+E\cos 4\varphi- \text{ и т. д.}\\ +An\quad &-\frac{1}{2}Bn\quad+\frac{1}{2}Cn\quad-\frac{1}{2}Dn\\ -\frac{1}{2}Bn+\frac{1}{2}Cn\quad &-\frac{1}{2}Dn\quad+\frac{1}{2}En\quad-\frac{1}{2}Fn.\end{aligned}$$

Так как мы уже определили A, то остальные коэффициенты определяются отсюда следующим образом:

$$B=\frac{2}{n}(A-1),\quad C=\frac{2B-2An}{n},\quad D=\frac{2C-Bn}{n},$$

$$E=\frac{2D-Cn}{n},\quad F=\frac{2E-Dn}{n},\quad G=\frac{2F-En}{n}$$

и т. д.

Найдя же эти коэффициенты, уже легко найти и интеграл. Действительно, так как $\int d\varphi\cos\lambda\varphi=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda\varphi$, то будем иметь:

$$\int\frac{d\varphi}{1+n\cos\varphi}=A\varphi-B\sin\varphi+\frac{1}{2}C\sin 2\varphi-\frac{1}{3}D\sin 3\varphi+\frac{1}{4}E\sin 4\varphi- \text{ и т. д.}$$

Этот ряд расположен по синусам углов φ, 2φ, 3φ и т. д., что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 1

273. Прежде всего ясно, что это разложение может иметь место только в том случае, когда число n меньше единицы; действительно, если $n>1$, то каждый коэффициент окажется мнимым[1]). Если же $n=1$, то в силу $1+\cos\varphi=2\cos^2\frac{1}{2}\varphi$ будем иметь:

$$\int\frac{d\varphi}{1+\cos\varphi}=\int\frac{\frac{1}{2}d\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi.$$

---

[1]) Ибо все коэффициенты выражены через $A=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

274. Мы имеем $A=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$ и $B=\frac{2}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}-1\right)$; остальные же коэффициенты C, D, E и т. д. составляют такой рекуррентный ряд, что если P и Q — два каких-либо смежных коэффициента, то следующий за ними будет[1] $\frac{2}{n}Q-P$. Так как корни уравнения $z^2=\frac{2}{n}z-1$ равны $\frac{1\pm\sqrt{1-n^2}}{n}$, то любой член содержится в следующей формуле:

$$\alpha\left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^\lambda+\beta\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^\lambda.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

275. Но так как в нашем законе [следования коэффициентов] берется не A, а $2A$, то при $\lambda=0$ должно получиться $2A$, а следовательно,

$$\alpha+\beta=\frac{2}{\sqrt{1-n^2}};$$

затем при $\lambda=1$ должно получиться

$$\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{(\alpha-\beta)\sqrt{1-n^2}}{n}=\frac{2-2\sqrt{1-n^2}}{n\sqrt{1-n^2}},$$

откуда

$$\alpha-\beta=-\frac{2}{\sqrt{1-n^2}}.$$

Следовательно,

$$\alpha=0 \quad \text{и} \quad \beta=\frac{2}{\sqrt{1-n^2}}.$$

Таким образом, любой член, кроме A, равен

$$\frac{2}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^\lambda.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

276. В развернутом виде коэффициенты имеют такой вид:

$$A=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}},$$

---

[1] Так как $C=\frac{2}{n}B-2A$, то рекуррентная формула будет справедлива, начиная с коэффициента C, если через A обозначать *половину* свободного члена. Это и имеет в виду Эйлер в начале следующего параграфа.

Исходя из рекуррентной формулы, Эйлер ниже получает общее выражение коэффициента при $\cos\lambda\varphi$ в разложении $\frac{1}{1+n\cos\varphi}$ по косинусам кратных дуг. Метод получения этого общего выражения $\left(\text{с помощью характеристического уравнения } z^2=\frac{2}{n}z-1\right)$ изложен во «Введении в анализ», ч. I, § 224—227, стр. 211—213.

$$B=\frac{2-2\sqrt{1-n^2}}{n\sqrt{1-n^2}},$$

$$C=\frac{4-2n^2-4\sqrt{1-n^2}}{n^2\sqrt{1-n^2}},$$

$$D=\frac{8-6n^2-2(4-n^2)\sqrt{1-n^2}}{n^3\sqrt{1-n^2}},$$

$$E=\frac{16-16n^2+2n^4-2(8-4n^2)\sqrt{1-n^2}}{n^4\sqrt{1-n^2}},$$

$$F=\frac{32-40n^2+10n^4-2(16-12n^2+n^4)\sqrt{1-n^2}}{n^5\sqrt{1-n^2}},$$

$$G=\frac{64-96n^2+36n^4-2n^6-2(32-32n^2+6n^4)\sqrt{1-n^2}}{n^6\sqrt{1-n^2}}$$

и т. д.,

СЛЕДСТВИЕ 5

277. Так как $n<1$, то эти коэффициенты в большинстве случаев легче определять при помощи рядов, найденных нами раньше, а именно:

$$A=1+\frac{1}{2}n^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}n^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}n^6+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}n^8+\text{ и т. д.},$$

$$B=n\left(1+\frac{3}{4}n^2+\frac{3\cdot5}{4\cdot6}n^4+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8}n^6+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{4\cdot6\cdot8\cdot10}n^8+\text{ и т. д.}\right),$$

$$C=\frac{1}{2}n^2\left(1+\frac{3\cdot4}{2\cdot6}n^2+\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{2\cdot6\cdot4\cdot8}n^4+\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot6\cdot4\cdot8\cdot6\cdot10}n^6+\text{ и т. д.}\right),$$

$$D=\frac{1}{4}n^3\left(1+\frac{4\cdot5}{2\cdot8}n^2+\frac{4\cdot5\cdot6\cdot7}{2\cdot8\cdot4\cdot10}n^4+\frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{2\cdot8\cdot4\cdot10\cdot6\cdot12}n^6+\text{ и т. д.}\right),$$

$$E=\frac{1}{8}n^4\left(1+\frac{5\cdot6}{2\cdot10}n^2+\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot10\cdot4\cdot12}n^4+\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot10\cdot4\cdot12\cdot6\cdot14}n^6+\text{ и т. д.}\right),$$

$$F=\frac{1}{16}n^5\left(1+\frac{6\cdot7}{2\cdot12}n^2+\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9}{2\cdot12\cdot4\cdot14}n^4+\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11}{2\cdot12\cdot4\cdot14\cdot6\cdot16}n^6+\text{ и т. д.}\right)$$

и т. д.

ПОЯСНЕНИЕ

278. При этих значениях имеем:

$$\int\frac{d\varphi}{1+n\cos\varphi}=A\varphi-B\sin\varphi+\frac{1}{2}C\sin2\varphi-\frac{1}{3}D\sin3\varphi+\frac{1}{4}E\sin4\varphi-\text{ и т. д.},$$

в этом ряде нужно прежде всего обратить внимание на первый член $A\varphi$, который с возрастанием угла φ должен непрерывно возрастать и притом до бесконечности, тогда как остальные члены будут то возрастать, то убывать. Однако они не переходят определенной границы, так как $\sin\lambda\varphi$ не может ни возрастать выше, чем $+1$, ни убывать ниже, чем -1. Далее, так как этот интеграл — он был найден выше[1]) — равен

$$\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\arccos\frac{n+\cos\varphi}{1+n\cos\varphi},$$

[1]) § 261, случай $a>b$.

то указанный ряд равен этому углу. Поэтому, если назвать этот угол ω $\left(\text{так что } d\omega = \frac{d\varphi\sqrt{1-n^2}}{1+n\cos\varphi}\right)$, то

$$\cos\omega = \frac{n+\cos\varphi}{1+n\cos\varphi},$$

а следовательно, $n+\cos\varphi-\cos\omega-n\cos\varphi\cos\omega=0$, откуда обратно

$$\cos\varphi = \frac{\cos\omega-n}{1-n\cos\omega}.$$

Так как это выражение получается из предыдущего, если взять n отрицательным, то

$$d\varphi = \frac{d\omega\sqrt{1-n^2}}{1-n\cos\omega}$$

и

$$\frac{\varphi}{\sqrt{1-n^2}} = A\omega + B\sin\omega + \frac{1}{2}C\sin 2\omega + \frac{1}{3}D\sin 3\omega + \frac{1}{4}E\sin 4\omega + \text{ и т. д.}$$

Но так как

$$\frac{\omega}{\sqrt{1-n^2}} = A\varphi - B\sin\varphi + \frac{1}{2}C\sin 2\varphi - \frac{1}{3}D\sin 3\varphi + \frac{1}{4}E\sin 4\varphi - \text{ и т. д.}$$

и $\frac{1}{\sqrt{1-n^2}} = A$, то имеем:

$$0 = B(\sin\omega - \sin\varphi) + \frac{1}{2}C(\sin 2\omega + \sin 2\varphi) + \frac{1}{3}D(\sin 3\omega - \sin 3\varphi) + \text{ и т. д.}$$

Будет полезно заметить себе эти соотношения.

ЗАДАЧА 33

279. *Представить интеграл выражения* $d\varphi(1+n\cos\varphi)^\nu$ *в виде ряда, расположенного по синусам углов, кратных углу* φ.

РЕШЕНИЕ

Так как

$$(1+n\cos\varphi)^\nu = 1 + \frac{\nu}{1}n\cos\varphi + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}n^2\cos^2\varphi + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}n^3\cos^3\varphi + \text{ и т. д.},$$

то, положив

$$(1+n\cos\varphi)^\nu = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{ и т. д.},$$

получим с помощью формул, указанных выше[1]):

$$A = 1 + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2}n^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}n^4 + \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-5)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 6}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}n^6 + \text{ и т. д.},$$

$$B = 2n\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}n^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}n^4 + \text{ и т. д.}\right).$$

[1]) Формул § 272, выражающих степени косинуса через косинусы кратных дуг.

Эти ряды можно представить яснее таким образом:

$$A = 1 + \frac{\nu(\nu-1)}{2\cdot 2} n^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4} n^4 + \frac{\nu(\nu-1)\ \ldots\ (\nu-5)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6} n^6 + \text{ и т. д.},$$

$$\frac{1}{2} B = \frac{\nu}{2} n + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2\cdot 2\cdot 4} n^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6} n^5 + \text{ и т. д.},$$

а после того как найдены эти два коэффициента A и B, будет более удобным, исходя из них, следующим образом определить остальные коэффициенты. Так как

$$\nu l(1+n\cos\varphi) = l(A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{ и т. д.}),$$

то если возьмем дифференциалы и разделим на $-d\varphi$, получим:

$$\frac{\nu n\sin\varphi}{1+n\cos\varphi} = \frac{B\sin\varphi + 2C\sin 2\varphi + 3D\sin 3\varphi + 4E\sin 4\varphi + \text{ и т. д.}}{A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{ и т. д.}}.$$

Теперь перемножим крест-накрест и в силу формул

$$\sin\lambda\varphi\ \cos\varphi = \frac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi + \frac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi$$

и

$$\sin\varphi\cos\lambda\varphi = \frac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi - \frac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi$$

придем к такому уравнению:

$$\begin{array}{lccccc}
0 = & B\sin\varphi + & 2C\sin 2\varphi + & 3D\sin 3\varphi + & 4E\sin 4\varphi + & 5F\sin 5\varphi + \text{ и т. д.} \\
 & & +\frac{1}{2}Bn & +\frac{2}{2}Cn & +\frac{3}{2}Dn & +\frac{4}{2}En \\
 & +\frac{2}{2}Cn & +\frac{3}{2}Dn & +\frac{4}{2}En & +\frac{5}{2}Fn & +\frac{6}{2}Gn \\
 & -\nu An & -\frac{\nu}{2}Bn & -\frac{\nu}{2}Cn & -\frac{\nu}{2}Dn & -\frac{\nu}{2}En \\
 & +\frac{\nu}{2}Cn & +\frac{\nu}{2}Dn & +\frac{\nu}{2}En & +\frac{\nu}{2}Fn & +\frac{\nu}{2}Gn.
\end{array}$$

Из этого уравнения получаются такие определения:

$$\begin{array}{l|l}
(\nu+2)Cn + 2B - 2\nu An = 0 & C = \dfrac{2\nu An - 2B}{(\nu+2)n} \\
(\nu+3)Dn + 4C - (\nu-1)Bn = 0 & D = \dfrac{(\nu-1)Bn - 4C}{(\nu+3)n} \\
(\nu+4)En + 6D - (\nu-2)Cn = 0 & E = \dfrac{(\nu-2)Cn - 6D}{(\nu+4)n} \\
(\nu+5)Fn + 8E - (\nu-3)Dn = 0 & F = \dfrac{(\nu-3)Dn - 8E}{(\nu+5)n} \\
(\nu+6)Gn + 10F - (\nu-4)En = 0 & G = \dfrac{(\nu-4)En - 10F}{(\nu+6)n}
\end{array}$$

Подставив сюда полученные выше значения для A и B, найдем:

$$C=4n^2\left(\frac{1\nu(\nu-1)}{2\cdot2\cdot4}+\frac{2\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6}n^2+\frac{3\nu(\nu-1)\ldots(\nu-5)}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}n^4+\text{и т. д.}\right),$$

$$D=8n^3\left(\frac{1\cdot2\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6}+\frac{2\cdot3\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}n^2+\text{ и т. д.}\right),$$

$$E=16n^4\left(\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}+\frac{2\cdot3\cdot4\nu(\nu-1)\ldots(\nu-5)}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10}n^2+\text{ и т. д.}\right)$$

и т. д.,

откуда можно сделать заключение о виде последующих рядов.

По нахождении этих коэффициентов получим искомый интеграл

$$\int d\varphi\,(1+n\cos\varphi)^\nu=A\varphi+B\sin\varphi+\frac{1}{2}C\sin2\varphi+\frac{1}{3}D\sin3\varphi+\frac{1}{4}E\sin4\varphi+\text{и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 1

280. Для сходства с этими рядами, дающими C, D, E и т. д., можно таким же образом выразить и значение B:

$$B=2n\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2\cdot2\cdot4}n^2+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6}n^4+\text{ и т. д.}\right).$$

Однако ряд, найденный для A, имеет особый вид, не подчиняющийся этому закону.

СЛЕДСТВИЕ 2

281. Если сравнивать между собой ряды для A и B, то между ними можно заметить различные соотношения. Из их числа прежде всего обращает на себя внимание следующее:

$$An+\frac{1}{2}B=\frac{\nu+2}{2}n\left\{\begin{aligned}&1+\frac{\nu(\nu-1)}{2\cdot4}n^2+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot4\cdot4\cdot6}n^4\\&+\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-5)}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}n^6+\text{ и т. д.}\end{aligned}\right\}.$$

Оно отличается от ряда для A только знаменателями.

СЛЕДСТВИЕ 3

282. Положим $\dfrac{2An^2+Bn}{\nu+2}=N$, так что

$$N=n^2+\frac{\nu(\nu-1)}{2\cdot4}n^4+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot4\cdot4\cdot6}n^6+\text{ и т. д.},$$

$$A=1+\frac{\nu(\nu-1)}{2\cdot2}n^2+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot2\cdot4\cdot4}n^4+\text{ и т. д.}$$

Если теперь мы будем рассматривать n как переменную, то дифференцирование даст

$$\frac{N}{ndn}=2+\frac{\nu(\nu-1)}{2}n^2+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot4\cdot4}n^4+\text{ и т. д.}=2A.$$

Но так как
$$dN = \frac{4An\,dn + B\,dn + 2n^2\,dA + n\,dB}{+2} = 2An\,dn,$$
то
$$2\nu An\,dn = 2n^2\,dA + B\,dn + n\,dB.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

283. Следовательно, по данному коэффициенту A можно найти при помощи интегрирования коэффициент B таким образом:
$$Bn = 2\int(\nu An\,dn - n^2 d\,A)$$
или же (из этой последней формулы)
$$B = \frac{2(\nu+2)}{n}\int An\,dn - 2An\ ^{1)}.$$

При этом надо заметить, что интеграл $\int An\,dn$ должен исчезать при $n=0$, так как в этом случае исчезает B.

ПОЯСНЕНИЕ

284. Ряды, найденные для букв B, C, D и т. д., можно выразить при помощи непрерывно добавляемых множителей [2]) также и следующим образом:
$$B = \nu n\left(1 + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2\cdot4}n^2 + \frac{(\nu-3)(\nu-4)}{4\cdot6}Pn^2 + \frac{(\nu-5)(\nu-6)}{6\cdot8}Pn^2 + \text{и т. д.}\right),$$
$$C = \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot6}n^2 + \frac{(\nu-4)(\nu-5)}{4\cdot8}Pn^2 + \frac{(\nu-6)(\nu-7)}{6\cdot10}Pn^2 + \text{и т. д.}\right),$$
$$D = \frac{\nu\ldots(\nu-2)}{1\ldots3}\cdot\frac{n^3}{4}\left(1 + \frac{(\nu-3)(\nu-4)}{2\cdot8}n^2 + \frac{(\nu-5)(\nu-6)}{4\cdot10}Pn^2 + \frac{(\nu-7)(\nu-8)}{6\cdot12}Pn^2 + \text{и т. д.}\right),$$
$$E = \frac{\nu\ldots(\nu-3)}{1\ldots4}\cdot\frac{n^4}{8}\left(1 + \frac{(\nu-4)(\nu-5)}{2\cdot10}n^2 + \frac{(\nu-6)(\nu-7)}{4\cdot12}Pn^2 + \frac{(\nu-8)(\nu-9)}{6\cdot14}Pn^2 + \text{и т. д.}\right),$$
$$F = \frac{\nu\ldots(\nu-4)}{1\ldots5}\cdot\frac{n^5}{16}\left(1 + \frac{(\nu-5)(\nu-6)}{2\cdot12}n^2 + \frac{(\nu-7)(\nu-8)}{4\cdot14}Pn^2 + \frac{(\nu-9)(\nu-10)}{6\cdot16}Pn^2 + \text{и т. д.}\right),$$

причем в каждом из этих рядов буква P обозначает взятый целиком предыдущий член. При помощи этих рядов коэффициенты часто находятся легче, чем на основании правила, данного выше, в котором каждый член определяется по двум предыдущим, притом же упомянутое правило страдает тем недостатком, что если ν есть целое отрицательное число (кроме -1), то некоторые коэффициенты вовсе нельзя

---

[1]) Член $-n^2\,dA$ интегрируется по частям.

[2]) Per continuos factores; дословно: «через непрерывные множители». Смысл: каждый член ряда представляется в виде произведения предыдущего члена на соответствующий дополнительный множитель.

определить и их надо взять из данных здесь рядов. Так, если

$$\nu = -2, \text{ то } B = \nu A n = -2An \text{ и}$$

$$C = \frac{3}{1} \cdot \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 6} n^2 + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8} n^4 + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 10} n^6 + \text{ и т. д.}\right)$$

если $\nu = -3$, то $C = -Bn$ и

$$D = -\frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n^3}{4}\left(1 + \frac{6 \cdot 7}{2 \cdot 8} n^2 + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 10} n^4 + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 12} n^6 + \text{ и т. д.}\right);$$

если $\nu = -4$, то $D = -Cn$ и

$$E = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n^4}{8}\left(1 + \frac{8 \cdot 9}{2 \cdot 10} n^2 + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 12} n^4 + \frac{8 \cdot 9 . 10 . 11 \cdot 12 \cdot 13}{2 \cdot 10 . 4 \cdot 12 \cdot 6 . 14} n^6 + \text{ и т. д.}\right);$$

если $\nu = -5$, то $E = -Dn$ и

$$F = -\frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{n^5}{16}\left(1 + \frac{10 \cdot 11}{2 \cdot 12} n^2 \right.$$
$$\left. + \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 14} n^4 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 16} n^6 + \text{ и т. д.}\right)$$

и таким же образом для остальных.

ПРИМЕР 1

285. *Разложить в ряд интеграл выражения* $d\varphi(1 + n\cos\varphi)^\nu$, *если* ν — *целое положительное число.*

Полагая

$$(1 + n\cos\varphi)^\nu = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{ и т. д.},$$

будем иметь для отдельных значений показателя ν:

1) если $\nu = 1$: $A = 1$, $B = n$, $C = 0$ и т. д.;

2) если $\nu = 2$: $A = 1 + \frac{1}{2} n^2$, $B = 2n$, $C = \frac{1}{2} n^2$, $D = 0$ и т. д.;

3) если $\nu = 3$: $A = 1 + \frac{3}{2} n^2$, $B = 3n\left(1 + \frac{1}{4} n^2\right)$, $C = \frac{3}{2} n^2$, $D = \frac{1}{4} n^3$, $E = 0$ и т. д.;

4) если $\nu = 4$: $A = 1 + \frac{6}{2} n^2 + \frac{3}{8} n^4$, $B = 4n\left(1 + \frac{3}{4} n^2\right)$, $C = 3n^2\left(1 + \frac{1}{6} n^2\right)$, $D = n^3$, $E = \frac{1}{8} n^4$, $F = 0$ и т. д.

Эти случаи не представляют никакого затруднения. Для последующего употребления полезно будет заметить лишь первый (свободный) член A:

при $\nu = 1$ $\quad A = 1$,

при $\nu = 2$ $\quad A = 1 + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} n^2$,

при $\nu = 3$ $\quad A = 1 + \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} n^2$,

при $\nu = 4$ $\quad A = 1 + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 2} n^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} n^4$,

при $\nu = 5$ $\quad A = 1 + \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 2} n^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} n^4$,

при $\nu = 6$ $\quad A = 1 + \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 2} n^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} n^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} n^6$,

при $\nu = 7$ $\quad A = 1 + \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 2} n^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} n^4 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} n^6$

и т. д.

ПРИМЕР 2

286. *Разложить в ряд интеграл выражения* $\dfrac{d\varphi}{(1+n\cos\varphi)^{\mu}}$.

Полагая

$$\frac{1}{(1+n\cos\varphi)^{\mu}}=A+B\cos\varphi+C\cos 2\varphi+D\cos 3\varphi+E\cos 4\varphi\ +\text{ и т. д.},$$

получим из предыдущих формул, подставив $\nu=-\mu$:

$$A=1+\frac{\mu(\mu+1)}{2\cdot 2}n^2+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}n^4+\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+5)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}n^6+\text{ и т. д.},$$

$$B=-\mu n\left(1+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2\cdot 4}n^2+\frac{(\mu+3)(\mu+4)}{4\cdot 6}Pn^2+\frac{(\mu+5)(\mu+6)}{6\cdot 8}Pn^2+\text{ и т. д.}\right),$$

$$C=\frac{\mu(\mu+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n^2}{2}\left(1+\frac{(\mu+2)(\mu+3)}{2\cdot 6}n^2+\frac{(\mu+4)(\mu+5)}{4\cdot 8}Pn^2\right.$$
$$\left.+\frac{(\mu+6)(\mu+7)}{6\cdot 10}Pn^2\ +\text{ и т. д.}\right),$$

$$D=-\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n^3}{4}\left(1+\frac{(\mu+3)(\mu+4)}{2\cdot 8}n^2+\frac{(\mu+5)(\mu+6)}{4\cdot 10}Pn^2\ +\text{ и т. д.}\right).$$

Здесь, как и раньше, в каждом из рядов P обозначает предыдущий член. Эти коэффициенты зависят друг от друга следующим образом:

$$B=\frac{-2(\mu-2)}{n}\int An\,dn-2An$$

и

$$C=\frac{2B+2\mu An}{(\mu-2)n},\qquad D=\frac{4C+(\mu+1)Bn}{(\mu-3)n},\qquad E=\frac{6D+(\mu+2)Cn}{(\mu-4)n},$$
$$F=\frac{8E+(\mu+3)Dn}{(\mu-5)n},\qquad G=\frac{10F+(\mu+4)En}{(\mu-6)n},\qquad H=\frac{12G+(\mu+5)Fn}{(\mu-7)n}$$

и т. д.

Средство избавиться от недостатка, получающегося, когда μ есть целое число, дано уже выше. Здесь же мы прежде всего займемся исследованием того, каким образом можно определить коэффициенты в каждом случае из предшествующего случая [1]). Это можно сделать так: так как мы имеем

$$\frac{1}{(1+n\cos\varphi)^{\mu}}=A+B\cos\varphi+C\cos 2\varphi+D\cos 3\varphi+\text{ и т. д.},$$

то положим

$$\frac{1}{(1+n\cos\varphi)^{\mu+1}}=A'+B'\cos\varphi+C'\cos 2\varphi+D'\cos 3\varphi\ +\text{ и т. д.}$$

При умножении этого ряда на $1+n\cos\varphi$ из него должен получиться первый ряд. Но это произведение равно

$$\begin{array}{llll} A'+B'\cos\varphi+ & C'\cos 2\varphi+ & D'\cos 3\varphi+ & \text{и т. д.}\\ & +A'n & +\frac{1}{2}B'n & +\frac{1}{2}C'n\\ +\frac{1}{2}B'n+\frac{1}{2}C' & +\frac{1}{2}D'n & +\frac{1}{2}D'n, & \end{array}$$

---

[1]) То есть каким образом коэффициенты A', B', C' разложения $\dfrac{1}{(1+n\cos\varphi)^{\mu+1}}=$ $=A'+B'\cos\varphi+C'\cos 2\varphi+\ldots$ можно выразить через коэффициенты разложения $\dfrac{1}{(1+n\cos\varphi)^{\mu}}$.

откуда заключаем, что

$$B' = \frac{2(A-A')}{n}, \qquad C' = \frac{2(B-B')-2A'n}{n},$$

$$D' = \frac{2(C-C')-B'n}{n}, \qquad E' = \frac{2(D-D')-C'n}{n} \quad \text{и т. д.}$$

Стало быть, если бы только был известен коэффициент A', мы получили бы и следующие коэффициенты B', C', D' и т. д. Посмотрим же, каким образом можно определить A' по A. Имея

$$A = 1 + \frac{\mu(\mu+1)}{2\cdot 2} n^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4} n^4 + \text{и т. д.},$$

$$A' = 1 + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2\cdot 2} n^2 + \frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4} n^4 + \text{и т. д.},$$

будем рассматривать n как переменную величину и, помножив первый ряд на n^μ, будем его дифференцировать, так что получится:

$$\frac{d(An^\mu)}{dn} = \mu n^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{2\cdot 2} n^{\mu+1} + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4} n^{\mu+3} + \text{ и т. д.}$$

Этот ряд, очевидно, равен $\mu n^{\mu-1}A'$; поэтому A' определяется через A следующим образом:

$$A' = \frac{d(An^\mu)}{d(n^\mu)} = A + \frac{ndA}{\mu dn}.$$

Но так как для случая $\mu = 1$ мы найдем[1]) $A = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$, то, поскольку

$$\frac{dA}{dn} = \frac{n}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

будем иметь:

$$A' = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{n^2}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Это уже есть значение A при $\mu = 2$. Так как [теперь]

$$\frac{dA}{dn} = \frac{3n}{(1-n^2)^{\frac{5}{2}}},$$

то для $\mu = 3$ получим:

$$A = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3n^2}{2(1-n^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1+\frac{1}{2}n^2}{(1-n^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

[1]) Из разложения A в ряд по степеням n.

Если мы будем и далее продвигаться вперед таким же образом, то найдем:

$$\text{при } \mu=1 \quad A=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}},$$

$$\text{при } \mu=2 \quad A=\frac{1}{(1-n^2)\sqrt{1-n^2}},$$

$$\text{при } \mu=3 \quad A=\frac{1+\frac{1}{2}n^2}{(1-n^2)^2\sqrt{1-n^2}},$$

$$\text{при } \mu=4 \quad A=\frac{1+\frac{3}{2}n^2}{(1-n^2)^3\sqrt{1-n^2}},$$

$$\text{при } \mu=5 \quad A=\frac{1+3n^2+\frac{3}{8}n^4}{(1-n^2)^4\sqrt{1-n^2}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

287. Таким же образом можно определить и остальные коэффициенты B', C' и т. д. по соответствующим им B, C и т. д.; все эти соотношения будут подобны друг другу, т. е. подобно тому как

$$A'=\frac{d(An^\mu)}{d(n^\mu)}=A+\frac{ndA}{\mu dn},$$

также будет и

$$B'=\frac{d(Bn^\mu)}{d(n^\mu)}=B+\frac{ndB}{\mu dn}, \quad C'=\frac{d(Cn^\mu)}{d(n^\mu)}=C+\frac{ndC}{\mu dn} \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

288. Но выше мы нашли, что $B'=\frac{2(A-A')}{n}$, откуда

$$B'=-\frac{2dA}{\mu dn}=B+\frac{ndB}{\mu dn},$$

а отсюда

$$\mu Bdn+ndB+2dA=0.$$

Помножим [это уравнение] на $n^{\mu-1}$; получится:

$$d(Bn^\mu)+2n^{\mu-1}dA=0,$$

откуда, интегрируя,

$$Bn^\mu=-2\int n^{\mu-1}dA=-2n^{\mu-1}A+2(\mu-1)\int An^{\mu-2}dn,$$

и поэтому

$$B=-\frac{2A}{n}+\frac{2(\mu-1)}{n^\mu}\int An^{\mu-2}dn,$$

а выше [§ 286] мы имели

$$B=-2An-\frac{2(\mu-2)}{n}\int An\,dn.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

289. Приравняв эти значения, мы получим уравнение между A и n, из которого количество A определяется через n; в самом деле, будем иметь:

$$n^{-\mu}\int n^{\mu-1}\,dA = An + \frac{\mu-2}{n}\int An\,dn,$$

откуда после двукратного дифференцирования получается:

$$(1-n^2)\,d^2A + \frac{dn\,dA}{n} - 2(\mu+1)\,n\,dn\,dA - \mu(\mu+1)\,A\,dn^2 = 0.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

290. Если мы сравним эти [§ 286] значения A с полученными выше [§ 285], где μ было целым отрицательным числом, то мы обнаружим замечательное соответствие.

В прежних выражениях	В этих выражениях
при $\nu=0$ $\quad A=1$	при $\mu=1$ $\quad A=\dfrac{1}{\sqrt{1-n^2}}$
$\nu=1$ $\quad A=1$	$\mu=2$ $\quad A=\dfrac{1}{(1-n^2)\sqrt{1-n^2}}$
$\nu=2$ $\quad A=1+\frac{1}{2}n^2$	$\mu=3$ $\quad A=\dfrac{1+\frac{1}{2}n^2}{(1-n^2)^2\sqrt{1-n^2}}$
$\nu=3$ $\quad A=1+\frac{3}{2}n^2$	$\mu=4$ $\quad A=\dfrac{1+\frac{3}{2}n^2}{(1-n^2)^3\sqrt{1-n^2}}$
$\nu=4$ $\quad A=1+3n^2+\frac{3}{8}n^4$	$\mu=5$ $\quad A=\dfrac{1+3n^2+\frac{3}{8}n^4}{(1-n^2)^4\sqrt{1-n^2}}$

и т. д.

Отсюда заключаем, что если

$$(1+n\cos\varphi)^{\nu} = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + \text{ и т. д.}$$

и

$$(1+n\cos\varphi)^{-\nu-1} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos\varphi + \mathfrak{C}\cos 2\varphi + \text{ и т. д.},$$

то

$$\mathfrak{A} = \frac{A}{(1-n^2)^{\nu}\sqrt{1-n^2}}.$$

Так как для случаев, когда ν — целое положительное число, значение A определить нетрудно, то его также легко найти и для случаев, когда ν отрицательно.

ПОЯСНЕНИЕ 2

291. Для случая $\mu=1$ значения каждой из букв A, B, C, D и т. д. уже найдены выше [§ 276], а именно (для краткости полагаем $\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}=m$):

$$A=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}},\quad B=\frac{2m}{\sqrt{1-n^2}},\quad C=\frac{2m^2}{\sqrt{1-n^2}},\quad D=\frac{2m^3}{\sqrt{1-n^2}}$$

и вообще для любого члена

$$N = \frac{2m^\lambda}{\sqrt{1-n^2}}.$$

Поэтому если для подобного же члена в случае $\mu = 2$ мы напишем N', то будем иметь:

$$N' = \frac{d(Nn)}{dn}.$$

Но

$$\frac{d(Nn)}{dn} = \frac{2m^\lambda}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\lambda n m^{\lambda-1}\,dm}{dn\sqrt{1-n^2}},$$

причем

$$\frac{dm}{dn} = \frac{m}{n\sqrt{1-n^2}},$$

откуда заключаем, что

$$N' = \frac{2m^\lambda}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\lambda m^\lambda}{1-n^2} = \frac{2m^\lambda\left(1+\lambda\sqrt{1-n^2}\right)}{(1-n^2)\sqrt{1-n^2}}.$$

Поэтому, если мы положим

$$\frac{1}{(1+n\cos\varphi)^2} = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{ и т. д.},$$

то будем иметь:

$$A = \frac{1}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad B = \frac{2m\left(1+\sqrt{1-n^2}\right)}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad C = \frac{2m^2\left(1+2\sqrt{1-n^2}\right)}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$D = \frac{2m^3\left(1+3\sqrt{1-n^2}\right)}{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ и т. д.}$$

Если же показатель μ будет дробным числом [1]), то коэффициенты A, B, C, D, E и т. д., повидимому, нельзя определить иначе, чем посредством рядов, данных выше. Значение же первого коэффициента A можно определить с любой точностью [2]) особым способом, как мы показываем в следующей задаче.

ЗАДАЧА 34

292. *Для разложения выражения* $(1+n\cos\varphi)^\nu$ *в ряд вида*

$$A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + E\cos 4\varphi + \text{ и т. д.}$$

определить свободный член A *с любой точностью.*

РЕШЕНИЕ

Так как необходимо, чтобы было $n < 1$ [3]), то найденный выше [§ 279] ряд для A сходится; однако, если n мало отличается от единицы, придется на деле взять в разложении весьма много членов, прежде чем

---

[1]) Для целых значений μ коэффициенты получаются по методу настоящего параграфа с помощью перехода от μ к $\mu+1$.

[2]) vero proxime.

[3]) См. § 273.

значение A получится с достаточной точностью, в особенности в том случае, если ν будет сколько-нибудь большим числом, положительным или отрицательным. Но, если написать разложение в ряд выражения

$$(1+n\cos\varphi)^{-\nu-1}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi+\mathfrak{C}\cos 2\varphi+\text{ и т. д.},$$

то, поскольку зависимость A от члена $\mathfrak{A}$ выражается в виде[1] $A=(1-n^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\mathfrak{A}$, мы будем иметь для нахождения этого члена A два ряда:

$$A=1+\frac{\nu(\nu-1)}{2\cdot 2}n^2+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}n^4+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}n^6+\text{ и т. д.},$$

$$A=(1-n^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\left\{\begin{aligned}&1+\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2\cdot 2}n^2+\frac{(n+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}n^4\\&+\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+5)(\nu+6)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}n^6+\text{ и т. д.}\end{aligned}\right\}.$$

В каждом отдельном случае можно применять тот из этих рядов, который лучше сходится. Однако же поскольку остальные коэффициенты B, C, D, E и т. д. должны в конце концов сходиться[2]), это открывает другой путь для приближения к значению A. Действительно, так как эти коэффициенты определяются попеременно через четные и нечетные степени n, то, взяв любой угол α, будем иметь:

$$(1+n\cos\alpha)^\nu=A+B\cos\alpha+C\cos 2\alpha+D\cos 3\alpha+E\cos 4\alpha+\text{ и т. д.}$$

и

$$(1-n\cos\alpha)^\nu=A-B\cos\alpha+C\cos 2\alpha-D\cos 3\alpha+E\cos 4\alpha\text{ и т. д.}$$

Сложив эти ряды, получим:

$$\frac{1}{2}(1+n\cos\alpha)^\nu+\frac{1}{2}(1-n\cos\alpha)^\nu=A+C\cos 2\alpha+E\cos 4\alpha+G\cos 6\alpha+\text{ и т. д.};$$

если мы вместо α напишем здесь $90^\circ-\alpha$, то получим:

$$\frac{1}{2}(1+n\sin\alpha)^\nu+\frac{1}{2}(1-n\sin\alpha)^\nu=A-C\cos 2\alpha+E\cos 4\alpha-G\cos 6\alpha\text{ и т. д.};$$

поэтому, если сложить эти равенства, снова уничтожается половина членов. Образуем несколько выражений такого рода[3]) и для краткости положим:

$$\frac{1}{4}(1+n\cos\alpha)^\nu+\frac{1}{4}(1-n\cos\alpha)^\nu+\frac{1}{4}(1+n\sin\alpha)^\nu+\frac{1}{4}(1-n\sin\alpha)^\nu=\mathfrak{A},$$

$$\frac{1}{4}(1+n\cos\beta)^\nu+\frac{1}{4}(1-n\cos\beta)^\nu+\frac{1}{4}(1+n\sin\beta)^\nu+\frac{1}{4}(1-n\sin\beta)^\nu=\mathfrak{B},$$

$$\frac{1}{4}(1+n\cos\gamma)^\nu+\frac{1}{4}(1-n\cos\gamma)^\nu+\frac{1}{4}(1+n\sin\gamma)^\nu+\frac{1}{4}(1-n\sin\gamma)^\nu=\mathfrak{C}$$

и т. д.

---

[1]) См. § 290.

[2]) Эйлер утверждает здесь, что последовательность $B, C, D, E,\ldots$ (при данных значениях n и ν) должна иметь пределом нуль.

[3]) Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — некоторые значения переменной α, пока неопределенные; в дальнейшем они фиксируются различным образом.

Вместо коэффициентов B, C, D, E и т. д. будем писать соответственно (1), (2), (3), (4) и т. д. для того, чтобы легче было представить члены, сколь угодно удаленные от начала. Итак, мы будем иметь:

$$\mathfrak{A} = A + (4)\cos 4\alpha + (8)\cos 8\alpha + (12)\cos 12\alpha + \text{ и т. д.},$$
$$\mathfrak{B} = A + (4)\cos 4\beta + (8)\cos 8\beta + (12)\cos 12\beta + \text{ и т. д.},$$
$$\mathfrak{C} = A + (4)\cos 4\gamma + (8)\cos 8\gamma + (12)\cos 12\gamma + \text{ и т. д.}$$

и т. д.,

а отсюда мы получаем следующие приближения[1]).

I. Если возьмем $4\alpha = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha = \frac{\pi}{8}$, то получим:

$$\mathfrak{A} = A - (8) + (16) - (24) + \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$A = \mathfrak{A} + (8) - (16) + (24) - \text{ и т. д.}$$

Поэтому, если можно пренебречь членом (8) и последующими ввиду их малости, то с достаточной точностью будем иметь $A = \mathfrak{A}$.

II. Возьмем два ряда и положим $4\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $4\beta = \frac{3\pi}{4}$, так что $\alpha = \frac{\pi}{16}$, $\beta = \frac{3\pi}{16}$. Тогда

$$\cos 4\alpha + \cos 4\beta = 0,\ \cos 8\alpha + \cos 8\beta = 0,\ \cos 12\alpha + \cos 12\beta = 0$$

и

$$\cos 16\alpha + \cos 16\beta = -2,$$

откуда[2]) следует, что

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 2A - 2\,(16) + 2\,(32) - 2\,(48) \text{ и т. д.}$$

и поэтому

$$A = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + (16) - (32) + \text{ и т. д.},$$

где числа (16), (32) по большей части будут столь малы, что ими можно пренебречь.

III. Сложим три ряда и положим $4\alpha = \frac{\pi}{6}$, $4\beta = \frac{3\pi}{6}$, $4\gamma = \frac{5\pi}{6}$, так что $\alpha = \frac{\pi}{24}$, $\beta = \frac{\pi}{8}$, $\gamma = \frac{5\pi}{24}$; тогда будем иметь:

$$\cos 4\alpha + \cos 4\beta + \cos 4\gamma = 0, \quad \cos 16\alpha + \cos 16\beta + \cos 16\gamma = 0,$$
$$\cos 8\alpha + \cos 8\beta + \cos 8\gamma = 0, \quad \cos 20\alpha + \cos 20\beta + \cos 20\gamma = 0,$$
$$\cos 12\alpha + \cos 12\beta + \cos 12\gamma = 0, \quad \cos 24\alpha + \cos 24\beta + \cos 24\gamma = -3,$$

откуда заключаем, что

$$A = \frac{1}{3}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) + (24) - (48) + \text{ и т. д.}$$

---

[1]) Для постоянного члена A.

[2]) Имеется в виду, что $\cos 20\alpha + \cos 20\beta = \cos 24\alpha + \cos 24\beta = \cos 28\alpha + \cos 28\beta = 0$, $\cos 32\alpha + \cos 32\beta = 2$ и т. д.

IV. Если это определение представляется недостаточно точным, тогда сложим четыре такого рода выражения $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$; пусть при этом $4\beta=\frac{3\pi}{8}$, $4\gamma=\frac{5\pi}{8}$, $4\delta=\frac{7\pi}{8}$; тогда найдем, что

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}=4A-4\,(32)+4\,(64)-\text{ и т. д.},$$

а следовательно, с гораздо лучшим приближением

$$A=\frac{1}{4}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D})\,.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

293. По найденному значению A нетрудно найти следующее за ним B, так как

$$B=\frac{2\,(\nu+2)}{n}\int An\;dn-2An.$$

Поскольку же в A входит член $(1\pm n\cos\alpha)^\nu$ или $(1+nf)^\nu$, где f включает в себя все указанные выше синусы и косинусы[1]), отсюда для B получаем:

$$\frac{2\,(\nu+2)}{n}\int ndn\,(1+nf)^\nu-2n\,(1+nf)^\nu=\frac{2-2\,(1-\nu nf)\,(1+nf)^\nu}{(\nu+1)\,nf^2}\,.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

294. Узнав коэффициенты A и B, по ним можно получить все следующие, как мы показали выше, а после того как они найдены, интегрирование выражения $d\varphi\,(1+n\cos\varphi)^\nu$ само собой очевидно.

ЗАДАЧА 35

295. *Разложить интеграл выражения* $d\varphi l\,(1+n\cos\varphi)$ *в ряд, расположенный по синусам углов* φ, 2φ, 3φ *и т. д.*

РЕШЕНИЕ

Так как

$$l\,(1+n\cos\varphi)=n\cos\varphi-\frac{1}{2}n^2\cos^2\varphi+\frac{1}{3}n^3\cos^3\varphi-\frac{1}{4}n^4\cos^4\varphi+\text{ и т. д.},$$

то, приведя эти степени косинусов к простым косинусам, получим:

$$l\,(1+n\cos\varphi)=n\cos\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n^2\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}n^3\cos 3\varphi-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}n^4\cos 4\varphi+\text{ и т. д.}$$

$$\begin{array}{llll}
-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n^2 & +\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}n^3 & -\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{8}n^4 & +\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{16}n^5\\
-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}n^4 & +\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{16}n^5 & -\frac{1}{6}\cdot\frac{15}{32}n^6 & \\
-\frac{1}{6}\cdot\frac{10}{32}n^6 & +\frac{1}{7}\cdot\frac{35}{64}n^7 & & \\
-\frac{1}{8}\cdot\frac{35}{128}n^8. & & &
\end{array}$$

---

[1]) То есть подставляя вместо f выражения вида $\pm n\cos\alpha$, $\pm n\sin\alpha$, будем получать (учетверенные) члены, входящие в приближение выражения для свободного члена A. Каждый из этих членов порождает соответствующий член приближению выражения для B.

Поэтому, полагая

$$l(1+n\cos\varphi)=-A+B\cos\varphi-C\cos 2\varphi+D\cos 3\varphi-\text{ и т. д.},$$

будем иметь:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{n^4}{4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{n^6}{6}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{n^8}{8}+\text{ и т. д.}$$

Рассматривая число n как переменное, получим:

$$\frac{ndA}{dn}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}n^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}n^6+\text{и т. д.}=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}-1.$$

Следовательно,

$$dA=\frac{dn}{n\sqrt{1-n^2}}-\frac{dn}{n},$$

откуда интегрированием получаем:

$$A=l\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}-ln+C=l\frac{2-2\sqrt{1-n^2}}{n^2}.$$

Действительно, [выбрав постоянную] таким образом, мы при исчезающем n имеем $A=l1=0$. Далее будем иметь:

$$\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}n+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{n^3}{3}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{n^5}{5}+\text{ и т. д.};$$

дифференцирование дает

$$\frac{n^2dB}{2dn}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}n^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}n^6+\text{ и т. д.}=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}-1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}dB=\frac{dn}{n^2\sqrt{1-n^2}}-\frac{dn}{n^2}$$

и, интегрируя,

$$\frac{1}{2}B=\frac{-\sqrt{1-n^2}}{n}+\frac{1}{n}+C=\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n},$$

где интеграл определен так, чтобы он исчезал при $n=0$.

Поэтому для двух первых членов имеем:

$$A=l\frac{2-2\sqrt{1-n^2}}{n^2}\quad\text{и}\quad B=\frac{2-2\sqrt{1-n^2}}{n},$$

так что $A=l\dfrac{B}{n}$. Для получения же остальных продифференцируем исходное равенство:

$$\frac{-nd\varphi\sin\varphi}{1+n\cos\varphi}=-Bd\varphi\sin\varphi+2Cd\varphi\sin 2\varphi-3Dd\varphi\sin 3\varphi+4Ed\varphi\sin 4\varphi-\text{ и т. д.},$$

или

$$0=\frac{n\sin\varphi}{1+n\cos\varphi}-B\sin\varphi+2C\sin 2\varphi-3D\sin 3\varphi+4E\sin 4\varphi-\text{ и т. д.}$$

Поэтому после умножения на $2+2n\cos\varphi$ получается:

$$\begin{array}{llllll}0=2n\sin\varphi & -2B\sin\varphi & +4C\sin 2\varphi & -6D\sin 3\varphi & +8E\sin 4\varphi & -\text{ и т. д.}\\ & -Bn & +2Cn & -3Dn & & \\ & +2Cn & -3Dn & +4En & -5Fn, & \end{array}$$

откуда

$$C=\frac{B-n}{n},\quad D=\frac{4C-Bn}{3n},\quad E=\frac{6D-2Cn}{4n},\quad F=\frac{8E-3Dn}{5n}.$$

Но так как $B=\dfrac{2-2\sqrt{1-n^2}}{n}$, то

$$C=\frac{2-n^2-2\sqrt{1-n^2}}{n^2}\quad \text{или}\quad C=\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^2,$$

и тогда

$$D=\frac{2}{3}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^3,\quad E=\frac{2}{4}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^4,\quad F=\frac{2}{5}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^5 \text{ и т. д.}$$

Поэтому, если мы для краткости положим $\dfrac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}=m$, то получится:

$$l(1+n\cos\varphi)=-l\frac{2m}{n}+\frac{2}{1}m\cos\varphi-\frac{2}{2}m^2\cos 2\varphi+\frac{2}{3}m^3\cos 3\varphi-\frac{2}{4}m^4\cos 4\varphi+$$

и т. д.,

а следовательно, искомый интеграл

$$\int d\varphi l(1+n\cos\varphi)=\text{Const}-\varphi l\frac{2m}{n}+\frac{21}{1}m\sin\varphi-\frac{2}{4}m^2\sin 2\varphi$$

$$+\frac{2}{9}m^3\sin 3\varphi-\frac{2}{16}m^4\sin 4\varphi+\frac{2}{25}m^5\sin 5\varphi-\text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 1

296. Положив $n=1$, будем иметь $m=1$ и

$$l(1+\cos\varphi)=-l2+\frac{2}{1}\cos\varphi-\frac{2}{2}\cos 2\varphi+\frac{2}{3}\cos 3\varphi-\frac{2}{4}\cos 4\varphi+\text{ и т. д.},$$

а также[1])

$$l(1-\cos\varphi)=-l2-\frac{2}{1}\cos\varphi-\frac{2}{2}\cos 2\varphi-\frac{2}{3}\cos 3\varphi-\frac{2}{4}\cos 4\varphi-\text{ и т. д.}$$

Но так как

$$1+\cos\varphi=2\cos^2\frac{1}{2}\varphi\quad \text{и}\quad 1-\cos\varphi=2\sin^2\frac{1}{2}\varphi,$$

то получим:

$$l\cos\frac{1}{2}\varphi=-l2+\cos\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\cos 3\varphi-\frac{1}{4}\cos 4\varphi+\text{ и т. д.}$$

и

$$l\sin\frac{1}{2}\varphi=-l2-\cos\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{1}{3}\cos 3\varphi-\frac{1}{4}\cos 4\varphi-\text{ и т. д.},$$

откуда

$$l\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi=-2\cos\varphi-\frac{2}{3}\cos 3\varphi-\frac{2}{5}\cos 5\varphi-\frac{2}{7}\cos 7\varphi-\text{ и т. д.}$$

---

[1]) $n=-1$, откуда $m=-1$.

ГЛАВА VII

ОБЩИЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ КАКИХ УГОДНО ИНТЕГРАЛОВ

ЗАДАЧА 36

297. *Отыскать с любой точностью*[1]) *значение какого угодно интегрального выражения* $y = \int X\,dx$.

РЕШЕНИЕ

Поскольку всякое интегральное выражение является само по себе неопределенным, его принято делать определенным всегда таким образом, чтобы интеграл $y = \int X\,dx$ получил данное значение, скажем b, если переменному x дать какое-либо определенное значение, скажем a. После того как интегрирование таким путем стало определенным, вопрос сводится к определению значения, которое будет иметь интеграл y, если переменному x дать какое-либо иное значение, отличное от a. Для этого сначала дадим переменному x значение, мало отличающееся от a, скажем $a+\alpha$, так что α — весьма малая величина. Так как функция X изменяется мало, напишем ли мы a или $a+\alpha$ вместо x, то мы можем считать ее как бы постоянной, а тогда интегралом дифференциального выражения $X\,dx$ будет $Xx + \mathrm{Const} = y$; но так как при $x = a$ должно получиться $y = b$, а значение X остается как бы неизменным, то будем иметь $Xa + \mathrm{Const} = b$, а поэтому $\mathrm{Const} = b - Xa$, откуда получаем $y = b + X(x-a)$. Поэтому если мы дадим переменному x значение $a+\alpha$, то получим соответствующее значение переменного y; пусть оно будет $= b+\beta$. Теперь, исходя из этого случая, мы сможем подобным же образом определить y, если переменному x будет дано другое значение, незначительно превосходящее $a+\alpha$; действительно, если вместо x подставить $a+\alpha$, то полученное отсюда значение X можно будет снова считать постоянным, откуда получим $y = b + \beta + X(x-a-\alpha)$. Эту операцию можно продолжать сколько угодно; чтобы ее смысл[2]) усматри-

[1]) vero proxime.

[2]) Cuius ratio quo melius perspiciatur. Вследствие многозначности слова ratio здесь возможны различные смысловые оттенки, например: «чтобы как можно лучше усмотреть закон этой операции».

вался как можно лучше, мы представим дело так:

при $x=a$ пусть $X=A$ и $y=b$,

при $x=a'$ пусть $X=A'$ и $y=b'=b+A(a'-a)$,

при $x=a''$ пусть $X=A''$ и $y=b''=b'+A'(a''-a')$,

при $x=a'''$ пусть $X=A'''$ и $y=b'''=b''+A''(a'''-a'')$

и т. д.,

где принимается, что последовательные значения a, a', a'', a''' и т. д. отличаются друг от друга на весьма малые разности. Действительно, мы будем иметь $b'=b+A(a'-a)$, ибо такой вид получит найденная выше формула $y=b+X(x-a)$; в самом деле, X становится равным A, так как x принимается равным a, а затем переменному x дается значение $=a'$, которому соответствует $y=b'$. Таким же образом будем иметь $b''=b'+A'(a''-a')$, затем $b'''=b''+A''(a'''-a'')$ и т. д., как мы положили выше. Стало быть, подставляя предшествующие значения, будем иметь:

$$b'=b+A(a'-a),$$

$$b''=b+A(a'-a)+A'(a''-a'),$$

$$b'''=b+A(a'-a)+A'(a''-a')+A''(a'''-a''),$$

$$b''''=b+A(a'-a)+A'(a''-a')+A''(a'''-a'')+A'''(a''''-a''')$$

и т. д.

Если x будет превышать a на какую угодно величину, возрастающий ряд a', a'', a''' и т. д. надо будет продолжить до x, и тогда последняя сумма даст значение количества y.

СЛЕДСТВИЕ 1

298. Пусть приращения, на которые возрастает x, положены равными между собой, а именно равными α, так что $a'=a+\alpha$, $a''=a+2\alpha$, $a'''=a+3\alpha$ и т. д.; пусть при подстановке этих значений вместо x функция X будет переходить в A', A'', A''' и т. д., причем последнее из значений a', a'', a''' и т. д., скажем $a+n\alpha$, будет равно x, а последнее из значений A', A'', A''' и т. д. будет равно X; тогда будем иметь:

$$y=b+\alpha(A+A'+A''+A'''+\ldots+X).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

299. Следовательно, значение интеграла y получается с помощью суммирования ряда A, A', A'', ..., X, члены которого образуются из выражения для X, если подставлять вместо x последовательно a, $a+\alpha$, $a+2\alpha$, ..., $a+n\alpha$. Действительно, сумма этого ряда, помноженная на разность α и прибавленная к b, дает то значение переменного y, которое соответствует значению $x=a+n\alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 3

300. Чем меньшими мы полагаем разности, на которые возрастает значение [переменного] x, тем точнее определяется таким путем значение y, если только вследствие этого члены ряда A, A', A'' и т. д. также изменяются на малые разности. Если же этого не происходит, то указанное определение будет крайне ненадежным.

СЛЕДСТВИЕ 4

301. Это приближенное вычисление, [исходя] из учения о рядах, можно истолковать так.

По указателям

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ldots,\ x$$

надо образовать ряд

$$A,\ A',\ A'',\ A''',\ \ldots,\ X,$$

общий член которого X задан дифференциальным выражением $dy = X\,dx$; пусть в этом ряде последнему члену предшествует член $'X$, отвечающий указателю $'x$. Теперь надо образовать новый ряд

$$A(a'-a),\quad A'(a''-a'),\quad A''(a'''-a''),\ldots,\ 'X(x-'x).$$

Если положить сумму этого ряда равной S, то интеграл приближенно будет

$$y=\int X\,dx=b+S.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

302. Интегрирование обычно определяется так. Говорят, что это есть суммирование всех значений дифференциального выражения $X\,dx$, если переменному x придавать последовательно все отличающиеся друг от друга на разность dx значения, начиная от некоторого данного значения вплоть до x; разность же эту нужно считать бесконечно малой. Таким образом, этот способ представления интегрирования подобен тому, согласно которому в геометрии линии мыслятся как совокупности бесчисленных точек. Подобно тому как это последнее представление, если его правильно выразить, может быть допущено, так можно допустить[1]) и приведенное объяснение интегрирования, когда на помощь ему призваны, как это нами здесь сделано, истинные начала, чтобы можно было отразить всякие нападки. Из изложенного же метода во всяком случае ясно, что интегрирование можно получить из суммирования с любой точностью; точно же его нельзя совершить иначе, как положив, что разности являются бесконечно малыми, т. е. нулями. Из этого источника возникли как наименование «интегрирование», которое называют также «суммированием», так и знак интеграла $\int$. Коль скоро суть дела выяснена, их вполне можно сохранить.

ПОЯСНЕНИЕ 2

303. Если бы на каждом из промежутков, на которые мы разделили переход[2]) от a к x, количества A, A', A'', A''' и т. д. действительно были постоянными, то мы нашли бы точное значение интеграла $\int X\,dx$. Стало быть, причина ошибки именно в том, что эти количества на каждом отдельном из этих промежутков не являются постоянными. Так, для первого промежутка, на котором переменное x возрастает в пределах

[1]) В оригинале употреблен глагол tolerare (стерпеть).

[2]) saltum — дословно «скачок».

от a до a'[1]), A есть значение количества X, соответствующее пределу a, но другому пределу a' соответствует A', так что поскольку A' не равно A, постольку вкрадывается ошибка. Так как в начале этого промежутка $X = A$, а в конце $X = A'$, то было бы более уместно принять некое среднее [значение] между A и A'; это будет принято во внимание в уточнении этого метода, которое будет изложено несколько ниже. Впрочем, полезно будет уже здесь заметить, что для любого из промежутков можно с равным правом брать как начальное, так и конечное значение, учитывая в то же время, что если при одном способе погрешность будет в сторону избытка, то при другом, по большей части, в сторону недостатка. В силу этого отсюда можно получить два выражения, из которых одно дает слишком большое значение для y, другое — слишком малое, так что оба эти значения будут представлять собой как бы границы истинного значения количества y. Сообразно тому, как мы представили дело в § 301, значение количества $y = \int X\,dx$ будет заключаться между следующими двумя границами:

$$b + A(a' - a) + A'(a'' - a') + A''(a''' - a'') + \ldots + {}'X(x - {}'x)$$

и

$$b + A'(a' - a) + A''(a'' - a') + A'''(a''' - a'') + \ldots + X(x - {}'x);$$

найдя эти границы, можно подойти ближе к истинному значению.

ПОЯСНЕНИЕ 3

304. Мы уже указали на то, что эти промежутки, через которые, как мы приняли, последовательно возрастает x, должно полагать весьма малыми, чтобы соответственные значения A, A', A'' и т. д. мало отличались друг от друга; исходя главным образом отсюда, и надо решать вопрос, надлежит ли брать эти промежутки $a' - a$, $a'' - a'$, $a''' - a''$ и т. д. равными или не равными между собой. Действительно, там, где при изменении x значение [количества] X изменяется лишь незначительно, можно спокойно брать бо́льшие промежутки для x, а там, где оказывается, что функция X сильно изменяется, когда [количеству] x сообщается незначительное изменение, следует брать очень малые промежутки. Так, например, если $X = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то очевидно, что когда x подходит очень близко к единице, сколь бы малым ни был взят промежуток, на который увеличивается x, функция X может подвергнуться чрезвычайно большому изменению, ибо, наконец, если взять $x = 1$, она возрастает даже до бесконечности. Значит, в этих случаях такой способ нахождения приближенного значения (по крайней мере, для того промежутка, на одном из краев которого X становится бесконечным) применять непозволительно. Однако это неудобство легко устранить либо преобразованием выражения к другому виду при помощи подходящей подстановки, либо применяя специально для этого промежутка особый способ интегрирования. Так, например, пусть предложено выражение $\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$. Для промежутка от $x = 1 - \omega$ до $x = 1$ нельзя найти интеграл изложенным способом; тогда полагаем $x = 1 - z$, и z окажется очень

[1]) a termino *a* ad *a'*; в математической литературе слово terminus имеет также значение: «член». Поэтому допустим и такой перевод: «от члена *a* до [члена] *a'*».

малой величиной, так как пределами для z будут 0 и ω; при этом получится выражение $\frac{dz\,(1-z)}{\sqrt{3z-3z^2+z^3}}=\frac{dz}{\sqrt{3z}}$[1]), интеграл которого $\frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{3}}$, [взятый] в этом промежутке, дает часть $\frac{2\sqrt{\omega}}{\sqrt{3}}$ искомого интеграла. Это ухищрение можно применять во всех случаях такого рода; что же касается самого метода, описанного выше, то его следует пояснить несколькими примерами.

ПРИМЕР 1

305. *Найти приближенно интеграл* $y=\int x^n\,dx$, *взятый так, чтобы он исчезал при* $x=0$.

В этом случае $a=0$ и $b=0$, а $X=x^n$. Теперь пусть значения переменного x возрастают от 0 на одну и ту же разность α, так что будут

$$\begin{array}{ll}\text{указатели} & 0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ 4\alpha,\ \ldots,\ x,\\ \text{ряд} & 0,\ \alpha^n,\ 2^n\alpha^n,\ 3^n\alpha^n,\ 4^n\alpha^n,\ \ldots,\ x^n,\end{array}$$

а предпоследний член есть $(x-\alpha)^n$; поэтому границы интеграла

$$y=\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

суть

$$\alpha\,(0+\alpha^n+2^n\alpha^n+3^n\alpha^n+\ \ldots\ +(x-\alpha)^n)$$

и

$$\alpha\,(\alpha^n+2^n\alpha^n+3^n\alpha^n+\ \ldots\ +x^n);$$

они будут тем теснее, чем меньше взятый промежуток α. Так, если $\alpha=1$, границы будут

$$0+1+2^n+3^n+4^n+\ \ldots\ +(x-1)^n$$

и

$$1+2^n+3^n+4^n+\ \ldots\ +x^n;$$

если взять $\alpha=\frac{1}{2}$, то границы будут

$$\frac{1}{2^{n+1}}(0+1+2^n+3^n+4^n+\ \ldots\ +(2x-1)^n)$$

и

$$\frac{1}{2^{n+1}}(1+2^n+3^n+4^n+\ \ldots\ +(2x^n));$$

вообще, если $\alpha=\frac{1}{m}$, то границы будут

$$\frac{1}{m^{n+1}}(0+1+2^n+3^n+4^n+\ \ldots\ +(mx-1)^n)$$

и

$$\frac{1}{m^{n+1}}(1+2^n+3^n+4^n+\ \ldots\ +(mx)^n);$$

вторая из них превышает первую на избыток $\frac{x^n}{m}$. Отсюда ясно, что если взять число m бесконечно большим, то обе границы дадут истинное значение интеграла.

---

[1]) Разумеется, это равенство приближенное.

СЛЕДСТВИЕ 1

306. Итак, сумма ряда $1+2^n+3^n+4^n+\ldots+(mx)^n$ тем бли подходит к $\frac{1}{n+1}(mx)^{n+1}$, чем большим будет взято число m. Поэто (если положить $mx=z$) сумма прогрессии

$$1+2^n+3^n+4^n+\ldots+z^n$$

тем ближе подходит к $\frac{1}{n+1}z^{n+1}$, чем большим будет число z.

СЛЕДСТВИЕ 2

307. Но из первой границы [§ 305], если положить $mx=z$, [виді что] то же количество $\frac{1}{n+1}z^{n+1}$ дает приближенно сумму следующє ряда:

$$0+1+2^n+3^n+4^n+\ldots+(z-1)^n,$$

откуда, взяв среднее значение, получим более точно

$$1+2^n+3^n+4^n+\ldots+(z-1)^n+\frac{1}{2}z^n=\frac{1}{n+1}z^{n+1}$$

или, прибавив к обеим частям $\frac{1}{2}z^n$, получим приближенно

$$1+2^n+3^n+4^n+\ldots+z^n=\frac{1}{n+1}z^{n+1}+\frac{1}{2}z^n;$$

это согласуется с тем, что нам известно об истинной сумме этой пр грессии [1]).

ПРИМЕР 2

308. *Найти приближенно интеграл* $\int\frac{dx}{x^n}$, *взятый так, чтобы* ‹ *исчезал при* $x=1$.

В этом случае $a=1$, а $b=0$; следовательно, если от a до x [2]) пол жить промежуток прогрессии равным α, то указателями будут

$$a,\ a+\alpha,\ a+2\alpha,\ a+3\alpha,\ \ldots,\ x,$$

а члены ряда

$$\frac{1}{a^n},\ \frac{1}{(a+\alpha)^n},\ \frac{1}{(a+2\alpha)^n},\ \frac{1}{(a+3\alpha)^n},\ \ldots,\ X,$$

где предпоследний член $\frac{1}{(x-\alpha)^n}='X$, а так как теперь наш интеграл ес

$$y=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}},$$

[1]) Формула для суммы степеней натуральных чисел, найденная впервые Якові Бернулли около 1685 г. (повидимому, путем неполной индукции), была доказаі Эйлером, исходя из установленной им общей формулы суммирования рядов («фо мула Эйлера—Маклорена»). Доказательство было впервые опубликовано в «Дифф ренциальном исчислении» (ч. II, § 134, стр. 296—297 русского перевода), изданно в 1755 г. Однако нет сомнения, что уже в начале 30-х годов Эйлер владел эти доказательством. См. подстрочное примечание к русскому переводу «Дифференциал ного исчисления» на стр. 289—290.

[2]) Intervallum progressionis; в других местах Эйлер пользуется и термино differentia progressionis (разность прогрессии); поэтому мы сохраняем в перевод слово «промежуток».

то это значение будет заключено между границами

$$\alpha\left(1+\frac{1}{(1+\alpha)^n}+\frac{1}{(1+2\alpha)^n}+\frac{1}{(1+3\alpha)^n}+\ldots+\frac{1}{(x-\alpha)^n}\right)$$

и

$$\alpha\left(\frac{1}{(1+\alpha)^n}+\frac{1}{(1+2\alpha)^n}+\frac{1}{(1+3\alpha)^n}+\ldots+\frac{1}{x^n}\right).$$

Если положить $\alpha=\frac{1}{m}$, то эти границы будут

$$m^{n-1}\left(\frac{1}{m^n}+\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\frac{1}{(m+3)^n}+\ldots+\frac{1}{(mx-1)^n}\right)$$

и

$$m^{n-1}\left(\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\frac{1}{(m+3)^n}+\frac{1}{(m+4)^n}+\ldots+\frac{1}{(mx)^n}\right).$$

Они тем ближе подходят к значению интеграла $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$, чем больше будет взятое число m. При этом надо заметить, что в случае $n=1$ интеграл будет $=lx$.

СЛЕДСТВИЕ 1

309. Если же мы положим $mx=m+z$, так что $x=\frac{m+z}{m}$, то получатся такие прогрессии:

$$m^{n-1}\left(\frac{1}{m^n}+\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\ldots+\frac{1}{(m+z-1)^n}\right)$$

и

$$m^{n-1}\left(\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\frac{1}{(m+3)^n}+\ldots+\frac{1}{(m+z)^n}\right);$$

сумма одной из них больше, а другой меньше, чем

$$\frac{1}{n-1}-\frac{m^{n-1}}{(n-1)(m+z)^{n-1}}=\frac{(m+z)^{n-1}-m^{n-1}}{(n-1)(m+z)^{n-1}},$$

в случае же $n=1$ это выражение переходит в $l\left(1+\frac{z}{m}\right)$.

СЛЕДСТВИЕ 2

310. Так как первая из этих прогрессий больше, чем вторая[1]), то будем иметь:

$$\frac{1}{m^n}+\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\ldots+\frac{1}{(m+z-1)^n}>\frac{(m+z)^{n-1}-m^{n-1}}{(n-1)\,m^{n-1}(m+z)^{n-1}},$$

$$\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\frac{1}{(m+3)^n}+\ldots+\frac{1}{(m+z)^n}<\frac{(m+z)^{n-1}-m^{n-1}}{(n-1)\,m^{n-1}(m+z)^{n-1}}.$$

Прибавим с обеих сторон здесь $\frac{1}{m^n}$, а там[2]) $\frac{1}{(m+z)^n}$, а затем возьмем

[1]) То есть каждый член первой суммы больше, чем соответствующий член второй суммы.

[2]) То есть в первом неравенстве.

среднее арифметическое; получим более точно

$$\frac{1}{m^n}+\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\frac{1}{(m+3)^n}+\ldots+\frac{1}{(m+z)^n}$$
$$=\frac{(2m+n-1)(m+z)^n-(2z+2m-n+1)m^n}{2(n-1)m^n(m+z)^n};$$

это выражение в случае $n=1$ переходит в

$$l\left(1+\frac{z}{m}\right)+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2(m+z)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

311. Положим $z=mv$; тогда будем иметь приближенное выражение суммы следующего ряда:

$$\frac{1}{m^n}+\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\ldots+\frac{1}{m^n(1+v)^n}=\frac{(2m+n-1)(1+v)^n-2m(1+v)+n-1}{2(n-1)m^n(1+v)^n},$$

а в случае $n=1$

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{m+mv}=l(1+v)+\frac{2+v}{2m(1+v)},$$

откуда, если $v=1$, получим приближенно

$$\frac{1}{m^n}+\frac{1}{(m+1)^n}+\frac{1}{(m+2)^n}+\ldots+\frac{1}{2^nm^n}=\frac{2^n(2m+n-1)-4m+n-1}{2^{n+1}(n-1)m^n}$$

и

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m}=l2+\frac{3}{4m}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

312. Отсюда получаем правило для приближенного нахождения логарифмов сколь угодно больших чисел, тогда как обычно применяемые ряды годятся лишь для чисел, мало отличающихся от единицы. Напишем u вместо $1+v$; тогда будем иметь:

$$lu=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{mu}-\frac{1+u}{2mu}.$$

Из этого выражения lu определяется тем точнее, чем большим берется число m.

ПРИМЕР 3

313. *Выразить приближенно интеграл* $y=\int\frac{c\,dx}{c^2+x^2}$, *взятый так, чтобы он исчезал при* $x=0$.

Как мы знаем, этот интеграл есть $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{c}$; для получения его приближенного значения имеем $a=0$, $b=0$; следовательно, если положить, что значение переменного x возрастает от 0 постоянно на одну и ту же разность α, то, так как $X=\frac{c}{c^2+x^2}$, значения интеграла будут для указателей 0, α, 2, ..., x

$$\frac{1}{c},\quad\frac{c}{c^2+\alpha^2},\quad\frac{c}{c^2+4\alpha^2},\quad\ldots,\quad\frac{c}{c^2+x^2};$$

предпоследний член этого ряда есть $'X=\frac{c}{c^2+(x-\alpha)^2}$

Поэтому значение нашего интеграла $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{c}$ приближенно равно

$$\alpha\left(\frac{1}{c}+\frac{c}{c^2+\alpha^2}+\frac{c}{c^2+4\alpha^2}+\ldots+\frac{c}{c^2+(x-\alpha)^2}\right);$$

другое же приближенное значение, меньшее истинного (тогда как первое слишком велико), есть

$$\alpha\left(\frac{c}{c^2+\alpha^2}+\frac{c}{c^2+4\alpha^2}+\frac{c}{c^2+9\alpha^2}+\ldots+\frac{c}{c^2+x^2}\right).$$

Если взять среднее между ними, [предварительно] прибавив здесь $\alpha\cdot\frac{1}{c}$, а там $\alpha\cdot\frac{c}{c^2+x^2}$, то получим лучшее приближение

$$\alpha\left(\frac{c}{c^2}+\frac{c}{c^2+\alpha^2}+\frac{c}{c^2+4\alpha^2}+\frac{c}{c^2+9\alpha^2}+\ldots+\frac{c}{c^2+x^2}\right)=$$
$$=\operatorname{arctg}\frac{x}{c}+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{c}{c^2+x^2}\right)=\operatorname{arctg}\frac{x}{c}+\frac{\alpha(2c^2+x^2)}{2c(c^2+x^2)}.$$

Итак, для этого угла мы имеем приближенно верное значение

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{c}=\alpha c\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2+\alpha^2}+\frac{1}{c^2+4\alpha^2}+\ldots+\frac{1}{c^2+x^2}\right)-\frac{\alpha(2c^2+x^2)}{2c(c^2+x^2)}.$$

Это значение будет тем менее отличаться от истинного, чем меньшим будет число α по отношению к c. Поэтому если за c взять очень большое число, то вместо α можно будет взять единицу, откуда, положив $x=cv$, получим:

$$\operatorname{arctg} v=c\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{c^2+4}+\frac{1}{c^2+9}+\ldots+\frac{1}{c^2+c^2v^2}\right)-\frac{2+v^2}{2c(1+v^2)};$$

это значение будет тем более точным, чем большим взять число c.

СЛЕДСТВИЕ 1

314. Если положить $c=1$ (в этом случае ошибка должна быть значительной), получится:

$$\operatorname{arctg} v=1+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+4}+\frac{1}{1+9}+\ldots+\frac{1}{1+v^2}-\frac{2+v^2}{2(1+v^2)}.$$

Пусть $v=1$, тогда $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}=1+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$, а следовательно, $\pi=3$, что несколько отличается от истинного значения.

Если положить $c=2$, то будем иметь:

$$\operatorname{arctg} v=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4+1}+\frac{1}{4+4}+\frac{1}{4+9}+\ldots+\frac{1}{4+4v^2}\right)-\frac{2+v^2}{4(1+v^2)},$$

откуда, если $v=1$, получим:

$$\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4+1}+\frac{1}{4+4}\right)-\frac{3}{8}=\frac{23}{20}-\frac{3}{8}=\frac{31}{40},$$

а следовательно $\pi=\frac{31}{10}=3{,}1$, с лучшим приближением.

СЛЕДСТВИЕ 2

315. Пусть $c=6$; тогда

$$\operatorname{arctg} v=6\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{36+1}+\frac{1}{36+4}+\ldots+\frac{1}{36+36v^2}\right)-\frac{2+v^2}{12(1+v^2)},$$

откуда при $v=\frac{1}{2}$ и при $v=\frac{1}{3}$ получается:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=6\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{36+1}+\frac{1}{36+4}+\frac{1}{36+9}\right)-\frac{3}{20},$$
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=6\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{36+1}+\frac{1}{36+4}\right)-\frac{19}{120}.$$

Но $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$\frac{\pi}{4}=12\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{37}+\frac{1}{40}\right)+\frac{2}{15}-\frac{37}{120}=\frac{1063}{1110}-\frac{7}{40}=\frac{695}{888},$$

или $\pi=\frac{695}{222}=3{,}1306$.

СЛЕДСТВИЕ 3

316. Если же мы сразу положим там[1]) $v=1$, то получится:

$$\frac{\pi}{4}=6\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{37}+\frac{1}{40}+\frac{1}{45}+\frac{1}{52}+\frac{1}{61}+\frac{1}{72}\right)-\frac{1}{8},$$

откуда $\pi=3{,}13696$, что еще более близко к истинному значению, т. е. сложение большего числа членов приводит ближе к истине.

ЗАДАЧА 37

317. *Усовершенствовать изложенный выше метод приближенного нахождения значений интегралов, чтобы меньше уклоняться от истины.*

РЕШЕНИЕ

Пусть $y=\int X\,dx$ есть предложенное интегральное выражение, значение которого $y=b$ при $x=a$ уже известно, [безразлично], задано ли оно самим условием интегрирования или ранее выведено из условия с помощью нескольких действий. Дадим, далее, переменному x значение, несколько превышающее то число a, которому соответствует $y=b$. Пусть, наконец, $X=A$ при $x=a$. В изложенном выше методе мы приняли, что пока x незначительно превышает a, X остается постоянным и равным A, и что поэтому

$$\int X\,dx=A(x-a).$$

Но поскольку X не является постоянным, постольку и равенство $\int X\,dx=X(x-a)$ также неверно; на самом же деле имеем:

$$\int X\,dx=X(x-a)-\int(x-a)\,dX.$$

[1]) То есть в первой формуле § 315.

Положим $dX = P\,dx$, тогда

$$\int (x-a)\,dX = \int P(x-a)\,dx;$$

если теперь мы будем считать [количество] $P = \frac{dX}{dx}$ постоянным, пока x не намного превосходит a, то будем иметь:

$$\int P(x-a)\,dx = \frac{1}{2}P(x-a)^2,$$

и таким образом получится:

$$y = \int X\,dx = b + X(x-a) - \frac{1}{2}P(x-a)^2.$$

Это значение уже ближе к истине, возьмем ли мы для X и P те значения, которые они принимают при $x = a$ или же которые они принимают при $x = a + \alpha$, т. е. при наибольшем значении, до которого, как мы положили, растет x при этой операции. Смотря по тому, положим ли мы $x = a$ или $x = a + \alpha$, получим отсюда две границы, между которыми заключена истинная величина. Таким же образом мы сможем продвигаться и дальше. В самом деле, так как P не является постоянным, то

$$\int P(x-a)\,dx = \frac{1}{2}P(x-a)^2 - \frac{1}{2}\int (x-a)^2\,dP;$$

положив $dP = Q\,dx$, получим отсюда

$$\int (x-a)^2\,dP = \int Q(x-a)^2\,dx = \frac{1}{3}Q(x-a)^3,$$

если только рассматривать Q как постоянную величину. Таким образом, имеем:

$$y = \int X\,dx = b + X(x-a) - \frac{1}{2}P(x-a)^2 + \frac{1}{2\cdot 3}Q(x-a)^3.$$

Если таким же способом будем продвигаться дальше, то, положив

$$X = \frac{dy}{dx}, \quad P = \frac{dX}{dx}, \quad Q = \frac{dP}{dx}, \quad R = \frac{dQ}{dx}, \quad S = \frac{dR}{dx} \text{ и т. д.},$$

найдем:

$$y = b + X(x-a) - \frac{1}{2}P(x-a)^2 + \frac{1}{2\cdot 3}Q(x-a)^3 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}R(x-a)^4 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}S(x-a)^5 - \text{ и т. д.}$$

Этот ряд быстро сходится, если только x не намного превосходит a; будучи продолжен до бесконечности, он даст истинное значение количества y, если в функции X, P, Q, R и т. д. будет подставлено крайнее значение $x = a + \alpha$. Если же мы не желаем продолжать этот ряд до бесконечности, то лучше всего будет продвигаться вперед от промежутка к промежутку, придавая переменному x последовательно значения a, a', a'', a''', a'''' и т. д.; затем надо искать для каждого из них значения, соответствующие буквам X, P, Q, R, S и т. д., и пусть это будут следующие значения: если

$$x = a,\ a',\ a'',\ a''',\ a^{\mathrm{IV}},\ a^{\mathrm{V}} \text{ и т. д.},$$

то

$$X = A,\ A',\ A'',\ A''',\ A^{\mathrm{IV}},\ A^{\mathrm{V}} \quad \text{и т. д.},$$
$$\frac{dX}{dx} = P = B,\ B',\ B'',\ B''',\ B^{\mathrm{IV}},\ B^{\mathrm{V}} \text{ и т. д.},$$
$$\frac{dP}{dx} = Q = C,\ C',\ C'',\ C''',\ C^{\mathrm{IV}},\ C^{\mathrm{V}} \text{ и т. д.},$$
$$\frac{dQ}{dx} = R = D,\ D',\ D'',\ D''',\ D^{\mathrm{IV}},\ D^{\mathrm{V}} \text{ и т. д.};$$

далее, пусть

$$y = b,\ b',\ b'',\ b''',\ b^{\mathrm{IV}},\ b^{\mathrm{V}} \text{ и т. д.}$$

Приняв эти обозначения, получим, как это понятно из сказанного выше,

$$b' = b + A'(a'-a) - \frac{1}{2}B'(a'-a)^2 + \frac{1}{6}C'(a'-a)^3 - \frac{1}{24}D'(a'-a)^4 + \text{ и т. д.},$$
$$b'' = b' + A''(a''-a') - \frac{1}{2}B''(a''-a')^2 + \frac{1}{6}C''(a''-a')^3 - \frac{1}{24}D''(a''-a')^4 + \text{ и т. д.},$$
$$b''' = b'' + A'''(a'''-a'') - \frac{1}{2}B'''(a'''-a'')^2 + \frac{1}{6}C'''(a'''-a'')^3 - \frac{1}{24}D'''(a'''-a'')^4 + \text{ и т. д.},$$
$$b^{\mathrm{IV}} = b''' + A^{\mathrm{IV}}(a^{\mathrm{IV}}-a''') - \frac{1}{2}B^{\mathrm{IV}}(a^{\mathrm{IV}}-a''')^2 + \frac{1}{6}C^{\mathrm{IV}}(a^{\mathrm{IV}}-a''')^3 - \frac{1}{24}D^{\mathrm{IV}}(a^{\mathrm{IV}}-a''')^4 + \text{ и т. д.}$$

и т. д.

Эти выражения надо продолжать до тех пор, пока не получится значение количества y для значения переменного x, сколь угодно отличающегося от начального значения a.

СЛЕДСТВИЕ 1

318. Таким образом, в этом методе приближенного вычисления мы пользуемся такой теоремой (справедливость ее была доказана уже в «Дифференциальном исчислении»)[1]: если y есть такая функция переменной x,

---

[1]) В «Дифференциальном исчислении» (§ 57, вторая часть, стр. 247 русского перевода) дана формула, которая при обозначениях настоящего параграфа имела бы вид

$$b = y - X(x-a) + \frac{1}{2}P(x-a)^2 - \frac{1}{6}Q(x-a)^3 + \ldots \qquad (1)$$

Эта формула получена Эйлером из формулы Тейлора

$$b = y + X(a-x) + \frac{1}{2}P(a-x)^2 + \frac{1}{6}Q(a-x)^3 + \ldots, \qquad (2)$$

выведенной (опять-таки при иных обозначениях) в § 48 второй части (стр. 242). Вывод этот — он совпадает с выводом, данным самим Тейлором (1713), — Эйлер воспроизводит и в «Интегральном исчислении» (см. ниже § 322). Несмотря на то, что формулы (1) и (2) почти не отличаются друг от друга, Эйлер дает отдельно (в § 321) вывод формулы (1), еще менее строгий, чем вывод формулы (2) (см. примечание к § 321).

Между тем в § 317 уже был приведен гораздо более строгий вывод формулы (1) (по существу совпадающий с выводом, данным Иоганном Бернулли в 1694 г.; см. «Вступительное слово к Дифференциальному исчислению Л. Эйлера», стр. 10—11).

которая при $x=a$ становится равной b, и если положить

$$\frac{dy}{dx}=X,\quad \frac{dX}{dx}=P,\quad \frac{dP}{dx}=Q,\quad \frac{dQ}{dx}=R \text{ и т. д.},$$

то вообще будем иметь:

$$y=b+X(x-a)-\frac{1}{2}P(x-a)^2+\frac{1}{6}Q(x-a)^3-\frac{1}{24}R(x-a)^4+\frac{1}{120}S(x-a)^5-\text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

319. Если бы мы захотели продолжать этот ряд до бесконечности, то не было бы необходимости принимать значение переменной x лишь немного отличающимся от a. Но для того чтобы сделать ряд более сходящимся, полезно весь переход от a к x разделить на промежутки и к каждому из них применить описанную здесь операцию.

СЛЕДСТВИЕ 3

320. Сделаем так, чтобы значения количества x возрастали, начиная от a, на постоянные разности, равные α; пусть последнее значение $a+n\alpha=x$, так что, если

$$x=a,\quad a+\alpha,\quad a+2\alpha,\quad a+3\alpha,\ \ldots,\ x,$$

то

$$\begin{aligned}
X&=A,\quad A',\quad A'',\quad A''',\ \ldots,\ X,\\
\frac{dX}{dx}&=P=B,\quad B',\quad B'',\quad B''',\ \ldots,\ P,\\
\frac{dP}{dx}&=Q=C,\quad C',\quad C'',\quad C''',\ \ldots,\ Q,\\
\frac{dQ}{dx}&=R=D,\quad D',\quad D'',\quad D''',\ \ldots,\ R
\end{aligned}$$

и т. д.,

и отсюда

$$y=b,\quad b',\quad b'',\quad b''',\ \ldots,\ y;$$

соединяя все ряды вместе, получим для значения $x=x$:

$$\begin{aligned}
y=b&+\alpha(A'+A''+A'''+\ldots+X)\\
&-\frac{1}{2}\alpha^2(B'+B''+B'''+\ldots+P)\\
&+\frac{1}{6}\alpha^3(C'+C''+C'''+\ldots+Q)\\
&-\frac{1}{24}\alpha^4(D'+D''+D'''+\ldots+R)
\end{aligned}$$

и т. д.

В самом деле, если принять, что функция y допускает разложение в степенной ряд (а в XVIII веке никто не сомневался в возможности такого разложения), то при сходимости ряда (1) формула (1) строго вытекает из рассуждений § 317.

Почему же Эйлер счел необходимым привести еще один вывод? Ответ на этот вопрос содержится в первой фразе § 321. Рассуждение § 321 апеллирует к «природе дифференциалов», тогда как в § 317 используются средства интегрального исчисления. Хотя последнее и построено на базе дифференциального исчисления, однако Эйлер предпочитает вывод, непосредственно основанный на свойствах дифференциалов как исчезающих разностей.

ПОЯСНЕНИЕ 1

321. Доказательство упомянутой в следствии 1 теоремы, на которой основывается вышеизложенный метод приближения, можно построить, [исходя] из природы дифференциалов, следующим образом. Пусть y есть функция от x, причем $y=b$ при $x=a$, и пусть мы ищем значение количества y, когда x на сколько-нибудь превосходит a. Начнем с наибольшего значения количества x и будем последовательно нисходить к дифференциалам. Из [свойств] дифференциалов ясно[1]), что

Если x будет	то y будет
$x-dx$	$y-dy+d^2y-d^3y+d^4y-$ и т. д.
$x-2dx$	$y-2dy+3d^2y-4d^3y+5d^4y-$ и т. д.
$x-3dx$	$y-3dy+6d^2y-10d^3y+15d^4y-$ и т. д.
.	.
.	.
.	.
Если x будет	то y будет
$x-n\,dx$	$y-n\,dy+\frac{(n+1)}{1\cdot 2}d^2y-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}d^3y+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d^4y-$ и т. д.

