ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

КЛАССИКИ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

КЛАССИКИ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

ФИЗИКА

АСТРОНОМИЯ

*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва · 1949 · Ленинград

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Перевод
с латинского,
вступительная статья
и примечания
М. Я. Выгодского

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва · 1949 · Ленинград

11-5-4

Редактор *В. А. Калакуцкий.* Тех. редактор *М. Д. Суховцева.*

Подписано к печати 15/IV 1949 г. 36,25 печ. л. 49,83 уч.-издат. л. 54 988 тип. зн. в печ. л.
А-04314. Тираж 5000 экз. Цена книги 30 руб. Переплёт 3 руб. Заказ № 1004.

16-я типография Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.
Москва, Трёхпрудный пер., 9.

ВСТУПИТЕЛЬНОЕ СЛОВО К «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ» Л. ЭЙЛЕРА

М. Я. Выгодский

1. В 1755 г. Петербургская Академия Наук выпустила в свет одно из самых замечательных произведений математической литературы — «Дифференциальное исчисление», принадлежащее перу члена Петербургской Академии Леонарда Эйлера. Как и большинство научных трудов в эту эпоху, оно было написано на латинском языке. Русский его перевод появляется сейчас впервые. По этому произведению в течение целого столетия учились математики всего мира; особенно сильное влияние оказало оно на преподавание и развитие математики в России[1]). И хотя в наше время труд Эйлера уже не может служить учебником дифференциального исчисления, однако и теперь он представляет большой интерес. Богатство содержания, изумительное мастерство приёмов, гениальная изобретательность в решении труднейших вопросов, величавая простота изложения и несравненные педагогические достоинства — всё это делает чтение «Дифференциального исчисления» чрезвычайно поучительным и вместе с тем увлекательным для учащегося и для педагога, для математика и для историка науки.

Сочинения многих классиков математической мысли трудно доступны, особенно читателю, удалённому от эпохи их созидания на столетия. Чтобы разобраться в творениях Ферма, Декарта, Ньютона, Лейбница, Гаусса, нужно затратить большой труд, для облегчения которого нужны обстоятельные комментарии. Произведения Эйлера не таковы. Ход мысли автора в них всегда ясен; часто, правда, его рассуждения не могут нас убедить, но всегда видно, как думал Эйлер и чего нехватает в его рассуждениях. Поэтому «Дифференциальное исчисление» Эйлера почти не нуждается в комментариях частного характера. Там, где они казались переводчику необходимыми, он их давал в коротких сносках.

Но «Дифференциальное исчисление» представляет большую книгу, чтение которой от начала до конца потребует большого времени. Между тем, многим читателям, которые не будут иметь возможности

---

[1]) В рамках этой статьи нет возможности охарактеризовать значение Эйлера в истории математики вообще и в истории русской математики в частности. Мы отсылаем читателя к сборнику «Леонард Эйлер», изданному Академией Наук СССР в 1933 г., и к статье А. П. Юшкевича «Л. Эйлер и русская математика в XVIII в.» («Труды Института истории естествознания», т. III, 1949).

прочесть это сочинение целиком, будет интересно воспользоваться им как хрестоматией по истории математики в XVIII в., как собранием замечательных образцов аналитического мастерства или с иными целями. Эти читатели нуждаются в общем обзоре произведения. В настоящей статье такой обзор и даётся. Но для того, чтобы читателю — даст ли он себе труд изучить произведение Эйлера полностью или пожелает ограничиться тем, что наиболее его заинтересует—были ясны позиции автора, его отношение к предшественникам и значение его работы для последующего развития науки, я сначала постараюсь в кратких чертах охарактеризовать историческую обстановку и отметить отличительные особенности стиля Эйлера.

2. Дифференциальное и интегральное *исчисления*, если сделать ударение на последнем слове, были созданы Ньютоном и Лейбницем в 70—80-х годах XVII в. К этому времени основные идеи анализа были уже хорошо разработаны. Опираясь на работы древнегреческих математиков, в первую очередь Архимеда, авторы XVII в.—Кеплер, Галилей, Кавальери, Торичелли, Ферма, Паскаль, Валлис и другие — систематически развили процессы интегрирования и дифференцирования. Эти операции не были ещё облечены в отвлечённую форму. Они рассматривались в неразрывной связи с геометрическими и механическими задачами. Но общность этих операций отчётливо сознавалась. Так, задачи спрямления кривой и нахождения центра тяжести тела сводили к задаче квадратуры (определению площади, порождённой движением ординаты данной кривой), а для выполнения квадратур были указаны общие методы, по существу тождественные с методами интегрального исчисления. Правда, эти методы охватывали сравнительно узкий класс кривых, т. е., выражаясь по-современному, до Ньютона и Лейбница математики умели вычислять интегралы сравнительно узкого класса функций. Но это был недостаток техники, над преодолением которого успешно работали.

Понятие производной функции также выступало в геометрической и механической форме: отыскивали скорости по заданному закону движения; находили подкасательную кривой, заданной уравнением в декартовых координатах. Зная длину подкасательной, можно построить касательную. Отношение же ординаты к подкасательной есть не что иное, как производная ординаты относительно абсциссы; хотя это отношение и не привлекало особого внимания предшественников Ньютона и Лейбница, мы всё же вправе сказать, что здесь в геометрической форме выступает понятие производной, ибо ведь принципиально не важно, рассматривается ли функция $\frac{dy}{dx}$ или функция $\frac{ydx}{dy}$, дающая длину подкасательной.

Самое понятие функции в отвлечённой его форме не было ещё высказано. Но уже метод графического представления, который составляет основную идею «Геометрии» Декарта и который систематически применялся задолго до Декарта Галилеем (не говоря о более ранних предвосхищениях),— уже этот метод по существу обнаруживает наличие общего понятия функциональной зависимости.

Задачи дифференцирования и интегрирования рассматривались каждая по отдельности; первая — как задача о касательной, вторая — как задача о площади. Но уже Ферма, как видно из черновых его заметок, понимал взаимно-обратный характер этих задач. Учитель Ньютона Барроу доказал эту взаимную обратность, оставаясь на почве геометрического представления об интегрировании, как о квадратуре, и о дифференцировании, как проведении касательной.

Нельзя на одной-двух страницах дать сколько-нибудь полное представление о своеобразии инфинитезимальных методов XVII в., но уже из изложенного можно видеть, как много ещё оставалось сделать Ньютону и Лейбницу для того, чтобы эти методы получили ту глубину и широту, которой обладает исчисление бесконечно малых. Сейчас будет сказано, что было ими сделано.

3. В шестидесятых годах XVII в. алгебра обладала уже той символикой, которой мы пользуемся и сейчас. Между тем интегрирование и дифференцирование, выполнявшиеся, как сказано, в геометрической форме, не имели ещё никакого или почти никакого алгоритма.

Ньютон и Лейбниц, независимо друг от друга, использовали аппарат алгебраической символики и создали такой алгоритм. Обозначения Лейбница стали вскоре общепринятыми. Мы пользуемся ими и сейчас. Обозначения Ньютона были иными. Хотя они несколько уступали лейбницевым, но в общем достигали той же цели: методы интегрирования и дифференцирования были облечены в форму *исчисления*.

Символическое оформление позволило отвлечь основные инфинитезимальные понятия от их геометрического и механического овеществления. Хотя и Ньютон и Лейбниц постоянно связывают свой алгоритм с геометрической и механической картиной и зачастую существенно опираются на интуицию, но отвлечённые понятия *переменного количества и функции* (Ньютон говорит «отнесённое количество» и «соотнесённое количество», но наименование не играет, конечно, роли) отчётливо выставлены на первый план.

Человеку нашей эпохи этот шаг или, лучше сказать, скачок, может показаться мало значительным; ведь и алгебраическая символика уже существовала, и основные операции и даже связь между ними были изучены и нашли многообразные применения. Велика ли заслуга объединить эти элементы? К этому можно было бы добавить ещё, что у предшественников Ньютона и Лейбница (Ферма, Барроу и др.) уже были попытки облечь в символическую форму операции интегрирования и дифференцирования.

Может быть, и сами творцы нового исчисления не придавали большого значения этому своему открытию. Но на самом деле это было открытие величайшей важности. А что создание хорошей удобной символики было не столь лёгким делом, видно хотя бы из тех сохранившихся черновых записей Лейбница, где он делал первые попытки создания этой символики. Так, дифференциал функции y Лейбниц обозначал сначала через $\frac{y}{d}$, а интеграл её через $\int y$. Легко видеть, что эти обозначения не выдерживают никакого сравнения с позднейшими обозначениями Лейбница, ставшими почти немедленно общим достоянием математиков европейского континента.

4. Изобретение алгоритма исчисления бесконечно малых позволило Ньютону, Лейбницу и ученикам Лейбница Якову и Иоганну Бернулли в течение нескольких лет получить поразительно большое число очень важных новых результатов.

Прежде всего техника дифференцирования и интегрирования была развита почти до тех пределов, в которых мы ею владеем теперь. Повторное дифференцирование функций, которое как бы само напрашивалось на перо вычислителя, позволило без труда решать ряд задач, которые представляли прежде большие трудности, как, например, задачу определения радиуса кривизны. Вообще многие задачи геометрии и механики, которые прежде доступны были лишь самым выдающимся математикам, стали теперь посильными для каждого обучившегося новому алгоритму.

В повестку дня был поставлен в общей форме вопрос об интегрировании дифференциальных уравнений, который прежде ставился лишь для очень частных случаев и удовлетворительно решался лишь в единичных случаях. Лейбниц и его ученики сразу применили разделение переменных и ряд подстановок. Как мы теперь знаем, трудности, связанные с решением дифференциальных уравнений с помощью квадратур, носят не технический, а принципиальный характер, и если усилия школы Лейбница были направлены преимущественно на разыскание решений в квадратурах, то Ньютон смело пошёл в лобовую атаку и дал общий метод, сила которого даже при тех ограничениях, которые впоследствии оказалось необходимым на него наложить, была огромной. Я имею в виду метод функциональных (по преимуществу степенных) рядов. Так как этот метод играет особенно большую роль в творчестве Эйлера, остановимся на этом вопросе несколько подробнее.

5. Когда Ньютон начинал свою деятельность, интеграционные методы, созданные его предшественниками, позволяли выполнять квадратуры, равносильные вычислению интегралов вида

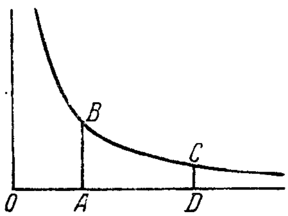

Рис. 1.

$$\int (a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \ldots + a_k x^{m_k})\,dx, \qquad (1)$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ суть любые числа.

В основе этого интегрирования лежало правило, равносильное формуле

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}. \qquad (2)$$

Один только случай $m = -1$ не укладывался в эту формулу. Задача вычисления интеграла $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x}$ на языке математиков XVII в. формулировалась как задача разыскания площади A, B, C, D (рис. 1), описываемой ординатой гиперболы $xy = 1$.

Ферма, исходя из инфинитезимальных геометрических соображений, заметил, что площадь $ABCD$ растёт в арифметической прогрессии, когда абцисса $x = OD$ растёт в геометрической прогрессии. Если мы примем во внимание, что в то время это свойство клалось в основу определения и вычисления логарифмов, то будет понятно, что это открытие было равносильно установлению формулы

$$\int \frac{dx}{x} = k \lg x, \qquad (3)$$

где k — постоянный множитель, величина которого зависит, как мы сказали бы теперь, от основания, по которому берутся логарифмы, т. е. от того числа, которому в упомянутом соответствии двух прогрессий отвечает логарифм, равный 1. Если пользоваться десятичными логарифмами, то $k = \ln 10 \approx 2{,}718\ldots$ Таким образом, имея таблицу логарифмов, можно было найти квадратуру гиперболы.

Хотя такие таблицы, и притом весьма точные и подробные, были налицо, но техника их составления была чрезвычайно утомительна. Установленная Ферма связь между квадратурой гиперболы и вычислением логарифмов, естественно, вызвала попытки разыскать алгебраическое выражение площади гиперболы, т. е., выражаясь современным языком, найти для интеграла $\int \frac{dx}{x}$ алгебраическое выражение.

Эти попытки оставались бесплодными, пока Николаю Меркатору не пришла в голову простая мысль отнести гиперболу BC к другой системе координат. Если взять начало в точке A с абсциссой $OA=1$, то уравнение гиперболы, как было легко усмотреть, принимает вид $y(x+1)=1$, и задача сводится к определению интеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}. \tag{4}$$

Чтобы свести этот интеграл к интегралам от степенных функций, Меркатор выполнил деление $1:(1+x)$, иными словами, представил $\frac{1}{1+x}$ как сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots \tag{5}$$

Суммированием прогрессии постоянно пользовался Ферма, но даже этот величайший математик не догадался использовать обращение этого суммирования так, как сделал это во всех отношениях средний математик Меркатор, который, не смутившись тем, что многочлен (5) имеет бесчисленное множество членов, проинтегрировал его и получил результат, равносильный формуле

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots \tag{6}$$

Об этом результате Меркатор упомянул в своей книге «Логарифмотехника», вышедшей в 1668 г.

Спустя шесть лет, Ньютон писал Лейбницу, что это и многие другие применения бесконечных рядов к интегрированию было ему известно ещё в 1665 г., но что, ознакомившись с книгой Меркатора, он потерял интерес к дальнейшим занятиям этими вопросами, предполагая, что либо сам Меркатор знает всё это, «либо другие найдут остальное прежде, чем я окажусь в состоянии написать об этом».

Если даже отнестись, как это сделал Лейбниц и вслед за ним некоторые историки, с недоверием к этому сообщению и заподозрить, что идею применения бесконечных рядов Ньютон заимствовал у Меркатора, то и тогда результаты Ньютона, которые были им сообщены Коллину тотчас после ознакомления с «Логарифмотехникой», поражают своей силой. А через два-три года в своём «Методе флюксий и бесконечных рядов» (напечатано в 1736 г., спустя 9 лет после смерти автора[1]) Ньютон дал развёрнутую картину применения рядов к инте-

[1]) И. Ньютон, Математические работы. Перевод проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского, 1937, стр. 25—166.

грированию функций и к решению дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y}=f(x, y),$$

где за $f(x, y)$ можно взять любой бесконечный или конечный степенной ряд вида $\sum\limits_k\sum\limits_i a_{ik}\, x^i y^k$. А так как Ньютон умел разлагать в ряды все «элементарные функции», то практически любое дифференциальное уравнение оказывалось, таким образом, разрешённым. От внимания Ньютона не ускользнуло, что рядами этими можно пользоваться лишь при достаточно малых значениях x, y. Но и за пределами сходимости этих рядов Ньютон находил решение дифференциальных уравнений путём введения новых переменных $x=a+x'$, $y=b+y'$. Это, разумеется, равносильно разложению $f(x, y)$ по степеням $x-a$, $y-b$.

Ньютон не ставил вопроса об определении радиуса сходимости рядов или хотя бы о доказательстве сходимости данного ряда. Он довольствовался достаточно быстрым убыванием членов ряда. Тем менее склонен был он подвергать сомнению законность почленного дифференцирования и интегрирования рядов. Лейбниц и его ученики уделяли этим вопросам несколько больше внимания. Лейбниц, например, установил признак сходимости знакопеременных рядов, и сейчас носящий его имя. Яков и Иоганн Бернулли обнаружили и доказали поразительный для этой эпохи факт расходимости гармонического ряда и других рядов с неограниченно убывающими членами.

6. Казалось бы, что факт существования рядов с убывающими членами, и всё же расходящихся, должен был бы предостеречь против безоговорочного перенесения на бесконечные ряды свойств многочленов. На самом деле происходит обратное; наиболее существенные открытия конца XVII и начала XVIII вв. в области исчисления бесконечно малых покоились на совершенно некритическом обращении с бесконечными рядами.

Тот же Иоганн Бернулли в поисках наиболее общего метода интегрирования в 1694 г. приходит к формуле, которую в изменённых обозначениях можно представить в виде

$$\int y\,dx=xy-\frac{x^2}{1\cdot 2}\,\frac{dy}{dx}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots \tag{7}$$

Эту формулу он получает так.

Подинтегральное выражение $y\,dx$ представляется в виде

$$\begin{gathered} y\,dx+x\,dy-x\,dy-\frac{x^2}{1\cdot 2}\,\frac{d^2y}{dx}+\frac{x^2}{1\cdot 2}\,\frac{d^2y}{dx}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{d^3y}{dx^2}- \\ -\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{d^3y}{dx^2}-\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{d^4y}{dx^3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{d^4y}{dx^3}-\ldots \end{gathered} \tag{8}$$

Указывается, что аналогичное выражение можно построить и при большем числе слагаемых. Затем первый и второй, третий и четвёртый и т. д. члены объединяются и представляются в виде

$$d\,(xy), \quad d\left(-\frac{x^2}{1\cdot 2}\,\frac{dy}{dx}\right), \quad d\left(\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{d^2y}{dx^2}\right), \ldots$$

Теперь выполняется почленное интегрирование, причём число слагаемых сразу берётся бесконечным, а последний, непарный член.

просто отбрасывается. Спустя 20 лет, в 1714 г., английский математик Брук Тэйлор, ярый сторонник Ньютона в споре о приоритете открытия исчисления бесконечно малых, в своём «Методе приращений» вывел формулу (7) по существу тем же приёмом. Установив с помощью интегрирования по частям (мы снова меняем обозначения), что

$$\int y\,dx = xy - \frac{x^2}{2}\frac{dy}{dx} + \int \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\,dx$$

и что аналогичные формулы имеют место при любом числе членов, он переходит к бесконечному ряду, совершенно не учитывая влияния последнего слагаемого.

В этом же сочинении Тэйлор даёт, имея в виду ту же цель дать общие методы квадратур, разложение функции y в бесконечный степенной ряд вида

$$y = z + v\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}v^2\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots, \tag{9}$$

где z есть значение функции y при некотором значении аргумента x, а v есть приращение аргумента, соответствующее вычисляемому значению y.

Этот ряд (он был позднее назван рядом Тэйлора) Тэйлор, не замечая его связи с рядом (7), получает иными, но столь же «наивными» средствами. Он исходит из интерполяционной формулы, данной Ньютоном в 1711 г.[1]).

Пусть аргумент x получает, начиная со значения $x = a$, n последовательных приращений, равных Δx, и пусть $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a)$, $\Delta^3 f(a)$ и т. д. суть конечные разности функции $f(x)$, взятые при $x = a$, т. е.

$$\begin{array}{ll}
\Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a), & \Delta f(a+\Delta x) = f(a+2\Delta x) - f(a) \\
\Delta^2 f(a) = \Delta f(a+\Delta x) - \Delta f(a), & \Delta^2 f(a+\Delta x) = \Delta f(a+2\Delta x) - \Delta f(a+\Delta x) \\
\Delta^3 f(a) = \Delta^2 f(a+\Delta x) - \Delta^2 f(a) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Тогда согласно формуле Ньютона мы имеем тождественно

$$f(a+n\Delta x) = f(a) + n\Delta f(a) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a) + \\ + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}(n-2)\Delta^3 f(a) + \ldots + \Delta^n f(a), \tag{10}$$

где n есть любое целое положительное число.

Идея Тэйлора состоит в следующем. Положим $n\Delta x = h$. Тогда

$$f(a+h) = f(a) + h\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\Delta^3 f(a)}{\Delta x^3}\ldots$$

Эта формула всё ещё содержит конечное число $n+1$ членов: Тэйлор не выписывает их дальше. Далее Δx предполагается бесконечно малым, а h — фиксированным. Тогда коэффициент $h(h-\Delta x)$ «обращается» в h^2; $h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)$ — в h^3 и т. д., а величины $\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2}$ и т. д. — в производные $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2 f(a)}{dx^2}$ и т. д.

[1]) Ньютон, Математические работы, пер. Д. Д. Мордухай-Болтовского, ОНТИ, 1937, стр. 210—217.

Отсюда Тэйлор получает формулу, которая в модернизованном виде имеет вид

$$f(a+h)=f(a)+h\frac{df(a)}{dx}+\frac{1}{2}h^2\frac{d^2f(a)}{dx^2}+\dots \tag{11}$$

и которая совпадает с формулой (9), более близкой к оригиналу по начертанию. Он не смущается тем, что число членов в формуле (11) бесконечно велико, и не даёт себе труда оценить погрешность, появляющуюся в *последних* членах формулы (10).

Таковы те чудовищные, с нашей точки зрения, приёмы, которые применялись в XVIII в. при выводе наиболее важных результатов анализа. В течение всего XVIII в. никто не попробовал положить в основу вывода ряда Тэйлора оценку совершаемой погрешности. Даже Лагранж, который в 1797 г. впервые поставил вопрос о погрешности, происходящей вследствие замены бесконечного ряда Тэйлора конечным числом его членов, не помыслил о том, чтобы исходить из этой оценки при *выводе* ряда Тэйлора; этот ряд принимался им за исходный принцип всей его теории функций.

Эйлер не представлял исключения из правила. Напротив, он был смелее, чем все его предшественники.

Его не только не смущала мысль о возможной расходимости ряда, но он оперировал с заведомо расходящимися рядами так, как если бы они были обыкновенными многочленами.

7. Было бы, однако, большой ошибкой полагать, что математики XVIII в., в частности предшественники Эйлера, не придавали значения или не интересовались вопросом обоснования анализа. Напротив, и Ньютон, и Лейбниц, и их последователи не раз обращались к этому вопросу. Но нельзя сказать, чтобы в XVIII в. было найдено такое его решение, которое могло бы считаться достаточным. Недаром ещё на исходе века, 1784 г., Берлинская академия, которую возглавлял в то время Лагранж, объявила конкурс, в котором математикам всего мира было предложено «дать ясную и строгую теорию того, что в математике называется бесконечным».

Здесь нет возможности сколько-нибудь полно осветить различные точки зрения на природу математической бесконечности, которые высказывались предшественниками Эйлера. Мы ограничимся поэтому тем, что нам кажется безусловно необходимым для понимания позиций нашего автора.

Наиболее продуктивной точкой зрения—к ней обращались даже её противники, когда от общих рассуждений они переходили к получению конкретных результатов — была точка зрения, которую мы назовём лейбницевой, так как Лейбниц и его ученики развивали её наиболее последовательно.

В учебнике анализа бесконечно малых, который выпустил в 1696 г. Лопиталь и который, как заявляет автор [1]), написан под сильным влиянием братьев Бернулли, особенно младшего, Иоганна, бесконечно малая величина определена, выражаясь на современном языке, аксиоматически. Именно выставляется следующий постулат: «Требуется, чтобы две величины, отличающиеся друг от друга лишь на бесконечно

---

[1]) Г. Ф. Лопиталь, Анализ бесконечно малых, Перевод Н. В. Леви, под ред. А. П. Юшкевича, ГТТИ, 1935, стр. 59.

малую величину, можно было брать безразлично одну вместо другой или (что то же самое) чтобы величина, которая увеличивается или уменьшается лишь на другую величину, бесконечно меньшую, чем она сама, могла быть рассматриваема, как остающаяся той же самой величиной». Второй постулат требует, чтобы кривую линию можно было рассматривать как ломаную с бесконечным числом бесконечно малых звеньев.

Дифференциал Лопиталь определяет как бесконечно малое приращение. Все формулы дифференциального исчисления он получает затем с большой лёгкостью. Так,

$$d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy = x\,dy + y\,dx + dx\,dy = x\,dy + y\,dx,$$

«ибо $dx\,dy$ есть величина, бесконечно малая по сравнению с другими членами $y\,dx$ и $x\,dy$».

Итак, бесконечно малая величина в этой концепции не есть нуль, но ведёт себя в известных случаях, как обыкновенный нуль. На ту же точку зрения иногда становился и Ньютон.

«Так как мы предположили 0 бесконечно малой величиной,— говорит он при выводе соотношения между флюксиями (производными) количеств x, y, связанных соотношением $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$,— то те члены, которые на неё умножены, можно считать за ничто в сравнении с другими. Поэтому я ими пренебрегаю...» [1]).

Однако математики XVII—XVIII вв., одни, как Ньютон, в большей, другие, как Лейбниц, в меньшей мере, не были вполне успокоены (почему — скажем ниже) такой концепцией и искали иного выхода. Так, Лейбниц в своём основном мемуаре 1684 г. определяет дифференциал dx независимой переменной, как произвольное количество, а дифференциал dy зависимой переменной как такое количество, отношение которого к dx равно отношению приращения ординаты касательной к приращению абсциссы.

Некоторые историки хотят видеть в этом определении современное определение дифференциала функции как произведения производной на приращение аргумента. Оно было бы таковым, если бы Лейбниц умел дать определение углового коэффициента касательной, и самое важное, если бы он умел вывести формулы дифференциального исчисления, исходя из этого определения. Но эти формулы он получает так же, как это впоследствии сделал Лопиталь.

Если Лейбниц использует геометрическую интерпретацию, то Ньютон, стремясь обеспечить строгость изложения, исходит в «Методе флюксий» из механической картины, определяя «флюксию» (производную) как скорость изменения функции относительно аргумента, которому приписывается роль времени. Однако при выводе основных соотношений между флюксиями он, как мы видели, вынужден пользоваться тем же приёмом, что и Лопиталь.

В «Математических началах натуральной философии» (1687 г.) Ньютон ещё ближе, чем в «Методе флюксий», подходит к идее предела и даже употребляет термин «предел», который, можно сказать, отсюда и ведёт своё происхождение. Это дало основание многим учёным видеть в ньютоновом «методе первых и последних отношений» далеко идущее предвосхищение идей Коши. Академик Н. Н. Лузин

[1]) Ньютон, Математические работы, стр. 50.

считает даже, что у Ньютона «теория пределов выполнена с гораздо большей осторожностью, чем у Коши» [1]). Против такого взгляда можно было бы выставить много возражений. Анализируя рассуждения, проводимые Ньютоном при выводе конкретных результатов, можно показать, что идея предела не является у него математическим орудием, не является составной частью *действующего* аппарата. Это потребовало бы, однако, большего места, чем мы располагаем в данной статье. Кроме того, всегда можно было бы ожидать контрвозражения, что Ньютон, отчётливо владея методом пределов, не мог ещё или даже не стремился к тому, чтобы придать ему столь же отчётливое словесное выражение.

Однако если не только в 1687 г., но и четверть века спустя, Ньютон, говоря о принципиальных вопросах обоснования анализа, высказывает суждения, идущие вразрез с концепцией предела у Коши, то мы вправе сказать, что идея предела у Ньютона и не могла быть рабочим орудием анализа. Между тем, в «Рассуждении о квадратуре кривых», появившемся в 1711 г., мы находим именно такие суждения. Ньютон рассматривает здесь секущую CK и касательную CH (рис. 2). «Если, — говорит Ньютон [2]), — точки C и c отстоят друг от друга на какой-нибудь малый промежуток, то прямая CK мало отстоит от касательной CH. Для того чтобы прямая CK совпала с касательной CH и нашлись бы последние отношения линий CE, Ec и cC, необходимо, чтобы точки C и c сошлись и *совершенно совпали* [3]). В математике не следует оставлять без внимания и самые малые ошибки». Таким образом «последнее отношение» или, что по Ньютону то же, «предел» отношения $cE : CE$ (в современных обозначениях $\Delta y : \Delta x$) здесь есть не что иное, как значение $\Delta y : \Delta x$ в тот момент, когда точки C и c *совершенно* совпадают, т. е. когда Δx *в точности* равно нулю.

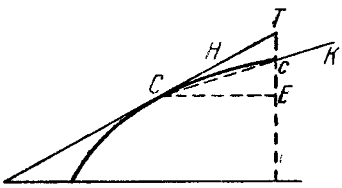

Рис. 2.

Здесь, таким образом, Ньютон решительно отказывается от позиции, занятой им в «Методе флюксий», но вместе с тем вступает в противоречие с заявлением, сделанным им в «Началах»: «Предельные отношения исчезающих количеств не суть отношения пределов этих количеств», на которое часто ссылаются как на отчётливую формулировку идеи предела [4]). Вместо этого в «квадратуре кривых» высказывается, правда не в достаточно развёрнутой форме, положение, что флюксия (производная) есть отношение нулей.

На эту точку зрения стал в своём «Дифференциальном исчислении» Эйлер.

8. Может показаться очень удивительным, что математическая мысль в течение многих десятилетий после Ньютона не могла стать на путь сколько-нибудь последовательного проведения идеи предела,

[1]) Н. Н. Лузин, Ньютонова теория пределов в сборнике «Исаак Ньютон», АН СССР, 1943, стр. 55.

[2]) Ньютон, Математические работы, стр. 168.

[3]) Курсив мой. *М. В.*

[4]) Как мы указывали, на самом деле и в «Началах» эта точка зрения не действенна.

которая ныне является предметом элементарного преподавания. Причину этого явления многие видят в том, что «математики полагались на беглость, с которой постепенно приучались выполнять эти операции (операции с бесконечно малыми величинами), и на очевидную правильность множества полученных результатов и не заботились дальше о принятии нужных мер предосторожности» [1]). Часто ссылаются на даламберовский совет «Travaillez, et la foi viendra» (работайте, и уверенность появится) и в этом усматривают подтверждение упомянутого объяснения.

Нельзя, конечно, отрицать, что правильность результатов была источником оптимизма, выраженного в даламберовском афоризме и что она давала математикам XVIII в., так сказать, моральную поддержку в их творческой работе.

И всё же упомянутое объяснение представляется мне недостаточным. Действительно, математики XVIII в. прекрасно видели *необходимость* обеспечить строгость и безупречность результатов, тем более что не всегда была налицо уверенность в их правильности (достаточно, например, вспомнить споры о логарифме отрицательного числа и о задаче звучащей струны). А если бы они и были уверены в правильности результатов, то непрекращавшиеся нападки со стороны критиков от Беркли до Гегеля должны были побуждать, хотя бы в целях самообороны, построить крепость анализа на более солидном фундаменте.

В попытках такого рода и в самом деле не было недостатка. Однако ни Ньютону, ни Лейбницу, ни Эйлеру, ни Даламберу, у которого современная идея предела была высказана с большой отчётливостью, ни Лагранжу, не говоря о десятках других, менее крупных деятелей науки, не удалось создать *действующего* аппарата, который мог бы выдержать логическую критику.

Чтобы понять, почему упомянутые попытки не достигали цели, мы должны обратить внимание на то, что математика XVIII в. имела своеобразный идеал строгости.

Этот идеал отнюдь не совпадал с античным, с позиций которого исходила философская критика и на почве которого ещё пытались удержаться некоторые математики XVII века [2]).

Античная математика опиралась на весьма развитой формальный аппарат; хотя он и являлся продуктом абстракции от наглядных образов, приобретённых из внешнего мира, однако в самом математическом мышлении приобрёл характер абсолютных норм. В тех довольно многочисленных случаях, когда этот аппарат оказывался недостаточным для логической обработки некоторого конкретного материала, античные математики готовы были принести содержание в жертву форме. Так, Евклид совершенно игнорирует задачу спрямления окруж-

---

[1]) Г. Цейтен, История математики в XVI и XVII вв. Перевод П. Новикова, ГТТИ, 1933 г.

То же мнение высказывает Г. Клейн, Лекции о развитии математики в XIX столетии, перевод Б. Лившица и др., 1937, стр. 39. Я беру эти два высказывания наудачу. Число их очень велико.

[2]) Разумеется, я не утверждаю, что идеал строгости в математике изменялся в ночь с 31 декабря 1699 на 1 января 1700 года; под термином «математика 18 века» я понимаю здесь эпоху, открывающуюся завершением создания исчисления бесконечно малых (70—80-е годы 17 века) и заканчивающуюся в 80—90 годах 18 века; при этом речь идёт не о всех математиках поголовно, а о преобладающей точке зрения.

ности, задачу квадратуры круга и многие другие проблемы, занимавшие умы его предшественников, потому только, что для их решения традиционный формальный аппарат был недостаточным.

Практическая устремлённость математики XVIII в. не могла мириться с этой прокрустовой манерой древних. Но создание нового формального аппарата, который мог бы охватить новый круг вопросов науки о природе, было в то время делом непосильным: слишком мало было исследовано идейное содержание обширного и каждодневно увеличивающегося материала математических фактов. К тому же на математике не могла не отразиться основная тенденция философии XVIII в. Ведь материализм XVIII в. исходил из предпосылки, что содержание всякого мышления и знания происходит из чувственного опыта.

Вот почему формальной критике анализа бесконечно малых математики XVIII в. противопоставляли апелляцию к природе и её законам, разумеется, в том метафизическом понимании последних, которое было присуще этой эпохе.

Таким образом, если античный идеал строгости в математике состоял в согласованности рассуждений с установившимися формальными нормами, то идеал строгости в XVIII в. состоял в согласованности рассуждений с законами природы. Правда, этот идеал, насколько мне известно, никем из математиков XVIII века не был сформулирован, ибо в то время проблема доказательства, как таковая, ещё не возникала.

Но не случайно Ньютон, Маклорен и другие английские математики вводят в учение о флюксиях понятие механического движения. В апелляции к процессу «течения» они ищут о п р а в д а н и я формальных операций исчисления флюксий. Современная математика идёт обратным путём: формальные операции она стремится положить в основу описания движения.

Но при интуитивном восприятии движения скорость его нелегко представить как предел отношения $\Delta s : \Delta t$, ибо течение времени необратимо, и стремление Δt к нулю, так сказать, насилует естественную направленность процесса.

Характерно, что когда Ньютон хочет пояснить понятие «последнего отношения» на примере из области механики, он рассматривает не величину $v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$, а величину, которую я обозначу через v и которую я обозначу через v и которую Ньютон определяет, как «скорость, которую имело тело ранее, чем оно достигло места, где движение прекращается»[1]). Эту величину он сравнивает с величиной, которую я обозначу через v_0 и которую Ньютон определяет, как «ту скорость, обладая которой тело достигает крайнего места и при которой движение прекращается». Величину v Ньютон уподобляет отношению $x : y$ двух бесконечно малых количеств x, y, а величину v_0 — пределу этого отношения. Из контекста ясно, что Ньютон рассматривает случай, когда $v_0 \neq 0$[2]), т. е. когда тело «на полном ходу» наталкивается на пре-

---

[1]) Н ь ю т о н, Математические начала натуральной философии, пер. А. Н. Крылова, Известия Никол. морск. акад., вып. IV, 1915, стр. 64.

[2]) Это ясно из того, что в том же абзаце, сопоставляя состояние тела в момент достижения места остановки и состояние его после достижения места остановки, Ньютон говорит, что после остановки у тела «нет скорости», в момент же остановки, как видно из цитированной фразы, у тела, по Ньютону, скорость есть.

пятствие, останавливающее его или, выражаясь на современном математическом языке, когда скорость v является в рассматриваемой точке разрывной функцией времени [1]). Таким образом для иллюстрации предельного перехода пример Ньютона является совершенно неподходящим.

Лейбницево понятие дифференциала как постоянной, но неизмеримо малой величины, при всей его формальной противоречивости, гораздо лучше подходило к фактически применяемому способу определения скорости как отношения достаточно малого пути к соответственному промежутку времени. Этим и нужно, мне кажется, объяснить фактическое преобладание концепции Лейбница. Конечно, для ньютонианцев эта концепция была неприемлема, но даже Ньютон в «Началах», против своего желания, сбивается на путь Лейбница. «Я разумею, — говорит он, — эти количества (произведения двух множителей) как неопределённые и изменяющиеся... и как бы возрастающие или убывающие от постоянного движения или течения, и их мгновенные приращения или уменьшения разумею под словом „моменты"». Надо подразумевать, что это суть едва-едва зарождающиеся начала конечных величин [2]).

Правда, Ньютон тут же оговаривается, что за моменты нельзя принимать конечные частицы. Однако из этого следует лишь то, что он не хочет мыслить лейбницевыми образами и тем не менее невольно пользуется ими.

Чтобы подтвердить правильность высказанного здесь суждения о математическом идеале XVIII в., приведу ещё несколько примеров.

В 1734 г. знаменитый философ Д. Беркли выступил с развёрнутой критикой ньютоновых методов обоснования анализа [3]). Эта критика вскрывала все слабые с формальной точки зрения места ньютонова обоснования. Последователи Ньютона, Робинс и Джюрин, возражали

---

[1]) Это обстоятельство я хотел бы особенно подчеркнуть, так как недавно академиком А. Н. Колмогоровым как раз в связи с рассматриваемым примером было высказано противоположное мнение. Вот что пишет А. Н. Колмогоров в своей статье: «Ньютон и современное математическое мышление» (сборник «Московский Университет—памяти Исаака Ньютона», Издание МГУ, 1946, стр. 35—36):

«Часто Ньютона упрекают в непоследовательности за то, что он нередко говорит о предельном значении отношения $\lambda = x : y$ при $x \to 0$, $y \to 0$, как о значении, к которому отношение λ стремится и которого в конце концов достигает. Часто считают, что он тем самым приходит к определению в духе Лейбница–Эйлера предельного отношения, как отношения двух бесконечно малых или ещё вульгарнее—двух нулей. В действительности дело объясняется тем, что у Ньютона функция автоматически считается определённой по непрерывности в тех точках, в которых она имеет определённый предел . . . Так как функции (флюенты) у Ньютона по самому определению непрерывны, то в таком подходе к делу нет логической ошибки».

Что функции у Ньютона вообще предполагаются непрерывными (только не по определению, а в качестве неявной предпосылки) это верно; но именно это и даёт нам право говорить о непоследовательности Ньютона в данном случае. Кстати сказать А. Н. Колмогоров на стр. 35 упомянутой его статьи сам подчёркивает, что в рассматриваемом примере величину скорости в момент прекращения движения Ньютон считает неравной нулю. Поэтому в данном случае Ньютон и в самом деле «скатывается» на позицию Лейбница (о позиции Эйлера речь будет дальше), хотя трудно сказать, что он «приходит к определению» в духе Лейбница—Эйлера, потому что он хотел бы избежать подобных определений. И это — не единственный случай (см. ниже в тексте).

[2]) Ньютон, Математические начала натуральной философии, пер. А. Н. Крылова, Известия Никол. Морск. акад., вып. V, 1916, стр. 20.

[3]) The Annalyst or A Discourse addressed to an Infidel Mathematician. The Works of G. Berkeley, 1901, т. III.

Беркли. Но в понимании ньютоновой концепции предела они разнились друг с другом. Их разногласие может показаться с современной точки зрения беспредметным. Спор шёл о том, достигает ли переменная величина предела или нет. Но по сути дела, спорили о том, что составляло, как мы видели, камень преткновения для Ньютона: равна ли нулю бесконечно малая величина. Для решения этого вопроса Джюрин рисует такую физическую картину: пусть правильный многоугольник вписан в окружность; затем число его сторон последовательно удваивается. Обратится ли он в окружность или лишь будет неограниченно приближаться к ней? Если первое удвоение совершается, — говорит Джюрин, — за час, второе — за полчаса, третье — за четверть часа и т. д., то через два часа многоугольник обратится в окружность.

Зенон, рассматривая аналогичный пример (Ахилл, догоняющий черепаху), приходил к выводу о невозможности движения, основываясь на логических соображениях. Математик XVIII в. отвергает логические доводы, опираясь на законы движения. В этом сказывается характерная черта математики XVIII в., на которую мы обратили внимание читателя.

Приведём другой пример. В 1696 г. Яков Бернулли, применив меркаторов приём деления $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ к случаю $x = 1$, получает, по его выражению, «изящный парадокс»

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{12}$$

Он даёт тут же и объяснение этого парадокса: при делении получается остаточный член, равный $\pm\frac{1}{2}$. Этот остаток и дополняет сумму в правой части, которая равна 0 или 1, до половины.

Казалось бы, это исчерпывающее объяснение должно было бы удовлетворить самым строгим требованиям. Однако вокруг этого парадокса вскоре возгорелся оживлённый спор.

В 1703 г. Гранди пытался объяснить равенство

$$(1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots + 0 = \frac{1}{2},$$

которое он считал равносильным равенству (12) как символическое выражение всемогущества бога, который сотворил мир из ничего [1]).

Впрочем, тот же Гранди, чувствуя, видимо, недостаточность своей «интерпретации», прибег позднее к другой: отец оставляет в наследство двум сыновьям дрогоценный камень, который должен один год находиться в обладании одного брата, на следующий год переходить к другому и т. д. Продать его сыновья не могут. Таким образом, сокровище фактически разделено пополам, тогда как первый из братьев обладает последовательно суммой 1, $1-1$, $1-1+1$ и т. д.

Лейбниц отверг и это объяснение Гранди. Предложенное самим Лейбницем объяснение сводится к тому, что сумма ряда имеет равные шансы быть равной нулю или единице, а потому, по теории вероятностей, она должна быть равна половине. Лейбниц при этом ссылается на объективную основу законов теории вероятностей: в природе, — говорит он, — господствует справедливость; она предписывает вещам

---

[1]) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2-е изд., т. III, стр. 365.

«закон непрерывности», и применение этого закона «никогда не приводит к ошибкам, хотя бы оно и не покоилось на строгом доказательстве»[1]).

Мы видим, что Лейбниц становится здесь на натурфилософскую позицию, хотя математическая сторона дела уже была полностью вскрыта его учеником.

Христиан Вольф в 1710 г., защищая инфинитезимальную концепцию Лейбница, пишет: «Заметьте хорошенько, что бесконечно малая величина только по сравнению с другой может быть принимаема за нуль; сама же по себе она не является нулём. В самом деле, представьте, что вы желаете измерить высоту горы и что во время этой работы ветер сдул песчинку с её вершины. Итак, гора стала ниже на диаметр песчинки. Однако так как измерение горы производится таким образом, что величина высоты окажется одной и той же, лежит ли песчинка на её вершине или сдута ветром, то можно считать песчинку по сравнению с большой горой за ничто и таким образом считать её величину по сравнению с высотой горы за бесконечно малую»[2]).

Снова апелляция к прообразам бесконечно малых величин в действительности.

Эйлер полемизирует с Вольфом. Ему нетрудно показать логическую несостоятельность аргументов Вольфа. Вопреки Вольфу, он доказывает, что бесконечно малое количество есть самый настоящий нуль. Но он поступает, как Вольф, когда своё положение стремится согласовать с физической картиной (бесконечная протяжённость вселенной, бесконечная делимость материи)[3]). В этом-то стремлении положить в основу формальных операций математики внешние моменты и состоит, как я полагаю, причина неудач, которые постигали все попытки обоснования анализа в XVIII в.

Став на эту точку зрения, мы легко поймём, что слабость математики XVIII в. была в то же время её силой. Если бы математики XVIII в. могли стоять на позициях формального обоснования (разумеется, это было исторически невозможно), то исчисление бесконечно малых никогда не было бы создано.

9. Перу Эйлера принадлежит 783 работы по самым различным вопросам математики, механики, астрономии, физики, техники и философии. Но едва ли не наибольшее внимание в течение всей своей долголетней научной деятельности — он начал её двадцатилетним юношей в 1728 г. и интенсивно работал до самой смерти (1783 г.), которая застала его за вычислительной работой, — Эйлер уделял развитию методов анализа бесконечно малых и в первую очередь развитию учения о рядах. Его первые юношеские работы были посвящены решению задачи о геодезических линиях; из этого выросло созданное Эйлером вариационное исчисление, которое он систематически изложил в опубликованной в 1744 г. работе[4]).

---

[1]) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2-е изд. т. III, стр. 367.

[2]) Ch. Wolff, Die Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften, 1710. Цитирую по переводу С. Я. Лурье в сборнике «Л. Эйлер» АН. СССР, 1935, стр. 60.

[3]) См. в «Дифференциальном исчислении», гл. III, § 75—76.

[4]) Л. Эйлер, Метод нахождения кривых линий, обладающих свойством максимума или минимума. Русский перевод Я. М. Боровского, под ред. чл.-корр. АН СССР И. С. Кошлякова, ГТТИ, 1934.