Положим теперь $x-n\,dx=a$, тогда $n=\frac{x-a}{dx}$, а следовательно, является бесконечно большим числом. Но тогда, согласно условию, значение, получающееся для y, должно быть $=b$; поэтому мы будем иметь:

$$b=y-\frac{(x-a)\,dy}{dx}+\frac{(x-a)^2\,d^2y}{1\cdot 2dx^2}-\frac{(x-a)^3\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{(x-a)^4\,d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}-\text{ и т. д.}$$

---

[1]) Нижеприводимые выражения получаются из общего выражения

$$y+\frac{n}{1}dy+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d^2y+\ldots, \tag{1}$$

выведенного в § 46 второй части «Дифференциального исчисления» (стр. 242 русского перевода). Для натуральных значений n тем же способом:

$$y-dy+d^2y-d^3y+d^4y-\ldots \tag{2}$$

Как в настоящем параграфе, так и в § 322 доказательство основано на крайне нестрогом предельном переходе от конечных разностей к дифференциалам; но в настоящем параграфе эта нестрогость усугубляется ничем не обоснованной экстраполяцией. Здесь лишний раз обнаруживается почти безграничное доверие Эйлера к силе формулы. Не будь так, Эйлер мог бы с помощью привычных ему средств подтвердить формулу (2), скажем, такими рассуждениями: по определению конечных разностей имеем:

$$y'=y-dy', \tag{3}$$
$$dy'=dy-d^2y', \tag{4}$$
$$d^2y'=d^2y-d^3y', \tag{5}$$

где через y' обозначено значение y, отвечающее $x-dx$. Из (3) и (4) получаем:

$$y'=y-dy+d^2y'. \tag{6}$$

Из (5) и (6) находим:

$$y'=y-dy+d^2y-d^3y' \tag{7}$$

и т. д. Если еще добавить условие (для Эйлера необязательное), чтобы ряд (1) был сходящимся, то оно сведется к условию, чтобы d^my' исчезало при $m=\infty$.

Если мы теперь положим

$$\frac{dy}{dx}=X, \quad \frac{dX}{dx}=P, \quad \frac{dP}{dx}=Q, \quad \frac{dQ}{dx}=R \text{ и т. д.,}$$

то найдем, как и выше,

$$y=b+X(x-a)-\frac{1}{2}P(x-a)^2+\frac{1}{6}Q(x-a)^3-\frac{1}{24}R(x-a)^4+ \text{ и т. д.}$$

Отсюда ясно, что если x превосходит a на чрезвычайно малую величину, то достаточно положить $y=b+X(x-a)$; на этом и основано приближение, предложенное в самом начале[1]), т. е. та граница, где X определяется по большему значению переменного x.

ПОЯСНЕНИЕ 2

322. Таким же образом, как это рассуждение открыло нам только одну из данных выше границ, ко второй границе нас приведет следующее рассуждение. Именно, как мы прежде нисходили от x к a, так теперь мы будем восходить от a к x.

Если a переходит в	то b перейдет в
$a+da$	$b+db$
$a+2da$	$b+2db+d^2b$
$a+3da$	$b+3db+3d^2b+d^3b$
$a+n\,da$	$b+n\,db+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d^2b+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d^3b+$ и т. д.

Пусть теперь $a+n\,da=x$ или $n=\frac{x-a}{da}$ и пусть значение количества b станет $=y$. Пусть, далее, A, B, C, D и т. д. будут значения введенных выше функций X, P, Q, R и т. д., если вместо x написать a. В настоящем случае будет

$$A=\frac{db}{da}, \quad B=\frac{d^2b}{da^2}, \quad C=\frac{d^3b}{da^3} \text{ и т. д.}$$

Поэтому будем иметь:

$$y=b+A(x-a)+\frac{1}{2}B(x-a)^2+\frac{1}{6}C(x-a)^3+\frac{1}{24}D(x-a)^4+ \text{ и т. д.}$$

За исключением знаков, этот ряд во всех отношениях подобен предыдущему. Если x незначительно превышает a, так что $b+A(x-a)$ выражает значение количества y с достаточной точностью, то отсюда получится вторая из указанных выше границ. Если же переход от a к x мы так же, как и выше в § 320, разобьем на равные промежутки с разностью α и если мы обозначим предпоследние члены в каждом из рядов

[1]) quod est fundamentum approximationis primum propositae.

через $'X$, $'P$, $'Q$, $'R$ и т. д., то получим для y в качестве второй границы

$$\begin{aligned}y = b &+ \alpha(A + A' + A'' + \ldots + 'X)\\ &+ \frac{1}{2}\alpha^2(B + B' + B'' + \ldots + 'P)\\ &+ \frac{1}{6}\alpha^3(C + C' + C'' + \ldots + 'Q)\\ &+ \frac{1}{24}\alpha^4(D + D' + D'' + \ldots + 'R)\end{aligned}$$

и т. д.

Таким образом, и этим исправленным методом мы получим две границы, между которыми заключено истинное значение количества y. Значит, мы еще более приблизимся к истинному значению, если возьмем среднее арифметическое между этими границами; при этом получится

$$\begin{aligned}y = b + \alpha(A + A' + A'' + \ldots + X) - \frac{1}{2}\alpha(A + X) + \frac{1}{4}\alpha^2(B - P)\\ + \frac{1}{6}\alpha^3(C + C' + C'' + \ldots + Q) - \frac{1}{12}\alpha^3(C + Q) + \frac{1}{48}\alpha^4(D - R)\\ + \frac{1}{120}\alpha^5(E + E' + E'' + \ldots + S) - \frac{1}{240}\alpha^5(E + S) + \frac{1}{1440}\alpha^6(F - T)\end{aligned}$$

и т. д.

Благодаря этому данные выше приближения получают существенное исправление уже от одного только прибавления члена $\frac{1}{4}\alpha^2(B - P)$.

ПРИМЕР 1

323. *Выразить приближенно логарифм любого числа x.* Здесь, очевидно, $y = \int \frac{dx}{x}$; этот интеграл берется так, чтобы он исчезал при $x = 1$. Стало быть, $a = 1$, $b = 0$ и $X = \frac{1}{x}$. Теперь примем, что восхождение от единицы до x будет происходить с промежутками, равными α; так как

$$P = \frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad Q = \frac{dP}{dx} = \frac{2}{x^3}, \quad R = \frac{dQ}{dx} = -\frac{6}{x^4},$$

то при указателях

$$x = 1, \qquad 1 + \alpha, \qquad 1 + 2\alpha, \qquad 1 + 3\alpha, \qquad \ldots, \qquad x$$

будет

$$\begin{array}{llllll} X = 1, & \frac{1}{1+\alpha}, & \frac{1}{1+2\alpha}, & \frac{1}{1+3\alpha}, & \ldots, & \frac{1}{x},\\ P = -1, & -\frac{1}{(1+\alpha)^2}, & -\frac{1}{(1+2\alpha)^2}, & -\frac{1}{(1+3\alpha)^2}, & \ldots, & -\frac{1}{x^2},\\ Q = 2, & \frac{2}{(1+\alpha)^3}, & \frac{2}{(1+2\alpha)^3}, & \frac{2}{(1+3\alpha)^3}, & \ldots, & \frac{2}{x^3},\\ R = -6, & -\frac{6}{(1+\alpha)^4}, & -\frac{6}{(1+2\alpha)^4}, & -\frac{6}{(1+3\alpha)^4}, & \ldots, & -\frac{6}{x^4}\end{array}$$

и т. д.

откуда получаем:

$$\begin{aligned}
lx = \alpha\Big(1 &+ \frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+2\alpha} + \frac{1}{1+3\alpha} + \ldots + \frac{1}{x}\Big) \\
&- \frac{1}{2}\alpha\Big(1+\frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{4}\alpha^2\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big) \\
&+ \frac{1}{3}\alpha^3\Big(1+\frac{1}{(1+\alpha)^3}+\frac{1}{(1+2\alpha)^3}+\frac{1}{(1+3\alpha)^3}+\ldots+\frac{1}{x^3}\Big) \\
&- \frac{1}{6}\alpha^3\Big(1+\frac{1}{x^3}\Big) - \frac{1}{8}\alpha^4\Big(1-\frac{1}{x^4}\Big) \\
&+ \frac{1}{5}\alpha^5\Big(1+\frac{1}{(1+\alpha)^5}+\frac{1}{(1+2\alpha)^5}+\frac{1}{(1+3\alpha)^5}+\ldots+\frac{1}{x^5}\Big) \\
&- \frac{1}{10}\alpha^5\Big(1+\frac{1}{x^5}\Big) - \frac{1}{12}\alpha^6\Big(1-\frac{1}{x^6}\Big)
\end{aligned}$$

и т. д.

Поэтому, если взять $\alpha = \frac{1}{m}$, получится:

$$\begin{aligned}
lx = \Big(\frac{1}{m} &+ \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{mx}\Big) - \frac{x+1}{2mx} - \frac{x^2-1}{4m^2x^2} \\
&+ \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{(m+1)^3}+\frac{1}{(m+2)^3}+\ldots+\frac{1}{(mx)^3}\Big) - \frac{x^3+1}{6m^3x^3} - \frac{x^4-1}{8m^4x^4} \\
&+ \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{m^5}+\frac{1}{(m+1)^5}+\frac{1}{(m+2)^5}+\ldots+\frac{1}{(mx)^5}\Big) - \frac{x^5+1}{10m^5x^5} - \frac{x^6-1}{12m^6x^6}
\end{aligned}$$

и т. д.

СЛЕДСТВИЕ

324. Если эти прогрессии[1]) продолжить до бесконечности, то сумма последних членов[2]) будет

$$= -\frac{1}{2}\,l\,\frac{m}{m-1} - \frac{1}{2}\,l\,\frac{mx+1}{mx} = -\frac{1}{2}\,l\,\frac{mx+1}{(m-1)\,x},$$

а сумма первых членов[3])

$$= \frac{1}{2}\,l\,\frac{m+1}{m-1},$$

а так как

$$lx + \frac{1}{2}\,l\,\frac{mx+1}{(m-1)\,x} + \frac{1}{2}\,l\,\frac{m-1}{m+1} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{x\,(mx+1)}{m+1},$$

1) Прогрессиями здесь называются строки последнего выражения § 323; до бесконечности продолжается последовательность этих строк.

2) То есть членов, не заключенных в скобки; из них составляется два ряда:

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}+\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{3m^3}+\frac{1}{4m^4}+\ldots\right] = -\frac{1}{2}\,l\,\frac{m}{m-1}$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{mx}-\frac{1}{2m^2x^2}+\frac{1}{3m^3x^3}-\frac{1}{4m^4x^4}+\ldots\right] = -\frac{1}{2}\,l\,\frac{mx+1}{mx}.$$

3) То есть сумма ряда $\frac{1}{m}+\frac{1}{3m^3}+\frac{1}{5m^5}+\frac{1}{7m^7}+\ldots$

то отсюда получится:

$$l\frac{x(mx+1)}{m+1}=2\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\ldots+\frac{1}{mx}\right)$$
$$+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{(m+1)^3}+\frac{1}{(m+2)^3}+\frac{1}{(m+3)^3}+\ldots+\frac{1}{m^3x^3}\right)$$
$$+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{(m+1)^5}+\frac{1}{(m+2)^5}+\frac{1}{(m+3)^5}+\ldots+\frac{1}{m^5x^5}\right)$$

и т. д.

Это выражение, если продолжать его до бесконечности, дает истинное значение $l\frac{x(mx+1)}{m+1}$.

ПРИМЕР 2

325. *Применяя этот метод, выразить приближенно дугу круга, тангенс которой равен* $\frac{x}{c}$.

Очевидно, речь идет об интеграле $y=\int\frac{c\,dx}{c^2+x^2}$, исчезающем при $x=0$; имеем $a=0$ и $b=0$; затем

$$X=\frac{c}{c^2+x^2},\quad P=\frac{dX}{dx}=\frac{-2cx}{(c^2+x^2)^2},\quad Q=\frac{dP}{dx}=\frac{-2c(c^2-3x^2)}{(c^2+x^2)^3},$$
$$R=\frac{dQ}{dx}=\frac{6cx(3c^2-4x^2)}{(c^2+x^2)^4},\quad S=\frac{dR}{dx}=\frac{6c(3c^4-33c^2x^2+20x^4)}{(c^2+x^2)^5}\ \text{и т. д.}$$

Эти формулы, если их [ряд] продолжать до бесконечности, дают

$$y=\frac{cx}{c^2+x^2}+\frac{cx^3}{(c^2+x^2)^2}-\frac{cx^3(c^2-3x^2)}{3(c^2+x^2)^3}-\frac{cx^5(3c^2-4x^2)}{4(c^2+x^2)^4}+\frac{cx^5(3c^4-33c^2x^2+20x^4)}{20(c^2+x^2)^5}$$

и т. д.

Если же мы положим, что x возрастает на промежутки, равные 1, так что $\alpha=1$, то будем иметь:

$$A=\frac{c}{c^2},\qquad B=0,\qquad C=\frac{-2c^3}{c^6},\qquad D=0\ \text{и т. д.},$$
$$A'=\frac{c}{c^2+1},\quad B'=\frac{-2c}{(c^2+1)^2},\quad C'=\frac{-2c(c^2-3)}{(c^2+1)^3},\quad D'=\frac{6c(3c^2-4)}{(c^2+1)^4},$$
$$A''=\frac{c}{c^2+4},\quad B''=\frac{-4c}{(c^2+4)^2},\quad C''=\frac{-2c(c^2-12)}{(c^2+4)^3},\quad D''=\frac{12c(3c^2-16)}{(c^2+4)^4},$$
$$A'''=\frac{c}{c^2+9},\quad B'''=\frac{-6c}{(c^2+9)^2},\quad C'''=\frac{-2c(c^2-27)}{(c^2+9)^3},\quad D'''=\frac{18c(3c^2-36)}{(c^2+9)^4},$$
$$\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots$$
$$X=\frac{c}{c^2+x^2},\quad P=\frac{-2cx}{(c^2+x^2)^2},\quad Q=\frac{-2c(c^2-3x^2)}{(c^2+x^2)^3},\quad R=\frac{6cx(3c^2-4x^2)}{(c^2+x^2)^4},$$

и отсюда

$$y=c\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{c^2+4}+\frac{1}{c^2+9}+\ldots+\frac{1}{c^2+x^2}\right)$$
$$-\frac{1}{2c}-\frac{c}{2(c^2+x^2)}+\frac{cx}{2(c^2+x^2)^2}$$
$$-\frac{c}{3}\left(\frac{1}{c^4}+\frac{c^2-3}{(c^2+1)^3}+\frac{c^2-12}{(c^2+4)^2}+\frac{c^2-27}{(c^2+9)^3}+\ldots+\frac{c^2-3x^2}{(c^2+x^2)^3}\right)$$
$$+\frac{1}{6c^3}+\frac{c(c^2-3x^2)}{6(c^2+x^2)^3}-\frac{cx(3c^2-4x^2)}{8(c^2+x^2)^4}$$

и т. д.

СЛЕДСТВИЕ

326. Итак, если положить $c = x = 4$, так что $y = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то будем иметь:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} + \frac{4}{17} + \frac{4}{20} + \frac{4}{25} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{128}$$
$$- \frac{4}{3}\left(\frac{1}{256} + \frac{13}{17^3} + \frac{4}{20^3} - \frac{11}{25^3} - \frac{32}{32^3}\right) + \frac{1}{384} - \frac{1}{1536} + \frac{1}{128\cdot 256}.$$

Значение этого выражения не очень отличается от истинного. Впрочем, я привожу эти примеры только для пояснения, а не для того, чтобы отсюда стали ожидать более легкого получения приближения, чем с помощью других методов.

ПРИМЕР 3

327. *Найти с любой точностью интеграл* $y = \int \frac{e^{-\frac{1}{x}}\,dx}{x}$, *взятый так, что он исчезает при* $x = 0$.

При помощи приведений, изложенных выше, получаем:

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}\,dx}{x} = e^{-\frac{1}{x}}x - \int e^{-\frac{1}{x}}\,dx,$$

причем слагаемое $e^{-\frac{1}{x}}x$ исчезает при $x = 0$. Нам надо теперь искать интеграл $z = \int e^{-\frac{1}{x}}\,dx$, так как по его нахождении получим $y = e^{-\frac{1}{x}}x - z$; мы уже заметили выше, что бесполезно пытаться применить к этому примеру другие методы приближения. Так как при $x = 0$ z исчезает, то $a = 0$ и $b = 0$; далее, $X = e^{-\frac{1}{x}}$; отсюда

$$P = \frac{dX}{dx} = e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}, \quad Q = \frac{dP}{dx} = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right),$$
$$R = \frac{dQ}{dx} = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\right),$$
$$S = \frac{dR}{dx} = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^8} - \frac{12}{x^7} + \frac{36}{x^6} - \frac{24}{x^5}\right) \text{ и т. д.}$$

Если бесконечно продолжать [писать] эти значения, то будем иметь:

$$z = e^{-\frac{1}{x}}\left\{\begin{aligned} & x - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x^3\left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) - \frac{1}{24}x^4\left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\right) \\ & + \frac{1}{120}x^5\left(\frac{1}{x^8} - \frac{12}{x^7} + \frac{36}{x^6} - \frac{24}{x^5}\right) - \text{ и т. д.}\end{aligned}\right\},$$

или

$$z = e^{-\frac{1}{x}}\left\{\begin{aligned} & x - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x} - 2\right) - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} + 6\right) + \frac{1}{120}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{12}{x^2} + \frac{36}{x} - 24\right) \\ & \qquad - \frac{1}{720}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{20}{x^3} + \frac{120}{x^2} - \frac{240}{x} + 120\right) + \text{ и т. д.}\end{aligned}\right\}.$$

Этот ряд слабо сходится, какое бы значение ни дать количеству x. Поэтому мы будем восходить от 0 к x по промежуткам, полагая вместо

x последовательно 0, α, 2α, 3α и т. д., причем надо заметить, что $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$ и т. д., и наше правило дает

$$z=\alpha\left(e^{-\frac{1}{\alpha}}+e^{-\frac{1}{2\alpha}}+e^{-\frac{1}{3\alpha}}+\ldots+e^{-\frac{1}{x}}\right)-\frac{1}{2}\alpha e^{-\frac{1}{x}}-\frac{1}{4}\alpha^2 e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}$$

$$+\frac{1}{6}\alpha^3\left(e^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha^4}-\frac{2}{\alpha^3}\right)+e^{-\frac{1}{2\alpha}}\left(\frac{1}{16\alpha^4}-\frac{2}{8\alpha^3}\right)+e^{-\frac{1}{3\alpha}}\left(\frac{1}{81\alpha^4}-\frac{2}{27\alpha^3}\right)\right.$$

$$\left.+\ldots+e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)\right)-\frac{1}{12}\alpha^3 e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)-\frac{1}{48}\alpha^4 e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right).$$

Если мы пожелаем определить отсюда значение переменного z для случая $x=1$ и если мы вместо α возьмем малую дробь $\frac{1}{n}$, то получим:

$$z=\frac{1}{n}\left(e^{-\frac{n}{1}}+e^{-\frac{n}{2}}+e^{-\frac{n}{3}}+e^{-\frac{n}{4}}+\ldots+e^{-\frac{n}{n}}\right)-\frac{1}{2ne}-\frac{1}{4n^2e}$$

$$+\frac{1}{6}\left(e^{-\frac{n}{1}}\frac{n-2}{1}+e^{-\frac{n}{2}}\frac{n-4}{16}+e^{-\frac{n}{3}}\frac{n-6}{81}+\ldots+e^{-\frac{n}{n}}\frac{n-2n}{n^4}\right)+\frac{1}{12n^3e}-\frac{1}{48n^4e}.$$

Если взять здесь вместо n даже не очень большое число, как, например, 10, то значение количества z найдется с точностью до миллионной доли единицы; оно окажется еще в 20 раз более точным, если за n взять 20.

ПОЯСНЕНИЕ 1

328. Этого примера достаточно, чтобы показать исключительную пользу этого метода приближения. Однако иногда встречаются случаи, в которых даже и этим методом нельзя пользоваться, хотя бы мы разделили весь отрезок, на который возрастает переменное x, на самые малые промежутки. Это происходит в тех случаях, когда в каком-либо промежутке функция X возрастает до бесконечности, когда переменному x придается некое определенное значение, хотя бы сама величина интеграла $y=\int X\,dx$ и не была в этом случае бесконечной. Так будет, например, если

$$y=\int\frac{dx}{\sqrt{a-x}},$$

где

$$X=\frac{1}{\sqrt{a-x}};$$

это количество становится бесконечным при $x=a$, тогда как интеграл $y=C-2\sqrt{a-x}$ в этом случае конечный. Это обязательно бывает всякий раз, как множитель вида $a-x$ в знаменателе имеет показатель, меньший единицы. Тогда в интеграле этот множитель переходит в числитель. Если же показатель того же множителя в знаменателе есть единица или больше единицы, тогда и сам интеграл при $x=a$ становится бесконечным: так как в этом случае не приходится говорить о приближении, то здесь речь идет только о тех случаях, когда показатель меньше единицы, ибо тогда аппроксимация действительно нарушается. Однако же есть легкий способ устранить это неудобство, а именно: если дифференциал будет иметь вид $\frac{X\,dx}{(a-x)^{\lambda:\mu}}$, где $\lambda<\mu$, то положим $a-x=z^{\mu}$, так что $x=a-z^{\mu}$ и $dx=-\mu z^{\mu-1}\,dz$; тогда наш дифференциал будет $=-\mu X z^{\mu-\lambda-1}\,dz$; это выражение при $x=a$, т. е. при $z=0$, уже не становится бесконечным, или — что приводит к тому же — для промежутков, где функция X становится бесконечной, надо фактически провести интегрирование отдельно, положив $x=a\pm\omega$; тогда выражение $X\,dx$ станет достаточно простым, ибо ω весьма мало, так что интегрирование не представит никаких трудностей. Так, например, если мы уже получили значение выражения $y=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ разбиением на промежутки от $x=0$ вплоть до $x=a-\alpha$, то для этого последнего промежутка положим $x=a-\omega$; тогда надо будет интегрировать выражение

$$\frac{(a-\omega)^2\,d\omega}{\sqrt{4a^3\omega-6a^2\omega^2+4a\omega^3-\omega^4}},$$

которое вследствие чрезвычайной малости ω переходит в выражение[1])

$$\frac{d\omega\sqrt{a}}{2\sqrt{\omega}}\left(1-\frac{5\omega}{4a}-\frac{5\omega^2}{32a^2}\right);$$

интеграл его при $\omega=\alpha$ будет[2])

$$\sqrt{a\alpha}-\frac{5\alpha\sqrt{\alpha}}{12\sqrt{a}}-\frac{\alpha^2\sqrt{\alpha}}{32a\sqrt{a}};$$

если брать большее число членов, то этот способ можно применить не только к последнему промежутку, но и к двум и большему числу последних промежутков, полагая $\omega=2\alpha$ или $\omega=3\alpha$. Для тех промежутков, где знаменатель уже достаточно мал, лучше пользоваться этим методом, чем изложенным выше.

ПОЯСНЕНИЕ 2

329. Иногда встречается и другое неудобство; [оно состоит в том], что знаменатель исчезает в двух случаях, как, например, если мы имели бы

$$y=\int\frac{X\,dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)}},$$

где переменное x должно всегда заключаться между границами a и b, так что, после того как оно возрастет от b до a, оно затем снова убывает от a до b, а между тем интеграл y продолжает непрерывно расти[3]), и значит, его значение не может быть удобно определено посредством промежутков. В этом случае надо привлечь на помощь подстановку

$$x=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)\cos\varphi,$$

---

[1]) В первом издании $\frac{d\omega\sqrt{a}}{2\sqrt{\omega}}\left(1-\frac{\omega}{2a}+\frac{7\omega^2}{8a^2}\right)$.

[2]) В первом издании $\sqrt{a\alpha}-\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{a}}+\frac{7\alpha^2\sqrt{\alpha}}{4a^2\sqrt{a}}$.

[3]) crescere.

которая даст

$$dx = \frac{1}{2}(a-b)\,d\varphi \sin\varphi$$

и

$$(a-x)(x-b) = \left(\frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(a-b).\cos\varphi\right)\left(\frac{1}{2}(a-b) - \frac{1}{2}(a-b)\cos\varphi\right)$$

или

$$(a-x)(x-b) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \sin^2\varphi,$$

откуда мы получаем $y = \int X\,d\varphi$, и здесь уже нет никакого неудобства, поскольку угол φ можно непрерывно увеличивать равномерно все дальше и дальше[1]).

Это распространяется и на те случаи, когда два множителя в знаменателе имеют неодинаковые показатели, как, например, если мы имели бы

$$y = \int \frac{X\,dx}{\sqrt[2\lambda]{(a-x)^\mu (x-b)^\nu}}$$

причем μ и ν были бы меньше, чем 2λ; последний показатель я предполагаю четным. Если теперь μ и ν не равны, но $\mu < \nu$, то их можно

---

[1]) Из последующего текста видно, что «рост» интеграла понимается как п о л о ж и т е л ь н о е его приращение. Трудно с уверенностью сказать, как Эйлер представлял себе возможность такого роста. При рассмотрении следующего примера, где в подынтегральное выражение входит радикал $\sqrt[2\lambda]{(a-x)^\mu (x-b)^\nu}$, Эйлер специально оговаривает, что число 2λ он предполагает четным. В связи с этим можно подумать, что Эйлер рассматривает в одних случаях положительное, а в других — отрицательное значение корня. Нам представляется, однако, что дело обстоит иначе. Применив подстановку $x = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)\cos\varphi$, Эйлер преобразует выражение $(a-x)(x-b)$ к виду $\frac{1}{4}(a-b)^2\sin^2\varphi$, и из результата видно, что квадратный корень из последнего выражения Эйлер считает равным $\frac{1}{2}(a-b)\sin\varphi$. Мы полагаем, что Эйлер н е о б р а т и л в н и м а н и я на то, что при $\pi < \varphi < 2\pi$ выражение $\frac{1}{2}(a-b)\sin\varphi$ имеет отрицательное значение. В подтверждение сошлемся на результат второго примера, рассматриваемого Эйлером. Если в выражении $\sqrt[2\lambda]{(a-x)^\mu (x-b)^\nu}$ взять $2\lambda = 4$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, то указанная подстановка даст $\sqrt[4]{\frac{1}{4}(a-b)^2\sin^2\varphi}$, и по Эйлеру получается $\left(\frac{a-b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^{\frac{1}{2}}\varphi$. Но тогда нельзя «продолжать угол φ докуда угодно», ибо $\sin^{\frac{1}{2}}\varphi$ при $\pi < \varphi < 2\pi$ становится мнимым.

Источник ошибки Эйлера мы усматриваем не только в формальном проведении операции извлечения корня, но главным образом в том, что определенный интеграл рассматривается Эйлером в первую очередь как значение первообразной функции; суммирование же является лишь одним из средств вычисления интеграла. Ср. § 253, а также «Вступительное слово к Дифференциальному исчислению Эйлера», стр. 26—28.

привести к равенству следующим образом:

$$y=\int \frac{X\,dx \sqrt[2\lambda]{(x-b)^{\mu-\nu}}}{\sqrt[2\lambda]{(a-x)^{\mu}(x-b)^{\mu}}}\,.$$

Если теперь по-прежнему положить

$$x=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)\cos\varphi,$$

то получится:

$$y=\left(\frac{a-b}{2}\right)^{\frac{2\lambda-\mu-\nu}{2\lambda}}\int X\,d\varphi \sin^{\frac{\lambda-\mu}{\lambda}}\varphi\,(1-\cos\varphi)^{\frac{\mu-\nu}{2\lambda}};$$

здесь можно продолжать угол φ докуда угодно и пользоваться способом промежутков[1]). После этих замечаний вряд ли что-либо еще воспрепятствует этому методу приближения.

[1]) Methodo per intervalla procedente.

ГЛАВА VIII

О ЗНАЧЕНИЯХ, КОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПРИНИМАЮТ ТОЛЬКО В ОПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЯХ

ЗАДАЧА 38

330. *Найти значение, которое интеграл*

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

принимает при $x=1$, причем интеграл определен таким образом, чтобы он исчезал при $x=0$.

РЕШЕНИЕ

В самых простых случаях, когда $m=0$ или $m=1$, положив после интегрирования $x=1$, имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x\,dx}{1-x^2}=1.$$

Далее, выше (§ 120) мы видели, что вообще

$$\int \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{m}{m+1}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{m+1}x^m\sqrt{1-x^2};$$

следовательно, в случае $x=1$

$$\int \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{m}{m+1}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Поэтому, если мы будем последовательно переходить от самых простых значений показателя m ко все большим значениям, мы получим:

$$\begin{array}{l|l}
\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2} & \displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=1 \\
\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & \displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{3} \\
\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2} & \displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}
\end{array}$$

$$\int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}$$

$$\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \int \frac{x^9\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$$

$$\vdots$$

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

331. Итак, интеграл $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ при $x=1$ выражается алгебраически в случаях, когда показатель m есть целое нечетное число; в случаях же, когда показатель есть четное число, интеграл содержит квадратуру круга; действительно, π всегда означает окружность круга, диаметр которого $=1$.

СЛЕДСТВИЕ 2

332. Если перемножить почленно две последние формулы, то получится:

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\int \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2},$$

разумеется, при $x=1$; ясно, что эта формула верна и в том случае, когда n не будет целым числом.

СЛЕДСТВИЕ 3

333. Это равенство останется верным при тех же условиях и в том случае, если положим $x=z^\nu$; действительно, если взять $x=0$ и $x=1$, получится [соответственно] $z=0$ и $z=1$. Итак,

$$\nu^2\int \frac{z^{2n\nu+\nu-1}dz}{\sqrt{1-z^{2\nu}}}\cdot\int \frac{z^{2n\nu+2\nu-1}dz}{\sqrt{1-z^{2\nu}}} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2},$$

и, положив $2n\nu+\nu-1=\mu$, будем иметь при $z=1$:

$$\int \frac{z^{\mu}dz}{\sqrt{1-z^{2\nu}}}\cdot\int \frac{z^{\mu+\nu}dz}{\sqrt{1-z^{2\nu}}} = \frac{1}{\nu(\mu+1)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

334. Тот факт, что можно получить такое произведение двух интегралов, тем достопримечательнее, что это равенство остается в силе даже тогда, когда ни одно из этих выражений в отдельности нельзя представить ни алгебраически, ни при помощи π. Так, например, если $\nu=2$, а $\mu=0$, то получим:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}\cdot\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

и таким же образом

при $\nu=3,\quad \mu=0$ получается $\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^6}}\cdot\int\frac{z^3\,dz}{\sqrt{1-z^6}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$

» $\nu=3,\quad \mu=1$ » $\displaystyle\int\frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^6}}\cdot\int\frac{z^4\,dz}{\sqrt{1-z^6}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{12}$

» $\nu=4,\quad \mu=0$ » $\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^8}}\cdot\int\frac{z^4\,dz}{\sqrt{1-z^8}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$

» $\nu=4,\quad \mu=2$ » $\displaystyle\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^8}}\cdot\int\frac{z^6\,dz}{\sqrt{1-z^8}}=\frac{1}{12}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{24}$

» $\nu=5,\quad \mu=0$ » $\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^{10}}}\cdot\int\frac{z^5\,dz}{\sqrt{1-z^{10}}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{10}$

» $\nu=5,\quad \mu=1$ » $\displaystyle\int\frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^{10}}}\cdot\int\frac{z^6\,dz}{\sqrt{1-z^{10}}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{20}$

» $\nu=5,\quad \mu=2$ » $\displaystyle\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^{10}}}\cdot\int\frac{z^7\,dz}{\sqrt{1-z^{10}}}=\frac{1}{15}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{30}$

» $\nu=5,\quad \mu=3$ » $\displaystyle\int\frac{z^3\,dz}{\sqrt{1-z^{10}}}\cdot\int\frac{z^8\,dz}{\sqrt{1-z^{10}}}=\frac{1}{20}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{40}$

Эти теоремы без сомнения заслуживают всяческого внимания.

ПОЯСНЕНИЕ 2

335. Отсюда нетрудно найти также значение интеграла $\displaystyle\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{x-x^2}}$ при $x=1$. Действительно, если мы напишем $x=z^2$, то этот интеграл превратится в $2\displaystyle\int\frac{z^{2m}\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$; поэтому для случая $x=1$ мы получим следующие значения:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\pi \qquad \int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\pi$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\pi \qquad \int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\pi$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\pi \qquad \vdots$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\pi \qquad \int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2m-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2m}\cdot\pi$$

Отсюда следует, что те значения, которые получают при $x=1$ интегралы, содержащие более сложные выражения такого же рода, могут быть кратко выражены при помощи рядов; применение этого способа мы поясним на нескольких примерах.

ПРИМЕР 1

336. *Выразить при помощи ряда значение интеграла* $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ *при* $x=1$.

Придадим интегралу вид

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}},$$

так что будем иметь:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 - \text{и т. д.}\right);$$

проинтегрировав каждый член в отдельности для случая $x=1$, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1\cdot 9}{4\cdot 16} - \frac{1\cdot 9\cdot 25}{4\cdot 16\cdot 36} + \frac{1\cdot 9\cdot 25\cdot 49}{4\cdot 16\cdot 36\cdot 64} - \text{и. т. д.}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ

337. Подобным образом для того же случая $x=1$ найдем:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{ и т. д. } = \frac{\pi}{4},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \text{и т. д.}\right),$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3\cdot 5} + \frac{6}{5\cdot 7} - \frac{8}{7\cdot 9} + \frac{10}{9\cdot 11} - \text{и т. д.}$$

Но $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}$ и поэтому $= \frac{1}{2}$ при $x=1$. Стало быть, последний ряд $= \frac{1}{2}$.

ПРИМЕР 2

338. *Выразить при помощи ряда значение интеграла* $\int dx \sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}}$ *в случае* $x=1$.

Так как

$$\sqrt{1+ax^2} = 1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}a^2x^4 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}a^3x^6 - \text{ и т. д.},$$

то, умножая на $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и интегрируя, получим:

$$\int dx \sqrt{\frac{1+ax^2}{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}a - \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}a^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}a^3 \text{ и т. д.}\right),$$

откуда можно узнать обвод эллипса[1]).

ПРИМЕР 3

339. *Выразить при помощи ряда значение интеграла* $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$ *в случае* $x=1$.

Представим это выражение в виде $\int \frac{dx\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x-x^2}}$, так что оно будет

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \text{ и т. д.}\right).$$

[1]) См. мемуар 154 (по указателю Энестрема): Animadversiones in rectificationem ellipsis, Opusc. var. arg. 2, 1750, стр. 121; L e o n h a r d i E u l e r i, Opera omnia, series 1, v. 20, стр. 21, особенно стр. 25 (Л. Ш.).

Отсюда получим такой ряд:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \pi\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1\cdot 9}{4\cdot 16} - \frac{1\cdot 9\cdot 25}{4\cdot 16\cdot 36} + \text{и т. д.}\right);$$

он не отличается от [ряда] примера 1. Это и не удивительно, поскольку наше выражение приводится к выражению примера 1, если положить $x = z^2$.

ЗАДАЧА 39

340. *Определить значение* [*при* $x = 1$] *интеграла* $\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$, *исчезающего при* $x = 0$.

РЕШЕНИЕ

Приведения, данные выше в § 118[1]), дают для этого случая

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1} = \frac{x^m(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+1}}{m+\mu+2} + \frac{\mu+2}{m+\mu+2}\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}};$$

если здесь взять $\mu = 2n-1$, то при $x = 1$ получим:

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2n+1}{m+2n+1}\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

В предыдущей задаче было найдено значение $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; для краткости положим его равным M и от него будем переходить к последующим значениям:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = M,$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{m+1}M,$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1\cdot 3}{(m+1)(m+3)}M,$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(m+1)(m+2)(m+3)}M,$$

и, вообще,

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{(m+1)(m+3)(m+5)\ldots(m+2n-1)}M.$$

Теперь нужно рассмотреть два случая в зависимости от того, будет ли $m-1$ четным или нечетным числом. Действительно, если $m-1$ есть четное число, то $M = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(m-2)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(m-1)}\cdot\frac{\pi}{2}$, если же $m-1$ есть нечетное число, то $M = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(m-2)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(m-1)}$.

---

[1]) В формуле III § 118 надо положить $\nu = 2$, $n = 2$, $a = 1$, $b = -1$.

Отсюда вытекают следующие значения:

$$\int dx\ \sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{4} \qquad \int x\,dx\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{3}$$

$$\int x^2\,dx\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} \qquad \int x^3\,dx\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$$

$$\int x^4\,dx\sqrt{1-x^2}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{4} \qquad \int x^5\,dx\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 4}{5\cdot 7}$$

$$\int x^6\,dx\sqrt{1-x^2}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{4} \qquad \int x^7\,dx\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 9}$$

$$\int dx\ (1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{3\pi}{16} \qquad \int x\ dx\ (1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{5}$$

$$\int x^2\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{3\pi}{16} \qquad \int x^3\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{7}$$

$$\int x^4\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1\cdot 3}{6\cdot 8}\cdot\frac{3\pi}{16} \qquad \int x^5\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{2\cdot 4}{7\cdot 9}$$

$$\int x^6\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{3\pi}{16} \qquad \int x^7\,dx\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6}{7\cdot 9\cdot 11}$$

$$\int dx\ (1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{5\pi}{32} \qquad \int x\ dx\ (1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{7}$$

$$\int x^2\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{5\pi}{32} \qquad \int x^3\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{9}$$

$$\int x^4\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{1\cdot 3}{8\cdot 10}\cdot\frac{5\pi}{32} \qquad \int x^5\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{2\cdot 4}{9\cdot 11}$$

$$\int x^6\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 10\cdot 12}\cdot\frac{5\pi}{32} \qquad \int x^7\,dx\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{7}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6}{9\cdot 11\cdot 13}$$

и т. д.

ЗАДАЧА 40

341. *Найти при* $x=1$ *значения интегралов* $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ и $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$, [*определенных так, чтобы они исчезли при* $x=0$].

РЕШЕНИЕ

Положим для самых простых случаев:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=A,\qquad \int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=B,\qquad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=A',\qquad \int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=B',\qquad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=C';$$

на основании первого приведения § 118, положив $a=1$ и $b=-1$, имеем для случая $x=1$

$$\int x^{m+n-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{m\nu}{m\nu+n\mu+n\nu}\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Следовательно, для первого интеграла, где $n=3$, $\nu=3$ и $\mu=-1$, имеем:

$$\int x^{m+2}\,dx\,(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}=\frac{m}{m+2}\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^3)^{-\frac{1}{3}},$$

а для второго, где $n=3$, $\nu=3$ и $\mu=-2$:

$$\int x^{m+2}\,dx\,(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}=\frac{m}{m+1}\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}.$$

Отсюда получим для [интегралов] первого вида:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=A \qquad \int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=B \qquad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=C$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{1}{3}A \qquad \int\frac{x^4\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{2}{4}B \qquad \int\frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{3}{5}C$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{1\cdot4}{3\cdot6}A \qquad \int\frac{x^7\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{2\cdot5}{4\cdot7}B \qquad \int\frac{x^8\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{3\cdot6}{5\cdot8}C$$

$$\int\frac{x^9\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}A \qquad \int\frac{x^{10}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{2\cdot5\cdot8}{4\cdot7\cdot10}B \qquad \int\frac{x^{11}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{3\cdot6\cdot9}{5\cdot8\cdot11}C$$

$$\int\frac{x^{12}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10}{3\cdot6\cdot9\cdot12}A \qquad \int\frac{x^{13}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11}{4\cdot7\cdot10\cdot13}B \qquad \int\frac{x^{14}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{3\cdot6\cdot9\cdot12}{5\cdot8\cdot11\cdot14}C$$

и т. д.,

а для [интегралов] второго вида:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=A' \qquad \int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=B' \qquad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=C'$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{1}{2}A' \qquad \int\frac{x^4\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{2}{3}B' \qquad \int\frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{3}{4}C'$$

$$\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{1\cdot4}{2\cdot5}A' \qquad \int\frac{x^7\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{2\cdot5}{3\cdot6}B' \qquad \int\frac{x^8\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{3\cdot6}{4\cdot7}C'$$

$$\int\frac{x^9\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{1\cdot4\cdot7}{2\cdot5\cdot8}A' \qquad \int\frac{x^{10}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{2\cdot5\cdot8}{3\cdot6\cdot9}B' \qquad \int\frac{x^{11}\,dx}{\sqrt{(1-x^3)^2}}=\frac{3\cdot6\cdot9}{4\cdot7\cdot10}C'$$

$$\int\frac{x^{12}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10}{2\cdot5\cdot8\cdot11}A' \qquad \int\frac{x^{13}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11}{3\cdot6\cdot9\cdot12}B' \qquad \int\frac{x^{14}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{3\cdot6\cdot9\cdot12}{4\cdot7\cdot10\cdot13}C'$$

и т. д.

Отсюда заключаем, что, вообще,

$$\int\frac{x^{3n}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{1\cdot4\cdot7\,\ldots\,(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\,\ldots\,3n}A \qquad \int\frac{x^{3n}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{1\cdot4\cdot7\,\ldots\,(3n-2)}{2\cdot5\cdot8\,\ldots\,(3n-1)}A'$$

$$\int\frac{x^{3n+1}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{2\cdot5\cdot8\,\ldots\,(3n-1)}{4\cdot7\cdot10\,\ldots\,(3n+1)}B \qquad \int\frac{x^{3n+1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{2\cdot5\cdot8\,\ldots\,(3n-1)}{3\cdot6\cdot9\,\ldots\,3n}B'$$

$$\int\frac{x^{3n+2}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{3\cdot6\cdot9\,\ldots\,3n}{5\cdot8\cdot11\,\ldots\,(3n+2)}C \qquad \int\frac{x^{3n+2}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{3\cdot6\cdot9\,\ldots\,3n}{4\cdot7\cdot10\,\ldots\,(3n+1)}C'$$

При этом надо заметить, что $C=\frac{1}{2}$ и $C'=1$ [1]).

---

[1]) В § 353 показано, что $A=B'=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, а из формул § 371 вытекает, что $A'=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ и $B=\frac{2}{3}$.

СЛЕДСТВИЕ 1

342. Эти формулы можно комбинировать различными способами, так что отсюда получаются замечательные теоремы, а именно:

$$\int \frac{x^{3n}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot \int \frac{x^{3n+2}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{AC'}{3n+1} = \frac{1}{3n+1}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}},$$

$$\int \frac{x^{3n+1}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot \int \frac{x^{3n}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{A'B}{3n+1} = \frac{1}{3n+1}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \cdot \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}},$$

$$\int \frac{x^{3n+2}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot \int \frac{x^{3n+1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2B'C}{3n+2} = \frac{1}{3n+2}\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

343. Так как теперь в расчет уже не входит отношение показателя к трем[1]), то будем иметь:

$$\int \frac{x^{\lambda-1}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot \int \frac{x^{\lambda+1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1}{\lambda}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}},$$

$$\int \frac{x^{\lambda}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot \int \frac{x^{\lambda-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1}{\lambda}\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}},$$

$$\int \frac{x^{\lambda}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot \int \frac{x^{\lambda-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{1}{\lambda}\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$

Поэтому из двух последних выражений заключаем:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$

---

[1]) Quia nunc ratio exponentium ad ternarium non amplius in computum ingreditur. Под «отношением показателя к трем» понимается вычет показателя по модулю 3. Аргументация Эйлера состоит в том, что формуле § 342 можно придать тот вид, в котором они переписаны в настоящем параграфе, где через λ обозначено *произвольное* натуральное число. Это обстоятельство он считает достаточным, чтобы утверждать справедливость формул при любом натуральном значении. Последняя формула настоящего параграфа, выведенная из второй и третьей, выражает соотношение $BA' = B'$. Подставляя в формулы настоящего параграфа последние шесть выражений § 341, можно получить еще ряд соотношений, из которых существенно новым будет $B' = A$.

Современного читателя поражают смелость, с которой Эйлер совершает свою экстраполяцию, и совершенная недостаточность его аргументации. Надо, однако, иметь в виду, что те же результаты Эйлер получает и иным путем (см. ниже §§ 353, 371); кроме того, этот виртуознейший вычислитель мог проверить результаты эмпирически.

Таким образом, категоричность суждения Эйлера отражает его полную уверенность в правильности результата.

СЛЕДСТВИЕ 3

344. Положим $x = z^n$ и $\lambda n = m$; тогда наши теоремы получат такой вид:

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt[3]{1-z^{3n}}} \cdot \int \frac{z^{m+2n-1}\,dz}{\sqrt[3]{(1-z^{3n})^2}} = \frac{1}{m} \int \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt[3]{1-z^{3n}}},$$

$$\int \frac{z^{m+n-1}\,dz}{\sqrt[3]{1-z^{3n}}} \cdot \int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt[3]{(1-z^{3n})^2}} = \frac{n}{m} \int \frac{z^{2n-1}\,dz}{\sqrt[3]{1-z^{3n}}} \cdot \int \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt[3]{(1-z^{3n})^2}} = \frac{1}{m} \int \frac{z^{2n-1}\,dz}{\sqrt[3]{(1-z^{3n})^2}}.$$

ЗАДАЧА 41

345. *По данному интегралу* $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}$ *найти интеграл* $\int \frac{x^{m+\lambda n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}$ *при* $x = 1$.

РЕШЕНИЕ

Для того чтобы этот интеграл был конечным, необходимо, чтобы m и k были положительными числами. Так как, согласно общему приведению[1]),

$$\int x^{m+n-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{m\nu}{m\nu + n(\mu+\nu)} \int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

то положим $\nu = n$, а $\mu = k - n$, так что $\mu + \nu = k$; тогда будем иметь:

$$\int \frac{x^{m+n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} = \frac{m}{m+k} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}.$$

Так как значение последнего интеграла дано, положим его равным A. Положим для краткости $(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}} = P$; тогда повторное применение этого приведения даст

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{P} = A,$$

$$\int \frac{x^{m+n-1}\,dx}{P} = \frac{m}{m+k} A,$$

$$\int \frac{x^{m+2n-1}\,dx}{P} = \frac{m(m+n)}{(m+k)(m+n+k)} A,$$

$$\int \frac{x^{m+3n-1}\,dx}{P} = \frac{m(m+n)(m+2n)}{(m+k)(m+n+k)(m+2n+k)} A$$

и, вообще,

$$\int \frac{x^{m+\alpha n-1}\,dx}{P} = \frac{m(m+n)(m+2n)\ldots(m+(\alpha-1)n)}{(m+k)(m+n+k)(m+2n+k)\ldots(m+(\alpha-1)n+k)} A.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

346. Пусть таким же образом при $x = 1$ имеем:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-q}{n}}} = B;$$

[1]) См. формулу I § 118.

для краткости будем писать Q вместо $(1-x^n)^{\frac{n-q}{n}}$; тогда будем иметь:

$$\int \frac{x^{p+\alpha n-1}\,dx}{Q} = \frac{p(p+n)(p+2n)\ldots(p+(\alpha-1)n)}{(p+q)(p+n+q)(p+2n+q)\ldots(p+(\alpha-1)n+q)}B.$$

Это выражение содержит столько же множителей, сколько и предыдущее.

СЛЕДСТВИЕ 2

347. Положим теперь $p=m+k$ для того, чтобы сделать второй числитель равным первому знаменателю. Тогда произведение этих двух выражений равно

$$\frac{m(m+n)(m+2n)\ldots(m+(\alpha-1)n)}{(m+k+q)(m+n+k+q)(m+2n+k+q)\ldots(m+(\alpha-1)n+k+q)}AB;$$

далее, пусть $m+k+q=m+n$, т. е. $q=n-k$; тогда это произведение будет равно $\frac{m}{m+\alpha n}AB$, и поэтому

$$\int \frac{x^{m+\alpha n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} \cdot \int \frac{x^{m+k+\alpha n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}} = \frac{m}{m+\alpha n}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} \cdot \int \frac{x^{m+k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}.$$

Эта теорема достойна всяческого внимания, ибо здесь не требуется ничего большего, кроме того, чтобы α было целым числом.

СЛЕДСТВИЕ 3

348. Поэтому напишем μ вместо $m+\alpha n$; получим:

$$\mu\int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} \cdot \int \frac{x^{\mu+k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}} = m\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} \cdot \int \frac{x^{m+k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}.$$

Если мы примем теперь $m+k=n$, т. е. $m=n-k$, то ввиду того, что при $x=1$

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}} = \frac{1-(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}{n-k} = \frac{1}{n-k},$$

получим [1]):

$$\int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} \cdot \int \frac{x^{\mu+k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{\mu}\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} = \frac{\pi}{\mu n\sin\frac{k\pi}{n}}.$$

Далее, положив $x=z^\nu$, а затем $\mu\nu=p$, $\nu n=q$ и $k=\lambda n$, получим:

$$\int \frac{z^{p-1}\,dz}{(1-z^q)^{1-\lambda}} \cdot \int \frac{z^{p+\lambda q-1}\,dz}{(1-z^q)^{\lambda}} = \frac{1}{p}\int \frac{z^{(1-\lambda)q-1}\,dz}{(1-z^q)^{1-\lambda}}\ ^{2)}.$$

[1]) В нижеследующей формуле последнее преобразование совершается на основании результата § 352, где Эйлер прямо указывает, что этот результат был использован в § 348.

[2]) В первом издании здесь была допущена опечатка: в правой части вместо $\frac{1}{p}$ было напечатано $\frac{n}{p}$; в Полном собрании сочинений Эйлера (серия I, т. 11) Л. Шле-

ПОЯСНЕНИЕ 1

349. Вытекающие отсюда частные теоремы таковы:

I. $n=2,\quad k=1:\quad \int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\int\frac{x^{\mu}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\mu}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2\mu}.$

II. $n=3,\quad k=1:\quad \int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\cdot\int\frac{x^{\mu}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{1}{\mu}\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{2\pi}{3\mu\sqrt{3}}.$

$n=3,\quad k=2:\quad \int \frac{x^{\mu+1}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}\cdot\int\frac{x^{\mu+1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=\frac{1}{\mu}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{2\pi}{3\mu\sqrt{3}}.$

III. $n=4,\quad k=1:\quad \int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{x^{\mu}\,dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\frac{1}{\mu}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\frac{\pi}{2\mu\sqrt{2}}.$

$n=4,\quad k=2:\quad \int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int\frac{x^{\mu+1}\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\mu}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4\mu}.$

$n=4,\quad k=3:\quad \int \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}\cdot\int\frac{x^{\mu+2}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\frac{1}{\mu}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\frac{\pi}{2\mu\sqrt{2}}.$

и т. д.

Здесь надо заметить, что выражение $\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}$ можно привести к рациональности[1]). Для этого положим $\frac{x^n}{1-x^n}=z^n$, т. е. $x^n=\frac{z^n}{1+z^n}$, откуда $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z(1+z^n)}$. Но наше выражение $=\int\left(\frac{x^n}{1-x^n}\right)^{\frac{n-k}{n}}\cdot\frac{dx}{x}$, поэтому оно сделается $=\int\frac{z^{n-k-1}\,dz}{1+z^n}$, причем надо определить интеграл так, чтобы он исчезал при $x=0$, а следовательно, при $z=0$; если затем положить $x=1$, т. е. $z=\infty$, то он даст то значение, которое нам здесь нужно. Но вскоре [§ 352] мы покажем, что значение этого интеграла $\int\frac{z^{n-k-1}\,dz}{1+z^n}$ при $z=\infty$, а следовательно, и значение интеграла $\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}$ [при $x=1$], может быть выражено через углы, значения которых я здесь только что привел. Далее, заслуживает упоминания то преобразование выражения $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}$, которое получается, если положить $1-x^n=z^n$. Оно дает $-\int\frac{z^{k-1}\,dz}{(1-z^n)^{\frac{n-m}{n}}}$, причем надо интегрировать так, чтобы интеграл исчезал при $x=0$, т. е. при $z=1$, после чего надо положить $x=1$, т. е. $z=0$. Мы придем к тому же, если, изменив знак

зингер исправил эту опечатку, но возникла другая ошибка: в тексте коэффициент неправильно записан в виде $\frac{\nu}{p}$, а в сноске указано, что в первом издании было якобы напечатано $\frac{1}{p}\int\frac{z^{(1-\lambda)q-1}\,dz}{(1-z^q)^{1-\lambda}}$.

[1]) То есть к интегралу от рационального выражения.

перед выражением $\int \frac{z^{k-1}\,dz}{(1-z^n)^{\frac{n-m}{n}}}$, будем интегрировать так, чтобы оно исчезало при $z=0$, а затем положим $z=1$: ничто не мешает написать x вместо z, и мы получим следующую замечательную теорему:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} = \int \frac{x^{k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}}.$$

Следовательно, в выражении такого вида можно поменять местами показатели m и k, конечно, для случая $x=1$. Таким образом, для предшествующего выражения, приводимого к рациональности (там мы имели $m=n-k$), получим:

$$\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} = \int \frac{x^{k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}.$$

Отсюда также следует, что при $z=\infty$ будем иметь:

$$\int \frac{z^{n-k-1}\,dz}{1+z^n} = \int \frac{z^{k-1}\,dz}{1+z^n}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

350. Исходя из этого[1]), можно выразить интегралы (для случая $x=1$) более сложных выражений с помощью изящных рядов. А именно, если положить в данном выше приведении $m+k=\mu$, т. е. $k=\mu-m$, то будем иметь:

$$\int \frac{x^{m+n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m+n-\mu}{n}}} = \frac{m}{\mu} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m+n-\mu}{n}}};$$

пусть теперь имеется дифференциальное выражение вида

$$dy = \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m+n-\mu}{n}}} (A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \text{ и т. д.}),$$

которое надо проинтегрировать так, чтобы y исчезало при $x=0$, и пусть требуется отыскать значение количества y в случае $x=1$. Если в этом случае положить

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m+n-\mu}{n}}} = O,$$

то искомое значение равно

$$O\left(A + \frac{m}{\mu}B + \frac{m(m+n)}{\mu(\mu+n)}C + \frac{m(m+n)(m+2n)}{\mu(\mu+n)(\mu+2n)}D + \text{ и т. д.}\right).$$

Следовательно, и обратно, если предложен ряд

$$A + \frac{m}{\mu}B + \frac{m(m+n)}{\mu(\mu+n)}C + \frac{m(m+n)(m+2n)}{\mu(\mu+n)(\mu+2n)}D + \text{ и т. д.},$$

---

[1]) Из второй формулы § 345.

то его сумма будет равна следующему интегральному выражению:

$$\frac{1}{O}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m+n-\mu}{n}}}(A+Bx^n+Cx^{2n}+Dx^{3n}+ \text{ и т. д.}),$$

если после интегрирования положить $x=1$. Поэтому, если удастся найти сумму ряда $A+Bx^n+Cx^{2n}+$ и т. д. и затем выполнить интегрирование, то можно будет получить сумму предложенного ряда.

ЗАДАЧА 42

351. *Найти для случая* $x=\infty$ *значение интеграла выражения* $\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$ [1], *определенного так, чтобы он исчезал при* $x=\infty$.

РЕШЕНИЕ

Выше, в § 77 мы уже представили интеграл этого выражения, определенный как раз так, чтобы он исчезал при $x=0$. Этот интеграл, если для краткости положить $\frac{\pi}{n}=\omega$, имеет такой вид:

$$\begin{aligned}
&-\frac{2}{n}\cos m\omega l\sqrt{1-2x\cos\omega+x^2}+\frac{2}{n}\sin m\omega\cdot\operatorname{arctg}\frac{x\sin\omega}{1-x\cos\omega}\\
&-\frac{2}{n}\cos 3m\omega l\sqrt{1-2x\cos 3\omega+x^2}+\frac{2}{n}\sin 3m\omega\cdot\operatorname{arctg}\frac{x\sin 3\omega}{1-x\cos 3\omega}\\
&-\frac{2}{n}\cos 5m\omega l\sqrt{1-2x\cos 5\omega+x^2}+\frac{2}{n}\sin 5m\omega\cdot\operatorname{arctg}\frac{x\sin 5\omega}{1-x\cos 5\omega}\\
&\qquad\vdots\\
&-\frac{2}{n}\cos\lambda m\omega l\sqrt{1-2x\cos\lambda\omega+x^2}+\frac{2}{n}\sin\lambda m\omega\cdot\operatorname{arctg}\frac{x\sin\lambda\omega}{1-x\cos\lambda\omega},
\end{aligned}$$

где λ обозначает наибольшее нечетное число, меньшее, чем показатель n; при этом, если само n — нечетное число, то сюда надо еще прибавить член $\pm\frac{1}{n}l(1+x)$ в зависимости от того, будет ли m нечетным или четным числом: в первом случае имеет силу знак плюс, во втором — знак минус.

Здесь мы ищем значение этого интеграла, получающееся при $x=\infty$. Прежде всего оценим члены, содержащие логарифмы. При $x=\infty$ имеем:

$$l\sqrt{1-2x\cos\lambda\omega+x^2}=l(x-\cos\lambda\omega)\,[2]=lx+l\left(1-\frac{\cos\lambda\omega}{x}\right)=lx,$$

ибо $\frac{\cos\lambda\omega}{x}=0$; поэтому логарифмические члены дадут

$$-\frac{2lx}{n}(\cos m\omega+\cos 3m\omega+\cos 5m\omega+\ldots+\cos\lambda m\omega)$$

$$\left(\pm\frac{lx}{n}, \text{ если } n \text{ нечетно}\right).$$

---

[1] Здесь опущено существенное указание, что m должно быть меньше n, в противном случае интеграл имеет бесконечное значение.

[2] В подкоренном выражении вместо 1 берется $\cos^2\lambda\omega$; эта замена не оказывает влияния на результат, ибо x бесконечно велико.

Положим, что этот ряд косинусов

$$\cos m\omega + \cos 3m\omega + \cos 5m\omega + \ldots + \cos \lambda m\omega = s;$$

тогда, умножив на $2 \sin m\omega$, будем иметь:

$$2s \sin m\omega = \sin 2m\omega + \sin 4m\omega + \sin 6m\omega + \ldots + \sin(\lambda+1)m\omega$$
$$- \sin 2m\omega - \sin 4m\omega - \sin 6m\omega - \ldots,$$

откуда получаем:

$$s = \frac{\sin(\lambda+1)m\omega}{2\sin m\omega}.$$

Если n — четное число, то $\lambda = n-1$, и таким образом логарифмические члены дают

$$-\frac{lx}{n}\cdot\frac{\sin nm\omega}{\sin m\omega} = -\frac{lx}{n}\cdot\frac{\sin m\pi}{\sin m\omega},$$

ибо $n\omega = \pi$.

Но так как m — целое число, то $\sin m\pi = 0$, и стало быть, эти члены исчезают. Если же n — нечетное число, то $\lambda = n-2$, и сумма логарифмических членов становится равной

$$-\frac{lx}{n}\cdot\frac{\sin(n-1)m\omega}{\sin m\omega} \pm \frac{lx}{n};$$

но $\sin(n-1)m\omega = \sin(m\pi - m\omega) = \pm \sin m\omega$; здесь верхний знак имеет силу, если m — нечетное число, а нижний — в противном случае; это имеет место также и для двузначности во втором члене; таким образом, получим:

$$\mp \frac{lx}{n}\cdot\frac{\sin m\omega}{\sin m\omega} \pm \frac{lx}{n} = 0.$$

Итак, логарифмические члены всегда взаимно уничтожаются. Это ясно и из того, что в противном случае интеграл был бы бесконечным, тогда как он должен быть, очевидно, конечным[1]).

Итак, остаются одни только углы; объединим их в одну сумму. Для этого рассмотрим $\operatorname{arctg}\frac{x\sin\lambda\omega}{1-x\cos\lambda\omega}$; эта дуга в случае $x=0$ исчезает, затем в случае $x=\frac{1}{\cos\lambda\omega}$ она становится квадрантом; при дальнейшем увеличении x эта дуга будет превосходить квадрант, пока, наконец, при $x=\infty$ ее тангенс не станет равным $-\frac{\sin\lambda\omega}{\cos\lambda\omega} = -\operatorname{tg}\lambda\omega = \operatorname{tg}(\pi-\lambda\omega)$, а потому сама дуга $= \pi - \lambda\omega$, вследствие чего все дуги, взятые вместе, дадут

$$\frac{2}{n}\left((\pi-\omega)\sin m\omega + (\pi+3\omega)\sin 3m\omega + (\pi-5\omega)\sin 5m\omega + \ldots + (\pi-\lambda\omega)\sin\lambda m\omega\right).$$

---

[1]) При условии, что $m < n$; вместо выражения $\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ при бесконечном значении x можно рассматривать выражение $\frac{x^{n-1}\,dx}{x^n}$.

Отсюда мы получим два ряда:

$$\frac{2\pi}{n}(\sin m\omega+\sin 3m\omega+\sin 5m\omega+\ldots+\sin\lambda m\omega)=\frac{2\pi}{n}p,$$

$$-\frac{2\omega}{n}(\sin m\omega+3\sin 3m\omega+5\sin 5m\omega+\ldots+\lambda\sin\lambda m\omega)=\frac{-2\omega}{n}q.$$

Исследуем каждый ряд в отдельности и начнем со второго. Выше мы получили

$$\cos m\omega+\cos 3m\omega+\cos 5m\omega+\ldots+\cos\lambda m\omega=s=\frac{\sin(\lambda+1)m\omega}{2\sin m\omega};$$

если мы будем рассматривать угол ω как переменный, то дифференцирование даст

$$-m\,d\omega(\sin m\omega+3\sin 3m\omega+5\sin 5m\omega+\ldots+\lambda\sin\lambda m\omega)$$
$$=\frac{(\lambda+1)m\,d\omega\cos(\lambda+1)m\omega}{2\sin m\omega}-\frac{m\,d\omega\sin(\lambda+1)m\omega\cos m\omega}{2\sin^2 m\omega};$$

следовательно,

$$-q=\frac{(\lambda+1)\cos(\lambda+1)m\omega}{2\sin m\omega}-\frac{\sin(\lambda+1)m\omega\cos m\omega}{2\sin^2 m\omega},$$

или

$$-q=\frac{\lambda\cos(\lambda+1)m\omega}{2\sin m\omega}-\frac{\sin\lambda m\omega}{2\sin^2 m\omega}.$$

Что касается другого[1]) ряда

$$p=\sin m\omega+\sin 3m\omega+\sin 5m\omega+\ldots+\sin\lambda m\omega,$$

то помножим обе части на $2\sin m\omega$; получим:

$$2p\sin m\omega=1-\cos 2m\omega-\cos 4m\omega-\cos 6m\omega-\ldots-\cos(\lambda+1)m\omega$$
$$+\cos 2m\omega+\cos 4m\omega+\cos 6m\omega+\ldots,$$

так что

$$p=\frac{1-\cos(\lambda+1)m\omega}{2\sin m\omega}.$$

Если теперь n будет четным числом, то $\lambda=n-1$, откуда

$$\cos(\lambda+1)m\omega=\cos nm\omega=\cos m\pi$$

и

$$\sin(\lambda+1)m\omega=\sin m\pi=0,$$

следовательно,

$$p=\frac{1-\cos m\pi}{2\sin m\omega}\quad\text{и}\quad -q=\frac{n\cos m\pi}{2\sin m\omega},$$

а стало быть, все дуги, взятые вместе, составляют

$$\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{1-\cos m\pi}{2\sin m\omega}+\frac{2\omega}{n}\cdot\frac{n\cos m\pi}{2\sin m\omega}=\frac{\pi}{n\sin m\omega},$$

ибо $n\omega=\pi$.

[1]) То есть первого.

Пусть теперь n — нечетное число, тогда $\lambda = n - 2$, откуда

$$\cos(\lambda+1)m\omega = \cos(m\pi - m\omega) \quad \text{и} \quad \sin(\lambda+1)m\omega = \sin(m\pi - m\omega),$$

т. е.

$$\cos(\lambda+1)m\omega = \cos m\pi \cos m\omega \quad \text{и} \quad \sin(\lambda+1)m\omega = -\cos m\pi \sin m\omega$$

и, следовательно,

$$p = \frac{1-\cos m\pi \cos m\omega}{2\sin m\omega} \quad \text{и} \quad -q = \frac{(n-1)\cos m\pi \cos m\omega}{2\sin m\omega} + \frac{\cos m\pi \cos m\omega}{2\sin m\omega}$$

откуда сумма всех углов есть

$$\frac{\pi(1-\cos m\pi \cos m\omega)}{n\sin m\omega} + \frac{\omega(n-1)\cos m\pi \cos m\omega}{n\sin m\omega} + \frac{\omega\cos m\pi \cos m\omega}{n\sin m\omega};$$

так как $n\omega = \pi$, то эта сумма приводится к

$$\frac{\pi}{n\sin m\omega}.$$

Итак, является ли показатель n четным или нечетным, при $x = \infty$ имеем:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin m\omega} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

352. Отсюда вытекает упомянутая выше (§ 349) формула

$$\int \frac{z^{n-k-1}\,dz}{1+z^n} = \int \frac{z^{k-1}\,dz}{1+z^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{(n-k)\pi}{n}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{k\pi}{n}}$$

(при $z=\infty$), откуда следует, что выражение

$$\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} = \int \frac{x^{k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}$$

(при $x=1$), которое, как мы показали, равно предыдущему выражению, также равно $\dfrac{\pi}{n\sin\frac{k\pi}{n}}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

353. Просмотрим бегло простейшие случаи для выражений обоих видов при $z=\infty$ и $x=1$:

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int \frac{dz}{1+z^3} = \int \frac{z\,dz}{1+z^3} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{\pi}{3\sin\frac{1}{3}\pi} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{dz}{1+z^4} = \int \frac{z^2dz}{1+z^4} = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{\pi}{4\sin\frac{1}{4}\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\int \frac{dz}{1+z^6} = \int \frac{z^4dz}{1+z^6} = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{1-x^6}} = \int \frac{x^4dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^5}} = \frac{\pi}{6\sin\frac{1}{6}\pi} = \frac{\pi}{3}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

354. Так как

$$\frac{1}{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}=1+\frac{k}{n}x^n+\frac{k(k+n)}{n\cdot 2n}x^{2n}+\frac{k(k+n)(k+2n)}{n\cdot 2n\cdot 3n}x^{3n}+\text{ и т. д.},$$

то, помножив на $x^{k-1}\,dx$, а затем интегрируя и полагая $x=1$, получим:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{1}{k}+\frac{k}{n(k+n)}+\frac{k(k+n)}{n\cdot 2n(k+2n)}+\frac{k(k+n)(k+2n)}{n\cdot 2n\cdot 3n(k+3n)}+\text{ и т. д.}$$

Если вместо k написать $n-k$, то получится также

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{1}{n-k}+\frac{n-k}{n(2n-k)}+\frac{(n-k)(2n-k)}{n\cdot 2n(3n-k)}+\frac{(n-k)(2n-k)(3n-k)}{n\cdot 2n\cdot 3n(4n-k)}+\text{ и т. д.}$$

ПОЯСНЕНИЕ

355. Для выражений, содержащих трансцендентные количества, мы уже выше нашли замечательные значения, которые интегралы принимают, когда переменному количеству придается некоторое определенное значение[1]). Поэтому здесь нет нужды снова рассматривать такие выражения. Но отсюда[2]) становится понятным, что особенно замечательны по сравнению со всеми прочими те значения интеграла $\int X\,dx$, которые соответствуют значениям переменного x, обращающим функцию X либо в бесконечность, либо в нуль; эти значения интегралов по большей части могут быть выражены значительно короче. Так, интегралы выражений $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}}}$ и $\int\frac{z^{m-1}\,dz}{1+z^n}$ принимают значения, более замечательные, чем все прочие, если $x=1$, а $z=\infty$; тогда знаменатель первого выражения исчезает, а знаменатель второго становится бесконечным. Далее, достойно всяческого внимания то обстоятельство, что, как мы здесь показали, значение интеграла $\int\frac{z^{m-1}\,dz}{1+z^n}$ при $z=\infty$ получает столь изящное выражение, как $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$. Так как доказательство этого было проведено со множеством околичностей[3]), то законно возникает подозрение, что его можно получить гораздо более легким путем, хотя [такого] способа пока еще не видно. Во всяком случае ясно, что это доказательство надо искать, исходя из рассмотрения синусов кратных углов. Во «Введении»[4]) я выразил $\sin\frac{m}{n}\pi$ через произведение бесчислен-

---

[1]) Pro formulis quantitates transcendentes continentibus supra jam praecipuos valores, quos integralia dum variabili certus quidam valor tribuitur, recipiunt, evolvimus. Мы затрудняемся, однако, указать, о каких именно результатах здесь говорится. Если речь идет о трансцендентных *первообразных*, то Эйлер мог иметь в виду §§ 314, 315, 316, 326. Но по точному смыслу фразы здесь речь должна идти о трансцендентных подынтегральных функциях.

[2]) По-видимому, имеются в виду интегралы, рассмотренные в настоящей главе.

[3]) Cuius demonstratio cum per tot ambages sit adstructa.

[4]) «Введение в анализ», § 184.

ных сомножителей, отсюда, как мы скоро увидим[1]), можно вывести ту же истину много легче; однако я не склонен считать этот путь наиболее естественным.

Это исследование найдет место в следующей главе, где я научу, как выражать значения, которые интегралы принимают (как и в этой главе) в каком-либо определенном случае, через бесконечные произведения, т. е. через произведения, состоящие из бесчисленных сомножителей. Поскольку это дает для Анализа обильные вспомогательные средства, отсюда можно ожидать и многих других приобретений.

---

[1]) См. ниже § 368.

ГЛАВА IX

О РАЗЛОЖЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ В БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

ЗАДАЧА 43

356. *Разложить в бесконечное произведение значение интеграла* $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, *которое он принимает в случае* $x=1$.

РЕШЕНИЕ

Тем же способом, каким мы выше приводили выражения с более высокими степенями к простому виду, мы будем здесь приводить выражение $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ последовательно ко все более высоким степеням. Так как при $x=1$ имеем:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m+1}{m} \int \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

то получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{1} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3} \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5} \int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ и т. д.}$$

Отсюда заключаем, что при неопределенном i будем иметь:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots 2i}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots (2i-1)} \int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

вплоть даже до того, когда вместо i берется бесконечное число. Теперь будем подобным же образом восходить от выражения $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; тогда найдем:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots (2i+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots 2i} \int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Теперь я замечаю, что если i—бесконечное число, то выражения

$$\int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad \int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

будут иметь отношение равенства. В самом деле, из основного приведения[1]) ясно, что если m — бесконечное число, то

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^{m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^{m+3}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Более того, имеем, вообще,

$$\int \frac{x^{m+\mu}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^{m+\nu}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,^{2)};$$

какова бы ни была разность между μ и ν, лишь бы она была конечной. Стало быть, имеем:

$$\int \frac{x^{2i}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^{2i+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

и если положить

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2i}{1\cdot 3\cdot 5\ldots (2i-1)} = M \quad \text{и} \quad \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots (2i+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots 2i} = N,$$

получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} : \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = M:N = \frac{M}{N}:1$$

(при $x=1$).

Но

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1, \quad \text{а} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

откуда следует, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{M}{N}.$$

Так как произведения M и N состоят из равного числа множителей, то, разделив первый множитель $\frac{2}{1}$ произведения M на первый множитель $\frac{3}{2}$ произведения N, второй множитель $\frac{4}{3}$ первого произведения на второй множитель $\frac{5}{4}$ второго произведения и т. д., находим:

$$\frac{M}{N} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdot \text{ и т. д.}$$

Отсюда получаем [значение интеграла] для случая $x=1$ в виде бесконечного произведения:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdot \text{ и т. д.} = \frac{\pi}{2}.$$

---

[1]) То есть из первой формулы настоящего параграфа.

[2]) Предыдущее рассуждение доказывает эту формулу для случая, когда $\nu-\mu$ есть четное число, между тем как в следующей формуле эта разность берется равной единице. Однако этот дефект восполняется в «Пояснении» § 359.

СЛЕДСТВИЕ 1

357. Итак, мы вывели для значения π то же бесконечное произведение, которое некогда нашел уже Валлис и правильность которого мы подтвердили во «Введении», идя по совершенно иному пути[1]). Итак,

$$\pi = 2\cdot\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdot\frac{8\cdot8}{7\cdot9}\cdot \quad \text{и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

358. Совершенно безразлично, в каком порядке располагать отдельные множители в этом произведении, лишь бы ни один не был пропущен. Так, например, можно несколько начальных множителей взять отдельно, а остальные расположить в должном порядке[2]), как, например,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{4\cdot6}{5\cdot5}\cdot\frac{6\cdot8}{7\cdot7}\cdot\frac{8\cdot10}{9\cdot9}\cdot \quad \text{и т. д.},$$

или

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot4}{1\cdot3}\cdot\frac{2\cdot6}{3\cdot5}\cdot\frac{4\cdot8}{5\cdot7}\cdot\frac{6\cdot10}{7\cdot9}\cdot\frac{8\cdot12}{9\cdot11}\cdot \quad \text{и т. д.},$$

или

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2\cdot4}{1\cdot5}\cdot\frac{4\cdot6}{3\cdot7}\cdot\frac{6\cdot8}{5\cdot9}\cdot\frac{8\cdot10}{7\cdot11}\cdot \quad \text{и т. д.},$$

или

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{2\cdot6}{1\cdot7}\cdot\frac{4\cdot8}{3\cdot9}\cdot\frac{6\cdot10}{5\cdot11}\cdot\frac{8\cdot12}{7\cdot13}\cdot \quad \text{и т. д.}$$

ПОЯСНЕНИЕ

359. Это разложение основывается на том, что значение интеграла $\int \frac{x^{i+\alpha}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, где i означает бесконечное число, будет одним и тем же, как бы ни изменялось конечное число α. Это ясно из приведения

$$\int \frac{x^{i-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{i+1}{i}\int \frac{x^{i+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

когда за α берутся значения, разнящиеся на 2. Но, кроме того, нет никакого сомнения в том, что интеграл $\int \frac{x^{i+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ заключен как в границах между интегралами $\int \frac{x^{i}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\int \frac{x^{i+2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, а так как последние равны между собой, то и все промежуточные выражения также должны быть равны им же. Это верно и в расширенном смысле для более

---

[1]) См. «Введение», т. I, § 185, стр. 171. Следует заметить, что вывод формулы Валлиса, данный в настоящей главе, по существу совпадает с выводом Валлиса.

[2]) debito ordine. Эти слова надо понимать не в том смысле, что порядок сомножителей сохраняется прежний; под «должным порядком» понимается такой, который подчинен простой закономерности.

сложных выражений, т. е. мы имеем:

$$\int \frac{x^{i+\alpha}\,dx}{(1-x^n)^k} = \int \frac{x^i\,dx}{(1-x^n)^k},$$

где i обозначает бесконечное число.

Действительно, так как

$$\int \frac{x^{m+n-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} = \frac{m}{m+k}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}},$$

то эти выражения при $m=\infty$ равны между собой. Отсюда видно, что предыдущие два выражения равны в тех случаях, когда $\alpha=n$, или $\alpha=2n$, или $\alpha=3n$ и т. д. Если же α имеет некоторое среднее значение, то и значение выражения должно занимать некое среднее [место] между двумя равными значениями; поэтому оно будет равно каждому из них. Установив это основное положение, мы сможем решить следующую задачу.

ЗАДАЧА 44

360. *Выразить через произведение бесчисленных множителей отношение двух следующих интегралов:*

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} \quad \text{и} \quad \int x^{\mu-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$$

в случае $x=1$.

РЕШЕНИЕ

Так как

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = \frac{m+k}{n}\int x^{m+n-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$$

(в случае $x=1$), то значение этого интеграла может быть приведено к интегралу, бесконечно удаленному от него[1]), следующим образом:

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$$
$$=\frac{(m+k)(m+k+n)(m+k+2n)\dots(m+k+in)}{m(m+n)(m+2n)\dots(m+in)}\int x^{m+in+n-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}},$$

где мы принимаем, что i означает бесконечное число.

Подобным же образом для другого предложенного выражения будем иметь:

$$\int x^{\mu-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$$
$$=\frac{(\mu+k)(\mu+k+n)(\mu+k+2n)\dots(\mu+k+in)}{\mu(\mu+n)(\mu+2n)\dots(\mu+in)}\int x^{\mu+in+n-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}};$$

но интегральные выражения, находящиеся в правой части обоих равенств,

---

[1]) ad integrale infinite remota; дословно: «к бесконечно отодвинутому интегралу».

так как их показатели бесконечны, будут равны, несмотря на то, что числа m и μ не равны между собой; при этом каждое из этих двух бесконечных произведений состоит из одного и того же числа множителей. Поэтому, если каждый множитель поделить на каждый, т. е. первый на первый, второй на второй и т. д., то отношение двух предложенных интегралов выразится так:

$$\frac{\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}}{\int x^{\mu-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}}=\frac{\mu(m+k)}{m(\mu+k)}\cdot\frac{(\mu+n)(m+k+n)}{(m+n)(\mu+k+n)}\cdot\frac{(\mu+2n)(m+k+2n)}{(m+2n)(\mu+k+2n)}\cdot \text{ и т. д.},$$

причем надо определить оба интеграла так, чтобы они исчезали при $x=0$, и затем положить $x=1$; необходимо также, чтобы буквы m, μ, n, k обозначали положительные числа.

СЛЕДСТВИЕ 1

361. Если разность чисел m и μ кратна числу n, то в найденном произведении бесчисленные множители взаимно уничтожаются и останется конечное число множителей. Так, например, если $\mu=m+n$, будем иметь:

$$\frac{(m+n)(m+k)}{m(m+k+n)}\cdot\frac{(m+2n)(m+k+n)}{(m+n)(m+k+2n)}\cdot\frac{(m+3n)(m+k+2n)}{(m+2n)(m+k+3n)}\cdot \text{ и т. д.},$$

а это выражение приводится к $\frac{m+k}{m}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

362. Однако же значение данного выше произведения в силу необходимости конечно; это ясно как из интегральных выражений, отношение которых оно выражает, так и из того, что в отдельных множителях числители и знаменатели поочередно то бо́льшие, то меньшие[1].

СЛЕДСТВИЕ 3

363. Если положим $m=1$, $\mu=3$, $n=4$ и $k=2$, то будем иметь:

$$\frac{\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}}{\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}}=\frac{3\cdot 3}{1\cdot 5}\cdot\frac{7\cdot 7}{5\cdot 9}\cdot\frac{11\cdot 11}{9\cdot 13}\cdot\frac{15\cdot 15}{13\cdot 17}\cdot \text{ и т. д.},$$

а выше мы нашли, что произведение этих двух выражений $=\frac{\pi}{4}$.

ЗАДАЧА 45

364. *Значение, которое принимает при* $x=1$ *интеграл*

$$\int x^{m-1}\,dx\,\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}},$$

выразить через бесконечное произведение.

---

[1]) То есть в множителях $\frac{m+n}{m}$, $\frac{m+k}{m+k+n}$, $\frac{m+2n}{m+n}$, ... числитель поочередно то больше знаменателя, то меньше.

РЕШЕНИЕ

Так как в предыдущей задаче отношение этого интеграла к другому интегралу $\int x^{\mu-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}$ было выражено в виде бесконечного произведения, то следует в этом последнем интеграле взять μ таким, чтобы интеграл можно было взять. Поэтому возьмем $\mu=n$; тогда интеграл станет равным

$$C-\frac{1}{k}(1-x^n)^{\frac{k}{n}}=\frac{1-(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}{k};$$

он определен так, что исчезает при $x=0$; затем положим $x=1$, как требует условие, и так как этот интеграл станет $=\frac{1}{k}$, мы получим интеграл предложенного выражения для случая $x=1$ в следующем виде:

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}=\frac{1}{k}\cdot\frac{n(m+k)}{m(k+n)}\cdot\frac{2n(m+k+n)}{(m+n)(k+2n)}\cdot\frac{3n(m+k+2n)}{(m+2n)(k+3n)}\cdot\text{ и т. д.}$$

Перераспределив отдельные множители, мы можем представить этот интеграл в следующем виде:

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}=\frac{n}{mk}\cdot\frac{2n(m+k)}{(m+n)(k+n)}\cdot\frac{3n(m+k+n)}{(m+2n)(k+2n)}\cdot\frac{4n(m+k+2n)}{(m+3n)(k+3n)}\cdot\text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 1

365. Так как в этом выражении буквы m и k можно поменять местами, то, следовательно, при $x=1$ равны друг другу следующие интегралы:

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}=\int x^{k-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}};$$

это равенство мы вывели уже выше в § 349.

СЛЕДСТВИЕ 2

366. Если $m=n-k$, то значение нашего выражения равно значению выражения $\int\frac{z^{k-1}\,dz}{1+z^n}$ при $z=\infty$. Поэтому, если мы (ввиду того, что $m+k=n$) положим $m=\frac{n+\alpha}{2}$ и $k=\frac{n-\alpha}{2}$, то будем иметь:

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n+\alpha}{2n}}}=\int\frac{x^{k-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-\alpha}{2n}}}=\int\frac{z^{k-1}\,dz}{1+z^n}=\frac{z^{m-1}\,dz}{1+z^n}$$
$$=\frac{4n}{n^2-\alpha^2}\cdot\frac{2\cdot4n^2}{9n^2-\alpha^2}\cdot\frac{4\cdot6n^2}{25n^2-\alpha^2}\cdot\frac{6\cdot8n^2}{49n^2-\alpha^2}\cdot\text{ и т. д.}$$

Это произведение можно также представить следующим образом:

$$\frac{2}{n-\alpha}\cdot\frac{2n\cdot2n}{(n+\alpha)(3n-\alpha)}\cdot\frac{4n\cdot4n}{(3n+\alpha)(5n-\alpha)}\cdot\frac{6n\cdot6n}{(5n+\alpha)(7n-\alpha)}\cdot\text{ и т. д.}$$

Следовательно, оно (согласно § 351) выражает также значение количества

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{\pi}{n\cos\frac{\alpha\pi}{2n}}$$

СЛЕДСТВИЕ 3

367. Если же мы просто положим $k=n-m$, то

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}}=\int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}}=\int\frac{z^{m-1}\,dz}{1+z^n}=\int\frac{z^{n-m-1}\,dz}{1+z^n}$$
$$=\frac{1}{n-m}\cdot\frac{n^2}{m(2n-m)}\cdot\frac{4n^2}{(n+m)(3n-m)}\cdot\frac{9n^2}{(2n+m)(4n-m)}\cdot \text{ и т. д.}$$

Это выражение получается из вида, найденного первоначально [1]). Разумеется, это равенство имеет место, если положить $x=1$ и $z=\infty$.

ПОЯСНЕНИЕ 1

368. Во «Введении» [2]) я нашел уже для умножения углов следующее равенство:

$$\sin\frac{m\pi}{n}=\frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\cdot \text{ и т. д.}$$

Но так как $\sin\frac{(n-m)\pi}{n}=\sin\frac{m\pi}{n}$, то, принимая во внимание, что $n-m=k$, мы получим также

$$\sin\frac{m\pi}{n}=\frac{k\pi}{n}\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{k^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{k^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{k^2}{16n^2}\right)\cdot \text{ и т. д.,}$$

что́ приводится к такому виду:

$$\sin\frac{m\pi}{n}=\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{(n-k)(n+k)}{n^2}\cdot\frac{(2n-k)(2n+k)}{4n^2}\cdot\frac{(3n-k)(3n+k)}{9n^2}\cdot \text{ и т. д.,}$$

или, если заменить k его прежним значением,

$$\sin\frac{m\pi}{n}=\frac{\pi}{n}(n-m)\frac{m(2n-m)}{n^2}\cdot\frac{(n+m)(3n-m)}{4n^2}\cdot\frac{(2n+m)(4n-m)}{9n^2}\cdot \text{ и т. д.}$$

Отсюда для $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$ получаем, очевидно, то же самое произведение, которое выражает значение наших интегралов, и таким образом, мы имеем новое доказательство той замечательной теоремы, которую мы выше [§ 351] преодолели на многочисленных окольных путях [и которая устанавливает], что

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}}=\int\frac{x^{n-m-1}\,dx}{(1-x^n)^{\frac{n-m}{n}}}=\int\frac{z^{m-1}\,dz}{1+z^n}=\int\frac{z^{n-m-1}\,dz}{1+z^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

---

[1]) То есть из последней формулы § 364.

[2]) «Введение», т. I, § 184.

ПОЯСНЕНИЕ 2

369. Чтобы наше выражение имело более широкое применение, положим $\frac{k}{n}=\frac{\mu}{\nu}$, т. е. $k=\frac{\mu n}{\nu}$; тогда найдем:

$$\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}$$

$$=\frac{\nu}{m\mu}\cdot\frac{2\,(m\nu+n\mu)}{(m+n)\,(\mu+\nu)}\cdot\frac{3\,(m\nu+n\,(\mu+\nu))}{(m+2n)\,(\mu+2\nu)}\cdot\frac{4\,(m\nu+n\,(\mu+2\nu))}{(m+3n)\,(\mu+3\nu)}\cdot\ \text{и т. д.}$$

$$=\frac{\nu}{m\mu}\cdot\frac{2\,(m\nu+n\mu)}{(m+n)\,(\mu+\nu)}\cdot\frac{3\,(m\nu+n\mu+n\nu)}{(m+2n)(\mu+2\nu)}\cdot\frac{4\,(m\nu+n\mu+2n\nu)}{(m+3n)\,(\mu+3\nu)}\cdot\frac{5\,(m\nu+n\mu+3n\nu)}{(m+4n)\,(\mu+4\nu)}\cdot\ \text{и т. д.}$$

В этом выражении буквы m, n (соответственно) переместимы с буквами μ, ν, исключая лишь первый множитель, который не связан с остальными законом непрерывности[1]); если же мы помножим на n, то переместительность будет полной; отсюда мы заключаем, что

$$n\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{\mu}{\nu}-1}=\nu\int x^{\mu-1}\,dx\,(1-x^\nu)^{\frac{m}{n}-1}.$$

В случае, когда $\nu=n$, это равенство приводится к прежде отмеченному. Кроме того, будет полезно рассмотреть частные случаи, получающиеся при различных значениях μ и ν.

ПРИМЕР 1

370. Пусть $\mu=1$ и $\nu=2$; тогда будем иметь:

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^n}}=\frac{2}{m}\cdot\frac{2\,(2m+n)}{3\,(m+n)}\cdot\frac{3\,(2m+3n)}{5\,(m+2n)}\cdot\frac{4\,(2m+5n)}{7\,(m+3n)}\cdot\ \text{и т. д.}=\frac{2}{n}\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^2)^{n-m}}}.$$

Это выражение можно представить в следующем более удобном виде:

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^n}}=\frac{2}{m}\cdot\frac{4\,(2m+n)}{3\,(2m+2n)}\cdot\frac{6\,(2m+3n)}{5\,(2m+4n)}\cdot\frac{8\,(2m+5n)}{7\,(2m+6n)}\cdot\ \text{и т. д.},$$

откуда выводятся следующие очень частные случаи:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{4\cdot6}{5\cdot5}\cdot\frac{6\cdot8}{7\cdot7}\cdot\ \text{и т. д.}\qquad=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=2\cdot\frac{4\cdot5}{3\cdot8}\cdot\frac{6\cdot11}{5\cdot14}\cdot\frac{8\cdot17}{7\cdot20}\cdot\frac{10\cdot23}{9\cdot26}\cdot\ \text{и т. д.}\ =\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}=1\cdot\frac{4\cdot7}{3\cdot10}\cdot\frac{6\cdot13}{5\cdot16}\cdot\frac{8\cdot19}{7\cdot22}\cdot\frac{10\cdot25}{9\cdot28}\cdot\ \text{и т. д.}\ =\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}},$$

---

[1]) Quo nostra formula latius pateat; дословно: «чтобы наше выражение простиралось шире». В других местах Эйлер употребляет выражение formula latius pateat в смысле «формула явления более общая». В данном случае такой перевод невозможен, так как введение нового обозначения не придает формуле более общего вида. К тому же сам Эйлер в начале § 374 высказывает суждение, которое в буквальном смысле противоречит сказанному здесь. Он говорит: Caeterum hae formulae, in quas litteras μ et ν introduxi, latius non patent quam primum consideratae, т. е. дословно: «впрочем выражения, в которые я ввел буквы μ и ν, *не простираются* ниже, чем сначала рассмотренные». По существу противоречия тут нет: подстановка $k=\frac{\mu n}{\nu}$ не придает формуле большей общности, но позволяет легче усмотреть новые закономерности.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2\cdot\frac{4\cdot 3}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 7}{5\cdot 9}\cdot\frac{8\cdot 11}{7\cdot 13}\cdot\frac{10\cdot 15}{9\cdot 17}\cdot \quad \text{и т. д.} \quad = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 6}\cdot\frac{6\cdot 8}{5\cdot 10}\cdot\frac{8\cdot 12}{7\cdot 14}\cdot\frac{10\cdot 16}{9\cdot 18}\cdot \quad \text{и т. д.} \quad = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

или

$$= 1\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 10}{9\cdot 9}\cdot \quad \text{и т. д.},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4\cdot 5}{3\cdot 7}\cdot\frac{6\cdot 9}{5\cdot 11}\cdot\frac{18\cdot 13}{7\cdot 15}\cdot\frac{10\cdot 17}{9\cdot 19}\cdot \quad \text{и т. д.} \quad = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{2}{4}\cdot\frac{4\cdot 6}{3\cdot 8}\cdot\frac{6\cdot 10}{5\cdot 12}\cdot\frac{8\cdot 14}{7\cdot 16}\cdot\frac{10\cdot 18}{9\cdot 20}\cdot \quad \text{и т. д.} \quad = \frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР 2

371. Пусть $\mu = 1$, а $\nu = 3$; тогда будем иметь:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^n)^2}} = \frac{3}{m}\cdot\frac{2(3m+n)}{4(m+n)}\cdot\frac{3(3m+4n)}{7(m+2m)}\cdot\frac{4(3m+7n)}{10(m+3n)}\cdot \quad \text{и т. д.} = \frac{3}{n}\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^3)^{n-m}}},$$

откуда выводим следующие очень частные случаи:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} = \frac{3}{1}\cdot\frac{2\cdot 5}{4\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 11}{7\cdot 5}\cdot\frac{4\cdot 17}{10\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 23}{13\cdot 9}\cdot \quad \text{и т. д.} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{3}{1}\cdot\frac{2\cdot 6}{4\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 15}{7\cdot 7}\cdot\frac{4\cdot 24}{10\cdot 10}\cdot\frac{5\cdot 33}{13\cdot 13}\cdot \quad \text{и т. д.} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

$$\text{или} \quad = \frac{3}{1}\cdot\frac{2\cdot 6}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 9}{7\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 12}{10\cdot 10}\cdot\frac{11\cdot 15}{13\cdot 13}\cdot \quad \text{и т. д.},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2\cdot 9}{4\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 18}{7\cdot 8}\cdot\frac{4\cdot 27}{10\cdot 11}\cdot\frac{5\cdot 36}{13\cdot 14}\cdot \quad \text{и т. д.} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

$$\text{или} \quad = \frac{3}{2}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 9}{7\cdot 8}\cdot\frac{9\cdot 12}{10\cdot 11}\cdot\frac{12\cdot 15}{13\cdot 14}\cdot \quad \text{и т. д.},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^4)^2}} = \frac{3}{1}\cdot\frac{2\cdot 7}{4\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 19}{7\cdot 9}\cdot\frac{4\cdot 31}{10\cdot 13}\cdot\frac{5\cdot 43}{13\cdot 17}\cdot \quad \text{и т. д.} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^4)^2}} = 1\cdot\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 25}{7\cdot 11}\cdot\frac{4\cdot 37}{10\cdot 15}\cdot\frac{5\cdot 49}{13\cdot 19}\cdot \quad \text{и т. д.} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^3}}.$$

ПРИМЕР 3

372. Пусть $\mu = 2$ и $\nu = 3$; тогда будем иметь:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[3]{1-x^n}} = \frac{3}{2m}\cdot\frac{2(3m+2n)}{5(m+n)}\cdot\frac{3(3m+5n)}{8(m+2n)}\cdot\frac{4(3m+8n)}{11(m+3n)}\cdot \quad \text{и т. д.} = \frac{3}{n}\int \frac{x\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^3)^{n-m}}}$$

откуда выводим следующие частные случаи:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2\cdot 7}{5\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 13}{8\cdot 5}\cdot\frac{4\cdot 19}{11\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 25}{14\cdot 9}\cdot \quad \text{и т. д.} = \frac{3}{2}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2\cdot 9}{5\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 18}{8\cdot 7}\cdot\frac{4\cdot 27}{11\cdot 10}\cdot\frac{5\cdot 36}{14\cdot 13}\cdot \quad \text{и т. д.} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$$

$$\text{или } = \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} = \frac{9\cdot 9}{8\cdot 10} = \frac{12\cdot 12}{11\cdot 13}\cdot \quad \text{и т. д.,}$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2\cdot 12}{5\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 21}{8\cdot 8}\cdot\frac{4\cdot 30}{11\cdot 11}\cdot\frac{5\cdot 39}{14\cdot 14}\cdot \text{ и т. д.} = \int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

$$\text{или } = \frac{3}{4}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{7\cdot 9}{8\cdot 8}\cdot\frac{10\cdot 12}{11\cdot 11}\cdot\frac{13\cdot 15}{14\cdot 14}\cdot \quad \text{и т. д.,}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2\cdot 11}{5\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 23}{8\cdot 9}\cdot\frac{4\cdot 35}{11\cdot 13}\cdot\frac{5\cdot 47}{14\cdot 17}\cdot \text{ и т. д.} = \frac{3}{4}\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}},$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1-x^4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 17}{5\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 29}{8\cdot 11}\cdot\frac{4\cdot 41}{11\cdot 15}\cdot\frac{5\cdot 53}{14\cdot 19}\cdot \text{ и т. д.} = \frac{3}{4}\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{1-x^3}}.$$

ПРИМЕР 4

373. Пусть $\mu = 1$ и $\nu = 4$, тогда будем иметь:

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^n)^3}} = \frac{4}{m}\cdot\frac{2(4m+n)}{5(m+n)}\cdot\frac{3(4m+5n)}{9(m+2n)}\cdot\frac{4(4m+9n)}{13(m+3n)}\cdot \text{ и т. д.} = \frac{4}{n}\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^4)^{n-m}}},$$

откуда получаются следующие частные случаи:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}} = \frac{4}{1}\cdot\frac{2\cdot 6}{5\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 14}{9\cdot 5}\cdot\frac{4\cdot 22}{13\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 30}{17\cdot 9}\cdot \text{ и т. д.} = 2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$\text{или } = \frac{4}{1}\cdot\frac{4\cdot 3}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 7}{5\cdot 9}\cdot\frac{8\cdot 11}{7\cdot 13}\cdot\frac{10\cdot 15}{9\cdot 17}\cdot \quad \text{и т. д.,}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}} = \frac{4}{1}\cdot\frac{2\cdot 7}{5\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 19}{9\cdot 7}\cdot\frac{4\cdot 31}{13\cdot 10}\cdot\frac{5\cdot 43}{17\cdot 13}\cdot \text{ и т. д.} = \frac{4}{3}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^4)^2}},$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2\cdot 11}{5\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 23}{9\cdot 8}\cdot\frac{4\cdot 35}{13\cdot 11}\cdot\frac{5\cdot 47}{17\cdot 14}\cdot \text{ и т. д.} = \frac{4}{3}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{4}{1}\cdot\frac{2\cdot 8}{5\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 24}{9\cdot 9}\cdot\frac{4\cdot 40}{13\cdot 13}\cdot\frac{5\cdot 56}{17\cdot 17}\cdot \text{ и т. д.} = \int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}$$

$$\text{или } = \frac{4}{1}\cdot\frac{4\cdot 4}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 12}{9\cdot 9}\cdot\frac{8\cdot 20}{13\cdot 13}\cdot\frac{10\cdot 28}{17\cdot 17}\cdot \quad \text{и т. д.,}$$

$$\text{или же } = \frac{4}{1}\cdot\frac{2\cdot 8}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 12}{9\cdot 9}\cdot\frac{10\cdot 16}{13\cdot 13}\cdot\frac{14\cdot 20}{17\cdot 17}\cdot \quad \text{и т. д.,}$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{2\cdot 16}{5\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 32}{9\cdot 11}\cdot\frac{4\cdot 48}{13\cdot 15}\cdot\frac{5\cdot 64}{17\cdot 19}\cdot \text{ и т. д.} = \int\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$$

$$\text{или } = \frac{4}{3}\cdot\frac{4\cdot 8}{5\cdot 7}\cdot\frac{6\cdot 16}{9\cdot 11}\cdot\frac{8\cdot 24}{13\cdot 15}\cdot\frac{10\cdot 32}{17\cdot 19}\cdot \quad \text{и т. д.,}$$

$$\text{или же } = \frac{4}{3}\cdot\frac{4\cdot 8}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 12}{9\cdot 11}\cdot\frac{12\cdot 16}{13\cdot 15}\cdot\frac{16\cdot 20}{17\cdot 19}\cdot \quad \text{и т. д.}$$

В этом и предыдущих примерах уже содержится случай $\mu = 3$ и $\nu = 4$

ПОЯСНЕНИЕ

374. Впрочем, выражения, в которые я ввел буквы μ и ν, не распространяются шире, чем выражения, которые были рассмотрены сначала[1]).

[1]) См. первое подстрочное примечание к § 369.

Действительно, ряды[1]) зависят от двух дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{\mu}{\nu}$, а так как последние всегда можно привести к общему знаменателю, то достаточно исследовать выражения

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \int \frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}.$$

Так как их значение в случае $x=1$ равно следующему произведению:

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{n\,(m+k)}{m\,(k+n)}\cdot\frac{2n\,(m+k+n)}{(m+n)\,(k+2n)}\cdot\frac{3n\,(m+k+2n)}{(m+2n)(k+3n)}\cdot \text{ и т. д.},$$

то, если в каждом отдельном члене переставить множители знаменателя и иначе распределить члены, то же произведение получит такой вид:

$$\frac{m+k}{mk}\cdot\frac{n\,(m+k+n)}{(m+n)\,(k+n)}\cdot\frac{2n\,(m+k+2n)}{(m+2n)\,(k+2n)}\cdot\frac{3n\,(m+k+3n)}{(m+3n)\,(k+3n)}\cdot \text{ и т. д.}$$

Этот вид кажется более удобным для запоминания. Так как подобным же образом

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

$$= \frac{p+q}{pq}\cdot\frac{n\,(p+q+n)}{(p+n)\,(q+n)}\cdot\frac{2n\,(p+q+2n)}{(p+2n)\,(q+2n)}\cdot\frac{3n\,(p+q+3n)}{(p+3n)\,(q+3n)}\cdot \text{ и т. д.},$$

то, разделив предыдущую формулу на последнюю, получим:

$$\frac{\int x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}}{\int x^{p-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}}$$

$$= \frac{pq\,(m+k)}{mk\,(p+q)}\cdot\frac{(p+n)\,(q+n)\,(m+k+n)}{(m+n)\,(k+n)\,(p+q+n)}\cdot\frac{(p+2n)(q+2n)(m+k+2n)}{(m+2n)\,(k+2n)\,(p+q+2n)}\cdot \text{ и т. д.}$$

Все члены этого выражения построены по одному и тому же закону. Исходя отсюда, можно вывести замечательные сопоставления таких выражений; чтобы о них легче было упоминать, я для краткости буду применять следующее сокращенное написание.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

375. *Значение, которое принимает интегральное выражение* $\int x^{p-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}$ *при* $x=1$, *мы для краткости обозначим знаком* $\left(\frac{p}{q}\right)$, *где надо еще подразумевать показатель* n, *который при сравнении нескольких таких выражений я предполагаю одним и тем же.*

СЛЕДСТВИЕ 1

376. Прежде всего ясно, что $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$ и что каждое из этих выражений равно

$$\frac{p+q}{pq}\cdot\frac{n\,(p+q+n)}{(p+n)\,(q+n)}\cdot\frac{2n\,(p+q+2n)}{(p+2n)\,(q+2n)}\cdot \text{ и т. д.}$$

[1]) series; имеются в виду бесконечные произведения, в которые разлагается каждый из интегралов § 369.

Закон роста этих членов очевиден, поскольку отдельные множители как в числителе, так и в знаменателе непрерывно увеличиваются на одно и то же число n, так что, зная первый член, уже легко образовать следующие.

СЛЕДСТВИЕ 2

377. Далее, если $p=n$, то выражение интегрируется и, очевидно, $\left(\frac{n}{q}\right)=\left(\frac{q}{n}\right)=\frac{1}{q}$; точно так же $\left(\frac{p}{n}\right)=\left(\frac{n}{p}\right)=\frac{1}{p}$, [если $q=n$]. Далее, так как [§ 352]

$$\int x^{p-1}\,dx\,(1-x^n)^{-\frac{p}{n}}=\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}}$$

и так как [в этом случае] $q-n=-p$, т. е. $p+q=n$, то

$$\left(\frac{p}{n-p}\right)=\left(\frac{n-p}{p}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}}.$$

Поэтому значение выражения $\left(\frac{p}{q}\right)$ можно вычислить до конца всякий раз, как либо $p=n$, либо $q=n$, либо $p+q=n$.

СЛЕДСТВИЕ 3

378. Так как мы нашли [§ 345] приведение

$$\int x^{p+n-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}=\frac{p}{p+q}\int x^{p-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}},$$

то, следовательно,

$$\left(\frac{p+n}{q}\right)=\frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right),$$

а отсюда

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)=\frac{p-n}{p+q-n}\left(\frac{p-n}{q}\right)=\frac{q-n}{p+q-n}\left(\frac{p}{q-n}\right),$$

далее также

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{(p-n)(q-n)}{(p+q-n)(p+q-2n)}\cdot\left(\frac{p-n}{q-n}\right).$$

Следовательно, числа p и q можно всегда опустить ниже n.

ЗАДАЧА 46

379. *Найти различные произведения двух выражений рассматриваемого рода, так чтобы эти произведения были равны между собой.*

РЕШЕНИЕ

Пусть, следовательно, требуется найти числа a, b, c, d и p, q, r, s так, чтобы $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{r}{s}\right)$.

Так как[1])

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{a+b}{ab}\cdot\frac{n\,(a+b+n)}{(a+n)\,(b+n)}\cdot \text{ и т. д.},\quad \left(\frac{c}{d}\right)=\frac{c+d}{cd}\cdot\frac{n\,(c+d+n)}{(c+n)(d+n)}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p+q}{pq}\cdot\frac{n\,(p+q+n)}{(p+n)\,(q+n)}\cdot \text{ и т. д.},\quad \left(\frac{r}{s}\right)=\frac{r+s}{rs}\cdot\frac{n\,(r+s+n)}{(r+n)\,(s+n)}\cdot \text{ и т. д.},$$

то это произойдет, если будет

$$\frac{(a+b)\,(c+d)}{abcd}=\frac{(p+q)\,(r+s)}{pqrs},$$

т. е. если

$$abcd\,(p+q)\,(r+s)=pqrs\,(a+b)\,(c+d),$$

[и притом] так, чтобы множители (их по шести с той и с другой стороны) были порознь равны[2]).

Значит, среди четырех множителей $abcd$ и [четырех множителей] $pqrs$ должно быть, по крайней мере, по два соответственно равных. Таким образом, пусть $s=d$; тогда должно получиться

$$abc\,(p+q)\,(r+d)=pqr\,(a+b)\,(c+d).$$

I. Возьмем в качестве второго множитель r; так как он не может быть равным множителю c, ибо в этом случае мы имели бы $\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{r}{s}\right)$, то положим $r=b$, так что

$$ac\,(p+q)\,(b+d)=pq\,(a+b)\,(c+d).$$

Здесь ни p ни q не может равняться $p+q$. Поэтому необходимо положить:

1) Либо $p+q=a+b$; тогда

$$ac\,(b+d)=pq\,(c+d);$$

но ни c, ни $b+d$ не может быть равно $c+d$, ибо в этом случае получилось бы либо $d=0$, либо $b=c$, а в последнем случае было бы $\left(\frac{r}{s}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)$. Значит, остается [только одна возможность]: $a=c+d$ и $pq=c\,(b+d)$; поэтому $p=b+d$ и $q=c$, откуда получается

$$\left(\frac{c+d}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{b+d}{c}\right)\left(\frac{b}{d}\right).$$

2) Либо $p+q=c+d$, а следовательно, $ac\,(b+d)=pq\,(a+b)$. В этом случае c не может быть равно ни p, ни q, ибо [в обоих этих случаях] получилось бы $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)$. Значит, $c=a+b$, так что $pq=a\,(b+d)$. Стало быть, $p=a$, $q=b+d$, $r=b$, $s=d$ и, следовательно,

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a+b}{d}\right)=\left(\frac{b+d}{a}\right)\left(\frac{b}{d}\right).$$

II. Так как случай $r=a$ не отличается от предыдущего (вследствие переместимости букв a и b), то положим $r=p+q$; тогда получится:

$$abc(d+p+q)=pq\,(a+b)\,(c+d).$$

Так как r не может быть равно c, то множитель $d+p+q$ нельзя положить равным ни p, ни q, ни $c+d$, остается [только одна возмож-

[1]) См. § 376.

[2]) ita ut, cum utrinque sex sint factores, singuli singulis sint aequales.

ность]: $d+p+q=a+b$, и тогда $abc=pq(c+d)$. Так как c не может быть равно $c+d$, а p и q равноправны, то пусть $p=c$; тогда $q=a+b-c-d$ и $ab=(c+d)(a+b-c-d)$; следовательно, $a=c+d$, $q=b$, $p=c$, $r=b+c$, $s=d$. Таким образом, получается:

$$\left(\frac{c+d}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b+c}{d}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

380. Эти решения сводятся почти к одному и тому же[1]), и из них получаются три равных произведения двух выражений:

$$\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{c+d}{b}\right)=\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b+c}{d}\right)=\left(\frac{b}{d}\right)\left(\frac{b+d}{c}\right)$$

или же в буквах p, q, r:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

381. Если разложить эти выражения[2]) в бесконечные произведения, то найдем:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\frac{p+q+r}{pqr}\cdot\frac{n^2(p+q+r+n)}{(p+n)(q+n)(r+n)}\cdot\frac{4n^2(p+q+r+2n)}{(p+2n)(q+2n)(r+2n)}\cdot \text{и т. д.}$$

Отсюда ясно, что три буквы p, q, r можно любым образом переставлять, отсюда можно [снова] вывести три найденные выше формулы.

СЛЕДСТВИЕ 3

382. Вернемся к интегральным выражениям; тогда окажутся равными между собой три следующих произведения:

$$\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}\cdot\int\frac{x^{p+q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}=\int\frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}\cdot\int\frac{x^{q+r-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}=$$
$$=\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}\cdot\int\frac{x^{p+r-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

383. Следует особо отметить случай, когда $p+q=n$. Действительно, в этом случае

$$\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{n}{r}\right)=\frac{1}{r}\quad\text{и}\quad\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}},$$

[1]) Второе решение получается из первого, если поменять ролями сомножители $\left(\frac{a}{b}\right)$ и $\left(\frac{c}{d}\right)$ и учесть соотношение $\left(\frac{d}{b}\right)=\left(\frac{b}{d}\right)$; чтобы получить третье, достаточно представить его левую часть в виде $\left(\frac{c+d}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right)$ и к этому выражению применить первое решение.

[2]) Можно взять любое из трех равных выражений предыдущего параграфа; Эйлер берет первое.

и эти три произведения будут равны $\dfrac{\pi}{nr\sin\dfrac{p\pi}{n}}$. Стало быть,

$$\int\frac{x^{n-p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}\cdot\int\frac{x^{n-p+r-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}=\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}}\cdot\int\frac{x^{p+r-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{p}}}=\frac{\pi}{nr\sin\dfrac{p\pi}{n}}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

384. Это тройное свойство произведений двух выражений заслуживает особого внимания; если мы будем подставлять вместо p, q, r различные числа, то получим следующие частные равенства:

p	q	r	
1	1	2	$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{2}\right)=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)$
1	2	2	$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$
1	2	3	$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{1}\right)=\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right)$
1	1	3	$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$
2	2	3	$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$
1	3	3	$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{1}\right)$
2	3	3	$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{2}\right)$
1	1	4	$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right)=\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{1}\right)$
1	2	4	$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{1}\right)=\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$
1	3	4	$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{4}\right)=\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{1}\right)$
1	4	4	$\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{8}{1}\right)$
2	2	4	$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{4}\right)=\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right)$
2	3	4	$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{2}\right)=\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{3}\right)$
2	4	4	$\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{4}\right)=\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{8}{2}\right)$
3	3	4	$\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{4}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)$
3	4	4	$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{4}\right)=\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{8}{3}\right)$.

Эти выражения верны для всех чисел n; если [среди чисел p, q, r] встретились бы числа, большие, чем n, то, как мы видели выше, их можно было бы привести к меньшим, [чем n].

ЗАДАЧА 47

385. *Найти различные произведения из трех выражений рассматриваемого рода так, чтобы эти произведения были равны между собой.*

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим произведение $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right)$. В разложенном виде оно дает

$$\frac{p+q+r+s}{pqrs}\cdot\frac{n^3(p+q+r+s+n)}{(p+n)(q+n)(r+n)(s+n)}\cdot \text{ и т. д.}$$

Очевидно, оно сохранит одно и то же значение, каким бы образом мы ни заменяли друг другом четыре буквы. Далее, то же разложение получается и из произведения $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{p+q}{r+s}\right)$, где имеет место такая же взаимозаменяемость. Следовательно, равны между собой все следующие произведения:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right),\quad \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right),\quad \left(\frac{p}{s}\right)\left(\frac{p+s}{q}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right),$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{s}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right),\quad \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right),\quad \left(\frac{p}{s}\right)\left(\frac{p+s}{r}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right),$$

$$\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right),\quad \left(\frac{q}{s}\right)\left(\frac{q+s}{p}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right),\quad \left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right),$$

$$\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{s}\right)\left(\frac{q+r+s}{p}\right),\quad \left(\frac{q}{s}\right)\left(\frac{q+s}{r}\right)\left(\frac{q+r+s}{p}\right),\quad \left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{q}\right)\left(\frac{q+r+s}{p}\right).$$

Из предшествующего свойства[1]) сами собой вытекают произведения другого вида; действительно,

$$\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p+q}\right).$$

Далее, также и произведение $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)$ при разложении дает в качестве первого члена $\frac{(p+q+r)(p+r+s)}{pqrs(p+r)}$; в этом произведении можно поменять местами как p и r, так и q и s, так что

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right).$$

ПОЯСНЕНИЕ

386. Хотя эти равенства кажутся очень общими, однако они не дают никаких новых сравнений, которые не содержались бы уже в изложен-

[1]) То есть из формул § 380, которые надо применить к произведению двух последних множителей в каждом из предыдущих выражений настоящего параграфа.

ном выше. Действительно, последнее равенство

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)$$

получается от перемножения равенств

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right),\quad \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p}\right).$$

Способ же образования равенств первого рода станет ясным из следующего примера: равенство

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right)$$

получается от перемножения равенств:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r+s}\right)=\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right),\quad \left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r+s}{p+q}\right).$$

Эти сравнения особенно полезны для приведения друг к другу значений различных выражений одного и того же порядка, т. е. при данном числе n, с той целью, чтобы интегрирование свелось к наименьшему числу выражений, задав которые, уже можно было бы определить при их помощи остальные.

ЗАДАЧА 48

387. *Найти простейшие выражения, к которым можно свести интегрирование всех случаев, содержащихся в выражении вида*

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\int\frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}.$$

РЕШЕНИЕ

Прежде всего $\left(\frac{n}{p}\right)=\frac{1}{p}$; отсюда получаются следующие случаи:

$$\left(\frac{n}{1}\right)=1,\quad \left(\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad \left(\frac{n}{3}\right)=\frac{1}{3},\quad \left(\frac{n}{4}\right)=\frac{1}{4},\quad \left(\frac{n}{5}\right)=\frac{1}{5}\ \text{ и т. д.}$$

Далее[1], $\left(\frac{p}{n-p}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}}$, откуда уже известны значения всех выражений, указанных ниже:

$$\left(\frac{n-1}{1}\right)=\alpha,\quad \left(\frac{n-2}{2}\right)=\beta,\quad \left(\frac{n-3}{3}\right)=\gamma,\quad \left(\frac{n-4}{4}\right)=\delta\ \text{ и т. д.}$$

Правда, этих значений недостаточно для нахождения всех остальных; кроме них, надо считать как бы известными следующие:

$$\left(\frac{n-2}{1}\right)=A,\quad \left(\frac{n-3}{2}\right)=B,\quad \left(\frac{n-4}{3}\right)=C,\quad \left(\frac{n-5}{4}\right)=D\ \text{ и т. д.}$$

Из этих выражений при помощи выведенных выше равенств уже можно определить все остальные. Из их числа наиболее полезно

[1]) См. § 377.

заметить следующие:

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n}{b}\right)=\left(\frac{n-a}{b}\right)\left(\frac{n-a+b}{a}\right),$$

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-a-b}{b}\right)=\left(\frac{n-b}{b}\right)\left(\frac{n-a-b}{a}\right),$$

$$\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-b-1}{b}\right)\left(\frac{n-a-b}{a-1}\right)=\left(\frac{n-b}{b}\right)\left(\frac{n-a}{a-1}\right)\left(\frac{n-a-b}{a}\right).$$

Из первого из этих равенств, положив $a=b+1$, находим:

$$\left(\frac{n-1}{a}\right)=\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n}{a-1}\right):\left(\frac{n-a}{a-1}\right),$$

где $\left(\frac{n}{a-1}\right)=\frac{1}{a-1}$; поэтому при помощи взятых выражений определяется $\left(\frac{n-1}{a}\right)$.

Из второго, положив $b=1$, выводим:

$$\left(\frac{n-a-1}{1}\right)=\left(\frac{n-1}{1}\right)\left(\frac{n-a-1}{a}\right):\left(\frac{n-a}{a}\right).$$

Из третьего, положив $b=1$, находим:

$$\left(\frac{n-a-1}{a-1}\right)=\left(\frac{n-1}{1}\right)\left(\frac{n-a}{a-1}\right)\left(\frac{n-a-1}{a}\right):\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-2}{1}\right).$$

Таким образом, можно найти все выражения $\left(\frac{n-a-2}{a}\right)$; из них, далее, положив в третьем равенстве $b=2$, получим:

$$\left(\frac{n-a-2}{a-1}\right)=\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-a}{a-1}\right)\left(\frac{n-a-2}{a}\right):\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right),$$

отсюда находим выражения $\left(\frac{n-a-3}{a}\right)$ и, [поступая] далее таким образом [1]), все выражения вида $\left(\frac{n-a-b}{a}\right)$, ибо этот вид содержит все [другие]. Работу эту можно значительно сократить при помощи первых равенств. Действительно, найдя $\left(\frac{n-a-2}{a}\right)$, получим из первого [2])

$$\left(\frac{n-2}{a+2}\right)=\left(\frac{n-a-2}{a+2}\right)\left(\frac{n}{a}\right):\left(\frac{n-a-2}{a}\right),$$

а из второго [3])

$$\left(\frac{n-a-2}{2}\right)=\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-a-2}{a}\right):\left(\frac{n-a}{a}\right).$$

Равным образом, найдя выражения $\left(\frac{n-a-3}{a}\right)$, получим из них следующие:

$$\left(\frac{n-3}{a+3}\right)=\left(\frac{n-a-3}{a+3}\right)\left(\frac{n}{a}\right):\left(\frac{n-a-3}{a}\right),$$

$$\left(\frac{n-a-3}{3}\right)=\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-a-3}{a}\right):\left(\frac{n-a}{a}\right).$$

---

[1]) То есть полагая в третьем равенстве $b=3$, $b=4$ и т. д.

[2]) Из равенства $\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n}{b}\right)=\left(\frac{n-a}{b}\right)\left(\frac{n-a+b}{a}\right)$, заменив в нем a через $a+2$ и b через a.

[3]) Подставляя $b=2$.

СЛЕДСТВИЕ 1

388. Из равенства

$$\left(\frac{n-1}{a}\right)=\frac{1}{a-1}\left(\frac{n-a}{a}\right):\left(\frac{n-a}{a-1}\right)$$

определяем:

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)=\frac{\beta}{1A},\quad \left(\frac{n-1}{3}\right)=\frac{\gamma}{2B},\quad \left(\frac{n-1}{4}\right)=\frac{\delta}{3C},\quad \left(\frac{n-1}{5}\right)=\frac{\varepsilon}{4D}\ \text{ и т. д.;}$$

из равенства же $\left(\frac{n-a-1}{1}\right)=\left(\frac{n-1}{1}\right)\left(\frac{n-a-1}{a}\right):\left(\frac{n-a}{a}\right)$ получаем следующие выражения:

$$\left(\frac{n-2}{1}\right)=\frac{\alpha A}{\alpha},\quad \left(\frac{n-3}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\beta},\quad \left(\frac{n-4}{1}\right)=\frac{\alpha C}{\gamma},\quad \left(\frac{n-5}{1}\right)=\frac{\alpha D}{\delta}\ \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 2

389. Равенство

$$\left(\frac{n-a-1}{a-1}\right)=\left(\frac{n-1}{1}\right)\left(\frac{n-a}{a-1}\right)\left(\frac{n-a-1}{a}\right):\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-2}{1}\right)$$

дает

$$\left(\frac{n-3}{1}\right)=\frac{\alpha AB}{\beta A},\quad \left(\frac{n-4}{2}\right)=\frac{\alpha BC}{\gamma A},\quad \left(\frac{n-5}{3}\right)=\frac{\alpha CD}{\delta A},\quad \left(\frac{n-6}{4}\right)=\frac{\alpha DE}{\varepsilon A}\ \text{ и т. д.}$$

Отсюда найдем выражения $\left(\frac{n-2}{a+2}\right)=\left(\frac{n-a-2}{a+2}\right)\left(\frac{n}{a}\right):\left(\frac{n-a-2}{a}\right)$, а именно:

$$\left(\frac{n-2}{3}\right)=\frac{\gamma\beta A}{1\alpha AB},\ \left(\frac{n-2}{4}\right)=\frac{\delta\gamma A}{2\alpha BC},\ \left(\frac{n-2}{5}\right)=\frac{\varepsilon\delta A}{3\alpha CD},\ \left(\frac{n-2}{6}\right)=\frac{\zeta\varepsilon A}{4\alpha DE}\ \text{ и т. д.,}$$

а также и выражения

$$\left(\frac{n-a-2}{2}\right)=\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-a-2}{a}\right):\left(\frac{n-a}{a}\right),$$

а именно:

$$\left(\frac{n-3}{2}\right)=\frac{\beta\alpha AB}{\alpha\beta A},\ \left(\frac{n-4}{2}\right)=\frac{\beta\alpha BC}{\beta\gamma A},\ \left(\frac{n-5}{2}\right)=\frac{\beta\alpha CD}{\gamma\delta A},\ \left(\frac{n-6}{2}\right)=\frac{\beta\alpha DE}{\delta\varepsilon A}\ \text{ и т. д.}$$

СЛЕДСТВИЕ 3

390. Далее равенство

$$\left(\frac{n-a-2}{a-1}\right)=\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-a}{a-1}\right)\left(\frac{n-a-2}{a}\right):\left(\frac{n-a}{a}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)$$

дает

$$\left(\frac{n-4}{1}\right)=\frac{\alpha\beta ABC}{\beta\gamma AB},\quad \left(\frac{n-5}{2}\right)=\frac{\alpha\beta BCD}{\gamma\delta AB},\quad \left(\frac{n-6}{3}\right)=\frac{\alpha\beta CDE}{\delta\varepsilon AB},$$

$$\left(\frac{n-7}{4}\right)=\frac{\alpha\beta DEF}{\varepsilon\zeta AB}\ \text{ и т. д.}$$

Поэтому равенство

$$\left(\frac{n-3}{a+3}\right)=\left(\frac{n-a-3}{a+3}\right)\left(\frac{n}{a}\right):\left(\frac{n-a-3}{a}\right)$$

дает

$$\left(\frac{n-3}{4}\right)=\frac{\beta\gamma\delta AB}{1\alpha\beta ABC}, \quad \left(\frac{n-3}{5}\right)=\frac{\gamma\delta\varepsilon AB}{2\alpha\beta BCD}, \quad \left(\frac{n-3}{6}\right)=\frac{\delta\varepsilon\zeta AB}{3\alpha\beta CDE} \text{ и т. д.}$$

Точно так же из $\left(\frac{n-a-3}{3}\right)=\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-a-3}{a}\right):\left(\frac{n-a}{a}\right)$ выводим выражения

$$\left(\frac{n-5}{3}\right)=\frac{\alpha\beta\gamma BCD}{\beta\gamma\delta AB}, \quad \left(\frac{n-6}{3}\right)=\frac{\alpha\beta\gamma CDE}{\gamma\delta\varepsilon AB}, \quad \left(\frac{n-7}{3}\right)=\frac{\alpha\beta\gamma DEF}{\delta\varepsilon\zeta AB} \text{ и т. д.}$$

ПРИМЕР 1

391. *Развернуть все случаи, содержащиеся в выражении*

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^{2-q}}}=\left(\frac{p}{q}\right),$$

где $n=2$, *причем* $\left(\frac{p+2}{q}\right)=\frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$ [1].

Все эти выражения, очевидно, могут быть найдены либо алгебраически, либо при помощи углов. Однако же, пользуясь вышеприведенными правилами, получаем (так как числа p и q не должны [1]) быть больше, чем 2) лишь одно выражение, зависящее от круга:

$$\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}=\alpha,$$

так что наши случаи будут

$$\left(\frac{2}{1}\right)=1, \quad \left(\frac{2}{2}\right)=\frac{1}{2},$$
$$\left(\frac{1}{1}\right)=\alpha.$$

ПРИМЕР 2

392. *Развернуть все случаи, содержащиеся в выражении*

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-q}}}=\left(\frac{p}{q}\right),$$

где $n=3$, *причем* [1]) $\left(\frac{p+3}{q}\right)=\frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$.

Здесь основные случаи, к которым приводятся остальные, таковы:

$$\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\alpha \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{1}\right)=A=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}};$$

если это принять, то остальные случаи будут:

$$\left(\frac{3}{1}\right)=1, \quad \left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{3}{3}\right)=\frac{1}{3},$$
$$\left(\frac{2}{1}\right)=\alpha, \quad \left(\frac{2}{2}\right)=\frac{\alpha}{A},$$
$$\left(\frac{1}{1}\right)=A.$$

---

[1]) Согласно § 378.

ПРИМЕР 3

393. *Развернуть все случаи, содержащиеся в выражении*

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-q}}}=\left(\frac{p}{q}\right),$$

где $n=4$, *причем* $\left(\frac{p+4}{q}\right)=\frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$.

От круга зависят следующие два выражения:

$$\left(\frac{3}{1}\right)=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\alpha \quad \text{и} \quad \left(\frac{2}{2}\right)=\frac{\pi}{4\sin\frac{2\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}=\beta.$$

Кроме того, необходимо иметь одно особое трансцендентное выражение $\left(\frac{2}{1}\right)=A$, и тогда остальные определяются следующим образом:

$$\left(\frac{4}{1}\right)=1,\quad \left(\frac{4}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad \left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3},\quad \left(\frac{4}{4}\right)=\frac{1}{4},$$

$$\left(\frac{3}{1}\right)=\alpha,\quad \left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\beta}{A},\quad \left(\frac{3}{3}\right)=\frac{\alpha}{2A},$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)=A,\quad \left(\frac{2}{2}\right)=\beta,$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\alpha A}{\beta}.$$

ПРИМЕР 4

394. *Развернуть все случаи, содержащиеся в выражении*

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-q}}}=\left(\frac{p}{q}\right),$$

где $n=5$, *причем* $\left(\frac{p+5}{q}\right)=\frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$.

От круга зависят следующие два выражения:

$$\left(\frac{4}{1}\right)=\frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}=\alpha \quad \text{и} \quad \left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{5\sin\frac{2\pi}{5}}=\beta,$$

кроме которых надо взять два новых трансцендентных выражения:

$$\left(\frac{3}{1}\right)=A \quad \text{и} \quad \left(\frac{2}{2}\right)=B;$$

при их помощи все выражения определяются следующим образом:

$$\left(\frac{5}{1}\right)=1,\quad \left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad \left(\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{3},\quad \left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{4},\quad \left(\frac{5}{5}\right)=\frac{1}{5},$$

$$\left(\frac{4}{1}\right)=\alpha,\quad \left(\frac{4}{2}\right)=\frac{\beta}{A},\quad \left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\beta}{2B},\quad \left(\frac{4}{4}\right)=\frac{\alpha}{3A},$$

$$\left(\frac{3}{1}\right)=A,\quad \left(\frac{3}{2}\right)=\beta,\quad \left(\frac{3}{3}\right)=\frac{\beta^2}{\alpha B},$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\beta},\quad \left(\frac{2}{2}\right)=B,$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\alpha A}{\beta}.$$

ПРИМЕР 5

395. *Развернуть все случаи, содержащиеся в выражении*

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^{6-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right),$$

где $n=6$.

От круга зависят следующие три выражения:

$$\left(\frac{5}{1}\right)=\frac{\pi}{6\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}=\alpha, \qquad \left(\frac{4}{2}\right)=\frac{\pi}{6\sin\frac{2\pi}{6}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\beta,$$

$$\left(\frac{3}{3}\right)=\frac{\pi}{6\sin\frac{3\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}=\gamma,$$

и, кроме того, надо взять следующие два трансцендентных выражения:

$$\left(\frac{4}{1}\right)=A \quad \text{и} \quad \left(\frac{3}{2}\right)=B.$$

При их помощи все выражения определяются следующим образом:

$$\left(\frac{6}{1}\right)=1,\ \left(\frac{6}{2}\right)=\frac{1}{2},\ \left(\frac{6}{3}\right)=\frac{1}{3},\ \left(\frac{6}{4}\right)=\frac{1}{4},\ \left(\frac{6}{5}\right)=\frac{1}{5},\ \left(\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{6},$$

$$\left(\frac{5}{1}\right)=\alpha,\ \left(\frac{5}{2}\right)=\frac{\beta}{A},\ \left(\frac{5}{3}\right)=\frac{\gamma}{2B},\ \left(\frac{5}{4}\right)=\frac{\beta}{3B},\ \left(\frac{5}{5}\right)=\frac{\alpha}{4A},$$

$$\left(\frac{4}{1}\right)=A,\ \left(\frac{4}{2}\right)=\beta,\ \left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\beta\gamma}{\alpha B},\ \left(\frac{4}{4}\right)=\frac{\beta\gamma A}{2\alpha B^2},$$

$$\left(\frac{3}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\beta},\ \left(\frac{3}{2}\right)=B,\ \left(\frac{3}{3}\right)=\gamma,$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\gamma},\ \left(\frac{2}{2}\right)=\frac{\alpha B^2}{\gamma A},$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\alpha A}{\beta}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

396. Эти определения можно продолжать до тех пор, пока будет угодно; среди них надо обратить особое внимание на случаи, в которых вводятся новые виды трансцендентных. Первый из таких случаев встречается при $n=3$, а именно:

$$\left(\frac{1}{1}\right)=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}};$$

значение этого выражения в виде бесконечного произведения, как мы видели выше [§ 371], равно

$$\frac{3}{1}\cdot\frac{2\cdot 6}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 9}{7\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 12}{10\cdot 10}\cdot \text{ и т. д.},$$

что по формуле [1] для $\left(\frac{1}{1}\right)$ (так как $n=3$) равно также

$$\frac{2}{1\cdot 1}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot\frac{9\cdot 11}{10\cdot 10}\cdot\frac{12\cdot 14}{13\cdot 13}\cdot \text{ и т. д.}$$

[1]) См. § 376.

Далее, из класса $n=4$ рождается новое трансцендентное выражение:

$$\left(\frac{2}{1}\right)=\int\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

равное следующему бесконечному произведению:

$$\frac{3}{1\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 7}{5\cdot 6}\cdot\frac{8\cdot 11}{9\cdot 10}\cdot\frac{12\cdot 15}{13\cdot 14}\cdot\frac{16\cdot 19}{17\cdot 18}\cdot\text{ и т. д.}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2\cdot 7}{5\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 11}{9\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 15}{13\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 19}{17\cdot 9}\cdot\text{ и т. д.}$$

Из класса $n=5$ получаем два новых трансцендентных выражения:

$$\left(\frac{3}{1}\right)=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}=\frac{4}{1\cdot 3}\cdot\frac{5\cdot 9}{6\cdot 8}\cdot\frac{10\cdot 14}{11\cdot 13}\cdot\frac{15\cdot 19}{16\cdot 18}\cdot\text{ и т. д.}$$

и

$$\left(\frac{2}{2}\right)=\int\frac{x\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=\frac{4}{2\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 9}{7\cdot 7}\cdot\frac{10\cdot 14}{12\cdot 12}\cdot\frac{15\cdot 19}{17\cdot 17}\cdot\text{ и т. д.,}$$

так что

$$\left(\frac{3}{1}\right):\left(\frac{2}{2}\right)=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{12\cdot 12}{11\cdot 13}\cdot\frac{17\cdot 17}{16\cdot 18}\cdot\text{ и т. д.}$$

Класс $n=6$ дает два следующих трансцендентных выражения:

$$\left(\frac{4}{1}\right)=\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^5}}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^6}}=\frac{1}{2}\int\frac{y\,dy}{\sqrt[6]{(1-y^3)^5}}$$

(если положить $x^2=y$) и

$$\left(\frac{3}{2}\right)=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^6}}=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^3}}=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{\sqrt[3]{(1-z^2)^2}},$$

если положить $y=x^2$ и $z=x^3$. Но надо заметить, что между этими выражениями и первым выражением

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}=2\int\frac{y\,dy}{\sqrt[6]{(1-y^6)^4}}=2\left(\frac{2}{2}\right)$$

существует соотношение[1] $\gamma\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{2}{2}\right)=\alpha\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$, так что, если принять первое выражение за известное, то здесь достаточно взять одно из двух.

---

[1]) Имеем: $\gamma\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{2}{2}\right)=\gamma\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$ (второе соотношение § 384), но $\gamma\left(\frac{2}{1}\right)=\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{2}{1}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{1}\right)$ (третье соотношение § 384) $=\alpha\left(\frac{3}{2}\right)$.

ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
КНИГА ПЕРВАЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ИЛИ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО ПО КАКОМУ-НИБУДЬ ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ
ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА I
О РАЗДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

397. *Говорят, что в дифференциальном уравнении имеет место* *разделение переменных*[1]*, если можно разделить*[2] *уравнение на два члена так, чтобы в каждый входило только одно переменное со своим дифференциалом.*

СЛЕДСТВИЕ 1

398. Следовательно, когда дифференциальное уравнение устроено[3] так, что его можно привести к виду $X\,dx = Y\,dy$, в котором X есть

[1] separatio variabilium.
[2] dispescere.
[3] est comparata.

функция одного лишь x, а Y — одного лишь y, тогда говорят, что это уравнение допускает разделение переменных.

СЛЕДСТВИЕ 2

399. Если P и X обозначают функции одного лишь x, а Q и Y — фунции одного лишь y, то уравнение $PY\,dx = QX\,dy$ допускает разделение переменных; действительно, будучи разделено на XY, оно переходит в уравнение $\frac{P\,dx}{X} = \frac{Q\,dy}{Y}$, в котором переменные разделены.

СЛЕДСТВИЕ 3

400. Стало быть, в уравнении общего вида $\frac{dy}{dx} = V$ разделение переменных имеет место в том случае, если V есть такая функция переменных x и y, что ее можно разложить на два множителя, один из которых содержит одно лишь переменное x, а другой — одно лишь y. Действительно, если $V = XY$, то отсюда получается уравнение с разделенными переменными[1]) $\frac{dy}{Y} = X\,dx$.

ПОЯСНЕНИЕ

401. В этом разделе мы решили рассматривать такое соотношение между x, y и p $\left(\text{мы полагаем отношение дифференциалов } \frac{dy}{dx} = p\right)$, в котором p равняется какой-либо функции переменных x и y. Здесь же мы рассматриваем сначала тот случай, когда эта функция разлагается на два множителя, из которых первый есть функция одного лишь x, а второй одного лишь y, так что уравнение может быть приведено к виду $X\,dx = Y\,dy$, в котором два переменных, как говорится, отделены друг от друга. Этот случай включает в себя и рассмотренные выше простые выражения, где $Y = 1$, так что $dy = X\,dx$ и $y = \int X\,dx$; тогда все дело сводится к интегрированию выражения $X\,dx$. Столь же мало трудностей содержит и уравнение с разделенными переменными $X\,dx = Y\,dy$, с которым можно поступать совершенно так же, как с простыми формулами; это мы покажем в следующей задаче.

ЗАДАЧА 49

402. *Интегрировать дифференциальное уравнение, в котором переменные разделены, т. е. найти уравнение между самими переменными.*

РЕШЕНИЕ

Уравнение, допускающее разделение переменных, всегда приводится к виду $Y\,dy = X\,dx$, в котором $X\,dx$ можно рассматривать как дифференциал некоторой функции переменного x, а $Y\,dy$ — как дифференциал некоторой функции переменного y. Так как дифференциалы

---

[1]) aequatio separata; дословно: «разделенное уравнение».

равны, то необходимо, чтобы и их интегралы были также равны или разнились на постоянное количество. Значит, надо проинтегрировать оба выражения, каждое в отдельности, по правилам, изложенным в предыдущем разделе, т. е. надо искать интегралы $\int Y\,dy$ и $\int X\,dx$. Найдя их, будем иметь уравнение

$$\int Y\,dy = \int X\,dx + \text{Const},$$

которым выражается конечное соотношение между количествами x и y.

СЛЕДСТВИЕ 1

403. Итак, всякий раз, как дифференциальное уравнение допускает разделение переменных, интегрирование может быть выполнено по тем же правилам, которые были даны выше для простых выражений.

СЛЕДСТВИЕ 2

404. В интегральном уравнении

$$\int Y\,dy = \int X\,dx + \text{Const}$$

либо обе функции $\int Y\,dy$ и $\int X\,dx$ алгебраические, либо одна алгебраическая, а другая трансцендентная, либо обе трансцендентные, поэтому соотношение между x и y будет либо алгебраическим, либо трансцендентным.

ПОЯСНЕНИЕ

405. По мнению некоторых, в разделении переменных состоит вся основа решения дифференциальных уравнений, так что если предложенное уравнение не допускает разделения переменных, следует искать подходящей подстановки, в результате которой вновь введенные переменные сделают возможным разделение переменных. Итак, все дело сводится к тому, чтобы указать для любого предложенного дифференциального уравнения такую подстановку (т. е. такое введение новых переменных), благодаря которой имело бы место разделение переменных. Конечно, надо было бы желать, чтобы был обнаружен такой метод нахождения подходящей подстановки для любого случая, но в этом вопросе не найдено решительно ничего определенного, так как большинство подстановок, которые до сих пор были в употреблении, не основывается на каких-либо определенных началах. Далее, нельзя рассматривать разделение переменных как истинную основу всякого интегрирования по той причине, что оно оказывается совершенно бесполезным при решении дифференциальных уравнений второй и более высоких степеней; ниже я изложу другое начало весьма общего характера. Пока же, в настоящей главе, мне кажется целесообразным изложить главнейшие интегрирования, выполняемые с помощью разделения переменных. Ведь в этом трудном деле весьма важно познакомиться с возможно более разнообразными методами.

ЗАДАЧА 50

406. *Привести к разделению переменных дифференциальное уравнение $P\,dx = Q\,dy$, в котором P и Q — однородные функции от x и y одного и того же числа измерений, и найти его интеграл.*

РЕШЕНИЕ

Так как P и Q — однородные функции от x и y одного и того же числа измерений, то [дробь] $\frac{P}{Q}$ будет однородная функция нулевого измерения и, стало быть, если положить $y = ux$, перейдет в функцию от u. Поэтому положим $y = ux$; тогда $\frac{P}{Q}$ перейдет в функцию U от u, так что будем иметь $dy = U\,dx$. Но, так как $y = ux$, то $dy = u\,dx + x\,du$; после этой подстановки наше уравнение получит вид $u\,dx + x\,du = U\,dx$; [это уравнение] — с двумя переменными x и u, которые, очевидно, могут быть разделены. Действительно, перенеся члены, содержащие dx, в одну часть, получим:

$$x\,du = (U - u)\,dx,$$

и потому

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{U - u}.$$

Интегрирование этого уравнения дает $lx = \int \frac{du}{U-u}$, так что теперь из переменного u можно определить x[1]), откуда далее находим $y = ux$.

СЛЕДСТВИЕ 1

407. Еще лучше, конечно, если окажется возможным выразить интеграл $\int \frac{du}{U-u}$ также через логарифмы, так что lx будет равен логарифму какой-либо [алгебраической] функции от u; тогда получится алгебраическое уравнение между x и u, а следовательно, если подставить вместо u значение $\frac{y}{x}$, алгебраическое уравнение между x и y.

СЛЕДСТВИЕ 2

408. Так как $y = ux$, то $ly = lu + lx$, но $lx = \int \frac{du}{U-u}$, поэтому

$$ly = lu + \int \frac{du}{U-u} = \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{U-u};$$

сведя эти два интеграла в один, получим:

$$ly = \int \frac{U\,du}{u\,(U-u)}.$$

---

[1]) По-видимому, в этой фразе допущена какая-то редакционная ошибка; быть может, u напечатано вместо x и наоборот. В оригинале: ita ut iam ex variabili u determinetur.

Однако при этом необходимо заметить, что нельзя в каждом интеграле для lx и ly прибавлять произвольное постоянное; как только постоянное прибавлено к одному из интегралов, тем самым уже определяется то постоянное, которое должно быть прибавлено к другому интегралу, так как должно быть

$$ly = lx + lu.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

409. Имеем:

$$\int \frac{du}{U-u} = \int \frac{du - dU + dU}{U-u} = \int \frac{dU}{U-u} - \int \frac{dU - du}{U-u},$$

но второй член интегрируется при помощи логарифмов; поэтому [1])

$$lx = \int \frac{dU}{U-u} - l(U-u),$$

т. е. $l(x(U-u)) = \int \frac{dU}{U-u}$. Значит, нет разницы, будет ли интегрируемым выражение $\int \frac{du}{U-u}$ или $\int \frac{dU}{U-u}$.

ПОЯСНЕНИЕ

410. Так как этот метод распространяется на все однородные уравнения и пользованию им не препятствует иррациональность, которая может содержаться в функциях P и Q, то он заслуживает самой высокой оценки и наибольшего предпочтения перед другими методами, которые применимы лишь к весьма специальным уравнениям. Кроме того, отсюда мы убеждаемся, что все уравнения, которые при помощи какой-либо подстановки могут быть приведены к однородности, можно решать тем же методом. Так, например, если предложено уравнение

$$dz + z^2\,dx = \frac{a\,dx}{x^2},$$

то сразу же ясно, что подстановкой $z = \frac{1}{y}$ оно приводится к однородному уравнению $-\frac{dy}{y^2} + \frac{dx}{y^2} = \frac{a\,dx}{x^2}$ или [2]) $x^2\,dy = dx\,(x^2 - ay^2)$.

Впрочем, нетрудно бывает усмотреть, можно ли при помощи такого рода подстановки привести предложенное уравнение к однородному виду. В большинстве могущих представиться случаев [3]) достаточно испытать подстановки $x = u^m$ и $y = v^n$; при этом легко будет решить, возможно ли взять показатели m и n так, чтобы везде получилось одно и то же число измерений. Что же касается более сложных подстановок, то в уравнениях этого рода они вряд ли уместны, исключая лишь те случаи, когда они сами бросаются в глаза. Изложенный здесь метод интегрирования будет небесполезно пояснить на нескольких примерах.

---

[1]) Согласно § 408 $lx = \int \frac{du}{U-u}$.

[2]) См. § 414.

[3]) Plerumque, quoties quidem fieri potest.

ПРИМЕР 1

411. *Дано однородное дифференциальное уравнение* $x\,dx + y\,dy = my\,dx$; *найти его интеграл.*

Отсюда, очевидно, $\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y}$; положив $y = ux$, имеем:

$$\frac{my - x}{y} = \frac{mu - 1}{u},$$

а так как $dy = u\,dx + x\,du$, то получим:

$$u\,dx + x\,du = \frac{mu - 1}{u}\,dx,$$

откуда

$$\frac{dx}{x} = \frac{u\,du}{mu - 1 - u^2} = \frac{-u\,du}{1 - mu + u^2}$$

или

$$\frac{dx}{x} = \frac{-u\,du + \frac{1}{2}m\,du}{1 - mu + u^2} - \frac{\frac{1}{2}m\,du}{1 - mu + u^2};$$

отсюда, интегрируя, получим:

$$lx = -\frac{1}{2}l(1 - mu + u^2) - \frac{1}{2}m\int\frac{du}{1 - mu + u^2} + \text{Const}.$$

Здесь надо рассмотреть три случая в зависимости от того, будет ли $m > 2$ или $m < 2$, или же $m = 2$.

1) Пусть $m > 2$; тогда $1 - mu + u^2$ получит вид

$$(u - a)\left(u - \frac{1}{a}\right),\ \text{причем}\ m = a + \frac{1}{a} = \frac{a^2 + 1}{a};$$

так как

$$\frac{du}{(u - a)\left(u - \frac{1}{a}\right)} = \frac{a}{a^2 - 1}\cdot\frac{du}{u - a} - \frac{a}{a^2 - 1}\cdot\frac{du}{u - \frac{1}{a}},$$

то

$$lx = -\frac{1}{2}l(1 - mu + u^2) - \frac{a^2 + 1}{2(a^2 - 1)}\,l\frac{u - a}{u - \frac{1}{a}} + C$$

или

$$l(x\sqrt{1 - mu + u^2}) + \frac{a^2 + 1}{2(a^2 - 1)}\,l\frac{au - a^2}{au - 1} = lc.$$

Если снова подставить значение $u = \frac{y}{x}$, то интегральное уравнение будет иметь вид

$$l\sqrt{x^2 - mxy + y^2} + \frac{a^2 + 1}{2(a^2 - 1)}\,l\frac{ay - a^2x}{ay - x} = lc$$

или

$$\left(\frac{ay - a^2x}{ay - x}\right)^{\frac{a^2 + 1}{2(a^2 - 1)}}\sqrt{x^2 - mxy + y^2} = c.$$

2) Пусть $m<2$ или $m=2\cos\alpha$; тогда

$$\int\frac{du}{1-2u\cos\alpha+u^2}=\frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{u\sin\alpha}{1-u\cos\alpha},$$

откуда

$$l\left(x\sqrt{1-mu+u^2}\right)=C-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{u\sin\alpha}{1-u\cos\alpha}$$

или

$$l\sqrt{x^2-mxy+y^2}=C-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y\sin\alpha}{x-y\cos\alpha}.$$

3) Пусть $m=2$; тогда

$$\int\frac{du}{(1-u)^2}=\frac{1}{1-u},$$

откуда

$$l[x(1-u)]=C-\frac{1}{1-u}\quad\text{или}\quad l(x-y)=C-\frac{x}{x-y}.$$

ПРИМЕР 2

412. *Предложено однородное дифференциальное уравнение*

$$dx(\alpha x+\beta y)=dy(\gamma x+\delta y);$$

найти его интеграл.

Положив $y=ux$, будем иметь:

$$u\,dx+x\,du=dx\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u},$$

и поэтому

$$\frac{dx}{x}=\frac{du(\gamma+\delta u)}{\alpha+\beta u-\gamma u-\delta u^2}=\frac{du\left(\delta u+\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\beta\right)+du\left(\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\beta\right)}{\alpha+(\beta-\gamma)u-\delta u^2};$$

отсюда, интегрируя, получим:

$$lx=C-l\sqrt{\alpha+(\beta-\gamma)u-\delta u^2}+\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\int\frac{du}{\alpha+(\beta-\gamma)u-\delta u^2}.$$

И здесь надо рассматривать те же случаи, что и выше, в зависимости, очевидно, от того, имеет ли знаменатель $\alpha+(\beta-\gamma)u-\delta u^2$ два неравных вещественных множителя или два равных [вещественных], или два мнимых.

ПРИМЕР 3

413. *Предложено однородное дифференциальное уравнение*

$$x\,dx+y\,dy=x\,dy-y\,dx;$$

найти его интеграл.

Здесь $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$. Положив $y=ux$, имеем:

$$u\,dx+x\,du=\frac{1+u}{1-u}dx\quad\text{или}\quad x\,du=\frac{1+u^2}{1-u}dx;$$

отсюда получается:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du-u\,du}{1+u^2}$$

и после интегрирования

$$lx=\operatorname{arctg}u-l\sqrt{1+u^2}+C$$

или

$$l\sqrt{x^2+y^2}=C+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

ПРИМЕР 4

414. *Предложено однородное дифференциальное уравнение*

$$x^2\,dy=(x^2-ay^2)\,dx;$$

найти его интеграл.

Здесь, очевидно, $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-ay^2}{x^2}$; положив $y=ux$, получим:

$$u\,dx+x\,du=(1-au^2)dx,$$

и поэтому

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{1-u-au^2}\quad\text{и}\quad lx=\int\frac{du}{1-u-au^2};$$

на вычислении этого интеграла не стоит останавливаться.

ПРИМЕР 5

415. *Предложено однородное дифференциальное уравнение*

$$x\,dy-y\,dx=dx\sqrt{x^2+y^2};$$

найти его интеграл.

Очевидно, $\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, откуда, положив $y=ux$, будем иметь:

$$u\,dx+x\,du=\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)dx$$

или

$$x\,du=dx\sqrt{1+u^2},$$

так что имеем [дифференциальное уравнение] $\frac{dx}{x}=\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$, интеграл которого есть

$$lx=la+l\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=la+l\left(\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)$$

или

$$lx=la+l\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}-y},$$

откуда получаем:

$$x=\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}-y},$$

или

$$\sqrt{x^2+y^2}=a+y,$$

откуда

$$x^2=a^2+2ay.$$

ПОЯСНЕНИЕ

416. Сюда можно причислить и трансцендентные функции, лишь бы только под знаками их стояли функции нулевого измерения[1]) переменных x и y, так как при подстановке $y=ux$ они переходят в функции переменной u. Так, например, если в уравнении $P\,dx=Q\,dy$, сверх того, что P и Q суть однородные функции одного и того же числа измерений, входят выражения вида

$$l\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x},\quad e^{\frac{y}{x}},\quad \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \cos\frac{nx}{y}\ \text{и т. д.},$$

то изложенный метод можно применить с равным успехом, ибо если положить $y=ux$, то отношение $\frac{dy}{dx}$ сделается равным функции одной лишь новой переменной u.

ЗАДАЧА 51

417. *Дифференциальное уравнение первой степени*[2])

$$dx\,(\alpha+\beta x+\gamma y)=dy\,(\delta+\varepsilon x+\zeta y)$$

привести к разделению переменных и проинтегрировать.

РЕШЕНИЕ

Положим

$$\alpha+\beta x+\gamma y=t \quad \text{и} \quad \delta+\varepsilon x+\zeta y=u,$$

так что $t\,dx=u\,dy$. Отсюда получаем:

$$x=\frac{\zeta t-\gamma u-\alpha\zeta+\gamma\delta}{\beta\zeta-\gamma\varepsilon} \quad \text{и} \quad y=\frac{\beta u-\varepsilon t+\alpha\varepsilon-\beta\delta}{\beta\zeta-\gamma\varepsilon},$$

откуда $dx:dy=(\zeta\,dt-\gamma\,du):(\beta\,du-\varepsilon\,dt)$.

Стало быть, получаем такое уравнение:

$$\zeta t\,dt-\gamma t\,du=\beta u\,du-\varepsilon u\,dt,$$

или

$$dt\,(\zeta t+\varepsilon u)=du\,(\beta u+\gamma t).$$

Так как это уравнение однородное и подходит под пример § 412, то интегрирование уже выполнено.

---

[1]) modo afficiant functiones nullius dimensionis.

[2]) primi ordinis; дословный перевод («первого порядка»), конечно, невозможен. Уравнения первого порядка по терминологии Эйлера называются aequationes primi gradus, т. е. дословно: «уравнения первой ступени» (или «первой степени»).

Однако же существует случай, в котором это приведение к однородности не имеет места; это — случай, когда $\beta\zeta-\gamma\varepsilon=0$; тогда устраняется возможность введения новых переменных t и u. Стало быть, для этого случая требуется особый способ решения.

Последнее выполняется следующим образом. Поскольку теперь предложенное уравнение будет иметь вид:

$$\alpha\,dx+(\beta x+\gamma y)\,dx=\delta\,dy+n(\beta x+\gamma y)\,dy,$$

положим $\beta x+\gamma y=z$; тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha+z}{\delta+nz}.$$

Но $dy=\frac{dz-\beta\,dx}{\gamma}$, следовательно,

$$\frac{dz-\beta\,dx}{\gamma}=\frac{\alpha+z}{\delta+nz}\,dx,$$

где переменные, очевидно, могут быть разделены; действительно,

$$dx=\frac{dz\,(\delta+nz)\gamma}{\alpha\gamma+\beta\delta+(\gamma+n\beta)\,z}.$$

Интегрирование этого уравнения вводит логарифмы, за исключением случая $\gamma+n\beta=0$, когда оно алгебраически дает:

$$x=\frac{2\delta z+nz^2}{2(\alpha\gamma+\beta\delta)}+C.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

418. Итак, так называемое дифференциальное уравнение первой степени вообще не может быть приведено к однородному виду, но надо исключить случаи, в которых $\beta\zeta=\gamma\varepsilon$ [1]); эти случаи приводят к совершенно иному уравнению с разделенными переменными.

СЛЕДСТВИЕ 2

419. Если в этих исключительных случаях $n=0$, т. е. если предложено уравнение $dy=dx(\alpha+\beta x+\gamma y)$ [2]), то, положив $\beta x+\gamma y=z$, ввиду того, что $\delta=1$, получаем уравнение $dx=\frac{dz}{\alpha\gamma+\beta+\gamma z}$, интеграл которого есть

$$\gamma x=l\,\frac{\beta+\alpha\gamma+\gamma z}{C}=l\,\frac{\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma x+\gamma^2 y}{C},$$

или

$$\beta+\gamma(\alpha+\beta x+\gamma y)=Ce^{\gamma x}.$$

[1]) Aequatio ergo differentialis primi ordinis, uti vocatur, in genere ad homogeneitatem reduci nequit, sed casus, quibus $\beta\zeta=\gamma\varepsilon$, inde excipi debent. Современный автор, подводя итог изложенному в § 417, сказал бы, что уравнение рассматриваемого типа вообще *может* быть приведено к однородному виду, но случай $\beta\zeta=\gamma\varepsilon$ составляет исключение. Можно допустить, что Эйлер оговорился. Думается, однако, что здесь не оговорка и что выражение «вообще не может быть приведено» употреблено в смысле «не всегда может быть приведено».

[2]) Коэффициент γ положен равным 1, что, очевидно, не влечет потери общности.

ЗАДАЧА 52

420. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$dy + Py\,dx = Q\,dx,$$

в котором P и Q — любые функции переменного x, а другое переменное y со своим дифференциалом нигде не имеет более одного измерения[1]*). Привести это уравнение к разделению переменных и проинтегрировать.*

РЕШЕНИЕ

Будем искать такую функцию переменного x (пусть это будет X), чтобы после подстановки $y = Xu$ уравнение допускало разделение переменных. Тогда получается:

$$X\,du + u\,dX + PXu\,dx = Q\,dx.$$

Это уравнение, очевидно, допускает разделение переменных, если $dX + PX\,dx = 0$, т. е. если

$$\frac{dX}{X} = -P\,dx,$$

так что интегрирование дает

$$lX = -\int P\,dx, \text{ т. е. } X = e^{-\int P\,dx}$$

Стало быть, если взять для X эту функцию, то наше уравнение после преобразования будет $X\,du = Q\,dx$ или

$$du = \frac{Q\,dx}{X} = e^{\int P\,dx}Q\,dx.$$

Так как P и Q — заданные функции переменного x, то отсюда получаем:

$$u = \int e^{\int P\,dx}Q\,dx = \frac{y}{X}.$$

Поэтому интеграл предложенного уравнения есть

$$y = e^{-\int P\,dx}\int e^{\int P\,dx}Q\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

421. Стало быть, решение этого уравнения $dy + Py\,dx = Q\,dx$ требует двух интегрирований: первого — для выражения $\int P\,dx$ и второго — для выражения $\int e^{\int P\,dx}Q\,dx$. Но при этом произвольное постоянное достаточно прибавить при втором интегрировании, так как значение переменного y содержит не более одного постоянного. В самом деле, если даже написать при первом интегрировании $\int P\,dx + C$ вместо $\int P\,dx$, то выражение для y останется тем же.

---

[1]) altera autem variabilis y cum suo differentiali nusquam plus uno habeat dimensionem; смысл слов «со своим дифференциалом» (cum suo differentiali) нам неясен. Быть может, следовало бы перевести «равно как и его дифференциал», но и при таком толковании непонятно, зачем употреблены эти слова. Поэтому мы предпочли буквальный перевод. По существу же ясно, что речь идет об интегрировании линейного уравнения первого порядка.

СЛЕДСТВИЕ 2

422. Следовательно, при интегрировании выражения $P\,dx$ достаточно взять его частный интеграл; поэтому постоянному слагаемому подобает придать такое значение, чтобы вид интеграла стал наиболее простым.

ПОЯСНЕНИЕ

423. Вот, стало быть, другой класс уравнений (не менее обширный, чем предыдущий класс однородных уравнений), который можно привести к разделению переменных и таким путем проинтегрировать. Из него проистекают в изобилии применения в Анализе, так как здесь буквы P и Q обозначают какие угодно функции переменного x. Таким же образом можно, очевидно, поступать и с уравнением

$$R\,dy + Py\,dx = Q\,dx,$$

где R обозначает какую угодно функцию от x. В самом деле, после разделения на R получается предложенный вид уравнения, только вместо P и Q надо будет писать $\frac{P}{R}$ и $\frac{Q}{R}$, так что интеграл будет

$$y = e^{-\int \frac{P\,dx}{R}} \int \frac{e^{\int \frac{P\,dx}{R}} Q\,dx}{R}.$$

Для уяснения этой задачи добавим несколько примеров.

ПРИМЕР 1

424. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$dy + y\,dx = x^n\,dx;$$

найти его интеграл.

Так как в этом случае $P = 1$, $Q = x^n$, то $\int P\,dx = x$, и интегральное уравнение получит вид

$$y = e^{-x} \int e^x x^n\,dx.$$

Если n — целое положительное число, получим (§ 223):

$$y = e^{-x}\left(e^x\left(x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \text{ и т. д.}\right) + C\right),$$

или в развернутом виде

$$y = Ce^{-x} + x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \text{ и т. д.}$$

Отсюда мы получаем для наиболее простых значений числа n:

если $n = 0$, то $y = Ce^{-x} + 1$,
если $n = 1$, то $y = Ce^{-x} + x - 1$,
если $n = 2$, то $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2\cdot 1$,
если $n = 3$, то $y = Ce^{-x} + x^3 - 3x^2 + 3\cdot 2x - 3\cdot 2\cdot 1$
и т. д.

СЛЕДСТВИЕ 1

425. Если, следовательно, постоянное C положить $=0$, то будем иметь частный интеграл

$$y = x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \text{ и т. д.},$$

который является, очевидно, алгебраическим, покуда n — целое положительное число.

СЛЕДСТВИЕ 2

426. Если интеграл требуется определить так, чтобы при $x=0$ значение y исчезало, то постоянное C должно быть взято равным последнему (постоянному) члену с обратным знаком; следовательно, [в этом случае] интеграл всегда будет трансцендентным.

ПРИМЕР 2

427. *Предложено дифференциальное уравнение* $(1-x^2)\,dy + xy\,dx = a\,dx$; *найти его интеграл.*

Если разделить это уравнение на $1-x^2$, то оно приводится к виду

$$dy + \frac{xy\,dx}{1-x^2} = \frac{a\,dx}{1-x^2},$$

так что $P = \frac{x}{1-x^2}$; $Q = \frac{a}{1-x^2}$; значит,

$$\int P\,dx = -l\sqrt{1-x^2} \quad \text{и} \quad e^{\int P\,dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

откуда находим интеграл

$$y = \sqrt{1-x^2}\int \frac{a\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{ax}{\sqrt{1-x^2}} + C\right)\sqrt{1-x^2}.$$

Поэтому искомый интеграл будет

$$y = ax + C\sqrt{1-x^2}.$$

Если требуется определить его так, чтобы он исчезал при $x=0$, то надо взять $C=0$, и тогда будем иметь $y = ax$.

ПРИМЕР 3

428. *Предложено дифференциальное уравнение* $dy + \frac{ny\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = a\,dx$; *найти его интеграл.*

Так как $P = \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$ и $Q = a$, то

$$\int P\,dx = nl\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad e^{\int P\,dx} = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n$$

и

$$e^{-\int P\,dx} = \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^n.$$

Следовательно, искомый интеграл будет

$$y = \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^n \int a\,dx\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n.$$

Для его вычисления положим $x+\sqrt{1+x^2}=u$; тогда получится $x=\frac{u^2-1}{2u}$, откуда

$$dx=\frac{du\,(1+u^2)}{2u^2},$$

следовательно,

$$\int u^n\,dx=\frac{u^{n-1}}{2\,(n-1)}+\frac{u^{n+1}}{2\,(n+1)}+C.$$

Так как $\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n=u^{-n}$, то

$$y=Cu^{-n}+\frac{au^{-1}}{2\,(n-1)}+\frac{au}{2\,(n+1)},$$

или

$$y=C\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n+\frac{a}{2\,(n-1)}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\frac{a}{2\,(n+1)}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right).$$

Это выражение приводится к виду

$$y=C\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n+\frac{na}{n^2-1}\sqrt{1+x^2}-\frac{ax}{n^2-1};$$

если нужно определить интеграл так, чтобы $y=0$ при $x=0$, то надо взять $C=-\frac{na}{n^2-1}$.

ЗАДАЧА 53

429. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$dy+Py\,dx=Qy^{n+1}\,dx,$$

где P и Q обозначают какие угодно функции от x. Привести его к виду, допускающему разделение переменных, и проинтегрировать.

РЕШЕНИЕ

Если положить $\frac{1}{y^n}=z$, то это уравнение сразу же приведется к только что рассмотренному виду; действительно, так как $\frac{dy}{y}=-\frac{dz}{nz}$, то наше уравнение, разделенное на y, т. е. уравнение

$$\frac{dy}{y}+P\,dx=Qy^n\,dx,$$

тотчас переходит в уравнение

$$-\frac{dz}{nz}+P\,dx=\frac{Q\,dx}{z},\quad \text{т. е.}\quad dz-nPz\,dx=-nQ\,dx,$$

интеграл которого есть

$$z=-e^{n\int P\,dx}\int e^{-n\int P\,dx}nQ\,dx,$$

и поэтому

$$\frac{1}{y^n}=-ne^{n\int P\,dx}\int e^{-n\int P\,dx}Q\,dx.$$

Но с этим уравнением можно поступать так же, как и с предыдущим, а именно, искать такую функцию X, чтобы после подстановки

$y = Xu$ получилось уравнение, допускающее разделение переменных. Но [после подстановки] получается:

$$X\,du + u\,dX + PXu\,dx = X^{n+1}u^{n+1}Q\,dx.$$

Поэтому пусть $dX + PX\,dx = 0$, т. е. $X = e^{-\int P\,dx}$, тогда будем иметь:

$$\frac{du}{u^{n+1}} = X^nQ\,dx = e^{-n\int P\,dx}\,Q\,dx$$

и, интегрируя,

$$-\frac{1}{nu^n} = \int e^{-n\int P\,dx}\,Q\,dx,$$

а так как

$$u = \frac{y}{X} = e^{\int P\,dx}\,y,$$

то будем иметь, как и прежде,

$$\frac{1}{y^n} = -ne^{n\int P\,dx}\int e^{-n\int P\,dx}\,Q\,dx.$$

ПОЯСНЕНИЕ

430. Следует считать, что этот случай не отличается от предыдущего, так что здесь не получается ничего нового. Эти два класса дифференциальных уравнений[1] — почти единственные сколько-нибудь широкие классы, для которых можно осуществить разделение переменных. Прочие случаи, которые при помощи той или иной подстановки можно привести к виду, допускающему разделение переменных, по большей части являются слишком частными, чтобы от них можно было ожидать значительной пользы. Однако же мы здесь изложим несколько случаев, заслуживающих предпочтения перед остальными.

ЗАДАЧА 54

431. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$\alpha y\,dx + \beta x\,dy + x^m y^n(\gamma y\,dx + \delta x\,dy) = 0;$$

преобразовать его к виду, допускающему разделение переменных, и проинтегрировать.

РЕШЕНИЕ

Разделив все уравнение на xy, получаем такой вид:

$$\frac{\alpha\,dx}{x} + \frac{\beta\,dy}{y} + x^m y^n\left(\frac{\gamma\,dx}{x} + \frac{\delta\,dy}{y}\right) = 0.$$

Отсюда сразу же видно, что подстановки $x^\alpha y^\beta = t$ и $x^\gamma y^\delta = u$ должны принести значительную пользу. Действительно, отсюда получится:

$$\frac{\alpha\,dx}{x} + \frac{\beta\,dy}{y} = \frac{dt}{t} \quad \text{и} \quad \frac{\gamma\,dx}{x} + \frac{\delta\,dy}{y} = \frac{du}{u},$$

а следовательно, наше уравнение примет вид

$$\frac{dt}{t} + x^m y^n\frac{du}{u} = 0.$$

[1]) То есть однородные и линейные уравнения.

Но из подстановки следует, что

$$x^{\alpha\delta-\beta\gamma}=t^{\delta}u^{-\beta} \quad \text{и} \quad y^{\alpha\delta-\beta\gamma}=u^{\alpha}t^{-\gamma},$$

и поэтому

$$x=t^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}u^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}, \quad y=t^{\frac{-\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}}u^{\frac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}};$$

подставив эти значения, получим:

$$\frac{dt}{t}+t^{\frac{\delta m-\gamma n}{\alpha\delta-\beta\gamma}}u^{\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}}\frac{du}{u}=0,$$

откуда

$$t^{\frac{\gamma n-\delta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1}\,dt+u^{\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}-1}\,du=0.$$

Интеграл этого уравнения есть

$$\frac{t^{\frac{\gamma n-\delta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}}}{\gamma n-\delta m}+\frac{u^{\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}}}{\alpha n-\beta m}=C.$$

Теперь остается только восстановить значения $t=x^{\alpha}y^{\beta}$ и $u=x^{\gamma}y^{\delta}$. Надо, впрочем, заметить, что если $\gamma n-\delta m=0$ или $\alpha n-\beta m=0$, вместо написанных выше членов следует писать [соответственно] lt или lu.

ПОЯСНЕНИЕ

432. К предложенному уравнению приводит следующий вопрос: найти такую зависимость между переменными x и y, чтобы

$$\int y\,dx=axy+bx^{m+1}y^{n+1}.$$

Для решения этого вопроса надо взять дифференциалы, в результате чего получается:

$$y\,dx=ax\,dy+ay\,dx+bx^{m}y^{n}\left((m+1)\,y\,dx+(n+1)\,x\,dy\right).$$

Сравнив это уравнение с данным выше, имеем:

$$\alpha=a-1, \quad \beta=a, \quad \gamma=(m+1)\,b, \quad \delta=(n+1)\,b;$$

следовательно,

$$\alpha\delta-\beta\gamma=(n-m)\,ab-(n+1)\,b,$$

$$\alpha n-\beta m=(n-m)\,a-n \quad \text{и} \quad \gamma n-\delta m=(n-m)\,b;$$

тем самым интегральное уравнение найдено.

ЗАДАЧА 55

433. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$y\,dy+dy\,(a+bx+nx^{2})=y\,dx\,(c+nx).$$

Привести его к виду, допускающему разделение переменных, и проинтегрировать.

РЕШЕНИЕ

Так как отсюда следует

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(c+nx)}{y+a+bx+nx^2},$$

то испробуем подстановку

$$\frac{y(c+nx)}{y+a+bx+nx^2}=u, \quad \text{т. е.} \quad y=\frac{u(a+bx+nx^2)}{c+nx-u}.$$

Должно быть $dy=u\,dx$, т. е.

$$\frac{dy}{y}=\frac{u\,dx}{y}=\frac{dx(c+nx-u)}{a+bx+nx^2}.$$

Но из логарифмов[1]) получаем уравнение

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}+\frac{dx(b+2nx)}{a+bx+nx^2}-\frac{n\,dx-du}{c+nx-u}=\frac{dx(c+nx-u)}{a+bx+nx^2},$$

которое преобразуется к виду

$$\frac{du(c+nx)-nu\,dx}{u(c+nx-u)}=\frac{dx(c-b-nx-u)}{a+bx+nx^2},$$

или

$$\frac{du(c+nx)}{u(c+nx-u)}=\frac{dx(na+c^2-bc+(b-2c)u+u^2)}{(c+nx-u)(a+bx+nx^2)}.$$

Это уравнение, будучи помножено на $c+nx-u$, очевидно, допускает разделение переменных; и мы получаем:

$$\frac{dx}{(a+bx+nx^2)(c+nx)}=\frac{du}{u(na+c^2-bc+(b-2c)u+u^2)}.$$

Интегрирование этого уравнения может быть выполнено при помощи логарифмов и углов. Но лишь благодаря случаю, который едва ли можно было заранее предвидеть, эта подстановка привела к желательной цели, и потому эта задача большой пользы принести не может.

ЗАДАЧА 56

434. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$(y-x)\,dy=\frac{n\,dx(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}};$$

привести его к разделению переменных и проинтегрировать.

РЕШЕНИЕ

Ввиду наличия двух иррациональностей вряд ли каким-либо образом может сразу стать ясным, какую подстановку надо применить. Конечно, надо искать такую, в результате которой под одним и тем же знаком корня не оказались бы оба переменных вместе. Для этой цели

---

[1]) То есть сначала логарифмируя уравнение $y=\dfrac{u(a+bx+nx^2)}{c+nx-u}$, а затем дифференцируя.

кажется подходящей такая подстановка:

$$y=\frac{x-u}{1+xu};$$

она дает

$$y-x=\frac{-u\,(1+x^2)}{1+xu}, \quad 1+y^2=\frac{(1+x^2)(1+u^2)}{(1+xu)^2}$$

и

$$dy=\frac{dx\,(1+u^2)-du\,(1+x^2)}{(1+xu)^2}.$$

Подставив эти значения в наше уравнение, получим:

$$-u\,dx\,(1+u^2)+u\,du\,(1+x^2)=n\,dx\,(1+u^2)\sqrt{1+u^2}.$$

Это уравнение, очевидно, допускает разделение переменных, а именно, получается:

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{u\,du}{(1+u^2)\left(n\sqrt{1+u^2}+u\right)}.$$

Это уравнение, если положить $1+u^2=t^2$, становится более стройным[1]):

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dt}{t\left(nt+\sqrt{t^2-1}\right)}.$$

Устранив иррациональность при помощи подстановки $t=\frac{1+s^2}{2s}$, получаем уравнение

$$\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{2\,ds\,(1-s^2)}{(1+s^2)(n+1+(n-1)\,s^2)}=-\frac{2\,ds}{1+s^2}+\frac{2n\,ds}{n+1+(n-1)\,s^2},$$

интегрирование которого уже не представляет никакой трудности.

ПОЯСНЕНИЕ

435. В этом случае особенного внимания заслуживает подстановка, $y=\frac{x+u}{1+xu}$, при помощи которой устраняется двойная иррациональность. Поэтому стоит посмотреть, что может дать более общая подстановка

$$y=\frac{\alpha x+u}{1+\beta xu}.$$

Отсюда получается:

$$\alpha-\beta y^2=\frac{(\alpha-\beta u^2)(1-\alpha\beta x^2)}{(1+\beta xu)^2}, \quad y-\alpha x=\frac{u\,(1-\alpha\beta x^2)}{1+\beta xu}$$

и

$$dy=\frac{dx\,(\alpha-\beta u^2)+du\,(1-\alpha\beta x^2)}{(1+\beta xu)^2}.$$

Легко видеть, в какого рода уравнениях могла бы принести пользу эта подстановка; именно, при ее помощи двойная иррациональность $\frac{\sqrt{\alpha-\beta y^2}}{\sqrt{1-\alpha\beta x^2}}$ приводится к простой $\frac{\sqrt{\alpha-\beta u^2}}{1+\beta xu}$, которую можно затем без труда привести к рациональному виду.

[1]) concinnior.

Вот почти и все случаи, при которых находит место приведение к разделимости переменных. После обстоятельного их рассмотрения станут легко доступными и остальные случаи, какие до сих пор были изучены. Я присовокуплю сюда лишь исследование относительно случаев, когда уравнение $dy + y^2\,dx = ax^m\,dx$ допускает разделение переменных, поскольку к уравнениям подобного рода часто приходят и поскольку само это уравнение некогда было среди геометров предметом усердного изучения[1]).

ЗАДАЧА 57

436. *Определить для уравнения* $dy + y^2\,dx = ax^m\,dx$ *те значения показателя* m, *при которых это уравнение может быть приведено к разделению переменных.*

РЕШЕНИЕ

Прежде всего это уравнение само по себе допускает разделение переменных в случае $m = 0$. Действительно, так как в этом случае $dy = dx\,(a - y^2)$, то $dx = \frac{dy}{a - y^2}$. Поэтому все наше исследование должно быть направлено на то, чтобы при помощи подстановок свести другие случаи к этому случаю.

Положим $y = \frac{b}{z}$; тогда

$$-b\,dz + b^2\,dx = ax^m z^2\,dx.$$

Для того чтобы этот вид стал сходным с предложенным, положим $x^{m+1} = t$; тогда

$$x^m\,dx = \frac{dt}{m+1} \quad \text{и} \quad dx = \frac{t^{\frac{-m}{m+1}}\,dt}{m+1},$$

и мы получим:

$$b\,dz + \frac{az^2\,dt}{m+1} = \frac{b^2}{m+1}\,t^{\frac{-m}{m+1}}\,dt.$$

Если взять $b = \frac{a}{m+1}$, это уравнение станет еще более сходным с предложенным, а именно будем иметь:

$$dz + z^2\,dt = \frac{a}{(m+1)^2}\,t^{\frac{-m}{m+1}}\,dt.$$

Если бы в этом уравнении переменные были разделимы, то и само предложенное уравнение было бы приведено указанной подстановкой к виду, допускающему разделение переменных и обратно. Отсюда мы заключаем, что если предложенное уравнение допускает разделение переменных в случае $m = n$, то оно допускает разделение также в случае $m = \frac{-n}{n+1}$. Но этим путем из случая $m = 0$ мы не получаем иного.