Но уже с 1730 г. в центре внимания Эйлера оказываются бесконечные ряды и их многообразные приложения. Едва закончив работу над «Методом нахождения кривых», Эйлер составляет план «полного трактата об исчислении бесконечно малых», о котором он пишет в письме к Гольдбаху 4 июля 1744 г. Выполнение этого плана составило важную часть всей дальнейшей работы Эйлера. В 1748 г. в Лозанне вышло его «Введение в анализ бесконечно малых». Первая часть этого труда имеется в русском переводе [1]; на неё Эйлер неоднократно ссылается в печатаемой здесь работе. Во второй части излагается аналитическая геометрия и элементы дифференциальной геометрии. На эту часть Эйлер в «Дифференциальном исчислении» совершенно не опирается. Современному читателю нет необходимости для понимания «Дифференциального исчисления» предварительно изучать «Введение», так как в большинстве случаев ссылки Эйлера касаются результатов, которые ныне общеизвестны. Однако многие главы «Введения» имеют самостоятельный интерес и дают поучительный материал для чтения. Содержание «Введения» выходит далеко за пределы того, что необходимо для понимания дальнейших частей эйлерова трактата. По словам Эйлера, его целью при составлении «Введения» было заставить читателя «незаметно и как бы сверх ожидания ознакомиться с идеей бесконечного» [2]. Но мы не ошибёмся, если добавим, что Эйлер преследовал ещё другую цель: собрать воедино и систематически изложить результаты, полученные в течение почти 20 лет работы, которые, будучи печатаемы в научных журналах, главным образом в «Записках Петербургской академии» (Commentarii Academiae Petropolitanae), были мало доступны учащимся.

Главное внимание во «Введении» Эйлер уделяет разложению различных выражений в ряды, суммированию рядов и применению рядов к решению разнообразных вопросов алгебры, тригонометрии и теории чисел.

После сказанного выше мы не должны удивляться тому, что Эйлер не основывает изучение бесконечных рядов на понятии сходимости. Он просто переносит на них все свойства алгебраических выражений и с помощью виртуозных преобразований получает множество поразительных результатов. Может быть, наиболее замечательной в этом смысле главой является глава XVI, где Эйлер рассматривает теоретико-числовую проблему, и до сих пор не разрешённую до конца.

Операция дифференцирования, естественно, не рассматривается во «Введении», но без бесконечно малых и бесконечно больших величин Эйлер обойтись всё же не может. Мы уже упоминали — и ещё вернёмся к этому вопросу, — что в «Дифференциальном исчислении» Эйлер становится на ту точку зрения, что бесконечно малая величина есть постоянная величина, в точности равная нулю. Во «Введении» он, видимо, старается уклониться от рассмотрения принципиального вопроса о природе бесконечности. Но там, где ему приходится иметь дело с бесконечно малыми, он выражается о них в стиле школы Лейбница.

Так, разложение функции a^x по степеням x Эйлер начинает следующим рассуждением [3]:

---

[1] Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечномалых, т. I, пер. Е. Л. Пацановского, под ред. проф. С. Я. Лурье, ОНТИ, 1936.

[2] Цит. соч., стр. 25.

[3] «Введение», стр. 115 русского перевода.

«Так как $a^0=1$ и при возрастании показателя числа a одновременно увеличивается значение степени, если только a есть число, большее единицы, то отсюда следует, что когда показатель бесконечно мало превышает нуль, то сама степень также бесконечно мало превзойдёт единицу. Если ω будет числом бесконечно малым, т. е. *столь малой дробью, что она только-только не равна нулю* [1]), то $a^\omega=1+\psi$, причём ψ будет также числом бесконечно малым».

Здесь с полной определённостью сказано, что бесконечно малая величина *не равна* нулю. Таким образом, в 1744—1745 гг., когда Эйлер приступил к составлению своего «Введения», он ещё стоял на позициях своего учителя Иоганна Бернулли. Весьма вероятно, что уже в 1748 г., когда «Введение» появилось в печати, Эйлер уже изменил свою точку зрения [2]).

10. Второй частью энциклопедического труда Эйлера явилось печатаемое здесь «Дифференциальное исчисление». Оно было сдано Эйлером в печать ещё в 1748 г., но появилось в свет лишь в 1755 г. Хотя Эйлер в это время (с 1741 по 1766 г.) жил в Берлине, но он, как член Петербургской Академии, печатал многие свои работы в России. В Петербурге было издано и «Дифференциальное исчисление». Спустя 15 лет Петербургская Академия закончила печатанием и последнюю часть эйлеровой трилогии, «Интегральное исчисление», в трёх больших томах (1768—1770 гг.). Дополнительный, четвёртый, том вышел уже после смерти Эйлера в 1794 г. Здесь мы должны ограничиться обзором «Дифференциального исчисления».

Оно состоит из двух частей. Первая посвящена дифференциальному исчислению в собственном смысле слова. Вторая даёт приложения дифференциального исчисления к теории рядов, к высшей алгебре, к теории максимума и минимума и к другим вопросам анализа. Первоначально Эйлер предполагал посвятить специально геометрическим вопросам третью часть «Дифференциального исчисления»; в конце первой части он говорит, что переходит к изложению приложений дифференциального исчисления к учению о рядах и к геометрии. В последних главах 2-й части, начиная с 11-й, имеются даже ссылки на третью часть, посвящённую геометрическим приложениям [3]). Но в заключительных словах предисловия (из которого видно, что предисловие было написано в последнюю очередь) Эйлер говорит, что он вовсе не касается приложений дифференциального исчисления к геометрии кривых линий. Ясно, что Эйлер, отказавшись в последний момент от намерения включить в книгу третью часть, не имел времени просмотреть написанный текст, чтобы исключить из него ненужные уже ссылки. Тем удивительнее, что эта книга представляет собой стройное целое и, несмотря на свои размеры, легко обозрима.

Ей предпослано довольно большое предисловие, написанное, как мы видели, в последнюю очередь. Кроме очень сжатого и схематического исторического очерка, оно содержит мало нового по сравнению с текстом книги. Важно отметить, что здесь Эйлер после обстоятельно разобранного примера (полёт ядра; это единственный физический

[1]) ... tantum non nihilo sit aequalis. (Курсив мой. — *М. В.*)

[2]) См. статью С. Я. Лурье «Эйлер и его исчисление нулей» в сборнике «Л. Эйлер» АН СССР, 1937, стр. 57.

[3]) Сохранилась незаконченная рукопись этой третьей части. Она была впервые напечатана в 1862 г. в I т. посмертных сочинений Эйлера: Leonardi Euleri opera postuma, т. I, стр. 324.

пример во всей книге!) даёт то общее определение функции, с которого и поныне начинаются все популярные учебники анализа.

Однако это определение так же, как упоминаемое в предисловии понятие предела, у Эйлера почти не действует. В «Дифференциальном исчислении» функция рассматривается преимущественно как «аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств». Так Эйлер определял функцию во «Введении в анализ». Так определял функцию и его учитель Иоганн Бернулли ещё в 1718 г. Определение, данное в предисловии, навеяно, вероятно, ньютоновским понятием «соотнесённого количества».

Авторы, писавшие до Эйлера общие сочинения по анализу — Ньютон, Лопиталь, Бернулли, Краг, Маклорен, — в большей или меньшей мере связывали основные понятия анализа с геометрическими или механическими образами. Эйлер впервые поставил себе целью изложить анализ абстрактно. Противопоставляя свою книгу другим сочинениям, где «начальные основы дифференциального исчисления как бы исходят из геометрии», он не без гордости говорит, что в его книге «всё изложение ограничено пределами чистого анализа, так что для изложения всех правил не понадобилось ни одного чертежа».

В этом отношении сочинение Эйлера послужило образцом для многих последующих сочинений по анализу, и в настоящее время, более чем когда-либо прежде, абстрактность изложения анализа является идеалом, к которому стремятся многие авторы. Посмотрим, как осуществляет этот идеал Эйлер.

11. В первых двух главах 1-й части Эйлер строит базу, на которой он, далее, хочет построить учение о дифференциалах. Этой базой служит исчисление конечных разностей. Имеющийся здесь материал не нов. Он содержался в работах Ньютона, Тэйлора, Стирлинга. Однако благодаря доступности изложения и обилию прекрасно подобранных примеров (в том и другом Эйлер показывает себя непревзойдённым мастером на протяжении всей книги) читатель здесь мог впервые найти краткое, связное и ясное изложение основ исчисления конечных разностей. Нужно отметить, что Эйлеру принадлежат и употребляемые здесь обозначения, в частности, общепринятые сейчас обозначения приращения буквой Δ, образцом которого послужило ему, очевидно, лейбницево обозначение дифференциала d.

Уже в этих первых главах обнаруживаются особенности изложения, связанные с особенностями математического мышления Эйлера и его эпохи. Мы говорили выше о том, что математики XVIII в. для оправдания новых понятий и операций привлекали на помощь явления внешнего мира. Это обстоятельство, а также и замечательная сила, которой, как оказалось, обладает математический алгоритм, породили уверенность в том, что математические действия, как и явления природы, подчинены законам, которые, подобно законам природы, даны нам, так сказать, принудительно. Математик XIX в. стремился *вывести* математическую закономерность; математик XVIII в. стремился её *открыть*, в уверенности, что она существует вне зависимости от тех или иных соглашений. Так, для математика XIX в. выражение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ имеет смысл только для целых n, т. е. функция $n!$ определена только для целочисленных значений аргумента. Для остальных значений её можно доопределить с большей или меньшей степенью произвола. Для Эйлера закономерность, определяющая $n!$

для целочисленных n, представляется совершенно достаточной для того, чтобы *искать* значение $\left(\frac{1}{2}\right)!$. Ещё до 1730 г. он нашёл [1]), что $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. В примере 1 § 402 второй части настоящей книги читатель найдёт этот вывод.

Совершенно таким же образом Эйлер в §§ 17 и 18 I главы «Дифференциального исчисления» переносит на дробные и отрицательные показатели найденные им для целых показателей формулы конечных разностей. Так действовал и Ньютон, перенося на дробные и отрицательные показатели мультипликативный закон образования биномиальных коэффициентов, обнаруженный для целых показателей. Но и тогда, когда Эйлеру нужно установить какой-либо закон, имеющий место для целочисленных значений аргумента, он поступает не так, как поступил бы математик нашего времени. Он ограничивается *наблюдением* этого закона для некоторого (притом довольно небольшого) числа значений, подобно тому как естествоиспытатель устанавливает всеобщий закон природы из конечного числа наблюдений.

Так, в § 10 гл. I Эйлер находит непосредственным вычислением формулы, которые мы написали бы в виде

$$\Delta\ f(x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(h),$$

$$\Delta^3 f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x=h) - f(x).$$

Приведя ещё две дальнейшие формулы для $\Delta^4 f(x)$ и $\Delta^5 f(x)$, он устанавливает, что «коэффициенты в этих формулах подчинены тому же закону, который наблюдается у степеней бинома». В дальнейшем же он ссылается на тождественность этих коэффициентов с биномиальными для разности *любого* порядка.

Не нужно думать, что Эйлер не даёт в таких случаях общего доказательства ввиду его трудности или, наоборот, предоставляет проведение лёгкого доказательства читателю. Нет, для него самого «неполная индукция» вполне убедительна. Кто усомнится в этом, пусть прочтёт §§ 13—15 первой главы, где Эйлер устанавливает связь между коэффициентами в выражениях разностей функции x^n. Эта связь усматривается Эйлером из таблицы первых семи разностей. Приведённые же Эйлером общие формулы, выражающие эту связь, содержат ошибку. Систематическое её повторение исключает возможность опечатки или описки [2]). Если бы Эйлер сделал попытку доказать упомянутый закон связи, он тотчас же обнаружил бы эту ошибку и исправил бы её.

На протяжении всего «Дифференциального исчисления» Эйлер лишь один раз доказывает обнаруженный им по индукции закон, да и то по особым обстоятельствам. Из рекуррентной зависимости, найденной им в § 111 2-й части для коэффициентов α, β, γ, δ, ε, ...

---

[1]) De progressionibus transcendentibus seu quorum termini algebraice dari nequeunt, Commentarii Academiae Petropolitanae, т. V (1730), стр. 36—57.

[2]) См. примечание к § 15 ч. I.

формулы суммирования, он последовательно определяет значения $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Найдя, что

$$\alpha=\frac{1}{2}, \quad \beta=\frac{1}{12}, \quad \gamma=0,$$

$$\delta=-\frac{1}{720}, \quad \varepsilon=0,$$

он замечает (§ 112), что «продолжая это вычисление дальше, будем последовательно находить, что члены попеременно исчезают». В другом аналогичном случае это наблюдение показалось бы, вероятно, Эйлеру достаточным для установления общего закона. Но в данном случае его внимание привлекает тот факт, что первый член $\alpha=\frac{1}{2}$ представляет исключение из установленного правила.«Вследствие этого, — говорит Эйлер,—представляется, что ряд этих значений вступает в столкновение с законом непрерывности». Вот почему Эйлер считает необходимым «строго доказать, что все нечётные члены, кроме первого, необходимо должны исчезать». С этой целью Эйлер рассматривает ряд

$$1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\ldots \tag{13}$$

Пользуясь исходным рекуррентным законом, связывающим коэффициенты α, β, γ, δ, Эйлер преобразует (§ 114) этот ряд к виду

$$\frac{1}{2}u+\frac{1+\frac{u^2}{2\cdot 4}+\frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\ldots}{1+\frac{u^2}{4\cdot 6}+\frac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\ldots}. \tag{13a}$$

Так как во втором слагаемом нет нечётных степеней, то в ряд (13), тождественно равный выражению (13а), не входят никакие другие нечётные степени, кроме первой. Теперь Эйлер имеет право утверждать, что из коэффициентов α, γ, ε... только первый отличен от нуля. И он добавляет: «при этом не нарушается закон непрерывности», что, по сути дела, означает, что найдена построенная по простому закону формула (13а), вполне определяющая ряд чисел α, β, γ, δ, ...

Мы сказали, что первые две главы «Дифференциального исчисления» должны, по плану Эйлера, дать ему базу для обоснования дифференциального исчисления. Но материал этих глав значительно выходит за пределы необходимого для этой цели. В первой главе (§§ 1—23) Эйлер находит сначала выражение конечных разностей различных элементарных функций, на которые он при выводе формул дифференциального исчисления не опирается. Конец главы (§§ 24—36) посвящён операции, обратной образованию конечной разности, т. е. разысканию по данной разности той функции, от которой эта разность взята. Эту функцию Эйлер называет суммой и доказывает (§ 25), что она в самом деле даёт сумму данных разностей. Эйлер находит, далее, выражения этой суммы для простейших функций.

Во второй главе Эйлер, следуя Стирлингу, выводит (§ 44) выражение общего члена ряда, у которого конечные разности некоторого порядка обращаются в нуль, через конечные разности. Полученное выражение есть не что иное, как интерполяционная формула Ньютона, из которой, как мы указывали, Тэйлор получил свой ряд. На возможность применения этой формулы для интерполяции Эйлер указывает в § 52.

Примеров он здесь не рассматривает, так как вопросу об интерполяции рядов посвящена специально XVII, а фактически XVI глава 2-й части. Там рассматриваются наряду с рядами, имеющими постоянную разность, и произвольно построенные ряды.

С § 53 II главы начинается рассмотрение «суммационного члена» т. е. выражения для суммы его первых x членов. Так как для ряда суммационных членов данный ряд есть ряд первых разностей, то суммационный член ряда с постоянными разностями находится с помощью интерполяционной формулы Ньютона (§ 57). В общем случае задача сводится (§ 59) к задаче разыскания «суммы» в вышеуказанном смысле, т. е. к обращению разностного дифференцирования. Впрочем, этим методом Эйлер может разыскать суммационный член лишь для узкого класса функций (целые рациональные и факториальные функции). При суммировании ряда степеней натуральных чисел появляются упомянутые бернуллиевы числа, но пока свойства их не рассматриваются и имя Бернулли не упоминается.

12. В следующих двух главах, III и IV, Эйлер рассматривает принципиальные вопросы, связанные с обоснованием дифференциального исчисления. Третью главу «О бесконечных и бесконечно малых» Эйлер начинает сразу с полемики против лейбницианцев, ни разу не указывая, с кем, собственно, он спорит и всегда приводя мнения своих противников в своём собственном изложении. Это, конечно, облегчает задачу разгрома противников. Так как с логической стороны позиция лейбницианцев и сама по себе была легко уязвимой, то не приходится удивляться тому, что ряд силлогизмов (§§ 72—74) приводит Эйлера к выводу, что «числа могут до бесконечности увеличиваться» (§ 73) и что «никакого бесконечного количества не может существовать» (§ 74). Можно, напротив, удивляться тому, что Эйлер тотчас же ослабляет свою позицию в этом вопросе. Он начинает § 75 с заявления, что «количество, которое достигается без конца совершаемыми приращениями» [1]), всё же можно «должным способом (debito modo) ввести в исчисление». При этом он апеллирует к тому, что даже в природе «существуют или по крайней мере могут мыслиться такие случаи, в которых, казалось бы, в действительности существует бесконечное число». Осторожное слово «казалось бы» позволяет Эйлеру не претендовать на безусловное решение натурфилософских вопросов о бесконечности мира и бесконечной делимости вещества, о которых идёт речь в следующих параграфах. Во всяком случае он не отвергает ни бесконечности вселенной, ни бесконечной делимости материи и в § 77 приходит, напротив, к заключению, что если вселенная бесконечна, то «число тел, составляющих вселенную, ... больше всякого могущего быть заданным числа». Отсюда делается пока лишь тот вывод, что «бесконечное число и число, большее всякого могущего быть заданным [2]), — это синонимы». Хотя существование числа, «которое не может принимать никакого приращения», Эйлер в § 74 отвергал самым категорическим образом, и хотя силлогизмы, к которым Эйлер обнаруживает большое пристрастие, легко привели бы его к тому, что число, «большее всякого могущего быть заданным», не может принимать никакого приращения, тем не менее в § 82 Эйлер приходит к выводу, что даже в том случае, если в природе

[1]) Ad quam incrementis sine fine congestis pervenitur.

[2]) Numerus omni assignabili maior.

не существовало бы бесконечного числа, в математике всё же необходимо «допустить бесконечное число». Мне представляется совершенно непонятным, как мог Эйлер примириться с таким противоречием; он, который своих противников корит наличием противоречий в их концепции.

Эйлер ничего не говорит, как можно указанное противоречие устранить, но он, несомненно, чувствует, что почва начинает колебаться под его ногами, потому что следующий параграф начинается с заявления, что «это учение о бесконечном станет более понятным, если мы разъясним, что такое бесконечно малое в математике».

13. На этот вопрос Эйлер после нескольких чисто грамматических замечаний сразу отвечает (§ 83) так: «если кто спросит, что такое бесконечно малое количество в математике, то мы ответим, что оно точно равно нулю... Впрочем, сомнения, если таковые остались бы, совершенно исчезнут в дальнейшем, когда мы изложим это исчисление».

В следующих параграфах устанавливаются правила действий с нулями. Если dx есть бесконечно малое количество или, что, по Эйлеру, одно и то же, нуль, то равенство $a+dx=a$, которое Лопиталь принимает за постулат, становится тривиальным тождеством. Количества $2dx$, $3dx$ и т. д. суть тоже нули, но деление $2dx:dx$, $3dx:dx$ даёт не неопределённый результат, но 2, 3 и т. д. Отношение $dx^2:dx$ равно нулю, а отношение $dx:dx^2$ равно бесконечности, так же как отношение $1:dx$. Теперь (ср. § 92) нам понятно, почему Эйлер вынужден был допустить существование бесконечного числа. Труднее понять, зачем ему понадобилось с самого начала отрицать существование бесконечного числа и корить своих противников указанием на противоречия, вытекающие из этого допущения. Повидимому Эйлер предвидел следующее возражение, которое может быть ему сделано: если $\infty=\frac{1}{0}$ (а, по Эйлеру, это так и есть) и если нуль меньше всякого положительного числа, то число ∞ должно быть больше всякого положительного числа, между тем как, по Эйлеру, $\infty<2\infty$ (§ 93). В пользу такого предположения говорит уже то, что первый свой удар Эйлер обрушивает на тех противников (существовали ли такие на самом деле, не сражается ли здесь Эйлер сам с собой?), которые якобы утверждали, что существует число, которое нельзя дальше увеличивать. Как бы то ни было, Эйлер обходит молчанием упомянутое внутреннее противоречие его концепции и провозглашает законной операцию деления нулей, которую, как мы видели, Ньютон выполнял, так сказать, украдкой.

Поскольку идея предела по тем или иным причинам (мы выше пытались установить, по каким именно) не была органически воспринята математиками первой половины XVIII в., они должны были смотреть на бесконечно малые количества как на количества постоянные. И кто желал быть последовательным, должен был выбирать между двумя крайностями. Или бесконечно малое количество не равно нулю; тогда трудность состояла в том, чтобы объяснить, почему же оно обладает при сложении с обычными арифметическими количествами *свойством нуля*. Лейбницианцы искали ответ на этот вопрос в физических сопоставлениях. Или же бесконечно малые количества равны нулю; тогда трудность состояла в том, чтобы объяснить, каким образом из этих «безразличных» нулей получаются определённые результаты. Эйлер, для которого алгоритм всегда стоял на первом плане, привлёк его и для разрешения этой трудности. Стоит обозначить нуль через ω, через dx или ещё как-нибудь иначе, и тогда 2ω, $2dx$ и т. д. тоже будет нулём, но «безразличие» уже исчезнет, действие $2\omega:\omega$ производится уже не над безразличными, а над определёнными нулями, и получается вполне определённый результат $0:0=2$. Для математика XVIII в. эта позиция должна была быть уязвимой не только и не столько тем, что она вступала в противоречие с законами арифметики — сами эти законы не были ещё приведены в стройную логическую систему; отрицательные и иррациональные числа представляли с логической точки зрения не меньшую загадку, чем бесконечно малые количества. Математик XVIII в. должен был главную трудность позиции Эйлера видеть в наличии явного, так сказать, грубого расхождения между равенством $0:0=2$ и равенством $0=0$. Сомнение этого рода Эйлер пытается устранить (§ 84) путём раздвоения понятия равенства. Он различает равенство «арифметическое» от равенства «геометрического» и утверждает, что два нуля всегда равны между собой арифметически, но вообще не равны геометрически. В дальнейшем это различение не соблюдается, и за счёт этого Эйлеру удаётся провести свой корабль через подводные камни логических трудностей и вывести на глубокую воду плодотворных математических операций.

Но впереди оставалось ещё одно грозное препятствие. Нужно было объяснить, как «из ничего» в процессе интегрирования получается конечная величина. Для лейбницианцев проблема интегрирования не создавала новых трудностей; если бесконечно малое количество можно уподобить песчинке, которую ветер сдувает с горы, а гора от этого не становится ниже, то, с другой стороны, вся гора состоит из песчинок. Но для Эйлера здесь возникает, по существу, новая трудность. К счастью, он может отложить её разрешение: в «Дифференциальном исчислении» (§§ 139 — 141) он имеет дело с интегрированием лишь как с операцией, обратной дифференцированию. Но наступит момент, когда Эйлер должен будет ввести интегрирование в собственном смысле слова. И тогда он, вместо того чтобы найти проход через трудное место, предпочтёт обойти его.

В седьмой главе 1-го тома «Интегрального исчисления»[1]) Эйлер ставит задачу: «Найти приближённое значение интеграла $y=\int X\,dx$»; дополнительно задаётся условие, что при $x=a$ функция y должна иметь значение b. Эйлер придаёт аргументу x «очень малые» последовательные приращения и обозначает через a, a', a'', a''' и т. д. значения аргумента, через $A, A'\ A'', A'''$ и т. д. соответствующие значения функции X и через b, b', b'', b''' соответствующие значения функции y. Так как функция X, — говорит он далее, — изменяется мало, напишем ли мы a или $a+\alpha$ вместо x, то мы можем считать её как бы постоянной[2]). Рассуждая так же относительно следующих приращений, Эйлер получает выражения:

$$b'=b+A(a'-a),$$
$$b''=b+A(a'-a)+A'(a''-a'),$$
$$b'''=b+A(a'-a)+A'(a''-a')+A''(a'''-a'')$$

[1]) L. Euleri, Institutiones calculi integralis, т. 1, 3-е изд. Petropoli, 1824, стр. 178.

[2])...tanquam constantem spectare.

и т. д. и заканчивает словами: «Следовательно, насколько бы x ни превосходило a, ряд a', a'', a''', возрастая, будет продолжен до x, и последняя сумма даст значение y». Теперь мы полностью приведём «схолию», в которой Эйлер перебрасывает мост от первообразной функции, о которой до сих пор только и шла речь, к определённому интегралу.

«Интегрирование, — говорит Эйлер, — обычно определяется так. Говорят, что это есть суммирование всех значений дифференциальной формулы $X\,dx$, если переменному x придавать последовательно все отличающиеся друг от друга на разность dx значения от некоторого данного значения a вплоть до x; разность же эту dx нужно считать бесконечно малой. Таким образом, этот способ представления интегрирования подобен тому, согласно которому в геометрии линии представляются как совокупности бесчисленных точек. Подобно тому как это последнее представление, если его правильно выразить, может быть допущено, так можно стерпеть и приведённое объяснение интегрирования, когда на помощь ему призваны, как это нами здесь сделано, истинные начала, чтобы можно было отразить всякие нападки. Из изложенного же метода во всяком случае ясно, что интегрирование можно получить из суммирования приближённо; точно же его нельзя совершить иначе, как положив, что разности являются бесконечно малыми, т. е. нулями [1]). Отсюда возникло и наименование «интегрирование», которое называют также «суммированием», и знак интеграла $\int$. Коль скоро суть дела выяснена, их можно полностью сохранить».

Мы видим, что Эйлер подошёл вплотную к предложению о том, что значение первообразной функции есть предел «интегральной суммы». Но так как понятие предела ему чуждо, он вынужден сказать, что точное значение интеграла можно получить, «не иначе как» положив слагаемые нулями. Но можно ли это в самом деле сделать и как тогда представить себе суммирование нулей — на этот вопрос у Эйлера ответа нет.

14. Конец третьей главы Эйлер посвящает разбору парадоксов, связанных с понятием бесконечно большого числа. Мы остановимся на одном только примере. В § 100 рассматривается ряд чисел

$$\frac{1}{-3},\quad \frac{1}{-2},\quad \frac{1}{-1},\quad \frac{1}{0},\quad \frac{1}{+1},\quad \frac{1}{+2},\quad \frac{1}{+3}.$$

Поскольку знаменатели непрерывно возрастают, дроби должны непрерывно убывать, и потому «многим казалось, что отрицательные числа можно рассматривать как числа, бо́льшие бесконечности» [2]). Объяснение, которое вслед за тем даёт Эйлер, в сущности, ничего не

---

[1]) ... neque vero exacto expediri, nisi differentiae infinite parvae, hoc est nullae, statuuntur.

[2]) И здесь Эйлер умножает число защитников оспариваемого им мнения. Вряд ли он мог иметь в виду кого-нибудь, кроме Валлиса. Последний в «Арифметике бесконечных» (1655 г.) получил соотношение между площадями криволинейных фигур, которое в современных обозначениях можно представить формулой

$$\int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^n dx : \int_0^a \left(\frac{a}{a}\right)^n dx = 1 : (n+1) \qquad (n > 0).$$

Ошибочно распространив эту формулу на случай $n < -1$, и сопоставив её с тем, что ординаты кривой $\frac{y}{a} = \left(\frac{x}{a}\right)^{-1}$ при отрицательном n больше соответствующих разъясняет; он лишь «вышибает клин клином», успокаивая читателя, что «если рассмотреть ряд чисел

$$\ldots \frac{1}{(-3)^2}, \frac{1}{(-2)^2}, \frac{1}{(-1)^2}, \frac{1}{0^2}, \frac{1}{(+1)^2}, \frac{1}{(+2)^2}, \frac{1}{(+3)^2} \ldots,$$

то о положительных числах $\frac{1}{(-3)^2}, \frac{1}{(-2)^2}, \frac{1}{(-1)^2}$ и т. д. никто не скажет, что они больше бесконечности».

Заодно разбираются и парадоксы, связанные с расходящимися бесконечными рядами. Здесь Эйлер повторяет объяснение Иоганна Бернулли относительно остатка ряда. Однако Эйлер отстаивает за расходящимися рядами право на их существование.

«Хотя суммы их, — говорит он, (§ 109) — и оказываются совершенно несогласными с истиной[1], однако они никогда не приводят к ошибкам; напротив, приняв их, мы получаем множество замечательных вещей, которых мы должны были бы лишиться, если бы пожелали совсем отбросить эти суммирования. Но ведь эти суммы, если они были бы ложными, не могли бы всегда приводить нас к истинным результатам, тем более что они уклонялись бы от истины не на малое, а на бесконечное количество». Выход из этого кажущегося противоречия (§ 111) Эйлер находит в том, что понятию «сумма рядов» он приписывает расширенный смысл: «Мы скажем, что сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд». Эта точка зрения, если её точнее сформулировать, является предвосхищением многих плодотворных идей более позднего времени, например идеи аналитического продолжения. Этим заканчивается III глава.

В четвёртой главе («О природе дифференциалов любого порядка») вводится понятие дифференциала и интеграла. Дифференциал определяется (§ 114) как бесконечно малая разность. После подробного разъяснения этого определения Эйлер снова полемизирует «с теми, кто полагает, что дифференциалы можно рассматривать как бесконечно малые приращения» (§§ 112—123). Далее, вводятся дифференциалы высших порядков. Наконец, вводится интегрирование, как действие, обратное дифференцированию. Изложение здесь, как и всюду у Эйлера, очень подробное и, насколько это возможно при наличии внутренних недочётов системы, очень понятное.

15. Следующие четыре главы посвящены технике дифференцирования. Здесь мы найдём немного материала, который был бы новым для того времени, и очень мало вещей, которые могли бы быть интересными для современного читателя. Мы можем поэтому ограничиться несколькими беглыми замечаниями.

Отметим, прежде всего, что, несмотря на резкое различие в принципиальных установках, техника операций с дифференциалами у

ординат гиперболы $\frac{y}{a} = \left(\frac{x}{a}\right)^{-1}$, Валлис пришёл к заключению, что *отношение* единицы к отрицательному числу больше бесконечности. Аналогичного утверждения для отрицательных *чисел* Валлис не высказывал. Напротив, и в «Арифметике бесконечных» и в «Алгебре» (1685 г.) Валлис считает, что отрицательные числа меньше положительных. Этот вопрос рассмотрен в ещё не опубликованной диссертации Ф. Д. Крамара («Интеграционные методы Валлиса»).

[1]) Здесь имеется в виду, что ряд, представляющий внутри радиуса сходимости некоторую функцию, не даёт значения её за пределами радиуса сходимости.

Эйлера совершенно не отличается от техники Лейбница и его учеников. Даже выражения Эйлера прямо совпадают с выражениями лейбницианцев. «В этом выражении, — говорит Эйлер в первом же параграфе V главы, — второй член и все следующие исчезают по сравнению с первым (prae primo)». Таким образом, разногласия между этими двумя направлениями носят чисто словесный характер и никак не отражаются на *сути* рассуждения.

В той же пятой главе (§ 170) устанавливается правило дифференцирования функции от нескольких количеств, которые сами являются функциями некоторого независимого переменного. Здесь это правило установлено по индукции. Эйлер обещает строгое доказательство дать позднее. Обещанное доказательство даётся в §§ 209—263 гл. VII («О дифференцировании функций, содержащих два или большее число переменных». Как понимал Эйлер «строгость», можно видеть из того, что доказательство опирается на положение, что дифференциал функции многих переменных линейно выражается через дифференциалы аргументов (§ 212). А это положение выводится индуктивно на основании двух тривиальных примеров. В одном из них функция имеет вид $X+Y+Z$, где X есть функция от x, Y есть функция от y и Z — функция от z; в другом функция имеет вид XYZ.

Я хотел бы обратить ещё внимание читателя на интересный вывод теоремы об однородных функциях (§§ 222—225), носящей сейчас название теоремы Эйлера. Замечу, что однородная функция была определена Эйлером во «Введении» не столь общим образом, как мы её определяем теперь; именно, Эйлер называет целую функцию однородной, когда все её члены имеют одну и ту же степень («Введение», § 84); дробная рациональная функция по определению однородна, если числитель и знаменатель её будут однородными (§ 85). Понятие однородной функции распространяется также на случай функции, содержащей радикал. Более общего случая Эйлер не рассматривает. То свойство, которым мы теперь определяем однородную функцию, выводится Эйлером для рассматриваемых частных случаев, исходя из определений, им данных. Именно на это свойство и ссылается Эйлер при выводе теоремы о частных производных однородной функции. Поэтому по существу эта теорема доказана для самого общего случая.

Остальную часть VII главы (§§ 217—241) составляет теория полного дифференциала, которую интересно прочесть в изложении самого Эйлера. Эйлер устанавливает, что если $dV = P\,dx + Q\,dy$, т. е. если P и Q суть частные производные функции v, то функции P и Q связаны соотношением $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ $\left[\text{в обозначениях Эйлера } \left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)\right]$. Он упоминает и о том, что условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy$ было полным дифференциалом. Доказательство достаточности даётся в «Интегральном исчислении». Нелишне отметить, что хотя в §§ 226—228 и даётся общее доказательство упомянутой теоремы (идею которого нетрудно усмотреть в современном строгом доказательстве), предварительно Эйлер считает нужным убедиться в справедливости теоремы для частного случая однородной функции. С этой единственной целью он и ввёл в «Дифференциальное исчисление» упомянутую выше теорему об однородных функциях.

Восьмая глава («О повторном дифференцировании дифференциальных выражений») содержит своеобразное изложение вопросов, составляющих

отсюда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2a^4+6a^2x^2}{(a^2+x^2)^3},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{24a^4x-24a^2x^3}{(a^2+x^2)^4},$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{24a^6-240a^4x^2+120a^2x^4}{(a^2+x^2)^5},$$
$$\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{-720a^6x+2400a^4x^3-720a^2x^5}{(a^2+x^2)^6} \quad \text{и т. д.}$$

II. Пусть $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; тогда первый и следующие дифференциалы будут:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{7/2}},$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{9/2}},$$
$$\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-x^2)^{11/2}},$$
$$\frac{d^6y}{dx^6}=\frac{225+4050x^2+5400x^4+720x^6}{(1-x^2)^{13/2}} \quad \text{и т. д.}$$

Вычисление этих дифференциалов можно легко продолжить дальше; однако закон, по которому члены их следуют друг за другом, усматривается не сразу. Коэффициент высшей степени x всегда есть произведение натуральных чисел от 1 до числа, равного порядку искомого дифференциала. Если продолжить дальше составление этих формул и внимательно рассмотреть их, то можно заметить, что для $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ будем иметь следующую общую формулу:

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\left\{\begin{aligned} & x^n+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}+ \\ & +\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1\cdot 2\ldots 6}x^{n-6}+ \\ & +\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-7)}{1\cdot 2\ldots 8}x^{n-8}+ \text{ и т. д.}\end{aligned}\right.$$

Подобного рода примеры полезны не только для приобретения навыка в практике дифференцирования; законы, наблюдаемые при нахождении дифференциалов всех порядков, и сами по себе достойны внимания и могут привести к другим открытиям.

Глава пятая («Разыскание суммы рядов по общему члену») посвящена выводу так называемой формулы Эйлера-Маклорена[1]). Здесь Эйлер вводит в рассмотрение бернуллиевы числа и рассматривает их свойства. Глава эта представляет собой образчик замечательной виртуозности. Аналитический гений Эйлера проявляется здесь с наибольшей силой. Её непременно нужно прочесть в подлиннике, и потому здесь мы не будем излагать её содержания более подробно.

В шестой главе («О суммировании прогрессий с помощью бесконечных рядов») общая формула суммирования применяется к многочисленным частным случаям. Получается много поразительных и изящных результатов. Принципиальный интерес представляет пользование асимптотическими рядами, из которых Эйлер определяет значение постоянной, входящей в его формулу. В частности, для гармонического ряда эта постоянная есть так называемая «эйлерова константа». В конце главы Эйлер замечает, что применение его формулы наталкивается на затруднения в том случае, когда входящий в формулу интеграл не поддаётся вычислению. Поэтому он обещает в следующей главе дать другое выражение суммы, которое в таких случаях может быть использовано с бо́льшим успехом.

Седьмая глава («Дальнейшее развитие вышеизложенного метода суммирования») действительно содержит формулу суммирования, не страдающую упомянутым недостатком, ибо она вовсе не содержит интегралов. Если я не ошибаюсь, практическое её значение невелико. По крайней мере результаты, получаемые с её помощью Эйлером, по сути, сводятся к суммированию геометрической прогрессии. Но в связи с ней возникает интересный принципиальный вопрос. С формальной стороны ряд, рассматриваемый Эйлером при выводе первой его формулы суммирования, получается из ряда, положенного в основу вывода второй формулы, при частном значении входящего во вторую формулу параметра. С другой стороны, обе формулы выводятся совершенно одинаковыми методами. Между тем во второй формуле, которая должна, казалось бы, включать в себя первую как частный случай, вовсе не содержится никакого интеграла, тогда как в первую формулу он входит. Этот парадокс, который имеет то же происхождение, что и факт неприменимости общей формулы суммы геометрической прогрессии к случаю, когда знаменатель её равен единице, или тот факт, что общая формула интегрирования степени неприменима к случаю, когда показатель степени равен —1, Эйлер и старается объяснить в § 178.

В восьмой главе («О применении дифференциального исчисления к образованию рядов») разложение различных функций в ряды

[1]) Маклорен опубликовал эту формулу в своём «Трактате о флюксиях», вышедшем в 1742 г. Следовательно, он имел бы возможность познакомиться, если не с восьмым томом «Записок Петербургской Академии» (Commentarii Academiae Petropolitanae), который вышел в 1741 г. и где Эйлер дал вывод своей формулы суммирования, то во всяком случае с шестым томом, где Эйлер привёл свою формулу без доказательства. Есть основания полагать, однако, что Маклорен, цитирующий в своей работе 1, 2, 3 и 5 тт. «Записок», не знал 6-го тома. Следует также заметить, что вывод Маклорена значительно отличается от вывода Эйлера, хотя и Маклорен опирается на ряд Тэйлора. Как вывод Маклорена, так и его запись результата более точны, чем у Эйлера. Поэтому, связывая с формулой суммирования имена обоих этих математиков, мы не совершаем исторической ошибки. Вывод Маклорена изложен у Cantor'a: Vorlesungen über Geschichte der Math., т. 3, стр. 683—685. См. также Reiff. Geschichte der unendlichen Reihen, Tübingen, 1889, стр. 85.

осуществляются с помощью метода неопределённых коэффициентов, комбинируемого с дифференцированием. Здесь, между прочим, впервые коэффициенты разложения функции sec x в степенной ряд выражены через *бернуллиевы числа* (§ 223). *Кроме степенных рядов, рассматриваются* также разложения более общего типа (§§ 208—215).

В девятой главе («О применении дифференциального исчисления к решению уравнений») даётся способ получения более точных значений корня уравнения по исходному грубому приближению. Идея, которую здесь использует Эйлер,—представление искомого корня в виде ряда, расположенного по степеням разности между искомым корнем и исходным приближением, была широко использована впервые Ньютоном, а затем его английскими последователями, так что в этой главе мы не находим принципиально новых вещей. Но систематическое применение ряда Тэйлора и большое число примеров выгодно отличают изложение Эйлера от изложения его предшественников.

Десятая глава («О максимумах и минимумах») содержит вывод необходимых и достаточных признаков максимума и минимума функций одной переменной. Рассматривается большое количество примеров и даются практические указания, могущие облегчить технику вычислений. И в этой главе не содержится каких-либо принципиально новых методов.

Напротив, одиннадцатая глава («О максимумах и минимумах многозначных функций и функций многих переменных») содержит материал, который в общем виде трактуется впервые. Единственные многозначные функции, с которыми Эйлер здесь имеет дело, это алгебраические выражения, содержащие радикалы. Эйлер различает два вида максимумов и минимумов многозначных функций. Один—это обычные относительные экстремумы, имеющие место на одной из ветвей функции. Они определяются тем же методом, каким находятся экстремумы однозначных функций; другой—это различные типы абсолютных граничных экстремумов, которые могут иметь место в точках ветвления. Для определения их Эйлер подвергает исследованию выражение многозначной функции.

Этот материал механически объединён в одной главе с вопросом о максимумах и минимумах функций многих переменных, к которому Эйлер переходит, начиная с § 286. Установление необходимого признака экстремума (§ 286) совершается, конечно, без труда. Что касается достаточного условия, то Эйлер (см. § 290 и примечание к нему) допускает при выводе его принципиальную ошибку, полагая, что функция двух переменных должна иметь максимум, если она имеет максимум относительно каждого из аргументов при постоянстве другого. Представляется весьма удивительным, что Эйлер не заметил на простейших примерах неверности полученного им критерия.

17. Следующие две главы (гл. XII «О применении дифференциалов к разысканию действительных корней уравнений», гл. XIII «О признаках мнимых корней») содержат оценки числа действительных и мнимых корней; все эти оценки получаются в конечном счёте из предположения, гласящего, что между двумя корнями уравнения $f(x)=0$ должен лежать корень уравнения $f'(x)=0$. Это почти очевидное положение было применено для оценки числа корней впервые, вероятно, Кэмпбеллом. В статье его, опубликованной в 1728 г. в Philosophical Transactions, содержатся, в частности, все результаты, имеющиеся в XIII главе эйлерова «Дифференциального исчисления». Большинство их было дано ещё Ньютоном в «Универсальной арифметике» (1707 г.) без доказательства. В одном существенном пункте (см. приложение к § 324), который остался недоказанным у Кемпбелла, Эйлер делает попытку дать доказательство; последнее оказывается, однако, совершенно не убедительным. Эта теорема Ньютона была впервые доказана спустя более чем сто лет Сильвестром.

Четырнадцатая глава («О дифференциалах функций в некоторых особых случаях») рассматривает те случаи, когда по какой-либо причине нельзя, как мы бы теперь сказали, считать приращение функции эквивалентным её дифференциалу. Такой случай имеет прежде всего место, когда производная равна нулю, а также и тогда, когда функция (при данном значении аргумента) недифференцируема.

Эйлер рассматривает оба эти случая. Он вводит понятие «полного» или «истинного» дифференциала (§§ 337—339), который, по сути дела, есть выражение приращения функции. В случае, когда первая производная равна нулю, он из этого выражения выделяет главную часть и считает её дифференциалом функции. Если эта главная часть имеет относительно приращения аргумента порядок, меньший единицы, то функция недифференцируема. Это, конечно, единственный доступный Эйлеру случай недифференцируемости.

Пятнадцатая глава носит характерный заголовок «О значениях функций, которые в некоторых случаях кажутся неопределёнными». Для Эйлера выражение $\frac{P(x)}{Q(x)}$ «не может быть неопределённым», даже если $P=0$ и $Q=0$ (§ 355). Оно имеет вполне определённое значение, и нужно лишь устранить *кажущуюся* неопределённость. Достаточно полно рассмотрены неопределённости вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Неопределённость вида $\infty-\infty$ рассматривается лишь на частных, и притом нарочито взятых, случаях.

Главы шестнадцатая («О дифференцировании непредставимых функций») и семнадцатая («Об интерполировании рядов») содержат материал, о котором мы уже упоминали в начале п. 10. В примечании к § 368 читатель найдёт обзор этих глав. Поэтому здесь мы ограничимся замечанием, что эти главы очень поучительны как с принципиальной стороны, так и по полученным в них результатам.

Наконец, последняя, восемнадцатая глава («О применении дифференциального исчисления к разложению дробей») даёт основанный на применении дифференцирования метод определения числителей простейших дробей, на которые разлагается рациональная дробь; предполагается, что корни знаменателя известны. Заметим, что ни здесь, ни во «Введении», где вопрос этот решался чисто алгебраическими способами, не даётся доказательства возможности такого разложения.

Таково многообразное содержание «Дифференциального исчисления». Приведённый здесь его краткий обзор мне хотелось бы закончить словами академика А. Н. Крылова, который характеризует «Дифференциальное исчисление» Эйлера в таких выражениях: «В современном смысле слова это сочинение является как бы устарелым; тем не менее оно остаётся в высшей степени поучительным по превосходному подбору примеров, по изяществу многих выводов и преобразований и по оригинальности и богатству содержания».