Положим $y = \frac{1}{x} - \frac{z}{x^2}$; тогда

$$dy = -\frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{x^2} + \frac{2z\,dx}{x^3}$$

[1]) См. примечание к § 441.

и

$$y^2\,dx = \frac{dx}{x^2} - \frac{2z\,dx}{x^3} + \frac{z^2\,dx}{x^4}\,.$$

Отсюда получается:

$$-\frac{dz}{x^2} + \frac{z^2\,dx}{x^4} = ax^m\,dx$$

или

$$dz - \frac{z^2\,dx}{x^2} = -\,ax^{m+2}\,dx;$$

пусть теперь $x = \frac{1}{t}$; тогда

$$dz + z^2\,dt = at^{-m-4}\,dt.$$

Это уравнение таково же, как и предложенные; отсюда делаем вывод: если разделение удается в случае $m = n$, оно удается и в случае $m = -n-4$.

Итак, из одного случая $m = n$ получаются два других, а именно: $m = -\frac{n}{n+1}$ и $m = -n-4$. Но так как случай $m = 0$ известен, то, применяя попеременно эти две формулы, получим следующие случаи:

$$m = -4,\quad m = -\frac{4}{3}\,,\quad m = -\frac{8}{3}\,,\quad m = -\frac{8}{5}\,,\quad m = -\frac{12}{5}\,,$$

$$m = -\frac{12}{7}\,,\quad m = -\frac{16}{7}\ \text{и т. д.};$$

все эти случаи содержатся в формуле $m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$.

СЛЕДСТВИЕ 1

437. Итак, если будет либо $m = \frac{-4i}{2i+1}$, либо $m = \frac{-4i}{2i-1}$, то уравнение $dy + y^2\,dx = ax^m\,dx$ с помощью нескольких повторных подстановок в конце концов может быть приведено к виду $du + u^2\,dv = c\,dv$, а в этом уравнении можно произвести разделение переменных и интегрирование.

СЛЕДСТВИЕ 2

438. Стало быть, если $m = \frac{-4i}{2i+1}$, то уравнение

$$dy + y^2\,dx = ax^m\,dx$$

при помощи подстановок $x = t^{\frac{1}{m+1}}$ и $y = \frac{a}{(m+1)\,z}$ приводится к виду

$$dz + z^2\,dt = \frac{a}{(m+1)^2}\,t^n\,dt,\quad \text{где}\quad n = \frac{-4i}{2i-1}\,;$$

этот случай должен считаться на одну ступень более низким.

СЛЕДСТВИЕ 3

439. Если же $m = \frac{-4i}{2i-1}$, то уравнение

$$dy + y^2\,dx = ax^m\,dx$$

при помощи подстановок

$$x=\frac{1}{t} \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{x}-\frac{z}{x^2}, \quad \text{т. е.} \quad y=t-t^2z,$$

приводится к виду

$$dz+z^2\,dt=at^n\,dt,$$

в котором

$$n=\frac{-4(i-1)}{2i-1}=\frac{-4(i-1)}{2(i-1)+1};$$

этот случай опять на одну ступень ниже.

СЛЕДСТВИЕ 4

440. Стало быть, все случаи разделяемости, найденные таким путем, дают для показателя m отрицательные числа, содержащиеся между границами 0 и -4. Если же i — бесконечное число, то получается случай $m=-2$. Впрочем, этот случай сам по себе ясен, так как уравнение

$$dy+y^2\,dx=\frac{a\,dx}{x^2}$$

становится однородным, если положить $y=\frac{1}{z}$ [§ 410].

ПОЯСНЕНИЕ 1

441. Уравнение $dy+y^2\,dx=ax^m\,dx$ обычно называют уравнением Риккати по имени графа Риккати, который первый предложил случаи с разделяющимися переменными[1]). Я здесь представил это уравнение

---

[1]) Якопо Риккати (1676—1756) привел уравнение второго порядка $x^m\,d^2x=d^2y+dy^2$ к уравнению рассматриваемого здесь вида. Хотя ему и были известны случаи сводимости к уравнению с разделяющимися переменными, но в своем мемуаре, напечатанном в 1724 г., он их не указал, а лишь поставил задачу о разыскании случаев, сводящихся к разделению переменных. В том же выпуске журнала «Acta eruditorum», где был помещен мемуар Риккати, было напечатано зашифрованное в виде анограммы сообщение Даниила Бернулли о найденном им решении задачи Риккати. Через два года, в течение которых никаких публикаций по этому вопросу не последовало, Д. Бернулли опубликовал свое решение полностью. Как по методу, так и по результатам оно почти не отличается от решения, изложенного в предыдущих параграфах «Интегрального исчисления».

Когда Эйлер говорит (§ 435), что уравнение Риккати было предметом усердного изучения, он имеет в виду не опубликованную в то время оживленную переписку между рядом выдающихся математиков, в числе которых были Даниил Бернулли, Иван Бернулли (его отец), Николай I Бернулли (его двоюродный брат), Николай II Бернулли (его родной брат), X. Гольдбах и сам Эйлер. Эта переписка была опубликована лишь в 1843 г. внуком Эйлера, непременным секретарем Петербургской академии наук П.-Г. Фуссом (Correspondence, mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle, t. 1, 2, St.-Petersbourg, 1843).

Уравнение более общего вида

$$\frac{dy}{dx}=P(x)\,y^2+Q(x)\,y+R(x), \tag{A}$$

которое по почину Даламбера получило наименование уравнения Риккати, также было предметом изучения Эйлера, начиная с 1738 г. В 1762 г. Эйлер доказал, что если известен один частный интеграл уравнения (A), то последнее сводится к линейному и интегрируется с помощью двух квадратур. Если же известен еще один частный интеграл, то достаточно одной квадратуры.

в самом простом виде, так как к нему сразу же приводится уравнение $dy + Ay^2t^\mu\,dt = Bt^\lambda\,dt$, если положить $At^\mu\,dt = dx$ и $At^{\mu+1} = (\mu+1)x$.

Обе подстановки, которыми я пользовался, являются очень простыми; однако и с помощью более сложных подстановок не обнаруживается никаких других случаев разделяемости. В связи с этим представляется в высшей степени замечательным, что рассматриваемое уравнение крайне редко допускает разделение переменных, хотя число случаев, когда такая возможность оказывается, поистине бесконечно.

Впрочем, это исследование можно перенести с показателя на простой коэффициент[1]); действительно, положив $y = x^{\frac{m}{2}}z$, получаем:

$$dz + \frac{mz\,dx}{2x} + x^{\frac{m}{2}}z^2\,dx = ax^{\frac{m}{2}}\,dx;$$

если теперь положить

$$x^{\frac{m}{2}}\,dx = dt \quad \text{и} \quad x^{\frac{m+2}{2}} = \frac{m+2}{2}t,$$

то получится $\frac{dx}{x} = \frac{2dt}{(m+2)t}$, откуда

$$dz + \frac{mz\,dt}{(m+2)t} + z^2\,dt = a\,dt.$$

Следовательно, во всех тех случаях, когда $\frac{m}{m+2} = \pm 2i$, т. е. равно четному числу, положительному либо отрицательному, это уравнение можно привести к разделяемости, а значит, уравнение

$$dz \pm \frac{2iz\,dt}{t} + z^2\,dt = a\,dt$$

всегда интегрируемо. Если далее положить $z = u - \frac{m}{2(m+2)t}$, то получится:

$$du + u^2\,dt = a\,dt - \frac{m(m+4)\,dt}{4(m+2)^2t^2},$$

а для случаев, когда переменные разделяются, когда $m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$, будем иметь:

$$du + u^2\,dt = a\,dt + \frac{i(i \pm 1)\,dt}{t^2}.$$

О более плодотворном исследовании этого уравнения, поскольку оно имеет очень большое значение, я расскажу еще в дальнейшем[2]), когда буду заниматься интегрированием дифференциальных уравнений с помощью бесконечных рядов[3]). Исходя отсюда, мы легче получим случаи, допускающие разделение переменных, а вместе с тем сможем найти интегралы.

---

[1]) Caeterum haec investigatio ab exponente ad simplicem coefficientem traduci potest. Смысл этой фразы ясен из последующего: Эйлер хочет показать, что уравнение Риккати можно с помощью подстановки преобразовать в такое уравнение, где параметр m входит не в показатель степени, а в коэффициент.

[2]) Uberiorem autem huius aequationis evolutionem, quandoquidem est maximi momenti, in sequentibus docebo.

[3]) См. «Интегральное исчисление», т. II, гл. VII, §§ 940, 941, 943, 955—966; ср. также §§ 831—841.

ПОЯСНЕНИЕ 2

442. По-видимому, вряд ли возможно дать более подробные указания относительно разделения переменных, которые могли бы оказаться полезными; отсюда понятно, что этот метод можно применять лишь к очень немногим дифференциальным уравнениям. Поэтому я перейду к объяснению другого принципа, из которого можно черпать интегрирования; этот принцип имеет гораздо более широкое применение, ибо он может быть применен к дифференциальным уравнениям высших порядков, так что, как кажется, в нем содержится истинный и естественный источник всех интегрирований.

Этот принцип состоит в том, что для любого предложенного уравнения между двумя переменными всегда существует некоторая функция, после умножения на которую уравнение становится интегрируемым. Иначе говоря: все члены уравнения надо перенести в одну сторону; тогда, утверждаю я, всегда существует некоторая функция двух переменных x и y, скажем V, [такая], что после умножения выражение $VP\,dx+VQ\,dy$ оказывается интегрируемым, т. е. оно является истинным дифференциалом, порожденным дифференцированием некоторой функции двух переменных x и y. Положим эту функцию $=S$, так что $dS=VP\,dx+VQ\,dy$; так как $P\,dx+Q\,dy=0$, то будем иметь также $dS=0$, а следовательно, $S=\mathrm{Const}$. Это последнее уравнение будет интегралом, и притом полным, дифференциального уравнения $P\,dx+Q\,dy=0$. Значит, все дело сводится к нахождению этого множителя V.

ГЛАВА II

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ МНОЖИТЕЛЕЙ

ЗАДАЧА 58

443. *Исследовать предложенное дифференциальное уравнение: является ли оно непосредственно*[1] *интегрируемым или нет?*

РЕШЕНИЕ

Расположим все члены уравнения по одну сторону от знака равенства так, чтобы уравнение приняло вид $P\,dx+Q\,dy=0$; тогда уравнение будет интегрируемо само по себе, если выражение $P\,dx+Q\,dy$ будет истинным дифференциалом какой-либо функции двух переменных x и y, а это имеет место, как мы показали, в Дифференциальном исчислении[2], если дифференциал количества P, когда за переменную принимается только y, так относится к dy, как дифференциал количества Q, когда за переменную принимается только x, к dx; иными словами (применяя способ обозначения, которым мы пользовались в Дифференциальном исчислении), если

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

---

[1]) per se.

[2]) См. «Дифференциальное исчисление», ч. I, §§ 231 и 240. В настоящем параграфе Эйлер снова устанавливает необходимость условия $\left|\frac{dP}{dy}\right|=\left|\frac{dQ}{dx}\right|$; достаточность же этого условия не обоснована ни в «Дифференциальном исчислении», ни в даннном сочинении. Это не мешает Эйлеру в конце настоящего параграфа обратить теорему. Ставить этот пробел в упрек Эйлеру это означало бы упрекать всю математику XVIII века в недостаточном внимании к требованиям логической строгости. Во «Вступительном слове к „Дифференциальному исчислению“ Л. Эйлера» автор попытался выяснить всю неуместность подобных упреков. Можно, пожалуй, добавить еще, что в § 449 Эйлер, излагая прием эффективного разъяснения первообразной функции, казалось бы, вплотную подошел к необходимости доказать, что выражение $Q-V$ является функцией только y (см. также § 452). Имеющихся в его распоряжении средств было бы совершенно достаточно, чтобы с легкостью доказать равенство нулю производной $Q-V$ по x (ср. § 457). Но Эйлер настолько убежден в справедливости обратного предложения, что в § 449 даже не упоминает о постоянстве $Q-V$ (относительно x). По существу здесь нет и проигрыша в строгости, так как для обращения теоремы о дифференциале постоянного количества у Эйлера не было необходимых средств.

Действительно, если Z — та функция, дифференциал который есть $P\,dx + Q\,dy$, то при таком способе обозначения будем иметь $P = \left(\frac{dZ}{dx}\right)$ и $Q = \left(\frac{dZ}{dy}\right)$, а отсюда следует, что

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{d^2Z}{dy\,dx}\right).$$

Но

$$\left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2Z}{dy\,dx}\right),$$

откуда и вытекает, что $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Поэтому если предложено дифференциальное уравнение $P\,dx + Q\,dy = 0$ и требуется определить, является ли оно непосредственно интегрируемым или нет, то это распознается таким образом. Надо найти дифференцированием значения $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ и $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Если они будут равны друг другу, то уравнение интегрируемо само по себе; если же эти значения не равны, то уравнение само по себе не интегрируемо.

СЛЕДСТВИЕ 1

444. Следовательно, все дифференциальные уравнения, в которых переменные разделены, интегрируемы непосредственно; действительно, они будут иметь вид $X\,dx + Y\,dy = 0$; здесь X есть функция одного только x, а Y — одного только y, и поэтому

$$\left(\frac{dX}{dy}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{dY}{dx}\right) = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

445. Обратно: если в предложенном дифференциальном уравнении $P\,dx + Q\,dy = 0$ имеем $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0$ и $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0$, то переменные в этом уравнении разделены: действительно, в этом случае буква P — функция только переменного x, а Q — только переменного y. Значит, уравнения с разделенными переменными составляют как бы первый класс непосредственно интегрируемых уравнений.

СЛЕДСТВИЕ 3

446. Может, очевидно, быть и так, что $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$, хотя ни одно из этих значений не равно нулю. Значит, существуют уравнения, интегрируемые непосредственно, хотя переменные в них и не разделены.

ПОЯСНЕНИЕ

447. Критерий, с помощью которого мы распознаем уравнения, интегрируемые непосредственно, чрезвычайно важен для того метода интегрирования, который мы собираемся здесь изложить. Действительно, если обнаружится, что уравнение интегрируемо непосредственно, то его инте-

грал можно найти с помощью только что изложенных указаний[1]); если же уравнение не будет интегрируемым непосредственно, то всегда будет существовать такое количество, по умножении на которое заданное уравнение станет интегрируемым непосредственно. Поэтому все дело сведется к тому, чтобы для любого заданного уравнения, которое не интегрируемо непосредственно, найти подходящий множитель, который сделал бы его непосредственно интегрируемым. Если бы такой множитель можно было всегда найти, то ничего большего не надо бы и требовать. Однако эти изыскания удаются очень редко, и до настоящего времени они вряд ли простерлись шире, чем на такие уравнения, которые мы уже научились решать при помощи разделения переменных. Тем не менее, я не колеблюсь отдать решительное предпочтение этому методу перед предыдущим, так как он представляется мне более соответствующим природе [дифференциальных] уравнений; кроме того, его можно распространить и на дифференциальные уравнения высших порядков, по отношению к которым разделение переменных не приносит никакой пользы.

ЗАДАЧА 59

448. *Найти интеграл дифференциального уравнения, о котором известно, что оно непосредственно интегрируемо.*

РЕШЕНИЕ

Пусть дано дифференциальное уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$, в котором $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, и следовательно, $P\,dx+Q\,dy$ будет дифференциалом какой-то функции Z двух переменных x и y, так что $dZ=P\,dx+Q\,dy$. Так как, стало быть, мы имеем уравнение $dZ=0$, то искомый интеграл будет $Z=C$. Значит, все дело сводится к тому, чтобы найти эту функцию Z. Это нетрудно сделать, поскольку мы знаем, что $dZ=P\,dx+Q\,dy$. Действительно, если считать переменным только x, а второе переменное y рассматривать как постоянное, то $dZ=P\,dx$. Здесь мы имеем простое дифференциальное выражение, содержащее только одно переменное x; проинтегрировав его по правилам предыдущего раздела, получим:

$$Z=\int P\,dx+\text{Const},$$

но при этом необходимо заметить, что в это постоянное может как-либо входить и количество y, которое мы приняли здесь за постоянное. Поэтому вместо Const напишем Y, так что

$$Z=\int P\,dx+Y.$$

Далее будем таким же образом считать x постоянным, рассматривая только y как переменное. Так как в этом случае $dZ=Q\,dy$, то будем также иметь $Z=\int Q\,dy+\text{Const}$; но это постоянное будет содержать количество x, так что оно будет функцией от x; обозначив ее через X, будем иметь:

$$Z=\int Q\,dy+X.$$

[1]) per praecepta iam exposita; по-видимому, здесь оговорка, так как указания даны ниже (§ 448).

Хотя ни здесь функция X, ни выше функция Y не определяются, однако, так как должно быть

$$\int P\,dx+Y=\int Q\,dy+X,$$

то отсюда определятся обе функции. Действительно, $\int P\,dx-\int Q\,dy=$ $=X-Y$, а потому количество $\int P\,dx-\int Q\,dy$ всегда распадается на два слагаемых, одно из которых будет функцией только от x, а другое — только от y; отсюда уже сами собой определятся значения X и Y.

СЛЕДСТВИЕ 1

449. Так как $Q=\left(\frac{dZ}{dy}\right)$, то нет даже нужды в двух интегрированиях. Действительно, найдя интеграл $\int P\,dx$, будем его снова дифференцировать, считая переменным только y; пусть получится $V\,dy$; тогда необходимо, чтобы $V\,dy+dY=Q\,dy$, а поэтому

$$dY=Q\,dy-V\,dy=(Q-V)\,dy.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

450. Итак, интегрирование уравнений $P\,dx+Q\,dy=0$, интегрируемых непосредственно, должно производиться следующим образом. Надо искать интеграл $\int P\,dx$, рассматривая y как постоянное; этот интеграл надо снова дифференцировать, рассматривая только y как переменное. Пусть после этого получится $V\,dy$; тогда $Q-V$ будет функцией только от y. Отсюда найдем $Y=\int (Q-V)\,dy$, и искомое интегральное уравнение будет

$$\int P\,dx+Y=\mathrm{Const}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

451. Или же надо искать $\int Q\,dy$, рассматривая x как постоянное, этот интеграл надо снова дифференцировать, считая x переменным, а y постоянным. Пусть после этого получится $U\,dx$. Тогда $P-U$ обязательно будет функцией только от x. Отсюда найдем $X=\int (P-U)\,dx$, и искомое интегральное уравнение будет $\int Q\,dy+X=\mathrm{Const}$.

СЛЕДСТВИЕ 4

452. Из существа дела ясно, что безразлично, каким из этих двух путей идти: действительно, и в том и в другом случае мы неизбежно придем к одному и тому же интегральному уравнению, если только предложенное дифференциальное уравнение будет непосредственно интегрируемым. Ведь тогда в первом случае непременно окажется, что $Q-V$ является функцией одного только y, а во втором — что $P-U$ является функцией одного только x.

ПОЯСНЕНИЕ

453. Этот метод интегрирования можно пытаться применить и до того, как произведено исследование, является ли уравнение интегрируемым; действительно, если бы при применении способа, указанного в следствии 2, оказалось, что $Q-V$ есть функция только от y, или если бы при применении способа, указанного в следствии 3, оказалось, что $P-U$ есть функция только от x, то уже одно это служило бы доказательством, что уравнение интегрируемо непосредственно. Однако же лучше прежде всего исследовать, интегрируемо ли уравнение само по себе или нет, т. е. имеет ли место равенство $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, ибо при этом исследовании приходится прибегать только к дифференцированию. Мы приведем теперь несколько примеров уравнений, интегрируемых сами по себе, для того чтобы можно было уяснить не только самый метод интегрирования, но и те замечательные свойства, о которых мы упоминали.

ПРИМЕР 1

454. *Проинтегрировать уравнение*

$$dx\,(\alpha x+\beta y+\gamma)+dy\,(\beta x+\delta y+\varepsilon)=0,$$

интегрируемое непосредственно.

Так как здесь

$$P=\alpha x+\beta y+\gamma \quad \text{и} \quad Q=\beta x+\delta y+\varepsilon,$$

то

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\beta \quad \text{и} \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right)=\beta.$$

Равенство этих количеств подтверждает, что уравнение интегрируемо непосредственно. Рассматривая, согласно следствию 2, y как постоянное, найдем:

$$\int P\,dx=\frac{1}{2}\alpha x^2+\beta yx+\gamma x;$$

теперь будем иметь $V dy=\beta x\,dy$ и $(Q-V)\,dy=dy\,(\delta y+\varepsilon)$; поэтому

$$Y=\frac{1}{2}\delta y^2+\varepsilon y;$$

значит, интеграл будет

$$\frac{1}{2}\alpha x^2+\beta yx+\gamma x+\frac{1}{2}\delta y^2+\varepsilon y=C.$$

Следуя же способу, указанному в следствии 3, и рассматривая x как постоянное, получим:

$$\int Q\,dy=\beta xy+\frac{1}{2}\delta y^2+\varepsilon y.$$

Это уравнение, если рассматривать y как постоянное, дает $U\,dx=\beta y\,dx$; отсюда $(P-U)\,dx=(\alpha x+\gamma)\,dx$ и $X=\frac{1}{2}\alpha x^2+\gamma x$, а следовательно,

$$\int Q\,dy+X=C$$

дает тот же интеграл, что и раньше. Вместе с тем мы видим также, что

$$\int P\,dx - \int Q\,dy = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \gamma x - \frac{1}{2}\delta y^2 - \varepsilon y;$$

это выражение само собой распадается на две функции $X - Y$.

ПРИМЕР 2

455. *Проинтегрировать уравнение*

$$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dy - y\,dx}{y\sqrt{x^2+y^2}} \quad \textit{или} \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{dy}{y}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0,$$

интегрируемое непосредственно.

Здесь

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Для установления признака непосредственной интегрируемости имеем:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

а эти два значения равны между собой. Для нахождения интеграла применим теперь правило следствия 2 и будем иметь:

$$\int P\,dx = l\,(x + \sqrt{x^2+y^2}) \quad \text{и} \quad V\,dy = \frac{y\,dy}{(x + \sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$$

или, помножив числитель и знаменатель на $\sqrt{x^2+y^2} - x$,

$$V = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{y\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

откуда

$$Q - V = 0 \quad \text{и} \quad Y = \int (Q - V)\,dy = 0;$$

таким образом, искомый интеграл есть

$$l\,(x + \sqrt{x^2+y^2}) = \mathrm{Const}.$$

Согласно правилу следствия 3 имеем:

$$\int Q\,dy = ly - x\int \frac{dy}{y\sqrt{x^2+y^2}},$$

положив $y = \frac{1}{z}$, будем иметь:

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{x^2+y^2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{x^2z^2+1}} = -\frac{1}{x}\,l\,(xz + \sqrt{x^2z^2+1}),$$

а следовательно,

$$\int Q\,dy = ly + l\,\frac{x + \sqrt{x^2+y^2}}{y} = l\,(x + \sqrt{x^2+y^2}),$$

значит $U\,dx = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$, откуда $(P - U)\,dx = 0$.

ПРИМЕР 3

456. *Проинтегрировать уравнение*

$$(x^2+y^2-a^2)\,dy+(a^2+2xy+x^2)\,dx=0,$$

интегрируемое непосредственно.

Очевидно, здесь

$$P=a^2+2xy+x^2 \quad \text{и} \quad Q=x^2+y^2-a^2,$$

откуда $\left(\frac{dP}{dy}\right)=2x$ и $\left(\frac{dQ}{dx}\right)=2x$; равенство этих выражений указывает на непосредственную интегрируемость.

Далее имеем:

$$\int P\,dx=a^2x+x^2y+\frac{1}{3}x^3 \quad \text{и} \quad V\,dy=x^2\,dy,$$

откуда

$$(Q-V)\,dy=(y^2-a^2)\,dy \quad \text{и} \quad Y=\frac{1}{3}y^3-a^2y.$$

Следовательно, интеграл есть

$$a^2x+x^2y+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3-a^2y=\text{Const}.$$

Вторым способом получаем:

$$\int Q\,dy=x^2y+\frac{1}{3}y^3-a^2y,$$

откуда

$$U\,dx=2xy\,dx,$$

а следовательно,

$$(P-U)\,dx=(a^2+x^2)\,dx \quad \text{и} \quad X=a^2x+\frac{1}{3}x^3,$$

откуда получается тот же интеграл, что прежде.

ПОЯСНЕНИЕ

457. В этих примерах мы имели возможность получить на деле $\int P\,dx$, а отсюда определить его дифференциал $V\,dy$, считая переменным одно только y. Если же этот интеграл $\int P\,dx$ не удается взять, то неясно, как можно было бы получить отсюда $V\,dy$, поскольку выражение $\int P\,dx$, рассматриваемое само по себе, может содержать любое постоянное, включающее в себя также и y. Посмотрим теперь, как следует поступать в этом случае. Положим $Z=\int P\,dx+Y$; нам надо найти $\left(\frac{d\int P\,dx}{dy}\right)=V$. Так как $\int P\,dx=Z-Y$, то $V=\left(\frac{dZ}{dy}\right)-\frac{dY}{dy}$. Но $\left(\frac{dZ}{dx}\right)=P$, а значит, $\left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right)=\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dV}{dx}\right)$, ибо $\left(\frac{dZ}{dy}\right)=V+\frac{dY}{dy}$. Отсюда будем иметь:

$$V=\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right),$$

поэтому количество V находится интегрированием выражения $\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$, в котором y рассматривается как постоянное, после того как при разыскании значения $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ одно только y считалось переменным. Но так как здесь снова добавляется постоянное, содержащее y, то отсюда нельзя определить функцию Y, которую мы ищем. Причина этой неудачи заключается, очевидно, в неопределенности интегралов $\int P\,dx$ и $\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$, так как каждый из них включает в себя произвольную функцию количества y. Значит, это препятствие было бы устранено, если определить и тот и другой интеграл с помощью какого-либо определенного условия. Положим, например, что интеграл $\int P\,dx$ берется так, чтобы он исчезал при $x=f$ (причем постоянное f можно взять по произволу); тогда другой интеграл $\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$ должен быть взят в соответствии с тем же законом. Сделав это, будем иметь функцию $Q-\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$ одного только y, и интеграл уравнения $P\,dx+Q\,dy=0$ будет

$$\int P\,dx+\int dy\left(Q-\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)\right)=\text{Const},$$

если только оба интеграла $\int P\,dx$ и $\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$, в которых y рассматривается как постоянное, определены так, чтобы они исчезали, когда в каждом из них количеству x придается одно и то же значение f. Таким образом, получаем следующее правило:

ПРАВИЛО ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕПОСРЕДСТВЕННО ИНТЕГРИРУЕМОГО УРАВНЕНИЯ $P\,dx+Q\,dy=0$, ГДЕ $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$

458. *Надо искать интегралы* $\int P\,dx$ *и* $\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$, *рассматривая* y *как постоянное количество, так, чтобы оба интеграла исчезали, когда количеству* x *придается какое-либо определенное значение, скажем* $x=f$. *Тогда* $Q-\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$ *будет функцией одного только* y; *пусть она будет* $=Y$; *искомый интеграл будет*

$$\int P\,dx+\int Y\,dy=\text{Const}.$$

Или (что приводит к тому же) надо искать интегралы $\int Q\,dy$ *и* $\int dy\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, *рассматривая* x *как постоянное количество, так, чтобы оба интеграла исчезали, когда количеству* y *придается какое-либо определенное значение, скажем* $y=q$. *Тогда* $P-\int dy\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ *будет функцией одного только* x; *если положить ее* $=X$, *то искомый интеграл будет*

$$\int Q\,dy+\int X\,dx=\text{Const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

В истинности этого правила можно убедиться из сказанного выше; [это говорится] на случай, если бы кому-либо показалось произвольным наше утверждение, что оба выражения $\int P\,dx$ и $\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$ должны быть определены по одному и тому же закону, т. е. что оба выражения должны исчезать, когда количеству x придается некоторое определенное значение, скажем $x=f$. Однако, чтобы случайно кто-либо не подумал, будто второе интегрирование с равным правом может быть определено и по другому закону, я прибавлю еще следующее доказательство. Первое интегрирование действительно зависит от нашего произвола; поэтому допустим, что оно определено так, чтобы интеграл $\int P\,dx$ исчезал при $x=f$. Я утверждаю, что после этого второй интеграл $\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$ по необходимости должен быть определен с помощью того же условия. В самом деле, пусть $\int P\,dx=Z$, тогда Z будет такой функцией количеств x и y, которая исчезает при $x=f$. Значит, Z будет иметь множителем $f-x$ или какую-либо положительную его степень $(f-x)^\lambda$, так что $Z=(f-x)^\lambda T$. В таком случае, поскольку $\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$ выражает значение количества $\left(\frac{dZ}{dy}\right)$, будем иметь $\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)=(f-x)^\lambda\left(\frac{dT}{dy}\right)$. Отсюда ясно, что этот интеграл также исчезает при $x=f$, так что определение этого интеграла уже не зависит от нашего произвола.

После того как это установлено, интегралом непосредственно интегрируемого уравнения $P\,dx+Q\,dy=0$ будет $\int P\,dx+\int Y\,dy=\mathrm{Const}$, где $Y=Q-\int dx\left(\frac{dP}{dx}\right)$. Действительно, положим $\int P\,dx=Z$, причем, конечно, в этом интегрировании y считается постоянным; тогда будем иметь уравнение $Z+\int Y\,dy=\mathrm{Const}$, которое и является искомым интегралом. Это обнаруживается хотя бы из дифференцирования. В самом деле, так как

$$dZ=P\,dx+dy\left(\frac{dZ}{dy}\right)=P\,dx+dy\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right),$$

то дифференциалом найденного уравнения будет

$$P\,dx+dy\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)+Y\,dy=0.$$

Но $Y=Q-\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$, откуда получается $P\,dx+Q\,dy=0$, а это и есть предложенное дифференциальное уравнение, а то, что $Q-\int dx\left(\frac{dP}{dy}\right)$ есть функция одного только y, следует из того, что дифференциальное уравнение является непосредственно интегрируемым.

ТЕОРЕМА

459. *Для всякого уравнения, которое не является непосредственно интегрируемым, всегда существует такое количество, что после умножения на него уравнение становится интегрируемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть имеем дифференциальное уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$. Представим себе его полный интеграл; это будет некое уравнение между x и y, в которое должно войти произвольное постоянное количество. Найдем из этого уравнения это произвольное постоянное количество; получится уравнение такого вида:

$$\text{Const} = \textit{некоторой функции количеств } x \textit{ и } y.$$

Если продифференцировать это уравнение, то получим $0=M\,dx+N\,dy$; это уравнение уже свободно от указанного произвольного постоянного количества, вошедшего вследствие интегрирования, и потому необходимо, чтобы это дифференциальное уравнение согласовывалось с предложенным, ибо в противном случае предположенный интеграл не был бы истинным. Значит, необходимо, чтобы из того и другого уравнения получалось одно и то же соотношение между dx и dy. Следовательно, будем иметь $\frac{P}{Q}=\frac{M}{N}$, а потому $M=LP$, а $N=LQ$. Но так как $M\,dx+N\,dy$ есть истинный дифференциал, полученный из дифференцирования некоторой функции количеств x и y, то $\left(\frac{dM}{dy}\right)=\left(\frac{dN}{dx}\right)$. Поэтому для уравнения $P\,dx+$ $+Q\,dy=0$ безусловно будет существовать некий такой множитель L, что

$$\left(\frac{d\,(LP)}{dy}\right)=\left(\frac{d\,(LQ)}{dx}\right),$$

т. е. что это уравнение, будучи помножено на L, станет непосредственно интегрируемым.

СЛЕДСТВИЕ 1

460. Итак, для всякого уравнения $P\,dx+Q\,dy=0$ существует такая функция L, что $\left(\frac{d\,(LP)}{dy}\right)=\left(\frac{d\,(LQ)}{dx}\right)$, или в развернутом виде

$$L\left(\frac{dP}{dy}\right)+P\left(\frac{dL}{dy}\right)=L\left(\frac{dQ}{dx}\right)+Q\left(\frac{dL}{dx}\right),$$

или

$$L\left(\left(\frac{dP}{dy}\right)-\left(\frac{dQ}{dx}\right)\right)=Q\left(\frac{dL}{dx}\right)-P\left(\frac{dL}{dy}\right).$$

Если будет найдена эта функция L, то дифференциальное уравнение $LP\,dx+LQ\,dy=0$ будет непосредственно интегрируемым.

СЛЕДСТВИЕ 2

461. В предложенном уравнении можно без всякого ущерба вместо Q написать единицу, так как всякое уравнение может быть представлено в виде $P\,dx+dy=0$. Поэтому нахождение такого множителя L, который превратил бы уравнение в непосредственно интегрируемое, зависит от решения уравнения

$$L\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dL}{dx}\right)-P\left(\frac{dL}{dy}\right),$$

причем надо заметить, что

$$dL=dx\left(\frac{dL}{dx}\right)+dy\left(\frac{dL}{dy}\right).$$

ПОЯСНЕНИЕ

462. Так как здесь требуется найти функцию двух переменных x и y, на зависимость между которыми (содержащуюся в уравнении $P\,dx+Q\,dy=0$) вовсе не обращается внимания, то это исследование входит в нашу вторую книгу, где такого рода функцию надо находить по некоторому данному соотношению между дифференциалами. Действительно, в настоящем исследовании мы оставляем без внимания предложенное уравнение, согласно которому выражение $P\,dx+Q\,dy$ должно стать равным нулю, и ищем безотносительно [к этому уравнению] такой множитель L, чтобы выражение $P\,dx+Q\,dy$ после умножения на него превратилось в истинный дифференциал некоторой конечной функции Z, т. е. чтобы $dZ=LP\,dx+LQ\,dy$. Лишь после того, как будет найден этот множитель L, мы будем рассматривать равенство $P\,dx+Q\,dy=0$ и сделаем отсюда вывод, что функция Z должна равняться постоянному количеству. Поскольку никак нельзя ожидать, чтобы нам удалось дать метод нахождения таких множителей для любого предложенного дифференциального уравнения, рассмотрим те случаи, для которых такой множитель известен, каким бы путем он ни был получен. Однако для наиболее широкого использования этого метода полезно будет в то же время заметить, что стоит нам узнать один какой-нибудь множитель для какого-либо дифференциального уравнения, как мы тотчас же сможем без труда вывести из него бесчисленные другие, которые также сделают предложенное уравнение интегрируемым само по себе.

ЗАДАЧА 60

463. *Дан один какой-нибудь множитель L, делающий уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$ непосредственно интегрируемым; найти бесчисленные другие, множители, которые выполняли бы ту же обязанность.*

РЕШЕНИЕ

Так как $L(P\,dx+Q\,dy)$ есть истинный дифференциал какой-то функции Z, то по данным выше правилам мы найдем эту функцию Z, так что будем иметь $L(P\,dx+Q\,dy)=dZ$. Теперь ясно, что это выражение dZ будет допускать интегрирование и в том случае, если оно будет помножено на любую функцию количества Z; обозначим ее так: $\varphi(Z)$ [1]. Так как, стало быть, и выражение $(P\,dx+Q\,dy)L\varphi(Z)$ является интегрируемым, то $L\varphi(Z)$ также будет множителем предложенного уравнения $P\,dx+Q\,dy=0$, превращающим это уравнение в интегрируемое. Поэтому, найдя один множитель L, надо искать путем интегрирования количество $Z=\int L(P\,dx+Q\,dy)$, и тогда выражение $L\varphi(Z)$, где вместо $\varphi(Z)$ можно взять любую функцию количества Z, даст бесчисленные другие множители, выполняющие ту же обязанность.

ПОЯСНЕНИЕ

464. Хотя для любого дифференциального уравнения достаточно знать только один множитель, однако встречаются случаи, когда весьма полезно иметь под рукой много или даже бесконечное число множителей. Так, например, если предложенное уравнение удобно разделяется

[1]) Эйлер пишет $\Phi : Z$

на две части вроде

$$(P\,dx+Q\,dy)+(R\,dx+S\,dy)=0$$

и известны все множители, при помощи которых каждая часть $P\,dx+Q\,dy$ и $R\,dx+S\,dy$, взятая в отдельности, может быть сделана интегрируемой, то иногда отсюда можно получить общий множитель, делающий обе части интегрируемыми. Пусть $L\varphi(Z)$ — общее выражение для всех множителей выражения $P\,dx+Q\,dy$, а $M\varphi(V)$ — общее выражение для всех множителей выражения $R\,dx+S\,dy$. Так как $\varphi(Z)$ и $\varphi(V)$ означают какие угодно функции количеств Z и V, то, если можно их взять так, чтобы $L\varphi(Z)=M\varphi(V)$, мы будем иметь множитель, подходящий для уравнения

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dx+S\,dy=0.$$

Само собой разумеется, что это представляет удобство только в тех случаях, когда множитель для всего уравнения может сделать интегрируемыми также его отдельные части, взятые порознь. Поэтому надо остерегаться того, чтобы придавать этому методу преувеличенное значение и чтобы считать уравнение неразрешимым, когда метод не приводит к успеху: ведь может случиться и так, что все уравнение имеет множитель, который не подходит для отдельных его частей. Так, например, если предложено уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$, то множитель, делающий отдельно взятую часть $P\,dx$ интегрируемой, очевидно, есть $\frac{X}{P}$, где X означает какую угодно функцию количества x, а множитель, делающий интегрируемой вторую часть $Q\,dy$, есть $\frac{Y}{Q}$; и хотя никак не может оказаться, чтобы $\frac{X}{P}=\frac{Y}{Q}$, т. е. чтобы $\frac{P}{Q}=\frac{X}{Y}$, исключая лишь случаи, очевидные сами по себе, однако выражение $P\,dx+Q\,dy$, взятое в целом, безусловно всегда имеет множитель, при помощи которого оно становится интегрируемым.

ПРИМЕР 1

465. *Найти все множители, при помощи которых выражение $\alpha y\,dx+\beta x\,dy$ становится интегрируемым.*

Первый из этих множителей, $\frac{1}{xy}$, сам собой бросается в глаза; он дает выражение $\frac{\alpha\,dx}{x}+\frac{\beta\,dy}{y}$, интеграл которого есть $\alpha lx+\beta ly=l(x^\alpha y^\beta)$. Значит, любая функция $\varphi(x^\alpha y^\beta)$ от $x^\alpha y^\beta$, помноженная на $\frac{1}{xy}$, даст подходящий множитель; следовательно, общий вид этого множителя есть $\frac{1}{xy}\varphi(x^\alpha y^\beta)$. Действительно, функция количества $x^\alpha y^\beta$ есть в то же время и функция логарифма этого же количества. Ведь если P будет функцией количества p, а Π — функцией количества P, то и Π будет функцией количества p и обратно.

СЛЕДСТВИЕ

466. Если в качестве функции взять любую степень $x^{n\alpha}y^{n\beta}$, то выражение $\alpha y\,dx+\beta x\,dy$ становится интегрируемым, если его помножить на $x^{n\alpha-1}y^{n\beta-1}$; в этом случае интеграл усматривается сам собой; он равен $\frac{1}{n}x^{n\alpha}y^{n\beta}$.

ПРИМЕР 2

467. *Найти все множители, делающие интегрируемым выражение* $Xy\,dx + dy$.

Первый множитель $\frac{1}{y}$ сам собой бросается в глаза, а так как $\int\left(X\,dx + \frac{dy}{y}\right) = \int X\,dx + ly$ или $le^{\int X\,dx}y$, то все функции этого количества или же количества $e^{\int X\,dx}y$, будучи разделены на y, дадут подходящие множители. Значит, общее выражение для всех множителей будет

$$= \frac{1}{y}\varphi\left(e^{\int X\,dx}y\right).$$

СЛЕДСТВИЕ

468. Для выражения $Xy\,dx + dy$ множителем будет также количество $e^{\int X\,dx}$, которое является функцией только одного x. Так как при помощи этого множителя становится интегрируемым также выражение $\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ означает какую угодно функцию количества x, то этот множитель окажется подходящим и для выражения $dy + Xy\,dx + \mathfrak{X}\,dx$.

ЗАДАЧА 61

469. *Предложено уравнение* $dy + Xy\,dx = \mathfrak{X}\,dx$, *в котором* X *и* $\mathfrak{X}$ *любые функции количества* x. *Найти подходящий множитель и проинтегрировать это уравнение.*

РЕШЕНИЕ

Так как второй член $\mathfrak{X}\,dx$ становится интегрируемым при умножении на любую функцию количества x, следует рассмотреть, может ли стать интегрируемым первый член $dy + Xy\,dx$ с помощью такого рода множителя. Так как к этому результату приводит множитель $e^{\int X\,dx}$, то, применив его, получим искомое интегральное уравнение:

$$e^{\int X\,dx}y = \int e^{\int X\,dx}\mathfrak{X}\,dx,$$

или

$$y = e^{-\int X\,dx}\int e^{\int X\,dx}\mathfrak{X}\,dx,$$

как мы нашли уже выше [§ 420].

СЛЕДСТВИЕ 1

470. Ясно также, что если вместо y входит какая-либо функция от y, так что мы имеем уравнение $dY + YX\,dx = \mathfrak{X}\,dx$, то его можно сделать интегрируемым при помощи множителя $e^{\int X\,dx}$, и интеграл будет

$$e^{\int X\,dx}Y = \int e^{\int X\,dx}\mathfrak{X}\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

471. На основании этого [можно проинтегрировать] уравнение $dy + yX\,dx = y^n\mathfrak{X}\,dx$, ибо, будучи разделено на y^n, оно получает вид $\frac{dy}{y^n} + \frac{X\,dx}{y^{n-1}} = \mathfrak{X}\,dx$; если здесь положить $\frac{1}{y^{n-1}} = Y$ и учесть, что $-\frac{(n-1)\,dy}{y^n} = dY$, т. е. что

$$\frac{dy}{y^n} = -\frac{dY}{n-1},$$

то получается:

$$-\frac{dY}{n-1} + YX\,dx = \mathfrak{X}\,dx,$$

или

$$dY - (n-1)\,YX\,dx = -(n-1)\,\mathfrak{X}\,dx,$$

а это уравнение с помощью множителя $e^{-(n-1)\int X\,dx}$ становится интегрируемым, и его интеграл будет

$$e^{-(n-1)\int X\,dx}Y = -(n-1)\int e^{-(n-1)\int X\,dx}\mathfrak{X}\,dx,$$

или [1])

$$\frac{1}{y^{n-1}} = -(n-1)\,e^{(n-1)\int X\,dx}\int e^{-(n-1)\int X\,dx}\,\mathfrak{X}\,dx.$$

ПОЯСНЕНИЕ

472. Для члена $dy + yX\,dx$ множитель в общем виде есть $\frac{1}{y}\,\varphi\left(e^{\int X\,dx}y\right)$; если взять в качестве функции степень, то подходящим будет множитель $e^{m\int X\,dx}y^{m-1}$, дающий интеграл $\frac{1}{m}\,e^{m\int X\,dx}y^m$. Значит, надо сделать так, чтобы с помощью того же множителя стал интегрируемым и второй член $y^n\mathfrak{X}\,dx$; это произойдет, если взять $m-1=-n$, т. е. $m = 1-n$, в результате чего интегралом этого члена будет $\int e^{m\int X\,dx}\mathfrak{X}\,dx$, и таким образом, мы получим искомое интегральное уравнение:

$$\frac{1}{1-n}\,e^{(1-n)\int X\,dx}\,y^{1-n} = \int e^{(1-n)\int X\,dx}\mathfrak{X}\,dx;$$

оно полностью совпадает с только что полученным [§ 471].

ЗАДАЧА 62

473. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$\alpha y\,dx + \beta x\,dy = x^m y^n\,(\gamma y\,dx + \delta x\,dy);$$

отыскать подходящий множитель, который бы сделал это уравнение интегрируемым, и найти самый интеграл.

---

[1]) Ср. § 429.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим каждый из двух членов в отдельности. Как мы видели выше, все множители для первой части $\alpha y\,dx+\beta x\,dy$ будут содержаться в выражении $\frac{1}{xy}\varphi(x^\alpha y^\beta)$. Для второй части

$$x^m y^n(\gamma y\,dx+\delta x\,dy)$$

первый множитель есть $\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}$; с его помощью получается выражение $\frac{\gamma\,dx}{x}+\frac{\delta\,dy}{y}$, интеграл которого есть $l(x^\gamma y^\delta)$. Значит, общий вид множителей этого выражения есть $\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\varphi(x^\gamma y^\delta)$. Для того чтобы сделать эти два множителя равными между собой, возьмем в качестве функций степени; тогда будем иметь:

$$x^{\mu\alpha-1}y^{\mu\beta-1}=x^{\nu\gamma-m-1}y^{\nu\delta-n-1}.$$

Значит, надо положить $\mu\alpha=\nu\gamma-m$ и $\mu\beta=\nu\delta-n$, откуда получается:

$$\mu=\frac{\gamma n-\delta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}\quad\text{и}\quad\nu=\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma}.$$

Поэтому множитель будет

$$x^{\mu\alpha-1}y^{\mu\beta-1}=x^{\nu\gamma-m-1}y^{\nu\delta-n-1},$$

вследствие чего наше уравнение получит вид

$$x^{\mu\alpha-1}y^{\mu\beta-1}(\alpha y\,dx+\beta x\,dy)=x^{\nu\gamma-1}y^{\nu\delta-1}(\gamma y\,dx+\delta x\,dy).$$

Здесь каждый из двух членов является непосредственно интегрируемым, и поэтому искомый интеграл есть

$$\frac{1}{\mu}x^{\mu\alpha}y^{\mu\beta}=\frac{1}{\nu}x^{\nu\gamma}y^{\nu\delta}+\mathrm{Const}.$$

Он согласуется с тем, который был найден в предыдущей главе [§ 431].

СЛЕДСТВИЕ 1

474. Если для краткости положить

$$\mu=\frac{\gamma n-\delta n}{\alpha\delta-\beta\gamma}\quad\text{и}\quad\nu=\frac{\alpha n-\beta m}{\alpha\delta-\beta\gamma},$$

то для дифференциального уравнения

$$\alpha y\,dx+\beta x\,dy=x^m y^n(\gamma y\,dx+\delta x\,dy)$$

полным интегралом будет

$$\frac{1}{\mu}x^{\mu\alpha}y^{\mu\beta}=\frac{1}{\nu}x^{\nu\gamma}y^{\nu\delta}+\mathrm{Const}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

475. Если окажется, что $\mu=0$, т. е. $\gamma n=\delta m$, то интеграл будет приведен к логарифмам, и будем иметь:

$$l(x^\alpha y^\beta)=\frac{1}{\nu}x^{\nu\gamma}y^{\nu\delta}+\mathrm{Const}.$$

Если же $\nu=0$, т. е. $\alpha n=\beta m$, то интеграл будет

$$\frac{1}{\mu}x^{\mu\alpha}y^{\mu\beta}=l(x^{\gamma}y^{\delta})+\text{Const}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

476. Исключением из этого решения представляется случай, когда $\alpha\delta=\beta\gamma$, так как в этом случае оба числа μ и ν становятся бесконечными. Но если $\delta=\frac{\beta\gamma}{\alpha}$, то наше уравнение получает вид

$$\alpha y\,dx+\beta x\,dy=\frac{\gamma}{\alpha}x^m y^n(\alpha y\,dx+\beta x\,dy),$$

или

$$(\alpha y\,dx+\beta x\,dy)\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}x^m y^n\right)=0.$$

Так как это уравнение имеет два множителя, то, приравнивая нулю каждый из них в отдельности, получаем два решения. Первое получается из уравнения $\alpha y\,dx+\beta x\,dy=0$, интеграл которого есть $x^\alpha y^\beta=\text{Const}$. Второй же множитель сам по себе дает конечное уравнение $1-\frac{\gamma}{\alpha}x^m y^n=0$. Каждое из этих решений удовлетворяет уравнению. То же самое надо иметь в виду относительно всех дифференциальных уравнений, которые можно разложить на множители; здесь, так же как в конечных уравнениях, каждый из множителей дает решение. Но по большей части конечные множители удаляются сразу же путем деления, — еще прежде чем приступают к интегрированию, поскольку считают, что они проникли в уравнения не из существа дела[1]), а лишь в результате произведенных математических действий; поэтому (совершенно так же, как в алгебре) часто бывает, что они заведомо приводят к бесполезным решениям[2]).

ЗАДАЧА 63

477. *Предложено однородное дифференциальное уравнение; найти такой подходящий множитель, который бы сделал это уравнение интегрируемым, и отсюда получить его интеграл.*

РЕШЕНИЕ

Пусть $P\,dx+Q\,dy=0$ — предложенное уравнение, в котором P и Q — однородные функции n измерений количеств x и y. Будем искать множитель L так, чтобы он также был однородной функцией, число измерений которой λ. Так как теперь выражение $L(P\,dx+Q\,dy)$ должно быть интегрируемым, то интеграл будет функцией количеств x и y, имеющей $\lambda+n+1$ измерений[3]).

---

[1]) non ex natura rei.

[2]) ut ... ad solutiones inutiles essent perducturi.

[3]) Эйлер исходит здесь из предпосылки, что интеграл полного дифференциала $LP\,dx+LQ\,dy$, где LP и LQ — однородные функции $\lambda+n$ измерений, всегда является (с точностью до постоянного слагаемого) однородной функцией $\lambda+n+1$ измерений. Что эта предпосылка неверна для случая $\lambda+n+1=0$ (а именно этот случай здесь и берется), это Эйлеру известно (см. § 481), так что мы имеем дело с досадным недосмотром. Эта ошибка не влечет неверного результата лишь потому, что она тотчас же погашается другой ошибкой (равенство $LPx+LQy=(\lambda+n+1)Z$ при

Если обозначить эту функцию через Z, то по свойству однородных функций будем иметь:

$$LPx+LQy=(\lambda+n+1)Z.$$

Поэтому если взять $\lambda=-n-1$, то количество $LPx+LQy$ будет либо равным нулю, либо постоянным[1]), откуда получаем $L=\frac{1}{Px+Qy}$; следо-

---

$\lambda+n+1=0$ несовместно с $L=\frac{1}{Px+Qy}$). Надо думать, что Эйлер и сам видел, что его рассуждение небезупречно, ибо вслед за ним он дает другой вывод («из разделения переменных»), а в § 481 замечает, что «особый способ, основанный на разделении переменных», он применил потому, что в случае, когда LP и LQ — однородные функции -1 измерения, «может получиться, что интеграл не есть функция нулевого измерения».

В § 481 содержится также утверждение, что исключительное положение, когда интеграл не является однородной функцией $(\lambda+n+1)$ измерения, может иметь место лишь в случае $\lambda+n=-1$. Это утверждение остается недоказанным, хотя Эйлер мог бы доказать его, пользуясь теми же средствами, которые он применяет в «особом способе». Действительно, пусть P и Q — однородные функции n измерений, т. е. $P=x^nU$ и $Q=x^nV$, где U и V — функции от $u=\frac{y}{x}$. Условие интегрируемости дифференциального выражения $P\,dx+Q\,dy$ есть

$$x^{n-1}\frac{dU}{du}=x^{n-1}\left(nV-u\frac{dV}{du}\right) \tag{1}$$

или

$$d(U+uV)=(n+1)V\,du. \tag{2}$$

Следовательно,

$$P\,dx+Q\,dy=x^nU\,dx+x^nV(x\,du+u\,dx)=x^n(U+uV)\,dx+x^{n+1}V\,du. \tag{3}$$

Если $n\neq-1$, то в силу (2) равенство (3) принимает вид

$$P\,dx+Q\,dy=x^n(U+uV)\,dx+\frac{x^{n+1}}{n+1}\,d(U+uV)=d\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(U+uV)\right]. \tag{4}$$

Стало быть при $n\neq-1$ интеграл есть однородная функция $(n+1)$ измерения.

Тут же выясняется, каков общий вид интеграла в случае $n=-1$. В этом случае из (2) следует, что функции U и V должны удовлетворять соотношению

$$U+uV=a \tag{5}$$

где a — некоторое постоянное. Значит, равенство (3) принимает вид

$$P\,dx+Q\,dy=\frac{a\,dx}{\lambda}+V\,du=d(alx+W), \tag{6}$$

где $W=\int V\,du$ есть однородная функция нулевого измерения.

Стало быть, в случае $n=-1$ интеграл является однородной функцией нулевого измерения лишь при $a=0$. При $a\neq0$ к функции нулевого измерения прибавляется выражение, пропорциональное логарифму однородной функции 1-го измерения.

Можно думать, что Эйлер руководился соображениями, близкими к вышеизложенным. Действительно, соотношение (5), если в него подставить $U=xP$, $V=xQ$, $u=\frac{y}{x}$, примет вид[1]

$$Px+Qy=a. \tag{7}$$

Это соотношение четко высказано (без доказательства) в § 480. Кроме того, в настоящем параграфе *в противоречии* с (неверной) формулой $LPx+LQy=(\lambda+n+1)Z$ и тотчас же вслед за ней говорится, что при $\lambda=-n-1$ «количество $LPx+LQy$ будет либо равным нулю, либо постоянным [отличным от нуля]».

[1]) См. предыдущее примечание.

вательно, это и есть множитель, подходящий для нашего уравнения. Тот же вывод можно сделать и из разделения переменных; действительно, если положить $y = ux$, то будем иметь $P = x^n U$ и $Q = x^n V$, где U и V — функции одного только u, а так как $dy = u\,dx + x\,du$, то

$$P\,dx + Q\,dy = x^n U\,dx + x^n Vu\,dx + x^n Vx\,du$$

или

$$P\,dx + Q\,dy = x^n (U + Vu)\,dx + x^{n+1} V\,du.$$

Но это выражение становится интегрируемым, если его разделить на $x^{n+1}(U + Vu)$; значит, наше выражение $P\,dx + Q\,dy$ после разделения на $x^{n+1}(U + Vu) = Px + Qy$ и после обратной подстановки значений

$$U = \frac{P}{x^n}, \quad V = \frac{Q}{x^m} \text{ и } u = \frac{y}{x}$$

станет интегрируемым; иными словами, подходящим множителем будет $\frac{1}{Px + Qy}$, а следовательно, уравнение $\frac{P\,dx + Q\,dy}{Px + Qy} = 0$ всегда является непосредственно интегрируемым.

Теперь, чтобы найти его интеграл, проинтегрируем выражение $\int \frac{P\,dx}{Px + Qy}$, рассматривая y как постоянное; при этом надо определить интеграл с таким расчетом, чтобы он исчезал при $x = f$. Далее, положив для краткости $\frac{P}{Px + Qy} = R$, возьмем значение $\left(\frac{dR}{dy}\right)$ и будем искать интеграл $\int dx \left(\frac{dR}{dy}\right)$ при том же условии, снова рассматривая y как постоянное.

Тогда $\frac{Q}{Px + Qy} - \int dx \left(\frac{dR}{dy}\right)$ будет функцией только количества y, т. е.

$$\frac{Q}{Px + Qy} - \int dx \left(\frac{dR}{dy}\right) = Y,$$

а искомый интеграл будет

$$\int \frac{P\,dx}{Px + Qy} + \int Y\,dy = \text{Const}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

478. Итак, выражение

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{Px + Qy}$$

является непосредственно интегрируемым; поэтому если положить для краткости

$$\frac{P}{Px + Qy} = R \quad \text{и} \quad \frac{Q}{Px + Qy} = S,$$

то мы должны иметь $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \left(\frac{dS}{dx}\right)$.

Но

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = \left(Qy\left(\frac{dP}{dy}\right) - Py\left(\frac{dQ}{dy}\right) - PQ\right) : (Px + Qy)^2$$

и

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(Px\left(\frac{dQ}{dx}\right) - Qx\left(\frac{dP}{dx}\right) - PQ\right) : (Px + Qy)^2.$$

Поэтому получим:

$$Qy\left(\frac{dP}{dy}\right)-Py\left(\frac{dQ}{dx}\right)=Px\left(\frac{dQ}{dx}\right)-Qx\left(\frac{dP}{dx}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2

479. Это же равенство можно также вывести из свойства однородных функций. Действительно, так как P и Q — [однородные] функции n измерений количеств x и y и так как

$$dP=dx\left(\frac{dP}{dx}\right)+dy\left(\frac{dP}{dy}\right)$$

и

$$dQ=dx\left(\frac{dQ}{dx}\right)+dy\left(\frac{dQ}{dy}\right),$$

то будем иметь:

$$nP=x\left(\frac{dP}{dx}\right)+y\left(\frac{dP}{dy}\right)$$

и

$$nQ=x\left(\frac{dQ}{dx}\right)+y\left(\frac{dQ}{dy}\right).$$

Значит, найденное нами равенство

$$Q\left(x\left(\frac{dP}{dx}\right)+y\left(\frac{dP}{dy}\right)\right)=P\left(x\left(\frac{dQ}{dx}\right)+y\left(\frac{dQ}{dy}\right)\right)$$

превращается в тождество

$$nPQ=nPQ.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

480. Если однородное уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$ окажется непосредственно интегрируемым и если P и Q — функции -1 измерения, то $Px+Qy$ будет постоянным числом. Пусть, например, таким уравнением будет

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=0;$$

если вместо dx и dy напишем x и y, то получится:

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1.$$

ПОЯСНЕНИЕ

481. Как мы показали в «Дифференциальном исчислении», если V будет однородной функцией n измерений количеств x и y и если положить $dV=P\,dx+Q\,dy$, то[1] $Px+Qy=nV$. Поэтому если $P\,dx+Q\,dy$ будет интегрируемым выражением, а P и Q — однородными функциями $n-1$ измерений, то сразу же находится интеграл, а именно, будем иметь $V=\frac{1}{n}(Px+Qy)$, и для этого нет нужды ни в каком интегриро-

[1]) «Дифференциальное исчисление», ч. I, § 222 (стр. 155 русского перевода).

вании. Вместе с тем мы видим, что из этого правила надо исключить случай, когда $n=0$, как это получается с нашим уравнением после того, как оно при помощи множителя принимает интегрируемый вид $\frac{P\,dx+Q\,dy}{Px+Qy}=0$, где dx и dy умножаются на функции -1 измерения; действительно, здесь интеграл нельзя получить без интегрирования. Причина этого исключения заключается в том, что интеграл интегрируемого выражения $P\,dx+Q\,dy$, в котором P и Q суть однородные функции $n-1$ измерений, лишь в том случае есть однородная функция n измерений, когда n не равно 0; действительно, только в этом случае может получиться, что интеграл не есть функция нулевого измерения, как это и имеет место для дифференциального выражения $\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$, интеграл которого есть $\frac{1}{2}\,l\,(x^2+y^2)$.

Вот почему мы доказывали то, что выражение $\frac{P\,dx+Q\,dy}{Px+Qy}$ интегрируемо данным выше [§ 477] особым способом, основанным на разделяемости переменных. Однако безотносительно к тому, откуда мы это узнали, в разбираемом вопросе наиболее примечательно то, что все однородные уравнения $P\,dx+Q\,dy=0$ становятся при помощи множителя $\frac{1}{Px+Qy}$ непосредственно интегрируемыми. Таким же образом желательно иметь общий метод, при помощи которого можно было бы находить этот множитель a priori; такой метод, разумеется, в величайшей мере обогатил бы анализ. Но до тех пор, пока не удается этого достигнуть, будет чрезвычайно полезно хорошо изучить такие множители для возможно большего числа случаев. Мы уже нашли их для двух типов уравнений; будем теперь искать множители и для прочих уравнений, способ интегрирования которых мы изложили выше. Тот же способ приведения к разделению переменных откроет нам эти множители, что мы и покажем в следующей задаче.

ЗАДАЧА 64

482. *Предложено дифференциальное уравнение, которое можно привести к разделению переменных; найти такой множитель, при помощи которого это уравнение становится непосредственно интегрируемым.*

РЕШЕНИЕ

Пусть $P\,dx+Q\,dy=0$ такое уравнение, которое при помощи некоторой определенной подстановки, вводящей вместо x и y два других переменных t и u, допускает разделение переменных. Положим, что после этой подстановки получится $P\,dx+Q\,dy=R\,dt+S\,du$ и что теперь в выражении $R\,dt+S\,du$, если его разделить на V, переменные будут разделены, так что в выражении $\frac{R\,dt+S\,du}{V}$ количество $\frac{R}{V}$ есть функция одного лишь t, а $\frac{S}{V}$ — функция одного лишь u.

Так как выражение $\frac{R\,dt+S\,du}{V}$ интегрируемо непосредственно, то и выражение $\frac{P\,dx+Q\,dy}{V}$ будет интегрируемым, поскольку оно станет равным первому, если в V будут восстановлены переменные x и y. В этом случае из приведения к виду с разделенными переменными уравнения $P\,dx + Q\,dy = 0$ мы узнаем, что множитель, при помощи которого это уравнение становится непосредственно интегрируемым, есть $\frac{1}{V}$. Таким образом, для уравнений, которые удается привести к разделению переменных, мы можем найти множитель, который сделал бы их интегрируемыми.

СЛЕДСТВИЕ 1

483. Итак, метод интегрирования дифференциальных уравнений при помощи множителей имеет столь же широкое значение, как и первый метод, основанный на разделении переменных, ибо само это разделение переменных для всякого уравнения, в котором оно удается, дает и множитель.

СЛЕДСТВИЕ 2

484. Более того, метод интегрирования при помощи множителей имеет более широкое значение, чем упомянутый первый, если только можно найти множители для таких уравнений, относительно которых неизвестно, каким образом надо приводить их к разделению переменных.

ПОЯСНЕНИЕ

485. Хотя из произведения к разделению переменных можно найти подходящий множитель, однако пока еще неизвестно, каким образом, зная множитель, можно осуществить разделение переменных. Вот почему также и по этим соображениям метод интегрирования при помощи множителей заслуживает значительного предпочтения перед первым. В самом деле, хотя до сих пор именно разделение переменных приводило нас к нахождению множителей, однако нет никакого сомнения в том, что существует путь нахождения множителей, совершенно независимый от разделения переменных, хотя до сих пор этот путь нам еще не известен. Но он будет постепенно становиться более ясным, если мы научимся распознавать подходящие множители для как можно большего числа уравнений. Поэтому в приведенных ниже примерах мы найдем те множители, которые пока что удалось получить из разделения переменных.

ПРИМЕР 1

486. *Предложено дифференциальное уравнение первой степени*

$$dx\,(\alpha x + \beta y + \gamma) + dy\,(\delta x + \varepsilon y + \zeta) = 0.$$

Найти для него подходящий множитель.

Это уравнение можно преобразовать к виду, допускающему разделение переменных, если предварительно положить[1])

$$\alpha x + \beta y + \gamma = r \quad \text{и} \quad \delta x + \varepsilon y + \zeta = s,$$

так что

$$\alpha\,dx + \beta\,dy = dr \quad \text{и} \quad \delta\,dx + \varepsilon\,dy = ds,$$

[1]) Ср. § 417.

откуда получается:

$$dx = \frac{\varepsilon\, dr - \beta\, ds}{\alpha\varepsilon - \beta\delta} \quad \text{и} \quad dy = \frac{\alpha\, ds - \delta\, dr}{\alpha\varepsilon - \beta\delta}.$$

Вследствие этого наше уравнение, если отбросить знаменатель как постоянную величину, будет

$$\varepsilon r\, dr - \beta r\, ds + \alpha s\, ds - \delta s\, dr = 0;$$

так как это уравнение однородное, оно становится интегрируемым, если его разделить на $\varepsilon r^2 - (\beta + \delta) rs + \alpha s^2$. К такому же выводу можно прийти и из разделения переменных. Действительно, если положить $r = su$, то получается:

$$\varepsilon s^2 u\, du + \varepsilon s u^2\, ds - \beta s u\, ds + \alpha s\, ds - \delta s^2\, du - \delta s u\, ds = 0,$$

или

$$s^2\, du\, (\varepsilon u - \delta) + s\, ds\, (\varepsilon u^2 - \beta u - \delta u + \alpha) = 0.$$

Это уравнение, будучи разделено на

$$s^2 (\varepsilon u^2 - \beta u - \delta u + \alpha),$$

дает уравнение с разделенными переменными. Поэтому множитель нашего уравнения есть

$$\frac{1}{s^2 (\varepsilon u^2 - \beta u - \delta u + \alpha)} = \frac{1}{\varepsilon r^2 - \beta rs - \delta rs + \alpha s^2} = \frac{1}{r (\varepsilon r - \beta s) + s (\alpha s - \delta r)};$$

если снова подставить значения [r и s], то это выражение получит вид

$$\frac{1}{(\alpha x + \beta x + \gamma)((\alpha\varepsilon - \beta\delta) x + \gamma\varepsilon - \beta\zeta) + (\delta x + \varepsilon y + \zeta)((\alpha\varepsilon - \beta\delta) y + \alpha\zeta - \gamma\delta)},$$

или после раскрытия

$$1 : \left\{ \begin{array}{r} (\alpha\varepsilon - \beta\delta)(\alpha x^2 + (\beta + \delta) xy + \varepsilon y^2 + \gamma x + \zeta y) + \alpha\zeta^2 - (\beta + \delta)\gamma\zeta + \gamma^2\varepsilon + \\ + (\alpha\gamma\varepsilon - (\beta - \delta)\alpha\zeta - \gamma\delta^2) x + (\alpha\varepsilon\zeta + (\beta - \delta)\gamma\varepsilon - \beta^2\zeta) y \end{array} \right\}.$$

Поэтому уравнение

$$\frac{dx\,(\alpha x + \beta y + \gamma) + dx\,(\delta x + \varepsilon y + \zeta)}{(\alpha\varepsilon - \beta\delta)(\alpha x^2 + (\beta + \delta) xy + \varepsilon y^2 + \gamma x + \zeta y) + Ax + By + C} = 0,$$

где

$$A = \alpha\gamma\varepsilon - (\beta - \delta)\alpha\zeta - \gamma\delta^2,$$
$$B = \alpha\varepsilon\zeta + (\beta - \delta)\gamma\varepsilon - \beta^2\zeta,$$
$$C = \alpha\zeta^2 - (\beta + \delta)\gamma\zeta + \gamma^2\varepsilon,$$

будет непосредственно интегрируемым.

СЛЕДСТВИЕ

487. Даже если случайно окажется, что $\alpha\varepsilon - \beta\delta = 0$, это не влияет на множитель, хотя разделение переменных при помощи этой операции [в этом случае] не удается.

Пусть $\alpha = ma$, $\beta = mb$, $\delta = na$, $\varepsilon = nb$. Тогда имеем такое уравнение:

$$dx\,(m\,(ax + by) + \gamma) + dy\,(n\,(ax + by) + \zeta) = 0.$$

Так как

$$A = a(na - mb)(m\zeta - n\gamma),$$
$$B = b(na - mb)(m\zeta - n\gamma),$$
$$C = (m\zeta - n\gamma)(a\zeta - b\gamma),$$

то по удалении общего делителя множителем будет

$$\frac{1}{(na - mb)(ax + by) + a\zeta - b\gamma},$$

так что уравнение

$$\frac{(ax + by)(m\,dx + n\,dy) + \gamma\,dx + \zeta\,dy}{(na - mb)(ax + by) + a\zeta - b\gamma} = 0$$

будет непосредственно интегрируемым.

ПРИМЕР 2

488. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$y\,dx(c + nx) - dy(y + a + bx + nx^2) = 0.$$

Найти подходящий множитель [1]).

Произведем подстановку $\frac{y(c + nx)}{y + a + bx + nx^2} = u$ или $y = \frac{u(a + bx + nx^2)}{c + nx - u}$, так что наше уравнение короче запишется в следующем виде:

$$y\,dx(c + nx) - \frac{y\,dy(c + nx)}{u} = 0,$$

или

$$\frac{y(c + nx)}{u}(u\,dx - dy) = 0,$$

или

$$\frac{y^2(c + nx)}{u}\left(\frac{dy}{y} - \frac{u\,dx}{y}\right) = 0$$

(надо тщательно остерегаться, чтобы не опустить здесь какого-либо множителя). После подстановки найдем:

$$\frac{dy}{y} - \frac{u\,dx}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dx(b + 2nx)}{a + bx + nx^2} + \frac{du - n\,dx}{c + nx - u} - \frac{dx(c + nx - u)}{a + bx + nx^2} =$$
$$= \frac{du(c + nx)}{u(c + nx - u)} - \frac{dx(na + c^2 - bc + (b - 2c)u + u^2)}{(c + nx - u)(a + bx + nx^2)}.$$

Поэтому наше уравнение получит такой вид:

$$\frac{y^2(c + nx)^2}{u(c + nx - u)}\left(\frac{du}{u} - \frac{dx(na + c^2 - bc + (b - 2c)u + u^2)}{(a + bx + nx^2)(c + nx)}\right) = 0.$$

Переменные разделятся, если помножить это уравнение на множитель

$$\frac{u(c + nx - u)}{y^2(c + nx)^2(na + c^2 - bc + (b - 2c)u + u^2)}.$$

Тогда получается:

$$\frac{du}{u(na + c^2 - bc + (b - 2c)u + u^2)} - \frac{dx}{(a + bx + nx^2)(c + nx)} = 0.$$

Итак, чтобы найти искомый множитель, остается только подставить

[1]) Ср. § 433.

туда[1]) вместо u его значение; тогда мы найдем множитель

$$\frac{a+bx+nx^2}{n(a+bx+nx^2)y^3+(a+bx+nx^2)(2na-bc+n(b-2c)x)y^2+(na+c^2-bc)(a+bx+nx^2)^2y},$$

который приводится к такому виду:

$$\frac{1}{ny^3+(2na-bc)y^2+n(b-2c)xy^2+(na+c^2-bc)(a+bx+nx^2)y}.$$

ПРИМЕР 3

489. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$\frac{n\,dx\,(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}+(x-y)\,dy=0;$$

найти такой множитель, который сделал бы это уравнение интегрируемым.

Выше (§ 434) мы положили $y=\frac{x-u}{1+xu}$ или $u=\frac{x-y}{1+xy}$, откуда

$$x-y=\frac{u(1+x^2)}{1+xu} \quad \text{и} \quad 1+y^2=\frac{(1+x^2)(1+u^2)}{(1+xu)^2};$$

тогда наше уравнение получает такой вид:

$$\frac{n\,dx\,(1+x^2)(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+xu)^3}+\frac{u\,dx\,(1+x^2)(1+u^2)-u\,du\,(1+x^2)^2}{(1+xu)^3}=0.$$

Если это уравнение сначала помножить на $(1+xu)^3$, а затем разделить на

$$(1+x^2)^2(1+u^2)\left(u+n\sqrt{1+u^2}\right),$$

то переменные разделяются. Поэтому множителем нашего уравнения будет

$$\frac{(1+xu)^3}{(1+x^2)^2(1+u^2)\left(u+n\sqrt{1+u^2}\right)}.$$

Прежде всего этот множитель, так как $1+u^2=\frac{(1+y^2)(1+xu)^2}{1+x^2}$, получает вид

$$\frac{1+xu}{(1+x^2)(1+y^2)\left(u+n\sqrt{1+u^2}\right)}.$$

Далее, так как $u=\frac{x-y}{1+xy}$, имеем:

$$\sqrt{1+u^2}=\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{1+xy} \quad \text{и} \quad 1+xu=\frac{1+x^2}{1+xy}.$$

Поэтому наш множитель получает вид

$$\frac{1}{(1+y^2)\left(x-y+n\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\right)},$$

так что уравнение

$$\frac{n\,dx\,(1+y^2)\sqrt{1+y^2}+(x-y)\,dy\sqrt{1+x^2}}{(1+y^2)\left(x-y+n\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\right)\sqrt{1+x^2}}=0$$

является непосредственно интегрируемым. На интегрировании его я не буду останавливаться, так как его интеграл я дал уже выше.

[1]) То есть в предпоследнее выражение.

ПРИМЕР 4

490. *Другим достопримечательным примером может служить уравнение*

$$y\,dx - x\,dy + ax^n y\,dy\,(x^n+b)^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Если его представить в виде

$$x\,dy - y\,dx + \frac{1}{b}\,x^{n+1}\,dy = \frac{1}{b}\,x^{n+1}\,dy + ax^n y\,dy\,(x^n+b)^{\frac{1}{n}},$$

то оказывается, что каждая из частей уравнения становится интегрируемой, если ее помножить на

$$\frac{y^{n-1}}{x^{n+1} + a\,bx^n y\,(x^n+b)^{\frac{1}{n}}}.$$

Чтобы найти этот множитель, исходя из разделения переменных, надо применить следующую далеко не очевидную подстановку:

$$\frac{x}{(x^n+b)^{\frac{1}{n}}} = vy,$$

откуда

$$x^n = \frac{bv^n y^n}{1-v^n y^n};$$

поэтому уравнение

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{(x^n+b)^{\frac{1}{n}}} + ax^n y\,dy = 0$$

переходит в такое:

$$\frac{y^2\,dv + v^{n+1}\,y^{n+1}\,dy + abv^n y^{n+1}\,dy}{1-v^n y^n} = 0.$$

Если это уравнение умножить на $\frac{1-v^n y^n}{y^2 v^n\,(ab+v)}$, то переменные разделяются:

$$\frac{dv}{v^n\,(ab+v)} + y^{n-1}\,dy = 0,$$

откуда получается тот же множитель.

ПРИМЕР 5

491. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$dy + y^2\,dx - \frac{a\,dx}{x^4} = 0.$$

Найти такой множитель, при помощи которого это уравнение может быть сделано интегрируемым.

Согласно § 436 положим $x=\frac{1}{t}$; так как $dx = -\frac{dt}{t^2}$, то наше выражение получит вид $dy - \frac{y^2\,dt}{t^2} + at^2\,dt$. Далее, подставим сюда $y = t - t^2 z$;

получится

$$-t^2(dz+z^2\,dt-a\,dt);$$

если это выражение разделить на $t^2(z^2-a)$, то переменные разделяются; значит, и наше уравнение, разделенное на

$$t^2(z^2-a)=\frac{(t-y)^2-at^4}{t^2}=(1-xy)^2-\frac{a}{x^2},$$

станет интегрируемым. Отсюда видно, что множитель будет $\frac{x^2}{x^2(1-xy)^2-a}$, а уравнение

$$\frac{x^4\,dy+x^4y^2\,dx-a\,dx}{x^4(1-xy)^2-ax^2}=0$$

будет непосредственно интегрируемым.

Будем рассматривать x как постоянное; тогда интегралом, порожденным из dy, будет

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\,l\,\frac{x(1-xy)+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-x(1-xy)}+X;$$

чтобы получить значение количества X, продифференцируем это выражение вторично и получим:

$$\frac{2xy\,dx-dx}{x^2(1-xy)^2-a}+dX=\frac{x^4y^2\,dx-a\,dx}{x^4(1-xy)^2-ax^2},$$

откуда

$$dX=\frac{x^4y^2\,dx-a\,dx-2x^3y\,dx+x^2\,dx}{x^4(1-xy)^2-ax^2}=\frac{dx}{x^2}\ \text{и}\ X=-\frac{1}{x}+C;$$

поэтому полным интегральным уравнением будет

$$l\,\frac{\sqrt{a}+x(1-xy)}{\sqrt{a}-x(1-xy)}=\frac{2\sqrt{a}}{x}+C.$$

ПОЯСНЕНИЕ

492. Вот, стало быть, довольно значительное число случаев таких дифференциальных уравнений, для которых нам известны множители. Их рассмотрение, по-видимому, принесет не малую пользу нашему значительному исследованию. Хотя нам еще далеко до определенного метода, который позволил бы находить подходящие множители в любом случае, но мы отсюда сможем получать типы таких уравнений, которые можно сделать интегрируемыми при помощи данных множителей. Так как такое занятие, по видимому, обещает принести очень большую пользу в этой трудной науке, то в следующей главе мы будем исследовать, для каких уравнений могли бы подойти данные множители. Примеры же, разобранные здесь, дают нам удобные виды множителей, которые смогут служить основой для нашего исследования.

ГЛАВА III

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, КОТОРЫЕ СТАНОВЯТСЯ ИНТЕГРИРУЕМЫМИ ПРИ ПОМОЩИ МНОЖИТЕЛЕЙ ЗАДАННОГО ВИДА

ЗАДАЧА 65

493. *Определить функции P и Q количества x так, чтобы дифференциальное уравнение $Py\,dx+(y+Q)\,dy=0$ стало интегрируемым при помощи множителя*

$$\frac{1}{y^3+My^2+Ny}, \quad \text{где } M \text{ и } N \text{ — функции от } x.$$

РЕШЕНИЕ

Необходимо, чтобы дифференциал[1]) коэффициента $\frac{Py}{y^3+My^2+Ny}$ при dx, порожденный переменностью количества y, был равен дифференциалу коэффициента $\frac{y+Q}{y^3+My^2+Ny}$, если [в этом коэффициенте] за переменное принимается только x. Равенство между этими равными значениями, если отбросить общий знаменатель, дает

$$-2Py^3-PMy^2=(y^3+My^2+Ny)\,\frac{dQ}{dx}-(y+Q)\,\frac{y^2dM+y\,dN}{dx}\,.$$

Если расположить это равенство по степеням y, получим:

$$\begin{aligned}0= {}&2Py^3dx+PMy^2dx\\ &+y^3dQ+My^2dQ+Ny\,dQ\\ &-y^3dM-y^2dN\\ &\qquad\qquad\qquad -Qy^2dM-Qy\,dN.\end{aligned}$$

Приведя к нулю каждую из этих степеней в отдельности, получаем

---

[1]) Речь идет, очевидно, не о самих дифференциалах, а об их отношениях к дифференциалам соответствующих переменных, т. е. на современном языке о производных.

прежде всего $N\,dQ-Q\,dN=0$, т. е. $\frac{dN}{N}=\frac{dQ}{Q}$; из интегрирования этого уравнения следует, что $N=\alpha Q$. Далее имеем еще два условия:

$$\text{I. } 2P\,dx+dQ-dM=0.$$

$$\text{II. } PMdx+MdQ-\alpha\,dQ-Q\,dM=0.$$

Отсюда $\text{I}\cdot M-\text{II}\cdot 2$ дает

$$-M\,dQ-M\,dM+2\alpha\,dQ+2Q\,dM=0,$$

или

$$dQ+\frac{2Q\,dM}{2\alpha-M}=\frac{M\,dM}{2\alpha-M};$$

если это уравнение разделить на $(2\alpha-M)^2$ и проинтегрировать, то получим:

$$\frac{Q}{(2\alpha-M)^2}=\int\frac{M\,dM}{(2\alpha-M)^3}=-\int\frac{dM}{(2\alpha-M)^2}+2\alpha\int\frac{dM}{(2\alpha-M^3)},$$

или

$$\frac{Q}{(2\alpha-M)^2}=\frac{-1}{2\alpha-M}+\frac{\alpha}{(2\alpha-M)^2}+\beta=\frac{M-\alpha}{(2\alpha-M)^2}+\beta.$$

Итак, будем иметь:

$$Q=M-\alpha+\beta(2\alpha-M)^2,$$

и значит,

$$2P\,dx=dM-dQ=+2\beta\,dM\,(2\alpha-M);$$

таким образом, вместо M можно взять какую угодно функцию количества x. Поэтому примем $M=2\alpha-X$; тогда будем иметь:

$$P\,dx=-\beta X\,dX,\quad Q=\alpha-X+\beta X^2$$

и

$$N=\alpha^2-\alpha X+\alpha\beta X^2.$$

Поэтому для уравнения

$$-\beta yXdX+dy\,(\alpha-X+\beta X^2+y)=0$$

мы имеем множитель

$$\frac{1}{y^3+(2\alpha-X)\,y^2+\alpha\,(\alpha-X+\beta X^2)\,y},$$

при помощи которого это уравнение становится интегрируемым.

СЛЕДСТВИЕ 1

494. Придадим уравнению такой вид:

$$dy\,(y+A+BV+CV^2)-CyVdV=0;$$

тогда будем иметь $\alpha=A$, $X=-BV$, $\beta X^2=\beta B^2V^2=CV^2$, следовательно, $\beta=\frac{C}{B^2}$, откуда множитель будет

$$\frac{1}{y^3+(2A+BV)\,y^2+A\,(A+BV+CV^2)\,y}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

495. Если здесь взять $V=a+x$, то получится уравнение, сходное с тем, которое мы проинтегрировали выше в § 488; множитель также согласуется с тем, который мы там дали. Этот множитель можно удобнее представить в таком виде:

$$\frac{1}{y(y+A)^2+BVy(y+A)+ACV^2y}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

496. Если положить $y+A=z$, то наше уравнение будет

$$dz(z+BV+CV^2)-C(z-A)V\,dV=0;$$

для него является подходящим множитель

$$\frac{1}{(z-A)(z^2+BVz+ACV^2)};$$

поэтому уравнение

$$\frac{dz(z+BV+CV^2)-C(z-A)VdV}{(z-A)(z^2+BVz+ACV^2)}=0$$

является непосредственно интегрируемым.

ПОЯСНЕНИЕ

497. Подобно тому как здесь мы приняли множитель уравнения $Py\,dx+(y+Q)\,dy=0$ равным $\frac{y^{-1}}{y^2+My+N}$, так же мы можем вместо него взять в более общем виде $\frac{y^{n-1}}{y^2+My+N}$; тогда непосредственно интегрируемым должно стать уравнение

$$\frac{Py^ndx+(y^n+Qy^{n-1})\,dy}{y^2+My+N}=0.$$

Если мы сопоставим его с видом $R\,dx+S\,dy=0$, для которого имеет место $\left(\frac{dR}{dy}\right)=\left(\frac{dS}{dx}\right)$, то будем иметь:

$$(n-2)Py^{n+1}+(n-1)PMy^n+nPNy^{n-1}$$
$$=(y^2+My+N)\,y^{n-1}\frac{dQ}{dx}-(y^n+Qy^{n-1})\left(\frac{ydM}{dx}+\frac{dN}{dx}\right)$$

или, расположив уравнение по степеням,

$$\left.\begin{array}{lll}(n-2)Py^{n+1}dx+ & (n-1)PMy^ndx+ & nPNy^{n-1}dx\\ -y^{n+1}dQ- & My^n\,dQ- & Ny^{n-1}dQ\\ +y^{n+1}dM+ & y^n\,dN+ & Qy^{n-1}dN\\ + & Qy^n\,dM & \end{array}\right\}=0;$$

если приравнять нулю каждый член в отдельности, получим:

I. $(n-2)P\,dx=dQ\quad -dM.$

II. $(n-1)MP\,dx=M\,dQ-Q\,dM-dN.$

III. $nNP\,dx=N\,dQ-Q\,dN.$

Пусть $Pdx = dV$. Тогда из первого уравнения получим $Q = A + M + (n-2)V$; подставив это значение во второе уравнение, получим:

$$MdV + (n-2)VdM + A\,dM + dN = 0,$$

а третье получит вид

$$2NdV + (n-2)VdN + MdN - NdM + A\,dN = 0.$$

Исключая из этих уравнений dV, находим:

$$(n-2)V + A = \frac{M^2dN - MN\,dM - 2N\,dN}{2N\,dM - M\,dN}.$$

Если бы мы захотели исключить отсюда V, то мы столкнулись бы с дифференцио-дифференциальным уравнением[1]). Однако случай, когда $n = 2$, разрешим.

ПРИМЕР

498. *Пусть при развертывании этого уравнения мы имеем случай $n = 2$, так что непосредственно интегрируемым должно быть следующее уравнение:*

$$\frac{y\,(Py\,dx + (y+Q)\,dy)}{y^2 + My + N} = 0.$$

Прежде всего должно быть $Q = A + M$; далее,

$$2ANdM - AMdN = M\,(MdN - NdM) - 2NdN.$$

Это уравнение мы должны интегрировать, а так как оно не содержится ни в одном из разобранных выше типов, то надо посмотреть, каким способом можно облегчить его решение. Положим $M = Nu$; тогда

$$MdN - NdM = -N^2du$$

и

$$2N\,dM - M\,dN = 2N^2\,du + Nu\,dN,$$

откуда

$$2AN^2du + ANu\,dN + N^3u\,du + 2NdN = 0$$

или

$$\frac{2dN}{N^2} + \frac{Au\,dN}{N^2} + \frac{2A\,du}{N} + u\,du = 0.$$

Далее, подставим $\frac{1}{N} = v$ или $N = \frac{1}{v}$; тогда получим:

$$-2\,dv - Au\,dv + 2Av\,du + u\,du = 0$$

или

$$dv - \frac{2Av\,du}{2+Au} = \frac{u\,du}{2+Au}.$$

Здесь переменное количество v имеет только одно измерение[2]), и потому ясно, что это уравнение станет интегрируемым, если его разде-

[1]) То есть дифференциальное уравнение второго порядка.

[2]) То есть уравнение линейное; интегрирующий множитель $\frac{1}{(2+Au)^2}$ вычислен по правилу § 469.