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К АНАЛИЗУ КОНЕЧНЫХ И К УЧЕНИЮ О РЯДАХ

INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS

CUM EIUS VSU

IN ANALYSI FINITORUM

AC

DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE

LEONHARDO EULERO

ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.

IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
1755.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Трудно объяснить, что такое дифференциальное исчисление и вообще анализ бесконечно малых тому, кто его совсем не знает. Здесь не приходится поступать так, как это делается обычно в других науках, где изучение предмета начинают с его определения. Не то, чтобы вовсе нельзя было бы дать никакого определения этого исчисления; но для того, чтобы уяснить смысл такого определения, нужно обладать понятиями, которые мало употребительны не только в обычной жизни, но даже и в анализе конечных количеств; они развиваются и объясняются обычно лишь при изучении дифференциального исчисления. Вот почему оказывается, что определение дифференциального исчисления можно понять лишь после того, как будут с достаточной ясностью освещены его начальные основы.

Заметим прежде всего, что это исчисление имеет дело с переменными количествами. Хотя всякое количество по самой природе своей может до бесконечности увеличиваться и уменьшаться, однако, пока вычисление направлено к какой-либо определённой цели, мы представляем себе, что одни количества постоянно сохраняют одну и ту же величину, другие же изменяются, проходя все ступени увеличения и уменьшения. Для того, чтобы отметить это различие, первые количества называют постоянными, а вторые переменными, так что это отличие обусловливается не столько природой вещи, сколько характером вопроса, для решения которого производится вычисление.

Чтобы эту разницу между постоянными и переменными количествами уяснить наилучшим образом на примере, рассмотрим полёт ядра, вытолкнутого из орудия силой пороха. Этот пример представляется наиболее удобным для уяснения сути дела. Здесь мы встречаемся с несколькими количествами, взаимную связь которых нужно установить: это, во-первых, количество пороха, во-вторых—угол возвышения орудия над горизонтом, в-третьих—дальность полёта над горизонтальной плоскостью, в-четвёртых—время, в течение которого летящее ядро находится в воздухе; если же опыты производятся не над одним и тем же орудием, то сверх того нужно принять в расчёт и длину орудия и вес ядра. Чтобы не усложнять задачи, мы здесь отвлечёмся от разнородности орудий. Пусть теперь количество пороха остаётся всегда одним и тем же, угол же возвышения орудия непрерывно меняется, и пусть ищутся дальность полёта и продолжительность движения ядра в воздухе. В этой задаче пороховой заряд или сила толчка будет количеством постоянным; угол же возвышения, а также дальность полёта и его продолжительность нужно будет отнести к количествам переменным, если мы желаем определить их для всех степеней возвышения, чтобы узнать отсюда, как изменяются дальность и продолжительность полёта в зависимости от всех изменений угла возвышения. Дело будет обстоять иначе, если угол возвышения орудия будет оставаться одним и тем же, количество же пороха будет непрерывно изменяться, и нужно будет определить те изменения в полёте ядра, которые от этого произойдут. Действительно, здесь возвышение орудия будет количеством постоянным, количество же пороха, а также дальность и продолжительность полёта будут количествами переменными. Теперь видно, каким образом в зависимости от постановки вопроса одно и то же количество можно считать иной раз постоянным, иной же раз — переменным. Вместе с тем — и это заслуживает наибольшого внимания — отсюда становится понятным, каким образом переменные количества могут зависеть одни от других так, что при изменении одного из них и остальные должны претерпеть изменение. Именно, в первом случае, когда количество пороха оставалось одним и тем же, с изменением возвышения орудия изменяются также дальность и продолжительность полёта. Таким образом дальность и продолжительность полёта являются здесь переменными количествами, зависящими от возвышения орудия, и если меняется возвышение, то и они тотчас же претерпевают некоторые определённые изменения. Во втором же случае продолжительность и дальность полёта зависят от количества пороха, изменение которого должно в них произвести определённые изменения.

Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер[1]); оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других. Итак, если x обозначает переменное количество, то все количества, которые как-либо зависят от x, т. е. определяются им, называются его функциями; таковыми являются квадрат количества x и все другие его степени, равно как и количества, как угодно составленные из них. Эти количества могут быть и трансцендентными и вообще любыми, если только они так зависят от x, что с увеличением или уменьшением x сами они подвергаются изменениям. Отсюда возникает такой вопрос: пусть количество x увеличивается или уменьшается на данное количество; как тогда изменятся те или иные его функции, т. е. какое они получат приращение или какой ущерб? В простейших случаях этот вопрос решается легко; если количество x увеличивается на количество ω, то его квадрат x^2 вследствие этого получит приращение $2x\omega+\omega^2$ и, значит, приращение x будет относиться к приращению x^2, как ω к $2x\omega+\omega^2$, т. е. как 1 к $2x+\omega$. Подобным образом и в других случаях рассматривают отношение приращения x к приращению или ущербу, который получает при этом какая-либо его функция. Разыскание этого отношения приращений не только имеет большое значение само по себе,

[1]) В оригинале: quae denominatio latissime patet.

но и служит основой для всего анализа бесконечно малых. Чтобы это стало ясным, возьмём вышерассмотренный пример, где мы имели квадрат x^2. Его приращение $2x\omega+\omega^2$, которое он получает, когда количество x увеличивается на приращение ω, как мы видели, относится к ω, как $2x+\omega$ к 1. Отсюда ясно, что чем меньшим берётся приращение ω, тем более приближается это отношение к отношению $2x$ к 1; однако оно полностью переходит в это отношение не ранее, чем приращение ω совершенно исчезнет. Отсюда понятно, что если приращение ω переменного количества x обращается в нуль, то возникающее при этом приращение его квадрата x^2, хотя оно тоже исчезает, однако имеет к ω отношение $2x$ к 1. То, что сказано здесь о квадрате, можно сказать и о всех других функциях количества x. А именно, исчезающие их приращения, которые они принимают, когда само количество x принимает исчезающее приращение, имеют к этому последнему определённое и могущее быть указанным отношение[1]). Так мы подошли к определению *дифференциального исчисления*. Это есть *метод определения отношения исчезающих приращений, получаемых какими-либо функциями, когда переменному количеству, функциями которого они являются, даётся исчезающее приращение*. Что в этом определении заключена, и притом исчерпывающим образом, истинная суть дифференциального исчисления—это легко усмотрит всякий, кто не является новичком в этом деле.

Итак, дифференциальное исчисление занимается не столько разысканием самих исчезающих приращений, ибо они суть нули, сколько рассмотрением их взаимной зависимости и их отношения, а так как такие отношения выражаются конечными количествами, то нужно считать, что и дифференциальное исчисление занимается конечными величинами. Правда, его правила в той форме, как они обычно даются, могут создать представление, что их назначение состоит в определении самих исчезающих приращений; однако заключения никогда не основываются на исчезающих приращениях, рассматриваемых абсолютно; они исходят всегда из отношения исчезающих количеств. Так же обстоит дело и в интегральном исчислении; мы определим его наиболее подходящим образом, если скажем, что интегральное исчисление есть *метод, с помощью которого по известному отношению исчезающих приращений находятся те функции, чьими являются эти приращения*.

Чтобы эти отношения можно было легче составлять и вводить в вычисление, эти исчезающие приращения, хотя они и являются нулями, обозначают определёнными знаками; поскольку мы вводим их, ничто не мешает присвоить исчезающим приращениям и определённые наименования. Они называются дифференциалами; так как они лишены количества, они называются также бесконечно малыми. Таким образом название «бесконечно малые» согласно природе этих количеств должно толковаться в том смысле, что мы считаем их за нули в полном смысле[2]), т. е. за ничто. Например, если количеству x мы дадим приращение ω, так что оно обратится в $x+\omega$, то его квадрат x^2 обратится в $x^2+2x\omega+\omega^2$ и, значит, получит приращение $2x\omega+\omega^2$. Поэтому приращение ω количества x будет относиться к приращению $2x\omega+\omega^2$ квадрата x^2, как 1 к

---

[1]) В оригинале: certam et assignabilem rationem.
[2]) Amnino nulla.

$2x+\omega$. Это отношение переходит в отношение 1 к $2x$ лишь тогда, когда ω исчезает. В самом деле, пусть $\omega=0$; тогда, действительно, отношение исчезающих приращений (а только оно и рассматривается в дифференциальном исчислении) равно отношению 1 к $2x$; и, обратно, это отношение будет согласно с истиной лишь тогда, если приращение ω на самом деле исчезнет и станет в точности равным нулю. Значит, если этот нуль, обозначенный через ω, представляет приращение количества x, то, так как он относится к приращению квадрата x^2, как 1 к $2x$, то приращение квадрата x^2 будет равно $2x\omega$ и, значит, тоже будет равно нулю. Вместе с тем отсюда ясно, что обращение в нуль этих приращений не мешает их отношению, которое равно отношению 1 к $2x$, быть вполне определённым. Так как тот нуль, который мы выше выразили буквой ω, в дифференциальном исчислении рассматривается как приращение количества x, то он представляется знаком dx и называется дифференциалом количества x; и если вместо ω положить dx, то дифференциал количества x^2 будет $2xdx$. Подобным образом окажется, что дифференциал куба x^3 будет равен $3x^2dx$, и вообще дифференциал какой-либо степени x^n будет равен $nx^{n-1}\,dx$. И какие бы функции количества x ни были предложены—в дифференциальном исчислении даются правила для нахождения их дифференциалов. Но всегда нужно иметь в виду, что так как эти дифференциалы сами по себе суть нули, то из них нельзя вывести ничего, кроме их взаимных отношений, которые непременно дают конечные количества. И поскольку начальные основы дифференциального исчисления устанавливаются именно таким, единственно рациональным способом, все возражения, которые обычно выдвигаются против этого исчисления, рушатся сами собой. Они, однако, полностью сохранили бы силу, если бы дифференциалы, т. е. бесконечно малые, не обращались бы точно в нуль.

Однако некоторые авторы, писавшие о дифференциальном исчислении, сочли необходимым ввести различие между дифференциалами и абсолютным нулём и установить особую категорию бесконечно малых величин, которые якобы не полностью исчезают, но сохраняют некоторое количество, которое, однако, меньше, чем всякое могущее быть заданным. Им справедливо делалось возражение, что этим нарушается геометрическая строгость и что выводимые отсюда заключения, по справедливости, внушают сомнения, ибо такого рода бесконечно малыми количествами приходится пренебрегать. Действительно, мы можем считать эти бесконечно малые количества сколь угодно незначительными, но когда мы отбрасываем несколько таких количеств и тем более бесчисленное их множество сразу, то может получиться очень большая ошибка. Напрасно они пытаются опровергнуть это возражение, ссылаясь на те примеры, в которых с помощью дифференциального исчисления получаются те же результаты, что с помощью элементарной геометрии. В самом деле, если бесконечно малые, которыми пренебрегают при вычислении, не являются нулями, то ошибка непременно должна произойти, и притом тем бо́льшая, чем в большем числе накопляются бесконечно малые количества. Если же тем не менее этого не случается, то скорее нужно было бы приписать это несовершенству исчисления, в котором одни ошибки компенсируются другими, чем снять с самого исчисления подозрение в ошибочности. Если же такая компенсация происходит без какой-либо новой ошибки, то эти примеры служат очень хорошим доказательством того, что я и хочу доказать, т. е. что количества, которыми мы пренебрегаем, мы должны считать совершенно и абсолютно равными нулю и что бесконечно малые, которые рассматриваются в дифференциальном исчислении, не отличаются от абсолютного нуля. Ещё менее устраняются затруднения, когда некоторые говорят, что бесконечно малые нужно уподобить пылинкам по отношению к горе или даже ко всему земному шару. Хотя, конечно, тому, кто стал бы определять величину всего земного шара, можно было бы легко простить ошибку не только в одну, но и в тысячу пылинок, однако геометрическая строгость не терпит даже и столь малой ошибки, и это возражение, если оно имело бы какое-нибудь основание, оставалось бы очень важным. Какую выгоду надеются извлечь те, кто хочет отличать бесконечно малые от нуля, сказать трудно, но боятся они того, что если бесконечно малые считать полностью исчезающими, тогда оказалось бы невозможным их сравнение, к которому, как они понимают, сводится всё дело. Поэтому они и считают необходимым сохранить за бесконечно малыми какую-то величину, чтобы иметь нечто такое, что можно подвергать сравнению. Однако они принуждены считать эту величину столь малой, чтобы её можно было рассматривать так, как если бы она была равна нулю, и без ошибки пренебрегать ею в вычислении. Однако они не осмеливаются назначить какую-нибудь определённую величину, которая была бы нечувствительно малой; ведь если бы они увеличили её вдвое или втрое, то им пришлось бы производить сравнения таким же образом. Из этого ясно, что величина эта не играет никакой роли при сравнении и что, следовательно, сравнение не становится невозможным и в том случае, когда эта величина совершенно исчезает.

Но из вышесказанного ясно, что сравнение, производимое в дифференциальном исчислении, имеет место лишь в том случае, если приращения, о которых мы говорили, полностью исчезают. Действительно, приращение количества x, которое мы в общем случае обозначаем через ω, относится к приращению квадрата x^2, равному $2x\omega+\omega^2$, как 1 к $2x+\omega$. Это отношение всегда отличается от отношения 1 к $2x$, если только ω не равно нулю. Если же мы положим $\omega=0$, тогда, в самом деле, мы можем утверждать, что это отношение становится в точности равным отношению 1 к $2x$. Однако вместе с тем ясно, что чем меньше мы возьмём это приращение ω, тем ближе подойдём к этому отношению. Поэтому не только позволительно, но, по сути дела, и надлежит считать эти приращения сначала конечными и изображать их на чертежах, когда последние нужны для иллюстрации рассматриваемого вопроса, конечными линиями. Затем нужно мысленно представить, что эти приращения становятся всё меньшими и меньшими, и тогда мы найдём, что их отношение всё более и более приближается к некоторому определённому пределу, которого они достигают, однако, лишь тогда, когда полностью обращаются в нуль. Этот предел, который составляет как бы последнее отношение упомянутых приращений, и является истинным объектом дифференциального исчисления. Следовательно, нужно считать, что первые основания дифференциального исчисления заложил тот, кому впервые пришло на ум рассматривать те последние отношения, к которым приращения переменных количеств, уменьшаясь всё более и более, приближаются и которых они, наконец, достигают, исчезая.

Следы такого рассмотрения мы находим у древних авторов; им поэтому нельзя отказать в наличии некоторого представления об анализе бесконечно малых и в обладании кое-каким знакомством с ним. Малопомалу эта наука делала потом всё бо̀льшие и бо̀льшие успехи и не сразу достигла она того состояния, в котором мы её видим ныне; правда, в ней и сейчас гораздо больше тёмных мест, чем освещённых. В самом деле, хотя дифференциальное исчисление охватывает функции любого вида, сколь бы ни были они сложны, однако не сразу стал известен метод взаимного сравнения исчезающих приращений всевозможных функций; это открытие делали постепенно, восходя ко всё более сложным функциям. Что касается рациональных функций, то последнее отношение их исчезающих приращений умели находить задолго до времени Ньютона и Лейбница, так что нужно считать, что дифференциальное исчисление в применении к рациональным функциям было найдено много раньше этого времени. Нет никакого сомнения в том, что открытием той части дифференциального исчисления, которая занимается иррациональными функциями, мы обязаны Ньютону. Он был счастливо приведён к этому замечательной своей теоремой о разложении произвольной степени бинома; этим весьма изящным открытием область дифференциального исчисления была расширена удивительным образом. Не в меньшей степени мы обязаны и Лейбницу тем, что этому исчислению, которое до него рассматривалось лишь как совокупность особых искусных приёмов, он придал форму научной дисциплины, собрал её правила в систему и отчётливо их изложил. В самом деле, таким образом были созданы средства для дальнейшего развития этого исчисления, и стало возможным, исходя из достоверных начал, найти ответ на нерешённые ещё вопросы. Вскоре, действительно, стараниями самого Лейбница, а также братьев Бернулли, которых он к этому привлёк, дифференциальное исчисление было распространено на трансцендентные функции — эта его часть до тех пор оставалась неразработанной. Тем самым была заложена прочная основа интегрального исчисления. Опираясь на неё, авторы, разрабатывавшие впоследствии интегральное исчисление, обогащали его всё новыми и новыми результатами. Так и Ньютон дал очень важные результаты интегрального исчисления[1]); но когда последнее было впервые открыто, это установить с такой определённостью нельзя, ибо его возникновение вряд ли можно отделить от первого появления дифференциального исчисления. Поскольку же наибольшая часть интегрального исчисления остаётся неразработанной и до сих пор, то на это исчисление и нельзя смотреть как на вполне открытое, и за каждым, кому удаётся внести посильный вклад для его усовершенствования, мы должны будем с благодарностью признать его заслугу. Вот какого мнения следует держаться в вопросе о славе открытия этого исчисления, возбуждавшем, я полагаю, до сих пор так много споров.

Что же касается до различных наименований, которые математики разных стран присваивают этому исчислению, то все они сходны в том отношении, что очень хорошо согласуются с данным здесь определением; действительно, назвать ли исчезающие приращения, отношения которых мы рассматриваем, дифференциалами или флюксиями, всегда нужно считать их равными нулю; таким должно быть истинное понятие о бесконечно малом. Тогда всё то, что было предметом скорее любопытных, чем полезных споров относительно дифференциалов второго и более высоких порядков, становится совершенно ясным, поскольку все эти дифференциалы сами по себе в равной мере исчезают и поскольку никогда они

[1]) ... amplissima dederat specimena calculi integralis.

не берутся сами по себе, а рассматривается лишь их взаимное соотношение. В самом деле, отношение двух исчезающих приращений снова выражается некоторой функцией, поэтому, если исчезающее приращение этой функции сравнивается с другими приращениями, то нужно считать, что мы имеем дело со вторыми разностями. Таким же образом нужно понимать переход к дифференциалам более высоких порядков, так что на самом деле всегда мыслятся конечные количества, а знаки дифференциалов применяются лишь для удобного их представления.

На первый взгляд это воззрение на анализ бесконечно малых может некоторым показаться неосновательным и совершенно бесплодным, хотя упоминавшаяся выше таинственная категория[1]) бесконечно малых не может обещать большего. На самом же деле, если мы можем точно знать отношения между исчезающими приращениями каких-либо функций, то это знание и само по себе чрезвычайно важно, но, кроме того, оно настолько необходимо при разрешении многих, и притом наиболее трудных, вопросов, что без его помощи в них вообще ничего понять нельзя. Так, например, если ставится вопрос о движении ядра, выброшенного орудием, и при этом нужно учесть сопротивление воздуха, то сразу никак нельзя определить, как будет двигаться ядро на протяжении конечного расстояния, ибо как направление пути, по которому движется ядро, так и скорость его, от которой зависит сопротивление, меняются в каждый момент. Однако чем меньше расстояние, пройденное ядром, тем меньшей будет эта изменчивость и тем легче можно будет приблизиться к познанию истины. Если же это расстояние мы сделаем совершенно исчезающим, то, поскольку тогда уничтожится всякая неравномерность направления пути и скорости, можно будет на основании законов движения точно определить влияние сопротивления и найти изменение движения, возникшее в момент времени[2]). А зная эти мгновенные изменения или, лучше сказать, их взаимное соотношение (ибо сами они суть нули), мы уже получаем очень большую пользу, и теперь задачей интегрального исчисления является вывести отсюда заключение о движении, меняющемся на протяжении конечного пространства. Я полагаю, однако, что нет нужды показывать дальше пользу дифференциального исчисления и вообще анализа бесконечно малых, ибо сейчас хорошо известно, что, если мы желаем точно решить хотя бы самый простой вопрос, касающийся движения твёрдых или жидких тел, мы не можем обойтись без помощи анализа бесконечно малых и что часто эта наука оказывается даже ещё недостаточно разработанной, чтобы мы могли полностью решить тот или иной вопрос. Можно сказать, что во всех отраслях науки этот высший анализ применяется столь широко, что всё, чего можно достичь, не прибегая к нему, можно считать почти за ничто.

В этой книге я намерен вывести всё дифференциальное исчисление из истинных начал и изложить его столь подробно, чтобы не опустить ни одного из найденных до сих пор результатов, к нему относящихся. Я разделил всё сочинение на две части. В первой из них, введя основные понятия дифференциального исчисления, я изложил метод дифференцирования всевозможных функций и показал, как находить дифференциалы не только первого, но и высших порядков, как для функций одного

---

[1]) В оригинале: species ille arcana.

[2]) В оригинале: puncto temporis, т. е. «в точке времени».

переменного, так и для функций двух и большего числа переменных. Во второй части я изложил разнообразные применения дифференциального исчисления к анализу конечных количеств и к учению о рядах. Здесь я с особой обстоятельностью изложил теорию максимумов и минимумов. Применения же дифференциального исчисления к геометрии кривых линий я здесь вовсе не касаюсь; в этом не было большой нужды, так как в других сочинениях этот раздел изложен очень подробно, так что даже основные положения дифференциального исчисления как бы выводятся из геометрии, а как только они достаточно развиты, с большим старанием применяются к этой науке. Здесь же всё изложение ограничено пределами чистого анализа, так что для изложения всех правил этого исчисления не понадобилось ни одного чертежа.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ,

СОДЕРЖАЩАЯ ПОЛНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЭТОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ГЛАВА I

О КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

1. Из того, что в предшествующей книге [1]) было сказано о переменных количествах и о функциях, явствует, что когда переменное количество на деле изменяется [2]), все его функции тоже претерпевают изменение. Так, если переменное количество x получает приращение ω, так что вместо x пишется $x+\omega$, то все функции от x, как, например, x^2, x^3, $\frac{a+x}{a^2+x^2}$, примут другие значения, а именно, x^2 перейдёт в $x^2+2x\omega+\omega^2$, x^3 перейдёт в $x^3+3x^2\omega+3x\omega^2+\omega^3$ и $\frac{a+x^2}{a^2+x}$ превратится в $\frac{a+x+\omega}{a^2+x^2+2x\omega+\omega^2}$. Такого рода изменение возникает всегда, кроме случая, когда функция имеет лишь обманчивый вид переменного количества, на самом же деле является постоянным количеством, как, например, x^0; такая функция остаётся неизменной как бы ни изменялось количество x [3]).

2. Так как об этом говорилось достаточно, подойдём ближе к тем свойствам функций, на которые опирается весь анализ бесконечно малых [4]). Итак, пусть y есть какая-либо функция переменного коли-

---

[1]) Во «Введении в анализ бесконечно малых», гл. I, § 5. Русский перевод Е. Л. Пацановского, под редакцией проф. С. Я. Лурье, ОНТИ, 1936, стр. 29 и след.

[2]) В оригинале: actu variatur. Переменное количество, по Эйлеру, «содержит в себе всевозможные определённые значения», т. е. потенциально способно к изменению. Здесь подчёркивается, что изменение должно иметь место и актуально.

[3]) Во «Введении в анализ» Эйлера (цит. соч., гл. I, § 4) сказано: «функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных величин». Согласно этому определению функция переменного количества может и не быть переменным количеством (ср. «Введение в анализ», гл. I, § 5).

Что же касается понятия «аналитического выражения», то Эйлер нигде его не определяет; по смыслу, в котором этот термин употребляется в различных произведениях Эйлера, можно было бы сказать, что аналитическое выражение составляется с помощью «элементарных» действий, рассматриваемых в алгебре и тригонометрии; эти действия могут производиться в бесконечном множестве. В частности, Эйлер широко пользуется бесконечными степенными рядами. Класс эйлеровых функций очень широк. Он включает в себя все непрерывные (в современном смысле) функции. См. А. Маркушевич, Элементы теории аналитических функций. Учпедгиз, 1944, Введение, § 4.

[4]) Заметим, что Эйлеру не чужда была и более общая точка зрения на функцию, высказанная ещё Ньютоном (см. предисловие Эйлера к настоящему сочинению его).

чества x; вместо последнего будем подставлять последовательно значения, растущие в арифметической прогрессии, а именно, x, $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$, $x+4\omega$ и т. д. Обозначим через y^{I} значение, которое принимает функция y, если в неё вместо x подставить $x+\omega$; подобным образом пусть y^{II} есть значение y, когда вместо x пишется $x+2\omega$; равным образом пусть y^{III}, y^{IV}, y^{V} представляют значения y, появляющиеся тогда, когда вместо x мы полагаем $x+3\omega$, $x+4\omega$, $x+5\omega$ и т. д., так что эти различные значения x и y соответствуют друг другу следующим образом:

$$\begin{array}{lllllll} x, & x+\omega, & x+2\omega, & x+3\omega, & x+4\omega, & x+5\omega & \text{и т. д.} \\ y & y^{\mathrm{I}} & y^{\mathrm{II}} & y^{\mathrm{III}} & y^{\mathrm{IV}} & y^{\mathrm{V}} & \text{и т. д.} \end{array}$$

3. Так как арифметический ряд x, $x+\omega$, $x+2\omega$ и т. д. можно продолжать бесконечно, то ряд y, y^{I}, y^{II} и т. д., происшедший из функции y, также будет продолжаться бесконечно, и его природа будет зависеть от природы функции y. Так, если будет $y=x$ или $y=ax+b$, то ряд y, y^{I}, y^{II} и т. д. также будет арифметическим; если будет $y=\frac{a}{bx+c}$, ряд будет гармоническим, если же $y=a^x$, то будем иметь геометрический ряд. И нельзя придумать такого ряда, который не мог бы произойти таким образом из некоторой функции[1]; эта функция от x по отношению к ряду, который из неё происходит, называется его *общим членом*. И так как каждый ряд, образованный по определённому закону, имеет общий член, то он происходит из определённой функции x. Подробнее это излагается в учении о рядах.

4. Но здесь наше внимание обращено преимущественно на разности, которыми члены ряда y, y^{I}, y^{II} и т. д. отличаются друг от друга. Чтобы поставить их в связь с дифференциалами, будем обозначать их следующим образом:

$$y^{\mathrm{I}}-y=\Delta y, \quad y^{\mathrm{II}}-y^{\mathrm{I}}=\Delta y^{\mathrm{I}}, \quad y^{\mathrm{III}}-y^{\mathrm{II}}=\Delta y^{\mathrm{II}} \quad \text{и т. д.}$$

Следовательно, Δy представляет приращение, которое принимает функция y, если в ней вместо x положить $x+\omega$, где ω обозначает какое-нибудь по произволу взятое число. В учении о рядах обычно берётся $\omega=1$, но для нашей цели выгодно пользоваться общим значением, которое можно по усмотрению увеличивать или уменьшать. Это приращение Δy функции y называют *разностью,* на которую последующее значение y^{I} превосходит первое значение y. Она всегда рассматривается как приращение[2]), хотя часто она на самом деле представляет ущерб[3]), признаком чего служит отрицательное её значение.

5. Так как y^{II} происходит из y, если вместо x написать $x+2\omega$, то очевидно, что должно произойти то же количество, если сперва вместо x положить $x+\omega$, а затем снова поставить $x+\omega$ вместо x. Значит, y^{II} произойдёт из y^{I}, если в последнем вместо x написать

---

[1]) Это утверждение Эйлер мог бы обосновать лишь ссылкой на свою огромную практику. В его глазах такая ссылка должна была оказаться достаточной. При надлежащем уточнении понятия «аналитическое выражение» (см. предыдущую сноску) это утверждение легко доказывается.

[2]) Incrementum.

[3]) Decrementum,

$x+\omega$; поэтому Δy^{I} есть приращение количества y^{I}, которое оно принимает, если положить $x+\omega$ вместо x; вследствие этого Δy^{I} подобным же образом называют *разностью* количества y^{I}. Равным образом Δy^{II} будет *разностью* y^{II}, т. е. тем его приращением, которое оно принимает, если вместо x положить $x+\omega$; и Δy^{III} будет *разностью*, т. е. приращением y^{III}, и т. д. Таким образом, мы из ряда значений y, а именно, y, y^{I}, y^{II}, y^{III} и т. д., получим ряд разностей Δy, Δy^{I}, Δy^{II} и т. д. Они находятся вычитанием каждого члена первого ряда из следующего члена.

6. Если, после того как найден ряд разностей, снова взять из него разности, вычитая каждый член из следующего, то возникнут разности разностей; они называются *вторыми разностями* и всего удобнее представляются символически следующим образом [1]):

$$\Delta^2 y = \Delta y^{\mathrm{I}} - \Delta y,$$

$$\Delta^2 y^{\mathrm{I}} = \Delta y^{\mathrm{II}} - \Delta y^{\mathrm{I}},$$

$$\Delta^2 y^{\mathrm{II}} = \Delta y^{\mathrm{III}} - \Delta y^{\mathrm{II}},$$

$$\Delta^2 y^{\mathrm{III}} = \Delta y^{\mathrm{IV}} - \Delta y^{\mathrm{III}}.$$

Итак, $\Delta^2 y$ называется второй разностью y, $\Delta^2 y^{\mathrm{I}}$ — второй разностью y^{I} и т. д. Подобным же образом из вторых разностей, если снова взять их разности, получаются третьи разности, которые будем записывать так: $\Delta^3 y$, $\Delta^3 y^{\mathrm{I}}$ и т. д., затем четвёртые разности $\Delta^4 y$, $\Delta^4 y^{\mathrm{I}}$ и т. д., сколько будет угодно.

7. Мы представим эти отдельные ряды разностей на схеме, чтобы их связь легче бросалась в глаза.

Арифметическая прогрессия

$$x,\quad x+\omega,\quad x+2\omega,\quad x+3\omega,\ x+4\omega,\ x+5\omega \quad \text{и т. д.}$$

Значения функции

$$y,\quad y^{\mathrm{I}},\quad y^{\mathrm{II}},\quad y^{\mathrm{III}},\quad y^{\mathrm{IV}},\quad y^{\mathrm{V}} \quad \text{и т. д.}$$

Первые разности

$$\Delta y,\quad \Delta y^{\mathrm{I}},\quad \Delta y^{\mathrm{II}},\quad \Delta y^{\mathrm{III}},\quad \Delta y^{\mathrm{IV}} \quad \text{и т. д.}$$

Вторые разности

$$\Delta^2 y,\quad \Delta^2 y^{\mathrm{I}},\quad \Delta^2 y^{\mathrm{II}},\quad \Delta^2 y^{\mathrm{III}} \quad \text{и т. д.}$$

Третьи разности

$$\Delta^3 y,\quad \Delta^3 y^{\mathrm{I}},\quad \Delta^3 y^{\mathrm{II}} \quad \text{и т. д.}$$

Четвёртые разности

$$\Delta^4 y,\quad \Delta^4 y^{\mathrm{I}} \quad \text{и т. д.}$$

Пятые разности

$$\Delta^5 y \quad \text{и т. д.}$$

и т. д.

---

[1]) У Эйлера вторая разность от y обозначается по большей части через $\Delta\Delta y$ и лишь изредка, при сопоставлении с разностями высших порядков, через $\Delta^2 y$. Третьи и высшие разности обозначаются всегда через $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$ и т. д.

Любой из этих рядов получается из вышестоящего вычитанием каждого предшествующего числа из последующего. Итак, пусть вместо y подставляется какая-нибудь функция от x. Так как, зная способ её составления, легко образовать значения y^{I}, y^{II}, y^{III} и т. д., то из них без труда будут найдены отдельные ряды разностей.

8. Положим, что $y = x$; тогда будет $y^{\mathrm{I}} = x^{\mathrm{I}} = x + \omega$, $y^{\mathrm{II}} = x^{\mathrm{II}} = x + 2\omega$ и т. д. Беря отсюда разности, будем иметь $\Delta x = \omega$, $\Delta x^{\mathrm{I}} = \omega$, $\Delta x^{\mathrm{II}} = \omega$ и т. д. Поэтому все первые разности x будут постоянны и, значит, вторые разности исчезают[1]); равным образом исчезают третьи разности и все разности следующих порядков. Так как $\Delta x = \omega$, то по аналогии вместо буквы ω мы можем с удобством употреблять символ Δx. Итак, у переменного количества x, последовательные значения которого x, x^{I}, x^{II}, x^{III} и т. д., как мы приняли, составляют арифметическую прогрессию, разности Δx, Δx^{I}, Δx^{II} и т. д. будут постоянны и равны между собой. Вследствие этого $\Delta^2 x = 0$, $\Delta^3 x = 0$, $\Delta^4 x = 0$ и т. д.

9. Мы приняли здесь, что значения x, которые ему последовательно даются, образуют арифметическую прогрессию, так что первые разности этих значений постоянны, а вторые и все остальные исчезают. Хотя это зависит от нашего произвола, поскольку мы могли бы с равным правом употребить какую-нибудь другую прогрессию, однако арифметической прогрессией пользуются предпочтительно перед всеми остальными как потому, что она наиболее проста и легка для усвоения, так главным образом и потому, что она способна охватить все значения, какие только может принимать x.

Действительно, если давать количеству ω как отрицательные, так и положительные значения, то в ряде значений x содержатся всевозможные действительные количества, которые могут быть подставлены вместо x; напротив, если бы выбрали геометрический ряд, то к отрицательным значениям не открывалось бы никакого доступа. По этой причине об изменении функций y удобнее всего судить по значениям x, которые составляют арифметическую прогрессию.

10. Подобно тому как мы имеем $\Delta y = y^{\mathrm{I}} - y$, так и высшие разности можно определить, исходя из членов первого ряда y, y^{I}, y^{II}, y^{III} и т. д.

В самом деле, так как

$$\Delta y^{\mathrm{I}} = y^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{I}},$$

то

$$\Delta^2 y = y^{\mathrm{II}} - 2y^{\mathrm{I}} + y$$

и

$$\Delta^2 y^{\mathrm{I}} = y^{\mathrm{III}} - 2y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{I}},$$

поэтому

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y^{\mathrm{I}} - \Delta^2 y = y^{\mathrm{III}} - 3y^{\mathrm{II}} + 3y^{\mathrm{I}} - y.$$

Подобным образом

$$\Delta^4 y = y^{\mathrm{IV}} = 4y^{\mathrm{III}} + 6y^{\mathrm{II}} - 4y^{\mathrm{I}} + y$$

и

$$\Delta^5 y = y \quad - 5y^{\mathrm{IV}} + 10y^{\mathrm{III}} - 10y^{\mathrm{II}} + 5y^{\mathrm{I}} - y.$$

---

[1]) В оригинале evanescunt. Мы сохраняем термин, которым пользуется Эйлер, ввиду того значения, которое оно имеет в эйлеровом обосновании анализа (гл. III настоящей работы). Эйлер пользуется и термином «обращается в нуль» (in nihilum abit) как синонимом.

Коэффициенты в этих формулах подчинены тому же закону, который наблюдается у степеней бинома[1]). Итак, подобно тому как первая разность определяется с помощью двух членов ряда y, y^{I}, y^{II}, y^{III} и т. д., так вторая разность с помощью трёх, третья — четырёх и т. д. Зная же разности всех порядков количества y, мы подобным образом определим разности всех порядков количеств y^{I}, y^{II} и т. д.

11. Итак, когда предложена какая-нибудь функция y, то можно найти как первую, так и следующие её разности, отвечающие разности ω, на которую возрастают значения x. И для этого нет необходимости продолжать дальше ряд значений y[2]). Действительно, как первая разность Δy находится, если в y вместо x написать $x+\omega$ и из полученного значения y^{I} вычесть самоё функцию y, так вторая разность получится, если в первой разности Δy вместо x положить $x+\omega$, так что получится Δy^{I}, и вычесть Δy из Δy^{I}. Подобным образом, если взять разность от второй разности $\Delta^2 y$, вычитая её из значения, которое она принимает, если вместо x положить $x+\omega$, то получится третья разность $\Delta^3 y$ и далее таким же образом четвёртая разность $\Delta^4 y$ и т. д. Итак, если бы кто-нибудь умел отыскивать первую разность всякой функции, то он тем самым мог бы находить и вторую разность, и третью, и все следующие, ибо вторая разность y есть не что иное, как первая разность от Δy, третья разность y есть не что иное, как первая разность от $\Delta^2 y$, и т. д.

12. Если функция y составлена из двух или нескольких частей, так что $y=p+q+q+r+$ и т. д., то, поскольку $y^{\mathrm{I}}=p^{\mathrm{I}}+q^{\mathrm{I}}+r^{\mathrm{I}}+$ + и т. д., разность будет $\Delta y=\Delta p+\Delta q+\Delta r+$ и т. д. и подобным образом далее

$$\Delta^2 y=\Delta^2 p+\Delta^2 q+\Delta^2 r+ \text{ и т. д.},$$

так что разыскание разностей немало облегчается, если предложенная функция составлена из частей. Если же функция y есть произведение двух функций p и q, т. е. $y=pq$, то, поскольку $y^{\mathrm{I}}=p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}}$ и

$$p^{\mathrm{I}}=p+\Delta p,$$

$$q^{\mathrm{I}}=q+\Delta q,$$

---

[1]) Эйлер не считает необходимым доказывать это утверждение, хотя он мог бы легко применить метод полной индукции, хорошо известный в его время. Вообще, Эйлер не склонен никогда доказывать для общего случая закон, который он установил для ряда частных случаев, если этот закон представляется ему «естественным». Мы вскоре будем иметь случай убедиться в том, что это не только педагогический приём, но и внутреннее убеждение Эйлера.

Конечные разности были впервые введены Ньютоном. Для приближённого выполнения квадратур он применил интерполяционную формулу, носящую сейчас его имя. Об этой формуле Ньютон сообщил в нарочито неясной форме в своём письме к Лейбницу в 1676 г. Опубликована она в кратком сочинении Ньютона Methodus differentialis («Разностный метод»; русский перевод: И. Ньютон. Математические работы. Перевод и комментарии проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского, ОНТИ, 1937, стр. 210—217). Стирлинг в своей работе Methodus differentialis newtoniana (Ньютонов разностный метод, 1719 г.) дал более простой вывод Ньютоновой формулы. Для этой цели он установил формулы, отличающиеся только обозначениями от тех, которые здесь даёт Эйлер. Обозначения, употребляемые здесь, введены самим Эйлером.

[2]) Эйлер хочет сказать, что нет необходимости пользоваться формулами предыдущего параграфа и сразу составлять выражения y^{II}, y^{III}; разумеется, фактически ряд значений y продолжается.

будем иметь

$$p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}} = pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q,$$

откуда

$$\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p\Delta q.$$

Значит, если p есть постоянное количество, равное a, то, как $\Delta a = 0$, первая разность функции $y = aq$ будет $\Delta y = a\Delta q$; подобным образом вторая разность $\Delta^2 y = a\Delta^2 q$, третья $\Delta^3 y = a\Delta^3 q$ и т. д.

13. Так как всякая целая рациональная функция есть совокупность [1]) нескольких степеней x, то мы сможем находить все разности целых рациональных функций, если будем знать, как представляются разности степеней. Поэтому в нижеследующих примерах мы разыщем разности отдельных степеней x.

Так как $x^0 = 1$, то $\Delta x^0 = 0$, ибо x^0 не изменяется, хотя x и переходит в $x + \omega$.

Далее, как мы видели, $\Delta x = 0$ и $\Delta^2 x = 0$, и вместе с тем исчезают все разности следующих порядков. Так как это уже известно, то мы начнём со второй степени.

Пример 1

Найти разности всех порядков степени x^2.

Так как здесь $y = x^2$, то будет $y^{\mathrm{I}} = (x + \omega)^2$; поэтому

$$\Delta y = 2\omega x + \omega^2.$$

Это первая разность. Вследствие постоянства ω будем иметь

$$\Delta^2 y = 2\omega^2, \quad \Delta^3 y = 0, \quad \Delta^4 y = 0 \text{. и т. д.}$$

Пример 2

Найти разности всех порядков степени x^3.

Положим $y = x^3$; так как $y^{\mathrm{I}} = (x + \omega)^3$, то

$$\Delta y = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3.$$

Это первая разность. Затем, поскольку $\Delta x^2 = 2\omega x + \omega^2$, будем иметь

$$\Delta 3\omega x^2 = 6\omega^2 x + 3\omega^3 \quad \text{и} \quad \Delta 3\omega^2 x = 3\omega^3 \quad \text{и} \quad \Delta\omega^3 = 0.$$

Сложив это, будем иметь

$$\Delta^2 y = 6\omega^2 x + 6\omega^3 \quad \text{и} \quad \Delta^3 y = 6\omega^3.$$

Следующие же разности исчезают.

Пример 3

Найти разности всех порядков степени x^4.

Положим $y = x^4$; так как $y^{\mathrm{I}} = (x + \omega)^4$, то

$$\Delta y = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^3 x + \omega^4.$$

---

[1]) Aggregatum.

Это первая разность. По предыдущему имеем:

$$\Delta 4\omega x^3 = 12\omega^2x^2 + 12\omega^3x + 4\omega^4,$$

$$\Delta 6\omega^2x^2 = \ldots\ldots 12\omega^3x + 6\omega^4,$$

$$\Delta 4\omega^3x = \ldots\ldots\ldots\ldots 4\omega^4,$$

$$\Delta\omega^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots 0.$$

Сложив это, будем иметь вторую разность

$$\Delta^2 y = 12\omega^2x^2 + 24\omega^3x + 14\omega^4.$$

Так как, далее,

$$\Delta 12\omega^2x^2 = 24\omega^3x + 12\omega^4,$$

$$\Delta 24\omega^3x = \ldots\ldots 24\omega^4,$$

$$\Delta 14\omega^4 = \ldots\ldots\ldots 0,$$

то находим третью разность

$$\Delta^3 y = 24\omega^3x + 36\omega^4$$

и, наконец, четвёртую разность

$$\Delta^4 y = 24\omega^4.$$

Так как она постоянна, то разности следующих порядков исчезают.

Пример 4

Найти разности любого порядка степени x^n.

Положим $y = x^n$; так как $y^{\mathrm{I}} = (x+\omega)^n$, $y^{\mathrm{II}} = (x+2\omega)^n$, $y^{\mathrm{III}} = (x+3\omega)$ и т. д., то, развернув степени, получим:

$$y = x^n,$$

$$y^{\mathrm{I}} = x^n + \frac{n}{1}\,\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\omega^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\omega^3x^{n-3} + \text{ и т. д.},$$

$$y^{\mathrm{II}} = x^n + \frac{n}{1}\cdot 2\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,4\omega^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,8\omega^3x^{n-3} + \text{ и т. д.},$$

$$y^{\mathrm{III}} = x^n + \frac{n}{1}\cdot 3\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,9\omega^2x^{n-2}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,27\omega^3x^{n-}+{}^{3} \text{ и т. д.},$$

$$y^{\mathrm{IV}} = x^n + \frac{n}{1}\cdot 4\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,16\omega^2x^{n-2}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,64\omega^3x^{n-1} \text{ и т. д.}$$

Взяв отсюда разности, найдём:

$$\Delta y = \frac{n}{1}\,\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\omega^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\omega^3x^{n-3} + \text{ и т. д.},$$

$$\Delta y^{\mathrm{I}} = \frac{n}{1}\,\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,3\omega^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,7\omega^3x^{n-3} + \text{ и т. д.},$$

$$\Delta y^{\mathrm{II}} = \frac{n}{1}\,\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,5\omega^2x^{n-2} + \frac{n(n-1(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,19\omega^3x^{n-3} + \text{ и т. д.},$$

$$\Delta y^{\mathrm{III}} = \frac{n}{1}\,\omega x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,7\omega^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,37\omega^3x^{n-3} + \text{ и т. д.}$$

Снова возьмём разности; получится

$$\Delta^2 y = n(n-1)\omega^2 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}6\omega^3 x^{n-3} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}14\omega^4 x^{n-4} + \text{ и т. д.},$$

$$\Delta^2 y^{\mathrm{I}} = n(n-1)\omega^2 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}12\omega^3 x^{n-3} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}50\omega^4 x^{n-4} + \text{ и т. д.},$$

$$\Delta^2 y^{\mathrm{II}} = n(n-1)\omega^2 x^{-n3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}18\omega^3 x^{n-3} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}110\omega^4 x^{n-4} + \text{ и т. д.}$$

Из этих формул с помощью вычитания найдём, далее,

$$\Delta^3 y = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}36\omega^4 x^{n-4} + \text{ и т. д.},$$

$$\Delta^3 y^{\mathrm{I}} = n(n-1)(n-2)\omega^3 x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}60\omega^4 x^{n-4} + \text{ и т. д.}$$

и далее

$$\Delta^4 y = n(n-1)(n-2)(n-3)\omega^4 x^{n-4} + \text{ и т. д.}$$

14. Чтобы легче усмотреть закон, которому следуют эти разности степени x^n, положим, прежде всего, для краткости:

$$A = \frac{n}{1},$$

$$B = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2},$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

$$E = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

и т. д.