лить на $(2+Au)^2$; тогда получится:

$$\frac{v}{(2+Au)^2}=\int\frac{u\,du}{(2+Au)^3}=\frac{C}{A^2}-\frac{1+Au}{A^2(2+Au)^2},$$

поэтому $v=\frac{C(2+Au)^2-1-Au}{A^2}$. Взяв вместо u какую угодно функцию от x, будем иметь:

$$N=\frac{A^2}{C(2+Au)^2-1-Au},\quad M=\frac{A^2u}{C(2+Au)^2-1-Au}$$

и

$$Q=\frac{AC(2+Au)^2-A}{C(2+Au)^2-1-Au}.$$

Теперь из третьего уравнения мы получаем $2NPdx=NdQ-QdN$ или $2Pdx=Nd\left(\frac{Q}{N}\right)$. Но $\frac{Q}{N}=\frac{C(2+Au)^2-1}{A}$, откуда $d\left(\frac{Q}{N}\right)=2C\,du(2+Au)$, и поэтому

$$Pdx=\frac{A^2C\,du\,(2+Au)}{C(2+Au)^2-1-Au}.$$

Поэтому наше непосредственно интегрируемое уравнение есть

$$\frac{A^2Cy^2du\,(2+Au)+y\,dy\,(C(2+Au)^2\,y-(1+Au)\,y+AC(2+Au)^2-A)}{C(2+Au)^2y^2-(1+Au)\,y^2+A^2uy+A^2}=0.$$

Если положить $Au+2=t$, то это уравнение получит такой вид:

$$y\cdot\frac{ACyt\,dt+y\,dy\,(Ct^2-t+1)+A\,dy\,(Ct^2-1)}{Ct^2y^2-(t-1)\,y^2+A\,(t-2)\,y+A^2}=0.$$

Отсюда, положив $A=\alpha$, $C=\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}$ и $t=-\frac{\beta x}{\alpha}$, находим:

$$y\cdot\frac{\alpha\gamma xy\,dx+y\,dy\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)-\alpha\,dy\,(\alpha-\gamma x^2)}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\,y^2-\alpha\,(2\alpha+\beta x)\,y+\alpha^3}=0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

499. Таким способом, очевидно, можно интегрировать следующее уравнение:

$$\alpha\gamma xy\,dx+y\,dy\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)-\alpha\,dy\,(\alpha-\gamma x^2)=0.$$

Каким образом надо привести его к разделению переменных, это сразу не усматривается. Но подходящий множитель есть

$$\frac{y}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\,y^2-\alpha\,(2\alpha+\beta x)\,y+\alpha^3}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

500. Этот множитель, если разложить его знаменатель на множители, можно выразить еще следующим образом:

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\,y:\left\{\begin{array}{l}\left[(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\,y-\alpha\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta x\right)+\alpha x\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2-\alpha\gamma}\,\right]\\ \left[(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\,y+\alpha\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta x\right)-\alpha x\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2-\alpha\gamma}\,\right]\end{array}\right\}$$

СЛЕДСТВИЕ 3

501. Значит, если мы положим

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\,y-\alpha\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta x\right)=\alpha z,$$

то множитель будет

$$\frac{\alpha+\frac{1}{2}\beta x+z}{\left(z+x\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2-\alpha\gamma}\right)\left(z-x\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2-\alpha\gamma}\right)},$$

а так как $y=\dfrac{\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha\beta x+\alpha z}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$, то наше уравнение будет иметь вид

$$\gamma xy\,dx+dy\left(z+\frac{1}{2}\beta x+\gamma x^2\right)=0.$$

Но

$$dy=\frac{-\frac{1}{2}\alpha\,(\alpha\beta+4\alpha\gamma x+\beta\gamma x^2)\,dx-\alpha z\,dx\,(\beta+2\gamma x)+\alpha\,dz\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2},$$

а при подстановке этого значения получается чрезвычайно сложное уравнение.

ЗАДАЧА 66

502. *Найти дифференциальное уравнение вида*

$$yPdx+(Qy+R)\,dy=0,$$

в котором P, Q и R — функции от x, так, чтобы оно стало интегрируемым при помощи множителя $\dfrac{y^m}{(1+Sy)^n}$, где S — тоже функция от x.

РЕШЕНИЕ

Так как dx умножается на $\dfrac{y^{m+1}P}{(1+Sy)^n}$, а dy на $\dfrac{Qy^{m+1}+Ry^m}{(1+Sy)^n}$, то необходимо, чтобы

$$(m+1)\,Py^m\,(1+Sy)-nPSy^{m+1}=\frac{(1+Sy)\,(y^{m+1}\,dQ+y^m\,dR)-ny\,dS\,(Qy^{m+1}+Ry^m)}{dx};$$

если развернуть это уравнение, получится:

$$\left.\begin{array}{llr}(m+1)\,Py^m\,dx+(m+1-n)\,PSy^{m+1}\,dx-Sy^{m+2}\,dQ & & \\ -\,y^m\,dR- & & y^{m+1}\,dQ+nQy^{m+2}\,dS \\ - & & Sy^{m+1}\,dR \\ + & & nRy^{m+1}\,dS\end{array}\right\}=0.$$

Отсюда

$$Pdx=\frac{dR}{m+1}\quad\text{и}\quad SdQ=nQ\,dS,$$

и поэтому

$$Q=AS^n\quad\text{и}\quad dQ=nAS^{n-1}\,dS;$$

подставив эти значения в средний член, получим:

$$\frac{m+1-n}{m+1}SdR-nAS^{n-1}dS-SdR+nRdS=0$$

или

$$-\frac{SdR}{m+1}-AS^{n-1}dS+RdS=0,$$

и поэтому

$$dR-\frac{(m+1)RdS}{S}=-(m+1)AS^{n-2}dS;$$

разделив на S^{m+1} и проинтегрировав, будем иметь:

$$\frac{R}{S^{m+1}}=B-\frac{(m+1)AS^{n-m-2}}{n-m-2}.$$

Положим $A=(m+2-n)C$; тогда

$$Q=(m+2-n)CS^n \quad \text{и} \quad R=BS^{m+1}+(m+1)CS^{n-1};$$

поэтому

$$Pdx=BS^m dS+(n-1)CS^{n-2}dS.$$

Следовательно, будем иметь такое уравнение:

$$ydS(BS^m+(n-1)CS^{n-2})+dy((m+2-n)CS^ny+BS^{m+1}+(m+1)CS^{n-1})=0.$$

Будучи помножено на $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$, оно становится интегрируемым, причем в качестве S можно взять какую угодно функцию количества x.

СЛЕДСТВИЕ 1

503. Итак, мы сможем интегрировать уравнение

$$ByS^m dS+BS^{m+1}dy+(n-1)CyS^{n-2}dS+(m+1)CS^{n-1}dy \\ +(m+2-n)CS^n y\,dy=0.$$

Оно сразу же разлагается на такие две части:

$$BS^m(ydS+Sdy)+CS^{n-2}((n-1)ydS+(m+1)Sdy+(m+2-n)S^2y\,dy)=0;$$

каждая из этих частей, взятая в отдельности, будучи умножена на $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$, становится интегрируемой.

СЛЕДСТВИЕ 2

504. Первая часть $BS^m(y\,dS+S\,dy)$ становится интегрируемой при помощи множителя $\frac{1}{S^m}\varphi(Sy)$; действительно, выражение $B(ydS+Sdy)\varphi(Sy)$ является непосредственно интегрируемым. Значит, множителем для этой части будет, [в частности], $S^{\lambda-m}y^\lambda(1+Sy)^\mu$; он, очевидно, включает в себя принятый нами множитель $\frac{y^m}{(1+Sy)^n}$ (если взять $\lambda=m$ и $\mu=-n$).

Тогда имеем:

$$\int\frac{y^m}{(1+Sy)^n}\cdot BS^m(ydS+Sdy)=B\int\frac{v^m\,dv}{(1+v)^n};$$

здесь положено $Sy=v$.

СЛЕДСТВИЕ 3

505. Для второй же части, которая, если положить $S=\frac{1}{v}$, получает вид

$$\frac{C}{v^n}(-(n-1)\,y\,dv+(m+1)\,v\,dy+(m+2-n)\,y\,dy);$$

мы будем иметь:

$$-\frac{(n-1)\,Cy}{v^n}\left(dv-\frac{(m+1)\,v\,dy}{(n-1)y}-\frac{(m+2-n)\,dy}{n-1}\right)$$

$$=-\frac{(n-1)\,Cy^{\frac{m+1}{n-1}}}{v^n}\left(y^{\frac{-m-1}{n-1}}dv-\frac{m+1}{n-1}\,y^{\frac{-m-n}{n-1}}v\,dy-\frac{m+2-n}{n-1}\,y^{\frac{-m-1}{n-1}}dy\right)$$

$$=-\frac{(n-1)\,Cy^{\frac{m+n}{n-1}}}{v^n}\,d\left(y^{\frac{-m-1}{n-1}}v+y^{\frac{n-m-2}{n-1}}\right).$$

Поэтому эта вторая часть получит такой вид:

$$-(n-1)\,CS^n y^{\frac{m+n}{n-1}}\,d\left(\frac{1+Sy}{y^{\frac{m+1}{n-1}}S}\right).$$

Следовательно, множитель, делающий эту часть интегрируемой, будет в общем виде

$$\frac{1}{S^n y^{\frac{m+n}{n-1}}}\,\varphi\left(\frac{1+Sy}{Sy^{\frac{m+1}{n-1}}}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 4

506. Стало быть, для второй части множителем будет, [в частности],

$\dfrac{(1-Sy)^{\mu}}{S^{n+\mu}\,y^{\frac{m+n+\mu\,(m+1)}{n-1}}}$, и тогда эта часть получит вид

$$-(n-1)\,C\frac{(1+Sy)^{\mu}}{S^{\mu}\,y^{\frac{\mu\,(m+1)}{n-1}}}\,d\left(\frac{1+Sy}{y^{\frac{m+1}{n-1}}S}\right).$$

Интеграл этого выражения есть $-\dfrac{(n-1)\,CZ^{\mu+1}}{\mu+1}$, где $Z=\dfrac{1+Sy}{y^{\frac{m+1}{n-1}}S}$.

СЛЕДСТВИЕ 5

507. Множитель для первой части $S^{\lambda-m}y^{\lambda}(1+Sy)^{\mu}$ можно сделать совпадающим с только что найденным множителем второй части, если взять $\lambda=m$ и $\mu=-n$, в результате чего получится общий множитель $\dfrac{y^m}{(1+Sy)^n}$, и тогда, если положить $Sy=v$ и $\dfrac{1+Sy}{y^{\frac{m+1}{n-1}}S}=z$, интеграл нашего уравнения будет

$$B\int\frac{v^m\,dv}{(1+v)^n}+Cz^{1-n}=D \quad \text{или} \quad B\int\frac{v^m\,dv}{(1+v)^n}+\frac{CS^{n-1}\,y^{m+1}}{(1+Sy)^{n-1}}=D.$$

ПОЯСНЕНИЕ

508. Итак, уравнение, которое мы научились интегрировать в этой задаче, можно решать с помощью выше [§ 464] установленных начал, а именно для каждой из двух его частей искать множители, а затем сделать их совпадающими друг с другом. Здесь мы показали замечательную пользу, которую приносит этот метод.

Мы могли бы также придать множителю вид $\frac{y^m}{(1+Sy+Ty^2)^n}$, так что уравнение

$$\frac{y^m(yPdx+(Qy+R)\,dy)}{(1+Sy+Ty^2)^n}=0$$

должно было бы интегрироваться непосредственно. Проведя вычисление таким же способом, как это было сделано выше, мы найдем:

$$\left.\begin{array}{llll}(m+1)Py^m dx+(m+1-n)PSy^{m+1}dx+(m+1-2n)PTy^{m+2}dx-Ty^{m+3}dQ \\ \quad -y^m dR- \qquad y^{m+1}dQ- \qquad Sy^{m+2}dQ+nQy^{m+3}dT \\ \quad - \qquad Sy^{m+1}dR- \qquad Ty^{m+2}dR \\ \quad + \qquad nRy^{m+1}dS+ \qquad nQy^{m+2}dS \\ \quad \qquad + \qquad nRy^{m+2}dT\end{array}\right\}=0.$$

Из последнего члена $-TdQ+nQdT=0$ заключаем, что $Q=AT^n$, а из первого, что $Pdx=\frac{dR}{m+1}$; подставив эти значения в два средних члена, получим:

$$R\,dS-\frac{SdR}{m+1}-AT^{n-1}\,dT=0$$

и

$$R\,dT-\frac{2TdR}{m+1}+AT^n dS-AST^{n-1}\,dT=0.$$

Из этих двух уравнений первое интегрируется непосредственно, если $m=-2$. Второе же может интегрироваться, если $m=2n-1$; в самом деле, тогда

$$RdT-\frac{TdR}{n}+AT^{n-1}(TdS-SdT)=0$$

или

$$\frac{n\,RdT-TdR}{nT^{n+1}}+\frac{A\,(TdS-SdT)}{T^2}=0.$$

Интеграл этого уравнения есть

$$\frac{-R}{nT^n}+\frac{AS}{T}=\frac{-B}{n},$$

откуда

$$R=BT^n+nAT^{n-1}S.$$

Кроме того, заслуживает быть отмеченным случай $m=-1$; этот случай вместе с предыдущими мы разберем в прилагаемых ниже примерах.

ПРИМЕР 1

509. *Определить уравнение*

$$yPdx + (Qy + R)\,dy = 0$$

так, чтобы после умножения на $\frac{1}{y(1+Sy+Ty^2)^n}$ *оно стало непосредственно интегрируемым.*

Так как $m = -1$, то мы сразу же получаем $dR = 0$, а поэтому $R = C$: далее, как и выше, $Q = AT^n$ и $dQ = nAT^{n-1}dT$; значит, остальные два определения будут

$$-PSdx - AT^{n-1}dT + CdS = 0,$$
$$-2PTdx - AST^{n-1}dT + AT^n dS + CdT = 0.$$

Исключая отсюда Pdx, получим:

$$AS^2T^{n-1}dT - 2AT^n dT - AT^n SdS + 2CTdS - CSdT = 0.$$

Положив здесь $S^2 = Tv$, получим:

$$2TdS - SdT = TS\left(\frac{2dS}{S} - \frac{dT}{T}\right) = \frac{TSdv}{v} = \frac{Tdv\sqrt{T}}{\sqrt{v}}$$

и будем иметь:

$$\frac{1}{2}AT^n v\,dT - 2AT^n dT - \frac{1}{2}AT^{n+1}dv + \frac{CTdv\sqrt{T}}{\sqrt{v}} = 0,$$

или

$$-\frac{1}{2}AT^{n+2}d\left(\frac{v-4}{T}\right) + \frac{CTdv\sqrt{T}}{\sqrt{v}} = 0.$$

Первую часть этого выражения можно сделать интегрируемой при помощи множителя $\frac{1}{T^{n+2}}\varphi\left(\frac{v-4}{T}\right)$, а вторую — при помощи множителя $\frac{1}{T\sqrt{T}}\varphi(v)$; следовательно, общим множителем будет $\frac{1}{T(v-4)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{T}}$. Отсюда получается такое интегральное уравнение:

$$\frac{AT^{n-\frac{1}{2}}}{(2n-1)(v-4)^{n-\frac{1}{2}}} + C\int\frac{dv}{(v-4)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{v}} = D,$$

откуда можно определить T через v; далее, имеем:

$$S = \sqrt{Tv}, \quad R = C, \quad Q = AT^n \quad \text{и} \quad Pdx = \frac{CdS - AT^{n-1}dT}{S}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

510. В случае, когда $n = \frac{1}{2}$, ввиду того, что $\frac{1}{0}z^0 = lz$, получаем:

$$\frac{1}{2}Al\frac{T}{v-4} + C\int\frac{dv}{(v-4)\sqrt{v}} = \frac{1}{2}D,$$

или

$$\frac{1}{2}Al\frac{T}{v-4} - \frac{1}{2}Cl\frac{\sqrt{v}+2}{\sqrt{v}-2} = \frac{1}{2}D.$$

Отсюда, положив $v = 4u^2$ и $C = \lambda A$, получим:

$$l\frac{T}{1-u^2} - \lambda l\frac{1+u}{1-u} = \mathrm{Const}$$

или

$$T = E(1-u^2)\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\lambda}.$$

Отсюда, далее, $S = 2u\sqrt{T} = 2u\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{E(1-u^2)}$ и $R = C = \lambda A$; далее,

$$Q = A\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{E(1-u^2)}$$

и

$$Pdx = \frac{\lambda A du}{u} + \frac{\lambda A dT}{2T} - \frac{AdT}{2Tu}.$$

Но

$$\frac{dT}{T} = \frac{-2u\,du + 2\lambda\,du}{1-u^2}.$$

Значит,

$$Pdx = \frac{Adu\,(1+\lambda^2+2\lambda u)}{1-u^2}.$$

Поэтому для уравнения

$$\frac{Ay\,du\,(1+\lambda^2-2\lambda u)}{1-u^2} + Ady\left[\lambda + y\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{E(1-u^2)}\right] = 0$$

множитель будет

$$\frac{1}{y\sqrt{1+2uy\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{E(1-u^2)} + Ey^2(1-u^2)\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{\lambda}}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

511. В случае, когда $n = -\frac{1}{2}$, имеем:

$$-\frac{A(v-4)}{2T} + 2C\sqrt{v} = -2D \quad \text{или} \quad T = \frac{A(v-4)}{4D+4C\sqrt{v}}.$$

Положим $v = 4u^2$, так что $T = \frac{A(u^2-1)}{D+2Cu}$; тогда

$$S = 2u\sqrt{T} = 2u\sqrt{\frac{A(u^2-1)}{D+2Cu}}, \quad R = C, \quad Q = \sqrt{\frac{A(D+2Cu)}{u^2-1}}$$

и

$$Pdx = \frac{Cdu}{u} + \frac{CdT}{2T} - \frac{AdT}{2T^2u} = \frac{Cdu}{u} + \frac{du\,(C+Du+Cu^2)\,(Cu^3-3Cu-D)}{u\,(u^2-1)^2\,(D+2Cu)};$$

отсюда можно определить и уравнение, и множитель.

ПРИМЕР 2

512. *Определить уравнение*

$$y\,P\,dx + (Qy + R)\,dy = 0$$

так, чтобы, будучи умножено на $\frac{1}{y^2(1+Sy+Ty^2)^n}$, *оно стало непосредственно интегрируемым.*

Так как $m = -2$, то из вышеизложенного [§ 508] имеем:

$$RS = \frac{A}{n}T^n + B \quad \text{или} \quad R = \frac{AT^n}{nS} + \frac{B}{S}.$$

Подставив это значение во второе уравнение, получим:

$$\frac{(2n+1)\,AT^n\,dT}{nS} - \frac{2AT^{n+1}\,dS}{nS^2} + AT^n dS - AST^{n-1}\,dT + \frac{BdT}{S} - \frac{2BTdS}{S^2} = 0.$$

Это уравнение распадается на три части:

$$\frac{AS}{nT^n}\left(\frac{(2n+1)\,T^{2n}\,dT}{S^2} - \frac{2T^{2n+1}\,dS}{S^3}\right) + AT^{n+1}\left(\frac{dS}{T} - \frac{SdT}{T^2}\right) + BS\left(\frac{dT}{S^2} - \frac{2TdS}{S^3}\right) = 0,$$

или

$$\frac{AS}{nT^n}\,d\left(\frac{T^{2n+1}}{S^2}\right) + AT^{n+1}\,d\left(\frac{S}{T}\right) + BS\,d\left(\frac{T}{S^2}\right) = 0.$$

Для краткости положим

$$\frac{T^{2n+1}}{S^2} = p, \quad \frac{S}{T} = q \quad \text{и} \quad \frac{T}{S^2} = r;$$

тогда $S = \frac{1}{qr}$, $T = \frac{1}{q^2 r}$, откуда $p = \frac{1}{q^{4n}\,r^{2n-1}}$, и наше уравнение получит такой вид:

$$\frac{A}{nq\sqrt{pr}}\,dp + \frac{A\sqrt{p}}{q^2 r\sqrt{r}}\,dq + \frac{B}{qr}\,dr = 0,$$

или

$$\frac{A\sqrt{r}}{n\sqrt{p}}\,dp + \frac{A\sqrt{p}}{q\sqrt{r}}\,dq + Bdr = 0.$$

Будем рассматривать эти три части по отдельности. Первая из них становится интегрируемой, если ее помножить на $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}}\varphi(p)$; вторая — если ее помножить на $\frac{q\sqrt{r}}{\sqrt{p}}\varphi(q)$, и третья — если ее помножить на $\varphi(r)$. Для того чтобы два первых множителя совпали между собой, положим

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}}\,p^{\lambda} = \frac{q\sqrt{r}}{\sqrt{p}}\,q^{\mu} \quad \text{или} \quad p^{\lambda+1} = q^{\mu+1}r,$$

откуда

$$p = q^{\frac{\mu+1}{\lambda+1}}\,r^{\frac{1}{\lambda+1}} = q^{-4n}\,r^{-2n+1}.$$

Значит,

$$\lambda + 1 = -\frac{1}{2n-1} \quad \text{и} \quad \mu + 1 = -4n(\lambda+1) = \frac{4n}{2n-1}$$

и, следовательно,

$$\mu = \frac{2n+1}{2n-1} \quad \text{и} \quad \lambda = -\frac{2n}{2n-1}.$$

Поэтому помножив уравнение на $\dfrac{q^{\frac{4n}{2n-1}}\sqrt{r}}{\sqrt{p}} = q^{2n+\frac{4n}{2n-1}} r^n$ [1]), получим:

$$\frac{A}{n} p^\lambda\, dp + Aq^\mu\, dq + Bq^{2n+\frac{4n}{2n-1}} r^n\, dr = 0,$$

или

$$Ad\left(\frac{p^{\lambda+1}}{n(\lambda+1)} + \frac{q^{\mu+1}}{\mu+1}\right) + Bq^{\frac{4n^2+2n}{2n-1}} r^n\, dr = 0,$$

или

$$\frac{(2n-1)A}{4n}\, d\left[q^{\frac{4n}{2n-1}}(1-4r)\right] + Bq^{\frac{4n^2+2n}{2n-1}} r^n\, dr = 0.$$

Помножив это уравнение на $q^{\frac{4\nu n}{2n-1}}(1-4r)^\nu$, получим:

$$\frac{(2n-1)A}{4n}\, q^{\frac{4\nu n}{2n-1}}(1-4r)^\nu\, d\left[q^{\frac{4n}{2n-1}}(1-4r)\right] + Bq^{\frac{4n^2+2n+4\nu n}{2n-1}} r^n\, dr\, (1-4r)^\nu = 0.$$

Пусть $4\nu + 4n + 2 = 0$ или $\nu = -n - \frac{1}{2}$. Тогда оба члена можно интегрировать, и мы будем иметь:

$$\frac{(2n-1)A}{4n(\nu+1)}\, q^{\frac{4n(\nu+1)}{2n-1}}(1-4r)^{\nu+1} + B\int r^n\, dr\, (1-4r)^\nu = \text{Const}.$$

Но $\nu + 1 = -n + \frac{1}{2} = -\frac{2n-1}{2}$, и таким образом получится:

$$-\frac{A}{2n}\, q^{-2n}(1-4r)^{-\frac{2n-1}{2}} + B\int \frac{r^n\, dr}{(1-4r)^{\frac{2n+1}{2}}} = \text{Const}.$$

Следовательно, q выразится через r, и мы найдем:

$$S = \frac{1}{qr}, \quad T = \frac{S}{q},$$

а затем

$$R = \frac{AT^n}{nS} + \frac{B}{S}, \quad Q = AT^n \quad \text{и} \quad P\, dx = -dR.$$

---

[1]) В первом издании здесь вместо r^n по ошибке стояло r^{n+1}, а в следующей формуле вместо $\frac{4n}{2n-1}$ было $\frac{4n}{2n+1}$. Эта ошибка отразилась на всех последующих формулах настоящего параграфа, а также на формулах §§ 513 и 514. В третьем издании (1824 г.) формулы настоящего параграфа были исправлены, но в §§ 513 и 514 сохранены ошибочные формулы. В Полном собрании сочинений Эйлера исправлены все формулы.

СЛЕДСТВИЕ 1

513. Если $n = -\frac{1}{2}$, то будем иметь:

$$Aq(1-4r)+2B\sqrt{r}=C,$$

или $q=\frac{C-2B\sqrt{r}}{A(1-4r)}$, откуда

$$S=\frac{A(1-4r)}{r(C-2B\sqrt{r})},\quad T=\frac{A^2(1-4r)^2}{r(C-2B\sqrt{r})^2},\quad Q=\frac{\sqrt{r}(C-2B\sqrt{r})}{1-4r}$$

и

$$R=\frac{Q+nB}{nS}=\frac{B-2Q}{S}=\frac{r(B-2C\sqrt{r})(C-2B\sqrt{r})}{A(1-4r)^2},$$

или

$$R=\frac{BCr-2(B^2+C^2)r\sqrt{r}+4BCr^2}{A(1-4r)^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

514. Положим для того же случая $r=\frac{1}{4}u^2$ [1]; тогда

$$S=\frac{4A(1-u^2)}{u^2(C-Bu)},\quad T=\frac{4A^2(1-u^2)^2}{u^2(C-Bu)^2},$$

$$Q=\frac{u(C-Bu)}{2(1-u^2)},\quad R=\frac{u^2(B-Cu)(C-Bu)}{4A(1-u^2)^2},$$

откуда

$$P\,dx=\frac{(B^2+C^2)(3u^2+u^4)-2BC(u+3u^3)}{4A(1-u^2)^3}\,du,$$

и уравнение $yP\,dx+(Qy+R)\,dy=0$ станет интегрируемым, если оно будет умножено на

$$\frac{\sqrt{1+Sy+Ty^2}}{y^2}=\frac{1}{y^2}\sqrt{1+\frac{4A(1-u^2)y}{u^2(C-Bu)}+\frac{4A^2(1-u^2)^2y^2}{u^2(C-Bu)^2}}.$$

ПРИМЕР 3

515. *Определить уравнение*

$$yP\,dx+(Qy+R)\,dy=0,$$

которое, будучи умножено на $\frac{y^{2n-1}}{(1+Sy+Ty^2)^n}$, *стало бы непосредственно интегрируемым.*

Здесь $m=2n-1$, $Q=AT^n$ и $P\,dx=\frac{dR}{2n}$; далее, согласно вышеизложенному [§ 508] $R=nAT^{n-1}S+BT^n$; остается еще уравнение

$$R\,ds-\frac{S\,dR}{2n}-AT^{n-1}\,dT=0.$$

[1] В оригинале употреблена подстановка $r=u^2$ (применительно к неверным выражениям S, T и т. д.; см. примечание к § 512). Следуя Ф. Энгелю, мы берем подстановку $r=\frac{1}{4}u^2$, как более удобную для верных формул.

Если в это уравнение вместо R подставить найденное значение, оно получит вид

$$(2n-1)AT^{n-1}S\,dS-(n-1)AT^{n-2}S^2\,dT \\ -2AT^{n-1}\,dT+2BT^n\,dS-BT^{n-1}S\,dT=0,$$

или

$$(2n-1)ATS\,dS-(n-1)AS^2\,dT-2AT\,dT+2BT^2\,dS-BTS\,dT=0.$$

Первый член, если положить $S^2=u$, получит вид

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)AT\,du-(n-1)Au\,dT-2AT\,dT,$$

или

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)AT\left(du-\frac{(n-1)u\,dT}{\left(n-\frac{1}{2}\right)T}-\frac{2\,dT}{n-\frac{1}{2}}\right),$$

или

$$\frac{1}{2}(2n-1)AT^{\frac{4n-3}{2n-1}}\left(\frac{du}{T^{\frac{2n-2}{2n-1}}}-\frac{2(n-1)u\,dT}{(2n-1)T^{\frac{4n-3}{2n-1}}}-\frac{4\,dT}{(2n-1)T^{\frac{2n-2}{2n-1}}}\right) \\ =\frac{1}{2}(2n-1)AT^{\frac{4n-3}{2n-1}}\,d\left(\frac{u}{T^{\frac{2n-2}{2n-1}}}-4T^{\frac{1}{2n-1}}\right),$$

или

$$\frac{1}{2}(2n-1)AT^{\frac{4n-3}{2n-1}}\,d\left[T^{\frac{1}{2n-1}}\left(\frac{S^2}{T}-4\right)\right]+\frac{BT^3}{S}\,d\left(\frac{S^2}{T}\right)=0,$$

или

$$(2n-1)AT^{\frac{-1}{2n-1}}\,d\left[T^{\frac{1}{2n-1}}\left(\frac{S^2}{T}-4\right)\right]+\frac{2BT}{S}\,d\left(\frac{S^2}{T}\right)=0.$$

Положим

$$\frac{S^2}{T}=p \quad \text{и} \quad T^{\frac{1}{2n-1}}\left(\frac{S^2}{T}-4\right)=q=T^{\frac{1}{2n-1}}(p-4),$$

так что $T^{\frac{1}{2n-1}}=\frac{q}{p-4}$, откуда

$$T=\frac{q^{2n-1}}{(p-4)^{2n-1}} \quad \text{и} \quad S=\sqrt{\frac{pq^{2n-1}}{(p-4)^{2n-1}}}.$$

Значит,

$$\frac{(2n-1)A(p-4)\,dq}{q}+\frac{2B\sqrt{q^{2n-1}}}{\sqrt{p(p-4)^{2n-1}}}\,dp=0,$$

или

$$\frac{(2n-1)A\,dq}{q^{n+\frac{1}{2}}}+\frac{2B\,dp:\sqrt{p}}{(p-4)^{n+\frac{1}{2}}}=0.$$

Это уравнение, будучи проинтегрировано, дает

$$\frac{-2A}{q^{n-\frac{1}{2}}}+2B\int\frac{dp:\sqrt{p}}{(p-4)^{n+\frac{1}{2}}}=2C;$$

полагая $\frac{p}{p-4}=v^2$ или $p=\frac{4v^2}{v^2-1}$, получим:

$$-\frac{2A}{q^{n-\frac{1}{2}}}-\frac{B}{4^{n-1}}\int dv\,(v^2-1)^{n-1}=C.$$

ПОЯСНЕНИЕ

516. Я не останавливаюсь на этом подробнее, так как я привел эти примеры главным образом с той целью, чтобы дать упражнения в изложенном выше методе решения дифференциальных уравнений. Действительно, в этих примерах мы встретились с довольно трудными уравнениями, но их удалось разложить на части таким образом, чтобы для отдельных частей отыскать подходящие множители и по ним определить общий множитель. Теперь же будем исследовать другие типы уравнений, которые можно сделать интегрируемыми с помощью множителей.

ЗАДАЧА 67

517. *Определить функции P, Q, R, S количества x так, чтобы уравнение*

$$(Py+Q)\,dx+y\,dy=0$$

стало интегрируемым при помощи множителя

$$(y^2+Ry+S)^n.$$

РЕШЕНИЕ

Очевидно, необходимо, чтобы

$$\left(\frac{d\,[(Py+Q)\,(y^2+Ry+S)^n]}{dy}\right)=\left(\frac{d\,[y\,(y^2+Ry+S)^n]}{dx}\right).$$

Разделив на $(y^2+Ry+S)^{n-1}$, получаем отсюда

$$P\,(y^2+Ry+S)+n\,(Py+Q)\,(2y+R)=\frac{ny\,(y\,dR+dS)}{dx}$$

или

$$\left.\begin{array}{lr}(2n+1)\,Py^2\,dx+(n+1)\,PRy\,dx+PS\,dx & \\ -ny^2\,dR+2nQy\,dx & +nQR\,dx \\ -ny\,dS & \end{array}\right\}=0.$$

Отсюда, следовательно, получается $P\,dx=\frac{n\,dR}{2n+1}$ и

$$\frac{(n+1)\,R\,dR}{2n+1}+2Q\,dx-dS=0,\quad \frac{S\,dR}{2n+1}+QR\,dx=0$$

и, далее,

$$Q\,dx=\frac{-S\,dR}{(2n+1)\,R}=\frac{-(n+1)\,R\,dR}{2\,(2n+1)}+\frac{dS}{2};$$

значит,

$$dS+\frac{2S\,dR}{(2n+1)\,R}=\frac{(n+1)\,R\,dR}{2n+1}.$$

Это уравнение, будучи помножено на $R^{\frac{2}{2n+1}}$ и проинтегрировано, дает

$$R^{\frac{2}{2n+1}} S = C + \frac{1}{4} R^{\frac{4n+4}{2n+1}},$$

и отсюда

$$S = \frac{1}{4} R^2 + C R^{\frac{-2}{2n+1}},$$

а также

$$Q\,dx = \frac{-R\,dR}{4(2n+1)} - \frac{C}{2n+1} R^{\frac{-2n-3}{2n+1}} dR \quad \text{и} \quad P\,dx = \frac{n\,dR}{2n+1}.$$

Отсюда мы получаем уравнение

$$\left(ny - \frac{1}{4} R - C R^{\frac{-2n-3}{2n+1}}\right) dR + (2n+1)\, y\, dy = 0.$$

Оно становится интегрируемым при помощи множителя

$$\left(y^2 + Ry + \frac{1}{4} R^2 + C R^{\frac{-2}{2n+1}}\right)^n.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

518. В случае, когда $n = -\frac{1}{2}$, получается $dR = 0$ и $R = A$, а остальные [два] уравнения суть

$$(n+1) AP\,dx + 2n\,Q\,dx - n\,dS = 0$$

и

$$PS\,dx + n\,AQ\,dx = 0.$$

Значит,

$$P\,dx = \frac{AQ\,dx}{2S} = \frac{2Q\,dx - dS}{A},$$

и поэтому

$$(A^2 - 4S)\, Q\,dx = -2S\,dS,$$

или

$$Q\,dx = \frac{-2S\,dS}{A^2 - 4S} \quad \text{и} \quad P\,dx = \frac{-A\,dS}{A^2 - 4S}.$$

Таким образом, уравнение

$$\frac{(Ay + 2S)\,dS}{4S - A^2} + y\,dy = 0$$

становится интегрируемым при помощи множителя

$$\frac{1}{\sqrt{y^2 + Ay + S}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

519. Положим здесь $A = 2a$, а $S = x$; уравнение

$$\frac{(ay + x)\,dx + 2y\,dy\,(x - a^2)}{(x - a^2)\sqrt{y^2 + 2ay + x}} = 0$$

является непосредственно интегрируемым; отсюда можно найти интеграл уравнения

$$x\,dx + ay\,dx + 2xy\,dy - 2a^2y\,dy = 0,$$

которое становится интегрируемым, будучи разделенным на

$$(x-a^2)\sqrt{y^2+2ay+x}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

520. Для нахождения интеграла примем сперва x за постоянное; тогда интеграл второго члена

$$\frac{2y\,dy}{\sqrt{y^2+2ay+x}}$$

есть

$$2\sqrt{y^2+2ay+x} + 2al\,(a+y-\sqrt{y^2+2ay+x}) + X.$$

Дифференциал его, если принять y за постоянное, есть

$$\frac{dx}{\sqrt{y^2+2ay+x}} - \frac{a\,dx : \sqrt{y^2+2ay+x}}{a+y-\sqrt{y^2+2ay+x}} + dX;$$

если приравнять [это выражение] первому члену уравнения

$$\frac{(ay+x)\,dx}{(x-a^2)\sqrt{y^2+2ay+x}},$$

то найдем $dX = \frac{a\,dx}{a^2-x}$ и $X = -al\,(a^2-x)$.

Следовательно, полным интегралом будет

$$\sqrt{y^2+2ay+x} + al\,\frac{a+y-\sqrt{y^2+2ay+x}}{\sqrt{a^2-x}} = C.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

521. Заслуживает упоминания также случай $n = -1$; если написать a вместо $C + \frac{1}{4}$, он даст уравнение

$$(y+aR)\,dR + y\,dy = 0,$$

которое, будучи разделено на $y^2 + Ry + aR^2$, становится интегрируемым. Это уравнение однородное.

ПОЯСНЕНИЕ

522. Можно также для уравнения

$$(Py+Q)\,dx + y\,dy = 0$$

принять множителем $(y+R)^m (y+S)^n$; тогда должно быть

$$\left(\frac{d\,[(Py+Q)\,(y+R)^m\,(y+S)^n]}{dy}\right) = \left(\frac{d\,[y\,(y+R)^m\,(y+S)^n]}{dx}\right),$$

откуда находим:

$$P\,dx\,(y+R)\,(y+S) + m\,dx\,(Py+Q)\,(y+S)$$
$$+ n\,dx\,(Py+Q)\,(y+R) = my\,(y+S)\,dR + ny\,(y+R)\,dS.$$

Это уравнение можно развернуть в

$$\left.\begin{aligned}(m+n+1)\,Py^2\,dx+(n+1)\,PRy\,dx+PRS\,dx\\ -my^2\,dR+(m+1)\,PSy\,dx+mQS\,dx\\ -ny^2\,dS+(m+n)\,Qy\,dx+nQR\,dx\\ -mSy\,dR\\ -nRy\,dS\end{aligned}\right\}=0,$$

откуда получаем:

$$P\,dx=\frac{m\,dR+n\,dS}{m+n+1}\quad \text{и}\quad Qdx=\frac{-PRS\,dx}{mS+nR}=\frac{-RS\,(m\,dR+n\,dS)}{(m+n+1)\,(mS+nR)},$$

а отсюда

$$\frac{(m\,dR+n\,dS)\,((n+1)\,R+(m+1)\,S)}{m+n+1}-\frac{(m+n)\,RS\,(m\,dR+n\,dS)}{(m+n+1)\,(mS+nR)}-mS\,dR-nR\,dS=0,$$

или

$$m(n+1)\,R\,dR-mn\,R\,dS+n\,(m+1)S\,dS-mnS\,dR-\frac{m\,(m+n)\,RS\,dR+n\,(m+n)\,RS\,dS}{mS+nR}=0,$$

а это уравнение приводится к виду

$$(n+1)\,R^2\,dR+(m-n-1)\,RS\,dR-mS^2\,dR+(m+1)\,S^2\,dS+(n-m-1)\,RS\,dS-nR^2\,dS=0.$$

Так как последнее уравнение однородное, то разделим его на

$$(n+1)\,R^3+(m-2n-1)\,R^2S+(n-2m-1)\,RS^2+(m+1)\,S^3,$$

т. е. на

$$(R-S)^2\,((n+1)\,R+(m+1)\,S),$$

чтобы оно стало интегрируемым. Если же это самое уравнение разделить на $R-S$, то будем иметь:

$$(n+1)\,R\,dR+mS\,dR-nR\,dS-(m+1)\,S\,dS=0.$$

Разделим его на $(R-S)((n+1)\,R+(m+1)\,S)$ и произведем разложение на частные дроби:

$$\frac{dR}{m+n+2}\left(\frac{m+n+1}{R-S}+\frac{n+1}{(n+1)\,R+(m+1)\,S}\right)+\frac{dS}{m+n+2}\left(\frac{m+n+1}{S-R}+\frac{m+1}{(n+1)\,R+(m+1)\,S}\right)=0,$$

или

$$\frac{(m+n+1)\,(dR-dS)}{R-S}+\frac{(n+1)\,dR+(m+1)\,dS}{(n+1)\,R+(m+1)\,S}=0,$$

откуда, интегрируя, получим:

$$(R-S)^{m+n+1}\,((n+1)\,R+(m+1)\,S)=C.$$

Пусть $R-S=u$; тогда

$$(n+1)R+(m+1)S=\frac{C}{u^{m+n+1}},$$

и отсюда

$$R=\frac{(m+1)u}{m+n+2}+\frac{a}{u^{m+n+1}} \quad \text{и} \quad S=-\frac{(n+1)u}{m+n+2}+\frac{a}{u^{m+n+1}}.$$

Далее,

$$P\,dx=\frac{(m-n)\,du}{m+n+2}-\frac{(m+n)\,a\,du}{u^{m+n+2}}$$

и

$$Q\,dx=\frac{du}{u}\left(\frac{a}{u^{m+n+1}}+\frac{(m+1)u}{m+n+2}\right)\left(\frac{a}{u^{m+n+1}}-\frac{(n+1)u}{m+n+2}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

523. На основании сказанного можно интегрировать следующее уравнение:

$$y\,dy+y\,du\left(\frac{m-n}{m+n+2}-\frac{(m+n)\,a}{u^{m+n+2}}\right)+\frac{du}{u}\left(\frac{a^2}{u^{2m+2n+2}}+\frac{(m-n)\,a}{(m+n+2)\,u^{m+n}}-\frac{(m+1)(n+1)\,u^2}{(m+n+2)^2}\right)=0;$$

оно становится непосредственно интегрируемым, если его умножить на

$$\left(y+\frac{a}{u^{m+n+1}}+\frac{(m+1)u}{m+n+2}\right)^m\left(y+\frac{a}{u^{m+n+1}}-\frac{(n+1)u}{m+n+2}\right)^n.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

524. Пусть $m=n$; тогда наше уравнение получит вид

$$y\,dy-\frac{2n\,ay\,du}{u^{2n+2}}+\frac{a^2\,du}{u^{4n+3}}-\frac{1}{4}u\,du=0.$$

Множитель этого уравнения есть $\left(\left(y+\frac{a}{u^{2n+1}}\right)^2-\frac{1}{4}u^2\right)^n$. Поэтому если положим $y=z-\frac{a}{u^{2n+1}}$, то получим уравнение

$$z\,dz-\frac{a\,dz}{u^{2n+1}}+\frac{az\,du}{u^{2n+2}}-\frac{1}{4}u\,du=0,$$

которое становится интегрируемым, если его помножить на $\left(z^2-\frac{1}{4}u^2\right)^n$. Или положим еще $z=\frac{1}{2}y$ [1]) и $a=\frac{1}{2}b$; тогда уравнение будет

$$y\,dy-u\,du-\frac{b\,dy}{u^{2n+1}}+\frac{by\,du}{u^{2n+2}}=0,$$

а множитель будет $(y^2-u^2)^n$.

[1]) Разумеется, через y здесь обозначено не то переменное, которое выше обозначалось той же буквой.

СЛЕДСТВИЕ 3

525. Если $m=-n$, то получается уравнение

$$y\,dy-ny\,du+\frac{a^2\,du}{u^3}+\frac{1}{4}(n^2-1)\,u\,du-\frac{na\,du}{u}=0.$$

Это уравнение становится интегрируемым, если его помножить на

$$\left(y+\frac{a}{u}-\frac{1}{2}(n+1)\,u\right)^n\left(y+\frac{a}{u}-\frac{1}{2}(n-1)\,u\right)^{-n}.$$

Если же положить $y+\frac{a}{u}=z$, то получается уравнение

$$z\,dz-nz\,du+\frac{1}{4}(n^2-1)\,u\,du-\frac{a\,dz}{u}+\frac{az\,du}{u^2}=0.$$

Это уравнение становится интегрируемым при помощи множителя

$$\left(z-\frac{1}{2}(n+1)\,u\right)^n\left(z-\frac{1}{2}(n-1)\,u\right)^{-n}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

526. Положим здесь $z=uv$; тогда получится уравнение

$$u^2v\,dv+u\,du\left(v^2-nv+\frac{1}{4}(n^2-1)\right)=a\,dv.$$

Если его помножить на $\left(\dfrac{v-\frac{1}{2}(n+1)}{v-\frac{1}{2}(n-1)}\right)^n$, то обе части уравнения станут интегрируемыми.

Действительно, если положить $\dfrac{v-\frac{1}{2}(n+1)}{v-\frac{1}{2}(n-1)}=s$, т. е. $v=\dfrac{n+1-(n-1)\,s}{2\,(1-s)}$,

то получается:

$$\frac{s^{n+1}u\,du}{(1-s)^2}+\frac{n+1-(n-1)\,s}{2\,(1-s)^3}\,u^2s^n\,ds=\frac{as^n\,ds}{(1-s)^2};$$

интеграл этого уравнения есть

$$\frac{s^{n+1}\,u^2}{2\,(1-s)^2}=a\int\frac{s^n\,ds}{(1-s)^2}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

527. Для того чтобы в общем случае придать нашему уравнению более изящный вид, положим $m=-\lambda-1+\mu$ и $n=-\lambda-1-\mu$, так что $m+n+2=-2\lambda$; тогда получим уравнение

$$y\,dy-y\,du\left(\frac{\mu}{\lambda}-2\,(\lambda+1)\,au^{2\lambda}\right)+u\,du\left(\frac{\mu^2-\lambda^2}{4\lambda^2}-\frac{\mu}{\lambda}\,au^{2\lambda}+a^2u^{4\lambda}\right)=0,$$

которое становится интегрируемым при помощи множителя

$$\left(y+au^{2\lambda+1}-\frac{(\mu-\lambda)\,u}{2\lambda}\right)^{\mu-\lambda-1}\left(y+au^{2\lambda+1}-\frac{(\mu+\lambda)\,u}{2\lambda}\right)^{-\mu-\lambda-1}.$$

Положим $y + au^{2\lambda+1} = uz$; получится уравнение

$$uz\,dz - au^{2\lambda+1}\,dz + du\left(z^2 - \frac{\mu}{\lambda}z + \frac{\mu^2-\lambda^2}{4\lambda^2}\right) = 0,$$

которому соответствует множитель

$$u^{-2\lambda-1}\left(z + \frac{\lambda-\mu}{2\lambda}\right)^{\mu-\lambda-1}\left(z - \frac{\lambda+\mu}{2\lambda}\right)^{-\mu-\lambda-1},$$

и мы найдем интеграл

$$C = a\int dz\left(z + \frac{\lambda-\mu}{2\lambda}\right)^{\mu-\lambda-1}\left(z - \frac{\lambda+\mu}{2\lambda}\right)^{-\mu-\lambda-1} + \frac{1}{2\lambda u^{2\lambda}}\left(z + \frac{\lambda-\mu}{2\lambda}\right)^{\mu-\lambda}\left(z - \frac{\lambda+\mu}{2\lambda}\right)^{-\mu-\lambda},$$

который, следовательно, согласуется с дифференциальным уравнением

$$z\,dz + \frac{du}{u}\left(z + \frac{\lambda-\mu}{2\lambda}\right)\left(z - \frac{\lambda+\mu}{2\lambda}\right) = au^{2\lambda}\,dz.$$

ЗАДАЧА 68

528. *Определить функции P, Q, R и X количества x так, чтобы уравнение $dy + y^2\,dx + X\,dx = 0$ стало интегрируемым при помощи множителя* $\frac{1}{Py^2+Qy+R}$.

РЕШЕНИЕ

Очевидно, должно быть

$$\frac{1}{dy}\,d\,\frac{y^2+x}{Py^2+Qy+R} = \frac{1}{dx}\,d\,\frac{1}{Py^2+Qy+R},$$

а отсюда

$$2y\,(Py^2+Qy+R) - (y^2+X)\,(2Py+Q) = \frac{-y^2\,dP - y\,dQ - dR}{dx}.$$

Значит, должно получиться:

$$\left.\begin{array}{l} Qy^2\,dx + 2Ry\,dx - QX\,dx \\ + y^2\,dP - 2PXy\,dx + dR \\ + y\,dQ \end{array}\right\} = 0.$$

Поэтому мы имеем:

$$Q = -\frac{dP}{dx} = \frac{dR}{X\,dx} \quad \text{и} \quad X = -\frac{dR}{dP}.$$

Следовательно, считая dx постоянным, имеем $dQ = -\frac{d^2P}{dx}$; значит, должно получиться:

$$2R\,dx + \frac{2P\,dR\,dx}{dP} - \frac{d^2P}{dx} = 0,$$

или

$$R\,dP + P\,dR = \frac{dP\,d^2P}{2dx^2}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$PR = \frac{dP^2}{4dx^2} + C,$$

откуда

$$R = \frac{dP^2}{4P\,dx^2} + \frac{C}{P};$$

далее,

$$Q = -\frac{dP}{dx} \quad \text{и} \quad X = \frac{C}{P^2} + \frac{dP^2}{4P^2\,dx^2} - \frac{d^2P}{2P\,dx^2}.$$

Положим $P = S^2$, так что S есть какая-нибудь[1]) функция от x; тогда получим:

$$P = S^2,\ Q = -\frac{2S\,dS}{dx},\quad R = \frac{C}{S^2} + \frac{dS^2}{dx^2} \quad \text{и} \quad X = \frac{C}{S^4} - \frac{d^2S}{S\,dx^2}.$$

Если взять эти значения, то уравнение

$$\frac{dy + y^2\,dx + X\,dx}{Py^2 + Qy + R} = 0$$

будет непосредственно интегрируемым[2]).

ПОЯСНЕНИЕ

529. Это решение получит более удобную форму, если придать множителю вид $\frac{P}{y^2 + 2Qy + R}$; теперь должно быть

$$\frac{1}{dy}\,d\,\frac{P(y^2 + X)}{y^2 + 2Qy + R} = \frac{1}{dx}\,d\,\frac{P}{y^2 + 2Qy + R},$$

откуда получается:

$$\left.\begin{array}{l} 2PQy^2\,dx + 2PRy\,dx - 2PQX\,dx \\ -\,y^2\,dP - 2PXy\,dx - R\,dP \\ \qquad -\,2Qy\,dP \quad +\,P\,dR \\ \qquad +\,2Py\,dQ \end{array}\right\} = 0.$$

Здесь $\frac{dP}{P}$ удобно определяется из каждой [группы членов] в отдельности, а именно:

$$\frac{dP}{P} = 2Q\,dx = \frac{R\,dx - X\,dx + dQ}{Q} = \frac{dR - 2QX\,dx}{R}.$$

Отсюда заключаем, что $2Q(R + X)\,dx = dR$. Теперь мы определим отсюда сам элемент dx[3]); найдем:

$$dx = \frac{dR}{2Q(R + x)}.$$

---

[1]) То есть произвольная.

[2]) Интеграл этого уравнения найден в § 533.

[3]) Идея дальнейших преобразований такова: вместо того чтобы искать выражения P, Q, R и X через x, Эйлер ищет выражения x, X и P через R и Q. Надо иметь в виду, что, как и в § 528, число условий на единицу меньше числа искомых функций и что вследствие этого общее решение зависит от произвольной функции. Таким образом, можно принять Q за аргумент, и тогда R есть произвольная функция от этого аргумента.

Подставив это значение, получаем:

$$\frac{Q\,dR}{R+X}=\frac{(R-X)\,dR}{2Q\,(R+X)}+dQ,$$

или

$$2Q^2\,dR=R\,dR-X\,dR+2QR\,dQ+2QX\,dQ,$$

откуда

$$X=\frac{2Q^2\,dR-2QR\,dQ-R\,dR}{2Q\,dQ-dR},$$

и значит,

$$R+X=\frac{2\,(Q^2-R^2)\,dR}{2Q\,dQ-dR}.$$

Следовательно,

$$dx=\frac{2Q\,dQ-dR}{4Q\,(Q^2-R)} \quad \text{и} \quad \frac{dP}{P}=\frac{2Q\,dQ-dR}{2\,(Q^2-R)},$$

поэтому $P=A\sqrt{Q^2-R}$.

Пусть $Q^2-R=S$ [1]; тогда получим:

$$dx=\frac{dS}{4QS}, \qquad X=\frac{4QS\,dQ}{ds}-Q^2-S; \qquad R=Q^2-S \text{ и } P=A\sqrt{S}.$$

Поэтому будем иметь уравнение

$$dy+\frac{y^2\,dS}{4QS}+dQ-\frac{(Q^2+S)\,dS}{4QS}=0,$$

которое становится интегрируемым при помощи множителя

$$\frac{\sqrt{S}}{y^2+2Qy+Q^2-S}=\frac{\sqrt{S}}{(y+Q)^2-S}.$$

Для нахождения интеграла этого уравнения примем Q и S за постоянные; тогда получится:

$$\int\frac{dy\sqrt{S}}{(y+Q)^2-S}=\frac{1}{2}\,l\,\frac{y+Q-\sqrt{S}}{y+Q-\sqrt{S}}+V,$$

где V — определенная функция от S или от Q. Теперь будем дифференцировать полученное выражение, приняв y за постоянную; получится [2]:

$$\frac{dQ\sqrt{S}-\dfrac{(Q+y)\,dS}{2\sqrt{S}}}{(y+Q)^2-S}+dV=\frac{y^2\,dS+4QS\,dQ-Q^2\,dS-S\,dS}{4Q\,((y+Q)^2-S)\sqrt{S}},$$

и поэтому

$$dV=\frac{y^2\,dS+2Qy\,dS+Q^2\,dS-S\,dS}{4Q\,((y+Q)^2-S)\sqrt{S}}=\frac{dS}{4Q\sqrt{S}}.$$

---

[1]) Здесь вводится новое количество S, так что теперь x, X, P и R выражаются через количества S, Q, одно из которых является произвольной функцией другого. Явные выражения количеств X, P, R, Q через x найти не удается, вследствие чего в результате вместо дифференциального уравнения, связывающего x, y, dx, dy получается уравнение, связывающее Q, S, y, dQ, dS, dy. Интеграл этого уравнения содержит Q, S, y, но из двух количеств Q, S одно является произвольной функцией другого. Если задать зависимость между Q и S, то можно получить дифференциальное уравнение, связывающее x, y, dx, dy.

[2]) В результате приравнивания найденного выражения и соответствующих членов полного дифференциала.

Следовательно, интеграл нашего уравнения есть

$$\frac{1}{2}\, l\, \frac{y+Q-\sqrt{S}}{y+Q+\sqrt{S}}+\frac{1}{4}\int \frac{dS}{Q\sqrt{S}}=C.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

530. Особым случаем является тот, в котором $R=Q^2$; при этом

$$\frac{dP}{P}=2Q\,dx=\frac{Q^2\,dx-X\,dx+dQ}{Q}=\frac{2dQ-2X\,dx}{Q}\,.$$

Отсюда мы получаем следующие два уравнения:

$$Q^2\,dx+X\,dx-dQ=0 \quad \text{и} \quad Q^2\,dx+X\,dx-dQ=0.$$

Они совпадают друг с другом; поэтому будем иметь:

$$X\,dx=dQ-Q^2\,dx \quad \text{и} \quad lP=2\int Q\,dx.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

531. Если взять Q отрицательным, так что мы будем иметь уравнение

$$dy+y^2\,dx-dQ-Q^2\,dx=0,$$

то оно становится интегрируемым при помощи множителя $\dfrac{e^{-2\int Q\,dx}}{(y-Q)^2}$. Интеграл будет

$$\frac{-1}{y-Q}\,e^{-2\int Q\,dx}+V=\text{Const},$$

где V — функция от x. Чтобы определить ее, будем дифференцировать, принимая y за постоянное:

$$-\frac{dQ}{(y-Q)^2}\,e^{-2\int Q\,dx}+\frac{2Q\,dx}{y-Q}\,e^{-2\int Q\,dx}+dV=\frac{y^2\,dx-dQ-Q^2\,dx}{(y-Q)^2}\,e^{-2\int Q\,dx},$$

откуда

$$V=\int e^{-2\int Q\,dx}\,dx,$$

так что интеграл есть

$$\int e^{-2\int Q\,dx}\,dx-\frac{e^{-2\int Q\,dx}}{y-Q}=C.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

532. Поэтому, если предложено уравнение

$$dy+y^2\,dx+X\,dx=0$$

и если известен какой-либо его частный интеграл $y=Q$, так что

$$dQ+Q^2\,dx+X\,dx=0$$

и поэтому

$$dy+y^2\,dx-dQ-Q^2\,dx=0,$$

то множителем для этого уравнения будет $\frac{1}{(y-Q)^2}e^{-2\int Q\,dx}$, а полным интегралом

$$Ce^{2\int Q\,dx}+\frac{1}{y-Q}=e^{2\int Q\,dx}\int e^{-2\int Q\,dx}\,dx.$$

ПОЯСНЕНИЕ

533. Уравнение

$$dy+\frac{y^2\,dS}{4QS}+dQ-\frac{(Q^2+S)\,dS}{4QS}=0,$$

найденное нами в предыдущем пояснении не таит в себе больших трудностей. Действительно, если положить $y+Q=z$, то получим:

$$dz-\frac{z\,dS}{2S}+\frac{dS\,(z^2-S)}{4QS}=0.$$

Для того чтобы вместо двух первых членов образовался один, положим $z=v\sqrt{S}$; тогда найдем, что

$$dv\sqrt{S}+\frac{v^2\,dS}{4Q}-\frac{dS}{4Q}=0 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v^2-1}+\frac{dS}{4Q\sqrt{S}}=0.$$

Это — уравнение с разделенными переменными; его интеграл есть

$$\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+v}{1-v}=\frac{1}{4}\int\frac{dS}{Q\sqrt{S}}, \quad \text{где} \quad v=\frac{y+Q}{\sqrt{S}}.$$

Уравнение же, найденное в самом решении [§ 528],

$$dy+y^2\,dx+\frac{C\,dx}{S^4}-\frac{d^2S}{S\,dx}=0,$$

где S — какая угодно функция количества x, а $\frac{d^2S}{dx}=d\,\frac{dS}{dx}$, представляется более трудным; оно становится непосредственно интегрируемым, если его разделить на

$$S^2y^2-\frac{2Sy\,dS}{dx}+\frac{dS^2}{dx^2}+\frac{C}{S^2}=\left(Sy-\frac{dS}{dx}\right)^2-\frac{C}{S^2}.$$

Приняв x за постоянную, найдем интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{arctg}\frac{S^2y\,dx-S\,dS}{dx\sqrt{C}}+V=\text{Const}.$$

Теперь, чтобы найти функцию V, надо взять дифференциал, принимая за постоянное y; этот дифференциал есть

$$\frac{2Sy\,dS-\dfrac{S\,d^2S}{dx}-\dfrac{dS^2}{dx}}{S^2\left(Sy-\dfrac{dS}{dx}\right)^2+C}+dV,$$

и он должен быть равен второй части, [т. е. выражению]

$$\frac{\dfrac{C\,dx}{S^4}-\dfrac{d^2S}{S\,dx}+y^2\,dx}{\left(Sy-\dfrac{dS}{dx}\right)^2+\dfrac{C}{S^2}}=\frac{\dfrac{C\,dx}{S^2}-\dfrac{S\,d^2S}{dx}+S^2y^2\,dx}{S^2\left(Sy-\dfrac{ds}{dx}\right)^2+C}.$$

Значит,

$$dV = \frac{S^2y^2\,dx - 2Sy\,dS + \frac{dS^2}{dx} + \frac{C\,dx}{S^2}}{S^2\left(Sy - \frac{dS}{dx}\right)^2 + C} = \frac{dx}{S^2}.$$

Поэтому полный интеграл есть

$$\frac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{arctg}\frac{S^2y\,dx - S\,dS}{dx\sqrt{C}} + \int\frac{dx}{S^2} = D.$$

Если мы возьмем $S = x$, [найдем, что] для уравнения[1])

$$dy + y^2\,dx + \frac{C\,dx}{x^4} = 0$$

полный дифференциал будет

$$\frac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{arctg}\frac{x^2y - x}{\sqrt{C}} - \frac{1}{x} = D.$$

Пусть теперь $S = x^n$; тогда

$$\frac{dS}{dx} = nx^{n-1} \quad \text{и} \quad d\frac{dS}{dx} = n(n-1)\,x^{n-2}\,dx,$$

и значит, можно будет проинтегрировать уравнение

$$dy + y^2\,dx + \frac{C\,dx}{x^{4n}} - \frac{n(n-1)\,dx}{x^2} = 0;$$

его интеграл будет

$$\frac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{arctg}\frac{x^{2n}y - nx^{2n-1}}{\sqrt{C}} - \frac{1}{(2n-1)\,x^{2n-1}} = D.$$

Выше [§ 436] мы нашли, что уравнение

$$dy + y^2\,dx + Cx^m\,dx = 0$$

можно привести к разделению переменных всякий раз, как $m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$; в тех же случаях можно будет найти такую функцию S, чтобы

$$\frac{C}{S^4} - \frac{d^2S}{S\,dx^2} = Cx^m,$$

но поскольку это уравнение относится к дифференциальным уравнениям второго порядка, здесь мы его касаться не будем.

ЗАДАЧА 69

534. *Определить функции P и Q двух переменных x и y так, чтобы дифференциальное уравнение $P\,dx + Q\,dy = 0$, будучи разделено на $Px + Qy$, стало интегрируемым само по себе.*

РЕШЕНИЕ

Так как выражение $\frac{P\,dx + Q\,dy}{Px + Qy}$ должно быть интегрируемым, то положим $Q = RP$, так что будем иметь $\frac{dx + R\,dy}{x + Ry}$; пусть $dR = M\,dx + N\,dy$.

[1]) Ср. § 491.

Должно иметь место равенство

$$\frac{1}{dy} d \frac{1}{x+Ry} = \frac{1}{dx} d \frac{R}{x+Ry},$$

откуда получаем:

$$\frac{-R-Ny}{(x+Ry)^2} = \frac{Mx-R}{(x+Ry)^2}$$

или $N = -\frac{Mx}{y}$. Отсюда $dR = M\,dx - \frac{Mx\,dy}{y} = My\,\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$. Так как это выражение должно быть интегрируемым, необходимо, чтобы My было функцией количества $\frac{x}{y}$, ибо $\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2} = d\frac{x}{y}$; в результате этого интегрирования получается $R = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$[1]) или, что то же, R будет функцией нулевого измерения количеств x и y. Поскольку $\frac{Q}{P} = R$, очевидно, что это условие будет удовлетворено, если P и Q будут однородными функциями одного и того же числа измерений от количеств x и y; значит, таким путем мы пришли к тому же интегрированию однородных уравнений, о котором мы говорили в предыдущей главе [§ 477].

СЛЕДСТВИЕ 1

535. Так как $\frac{dt + R\,du}{t+Ru}$ интегрируется непосредственно, если $R = f\left(\frac{t}{u}\right)$ или $R = \frac{t}{u} f\left(\frac{t}{u}\right)$, то будет интегрируемым и выражение

$$\frac{\frac{dt}{t} + \frac{du}{u} f\left(\frac{t}{u}\right)}{1 + f\left(\frac{t}{u}\right)};$$

оно может быть представлено в таком виде:

$$\frac{\frac{dt}{t} + \frac{du}{u} f\left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{du}{u}\right)}{1 + f\left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{du}{u}\right)},$$

где буква f означает какую угодно функцию количества, к которому эта буква отнесена[2]).

СЛЕДСТВИЕ 2

536. Положим $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{X}$ и $\frac{du}{u} = \frac{dy}{Y}$; [из предыдущего параграфа вытекает, что] выражение

$$\frac{\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} f\left(\int \frac{dX}{X} - \int \frac{dy}{Y}\right)}{1 + f\left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y}\right)} = \frac{dx + \frac{X\,dy}{Y} f\left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y}\right)}{X + Xf\left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y}\right)}$$

---

[1]) В первом издании] $R = \mathrm{funct}\cdot\frac{x}{y}$. В дальнейшем употребляются обозначения $f:\frac{t}{u}$, $f:\left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{du}{u}\right)$, $\varphi:\left(\int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y}\right)$ и т. п.

[2]) ubi littera f denotat functionem quamcunque quantitatis sufixae.

будет непосредственно интегрируемым. Поэтому, если

$$R=\frac{X}{Y}f\left(\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right),$$

то выражение $\frac{dx+R\,dy}{X+RY}$ будет непосредственно интегрируемым, какой бы функцией количества x ни было X и какой бы функцией количества y ни было Y.

СЛЕДСТВИЕ 3

537. Поэтому, если требуется найти функции P и Q так, чтобы уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$ стало интегрируемым после деления на $PX+QY$ (где X — какая угодно функция от x, а Y — от y), то должно быть

$$\frac{Q}{P}=\frac{X}{Y}\varphi\left(\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 4

538. Поэтому, если знаки φ и ψ означают какие угодно функции и если будем иметь

$$P=\frac{V}{X}\varphi\left(\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right) \quad \text{и} \quad Q=\frac{V}{Y}\psi\left(\int\frac{dx}{X}-\int\frac{dy}{Y}\right),$$

то уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$ станет интегрируемым, если оно будет разделено на $PX+QY$.

ПОЯСНЕНИЕ

539. Таким образом, можно обнаружить бесчисленные уравнения, которые удастся интегрировать, хотя другим путем было бы очень трудно усмотреть, каким образом их можно привести к разделению переменных. Однако это исследование относится по существу ко второй книге «Интегрального исчисления», хотя здесь уже даны замечательные образцы такого способа исследования; действительно, мы определили функцию R двух переменных x и y по определенному условию, наложенному на M и N, а именно: $Mx+Ny=0$, т. е. $x\left(\frac{dR}{dx}\right)+y\left(\frac{dR}{dy}\right)=0$, т. е. по определенному условию, [задающему соотношение] дифференциалов [1]).

---

[1]) Значительная часть материала II и III глав содержится в мемуаре Эйлера (№ 269 по списку Энестрема) «De integratione aequationum differentialium», Novi comment. acad. sc. Petrop., 8 (1760/1), 1763, p. 3; Leonhardi Euleri, Opera omnia, series I, vol. 22 (Ф. Э.).

ГЛАВА IV

О НАХОЖДЕНИИ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

540. *Частный интеграл дифференциального уравнения есть соотношение переменных, удовлетворяющее уравнению и не заключающее в себе никакого нового постоянного количества*[1]*. Следовательно, он противополагается полному интегралу: последний включает в себя постоянное количество, которое в дифференциале не содержится, но в интеграле должно содержаться с необходимостью.*

СЛЕДСТВИЕ 1

541. Стало быть, если известен полный интеграл, то из него можно получать бесчисленные частные интегралы, поскольку указанному произвольному постоянному количеству будут придаваться все новые и новые определенные значения.

СЛЕДСТВИЕ 2

542. Значит, если предложено дифференциальное уравнение между переменными x и y, то всякая функция от x, которая, будучи подставлена вместо y, удовлетворяет уравнению, дает частный интеграл, если только он случайно не окажется полным.

СЛЕДСТВИЕ 3

543. Всякое дифференциальное уравнение приводится к виду $\frac{dy}{dx}=V$, где V — некоторая функция количеств x и y; поэтому, если известно такое соотношение между x и y, откуда получаются равные значения $\frac{dy}{dx}$ и V, то это соотношение надо будет считать частным интегралом.

---

[1]) Недостаточность этого определения восполняется в § 546.

ПОЯСНЕНИЕ 1

544. Иногда легко найти частный интеграл по догадке, как, например, если предложено уравнение

$$a^2dy + y^2\,dx = a^2\,dx + xy\,dx.$$

Здесь сразу же ясно, что оно удовлетворяется, если принять $y = x$. Поскольку это соотношение не содержит не только никакой новой постоянной, но даже и того постоянного количества a, которое содержится в самом дифференциальном уравнении, то это, несомненно, частный интеграл; из него ничего нельзя заключить о полном интеграле. Впрочем, часто знание частного интеграла открывает путь к нахождению полного интеграла. Так обстоит дело в этом же самом примере. Если положить в нем $y = x + z$, то получается:

$$a^2\,dx + a^2\,dz + x^2\,dx + 2xz\,dx + z^2\,dx = a^2\,dx + x^2\,dx + xz\,dx,$$

или

$$a^2\,dz + xz\,dx + z^2\,dx = 0.$$

Если положить $z = \frac{a^2}{v}$, то это уравнение преобразуется в

$$dv - \frac{xv\,dx}{a^2} = dx.$$

Будучи помножено на $e^{-\int \frac{x\,dx}{a^2}} = e^{\frac{-x^2}{2a^2}}$, оно становится интегрируемым и дает

$$e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\,v = \int e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\,dx \quad \text{или} \quad v = e^{\frac{x^2}{2a^2}} \int e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\,dx.$$

Хотя этот интеграл чрезвычайно трансцендентен, однако он включает в себя и данный выше чрезвычайно простой частный интеграл. Действительно, если постоянное количество, появляющееся в результате интегрирования $\int e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\,dx$, взять бесконечным, то получается $v = \infty$, т. е. $z = 0$, откуда $y = x$. Иногда же частный интеграл мало помогает нахождению полного интеграла. Если, например, мы имеем уравнение

$$a^3\,dy + y^3\,dx = a^3\,dx + x^3\,dx,$$

то ему, очевидно, удовлетворяет $y = x$; если же положить $y = x + z$, то получается уравнение

$$a^3\,dz + 3x^2z\,dx + 3xz^2\,dx + z^3\,dx = 0,$$

решение которого представляется не более легким, чем решение данного уравнения.

ПОЯСНЕНИЕ 2

545. В этих примерах частный интеграл сразу же бросается в глаза, но бывают случаи, когда его усмотреть труднее. Хотя нахождение частного интеграла редко открывает путь, приближающий нас к полному интегралу, однако же часто знание частного интеграла оказывается чрезвычайно важным, так как при его помощи нередко оказывается воз-

можным полностью завершить дело. Действительно, мы уже обратили внимание на то, что во всех тех задачах, решение которых приводится к дифференциальному уравнению, произвольное постоянное количество, присоединяемое в результате интегрирования, определяется из условий, присоединяемых к каждой задаче, так что всегда требуется найти только частный интеграл. Поэтому если случилось бы, что можно найти этот самый частный интеграл, не прибегая к помощи полного, то можно было бы найти решение задачи, хотя бы мы не были в состоянии проинтегрировать дифференциальное уравнение. Очевидно, в этих случаях надо считать, что решение найдено без помощи настоящего интегрирования, так как, собственно говоря, нельзя считать, что какое-либо дифференциальное уравнение проинтегрировано, если не найден его полный интеграл. Вот почему будет полезно рассмотреть те случаи, в которых можно найти частный интеграл.

ПОЯСНЕНИЕ 3

546. Здесь чрезвычайно важно обратить внимание на то, что не все значения, удовлетворяющие какому-либо дифференциальному уравнению, могут считаться его частным интегралом. Пусть, например, имеется уравнение $dy=\frac{dx}{\sqrt{a-x}}$ или $\frac{dx}{dy}=\sqrt{a-x}$. При $x=a$ как $\sqrt{a-x}$, так и $\frac{dx}{dy}$ становятся равными нулю, так что уравнение $x=a$ удовлетворяет этому дифференциальному уравнению, и тем не менее оно никак не является его частным интегралом. Ведь полным интегралом будет $y=C-2\sqrt{a-x}$ или $a-x=\frac{1}{4}(C-y)^2$; какое бы значение мы ни придавали постоянной C, из него никак не получается $a-x=0$. Равным образом уравнению

$$dy=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$$

удовлетворяет конечное уравнение $x^2+y^2=a^2$; однако же оно не может быть отнесено к числу частных интегралов, так как оно не содержится в полном интеграле $y=C+\sqrt{x^2+y^2-a^2}$.

Значит, от частного интеграла недостаточно требовать, чтобы он удовлетворял дифференциальному уравнению; надо, сверх того, добавить условие, чтобы он содержался в полном интеграле. Поэтому разыскание частных интегралов является делом очень рискованным, если в то же время неизвестен полный интеграл, а зная полный интеграл, мы не имели бы никакой нужды в особых методах отыскания частных интегралов. Ведь к разысканию частных интегралов полезно прибегать главным образом в тех случаях, когда не удается найти полный интеграл. Значит, для того чтобы наша работа оказалась плодотворной, надо дать критерии, которые позволили бы судить, являются или не являются частными интегралами некоторого дифференциального уравнения [те или иные] значения, которые удовлетворяют этому уравнению.

Дело в том, что всякий интеграл есть такое значение, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению, но не наоборот, т. е. не всякое значение, удовлетворяющее дифференциальному уравнению, есть интеграл. Так как до сих пор на это обращалось мало внимания, то я постараюсь изложить этот вопрос со всей ясностью.

ЗАДАЧА 70

547. *Пусть в дифференциальном уравнении* $dy=\frac{dx}{Q}$ *функция* Q *исчезает при* $x=a$. *Определить, в каких случаях уравнение* $x=a$ *есть частный интеграл предложенного дифференциального уравнения.*

РЕШЕНИЕ

Так как $Q=\frac{dx}{dy}$, то при $x=a$ и Q, и $\frac{dx}{dy}$ равны нулю, значит, значение $x=a$ безусловно удовлетворяет предложенному дифференциальному уравнению $dy=\frac{dx}{Q}$; однако отсюда еще не следует, что оно является [частным] интегралом, иными словами, одного этого еще недостаточно, но, сверх того, требуется, чтобы уравнение $x=a$ содержалось в полном интеграле [как частный случай], когда постоянной, присоединившейся в результате интегрирования, придано некое определенное значение. Итак, положим, что P есть интеграл выражения $\frac{dx}{Q}$, так что полный интеграл будет $y=C+P$. При подстановке $x=a$ это уравнение может удовлетворяться только в том случае, если $P=\infty$ при $x=a$; действительно, в этом случае, если взять постоянное количество C также бесконечным, то при подстановке $x=a$ количество y остается неопределенным. Поэтому только в том случае, если $P=\infty$ при $x=a$, уравнение $x=a$ следует считать частным интегралом. Вот критерий, на основании которого можно распознать, будет ли значение $x=a$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению $dy=\frac{dx}{Q}$, в то же время частным интегралом или не будет. А именно, оно будет интегралом лишь в том случае, если при $x=a$ не только $Q=0$, но, кроме того, интеграл $P=\int\frac{dx}{Q}$ обращается в бесконечность. Чтобы изложить это яснее, положим (поскольку при $x=a$ имеем $Q=0$)

$$Q=(a-x)^n R,$$

где n означает некоторое положительное число [1]). Так как уравнению

$$dy=\frac{dx}{Q}=\frac{dx}{(a-x)^n R}$$

можно придать вид

$$dy=\frac{\alpha\,dx}{(a-x)^n}+\frac{\beta\,dx}{(a-x)^{n-1}}+\frac{\gamma\,dx}{(a-x)^{n-2}}+\ldots+\frac{S\,dx}{R},$$

то возможность обращения P в бесконечность [2]) будет зависеть от члена $\int\frac{\alpha\,dx}{(a-x)^n}$; если этот член при $x=a$ становится бесконечным, то и интеграл $P=\int\frac{dx}{Q}$ будет бесконечным, каковы бы ни были остальные члены. Но

$$\int\frac{\alpha\,dx}{(a-x)^n}=\frac{\alpha}{(n-1)(a-x)^{n-1}}.$$

---

[1]) Разумеется, предполагается, что $R(a)\neq 0$.

[2]) ratio illius infiniti P.

Это выражение лишь тогда становится бесконечным при $x=a$, когда $n-1$ есть положительное число или $n=1$. Поэтому лишь тогда, когда показатель n в выражении $Q=(a-x)^n R$ не меньше единицы, уравнение $x=a$ надо считать частным интегралом.

СЛЕДСТВИЕ 1

548. Следовательно, во всех тех случаях, когда при $Q=(a-x)^n R$ показатель n меньше единицы, уравнению $dy=\frac{dx}{Q}$ не соответствует частный интеграл $x=a$, хотя таким образом дифференциальное уравнение удовлетворяется.

СЛЕДСТВИЕ 2

549. Если показатель n меньше единицы, то выражение $\frac{dQ}{dx}$ становится бесконечным при $x=a$. Отсюда мы получаем новый критерий, а именно: если предложено уравнение $dy=\frac{dx}{Q}$ и если при $x=a$ имеем $Q=0$, а $\frac{dQ}{dx}=\infty$, то значение $x=a$ не является частным интегралом этого уравнения.

СЛЕДСТВИЕ 3

550. За исключением указанных случаев, частным интегралом уравнения $dy=\frac{dx}{Q}$, где $Q=0$ при $x=a$, всегда будет $x=a$, если только при $x=a$ не получится $\frac{dQ}{dx}=\infty$, т. е. [$x=a$ будет частным интегралом] всякий раз, как значение выражения $\frac{dQ}{dx}$ будет либо конечным, либо исчезающим.

ПОЯСНЕНИЕ 1

551. Этот вывод, основанный на обращении гипотетических предложений, пожалуй, может показаться подозрительным и противоречащим правилам логики; но в действительности все наше рассуждение находится в полном согласии с этими правилами, так как из отрицания следствия оно умозаключает к отрицанию предпосылки. Действительно, когда в выражении $Q=(a-x)^n R$ показатель n меньше единицы, $\frac{dQ}{dx}$ становится $=\infty$ при $x=a$. Поэтому если $\frac{dQ}{dx}$ при $x=a$ не становится равным ∞, а следовательно, либо имеет конечное значение, либо исчезает, то показатель n безусловно не меньше единицы, т. е. он будет либо больше единицы, либо равен единице. В обоих случаях интеграл $P=\int\frac{dx}{Q}$ становится бесконечным при $x=a$ и потому уравнение $x=a$ есть частный интеграл. Таким образом, если в дифференциальном уравнении $dy=\frac{dx}{Q}$ количество Q становится равным нулю при $x=a$, то надо подвергнуть рассмотрению значение $\frac{dQ}{dx}$ для случая

$x=a$. Если это значение оказывается либо конечным, либо исчезающим, то уравнение $x=a$ есть частный интеграл; если же оно бесконечно, то этому значению нет места среди [частных] интегралов, хотя оно и удовлетворяет дифференциальному уравнению. То же прав ло верно и тогда, когда дифференциальное уравнение имеет вид $dy=\frac{P\,dx}{Q}$, т. е. $\frac{dy}{dx}=\frac{P}{Q}$, и когда при $x=a$ имеем $Q=0$, какой бы функцией от x, y ни было P; более того, нет необходимости и в том, чтобы Q было функцией одного только переменного x; оно одновременно может включать в себя каким-либо образом и другое переменное y.

ПОЯСНЕНИЕ 2

552. Доказательство это исходило из того, что количество Q, исчезающее при $x=a$, должно включать в себя в качестве множителя какую-то степень количества $(a-x)$, что для алгебраических функций очевидно. Но и для трансцендентных функций имеет место то же правило, ибо по степени они равносильны алгебраическим функциям[1]). Пусть, например, $dy=\frac{dx}{lx-la}$; здесь $Q=lx-la=l\frac{x}{a}$ и $Q=0$ при $x=a$. Находим $\frac{dQ}{dx}=\frac{1}{x}$; так как это выражение не становится бесконечным при $x=a$, то $x=a$ будет частным интегралом. Это остается в силе и для уравнения $dy=\frac{P\,dx}{lx-la}$, если только P не становится $=0$ при $x=a$. Пусть, например, $P=\frac{1}{x}$; интегрируя, имеем:

$$y=C+l\,(lx-la) \quad \text{и} \quad l\frac{x}{a}=e^{y-C}.$$

Если теперь принять постоянную $C=\infty$, получаем $l\frac{x}{a}=0$, а значит, $x=a$; следовательно, $x=a$ есть частный интеграл. Точно так же пусть $dy=P\,dx:(e^{\frac{x}{a}}-e)$; здесь $Q=e^{\frac{x}{a}}-e$ и потому $Q=0$ при $x=a$. Так как $\frac{dQ}{dx}=\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}$, а следовательно, при $x=a$ имеем $\frac{dQ}{dx}=\frac{e}{a}$, то $x=a$ будет и в этом случае частным интегралом.

Возьмем $P=e^{\frac{x}{a}}$, чтобы интегрирование оказалось выполненным; тогда $y=C+al\,(e^{\frac{x}{a}}-e)$, а следовательно, $e^{\frac{x}{a}}=e+e^{\frac{y-C}{a}}$; если положить $C=$ $=\infty$, будем иметь $e^{\frac{x}{a}}=e$, а поэтому $x=a$; стало быть, $x=a$ есть частный интеграл.

---

[1]) cum potestate talibus dignitatibus aequivaleant. Это придаточное предложение нам неясно по смыслу. Повидимому, Эйлер хочет сказать, что для трансцендентной функции $Q(x)$, обращающейся в нуль при $x=a$, так же как и для алгебраической, имеет место равенство $Q(x)=(x-a)^n R(x)$, где n — некоторое положительное число, и $R(a)\neq 0$.

ПРИМЕР 1

553. *Предложено дифференциальное уравнение* $dy=\frac{P\,dx}{\sqrt{S}}$, *в котором* S *исчезает при* $x=a$. *Определить случаи, в которых уравнение* $x=a$ *есть его частный интеграл.*

Так как здесь $\sqrt{S}=Q$, то $dQ=\frac{dS}{2\sqrt{S}}$; значит, для того, чтобы $x=a$ было частным интегралом, необходимо, чтобы при $x=a$ количество $\frac{dQ}{dx}=\frac{dS}{2dx\sqrt{S}}$ было конечным. В этом случае и количество $\frac{dS^2}{S\,dx^2}$ должно быть конечным, а так как S исчезает, то также $\frac{dS^2}{dx^2}$, а следовательно, и $\frac{dS}{dx}$, должно исчезать. Но тогда значение этой дроби[1]) при $x=a$ есть $\frac{2dSd^2S}{dS\,dx^2}=\frac{2d^2\,S}{dx^2}$; стало быть, это значение должно быть либо конечным, либо $=0$. Таким образом, для того чтобы уравнение $x=a$ было частным интегралом предложенного уравнения, требуются следующие условия: во-первых, чтобы было $S=0$ при $x=a$; во-вторых, чтобы было $\frac{dS}{dx}=0$ и, в-третьих, чтобы значение выражения $\frac{d^2S}{dx^2}$ оказалось бы либо конечным, либо $=0$, — лишь бы оно не было бесконечно большим. Если S есть рациональная функция, то эти три условия сводятся к тому, что S должно иметь множителем $(a-x)^2$ или более высокую степень.

ПОЯСНЕНИЕ

554. Это решение применяется для того, чтобы распознать, движется ли по кругу тело, притягиваемое к центру сил. Именно, если положить, что расстояние тела от центра равно x и что центростремительная сила, соответствующая этому расстоянию, равна X, то для времени t получается такое уравнение:

$$dt=\frac{x\,dx}{\sqrt{Ex^2-c^4-2\alpha x^2\int X\,dx}},$$

где E есть постоянное, вошедшее в результате предшествующего интегрирования. Для этого постоянного пишется такое значение, чтобы уравнению удовлетворяло значение $x=a$; в этом случае тело будет обращаться по кругу. Стало быть, здесь

$$S=Ex^2-c^4-2\alpha x^2\int X\,dx$$

или можно взять $S=E-\frac{c^4}{x^2}-2\alpha\int X\,dx$. Это количество, а также и его дифференциал $\frac{dS}{dx}=\frac{2c^4}{x^4}-2\alpha X$ должны исчезать при $x=a$, но второй дифференциал[2]) $\frac{d^2S}{dx^2}=-\frac{6c^4}{x^4}-\frac{2\alpha\,dX}{dx}$ не должен обращаться в бесконечность.

[1]) То есть дроби $\frac{dS}{2dx\sqrt{S}}$; к ней применяется правило Лопиталя.

[2]) differentio-differentiale.

Значит, постоянное a будет значением количества x, получающимся из уравнения $\alpha x^3 X = c^4$; это значение есть радиус круга, по которому тело сможет обращаться при условии, что постоянное E, от которого зависит скорость, будет подобрано так, чтобы $E = \frac{c^4}{a^2} + 2\alpha \int X\,dx$ при $x = a$, если только при этом не случится, что выражение $\frac{6c^4}{x^4} + \frac{2\alpha\,dX}{dx}$ $\left(\text{или } \frac{dX}{dx}\right)$ окажется бесконечным.

Если же это произойдет, то движение по кругу не будет уже иметь места. Чтобы показать это, положим

$$X = b + \sqrt{a - x},$$

так что количество

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{a-x}}$$

при $x = a$ станет бесконечным, а уравнение $\alpha x^3 X = c^4$ получит вид $\alpha a^3 b = c^4$. Но тогда в силу

$$\int X\,dx = bx - \frac{2}{3}(a - x)^{\frac{3}{2}}$$

будем иметь:

$$E = \alpha ab + 2\alpha ab = 3\alpha ab,$$

и наше уравнение получит вид

$$dt = \frac{x\,dx}{\sqrt{3\alpha abx^2 - \alpha a^3 b - 2\alpha bx^3 + \frac{4}{3}\alpha x^2 (a-x)^{\frac{3}{2}}}}.$$

Для этого уравнения значение $x = a$ безусловно не подходит в качестве интеграла. Действительно, имеем:

$$S = \alpha(a - x)\left(-a^2 b - abx + 2bx^2 + \frac{4}{3}x^2\sqrt{a - x}\right),$$

и так как множителем этого выражения будет не $(a - x)^2$, а только $(a - x)^{\frac{3}{2}}$, то частный интеграл $x = a$ не может иметь места.

ПРИМЕР 2

555. *Предложено дифференциальное уравнение* $dy = \frac{P\,dx}{\sqrt[n]{S^m}}$, *в котором* S *исчезает при* $x = a$. *Найти случаи, когда* $x = a$ *есть частный интеграл.*

Поскольку $S = 0$ при $x = a$, можно принять $S = (a - x)^\lambda R$; тогда знаменатель

$$\sqrt[n]{S^m} = (a - x)^{\frac{\lambda m}{n}} R^{\frac{m}{n}},$$

откуда ясно, что уравнение $x = a$ будет частным интегралом предложенного уравнения, если $\frac{\lambda m}{n}$ — положительное число, большее или равное единице, т. е. если либо $\lambda = \frac{n}{m}$, либо $\lambda > \frac{n}{m}$. Судить об этом чрезвычайно легко в том случае, если S — алгебраическая функция. Если же она трансцендентна, так что показателя λ нет возможности выразить численно[1]), то можно будет пользоваться вторым правилом. Именно, так как $\sqrt[n]{S^m}=Q$, то $\frac{dQ}{dx}=\frac{mS^{\frac{m-n}{n}}\,dS}{n\,dx}$. Если $x=a$ есть интеграл, то значение этого выражения при $x=a$ должно быть либо конечным, либо нулевым. Значит, в этом случае необходимо, чтобы также и количество $\frac{S^{m-n}\,dS^n}{dx^n}$ было конечным. Стало быть, надо искать значение этого выражения при $x=a$; если это значение окажется бесконечно большим, то уравнение $x=a$ не будет интегралом; если же это значение будет либо конечным, либо нулевым, то это уравнение безусловно будет частным интегралом предложенного уравнения. Здесь надо рассмотреть два случая в зависимости от того, будет ли $m>n$ или $m<n$.