Затем образуем следующую таблицу, которая послужит для выражения отдельных разностей:

y	1,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0	и т. д.
Δy	0,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1	и т. д.
$\Delta^2 y$	0,	0,	2,	6,	14,	30,	62,	126,	254	и т. д.
$\Delta^3 y$	0,	0,	0,	6,	36,	150,	540,	1806,	5796	и т. д.
$\Delta^4 y$	0,	0,	0,	0,	24,	240,	1560,	8400,	40 824	и т. д.
$\Delta^5 y$	0,	0,	0,	0,	0,	120,	1800,	16 800,	126 000	и т. д.
$\Delta^6 y$	0,	0,	0,	0,	0,	0,	720,	15 120,	191 520	и т. д.
$\Delta^7 y$	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	5040,	141 120	и т. д.

Число, содержащееся в каком-либо ряде этой таблицы, найдётся, если сложить предшествующее число того же ряда с вышестоящим числом и сумму помножить на указатель, стоящий при знаке Δ. Так, в ряде, отвечающем разности $\Delta^5 y$, член 16800 найдётся, если предшествующий член 1800 сложить с вышенаписанным 1560 и сумму 3360 помножить на 5.

15. Составив эту таблицу, мы получим отдельные разности степени $x^n = y$ следующим образом [1]):

$$\Delta y = A\omega x^{n-1} + B\omega^2 x^{n-2} + C\omega^3 x^{n-3} + D\omega^4 x^{n-4} + \text{ и т. д.},$$

$$\Delta^2 y = 2B\omega^2 x^{n-2} + 6C\omega^3 x^{n-3} + 14D\omega^4 x^{n-4} + \text{ и т. д.},$$

$$\Delta^3 y = 6C\omega^3 x^{n-3} + 36D\omega^4 x^{n-4} + 150E\omega^5 x^{n-5} + \text{ и т. д.},$$

$$\Delta^4 y = 24D\omega^4 x^{n-4} + 240E\omega^5 x^{n-5} + 1560F\omega^6 x^{n-6} + \text{ и т. д.}$$

Вообще же разность $\Delta^m y$ порядка m степени x^n выразится следующим образом:

Пусть

$$I = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m},$$

$$K = \frac{n-m}{m+1} I, \quad L = \frac{n-m-1}{m+2} K, \quad M = \frac{n-m-2}{m+3} L \text{ и т. д.}$$

Далее, пусть

$$\alpha = (m+1)^m - \frac{m}{1} m^m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-1)^m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-2)^m + \text{ и т. д.},$$

$$\beta = (m+1)^{m+1} - \frac{m}{1} m^{m+1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-1)^{m+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-2)^{m+1} + \text{ и т. д.},$$

$$\gamma = (m+1)^{m+2} - \frac{m}{1} m^{m+2} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(m-1)^{m+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-2)^{m+2} + \text{ и т. д}$$

Найдя эти значения, будем иметь

$$\Delta^m y = \alpha I\omega^m x^{n-m} + \beta K\omega^{m+1} x^{n-m-1} + \gamma L\omega^{m+2} x^{n-m-2} + \text{ и т. д.}$$

То, что это выражение правильно, само собой следует из способа, которым отдельные разности выводятся из значений y, y^{I}, y^{II}, y^{III} [2]) и т. д.

---

[1]) О том, как найдены Эйлером коэффициенты при B, C, D, ..., т. е. числа, составляющие таблицу § 14, говорится в следующем примечании.

[2]) Это выражение неправильно: оно даёт не $\Delta^m y$, а $\Delta^m y^{\mathrm{I}}$, что, действительно, следует из способа, установленного в § 10 по неполной индукции. Найдём правильное выражение по тому же способу. Пользуясь обозначением $\binom{n}{k}$ для

коэффициента k-й степени в разложении бинома n-й степени $\left(\text{так что } I=\binom{n}{m}\right.$, $K=\binom{n}{m+1}$, $L=\binom{n}{m+2}$ и т. д.$\Big)$, мы напишем формулу § 10 в виде

$$\Delta^m x^n=(x+m\omega)^n-\binom{m}{1}[x+(m-1)\omega]^n+$$
$$+\binom{m}{2}[x+(m-2)\omega]^n\binom{m}{3}[x+(m-3)\omega]^n+\ldots$$

После разложения этого выражения по степеням x коэффициент p_i^m при $\binom{n}{i}x\omega^{n-i}$ будет равен

$$p_i^m=m^i-\binom{m}{1}(m-1)^i+\binom{m}{2}(m-2)^i-\binom{m}{3}(m-3)^i+\ldots \tag{1}$$

Так как взятие каждой новой разности понижает степень многочлена на единицу, то при $i<m$ это выражение тождественно равно нулю. При значениях i, равных m, $m+1$, $m+2,\ldots$ мы имеем:

$$p_m^m=\alpha'=m^m-\binom{m}{1}(m-1)^m+\binom{m}{2}(m-2)^m-\binom{m}{3}(m-3)^m+\ldots,$$

$$p_{m+1}^m=\beta'=m^{m+1}-\binom{m}{1}(m-1)^{m+1}+\binom{m}{2}(m-2)^{m+1}-\binom{m}{3}(m-3)^{m+1}+\ldots,$$

$$p_{m+2}^m=\gamma'=m^{m+2}-\binom{m}{1}(m-1)^{m+2}+\binom{m}{2}(m-2)^{m+2}-\binom{m}{3}(m-3)^{m+1}+\ldots$$

Формула, данная Эйлером, станет правильной, если величины α, β, γ заменить величинами α', β', γ'.

Приведённая Эйлером таблица (§ 14) есть не что иное, как таблица величин p_i^m. Устанавливаемый им рекуррентный закон представляется формулой

$$m\left(p_i^{m-1}+p_i^m\right)=p_{i+1}^m. \tag{2}$$

Из неправильной формулы, приведённой в тексте, таблицу § 14 получить нельзя. Подмеченный же Эйлером рекуррентный закон может быть доказан только на основании формулы, дающей правильное выражение для коэффициентов.

Таким образом, можно с полной уверенностью сказать, что Эйлер и не пытался доказывать рекуррентный закон, усмотренный им из таблицы.

Справедливость этого закона можно доказать следующим образом: по формуле (1) имеем

$$p_i^{m-1}=(m-1)^i-\binom{m-1}{1}(m-2)^i+\binom{m-1}{2}(m-3)^i-\binom{m-1}{3}(m-4)^i+\ldots$$

и

$$p_i^m=m^i-\binom{m}{p}(m-1)^i+\binom{m}{2}(m-2)^i-\binom{m}{3}(m-3)^i+\binom{m}{4}(m-4)^i-\ldots$$

Сложим эти выражения, соединяя попарно члены, стоящие в одном и том же столбце. Так как по известному свойству биномиальных коэффициентов

$$\binom{m}{s}-\binom{m-1}{s-1}=\binom{m-1}{s}\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1),$$

то получаем

$$p_i^{m-1}+p_i^m=m^i-\binom{m-1}{1}(m-1)^i+\binom{m-1}{2}(m-2)^i-\binom{m-1}{3}(m-3)^i+$$
$$+\binom{m-1}{4}(m-4)^i-\ldots$$

16. Из этого явствует, что если показатель n будет целым положительным числом, то мы дойдём в конце концов до постоянных разностей и все следующие за ними будут равны нулю. Так, будем иметь:

$$\Delta x = \omega,$$
$$\Delta^2 x^2 = 2\omega^2,$$
$$\Delta^3 x^3 = 6\omega^3,$$
$$\Delta^4 x^4 = 24\omega^4$$

и, наконец,

$$\Delta^n x^n = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n\omega^n.$$

Итак, всякая целая рациональная функция в конце концов сведётся к постоянной разности, а именно, для функции от x первой степени $ax+b$ постоянна уже первая разность; она равна $a\omega$; для функции второй степени ax^2+bx+c постоянна вторая разность; она равна $2a\omega^2$. У функции же третьей степени постоянной будет третья разность, у четвёртой — четвёртая и т. д.

17. Но способ, которым мы нашли разности степени x^n, простирается ещё шире и распространяется также на те степени, у которых показатель n есть отрицательное или дробное или даже иррациональное число. Для большей ясности представим лишь первые разности этих особых степеней, так как закон вторых и следующих разностей усматривается не столь легко; итак, мы будем иметь:

$$\Delta x = \omega,$$
$$\Delta x^2 = 2\omega x + \omega^2,$$
$$\Delta x^3 = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3,$$
$$\Delta x^4 = 4\omega x^3 + 6\omega^2 x^2 + 4\omega^2 x + \omega^4$$

и т. д.

Подобным же образом будем иметь:

$$\Delta x^{-1} = -\frac{\omega}{x^2} + \frac{\omega^2}{x^3} - \frac{\omega^3}{x^4} + \text{ и т. д.},$$
$$\Delta x^{-2} = -\frac{2\omega}{x^3} + \frac{3\omega^2}{x^4} - \frac{4\omega^3}{x^5} + \text{ и т. д.},$$
$$\Delta x^{-3} = -\frac{3\omega}{x^4} + \frac{6\omega^2}{x^5} - \frac{10\omega^3}{x^6} + \text{ и т. д.},$$
$$\Delta x^{-4} = -\frac{4\omega}{x^5} + \frac{10\omega^2}{x^6} - \frac{20\omega^3}{x^7} + \text{ и т. д.},$$

и т. д.

Умножая на m и замечая, что

$$m\binom{m-1}{s} = \frac{m(m-1)\ldots(m-s+1)(m-s)}{s!} = \binom{m}{s}(m-s),$$

находим

$$m(p_i^{m-1} + p_i^m) = m^{i+1} - \binom{m}{1}(m-1)^{i+1} + \binom{m}{2}(m-2)^{i+1} - \binom{m}{3}(m-3)^{i+1} + \ldots$$

То же выражение даёт и (2) после замены i на $i+1$. Этим рекуррентный закон, выражаемый формулой (2), доказан.

Равным образом будем иметь:

$$\Delta x^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega^2}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3}{16x^{\frac{5}{2}}} - \text{и т. д.},$$

$$\Delta x^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{3x^{\frac{2}{3}}} - \frac{\omega^2}{9x^{\frac{5}{3}}} + \frac{5\omega^3}{81x^{\frac{8}{3}}} - \text{и т. д.},$$

$$\Delta x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\omega}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\omega^2}{8x^{\frac{5}{2}}} - \frac{5\omega^3}{16x^{\frac{7}{2}}} + \text{и т. д.},$$

$$\Delta x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{\omega}{3x^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\omega^2}{9x^{\frac{7}{3}}} - \frac{14\omega^3}{81x^{\frac{10}{3}}} + \text{и т. д.}$$

18. Ясно, что эти разности, если показатель при x не будет целым положительным числом, имеют бесконечное выражение, т. е. состоят из бесконечного числа членов. Между тем те же разности могут быть представлены и конечными выражениями. Действительно, так как при

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x} \text{ имеем } y^{\mathrm{I}} = \frac{1}{x+\omega}, \text{ то}$$

$$\Delta x^{-1} = \Delta \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\omega} - \frac{1}{x};$$

если дробь $\frac{1}{x+\omega}$ развернуть в ряд, получится вышеприведённое выражение. Подобным образом

$$\Delta x^{-2} = \Delta \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(x+\omega)^2} - \frac{1}{x^2},$$

а для иррациональных степеней будем иметь

$$\Delta \sqrt{x} = \sqrt{x+\omega} - \sqrt{x} \quad \text{и} \quad \Delta \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+\omega}} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Эти формулы, если их обычным образом выразить рядами, дадут вышеприведённые выражения.

19. Этим способом можно найти также разности дробных или иррациональных функций; так, если ищется первая разность дроби $\frac{1}{a^2+x^2}$, то полагаем $y = \frac{1}{a^2+x^2}$, и так как $y^{\mathrm{I}} = \frac{1}{a^2+x^2+2\omega x+\omega^2}$, то

$$\Delta y = \Delta \cdot \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2+x^2+2\omega x+\omega^2} - \frac{1}{a^2+x^2};$$

это выражение также может быть обращено в бесконечный ряд.

Положим $a^2+x^2 = P$ и $2\omega x + \omega^2 = Q$; будем иметь

$$\frac{1}{P+Q} = \frac{1}{P} - \frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \text{и т. д.}$$

и

$$\Delta y = -\frac{Q}{P^2} + \frac{Q^2}{P^3} - \frac{Q^3}{P^4} + \text{и т. д.}$$

Если подставить вместо P и Q их значения, то будем иметь

$$\Delta y = \Delta\frac{1}{a^2+x^2} = -\frac{2\omega x+\omega^2}{(a^2+x^2)^2} + \frac{4\omega^2x^2+4\omega^3x+\omega^4}{(a^2+x^2)^3} - \frac{8\omega^3x^3+12\omega^4x^2+6\omega^5x+\omega^6}{(a^2+x^2)^4} + \text{и т. д.}$$

Если эти члены расположить по степеням ω, получим

$$\Delta\frac{1}{a^2+x^2} = -\frac{2\omega x}{(a^2+x^2)^2} + \frac{\omega^2(3x^2-a^2)}{(a^2+x^2)^3} - \frac{4\omega^3(x^3-a^2x)}{(a^2+x^2)^4} + \text{и т. д.}$$

20. Подобными же бесконечными рядами могут быть выражены и разности иррациональных функций.

Пусть предложена функция $y=\sqrt{a^2+x^2}$, тогда

$$y^{\mathrm{I}} = \sqrt{a^2+x^2+2\omega x+\omega^2}.$$

Положим

$$a^2+x^2=P \quad \text{и} \quad 2\omega x+\omega^2=Q;$$

будем иметь

$$\Delta y = \sqrt{P+Q}-\sqrt{P} = \frac{Q}{2\sqrt{P}} - \frac{Q^2}{8P\sqrt{P}} + \frac{Q^3}{16P^2\sqrt{P}} - \text{и т. д.},$$

откуда

$$\Delta y = \Delta\sqrt{a^2+x^2} = \frac{2\omega x+\omega^2}{2\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{4\omega^2x^2+4\omega^3x+\omega^4}{8(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}} + \text{и т. д.}$$

или

$$\Delta y = \frac{\omega x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{a^2\omega^2}{2(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{a^2\omega^3x}{2(a^2+x^2)^2\sqrt{a^2+x^2}} + \text{и т. д.}$$

Отсюда мы видим, что разность какой угодно функции y количества x также можно выразить в этом виде, так что

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{и т. д.},$$

где P, Q, R, S и т. д. суть некоторые функции x, которые в каждом случае могут быть определены из функции y.

21. В этом же виде можно представить и разности трансцендентных функций, что будет ясно видно из следующих примеров:

Пример 1

Найти первую разность гиперболического[1]) *логарифма x.*

Положим $y=\mathrm{l}\,x$ и так как $y^{\mathrm{I}}=\mathrm{l}(x+\omega)$, то будет

$$\Delta y = y^{\mathrm{I}} - y = \mathrm{l}(x+\omega) - \mathrm{l}\,x = \mathrm{l}\left(1+\frac{\omega}{x}\right).$$

---

[1]) То-есть натурального. Название «гиперболический логарифм» проистекает из того, что эта функция представляет площадь, описываемую ординатой гиперболы $y=\frac{1}{x}$. Эйлер пользуется как термином «гиперболический», так и термином «натуральный логарифм». Обозначение l Эйлер употребляет для логарифма, взятого по любому основанию.

Но такого рода логарифм мы выше[1]) научились выражать бесконечным рядом; применив его, будем иметь

$$\Delta y = \Delta \mathrm{l}\, x = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \text{и т.д.}$$

Пример 2

Найти первую разность показательного количества a^x.

Положив $y = a^x$, будем иметь $y^{\mathrm{I}} = a^{x+\omega} = a^x a^\omega$; но выше[2]) мы показали, что

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega \mathrm{l}\, a}{1} + \frac{\omega^2 (\mathrm{l}\, a)^2}{1\cdot 2} + \frac{\omega^3 (\mathrm{l}\, a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{и т. д.};$$

взяв это значение, будем иметь

$$\Delta a^x = y^{\mathrm{I}} - y = \Delta y = \frac{a^x \omega \mathrm{l}\, a}{1} + \frac{a^x \omega^2 (\mathrm{l}\, a)^2}{1\cdot 2} + \frac{a^x \omega^3 (\mathrm{l}\, a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{и т. д.}$$

Пример 3

В круге, радиус которого равен 1, *найти разность синуса дуги* x.

Пусть $\sin x = y$; тогда $y^{\mathrm{I}} = \sin(x+\omega)$, откуда

$$\Delta y = y^{\mathrm{I}} - y = \sin(x+\omega) - \sin x.$$

Но $\sin(x+\omega) = \cos\omega \sin x + \sin\omega \cos x$, а с помощью бесконечных рядов мы показали[3]), что

$$\cos\omega = 1 - \frac{\omega^2}{1\cdot 2} + \frac{\omega^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\omega^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{и т. д.}$$

и

$$\sin\omega = \omega - \frac{\omega^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\omega^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{\omega^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \text{и т. д.};$$

подставив эти ряды будем иметь

$$\Delta \sin x = \omega \cos x - \frac{\omega^2}{2}\sin x - \frac{\omega^3}{6}\cos x + \frac{\omega^4}{24}\sin x + \frac{\omega^5}{120}\cos x - \text{и т. д.}$$

Пример 4

В круге, радиус которого равен 1, *найти разность косинуса дуги* x.

Положив $y = \cos x$, поскольку $y^{\mathrm{I}} = \cos(x+\omega)$, будем иметь

$$y^{\mathrm{I}} = \cos\omega \cdot \cos x - \sin\omega \cdot \sin x$$

и

$$\Delta y = \cos\omega \cdot \cos x - \sin\omega \cdot \sin x - \cos x.$$

Применив те же ряды, что выше, получим

$$\Delta \cos x = -\omega \sin x - \frac{\omega^2}{2}\cos x + \frac{\omega^3}{6}\sin x + \frac{\omega^4}{24}\cos x - \frac{\omega^5}{120}\sin x - \text{и т. д.}$$

---

[1]) «Введение», т. I, гл. VII, § 121.
[2]) «Введение в анализ», ч. I, гл. VII, § 115.
[3]) Там же, гл. VIII.

22. Итак, если предложена какая-нибудь функция y от x, будь она алгебраической или трансцендентной, её первая разность может быть представлена в форме

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \text{и т. д.};$$

если от неё снова возьмём разность, то увидим, что вторая разность y должна иметь следующий вид:

$$\Delta^2 y = p\omega^2 + Q\omega^3 + R\omega^4 + \text{и т. д.};$$

подобным же образом третья разность y будет

$$\Delta^3 y = p\omega^3 + Q\omega^4 + R\omega^5 + \text{и т. д.}$$

и т. д.

При этом нужно заметить, что буквы P, Q, R и т. д. употребляются здесь не для выражения определённых значений; в различных разностях они обозначают различные функции. Я пользуюсь одними и теми же буквами лишь для того, чтобы хватило запаса различных букв.

Эти выражения разностей следует хорошо заметить, так как в анализе бесконечно малых они находят очень широкое применение.

23. Итак, я изложил способ, которым можно для каждой функции найти её первую разность, а также разности следующих порядков, поскольку они находятся из последовательных значений y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV} и т. д. количества y. Но и обратно, по данным разностям любого порядка количества y могут быть получены эти изменяющиеся значения y. Действительно, мы имеем:

$$y^{\mathrm{I}} = y + \Delta y,$$
$$y^{\mathrm{II}} = y + 2\Delta y + \Delta^2 y,$$
$$y^{\mathrm{III}} = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y,$$
$$y^{\mathrm{IV}} = y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y$$

и т. д.,

где числовые коэффициенты снова являются коэффициентами разложения бинома. Так как y^{I}, y^{II}, y^{III} и т. д. суть значения y, возникающие, если вместо x последовательно полагать значения $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$ и т. д., то мы можем обозначить через $y^{(n)}$ значение, которое получит y, если вместо x напишем $x + n\omega$; это значение будет

$$y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y + \text{и т. д.}$$

Отсюда же можно найти выражение y и тогда, когда n — число отрицательное. Так, если вместо x положить $x - \omega$, то функция y примет такой вид:

$$y - \Delta y + \Delta^2 y - \Delta^3 y + \Delta^4 y - \text{и т. д.};$$

если же вместо x положить $x - 2\omega$, то функция y перейдёт в

$$y - 2\Delta y + 3\Delta^2 y - 4\Delta^3 y + 5\Delta^4 y - \text{и т. д.}$$

24. Скажем ещё несколько слов об обратном методе, которым должно было бы находить по данной разности ту функцию, разность которой дана. Так как этот вопрос очень трудный и для его решения часто требуется применять самый анализ бесконечно малых, то мы изложим здесь лишь некоторые более лёгкие случаи. Прежде всего, если мы найдём разность какой-либо функции, то, идя обратным путём, мы можем найти в свою очередь ту функцию, из которой произошла разность. Так, поскольку разность функции $ax+b$ есть $a\omega$, то, если мы будем искать, от какой функции $a\omega$ является разностью, ответ получаем тотчас же: эта функция есть $ax+b$. В неё входит постоянное количество b, которое не входило в разность и которое, следовательно, зависит от нашего произвола. И вообще всегда, если разность какой-либо функции P есть Q, то также и от функции $P+A$, где A обозначает какое-либо постоянное количество, разность будет Q. Значит, если предлагается эта разность Q, то функция, из которой она произошла, будет $P+A$ и, следовательно, не имеет определённого значения, поскольку постоянная A зависит от произвола.

25. Искомую функцию, разность которой предлагается, мы будем называть *суммой*. Это наименование применяется как потому, что обычно сумма противопоставляется разности, так и потому, что искомая функция и на самом деле есть сумма всех предшествующих значений разности. Действительно, мы имели

$$y^{\mathrm{I}} = y + \Delta y \quad \text{и} \quad y^{\mathrm{II}} = y + \Delta y + \Delta y^{\mathrm{I}}.$$

Продолжим ряд значений y в обратную сторону и то значение, которое соответствует значению $x-\omega$, обозначим через y_{I}, предыдущее значение — через y_{II}, дальше стоящие — через y_{III}, y_{IV}, y_{V} и т. д. Тогда образуется идущий в обратную сторону ряд

$$y_{\mathrm{V}},\ y_{\mathrm{IV}},\ y_{\mathrm{III}},\ y_{\mathrm{II}},\ y_{\mathrm{I}},\ y$$

с его разностями

$$\Delta y_{\mathrm{V}}\ \ \Delta y_{\mathrm{IV}}\ \ \Delta y_{\mathrm{III}}\ \ \Delta y_{\mathrm{II}}\ \ \Delta y_{\mathrm{I}}.$$

Будем иметь $y = \Delta y_{\mathrm{I}} + y_{\mathrm{I}}$, $y_{\mathrm{I}} = \Delta y_{\mathrm{II}} + y_{\mathrm{II}}$, $y_{\mathrm{II}} = \Delta y_{\mathrm{III}} + y_{\mathrm{III}}$ и т. д., так что

$$y = \Delta y_{\mathrm{I}} + \Delta y_{\mathrm{II}} + \Delta y_{\mathrm{III}} + \Delta y_{\mathrm{IV}} + \Delta y_{\mathrm{V}} + \text{и т. д.},$$

т. е. функция y, разность которой есть Δy, будет суммой всех предшествующих значений разности Δy, которые возникают, если вместо x написать предшествующие значения $x-\omega$, $x-2\omega$, $x-3\omega$ и т. д.

26. Как для обозначения разности мы пользовались знаком Δ, так сумму мы будем обозначать знаком $\sum$. Если разность функции y есть z, то $z = \Delta y$; мы ранее показали, как найти разность z, если дано y. Если же дана разность z, а нужно найти её сумму y, то $y = \sum z$. Таким образом, из уравнения $z = \Delta y$, обращая его, мы получаем уравнение $y = \sum z$; сюда можно было бы ещё по указанным выше причинам прибавить какое-нибудь постоянное количество; поэтому уравнение $z = \Delta y$, если его обратить, даст также $y = \sum z + C$. Так, поскольку разность количества ay, где a есть постоянное количество, есть $a\Delta y = az$, будем иметь $\sum az = ay$. А так как $\Delta x = \omega$, то $\sum \omega = x + C$ и $\sum a\omega = ax + C$; вследствие постоянства ω будем также иметь $\sum \omega^2 = \omega x + C$, $\sum \omega^3 = \omega^2 x + C$ и т. д.

27. Если мы обратим найденные выше выражения разностей степеней x, то будем иметь

$$\sum \omega = x$$

и отсюда

$$\sum 1 = \frac{x}{\omega}.$$

Затем будем иметь

$$\sum (2\omega x + \omega^2) = x^2,$$

откуда

$$\sum x = \frac{x^2}{2\omega} - \sum \frac{\omega}{2} = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}.$$

Далее,

$$\sum (3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3) = x^3,$$

или

$$3\omega \sum x^2 + 3\omega^2 \sum x + \omega^3 \sum 1 = x^3,$$

следовательно,

$$\sum x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \omega \sum x - \frac{\omega^2}{3} \sum 1,$$

или

$$\sum x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}.$$

Подобным образом будем иметь

$$\sum x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{3\omega}{2} \sum x^2 - \omega^2 \sum x - \frac{\omega^3}{4} \sum 1;$$

если подставить сюда вместо $\sum x^2$, $\sum x$ и $\sum 1$ ранее найденные значения, найдём

$$\sum x^3 = \frac{x^4}{4\omega} - \frac{x^3}{2} + \frac{\omega x^2}{4}.$$

Далее, так как

$$\sum x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - 2\omega \sum x^3 - 2\omega^2 \sum x^2 - \omega^3 \sum x - \frac{\omega^4}{5} \sum 1,$$

то после подстановок получим

$$\sum x^4 = \frac{x^5}{5\omega} - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} \omega x^3 - \frac{1}{30} \omega^3 x.$$

Идя далее, найдём подобным же образом

$$\sum x^5 = \frac{x^6}{6\omega} - \frac{1}{2} x^5 + \frac{5}{12} \omega x^4 - \frac{1}{12} \omega^3 x^2$$

и

$$\sum x^6 = \frac{x^7}{7\omega} - \frac{1}{2} x^6 + \frac{1}{2} \omega x^5 - \frac{1}{6} \omega^3 x^3 + \frac{1}{42} \omega^5 x.$$

Эти выражения мы ниже научим находить легче.

28. Итак, если предложенная разность есть целая рациональная функция от x, то её сумма (т. е. та функция, разностью которой она является) легко находится из этих формул. Действительно, так как в состав разности будет входить несколько степеней количества x, то мы найдём сумму для каждого члена и все такие суммы сложим.

Пример 1

Пусть ищется функция, разность которой есть ax^2+bx+c.

Ищем суммы отдельных членов с помощью прежде найденных формул.

Будем иметь:

$$\sum ax^2 = \frac{ax^3}{3\omega} - \frac{ax^2}{2} + \frac{a\omega x}{6},$$

$$\sum bx = \ldots \frac{bx^2}{2\omega} - \frac{bx}{2}$$

и

$$\sum c = \ldots\ldots \frac{cx}{\omega}.$$

Собрав эти суммы, будем иметь

$$\sum (ax^2+bx+c) = \frac{a}{3\omega}x^3 - \frac{a\omega-b}{2\omega}x^2 + \frac{a\omega^2-3b\omega+6c}{6\omega}x + C.$$

Это есть искомая функция, разность которой равна ax^2+bx+c.

Пример 2

Пусть ищется функция, разность которой есть $x^4-2\omega^2x^2+\omega^4$.

Поступая таким же образом, получаем:

$$\sum x^4 = \frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{\omega}{3}x^3 - \ldots - \frac{\omega^3}{30}x,$$

$$-\sum 2\omega^2x^2 = \ldots\ldots - \frac{2\omega}{3}x^3 + \omega^2x^2 - \frac{\omega^3}{3}x$$

и

$$+\sum \omega^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots + \omega^3x,$$

следовательно, искомая функция будет

$$\frac{1}{5\omega}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}\omega x^3 + \omega^2x^2 + \frac{19}{30}\omega^3x + C.$$

Действительно, если здесь вместо x положить $x+\omega$ и от получившегося количества отнять вышенайденное, то останется предложенная разность $x^4-2\omega^2x^2+\omega^4$.

29. Если мы внимательнее рассмотрим суммы, которые мы нашли для степеней x, то в первых, вторых и третьих членах легко заметим закон, по которому следуют друг за другом отдельные члены; но закон образования остальных членов не столь очевиден, чтобы можно было представить сумму степени x^n в общем виде. Однако в дальнейшем (§ 132 второй части) мы покажем, что

$$\begin{aligned}\sum x^n = {} & \frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega} - \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\omega}{2\cdot 3}x^{n-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\omega^3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{n-3} + \\ & + \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\omega^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^{n-5} - \\ & - \frac{3}{10}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-6)\omega^7}{2\cdot 3\ldots 8\cdot 9}x^{n-7} + \\ & + \frac{5}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-8)\omega^9}{2\cdot 3\ldots 10\cdot 11}x^{n-9} - \\ & - \frac{691}{210}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-10)\omega^{11}}{2\cdot 3\ldots 12\cdot 13}x^{n-11} + \\ & + \frac{35}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-12)\omega^{13}}{2\cdot 3\ldots 14\cdot 15}x^{n-13} - \\ & - \frac{3617}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-14)\omega^{15}}{2\cdot 3\ldots 16\cdot 17}x^{n-15} + \\ & + \frac{43\,867}{42}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-16)\omega^{17}}{2\cdot 3\ldots 18\cdot 19}x^{n-17} - \\ & - \frac{1\,222\,277}{110}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-18)\omega^{19}}{2\cdot 3\ldots 20\cdot 21}x^{n-19} + \\ & + \frac{854\,513}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-20)\omega^{21}}{2\cdot 3\ldots 22\cdot 23}x^{n-21} - \\ & - \frac{1\,181\,820\,455}{546}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-22)\omega^{23}}{2\cdot 3\ldots 24\cdot 25}x^{n-23} + \\ & + \frac{76\,977\,927}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-24)\omega^{25}}{2\cdot 3\ldots 26\cdot 27}x^{n-25} - \\ & - \frac{23\,749\,461\,029}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-26)\omega^{27}}{2\cdot 3\ldots 28\cdot 29}x^{n-27} + \\ & + \frac{8\,615\,841\,276\,005}{462}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-28)\omega^{29}}{2\cdot 3\ldots 30\cdot 31}x^{n-29} + \\ & \text{и т. д.} + C.\end{aligned}$$

В этой прогрессии особо важное значение имеют численные коэффициенты; как они образуются — здесь ещё не место излагать.

30. Если n не есть целое положительное число, то эта сумма, очевидно, продолжается до бесконечности и таким образом сумма не может быть найдена в конечном виде. Кроме того, здесь нужно заметить, что в выражение суммы входят не все степени, более низкие чем предложенная; действительно, отсутствуют члены x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6}, x^{n-8} и т. д., т. е их коэффициенты равны нулю; однако коэффициент второго члена x^n не следует этому закону; он равен $-\frac{1}{2}$. С помощью этого выражения можно представить в бесконечной форме суммы всех степеней, показатели которых суть дробные или отрицательные числа, за исключением одного только случая, когда $n=-1$, так как тогда член $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$ делается бесконечным, ибо $n+1=0$. Так, если положить $n=-2$, будет

$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{x^2} = C & - \frac{1}{\omega x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\omega}{3x^3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\omega^3}{5x^5} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\omega^5}{7x^7} + \frac{3}{10}\cdot\frac{\omega^7}{9x^9} - \\ & - \frac{5}{6}\cdot\frac{\omega^9}{11x^{11}} + \frac{691}{210}\,\frac{\omega^{11}}{13x^{13}} - \frac{35}{2}\cdot\frac{\omega^{13}}{15x^{15}} + \frac{3\,617}{30}\cdot\frac{\omega^{15}}{17x^{17}} - \text{и т. д.}\end{aligned}$$

31. Итак, если предложенная разность будет какой-либо степенью количества x, то всегда можно будет указать её сумму, т. е. выражение функции, разностью которой она является. Если же предложенная функция имеет другой вид, так что её нельзя разбить на части, являющиеся степенями, тогда сумму найти очень трудно, а часто и вовсе невозможно, разве что случайно обнаружится, что она произошла из некоторой функции. Поэтому следует разыскивать разности многообразных функций и хорошо их заметить, чтобы, если когда-нибудь такая функция окажется предложенной, тотчас же можно было представить её сумму, т. е. функцию, из которой она произошла. Кроме того, много правил, с помощью которых нахождение сумм поразительно облегчается, даёт метод бесконечно малых.

32. Искомую сумму можно найти легче, если предложенная разность состоит из простых множителей, составляющих арифметическую прогрессию, разность которой есть само количество ω. Так, пусть предложена функция $(x+\omega)(x+2\omega)$ и ищется её разность; так как после подстановки $x+\omega$ вместо x эта функция переходит в $(x+2\omega)(x+3\omega)$, то её разность будет $2\omega(x+2\omega)$. Поэтому, обратно, если предложена разность $2\omega(x+2\omega)$, то её сумма будет $(x+\omega)(x+2\omega)$. Следовательно, будем иметь

$$\sum (x+2\omega)=\frac{1}{2\omega}(x+\omega)(x+2\omega).$$

Подобным образом, если предложена функция $(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$, то, так как её разность есть $2\omega(x+(n+1)\omega)$, будем иметь

$$\sum (x+(n+1)\omega)=\frac{1}{2\omega}(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$$

и

$$\sum (x+n\omega)=\frac{1}{2\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega).$$

33. Если функция состоит из большего числа множителей, как, например,

$$y=(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega),$$

то, поскольку

$$y^{\mathrm{I}}=(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega),$$

будем иметь

$$\Delta y=3\omega(x+n\omega)(x+(n+1)\omega),$$

так что

$$\sum (x+n\omega)(x+(n+1)\omega)=\frac{1}{3\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega).$$

Подобным образом найдём, что

$$\sum (x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)=$$
$$=\frac{1}{4\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega).$$

Отсюда становится само собой ясным закон нахождения суммы, когда разность состоит из нескольких множителей такого рода. Хотя эти разности и являются целыми рациональными функциями, однако их суммы этим способом находятся легче, чем предшествующим методом.

34. Отсюда открывается также путь к нахождению сумм дробных разностей. В самом деле, пусть предложена дробь

$$y=\frac{1}{x+n\omega};$$

так как

$$y^{\mathrm{I}}=\frac{1}{x+(n+1)\,\omega},$$

то

$$\Delta y=\frac{1}{x+(n+1)\,\omega}-\frac{1}{x+n\omega}=\frac{-\omega}{(x+n\omega)\,(x+(n+1)\,\omega)},$$

и поэтому

$$\sum\frac{1}{(x+n\omega)\,(x+(n+1)\,\omega)}=-\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x+n\omega}.$$

Пусть, далее,

$$y=\frac{1}{(x+n\omega)\,(x+(n+1)\,\omega)};$$

так как

$$y^{\mathrm{I}}=\frac{1}{(x+(n+1)\,\omega)\,(x+(n+2)\,\omega)},$$

то

$$\Delta y=\frac{-2\omega}{(x+n\omega)\,(x+(n+1)\,\omega)\,(x+(n+2)\,\omega)}.$$

Поэтому

$$\sum\frac{1}{(x+n\omega)\,(x+(n+1)\,\omega)\,(x+(n+2)\,\omega)}=\frac{-1}{2\omega}\,\frac{1}{(x+n\omega)\,(x+(n+1)\,\omega)}.$$

Подобным образом

$$\sum\frac{1}{(x+n\omega)\,(x+(n+1)\,\omega)\,(x+(n+2)\,\omega)\,(x+(n+3)\,\omega)}=$$
$$=-\frac{1}{3\omega}\cdot\frac{1}{(x+n\omega)\,(x+(n+1)\,\omega)\,(x+(n+2)\,\omega)}.$$

35. Этот метод суммирования следует хорошо усвоить, ибо суммы таких разностей не могут быть найдены предшествующим методом. Если же, сверх того, разность имеет числитель или множители знаменателя следуют друг за другом не в арифметической прогрессии, то надёжнейший способ разыскания суммы состоит в том, чтобы разложить предложенную разность на её простейшие дроби; если по отдельности их нельзя суммировать, то, соединив их попарно, можно найти их сумму всякий раз, когда это возможно вообще сделать. Нужно только посмотреть, нельзя ли найти сумму с помощью формулы

$$\sum\frac{1}{x+(n+1)\,\omega}-\sum\frac{1}{x+n\omega}=\frac{1}{x+n\omega};$$

в самом деле, хотя ни одна из этих двух сумм сама по себе не может быть представлена, однако разность их является известной.

36. Итак, в этих случаях дело сводится к разложению каждой дроби на её простейшие, которое было подробно рассмотрено в предыдущей книге. Как можно с его помощью находить суммы, мы покажем на нескольких примерах.

Пример 1

Пусть ищется сумма, разность которой есть $\frac{3x+2\omega}{x(x+\omega)(x+2\omega)}$.

Разложим предложенную разность на её простейшие дроби; получим

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\cdot\frac{1}{x+2\omega}.$$

Так как по предыдущей формуле

$$\sum\frac{1}{x+n\omega}=\sum\frac{1}{x+(n+1)\omega}-\frac{1}{x+n\omega},$$

то

$$\sum\frac{1}{x}=\sum\frac{1}{x+\omega}-\frac{1}{x}.$$

Следовательно, искомая сумма будет

$$\frac{1}{\omega}\sum\frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}\sum\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\sum\frac{1}{x+2\omega}=\frac{2}{\omega}\sum\frac{1}{x+\omega}-\frac{2}{\omega}\sum\frac{1}{x+2\omega}-\frac{1}{\omega x};$$

но

$$\sum\frac{1}{x+\omega}=\sum\frac{1}{x+2\omega}-\frac{1}{x+\omega},$$

значит, искомая сумма будет

$$-\frac{1}{\omega x}-\frac{2}{\omega(x+\omega)}=\frac{-3x-\omega}{\omega x(x+\omega)}.$$

Пример 2

Пусть ищется сумма, разность которой есть $\frac{3\omega}{x(x+3\omega)}$.

Положив эту разность равной z, будем иметь $z=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3\omega}$, и поэтому

$$\sum z=\sum\frac{1}{x}-\sum\frac{1}{x+3\omega}=\sum\frac{1}{x+\omega}-\sum\frac{1}{x+3\omega}-\frac{1}{x}=$$
$$=\sum\frac{1}{x+2\omega}-\sum\frac{1}{x+3\omega}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\omega}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\omega}-\frac{1}{x+2\omega}.$$

Это есть искомая сумма. Итак, всякий раз как выражения, содержащие знаки суммирования $\sum$, в конце концов взаимно уничтожаются, можно будет найти выражение суммы предложенной разности; если же этого уничтожения не последует, это — признак того, что сумма не может быть найдена.

ГЛАВА II

О ПРИМЕНЕНИИ РАЗНОСТЕЙ В УЧЕНИИ О РЯДАХ

37. То, что природа рядов выясняется лучше всего с помощью разностей, достаточно известно уже из начальных основ математики. В самом деле, для арифметической прогрессии, которую обычно рассматривают прежде всего, основное свойство состоит в том, что её первые разности равны между собой и, значит, вторые и все остальные разности будут нулями. Затем есть ряды, у которых только вторые разности равны; они поэтому удачно названы рядами второго порядка, тогда как арифметическая прогрессия называется рядом первого порядка. Дальше будут ряды третьего порядка; у них постоянны третьи разности. К рядам четвёртого и следующих порядков относят те, у которых только четвёртые или высшие разности постоянны.

38. В этом подразделении содержатся бесчисленные роды рядов, однако не все ряды можно отнести к одному из этих родов. Встречаются бесчисленные ряды, которые при составлении их разностей никогда не приводят к постоянным членам. Таковы, помимо бесчисленных других, геометрические прогрессии; они никогда не дают постоянных разностей, как можно видеть из следующего примера:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128 \text{ и т. д.},$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64 \text{ и т. д.},$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32 \text{ и т. д.}$$

В самом деле, так как ряд разностей какого угодно порядка равен самому предложенному ряду, то равенство разностей прямо исключается. Поэтому должны быть установлены многие классы рядов, из которых лишь один можно подразделить на порядки, соответствующие порядкам постоянных разностей. Этот класс мы и будем по преимуществу рассматривать в настоящей главе.

39. Две вещи обычно ищутся для распознания природы ряда: общий член и сумма или суммационный член[1]). Общий член есть неопределённое выражение, содержащее в себе всякий член ряда и являющееся вследствие этого функцией переменного количества x, которая при $x=1$ представит первый член ряда; второй оно представит

---

[1]) Terminus summatorius.

при $x=2$, третий при $x=3$ и т. д. Итак, если известен общий член, то найдётся какой угодно член ряда, хотя бы закон, которым связаны отдельные члены ряда, и не был усмотрен. Например, полагая $x=1000$, мы тотчас найдём тысячный член. Так, общий член ряда

$$1,\quad 6,\quad 15,\quad 28,\quad 45,\quad 66,\quad 91,\quad 120 \text{ и т. д.}$$

есть $2x^2-x$; действительно, если положить $x=1$, эта формула даёт первый член 1; если положить $x=2$, получается второй член; если положить $x=3$ — третий и т. д.; отсюда ясно, что сотый член этого ряда получится, если положить $x=100$; он будет равен 19 900.

40. Индексом или показателем в каком-либо ряде называются числа, которые указывают, каков порядок каждого члена. Так, индекс первого члена есть 1, второго 2 и т. д. Индексы отдельных членов ряда обычно надписываются над ними следующим образом:

Индексы

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7 \text{ и т. д.}$$

Члены

$$A,\quad B,\quad C,\quad D,\quad E,\quad F,\quad G \text{ и т. д.},$$

откуда тотчас же явствует, что G есть седьмой член предложенного ряда, ибо его индекс есть 7. Таким образом, общий член ряда есть не что иное, как тот член ряда, у которого индекс или показатель есть неопределённое число x. Мы покажем сперва, как нужно находить общий член ряда какого-либо порядка, т. е. ряда, у которого либо первые, либо вторые, либо другие последующие разности постоянны. Затем мы перейдём к разысканию суммы.

41. Начнём с рядов первого порядка, т. е. с арифметических прогрессий; их первые разности постоянны. Пусть a есть первый член ряда, а b — первый член ряда разностей; ему равны и все остальные, так что ряд составлен следующим образом:

Индексы

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6 \quad \text{и т. д.}$$

Члены

$$a,\quad a+b,\quad a+2b,\quad a+3b,\quad a+4b,\quad a+5b \quad \text{и т. д.}$$

Разности

$$b,\quad b,\quad b,\quad b,\quad b \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда тотчас явствует, что член, индекс которого есть x, будет $a+(x-1)b$ и, следовательно, общий член будет $bx+a-b$; он составлен из первого члена самого ряда и первого члена ряда его разностей. Если обозначить через a^{I} второй член ряда, то так как $b=a^{\mathrm{I}}-a$, общий член ряда будет

$$(a^{\mathrm{I}}-a)x+2a-a^{\mathrm{I}}=a^{\mathrm{I}}(x-1)-a(x+2),$$

так что общий член арифметической прогрессии можно выразить через её первый и второй члены.

42. Пусть в ряде второго порядка — члены самого ряда a, первых разностей b, вторых разностей c; тогда сам ряд, вместе со своими разностями, будет составлен так:

Индексы

$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7$ и т. д.

Члены

$a,\quad a+b,\quad a+2b+c,\quad a+3b+3c,\quad a+4b+6c,\quad a+5b+10c,\quad a+6b+15c$ и т. д.

Первые разности

$b,\quad b+c,\quad b+2c,\quad b+3c,\quad b+4c,\quad b+5c$ и т. д.

Вторые разности

$c,\quad c,\quad c,\quad c,\quad c$ и т. д.

Из наблюдения над ним вытекает, что член, индекс которого x, будет

$$a+(x-1)b+\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}c;$$

это, следовательно, есть общий член предложенного ряда. Обозначим теперь второй член самого ряда через a^{I}, а третий член через a^{II}; так как по основному свойству разностей (§ 10)

$$b=a^{\mathrm{I}}-a \quad \text{и} \quad c=a^{\mathrm{II}}-2a^{\mathrm{I}}+a,$$

то общий член будет

$$a+(x-1)(a^{\mathrm{I}}-a)+\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}(a^{\mathrm{II}}-2a^{\mathrm{I}}+a);$$

его можно привести к такому виду:

$$\frac{a^{\mathrm{II}}(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}-\frac{2a^{\mathrm{I}}(x-1)(x-3)}{1\cdot 2}+\frac{a(x-2)(x-3)}{1\cdot 2},$$

или же к такому:

$$\frac{a^{\mathrm{II}}}{2}(x-1)(x-2)-\frac{2a^{\mathrm{I}}}{2}(x-1)(x-3)+\frac{a}{2}(x-2)(x-3),$$

или же, наконец, к такому:

$$\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)\left(\frac{a^{\mathrm{II}}}{x-3}-\frac{2a^{\mathrm{I}}}{x-2}+\frac{a}{x-1}\right),$$

так что он выражается через три члена самого ряда.

43. Пусть ряд третьего порядка есть a, a^{I}, a^{II}, a^{III} и т. д.; его первые разности b^{I}, b^{II}, b^{III} и т. д., вторые разности c, c^{I}, c^{II}, c^{III} и третьи d, d, d, ибо они постоянны.

Индексы

$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6$ и т. д.

Члены

$a,\quad a^{\mathrm{I}},\quad a^{\mathrm{II}},\quad a^{\mathrm{III}},\quad a^{\mathrm{IV}},\quad a^{\mathrm{V}}$ и т. д.

Первые разности

$b,\quad b^{\mathrm{I}},\quad b^{\mathrm{II}},\quad b^{\mathrm{III}},\quad b^{\mathrm{IV}}$ и т. д.

Вторые разности

$c,\quad c^{\mathrm{I}},\quad c^{\mathrm{II}},\quad c^{\mathrm{III}}$ и т. д.

Третьи разности

$d,\quad d,\quad d$ и т. д.

Так как

$$a^{\mathrm{I}} = a + b, \quad a^{\mathrm{II}} = a + 2b + c, \quad a^{\mathrm{III}} = a + 3b + 3c + d,$$
$$a^{\mathrm{IV}} = a + 4b + 6c + 4d \text{ и т. д.},$$

то общий член, т. е. тот член, индекс которого есть x, будет

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3} d;$$

так образуется общий член из разностей. Так как, далее,

$$b = a^{\mathrm{I}} - a, \quad c = a^{\mathrm{II}} - 2a^{\mathrm{I}} + a, \quad d = a^{\mathrm{III}} - 3a^{\mathrm{II}} + 3a^{\mathrm{I}} - a,$$

то, если подставить эти значения, общий член примет вид

$$a^{\mathrm{III}} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3} - 3a^{\mathrm{II}} \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3} +$$
$$+ 3a^{\mathrm{I}} \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3} - a \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3};$$

его можно также представить следующим образом:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3} \left(\frac{a^{\mathrm{III}}}{x-4} - \frac{3a^{\mathrm{II}}}{x-3} + \frac{3a^{\mathrm{I}}}{x-2} - \frac{a}{x-1} \right).$$

44. Пусть теперь предложен ряд какого угодно порядка.

Индексы

1, 2, 3, 4, 5, 6, и т. д.

Члены

$a, \ a^{\mathrm{I}}, \ a^{\mathrm{II}}, \ a^{\mathrm{III}}, \ a^{\mathrm{IV}}, \ a^{\mathrm{V}}$ и т. д.

Первые разности

$b, \ b^{\mathrm{I}}, \ b^{\mathrm{II}}, \ b^{\mathrm{III}}, \ b^{\mathrm{IV}}$ и т. д.

Вторые разности

$c, \ c^{\mathrm{I}}, \ c^{\mathrm{II}}, \ c^{\mathrm{III}}$ и т. д.

Третьи разности

$d, \ d^{\mathrm{I}}, \ d^{\mathrm{II}}$, и т. д.

Четвёртые разности

$e, \ e^{\mathrm{I}}$ и т. д.

Пятые разности

f и т. д.

Общий член выражается через первый член самого ряда и первые члены разностей b, c, d, e, f и т. д. следующим образом:

$$a + \frac{(x-1)}{1} b + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} c + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3} d +$$
$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} e + \text{ и т. д.},$$

пока не дойдём до постоянных разностей. Из этого ясно, что если постоянные разности не появляются никогда, то общий член представляется бесконечным выражением.

45. Так как разности выражаются через члены самого ряда, то, если подставить значения разностей, общий член окажется выраженным в той же форме, в какой мы представили его для рядов первого, второго и третьего порядков. Так, для ряда четвёртого порядка общий член будет

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{a^{IV}}{x-5}-\frac{4a^{III}}{x-4}+\frac{6a^{II}}{x-3}-\frac{4a^{I}}{x-2}+\frac{a}{x-1}\right),$$

откуда легко усмотреть закон, по которому составляются члены рядов последующих порядков. А из этого явствует, что общий член для любого порядка будет целой рациональной функцией x, в которой наибольшее измерение x совпадает с порядком, к которому относится ряд. Так, общий член рядов первого порядка есть функция первой степени, второго порядка — второй степени и т. д.

46. Разности же, как мы видели выше, получаются из самих членов ряда следующим образом:

$$\begin{aligned}
b&=a^{I}-a, & c&=a^{II}-2a^{I}+a, & d&=a^{III}-3a^{II}+3a^{I}-a,\\
b^{I}&=a^{II}-a^{I}, & c^{I}&=a^{III}-2a^{II}+a^{I}, & d^{I}&=a^{IV}-3a^{III}+3a^{II}-a^{I},\\
b^{II}&=a^{III}-a^{II}, & c^{II}&=a^{IV}-2a^{III}+a^{II}, & d^{II}&=a^{V}-3a^{IV}+3a^{III}-a^{II}.
\end{aligned}$$

Поэтому, так как в рядах первого порядка все значения $c=0$, будем иметь

$$a^{II}=2a^{I}-a,\quad a^{III}=2a^{II}-a^{I},\quad a^{IV}=2a^{III}-a^{II}\quad \text{и т. д.},$$

откуда ясно, что эти ряды вместе с тем являются реккурентными и их шкала отношения[1]) есть 2, —1. Далее, так как для рядов второго порядка значения $d=0$, то будем иметь

$$a^{III}=3a^{II}-3a^{I}+a,\quad a^{IV}=3a^{III}-3a^{II}+a^{I}\quad \text{и т. д.},$$

так что и эти ряды будут рекуррентными, и их шкала отношения будет 3, —3, +1. Подобным образом можно показать, что и все ряды этого класса, каков бы ни был их порядок, вместе с тем принадлежат к классу рекуррентных рядов, причём шкала отношения состоит из коэффициентов степени бинома, на единицу превышающей порядок, к которому относится ряд.

47. Так как для рядов первого порядка также и все значения d и e и всех последующих разностей равны нулю, то для них будем также иметь

$$\begin{aligned}
a^{III}&=3a^{II}-3a^{I}+a,\\
a^{IV}&=3a^{III}-3a^{II}+a^{I}\\
&\text{и т. п.},
\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
a^{IV}&=4a^{III}=6a^{II}+4a^{I}-a,\\
a^{V}&=4a^{IV}-6a^{III}+4a^{II}-a^{I}\\
&\text{и т. д.}
\end{aligned}$$

[1]) Шкалой отношения (scala relationis) математики XVIII в. называли, вслед за Моавром, совокупность коэффициентов в выражении n-го члена рекуррентного ряда через члены низшего порядка.

Следовательно, эти ряды оказываются принадлежащими к бесчисленным видам рекуррентных рядов и их шкалы отношения могут быть

$$3,\ -3,\ +1;\quad 4,\ -6,\ +4,-1;\quad 5,\ -10,\ +10,\ -5,\ +1 \quad \text{и т. д.}$$

Подобным же образом становится понятным, что какой угодно ряд этого изучаемого нами класса вместе с тем является рекуррентным рядом, и притом рекуррентным его можно сделать бесчисленными способами; действительно, шкала отношения будет

$$\frac{n}{1},\quad -\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\quad +\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\quad -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \quad \text{и т. д.,}$$

где n есть целое положительное число, большее чем число, которым указывается порядок. Следовательно, этот ряд возникает также из разложения дроби, знаменатель которой есть $(1-y)^n$ в согласии с тем, что было установлено о рекуррентных рядах в предыдущей книге[1]).

48. Мы видели, что у всех рядов этого класса, какого бы порядка они ни были, общий член есть целая рациональная функция x. Ясно, что и обратно, все ряды, общий член которых является такого рода функцией x, относятся к этому классу и в конце концов приводятся к постоянным разностям. При этом, если общий член будет функцией первой степени $ax+b$, то, поскольку возникший из него ряд будет рядом первого порядка, т. е. арифметическим, он будет иметь постоянные первые разности. Если же общий член будет функцией второй степени вида ax^2+bx+c, тогда ряд, который должен из неё возникнуть, если вместо x подставлять последовательно числа 1, 2, 3, 4, 5 и т. д., будет второго порядка и будет иметь постоянные вторые разности; подобным образом общий член третьей степени ax^3+bx^2+cx+d даст ряд третьего порядка и т. д.

49. Из общего члена можно не только найти все члены ряда, но и вывести ряды разностей как первых, так и последующих. Действительно, если первый член ряда вычесть из второго, получим первый член ряда разностей; второй получится, если второй член самого ряда вычесть из третьего; таким же образом член ряда разностей, индекс которого есть x, получим, если член самого ряда, индекс которого есть x, вычесть из следующего, индекс которого есть $x+1$. Поэтому если в общем члене положить $x+1$ вместо x и из этого члена вычесть общий член, то остаток даст общий член ряда разностей; таким образом если X будет общий член ряда, то его разность ΔX (которая находится по способу, изложенному в предыдущей главе, если положить $\omega=1$) будет общим членом ряда первых разностей. Подобным образом $\Delta^2 X$ будет общим членом ряда вторых разностей, $\Delta^3 X$ — третьих и т. д.

50. Если общий член X будет целой рациональной функцией, в которой n есть наибольший показатель степени x, то, как можно заключить из предыдущей главы, её разность ΔX будет функцией, степень которой на единицу ниже, т. е. функцией $n-1$ степени. Далее $\Delta^2 X$ будет функцией $n-2$ степени, $\Delta^3 X$ — функцией $n-3$ степени и т. д. Поэтому если X будет функцией первой степени $ax+b$, то его разность ΔX будет постоянна и равна a; так как она является общим членом ряда разностей, то мы видим, что ряд, общий член которого X есть функция первой степени, будет арифметическим, т. е. рядом первого порядка.

[1]) «Введение в анализ бесконечно малых», т. I, гл. 4, § 67.

Подобным образом, если общий член ряда будет функцией второй степени, то вследствие постоянства $\Delta^2 X$ ряд, происходящий отсюда, будет иметь постоянные вторые разности и, значит, будет рядом второго порядка; так будет и дальше: какой степени будет функция X, составляющая общий член, такого же порядка будет и ряд, порождённый ею.

51. Поэтому ряды степеней натуральных чисел приводят к постоянным разностям, что видно из следующей схемы:

Первые степени

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и т. д.

Первые разности

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 и т. д.

Вторые степени

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 и т. д.

Первые разности

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 и т. д.

Вторые разности

2, 2, 2. 2, 2, 2 и т. д.

Третьи степени

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343 и т. д.

Первые разности

7, 19, 37, 61, 91, 127 и т. д.

Вторые разности

12, 18, 24, 30, 36 и т. д.

Третьи разности

6, 6, 6, 6 и т. д.

Четвёртые степени

1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401 и т. д.

Первые разности

15, 65, 175, 369, 671, 1105 и т. д.

Вторые разности

50, 110 194, 302, 434 и т. д.

Третьи разности

60, 84, 108, 132 и т. д.

Четвёртые разности

24, 24, 24 и т. д.

Таким образом, то, что в предыдущей главе было сказано о нахождении разностей любого порядка, здесь послужит для нахождения общих членов каких угодно разностей, порождаемых рядами.

52. Если будет известен общий член какого-нибудь ряда, то с его помощью можно будет не только найти все его члены до бесконечности[1]), но и продолжить ряд в обратном направлении. Действительно, подставляя вместо x отрицательные числа, можно представить те его члены, указатели которых отрицательны. Так, если общий член будет $\frac{x^2+3x}{2}$, то, подставляя вместо x как положительные, так и отрицательные индексы, мы будем иметь следующий, продолженный в обе стороны ряд:

Индексы

и т. д. $-5, -4, \ -3, -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6$ и т. д.

Ряд

и т. д. $+5, \ +2, \ 0, -1, \ -1, \ 0, \ 2, \ 5, \ 9, \ 14, \ 20, \ 27$ и т. д.

Первые разности

и т. д. $-3, \ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7$ и т. д.

Вторые разности

и т. д. $1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 1$ и т. д.

Так как из разностей можно образовать общий член, то, исходя из разностей, можно каждый ряд продолжить в обратном направлении; при этом, если разности в конце концов становятся постоянными, то эти члены могут быть представлены в конечном виде, в противном же случае — через бесконечное выражение. Более того, из общего члена можно определить и те члены, индексы которых суть дроби; в этом и состоит *интерполяция* рядов.

53. После того, что было выше сказано об общем члене, мы перейдём к разысканию суммы или суммационного члена рядов какого-либо порядка. Если предложен какой-нибудь ряд, то *суммационный член* есть функция от x, которая равна сумме стольких членов ряда, сколько единиц содержит число x. Таким образом, суммационный член будет составлен так, что если положить $x=1$, получится первый член ряда, если же положить $x=2$, получится сумма первого и второго, если же положить $x=3$ — сумма первого, второго и третьего и т. д. Если из предложенного ряда образовать новый, первый член которого был бы равен первому члену предложенного ряда, второй — сумме двух членов, третий — сумме трёх и т. д., то этот новый ряд по отношению к предложенному называется *суммирующим*; общий член этого суммирующего ряда есть суммационный член предложенного ряда; таким образом, нахождение суммационного члена сводится к нахождению общего члена.

54. Итак, пусть предложенный ряд будет таков:

$$a, \ a^{\mathrm{I}}, \ a^{\mathrm{II}}, \ a^{\mathrm{III}}, \ a^{\mathrm{IV}}, \ a^{\mathrm{V}} \text{ и т. д.}$$

а его суммирующий ряд

$$A, \ A^{\mathrm{I}}, \ A^{\mathrm{II}}, \ A^{\mathrm{III}}, \ A^{\mathrm{IV}}, \ A^{\mathrm{V}} \text{ и т. д.}$$

[1]) Jn infinitum.

По свойству этого ряда, только что отмеченному, будем иметь

$$\begin{aligned} A &= a, \\ A^{\mathrm{I}} &= a + a^{\mathrm{I}}, \\ A^{\mathrm{II}} &= a + a^{\mathrm{I}} + a^{\mathrm{II}}, \\ A^{\mathrm{III}} &= a + a^{\mathrm{I}} + a^{\mathrm{II}} + a^{\mathrm{III}}, \\ A^{\mathrm{IV}} &= a + a^{\mathrm{I}} + a^{\mathrm{II}} + a^{\mathrm{III}} + a^{\mathrm{IV}}, \\ A^{\mathrm{V}} &= a + a^{\mathrm{I}} + a^{\mathrm{II}} + a^{\mathrm{III}} + a^{\mathrm{IV}} + a^{\mathrm{V}} \end{aligned}$$

и т. д.

Следовательно, разности суммирующего ряда будут

$$A^{\mathrm{I}} - A = a^{\mathrm{I}}, \quad A^{\mathrm{II}} - A^{\mathrm{I}} = a^{\mathrm{II}}, \quad A^{\mathrm{III}} - A^{\mathrm{II}} = a^{\mathrm{III}} \quad \text{и т. д.}$$

Значит, предложенный ряд, если отбросить первый его член, будет рядом первых разностей суммирующего ряда. Если же к первому ряду присоединить спереди член, равный нулю, так что будем иметь

$$0,\ A,\ A^{\mathrm{I}},\ A^{\mathrm{II}},\ A^{\mathrm{III}},\ A^{\mathrm{IV}},\ A^{\mathrm{V}} \text{ и т. д.,}$$

то для этого ряда рядом первых разностей будет сам предложенный ряд

$$a,\ a^{\mathrm{I}},\ a^{\mathrm{II}},\ a^{\mathrm{III}},\ a^{\mathrm{IV}},\ a^{\mathrm{V}} \text{ и т. д.}$$

55. По этой причине первые разности предложенного ряда будут вторыми разностями суммирующего, вторые разности предложенного ряда будут третьими разностями суммирующего, третьи — четвёртыми и т. д. Поэтому, если предложенный ряд в конце концов будет иметь постоянные разности, то и его суммирующий ряд сведётся к постоянным разностям и, следовательно будет рядом той же природы, только порядок его будет на единицу выше. Значит, суммационный член таких рядов всегда может быть представлен конечным выражением. Ибо общий член ряда

$$0,\ A,\ A^{\mathrm{I}},\ A^{\mathrm{II}},\ A^{\mathrm{III}},\ A^{\mathrm{IV}} \text{ и т. д.,}$$

т. е. член, соответствующий индексу x, представит сумму $x-1$ членов ряда a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV} и т. д., и если затем вместо x написать $x+1$, то получится сумма x членов, т. е. сам суммационный член.

56. Итак, пусть для предложенного ряда

$$a,\ a^{\mathrm{I}},\ a^{\mathrm{II}},\ a^{\mathrm{III}},\ a^{\mathrm{IV}},\ a^{\mathrm{V}},\ a^{\mathrm{VI}} \text{ и т. д.}$$

ряд первых разностей есть

$$b,\ b^{\mathrm{I}},\ b^{\mathrm{II}},\ b^{\mathrm{III}},\ b^{\mathrm{IV}},\ b^{\mathrm{V}},\ b^{\mathrm{VI}} \text{ и т. д.,}$$

ряд вторых разностей

$$c,\ c^{\mathrm{I}},\ c^{\mathrm{II}},\ c^{\mathrm{III}},\ c^{\mathrm{IV}},\ c^{\mathrm{V}},\ c^{\mathrm{VI}} \text{ и т. д.,}$$

ряд третьих разностей

$$d,\ d^{\mathrm{I}},\ d^{\mathrm{II}},\ d^{\mathrm{III}},\ d^{\mathrm{IV}},\ d^{\mathrm{V}},\ d^{\mathrm{VI}} \text{ и т. д.}$$

и т. д., пока не получатся постоянные разности. Образуем затем суммирующий ряд; если впереди в качестве его первого члена поставить 0, то этот ряд, вместе со своими последовательными разностями, будет иметь следующий вид:

Индексы

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и т. д.

Суммирующий ряд

$0, A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, A^{IV}, A^{V}$ и т. д.

Предложенный ряд

$a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}, a^{VI}$ и т. д.

Первые разности

$b, b^{I}, b^{II}, b^{III}, b^{IV}, b^{V}, b^{VI}$ и т. д.

Вторые разности

$c, c^{I}, c^{II}, c^{III}, c^{IV}, c^{V}, c^{VI}$ и т. д.

Третьи разности

$d, d^{I}, d^{II}, d^{III}, d^{IV}, d^{V}, d^{VI}$ и т. д.

Общий член суммирующего ряда, т. е. член, соответствующий индексу x, будет

$$0+(x-1)a+\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}b+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}c+\text{и т. д.}$$

Он представляет вместе с тем сумму $x-1$ членов предложенного ряда

$a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}$ и т. д.

57. Если же в этой сумме вместо $x-1$ написать x, то получится суммационный член, дающий сумму x членов

$$=xa+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}b+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}c+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d+\text{и т. д.}$$

Значит, если за буквами b, c, d, e и т. д. сохранить их прежнее значение, то будем иметь

для ряда

$a, a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V}$ и т. д.

общий член

$$a+(x-1)b+\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}c+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}d+$$
$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}e$$

и

суммационный член

$$xa+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}b+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}c+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d+\text{ и т. д.}$$

Итак, найдя изложенным способом общий член ряда какого-нибудь порядка, мы без труда найдём из него суммационный член, ибо он образуется из тех же самых разностей.

58. Этот способ нахождения суммационного члена по разностям ряда пригоден прежде всего для тех рядов, которые в конце концов приводят к постоянным разностям; действительно, в других случаях мы не находим конечного выражения. Но если мы внимательно взвесим то, что прежде было сказано об основном свойстве суммационного члена, то перед нами откроется другой способ. Это — способ нахождения суммационного члена непосредственно из общего члена; он имеет гораздо более широкое применение и в бесчисленных случаях приводит к конечным выражениям там, где первый способ даёт выражения бесконечные. Пусть предложен какой-нибудь ряд

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \text{ и т. д.},$$

общий член которого, т. е. член, отвечающий индексу x, равен X; суммационный член его пусть будет равен S. Так как он представляет сумму стольких членов от начала, сколько единиц содержит число x, то сумма $x-1$ членов будет равна $S-X$. Поэтому количество X будет разностью выражения $S-X$, ибо оно получается в остатке, если $S-X$ отнять от последующего количества S.

59. Итак, $X=\Delta(S-X)$ есть разность, взятая тем способом, который мы изложили в предшествующей главе, с тем только отличием, что здесь у нас постоянное количество ω равно 1. Поэтому, переходя снова к суммам, будем иметь $\sum X=S-X$, так что искомый суммационный член будет

$$S=\sum X+X+C.$$

Итак, нужно искать сумму функции X методом, изложенным прежде, и к ней прибавить общий член X; в совокупности получим суммирующий член. Поскольку же в суммы, которые нужно брать, входит постоянное количество C, которое следует прибавить или отнять, его нужно будет подобрать в соответствии с данным случаем. Но очевидно, что если положить $x=0$ (в этом случае число суммируемых членов равно нулю), то сумма также будет равна нулю; значит, это постоянное количество C должно быть определено так, чтобы, положив $x=0$, мы имели также $S=0$. Итак, подставив в уравнение $S=\sum X+X+C$ значения $S=0$ и $x=0$, мы найдём значение C.

60. Так как теперь всё дело сведено к вышепоказанному суммированию функций при $\omega=1$, то мы используем ранее выполненные суммирования; прежде всего для степеней x будем иметь (§ 27):

$$\sum x^0=\sum 1=x,$$

$$\sum x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x,$$

$$\sum x^2=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x,$$

$$\sum x^3=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2,$$

$$\sum x^4=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x,$$

$$\sum x^5=\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{12}x^4-\frac{1}{12}x^2,$$

$$\sum x^6=\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{42}x.$$

К этим формулам можно присоединить общую формулу для суммы степени x^n, данную в § 29; там нужно только всюду написать единицу вместо ω. С помощью этих формул можно легко находить суммационные члены всех тех рядов, общие члены которых суть целые рациональные функции x.

61. Обозначим через $S\cdot X$ суммационный член ряда, общий член которого есть X. Как мы видели,

$$S\cdot X=\sum X+X+C,$$

причём постоянное C берётся таким, чтобы суммационный член $S\cdot X$ исчезал при $x=0$. Выразим суммационные члены степенных рядов, т. е. рядов, общие члены которых имеют вид x^n. Итак, положим

$$S\cdot x^n=1+2^n+3^n+4^n+\ldots+x^n;$$

тогда будем иметь:

$$\begin{aligned}S\cdot x^n&=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\frac{1}{2}x^n+\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2\cdot 3}x^{n-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{n-3}+\\&+\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{2\cdot 3\ldots 6\cdot 7}x^{n-5}-\frac{3}{10}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{2\cdot 3\ldots 8\cdot 9}x^{n-7}+\\&+\frac{5}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-8)}{2\cdot 3\ldots 10\cdot 11}x^{n-9}-\frac{691}{210}\frac{n(n-1)\ldots(n-10)}{2\cdot 3\ldots 12\cdot 13}x^{n-11}+\\&+\frac{35}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-12)}{2\cdot 3\ldots 14\cdot 15}x^{n-13}-\frac{3\,617}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-14)}{2\cdot 3\ldots 16\cdot 17}x^{n-15}+\\&+\frac{43\,867}{42}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-16)}{2\cdot 3\ldots 18\cdot 19}x^{n-17}-\frac{1\,222\,277}{110}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-18)}{2\cdot 3\ldots 20\cdot 21}x^{n-19}+\\&+\frac{854\,513}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-20)}{2\cdot 3\ldots 22\cdot 23}x^{n-21}-\frac{1\,181\,820\,455}{546}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-22)}{2\cdot 3\ldots 24\cdot 25}x^{n-23}+\\&+\frac{76\,977\,927}{2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-24)}{2\cdot 3\ldots 26\cdot 27}x^{n-25}-\frac{23\,749\,461\,029}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-26)}{2\cdot 3\ldots 28\cdot 29}x^{n-27}.\end{aligned}$$

и т. д.

62. Итак, мы получим следующие суммы для различных значений n:

$$\begin{aligned}S\cdot x^0&=x,\\S\cdot x^1&=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\\S\cdot x^2&=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x,\\S\cdot x^3&=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2,\\S\cdot x^4&=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x,\\S\cdot x^5&=\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{12}x^4-\frac{1}{12}x^2,\\S\cdot x^6&=\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{42}x,\\S\cdot x^7&=\frac{1}{8}x^8+\frac{1}{2}x^7+\frac{7}{12}x^6-\frac{7}{24}x^4+\frac{1}{12}x^2,\\S\cdot x^8&=\frac{1}{9}x^9+\frac{1}{2}x^8+\frac{2}{3}x^7-\frac{7}{15}x^5+\frac{2}{9}x^3-\frac{1}{30}x.\end{aligned}$$

$$S\cdot x^9=\frac{1}{10}x^{10}+\frac{1}{2}x^9+\frac{3}{4}x^8-\frac{7}{10}x^6+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{20}x^2,$$

$$S\cdot x^{10}=\frac{1}{11}x^{11}+\frac{1}{2}x^{10}+\frac{5}{6}x^9-x^7+x^5-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{66}x,$$

$$S\cdot x^{11}=\frac{1}{12}x^{12}+\frac{1}{2}x^{11}+\frac{11}{12}x^{10}-\frac{11}{8}x^8+\frac{11}{6}x^6-\frac{11}{8}x^4+\frac{5}{12}x^2,$$

$$S\cdot x^{12}=\frac{1}{13}x^{13}+\frac{1}{2}x^{12}+x^{11}-\frac{11}{6}x^9+\frac{22}{7}x^7-\frac{33}{10}x^5+\frac{5}{3}x^3-\frac{691}{2\,730}x,$$

$$S\cdot x^{13}=\frac{1}{14}x^{14}+\frac{1}{2}x^{13}+\frac{13}{12}x^{12}-\frac{143}{60}x^{10}+\frac{143}{28}x^8-\frac{143}{20}x^6+\frac{65}{12}x^4-\frac{691}{420}x^2,$$

$$S\cdot x^{14}=\frac{1}{15}x^{15}+\frac{1}{2}x^{14}+\frac{7}{6}x^{13}-\frac{91}{30}x^{11}+\frac{143}{18}x^9-\frac{143}{10}x^7+\frac{91}{6}x^5-\frac{691}{90}x^3+\frac{7}{6}x,$$

$$S\cdot x^{15}=\frac{1}{16}x^{16}+\frac{1}{2}x^{15}+\frac{5}{4}x^{14}-\frac{91}{24}x^{12}+\frac{143}{12}x^{10}-\frac{429}{16}x^8+\frac{455}{12}x^6-\frac{691}{24}x^4+\frac{35}{4}x^2,$$

$$S\cdot x^{16}=\frac{1}{17}x^{17}+\frac{1}{2}x^{16}+\frac{4}{3}x^{15}-\frac{14}{3}x^{13}+\frac{52}{3}x^{11}-\frac{143}{3}x^9+\frac{260}{3}x^7-\frac{1\,382}{15}x^5+$$
$$+\frac{140}{3}x^3-\frac{3\,617}{510}x$$

и т. д.

Эти суммы, исходя из общей формулы, можно продолжить до суммы двадцать девятых степеней. Можно пойти и ещё дальше, если найти дальнейшие числовые коэффициенты общей формулы.

63. Впрочем, в этих формулах наблюдается некоторый закон, с помощью которого любая из них легко может быть найдена из предшествующей; исключение составляет лишь последний член, если в нём содержится первая степень x, ибо тогда в последующей сумме появляется один лишний член. Если оставить его в стороне, то из формулы

$$Sx^n=\alpha x^{n+1}+\beta x^n+\gamma x^{n-1}-\delta x^{n-3}+\varepsilon x^{n-5}-\zeta x^{n-7}+\eta x^{n-9}\ \text{и т. д.}$$

мы будем иметь

$$Sx^{n+1}=\frac{n+1}{n+2}\alpha x^{n+2}+\frac{n+1}{n+1}\beta x^{n+1}+\frac{n+1}{n}\gamma x^n-\frac{n+1}{n-2}\delta x^{n-2}+$$
$$+\frac{n+1}{n-4}\varepsilon x^{n-4}-\frac{n+1}{n-6}\zeta x^{n-6}+\frac{n+1}{n-8}\eta x^{n-8}\ \text{и т. д.}$$

Если n будет чётным числом, то мы получим верное выражение следующей суммы. Если же n будет нечётным числом, то в последующей сумме нужно будет, сверх того, определить последний член, который будет иметь вид $\pm\varphi x$. Но его можно найти непосредственно из следующих соображений. Если положить $x=1$, то должна получиться сумма одного только члена (т. е. первого члена, который равен единице). Поэтому положим во всех уже найденных членах $x=1$, а всю сумму положим равной 1. Тогда мы получим значение φ и, найдя его, сможем итти дальше. Этим приёмом можно было бы найти все вышеприведённые суммы. Например, так как

$$Sx^5=\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{12}x^4-\frac{1}{12}x^2,$$

то

$$Sx^6=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}x^7+\frac{6}{6}\cdot\frac{1}{2}x^5+\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{12}x^4-\frac{6}{3}\cdot\frac{1}{12}x^3\pm\varphi x$$

или

$$Sx^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \varphi x.$$

Положим теперь $x = 1$; получим

$$1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \varphi,$$

поэтому

$$\varphi = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42},$$

как мы ранее нашли, исходя из общей формулы.

64. С помощью этих суммационных формул можно легко находить суммационные члены всех рядов, общие члены которых суть целые рациональные функции x, и это делается гораздо быстрее, чем с помощью разностей по предыдущему методу.

Пример 1

Найти общий член ряда 2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126 и т. д., *общий член которого есть* $\frac{3x^2 + x}{2}$.

Так как общий член состоит из двух слагаемых, то будем искать для каждого из них суммационный член по вышеприведённым формулам; получим

$$S \cdot \frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x$$

и

$$S\frac{1}{2}x = \qquad \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x;$$

теперь будем иметь

$$S \cdot \frac{3x^2 + x}{2} = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x+1)^2.$$

Это есть искомый суммационный член. Так, если положить $x = 5$, то $\frac{5}{2} \cdot 6^2 = 90$ будет суммой пяти членов

$$2 + 7 + 15 + 26 + 40 = 90.$$

Пример 2

Найти суммационный член ряда 1, 27, 125, 343, 729, 1331 и т. д., *который содержит кубы нечётных чисел.*

Общий член этого ряда равен

$$(2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1.$$

Следовательно, суммационный член составится следующим образом:

$$+8 \cdot Sx^3 = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2$$

и

$$-12 \cdot S \cdot x^2 = \ldots - 4x^3 - 6x^2 - 2x$$

$$+6 \cdot S \cdot x = \ldots\ldots\ldots + 3x^2 + 3x$$

и, наконец,

$$-1 \cdot S \cdot x^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - x$$

Значит искомая сумма $= 2x^4 - x^2 = x^2(2x^2 - 1)$.

Так, если положить $x=6$, то $36 \cdot 71=2556$ будет суммой шести членов предположенного ряда

$$1+27+125+343+729+1331=2556.$$

65. Если же общий член будет произведением простых множителей, то общий член найдётся легче тем способом, который изложен выше в § 32 и следующих. Действительно, при $\omega=1$ мы имеем:

$$\sum (x+n)=\frac{1}{2}(x+n-1)(x+n),$$

$$\sum (x+n)(x+n+1)=\frac{1}{3}(x+n-1)(x+n)(x+n+1),$$

$$\sum (x+n)(x+n+1)(x+n+2)=\frac{1}{4}(x+n-1)(x+n)(x+n+1)(x+n+2)$$

и т. д.

Если к этим суммам мы прибавим общие члены, а также такое постоянное, которое при $x=0$ давало бы исчезающий суммационный член, то получим следующие суммационные формулы:

$$S \cdot (x+n)=\frac{1}{2}(x+n)(x+n+1)-\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$S \cdot (x+n)(x+n+1)=\frac{1}{3}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)-\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

$$S(x+n)(x+n+1)(x+n+2)=$$

$$=\frac{1}{4}(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)-\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

и т. д.

Таким образом, если $n=0$ или $n=-1$, то постоянное количество в этих суммах исчезает.

66. Итак, суммационный член ряда 1, 2, 3, 4, 5 и т. д., общий член которого есть x, будет равен $\frac{1}{2}x(x+1)$ и суммирующий ряд будет 1, 3, 6, 10, 15 и т. д. Суммационный член этого последнего ряда будет равен

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

и суммирующий ряд будет 1, 4, 10, 20, 35 и т. д. Последний в свою очередь имеет суммационный член, равный

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

который будет общим членом ряда 1, 5, 15, 35, 70 и т. д., а у этого ряда суммационный член будет равен

$$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Эти ряды должны быть хорошо замечены предпочтительно перед другими, так как повсюду они имеют очень широкое применение. Ведь из них получаются коэффициенты бинома, возведённого в степени, а насколько широко применяются эти коэффициенты, прекрасно известно каждому, кто хоть немного имел дело с этими вещами.

67. Отсюда легко найти и те суммационные члены, которые мы прежде получали из разностей. Там[1]) мы нашли выражение общего члена в следующем виде:

$$a+\frac{x-1}{1}b+\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}c+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}d+\text{ и т. д.}$$

Если мы найдём суммационный член для каждого слагаемого и все их сложим, то мы получим суммационный член, отвечающий этому общему члену. Так как

$$S\cdot 1=x,$$

$$S\cdot(x-1)=\frac{1}{2}x(x-1),$$

$$S\cdot(x-1)(x-2)=\frac{1}{3}x(x-1)(x-2),$$

$$S\cdot(x-1)(x-2)(x-3)=\frac{1}{4}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

и т. д.,

то искомый общий член будет

$$xa+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}b+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}c+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d+\text{ и т. д.}$$

Он совпадает с тем, который раньше (§ 57) был получен из разностей.

68. Далее этот способ определения общих членов можно применить и к дробям; действительно, так как выше (§ 34) мы нашли (мы полагаем $\omega=1$), что

$$\sum\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=-1\cdot\frac{1}{x+n},$$

то

$$S\cdot\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=-1\cdot\frac{1}{x+n+1}+\frac{1}{n+1}.$$

Если, как и прежде, мы к найденным суммам прибавим общий член, или, что то же, если в этих выражениях вместо x положим $x+1$, то мы будем иметь

$$S\cdot\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)(n+2)}$$

и

$$S\cdot\frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Составление этих формул легко продолжать сколь угодно дальше.

69. Так как

$$S\cdot\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x+n+1},$$

то будем также иметь

$$S\cdot\frac{1}{x+n}-S\cdot\frac{1}{x+n+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x+n+1}.$$

[1]) В § 56

Таким образом, хотя ни один из этих двух суммационных членов не может быть представлен сам по себе, однако их разность известна, и вследствие этого во многих случаях мы можем довольно быстро находить суммы рядов; это происходит тогда, когда общий член есть дробь, знаменатель которой разлагается на простые множители. Тогда вся дробь разлагается на простейшие дроби; после этого с помощью данной леммы тотчас же выяснится, может ли быть выражен общий член или нет.

Пример 1

Найти суммационный член ряда $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}$ и т. д., *общий член которого равен* $\frac{2}{x^2+x}$.

Этот общий член, будучи разложен, приводится к виду $\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}$. Значит, суммационный член равен

$$2S\cdot\frac{1}{x}-2S\cdot\frac{1}{x+1}.$$

По предыдущей лемме он будет равен

$$2-\frac{2}{x+1}=2\cdot\frac{x}{x+1}.$$

Так, если $x=4$, то будем иметь $\frac{8}{5}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$.

Пример 2

Пусть ищется суммационный член ряда $\frac{1}{5}, \frac{1}{21}, \frac{1}{45}, \frac{1}{77}, \frac{1}{117}$ и т. д. *общий член которого равен* $\frac{1}{4x^2+4x-3}$.

Так как знаменатель общего члена имеет множители $2x-1$ и $2x+3$, то он разлагается на такие части:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+\frac{3}{2}}.$$

Но

$$S\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}}=S\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+2-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$$

и

$$S\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=S\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}.$$

Следовательно,

$$S\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}}-S\frac{1}{x+\frac{3}{2}}=2+\frac{2}{3}-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}.$$

Восьмая часть этого выражения даст искомый суммационный член, именно

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{8x+4}-\frac{1}{8x+12}=\frac{x}{4x+2}+\frac{x}{3(4x+6)}=\frac{x(4x+5)}{3(2x+1)(2x+3)}.$$

70. Так как фигурные числа [1]), каковыми являются коэффициенты бинома, возведённого в степень, заслуживают быть отмеченными предпочтительно перед другими, то выразим суммы рядов, числители которых равны единице, знаменатели же суть фигурные числа. Это легко сделать на основании § 68. Итак, для ряда, у которого

общий член есть	суммационный член будет
$\dfrac{1\cdot 2}{x(x+1)}$,	$\dfrac{2}{1}-\dfrac{2}{x+1}$,
$\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{x(x+1)(x+2)}$,	$\dfrac{3}{2}-\dfrac{1\cdot 3}{(x+1)(x+2)}$,
$\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$,	$\dfrac{4}{3}-\dfrac{1\cdot 2\cdot 4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,
$\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$ и т. д.	$\dfrac{5}{4}-\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$ и т. д.

Отсюда сам собой выясняется закон, по которому следуют друг за другом эти выражения. Однако отсюда нельзя получить суммационного члена, отвечающего общему члену $\frac{1}{x}$, ибо он не может быть выражен конечной формулой.

71. Так как суммационный член даёт сумму стольких членов, сколько единиц содержится в индексе x, то, очевидно, мы получим суммы этих рядов, продолженных бесконечно, если индекс x сделаем бесконечным; в этом случае вторые члены только что найденных выражений исчезают вследствие обращения в бесконечность знаменателей.

Значит, эти бесконечные ряды имеют конечные суммы, каковыми будут:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\text{ и т. д.}=\frac{2}{1},$$
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\text{ и т. д.}=\frac{3}{2},$$
$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\text{ и т. д.}=\frac{4}{3},$$
$$1+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}+\frac{1}{126}+\text{ и т. д.}=\frac{5}{4},$$
$$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}+\frac{1}{84}+\frac{1}{210}+\text{ и т. д.}=\frac{6}{5}\text{ и т. д.}$$

Таким образом, положив $x=\infty$, можно найти суммы всех бесконечных рядов, для которых мы знаем суммационные члены, если только суммы конечны; а это имеет место, если в суммационном члене количество x имеет в числителе столько же измерений, сколько в знаменателе.

[1]) Фигурными числами называли целые числа вида $\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$ (треугольные числа), $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ (четырёхугольные числа), $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ (пятиугольные числа) и т. д.

ГЛАВА III

О БЕСКОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

72. Так как всякое количество, сколь бы ни было оно большим, может увеличиваться и дальше, и ничто не препятствует тому, чтобы к какому-либо данному количеству прибавлять другое количество того же рода, то всякое количество может быть без конца увеличиваемо; действительно, оно никогда не станет столь большим, чтобы к нему ничего больше нельзя было прибавить. Итак, не существует столь большой величины, чтобы нельзя было получить большую, и, значит, вне сомнения находится положение, что *всякое количество может быть увеличиваемо до бесконечности*[1]). Действительно, кто станет это отрицать, тому придётся утверждать, что существует предел, достигнув которого количество не могло бы его превзойти. Стало быть, он должен будет установить такую величину, к которой ничего больше нельзя прибавить. А так как это нелепо и противоречит понятию о величине, то необходимо согласиться с тем, что всякая величина непрестанно может быть увеличиваема без конца, т. е. до бесконечности.

73. Это становится ещё яснее при рассмотрении отдельных видов количеств. Так, нелегко найти кого-либо, кто стал бы утверждать, что ряд натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 и т. д. будет где-то иметь границу, так что дальше не сможет быть продолжен. Действительно, нет такого числа, к которому нельзя было бы прибавить ещё одну единицу и таким образом получить следующее, большее число. Значит, ряд натуральных чисел продолжается без конца и никогда не доходит до максимального числа, для которого не существовало бы никакого большего. Подобным образом прямая линия никогда не может быть продолжена настолько, чтобы дальше её больше нельзя было продолжать. Это убеждает нас в том, что как числа могут до бесконечности увеличиваться, так и линии могут до бесконечности быть продолжаемы. А так как числа и линии суть виды количеств, то вместе

---

[1]) В оригинале in infinitum, т. е. «в бесконечное». У Эйлера это выражение имеет всегда смысл «безгранично», «бесконечно», но перевести его одним из этих слов я не решился потому, что другие авторы вкладывали в этот термин иной смысл, и ниже Эйлер вступает с ними в полемику, которая потеряла бы смысл при таком переводе. Выражение «до бесконечности» казалось мне наиболее подходящим потому, что оно обычно употребляется именно в смысле «безгранично», но по своей грамматической конструкции может дать повод к представлению, что речь идёт о некотором пределе, *до которого* способно увеличиваться количество.

с тем становится понятным, что для всякого количества, сколь бы оно ни было велико, существует ещё большее, для последнего снова есть большее, и так, увеличивая всё дальше и дальше, можно итти без конца, т. е. до бесконечности.

74. Хотя это столь ясно, что всякий, кто хотел бы это отрицать, должен был бы сам себе противоречить, однако многие, пытавшиеся объяснять это учение о бесконечном, настолько затемнили его и облекли такими трудностями и даже противоречиями, что лишились всякой возможности выпутаться. Из того, что количество может увеличиваться до бесконечности[1]), некоторые заключили, что и в самом деле существует бесконечное количество, которое, по их описанию, уже не может принимать никакого приращения. Но тем самым, устанавливая такого рода количество, которое не может дальше увеличиваться, они ниспровергают идею количества. Кроме того, те, кто допускает бесконечное, сражаются сами с собой. Действительно, кладя предел приращению, на которое способно количество, они в то же время отрицают, что величина может увеличиваться без конца; следовательно, они отрицают также, что количество может увеличиваться до бесконечности, ибо оба эти выражения совпадают. Таким образом, устанавливая бесконечное количество, они в то же время его отрицают. Действительно. если количество не может увеличиваться без конца, т. е. до бесконечности, то, конечно, не может существовать никакого бесконечного количества.