I. Пусть $m>n$. Так как при $x=a$ имеем $S^{m-n}=0$, то $x=a$ безусловно будет интегралом, если только при том же значении x не будем иметь $\frac{dS}{dx}=\infty$. Если же $\frac{dS}{dx}=\infty$, то может случиться и так, что уравнение $x=a$ будет интегралом, и так, что не будет. Для распознавания этого положим $\frac{dx}{dS}=T$, так что наше выражение получит вид $\frac{S^{m-n}}{T^n}$; и числитель, и знаменатель этого выражения исчезают при $x=a$, вследствие чего значение его приводится[2]) к

$$\frac{(m-n)\,S^{m-n-1}\,dS}{nT^{n-1}\,dT}=\frac{-(m-n)\,S^{m-n-1}\,dS^{n+2}}{n\,dx^n\,d^2S}.$$

Если это выражение является конечным или нулевым, то $x=a$ будет интегралом. Таким же образом можно подвигаться дальше, различая случаи $m>n+1$ и $m<n+1$.

II. Если $m<n$, то наше выражение будет $\frac{dS^n}{S^{n-m}\,dx^n}$; для того чтобы его значение было конечным, необходимо, чтобы $\frac{dS}{dx}=0$, а кроме того, поскольку и числитель и знаменатель исчезают при $x=a$, значение нашего выражения будет:

$$=\frac{n\,dS^{n-1}\,d^2S}{(n-m)\,S^{n-m-1}\,dS\,dx^n}=\frac{n\,dS^{n-2}\,d^2S}{(n-m)\,S^{n-m-1}\,dx^n};$$

это значение должно быть конечным.

Однако вопрос решится легче всего, если сразу же положить $x=a+\omega$; так как при $x=a$ имеем $S=0$, то при этой подстановке количество S всегда может быть разложено в выражение вида

$$P\omega^\alpha+Q\omega^\beta+R\omega^\gamma+\text{ и т. д.};$$

в нем достаточно будет рассмотреть только один член $P\omega^\alpha$, содержащий наинизшую степень количества ω. Если окажется, что $\alpha=\frac{n}{m}$ или что $\alpha>\frac{n}{m}$, то уравнение $x=a$ безусловно будет частным интегралом.

---

[1]) ut exponens λ in numeris exhiberi nequeat; повидимому, имеется в виду не принципиальная невозможность, а практическая; ср. примечание к § 552 и соответствующий текст.

[2]) По правилу Лопиталя.

ПОЯСНЕНИЕ

556. Этот последний метод самый надежный, и даже к трансцендентным выражениям его можно всегда применять с наилучшим успехом. Именно, пусть предложено уравнение $dy=\frac{P\,dx}{Q}$, в котором при $x=a$ знаменатель $Q=0$, но числитель P не исчезает. Тогда надо положить $x=a\pm\omega$ и рассматривать количество ω как бесконечно малое, так что все его степени исчезают по сравнению с низшей и количество Q принимает вид $R\omega^\lambda$. Из этого будет ясно, что, если показатель λ не меньше единицы, уравнение $x=a$ непременно будет частным интегралом предложенного уравнения. Так, например, пусть имеем уравнение $dy=\frac{dx}{\sqrt{1+\cos\frac{\pi x}{a}}}$, знаменатель которого исчезает при $x=a$ ввиду того, что $\cos\pi=-1$. Положим $x=a-\omega$; тогда будем иметь:

$$\cos\frac{\pi x}{a}=\cos\left(\pi-\frac{\pi\omega}{a}\right)=-1+\frac{\pi^2\omega^2}{2a^2},$$

так как ω бесконечно мало. Значит, знаменатель нашего уравнения станет $=\frac{\pi\omega}{a\sqrt{2}}$. Отсюда мы заключаем, что $x=a$ безусловно будет частным интегралом [данного уравнения]. Однако же это не будет интеграл уравнения

$$dy=\frac{dx}{\sqrt[3]{1+\cos\frac{\pi x}{a}}}.$$

ЗАДАЧА 71

557. *Предложено дифференциальное уравнение, в котором переменные разделены; исследовать его частные интегралы.*

РЕШЕНИЕ

Пусть предложено уравнение $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}$, в котором X есть функция только от x, а Y — функция только от y. Прежде всего положим $X=0$ и отсюда будем искать значения количества x. Пусть одно из них есть $x=a$, так что при $x=a$ получается $X=0$; затем будем рассматривать значение выражения $\frac{dX}{dx}$ при $x=a$; если это значение не будет бесконечным, то $x=a$ безусловно будет частным интегралом предложенного уравнения. Или же положим $x=a\pm\omega$, рассматривая ω как бесконечно малое количество. Если получится $X=P\omega^\lambda$, то показатель λ, если только он не будет меньше единицы, укажет интеграл $x=a$; если же он будет меньше единицы, то уравнение $x=a$ не должно считаться интегралом.

Такому же рассмотрению мы подвергнем знаменатель Y второй части: если он исчезает при $y=b$ и если в том же случае выражение $\frac{dY}{dy}$ не становится бесконечным, то уравнение $y=b$ будет частным интегралом. То же самое произойдет, если при $y=b\pm\omega$ получится $Y=Q\omega^\lambda$, где показатель λ не меньше единицы.

СЛЕДСТВИЕ 1

558. Если члены уравнения с разделенными переменными не являются дробями, знаменатели которых в определенных случаях исчезают, то нет и такого рода частных интегралов, — разве что в уравнении вида $P\,dx = Q\,dy$ множители P и Q в определенных случаях становятся бесконечными; однако же этот случай легко приводится к предыдущему.

СЛЕДСТВИЕ 2

559. Так, например, если мы имеем $dx \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a} = \frac{dy}{b-y}$, то прежде всего частным интегралом будет $y = b$; далее, поскольку при $x = a$ имеем $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a} = \infty$, первый член надо выразить в виде $\dfrac{dx}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}}$. Знаменатель его, если положить $x = a - \omega$, получит вид

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\omega}{2a}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi\omega}{2a} = \frac{\pi\omega}{2a};$$

так как здесь показатель количества ω не меньше единицы, то уравнение $x = a$ также будет частным интегралом.

СЛЕДСТВИЕ 3

560. Значит, таким путем для одного и того же уравнения можно найти два и более интегралов. Так, например, для уравнения $\frac{m\,dx}{a-x} = \frac{n\,dy}{b-y}$ частными интегралами будут $a - x = 0$ и $b - y = a$; их можно также получить из полного интеграла $(a-x)^m = C(b-y)^n$: первый, если взять $C = 0$, второй, если взять $C = \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 4

561. Подобным же образом для уравнения $\frac{ma\,dx}{a^2-x^2} = \frac{nb\,dy}{b^2-y^2}$ существует четыре частных интеграла: $a + x = 0$, $a - x = 0$, $b + y = 0$, $b - y = 0$. Полным же интегралом будет

$$\frac{m}{2}\, l\, \frac{a+x}{a-x} = \frac{1}{2}\, lC + \frac{n}{2}\, l\, \frac{b+y}{b-y},$$

или

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^m = C\left(\frac{b+y}{b-y}\right)^n,$$

или

$$(a+x)^m (b-y)^n = C(a-x)^m (b+y)^n.$$

Непосредственным следствием отсюда являются данные выше интегралы.

СЛЕДСТВИЕ 5

562. Отсюда ясно, что если мы будем иметь

$$dy = \frac{P\,dx}{(a+x)^{\alpha}(b+x)^{\beta}(c+x)^{\gamma}},$$

то частные интегралы будут $a+x=0$, $b+x=0$, $c+x=0$, если только показатели α, β, γ и т. д. не будут меньше единицы. Поэтому, если Q есть рациональная функция количества x и если предложено уравнение $dy=\frac{P\,dx}{Q}$, то все множители количества Q, если положить их равными нулю, дадут частные интегралы.

ПОЯСНЕНИЕ 1

563. Это верно и для мнимых множителей, хотя отсюда можно извлечь лишь незначительную пользу. Например, если предложено уравнение $dy=\frac{a\,dx}{a^2+x^2}$, то знаменатель a^2+x^2 порождает частные интегралы $x=a\sqrt{-1}$ и $x=-a\sqrt{-1}$. Правда, не столь очевидно, что они являются следствием полного интеграла $y=C+\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. Однако, когда мы полагаем $x=a\sqrt{-1}$, надо обратить внимание на то, что $\operatorname{arctg}\sqrt{-1}=$ $=\infty\sqrt{-1}$; значит, если придать постоянному количеству C такой же вид, но с обратным знаком, то второе количество y останется неопределенным, несмотря на то, что мы совершаем подстановку $x=a\sqrt{-1}$; поэтому указанную подстановку надо считать частным интегралом. В самом деле, мы имеем вообще

$$\operatorname{arctg} u\sqrt{-1}=\int\frac{du\sqrt{-1}}{1-u^2}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\,\frac{1+u}{1-u};$$

если здесь положить $u=+1$ или $u=-1$, то получается $\infty\sqrt{-1}$; эта бесконечность и является причиной того, что найденные интегралы имеют место. И вообще можно утверждать, что если будем иметь $dy=$ $=\frac{P\,dx}{Q}$ и если знаменатель Q будет иметь множитель $(a+x)^\lambda$, показатель которого не меньше единицы, то уравнение $a+x=0$ всегда будет частным интегралом. Если же λ будет хотя бы и положительным, но меньшим единицы, то $a+x=0$ не будет частным интегралом, хотя при $x=-a$ дифференциальное уравнение и удовлетворяется.

ПОЯСНЕНИЕ 2

564. То, что дифференциальному уравнению может удовлетворять такое значение, которое, тем не менее, не является его интегралом, представляет собой замечательный парадокс, до сих пор, насколько мне известно, никем не замеченный; почти даже непонятно, каким образом этот факт можно привести в согласие с обычным представлением об интегралах[1]). В самом деле, всякий раз, когда удается получить такое

---

[1]) Insigne hoc est paradoxon a nemine adhuc, quantum mihi quidem constat, observatum, quod aequationi differentiali eiusmodi valor satisfacere queat, qui tamen eius non sit integrale; atque adeo vix patet, quomodo haec cum solita integralium idea conciliari potest.

Полагая, что возможность существования решения, не входящего в полный интеграл, никем прежде не была замечена, Эйлер ошибается. В журнале Парижской Академии наук (Histoire d l'Académie des Sciences de Paris) за 1734 г. (вышел из печати в 1736 г.) А. Клеро опубликовал мемуар (Solution de plusieurs problémes où il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée), где, между прочим, в качестве отступления от основной темы было выполнено интегрирование уравнения, соотношение между переменными, которое, будучи подставлено в предложенное уравнение, удовлетворяет ему, делает его тождественным, вряд ли кому-либо приходит на ум сомневаться в том, что это соотношение надо считать частным интегралом. Однако же при этом легко впасть в ошибку. Так, например, хотя уравнению $dy\sqrt{a^2-x^2-y^2}=x\,dx+y\,dy$ и удовлетворяет конечное уравнение $x^2+y^2=a^2$, тем не менее, мы совершили бы грубую ошибку, если бы стали считать его частным интегралом, так как это уравнение отнюдь не содержится в полном интеграле $y=C-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Поэтому, хотя всякий интеграл должен удовлетворять дифференциальному уравнению, однако же отсюда нельзя сделать обратного заключения, что всякое конечное уравнение, которое удовлетворяет [дифференциальному уравнению], есть его интеграл: кроме этого требуется, чтобы это конечное уравнение обладало еще некоторым определенным свойством (каково оно, мы изложили выше); лишь из него следует, что [конечное уравнение] содержится в полном интеграле. Но это отнюдь не противоречит истинному понятию интеграла, установленному здесь, и такого рода сомнение никогда не может коснуться интегралов, найденных по определенным правилам; оно имеет место только относительно тех интегралов, которые мы нашли как бы по догадке. Однако в тех случаях, когда интегрирование не удается, догадке отводится очень важная роль, и вот тогда надо всячески остерегаться, чтобы не выдавать [без основания] какое-либо удовлетворяющее соотношение за частный интеграл. Мы уже показали это на уравнениях с разделенными переменными; теперь надо со всей тщательностью исследовать, каким образом следует избегать такого рода ошибок во всех дифференциальных уравнениях вообще.

ЗАДАЧА 72

565. *Пусть некоторое соотношение между двумя переменными удовлетворяет дифференциальному уравнению. Определить, является ли это соотношение частным интегралом или нет.*

РЕШЕНИЕ

Пусть $P\,dx=Q\,dy$ — предложенное дифференциальное уравнение, где P и Q — какие угодно функции от x и y; пусть этому уравнению удовлетворяет некоторое соотношение между x и y, из которого получаем $y=X$, где X — какая-то функция от x, так что, если вместо y всюду написать X, то в самом деле выходит, что $P\,dx=Q\,dy$, т. е. что $\frac{dy}{dx}=\frac{P}{Q}$. Спрашивается, можно ли считать это значение $y=X$ интегралом предложенного уравнения или нельзя. Чтобы решить этот вопрос, положим $y=X+\omega$; тогда получим $\frac{dX}{dx}+\frac{d\omega}{dx}=\frac{P}{Q}$, причем надо отметить,

известного и сейчас под именем уравнения Клеро. Путем дифференцирования этого дифференциального уравнения Клеро находит как общий, так и особый интеграл и на ряде примеров показывает, что каждая из прямых, совокупность которых образует полный интеграл, является касательной к особому интегралу. Через 14 лет Даламбер (Histoire de l'Academie de Berlin, 1748) получил аналогичные результаты для уравнения более общего вида («уравнение Даламбера»). Если результаты Клеро могли остаться незамеченными, поскольку они были даны лишь попутно, то результаты Даламбера, казалось бы, должны были бы обратить на себя внимание Эйлера, который в то время сам находился в Берлине. Но, видимо, и они остались Эйлеру неизвестными.

что при $\omega=0$ будем иметь $\frac{dX}{dx}=\frac{P}{Q}$. Поэтому благодаря [введению] ω выражение $\frac{P}{Q}$ после такой подстановки можно будет представить как сумму количества $\frac{dX}{dx}$ и количества, находящегося в такой зависимости от ω, что оно исчезает при $\omega=0$[1]). В даном вопросе[2]) достаточно рассматривать ω как бесконечно малую частицу; поэтому высшими степенями ее можно пренебрегать по сравнению с наинизшей. Итак, положим, что отсюда получается $\frac{P}{Q}=\frac{dX}{dx}+S\omega^{\lambda}$, тогда мы будем иметь $\frac{d\omega}{dx}=S\omega^{\lambda}$ или $\frac{d\omega}{\omega^{\lambda}}=S\,dx$. Теперь из сказанного выше ясно, что $y=X$ (т. е. $\omega=0$) будет частным интегралом лишь тогда, когда показатель λ будет равен единице или больше единицы; действительно, рассуждение, подобное приведенному выше, показывает, что интеграл $\int S\,dx=\int\frac{d\omega}{\omega^{\lambda}}$ должен в предлагаемом случае, когда $\omega=0$, стать бесконечным. А это может иметь место только в том случае, когда λ равно единице или >1. Итак, если уравнению $P\,dx=Q\,dy$ или $\frac{dy}{dx}=\frac{P}{Q}$ удовлетворяет значение $y=X$, то надо подставить $y=X+\omega$, рассматривая частицу ω как бесконечно малую, и затем исследовать выражение $\frac{Q}{P}=\frac{dX}{dx}+S\omega^{\lambda}$; если не окажется, что $\lambda<1$, то можно будет заключить, что значение $y=X$ и есть частный интеграл предложенного уравнения.

ПОЯСНЕНИЕ

566. Поскольку ω рассматривается как бесконечно малое количество, представляется, что значение, которое получает количество $\frac{P}{Q}$ после подстановки $y=X+\omega$, удобнее всего найти с помощью дифференцирования. Так как $\frac{P}{Q}$ есть функция от x и y, то полагаем

$$d\frac{P}{Q}=M\,dx+N\,dy.$$

По условию дробь $\frac{P}{Q}$, если подставить $y=X$, переходит в $\frac{dX}{dx}$. Поэтому, если вместо y написать $X+\omega$, то эта дробь перейдет в $\frac{dX}{dx}+N\omega$. А так как показатель количества ω есть единица, то отсюда должно было бы следовать, что уравнение $y=X$ всегда является частным дифференциалом, между тем как возможен и противный случай. Из этого ясно, что дифференцирование применять вместо подстановки нельзя. Чтобы это было видно яснее, положим, что мы имеем $\frac{P}{Q}=\sqrt{y-X}+\frac{dX}{dx}$. Тогда после подстановки $y=X+\omega$, очевидно, получаем $\frac{P}{Q}=\frac{dX}{dx}+\sqrt{\omega}$.

Если же воспользоваться дифференцированием, то, полагая

$$d\frac{P}{Q}=M\,dx+N\,dy,$$

[1]) Quare ob ω expressio $\frac{P}{Q}$ hac substitutione reducetur ad $\frac{dX}{dx}$ una cum quantitate ita per ω affecta, ut evanescat posito $\omega=0$.

[2]) In hoc negotio.

получим $N = \frac{1}{2\sqrt{y-X}}$ и отсюда найдем:

$$\frac{P}{Q} = \frac{dX}{dx} + N\omega.$$

Это выражение отличается от первого. Первое выражение исключает уравнение $y = X$ из числа интегралов; второе же, повидимому, включает[1]). Правда, здесь надо отметить, что само N содержит отрицательную степень количества ω, вследствие чего степень ω понижается. Но чтобы не было необходимости принимать в соображение это обстоятельство, всегда предпочтительно, отменив дифференцирование, пользоваться истинной подстановкой[2]). Соблюдая эту предосторожность, будет нетрудно решить для всякого значения, удовлетворяющего какому-либо дифференциальному уравнению, является ли это значение истинным интегралом или нет.

ПРИМЕР 1

567. *Уравнению*

$$dx(1 - y^m)^n = dy(1 - x^m)^n,$$

очевидно, удовлетворяет $y = x$. Требуется определить, является ли $y = x$ частным интегралом или нет.

Положим $y = x + \omega$; рассматривая ω как очень малое количество[3]), имеем:

$$y^m = x^m + mx^{m-1}\omega$$

и

$$(1 - y^m)^n = (1 - x^m - mx^{m-1}\omega)^n = (1 - x^m)^n - mnx^{m-1}\omega(1 - x^m)^{n-1}.$$

Поэтому уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{(1-y^m)^n}{(1-x^m)^n}$ получит вид

$$1 + \frac{d\omega}{dx} = 1 - \frac{mnx^{m-1}\omega}{1-x^m},$$

т. е. $\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{mnx^{m-1}dx}{1-x^m}$. Так как ω имеет здесь целое измерение, то уравнение $y = x$ безусловно есть частный интеграл предложенного дифференциального уравнения.

ПРИМЕР 2

568. *Уравнению*

$$a\,dy - a\,dx = dx\sqrt{y^2 - x^2}$$

удовлетворяет значение $y = x$. Исследовать, является ли это значение его частным интегралом или нет.

Положим $y = x + \omega$; тогда, считая ω бесконечно малым количеством, имеем:

$$\sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{2x\omega};$$

следовательно, $a\,d\omega = dx\sqrt{2x\omega}$ или $\frac{a\,d\omega}{\sqrt{\omega}} = dx\sqrt{2x}$.

---

[1]) Illa scilicet aequationem $y = X$ ex integralium numero removet, haec vero admittere videtur.

[2]) Quare ne hanc rationem spectare opus sit, semper praestat vera substitutione uti, differentiatione seposita.

[3]) spectato ω ut quantitate minima.

Так как здесь $d\omega$ разделен на степень количества ω, показатель которой меньше единицы, то, следовательно, значение $y=x$ не является частным интегралом предложенного уравнения, хотя и удовлетворяет ему. Иными словами, если бы удалось получить полный интеграл этого уравнения, то обнаружилось бы, что уравнение $y=x$ в нем содержаться не будет, каким бы образом ни определялось произвольное постоянное, вошедшее благодаря интегрированию.

ПОЯСНЕНИЕ

569. Отсюда становится по-новому понятным, почему решение вопроса об интеграле зависит от показателя количества ω. Ведь так как в предложенном примере, положив $y=x+\omega$, мы получили $\frac{a\,d\omega}{\sqrt{\omega}}=d\omega\sqrt{2x}$, то, интегрируя, будем иметь $2a\sqrt{\omega}=C+\frac{2}{3}x\sqrt{2x}$. Но по предположению ω есть бесконечно малое количество; здесь же, как бы мы ни определяли постоянное C, количество ω получает к нечное значение, которое даже может стать сколь угодно большим. Поскольку это противоречит предположению, отсюда с необходимостью следует, что уравнение $y=x$ не может быть интегралом, и это должно происходить всякий раз, как $d\omega$ оказывается разделенным на степень количества ω, показатель которой меньше единицы. Другое дело обратный случай, когда в результате изложенной выше подстановки получается $\frac{d\omega}{\omega}=R\,dx$, так что, если положить $\int R\,dx=ls$, имеем $l\omega=lC+lS$, или $\omega=CS$. В этом случае ясно, что если взять в качестве постоянной C исчезающее количество, то безусловно и само количество ω станет исчезающим. То же произойдет, если получится $\frac{d\omega}{\omega^\lambda}=R\,dx$, где $\lambda>1$. Действительно, в этом случае будем иметь $\frac{1}{(\lambda-1)\,\omega^{\lambda-1}}=C-S$ или $(\lambda-1)\omega^{\lambda-1}=\frac{1}{C-S}$. Если здесь взять $C=\infty$, то количеств о ω действительно станет исчезающим, как этого требует условие.

Впрочем, уравнение, данное в этом примере, освобождается от иррациональности, если положить $x=p^2-q^2$ и $y=p^2+q^2$; при этом получается уравнение $4aq\,dq=4pq\,(p\,dp-q\,dq)$ или $a\,dq=p^2\,dp-pq\,dq$, с которым, по-видимому, ничего нельзя сделать и, следовательно, нельзя получить его полный интеграл. Этому уравнению уже не удовлетворяет $x=y$, т. е. $q=0$; отсюда также можно заключить, что значение $y=x$ не является частным интегралом.

ПРИМЕР 3

570. *Уравнению*

$$a^2\,dy-a^2\,dx=dx\,(y^2-x^2)$$

удовлетворяет значение $y=x$. Исследовать, является ли это значение его частным интегралом или не является.

Положим $y=x+\omega$, рассматривая ω как бесконечно малое количество. Ввиду того, что $y^2-x^2=2x\omega$, наше уравнение получит вид $a^2\,d\omega=2x\omega\,dx$ или $\frac{a^2\,d\omega}{\omega}=2x\,dx$. Следовательно, поскольку здесь $d\omega$ делится на первую степень количества ω, уравнение $y=x$ безусловно будет частным интегралом предложенного уравнения, и притом оно заключается в полном интеграле[1]). Последний можно найти, если положить $y = x - \frac{a^2}{u}$; тогда

$$\frac{a^4\,du}{u^2} = dx\left(\frac{a^4}{u^2} - \frac{2a^2x}{u}\right) \quad \text{или } du + \frac{2ux\,du}{a^2} = dx.$$

Помножив это уравнение на $e^{\frac{x^2}{a^2}}$, получим интеграл

$$e^{\frac{x^2}{a^2}} u = C + \int e^{\frac{x^2}{a^2}}\,dx,$$

откуда

$$y = x - a^2 e^{\frac{x^2}{a^2}} : \left(C + \int e^{\frac{x^2}{a^2}}\,dx\right).$$

Если принять, что постоянное C бесконечно, получается $y = x$.

ПОЯСНЕНИЕ

571. Если в этом уравнении так же, как выше, положить $x = p^2 - q^2$ и $y = p^2 + q^2$, то получается $a^2\,dq = 2p^2q\,(p\,dp - q\,dq)$. Этому уравн нию удовлетворяет $q = 0$, откуда получаем случай $y = x$. Но если произвести это преобразование, то трудно усмотреть, как следует находить интеграл. Если мы продумаем данное выше приведение, то мы поймем, что это уравнение становится интегрируемым, если помножить его на $e^{(p^2-q^2):a^2} : q^3$; поскольку это далеко не очевидно само собой, будет целесообразно применить подстановку $p^2 - q^2 = r^2$, которая дает $p^2 = q^2 + r^2$ и $p\,dp - q\,dq = r\,dr$. Поэтому уравнение преобразуется в $a^2\,dq = 2qr\,dr\,(q^2 + r^2)$ или $\frac{a^2\,dq}{2q^3} = r\,dr + \frac{r^3\,dr}{q^2}$; если положить $\frac{1}{q^2} = s$, то это уравнение будет интегрироваться без труда. Итак, всякий раз, как удается найти такое соотношение между переменными, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению, по этому способу можно судить, надо ли считать это соотношение частным интегралом или нет. Однако вряд ли можно предложить общие правила нахождения таких частных интегралов; имеющиеся же правила открывают в равной мере возможность находить полные интегралы. Так, например, то, что мы заметили выше относительно уравнений с разделенными переменными, уже в силу того, что переменные там разделены, открывает в то же время путь к нахождению полного интеграла. Точно так же, если второй метод — метод множителей — приводит к успешному результату, то по большей части из самих множителей, при помощи которых уравнение становится интегрируемым, можно уже получить частные интегралы, как мы покажем в следующих предложениях.

ТЕОРЕМА

572. *Если дифференциальное уравнение $P\,dx + Q\,dy = 0$, будучи умножено на функцию M, становится интегрируемым, то $M = 0$ будет его частным интегралом, если только в этом же случае*[2]), *P или Q не становится бесконечным.*

---

[1]) atque adeo etiam in integrali completo continetur. Повидимому, Эйлер хочет этим сказать, что в данном случае полный интеграл фактически удается найти (см. ниже).

[2]) То есть одновременно с соотношением $M = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Положим, что u есть множитель количества M[1]); требуется показать, что уравнение $u=0$ есть частный интеграл предложенного уравнения. Так как u равно определенной функции от x и y, то можно определить отсюда второе переменное y, так что получится[2]) уравнение между двумя переменными x и u. Пусть это уравнение будет

$$R\,dx+S\,du=0.$$

Положим $M=Nu$; тогда будет интегрируемым следующее уравнение:

$$NRu\,dx+NSu\,du=0.$$

Если теперь ни R, ни S не разделены на u (в этом случае ни P, ни Q не обращаются в бесконечность при $u=0$), то интеграл непременно будет делиться на u[3]).

Действительно, будем ли мы получать его из члена $NRu\,dx$, рассматривая u как постоянное, или из членов $NSu\,du$, рассматривая x как постоянное, и в том и в другом случае получается интеграл, включающий в себя множитель u, если, конечно, при интегрировании опустить постоянное количество. Отсюда мы заключаем, что полным интегралом будет выражение вида $uV=C$[4]). Поэтому если постоянная C будет взята равной нулю, то частным интегралом будет $u=0$, исключая, разумеется, те случаи, когда функции R и S уже сами по себе разделены на u и когда поэтому наше рассуждение теряет свою силу. За исключением этих случаев всякий раз, как уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$, будучи умножено на функцию M, становится непосредственно интегрируемым, а эта функция M имеет множитель u, частным интегралом будет $u=0$. Это верно равным образом и для [других] в отдельности взятых множителей функции M.

---

[1]) То есть, что $M=Nu$, где N не обращается в бесконечность при $u=0$. В том же смысле надо понимать аналогичные формулировки в дальнейшем.

[2]) В результате подстановки функции $y=y(xu)$ в данное дифференциальное уравнение.

[3]) Quodsi iam neque R neque S per u dividatur, quo casu posito $u=0$ neque P neque Q abit in infinitum, integrale utique per u erit divisibile. Начало фразы в буквальном переводе звучало бы так: «если теперь ни R, ни S не делится на u...», но по смыслу такой перевод был бы явно неправильным. Хотя аргументация Эйлера здесь не отличается полной ясностью, но все же видно, что основная мысль такова: выражение $NRu\,ds+NSu\,du$ должно по условию представлять полный дифференциал. Чтобы найти первообразную, надо вычислить интеграл $u\int NR\,dx$, считая u постоянным. Если R не обращается в бесконечность при $u=0$, то и интеграл $\int NR\,dx$ обладает тем же свойством, так что первообразная (определенная с точностью до слагаемого, не зависящего от x) обращается в нуль при $u=0$. Аналогично для второго». Таким образом, словами «ни R, ни S не разделены на u» Эйлер хочет сказать, что аналитические выражения R и S не имеют вида

$$R=\frac{L(xu)}{u},\quad S=\frac{K(xu)}{u}\quad (\text{где } L \text{ и } K \text{ не исчезают при } u=0).$$

Для Эйлера совершенно естественно, что он не уточняет требований, накладываемых на функции R, S и u (xy). Однако нам не ясно, почему Эйлер (во фразе, которая в переводе заключена в скобки) из конечности R и S выводит заключение о конечности P и Q, а не наоборот.

[4]) В оригинале $V=uC$.

ПОЯСНЕНИЕ

573. Сделанное здесь ограничение абсолютно необходимо, так как, если им пренебречь, то все рассуждение лишается почвы[1]). Чтобы легче понять это, рассмотрим уравнение

$$\frac{adx}{y-x}+dy-dx=0;$$

будучи помножено на $y-x$, оно, очевидно, становится интегрируемым; стало быть, полагаем этот множитель $y-x=u$ или $y=x+u$; тогда наше уравнение будет $\frac{a\,dx}{u}+du=0$; будучи помножено на u, оно переходит в $a\,dx+u\,du=0$. Так как здесь член $a\,dx$ не умножен на u[2]), то отсюда никак нельзя заключить, что интеграл будет делиться на u; действительно, этот интеграл есть $ax+\frac{1}{2}u^2$. Отсюда ясно, что если член, [содержащий] dx, помножен на u, то, хотя бы другой член, [содержащий] du, и не имел множителя u, тем не менее интеграл будет делиться на u, как это, например, имеет место для выражения $u\,dx+x\,du$, интеграл которого xu имеет множитель u. Отсюда понятно, что если выражение $Pu\,dx+Q\,du$ интегрируется непосредственно, то и интеграл (разумеется, если опустить постоянную) будет делиться на u, лишь бы только Q не было разделено на u или на степень u более высокую, чем первая.

ТЕОРЕМА

574. *Если дифференциальное уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$, будучи разделено на функции M, становится непосредственно интегрируемым, то частным интегралом будет $M=0$, если только при $M=0$ ни P, ни Q не исчезает.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО[3])

Пусть делитель M имеет множителем u, так что $M=Nu$; требуется доказать, что $u=0$ будет частным интегралом; то же самое относится к каждому из сомножителей, входящих в делитель M, если он имеет их несколько. Так как u есть функция количеств x и y, то отсюда можно выразить второе из этих количеств y через x и u; тогда получится уравнение вида $R\,dx+S\,du=0$. Значит, это уравнение, будучи разделено на Nu, станет непосредственно интегрируемым. Следовательно, надо искать интеграл выражения $\frac{R\,dx}{Nu}+\frac{S\,du}{Nu}$, причем мы предполагаем, что в этом уравнении ни R, ни S не умножены на u; поэтому множитель u из знаменателя не устраняется. Если этот интеграл вычислять только из члена $\frac{R\,dx}{Nu}$, рассматривая u как постоянное, то получается $\frac{1}{u}\int\frac{R\,dx}{N}+\varphi(u)$; если же вычислять его из второго члена $\frac{S\,du}{Nu}$, принимая x за постоянное, то, поскольку S не содержит u в качестве множителя, строение интеграла будет таково, что при $u=0$ он станет бесконечным. Значит, строение интеграла (пусть он будет V) таково, что он становится $=\infty$ при $u=0$. А так как полный интеграл

[1]) claudicet; дословно: «хромает».

[2]) То есть не содержит множителя u.

[3]) Ср. сноски к § 573.

будет $V=C$, то это уравнение, если принять, что постоянное C бесконечно, удовлетворяется при $u=0$.

Итак, мы заключаем отсюда, что если делитель $M=Nu$ делает дифференциальное уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$ непосредственно интегрируемым, то из какого-либо множителя u, входящего в делитель M, получается частный интеграл $u=0$, если только количества P и Q или R и S не исчезают при $u=0$.

СЛЕДСТВИЕ 1

575. Если уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$ будет однородным, то, как мы видели выше [§ 477], оно становится интегрируемым, если его разделить на $Px+Qy$, а поэтому его частным интегралом будет $Px+Qy=0$. Так как последнее уравнение также однородное, то оно будет иметь множители вида $\alpha x+\beta y$, каждый из которых, будучи приравнен нулю, дает частный интеграл.

СЛЕДСТВИЕ 2

576. Для уравнения

$$y\,dx\,(c+nx)-dy\,(y+a+bx+nx^2)=0$$

мы выше [в § 488] получили делитель, при помощи которого оно становится интегрируемым; из этого делителя получаем, [во-первых], частный интеграл $y=0$; далее [имеем уравнение]

$$ny^2+(2na-bc)\,y+n\,(b-2c)\,xy+(na+c^2-bc)\,(a+bx+nx^2)=0;$$

его корни суть

$$ny=\frac{1}{2}\,bc-na+n\left(c-\frac{1}{2}\,b\right)x\pm(c+nx)\sqrt{\frac{1}{4}\,b^2-na}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

577. Для дифференциального уравнения

$$\frac{n\,dx\,(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}+(x-y)\,dy=0$$

мы дали выше [в § 489] делитель, при помощи которого оно становится интегрируемым; из этого делителя получаем частный интеграл

$$x-y+n\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=0 \text{ или } y^2-2xy+x^2=n^2+n^2x^2+n^2y^2+n^2x^2y^2,$$

из которого далее получаем:

$$y=\frac{x\pm n\,(1-x^2)\sqrt{1-n^2}}{1-n^2\,(1+x^2)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

578. Для дифференциального уравнения

$$dy+y^2\,dx-\frac{a\,dx}{x^n}=0$$

мы выше [в § 491] нашли множитель $\frac{x^2}{x^2\,(1-xy)-a}$, откуда получаем частный интеграл $x^2\,(1-xy)^2-a=0$, а отсюда $x\,(1-xy)=\pm\sqrt{a}$ или $y=\frac{1}{x}\pm\frac{\sqrt{a}}{x^2}$. Следовательно, мы получаем два частных интеграла; они оказываются мнимыми, если a будет отрицательным количеством.

ПОЯСНЕНИЕ

579. Вот почти все, что до настоящего времени открыто в теории дифференциальных уравнений [первого порядка]; впрочем, некоторую помощь окажет излагаемое ниже учение о дифференциальных уравнениях второго порядка. А сюда уместно отнести не столь давно найденные[1]) результаты, относящиеся к сравнению некоторых трансцендентных выражений. А именно, подобно тому как логарифмы и круговые дуги, хотя они и являются трансцендентными количествами, можно сравнивать друг с другом и даже вводить в вычисления наряду с алгебраическими количествами, так можно установить подобное же сравнение для определенных трансцендентных количеств высшего рода; речь идет о количествах, содержащихся в выражении

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}},$$

куда можно дополнительно ввести еще рациональный числитель вида $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+$ и т. д. Правда, этот вопрос чрезвычайно труден, и даже может показаться, что он превышает силы Анализа, однако он решается с помощью определенного метода. Отсюда Анализ обогащается многими немаловажными достижениями, и в первую очередь, как мне кажется, значительно совершенствуется решение дифференциальных уравнений. Действительно, пусть будет предложено такое уравнение:

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dx^3+Ey^4}}.$$

Сразу ясно, что его частный интеграл есть $x=y$, однако представляется, что полный интеграл будет чрезвычайно трансцендентным, так как ни одно из этих двух выражений само по себе не может быть сведено ни к логарифмам, ни к круговым дугам. Тем более удивительным будет тот факт, что полный интеграл можно выразить даже при помощи алгебраического уравнения между x и y. Но чтобы лучше уяснить метод, ведущий к решению этих высоких вопросов, мы приложим его сперва к известным нам трансцендентным количествам, содержащимся в выражении $\int \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2}}$, а затем покажем его применение к другим более сложным выражениям.

[1]) Из дальнейшего видно, что Эйлер имеет в виду результаты, содержащиеся в работах, опубликованных в 1761—1767 гг.

ГЛАВА V

О СРАВНЕНИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ КОЛИЧЕСТВ, СОДЕРЖАЩИХСЯ В ВЫРАЖЕНИЯХ ВИДА

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2}}$$

ЗАДАЧА 73

580. *Пусть между x и y предложено алгебраическое уравнение*

$$\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(x^2+y^2)+2\delta xy=0.$$

Найти такие интегральные выражения заданного вида[1]), *которые можно было бы сравнивать друг с другом.*

РЕШЕНИЕ

Продифференцируем предложенное уравнение и его дифференциал

$$2\beta\,dx+2\beta\,dy+2\gamma x\,dx+2\gamma y\,dy+2\delta x\,dy+2\delta y\,dx=0$$

представим в виде такого уравнения:

$$dx(\beta+\gamma x+\delta y)+dy(\beta+\gamma y+\delta x)=0.$$

Положим $\beta+\gamma x+\delta y=p$ и $\beta+\gamma y+\delta x=q$; из первого [соотношения] будем иметь:

$$p^2=\beta^2+2\beta\gamma x+2\beta\delta y+\gamma^2x^2+2\gamma\delta xy+\delta^2y^2.$$

Вычтем отсюда предложенное уравнение, помноженное на γ, т. е. уравнение

$$0=\alpha\gamma+2\beta\gamma x+2\gamma\beta y+\gamma^2x^2+\gamma^2y^2+2\gamma\delta xy.$$

Тогда получим:

$$p^2=\beta^2-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)y+(\delta^2-\gamma^2)y^2.$$

Таким же образом найдем, что

$$q^2=\beta^2-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)x+(\delta^2-\gamma^2)x^2,$$

---

[1]) То есть вида $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2}}$.

откуда[1]) $p\,dx+q\,dy=0$. Поскольку теперь p есть функция от y, а q — такая же функция от x, положим

$$\beta^2-\alpha\gamma=A;\quad \beta(\delta-\gamma)=B\quad \text{и}\quad \delta^2-\gamma^2=C,$$

откуда

$$\delta-\gamma=\frac{B}{\beta}\quad \text{и}\quad \delta+\gamma=\frac{C}{\delta-\gamma}=\frac{\beta C}{B}$$

и, значит,

$$\delta=\frac{B^2+\beta^2C}{2B\beta}\quad \text{и}\quad \gamma=\frac{\beta^2C-B^2}{2B\beta}.$$

Первое же[2]) [уравнение] дает

$$\alpha=\frac{\beta^2-A}{\gamma}=\frac{2B\beta(\beta^2-A)}{\beta^2C-B^2}.$$

Если взять эти значения α, γ, δ, то уравнение $\frac{dx}{q}+\frac{dy}{p}=0$ примет вид

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2}}+\frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2}}=0.$$

Значит, этому дифференциальному уравнению удовлетворяет уравнение

$$\frac{2B\beta(\beta^2-A)}{\beta^2C-B^2}+2\beta(x+y)+\frac{\beta^2C-B^2}{2B\beta}(x^2+y^2)+\frac{B^2+\beta^2C}{B\beta}xy=0.$$

Так как это уравнение содержит новое постоянное β, то оно будет, сверх того, полным интегралом найденного дифференциального уравнения.

Нет нужды, чтобы указанные выше выражения равнялись буквам A, B, C; достаточно, чтобы они были им пропорциональны, откуда получаем:

$$\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{\beta(\delta-\gamma)}=\frac{A}{B}\quad \text{и}\quad \frac{\delta+\gamma}{\beta}=\frac{C}{B}.$$

Следовательно,

$$\delta=\frac{\beta C}{B}-\gamma\quad \text{и}\quad \alpha=\frac{\beta^2}{\gamma}-\frac{\beta A}{\gamma B}(\delta-\gamma),$$

т. е.

$$\alpha=\frac{\beta^2}{\gamma}-\frac{\beta^2AC}{\gamma B^2}+\frac{2\beta A}{B}.$$

[1]) В этой, и особенно в следующей, главе разъяснения Эйлера не всегда обладают достаточной отчетливостью. В данном случае скупо брошенное слово «откуда» недостаточно выясняет связь между двумя предыдущими уравнениями и уравнением

$$p\,dx+q\,dy=0. \tag{1}$$

Каждое из двух предыдущих уравнений, если заменить в них p и q выражениями

$$\left.\begin{aligned} p&=\beta+\gamma x+\delta y,\\ q&=\beta+\gamma y+\delta x,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

равносильно данному уравнению. Последнее является, таким образом, интегралом уравнения (1) не только тогда, когда p и q выражаются формулами (2), но также и тогда, когда

$$\left.\begin{aligned} p&=\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)y+(\delta^2-\gamma^2)y^2},\\ q&=\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma+2\beta(\delta-\gamma)x+(\delta^2-\gamma^2)y^2}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[2]) То есть уравнение $\beta^2-\alpha\gamma=A$.

Поэтому полный интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2}}+\frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2}}=0$$

есть

$$\beta^2(B^2-AC)+2\beta\gamma AB+2\beta\gamma B^2(x+y)+\gamma^2B^2(x^2+y^2)+2\gamma B(\beta C-\gamma B)xy=0,$$

где отношение $\frac{\beta}{\gamma}$ представляет собой произвольное постоянное.

СЛЕДСТВИЕ 1

581. Если извлечь корень из предложенного уравнения, то получится:

$$y=\frac{-\beta-\delta x+\sqrt{\beta^2+2\beta\delta x+\delta^2x^2-\alpha\gamma-2\beta\gamma x-\gamma^2x^2}}{\gamma}$$

или, если вместо α и δ подставить их значения,

$$y=-\frac{\beta}{\gamma}-\frac{(\beta C-\gamma B)}{\gamma B}x+\sqrt{\left(\frac{\beta^2C-2\beta\gamma B}{\gamma^2B^2}\right)(A+2Bx+Cx^2)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

582. Значит, если $x=0$, то получается:

$$y=-\frac{\beta}{\gamma}+\sqrt{\frac{\beta^2AC-2\beta\gamma AB}{\gamma^2B^2}}.$$

Положим это значение $=a$; тогда

$$\gamma Ba+\beta B=\sqrt{\beta^2AC-2\beta\gamma AB}.$$

Взяв квадраты, получим:

$$\gamma^2B^2a^2+2\beta\gamma B^2a+\beta^2B^2=\beta^2AC-2\beta\gamma AB,$$

откуда

$$\frac{\gamma}{\beta}=\frac{-A-Ba+\sqrt{A(A+2Ba+Ca^2)}}{Ba^2}$$

или

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{B\left(A+Ba+\sqrt{A(A+2Ba+Ca^2)}\right)}{AC-B^2}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

583. Для того чтобы взятое уравнение

$$\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(x^2+y^2)+2\delta xy=0$$

удовлетворяло дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2}}+\frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2}}=0,$$

необходимо, чтобы

$$\beta^2-\alpha\gamma=mA,\quad \beta(\delta-\gamma)=mB\quad \text{и}\quad \delta^2-\gamma^2=mC,$$

откуда

$$\beta+\gamma y+\delta x=\sqrt{m(A+2Bx+Cx^2)}$$

и

$$\beta+\gamma x+\delta y=\sqrt{m(A+2By+Cy^2)}.$$

По заданным A, B, C можно определить только три из букв: α, β, γ, δ и m, а две остаются неопределенными. Поэтому, если даже разделить взятое уравнение на какой-либо из коэффициентов, все же одно из входящих в него постоянных будет новым, а следовательно, его надо будет считать полным интегралом. Таким образом, хотя ни один из членов дифференциального уравнения не допускает алгебраического интегрирования, однако полный интеграл может быть выражен алгебраически. В качестве произвольного постоянного можно ввести то значение количества y, которое оно получает при $x=0$. Но так как может случиться, что это значение окажется мнимым, то будет уместно определить это постоянное так, чтобы при $x=a$ мы имели $y=b$; при таком соглашении [интеграл] можно применять во всех случаях. Отсюда будем иметь:

$$\frac{\beta+\gamma b+\delta a}{\beta+\gamma a+\delta b}=\sqrt{\frac{A+2Ba+Ca^2}{A+2Bb+Cb^2}},$$

откуда находим:

$$\beta=\frac{(\gamma a+\delta b)\sqrt{A+2Ba+Ca^2}-(\gamma b+\delta a)\sqrt{A+2Bb+Cb^2}}{-\sqrt{A+2Ba+Ca^2}+\sqrt{A+2Bb+Cb^2}}$$

и

$$\sqrt{m(A+2Ba+Ca^2)}=\frac{(\delta-\gamma)(b-a)\sqrt{A+2Ba+Ca^2}}{\sqrt{A+2Bb+Cb^2}-\sqrt{A+2Ba+Ca^2}},$$

или

$$\sqrt{m}=\frac{(\delta-\gamma)(b-a)}{\sqrt{A+2Bb+Cb^2}-\sqrt{A+2Ba+Ca^2}}.$$

Для краткости положим

$$\sqrt{A+2Ba+Ca^2}=\mathfrak{A} \quad \text{и} \quad \sqrt{A+2Bb+Cb^2}=\mathfrak{B},$$

так что

$$\sqrt{m}=\frac{(\delta-\gamma)(b-a)}{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}}$$

и

$$\beta=\frac{\mathfrak{A}(\gamma a+\delta\beta)-\mathfrak{B}(\gamma b+\delta a)}{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}}.$$

Тогда уравнение $\beta(\delta-\gamma)=mB$ получит такой вид:

$$\mathfrak{A}(\gamma a+\delta b)-\mathfrak{B}(\gamma b+\delta a)=\frac{B(\delta-\gamma)(b-a)^2}{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}&+\gamma\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\gamma A-\gamma B(a+b)-\gamma C(a^2-ab+b^2)\\&+\delta\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\delta A+\delta B(a+b)-\delta C\,ab\end{aligned}\right\}=0.$$

Поэтому положим

$$\gamma = n\mathfrak{A}\mathfrak{B} - nA + nB(a+b) - nCab,$$
$$\delta = nA + nB(a+b) + nC(a^2 - ab + b^2) - n\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$
$$\sqrt{m} = \frac{n(b-a)(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}} = n(b-a)(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}),$$

$\beta = nB(b-a)^2$, а следовательно, $\delta - \gamma = \frac{m}{n(b-a)^2}$.

Так как $\delta + \gamma = nC(b-a)^2$, то будем иметь $\delta^2 - \gamma^2 = mC$. Наконец, надо, чтобы $\alpha\gamma = \beta^2 - mA$, т. е.

$$\alpha\gamma = n^2B^2(b-a)^4 - n^2A(b-a)^2(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})^2$$

или

$$\alpha\gamma = n^2(b-a)^2[B^2(b-a)^2 - A(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})^2].$$

Так как при $x = a$ имеем $y = b$, то будем иметь также

$$\alpha = -2\beta(a+b) - \gamma(a^2 + b^2) - 2\delta ab,$$

откуда

$$\alpha = n(a-b)^2[A - B(a+b) - Cab - \mathfrak{A}\mathfrak{B}];$$

поэтому взятое нами уравнение есть

$$(b-a)^2(A - B(a+b) - Cab - \mathfrak{A}\mathfrak{B}) + 2B(b-a)^2(x+y)$$
$$- (A + B(a+b) + Cab - \mathfrak{A}\mathfrak{B})(x^2 + y^2)$$
$$+ 2(A + B(a+b) + C(a^2 - ab + b^2) - \mathfrak{A}\mathfrak{B})xy = 0.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

584. Положим $\beta = 0$, так что уравнение примет вид $\alpha + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0$; тогда будем иметь:

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{-\alpha\gamma + (\delta^2 - \gamma^2)x^2}}{\gamma}.$$

Положив $-\alpha\gamma = mA$ и $\delta^2 - \gamma^2 = mC$, так что

$$\gamma y + \delta x = \sqrt{m(A + Cx^2)},$$

будем иметь:

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2}} + \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2}} = 0.$$

Полным интегралом этого уравнения будет само взятое уравнение, для которого будем иметь $\frac{C}{A} = \frac{\gamma^2 - \delta^2}{\alpha\gamma}$ или $\delta = \sqrt{\gamma^2 - \frac{\alpha\gamma C}{A}}$. Если же требуется, чтобы $y = b$ при $x = 0$, то, поскольку $\gamma b = \sqrt{mA}$, будем иметь $\gamma = \frac{\sqrt{mA}}{b}$; далее, $\alpha = -b\sqrt{mA}$ и $\delta = \sqrt{\frac{mA}{b^2} + mC}$. Поэтому будем иметь уравнение

$$\frac{y\sqrt{mA}}{b} + \frac{x\sqrt{m(A + Cb^2)}}{A} = \sqrt{m(A + Cx^2)},$$

которое дает

$$y = -x\sqrt{\frac{A + Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A + Cx^2}{A}}.$$

Это есть полный интеграл записанного выше дифференциального уравнения. Поэтому если взять x с отрицательным знаком, то полным интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}}=\frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}}$$

будет

$$y=x\sqrt{\frac{A+Cb^2}{A}}+b\sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}}.$$

Если же таким образом провести вычисление в общем случае, то полным интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2}}+\frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2}}=0$$

окажется (если для краткости положить $\sqrt{A+2Bb+Cb^2}=\mathfrak{B}$)

$$y\left(\sqrt{A}+\frac{Bb}{\sqrt{A-\mathfrak{B}}}\right)+x\left(\mathfrak{B}+\frac{Bb}{\sqrt{A-\mathfrak{B}}}\right)=\frac{Bb^2}{\sqrt{A-\mathfrak{B}}}+b\sqrt{A+2Bx+Cx^2}.$$

Отсюда, очевидно, получается предыдущий случай, если положить $B=0$. Но при помощи нетрудной подстановки можно привести выражения, содержащие B, к случаю, когда $B=0$.

ЗАДАЧА 74

585. *Пусть* $\Pi(z)$ *означает ту функцию от* z, *которая возникает из интегрирования выражения* $\int\frac{dz}{\sqrt{A+Cz^2}}$, *где интеграл взят так, чтобы он исчезал при* $z=0$. *Установить сравнение между такого рода функциями.*

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}}=\frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}}.$$

Так как по условию

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A+Cx}}=\Pi(x)\quad\text{и}\quad\int\frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}}=\Pi(y),$$

причем интегралы взяты так, чтобы первый исчезал при $x=0$, а второй при $y=0$, то полный интеграл будет

$$\Pi(y)=\Pi(x)+C.$$

Но выше [§ 584] мы видели, что этот интеграл есть

$$y=x\sqrt{\frac{A+Cb^2}{A}}+b\sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}}.$$

Здесь при $x=0$ получается $y=b$, а так как $\Pi(0)=0$, то будем иметь:

$$\Pi(y)=\Pi(x)+\Pi(b).$$

Значит, этому трансцендентному уравнению удовлетворяет алгебраическое уравнение

$$y = x\sqrt{\frac{A+Cb^2}{A}} + b\sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}}.$$

Таким же образом, если взять b с отрицательным знаком, то уравнение

$$\Pi(y) = \Pi(x) - \Pi(b)$$

согласуется с таким:

$$y = x\sqrt{\frac{A+Cb^2}{A}} - b\sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}}.$$

Таким образом как сумма, так и разность двух функций такого рода могут быть выражены функцией подобного же рода. При этом теперь нет никакой разницы между переменными и постоянными количествами, поскольку $\Pi(z)$ означает определенную функцию от z, а именно:

$$\Pi(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{A+Cz^2}},$$

причем $\Pi(z)$, так как мы приняли, исчезает при $z=0$. Приняв этот способ обозначения, [приходим к следующему выводу]: для того чтобы [имело место соотношение]

$$\Pi(r) = \Pi(p) + \Pi(q),$$

необходимо, чтобы

$$r = p\sqrt{\frac{A+Cq^2}{A}} + q\sqrt{\frac{A+Cp^2}{A}},$$

а для того чтобы

$$\Pi(r) = \Pi(p) - \Pi(q),$$

необходимо, чтобы

$$r = p\sqrt{\frac{A+Cq^2}{A}} - q\sqrt{\frac{A+Cp^2}{A}}.$$

Если же там и здесь[1]) уничтожить иррациональность, то между p, q и r получается следующее уравнение:

$$p^4 + q^4 + r^4 - 2p^2q^2 - 2p^2r^2 - 2q^2r^2 = \frac{4Cp^2q^2r^2}{A}.$$

Вид этого уравнения обнаруживает следующее свойство: если p, q, r — стороны некоторого треугольника и если около него описать круг, обозначив диаметр последнего через T, то всегда будем иметь $A + CT^2 = 0$. Полученное выше уравнение, поскольку оно заключает в себе несколько корней, удовлетворяет следующему соотношению:

$$\Pi(p) \pm \Pi(q) \pm \Pi(r) = 0.$$

[1]) utrinque, т. е. «с обеих сторон». Обычно это выражение означает «в обеих частях уравнения». Весьма возможно, что и здесь смысл таков же. Однако здесь у нас два иррациональных уравнения, и получающееся рациональное уравнение является следствием каждого из них. Так как, кроме того, иррациональности входят лишь в правые части уравнений, то мы предпочли перевод «там и здесь», допускающий оба толкования.

СЛЕДСТВИЕ 1

586. Если положить $A=1$ и $C=-1$, то отсюда сразу же можно вывести известные [формулы] сравнения круговых дуг. Действительно, в этом случае

$$\Pi(z)=\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\arcsin z;$$

поэтому, для того чтобы

$$\arcsin r=\arcsin p+\arcsin q,$$

необходимо, чтобы

$$r=p\sqrt{1-q^2}+q\sqrt{1-p^2},$$

а для того чтобы

$$\arcsin r=\arcsin p-\arcsin q,$$

необходимо, чтобы

$$r=p\sqrt{1-q^2}-q\sqrt{1-p^2},$$

что известно.

СЛЕДСТВИЕ 2

587. Если $A=1$ и $C=1$, то будем иметь:

$$\Pi(z)=\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=l\,(z+\sqrt{1+z^2});$$

следовательно, если

$$l\,(r+\sqrt{1+r^2})=l\,(p+\sqrt{1+p^2})+l\,(q+\sqrt{1+q^2}),$$

то будем иметь:

$$r=p\sqrt{1+q^2}+q\sqrt{1+p^2},$$

а если

$$l\,(r+\sqrt{1+r^2})=l\,(p+\sqrt{1+p^2})-l\,(q+\sqrt{1+q^2}),$$

то будем иметь:

$$r=p\sqrt{1+q^2}-q\sqrt{1+p^2},$$

что непосредственно вытекает из основного свойства логарифмов.

СЛЕДСТВИЕ 3

588. Если в первой из двух общих формул [§ 585] положим $q=p$, так что

$$\Pi(r)=2\Pi(p),$$

то будем иметь:

$$r=2p\sqrt{\frac{A+Cp^2}{A}}.$$

Далее, если имеем

$$q=2p\sqrt{\frac{A+Cp^2}{A}}$$

и если взять

$$r=p\sqrt{\frac{A+Cq^2}{A}}+q\sqrt{\frac{A+Cp^2}{A}},$$

то будем иметь:

$$\Pi(r) = \Pi(p) + 2\Pi(p) = 3\Pi(p).$$

Но

$$\sqrt{\frac{A+Cq^2}{A}} = \sqrt{1 + \frac{4Cp^2}{A}\left(1 + \frac{Cp^2}{A}\right)} = 1 + \frac{2Cp^2}{A}.$$

Значит, если

$$\Pi(r) = 3\Pi(p),$$

то

$$r = p\left(1 + \frac{2Cp^2}{A}\right) + 2p\left(1 + \frac{Cp^2}{A}\right) = 3p + \frac{4Cp^3}{A}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

589. Для того чтобы можно было с меньшим трудом продолжать это умножение, примем во внимание, кроме уравнения

$$\Pi(r) = \Pi(p) + \Pi(q),$$

отвечающего соотношению

$$r = p\sqrt{\frac{A+Cq^2}{A}} + q\sqrt{\frac{A+Cp^2}{A}},$$

также и уравнение

$$\Pi(p) = \Pi(r) - \Pi(q),$$

которому отвечает соотношение

$$p = r\sqrt{\frac{A+Cq^2}{A}} - q\sqrt{\frac{A+Cr^2}{A}}.$$

Из этих соотношений получаем:

$$\sqrt{\frac{A+Cr^2}{A}} = \frac{r}{q}\sqrt{\frac{A+Cq^2}{A}} - \frac{p}{q} = \frac{p}{q}\left(\frac{A+Cq^2}{A}\right) + \sqrt{\left(\frac{A+Cp^2}{A}\right)\left(\frac{A+Cq^2}{A}\right)} - \frac{p}{q},$$

или

$$\sqrt{\frac{A+Cr^2}{A}} = \frac{Cpq}{A} + \sqrt{\left(\frac{A+Cp^2}{A}\right)\left(\frac{A+Cq^2}{A}\right)}.$$

Поэтому условием для того, чтобы

$$\Pi(r) = \Pi(p) + \Pi(q),$$

мы имеем не только

$$r = p\sqrt{1 + \frac{C}{A}q^2} + q\sqrt{1 + \frac{C}{A}p^2},$$

но также и

$$\sqrt{1 + \frac{C}{A}r^2} = \frac{C}{A}pq + \sqrt{\left(1 + \frac{C}{A}p^2\right)\left(1 + \frac{C}{A}q^2\right)}.$$

Положим для краткости $\sqrt{1 + \frac{C}{A}p^2} = P$; если взять $q = p$, так что

$$\Pi(r) = 2\Pi(p),$$

то будем иметь:

$$r = 2Pp \quad \text{и} \quad \sqrt{1 + \frac{C}{A}r^2} = \frac{C}{A}p^2 + P^2.$$

Если взять вместо q это значение количества r[1]), то оно даст

$$\Pi(r) = 3\Pi(p),$$

причем имеем:

$$r = \frac{C}{A} p^3 + 3P^2 p$$

и

$$\sqrt{1 + \frac{C}{A} r^2} = \frac{3C}{A} Pp^2 + P^3.$$

Снова заменим q, взяв вместо него это [последнее] значение количества r; получим:

$$\Pi(r) = 4\Pi(p),$$

причем

$$r = \frac{4C}{A} Pp^3 + 4P^3 p$$

и

$$\sqrt{1 + \frac{C}{A} r^2} = \frac{C^2}{A^2} p^4 + \frac{6C}{A} P^2 p^2 + P^4.$$

Подставим вместо q это [последнее] значение количества r; тогда получится:

$$\Pi(r) = 5\Pi(p),$$

причем

$$r = \frac{C^2}{A^2} p^5 + \frac{10C}{A} P^2 p^3 + 5P^4 p$$

и

$$\sqrt{1 + \frac{C}{A} r^2} = \frac{5C^2}{A^2} Pp^4 + \frac{10C}{A} P^3 p^2 + P^5.$$

Отсюда можно сделать следующее общее заключение: для того чтобы

$$\Pi(r) = n\Pi(p),$$

должно быть

$$r\sqrt{\frac{C}{A}} = \frac{1}{2}\left(P + p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n - \frac{1}{2}\left(P - p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n$$

и

$$\sqrt{1 + \frac{C}{A} r^2} = \frac{1}{2}\left(P + p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n + \frac{1}{2}\left(P - p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n,$$

или

$$r = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{C}}\left(P + p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n - \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{C}}\left(P - p\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^n.$$

Итак, это соотношение между p и r будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{dr}{\sqrt{A + Cr^2}} = \frac{n\,dp}{\sqrt{(A + Cp^2)^n}};$$

при этом надо помнить, что

$$P = \sqrt{1 + \frac{Cp^2}{A}}.$$

---

[1]) Схема повторений выкладки такова: заменяем в формуле $\Pi(r) = \Pi(p) + \Pi(q)$ буквы r и q соответственно буквами r' и r и затем берем $\Pi(r) = 2\Pi(p)$; теперь r исключено, так что в обозначении r' штрих можно отбросить; так же поступаем при соответствующих алгебраических преобразованиях. Аналогично при последующих выкладках.

ЗАДАЧА 75

590. *Полагая* $\int \frac{dz}{\sqrt{A+Cz^2}} = \Pi(z)$ *и беря интеграл так, чтобы он исчезал при* $z=f$, *вследствие чего* $\Pi(z)$ *становится определенной функцией от* z, *установить сравнение между такого рода функциями.*

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}} + \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}} = 0.$$

Интегрируя его, получаем:

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \text{Const},$$

но должен также существовать интеграл вида

$$\alpha + \gamma(x^2+y^2) + 2\delta xy = 0.$$

Чтобы он имел место, необходимо, чтобы

$$-\alpha\gamma = Am \quad \text{и} \quad \delta^2 - \gamma^2 = Cm.$$

Тогда будем иметь:

$$\gamma x + \delta y = \sqrt{m(A+Cy^2)} \quad \text{и} \quad \gamma y + \delta x = \sqrt{m(A+Cx^2)}.$$

Положим, что постоянное, вошедшее в результате интегрирования, определено так, что при $x=a$ получается $y=b$. Тогда интеграл будет

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \Pi(a) + \Pi(b).$$

Для того чтобы найти алгебраический вид, положим для краткости

$$\sqrt{A+Ca^2} = \mathfrak{A} \quad \text{и} \quad \sqrt{A+Cb^2} = \mathfrak{B};$$

тогда будем иметь:

$$\gamma a + \delta b = \mathfrak{B}\sqrt{m} \quad \text{и} \quad \gamma b + \delta a = \mathfrak{A}\sqrt{m},$$

откуда находим:

$$\gamma = \frac{\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a}{b^2-a^2}\sqrt{m} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{\mathfrak{B}b - \mathfrak{A}a}{b^2-a^2}\sqrt{m}.$$

Поэтому алгебраическое интегральное уравнение будет

$$(\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a)x + (\mathfrak{B}b - \mathfrak{A}a)y = (b^2-a^2)\sqrt{A+Cy^2},$$

или

$$(\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a)y + (\mathfrak{B}b - \mathfrak{A}a)x = (b^2-a^2)\sqrt{A+Cx^2}.$$

Отсюда y определяется через x таким образом:

$$y = \frac{(\mathfrak{A}a - \mathfrak{B}b)x + (b^2-a^2)\sqrt{A+Cx^2}}{\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}b}.$$

Помножим числитель и знаменатель этой дроби на $\mathfrak{A}b+\mathfrak{B}a$; в силу [соотношений]

$$\mathfrak{A}^2b^2-\mathfrak{B}a^2=A(b^2-a^2)$$

и

$$(\mathfrak{A}a-\mathfrak{B}b)(\mathfrak{A}b+\mathfrak{B}a)=(\mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}^2)ab-\mathfrak{A}\mathfrak{B}(b^2-a^2)=-(b^2-a^2)(Cab+\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

приходим к уравнению

$$y=-\frac{(Cab+\mathfrak{A}\mathfrak{B})x}{A}+\frac{(\mathfrak{A}b+\mathfrak{B}a)\sqrt{A+Cx^2}}{A}.$$

Отсюда далее получаем:

$$(b^2-a^2)\sqrt{A+Cy^2}=(\mathfrak{A}b-\mathfrak{B}a)x-\frac{(\mathfrak{B}b-\mathfrak{A}a)x}{\mathfrak{A}b-\mathfrak{B}a}+\frac{(\mathfrak{B}b-\mathfrak{A}a)(b^2-a^2)}{\mathfrak{A}b-\mathfrak{B}a}\sqrt{A+Cx^2},$$

или

$$\sqrt{A+Cy^2}=-\frac{C(b^2-a^2)}{\mathfrak{A}b-\mathfrak{B}a}x+\frac{\mathfrak{B}b-\mathfrak{A}a}{\mathfrak{A}b-\mathfrak{B}a}\sqrt{A+Cx^2}.$$

Здесь опять помножим числитель и знаменатель на $\mathfrak{A}b+\mathfrak{B}a$; получаем:

$$\sqrt{A+Cy^2}=-\frac{C(\mathfrak{A}b+\mathfrak{B}a)}{A}x+\frac{(Cab+\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{A}\sqrt{A+Cx^2}.$$

Итак, трансцендентное уравнение

$$\Pi(r)+\Pi(s)=\Pi(p)+\Pi(q)$$

допускает алгебраическое представление, а именно: если для краткости положить

$$\sqrt{A+Cp^2}=P,\quad \sqrt{A+Cq^2}=Q\quad \text{и}\quad \sqrt{A+Cr^2}=R,$$

то уравнение

$$\Pi(s)=\Pi(p)+\Pi(q)-\Pi(r)$$

даст

$$s=\frac{-PQr-Cpqr+PRq+QRp}{A}$$

и

$$\sqrt{A+Cs^2}=\frac{-CPqr-CQpr+CRpq+PQR}{A}.$$

или

$$\sqrt{A+Cs^2}=\frac{PQR+C(Rpq-Pqr-Qpr)}{A}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

591. По условию $\Pi(f)=0$; значит, если положить для краткости $\sqrt{A+Cf^2}=F$ и $r=f$, так что $R=F$, то уравнение

$$\Pi(s)=\Pi(p)+\Pi(q)$$

даст

$$s=\frac{F(Pq+Qp)-PQf-Cfpq}{A}$$

и

$$\sqrt{A+Cs^2}=\frac{FPQ+CFpq-Cf(Pq+Qp)}{A}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

592. Если положить $q = f$ и $Q = F$, так что $\Pi(q) = 0$, то [§ 590] уравнение

$$\Pi(s) = \Pi(p) - \Pi(r)$$

даст

$$s = \frac{F(Rp - Pr) + fPR - Cfpr}{A}$$

и

$$\sqrt{A + Cs^2} = \frac{FPR - CFpr + Cf(Rp - Pr)}{A}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

593. Если $C = 0$ и $A = 1$, то будем иметь:

$$\Pi(z) = \int dz = z - f,$$

так как интеграл надо взять так, чтобы он исчезал при $z = f$. Тогда, очевидно, будет $P = 1$, $Q = 1$ и $R = 1$; поэтому, для того чтобы

$$\Pi(s) = \Pi(p) + \Pi(q) - \Pi(r),$$

т. е. чтобы $s = p + q - r$, должно быть

$$s = -r + q + p \quad \text{и} \quad \sqrt{1 + 0s^2} = 1,$$

что ясно само собой.

СЛЕДСТВИЕ 4

594. Если положить $A = 1$ и $C = -1$ и взять $\Pi(z) = \arccos z$, так что $f = 1$, то будем иметь:

$$\arccos s = \arccos p + \arccos q - \arccos r$$

при условии, что

$$s = pqr - PQr + PRq + QRp$$

и

$$\sqrt{1 - s^2} = PQR + Pqr + Qpr - Rpq.$$

Если здесь взять $r = 1$ (тогда $R = 0$ и $\arccos r = 1$), то будем иметь $s = pq - PQ$ и $\sqrt{1 - s^2} = Pq + Qp$.

ПОЯСНЕНИЕ

595. Отсюда выводятся известные правила для косинусов, на которых я не буду останавливаться. Однако же наиболее легкий случай, когда $A = 0$ и $C = 1$, а следовательно, $\Pi(z) = \int \frac{dz}{z} = lz$ (при $f = 1$) кажется связанным с значительными трудностями, поскольку выражения для s и для $\sqrt{A + Cs^2} = s$ [§ 591] обращаются в бесконечность. Чтобы предотвратить это неудобство, будем сначала рассматривать число A как бесконечно малое. Тогда будем иметь:

$$P = \sqrt{p^2 + A} = p + \frac{A}{2p}; \quad Q = q + \frac{A}{2q}; \quad R = r + \frac{A}{2r}.$$

Таким образом, для того чтобы $ls = lp + lq - lr$, оказывается [необходимым, чтобы]

$$As = -r\left(p + \frac{A}{2p}\right)\left(q + \frac{A}{2q}\right) - pqr$$
$$+ q\left(p + \frac{A}{2p}\right)\left(r + \frac{A}{2r}\right) + p\left(q + \frac{A}{2q}\right)\left(r + \frac{A}{2r}\right);$$

разложив каждый из членов, получим:

$$As = -\frac{Aqr}{2p} - \frac{Apr}{2q} + \frac{Aqr}{2p} + \frac{Apq}{2r} + \frac{Apr}{2q} + \frac{Apq}{2r}$$

или $s = \frac{pq}{r}$, как этого требует природа логарифмов. Наконец, заметим, что из найденных выражений без труда выводится умножение трансцендентных функций рассматриваемого вида; так, например, можно будет найти алгебраическое соотношение между x и y, необходимое для того, чтобы $\Pi(y) = n\Pi(x)$.

ЗАДАЧА 76

596. *Положим* $\Pi(z) = \int \frac{dz\,(L + Mz^2)}{\sqrt{A + Cz^2}}$ *и возьмем этот интеграл так, чтобы он исчезал при* $z = 0$.

Разыскать [формулу] сравнения трансцендентных функций такого рода.

РЕШЕНИЕ

Установим между двумя переменными x и y такое соотношение:

$$\alpha + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0,$$

откуда

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{-\alpha\gamma + (\delta^2 - \gamma^2)x^2}}{\gamma}.$$

Положим $-\alpha\gamma = Am$ и $\delta^2 - \gamma^2 = Cm$, так что

$$\gamma y + \delta x = \sqrt{m(A + Cx^2)}$$

и

$$\gamma x + \delta y = \sqrt{m(A + Cy^2)}.$$

Дифференцируя же данное уравнение, получим:

$$dx(\gamma x + \delta y) + dy(\gamma y + \delta x) = 0$$

или

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2}} + \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2}} = 0.$$

Теперь положим

$$\frac{dx\,(L + Mx^2)}{\sqrt{A + Cx^2}} + \frac{dy\,(L + My^2)}{\sqrt{A + Cy^2}} = dV\sqrt{m},$$

так что, интегрируя, имеем:

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \mathrm{Const} + V\sqrt{m}.$$

А так как

$$\frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}}=\frac{-dx}{\sqrt{A+Cx^2}},$$

то будем иметь:

$$dV\sqrt{m}=-\frac{M\,dx\,(x^2-y^2)}{\sqrt{A+Cx^2}}.$$

Принимая во внимание, что

$$y=\frac{\sqrt{m(A+Cx^2)}-\delta x}{\gamma},$$

будем иметь:

$$x^2-y^2=\frac{1}{\gamma^2}\left(\gamma^2x^2-mA-mCx^2-\delta^2x^2+2\delta x\sqrt{m(A+Cx^2)}\right).$$

Но здесь $\gamma^2-\delta^2=-mC$; следовательно,

$$dV\sqrt{m}=\frac{M\,dx\left(2\delta x\sqrt{m(A+Cx^2)}-mA-2mCx^2\right)}{\gamma^2\sqrt{A+Cx^2}}.$$

Интеграл здесь удается представить в удобном виде, а именно мы получаем:

$$V\sqrt{m}=\frac{\delta Mx^2\sqrt{m}}{\gamma^2}-\frac{Mmx}{\gamma^2}\sqrt{A+Cx^2}.$$

Эта формула, если учесть, что

$$\sqrt{m}(A+Cx^2)=\gamma y+\delta x,$$

переходит в [соотношение]

$$V\sqrt{m}=\frac{\delta Mx^2-\gamma Mxy-\delta Mx^2}{\gamma^2}\sqrt{m}=-\frac{Mxy}{\gamma}\sqrt{m}.$$

Поэтому мы будем иметь:

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\mathrm{Const}-\frac{Mxy}{\gamma}\sqrt{m}$$

при условии, что

$$\gamma y+\delta x=\sqrt{m(A+Cx^2)}\quad\text{и}\quad\gamma x+\delta y=\sqrt{m(A+Cy^2)}\;^{1)}$$

и что, кроме того,

$$-\alpha\gamma=Am\quad\text{и}\quad\delta^2-\gamma^2=Cm.$$

Чтобы определить постоянную, положим, что при $x=0$ получается $y=b$, так что

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\Pi(b)-\frac{Mxy}{\gamma}\sqrt{m}.$$

Но тогда имеем:

$$\gamma b=\sqrt{mA}\quad\text{и}\quad\delta b=\sqrt{mA+mCb^2},$$

а следовательно,

$$\gamma=\frac{\sqrt{mA}}{b}\qquad\text{и }\delta=\frac{\sqrt{mA+mCb^2}}{b}.$$

---

[1]) Разумеется, эти условия не являются независимыми: одно из них вытекает из другого.

Отсюда мы заключаем, что если

$$y\sqrt{A}+x\sqrt{A+Cb^2}=b\sqrt{A+Cx^2}$$

или, что то же, если

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{A+Cb^2}=b\sqrt{A+Cy^2},$$

то

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\Pi(b)-\frac{Mbxy}{\sqrt{A}},$$

где Π означает такую функцию стоящего под этим знаком количества, что

$$\Pi(z)=\int\frac{dz\,(L+Mz^2)}{\sqrt{A+Cz^2}},$$

причем этот интеграл взят так, что он исчезает при $z=0$. Установив природу этих функций и устранив различие между постоянными и переменными величинами, будем иметь:

$$\Pi(r)=\Pi(p)+\Pi(q)+\frac{Mpqr}{\sqrt{A}},$$

если

$$q\sqrt{A}+p\sqrt{A+Cr^2}=r\sqrt{A+Cp^2}$$

и

$$p\sqrt{A}+q\sqrt{A+Cr^2}=r\sqrt{A+Cq^2},$$

откуда

$$r=\frac{p\sqrt{A+Cq^2}+q\sqrt{A+Cp^2}}{\sqrt{A}}$$

и

$$\sqrt{A+Cr^2}=\frac{Cpq+\sqrt{(A+Cp^2)(A+Cq^2)}}{\sqrt{A}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

597. Взяв z с отрицательным знаком, имеем:

$$\Pi(-z)=-\Pi(z).$$

Поэтому, беря количества p и q с отрицательным знаком, найдем, что

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=\frac{Mpqr}{\sqrt{A}}$$

при условии, что

$$p\sqrt{A}+q\sqrt{A+Cr^2}+r\sqrt{A+Cq^2}=0,$$

или что

$$q\sqrt{A}+p\sqrt{A+Cr^2}+r\sqrt{A+Cp^2}=0,$$

или что

$$r\sqrt{A}+p\sqrt{A+Cq^2}+q\sqrt{A+Cp^2}=0,$$

или что

$$Cpq-\sqrt{A(A+Cr^2)}+\sqrt{(A+Cp^2)(A+Cq^2)}=0,$$

откуда образуется следующее соотношение:

$$Cpqr+p\sqrt{(A+Cq^2)(A+Cr^2)}+q\sqrt{(A+Cp^2)(A+Cr^2)}$$
$$+r\sqrt{(A+Cp^2)(A+Cq^2)}=0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

598. Следовательно, этим методом можно найти три такие функции вида $\Pi(z)$, сумма которых выражается алгебраически. То, что мы показали о сумме, имеет силу также для суммы двух минус третья.

СЛЕДСТВИЕ 3

599. Если мы положим $L=A$ и $M=C$, то предложенная функция $\Pi(z)=\int dz\sqrt{A+Cz^2}$ будет выражать площадь кривой, у которой абсциссе z соответствует аппликата $\sqrt{A+Cz^2}$. Сумма же трех таких площадей получит такое алгебраическое выражение:

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=\frac{Cpqr}{\sqrt{A}},$$

если установить указанное выше соотношение между p, q и r.

ПОЯСНЕНИЕ

600. Это свойство[1]) порождено тем, что дифференциал dV оказался допускающим интегрирование[2]). В самом деле, мы имеем:

$$dV\sqrt{m}=\frac{M\,dx\,(x^2-y^2)}{\sqrt{A+Cx^2}},$$

а так как

$$\sqrt{m(A+Cx^2)}=\gamma y+\delta x,$$

то будем иметь [уравнение]

$$dV=\frac{M\,dx\,(x^2-y^2)}{\gamma y+\delta x}.$$

Его интеграл можно с удобством определить из взятого уравнения

$$\alpha+\gamma(x^2+y^2)+2\delta xy=0.$$

А именно, положим

$$x^2+y^2=t^2 \quad \text{и} \quad xy=u;$$

тогда

$$\alpha+\gamma t^2+2\delta u=0$$

или, взяв дифференциалы,

$$x\,dx+y\,dy=t\,dt; \quad x\,dy+y\,dx=du \quad \text{и} \quad \gamma t\,dt+\delta\,du=0.$$

Из первых двух уравнений получаем:

$$(x^2-y^2)\,dx=xt\,dt-y\,du,$$

[1]) То есть свойство, выведенное в § 596.

[2]) То есть интеграл оказался рациональной функцией от x, y.

и так как $t\,dt = \frac{\delta\,du}{\gamma}$, то будем иметь:

$$(x^2 - y^2)\,dx = -\frac{du}{\gamma}(\delta x + \gamma y),$$

так что

$$\frac{dx\,(x^2 - y^2)}{\gamma y + \delta x} = -\frac{du}{\gamma},$$

и значит,

$$dV = -\frac{M\,du}{\gamma},$$

откуда, очевидно, следует, что

$$V = -\frac{Mu}{\gamma} = -\frac{Mxy}{\gamma}.$$

В решении мы получили то же выражение, но с бо́льшим трудом. Примененным здесь способом мы сможем с успехом воспользоваться в следующей задаче, где нам предстоит рассмотреть более сложные выражения.

ЗАДАЧА 77

601. *Положим, что*

$$\Pi(z) = \int \frac{dz\,(L + Mz^2 + Nz^4 + Oz^6 + \text{ и т. д.})}{\sqrt{A + Cz^2}},$$

причем интеграл берется так, что он исчезает при $z = 0$. *Разыскать [формулу] сравнения между трансцендентными функциями этого рода.*

РЕШЕНИЕ

Пусть, как и прежде, между переменными x и y установлено соотношение

$$\alpha + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0$$

и пусть

$$-\alpha\gamma = Am \quad \text{и} \quad \delta^2 - \gamma^2 = Cm;$$

тогда

$$\gamma y + \delta x = \sqrt{m(A + Cx^2)} \quad \text{и} \quad \gamma x + \delta y = \sqrt{m(A + Cy^2)};$$

если же взять дифференциалы, то будем иметь:

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2}} + \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2}} = 0.$$

Теперь положим

$$\frac{dx\,(L + Mx^2 + Nx^4 + Ox^6)}{\sqrt{A + Cx^2}} + \frac{dy\,(L + My^2 + Ny^4 + Oy^6)}{\sqrt{A + Cy^2}} = dV\sqrt{m},$$

так что имеем:

$$\Pi(x) + \Pi(y) = \text{Const} + V\sqrt{m}.$$

Ввиду того, что $\frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}}$, это уравнение переходит в

$$\frac{dx\,(M\,(x^2-y^2)+N\,(x^4-y^4)+O\,(x^6-y^6))}{\sqrt{A+Cx^2}} = dV\sqrt{m},$$

а так как $\sqrt{m\,(A+Cx^2)} = \gamma y + \delta x$, то

$$\frac{dx\,(x^2-y^2)\,(M+N\,(x^2+y^2)+O\,(x^4+x^2y^2+y^4))}{\gamma y+\delta x} = dV.$$

Теперь пусть $x^2+y^2=t^2$ и $xy=u$, так что

$$\alpha+\gamma t^2+2\delta u=0 \quad \text{и} \quad \gamma t\,dt+\delta\,du=0$$

или

$$t\,dt = -\frac{\delta\,du}{\gamma}.$$

Из уравнений

$$x\,dx+y\,dy=t\,dt \quad \text{и} \quad x\,dy+y\,dx=du$$

получаем

$$(x^2-y^2)\,dx = xt\,dt - y\,du = -\frac{du}{\gamma}(\gamma y+\delta x),$$

а поэтому

$$\frac{dx\,(x^2-y^2)}{\gamma y+\delta x} = -\frac{du}{\gamma},$$

откуда будем иметь:

$$dV = -\frac{du}{\gamma}\left[M+N\,(x^2+y^2)+O\,(x^4+x^2y^2+y^4)\right].$$

Но

$$x^2+y^2=t^2=\frac{-\alpha-2\delta u}{\gamma}$$

и

$$x^4+x^2y^2+y^4=t^4-u^2.$$

Заметив еще, что $\frac{du}{\gamma} = \frac{-t\,dt}{\delta}$, мы приходим к выводу, что

$$dV = -\frac{M\,du}{\gamma}+\frac{Nt^3\,dt}{\delta}+\frac{Ot^5\,dt}{\delta}+\frac{Ou^2\,du}{\gamma}.$$

Интегрируя, получаем:

$$V = -\frac{Mu}{\gamma}+\frac{Nt^4}{4\delta}+\frac{Ot^6}{6\delta}+\frac{Ou^3}{3\gamma}.$$

Если мы теперь положим, что $y=b$ при $x=0$, то будем иметь:

$$\gamma=\frac{\sqrt{mA}}{b}, \qquad \delta=\frac{\sqrt{m\,(A+Cb^2)}}{b}$$

и $\alpha=-b\sqrt{mA}$; но тогда

$$y\sqrt{A}+x\sqrt{A+Cb^2}=b\sqrt{A+Cx^2},$$
$$x\sqrt{A}+y\sqrt{A+Cb^2}=b\sqrt{A+Cy^2}$$

и

$$b\sqrt{A}=x\sqrt{A+Cy^2}+y\sqrt{A+Cx^2}.$$

Так как

$$V=-\frac{Mb\,xy}{\sqrt{mA}}+\frac{Nb\,(x^2+y^2)^2}{4\sqrt{m\,(A+Cb^2)}}+\frac{Ob\,(x^2+y^2)^3}{6\sqrt{m\,(A+Cb^2)}}+\frac{Obx^3y^3}{3\sqrt{mA}},$$

то наше соотношение между трансцендентными функциями, которому удовлетворяют предыдущие [иррациональные алгебраические] уравнения[1]), будет таково:

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\Pi(b)-\frac{Mbxy}{\sqrt{A}}+\frac{Nb\,(x^2+y^2)^2}{4\sqrt{A+Cb^2}}+\frac{Ob\,(x^2+y^2)^3}{6\sqrt{A+Cb^2}}+\frac{Obx^3y^3}{3\sqrt{A}}-\frac{Nb^5}{4\sqrt{A+Cb^2}}-\frac{Ob^7}{6\sqrt{A+Cb^2}}.$$

Здесь надо обратить внимание на то, что в рациональной форме [алгебраическое соотношение имеет вид]

$$-b\sqrt{A}+\frac{(x^2+y^2)\sqrt{A}}{b}+\frac{2xy\sqrt{A+Cb^2}}{b}=0$$

или

$$x^2+y^2=b^2-\frac{2xy\sqrt{A+Cb^2}}{\sqrt{A}}.$$

Отсюда получаем:

$$(x^2+y^2)^2-b^4=-\frac{4b^2xy\sqrt{A+Cb^2}}{\sqrt{A}}+\frac{4x^2y^2\,(A+Cb^2)}{A}$$

и

$$(x^2+y^2)^3-b^6=-\frac{6b^4xy\sqrt{A+Cb^2}}{\sqrt{A}}+\frac{12b^2x^2y^2\,(A+Cb^2)}{A}-\frac{8x^3y^3\,(A+Cb^2)^{3/2}}{A\sqrt{A}},$$

так что наше уравнение есть

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\Pi(b)-\frac{Mb\,xy}{\sqrt{A}}-\frac{Nb^3\,xy}{\sqrt{A}}+\frac{Nbx^2y^2}{A}\sqrt{A+Cb^2}-\frac{Ob^5xy}{\sqrt{A}}+\frac{2Ob^3x^2y^2}{A}\sqrt{A+Cb^2}-\frac{Obx^3y^3}{3A\sqrt{A}}(3A+4Cb^2).$$

СЛЕДСТВИЕ 1

602. Если положить $b=r$, $x=-p$, $y=-q$, то наше уравнение получит вид

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=\frac{pqr}{\sqrt{A}}(M+Nr^2+Or^4)-\frac{p^2q^2\sqrt{A+Cr^2}}{A}(Nr+2Or^3)+\frac{Op^3q^3r}{3A\sqrt{A}}(3A+4Cr^2)$$

причем

$$p^2+q^2=r^2-\frac{2pq}{\sqrt{A}}\sqrt{A+Cr^2},$$

откуда

$$\frac{\sqrt{A+Cr^2}}{\sqrt{A}}=\frac{r^2-p^2-q^2}{2pq}.$$

[1]) determinationes, дословно: «определения».