75. Итак, уже из того, что всякое количество могло бы увеличиваться до бесконечности, казалось бы, следует, что никакого бесконечного количества не существует. Действительно, количество, подвергнутое непрерывному наращению, не станет бесконечным, если прежде не будет нарастать без конца; а что должно совершаться без конца, то нельзя считать как бы уже сделанным. Между тем не только позволительно такого рода количество, которое достигается без конца совершаемыми приращениями, обозначать некоторым символом и таким образом должным способом ввести в исчисление, как вскоре мы подробно покажем,—но и во вселенной существуют или по крайней мере могут мыслиться такие случаи, в которых, казалось бы. в действительности существует бесконечное число. Так, если вещество, как полагают многие философы, делимо до бесконечности, то число частей, из которых состоит некоторый данный кусок вещества, на самом деле будет бесконечным; действительно, если считать его конечным, то вещество заведомо не было бы делимым до бесконечности. Подобным образом, если бы вселенная была бесконечна, как склонны считать многие, то число тел, составляющих мир, бесспорно не могло бы быть конечным, и потому также было бы бесконечным.

76. Казалось бы, эти два положения противоречат друг другу. Однако, рассмотрев их внимательнее, можно освободить их от всяких неудобств. Действительно, кто полагает, что вещество делимо до бесконечности, тот отрицает, что при беспрестанном делении вещества можно когда-либо дойти до столь малых частей, что дальше они не могут делиться. Следовательно, вещество не будет иметь никаких неделимых далее частей, ибо отдельные частицы, к которым мы уже пришли в результате непрестанного деления, способны подразделяться дальше. Итак, кто говорит, что в этом случае число частей бесконечно, тот разумеет последние части, которые неделимы дальше, а так как до них никогда не дойти, к тому же их и нет, то он пытается исчислить те части. которых нет. Действительно,

[1]) См. предыдущую сноску.

если вещество может непрестанно без конца подразделяться, то оно вовсе лишено неделимых, т. е. простых, частей; таким образом, не остаётся ничего, что можно исчислять. Поэтому, кто считает вещество делимым до бесконечности, тот вместе с тем отрицает, что вещество составлено из простых частей.

77. Если же, говоря о частях какого-либо тела или вещества, мы разумели бы не последние или простые части, ибо их нет, а те, которые в действительности производятся делением, тогда, при допущении гипотезы о делимости вещества до бесконечности, не только можно будет любой, хотя бы малейший, кусок вещества рассечь на множество частей, но и невозможно будет назначить никакого числа, столь большого, чтобы нельзя было получить большего числа частей, высеченных из этого куска. Итак, число частей, правда не последних, а таких, которые сами ещё делимы дальше и которые составляют некоторое тело, будет больше всякого могущего быть назначенным числа. Точно так же, если вселенная бесконечна, то число тел, составляющих вселенную, равным образом будет больше всякого могущего быть заданным числа; а так как последнее не может быть конечным, то, следовательно, бесконечное число и число, большее всякого могущего быть заданным,—это синонимы.

78. Итак, кто таким образом смотрит на делимость вещества до бесконечности, тот не подвергает себя никаким неудобствам, которые обычно приписывают этому мнению, и не принуждён утверждать ничего такого, что было бы против здравого смысла. Те же, кто, напротив, отрицают, что вещество делимо до бесконечности, попадают в труднейшее положение, из которого они вообще никак не могут выбраться. Действительно, они принуждены утверждать, что всякое тело делится на определённое число таких частей, что, если дойти до них, никакое дальнейшее деление не может иметь места; эти последние частицы одни называют *«атомами»*, другие *«монадами»* и *«простыми сущностями»*. Почему же эти последние частицы не допускают дальше никакого деления? Тому могут быть две причины: одна, что они лишены всякой протяжённости, другая же та, что хотя они и протяжённы, но столь твёрды и так построены, что никакой силы нехватит для их рассечения. В защиту какого бы мнения эти люди ни высказывались, они равным образом запутываются в трудностях.

79. Действительно, пусть последние частицы не имеют никакой протяжённости, так что они вовсе лишены частей; при таком толковании сохраняется лучше всего идея простых сущностей. Но тогда никаким образом нельзя понять, как может тело состоять из конечного числа таких частиц. Положим, что кубический фут вещества состоит из тысячи таких простых сущностей и, значит, может быть в действительности разделён на тысячу частей; если они равны, то они будут кубическими дюймами; если же не равны, то одни будут меньше, а другие больше. Итак, один кубический дюйм был бы простой сущностью и таким образом возникло бы величайшее противоречие, если только они не пожелают сказать, что в кубическом дюйме имеется только одна простая сущность, остальное же пространство пустое. Но таким образом они уничтожили бы непрерывность тел, не говоря уже о том, что эти философы вообще изгоняют пустоту из вселенной. Если бы они возразили, что число простых сущностей, составляющих кубический фут вещества, в тысячу раз больше, они и этим ничего не выгадали бы; действительно, невозможно, чтобы то, что являлось бы следствием числа тысяча, не имело бы места равным образом при любом другом числе, как бы велико оно ни было. Эту трудность хорошо видел остроумнейший Лейбниц, первый изобретатель монад, когда он выставил утверждение, что материя делима абсолютно до бесконечности. Итак, до монад можно дойти не ранее, чем тело в действительности было бы разделено до бесконечности. Но этим самым он полностью отрицает существование простых сущностей, из которых могли бы состоять тела; ибо тот, кто отрицает, что тела состоят из простых сущностей, и тот, кто утверждает, что тела делимы до бесконечности, выражают одно и то же мнение.

80. Не в большей степени они остаются себе верны, если говорят, что последние частицы протяжённы, но не могут быть раздроблены на части вследствие величайшей твёрдости. Действительно, коль скоро они допускают протяжённость последних частей, они утверждают, что последние частицы состоят из частей; могут ли эти части быть друг от друга отделены или нет—это не имеет большого значения; притом они не могут указать никакой причины, которая могла бы породить такую твёрдость. И вот очень многие из тех, кто отрицают делимость вещества до бесконечности, повидимому, достаточно ясно ощутили это неудобство, ибо они предпочитают придерживаться первоначального представления о последних частицах; трудности же, связанные с ним, они могут ослабить лишь некоторыми, весьма легковесными метафизическими ухищрениями, направленными большей частью на то, что мы якобы не можем доверяться заключениям, сделанным согласно математическим началам; и они готовы принять, что размерности должны обладать простыми частями. Но прежде они должны были бы доказать, что эти их последние частицы, из определённого числа которых якобы состоит тело, совершенно непротяжённы.

81. Итак, не будучи в состоянии найти какой-нибудь выход из этого лабиринта и должным образом отразить возражения, они прибегают к ухищрениям, отвечая, что эти возражения основаны на чувствах и на воображении, между тем как в таком деле надлежит руководствоваться только чистым разумом, чувства же и основанные на них умозаключения очень часто обманывают нас. Чистый разум якобы признаёт возможность того, что тысячная часть кубического фута вещества лишена всякой протяжённости, что представляется воображению нелепым. Что чувства часто нас обманывают, —это, конечно, верно, но такое возражение меньше чем кому-нибудь другому может быть сделано математикам. Ведь именно математика в первую очередь защищает нас от обмана чувств и учит, что одно дело - как на самом деле устроены предметы, воспринимаемые чувствами, другое дело— какими они кажутся; эта наука даёт надёжнейшие правила; кто им следует—тому не опасен обман чувств. Итак, такого рода ответы совершенно недостаточны, и вместо того, чтобы защитить своё учение, метафизики делают его ещё более сомнительным.

82. Но вернёмся к поставленному нами вопросу. Если даже отрицать, что во вселенной действительно существует бесконечное число, то всё же в математических исследованиях часто встречаются вопросы, на которые нельзя ответить, если не допустить бесконечного числа. Так, пусть ищется сумма всех чисел, которые составляют ряд $1+2+3+4+5+$ и т. д.; так как эти числа, возрастая, следуют друг за другом без конца, то их сумма заведомо не может быть конечной; тем самым оказывается, что она бесконечна. Вообще, если количество таково, что оно больше всякого конечного количества, то оно не может не быть бесконечным. Для обозначения такого количества математики пользуются знаком ∞, которым обозначается количество, большее всякого конечного, т. е. могущего быть заданным, количества.

Так, поскольку параболу можно определить, сказав, что она есть бесконечно длинный эллипс, мы будем вправе утверждать, что ось параболы является бесконечной прямой линией.

83. Это учение о бесконечном станет более понятным, если мы разъясним, что такое бесконечно малое в математике. Нет никакого сомнения, что всякое количество может уменьшаться до тех пор, пока совсем не исчезнет и не обратится в ничто. Но количество бесконечно малое есть не что иное, как количество исчезающее, и потому оно точно равно нулю. С этим согласуется и такое определение бесконечно малых, согласно которому они меньше всякого могущего быть заданным количества. Действительно, если количество будет столь мало, что оно меньше всякого могущего быть заданным количества, то оно заведомо не может быть неравным нулю; ибо, если бы оно не было равно нулю, то можно было бы задать количество, равное ему, что противно предположению. Итак, если кто спросит, что такое бесконечно малое количество в математике, то мы ответим, что оно точно равно нулю. Следовательно, в этом понятии не кроется никаких тайн, какие обычно ему приписываются и которые для многих делают исчисление бесконечно малых весьма подозрительным. Впрочем, сомнения, если таковые остались бы, совершенно исчезнут в дальнейшем, когда мы изложим это исчисление.

84. Поскольку мы показали, что бесконечно малое количество есть точно нуль, то прежде всего следует ответить на вопрос, почему бесконечно малые количества мы не всегда обозначаем одним и тем же символом 0, но употребляем для их обозначения различные знаки. Действительно, так как все нулевые количества равны между собой, то кажется излишним обозначать их разными знаками. Но хотя верно, что два любых нуля равны между собой в том смысле, что их разность есть нуль, однако существует два способа сравнения: один — арифметический и другой — геометрический; из первого мы усматриваем разность, а из второго — частное, происшедшее от сравнения количеств. И вот арифметическое отношение между какими-либо двумя нулями есть отношение равенства, геометрическое же отношение не является отношением равенства. Легче всего это видно из геометрической пропорции $2:1=0:0$, в которой четвёртый член равен нулю, так же как и третий. Но по основному свойству пропорции, поскольку первый член вдвое больше чем второй, необходимо, чтобы и третий был вдвое больше чем четвёртый.

85. Это совершенно ясно из простой арифметики; ведь каждому известно, что нуль, помноженный на какое угодно число, даёт нуль, т. е. что $n \cdot 0=0$, и потому $n:1=0:0$. Отсюда ясно, что два нуля могут иметь друг к другу любое геометрическое отношение, хотя с арифметической точки зрения их отношение есть отношение равенства. Итак, поскольку между нулями может иметь место любое отношение, то для того, чтобы эти различные отношения выразить, нарочно пользуются различными символами, особенно тогда, когда требуется определить геометрическое отношение двух разных нулей. Но в исчислении бесконечно малых ничего больше и не делается, как находится отношение между различными бесконечно малыми. Поэтому, если мы не будем пользоваться для их обозначения различными знаками, то получится величайшая путаница, и никак нельзя будет из неё выбраться.

86. Пусть согласно принятому в анализе бесконечно малых способу обозначения dx обозначает бесконечно малое количество. Тогда как $dx=0$, так и $adx=0$, если a есть какое-нибудь конечное количество. Тем не менее геометрическое отношение $adx:dx$ будет конечным, именно отношением $a:1$. Поэтому эти два бесконечно малых dx и adx, хотя каждое из них и равно нулю, нельзя смешивать одно с другим, если ищется их отношение. Подобным же образом, если мы имеем различные бесконечно малые dx и dy, то, хотя каждое из них и равно нулю, однако их отношение нулю не равно. В разыскании отношения двух таких бесконечно малых и состоит вся сущность дифференциального исчисления. На первый взгляд может показаться, что польза такого сравнения совершенно ничтожна. Оказывается, однако, что она чрезвычайно велика, и с каждым днём это всё более и более обнаруживается.

87. Так как бесконечно малое есть точно нуль, то, очевидно, конечное количество не увеличится и не уменьшится, если к нему прибавить или от него отнять бесконечно малое. Пусть a есть конечное количество, а dx — бесконечно малое. Тогда $a+dx$ и $a-dx$ и вообще $a\pm ndx$ равно a. Рассматриваем ли мы соотношение между $a\pm ndx$ и a арифметически или геометрически, и в том и в другом случае мы получаем отношение равенства. Что арифметическое отношение есть отношение равенства — это совершенно очевидно; действительно, так как $ndx=0$, то будет

$$a\pm ndx-a=0,$$

а что геометрическое отношение есть отношение равенства, ясно из того, что

$$\frac{a\pm ndx}{a}=1.$$

Отсюда вытекает следующее, пользующееся очень широким признанием, правило: *бесконечно малые уничтожаются относительно конечных и могут быть отбрасываемы при наличии последних.* Поэтому само собой отпадает возражение, ставящее в упрёк анализу бесконечно малых пренебрежение геометрической строгостью, ибо то, что отбрасывается, есть не что иное, как подлинный нуль. И потому с полным правом можно утверждать, что и в этой высшей науке столь же тщательно соблюдается величайшая геометрическая строгость, какую мы находим в книгах древних авторов.

88. Так как бесконечно малое количество dx подлинно равно нулю, то и его квадрат dx^2, куб dx^3 и любая другая степень, имеющая положительный показатель, будет равна нулю и потому будет исчезать относительно конечных количеств. Но бесконечно малое количество dx^2 будет, кроме того, исчезать и относительно dx; действительно, $dx\pm dx^2$ к dx будет находиться в отношении равенства, производится ли арифметическое или геометрическое сравнение. В первом нет никакого сомнения. Сравнивая же геометрически, мы будем иметь

$$dx\pm dx^2:dx=\frac{dx\pm dx^2}{dx}=1\pm dx=1.$$

Равным образом будет $dx\pm dx^3=dx$ и вообще $dx\pm dx^{n+1}=dx$, если n есть число, большее нуля. Следовательно, геометрическое отношение будет $dx\pm dx^{n+1}:dx=1\pm dx^n$ и вследствие $dx^n=0$ оно будет отношением равенства. Если подобно тому, как это делается для степеней, мы назовём dx бесконечно малым первого порядка, dx^2 — бесконечно малым второго порядка, dx^3 — третьего порядка и т. д. то, очевидно, бесконечно малые высших порядков исчезают относительно бесконечно малых первого порядка.

89. Таким же образом можно показать, что бесконечно малые третьего и более высоких порядков исчезают относительно бесконечно малых второго порядка и вообще, что бесконечно малое какого-либо высшего порядка исчезает относительно бесконечно малого низшего порядка. Таким образом, если m будет числом, меньшим чем n, то будет

$$adx^m + bdx^n = adx^m,$$

ибо, по доказанному, dx^n исчезает относительно dx^m. Это имеет место и для дробных показателей; так, dx исчезает относительно $\sqrt{dx}$, т. е. относительно $dx^{\frac{1}{2}}$, и будет

$$a\sqrt{dx} + bdx = a\sqrt{dx}.$$

Если же показатель степени dx равен 0, то будет $dx^0 = 1$, несмотря на то что $dx = 0$. Поэтому степень dx^n, будучи равной единице при $n = 0$, из конечного количества сразу становится бесконечно малым, как только показатель n делается бо́льшим нуля.

Итак, существует бесчисленное множество бесконечно малых величин различных порядков; хотя все они равны нулю, однако их нужно непременно отличать друг от друга, если наше внимание обращено на то их взаимоотношение, которое выражается геометрическим отношением.

90. Установив понятие бесконечно малого количества, мы легче сможем выяснить природу бесконечных, т. е. бесконечно бо́льших количеств. Известно, что значение дроби $\frac{1}{z}$ оказывается тем бо́льшим, чем более уменьшается знаменатель z. Поэтому, если z становится количеством, меньшим любого могущего быть заданным количества, т. е. бесконечно малым, то значение дроби $\frac{1}{z}$ должно стать бо́льшим чем любое могущее быть заданным количество, т. е. бесконечно большим. Поэтому, если единица или какое-либо другое конечное количество делится на бесконечно малое, т. е. на нуль, то частное будет бесконечно большим, т. е. бесконечно большим количеством. Итак, поскольку знак ∞ обозначает бесконечно большое количество, то мы будем иметь равенство

$$\frac{a}{dx} = \infty,$$

справедливость которого вытекает также из того, что, обратив его, мы будем иметь

$$\frac{a}{\infty} = dx = 0.$$

Действительно, чем больше становится знаменатель z дроби $\frac{a}{z}$, тем меньше значение дроби, и если z становится бесконечно большим количеством, т. е. $z = \infty$, то значение дроби $\frac{a}{z}$ необходимо должно быть бесконечно малым.

91. Кто не согласился бы с этим выводом, тому придётся попасть в весьма затруднительное положение и притом нарушить достовернейшие основы анализа. Действительно, если кто-нибудь будет утверждать, что значение дроби $\frac{a}{0}$ конечно, будучи равным, скажем, b, то, умножив обе части этого равенства на 0, он получит $a = 0 \cdot b$, так что конечное количество b, помноженное на нуль, дало бы конечное количество a, что было бы нелепо. Тем более значение b этой дроби $\frac{a}{0}$ не могло бы равняться нулю, ибо нуль, помноженный на нуль, никак не может в произведении дать количество a. К такому же нелепому выводу придёт тот, кто станет отрицать, что $\frac{0}{\infty} = 0$; действительно, ему пришлось бы тогда сказать, что $\frac{a}{\infty}$ равно конечному количеству b; а так как из уравнения $\frac{a}{\infty} = b$ законно следовало бы равенство $\infty = \frac{a}{b}$, то значение дроби $\frac{a}{b}$, числитель и знаменатель которой суть конечные числа, было бы бесконечным, что, конечно, было бы нелепо. Нельзя также считать значения дробей $\frac{a}{0}$ и $\frac{a}{\infty}$ мнимыми, ибо значение дроби, числитель которой конечный, а знаменатель мнимый, не может быть ни бесконечно большим, ни бесконечно малым.

92. Итак, бесконечно большое количество, к которому нас привело это рассуждение и с которым мы только и имеем дело в анализе, может быть лучше всего определено, если сказать, что бесконечно большое количество есть частное, возникающее в результате деления конечного количества на бесконечно малое. В свою очередь бесконечно малое количество есть частное, возникающее в результате деления конечного количества на бесконечно большое. Поэтому имеет место такая геометрическая пропорция: бесконечно малое количество относится к конечному, как конечное к бесконечно большому; действительно, как бесконечное количество в бесконечное число раз больше конечного, так и конечное в бесконечное число раз больше, чем бесконечно малое. Значит, эти обороты речи, которые многим не нравятся, не заслуживают осуждения, ибо они опираются на достовернейшие основы. Из уравнения $\frac{a}{0} = \infty$ следует далее, что нуль, помноженный на бесконечное количество, может в произведении дать конечное количество, что могло бы показаться несообразным, если бы это не было выведено с полной точностью при помощи правильных рассуждений.

93. Подобно тому как между бесконечно малыми, если их сравнивать между собой с помощью геометрического отношения, обнаруживается огромное различие, так и между бесконечно большими количествами существует ещё большее отличие, ибо они различаются друг от друга не только при геометрическом, но и при арифметическом сравнении. Обозначим через A то бесконечное количество, которое происходит от деления конечного количества a на бесконечно малое dx, так что $\frac{a}{dx} = A$. Тогда будет

$$\frac{2a}{dx} = 2A \quad \text{и} \quad \frac{na}{dx} = nA,$$

так как nA есть также бесконечное количество, то, значит, между бесконечными количествами может иметь место какое угодно отношение. Если бесконечное количество умножить или разделить на конечное количество, то получим бесконечное количество. Следовательно, нельзя не согласиться с тем, что бесконечное количество может и дальше быть увеличиваемо. И легко видеть, что если геометрическое отношение двух бесконечных количеств не есть отношение равенства, то тем более не может быть отношением равенства их арифметическое отношение, ибо их разность тогда будет бесконечно велика.

94. Некоторым людям понятие бесконечного, которым мы пользуемся в математике, представляется подозрительным, и они поэтому полагают, что нужно отвергнуть анализ бесконечно малых. Однако без этого понятия мы не можем обойтись даже в элементарных отделах математики. В самом деле, в арифметике, где обычно излагается учение о логарифмах, логарифм нуля считается и отрицательным и бесконечно большим, и никому не приходило в голову заявить, что этот логарифм конечен, а тем более что он равен нулю. В геометрии и тригонометрии мы видим это ещё яснее: кто и когда отрицал, что тангенс или секанс прямого угла есть бесконечно большое количество? А так как произведение тангенса на котангенс равно квадрату радиуса[1]), а котангенс прямого угла равен нулю, то и в геометрии приходится согласиться с тем, что произведение нуля на бесконечное количество может быть конечным.

95. Так как $\frac{a}{dx}$ есть бесконечное количество A, то, очевидно, количество $\frac{A}{dx}$ будет количеством, в бесконечное число раз большим чем $\frac{a}{dx}$; действительно отношение $\frac{a}{dx} : \frac{A}{dx}$ равно отношению $a : A$, т. е. отношению конечного числа к бесконечно большому. Итак, между бесконечными количествами бывают такие соотношения, что одни могут быть в бесконечное число раз больше других. Так, $\frac{a}{dx^2}$ есть бесконечное количество, в бесконечно большое число раз большее чем $\frac{a}{dx}$; действительно, если положить $\frac{a}{dx} = A$, то будет $\frac{a}{dx^2} = \frac{A}{dx}$. Подобным образом бесконечное количество $\frac{a}{dx^3}$ будет в бесконечное число раз больше чем $\frac{a}{dx^2}$ и, значит, в бесконечное число раз бесконечно больше чем $\frac{a}{dx}$. Итак, существует бесконечно много ступеней бесконечных количеств, из которых каждая бесконечно больше предыдущей. При этом, если число m хоть сколько-нибудь больше чем n, то $\frac{a}{dx^m}$ будет бесконечным количеством, в бесконечное число раз большим чем бесконечное количество $\frac{a}{dx^n}$.

96. Между бесконечно малыми количествами, как все мы видели, могут не иметь места отношения равенства, тогда как все их арифметические отношения суть отношения равенства. Бесконечно же

[1]) Здесь, как и всюду, термин sin, cos, tg и т. д. обозначают линии синуса, косинуса, тангенса и т. д. в тригонометрическом круге, радиус которого вообще не принимается за единицу измерения.

большие количества могут иметь геометрическое отношение равенства, будучи неравными арифметически. Действительно, если a и b обозначают конечные количества, то бесконечные количества $\frac{a}{dx}+b$ и $\frac{a}{dx}$ имеют геометрическое отношение равенства; в самом деле, частное, проистекающее от деления первого из них на второе, равно $1+\frac{b\,dx}{a}=1$, ибо $dx=0$; между тем, если их сравнить арифметически, их отношение будет отношением неравенства, ибо их разность равна b. Подобным образом $\frac{a}{dx^2}+\frac{a}{dx}$ к $\frac{a}{dx^2}$ имеет геометрическое отношение равенства, ибо знаменатель отношения равен $1+dx=1$; разность же есть $\frac{a}{dx}$, так что она бесконечна. Итак, если рассматривать геометрические отношения, то бесконечно большие количества низшего порядка исчезают в сравнении с бесконечно большими высшего порядка.

97. Из того, что выше сказано о порядках бесконечных количеств, тотчас же ясно, что произведение бесконечно большого количества на бесконечно малое может давать не только конечное количество — что это может случиться, мы видели выше — но и бесконечно большое или бесконечно малое. Так, если бесконечное количество $\frac{a}{dx}$ помножить на бесконечно малое dx, оно даст конечное произведение, равное a; если же $\frac{a}{dx}$ помножить на бесконечно малое dx^2 или на dx^3, или на другое бесконечно малое высшего порядка, то произведение будет adx или adx^2, или adx^3 и т. д., т. е. бесконечно малым. Таким же образом убедимся, что если бесконечное количество $\frac{a}{dx^2}$ помножить на бесконечно малое dx, то произведение будет бесконечно большим; и вообще, если $\frac{a}{dx^n}$ помножить на bdx^m, то произведение $abdx^{m-n}$ будет бесконечно малым, если m превосходит n, конечным, если m равно n, и бесконечно большим, если m меньше чем n.

98. Как бесконечно малые, так и бесконечно большие количества часто встречаются в числовых рядах; так как они чередуются с конечными числами, то становится очень ясно, как совершается переход от конечных количеств к бесконечно большим и бесконечно малым. Рассмотрим сперва ряд натуральных чисел, продолженный также в обратном направлении: и т. д. -4, -3, -2, -1, $+0$, $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, и т. д. Итак, числа, непрестанно убывая, дают, наконец, нуль, т. е. бесконечно малое количество, а дальше становятся отрицательными. Отсюда ясно, что от убывающих положительных чисел к возрастающим отрицательным переход совершается через нуль. Если же мы рассмотрим их квадраты, то так как все они положительны

и т. д. $+16$, $+9$, $+4$, $+1$, $+0$, $+1$, $+4$, $+9$, $+16$ и т. д.,

то нуль будет служить также переходом от убывающих положительных чисел к возрастающим положительным. Если же переменить знаки, то нуль окажется также переходом от отрицательных убывающих чисел к отрицательным возрастающим.

99. Если рассмотреть ряд, общий член которого есть $\sqrt{x}$, т. е. который, продолженный и в обратном направлении, будет иметь вид

$$\text{и т. д. } +\sqrt{-3},\ +\sqrt{-2},\ +\sqrt{-1},\ +0,$$
$$+\sqrt{1},\ +\sqrt{2},\ +\sqrt{3},\ +\sqrt{4} \text{ и т. д.};$$

то станет ясно, что нуль можно рассматривать как границу, через которую совершается переход от действительных количеств к мнимым.

Если эти члены рассматривать как апликаты кривых, то будет очевидно, что если они сначала будут положительными и будут убывать до тех пор, пока не исчезнут, то, продолженные дальше, они станут или отрицательными, или снова положительными, или мнимыми. Точно так же, если апликаты сперва будут отрицательными, то они, после того как исчезнут, если продолжать дальше, станут либо положительными, либо отрицательными, либо мнимыми. Многочисленные примеры этих явлений даёт учение о кривых линиях, изложенное в предшествующей книге[1]).

100. Подобным образом в рядах могут встретиться также бесконечные члены. Так, в гармоническом ряде, общий член которого есть $\frac{1}{x}$, индексу $x=0$ будет отвечать бесконечно большой член $\frac{1}{0}$, и весь ряд имеет такой вид:

$$\text{и т. д. } -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{1},\ +\frac{1}{0},\ +\frac{1}{1},\ +\frac{1}{2},\ +\frac{1}{3} \text{ и т. д.}$$

Если итти справа налево, то члены возрастают, и уже $\frac{1}{0}$ является бесконечно большим; затем члены становятся отрицательными и убывают. Таким образом, бесконечно большое количество может рассматриваться как граница, пройдя которую положительные числа становятся отрицательными и обратно. Многим поэтому казалось, что отрицательные числа можно рассматривать как числа, бо́льшие чем бесконечное, вследствие того, что в рассмотренном ряде непрестанно возрастающие члены, после того как они достигнут бесконечности, становятся отрицательными. Однако если мы рассмотрим ряд, общий член которого есть $\frac{1}{x^2}$, то после перехода через бесконечность мы снова будем иметь положительные члены

$$\text{и т. д. } +\frac{1}{9},\ +\frac{1}{4},\ +\frac{1}{1},\ +\frac{1}{0},\ +\frac{1}{1},\ +\frac{1}{4},\ +\frac{1}{9} \text{ и т. д.}$$

о которых, однако, никто не скажет, что они больше бесконечности.

101. Часто также бесконечно большой член ряда образует границу, отделяющую действительные члены от мнимых, как, например, в ряде, общий член которого есть $\frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\text{и т. д. } +\frac{1}{\sqrt{-3}},\ +\frac{1}{\sqrt{-2}},\ +\frac{1}{\sqrt{-1}},\ +\frac{1}{0},\ +\frac{1}{\sqrt{1}},\ +\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и т. д.},$$

однако отсюда не следует, что мнимые количества больше бесконечности, так же как из вышеприведённого ряда

$$\text{и т. д. } +\sqrt{-3},\ +\sqrt{-2},\ +\sqrt{-1},\ +0,\ +\sqrt{1},\ +\sqrt{2},\ +\sqrt{3} \text{ и т. д.}$$

[1]) Во второй части «Введения в анализ» (русского перевода нет).

не следует, что мнимые количества меньше нуля. Далее, от действительных членов можно перейти к мнимым так, чтобы границей не были ни 0, ни ∞. Это имеет место, например, если общий член будет $1+\sqrt{x}$. Однако в этих случаях, так как вследствие иррациональности каждый член имеет двойной знак, граница между действительными и мнимыми членами всегда имеет два равных между собой значения. Но коль скоро члены, которые прежде были положительными, стновятся отрицательными, переход всегда совершается либо через бесконечно малое, либо через бесконечно большое. Всё это становится более ясным из закона непрерывности, который мы выявили в кривых линиях.

102. Из суммирования бесконечных рядов также можно заимствовать многое, служащее как для лучшего уяснения этого учения о бесконечном, так и для устранения ряда сомнений, которые обычно возникают в этом деле. Прежде всего, если ряд состоит из равных членов, как, например,

$$1+1+1+1+1+1 \quad \text{и т. д.},$$

и он продолжается без конца, т. е. до бесконечности, то нет, конечно, никакого сомнения, что сумма всех этих членов больше чем всякое могущее быть заданным число. Поэтому она необходимо должна быть бесконечной. Это подтверждается и происхождением такого ряда; он возникает из разложения дроби

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+ \quad \text{и т. д.}$$

при $x=1$; следовательно,

$$\frac{1}{1-1}=1+1+1+1+ \quad \text{и т. д.},$$

и поэтому сумма равна

$$\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\text{бесконечности}.$$

103. Хотя здесь не может родиться сомнения, поскольку одно и то же конечное число, взятое бесконечно много раз, должно дать бесконечность, однако самое происхождение из общего ряда

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+ \quad \text{и т. д.},$$

повидимому, связано с огромнейшими несообразностями. Действительно, если вместо x мы последовательно будем полагать числа $1, 2, 3, 4$ и т. д., то получим следующие ряды вместе с их суммами:

$$A \ldots 1+1+1+1+1+ \quad \text{и т. д.} \quad =\frac{1}{1-1}=\text{бесконечности},$$

$$B \ldots 1+2+4+8+16+ \quad \text{и т. д.} \quad =\frac{1}{1-2}=-1,$$

$$C \ldots 1+3+9+27+81+ \quad \text{и т. д.} \quad =\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}.$$

$$D \ldots 1+4+16+64+256+ \quad \text{и т. д.} =\frac{1}{1-4}=-\frac{1}{3} \quad \text{и т. д.}$$

Так как отдельные члены ряда B, кроме первого, больше чем члены ряда A, то сумма ряда B необходимо должна была бы быть много больше чем сумма ряда A. Однако в результате нашего вычисления сумма ряда A оказывается бесконечной, а сумма ряда B отрицательной, т. е. меньшей нуля, чего понять нельзя. Ещё меньше можно согласовать с привычными представлениями, что суммы ряда B и следующих рядов C, D и т. д. оказываются отрицательными, тогда как все их их члены положительны.

104. На этом основании многим представляется правдоподобным мнение, которое было упомянуто выше, а именно, что отрицательные числа можно считать как бы бо́льшими бесконечности, т. е. более чем бесконечными. А так как и при уменьшении чисел, переходя через нуль, мы приходим к отрицательным числам, то они устанавливают различие между отрицательными числами вида

$$-1,\ -2,\ -3, \text{ и т. д. и вида } \frac{+1}{-1},\ \frac{+2}{-1},\ \frac{+3}{-1}, \text{ и т. д.;}$$

говоря, что первые меньше нуля, а вторые больше бесконечности. Однако этот приём не устраняет трудности, создаваемой рядом

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+ \text{ и т. д.} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

из которого происходят следующие ряды:

$$A\ldots 1+2+3+4+5+ \text{ и т. д.} = \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \text{бесконечности},$$

$$B\ldots 1+4+12+32+80+ \text{ и т. д.} = \frac{1}{(1-2)^2} = 1.$$

Так как отдельные члены ряда B, исключая только первые два, больше чем члены ряда A, то на этой основе совершенно невозможно объяснить, каким образом сумма ряда A оказывается бесконечной, а сумма ряда B равной 1, т. е. одному первому члену.

105. Но так как, если мы пожелали бы отрицать, что

$$-1 = \frac{+1}{-1} \text{ и что } \frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b},$$

мы опрокинули бы прочнейшие основы анализа, то выше упомянутое объяснение и вообще не может быть допущено. Вместо этого мы должны признать, что неверны те суммы, которые были получены из общих формул. Действительно, так как эти ряды происходят из непрестанного деления, причём остаток делится всё дальше и дальше, но становится тем больше, чем дальше мы идём вперёд, то мы никогда не можем пренебречь им, и тем более нельзя отбросить последний остаток, т. е. тот, что остаётся после бесконечного числа деления, ибо он бесконечно велик. Так как в вышеприведённых рядах мы этого не соблюдали, ибо не находили никаких остатков, то нет ничего удивительного в том, что эти суммирования привели к нелепости. Этот ответ, так как он основан на рассмотрении самого происхождения рядов, и является вернейшим и устраняет всякие сомнения.

106. Для большей ясности рассмотрим разложение дроби $\frac{1}{1-x}$, содержащее сперва только конечное число членов. Итак, будем иметь:

$$\frac{1}{1-x} = 1+\frac{x}{1-x}, \quad \frac{1}{1-x} = 1+x+\frac{x^2}{1-x}, \quad \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x},$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\frac{x^4}{1-x} \text{ и т. д}$$

Если кто-нибудь пожелал бы сказать, что сумма конечного ряда $1+x+x^2+x^3$ есть $\frac{1}{1-x}$, то он отклонился бы от истины на количество $\frac{x^4}{1-x}$, а кто захотел бы утверждать, что сумма ряда

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{1000}$$

равна $\frac{1}{1-x}$, тот ошибся бы на количество $\frac{x^{1001}}{1-x}$; эта ошибка, если x есть число, большее единицы, была бы очень велика.

107. Из этого ясно, что тот, кто хотел бы утверждать, что сумма того же ряда, продолженного до бесконечности, т. е. сумма ряда

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{\infty},$$

равна $\frac{1}{1-x}$, тот отклонился бы от истины на величину $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$, которая, если $x>1$, будет бесконечно большой. Вместе с тем становится ясно, почему сумма бесконечного ряда $1+x+x^2+x^3+x^4+$ и т. д. действительно равна $\frac{1}{1-x}$, если x есть дробь, меньшая единицы. Ведь в этом случае погрешность $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$ становится бесконечно малой, т. е. нулём, и ею можно спокойно пренебречь; так, при $x=\frac{1}{2}$, получаем верный результат

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\text{и т. д.}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Точно так же этим способом мы получим истинную сумму и остальных рядов, если x будет дробью, меньшей чем единица.

108. Так же разрешается вопрос о суммах расходящихся рядов с чередующимися знаками $+$ и $-$, которые получаются из той же формулы, если подставлять в неё вместо x отрицательные числа. Действительно, так как, если не брать в расчёт последнего остатка, мы имеем

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\text{ и т. д.},$$

то будет

$$A\ldots 1-1+1-1+1-1+\text{ и т. д. }=\frac{1}{2},$$

$$B\ldots 1-2+4-8+16-32+\text{ и т. д.}=\frac{1}{3},$$

$$C\ldots 1-3+9-27+81-243+\text{ и т. д.}=\frac{1}{4}$$

и т. д.

Но ясно, что сумма ряда B не может равняться $^1/_3$, ибо чем больше членов мы берём, тем более суммы их удаляются от $^1/_3$. Между тем сумма каждого ряда всегда должна быть пределом, к которому мы тем ближе подходим, чем больше членов складываем.

109. Из этого некоторые заключили, что такие ряды — они называются расходящимися — вообще не имеют никакой определённой суммы, ибо, выполняя сложение членов, мы не имеем приближения к какому-либо пределу, который можно было бы принять за сумму бесконечного ряда. Так как эти суммы уже потому, что мы пренебрегаем последними остатками, являются, как было показано, ошибочными, то это мнение полностью согласуется с истиной. Однако против него можно с полным правом возразить, что упомянутые суммы, хотя они и оказываются совершенно несогласными с истиной, однако никогда не приводят к ошибкам, и что напротив, приняв их, мы получаем множество замечательных вещей, которых мы должны были бы лишиться, если бы пожелали совсем оказаться от этих суммирований. Но ведь эти суммы, если они были бы ложными, не могли бы всегда приводить нас к истинным результатам, тем более, что они уклонялись бы от истины не на малое, а на бесконечное количество, и, следовательно, они должны были бы бесконечно далеко уводить нас от истины. Так как этого, однако, не происходит, то нам остаётся развязать этот труднейший узел.

110. И вот я говорю, что вся трудность кроется в названии «сумма». Действительно, если под «суммой» ряда понимать, как это обычно делается, результат сложения всех его членов, то нет никакого сомнения, что суммы можно получать только для тех бесконечных рядов, которые являются сходящимися и дают результаты, тем более близкие к некоторому определённому значению, чем больше членов складывается. Расходящиеся же ряды, члены которых не убывают, могут обнаруживать чередование знаков $+$ и $-$, в противном же случае они вообще не будут иметь никаких определённых сумм, если только слово «сумма» понимается в смысле результата сложения всех членов. Но в тех случаях, о которых мы упоминали, из неверных сумм получаются верные результаты не потому, что конечное выражение, скажем $\frac{1}{1-x}$, есть сумма ряда $1+x+x^2+x^3+$ и т. д., а потому, что это выражение, если его разложить, даёт именно такой ряд. Таким образом здесь можно было бы вовсе отказаться от наименования «сумма».

111. Этих затруднений и кажущихся противоречий мы совершенно избежим, если мы припишем слову «сумма» значение, отличное от обычного. А именно, мы скажем, что *сумма* некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд. В этом смысле у бесконечного ряда $1+x+x^2+x^3+$ и т. д. истинная его сумма будет равна $\frac{1}{1-x}$, ибо этот ряд происходит из разложения этой дроби, какое бы число ни подставлять вместо x. При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова сумма совпадёт с обычным, а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого нового наименования не проистечёт никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защититься от всяческих обвинений.

ГЛАВА IV

О ПРИРОДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ЛЮБОГО ПОРЯДКА

112. В первой главе мы видели, что если переменная величина x принимает приращение, равное ω, то происходящее вследствие этого приращение какой-либо функции от x можно выразить в виде $P\omega+Q\omega^2+R\omega^3+$ и т. д., причём это выражение либо конечно, либо продолжается бесконечно. Следовательно, функция y, если в ней вместо x написать $x+\omega$, получит следующее значение:

$$y^I=y+P\omega+Q\omega^2+R\omega^3+S\omega^4+ \text{ и т. д.}$$

Если от него отнять первоначальное значение y, то остаток будет разностью функции y и выразится следующим образом:

$$\Delta y=P\omega+Q\omega^2+R\omega^3+S\omega^4+ \text{ и т. д.}$$

а так как последующее значение x есть $x^I=x+\omega$, то разность x, т. е. Δx, будет равна ω. Буквы же P, Q, R и т. д. обозначают функции x, зависящие от вида функции y; мы показали в первой главе, как они находятся.

113. Таким образом, каково бы ни было приращение ω переменного количества x, мы тотчас же сможем определить приращение, приобретаемое какой-либо функцией y от x, ибо для каждого выражения y мы можем определить функции P, Q, R и т. д. Но в настоящей главе и во всём анализе бесконечно малых это приращение ω, на которое, как мы принимаем, возрастает переменное количество x, мы будет считать бесконечно малым, т. е. исчезающим или равным нулю. Отсюда ясно, что и приращение, т. е. разность функции y, также будет бесконечно мало. А так как при этом предположении отдельные члены выражения

$$P\omega+Q\omega^2+R\omega^3+S\omega^4+ \text{ и т. д.}$$

исчезают в сравнении с последующими (§ 88 и следующие), то останется лишь один первый член $P\omega$, и, таким образом, в этом случае, когда ω есть бесконечно малое, разность количества y, т. е. Δy, равна $P\omega$.

114. Таким образом, анализ бесконечно малых, к изложению которого мы здесь приступаем, есть не что иное, как частный случай метода разностей, изложенного, в первой главе. Этот случай настудает тогда, когда разности, которые мы раньше считали конечными, полагаются бесконечно малыми. Для того чтобы случай, с которым имеет дело анализ бесконечно малых, отличать от метода исчисления разностей, целесообразно воспользоваться для обозначения бесконечно малых разностей как особыми наименованиями, так и особыми символами. Итак, назовём вместе с Лейбницем бесконечно малые разности *дифференциалами*, и так как в первой главе мы уже установили различные порядки разностей, то теперь нетрудно будет понять, что такое первые, вторые, третьи и т. д. дифференциалы какой-либо функции. Вместо буквы Δ, которой мы раньше обозначали разности, мы будем теперь пользоваться буквой d, так что dy будет обозначать первый дифференциал от y, d^2y — второй дифференциал, d^3y — третий и т. д.

115. Так как бесконечно малые разности, которые мы здесь рассматриваем, мы назвали дифференциалами, то и всё исчисление, с помощью которого находятся и применяются дифференциалы, принято называть *дифференциальным исчислением*. Английские математики, из которых Ньютон эту новую ветвь анализа начал совершенствовать первым, как Лейбниц первым из германских, пользуются как другими наименованиями, так и другими знаками. А именно, бесконечно малые разности, которые мы называем дифференциалами, они предпочитают именовать *флюксиями*; иногда они их называют также приращениями (incrementa). Эти названия лучше звучат в латинской речи; они также и по смыслу довольно хорошо выражают обозначаемые ими вещи. Действительно, переменная величина, непрестанно возрастая и принимая всё новые и новые значения, может рассматриваться как величина текущая, и потому название «флюксия», которое применялось Ньютоном первоначально для обозначения скорости возрастания, было по аналогии перенесено на бесконечно малые приращения, которые принимает количество, когда оно как бы течёт[1]).

116. Но, хотя нам не пристало бы спорить с англичанами об использовании наименований и об определениях, и перед лицом судьи мы оказались бы побеждёнными в том, что касается чистоты латинского языка, а также удобства выражений, однако нет никакого сомнения, что мы отняли бы у англичан пальму первенства в отношении обозначений. Действительно, дифференциалы, которые они называют флюксиями, у них принято обозначать точками, которые ставятся над буквами, так что $\dot{y}$ означает у них первую флюксию y, $\ddot{y}$ — вторую флюксию, $\dddot{y}$ — третью флюксию и т. д. Так как способ обозначения зависит от произвола, то эти обозначения нельзя отвергать, если число точек невелико, так что их легко можно сосчитать. Однако если нужно надписывать много точек, то этот способ создаёт величайшую путаницу и множество неудобств. Действительно, десятый дифференциал или десятую флюксию крайне неудобно обозначать таким образом: $\overset{\substack{\cdot\,\cdot\\ \cdot\,\cdot\\ \cdot\,\cdot\\ \cdot\,\cdot\\ \cdot\,\cdot}}{y}$, тогда как наш способ обозначения $d^{10}y$ легко поня-

[1]) Латинское слово fluxio обозначает «течение». Слово differentiale (дифференциал) придумано Лейбницем, который произвёл его от латинского слова differentia (разность). У Ньютона слово «флюксия» обозначает, собственно, не дифференциал функции, а то, что мы теперь называем производной функцией.

тен. Бывают же случаи, когда нужно выразить дифференциалы гораздо более высоких и даже неопределённых порядков; в этих случаях способ англичан становится вовсе непригодным.

117. Мы будем пользоваться как нашими наименованиями, так и нашими обозначениями, ибо первые в наших странах уже приняты в употреблении и многим знакомы, вторые же являются и более удобными. Однако здесь было небесполезно упомянуть о наименованиях и обозначениях англичан, чтобы те, кто раскроют их книги, могли понять и их. Ведь и англичане не настолько упорно привержены к своему обычаю, чтобы они вовсе отвергали и не считали для себя достойным читать то, что написано по нашему способу. Мы также читаем их труды с огромным интересом и извлекаем из них очень большую пользу; но часто мы замечаем, что и они не без пользы читают произведения наших авторов. Поэтому, хотя всегда очень желательно было бы установить единый способ выражения своих мыслей, однако не так уже трудно и нам и им приобрести навык, требующийся для понимания книг, написанных по чужому способу.

118. Так как буква ω до сих пор означала у нас приращение или разность, на которую мыслится возрастающим переменное количество x, то теперь ω будет дифференциалом x и потому согласно принятому способу обозначения будет $\omega = dx$; следовательно, dx будет бесконечно малой разностью, на которую мыслится возрастающим x. Подобным образом дифференциал y будет обозначаться dy, и если y есть какая-либо функция x, то дифференциал dy будет обозначать приращение, которое принимает функция y, когда x переходит в $x+dx$. Поэтому, если в функции y вместо x всюду подставить $x+dx$, а результирующее количество положить равным y^{I}, то будет $dy = y^{\mathrm{I}} - y$; и таким образом будет найден дифференциал всякой функции. Это ясно относительно первого дифференциала, т. е. дифференциала первого порядка; относительно остальных мы увидим это позднее.

119. Нужно хорошо уяснить, что буква d здесь не обозначает какого-либо количества, но употребляется только в качестве знака, выражающего слово «дифференциал», таким же образом, как в учении о логарифмах буква l употребляется как знак логарифма или в алгебре символ $\sqrt{}$ в качестве знака корня. Таким образом, dy не обозначает, как это принято вообще в анализе, произведения количества d на количество y, и нужно произносить: «дифференциал y». Подобным образом, если написано d^2y, то двойка не есть показатель степени и d^2 не обозначает степени количества d, но служит лишь для удобного и краткого обозначения наименования «второй дифференциал». Так как буква d в дифференциальном исчислении представляет не количество, а только знак, то в вычислениях, где встречается несколько постоянных количеств, во избежание недоразумений не следует пользоваться буквой d для обозначения одного из них. Таким же образом мы обычно избегаем вводить в вычисление букву l там, где в то же время встречаются логарифмы. Но было бы желательно выражать эти буквы d и l несколько видоизменёнными знаками, чтобы не смешивать их с буквами алфавита, которыми обычно обозначаются количества. Таким именно образом вместо буквы r, которой прежде обозначалось слово «корень» (radix), теперь принят искажённый знак $\sqrt{}$.

120. Мы видели, что первый дифференциал y, если y будет функцией x, должен иметь вид $P\omega$. А так как $\omega = dx$, то будет $dy = Pdx$. Значит, какой бы функцией x ни являлось количество y, его дифференциал выразится произведением некоторой функции x, которую мы обозначили через P, на дифференциал x, т. е. на dx. Итак, хотя дифференциалы dy и dx являются подлинно бесконечно малыми количествами и потому равны нулю, однако между собой они имеют конечное отношение, а именно, будет $dy : dx = P : 1$. Следовательно, если найдена функция P, то известно и отношение между дифференциалами dx и dy. И. хотя дифференциальное исчисление состоит в разыскании дифференциалов, в нём разыскивают не столько самые дифференциалы, которые равны нулю и потому находились бы без труда, сколько взаимное их геометрическое отношение.

121. Дифференциалы находятся гораздо легче, чем конечные разности. Действительно, для нахождения конечной разности Δy, на которую возрастает функция y, когда переменное количество x принимает приращение ω, недостаточно знать функцию P; сверх того, нужно определить функции Q, R, S и т. д., входящие в конечную разность, которую мы положили равной

$$P\omega + Q\omega^2 + R^3 + \text{ и т. д.}$$

Для нахождения же дифференциала y достаточно знать одну только функцию P. Поэтому, если известна конечная разность какой-либо функции x, то очень легко найти её дифференциал; но, обратно, зная дифференциал функции, ещё нельзя найти её конечную разность. Ниже, однако, будет показано, как, зная дифференциалы всех порядков, можно найти конечную разность какой-либо предложенной функции. Впрочем, из изложенного здесь ясно, что первый дифференциал $dy = Pdx$ представляет первый член конечной разности, ибо первый член равен $P\omega$.

122. Пусть приращение ω, которое получает переменное x, будет очень малым, так что в выражении $P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3$ и т. д. члены $Q\omega^2$ и $R\omega^3$, а тем более остальные становятся столь малыми, что в вычислении, где не требуется очень большая точность, ими можно пренебречь по сравнению с первым членом. Тогда, зная первый дифференциал $P\,dx$, мы знаем, правда приближённо, и первую разность, ибо и она будет равна $P\omega$; это даёт немалую пользу во многих случаях, в которых анализ применяется к практическим задачам. Вследствие этого некоторые полагают, что дифференциалы можно рассматривать как чрезвычайно малые приращения; они не согласны с тем, что дифференциалы точно равны нулю, а считают их лишь неопределённо малыми. Это представление даёт другим возможность обвинять анализ бесконечно малых в том, что с его помощью находятся не истинные количества, но лишь приближённые. Это возражение всегда сохраняло бы некоторую силу, если бы мы не считали бесконечно малые в точности равными нулю.

123. Те, кто отрицает, что бесконечно малые обращаются точно в нуль, желая опровергнуть это возражение, сравнивают дифференциалы с крохотными пылинками, взятыми по отношению ко всей земле. Никто, говорят они, не считался бы неверно измерившим количество земли, если бы он отклонился от истины на одну пылинку. Итак, они хотят, чтобы между конечным количеством и количеством бесконечно малым существовало бы то же отношение, что между всей землёй и мельчайшей пылинкой; если же кому-либо это различие показалось бы недостаточно большим, то они увеличили бы это отношение в тысячу раз или более, чтобы нельзя было представить себе более значительной малости. Всё же они вынуждены бывают признать, что высшая геометрическая строгость здесь немножко страдает. Поэтому, чтобы отразить вышеупомянутое возражение, они берут такие примеры, где решение можно найти как с помощью геометрии, так и с помощью анализа, и из совпадения решений заключают о доброкачественности второго метода. Этот довод, правда, не решает вопроса, ибо часто можно правильный ответ найти неправильными методами, но так как такая ошибка здесь не совершается, то он убеждает нас скорее в том, что количества, которыми пренебрегают в исчислении бесконечно малых, отнюдь не являются нечувствительно малыми, но в точности равны нулю, как мы и принимаем.

124. Перейдём к разъяснению природы дифференциалов второго порядка; они получаются из вторых разностей, о которых говорилось в первой главе, если положить бесконечно малое количество ω равным dx. Положим, что количество x возрастает равными приращениями, так что, если второе значение x^{I} будет равным $x+dx$, то следующие будут $a^{\mathrm{II}}=x+2x$, $x^{\mathrm{III}}=x+3dx$ и т. д. Тогда вследствие постоянства первых разностей dx вторые разности исчезают, и следовательно, также второй дифференциал x, т. е. d^2x, равен нулю. Поэтому также и дальнейшие дифференциалы будут равны нулю, т. е. $d^3x=0$, $d^4x=0$, $d^5x=0$ и т. д. Можно, правда, возразить, что эти дифференциалы, будучи бесконечно малыми, сами по себе равны нулю и что это не является отличительным свойством переменного количества x, приращения которого, по предположению, равны. Но на самом деле это исчезновение нужно истолковывать так, что дифференциалы d^2x, d^3x и т. д. не только сами по себе суть нули, но также и исчезают по отношению к тем степеням dx, с которыми их можно сравнивать в других случаях.

125. Чтобы лучше это понять, нужно вспомнить, что вторая разность какой-либо функции от x — пусть она будет y — представляется выражением $P\omega^2+Q\omega^3+R\omega^4+$ и т. д. Если же ω бесконечно мало, то члены $Q\omega^3$, $R\omega^4$ и т. д. исчезают по сравнению с первым членом $P\omega^2$, так что если положить $\omega=dx$, второй дифференциал y будет равен Pdx^2, где dx^2 обозначает квадрат дифференциала dx. Поэтому второй дифференциал y, т. е. d^2y, сам по себе равен нулю, однако так как $d^2y=Pdx^2$, то он будет иметь к dx^2 конечное отношение $P:1$. Но если $y=x$, то $P=0$, $Q=0$, $R=0$ и т. д., так что в этом случае второй дифференциал x исчезает также и относительно dx^2 и высших степеней dx. В этом смысле и нужно понимать то, что мы сказали выше, т. е. что $d^2x=0$, $d^3x=0$ и т. д.

126. Так как вторая разность есть не что иное, как разность первой разности, то второй дифференциал, или, как он часто именуется, дифференцио-дифференциал, есть не что иное, как дифференциал первого дифференциала. Далее, так как постоянное количество не испытывает ни приращения, ни ущерба и не обладает никакими разностями, ибо последние присущи одним переменным количествам, то мы в том же смысле можем сказать, что все дифференциалы любого порядка от постоянных количеств равны нулю, т. е. они исчезают по сравнению со всеми степенями dx. Так как дифференциал от dx, т. е. d^2x, равен нулю, то дифференциал dx можно рассматривать как постоянное количество, и всякий раз, как говорят, что дифференциал какого-либо количества равен нулю, нужно считать это количество принимающим равные приращения. А здесь мы принимаем x за то количество, дифференциал которого является постоянным, и, исходя из этого, оцениваем для различных функций изменчивость, которой подвержены их дифференциалы.

127. Положим, что первый дифференциал y равен pdx. Для нахождения его второго дифференциала нужно снова искать дифференциал количества pdx. Но так как dx есть постоянное количество и не изменяется, когда вместо x мы пишем $x+dx$, то необходимо только найти дифференциал конечного количества p; итак, пусть $dp=q\,dx$, ибо мы видели, что дифференциалы всех функций x представляются в этом виде. Как мы показали это для конечных разностей, дифференциал np, если n есть постоянное количество, равен $nq\,dx$. Положив dx вместо n, найдём, что дифференциал количества $p\,dx$ будет равен $q\,dx^2$. Поэтому, если $dy=p\,dx$ и $dp=q\,dx$, то второй дифференциал d^2y будет равен qdx^2, и, таким образом, оказывается, что, как мы уже отмечали выше, второй дифференциал y имеет конечное отношение к dx^2.

128. В первой главе мы отметили, что вторые и следующие разности можно определить лишь в том случае, если принять, что значения x следуют друг за другом по некоторому определённому закону; так как этот закон является произвольным, то мы берём эти значения в арифметической прогрессии, так как она наиболее проста и удобна. По той же причине и о вторых дифференциалах ничего определённого нельзя сказать, если первые дифференциалы, которыми непрестанно нарастает переменное количество x, не следуют друг за другом по некоторому данному закону. Поэтому мы и полагаем все первые дифференциалы x, т. е. dx, dx^{I}, dx^{II} и т. д., равными между собой. Отсюда мы получаем вторые дифференциалы

$$d^2x=dx^{\mathrm{I}}-dx=0,\quad d^2x^{\mathrm{I}}=dx^{\mathrm{II}}-dx^{\mathrm{I}}=0 \quad \text{и т. д.}$$

Итак, вторые и высшие дифференциалы зависят от порядка, которому взаимно подчинены дифференциалы переменного количества x, а этот порядок является произвольным. Первые же дифференциалы этим условием не стеснены. Поэтому между дифференциалами первого порядка и дифференциалами последующих порядков в отношении их разыскания существует огромное различие.

129. Если последовательные значения x, x^{I}, x^{II}, x^{III}, x^{IV} и т. д. количества x берутся не в арифметической прогрессии, а подчинены в их следовании друг за другом другому какому-либо закону, тогда первые их дифференциалы dx, dx^{I}, dx^{II} и т. д. не будут равны между собой, и потому d^2x не будет равен нулю. Поэтому вторые дифференциалы каких-либо функций от x примут другой вид. Действительно, если первый дифференциал такой функции будет $p\,dx$, то для нахождения её второго дифференциала недостаточно помножить дифференциал количества p на dx, но, кроме того, нужно знать дифференциал количества dx, т. е. d^2x. Так как второй дифференциал получается вычитанием pdx из следующего значения этого количества, которое получается, если положить $x+dx$ вместо x и $dx+d^2x$ вместо dx, то положим, что следующее значение p есть $p+q\,dx$ и тогда следующее значение $p\,dx$ будет

$$(p+q\,dx)\,(dx+d^2x)=p\,dx+pd^2x+q\,dx^2+qdxd^2x.$$

Отнимаем от него $p\,dx$, и второй дифференциал будет

$$d^2y = pd^2x + q\,dx^2 + q\,dx\,d^2x = pd^2x + q\,dx^2,$$

ибо $qdxd^2x$ исчезает по сравнению с pd^2x.

130. Хотя простейшим и удобнейшим отношением, которое можно приписать приращениям x, есть отношение равенства, однако часто случается, что принимаются равными приращения не того переменного количества x, функцией которого является y, а некоторого другого количества, относительно которого x является некоторой функцией. Более того, часто полагаются равными первые дифференциалы такого другого количества, для которого остаётся неизвестным соотношение x. В первом случае вторые и следующие дифференциалы x будут зависеть от отношения, в котором x находится к тому количеству, которое принимается за равномерно растущее, и их нужно находить тем же способом, который мы здесь дали для определения вторых дифференциалов y по дифференциалам x. Во втором же случае вторые и следующие дифференциалы x должны будут рассматриваться как неизвестные, и вместо них нужно будет употреблять знаки d^2x, d^3x, d^4x и т. д.

131. Каким образом в этих случаях нужно выполнять дифференцирование, мы ниже покажем подробнее. Здесь же мы будем попрежнему считать количество x равномерно растущим, так что все первые дифференциалы dx, dx^{I}, d^{II} и т. д. мы должны считать равными между собой и, следовательно, вторые и следующие дифференциалы равными нулю. Чтобы выразить это условие, говорят, что дифференциал x, т. е. dx, принимается за постоянное. Пусть теперь y есть какая-либо функция от x; так как она выражается через x и через постоянные, то её первый, второй, третий, четвёртый и т. д. дифференциалы, обозначаемые знаками dy, d^2y, d^3y, d^4y и т. д., могут быть выражены через x и dx. А именно, если в y вместо x написать $x+dx$ и из этого значения вычесть предыдущее, то остаток будет первым дифференциалом; если в нём вместо x положить $x+dx$, получим dy^{I} и будет $d^2y = dy^{\mathrm{I}} - dy$. Подобным образом, если положить $x+dx$ вместо x, получим из d^2y d^2y^{I} и $d^2y^{\mathrm{I}} - d^2y$ даст d^3y и т. д. В таких действиях дифференциал всегда рассматривается как постоянное количество, которое уже не имеет никакого дифференциала.

132. Из соотношения, которое определяет функцию y через x, как с помощью метода конечных разностей, так гораздо легче и с помощью методов, которые будут даны ниже, можно определить значение функции p, которая, будучи помножена на dx, даст первый дифференциал dy. Положим $dy = p\,dx$; тогда дифференциал количества pdx даст второй дифференциал d^2y. Поэтому, если будет $dp = q\,dx$, то вследствие постоянства dx получится $d^2y = q\,dx^2$, как было ранее показано. Поступая так же дальше, так как дифференциал второго дифференциала даёт третий дифференциал, положим, что $dq = r\,dx$; тогда будет $d^3y = rdx^3$; подобным образом, если будем искать дифференциал этой функции r и найдём, что $dr = s\,dx$, то получим четвёртый дифференциал $d^4y = s\,dx^4$ и т. д., и если мы будем уметь находить первый дифференциал любой функции, то сможем определить и дифференциал любого порядка.

133. Чтобы яснее представить себе вид этих различных дифференциалов и в то же время способ их нахождения, мы составим следующую таблицу.

Если y будет какая-либо функция x, то

будет	если положить
$dy = p\,dx$,	$dp = q\,dx$,
$d^2y = q\,dx^2$,	$dq = r\,dx$,
$d^3y = r\,dx^3$,	$dr = s\,dx$,
$d^4y = s\,dx^4$,	$ds = t\,dx$
$d^5y = t\,dx^5$,	

и т. д.

Так как функция p узнаётся из функции y дифференцированием, и подобным образом из p находится q и далее r, а из него далее s и т. д., то легко найти дифференциалы любого порядка от y, когда дифференциал dx принимается за постоянное количество.

134. Так как p, q, r, s, t и т. д. суть конечные количества, конечно, являющиеся функциями y, то первый дифференциал y будет иметь конечное отношение к первому дифференциалу x, а именно отношение p к 1. Поэтому дифференциалы dx и dy называются однородными. Далее, так как d^2y к dx^2 имеет конечное отношение, именно отношение q к 1, то d^2y и dx^2 будут однородны; таким же образом будут однородны d^3y и dx^3 и точно так же d^4y и dx^4 и т. д. Таким образом, так же как первые дифференциалы однородны между собой, т. е. имеют друг к другу конечное отношение, так будут однородны вторые дифференциалы с квадратами первых, третьи дифференциалы с кубами первых и т. д. И вообще дифференциал y порядка n, который представляется выражением d^ny, будет однороден с той степенью дифференциала dx, показатель которой есть n.

135. Таким образом, как по сравнению с dx исчезают все те степени его, показатели которых больше единицы, так по сравнению с dy исчезают также dx^2, dx^3, dx^4 и т. д. и дифференциалы высших порядков d^2y, d^3y, d^4y и т. д., которые к этим степеням имеют конечное отношение. Таким же образом по сравнению с d^2y, так как он однороден с dx^2, исчезают все степени dx, более высокие, чем вторая; исчезают, следовательно, также dx^3, dx^4 и т. д. По сравнению с d^3y исчезают dx^4, d^4y, dx^5, d^5y и т. д. Таким образом, если будут предложены какие-нибудь выражения, содержащие эти дифференциалы, можно легко узнать, будут ли они однородны или нет. При этом нужно будет обращать внимание только на дифференциалы, конечные же количества можно опускать, так как они не нарушают однородности, а вместо дифференциалов второго и более высоких порядков нужно написать однородные с ними степени dx. Если мы получим и там и здесь то же число измерений, то выражения будут однородны.

136. Так, выражения Pd^2y^2 и $Qdy\,d^3y$ окажутся однородными. Ибо d^2y^2 обозначает квадрат количества d^2y, а так как d^2y однороден с dx^2, то d^2y^2 однородно с dx^4. Далее, так как dy однороден с dx и d^3y с dx^3, то произведение $dy\,d^3y$ однородно с dx^4. Из этого следует, что выражения Pd^2y^2 и $Qdy\,d^3y$ однородны между собой, так что они имеют конечное отношение друг к другу. Таким же образом мы придём к заключению, что выражения

$$\frac{Pd^3y^2}{dx\,d^2y} \quad \text{и} \quad \frac{Qd^5y}{dy^2}$$

однородны; действительно, подставив вместо dy, d^2y, d^3y и d^5y однородные с ними степени dx, т. е. dx, dx^2, dx^3 и dx^5, мы получим выражения Pdx^3 и Qdx^3, которые будут однородны между собой.

137. Если же после выполнения такого приведения предложенные выражения не будут содержать равных степеней dx, то они не будут однородны и потому не будут иметь конечного отношения друг к другу. Одно из них будет либо бесконечно больше, либо бесконечно меньше другого, так что одно будет исчезать относительно другого. Так, $\frac{Pd^3y}{dx^2}$ к $\frac{Qd^2y^2}{dy}$ будет иметь бесконечно большое отношение; действительно, первое приводится к Pdx, а второе к Qdx^3, так что второе исчезает по сравнению с первым. Поэтому, если в некотором вычислении встретится сумма двух таких выражений

$$\frac{Pd^3y}{dx^2}+\frac{Qd^2y^2}{dy},$$

то второй член по сравнению с первым можно безопасно отбросить и удержать в вычислении только первый член $\frac{Pd^3y}{dx^2}$; действительно, существует отношение совершенного равенства между выражениями

$$\frac{Pd^3y}{dx^2}+\frac{Qd^2y^2}{dy} \quad \text{и} \quad \frac{Pd^3y}{dx^2},$$

ибо знаменатель отношения равен

$$1+\frac{Qdx^2d^2y^2}{Pdyd^2y}=1, \text{ ибо } \frac{Qdx^2d^2y^2}{Pdyd^3y}=0.$$

С помощью этого приёма дифференциальные выражения можно иногда удивительно упростить.

138. В дифференциальном исчислении даются правила, с помощью которых можно найти первый дифференциал любого предложенного количества, а так как вторые дифференциалы находятся из первых, третьи теми же действиями находятся из вторых и т. д. последующие из предыдущих, то дифференциальное исчисление содержит метод нахождения всех дифференциалов любого порядка. От слова «дифференциал», которое обозначает бесконечно малую разность, производятся другие наименования, принятые в употреблении. Так, имеется глагол «дифференцировать», который означает «находить дифференциал», говорят, что количество «дифференцируется», когда находится его дифференциал. Слово же «дифференцирование» означает действие, с помощью которого находятся дифференциалы. Поэтому дифференциальное исчисление называется также методом дифференцирования, ибо оно содержит способ находить дифференциалы.

139. Как в дифференциальном исчислении для каждого количества находится его дифференциал, так, в свою очередь, имеется вид исчисления для нахождения того количества, для которого предложен дифференциал. Оно называется *интегральным исчислением*. Причина такого наименования состоит в том, что если дифференциал можно рассматривать как бесконечно малую часть количества, на которую оно возрастает, то само это количество по отношению к своей части может рассматриваться как целое (integrum), почему оно и называется его интегралом. Так, если dy есть дифференциал количества y, то, в свою очередь, y будет интегралом количества dy, и так как d^2y есть дифференциал от dy, то dy будет интегралом от d^2y. Подобным образом

d^2y будет интегралом от d^3y и d^3y интегралом от d^4y и т. д. Таким образом, каждое дифференцирование, если его рассматривать обращённо, даст пример интегрирования.

140. Происхождение и природа интегралов, так же как дифференциалов, лучше всего могут быть уяснены на основе учения о конечных разностях. Действительно, после того как было показано, каким образом нужно находить разность каждого количества, мы, идя в обратном направлении, показали также, каким образом, если будет предложена разность, можно найти то количество, разностью которого она является; это количество по отношению к его разности мы назвали её суммой. И как при переходе к бесконечно малым разности обращаются в дифференциалы, так количества, названные там суммами, получают теперь наименование интегралов, и потому нередко и интегралы называют суммами. Англичане, которые называют дифференциалы флюксиями, называют интегралы текущими количествами (quantitates fluentes), и согласно их словоупотреблению найти флюенту данной флюксии означает те же самое, что мы выражаем словами: найти интеграл данного дифференциала.

141. Как дифференциалы мы обозначаем символом d, так для обозначения интегралов мы пользуемся знаком $\int$, который, будучи поставлен перед дифференциальным количеством, обозначает то количество, дифференциалом которого является первое количество. Так, если дифференциал y будет $p\,dx$, т. е. $dy = p\,dx$, то y будет интегралом количества $p\,dx$, что записывается так: $y = \int p\,dx$, ибо $y = \int dy$. Итак, интеграл количества $p\,dx$, который обозначается через $\int p\,dx$, есть количество, дифференциал которого равен $p\,dx$. Подобным образом, если $d^2y = q\,dx^2$, то, так как $dp = q\,dx$, интеграл количества d^2y, т. е. dy, равен $p\,dx$ и вследствие $p = \int q\,dx$ будет $dy = dx \int q\,dx$ и поэтому $y = \int dx \int q\,dx$. Если, далее, $dq = r\,dx$, то будет $q = \int r\,dx$ и $dp = dx \int r\,dx$; таким образом, если снова употребить знак $\int$, станет $p = \int dx \int r\,dx$, далее, $dy = dx \int dx \int r\,dx$ и $y = \int dx \int dx \int r\,dx$.

142. Так как дифференциал dy есть бесконечное малое количество, а его интеграл y — количество конечное и таким же образом второй дифференциал d^2y бесконечно меньше, чем его интеграл dy, то очевидно, что дифференциалы исчезают по сравнению со своими интегралами. Чтобы лучше оттенить это обстоятельство, бесконечно малые количества подразделяют на порядки. Бесконечно малыми первого порядка называют те, к числу которых относятся первые дифференциалы dx и dy [1]); бесконечно малые второго порядка включают дифференциалы второго порядка; последние же однородны с dx^2; подобным образом бесконечно малые, однородные с dx^3, называются бесконечно малыми третьего порядка; к ним, следовательно, относятся все третьи дифференциалы и т. д. Таким образом, как бесконечно малые первого порядка исчезают по сравнению с конечными количествами, так бесконечно малые второго порядка исчезают по сравнению с бесконечно малыми первого порядка и вообще бесконечно малые любого более высокого порядка исчезают по сравнению с бесконечно малыми низшего порядка.

---

[1]) Как ясно из заключительной части фразы, Эйлер хочет здесь сказать, что бесконечно малыми первого порядка называются те бесконечно малые количества, которые однородны с dx и dy.

143. Теперь, когда бесконечно малые подразделены на порядки, мы можем сказать, что дифференциал конечного количества есть бесконечно малое количество первого порядка, дифференциал бесконечно малого первого порядка есть бесконечно малое второго порядка и т. д. Очевидно, что и обратно, интеграл бесконечно малого первого порядка есть конечное количество, интеграл бесконечно малого второго порядка есть бесконечно малое первого порядка и т. д. Если предложенный дифференциал будет бесконечно малым порядка n, то его интеграл будет бесконечно малым порядка $n-1$, так что если при дифференцировании порядок бесконечно малых повышается, то при интегрировании мы переходим к более низким порядкам до тех пор, пока мы не придём к самим конечным количествам. Если же мы захотим снова интегрировать конечные количества, то согласно тому же закону мы придём к бесконечно большим количествам; интегрируя последние, придём к количествам, в бесконечное число раз большим, чем прежние, и, продолжая поступать таким образом, мы будем получать порядки бесконечных количеств, из которых каждое в бесконечное число раз превосходит предшествующее.

144. Нам остаётся ещё сказать в этой главе о принятых нами обозначениях, чтобы не оставалось места ни для каких недоразумений. Прежде всего, знак дифференциала d относится только к непосредственно за ним следующей букве; так, dxy должно обозначать не дифференциал произведения xy, но дифференциал количества x, умноженный на количество y. А для того, чтобы устранить всякие сомнения, принято писать количество y перед знаком d, так что через ydx обозначается произведение y на dx. Но если y есть количество, перед которым стоит знак радикала или знак логарифма, тогда оно ставится обычно после дифференциала. Так, $dx\sqrt{a^2-x^2}$ обозначает произведение конечного количества $\sqrt{a^2-x^2}$ на дифференциал dx и подобным образом $dx\, l\,(1+x)$ есть произведение логарифма количества $1+x$ на dx. На том же основании $d^2y\sqrt{x}$ выражает произведение второго дифференциала d^2y на конечное количество $\sqrt{x}$.

145. Итак, знак d относится только к непосредственно следующей букве; он не относится даже к показателю степени, если таковой при букве имеется. Так, dx^2 обозначает не дифференциал количества x^2, а квадрат дифференциала количества x, так что показатель степени 2 нужно отнести не к x, а к dx. Можно было бы также писать $dxdx$, подобно тому как произведение дифференциалов dx и dy мы пишем в виде $dxdy$; однако первый способ записи dx^2 более употребителен, так как он короче. Особенно неудобно было бы многократно повторять dx при обозначениях высших степеней dx. Поэтому куб дифференциала dx обозначается через dx^3 и для дифференциалов высшего порядка соблюдается тот же способ. Так, d^2y^4 обозначает четвёртую степень дифференциала второго порядка d^2y, а $d^3y^2\sqrt{x}$ обозначает, что квадрат дифференциала третьего порядка количества y умножается на $\sqrt{x}$; если же его нужно было бы помножить на рациональное количество x, запись имела бы вид xd^3y^2.

146. Если же мы хотим, чтобы знак d относился более чем к одной следующей букве, то нужно ввести для этого особое обозначение. В этом случае мы пользуемся по преимуществу скобками, в которые заключается то количество, дифференциал которого нужно обозначить. Так, $d(x^2+y^2)$ обозначает дифференциал количества x^2+y^2. Правда, если мы хотим обозначить дифференциал степени такого количества, мы вряд ли сможем избежать двусмысленности; действительно, если мы напишем $d(x^2+y^2)^2$, то это можно также понимать как квадрат количества $d(x^2+y^2)$. Мы можем, однако, в этом случае привлечь на помощь точку, так чтобы $d\cdot(x^2+y^2)^2$ обозначало дифференциал количества $(x^2+y^2)^2$. Если же точку опустить, оно будет обозначать квадрат количества $d(x^2+y^2)^2$. Таким образом, с помощью точки можно удобно указать, что знак d относится ко всему количеству, следующему за этой точкой. Так $d\cdot x\,dy$ будет выражать дифференциал количества $x\,dy$, а $d^3\cdot x\,dy\sqrt{a^2+x^2}$ — дифференциал третьего порядка выражения $x\,dy\sqrt{a^2+x^2}$, представляющего произведение конечных количеств x и $\sqrt{a^2+x^2}$ на дифференциал dy.

147. Тогда как знак дифференцирования d относится только к количеству, непосредственно за ним следующему, если только между ними не стоит точка, подчиняющая этому знаку всё следующее выражение, — знак интеграла, напротив, всегда охватывает целиком всё выражение, перед которым он поставлен. Так, $\int y\,dx(a^2-x^2)^n$ обозначает то количество, дифференциал которого есть $y\,dx(a^2-x^2)^n$, а выражение $\int x\,dx\int dx\,1\,x$ обозначает количество, дифференциал которого есть $x\,dx\int dx\,1\,x$. Значит, если мы захотим выразить произведение двух интегралов, например интегралов $\int y\,dx$ и $\int z\,dx$, то мы не должны будем написать его так: $\int y\,dx\int z\,dx$ ибо это можно будет понять как интеграл количества $y\,dx\int z\,dx$. Для устранения двусмысленности и здесь принято пользоваться точкой, так что $\int y\,dx\cdot\int z\,dx$ обозначает произведение интегралов $\int y\,dx$ и $\int z\,dx$.

148. Анализ бесконечно малых занимается разысканием как дифференциалов, так и интегралов, и потому он разделяется на две части, из которых одна называется дифференциальным исчислением, другая же — интегральным исчислением. В дифференциальном исчислении излагаются правила, по которым находятся дифференциалы любых количеств; в интегральном же исчислении указывается путь для разыскания интегралов предложенных дифференциалов. И в том и в другом исчислении указываются вместе с тем те очень важные применения, которые они имеют как в самом анализе, так и в высшей геометрии. Вот почему эта часть анализа настолько уже разрослась, что в одном томе умеренных размеров она совершенно не может быть умещена. В особенности в интегральном исчислении, что ни день, открываются новые приёмы интегрирования и новые приложения к решению различного рода задач. Вследствие этих новых открытий, которые следуют непрерывно друг за другом, интегральное исчисление никогда нельзя исчерпать, а тем более в совершенстве изложить. Я постараюсь, однако, изложить в этой книге всё, что до настоящего времени было открыто, или по крайней мере объяснить те методы, с помощью которых всё это легко можно вывести.

149. Часто анализ бесконечно малых подразделяется на несколько частей; кроме дифференциального и интегрального исчисления принято особо рассматривать дифференцио-дифференциальное и экспоненциальное исчисление. В дифференцио-дифференциальном исчислении излагается обычно метод разыскания дифференциалов второго и высших порядков. Но так как я намереваюсь излагать способ нахождения дифференциалов любого порядка в самом дифференциальном исчислении, то мы откажемся от этого подразделения, которое, повидимому, сделано было скорее из желания придумать что-нибудь, чем в интересах самого дела. Что же касается экспоненциального исчисления, то знаменитый Иван Бернулли, которому мы навеки обязаны благодарностью за бесчисленное множество важнейших открытий в анализе бесконечно малых, распространил в нём методы дифференцирования и интегрирования на показательные количества. Но так как я решил приспособить как дифференциальное, так и интегральное исчисление к количествам всякого рода, как алгебраическим, так и трансцендентным, то выделять отсюда особую часть было бы излишним и не соответствующим поставленной цели.

150. В этой книге я решил рассмотреть дифференциальное исчисление, и я намереваюсь изложить способ, с помощью которого можно с удобством находить не только первые дифференциалы, но и вторые и более высоких порядков. Сперва я буду рассматривать алгебраические количества; начну я с функций одного переменного, затем перейду к функциям многих переменных и, наконец, к функциям, которые задаются с помощью уравнений. Потом я распространю нахождение дифференциалов на те неалгебраические количества, с которыми мы можем ознакомиться без помощи интегрального исчисления; таковы лагарифмы и показательные количества, а затем также дуги круга и, обратно, синусы и тангенсы дуг круга. Наконец, я начну дифференцировать количества, составленные из вышеупомянутых каким-либо образом, и на этом будет закончена первая часть дифференциального исчисления, посвящённая методам дифференцирования.

151. Вторая часть посвящена изложению применений дифференциального исчисления к анализу и к высшей геометрии. Общую алгебру дифференциальное исчисление обогащает многими удобными средствами для нахождения корней уравнений, для изучения и суммирования рядов, для определения значений выражений, которые в некоторых случаях кажутся неопределёнными, и для других целей. Высшая геометрия также многое приобретает благодаря дифференциальному исчислению; с его помощью можно определять с изумительной лёгкостью касательные кривых линий и их кривизну и решать многие другие вопросы, как, например, задачу о лучах, отражённых от кривых линий или преломлённых ими. Хотя этим можно было бы заполнить обширнейший трактат, но я постараюсь, несколько это возможно, изложить всё кратко и ясно.

ГЛАВА V

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОДНО ПЕРЕМЕННОЕ

152. Так как дифференциал переменного количества x равен dx, то, переходя к ближайшему значению x, будем иметь $x^{\text{I}} = x + dx$. Поэтому если y есть какая-либо функция x, то если в ней вместо x положить $x + dx$, она перейдёт в y^{I} и разность $y^{\text{I}} - y$ даст дифференциал y. Следовательно, если мы положим $y = x^n$, то будет

$$y^{\text{I}} = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}dx^2 + \text{ и т. д.}$$

и, следовательно,

$$dy = y^{\text{I}} - y = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}dx^2 + \text{ и т. д.}$$

В этом выражении второй член и все следующие исчезают по сравнению с первым, следовательно, дифференциал от x^n будет $nx^{n-1}dx$, т. е.

$$dx^n = nx^{n-1}dx.$$

Отсюда, если a есть число, т. е. постоянное количество, то будем иметь $d\,ax^n = nax^{n-1}dx$. Итак, дифференциал какой-нибудь степени x находится умножением её на показатель степени, делением на x и умножением получающегося выражения на dx. Это правило легко удержать в памяти.

153. Зная первый дифференциал x^n, мы легко найдём из него второй дифференциал; при этом здесь, как всегда, мы будем считать дифференциал dx постоянным. Так как в дифференциале $nx^{n-1}dx$ множитель $n\,dx$ является постоянным, то нужно взять дифференциал множителя x^{n-1}, который равен $(n-1)\,x^{n-2}dx$. Умножая это на $n\,dx$, мы получим второй дифференциал

$$d^2 \cdot x^n = n(n-1)\,x^{n-2}dx^2.$$

Подобным образом, если дифференциал x^{n-2}, который равен $(n-2)\,x^{n-3}dx$, мы помножим на $n(n-1)\,x^{n-2}dx^2$, то получим третий дифференциал

$$d^3 \cdot x^n = n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}dx^3.$$

Далее, четвёртый дифференциал будет

$$d^4 \cdot x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-4}dx^4$$

и пятый дифференциал

$$d^5 \cdot x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\, x^{n-5} dx^5.$$

Отсюда очень легко усматривается вид следующих дифференциалов.

154. Всякий раз, как n есть целое положительное число, мы приходим в конце концов к исчезающим дифференциалам; это значит, что они в том смысле равны нулю, что исчезают по сравнению со всеми степенями dx. Приведём здесь простейшие случаи

$$d \cdot x = dx,\quad d^2 \cdot x = 0,\quad d^3 \cdot x = 0 \text{ и т. д.,}$$
$$d \cdot x^2 = 2x\,dx,\quad d^2 \cdot x^2 = 2\,dx^2,\quad d^3 \cdot x^2 = 0,\quad d^4 \cdot x^2 = 0 \text{ и т. д.,}$$
$$d \cdot x^3 = 3x^2 dx,\quad d^2 \cdot x^3 = 6x\,dx^2,\quad d^3 \cdot x^3 = 6d\,x^3,\quad d^4 \cdot x^3 = 0 \text{ и т. д.,}$$
$$d \cdot x^4 = 4x^3 dx,\quad d^2 \cdot x^4 = 12x^2 dx^2,\quad d^3 \cdot x^4 = 24x\,dx^3,\quad d^4 \cdot x^4 = 24\,dx^4,$$
$$d^5 \cdot x^4 = 0 \text{ и т. д.,}$$
$$d \cdot x^5 = 5x^4\,dx,\quad d^2 \cdot x^5 = 20x^3 dx,\quad d^3 \cdot x^5 = 60x^2 dx^3,$$
$$d^4 \cdot x^5 = 120x\,dx^4,\quad d^5 \cdot x^5 = 120\,dx^5,\quad d^6 \cdot x^5 = 0 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, ясно, что если n есть целое положительное число, то дифференциал порядка n степени x^n есть постоянное количество, равное $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n\,dx^n$, дифференциалы же всех более высоких порядков равны нулю.

155. Если n есть отрицательное целое число, то можно взять дифференциалы отрицательных степеней x: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ и т. д., так как $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ и вообще $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$. Таким образом, если в предшествующей формуле положить $n = -m$, то первый дифференциал будет равен $\frac{-m\,dx}{x^{m+1}}$, второй дифференциал равен $\frac{m(m+1)\,dx^2}{x^{m+2}}$, третий дифференциал равен $\frac{-m(m+1)(m+2)\,dx^3}{x^{m+3}}$ и т. д.; надлежит заметить в первую очередь следующие простейшие случаи:

$$d \cdot \frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2},\quad d^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\,dx^2}{x^3},\quad d^3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{-6\,dx^3}{x^4} \text{ и т. д.,}$$
$$d \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-2\,dx}{x^3},\quad d^2 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{6\,dx^2}{x^4},\quad d^3 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-24\,dx^3}{x^5} \text{ и т. д.,}$$
$$d \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{-3\,dx}{x^4},\quad d^2 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{12\,dx^2}{x^5},\quad d^3 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{-60\,dx^3}{x^6} \text{ и т. д.,}$$
$$d \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{-4\,dx}{x^5},\quad d^2 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{20\,dx^2}{x^6},\quad d^3 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{-120\,dx^3}{x^7} \text{ и т. д.,}$$
$$d \cdot \frac{1}{x^5} = \frac{-5\,dx}{x^6},\quad d^2 \cdot \frac{1}{x^5} = \frac{30\,dx^2}{x^7},\quad d^3 \cdot \frac{1}{x^5} = \frac{-210\,dx^3}{x^8} \text{ и т. д.}$$
$$\text{и т. д.}$$

156. Полагая, далее, вместо n дробные числа, мы получим дифференциалы иррациональных формул. Действительно, если $n = \frac{\mu}{\nu}$, то первый дифференциал выражения $x^{\frac{\mu}{\nu}}$, т. е. $\sqrt[\nu]{x^\mu}$, будет равен

$$\frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} dx = \frac{\mu}{\nu}\,dx \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}};$$

второй дифференциал равен

$$\frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} dx^2 = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} dx^2 \sqrt[\nu]{x^{\mu-2\nu}} \text{ и т. д.}$$

Отсюда

$$d\cdot\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \qquad d^2\cdot\sqrt{x} = \frac{-dx^2}{4x\sqrt{x}}, \qquad d^3\cdot\sqrt{x} = \frac{1\cdot 3dx^3}{8x^2\sqrt{x}},$$

$$d\cdot\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}, \qquad d^2\cdot\sqrt[3]{x} = \frac{-2dx^2}{9x\sqrt[3]{x^2}}, \qquad d^3\cdot\sqrt[3]{x} = \frac{2\cdot 5\,dx^3}{27x^2\sqrt[3]{x^2}},$$

$$d\cdot\sqrt[4]{x} = \frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3}}, \qquad d^2\cdot\sqrt[4]{x} = \frac{-3dx^2}{16x\sqrt[4]{x^3}}, \qquad d^3\cdot\sqrt[4]{x} = \frac{3\cdot 7\,dx^3}{64x^2\sqrt[4]{x^3}}.$$

Достаточно немного вглядеться в эти выражения, чтобы легко научиться находить дефференциалы такого рода и без предварительного представления корня в виде степени.

157. Если μ равно не 1, а какому-либо другому числу, положительному или отрицательному, то дифференциалы находятся с той же лёгкостью. А так как дифференциалы второго и высших порядков производятся из первых дифференциалов по тому же закону, по которому последние производятся из самих степеней, то мы приведём здесь в качестве простейших примеров лишь первые дифференциалы:

$$d\cdot x\sqrt{x} = \frac{3}{2}dx\cdot\sqrt{x}, \quad d\cdot x^2\sqrt{x} = \frac{5}{2}xdx\sqrt{x}, \quad d\cdot x^3\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^2dx\sqrt{x} \text{ и т. д.},$$

$$d\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}}, \quad d\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{-3dx}{2x^2\sqrt{x}}, \quad d\cdot\frac{1}{x^2\sqrt{x}} = \frac{-5dx}{2x^3\sqrt{x}} \text{ и т. д.},$$

$$d\cdot\sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, \quad d\cdot x\sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}dx\sqrt[3]{x}, \quad d\cdot x\sqrt[3]{x^2} = \frac{5}{3}dx\sqrt[3]{x^2},$$

$$d\cdot x^2\sqrt[3]{x} = \frac{7}{3}x\,dx\sqrt[3]{x}, \quad d\cdot x^2\sqrt[3]{x^2} = \frac{8}{3}x\,dx\sqrt[3]{x^2} \text{ и т. д.},$$

$$d\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-dx}{3x\sqrt[3]{x}}, \quad d\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2\,dx}{3x\sqrt[3]{x^2}}, \quad d\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{-4\,dx}{3x^2\sqrt[3]{x}},$$

$$d\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5\,dx}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}, \quad d\cdot\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x}} = \frac{-7\,dx}{3x^3\sqrt[3]{x}} \text{ и т. д.}$$

158. Теперь можно уже находить дифференциалы всех алгебраических рациональных функций, так как отдельные их члены суть степени x, а их мы умеем дифференцировать. Действительно, так как количество

$$p+q+r+s+ \text{и т. д.},$$

если положить $x+dx$ вместо x, переходит в

$$p+dp+q+dq+r+dr+s+ds+ \text{и т. д.},$$

то его дифференциал будет равен

$$dp+dq+dr+ds+ \text{и т. д.}$$

Поэтому, если мы умеем определить дифференциалы количеств p, q, r, s, то тем самым мы знаем и дифференциал их суммы. А так как дифференциал количества, кратного p, есть такое же кратное количества dp, т. е. $d\,ap = adp$, то дифференциал количества $ap+bq+cr$ равен $a\,dp+b\,dq+c\,dr$. Так как, наконец, дифференциал постоянного количества равен нулю, то дифференциал выражения $ap+bq+cr+f$ равен $adp+bdq+cdr$.

159. Так как отдельные члены целых рациональных функций являются либо постоянными, либо степенями x, то дифференцирование целой рациональной функции легко выполняется по данным выше правилам. Так, будем иметь:

$$d(a+x)=dx, \qquad d(a+bx)=bdx,$$
$$d(a+x^2)=2x\,dx, \quad d(a^2-x^2)=-2x\,dx,$$
$$d(a+bx+cx^2)=bdx+2cxdx,$$
$$d(a+bx+cx^2+ex^3)=b\,dx+2cx\,dx+3ex^2dx,$$
$$d(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)=b\,dx+2cx\,dx+3ex^2dx+4fx^3dx.$$

Если же показатели степени будут неопределёнными, то будем иметь

$$d(1-x^n)=-nx^{n-1}\,dx, \quad d(1+x^m)=mx^{m-1}\,dx,$$
$$d(a+bx^m+cx^n)=mbx^{m-1}dx+ncx^{n-1}\,dx.$$

160. Так как целые рациональные функции различаются по степеням сообразно наибольшей степени x, то ясно, что если мы будем брать последовательные дифференциалы таких функций, то в конце концов они станут постоянными, а затем обратятся в нуль, если, конечно, дифференциал dx считается постоянным. Так, для функции первой степени $a+bx$ первый дифференциал $b\,dx$ является постоянным, а второй и следующие — нулями. Если имеем функцию второй степени $a+bx+cx^2=y$, то будет

$$dy=b\,dx+2cx\,dx, \quad d^2y=2c\,dx^2, \quad d^3y=0.$$

Подобным образом, если взять функцию третьей степени

$$a+bx+cx^2+ex^3=y,$$

то будем иметь

$$dy=b\,dx+2cx\,dx+3ex^2dx, \quad d^2y=2c\,dx^2+6ex\,dx^2,$$
$$d^3y=6e\,dx^3 \quad \text{и} \quad d^4y=0.$$

Вообще, если какая-либо функция имеет степень n, то её дифференциал порядка n будет постоянным, а все следующие нулями.