СЛЕДСТВИЕ 2

603. Если подставить это значение вместо $\frac{\sqrt{A+Cr^2}}{\sqrt{A}}$, то получится следующее уравнение, в которое три количества p, q, r входят равноправно:

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=\frac{Mpqr}{\sqrt{A}}+\frac{Npqr}{2\sqrt{A}}(p^2+q^2+r^2)$$
$$+\frac{Opqr}{3\sqrt{A}}(p^4+q^4+r^4+p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2);$$

этому уравнению удовлетворяют выражения, данные выше, или же следующее рациональное уравнение:

$$\frac{4Cp^2q^2r^2}{A}=p^4+q^4+r^4-2p^2q^2-2p^2r^2-2q^2r^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

604. Если к числителю интегрального выражения мы прибавили бы еще член Pz^8, так что имели бы

$$\Pi(z)=\int\frac{dz\,(L+Mz^2+Nz^4+Oz^6+Pz^8)}{\sqrt{A+Cz^2}},$$

то к найденному только что уравнению присоединился бы еще член

$$\frac{Ppqr}{4\sqrt{A}}\left(p^6+q^6+r^6+p^2q^4+p^2r^4+p^4q^2+p^4r^2+q^4r^2+q^2r^4+\frac{4}{3}p^2q^2r^2\right).$$

ПОЯСНЕНИЕ

605. Эти зависимости можно также вывести из данных выше приведений[1]). Действительно, с их помощью найдем, что

$$\Pi(z)=E\int\frac{dz}{\sqrt{A+Cz^2}}+\textit{алгебраическое количество},$$

и если мы будем последовательно подставлять вместо z количества p, q, r, которые будут зависеть друг от друга так, как мы указывали выше, то будем иметь:

$$\int\frac{dp}{\sqrt{A+Cp^2}}+\int\frac{dq}{\sqrt{A+Cq^2}}+\int\frac{dr}{\sqrt{A+Cr^2}}=0.$$

Отсюда заключаем, что

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=f(p)+f(q)+f(r),$$

где буква f означает некоторую алгебраическую функцию того количества, перед которым поставлена эта буква. Сумма же этих трех функ-

[1]) См. § 118.

ций свелась бы к найденному выше выражению, если было бы принято в соображение заданное соотношение между p, q, r; иными словами, оттуда надо было бы исключить букву C. Однако такое приведение потребовало бы огромного труда.

Теперь впервые уместно оценить метод, который я здесь применил и который, будучи совершенно своеобразным, на первый взгляд, приводит [задачу] к более трудной[1]). Во всяком случае, сравнение трансцендентных функций, о котором я намерен говорить в следующей главе, как мне кажется, вряд ли можно выполнить иным методом. Вот почему в полезности этого метода лучше всего будет убедиться в следующей главе.

---

[1]) Hic vero imprimis methodum, qua hic sum usus, spectari convenit, quae cum sit prorsus singularis, ad magis arduam deducere videtur.

ГЛАВА VI

О СРАВНЕНИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ КОЛИЧЕСТВ, СОДЕРЖАЩИХСЯ В ВЫРАЖЕНИЯХ ВИДА

$$\int \frac{P\,dz}{\sqrt{A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4}}$$

ЗАДАЧА 78

606. *Задано следующее соотношение между x и y:*

$$\alpha+\gamma(x^2+y^2)+2\delta xy+\zeta x^2y^2=0.$$

Получить отсюда трансцендентные функции заданного вида, которые можно было бы сравнивать друг с другом.

РЕШЕНИЕ

Определим из заданного уравнения оба переменные количества

$$y=\frac{-\delta x+\sqrt{-\alpha\gamma+(\delta^2-\gamma^2-\alpha\zeta)\,x^2-\gamma\zeta x^4}}{\gamma+\zeta x^2}$$

и

$$x=\frac{-\delta y+\sqrt{-\alpha\gamma+(\delta^2-\gamma^2-\alpha\zeta)\,y^2-\gamma\zeta y^4}}{\gamma+\zeta y^2}.$$

Эти корни можно привести к заданному виду, если положить

$$-\alpha\gamma=Am,\quad \delta^2-\gamma^2-\alpha\zeta=Cm\quad \text{и}\quad -\gamma\zeta=Em;$$

отсюда

$$\alpha=-\frac{Am}{\gamma},\quad \zeta=-\frac{Em}{\gamma}\quad \text{и}\quad \delta^2=Cm+\gamma^2+\frac{AEm^2}{\gamma^2}.$$

Следовательно, будем иметь:

$$\gamma y+\delta x+\zeta x^2y=\sqrt{m(A+Cx^2+Ex^4)},$$

$$\gamma x+\delta y+\zeta xy^2=\sqrt{m(A+Cy^2+Ey^4)}.$$

Но само предложенное уравнение, если его продифференцировать, дает

$$dx(\gamma x+\delta y+\zeta xy^2)+dy(\gamma y+\delta x+\zeta x^2y)=0;$$

если сюда подставить найденные выше значения, получим:

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2+Ex^4}}+\frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2+Ey^4}}=0.$$

Значит, и наоборот: если предложено это дифференциальное уравнение, то ему удовлетворяет следующее конечное уравнение:

$$-Am+\gamma^2(x^2+y^2)+2xy\sqrt{\gamma^4+Cm\gamma^2+AEm^2}-Emx^2y^2=0$$

или, если положить $\frac{\gamma^2}{m}=k$, то следующее:

$$-A+k(x^2+y^2)+2xy\sqrt{k^2+kC+AE}-Ex^2y^2=0.$$

Так как это уравнение содержит постоянное количество k, не содержащееся в дифференциальном уравнении, то оно будет в то же время и полным интегралом, а отсюда получается:

$$ky+x\sqrt{k^2+kC+AE}-Ex^2y=\sqrt{k(A+Cx^2+Ex^4)}$$

и

$$kx+y\sqrt{k^2+kC+AE}-Exy^2=\sqrt{k(A+Cy^2+Ey^4)}\,.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

607. Можно выбрать постоянную k так, чтобы $y=b$ при $x=0$; тогда

$$kb=\sqrt{Ak}\quad \text{и}\quad b\sqrt{k^2+kC+AE}=\sqrt{k(A+Cb^2+Eb^4)}\,,$$

следовательно,

$$k=\frac{A}{b^2}\quad \text{и}\quad \sqrt{k^2+kC+AE}=\frac{1}{b^2}\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)}\,;$$

поэтому будем иметь:

$$Ay+x\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)}-Eb^2x^2y=b\sqrt{A(A+Cx^2+Ex^4)}$$

и

$$Ax+y\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)}-Eb^2xy^2=b\sqrt{A(A+Cy^2+Ey^4)}\,.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

608. Следовательно, это конечное соотношение между x и y будет полным интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2+Ex^4}}+\frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2+Ey^4}}=0.$$

Выраженный рационально относительно x и y этот интеграл будет иметь вид

$$A(x^2+y^2-b^2)+2xy\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)}-Eb^2x^2y^2=0.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

609. Значит, y выразится через x следующим образом:

$$y=\frac{b\sqrt{A(A+Cx^2+Ex^4)}-x\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)}}{A-Eb^2x^2},$$

и из этого значения получается:

$$\sqrt{\frac{A+Cy^2+Ey^4}{A}}$$

$$=\frac{(A+Eb^2x^2)\sqrt{(A+Cb^2+Eb^4)(A+Cx^2+Ex^4)}-2AEbx(b^2+x^2)-Cbx(A+Eb^2x^2)}{(A-Eb^2x^2)^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4

610. Придавая постоянному количеству b произвольные значения, можно отсюда получить бесчисленные частные интегралы, из которых наиболее замечательны следующие:

1) если взять $b=0$, то $y=-x$;

2) если взять $b=\infty$, то $y=\dfrac{\sqrt{A}}{x\sqrt{F}}$;

3) если $A+Cb^2+Eb^4=0$, откуда

$$b^2=\frac{-C+\sqrt{C^2-4AE}}{2E},$$

тогда

$$y=\frac{b\sqrt{A(A+Cx^2+Ex^4)}}{A-Eb^2x^2}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

611. Теперь очень ясно видно, насколько полезен этот метод, при помощи которого мы, идя обратным путем, приходим от конечного уравнения к дифференциальному уравнению. Действительно, поскольку интегрирование выражения $\int\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2+Ex^4}}$ никак не может быть выполнено ни при помощи логарифмов, ни при помощи круговых дуг, нельзя не удивляться тому, что такое дифференциальное уравнение можно проинтегрировать и притом алгебраически. В самом деле, то, что было изложено в предыдущей главе при помощи этого же метода, можно получить и обычным методом, представляя дифференциальные выражения, каждое в отдельности, либо через логарифмы, либо через круговые дуги, после чего сравнение их сводится к алгебраическому уравнению. Но так как в данном случае такое интегрирование совершенно не имеет места, то не видно никакого другого метода, при помощи которого можно было бы найти полученный здесь интеграл. Поэтому изучим данный вопрос более тщательно.

ЗАДАЧА 79

612. *Пусть* $\Pi(z)$ *означает такую функцию от* z, *что* $\Pi(z)=$ $=\int\frac{dz}{\sqrt{A+Cz^2+Ez^4}}$, *причем интеграл берется так, чтобы он исчезал при* $z=0$. *Найти [формулу] такого рода функций.*

РЕШЕНИЕ

Если между двумя переменными x и y установить вышеуказанное соотношение, то, как мы видели, окажется, что

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2+Ex^4}}+\frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2+Ey^4}}=0.$$

Так как мы положили, что $y=b$ при $x=0$, то, интегрируя, получаем:

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\Pi(b).$$

Поскольку теперь уже нет никакого различия между переменными x, y и постоянным b, положим $x=p$, $y=q$ и $b=-r$, так что $\Pi(b)=$ $=-\Pi(r)$; тогда соотношение

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=0$$

между трансцендентными функциями выразится следующими алгебраическими формулами:

$$(A-Ep^2r^2)\,q+p\sqrt{A(A+Cr^2+Er^4)}+r\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}=0$$

или

$$(A-Ep^2q^2)\,r+q\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}+p\sqrt{A(A+Cq^2+Eq^4)}=0,$$

или

$$(A-Eq^2r^2)\,p+r\sqrt{A(A+Cq^2+Eq^4)}+q\sqrt{A(A+Cr^2+Er^4)}=0.$$

Эти формулы возникают из уравнения

$$A(p^2+q^2-r^2)-Ep^2q^2r^2+2pq\sqrt{A(A+Cr^2+Er^4)}=0.$$

Если привести его к рациональному виду, то получим:

$$A^2(p^4+q^4+r^4-2p^2q^2-2p^2r^2-2q^2r^2)$$
$$-2AEp^2q^2r^2(p^2+q^2+r^2)-4ACp^2q^2r^2+E^2p^4q^4r^4=0.$$

Однако последнее уравнение вследствие множественности его корней удовлетворяет всем вариациям знаков в данном выше трансцендентном уравнении.

СЛЕДСТВИЕ 1

613. Взяв r отрицательным, получим:

$$\Pi(r)=\Pi(p)+\Pi(q),$$

и тогда будем иметь:

$$r=\frac{p\sqrt{A(A+Cq^2+Eq^4)}+q\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}}{A-Ep^2q^2},$$

откуда заключаем, что

$$\sqrt{\frac{A+Cr^2+Er^4}{A}}$$
$$=\frac{(A+Ep^2q^2)\sqrt{(A+Cp^2+Ep^4)(A+Cq^2+Eq^4)}+2AEpq(p^2+q^2)+Cpq(A+Ep^2q^2)}{(A-Ep^2q^2)^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

614. Следовательно, если мы положим $q=p$, так что

$$\Pi(r)=2\Pi(p),$$

то будем иметь:

$$r=\frac{2p\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}}{A-Ep^4}$$

и

$$\sqrt{\frac{A+Cr^2+Er^4}{A}}=\frac{A^2+2ACp^2+6AEp^4+2CEp^6+E^2p^8}{(A-Ep^4)^2}.$$

Так можно определить[1]) функцию, равную удвоенной функции того же вида.

СЛЕДСТВИЕ 3

615. Если положить $q=\dfrac{2p\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}}{A-Ep^4}$ и

$$\sqrt{A(A+Cq^2+Eq^4)}=\frac{A(A^2+2ACp^2+6AEp^4+2CEp^6+E^2p^8)}{(A-Ep^4)^2},$$

так что имеем $\Pi(q)=2\Pi(p)$, то из следствия 1 получаем $\Pi(r)=3\Pi(p)$, и теперь будем иметь:

$$r=\frac{p(3A^2+4ACp^2+6AEp^4-E^2p^8)}{A^2-6AEp^4-4CEp^6-3E^2p^8}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

616. Слишком утомительно продолжать дальше это умножение функций и еще менее возможно уловить закон их следствия. Для краткости положим

$$\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}=AP \quad \text{и} \quad A-Ep^4=A\mathfrak{P},$$

так что

$$Cp^2=AP^2-A-Ep^4 \quad \text{и} \quad Ep^4=A(1-\mathfrak{P}),$$

тогда [формулы] умножения до учетверения включительно будут таковы: если положим

$$\Pi(r)=2\Pi(p);\quad \Pi(s)=3\Pi(p) \quad \text{и} \quad \Pi(t)=4\Pi(p),$$

то найдем[2]):

$$r=\frac{2Pp}{\mathfrak{P}},\quad s=\frac{p(4P^2-\mathfrak{P}^2)}{\mathfrak{P}^2-4P^2(1-\mathfrak{P})},\quad t=\frac{4pP\mathfrak{P}[2P^2[2P^2(2-\mathfrak{P})-\mathfrak{P}^2]}{\mathfrak{P}^4-16P^4(1-\mathfrak{P})}.$$

---

[1]) assignari.

[2]) Формула

$$r=\frac{2Pp}{\mathfrak{P}} \tag{1}$$

получается непосредственно из первой формулы § 614 с помощью соотношений

$$\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}=AP, \tag{2}$$

$$A-Ep^4=A\mathfrak{P}. \tag{3}$$

Если же таким образом мы положим

$$\sqrt{A(A+Cr^2+Er^4)}=AR$$

и

$$A-Er^4=AR,$$

то будем иметь:

$$R=\frac{2P^2(2-\mathfrak{P})-\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{P}^2} \quad \text{и} \quad \mathfrak{R}=\frac{\mathfrak{P}^4-16P^4(1-\mathfrak{P})}{\mathfrak{P}^4},$$

откуда для учетверения получаем:

$$t=\frac{2Rr}{\mathfrak{R}}, \qquad T=\frac{2R^2(2-\mathfrak{R})-\mathfrak{R}^2}{R^2},$$

$$\mathfrak{T}=\frac{\mathfrak{R}^4-16R^4(1-\mathfrak{R})}{\mathfrak{R}^4}.$$

Поэтому, если для умножения на восемь положим $\Pi(z)=8\Pi(p)$, то будем иметь:

$$z=\frac{2Tt}{\mathfrak{T}}=\frac{4rR\mathfrak{R}\,[2R^2(2-\mathfrak{R})-R^2]}{\mathfrak{R}^4-16R^4(1-\mathfrak{R})}.$$

Отсюда понятно, как надо действовать при последовательном удвоении, но подметить закон возрастания не удается. Однако же открытие такого закона было бы в высшей степени желательным для дальнейших успехов Анализа, — именно такого закона, чтобы из него можно было определить в общем виде соотношение между z и p для равенства

Формула

$$s=\frac{p(4P^2-\mathfrak{P}^2)}{\mathfrak{P}^2-4P^2(1-\mathfrak{P})} \tag{4}$$

выводится из первой формулы § 613, в которой надо заменить q и r соответственно на r и s. После этой замены имеем:

$$s=\frac{p\sqrt{A(A+Cr^2+Er^4)}+r\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}}{A-Ep^2r^2}. \tag{5}$$

Второй член числителя преобразуется здесь по формулам (1) и (2), знаменатель — по формуле (3). Что касается радикала, входящего в первый член числителя, то выражение, данное в § 614, неудобно для выполнения подстановок (2) и (3), так как в нем произведены упрощения, которые теперь служат помехой. Поэтому надо использовать непосредственно вторую формулу § 613, положив в ней $q=p$. Получим:

$$\sqrt{\frac{A+Cr^2+Er^4}{A}}=\frac{(A+Ep^4)(A+Cp^2+Ep^4)+4AEp^4+Cp^2(A+Ep^4)}{(A-Ep^4)^2}. \tag{6}$$

Сюда, согласно (2) и (3), подставляем

$$A+Cp^2+Ep^4=Ap^2, \tag{7}$$

$$Ep^4=A-A\mathfrak{P}, \tag{8}$$

а множитель Cp^2 в последнем члене числителя заменяем выражением $AP^2-A(2-\mathfrak{P})$, вытекающим из (7) и (8).

Дальнейшие вычисления не требуют пояснений.

Формула для t получается из первой формулы § 614, которая теперь имеет вид

$$t=\frac{2r\sqrt{A(A+Cr^2+Er^4)}}{A-Er^4}.$$

Числитель преобразуется по формуле (6), а знаменатель — по формуле (1).

$\Pi(z)=n\Pi(p)$ таким же образом, как это удалось сделать в предыдущей главе; это позволило бы узнать замечательные свойства интегралов вида $\int \frac{dx}{\sqrt{A+Cz^2+Ez^4}}$, благодаря чему наука об Анализе значительно подвинулась бы вперед.

ПОЯСНЕНИЕ 2

617. Наиболее удобным способом изучения закона следования представляется рассмотрение трех членов, следующих друг за другом:

$$\Pi(x)=(n-1)\Pi(p); \quad \Pi(y)=n\Pi(p); \quad \Pi(z)=(n+1)\Pi(p).$$

Так как здесь

$$\Pi(x)=\Pi(y)-\Pi(p) \quad \text{и} \quad \Pi(z)=\Pi(y)+\Pi(p),$$

то будем иметь:

$$x=\frac{y\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}-p\sqrt{A(A+Cy^2+Ey^4)}}{A-Ep^2y^2},$$

$$z=\frac{y\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}+p\sqrt{A(A+Cy^2+Ey^4)}}{A-Ep^2y^2},$$

откуда и заключаем, что

$$(A-Ep^2y^2)(x+z)=2y\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}.$$

Положим, как прежде,

$$\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}=AP \quad \text{и} \quad A-Ep^4=A\mathfrak{P},$$

а так как каждое из количеств x, y, z заключает в себе множитель p в первой степени, то пусть

$$x=pX, \quad y=pY \quad \text{и} \quad z=pZ;$$

тогда будем иметь:

$$[1-(1-\mathfrak{P})Y^2](X+Z)=2PY$$

или

$$Z=\frac{2PY}{1-(1-\mathfrak{P})Y^2}-X.$$

При помощи этой формулы по двум последовательным членам X и Y без труда находится следующий за ними член.

Для лучшей обозримости положим

$$2P=Q \quad \text{и} \quad 1-\mathfrak{P}=\mathfrak{Q},$$

так что $Z=\frac{QY}{1-\mathfrak{Q}Y^2}-X$. Теперь искомая последовательность получит такой вид:

1) 1,

2) $\frac{Q}{\mathfrak{P}}$,

3) $\frac{Q^2-\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{P}^2-Q^2\mathfrak{Q}}$,

4) $\frac{Q^3\mathfrak{P}(1+\mathfrak{Q})-2Q\mathfrak{P}^3}{\mathfrak{P}^4-Q^4\mathfrak{Q}}$,

5) $\frac{\mathfrak{P}^6-3Q^2\mathfrak{P}^4+Q^4\mathfrak{P}^2(1+2\mathfrak{Q})-Q^6\mathfrak{Q}^2}{\mathfrak{P}^6-3Q^2\mathfrak{P}^4\mathfrak{Q}+Q^4\mathfrak{P}^2\mathfrak{Q}(2+\mathfrak{Q})-Q^6\mathfrak{Q}}$ и т. д.

Итак, вопрос сводится к тому, чтобы разыскать последовательность по данному соотношению $Z=\frac{QY}{1-\mathfrak{Q}Y^2}-X$ между тремя последовательными членами X, Y, Z, причем первый член $=1$, а второй $=\frac{Q}{1-\mathfrak{Q}}$.

ЗАДАЧА 89

618. *Пусть* $\Pi(z)$ *означает такую функцию от* z, *что* $\Pi(z)=\int\frac{dz\,(L+Mz^2+Nz^4)}{\sqrt{A+Cz^2+Ez^4}}$, *причем интеграл взят так, что он исчезает при* $z=0$; *найти* [*формулу*] *сравнения между трансцендентными функциями такого рода.*

РЕШЕНИЕ

Установим между двумя переменными x и y такое соотношение:

$$Ay+\mathfrak{B}x-Eb^2x^2y=b\sqrt{A(A+Cx^2+Ex^4)},$$

т. е.

$$Ax+\mathfrak{B}y-Eb^2xy^2=b\sqrt{A(A+Cy^2+Ey^4)},$$

или же после освобождения от иррациональности

$$A(x^2+y^2-b^2)+2\mathfrak{B}xy-Eb^2x^2y^2=0.$$

Здесь ради краткости положено $\mathfrak{B}=\sqrt{A(A+Cb^2+Eb^4)}$. Тогда, как мы видели выше,

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2+Ex^4}}+\frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2+Ey^4}}=0.$$

Положим теперь

$$\frac{dx\,(L+Mx^2+Nx^4)}{\sqrt{A+Cx^2+Ex^4}}+\frac{dy\,(L+My^2+Ny^4)}{\sqrt{A+Cy^2+Ey^4}}=b\,dV\sqrt{A},$$

так что (при нашем способе обозначения)

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\mathrm{Const}+bV\sqrt{A}.$$

Здесь надо определить постоянное так, чтобы при $x=0$ получалось $y=b$. Итак, вопрос сводится к нахождению функции V; подставив для этой цели вместо dy его значение из предыдущего уравнения, будем иметь:

$$b\,dV\sqrt{A}=\frac{dx\,(M(x^2-y^2)+N(x^4-y^4))}{\sqrt{A+Cx^2+Ex^4}},$$

но так как

$$b\sqrt{A(A+Cx^2+Ex^4)}=Ay+\mathfrak{B}x-Eb^2x^2y,$$

то

$$dV=\frac{dx\,(x^2-y^2)(M+N(x^2+y^2))}{Ay+\mathfrak{B}x-Eb^2x^2y}.$$

Теперь возьмем рациональное уравнение

$$A(x^2+y^2-b^2)+2\mathfrak{B}xy-Eb^2x^2y^2=0$$

и положим

$$x^2+y^2=t^2, \quad xy=u,$$

так что

$$A(t^2-b^2)+2\mathfrak{B}u-Eb^2u^2=0,$$

и поэтому

$$At\,dt=-\mathfrak{B}\,du+Eb^2u\,du.$$

Далее, поскольку

$$x\,dx+y\,dy=t\,dt \quad \text{и} \quad x\,dy+y\,dx=du,$$

будем иметь:

$$(x^2-y^2)\,dx=xt\,dt-y\,du$$

или

$$A(x^2-y^2)\,dx=-du\,(Ay+\mathfrak{B}x-Eb^2x^2y),$$

так что

$$\frac{dx\,(x^2-y^2)}{Ay+\mathfrak{B}x-Eb^2x^2y}=-\frac{du}{A},$$

откуда получаем:

$$dV=-\frac{du}{A}(M+Nt^2),$$

а так как

$$t^2=b^2-\frac{2\mathfrak{B}u}{A}+\frac{Eb^2u^2}{A},$$

то будем иметь:

$$dV=-\frac{du}{A^2}(AM+ANb^2-2\mathfrak{B}Nu+ENb^2u^2).$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$V=-\frac{Mu}{A}-\frac{Nb^2u}{A}+\frac{\mathfrak{B}Nu^2}{A^2}-\frac{ENb^2u^3}{3A^2}.$$

Так как $u=xy$, то, подставив это значение, будем иметь.

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\Pi(b)-\frac{Mbxy}{\sqrt{A}}-\frac{Nb^3xy}{\sqrt{A}}+\frac{\mathfrak{B}Nbx^2y^2}{A\sqrt{A}}-\frac{ENb^3x^3y^3}{3A\sqrt{A}}.$$

Но так как

$$\mathfrak{B}xy=\frac{1}{2}Ab^2-\frac{1}{2}A(x^2+y^2)+\frac{1}{2}Eb^2x^2y^2,$$

то

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\Pi(b)-\frac{Mbxy}{\sqrt{A}}-\frac{Nbxy}{2A\sqrt{A}}\left(A(b^2+x^2+y^2)-\frac{1}{3}Eb^2x^2y^2\right).$$

Этому уравнению удовлетворяют данные выше алгебраические формулы, которые выражают соотношение между x, y и b. Поэтому, если взять уравнение

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=\frac{Mpqr}{\sqrt{A}}+\frac{Npqr}{2A\sqrt{A}}\left(A(p^2+q^2+r^2)-\frac{1}{3}Ep^2q^2r^2\right),$$

то оно удовлетворяется, когда между p, q и r устанавливается соотношение

$$(A-Ep^2q^2)r+p\sqrt{A(A+Cq^2+Eq^4)}+q\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}=0$$

или

$$(A-Ep^2r^2)q+p\sqrt{A(A+Cr^2+Er^4)}+r\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}=0,$$

или

$$(A-Eq^2r^2)p+q\sqrt{A(A+Cr^2+Er^4)}+r\sqrt{A(A+Cq^2+Eq^4)}=0.$$

Освобождаясь от одной иррациональности, получаем:

$$A(p^2+q^2-r^2)+2pq\sqrt{A(A+Cr+Er^4)}-Ep^2q^2r^2=0$$

или

$$A(p^2+r^2-q^2)+2pr\sqrt{A(A+Cq^2+Eq^4)}-Ep^2q^2r^2=0,$$

или

$$A(q^2+r^2-p^2)+2qr\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)}-Ep^2q^2r^2=0$$

и, полностью освободившись от иррациональности,

$$E^2p^4q^4r^4-2AEp^2q^2r^2(p^2+q^2+r^2)-4ACp^2q^2r^2 \\ +A^2(p^4+q^4+r^4-2p^2q^2-2p^2r^2-2q^2r^2)=0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

619. Пусть $q=r=s$; тогда мы будем иметь уравнение

$$\Pi(p)+2\Pi(s)=\frac{Mps^2}{\sqrt{A}}+\frac{Nps^2}{2A\sqrt{A}}\left(A(p^2+2s^2)-\frac{1}{3}Ep^2s^4\right),$$

которому удовлетворяет соотношение

$$(A-Es^4)p+2s\sqrt{A(A+Cs^2+Es^4)}=0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

620. Возьмем s отрицательным и вместо p подставим это значение[1]; тогда получим:

$$2\Pi(s)+\Pi(q)+\Pi(r)+\frac{Mps^2}{\sqrt{A}}+\frac{Nps^2}{2A\sqrt{A}}\left(A(p^2+2s^2)-\frac{1}{3}Ep^2s^4\right) \\ =\frac{Mpqr}{\sqrt{A}}+\frac{Npqr}{2A\sqrt{A}}\left(A(p^2+q^2+r^2)-\frac{1}{3}Ep^2q^2r^2\right)$$

при условии, что

$$p=\frac{2s\sqrt{A(A+Cs^2+Es^4)}}{A-Es^4},$$

[1] В соотношение

$$\Pi(p)+\Pi(q)+\Pi(r)=\frac{Mpqr}{\sqrt{A}}+\frac{Npqr}{2A\sqrt{A}}\left[A(p^2+q^2+r^2)-\frac{1}{3}Ep^2q^2r^2\right]$$

(§ 618) подставляем выражение $\Pi(p)$ из первой формулы § 619, а в последующие формулы § 618 — выражение p из второй формулы § 619 (в обеих формулах § 619 s заменяется на $-s$).

откуда

$$\sqrt{A(A+Cp^2+Ep^4)} = \frac{A(A+Cs^2+Es^4)^2 + A(4AE-C^2)s^4}{(A-Es^4)^2}\ [1].$$

Эти значения надо подставить в полученные выше [§ 618] формулы.

СЛЕДСТВИЕ 3

621. Это дает возможность сделать так, чтобы алгебраические члены исчезли, и тогда будут сравниваться между собой только трансцендентные функции. Пусть, например, $N=0$. Тогда достаточно положить $s^2=qr$, чтобы получилось

$$2\Pi(s)+\Pi(q)+\Pi(r)=0.$$

Но при $s^2=qr$ имеем:

$$p=\frac{2\sqrt{Aqr(A+Cqr+Eq^2r^2)}}{A-Eq^2r^2}$$

С другой же стороны,

$$p=\frac{-q\sqrt{A(A+Cr^2+Er^4)}-r\sqrt{A(A+Cq^2+Eq^4)}}{A-Eq^2r^2}.$$

Если приравнять эти значения, то возникает такое уравнение:

$$(A^2+E^2q^4r^4)(q^2-6qr+r^2)-8Cq^2r^2(A+Eq^2r^2) \\ -2AEq^2r^2(q^2+10qr+r^2)=0.$$

ПОЯСНЕНИЕ

622. Если $\Pi(z)$ выражает дугу некоторой кривой линии, соответствующую абсциссе или хорде z, то, исходя отсюда, можно сравнивать между собой несколько дуг этой кривой так, чтобы либо разность между каждыми двумя дугами оказывалась алгебраической, либо дуги имели данное отношение друг к другу. Таким способом можно обнаружить такие замечательные свойства кривых, которые вряд ли можно усмотреть из каких-либо иных соображений. Что касается сравнения круговых дуг, известного из элементарной математики, то, как мы видели, его легко произвести на основании предыдущей главы; оттуда же легко достигается и сравнение параболических дуг. На основании же настоящей главы можно таким же образом провести сравнение эллиптических и гиперболических дуг. Действительно, дуга конического сечения в общем случае представляется выражением

$$\int dx\sqrt{\frac{a+bx^2}{c+ex^2}};$$

оно преобразуется к виду

$$\int\frac{dx(a+bx^2)}{\sqrt{ac+(ae+bc)x^2+bex^4}},$$

[1]) Для вывода этой формулы можно использовать вторую формулу § 613, заменив в последней буквы r, p, q соответственно буквами p, s, s. Выражение $A+Es^4$, которое войдет множителем в первый и последний члены числителя, надо представить в виде $(A+Cs^2+Es^4)-Cs^2$.

а с этим выражением можно поступать согласно данным объяснениям, полагая $A = ac$, $C = ae + bc$, $E = be$, $L = a$, $M = b$ и $N = 0$.

Это исследование можно распространить и на выражения со знаменателем

$$\sqrt{A + 2Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4};$$

оно сходно с предшествующим, поэтому я и собираюсь изложить его здесь. Из этого изложения станет также ясно, что здесь крайний предел, до которого мы можем дойти. Более же сложные интегральные выражения, в которых под знаком радикала встречаются более высокие степени количества z или же в которых самый знак радикала имеет более высокую степень, по-видимому, нельзя сравнивать между собой таким способом, исключая лишь очень немногие случаи, которые могут быть приведены к указанному виду при помощи какой-либо подстановки.

ЗАДАЧА 81

623. *Пусть* $\Pi(z)$ *означает такого рода функцию от* z, *что*

$$\Pi(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^3 + Ez^4}}$$

Сравнить между собой такие функции.

РЕШЕНИЕ

Установим между двумя переменными x и y соотношение, выражаемое уравнением

$$\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x + y) + \zeta x^2 y^2 = 0;$$

так как отсюда получается

$$y^2 = \frac{-2y(\beta + \delta x + \varepsilon x^2) - \alpha - 2\beta x - \gamma x^2}{\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2},$$

то по извлечении корня будем иметь:

$$y = \frac{-\beta - \delta x - \varepsilon x^2 + \sqrt{(\beta + \delta x + \varepsilon x^2)^2 - (\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)(\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2)}}{\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2}.$$

Приведем радикал к предложенному виду, положив

$$\beta^2 - \alpha\gamma = Am, \quad \beta\delta - \alpha\varepsilon - \beta\gamma = Bm,$$
$$\delta^2 - 2\beta\varepsilon - \alpha\zeta - \gamma^2 = Cm, \quad \delta\varepsilon - \beta\zeta - \gamma\varepsilon = Dm,$$
$$\varepsilon^2 - \gamma\zeta = Em,$$

откуда можно определить пять из шести коэффициентов α, β, γ, δ, ε, ζ, а к шестому присоединяется еще буква m[1]), так что взятое уравнение включает еще произвольную постоянную. Стало быть, если ради краткости положим

$$\sqrt{A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4} = X$$

---

[1]) atque ad sextum insuper accedit littera m ... Эйлер, по-видимому, хочет сказать, что пять неизвестных из общего числа семи (α, β, γ, δ, ε, ζ, m) можно выразить через два из них. В дальнейшем (§§ 625 и 626) неизвестные β, γ, δ, ε, m выражаются через α, ζ и притом так, что значения пяти отношений ($\beta : \alpha$, $\gamma : \alpha$, $\delta : \alpha$, $\varepsilon : \alpha$, $m : \alpha$) определяются значением шестого ($\zeta : \alpha$).

и

$$\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}=Y,$$

то будем иметь:

$$\beta+\gamma y+\delta x+\varepsilon x^2+2\varepsilon xy+\zeta x^2 y=X\sqrt{m}$$

и

$$\beta+\gamma x+\delta y+\varepsilon y^2+2\varepsilon xy+\zeta xy^2=Y\sqrt{m}.$$

Но взятое уравнение, если его продифференцировать, дает

$$dx(\beta+\gamma x+\delta y+2\varepsilon xy+\varepsilon y^2+\zeta xy^2)+dy(\beta+\gamma y+\delta x+\varepsilon x^2+2\varepsilon xy+\zeta x^2 y)=0.$$

Эти выражения [в скобках], поскольку они совпадают с предыдущими, дают

$$Y\,dx\sqrt{m}+X\,dy\sqrt{m}=0$$

или

$$\frac{dx}{X}+\frac{dy}{Y}=0$$

Интегрируя, получаем:

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\mathrm{Const}.$$

Если $y=b$ при $x=0$, то это постоянное количество будет $\Pi(0)+\Pi(b)$, и вообще, если $y=b$ при $x=a$, то это постоянное количество будет $=\Pi(a)+\Pi(b)$. Итак, если буквы α, β, γ, δ, ε, ζ определены вышеуказанными условиями, то взятое алгебраическое уравнение между x и y будет полным интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}}+\frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}}=0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

624. Для определения букв α, β, γ, δ, ε, ζ надо сначала взять два уравнения, написанных [в § 623] справа, именно:

$$(\delta-\gamma)\beta-\alpha\varepsilon=Bm \quad \text{и} \quad (\delta-\gamma)\varepsilon-\zeta\beta=Dm.$$

Из этих уравнений будем искать две буквы β и ε и найдем:

$$\beta=\frac{(\delta-\gamma)B+\alpha D}{(\delta-\gamma)^2-\alpha\zeta}m \quad \text{и} \quad \varepsilon=\frac{(\delta-\gamma)D+\zeta B}{(\delta-\gamma)^2-\alpha\zeta}m.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

625. Положим ради краткости $\delta-\gamma=\lambda$, т. е. $\delta=\gamma+\lambda$; тогда

$$\beta=\frac{D\alpha+B\lambda}{\lambda^2-\alpha\zeta}m \quad \text{и} \quad \varepsilon=\frac{B\zeta+D\lambda}{\lambda^2-\alpha\zeta}m.$$

Теперь из первого и последнего условий получаем:

$$\beta^2\zeta-\alpha\varepsilon^2=(A\zeta-E\alpha)m;$$

подставив сюда предыдущие значения, получим:

$$\frac{B^2\zeta - D^2\alpha}{\lambda^2 - \alpha\zeta} m = A\zeta - E\alpha,$$

откуда

$$m = \frac{(\lambda^2 - \alpha\zeta)(A\zeta - E\alpha)}{B^2\zeta - D^2\alpha}.$$

Но из первого и последнего условия следует [также], что

$$D^2\beta^2 - B^2\varepsilon^2 + \gamma(B^2\zeta - D^2\alpha) = (AD^2 - B^2E)m,$$

откуда получаем:

$$\gamma = \frac{[(A\zeta - E\alpha)(AD^2 - B^2E)\lambda^2 + 2BD(A\zeta - E\alpha)\lambda + AB^2\zeta^2 - D^2E\alpha^2]}{(B^2\zeta - D^2\alpha)^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3

626. Остается третье уравнение

$$2\gamma\lambda + \lambda^2 - 2\beta\varepsilon - \alpha\zeta = Cm.$$

Подставив вместо m его значение [в выражение § 625 для β и ε], имеем:

$$\beta = \frac{(A\zeta - E\alpha)(D\alpha + B\lambda)}{B^2\zeta - D^2\alpha}$$

и

$$\varepsilon = \frac{(A\zeta - E\alpha)(B\zeta + D\lambda)}{B^2\zeta - D^2\alpha}.$$

Если подставить эти значения [первое уравнение настоящего параграфа], то оттуда получится удобное выражение[1])

$$\lambda = \frac{C(A\zeta - E\alpha)(B^2\zeta - D^2\alpha) - 2BD(A\zeta - E\alpha)^2 - (B^2\zeta - D^2\alpha)^2}{2(A\zeta - E\alpha)(AD^2 - B^2E)}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

627. Так как этими значениями нельзя пользоваться в случае, когда $AD^2 - B^2E = 0$, то я изложу здесь другое решение, не страдающее этим недостатком. Положим, как прежде, $\delta = \gamma + \lambda$ и пусть, сверх того,

---

[1]) commode inde colligitur; дословно: «оттуда с удобством получается». Но при таком переводе мы приписали бы Эйлеру утверждение, что выражение для λ получается без особого труда. Мы полагаем, что Эйлер этого не хотел сказать, ибо, идя указанным путем, избежать громоздких выкладок, по-видимому, не удается. Подставив в уравнение

$$2\gamma\lambda + \lambda^2 - 2\beta\varepsilon - \alpha\zeta = Cm$$

выражения для β и ε, а также выражение

$$m = \frac{(\lambda^2 - \alpha\zeta)(A\zeta - E\alpha)}{B^2\zeta - D^2\alpha}$$

и освободившись от знаменателей, мы получаем в левой части многочлен третьей степени (относительно λ). Его удается разложить на множители и представить в виде

$$(\lambda^2 - \alpha\zeta)[2(A\zeta - E\alpha)(AD^2 - B^2E)\lambda + 2BD(A\zeta - E\alpha)^2 + (B^2\zeta - D^2\alpha)^2].$$

Правая же часть будет иметь вид

$$C(\lambda^2 - \alpha\zeta)(A\zeta - E\alpha)(B^2\zeta - D^2\alpha).$$

Наше уравнение распадается на два; одно из них ($\lambda^2 - \alpha\zeta = 0$) Эйлер оставляет без внимания. Другое является линейным и решается с «удобством».

$\lambda^2=\alpha\zeta+\mu$, так что первые формулы[1]) принимают вид

$$\beta=\frac{m}{\mu}(D\alpha+B\lambda) \quad \text{и} \quad \varepsilon=\frac{m}{\mu}(B\zeta+D\lambda).$$

Теперь первая в сочетании с последней[2]) дает

$$A\zeta-E\alpha=\frac{m}{\mu}(B^2\zeta-D^2\alpha).$$

Из этого уравнения определяется отношение между α и ζ; так как этого отношения достаточно[3]), то пусть будет

$$\alpha=\mu A-B^2m \quad \text{и} \quad \zeta=\mu E-D^2m;$$

отсюда будем иметь:

$$\lambda^2=\mu+(\mu A-B^2m)(\mu E-D^2m),$$

откуда[4]) получаем:

$$\gamma=\frac{m^2}{\mu^2}[2BD\lambda+(AD^2+B^2E)\mu]-\frac{2B^2D^2m^3}{\mu^2}-\frac{m}{\mu}.$$

Значения α и ζ, будучи подставлены в [последнюю] формулу следствия 3, дают

$$\lambda=\frac{\mu^2}{2m}+BDm-\frac{1}{2}C\mu.$$

Если приравнять квадрат этого количества найденному выше значению количества $\alpha\zeta+\mu$[5]), то мы придем к уравнению

$$\mu(\mu-Cm)^2+4(BD-AE)m^2\mu+4(AD^2-BCD+B^2E)m^3=4m^2.$$

Чтобы его решить, положим $\mu=Mm$; тогда получим:

$$m=\frac{4}{M(M-C)^2+4M(BD-AE)+4(AD^2-BCD+B^2E)}.$$

---

1) Речь идет, очевидно, о первых двух формулах § 625.

2) Здесь, по-видимому, речь идет о системе уравнений § 623. Из первого и последнего уравнений этой системы надо исключить γ и в полученное уравнение подставить вместо β и ε вышеприведенные их выражения. Получаем:

$$\frac{m^2}{\mu^2}[(D\alpha+B\lambda)^2\zeta-(B\zeta+D\lambda)^2\alpha]=(A\zeta-E\alpha)m.$$

Выражение в скобках преобразуется к виду

$$(\lambda^2-\alpha\zeta)(B^2\zeta-D^2\alpha)=\mu(B^2\zeta-D^2\alpha).$$

3) Поскольку без ущерба для общности одно из значений α, β, γ, δ, ε, ζ можно взять по произволу.

4) Эйлер здесь, как и в других местах настоящей главы, необычно скуп на разъяснения. Надо полагать, что для вывода этого выражения использовано первое (или последнее) уравнение системы § 623. Предыдущие формулы данного параграфа позволяют выразить α и β через m, μ и λ, причем λ входит в первой степени и в квадрате. После замены λ^2 выражение $\mu+(\mu A-B^2m)(\mu E-D^2m)$ (в котором не надо открывать скобки) выносим за скобки $(\mu A-B^2m)$. Быть может, Эйлер имел в виду какой-то другой, менее громоздкий ход вычислений, но по существу необходимо использовать вышеуказанные соотношения.

5) illi valori $\alpha\zeta+\mu$; имеется в виду выражение

$$\lambda^2(=\alpha\zeta+\mu)=\mu+(\mu A-B^2m)(\mu E-D^2m).$$

Здесь M есть произвольная постоянная, требуемая для полного интеграла. Таким образом, все буквы α, β, γ, δ, ε, ζ окажутся выраженными [дробями] с одним и тем же знаменателем. Опустив его[1]), будем иметь:

$$\alpha = 4(AM - B^2), \qquad \beta = 2B(M - C) + 4AD;$$
$$\gamma = 4AE - (M - C)^2, \qquad \zeta = 4(EM - D^2),$$
$$\varepsilon = 2D(M - C) + 4BE, \qquad \delta = M^2 - C^2 + 4(AE + BD).$$

После того как эти количества найдены, наше каноническое уравнение

$$0 = \alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x + y) + \zeta x^2y^2,$$

если для краткости положить

$$M(M - C)^2 + 4M(BD - AE) + 4(AD^2 - BCD + B^2E) = \Delta,$$

будучи разрешено, даст

$$\beta + \delta x + \varepsilon x^2 + y(\gamma + 2\varepsilon x + \zeta x^2) = \pm 2\sqrt{\Delta(A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4)},$$
$$\beta + \delta y + \varepsilon y^2 + x(\gamma + 2\varepsilon y + \zeta y^2) = \pm 2\sqrt{\Delta(A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4)}.$$

Стало быть, это есть полный интеграл дифференциального уравнения

$$0 = \frac{dx}{\pm\sqrt{A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4}} + \frac{dy}{\pm\sqrt{A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4}}.$$

ПОЯСНЕНИЕ

628. Так как здесь все зависит от подходящего определения коэффициентов, то стоит потрудиться изложить его в более изящной форме. Для этого с самого начала положим

$$\delta = \gamma + \lambda \quad \text{и} \quad \lambda^2 - \alpha\zeta = Mm;$$

тогда должны быть выполнены следующие пять условий:

$$\text{I.} \qquad \beta^2 - \alpha\gamma = Am.$$
$$\text{II.} \qquad \varepsilon^2 - \gamma\zeta = Em.$$
$$\text{III.} \qquad \beta\lambda - \alpha\varepsilon = Bm.$$
$$\text{IV.} \qquad \varepsilon\lambda - \beta\zeta = Dm.$$
$$\text{V.} \qquad Mm + 2\gamma\lambda - 2\beta\varepsilon = Cm.$$

Комбинируя третье и четвертое, выводим, [во-первых], $m(B\lambda + D\alpha) = \beta(\lambda^2 - \alpha\zeta) = \beta Mm$, а следовательно $\beta = \frac{B\lambda + D\alpha}{M}$, [и, во-вторых],

$$m(D\lambda + B\zeta) = \varepsilon(\lambda^2 - \alpha\zeta) = \varepsilon Mm,$$

а следовательно $\varepsilon = \frac{D\lambda + B\zeta}{M}$.

Если теперь исключить γ из первого и второго [условия], то получается:

$$m(A\zeta - E\alpha) = \beta^2\zeta - \varepsilon^2\alpha = \frac{B^2\zeta - D^2\alpha}{M}m,$$

[1]) При этом изменятся не только значения α, β, γ, δ, ε, ξ, но также значение m. Так как при умножении α, β, γ, δ, ε, ζ на $\Delta = M(M - C)^2 + 4M(BD - AE) + 4(AD^2 - BCD + B^2E)$ количество m приобретает множитель Δ^2, то новое выражение для m будет $m = 4\Delta$.

а отсюда

$$\zeta (AM - B^2) = \alpha (EM - D^2);$$

поэтому полагаем

$$\alpha = n (AM - B^2) \quad \text{и} \quad \zeta = n (EM - D^2).$$

Далее из тех же условий имеем:

$$E\beta^2 - E\alpha\gamma = A\varepsilon^2 - A\gamma\zeta,$$

или

$$\gamma (A\zeta - E\alpha) = A\varepsilon^2 - E\beta^2.$$

С этим уравнением поступаем следующим образом. Подставив [предварительно] значения α и ζ [в выражения для β и ε], имеем:

$$\beta = nAD + \frac{B}{M} (\lambda - nBD)$$

и

$$\varepsilon = nBE + \frac{D}{M} (\lambda - nBD);$$

если для краткости положить $\lambda - nBD = nMN$, то будем иметь:

$$\beta = n (AD + BN) \quad \text{и} \quad \varepsilon = n (BE + DN);$$

так как

$$A\zeta - E\alpha = n (B^2E - AD^2)$$

и

$$A\varepsilon^2 - E\beta^2 = n^2 (AB^2E^2 + AD^2N^2 - A^2D^2E - B^2EN^2),$$

т. е.

$$A\varepsilon^2 - E\beta^2 = n^2 (B^2E - AD^2)(AE - N^2),$$

то получаем:

$$\gamma = n (AE - N^2).$$

Но так как

$$\lambda = n (BD + MN)$$

и

$$\lambda^2 = n^2 (AM - B^2)(EM - D^2) + Mm,$$

то будем иметь:

$$Mm = n^2 [2BDMN + M^2N^2 - AEM^2 + M (AD^2 + B^2E)],$$

или

$$m = n^2 (2BDN + MN^2 - AEM + AD^2 + B^2E).$$

Наконец, в пятом уравнении [левая его часть] $\beta\varepsilon - \gamma\lambda = \frac{1}{2} m (M - C)$, будучи развернута, дает

$$\beta\varepsilon - \gamma\lambda = n^2 ((AD + BN)(BE + DN) - (AE - N^2)(BD + MN))$$
$$= n^2N (2BDN + MN^2 - AEM + AD^2 + B^2E) = Nm,$$

откуда $N=\frac{1}{2}(M-C)$, и поэтому

$$m=n^2\left(BD(M-C)+\frac{1}{4}M(M-C)^2-AEM+AD^2+B^2E\right).$$

Если взять $n=4$, то отсюда получаются данные выше значения.

ПРИМЕР 1

629. *Найти полный интеграл дифференциального уравнения*

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{a+bp}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{a+bq}}=0.$$

Здесь $x=p$, $y=q$, $A=a$, $B=\frac{1}{2}b$, $C=0$, $D=0$, $E=0$, отсюда получаем коэффициенты

$$\begin{aligned} &\alpha=4aM-b^2, && \beta=bM, && \gamma=-M^2, \\ &\zeta=0, && \varepsilon=0 && \delta=M^2 \end{aligned}$$

и

$$\Delta=M^3,$$

так что полный интеграл есть

$$bM+M^2p-M^2q=\pm 2M\sqrt{M(a+bp)},$$

т. е.

$$b+M(p-q)=\pm 2\sqrt{M(a+bp)},$$

или

$$b+M(q-p)=\pm 2\sqrt{M(a+bq)},$$

причем эти двойные знаки при радикалах должны согласоваться со знаками в дифференциальном уравнении.

ПРИМЕР 2

630. *Найти полный интеграл дифференциального уравнения*

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{a+bp^2}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{a+bq^2}}=0.$$

Взяв $x=p$ и $y=q$, будем иметь $A=a$, $B=0$, $C=b$, $D=0$, $[E=0]$, а следовательно,

$$\begin{aligned} &\alpha=4aM, && \beta=0, && \gamma=-(M-b)^2, \\ &\zeta=0, && \varepsilon=0, && \delta=M^2-b^2, \end{aligned}$$

и

$$\Delta=M(M-b)^2.$$

Поэтому полный интэграл представится одним из следующих уравнений:

$$(M^2-b^2)p-(M-b)^2q=\pm 2(M-b)\sqrt{M(a+bp^2)},$$

т. е.

$$(M+b)\,p-(M-b)\,q=\pm 2\sqrt{M(a+bp^2)}$$

и

$$(M+b)\,q-(M-b)\,p=\pm 2\sqrt{M(a+bq^2)}.$$

ПРИМЕР 3

631. *Найти полный интеграл дифференциального уравнения*

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{a+bp^3}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{a+bq^3}}=0.$$

Взяв $x=p$, $y=q$, будем иметь $A=a$, $B=0$, $C=0$, $D=\frac{1}{2}b$, $E=0$; следовательно,

$$\alpha=4aM,\quad \beta=2ab,\quad \gamma=-M^2;$$
$$\zeta=-b^2,\quad \varepsilon=bM,\quad \delta=M^2$$

и

$$\Delta=M^3+ab^2,$$

откуда полный интеграл

$$2ab+M^2p+bMp^2+q(-M^2+2bMp-b^2p^2)=\pm 2\sqrt{(M^3+ab^2)(a+bp^3)},$$

или

$$2ab+Mp(M+bp)-q(M-bp)^2=\pm 2\sqrt{(M^3+ab^2)(a+bp^3)}$$

и

$$2ab+Mq(M+bq)-p(M-bq)^2=\pm 2\sqrt{(M^3+ab^2)(a+bq^3)}.$$

ПРИМЕР 4

632. *Найти полный интеграл дифференциального уравнения*

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{a+bp^4}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{a+bq^4}}=0.$$

Положив $x=p$, $y=q$, будем иметь:

$$A=a,\quad B=0,\quad C=0,\quad D=0,\quad E=b,$$

а следовательно,

$$\alpha=4aM,\quad \beta=0,\quad \gamma=4ab-M^2,$$
$$\zeta=4bM,\quad \varepsilon=0,\quad \delta=M^2+4ab$$

и

$$\Delta=M^3-4abM,$$

откуда полный интеграл

$$(M^2+4ab)\,p+q(4ab-M^2+4bMp^2)=\pm 2\sqrt{M(M^2-4ab)(a+bp^4)},$$

$$(M^2+4ab)\,q+p(4ab-M^2+4bMq^2)=\pm 2\sqrt{M(M^2-4ab)(a+bq^4)}.$$

ПРИМЕР 5

633. *Найти полный интеграл дифференциального уравнения*

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{a+bp^6}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{a+bq^6}}=0.$$

Положим $x=p^2$ и $y=q^2$; тогда наше общее уравнение, если положить $A=0$, примет такой вид:

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{2B+Cp^2+2Dp^4+Ep^6}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{2B+Cq^2+2Dq^4+Eq^6}}\,.$$

Значит, надо взять $B=\frac{1}{2}a$, $C=0$, $D=0$ и $E=b$, так что коэффициенты определятся таким образом:

$$\alpha=-a^2,\quad \beta=aM,\quad \gamma=-M^2,$$
$$\zeta=4bM,\quad \varepsilon=2ab,\quad \delta=M^2$$

и

$$\Delta=M^3+a^2b;$$

следовательно, полный интеграл

$$aM+M^2p^2+2abp^4+q^2(-M^2-4abp^2+4bMp^4)$$
$$=\pm 2p\sqrt{(M^3+a^2b)(a+bp^6)},$$

или

$$aM+M^2q^2+2abq^4+p^2(-M^2+4abq^2+4bMq^4)$$
$$=\pm 2q\sqrt{(M^3+a^2b)(a+bq^6)}.$$

СЛЕДСТВИЕ

634. Если взять постоянную $M=-\sqrt[3]{a^2b}$, так что $M^3+a^2b=0$, то получится частный интеграл, который представится так:

$$p^2=\frac{q^2\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}}{2q^2\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}},$$

или

$$q^2=\frac{p^2\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}}{2p^2\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}};$$

очевидно, он удовлетворяет дифференциальному уравнению.

ЗАДАЧА 82

635. *Пусть предложено дифференциальное уравнение*

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{a+bp^2+cp^4+ep^6}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{a+bq^2+cq^4+eq^6}}=0.$$

Представить его полный интеграл в алгебраическом виде.

РЕШЕНИЕ

Предыдущее дифференциальное уравнение[1]), проинтегрированное алгебраически, можно привести к этому виду, если положить $x=p^2$ и $y=q^2$, а также $A=0$; в самом деле, тогда получим:

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{2B+Cp^2+2Dp^4+Ep^6}}+\frac{dq}{\pm\sqrt{2B+Cq^2+2Dq^4+Eq^6}}=0.$$

Поэтому надо только, чтобы

$$A=0,\quad B=\frac{1}{2}a,\quad C=b,\quad D=\frac{1}{2}c,\quad E=e,$$

откуда коэффициенты α, β, γ, δ, ε, ζ определятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\alpha=-a^2, &&\beta=a(M-b), &&\gamma=-(M-b)^2,\\
&\zeta=4eM-c^2, &&\varepsilon=c(M-b)+2ae, &&\delta=M^2-b^2+ac,\\
&\Delta=M(M-b)^2+acM-abc+a^2e\\
&\quad=(M-b)^3+b(M-b)^2+ac(M-b)+a^2e.
\end{aligned}$$

Так как постоянное M зависит от нашего произвола, то отсюда получится полный интеграл

$$\beta+\delta p^2+\varepsilon p^4+q^2(\gamma+2\varepsilon p^2+\zeta p^4)=\pm 2p\sqrt{\Delta(a+bp^2+cp^4+ep^6)},$$
$$\beta+\delta q^2+\varepsilon q^4+p^2(\gamma+2\varepsilon q^2+\zeta q^4)=\pm 2q\sqrt{\Delta(a+bq^2+cq^4+eq^6)}.$$

Хотя эти два уравнения согласуются друг с другом, но вследствие наличия двух знаков в самом дифференциальном уравнении надо написать оба уравнения, перенеся [в них] оттуда двузначность[2]). Но в этих случаях получается следующее рациональное уравнение:

$$0=\alpha+2\beta(p^2+q^2)+\gamma(p^4+q^4)+2\delta p^2q^2+2\varepsilon p^2q^2(p^2+q^2)+\zeta p^4q^4.$$

СЛЕДСТВИЕ 1

636. Если взять постоянную M так, чтобы Δ стало равным нулю, то получается частный интеграл вида $q^2=\frac{E+Fp^2}{G+Hp^2}$, в чем можно убедиться и a posteriori. Действительно, чтобы уравнение удовлетворялось, надо, чтобы

$$aG^3+bEG^2+cE^2G+eE^3=0;$$

отсюда определяется отношение $E:G$; далее находим $F=-G$ и, наконец,

$$H=\frac{-cEG-2eE^2}{aG}=\frac{2aG^2+2bEG+cE^2}{aE}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

637. Изменим постоянную M так, чтобы $M-b=\frac{a}{f^2}$; тогда

$$\alpha=-a^2,\quad \beta=\frac{a^2}{f^2},\quad \gamma=-\frac{a^2}{f^4},$$

$$\zeta=4be-c^2+\frac{4ae}{f^2},\qquad \varepsilon=\frac{ac}{f^2}+2ae,\qquad \delta=\frac{a^2}{f^4}+\frac{2ab}{f^2}+ac$$

---

[1]) То есть уравнение задачи 81 (§ 623).

[2]) quae binae quidem aequationes inter se conveniunt, sed ob ambiguitatem signorum in ipsa aequatione differentiali ambae notari debent, ambiguitate inde sublata.

и

$$\Delta = \frac{a^2}{f^6}(a + bf^2 + cf^4 + ef^6),$$

и интегральное уравнение будет

$$a^2f^2 + a(a + 2bf^2 + cf^4)p^2 + af^2(c + 2ef^2)p^4$$
$$- q^2(a^2 - 2af^2(c + 2ef^2)p^2 + f^2(c^2f^2 - 4bef^2 - 4ae)p^4)$$
$$= \pm 2afp\sqrt{(a + bf^2 + cf^4 + ef^6)(a + bp^2 + cp^4 + ep^6)},$$

откуда ясно, что при $p = 0$ будем иметь $q^2 = f^2$.

СЛЕДСТВИЕ 3

638. Это уравнение легко преобразуется к виду

$$af^2(a + bp^2 + cp^4 + ep^6) + ap^2(a + bf^2 + cf^4 + ef^6)$$
$$- q^2(a - cf^2p^2)^2 - aef^2p^2(f^2 - p^2)^2 + 4ef^2p^2q^2(af^2 + ap^2 + bf^2p^2)$$
$$= \pm 2fp\sqrt{a(a + bf^2 + cf^4 + ef^6)\,a(a + bp^2 + cp^4 + ep^6)},$$

откуда сразу видно, что при $e = 0$ оно по извлечении корня примет вид

$$f\sqrt{a(a + bp^2 + cp^4)} \mp p\sqrt{a(a + bf^2 + cf^4)} = q(a - cf^2p^2).$$

Это уравнение есть полный интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dp}{\pm\sqrt{a + bp^2 + cp^4}} + \frac{dp}{\pm\sqrt{a + bq^2 + cq^4}} = 0$$

в полном согласии с ранее [§ 607] найденным.

СЛЕДСТВИЕ 4

639. Точно так же ясно, что и в общем случае, когда e не исчезает, удобнее выразить полный интеграл так:

$$\left(f\sqrt{a(a + bp^2 + cp^4 + ep^6)} \mp p\sqrt{a(a + bf^2 + cf^4 + ef^6)}\right)^2$$
$$= q^2(a - cf^2p^2)^2 + aef^2p^2(f^2 - p^2)^2 - 4ef^2p^2q^2(af^2 + ap^2 + bf^2p^2);$$

так как при $p = 0$ имеем $q = f$, то это уравнение соответствует такому соотношению между трансцендентными функциями:

$$\pm\Pi(p) \pm \Pi(q) = \pm\Pi(0) \pm \Pi(f).$$

ПОЯСНЕНИЕ 1

640. Итак, виды трансцендентных функций, которые подобно круговым дугам можно сравнивать между собой, содержатся в следующих двух интегральных выражениях:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^3 + Ez^4}} \quad \text{и} \quad \int\frac{dz}{\sqrt{a + bz^2 + cz^4 + ez^6}},$$

и, по-видимому, этот метод не может быть распространен на другие более сложные виды. Точно так же второе из этих выражений не допускает в знаменателе нечетных степеней количества z, разве что случайно простая подстановка окажется достаточной для приведения к вышеуказанному виду. Легко убедиться в том, что к [общему] выражению

$$\int \frac{dz}{\sqrt{A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4+2Ez^5+Gz^6}}$$

безусловно нельзя применить такой метод: действительно, если коэффициенты подобрать так, чтобы удалось извлечение корня, то получится выражение вида

$$\int \frac{dz}{a+bz+cz^2+ez^3};$$

так как интегрирование этого выражения вводит и логарифмы и круговые дуги, то совершенно невозможно, чтобы несколько функций такого рода могли быть сравниваемы между собой алгебраически. Впрочем, первое выражение шире, чем второе, так как второе получается из первого, если положить $A=0$ и вместо z написать z^2. Что же касается первого, то стоит отметить, что оно сохраняет тот же вид и в том случае, если его преобразовать при помощи подстановки

$$z=\frac{\alpha+\beta y}{\gamma+\delta y};$$

в самом деле, тогда получается:

$$\int \frac{(\beta\gamma-\alpha\delta)\,dy}{\sqrt{A(\gamma+\delta y)^4+2B(\alpha+\beta y)(\gamma+\delta y)^3+C(\alpha+\beta y)^2(\gamma+\delta y)^2+2D(a+by)^3(\gamma+\delta y)+E(\alpha+\beta y)^4}};$$

отсюда ясно, что количества α, β, γ, δ могут быть взяты так, чтобы нечетные степени исчезли. Или же их можно определить и так, чтобы первый и последний члены исчезли; если затем положить $y=u^2$, то снова получится выражение, свободное от нечетных степеней.

ПОЯСНЕНИЕ 2

641. Уничтожение нечетных степеней удобнее всего производить следующим образом. Так как выражение

$$A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4$$

всегда обязательно имеет два вещественных множителя, то интегральное выражение можно представить так:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(a+2bz+cz^2)(f+2gz+hz^2)}};$$

если положить $z=\dfrac{\alpha+\beta y}{\gamma+\delta y}$, то оно переходит в

$$\int \frac{(\beta\gamma-\alpha\delta)\,dy}{\sqrt{(a(\gamma+\delta y)^2+2b(\alpha+\beta y)(\gamma+\delta y)+c(\alpha+\beta y)^2)(f(\gamma+\delta y)^2+2g(\alpha+\beta y)(\gamma+\delta y)+h(\alpha+\beta y)^2)}},$$

где множители знаменателя, если их развернуть, примут вид

$$(a\gamma^2+2b\alpha\gamma+c\alpha^2)+2(a\gamma\delta+b\alpha\delta+b\beta\gamma+c\alpha\beta)y+(a\delta^2+2b\beta\delta+c\beta^2)y^2,$$
$$(f\gamma^2+2g\alpha\gamma+h\alpha^2)+2(f\gamma\delta+g\alpha\delta+g\beta\gamma+h\alpha\beta)y+(f\delta^2+2g\beta\delta+h\beta^2)y^2.$$

Если теперь в обоих выражениях средний член сделать исчезающим, то получится:

$$\frac{\delta}{\beta}=\frac{-b\gamma-c\alpha}{a\gamma+b\alpha}=\frac{-g\gamma-h\alpha}{f\gamma+g\alpha}$$

и отсюда

$$bf\gamma^2+(bg+cf)\,\alpha\gamma+cg\alpha^2=ag\gamma^2+(ah+bg)\,\alpha\gamma+bh\alpha^2,$$

или

$$\gamma^2=\frac{(ah-cf)\,\alpha\gamma+(bh-cg)\,\alpha^2}{bf-ag},$$

откуда

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{ah-cf+\sqrt{(ah-cf)^2+4\,(bf-ag)\,(bh-cg)}}{2\,(bf-ag)}.$$

Значит, было бы достаточно рассмотреть лишь такие выражения, где нечетные степени отсутствуют, что и было нами сделано в начале этой главы. Однако если в эти выражения входит, сверх того, и числитель, то такое приведение уже не имеет места.

ЗАДАЧА 38

642. *Пусть n означает какое-либо целое число; найти выраженный алгебраически полный интеграл дифференциального уравнения*

$$\frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}}=\frac{n\,dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}}.$$

РЕШЕНИЕ

Полный интеграл, выраженный в трансцендентных функциях, есть

$$\Pi(y)=n\Pi(x)+\mathrm{Const}.$$

Чтобы отыскать алгебраическое выражение этого же интеграла, полагаем $M-C=L$; пусть по формулам, найденным выше (§ 627),

$$\alpha=4\,(AC-B^2+AL),\quad \beta=4AD+2BL,\quad \gamma=4AE-L^2,$$

$$\zeta=4\,(CE-D^2+EL),\quad \varepsilon=4BE+2DL,$$

$$\delta=4AE+4BD+2CL+L^2$$

и

$$\Delta=L^3+CL^2+4\,(BD-AE)+4\,(AD^2+B^2E-ACE).$$

При этих обозначениях, если

$$\beta+\delta p+\varepsilon p^2+q\,(\gamma+2\varepsilon p+\zeta p^2)=2\sqrt{\Delta\,(A+2Bp+Cp^2+2Dp^3+Ep^4)},$$

$$\beta+\delta q+\varepsilon q^2+p\,(\gamma+2\varepsilon q+\zeta q^2)=-2\sqrt{\Delta\,(A+2Bq+Cq^2+2Dq^3+Eq^4)},$$

то

$$\Pi(q)=\Pi(p)+\mathrm{Const}.$$

Оба эти уравнения согласуются друг с другом и содержатся в рациональном уравнении

$$\alpha+2\beta(p+q)+\gamma(p^2+q^2)+2\delta pq+2\varepsilon pq(p+q)+\zeta p^2q^2=0,$$

поэтому, если мы примем, что $q=b$ при $p=a$, то постоянное L надо определить так, чтобы

$$\alpha+2\beta(a+b)+\gamma(a^2+b^2)+2\delta ab+2\varepsilon ab(a+b)+\zeta a^2b^2=0;$$

тогда будем иметь:

$$\Pi(q)=\Pi(p)+\Pi(b)-\Pi(a),$$

где уже нет никакого различия между постоянными и переменными. Положим $p=b$, так что

$$\Pi(q)=2\Pi(p)-\Pi(a);$$

с этим уравнением согласуются данные выше алгебраические уравнения, если только количество L будет определено так, чтобы

$$\alpha+2\beta(a+p)+\gamma(a^2+p^2)+2\delta ap+2\varepsilon ap(a+p)+\zeta a^2p^2=0,$$

откуда выводится[1]), что

$$\frac{1}{2}L(a-p)^2=A+B(a+p)+Cap+Dap(a+p)+Ea^2p^2$$
$$\pm\sqrt{(A+2Ba+Ca^2+2Da^3+Ea^4)(A+2Bp+Cp^2+2Dp^3+Ep^4)}.$$

После того как это значение L установлено, мы определим отсюда надлежащим образом буквы α, β, γ, δ, ε, ζ при помощи данных выше формул. Будем теперь рассматривать p и q как переменные, а a как постоянное количество: тогда уравнение

$$\alpha+2\beta(p+q)+\gamma(p^2+q^2)+2\delta pq+2\varepsilon pq(p+q)+\zeta p^2q^2=0$$

будет полным интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{dq}{\sqrt{A+2Bq+Cq^2+2Dq^3+Eq^4}}=\frac{2\,dp}{\sqrt{A+2Bp+Cp^2+2Dp^3+Ep^4}}.$$

После того как мы таким образом определили q через p, определим r при помощи уравнения

$$\alpha+2\beta(q+r)+\gamma(q^2+r^2)+2\delta qr+2\varepsilon qr(q+r)+\zeta q^2r^2=0;$$

тогда будем иметь:

$$\Pi(r)-\Pi(q)=\Pi(p)-\Pi(a),$$

ибо если положить $q=a$ и $r=p$, то буква L, входящая в значения α, β, γ, δ, ε, ζ, определяется так же, как раньше. А так как

$$\Pi(q)=2\Pi(p)-\Pi(a),$$

то будем иметь:

$$\Pi(r)=3\Pi(p)-2\Pi(a)\ ^{2)}.$$

---

[1]) Подставляем выражения для α, β, γ, δ, ε, ζ и решаем квадратное (относительно L) уравнение.

[2]) То есть $\Pi(r)-\Pi(a)=3[\Pi(p)-\Pi(a)]$.

Значит, если взять a постоянным, то полученное выше алгебраическое уравнение между q и r, где q надо выразить через p из последующего уравнения, будет полным интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{dr}{\sqrt{A+2Br+Cr^2+2Dr^3+Er^4}}=\frac{3dp}{\sqrt{A+2Bp+Cp^2+2Dp^3+Ep^4}}.$$

После того как будет найдено выражение r через p, будем искать s из уравнения

$$\alpha+2\beta(r+s)+\gamma(r^2+s^2)+2\delta rs+2\varepsilon rs(r+s)+\zeta r^2s^2=0,$$

причем L всегда будет сохранять первоначально найденное значение; тогда будем иметь:

$$\Pi(s)-\Pi(r)=\Pi(p)-\Pi(a) \quad \text{или} \quad \Pi(s)=4\Pi(p)-3\Pi(a)\ ^{1)};$$

так что это алгебраическое уравнение будет полным интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{ds}{\sqrt{A+2Bs+Cs^2+2Ds^3+s^4}}=\frac{4dp}{\sqrt{A+2Bp+Cp^2+2Dp^3+Ep^4}}.$$

Так как, применяя этот способ, можно дойти докуда угодно, то очевидно, что для нахождения полного интеграла дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{\sqrt{A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4}}=\frac{n\,dp}{\sqrt{A+2Bp+Cp^2+2Dp^3+Ep^4}}$$

надо выполнить следующие операции:

1) Ищем количество L так, чтобы

$$\frac{1}{2}L(p-a)^2=A+B(a+p)+Cap+Dap(a+p)+Ea^2p^2$$
$$\pm\sqrt{(A+2Ba+Ca^2+2Da^3+Ea^4)(A+2Bp+Cp^2+2Dp^3+Ep^4)}.$$

2) Определяем отсюда буквы α, β, γ, δ, ε, ζ по следующим формулам:

$$\alpha=4(AC-B^2+AL),\quad \beta=4AD+2BL,\quad \gamma=4AE-L^2,$$
$$\zeta=4(CE-D^2-EL),\quad \varepsilon=4BE+2DL,\quad \delta=4AE+4BD+2CL+L^2.$$

3) Образуем ряд количеств $p, q, r, s, t, \ldots, z$; первое из них p, второе q, третье r и т. д., последнее же, n-е по порядку, пусть будет z; эти количества последовательно определяются при помощи следующих уравнений:

$$\alpha+2\beta(p+q)+\gamma(p^2+q^2)+2\delta pq+2\varepsilon pq(p+q)+\zeta p^2q^2=0,$$
$$\alpha+2\beta(q+r)+\gamma(q^2+r^2)+2\delta qr+2\varepsilon qr(q+r)+\zeta q^2r^2=0,$$
$$\alpha+2\beta(r+s)+\gamma(r^2+s^2)+2\delta rs+2\varepsilon rs(r+s)+\zeta r^2s^2=0$$

и т. д.,

пока не дойдем до последнего количества z.

---

1) То есть $\Pi(r)-\Pi(a)=4[\Pi(p)-\Pi(a)]$.

4) Соотношение между p и z, которое вытекает отсюда, будет полным интегралом предложенного дифференциального уравнения, а буква a играет здесь роль произвольного постоянного, вошедшего благодаря интегрированию.

СЛЕДСТВИЕ

643. Отсюда можно также найти полный интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{m\,dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}}=\frac{n\,dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}},$$

где m и n означают целые числа. В самом деле, положим, что каждый из этих двух членов

$$=\frac{du}{\sqrt{A+2Bu+Cu^2+2Du^3+Eu^4}},$$

и будем искать соотношение как между x и y, так и между y и u; по исключении отсюда u получим алгебраическое уравнение между x и y.

ПОЯСНЕНИЕ

644. Для того, чтобы здесь извлечение корня, повторяемое в отдельных уравнениях, не создало двузначности, надо будет вместо каждого из них пользоваться двумя, уже полученными путем извлечения корня. А именно, чтобы из первого уравнения определить надлежащим образом q по p, мы сначала имеем:

$$q=\frac{-\beta-\delta p-\varepsilon p^2+2\sqrt{\Delta(A+2Bp+Cp^2+2Dp^3+Ep^4)}}{\gamma+2\varepsilon p+\zeta p^2},$$

и затем надо взять

$$2\sqrt{\Delta(A+2Bq+Cq^2+2Dq^3+Eq^4)}=-\beta-\delta p-\varepsilon q^2-p(\gamma+2\varepsilon q+\gamma q^2).$$

Таким же образом надо будет поступать и далее при отыскании соотношения между каждыми двумя следующими количествами. При этом следует еще заметить, что целые числа m и n должны быть положительными и что найденное здесь решение[1]) не распространяется на отрицательные числа, потому что дифференциальное выражение

$$\frac{dz}{\sqrt{A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+2z^4}},$$

если положить z отрицательным, меняет свою природу[2]). Впрочем, поскольку мы выразили выше алгебраически равенство

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\mathrm{Const},$$

с его помощью можно разрешить также и те случаи, когда m или n является отрицательным числом; если, например, будем иметь

$$\Pi(z)=n\Pi(p)+\mathrm{Const},$$

[1]) hanc investigationem; дословно: «это исследование».

[2]) naturam suam mutat. Эйлер хочет сказать, что $\Pi(z)$ не равно $-\Pi(-z)$.

то будем искать y так, чтобы
$$\Pi(y)+\Pi(z)=\mathrm{Const},$$
и тогда
$$\Pi(y)=-n\Pi(p)+\mathrm{Const}.$$

ЗАДАЧА 84

645. *Пусть* $\Pi(z)$ *обозначает такую трансцендентную функцию количества* z, *что*
$$\Pi(z)=\int\frac{dz\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}z+\mathfrak{C}z^2+\mathfrak{D}z^3+\mathfrak{E}z^4)}{\sqrt{A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4}}.$$
Найти сравнение между такого рода функциями.

РЕШЕНИЕ

С помощью коэффициентов A, B, C, D, E и произвольного постоянного L определим следующие значения:
$$\alpha=4(AC-B^2+AL),\quad \beta=4AD+2BL,\quad \gamma=4AE-L^2,$$
$$\zeta=4(CE-D^2+EL),\quad \varepsilon=4BE+2DL,$$
$$\delta=4AE+4BD+2CL+L^2$$
и между двумя переменными x и y установим соотношение
$$\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(x^2+y^2)+2\delta xy+2\varepsilon xy(x+y)+\zeta x^2y^2=0.$$
Тогда для уравнения
$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}}+\frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}}=0$$
будем иметь (без двузначности)
$$\beta+\delta x+\varepsilon x^2+y(\gamma+2\varepsilon x+\zeta x^2)=2\sqrt{\Delta(A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4)},$$
$$\beta+\delta y+\varepsilon y^2+x(\gamma+2\varepsilon y+\zeta y^2)=2\sqrt{\Delta(A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4)},$$
где
$$\Delta=L^3+CL^2+4(BD-AE)L+4(AD^2+B^2E-ACE).$$

Поэтому, если положить
$$\frac{dx\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\mathfrak{E}x^4)}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}}+\frac{dy\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}y^2+\mathfrak{D}y^3+\mathfrak{E}y^4)}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}}=2dV\sqrt{\Delta},$$
так что
$$\Pi(x)+\Pi(y)=\mathrm{Const}+2V\sqrt{\Delta},$$
то будем иметь:
$$\frac{dx\,[\mathfrak{B}(x-y)+\mathfrak{C}(x^2-y^2)+\mathfrak{D}(x^3-y^3)+\mathfrak{E}(x^4-y^4)]}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}}=2dV\sqrt{\Delta},$$
или
$$dV=\frac{dx\,[\mathfrak{B}(x-y)+\mathfrak{C}(x^2-y^2)+\mathfrak{D}(x^3-y^3)+\mathfrak{E}(x^4-y^4)]}{\beta+\delta x+\varepsilon x^2+y(\gamma+2\varepsilon x+\zeta x^2)}.$$

Положим теперь $x+y=t$ и $xy=u$; так как $dx+dy=dt$ и $x\,dy+$ $+y\,dx=du$, то будем иметь $dx=\frac{x\,dt-du}{x-y}$, или $(x-y)\,dx=x\,dt-du$, и, кроме того, $x=\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}t^2-u}$. При этих обозначениях взятое нами уравнение получает вид

$$\alpha+2\beta t+\gamma t^2+2(\delta-\gamma)u+2\varepsilon tu+\zeta u^2=0,$$

откуда, дифференцируя, получаем:

$$dt(\beta+\gamma t+\varepsilon u)+du(\delta-\gamma+\varepsilon t+\zeta u)=0,$$

а значит,

$$dt=\frac{-du(\delta-\gamma+\varepsilon t+\zeta u)}{\beta+\gamma t+\varepsilon u}$$

и

$$x\,dt-du=\frac{-du[\beta+\gamma t+\varepsilon u+(\delta-\gamma)x+\varepsilon tx+\zeta ux]}{\beta+\gamma t+\varepsilon u},$$

или

$$x\,dt-du=\frac{-du[\beta+\delta x+\varepsilon x^2+y(\gamma+2\varepsilon x+\zeta x^2)]}{\beta+\gamma t+\varepsilon u}.$$

Таким образом, будем иметь:

$$\frac{dx(x-y)}{\beta+\delta x+\varepsilon x^2+y(\gamma+2\varepsilon x+\zeta x^2)}=\frac{-du}{\beta+\gamma t+\varepsilon u},$$

а следовательно,

$$dV=\frac{-du[\mathfrak{B}+\mathfrak{C}t+\mathfrak{D}(t^2-u)+\mathfrak{E}t(t^2-2u)]}{\beta+\gamma t+\varepsilon u},$$

или

$$dV=\frac{+dt[\mathfrak{B}+\mathfrak{C}t+\mathfrak{D}(t^2-u)+\mathfrak{E}t(t^2-2u)]}{\delta-\gamma+\varepsilon t+\zeta u}.$$

Но, разрешив уравнение, получим:

$$t=\frac{-\beta-\varepsilon u+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma+2(\gamma^2+\beta\varepsilon-\gamma\delta)u+(\varepsilon^2-\gamma\zeta)u^2}}{\gamma},$$

или

$$t=\frac{-\beta-\varepsilon u+2\sqrt{\Delta(A+Lu+Eu^2)}}{\gamma},$$

следовательно,

$$dV=\frac{-du[\mathfrak{B}+\mathfrak{C}t+\mathfrak{D}(t^2-u)+\mathfrak{E}t(t^2-2u)]}{\gamma},$$

и поэтому

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\text{Const}-\int\frac{du[\mathfrak{B}+\mathfrak{C}t+\mathfrak{D}(t^2-u)+\mathfrak{E}t(t^2-2u)]}{\sqrt{A+Lu+Eu^2}}.$$

Далее находим:

$$u = \frac{-(\delta-\gamma)-\varepsilon t+\sqrt{(\delta-\gamma)^2-\alpha\zeta+2\,((\delta-\gamma)\,\varepsilon-\beta\zeta)\,t+(\varepsilon^2-\gamma\zeta)\,t^2}}{\zeta};$$

это выражение переходит в

$$u = \frac{-(\delta-\gamma)-\varepsilon t+2\sqrt{\Delta\,(L+2Dt+Et^2)}}{\zeta},$$

откуда

$$dV = \frac{dt\,(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}t+\mathfrak{D}\,(t^2-u)+\mathfrak{E}t\,(t^2-2u))}{2\sqrt{\Delta\,(L+C+2Dt+Et^2)}},$$

и таким образом, [выражая подынтегральное выражение] через t, будем иметь:

$$\Pi\,(x)+\Pi\,(y)=\mathrm{Const}+\int\frac{dt\;(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}t+\mathfrak{D}\,(t^2-u)+\mathfrak{E}t\,(t^2-2u))}{\sqrt{L+C+2Dt+Et^2}}.$$

Это выражение, если оно не окажется алгебраическим, всегда может быть выражено либо через логарифмы, либо через круговые дуги. После интегрирования надо только снова подставить вместо t его значение $x+y$.

СЛЕДСТВИЕ 1

646. Если мы хотим, чтобы $y=b$ при $x=a$, то постоянное L надо определить так, чтобы

$$\frac{1}{2}L\,(a-b)^2=A+B\,(a+b)+Cab+Dab\,(a+b)+Ea^2b^2$$
$$\pm\sqrt{(A+2Ba+Ca^2+2Da^3+Ea^4)\,(A+2Bb+Cb^2+2Db^3+Eb^4)},$$

и тогда наше постоянное будет $=\Pi\,(a)+\Pi\,(b)$, если последний интеграл взять так, чтобы он исчезал при $t=a+b$.

СЛЕДСТВИЕ 2

647. Таким же образом можно выразить и разность между функциями $\Pi\,(x)-\Pi\,(y)$, изменив в первой или во второй формуле знак радикала, благодаря чему знак одного из дифференциальных выражений изменится на обратный.

СЛЕДСТВИЕ 3

648. Количество V, служащее для сравнения этих функций, будет алгебраическим, если дифференциальное выражение

$$\frac{dt\,(\mathfrak{B}\zeta+\mathfrak{C}\zeta t+\mathfrak{D}\,(\delta-\gamma+\varepsilon t+\zeta t^2)+\mathfrak{E}\,(2\,(\delta-\gamma)+2\varepsilon t+\zeta t^2)\,t)}{\zeta\sqrt{L+C+2Dt+Et^2}}$$

допускает интегрирование, ибо второе слагаемое

$$-\frac{2dt\sqrt{\Delta}}{\zeta}\,(\mathfrak{D}+2\mathfrak{E}t)$$

интегрируется непосредственно.

ПОЯСНЕНИЕ

649. Этот совершенно новый вопрос о сравнении трансцендентных функций рассмотренного вида мы изложили настолько подробно, насколько это на наш взгляд требовалось для настоящего раздела. Когда же нам надо будет применить этот метод к сравнению дуг кривых, длина которых выражается такого рода функциями, то придется остановиться на этом вопросе подробнее; там рассмотрение особых свойств, которые при этом обнаруживаются, сможет принести особенную пользу. Но нам кажется, что этот вопрос удобно отнести к учению о решении дифференциальных уравнений, поскольку при помощи этого метода могут быть получены, и притом в алгебраическом виде, полные интегралы таких уравнений, которые мы понапрасну стали бы решать другими методами. В заключение этого раздела мы изложим общий метод приближенного определения интегралов всяких дифференциальных уравнений.

ГЛАВА VII

О ПРИБЛИЖЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЗАДАЧА 85

650. *Пусть предложено какое-либо дифференциальное уравнение. Найти его полный интеграл с любой точностью* [1]).

РЕШЕНИЕ

Пусть x и y — те два переменных, которые входят в предложенное дифференциальное уравнение; это уравнение будет иметь вид $\frac{dy}{dx}=V$, где V — какая-либо функция от x и y. Мы желаем найти полный интеграл; это значит, что когда количеству x придается определенное значение, скажем $x=a$, другое переменное y должно получить некоторое определенное значение $y=b$. Сначала подойдем к этому вопросу так: будем искать значение количества y, когда количеству x придается значение, мало отличающееся от a, т. е. будем искать y, положив $x=a+\omega$. Но поскольку есть чрезвычайно малая частица, значение y также будет чрезвычайно мало отличаться от b; поэтому пока x изменяется только от a до $a+\omega$, количество V можно рассматривать как постоянное. Пусть при $x=a$ и $y=b$ имеем V; тогда на протяжении этого чрезвычайно малого изменения будем иметь $\frac{dy}{dx}=A$ и, интегрируя, $y=b+A(x-a)$, прибавляя, разумеется, такое постоянное количество, чтобы при $x=a$ получить $y=b$. Подставим теперь $x=a+\omega$; тогда $y=b+A\omega$.

Таким же образом, как из первоначально данных значений $x=a$ и $y=b$ мы нашли ближайшие следующие значения $x=a+\omega$ и $y=b+A\omega$, можно и от этих значений последовательно подвигаться дальше через чрезвычайно малые промежутки [2]) до тех пор, пока, наконец, не достигнем значений, сколь угодно удаленных от первоначальных. Для того чтобы нагляднее представить эти операции, расположим их друг за

---

[1]) vero proxime.

[2]) per intervalla minima.

другом следующим образом:

Количества	Последовательные их значения
x	$a,\ a',\ a'',\ a''',\ a^{\mathrm{IV}},\ \ldots,\ 'x,\ x$
y	$b,\ b',\ b'',\ b''',\ b^{\mathrm{IV}},\ \ldots,\ 'y,\ y$
V	$A,\ A',\ A'',\ A''',\ A^{\mathrm{IV}},\ \ldots,\ 'V,\ V.$

То есть исходя из первых [значений] $x=a$ и $y=b$, которые были даны, имеем $V=A$; далее для вторых [значений] будем иметь $b'=b+A(a'-a)$, причем чрезвычайно малая разность[1]) $a'-a$ взята по произволу. Исходя отсюда и полагая $x=a'$, $y=b'$, находим $V=A'$, и теперь для третьих [значений] получится $b''=b'+A'(a''-a')$; отсюда, полагая $x=a''$ и $y''=b$, находим $V=A''$. Теперь для четвертых [значений] будем иметь $b'''=b''+A''(a'''-a'')$, а отсюда, полагая $x=a'''$ и $y=b'''$, найдем $V=A'''$; таким путем можно будет дойти до значений, сколь угодно удаленных от первоначальных. Первый ряд, содержащий последовательные значения количеств x, можно взять по произволу, лишь бы он восходил (или нисходил) через чрезвычайно малые промежутки.

СЛЕДСТВИЕ 1

651. Значит, для отдельных чрезвычайно малых промежутков вычисление ведется единообразно, и таким путем получаются значения, от которых зависят следующие [за ними]. Стало быть, по этому способу можно для всякого отдельно взятого значения x найти соответствующее значение y.

СЛЕДСТВИЕ 2

652. Чем меньшими берутся промежутки, через которые возрастают значения x, тем с большей точностью находятся значения, соответствующие каждому из них. Тем не менее погрешности, допущенные в каждом отдельном случае, хотя бы они были и очень малы, все же накопляются вследствие их многочисленности.

СЛЕДСТВИЕ 3

653. Ошибки, получающиеся при этом вычислении, проистекают из того, что на отдельных промежутках мы рассматриваем оба количества x и y как постоянные, и таким образом функция V принимается за постоянную. Значит, чем более меняется значение количества V при переходе от какого-либо промежутка к следующему, тем бо́льших ошибок следует опасаться.

ПОЯСНЕНИЕ 1

654. С этим неудобством мы встречаемся в первую очередь там, где значение V либо исчезает, либо обращается в бесконечность[2]), даже если изменения, которым подвергаются x и y, довольно малы. В этих случаях можно избежать ошибок, по крайней мере, очень больших, следующим образом. Пусть в начале такого промежутка $x=a$ и $y=b$; тогда в предложенном уравнении полагаем $x=a+\omega$ и $y=b+\psi$, так

[1]) differentia $a'-a$ minima.

[2]) in infinitum excrescit.

что будем иметь $\frac{d\psi}{d\omega}=V$, причем, однако, подстановка $x=a+\omega$ и $y=b+\psi$ в V выполняется так, что количества ω и ψ рассматриваются как чрезвычайно малые, иными словами, высшие степени отбрасываются по отношению к низшим, благодаря этому интегрирование для этих промежутков нередко можно будет выполнить на деле. Но от такого исправления вряд ли будет польза, если только члены, порожденные самими значениями a, b, не уничтожены взаимно. Пусть, например, имеем уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{x^2-y^2}$$

и пусть в начале должно быть $x=a$ и $y=a$, тогда для промежутка, начинающегося здесь, полагаем $x=a+\omega$ и $y=a+\psi$; получим:

$$\frac{d\psi}{d\omega}=\frac{a^2}{2a\omega-2a\psi},$$

или

$$2\omega\, d\psi-2\psi\, d\psi=a\, d\omega,$$

или

$$d\omega-\frac{2\omega\, d\psi}{a}=\frac{-2\psi\, d\psi}{a};$$

это уравнение, будучи помножено на $e^{-\frac{2\psi}{a}}=1-\frac{2\psi}{a}$ и проинтегрировано, даст

$$\left(1-\frac{2\psi}{a}\right)\omega=-\frac{2}{a}\int\left(1-\frac{2\psi}{a}\right)\psi\, d\psi=-\frac{\psi^2}{a},$$

ибо при $\omega=0$ должно получиться $\psi=0$. Отсюда будем иметь:

$$\omega=-\frac{\psi^2}{a-2\psi}=-\frac{\psi^2}{a} \quad \text{или} \quad a(a'-a)=-(b'-b)^2,$$

где $b=a$. Отсюда для следующего интервала получаем $b'=b+$ $+\sqrt{-a(a'-a)}$. Ясно, что в этом случае значение x нельзя увеличить за пределы a, так как тогда y стало бы мнимым.

ПОЯСНЕНИЕ 2

655. Всюду [в литературе] излагаются правила для выражения интегралов дифференциальных уравнений через бесконечные ряды; но эти правила по большей части обладают тем недостатком, что они дают лишь частные интегралы[1]), не говоря уже о том, что эти ряды сходятся только в определенном случае, а поэтому в других случаях не приносят никакой пользы. Если, например, предложено уравнение $dy+y\,dx=$ $=ax^n\,dx$, то нам рекомендуют составить в общем виде такой ряд[2]):

$$y=Ax^{\alpha}+Bx^{\alpha+1}+Cx^{\alpha+2}+Dx^{\alpha+3}+Ex^{\alpha+4}+ \text{ и т. д.}$$

[1]) Указываемый здесь недостаток относится, конечно, не к мотиву, а к его изложениям; ср. § 663.

[2]) iubemur huiusmodi seriem in genere fingere.

Подставив его, получаем:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha A x^{\alpha-1} + (\alpha+1) B x^{\alpha} + (\alpha+2) C x^{\alpha+1} + (\alpha+3) D x^{\alpha+2} + \text{ и т. д.} \\ \qquad\quad + \qquad\; A \quad + \qquad\quad B \quad + \qquad\quad C \\ -ax^n \end{array}\right\} = 0.$$

Значит, надо положить $\alpha - 1 = n$, т. е. $\alpha = n + 1$; тогда будем иметь $A = \frac{a}{n+1}$; далее, приведя и остальные члены к нулю, получим:

$$B = \frac{-A}{n+2}, \quad C = \frac{-B}{n+3}, \quad D = \frac{-C}{n+4} \text{ и т. д.}$$

и, таким образом, будем иметь ряд

$$y = \frac{ax^{n+1}}{n+1} - \frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{ax^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{ax^{n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \text{ и т. д.}$$

Однако это только частный интеграл, так как, когда исчезает x, одновременно исчезает и y, если только $n+1$ не является отрицательным числом, а кроме того, этот ряд сходится лишь тогда, когда x берется очень малым. Поэтому отсюда никак нельзя узнать такие значения y, которые соответствовали бы любым значениям x. Метод же, который мы здесь обрисовали, не страдает этим пороком: действительно, прежде всего он дает полный интеграл, поскольку при данном значении x он приписывает данное значение количеству y; далее, путем постепенных переходов через весьма малые промежутки он всегда подходит очень близко к истине и позволяет дойти докуда угодно. Этот метод может быть усовершенствован следующим образом.

ЗАДАЧА 86

656. *Усовершенствовать вышеизложенный метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений так, чтобы он меньше отступал от истины.*

РЕШЕНИЕ

Пусть предложено уравнение $\frac{dy}{dx} = V$, которое надо проинтегрировать. Погрешность изложенного выше метода возникает из того, что на отдельных промежутках функция V рассматривается как постоянная, тогда как в действительности она претерпевает изменение, особенно если промежутки берутся не очень малыми. Однако же изменяемость количества V на каждом интервале можно учесть тем же способом, каким мы пользовались в § 321 предыдущего раздела. А именно, если количеству x соответствует y, то в силу основного свойства дифференциалов[1]) количеству $x - n\,dx$, как мы видели, соответствует

$$y - n\,dy + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\, d^2y - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\, d^3y + \text{ и т. д.};$$

если взять n бесконечным, то это значение будет

$$y - n\,dy + \frac{n^2 d^2y}{1\cdot 2} - \frac{n^3 d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n^4 d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{ и т. д.}$$

[1]) ex natura differentialium.

Положим теперь $x - n\,dx = a$ и

$$y - n\,dy + \frac{n^2\,d^2y}{1\cdot 2} - \frac{n^3\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n^4\,d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{ и т. д. } = b.$$

Будем рассматривать здесь на каждом интервале значения [a и b] как первые, а последние пусть обозначаются буквой x и y. Поскольку $n = \frac{x-a}{dx}$, получим:

$$y = b + \frac{(x-a)\,dy}{dx} - \frac{(x-a)^2\,d^2y}{1\cdot 2\cdot dx^2} + \frac{(x-a)^3\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} - \frac{(x-a)^4\,d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} + \text{ и т. д.}$$

Это выражение, если x не намного превышает a, быстро сходится, и поэтому очень удобно для приближенного нахождения значения y. Однако, для того чтобы развернуть отдельные члены этого ряда, необходимо принять во внимание, что $\frac{dy}{dx} = V$, а следовательно, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dV}{dx}$. Но V есть функция от x и от y; поэтому, если положить $dV = M\,dx + N\,dy$, то, учитывая, что $\frac{dy}{dx} = V$, будем иметь $\frac{d^2y}{dx^2} = M + NV$ или при обозначениях, уже разъясненных выше[1]), $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dV}{dx}\right) + V\left(\frac{dV}{dy}\right)$. Из этого выражения таким же способом, каким само оно получилось из предшествующего $\frac{dy}{dx} = V$, получим следующее выражение:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) + 2V\left(\frac{d^2V}{dx\,dy}\right) + V\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + V^2\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right).$$

Но так как само значение y еще не известно, то этим способом получается лишь алгебраическое уравнение, при помощи которого выражается соотношение между x и y, если только случайно не окажется достаточным полагать на концах [промежутков] $y = b$[2]).

Вторая же операция, изложенная в § 322, определит в явном виде значение y, которое будет соответствовать значению x, в конце какого-либо промежутка, когда в начале того же промежутка будем иметь $x = a$ и $y = b$. А именно, положив $x = a + n\,da$, получим:

$$y = b + n\,db + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,d^2b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,d^3b + \text{ и т. д.,}$$

причем теперь a и b рассматриваются как переменные. Так как $n = \frac{x-a}{da}$ и, значит, это число бесконечное, то будем иметь:

$$y = b + \frac{(x-a)\,db}{da} + \frac{(x-a)^2\,d^2b}{1\cdot 2da^2} + \frac{(x-a)^3\,d^3b}{1\cdot 2\cdot 3\cdot da^3} + \text{ и т. д.}$$

Но $\frac{db}{da} = V$, если в функции V написать $x = a$ и $y = b$; далее, подставив эти же значения x и y, будем иметь:

$$\frac{d^2b}{da^2} = \left(\frac{dV}{dx}\right) + V\left(\frac{dV}{dy}\right)$$

---

[1]) См. сноску к § 443.

[2]) nisi forte sufficiat in terminis posuisse $y = b$.

и

$$\frac{d^3b}{da^3}=\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)+2V\left(\frac{d^2V}{dx\,dy}\right)+V^2\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)\left(\left(\frac{dV}{dx}\right)+V\left(\frac{dV}{dy}\right)\right).$$

Подобным же образом надо образовать и последующие [выражения]. Пусть после того, как мы напишем $x=a$ и $y=b$,

$$\frac{dy}{dx}=A,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=B,\quad \frac{d^3y}{dx^3}=C,\quad \frac{d^4y}{dx^4}=D \text{ и т. д.};$$

тогда значению $x=a+\omega$ будет соответствовать значение

$$y=b+A\omega+\frac{1}{2}B\omega^2+\frac{1}{6}C\omega^3+\frac{1}{24}D\omega^4+ \text{ и т. д.}$$

Для следующего интервала эти два значения будут уже начальными, и из них таким же образом следует получить конечные значения.

СЛЕДСТВИЕ 1

657. Так как здесь мы учли переменность функции V, то можно установить уже большие промежутки, а если бы мы захотели продолжать до бесконечности [последовательность] выражений A, B, C, D и т. д., то можно было бы взять сколь угодно большие интервалы, и тогда для y получился бы бесконечный ряд.

СЛЕДСТВИЕ 2

658. Если мы возьмем только два первых члена найденного ряда, так что получится $y=b+A\omega$, то мы будем иметь предшествующее определение; отсюда в то же время выясняется, что погрешность, которая там была допущена, равняется последующим членам, взятым вместе.

СЛЕДСТВИЕ 3

659. Но даже если бы мы взяли большее число членов найденного нами ряда, тем не менее было бы не благоразумно устанавливать слишком большие интервалы для того, чтобы ω получило умеренное значение[1]), особенно если при этом количества B, C, D и т. д. делаются очень большими.

ПОЯСНЕНИЕ

660. На особенно большие препятствия наталкиваются эти операции в том случае, если какой-нибудь из коэффициентов A, B, C, D и т. д. обращается в бесконечность. Однако это случается только на определенных промежутках, где само количество V обращается или в нуль, или в бесконечность. Как бороться с этим препятствием, мы уже вкратце

---

[1]) consultum tamen non erit intervalla nimis magna constitui, ut ω valorem modicum obtineat. Слово modicus (умеренный, посредственный, малый) здесь употреблено, по-видимому, в том смысле, что ω не должно быть ни настолько малым, чтобы число итераций стало слишком большим, ни настолько большим, чтобы понадобилось брать слишком много членов ряда.

указали и вскоре покажем более подробно. Пожалуй, отметим еще, что вычисление для каждого отдельного промежутка ведется одинаково, так что, коль скоро будет найден способ вычисления для первого интервала, который начинается со взятых по произволу значений $x=a$ и $y=b$, этот же способ будет пригодным и для следующих интегралов. Поскольку для конца первого интервала имеем

$$x=a+\omega=a'$$

и

$$y=b+A\omega+\frac{1}{2}B\omega^2+\frac{1}{6}C\omega^3+\frac{1}{24}D\omega^4+\text{ и т. д}=b',$$

эти значения будут начальными для второго интервала, из которых таким же образом следует получить конечные значения; иными словами, это вычисление так же исходит из букв a' и b', как предыдущее вычисление из букв a и b. Это станет яснее на следующих примерах.

ПРИМЕР 1

661. *Найти приближенно полный интеграл дифференциального уравнения*

$$dy=dx\,(x^n+cy).$$

Так как здесь $V=\frac{dy}{dx}=x^n+cy$, то, дифференцируя, будем иметь:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=nx^{n-1}+cx^n+c^2y,$$

и далее таким же образом

$$\frac{d^3y}{dx^3}=n(n-1)\,x^{n-2}+ncx^{n-1}+c^2x^n+c^3y,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}+n(n-1)\,cx^{n-2}+nc^2x^{n-1}+c^3x^n+c^4y$$

и т. д.

Поэтому если мы положим, что значению $x=a$ соответствует $y=b$, то какому-либо другому значению $x=a+\omega$ будет соответствовать

$$\begin{aligned}y=b+\omega\,(cb+a^n)+\frac{1}{2}\,\omega^2\,(c^2b+ca^n+na^{n-1})\\+\frac{1}{6}\,\omega^3\,(c^3b+c^2a^n+nca^{n-1}+n(n-1)\,a^{n-2})\\+\frac{1}{24}\,\omega^4\,(c^4b+c^3a^n+nc^2a^{n-1}+n(n-1)\,ca^{n-2}+n(n-1)(n-2)\,a^{n-3})\text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Если количество ω взять достаточно малым, то этот ряд будет сходиться сколь угодно быстро и, если таким же образом положить, что $a+\omega=a'$ и что соответствующее начение $y=b'$, то отсюда мы тем же способом придем к следующим значениям; эту операцию можно продолжать докуда угодно.

ПРИМЕР 2

662. *Найти приближенно полный интеграл дифференциального уравнения* $dy = dx\,(x^2 + y^2)$.

Так как здесь $\frac{dy}{dx} = V = x^2 + y^2$, то, дифференцируя последовательно, будем иметь:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 2x^2y + 2y^3$$

и

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2 + 4xy + 2x^4 + 8x^2y^2 + 6y^4,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 4y + 12x^3 + 20xy^2 + 16x^4y + 40x^2y^3 + 24y^5,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 40x^2 + 24y^2 + 104x^3y + 120xy^3 + 16x^6 + 136x^4y^2 + 240x^2y^4 + 120y^6.$$

и т. д.

Поэтому если вначале $x = a$ и $y = b$, то будем иметь:

$$A = a^2 + b^2,$$

$$B = 2a + 2a^2b + 2b^3,$$

$$C = 2 + 4ab + 2a^4 + 8a^2b^2 + 6b^4,$$

$$D = 4b + 12a^3 + 20ab^2 + 16a^4b + 40a^2b^3 + 24b^5,$$

$$E = 49a^2 + 24b^2 + 104a^3b + 120ab^3 + 16a^6 + 136a^4b^2 + 240a^2b^4 + 120b^6.$$

Стало быть, какому-либо другому значению $x = a + \omega$ будет соответствовать

$$y = b + A\omega + \frac{1}{2}B\omega^2 + \frac{1}{6}C\omega^3 + \frac{1}{24}D\omega^4 + \frac{1}{120}E\omega^5 + \text{ и т. д.}$$

и из таких двух значений — пусть это будут $x = a'$ и $y = b'$, снова можно получить следующие значения.

ПОЯСНЕНИЕ

663. Так как все дело сводится к нахождению этих коэффициентов A, B, C, D и т. д., то я замечу, что эти же коэффициенты можно найти и без дифференцирования. На последнем разобранном примере $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ это обнаружится следующим образом.

Поскольку мы установили, что $y = b$ при $x = a$, положим в общем виде $x = a + \omega$ и $y = b + \psi$; тогда наше уравнение примет такой вид:

$$\frac{d\psi}{d\omega} = a^2 + b^2 + 2a\omega + \omega^2 + 2b\psi + \psi^2;$$

так как с исчезновением ω одновременно исчезает ψ, положим

$$\psi = \alpha\omega + \beta\omega^2 + \gamma\omega^3 + \delta\omega^4 + \varepsilon\omega^5 + \text{ и т. д.}$$

Подставив это значение, получим:

$$\begin{aligned} &\alpha + 2\beta\omega + 3\gamma\omega^2 + 4\delta\omega^3 + 5\varepsilon\omega^4 + \text{ и т. д.} \\ = {} & a^2 + b^2 + 2a\omega + \omega^2 \\ & + 2\alpha b\omega + 2\beta b\omega^2 + 2\gamma b\omega^3 + 2\delta b\omega^4 \\ & + \alpha^2\omega^2 + 2\alpha\beta\omega^3 + 2\alpha\gamma\omega^4 \\ & + \beta^2\omega^4; \end{aligned}$$

приведя каждый член в отдельности к нулю, получим:

$$\alpha = a^2 + b^2, \quad 2\beta = 2\alpha b + 2a, \quad 3\gamma = 2\beta b + \alpha^2 + 1,$$
$$4\delta = 2\gamma b + 2\alpha\beta, \quad 5\varepsilon = 2\delta b + 2\alpha\gamma + \beta^2, \quad 6\zeta = 2\varepsilon b + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma \text{ и т. д.}$$

Отсюда получаются те же значения, что были найдены выше при помощи дифференцирования. Этот метод не только проще, чем предыдущий, но он еще и тем превосходит предыдущий метод, что его можно применять всегда, тогда как предыдущий метод в некоторых случаях мы стали бы применять понапрасну. Такой случай имел бы место в приведенных примерах, если начальные значения a и b исчезали бы, так как при этом очень многие коэффициенты обратились бы в нуль. На это неудобство мы обратили внимание уже выше: более того, возможен и такой случай, когда все коэффициенты либо исчезают, либо обращаются в бесконечность. Но это имеет место только на определенных промежутках, для которых придется поэтому проводить вычисление особым способом. Для остальных же промежутков, по-видимому, удобнее применять изложенный здесь метод последовательного дифференцирования, так как последнее часто выполняется проще, чем подстановка, и подчиняется определенным правилам, имеющим место всегда — даже для трансцендентных уравнений. Итак, нам подлежит изложить правила, относящиеся к вышеуказанным особым промежуткам.

ЗАДАЧА 87

664. *Пусть при интегрировании уравнения* $\frac{dy}{dx} = V$ *оказывается, что для какого-либо интервала количество* V *либо исчезает, либо становится бесконечным. Указать [способ] интегрирования для этого промежутка.*

РЕШЕНИЕ

Пусть в начале рассматриваемого нами промежутка имеем $x = a$ и $y = b$; положим $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$, так что (поскольку в этом случае V либо исчезает, либо обращается в бесконечность) либо P, либо Q, либо оба [эти количества] исчезают при $x = a$ и $y = b$. Чтобы от этих граничных значений пойти далее, положим $x = a + \omega$ и $y = b + \psi$; тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{d\psi}{d\omega}$. Как P, так и Q будет функцией количеств ω и ψ, из которых по крайней мере одно исчезает при $\omega = 0$, $\psi = 0$. Чтобы найти отношение между

ω и ψ хотя бы приближенно, положим $\psi = m\omega^n$; тогда $\frac{d\psi}{d\omega} = mn\omega^{n-1}$, откуда $mnQ\omega^{n-1} = P$.

Здесь P и Q в силу соотношения $\psi = m\omega^n$ будут содержать степени одного только количества ω[1]); из этих степеней достаточно удержать лишь наименьшие, так как по сравнению с ними можно более высшие степени рассматривать как исчезающие.

Итак, надо приравнять друг другу низшие степени количества ω и вместе с тем привести их к нулю[2]); отсюда определится как показатель n, так и коэффициент m. Если бы мы пожелали затем точнее узнать соотношение между ω и ψ, то, найдя m и n, перейдем к более высоким степеням, положив

$$\psi = m\omega^n + M\omega^{n+m} + N\omega^{n+\nu} \text{ и т. д.},$$

и отсюда определим подобным же образом столько же последующих членов, сколько окажется необходимым в зависимости от величины промежутка, т. е. частицы ω.

СЛЕДСТВИЕ 1

665. Пусть при $x = a$ и $y = b$ ни P, ни Q не исчезают; тогда, применив подстановку $[x = a + \omega,\ y = b + \psi]$, найдем $\frac{d\psi}{d\omega} = \frac{A + \text{ и т. д.}}{a + \text{ и т. д.}}$; отсюда приближенно $a\,d\psi = A\,d\omega$ и $\psi = \frac{A}{a}\omega$. Это есть первый член предшествующего приближения: когда мы его найдем, остальные получатся так же, как прежде.

СЛЕДСТВИЕ 2

666. Если исчезнет только a, то будем иметь приближенно[3])

$$\frac{d\psi}{d\omega}(M\omega^\mu + N\psi^\nu) = A;$$

отсюда, положив $\psi = m\omega^n$, получаем:

$$A = mn\omega^{n-1}(M\omega^\mu + Mm^\nu\omega^{n\nu}).$$

Если здесь $n\nu > \mu$, то должно быть $n = 1 - \mu$ и $mnM = A$. Но это имеет силу лишь при условии, что $\nu(1 - \mu) > \mu$, т. е. что $\nu > \frac{\mu}{1-\mu}$. Если же $\nu < \frac{\mu}{1-\mu}$, то надо положить $n - 1 + n\nu = 0$, т. е. $n = \frac{1}{1+\nu}$, рассматривая второй член как более низкую степень. Если же будем иметь $\nu = \frac{\mu}{1-\mu}$, то оба члена надо будет рассматривать как равные степени; получим $n = 1 - \mu$ и $A = mn(M + N\mu^\nu)$; отсюда надо определить m.

---

[1]) meras potestates ipsius ω; дословно: «чистые степени количества ω».

[2]) То есть приравниваются и показатели низших степеней и коэффициенты соответствующих членов.

[3]) Буквы M, N, μ, ν здесь имеют не тот смысл, что в § 664. Рассмотренное дифференциальное уравнение имеет вид $\frac{d\psi}{d\omega} = \frac{A + \ldots}{M\omega^\mu + N\psi^\nu + \ldots}$.

ПОЯСНЕНИЕ

667. Вряд ли можно дать здесь какие-либо указания общего характера, но в каждом представившемся случае нетрудно усмотреть все, что ведет к решению. Если все показатели были бы целыми, то можно было бы воспользоваться правилом Ньютона, которое устанавливает с помощью параллелограмма [вид] решения; как привести дробные показатели к целым, также хорошо известно. Такие случаи встречаются столь редко, что было бы бесполезно входить в подробные разъяснения [приемов], которые опытный человек легко изобретет в каждом случае. Пусть, например, мы пришли к уравнению $\frac{d\psi}{d\omega}(\alpha\sqrt{\omega}+\beta\psi)=\gamma$; из сказанного выше ясно, что первая операция даст $\psi=m\sqrt{\omega}$, откуда получаем $\frac{1}{2}m(\alpha+\beta m)=\gamma$, а отсюда становится известным m (два значения). Более того, данное уравнение, если положить $\sqrt{\omega}=p$, приводится к однородному и поэтому может быть проинтегрировано точно. Я не буду более подробно останавливаться на этих вещах, которые вряд ли окажутся когда-либо полезными, и перейду к последнему вопросу, который подлежит рассмотрению в этой части, а именно, каким образом надо решать дифференциальные уравнения, в которые отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}=p$ входит либо с несколькими измерениями, либо даже трансцендентно. Покончив с этим вопросом, я перейду ко второй части, в которой мы встретимся с дифференциалами высших порядков.

ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
КНИГА ПЕРВАЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ИЛИ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО ПО КАКОМУ-НИБУДЬ ДАННОМУ СООТНОШЕНИЮ МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ
О РЕШЕНИИ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, В КОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ДОСТИГАЮТ НЕСКОЛЬКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ИЛИ ВХОДЯТ ДАЖЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНО

ЗАДАЧА 88

668. *Положим отношение дифференциалов* $\frac{dy}{dx} = p$. *Пусть предложено какое-либо уравнение между двумя количествами* x *и* p. *Найти соотношение между самими переменными* x *и* y.

РЕШЕНИЕ

Пусть дано уравнение между p и x; допуская разрешимость уравнений, можно из этого уравнения искать [выражение] p через x и найти функцию от x, равную количеству p. Значит, мы придем к уравнению вида $p = X$, где X есть некоторая функция только от x. Поскольку $p = \frac{dy}{dx}$, мы будем иметь $dy = X\,dx$, и таким образом вопрос приводится к [задаче, рассмотренной] в первом разделе: надо найти интеграл выражения $X\,dx$, после чего искомый интеграл будет $y = \int X\,dx$.

Если заданное уравнение между x и p будет иметь такой вид, что из него легче выразить x через p, чем p через x, то будем искать x, и получится $x = P$, где P есть какая-либо функция от p. Продифференцировав это уравнение, получим $dx = dP$, а отсюда $dy = p\,dx = p\,dP$.

Интегрируя, получаем $y = \int p\,dP$ или $y = pP - \int P\,dp$. Значит, два переменных x и y выразятся через третье p следующим образом:

$$x = P \quad \text{и} \quad y = pP - \int P\,dp,$$

откуда выявляется соотношение между x и y.

Если нельзя с удобством определить ни p через x, ни x через p, часто можно достичь того, что и то и другое количество с удобством определяется через новое количество u. Положим, что мы нашли $x = U$ и $p = V$, где U и V являются функциями одного и того же переменного u. Тогда будем иметь $dy = p\,dx = V\,dU$ и $y = \int V\,dU$; таким образом x и y выражаются через одно и то же новое переменное количество u.

СЛЕДСТВИЕ 1

669. Таким же образом может быть разрешен и случай, когда предложено любое уравнение между p и вторым переменным количеством y, так как две переменные x и y можно поменять [ролями]. При этом определим ли мы p через y, или y через p, или и то и другое через новое переменное u, надо иметь в виду, что $dx = \frac{dy}{p}$.

СЛЕДСТВИЕ 2

670. Элемент дуги кривой, прямоугольные координаты которой x и y, представляется выражением $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Если отношение

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \sqrt{1 + p^2} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{p}$$

будет равняться функции либо от x, либо от y, то отсюда можно будет найти соотношение между x и y.

СЛЕДСТВИЕ 3

671. Так как соотношение между x и y находится путем интегрирования, то при этом вводится новое постоянное количество; поэтому такое соотношение надо считать полным интегралом.

ПОЯСНЕНИЕ 1

672. До сих пор мы подвергали рассмотрению только такие дифференциальные уравнения, где $\left(\text{если положить } \frac{dy}{dx} = p\right)$ предлагается соотношение между тремя количествами x, y и p, из которого можно

с удобством выразить значение количества p через x и y, так что $p=\frac{dy}{dx}$ будет равняться некоторой функции от x и y. Теперь же мы переходим к рассмотрению таких соотношений между x, y и p, откуда значение p или определяется через x и y не столь удобно, или вовсе не поддается определению. При этом простейшим случаем, несомненно, является тот, когда в предложенном соотношении одно из переменных количеств (x или y) вовсе отсутствует, так что предлагается только соотношение между p и x или между p и y; этот случай мы и разобрали в настоящей задаче.

Сущность решения состоит в том, что из предложенного уравнения между x и p определяют не букву p через x (разве что это может оказаться более легким), а наоборот, x через p или даже обе эти буквы через новое переменное u. Если, например, предложено уравнение

$$x\,dx+a\,dy=b\sqrt{dx^2+dy^2}\,,$$

которое, если положить $\frac{dy}{dx}=p$, принимает вид

$$x+ap=b\sqrt{1+p^2}\,,$$

то из него не легко определить p через x. Но так как

$$x=b\sqrt{1+p^2}-ap$$

и так как

$$y=\int p\,dx=px-\int x\,dp,$$

то будем иметь:

$$y=bp\sqrt{1+p^2}-ap^2-b\int dp\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}ap^2.$$

Тем самым устанавливается соотношение между x и y.

Пусть теперь мы пришли к такому уравнению

$$x^3\,dx^3+dy^3=ax\,dx^2\,dy \quad \text{или} \quad x^3+p^3=apx;$$

здесь уже не удается удобным образом определить ни x через p, ни p через x. Поэтому я полагаю $p=ux$, откуда имеем $x+u^3x=au$; значит, $x=\frac{au}{1+u^3}$ и $p=\frac{au^2}{1+u^3}$.

А так как теперь $dx=\frac{a\,du\,(1-2u^3)}{(1+u^3)^2}$, то получаем:

$$y=a^2\int\frac{u^2\,du\,(1-2u^3)}{(1+u^3)^3}\,;$$

приведя к более простому виду, получаем:

$$y=\frac{1}{6}a^2\cdot\frac{2u^3-1}{(1+u^3)^2}-a^2\int\frac{u^2\,du}{(1+u^3)^2} \quad \text{или} \quad y=\frac{1}{6}a^2\,\frac{2u^3-1}{(1+u^3)^2}+\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{1}{1+u^3}+\mathrm{Const}.$$

ПОЯСНЕНИЕ 2

673. После того как нам удалось разобрать в общем виде тот случай, когда предлагается уравнение между x и p или между y и p, надо будет рассмотреть, в каких же случаях удается решить предложенное

уравнение, если в него входят все три количества x, y и p. Прежде всего замечу, что если два переменных x и y всюду составляют одно и то же число измерений, то каким бы образом ни входило, сверх того, количество p, решение всегда можно свести к ранее рассмотренным случаям, а именно, с такими уравнениями можно поступать совершенно так же, как с уравнениями однородными; к этому типу их по праву и относят; действительно, поскольку измерения, порождаемые дифференциалами, должны быть всюду равны, надо требовать выполнения условия однородности только от конечных количеств x и y. Поэтому всякий раз, как они всюду составляют одно и то же число измерений, надо будет считать уравнение однородным. Таково, например, уравнение

$$x^2\,dy - y^2\sqrt{dx^2+dy^2}=0 \quad \text{или} \quad px^2-y^2\sqrt{1+p^2}=0.$$

Далее, допускают решение также такие уравнения, в которых одна из переменных, x или y, нигде не имеет более одного измерения, каким бы образом ни входило, сверх того, отношение дифференциалов $p=\frac{dy}{dx}$. На этих случаях мы остановимся здесь подробнее.

ЗАДАЧА 89

674. *Пусть в предложенном уравнении между x, y и p $\left(где\ p=\frac{dy}{dx}\right)$ два переменных количества x и y всюду составляют одно и то же число измерений. Найти соотношение между x и y, которое было бы полным интегралом этого уравнения.*

РЕШЕНИЕ

Так как в предложенном уравнении между x, y и p два переменных количества x и y составляют одно и то же число измерений, то если положить $y=ux$, количество x уничтожится при делении, и получится уравнение, содержащее только два количества u и p; оно определит соотношение между этими количествами, так что можно будет выразить либо u через p, либо p через u. Теперь из $y=ux$ следует, что $dy=u\,dx+x\,du$, а так как $dy=p\,dx$, то будем иметь $p\,dx-u\,dx=x\,du$, и поэтому $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$. А так как p задано через u, то дифференциальное выражение $\frac{du}{p-u}$, заключающее только одно переменное количество, можно будет проинтегрировать по правилам, изложенным в первом разделе, и будем иметь $lx=\int\frac{du}{p-u}$. Таким образом, x выражается через u, а поскольку $y=ux$, оба переменные x и y определяются через одно и то же третье переменное u. Так как интегрирование вводит произвольное постоянное, то это соотношение между x и y будет полным интегралом.

СЛЕДСТВИЕ 1

675. Так как $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$, то будем также иметь $lx=-l(p-u)+\int\frac{dp}{p-u}$. Эта формула удобнее в том случае, когда из предложенного уравнения между p и u легче выразить количество u через p.

СЛЕДСТВИЕ 2

676. Если интеграл $\int \frac{du}{p-u}$ или $\int \frac{dp}{p-u}$ можно выразить при помощи логарифмов, так что $\int \frac{du}{p-u} = lU$, то будем иметь $lx = lC + lU$, откуда $x = CU$ и $y = CUu$. Следовательно, соотношение между x и y можно выразить алгебраически, а так как $u = \frac{y}{x}$, то эту третью переменную u легко исключить.

ПОЯСНЕНИЕ

677. Для обыкновенных однородных уравнений мы дали выше [§ 406] то же самое решение; последнее, таким образом, не находится в зависимости от измерений дифференциалов; более того, оно остается в силе и тогда, когда отношение дифференциалов входит в уравнение трансцендентно. Действительно, решение приводится к интегрированию дифференциального уравнения с разделенными переменными $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$ тем же способом, каким это было сделано при помощи первого метода. Второй же метод, которым мы пользовались выше, когда мы искали интегрирующий множитель, который делал бы дифференциальное уравнение непосредственно интегрируемым, здесь совершенно не может иметь места, так как в результате дифференцирования конечного уравнения дифференциалы никогда не могут приобрести несколько измерений. Стало быть, этим способом[1]) мы находим не то конечное уравнение между x и y, которое в результате дифференцирования воспроизвело бы само предложенное уравнение, но, по крайней мере, такое, которое согласуется с ним[2]), чему не препятствует то постоянное, которое, войдя в уравнение благодаря интегрированию, делает интеграл полным[3]).

ПРИМЕР 1

678. *Пусть ни одно из переменных количеств x и y само не входит в предложенное уравнение, а входит только отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx} = p$. Найти полный интеграл.*

Положим $\frac{dy}{dx} = p$; тогда предложенное уравнение будет содержать единственное переменное p и постоянные; значит, решив это уравнение, поскольку оно содержит несколько корней, получим $p = \alpha$, $p = \beta$, $p = \gamma$ и т. д. А так как $p = \frac{dy}{dx}$, то из отдельных корней получаются полные интегралы, каковыми будут

$$y = \alpha x + a, \quad y = \beta x + b, \quad y = \gamma x + c \text{ и т. д.}$$

---

[1]) То есть способом разделения переменных.

[2]) sed quae saltem cum ea conveniat; этим Эйлер, повидимому, хочет выразить ту смысль, что всякая функция $y = f(x)$, удовлетворяющая конечному уравнению, найденному описанным способом, удовлетворит данному дифференциальному уравнению.

[3]) et quidem non obstante arbitraria illa constante, quae per integrationem ingressa, integrale completum reddit; не совсем ясно, какой смысл Эйлер хотел вложить в эту фразу и чему именно могли бы препятствовать постоянные интегрирования: тому ли, чтобы имело место «согласование» с данным уравнением, или тому, чтобы последнее не воспроизводилось с помощью дифференцирования. Грамматически напрашивается первое толкование; по смыслу же представляется более вероятным второе.

Каждый из этих интегралов в равной мере удовлетворяет предложенному уравнению. Если бы мы захотели все эти интегралы охватить одним конечным уравнением, то полный интеграл имел бы вид

$$(y-\alpha x-a)(y-\beta x-b)(y-\gamma x-c) \text{ и т. д.} =0.$$

Этот интеграл, как мы видим, заключает не одно новое постоянное, а несколько: a, b, c и т. д., а именно столько, сколько корней имеет дифференциальное уравнение нескольких измерений.

СЛЕДСТВИЕ 1

679. Так, для дифференциального уравнения

$$dy^2-dx^2=0 \quad \text{или} \quad p^2-1=0$$

ввиду того, что $p=+1$ и $p=-1$, имеем два интеграла: $y=x+a$ и $y=x+b$; если их объединить, получим:

$$(y-x-a)(y+x-b)=0$$

или

$$y^2-x^2-(a+b)y-(a-b)x+ab=0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2

680. Пусть предложено уравнение

$$dy^3+dx^3=0 \quad \text{или} \quad p^3+1=0,$$

так как его корни суть $p=-1$, $p=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ и $p=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, то будем иметь либо $y=-x+a$, либо $y=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}x+b$, либо $y=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}x+c$; объединив эти уравнения, получим:

$$\begin{aligned}y^3+x^3-(a+b+c)\,y^2+\left(a-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}b-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}c\right)xy\\+\left(-a+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}b+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}c\right)x^2+(ab+ac+bc)\,y\\+\left(bc-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}ac-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}ab\right)x-abc=0.\end{aligned}$$

Это уравнение можно выразить еще и так:

$$y^3+x^3-fy^2-gxy-hx^2+Ay+Bx+C=0,$$

где постоянные A, B, C должны быть такими, чтобы это уравнение допускало разложение на три простых.

ПРИМЕР 2

681. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$y\,dx-x\sqrt{dx^2+dy^2}=0.$$

Найти его полный интеграл.

Положив $\frac{dy}{dx}=p$, получаем $y-x\sqrt{1+p^2}=0$. Пусть $y=ux$; тогда будем иметь:

$$u=\sqrt{1+p^2} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u},$$

откуда по второй формуле [1])

$$lx=-l(p-u)+\int\frac{dp}{p-\sqrt{1+p^2}}=-l(p-u)-\int dp\,(p+\sqrt{1+p^2})$$

и

$$\int dp\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}l\,(p+\sqrt{1+p^2}),$$

откуда заключаем, что

$$\begin{aligned} lx&=C-\frac{1}{2}l\left(\sqrt{1+p^2}-p\right)-\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}-\frac{1}{2}p^2\\ &=C+\frac{1}{2}l\left(\sqrt{1+p^2}+p\right)-\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}-\frac{1}{2}p^2 \end{aligned}$$

и

$$y=ux=x\sqrt{p^2+1}.$$

ПРИМЕР 3

682. *Найти полный интеграл уравнений*

$$y\,dx-x\,dy=nx\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Так как $\frac{dy}{dx}=p$, т наше уравнение есть $y-px=nx\sqrt{1+p^2}$; если положить $y=ux$, оно переходит в

$$u-p=n\sqrt{1+p^2}.$$

Поскольку

$$lx=-l(p-u)+\int\frac{dp}{p-u},$$

будем иметь:

$$lx=-\ln\sqrt{1+p^2}-\int\frac{dp}{n\sqrt{1+p^2}},$$

откуда

$$lx=C-\ln\sqrt{1+p^2}-\frac{1}{n}l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right).$$

Поэтому имеем:

$$x=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\left(\sqrt{1+p^2}-p\right)^{\frac{1}{n}}$$

и

$$y=\frac{a\,(p+n\sqrt{1+p^2})}{\sqrt{1+p^2}}\left(\sqrt{1+p^2}-p\right)^{\frac{1}{n}}.$$

А так как $u^2-2up+p^2=n^2+n^2p^2$, то будем иметь:

$$p=\frac{u-n\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{1+p^2}=\frac{-nu+\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n^2}$$

[1]) То есть по формуле § 675.

и

$$\sqrt{1+p^2}-p=\frac{-u+\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n},$$

откуда

$$\frac{x\left(-nu+\sqrt{u^2+1-n^2}\right)}{a\,(1-n^2)}=\left(\frac{-u+\sqrt{u^2+1-n^2}}{1-n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

где

$$u=\frac{y}{x}.$$

Если $n=1$, то будем иметь:

$$p=\frac{u^2-1}{2u},\quad \sqrt{1+p^2}=\frac{u^2+1}{2u}$$

и

$$x=\frac{2au}{u^2+1}\cdot\frac{1}{u}=\frac{2ax^2}{x^2+y^2},$$

или

$$y^2+x^2=2ax.$$

Если $n=-1$, то получаем, как в предыдущем случае,

$$p=\frac{u^2-1}{2u}\quad\text{и}\quad\sqrt{1+p^2}=\frac{-u^2-1}{2u},$$

откуда

$$x=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\left(\sqrt{1+p^2}+p\right)=\frac{2a}{1+u^2}=\frac{2ax^2}{x^2+y^2}.$$

Значит, и $x=0$, и $x^2+y^2-2ax=0$ [1]).

ПОЯСНЕНИЕ

683. Это уравнение, если в обеих его частях взять квадраты и извлечь его корень $p=\frac{dy}{dx}$, приводится к обыкновенному однородному уравнению. В самом деле, сначала получаем:

$$y^2-2p\,xy+p^2x^2=n^2x^2+n^2p^2x^2,$$

а затем

$$px=\frac{x\,dy}{dx}=\frac{y\pm n\sqrt{y^2+x^2-n^2x^2}}{1-n^2}.$$

Это уравнение, если положить $y=ux$, станет уравнением с разделяющимися переменными. Особо надо отметить случай, когда $n^2=1$; тогда имеем $y^2-2pxy=x^2$, или

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy},$$

так что

$$2xy\,dy+x^2\,dx-y^2\,dx=0.$$

---

[1]) В оригинале: $\ldots\, x=\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\left(\sqrt{1+p^2}+p\right)=-\frac{2a}{1+u^2}=-\frac{2ax^2}{x^2+y^2}$. Значит, и $x=0$, и $x^2+y^2+2ax=0$. (В Полном собрании сочинений ошибка исправлена.)

Это уравнение можно интегрировать и по частям[1]), так как $2xy\,dy - y^2\,dx$ становится интегрируемым при помощи множителя $\frac{1}{xy^2} f\left(\frac{y^2}{x}\right)$; для того чтобы при этом также и часть x^2dx стала интегрируемой, вышеупомянутый множитель должен принять вид $\frac{1}{x^2}$, и таким образом, мы получим уравнение

$$\frac{2\,xy\,dy - y^2\,dx}{x^2} + dx = 0,$$

интеграл которого есть $\frac{y^2}{x} + x = 2a$, как и прежде, с той лишь разницей, что второе решение $x = 0$ не обнаруживается. Дело в том, что когда наше квадратное уравнение при $n = 1$ вдруг становится простым, второй корень пропадает[2]). Но его можно найти, положив $n = 1 - \alpha$; тогда имеем:

$$y^2 - 2pxy = x^2 - 2\alpha x^2 - 2\alpha p^2 x^2,$$

и поэтому px бесконечно; если теперь отбросить члены, исчезающие по сравнению с другими, то получим:

$$-2pxy = x^2 - 2\alpha p^2 x^2,$$

а это уравнение допускает деление на x и потому дает второе решение $x = 0$. Такое решение приводит к успешному результату, когда значение p можно получить с помощью извлечения корня; если же уравнение имеет большее количество измерений, а тем более является трансцендентным, то мы не можем обойтись без применения изложенного здесь метода.

ПРИМЕР 4

684. *Предложено уравнение*

$$x\,dy^3 + y\,dx^3 = dy\,dx\sqrt{xy\,(dx^2 + dy^2)};$$

найти его полный интеграл.

---

[1]) per partes; «интегрирование по частям» состоит в том, что левая часть уравнения $\left(\text{предварительно умноженного на } \frac{1}{x^2}\right)$ разбивается на два слагаемых (на две части), каждое из которых является полным дифференциалом. В современной терминологии наименование «интегрирование по частям» сохранялось для частного случая, когда одно из слагаемых рассматривается как дифференциал произведения.

[2]) «Исчезновение» решения $x = 0$, как легко видеть, не стоит ни в какой связи с понижением степени уравнения

$$y^2 - 2px + p^2x^2 = n^2x^2 + n^2p^2x^2; \qquad (1)$$

записав его в виде

$$q^2 - 2qx + x^2 = n^2x^2q^2 + n^2x^2, \qquad (2)$$

где $q = \frac{1}{p} = \frac{dx}{dy}$, мы видим, что $x = 0$ является и в общем случае решением (в расширенном смысле) для обоих корней уравнения (1); в этом же смысле оно является решением и для частного случая $n = 1$. Ничего неожиданного поэтому не будет в том, что и с помощью предельного перехода, предпринятого ниже, обнаружится тот же результат. Цель этого предельного перехода состоит, очевидно, в том, чтобы все члены делились на x. Но эта цель достигается лишь ценой необоснованных «отбрасываний». Причина «исчезновения» решения $x = 0$ состоит, конечно, в том, что был введен интегрирующий множитель $\frac{1}{x^2}$. Впрочем, и в интеграле $\frac{y^2}{x} + x = 2a$ решение $x = 0$ содержится в качестве предельного случая.

Если положить $\frac{dy}{dx}=p$ и $y=ux$, то наше уравнение получит такой вид:

$$p^3+u=p\sqrt{u(1+p^2)}.$$

Теперь составляем [уравнение]

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$$

или

$$lx=\int\frac{du}{p-u}=-l(p-u)+\int\frac{dp}{p-u}.$$

Но из данного уравнения следует, что

$$\sqrt{u}=\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}p\sqrt{1-4p+p^2}$$

или, возводя в квадрат,

$$u=\frac{1}{2}p^2-p^3+\frac{1}{2}p^4+\frac{1}{2}p^2\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)},$$

а отсюда

$$p-u=\frac{1}{2}p(1+p^2)(2-p)-\frac{1}{2}p^2\sqrt{(1+p^2)(1-4p+p^2)},$$

откуда получаем:

$$\frac{dp}{p-u}=\frac{dp(2-p)}{2p(1-p+p^2)}+\frac{dp\sqrt{1-4p+p^2}}{2(1-p+p^2)\sqrt{1+p^2}}.$$

Во втором из этих членов положим

$$\sqrt{\frac{1-4p+p^2}{1+p^2}}=q.$$

Так как

$$p=\frac{2+\sqrt{4-(1-q^2)^2}}{1-q^2},$$

$$dp=\frac{4q\,dq\left(2+\sqrt{4-(1-q^2)^2}\right)}{(1-q^2)^2\sqrt{4-(1-q^2)^2}}$$

и

$$1-p+p^2=\frac{(3+q^2)\left(2+\sqrt{4-(1-q^2)^2}\right)}{(1-q^2)^2},$$

то получим:

$$\int\frac{dp}{p-u}=\frac{1}{2}\int\frac{dp(2-p)}{p(1-p+p^2)}+2\int\frac{q^2\,dq}{(3+q^2)\sqrt{4-(1-q^2)}},$$

где второй член не интегрируется ни при помощи логарифмов, ни при помощи круговых дуг.

ПРИМЕР 5

685. *Найти такое соотношение между x и y, чтобы, если положить $s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}$, получилось $s^2=2xy$.*

Так как $s = \sqrt{2xy}$, то будем иметь:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{x\,dy + y\,dx}{\sqrt{2xy}}.$$

Если положить $\frac{dy}{dx} = p$, а $y = ux$, то отсюда получим:

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{p+u}{\sqrt{2u}},$$

или $u = \sqrt{2u(1+p^2)} - p$, и, извлекая корень,

$$\sqrt{u} = \sqrt{\frac{1+p^2}{2}} + \frac{1-p}{\sqrt{2}} = \frac{1-p+\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2}},$$

поэтому

$$u = 1 - p + p^2 + (1-p)\sqrt{1+p^2}$$

и

$$p - u = -(1-p)(1-p+\sqrt{1+p^2}).$$

Значит,

$$\int \frac{dp}{p-u} = \int \frac{dp}{2p(1-p)}(1-p-\sqrt{1+p^2}) = \frac{1}{2}\,lp - \frac{1}{2}\int \frac{dp\sqrt{1+p^2}}{p(1-p)}.$$

Положив $p = \frac{1-q^2}{2q}$, имеем:

$$\int \frac{dp\sqrt{1+p^2}}{p(1-p)} = \int \frac{-dq\,(1+q^2)^2}{q(1-q^2)(q^2+2q-1)}$$
$$= \int \frac{dq}{q} - 2\int \frac{dq}{1-q^2} - 4\int \frac{dq}{(q+1)^2-2} = lq - l\,\frac{1+q}{1-q} + \sqrt{2}\,l\,\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q}$$

и отсюда

$$\int \frac{dp}{p-u} = \frac{1}{2}\,lp - \frac{1}{2}\,lq + \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+q}{1-q}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q} = l\left(\frac{1+q}{2q}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q}.$$

Теперь

$$p - u = \frac{(1+q)(1-2q-q^2)}{2q} = \frac{(1+q)(2-(1-q)^2)}{2q},$$

и, таким образом, имеем:

$$lx = C - l(1+q) + lq - l(2-(1+q)^2) + l\left(\frac{1+q}{q}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q}$$
$$= l(2a) - l(2-(1+q)^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{2}+1+q}{\sqrt{2}-1-q},$$

где $u=\frac{y}{x}=\frac{1}{2}(1+q)^2$ и $1+q=\sqrt{\frac{2y}{x}}$, откуда

$$x=\frac{ax}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

или

$$x-y=a\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

или

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=a\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}.$$

Итак, получилось так называемое интерсцендентное [1]) уравнение между x и y.

ПОЯСНЕНИЕ

686. Это решение завершается легче, если прямо из уравнения

$$u+p=\sqrt{2u(1+p^2)}$$

или

$$u^2+2up+p^2=2u+2up^2$$

искать значение количества p. Будем иметь:

$$p=\frac{u+\sqrt{u^2-4u^2+2u+2u^3-u^2}}{2u-1}$$

или из

$$p=\frac{u+(1-u)\sqrt{2u}}{2u-1}$$

и

$$p-u=\frac{(1-u)(2u+\sqrt{2u})}{2u-1}=\frac{(1-u)\sqrt{2u}}{\sqrt{2u}-1}.$$

Поэтому

$$lx=\int\frac{du}{p-u}=\int\frac{du(\sqrt{2u}-1)}{(1-u)\sqrt{2u}}=C-l(1-u)-\int\frac{du}{(1-u)\sqrt{2u}}.$$

Пусть $u=v^2$; тогда

$$\int\frac{du}{(1-u)\sqrt{2u}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{2dv}{1-v^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{1+v}{1-v},$$

откуда

$$lx=la-l(1-u)-\frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}.$$

[1]) interscendens — термин, созданный искусственно на манер термина transcendens (трансцендентный); последний в буквальном переводе означает превосходящий; попытавшись перевести столь же буквально слово interscendens, мы могли бы сказать «через восходящий» — слово, которое звучит по-русски так же плохо, как interscendens по-латыни.

Поскольку $u=\frac{y}{x}$, находим:

$$x=\frac{ax}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

как было найдено и выше. Поэтому, если требуется найти кривую, которая была бы определена прямоугольными координатами x и y так, чтобы ее дуга s была $=\sqrt{2xy}$, то уравнение, определяющее ее природу, будет

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}=a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}$$

Впрочем, очевидно, что таким же образом можно разрешить вопрос, если дуга s будет равняться какой угодно однородной функции одного измерения количеств x и y или если будет предложено любое однородное уравнение между x, y и s. Полезно будет показать это в следующей задаче.

ЗАДАЧА 90

687. *Пусть* $s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ *и пусть предложено какое-либо однородное уравнение между* x, y *и* s, *т. е. такое, в котором эти три переменные* x, y *и* s *всюду составляют одно и то же число измерений. Найти конечное уравнение между* x *и* y.

РЕШЕНИЕ

Положим $y=ux$ и $s=vx$; благодаря такой подстановке из предложенного однородного уравнения исключается переменное x, и мы получим уравнение между двумя переменными u и v, откуда можно определить v через u. Пусть, далее, $dy=p\,dx$; тогда $ds=dx\sqrt{1+p^2}$, и мы будем иметь:

$$p\,dx=u\,dx+x\,du$$

и

$$dx\sqrt{1+p^2}=v\,dx+x\,dv;$$

значит,

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=\frac{dv}{\sqrt{1+p^2}-v}.$$

Так как теперь v уже задано через u, то пусть $dv=q\,du$; тогда получаем:

$$\sqrt{1+p^2}=v+pq-qu$$

и, взяв квадраты,

$$1+p^2=(v-qu)^2+2pq(v-qu)+p^2q^2,$$

откуда находим:

$$p=\frac{q(v-qu)+\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}{1-q^2}$$

и

$$p-u=\frac{qv-u+\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}{1-q^2}.$$

Отсюда выводим, что

$$\frac{dx}{x}=\frac{du\,(1-q^2)}{qv-u+\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}=\frac{du\,(qv-u-\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2})}{1+u^2-v^2}.$$

Поскольку v и q заданы через u, отсюда можно найти x через то же количество u; а так как $q\,du=dv$, то

$$lx=la-l\sqrt{1+u^2-v}-\int\frac{du\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}{1+u^2-v^2},$$

но, кроме того, имеем $y=ux$, и если вместо u подставить $\frac{y}{x}$, то мы получим искомое уравнение между x и y.

СЛЕДСТВИЕ 1

688. Так как s выражает дугу кривой, соответствующую прямоугольным координатам x и y, то таким образом определяется кривая, дуга которой равна какой-либо функции одного измерения количеств x и y; эта кривая будет алгебраической, если интеграл

$$\int\frac{du\sqrt{(v-qu)^2-1+q^2}}{1+u^2-v^2}$$

можно выразить через логарифмы.

СЛЕДСТВИЕ 2

689. Таким же образом можно было бы решить задачу, если бы s обозначало такое интегральное выражение, что $ds=Q\,dx$, где Q — какая-либо функция количеств p, u и v. В этом случае из равенств $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=\frac{dv}{Q-v}$ надо найти значение количества p, и так как v задано через u, то будем иметь:

$$lx=\int\frac{du}{p-u}.$$

ПРИМЕР 1

690. Пусть требуется, чтобы $s=\alpha x+\beta y$; тогда будем иметь $v=\alpha+\beta u$ и $q=\frac{dv}{du}=\beta$, откуда $v-qu=\alpha$, а следовательно,

$$lx=la-l\sqrt{1+u^2-(\alpha+\beta u)^2}-\int\frac{du\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}{1+u^2-(\alpha+\beta u)^2};$$

этот последний член равен

$$-\int\frac{du\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}{1-\alpha^2-2\alpha\beta u+(1-\beta^2)u^2}=(\alpha^2+\beta^2-1)^{\frac{1}{2}}\int\frac{du}{\alpha^2-1+2\alpha\beta u+(\beta^2-1)u^2};$$

он преобразуется в

$$\int \frac{(\beta^2-1)\,du\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}{\left(u(\beta^2-1)+\alpha\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}\right)\left(u(\beta^2-1)+\alpha\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}\right)} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{(\beta^2-1)\,u+\alpha\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}{(\beta^2-1)\,u+\alpha\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}.$$

Если положить $u=\frac{y}{x}$, то искомое интегральное уравнение по возведении обеих его частей в квадрат принимает вид

$$\frac{x^2+y^2-(\alpha x+\beta y)^2}{a^2}=\frac{(\beta^2-1)\,y+\alpha\beta x-x\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}{(\beta^2-1)\,y+\alpha\beta x+x\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}}.$$

Но если положить

$$(\beta^2-1)\,y+\alpha\beta x-x\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}=P,$$

$$(\beta^2-1)\,y+\alpha\beta x+x\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}=Q,$$

то будем иметь:

$$PQ=(\beta^2-1)^2y^2+2\alpha\beta(\beta^2-1)\,xy + (\alpha^2-1)(\beta^2-1)\,x^2=(\beta^2-1)\left((\alpha x+\beta y)^2-x^2-y^2\right),$$

откуда, изменив постоянную [1]), получим $\frac{PQ}{b^2}=\frac{P}{Q}$; значит, либо $P=0$, либо $Q=b$; таким образом, общее решение [2]) есть

$$(\beta^2-1)\,y+\alpha\beta x\pm x\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}=c,$$

а это — уравнение прямой линии.

ПРИМЕР 2

691. Пусть требуется, чтобы $s=\frac{ny^2}{x}$; тогда будем иметь $v=nu^2$ и $q=2nu$, откуда

$$1+u^2-v^2=1+u^2-n^2u^4 \quad \text{и} \quad v-qu=-nu^2,$$

а значит,

$$lx=la-l\sqrt{1+u^2-n^2u^4}-\int\frac{du\sqrt{n^2u^4-1+4n^2u^2}}{1+u^2-n^2u^4}$$

Это выражение нельзя проинтегрировать при помощи логарифмов.

ПРИМЕР 3

692. Пусть требуется, чтобы $s^2=x^2+y^2$; тогда будем иметь $v=\sqrt{1+u^2}$ и $q=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, откуда $1+u^2-v^2=0$. Значит, решение надо

---

[1]) То есть обозначив $\alpha\sqrt{1-\beta^2}$ через b.

[2]) solutio in genere.

искать из первых формул, откуда имеем [1]):

$$v-qu=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$q^2-1=\frac{-1}{1+u^2} \quad \text{и} \quad qv-u=0.$$

Следовательно, $p-u=0$, т. е. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0$, так что получаем $y=nx$.

ПРИМЕР 4

693. Пусть требуется, чтобы $s^2=y^2+nx^2$, т. е. $v=\sqrt{u^2+n}$ и $q=\frac{u}{\sqrt{u^2+n}}$; тогда будем иметь:

$$1+u^2-v^2=1-n, \quad v-qu=\frac{n}{\sqrt{u^2+n}} \quad \text{и} \quad q^2-1=\frac{-n}{u^2+n}.$$

Поэтому получим:

$$lx=la-l\sqrt{1-n}-\frac{1}{1-n}\int\frac{du\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{u^2+n}}=lb+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\,l\,(u+\sqrt{u^2+n}),$$

откуда

$$\frac{x}{b}=\left(\frac{y+\sqrt{y^2+nx^2}}{x}\right)^{\sqrt{\frac{n}{n-1}}}.$$

Значит, всякий раз, как $\frac{n}{n-1}$ есть квадратное число, уравнение между x и y оказывается алгебраическим.

Пусть $\sqrt{\frac{n}{n-1}}=m$; тогда $n=\frac{m^2}{m^2-1}$ и $s^2=y^2+\frac{m^2x^2}{m^2-1}$. Этому условию удовлетворяет алгебраическое уравнение

$$x^{m+1}=b\left(y+\sqrt{y^2+\frac{m^2x^2}{m^2-1}}\right)^m,$$

которое преобразуется в

$$x^{\frac{2}{m}}-2b^{\frac{1}{m}}x^{\frac{1-m}{m}}y=\frac{m^2}{m^2-1}b^{\frac{2}{m}}$$

или

$$y=\frac{(m^2-1)\,x^{\frac{2}{m}}-m^2b^{\frac{2}{m}}}{2\,(m^2-1)\,b^{\frac{1}{m}}x^{\frac{1-m}{m}}}.$$

---

[1]) Solutionem ergo ex primis formulis repeti convenit, unde fit... Видимо, мысль Эйлера такова: последней формулой § 687 пользоваться нельзя, так как выражение $1+u^2-v^2$, входящее в эту формулу под знаком логарифма и в качестве знаменателя подынтегрального выражения, обращается в нуль. Поэтому Эйлер пользуется «первыми» формулами § 687, т. е. формулами, выражающими p и $p-u$ через u, v, q. Выражения для $v-qu$, q^2-1 и $qv-u$ берутся, конечно, не оттуда, а из данного соотношения $s^2=x^2+y^2$. Подставляя эти выражения во вторую из «первых» формул, получим $p-u=0$.

СЛЕДСТВИЕ

694. Положим $m=\frac{1}{n}$. Тогда, если

$$y=\frac{b^{2n}+(n^2-1)x^{2n}}{2(n^2-1)b^n x^{n-1}},$$

то

$$s^2=y^2-\frac{x^2}{n^2-1},$$

или

$$s=\sqrt{y^2-\frac{x^2}{n^2-1}}.$$

Поэтому, если

$$y=\frac{b^4+3x^4}{6b^2x},$$

то

$$s=\sqrt{y^2-\frac{x^2}{3}}.$$

ЗАДАЧА 91

695. *Положим $\frac{dy}{dx}=p$, и пусть дано такое уравнение между x, y и p, в котором второе переменное y имеет только одно измерение. Найти соотношение между двумя переменными x и y.*

РЕШЕНИЕ

Отсюда [следует, что] y будет равняться некоторой функции от x и p; дифференцируя, получаем $dy=P\,dx+Q\,dp$, а так как $dy=p\,dx$, то будем иметь дифференциальное уравнение $(P-p)\,dx+Q\,dp=0$, которое и надо проинтегрировать. Так как в него входят лишь два переменных x и p, а дифференциалы содержатся в первой степени[1]), то надо пытаться найти его решение с помощью методов, которые были изложены выше[2]).

Во-первых, решение можно будет найти в том случае, если $P=p$, т. е. если $dy=p\,dx+Q\,dp$. Это будет иметь место, если y будет определено через x и p уравнением $y=px+\Pi$, где Π — какая-либо функция от p. Тогда будем иметь $Q=x+\frac{d\Pi}{dx}$, а так как решение сводится к [решению] уравнения $Q\,dp=0$, то [возможно одно из двух]: либо будем иметь $dp=0$ и, значит, $p=\alpha$, т. е. $y=\alpha x+\beta$, где второе постоянное β определяется из самого предложенного уравнения, ибо, положив [в нем] $p=\alpha$, получаем $\beta=\Pi$; либо будем иметь $Q=0$, так что $x=-\frac{d\Pi}{dp}$ и $y=-\frac{p\,d\Pi}{dp}+\Pi$. Очевидно, оба решения являются алгебраическими, если Π есть алгебраическая функция от p.

Во-вторых, уравнение $(P-p)\,dx+Q\,dp=0$ будет допускать решение в том случае, если одна из переменных x со своим дифференциалом dx

---

[1]) simpliciter; дословно: «просто».
[2]) То-есть во втором разделе.

не превосходит одного измерения[1]). Это случится, если будем иметь $y=Px+\Pi$, где P и Π — функции только от p; тогда будем иметь $P=P$ и

$$Q=\frac{x\,dP}{dp}+\frac{d\Pi}{dp};$$

значит, получится уравнение

$$(P-p)\,dx+x\,dP+d\Pi=0$$

или

$$dx+\frac{x\,dP}{P-p}=\frac{-d\Pi}{P-p},$$

которое и надо проинтегрировать; будучи умножено на $e^{\int\frac{dP}{P-p}}$, это уравнение дает

$$e^{\int\frac{dP}{P-p}}x=-\int e^{\int\frac{dP}{P-p}}\frac{d\Pi}{P-p}.$$

Положим $\frac{dP}{P-p}=\frac{dR}{R}$; тогда интегральное уравнение будет

$$Rx=C-\int\frac{R\,d\Pi}{P-p}=C-\int\frac{d\Pi\,dR}{dP},$$

откуда

$$x=\frac{C}{R}-\frac{1}{R}\int\frac{d\Pi\,dR}{dP}$$

и

$$y=\frac{CP}{R}+\Pi-\frac{P}{R}\int\frac{d\Pi\,dR}{dP}$$

В-третьих, решение не представит никаких трудностей; будем иметь уравнение $y=X+Vp$, где через X и V обозначены какие-либо функции от x. Действительно, тогда будем иметь:

$$dy=p\,dx=dX+V\,dp+p\,dV,$$

и поэтому

$$dp+p\left(\frac{dV-dx}{V}\right)=-\frac{dX}{V}.$$

Пусть $\frac{dx}{V}=\frac{dR}{R}$, так что R тоже будет функцией от x; тогда

$$\frac{V}{R}p=C-\int\frac{dX}{R},$$

или

$$p=\frac{CR}{V}-\frac{R}{V}\int\frac{dX}{p}$$

и

$$y=X+CR-R\int\frac{dX}{R}.$$

Это уравнение выражает соотношение между x и y.

В-четвертых, уравнение $(P-p)\,dx+Q\,dp=0$ допускает решение в том случае, если оно будет однородным. А так как член $p\,dx$ содержит два измерения, то это будет иметь место в том случае, если столько же измерений будет и в остальных членах. Отсюда ясно, что P и Q должны

[1]) То есть если уравнение $(P-p)\,dx+Q\,dp=0$ линейно относительно x и dx.

быть однородными функциями одного измерения количеств x и p. Поэтому если y будет так определено через x и p, что y будет равняться однородной функции двух измерений количеств x и p, то решение удастся. Действительно, если будет $dy = P\,dx + Q\,dp$, то уравнение, содержащее решение $(P-p)\,dx + Q\,dp = 0$, будет однородным и станет непосредственно интегрируемым, если его разделить на $(P-p)\,x + Qp$.

СЛЕДСТВИЕ 1

696. В четвертом случае, если положить $y = z^2$, предложенное уравнение должно быть однородным уравнением между тремя переменными x, z и p. Поэтому, если будет предложено какое угодно однородное уравнение между x, z и p, в котором три буквы x, z и p всюду составляют одно и то же число измерений, задача всегда допускает решение.

СЛЕДСТВИЕ 2

697. Поменяв переменные ролями, положим $x = v^2$ и $\frac{dx}{dy} = q$, так что $p = \frac{1}{q}$; если теперь будет предложено какое-либо однородное уравнение между y, v и q, то задачу можно будет решить таким же образом.

ПОЯСНЕНИЕ

698. В четвертом случае условие, чтобы уравнение $(P-p)\,dx + Q\,dp = 0$ оказалось однородным, можно заменить более широким. А именно, положим $x = v^\mu$ и $p = q^\nu$ и пусть уравнение между v и q

$$\mu\,(P - q^\nu)\,v^{\mu-1}\,dv + \nu Q q^{\nu-1}\,dq = 0,$$

получаемое после подстановки, является однородным; тогда P будет однородной функцией ν измерений, а Q — однородной функцией μ измерений. А так как

$$dy = P\,dx + Q\,dp = \mu P v^{\mu-1}\,dv + \nu Q q^{\nu-1}\,dq,$$

то y будет однородной функцией $\mu + \nu$ измерений. Поэтому задача допускает решение в том случае, если между x, y и p будет предложено такое соотношение, что после подстановки $y = z^{\mu+\nu}$, $x = v^\mu$, $p = q^\nu$ получается однородное уравнение между тремя количествами z, v и q, так что число образованных ими измерений будет всюду одним и тем же. Если будет предложено такого рода однородное уравнение между z, v и q, то решение задачи можно осуществить следующим образом. Поскольку $dy = p\,dx$, будем иметь:

$$(\mu + \nu)\,z^{\mu+\nu-1}\,dz = \mu v^{\mu-1}\,q^\nu\,dv;$$

теперь положим $z = rq$ и $v = sq$, и тогда предложенное уравнение будет содержать только две буквы r и s, одну из которых можно определить через другую; далее, в результате этих подстановок получится уравнение

$$(\mu + \nu)\,r^{\mu+\nu-1}\,q^{\mu+\nu-1}\,(r\,dq + q\,dr) = \mu s^{\mu-1}\,q^{\mu+\nu-1}\,(s\,dq + q\,ds),$$

из которого получаем:

$$\frac{dq}{q} = \frac{\mu s^{\mu-1}\,ds - (\mu+\nu)\,r^{\mu+\nu-1}\,dr}{(\mu+\nu)\,r^{\mu+\nu} - \mu s^\mu}.$$

Это — дифференциальное уравнение с разделенными переменными, так как s задается через r. Два приведенных здесь случая [§§ 696, 697], очевидно, содержатся в формулах $y = z^{\mu+\nu}$, $x = v^{\mu}$ и $p = q^{\nu}$, а именно: первый — если $\mu = 1$ и $\nu = 1$, второй же — если $\mu = 2$ и $\nu = -1$. Теперь надо пояснить на примерах. Эти случаи следует проиллюстрировать примерами, также и предыдущие, из которых особенно замечательным является первый, ибо он сразу дает искомое интегральное уравнение с помощью дифференцирования предложенного уравнения $y = px + \Pi$, так что нет никакой нужды в интегрировании, если не считать второго решения, порождаемого уравнением $dp = 0$.

ПРИМЕР 1

699. *Предложено дифференциальное уравнение*

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Найти его интеграл.

Если положить $\frac{dy}{dx} = p$, то получим $y - px = a\sqrt{1+p^2}$. Это уравнение ввиду того, что $dy = p\,dx$, после дифференцирования дает $-x\,dp = \frac{ap\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$. Так как это уравнение делится на dp, то оно дает, во-первых, $p = \alpha$, и отсюда

$$y = \alpha x + a\sqrt{1+\alpha^2}.$$

Второй же множитель дает

$$x = \frac{-ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

и, значит,

$$y = \frac{-ap^2}{\sqrt{1+p^2}} + a\sqrt{1+p^2} = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}},$$

откуда $x^2 + y^2 = a^2$. Это — также интегральное уравнение, но так как оно не включает нового постоянного, то его нельзя считать полным интегралом. Полный же интеграл заключает в себе два уравнения, а именно:

$$y = \alpha x + a\sqrt{1+\alpha^2}$$

и

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

которые можно охватить следующим одним уравнением:

$$((y - \alpha x)^2 - a^2(1+\alpha^2))(x^2 + y^2 - a^2) = 0.$$

ПОЯСНЕНИЕ

700. Если не прибегать к такой операции, то решение этой задачи оказывается довольно трудным. А именно, если мы освободим от иррациональности дифференциальное уравнение

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

путем возведения в квадрат и затем, извлекая корень, определим отношение $\frac{dy}{dx}$, то получим:

$$(x^2 - a^2)\,dy - xy\,dx = \pm\, a\,dx\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Решение этого уравнения при помощи известных нам методов сопряжено с трудностями. Можно найти множитель, благодаря которому оба члена становились бы непосредственно интегрируемыми. Действительно, первый член $(x^2-a^2)\,dy - xy\,dx$ становится интегрируемым, если его разделить на $y(x^2-a^2)$, причем его интеграл $= l\dfrac{y}{\sqrt{x^2-a^2}}$, следовательно, общий вид множителя, делающего это выражение интегрируемым, есть

$$\frac{1}{y(x^2-a^2)}\,\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{x^2-a^2}}\right).$$

Функцию φ надо определить так, чтобы при помощи того же множителя и второй член $a\,dx\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ стал интегрируемым. Таким множителем является

$$\frac{1}{y(x^2-a^2)}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} = \frac{1}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+y^2-a^2}};$$

в результате получаем:

$$\frac{(x^2-a^2)\,dy - xy\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+y^2-a^2}} = \frac{\pm a\,dx}{x^2-a^2}.$$

Чтобы теперь найти интеграл первого члена, будем рассматривать x как постоянное. Тогда интеграл будет

$$= l\left(y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right)+X,$$

где X означает некоторую функцию количества x, обладающую тем свойством, что если взять теперь за постоянную y, то будем иметь:

$$\frac{x\,dx}{\left(y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right)\sqrt{x^2+y^2-a^2}} + dX = \frac{-xy\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+y^2-a^2}},$$

или

$$\frac{-x\,dx\left(y-\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right)}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+y^2-a^2}} + dX = \frac{-xy\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2+y^2-a^2}},$$

откуда

$$dX = \frac{-x\,dx}{x^2-a^2} \quad\text{и}\quad X = l\frac{C}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Поэтому искомый интеграл будет

$$l\left(y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right) + l\frac{C}{\sqrt{x^2-a^2}} = \pm\frac{1}{2}\,l\frac{x+a}{x-a}$$

или

$$\frac{y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \alpha\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} \quad\text{или} = \alpha\sqrt{\frac{x-a}{x+a}},$$

откуда

$$y+\sqrt{x^2+y^2-a^2} = \alpha(x\pm a),$$

и следовательно,

$$x^2-a^2 = \alpha^2(x\pm a)^2 - 2\alpha(x\pm a)\,y,$$

или

$$x\mp a = \alpha^2(x\pm a) - 2\alpha y.$$

Но это только одно из двух интегральных уравнений; что касается другого интегрального уравнения $x^2+y^2=a^2$, то надо считать, что оно исчезло вследствие деления. Впрочем, то же решение уравнения

$$(a^2-x^2)\,dy+xy\,dx=\pm\,a\,dx\sqrt{x^2+y^2-a^2}$$

получается легче, если положить $y=u\sqrt{a^2-x^2}$, откуда

$$(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,du=\pm\,a\,dx\sqrt{(a^2-x^2)(u^2-1)},$$

или

$$\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{\pm\,a\,dx}{a^2-x^2};$$

этому уравнению можно удовлетворить, если взять $u=1$; однако этот случай не содержится в интегральном уравнении, как мы показали уже выше. Отсюда могло бы возникнуть подозрение, что второе решение $x^2+y^2=a^2$ надо даже вовсе исключить; однако же, если мы тщательно рассмотрим [1]) первоначальное уравнение $\frac{y\,dx-x\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=a$, то окажется, что это не так. Действительно, если x и y суть прямоугольные координаты кривой линии, то формула $\frac{y\,dx-x\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ выражает перпендикуляр, опущенный из начала координат на касательную: следовательно, этот перпендикуляр должен быть постоянным. Само собой очевидно, что это имеет место для круга с центром в начале координат, а его уравнение есть $x^2+y^2=a^2$. Тем самым реальность этих решений, которые могли бы на первый взгляд показаться мало пригодными, все же подтверждается, хотя их обоснование не усматривается с достаточной ясностью [2]).

ПРИМЕР 2

701. *Пусть предложено дифференциальное уравнение*

$$y\,dx-x\,dy=\frac{a\,(dx^2+dy^2)}{dx}.$$

Найти его интеграл.

Если положить $dy=p\,dx$, то получаем $y-px=a\,(1+p^2)$ и, дифференцируя, $-x\,dp=2ap\,dp$. Отсюда заключаем, что либо $dp=0$ и, значит, $p=a$, а следовательно, $y=ax+a\,(1+a^2)$, либо $x=-2ap$ и $y=a\,(1-p^2)$. Таким образом, ввиду того, что $p=\frac{-x}{2a}$, будем иметь $4ay=4a^2-x^2$. Если истолковать это уравнение геометрически, то оно полностью удовлетворит поставленному условию.

Если найти корень предложенного уравнения, получим:

$$2a\,dy+x\,dx=dx\sqrt{x^2+4ay-4a^2}.$$

Это уравнение, если положить $y=u\,(4a^2-x^2)$, преобразуется в

$$2a\,du\,(4a^2-x^2)-x\,dx\,(4au-1)=dx\sqrt{(4a^2-x^2)(4au-1)};$$

[1]) si ... perpendamus.

[2]) Atque hinc realitas harum solutionum, quae minus congruae videri poterant, confirmatur, etiamsi earum ratio haud clare perspiciatur.

последное же уравнение, если положить $4au-1=t^2$, преобразуется в

$$t\,dt\,(4a^2-x^2)-t^2x\,dx=t\,dx\sqrt{4a^2-x^2}.$$

Так как это уравнение делится на t, то можно принять[1]), что $t=0$ и, значит, $u=\frac{1}{4a}$, а следовательно, $4ay=4a^2-x^2$.

ПРИМЕР 3

702. *Пусть предложено дифференциальное уравнение*

$$y\,dx-x\,dy=a\sqrt[3]{dx^3+dy^3}.$$

Найти его интеграл.

Это уравнение мы вряд ли смогли бы решить обычным способом, пытаясь найти из него отношение $\frac{dy}{dx}$.

Но если положить $dy=p\,dx$, то получим $y-px=a\sqrt[3]{1+p^3}$ и после дифференцирования $x\,dp=\frac{-ap^2\,dp}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}}$, откуда следует одно из двух: либо $dp=0$ и, значит, $p=\alpha$, откуда $y=\alpha x+a\sqrt[3]{1+\alpha^3}$, либо

$$x=\frac{-ap^2}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}} \quad\text{и}\quad y=\frac{a}{\sqrt[3]{(1+p^3)^2}},$$

откуда $p^2=-\frac{x}{y}$, и, ввиду того, что $y^3(1+p^3)^2=a^3$, будем иметь $p^3=\frac{a\sqrt{a}}{y\sqrt{y}}-1$, а отсюда $\frac{(a\sqrt{a}-y\sqrt{y})^2}{y^3}=-\frac{x^3}{y^3}$, или

$$x^3+(a\sqrt{a}-y\sqrt{y})^2=0.$$

ПРИМЕР 4

703. *Пусть предложено дифференциальное уравнение*

$$y\,dx-nx\,dy=a\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Найти его интеграл.

Если положить $dy=p\,dx$, то будем иметь $y-npx=a\sqrt{1+p^2}$, откуда, дифференцируя, получим:

$$(1-n)\,p\,dx-nx\,dp=\frac{ap\,dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

или

$$dx-\frac{nx\,dp}{(1-n)\,p}=\frac{a\,dp}{(1-n)\sqrt{1+p^2}}.$$

Это уравнение, будучи помножено на $p^{\frac{n}{n-1}}$ и проинтегрировано, дает

$$p^{\frac{n}{n-1}}x=\frac{a}{1-n}\int\frac{p^{\frac{n}{n-1}}\,dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

[1]) concludere licet; дословно: «можно заключить».

Отсюда мы выводим следующие случаи, допускающие интегрирование [1]·

$$\text{если } n=\frac{3}{2},\quad p^3x=C-\frac{2}{3}a\left(p^2-\frac{2}{1}\right)\sqrt{1+p^2};$$

$$\text{если } n=\frac{5}{4},\quad p^5x=C-\frac{4}{5}a\left(p^4-\frac{4}{3}p+\frac{4\cdot 2}{3\cdot 1}\right)\sqrt{1+p^2};$$

$$\text{если } n=\frac{7}{6},\quad p^7x=C-\frac{6}{7}a\left(p^6-\frac{6}{5}p^4+\frac{6\cdot 4}{5\cdot 3}p^2+\frac{6\cdot 4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 1}\right)\sqrt{1+p^2},$$

и если $n=\frac{2\lambda+1}{\lambda}$, будем иметь $y=px+a\sqrt{1+p^2}+\frac{px}{2\lambda}$ и

$$x=\frac{C}{p^{2\lambda+1}}-\frac{2\lambda a}{(2\lambda+1)p}\left(1-\frac{2\lambda}{(2\lambda-1)p^2}+\frac{2\lambda(2\lambda-2)}{(2\lambda-1)(2\lambda-3)p^4}-\text{и т. д.}\right)\sqrt{1+p^2}.$$

Поэтому если взять $\lambda=\infty$, так что $n=1$, то будем иметь:

$$y=px+a\sqrt{1+p^2}\quad \text{и}\quad x=\frac{C}{p^{2\lambda+1}}-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

откуда, если постоянное C будет равно 0, сразу же получается найденное выше решение $x^2+y^2=a^2$. Если же постоянное количество C не исчезает, то малейшее различие в количестве p вызывает бесконечное изменение количества x. Следовательно, количество p можно рассматривать как постоянное, насколько бы ни изменилось x; значит, полагая $p=\alpha$, получим второе решение. Этим в значительной степени разъясняется сомнение, возникшее в связи с примером 1.

ПРИМЕР 5

704. *Пусть предложено дифференциальное уравнение*

$$A\,dy^n=(Bx^\alpha+Cy^\beta)\,dx^n,$$

где $n=\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$. *Найти его интеграл.*

Если положить $\frac{dy}{dx}=p$, то будем иметь $Ap^n=Bx^\alpha+Cy^\beta$. Теперь положим $p=q^{\alpha\beta}$, $x=v^{\beta n}$ и $y=z^{\alpha n}$ так, чтобы получить одновременно уравнение

$$Aq^{\alpha\beta n}=Bv^{\alpha\beta n}+Cz^{\alpha\beta n}.$$

Если положить $z=rq$ и $v=sq$, то это уравнение перейдет в $A=Bs^{\alpha\beta n}+Cr^{\alpha\beta n}$. Но так как

$$dy=\alpha nz^{\alpha n-1}\,dz=\alpha nr^{\alpha n-1}\,q^{\alpha n-1}\,(r\,dq+q\,dr)$$

и

$$p\,dx=\beta nv^{\beta n-1}\,q^{\alpha\beta}\,dv=\beta ns^{\beta n-1}\,q^{\alpha\beta+\beta n-1}\,(s\,dq+q\,ds),$$

то

$$\alpha r^{\alpha n-1}\,(r\,dq+q\,dr)=\beta s^{\beta n-1}\,q^{\alpha\beta+\beta n-\alpha n}\,(s\,dq+q\,ds).$$

Но по условию $\alpha\beta+\beta n-\alpha n=0$; значит,

$$\alpha r^{\alpha n}\,dq+\alpha r^{\alpha n-1}\,q\,dr=\beta s^{\beta n}\,dq+\beta s^{\beta n-1}\,q\,ds$$

[1]) Ср. формулу I § 118.

и, следовательно,

$$\frac{dq}{q}=\frac{\alpha r^{\alpha n-1}\,dr-\beta s^{\beta n-1}\,ds}{\beta s^{\beta n}-\alpha r^{\alpha n}}.$$

Но

$$s^{\beta n}=\left(\frac{A-Cr^{\alpha\beta n}}{B}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

значит,

$$\beta s^{\beta n-1}\,ds=-\frac{\beta C}{B}\,r^{\alpha\beta n-1}\,dr\,\left(\frac{A-Cr^{\alpha\beta n}}{B}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

и, следовательно,

$$\frac{dq}{q}=\frac{\alpha r^{\alpha n-1}\,dr+\frac{\beta C}{B}\,r^{\alpha\beta n-1}\,dr\left(\frac{A-Cr^{\alpha\beta n}}{B}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\beta\left(\frac{A-Cr^{\alpha\beta n}}{B}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-\alpha r^{\alpha n}}.$$

Но легче вести вычисление таким образом: взяв $A=1$, будем иметь:

$$p=\frac{dy}{dx}=(Bx^{\alpha}+Cy^{\beta})^{\frac{1}{n}};$$

пусть $y=x^{\frac{\alpha}{\beta}}u$; тогда будем иметь:

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}}\,du+\frac{\alpha}{\beta}x^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}u\,dx=x^{\frac{\alpha}{n}}\,dx\,(B+Cu^{\beta})^{\frac{1}{n}},$$

а так как $\frac{\alpha}{n}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$, то это уравнение переходит в

$$\beta x\,du+\alpha u\,dx=\beta\,dx\,(B+Cu^{\beta})^{\frac{1}{n}},$$

откуда

$$\frac{dx}{x}=\frac{\beta\,du}{\beta(B+Cu^{\beta})^{\frac{1}{n}}-\alpha u}.$$

Таким образом, x определяется через u, а так как $u=x^{-\frac{\alpha}{\beta}}y$, то получится уравнение между x и y.

ПОЯСНЕНИЕ

705. Вот каким образом надо выполнять действия, когда между переменными x, y и отношением $\frac{dy}{dx}=p$ их дифференциалов предлагается соотношение, из которого нельзя удобным образом найти значение p. Очевидно, в этом случае вычисление надо вести так, чтобы с помощью дифференцирования, полагая $dy=p\,dx$ или $dx=\frac{dy}{p}$, придти в конце концов к простому [1]) дифференциальному уравнению, содержащему только два переменных. С этой целью часто оказывается необходимым пользоваться подходящими подстановками. Вот примерно и все, чего удалось дости-

[1]) То есть уравнению, линейному относительно p.

гнуть геометрии в решении дифференциальных уравнений первого порядка; в самом деле, как мне кажется, я вряд ли упустил здесь какой-либо из применявшихся до сих пор методов отыскания интегралов. Можно ли надеяться на значительно большие достижения в интегральном исчислении? Я не стал бы этого утверждать [1]), хотя есть очень много таких открытий, которые прежде казались превосходящими силы человеческого ума.

Как было сказано, я разделил «Интегральное исчисление» на две книги: в первой из них рассматривается соотношение между двумя переменными, а во второй — между тремя или большим числом переменных. Здесь я в меру моих сил изложил уже первую часть первой книги, посвященную дифференциалам первого порядка. Поэтому я перехожу ко второй части этой книги, в которой будет отыскиваться соотношение между двумя переменными по данному соотношению между дифференциалами второго и более высокого порядка.

---

[1]) vix equidem affirmaverim.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому переводу первого тома «Интегрального исчисления» Л. Эйлера 3

ПЕРЕЧЕНЬ ГЛАВ, СОДЕРЖАЩИХСЯ В ПЕРВОМ ТОМЕ

Предварительные замечания об интегральном исчислении вообще 9

ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

КНИГА ПЕРВАЯ

Часть первая или метод нахождения функций одного переменного по какому-нибудь данному соотношению между дифференциалами первого порядка

Раздел первый. Об интегрировании дифференциальных выражений 23

Глава I. Об интегрировании рациональных дифференциальных выражений 23

Глава II. Об интегрировании иррациональных дифференциальных выражений 50

Глава III. Об интегрировании дифференциальных выражений при помощи бесконечных рядов 72

Глава IV. Об интегрировании логарифмических и показательных выражений 101

Глава V. Об интегрировании выражений, содержащих углы или синусы углов 120

Глава VI. О разложении интегралов в ряды, расположенные по синусам и косинусам кратных углов 141

Глава VII. Общий метод приближенного нахождения каких угодно интегралов 161

Глава VIII. О значениях, которые интегралы принимают только в определенных случаях 184

Глава IX. О разложении интегралов в бесконечные произведения 202

Раздел второй. Об интегрировании дифференциальных уравнений 225

Глава I. О разделении переменных 225

Глава II. Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи множителей 248

Глава III. Об исследовании дифференциальных уравнений, которые становятся интегрируемыми при помощи множителей заданного вида 274

Глава IV. О нахождении частных интегралов дифференциальных уравнений 303
Глава V. О сравнении трансцендентных количеств, содержащихся в выражениях вида $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2}}$ 324
Глава VI. О сравнении трансцендентных количеств, содержащихся в выражениях вида $\int \frac{P\,dz}{\sqrt{A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4}}$ 346
Глава VII. О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений 377

Раздел третий. О решении более сложных дифференциальных уравнений 388
О решении дифференциальных уравнений, в которых дифференциалы достигают нескольких измерений или входят даже трансцендентно 388