161. Дифференцирование не встретит затруднений и в том случае, если среди степеней x, составляющих такого рода функцию, встретятся такие, у которых показатели степени являются дробными или отрицательными числами. Так,

I. Если

$$y=a+b\sqrt{x}-\frac{c}{x},$$

то будет

$$dy=\frac{bdx}{2\sqrt{x}}+\frac{cdx}{x^2}.$$

II. Если

$$y=\frac{a}{\sqrt{x}}+b+c\sqrt{x}-ex,$$

то будет

$$dy=\frac{-a\,dx}{2x\sqrt{x}}+\frac{c\,dx}{2\sqrt{x}}-e\,dx$$

и

$$d^2y = \frac{3a\,dx^2}{4x^2\sqrt{x}} - \frac{c\,dx^2}{4x\sqrt{x}}.$$

III. Если

$$y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{f}{x^2},$$

то будет

$$dy = \frac{-2b\,dx}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c\,dx}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2f\,dx}{x^3}$$

и

$$d^2y = \frac{10b\,dx^2}{9x^2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{28c\,dx^2}{9x^3\sqrt[3]{x}} + \frac{6f\,dx^2}{x^4}.$$

Такого рода примеры очень легко решаются по данным выше правилам.

162. Если количество, подлежащее дифференцированию, будет степенью такой функции, дифференциал которой мы умеем находить, то предшествующие правила достаточны для нахождения её первого дифференциала. Действительно, пусть p есть какая-либо функция x, дифференциал которой dp нам известен; тогда первый дифференциал степени p^n будет равен $np^{n-1}dp$. Этим способом можно решить следующие примеры:

I. Если $y = (a+x)^n$, то будет

$$dy = n(a+x)^{n-1}dx.$$

II. Если $y = (a^2 - x^2)^2$, то будет

$$dy = -4x(a^2 - x^2)\,dx.$$

III. Если $y = \frac{1}{a^2+x^2}$, т. е. $y = (a^2+x^2)^{-1}$, то будет

$$dy = \frac{-2x\,dx}{(a^2+x^2)^2}.$$

IV. Если $y = \sqrt{a + bx + cx^2}$, то будет

$$dy = \frac{b\,dx + 2cx\,dx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

V. Если $y = \sqrt[3]{(a^4 - x^4)^2}$, т. е. $y = (a^4 - x^4)^{\frac{2}{3}}$, то будет

$$dy = -\frac{8}{3}x^3(a^4 - x^4)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{-8x^3dx}{3\sqrt[3]{a^4 - x^4}}.$$

VI. Если $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е. $y = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, то будет

$$dy = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

VII. Если $y = \sqrt[3]{a + \sqrt{bx} + x}$, то будет

$$y = \frac{\sqrt{b}dx : 2\sqrt{x} + dx}{3\sqrt[3]{(a+\sqrt{bx}+x)^2}} = \frac{\sqrt{b}\,dx + 2\sqrt{x}\,dx}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(a+\sqrt{bx}+x)^2}}.$$

VIII. Если $y = \dfrac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$, то вследствие

$$d\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

будет

$$dy = \frac{-dx + x\,dx : \sqrt{a^2 - x^2}}{(x + \sqrt{a^2 - x^2})^2} = \frac{x\,dx - dx\sqrt{a^2 - x^2}}{(2 + \sqrt{a^2 - x^2})^2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

или

$$dy = \frac{(x - \sqrt{a^2 - x^2})^3\,dx}{(2x^2 - a^2)^2\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

IX. Если $y = \sqrt[4]{\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}\right)^3}$, то положим

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = p \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{(1 - x^2)^2} = q;$$

вследствие

$$y = \sqrt{(1 - p + q)^3}$$

будет

$$dy = \frac{-3dp + 3dq}{4\sqrt[4]{1 - p + q}}.$$

Но по предыдущему

$$dp = \frac{-dx}{2x\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad dq = \frac{-4x\,dx}{3\sqrt[3]{1 - x^2}}.$$

Подставив эти значения, будем иметь

$$dy = \frac{3\,dx : 2x\sqrt{x} - 4x\,dx : \sqrt[3]{1 - x^2}}{4\sqrt[4]{1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}}}.$$

Подобным же образом, подставляя отдельные буквы вместо более или менее сложных выражений, мы легко найдём дифференциалы всех функций такого рода.

163. Если подлежащее дифференцированию количество будет произведением двух или большего числа функций, дифференциалы которых известны, то его дифференциал очень легко найти следующим образом. Пусть p и q суть функции x, дифференциалы которых dp и dq уже известны; так как после подстановки $x + dx$ вместо x p переходит в $p + dp$, а q — в $q + dq$, то произведение pq преобразуется в

$$(p + dp)(q + dq) = pq + p\,dq + q\,dp + dp\,dq.$$

Значит, дифференциал произведения pq будет равен $p\,dq + q\,dp + dp\,dq$; так как здесь $p\,dq$ и $q\,dp$ суть бесконечно малые первого порядка, а $dp\,dq$ — бесконечно малое второго порядка, то последний член исчезает, и мы будем, следовательно, иметь

$$d \cdot pq = p\,dq + q\,dp.$$

Итак, дифференциал произведения pq состоит из двух членов, которые мы получим, если каждый сомножитель умножить на дифференциал другого. Отсюда легко вывести правило дифференцирования произведения pqr трёх сомножителей. Действительно, если мы положим $qr=z$, то будет $pqr=pz$ и $d\cdot pqr=pdz+z\,dp$. Но вследствие $z=qr$ будет $dz=q\,dr+r\,dq$. Подставив эти значения вместо z и dz, будем иметь

$$d\cdot pqr=pq\,dr+pr\,dq+qr\,dp.$$

Подобным образом, если подлежащее дифференцированию количество имеет четыре сомножителя, мы будем иметь

$$d\cdot pqrs=pqr\,ds+pqs\,dr+prs\,dq+qrs\,dp;$$

отсюда каждый легко усмотрит правила дифференцирования для случая большего числа сомножителей.

I. Таким образом, если $y=(a+x)(b-x)$, то будем иметь

$$dy=-dx\,(a+x)+dx\,(b-x)=-a\,dx+b\,dx-2x\,dx.$$

Этот дифференциал легко найти также с помощью разложения предложенного количества. Действительно, тогда получаем $y=ab-ax+bx-x^2$ и, следовательно, с помощью вышеизложенных правил найдём

$$dy=-a\,dx+b\,dx-2x\,dx.$$

II. Если $y=\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2}$, то положим

$$\frac{1}{x}=p \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2-x^2}=q.$$

Так как

$$dp=\frac{-dx}{x^2} \quad \text{и} \quad dq=\frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

то будет

$$dy=p\,dq+q\,dp=\frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{dx}{x^2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

После приведения к общему знаменателю это даст

$$\frac{-x^2dx-a^2dx+x^2dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-a^2dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Значит, искомый дифференциал будет

$$dy=\frac{-a^2dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}.$$

III. Если $y=\frac{x^2}{\sqrt{a^4+x^4}}$, то положим

$$x^2=p \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{a^4+x^4}}=q;$$

так как

$$dp=2x\,dx \quad \text{и} \quad dq=\frac{-2x^3\,dx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}},$$

то будет

$$p\,dq+q\,dp=\frac{-2x^5\,dx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2x\,dx}{\sqrt{a^4+x^4}}=\frac{2a^4x\,dx}{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Следовательно, искомый дифференциал будет

$$dy = \frac{2a^4x\,dx}{(a^4+x^4)\sqrt{a^4+x^4}}.$$

IV. Если $y = \dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$, то положим

$$x = p \quad \text{и} \quad \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = q.$$

Так как

$$dp = dx$$

и

$$dq = \frac{-dx - x\,dx : \sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{-dx\,(x+\sqrt{1+x^2})}{(x+\sqrt{1+x^2})^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{-dx}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}},$$

то будет

$$p\,dq + q\,dp = \frac{-x\,dx}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} + \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx\,(\sqrt{1+x^2}-x)}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}},$$

следовательно, искомый дифференциал будет

$$dy = \frac{dx\,(\sqrt{1+x^2}-x)}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}.$$

Если умножить числитель и знаменатель этой дроби на $\sqrt{1+x^2}-x$, получится

$$dy = \frac{dx\,(1+2x^2-2x\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dx+2x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}} - 2x\,dx.$$

Тот же дифференциал можно проще найти другим способом: так как

$$y = \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}},$$

то, умножая числитель и знаменатель на $\sqrt{1+x^2}-x$, мы получим

$$y = x\sqrt{1+x^2} - x^2 = \sqrt{x^2+x^4} - x^2.$$

Дифференциал этого выражения по первому правилу есть

$$dy = \frac{x\,dx+2x^3\,dx}{\sqrt{x^2+x^4}} - 2x\,dx = \frac{dx+2x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}} - 2x\,dx.$$

V. Если $y = (a+x)(b-x)(x-c)$, то будет

$$dy = (a+x)(b-x)\,dx - (a+x)(x-c)\,dx + (b-x)(x-c)\,dx.$$

VI. Если $y = x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$, то, так как здесь три сомножителя, найдём

$$dy = dx\,(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2} + 2x^2\,dx\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2\,dx\,(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \frac{dx\,(a^4+a^2x^2-4x^4)}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

164. Хотя дробь можно представить как произведение, однако для дифференцирования дроби более удобно пользоваться особым правилом.

Пусть предложена дробь $\frac{p}{q}$ и нужно найти её дифференциал. При подстановке $x+dx$ вместо x эта дробь переходит в

$$\frac{p+dp}{q+dq}=(p+dp)\left(\frac{1}{q}-\frac{dq}{q^2}\right)=\frac{p}{q}-\frac{p\,dq}{q^2}+\frac{dp}{q}-\frac{dp\,dq}{q^2}\,^{1)};$$

после вычитания самой дроби $\frac{p}{q}$ остаётся её дифференциал

$$d\cdot\frac{p}{q}=\frac{dp}{q}-\frac{p\,dq}{q^2},$$

так как член $\frac{dp\,dq}{q^2}$ исчезает; следовательно, будем иметь

$$d\cdot\frac{p}{q}=\frac{q\,dp-p\,dq}{q^2},$$

откуда получается следующее правило для дифференцирования какой-либо дроби:

Из дифференциала числителя, умноженного на знаменатель, нужно вычесть дифференциал знаменателя, помноженный на числитель, и остаток разделить на квадрат знаменателя; частное будет искомым дифференциалом дроби.

Применение этого правила пояснится следующими примерами:

I. Если $y=\frac{x}{a^2+x^2}$, то согласно этому правилу

$$dy=\frac{(a^2+x^2)\,dx-2x^2\,dx}{(a^2+x^2)^2}=\frac{(a^2-x^2)\,dx}{(a^2-x^2)^2}.$$

II. Если $y=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2-x^2}$, то мы находим

$$dy=\frac{(a^2-x^2)\,x\,dx:\sqrt{a^2+x^2}+2x\,dx\sqrt{a^2+x^2}}{(a^2-x^2)^2}$$

и после упрощений

$$dy=\frac{(3a^2+x^2)\,x\,dx}{(a^2-x^2)^2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Часто лучше бывает пользоваться тем правилом, которое вытекает из первой формулы

$$d\cdot\frac{p}{q}=\frac{dp}{q}-\frac{p\,dq}{q^2},$$

и согласно которому дифференциал дроби находится следующим образом: дифференциал числителя делится на знаменатель и из этого вычитается дифференциал знаменателя, помноженный на числитель и разделённый на квадрат знаменателя. Так, например,

III. Если $y=\frac{a^2-x^2}{a^4+a^2x^2+x^4}$, то

$$dy=\frac{-2x\,dx}{a^4+a^2x^2+x^4}-\frac{(a^2-x^2)(2a^2x\,dx+4x^3\,dx)}{(a^4+a^2x^2+x^4)^2}.$$

---

[1]) Эйлер разлагает выражение $\frac{1}{q+dq}$ в ряд по степеням dq, ограничиваясь двумя первыми членами. При этом в окончательном результате оказывается опущенным член второго порядка $\frac{p\,dq^2}{q^3}$, тогда как член того же порядка $-\frac{dp\,dq}{q^2}$ сохраняется. Поскольку он всё равно должен в дальнейшем быть отброшенным, эта непоследовательность не ведёт к ошибке.

После приведения к общему знаменателю мы получим

$$dy = \frac{-2x\,dx\,(2a^4 + 2a^2x^2 - x^4)}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2}.$$

165. Этого уже достаточно для разыскания дифференциала любой рациональной функции x. Для случая, когда эта функция целая, способ дифференцирования уже был изложен выше. Пусть теперь предложенная функция является дробной; она всегда может быть приведена к виду

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{ и т. д.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{ и т. д.}}.$$

Положим числитель равным p, а знаменатель равным q, так что $y = \frac{p}{q}$. Тогда будем иметь

$$dy = \frac{q\,dp - p\,dq}{q^2}.$$

Но так как

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ и т. д.}$$

и

$$q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ и т. д.},$$

то

$$dp = B\,dx + 2Cx\,dx + 3Dx^2\,dx + 4Ex^3\,dx + \text{ и т. д.}$$

и

$$dq = \beta\,dx + 2\gamma x\,dx + 3\delta x^2\,dx + 4\varepsilon x^3\,dx + \text{ и т. д.}$$

Отсюда, выполнив умножение, получим:

$$\begin{aligned} q\,dp = {} & \alpha B\,dx + 2\alpha Cx\,dx + 3\alpha Dx^2\,dx + 4\alpha Ex^3\,dx + \text{ и т. д. } + \\ & + \beta Bx\,dx + 2\beta Cx^2\,dx + 3\beta Dx^3\,dx + \text{ и т. д. } + \\ & + \gamma Bx^2\,dx + 2\gamma Cx^3\,dx + \text{ и т. д. } + \delta Bx^3\,dx + \text{ и т. д.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p\,dq = {} & \beta A\,dx + \beta Bx\,dx + \beta Cx^2\,dx + \beta Dx^3\,dx + \text{ и т. д. } + \\ & + 2\gamma Ax\,dx + 2\gamma Bx^2\,dx + 2\gamma Cx^3\,dx + \text{ и т. д. } + \\ & + 3\delta Ax^2\,dx + 3\delta Bx^3\,dx + \text{ и т. д. } + 4\varepsilon Ax^3\,dx + \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Итак, искомый дифференциал будет иметь такой вид:

$$dy = \frac{\left.\begin{matrix} +\alpha B \\ -\beta A \end{matrix}\right\} dx \; \left.\begin{matrix} +2\alpha C \\ -2\gamma A \end{matrix}\right\} x\,dx \; \left.\begin{matrix} +3\alpha D \\ +\beta C \\ -\gamma B \\ -3\delta A \end{matrix}\right\} x^2\,dx \; \left.\begin{matrix} +4\alpha E \\ +2\beta D \\ -2\delta B \\ -4\varepsilon A \end{matrix}\right\} x^3\,dx \; \left.\begin{matrix} +5\alpha F \\ +3\beta E \\ +\gamma D \\ -\delta C \\ -3\varepsilon B \\ -5\zeta A \end{matrix}\right\} x^4\,dx \text{ и т. д.}}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{ и т. д.})^2}$$

Это выражение очень удобно для быстрого нахождения дифференциала любой рациональной функции. Каким образом числитель дифференциала составлен из коэффициентов числителя и знаменателя предложенной дроби — это тотчас же становится понятным из рассмотрения формулы. Знаменатель же дифференциала есть квадрат знаменателя предложенной функции.

166. Если числитель или знаменатель предложенной дроби или оба они состоят из множителей, то после выполнения умножения дробь примет тот вид, который мы только что дифференцировали; однако в этих случаях лучше пользоваться особым правилом.

Пусть предложенная дробь есть $y=\frac{pr}{q}$. Положим числитель pr равным P, тогда

$$dP=p\,dr+r\,dp.$$

Но так как $y=\frac{P}{q}$, то

$$dy=\frac{q\,dP-P\,dq}{q^2}.$$

Если сюда подставить вместо P и dP их выражения, то получим:

I. Если $y=\frac{pr}{q}$, то его дифференциал

$$dy=\frac{pq\,dr+qr\,dp-pr\,dq}{q^2}.$$

Если $y=\frac{p}{qs}$ то, положив $qs=Q$, будем иметь

$$dQ=q\,ds+s\,dq$$

и

$$dy=\frac{Q\,dp-p\,dQ}{q^2s^2}.$$

Поэтому:

II. Если $y=\frac{p}{qs}$, то будет

$$dy=\frac{qs\,dp-pq\,ds-ps\,dq}{q^2s^2}.$$

Если $y=\frac{pr}{qs}$, то положим $pr=P$ и $qs=Q$, так что получим $y=\frac{P}{Q}$ и

$$dy=\frac{Q\,dP-P\,dQ}{Q^2}.$$

А так как

$$dP=p\,dr+r\,dp$$

и

$$dQ=q\,ds+s\,dq,$$

то получается следующая формула дифференцирования:

III. Если $y=\frac{pr}{qs}$, то будет

$$dy=\frac{pqs\,dr+qrs\,dp-pqr\,ds-prs\,dq}{q^2s^2}$$

или

$$dy=\frac{r\,dp}{qs}+\frac{p\,dr}{qs}-\frac{pr\,dq}{q^2s}-\frac{pr\,ds}{qs^2}.$$

Подобным образом, если числитель и знаменатель предложенной дроби имеют несколько сомножителей, то дифференциалы будут найдены тем же способом, и это не потребует более пространных выкладок. Поэтому я опускаю относящиеся сюда примеры, тем более, что вскоре будет изложен общий способ, охватывающий все эти частные методы дифференцирования.

167. Бывают, однако, случаи, когда дифференциалы произведений и дробей можно выразить проще, чем с помощью изложенных здесь общих правил. Это случается тогда, когда множители, составляющие либо самую функцию, либо её числитель и знаменатель, являются степенями.

Положим, что подлежащая дифференцированию функция есть $y = p^m q^n$; чтобы найти её дифференциал, положим $p^m = P$ и $q^n = Q$, так что

$$y = PQ \quad \text{и} \quad dy = P\,dQ + Q\,dP.$$

Но так как

$$dP = mp^{m-1}\,dp \quad \text{и} \quad dQ = nq^{n-1}\,dq,$$

то после подстановки этих значений получаем

$$dy = np^m q^{n-1}\,dq + mp^{m-1}q^n\,dp = p^{m-1}q^{n-1}(np\,dq + mq\,dp),$$

откуда вытекает следующее правило:

I. Если $y = p^m q^n$, то будет

$$dy = p^{m-1}q^{n-1}(np\,dq + mq\,dp).$$

Подобным образом мы можем найти дифференциал произведения трёх сомножителей; он выразится следующим образом:

II. Если $y = p^m q^n r^k$, то будет

$$dy = p^{m-1}q^{n-1}r^{k-1}(mqr\,dp + npr\,dq + kpq\,dr).$$

168. Если же будет предложена дробь, числитель или знаменатель которой имеет множитель, представляющий собой степень, то также можно установить частные правила.

Пусть сперва предложенная дробь есть $y = \frac{p^m}{q}$; согласно правилу дифференцирования дроби будем иметь

$$dy = \frac{mp^{m-1}q\,dp - p^m\,dq}{q^2}.$$

Этот дифференциал удобнее выразить так:

I. Если $y = \frac{p^m}{q}$, то будет

$$dy = \frac{p^{m-1}(mq\,dp - p\,dq)}{q^2}.$$

Пусть теперь $y = \frac{p}{q^n}$; согласно тому же правилу имеем

$$dy = \frac{q^n\,dp - npq^{n-1}\,dq}{q^{2n}}.$$

Если числитель и знаменатель этого выражения разделить на q^{n-1}, то будем иметь

$$dy = \frac{q\,dp - np\,dq}{q^{n+1}}.$$

Поэтому:

II. Если $y=\frac{p}{q^n}$, то будет

$$dy=\frac{q\,dp-np\,dq}{q^{n+1}}.$$

Если же будет предложена дробь $y=\frac{p^m}{q^n}$, то получим

$$dy=\frac{mp^{m-1}q^n\,dp-np^mq^{n-1}\,dq}{q^{2n}},$$

что можно привести к виду

$$dy=\frac{mp^{m-1}q\,dp-np^m\,dq}{q^{n+1}}.$$

Поэтому:

III. Если $y=\frac{p^m}{q^n}$, то будет

$$dy=\frac{p^{m-1}(mq\,dp-np\,dq)}{q^{n+1}}.$$

Наконец, если будет предложена дробь $y=\frac{r}{p^mq^n}$, то по общему правилу дифференцирования дроби будем иметь

$$dy=\frac{p^mq^n\,dr-mp^{m-1}q^nr\,dp-np^mq^{n-1}r\,dq}{p^{2m}q^{2n}}.$$

Так как числитель и знаменатель этого выражения можно разделить на $p^{m-1}q^{n-1}$, то

IV. Если $y=\frac{r}{p^mq^n}$, то будет

$$dy=\frac{pq\,dr-mqr\,dp-npr\,dq}{p^{m+1}q^{n+1}}.$$

Если число сомножителей будет больше, то такие же правила, которые было бы излишне формулировать словесно, можно найти без труда для любого случая.

169. Правила дифференцирования, которые мы только что изложили, являются настолько общими, что нельзя придумать никакой алгебраической функции от x, которая не могла бы дифференцироваться с их помощью. Действительно, пусть функция от x будет рациональной, целой или дробной; для первого случая в § 159 был дан способ дифференцирования таких функций, для второго же случая вопрос был рассмотрен в § 155. Точно так же мы указали способ дифференцирования для случая, когда функция содержит множители. Далее мы показали, как дифференцировать иррациональные количества всякого рода. Каким бы образом они ни входили в предложенную функцию (через сложение, через вычитание, через умножение или через деление), всегда мы можем свести дело к уже рассмотренным случаям. Разумеется, это относится к явным функциям; что же касается неявных функций, которые задаются уравнениями, то их уместно будет рассмотреть ниже, после того как мы покажем, как дифференцировать функции двух или большего числа переменных.

170. Если мы внимательно рассмотрим и сравним друг с другом отдельные правила, изложенные здесь, то сможем свести их к одному чрезвычайно общему правилу; строгое его доказательство можно будет дать лишь позднее [1]; но и здесь нетрудно будет усмотреть, что оно

[1]) См. § 214.

справедливо. Каждая алгебраическая функция состоит из частей, связанных друг с другом сложением, вычитанием, умножением или делением; эти части будут либо рациональными, либо иррациональными. Назовём эти количества, составляющие какую-либо функцию, её частями: *Тогда предложенная функция сперва будет дифференцироваться поочерёдно относительно каждой её части так, как если бы лишь одна эта часть была переменной, другие же все части — постоянными. После этого отдельные дифференциалы, полученные из отдельных частей описанным способом, нужно собрать в единую сумму, и таким образом получится дифференциал предложенной функции.*

С помощью этого правила можно дифференцировать решительно все функции, не исключая, как ниже будет показано, и трансцендентных.

171. Для пояснения этого правила положим, что функция y состоит из двух частей, связанных сложением или вычитанием, так что

$$y = p \pm q.$$

Будем считать сперва только первую часть p переменной, а вторую q — постоянной; тогда дифференциал будет равен dp; затем будем считать только вторую часть $\pm q$ переменной, а первую p — постоянной; тогда дифференциал будет равен $\pm dp$. Из этих дифференциалов и составляется искомый дифференциал, так что

$$dy = dp \pm dq$$

в полном согласии с тем, что было уже найдено выше. Отсюда тотчас же вытекает, что если функция будет состоять из нескольких частей, друг с другом складываемых или вычитаемых, т. е.

$$y = p \pm q \pm r \pm s,$$

то с помощью этого правила мы должны найти

$$dy = dp \pm dq \pm dr \pm ds,$$

т. е. в точности то же самое, что давало полученное прежде правило.

172. Если части умножаются друг на друга, так что

$$y = pq,$$

то, считая переменной только часть p, мы, очевидно, получим дифференциал, равный $q\,dp$; если же считать переменной только часть q, то дифференциал будет равен $p\,dq$. Эти два дифференциала нужно сложить друг с другом, тогда получится искомый дифференциал

$$dy = q\,dp + p\,dq,$$

что нам уже известно из предыдущего. Если умножением будут связаны несколько частей, как, например,

$$y = pqrs,$$

то, считая последовательно каждый из них переменной, мы получим такие дифференциалы:

$$qrs\,dp, \quad prs\,dq, \quad pqs\,dr, \quad pqr\,ds.$$

Их сумма даст искомый дифференциал, т. е.

$$dy = qrs\,dp + prs\,dq + pqs\,dr + pqr\,ds,$$

в полном согласии с ранее найденным. Итак, дифференциал составляется из одного и того же числа частей, как в том случае, когда части, составляющие функцию, прибавляются друг к другу или вычитаются, так и в том случае, когда они помножаются друг на друга.

173. Если части, образующие функцию, связаны друг с другом делением, т. е.

$$y=\frac{p}{q},$$

то согласно вышеприведённому правилу будем считать переменной сначала только часть p, и тогда вследствие постоянства q дифференциал будет равен $\frac{dp}{q}$. Затем полагаем переменной только часть q; так как $y=pq^{-1}$, то дифференциал будет равен $-\frac{p\,dq}{q^2}$; эти два дифференциала, вместе взятые, дадут дифференциал предложенной функции

$$dy=\frac{dp}{q}-\frac{p\,dq}{q^2}=\frac{q\,dp-p\,dq}{q^2},$$

что мы уже нашли раньше. Подобным образом, если предложенная функция есть

$$y=\frac{pq}{rs},$$

то, считая последовательно отдельные её части p, q, r, s переменными, мы получаем следующие дифференциалы:

$$\frac{q\,dp}{rs},\quad \frac{p\,dq}{rs},\quad -\frac{pq\,dr}{r^2s}\quad \text{и}\quad -\frac{pq\,ds}{rs^2},$$

откуда

$$dy=\frac{qrs\,dp+prs\,dq-pqs\,dr-pqr\,ds}{r^2s^2}.$$

174. Когда отдельные части, из которых составлена функция, таковы, что мы умеем выразить их дифференциалы, мы сможем также найти дифференциал самой функции. Если части будут рациональными функциями, то их дифференциалы можно найти не только с помощью данных выше правил, но и с помощью того же общего правила. Если же части будут иррациональными, то так как иррациональности сводятся к дробным степеням, то их можно будет продифференцировать по правилу дифференцирования степеней, согласно которому $dx^n=nx^{n-1}\,dx$. Таким же способом можно осуществить дифференцирование иррациональных формул, когда они, сверх того, содержат другие подкоренные выражения. Отсюда ясно, что если общее правило, которое здесь было дано, а ниже будет доказано, сочетать с правилом дифференцирования степеней, то можно будет выразить дифференциалы всех без исключения алгебраических функций.

175. Из всего вышесказанного с очевидностью следует, что если y есть какая-либо алгебраическая[1]) функция от x, то её дифференциал dy будет иметь вид $dy=p\,dx$, где выражение для p может быть всегда найдено по изложенным здесь правилам. Это выражение p также есть алгебраическая функция x, ибо при её определении не совершается никаких других операций, кроме тех обычных, с помощью которых составляется алгебраическая функция. Поэтому если y есть

---

[1]) Слово «алгебраическая» в оригинале отсутствует; очевидно, это описка или опечатка.

алгебраическая функция x, то и $\frac{dy}{dx}$ есть алгебраическая функция x. Точно так же, если z есть алгебраическая функция x и $dz = q\,dx$, то так как q есть алгебраическая функция x, то также $\frac{dz}{dy}$ есть алгебраическая функция x, равная $\frac{p}{q}$. Поэтому, если в некоторое алгебраическое выражение входит выражение вида $\frac{dz}{dy}$, это не препятствует тому, чтобы первое выражение было алгебраическим, если только y и z являются алгебраическими функциями.

176. Это заключение мы можем распространить и на дифференциалы вторых и более высоких порядков; действительно, если y есть алгебраическая функция x и если $dy = p\,dx$, а $dp = q\,dx$, то при постоянстве дифференциала dx, как мы выше видели, будет $d^2y = q\,dx^2$. А так как по вышеизложенным причинам количество q также будет алгебраической функцией x, то и $\frac{d^2y}{dx^2}$ является не только конечным количеством, но, сверх того, и алгебраической функцией x, если только y была такого же рода функцией. Подобным же образом мы увидим, что и $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ и т. д. будут алгебраическими функциями x, если только y будет алгебраической функцией; и если z также является алгебраической функцией x, то все конечные выражения, которые составляются из дифференциалов любого порядка количеств y, z и dx, как, например, $\frac{d^2y}{d^2z}$, $\frac{d^3y}{dz\,d^2y}$; $\frac{dx\,d^4y}{dy^3\,d^2z}$ и т. д., также будут алгебраическими функциями x.

177. Тот метод, который был здесь дан для нахождения первого дифференциала x, можно также применить для нахождения дифференциалов второго и более высокого порядков. Действительно если y есть какая-либо алгебраическая функция x, то из её дифференциала $dy = p\,dx$ мы можем найти выражение для p. Если мы его снова будем дифференцировать и получим $dp = q\,dx$, то, считая dx постоянным, мы будем иметь $d^2y = q\,dx^2$ и, таким образом, найдём второй дифференциал. Дифференцируя, далее, q и получив $dq = r\,dx$, мы найдём третий дифференциал $d^3y = r\,dx^3$ и таким же образом будут найдены дифференциалы более высоких порядков, ибо количества p, q, r и т. д. все будут алгебраическими функциями x, и для их дифференцирования достаточно вышеизложенных правил. Таким образом, вопрос этот можно решить последовательным дифференцированием: опуская dx в выражении дифференциала y, мы получаем выражение для $\frac{dy}{dx} = p$; если это выражение снова продифференцировать и разделить на dx, для чего достаточно повсюду опустить дифференциал dx, то мы получим выражение для $q = \frac{d^2y}{dx^2}$. Подобным образом найдём, далее, $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

I. Пусть $y = \frac{a^2}{a^2+x^2}$ и ищутся его дифференциалы первого и последующих порядков.

Дифференцируя и деля на dx, будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2a^2x}{(a^2+x^2)^2},$$

отсюда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2a^4+6a^2x^2}{(a^2+x^2)^3},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{24a^4x-24a^2x^3}{(a^2+x^2)^4},$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{24a^6-240a^4x^2+120a^2x^4}{(a^2+x^2)^5},$$
$$\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{-720a^6x+2400a^4x^3-720a^2x^5}{(a^2+x^2)^6} \quad \text{и т. д.}$$

II. Пусть $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; тогда первый и следующие дифференциалы будут:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{7/2}},$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{9/2}},$$
$$\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-x^2)^{11/2}},$$
$$\frac{d^6y}{dx^6}=\frac{225+4050x^2+5400x^4+720x^6}{(1-x^2)^{13/2}} \quad \text{и т. д.}$$

Вычисление этих дифференциалов можно легко продолжить дальше; однако закон, по которому члены их следуют друг за другом, усматривается не сразу. Коэффициент высшей степени x всегда есть произведение натуральных чисел от 1 до числа, равного порядку искомого дифференциала. Если продолжить дальше составление этих формул и внимательно рассмотреть их, то можно заметить, что для $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ будем иметь следующую общую формулу:

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\left\{\begin{aligned}&x^n+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^{n-4}+\\&+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1\cdot2\ldots6}x^{n-6}+\\&+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-7)}{1\cdot2\ldots8}x^{n-8}+\text{ и т. д.}\end{aligned}\right.$$

Подобного рода примеры полезны не только для приобретения навыка в практике дифференцирования; законы, наблюдаемые при нахождении дифференциалов всех порядков, и сами по себе достойны внимания и могут привести к другим открытиям.

ГЛАВА VI

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

178. В интегральном исчислении нам ещё придётся встретиться с бесчисленными видами трансцендентных, т. е. неалгебраических, количеств. Но уже во «Введении в анализ бесконечно малых» мы имели возможность познакомиться с некоторыми наиболее употребительными количествами такого рода; мы встретились с ними в учении о логарифмах и круговых дугах. Свойства этих количеств были изложены с такой ясностью, что вычисления с ними можно производить почти так же легко, как с алгебраическими количествами. В этой главе мы разыщем также их дифференциалы, чтобы свойства и природа этих количеств стали ещё яснее и чтобы, таким образом, был продолжен путь к интегральному исчислению, которое, собственно, и является источником трансцендентных количеств.

179. Прежде всего рассмотрим логарифмические количества, т. е. такие функции от x, которые, кроме алгебраических выражений, содержат также логарифм количества x или какие-либо его функции. Так как для выполнения дифференцирования алгебраические количества не создают никаких затруднений, то вся трудность состоит в нахождении дифференциала логарифма какой-либо функции от x. Так как есть много разных видов логарифмов, которые, однако, имеют друг к другу постоянные отношения, то здесь мы предпочтительно будем рассматривать гиперболические логарифмы; из них легко образуются и все остальные логарифмы. Действительно, если гиперболический логарифм функции p будет равен $\mathrm{l}\,p$, то логарифм той же функции p, взятый из другой системы, будет равен $m\,\mathrm{l}\,p$, где m есть число, которым выражается отношение этой системы логарифмов к гиперболическим. Таким образом, $\mathrm{l}\,p$ здесь всюду будет обозначать гиперболический логарифм количества p.

180. Итак, будем искать дифференциал гиперболического логарифма количества x и положим $y=\mathrm{l}\,x$, так что требуется найти значение дифференциала dy. Положим $x+dx$ вместо x; тогда y перейдёт в $y^{\mathrm{I}}=y+dy$, поэтому будем иметь

$$(y+dy)=\mathrm{l}(x+dx)$$

и

$$dy=\mathrm{l}(x+dx)-\mathrm{l}\,x=\mathrm{l}\left(1+\frac{dx}{x}\right);$$

но мы уже выразили раньше [1]) гиперболический логарифм выражения $1+z$ с помощью бесконечного ряда и нашли

$$l(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+ \text{ и т. д.}$$

Подставив $\frac{dx}{x}$ вместо z, мы получим

$$dy=\frac{dx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+\frac{dx^3}{3x^3}+ \text{ и т. д.}$$

Так как все члены этого ряда исчезают по сравнению с первым, то будем иметь

$$d\cdot lx=dy=\frac{dx}{x}.$$

Значит, дифференциал какого-либо другого логарифма, отношение которого к гиперболическому есть $n:1$, будет равен $\frac{ndx}{x}$.

181. Если будет предложен логарифм lp какой-либо функции p количества x, то с помощью того же рассуждения мы найдём, что его дифференциал равен $\frac{dp}{p}$; таким образом, для разыскания дифференциалов логарифмов мы получим следующее правило:

Нужно взять дифференциал количества p, логарифм которого предлагается, и этот дифференциал, разделённый на самое количество p, даст искомый дифференциал логарифма.

Это правило вытекает также из выражения $\frac{p^0-1^0}{0}$, к которому в предшествующей книге [2]) мы привели логарифм количества p. Пусть $\omega=0$; так как $lp=\frac{1^\omega-1}{\omega}$, то будем иметь

$$d\cdot lp=d\cdot\frac{1}{\omega}p^\omega=p^{\omega-1}dp=\frac{dp}{p},$$

так как $\omega=0$. Заметим, что $\frac{dp}{p}$ есть дифференциал гиперболического логарифма p, если же будет предложен обыкновенный логарифм p, то этот дифференциал $\frac{dp}{p}$ нужно умножить на число 0,434 294 48 и т. д.

182. С помощью этого правила мы можем найти очень легко дифференциал логарифма какой угодно функции количества x, как можно видеть из следующих примеров.

I. Если $y=lx$, то $dy=\frac{dx}{x}$.

II. Если $y=lx^n$, то положим $x^n=p$, так что $y=lp$, и будем иметь $dy=\frac{dp}{p}$. Но $dp=nx^{n-1}dx$, откуда

$$dy=\frac{n\,dx}{x}.$$

Тот же результат мы получим, опираясь на основное свойство логарифмов; действительно, так как $lx^n=n\,lx$, то будем иметь $d\cdot lx^n=$ $=nd\cdot lx=\frac{n\,dx}{x}$.

---

[1]) «Введение в анализ», т. I, гл. VII, § 123.

[2]) «Введение в анализ», т. I, гл. VII.

III. Если $y = \mathrm{l}\,(1+x^2)$, то

$$dy = \frac{2x\,dx}{1+x^2}.$$

IV. Пусть $y = \mathrm{l}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; так как $y = -\mathrm{l}\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,(1-x^2)$, то найдём

$$dy = \frac{x\,dx}{1-x^2}.$$

V. Если $y = \mathrm{l}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, то вследствие $y = \mathrm{l}\,x - \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,(1+x^2)$ получим

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{dx}{x\,(1+x^2)}.$$

VI. Если $y = \mathrm{l}\,(x+\sqrt{1+x^2})$, то

$$dy = \frac{dx + x\,dx : \sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\,dx + dx\sqrt{1+x^2}}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}};$$

если числитель и знаменатель этой дроби разделить на $x+\sqrt{1+x^2}$, то получим

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

VII. Если $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{l}\,(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2})$, то положим $x\sqrt{-1} = z$. Так как $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{l}\,(z+\sqrt{1+z^2})$, то по предыдущему будем иметь $dy = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,dz : \sqrt{1+z^2}$. Поэтому вследствие $dz = dx\sqrt{-1}$ будем иметь

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Итак, хотя предложенный логарифм содержал мнимые количества, однако дифференциал его является действительным.

183. Если количество, логарифм которого предложен, имеет множителей, то сам логарифм разлагается на несколько других логарифмов следующим образом. Пусть предложено $y = \mathrm{l}\,pqrs$; так как $y = \mathrm{l}\,p + \mathrm{l}\,q + \mathrm{l}\,r + \mathrm{l}\,s$, то мы будем иметь

$$dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s}.$$

Такое разложение имеет место и тогда, когда количество, логарифм которого нужно дифференцировать, является дробью. Действительно, пусть $y = \mathrm{l}\,\frac{pq}{rs}$; так как $y = \mathrm{l}\,p + \mathrm{l}\,q - \mathrm{l}\,r - \mathrm{l}\,s$, то мы будем иметь

$$dy = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q} - \frac{dr}{r} - \frac{ds}{s}.$$

Не причинят затруднения и степени; действительно, пусть $y = \mathrm{l}\,\frac{p^m q^n}{r^\mu s^\nu}$; так как $y = m\,\mathrm{l}\,p + n\,\mathrm{l}\,q - \mu\,\mathrm{l}\,r - \nu\,\mathrm{l}\,s$, то мы будем иметь

$$dy = \frac{m\,dp}{p} + \frac{n\,dq}{q} - \frac{\mu\,dr}{r} - \nu\,\frac{ds}{s}.$$

I. Пусть $y = \mathrm{l}\,(a+x)(b+x)(c+x)$; так как

$$y = \mathrm{l}\,(a+x) + \mathrm{l}\,(b+x) + \mathrm{l}\,(c+x),$$

то искомый дифференциал будет

$$dy = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{b+x} + \frac{dx}{c+x}.$$

II. Если $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x}$, то

$$y = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,(1+x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,(1-x);$$

отсюда

$$dy = \frac{\frac{1}{2}\,dx}{1+x} - \frac{\frac{1}{2}\,dx}{1-x} = \frac{dx}{1-x^2}.$$

III. Если $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}$, то вследствие

$$y = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,(\sqrt{1+x^2}+x) - \frac{1}{2}\,(\sqrt{1+x^2}-x)$$

будем иметь

$$dy = \frac{\frac{1}{2}\,dx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\frac{1}{2}\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

То же самое мы найдём легче, если уничтожим иррациональность в знаменателе, умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{1+x^2}+x$; действительно, мы получим

$$y = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,(\sqrt{1+x^2}+x)^2 = \mathrm{l}\,(\sqrt{1+x^2}+x);$$

дифференциал этого количества, как мы раньше видели, есть

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

IV. Пусть $y = \mathrm{l}\,\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; положим числитель этой дроби равным p:

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} = p,$$

а знаменатель равным q:

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} = q;$$

мы будем иметь

$$y = \mathrm{l}\,\frac{p}{q} = \mathrm{l}\,p - \mathrm{l}\,q \quad \text{и} \quad dy = \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}.$$

Но

$$dp = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} - \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = \frac{-dx}{2\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}) = \frac{-q\,dx}{2\sqrt{1-x^2}}$$

и

$$dq = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} + \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = \frac{p\,dx}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда

$$\frac{dp}{p}-\frac{dq}{q}=\frac{-q\,dx}{2p\sqrt{1-x^2}}-\frac{p\,dx}{2q\sqrt{1-x^2}}=\frac{-(p^2+q^2)\,dx}{2\,pq\,\sqrt{1-x^2}}.$$

Но $p^2+q^2=4$ и $pq=2x$, откуда

$$dy=-\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Тот же дифференциал найдётся легче, если предложенный логарифм мы преобразуем следующим образом:

$$y=\mathrm{l}\,\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}=\mathrm{l}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right).$$

Действительно, положив $\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}=p$, мы будем иметь

$$dp=-\frac{dx}{x^2}-\frac{dx}{x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}=\frac{-dx}{x^2}-\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-dx\,(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

и, значит, вследствие $p=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ будем иметь

$$dy=\frac{dp}{p}=\frac{-dx}{x\sqrt{1-x^2}},\ \text{как раньше.}$$

184. Так как первые дифференциалы логарифмов, если их разделить на dx, *являются алгебраическими количествами*, то вторые дифференциалы и дифференциалы следующих порядков легко находятся по правилам предыдущей главы; при этом дифференциал dx мы будем считать постоянным. Так, положив $y=\mathrm{l}\,x$, мы будем иметь:

$$dy=\frac{dx}{x}\quad\text{и}\quad\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x},$$

$$d^2y=\frac{-dx^2}{x^2}\quad\text{и}\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{x^2},$$

$$d^3y=\frac{2\,dx^3}{x^3}\quad\text{и}\quad\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2}{x^3},$$

$$d^4y=\frac{-6dx^4}{x^4}\quad\text{и}\quad\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{-6}{x^4}$$

и т. д.

Точно так же, если p будет алгебраическим количеством и если $y=\mathrm{l}\,p$, то хотя y и не является алгебраическим количеством, однако $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д. будут алгебраическими функциями количества x.

185. После того как мы познакомились с дифференцированием логарифмов, мы легко сможем дифференцировать функции, в которые входят алгебраические выражения и логарифмы. Особенно легко это тогда, когда функции составляются только из логарифмов, что видно из следующих примеров.

I. Пусть $y=(\mathrm{l}\,x)^2$; положим $\mathrm{l}\,x=p$, тогда вследствие $y=p^2$ будем иметь $dy=2p\,dp$. Но $dp=\frac{dx}{x}$, значит, будем иметь

$$dy=\frac{2\,dx}{x}\,\mathrm{l}\,x.$$

II. Подобным образом, если $y=(\mathrm{l}\,x)^n$, то

$$dy=\frac{n\,dx}{x}(\mathrm{l}\,x)^{n-1},$$

откуда, если $y=\sqrt{\mathrm{l}\,x}$, то вследствие $n=\frac{1}{2}$ будем иметь

$$dy=\frac{dx}{2x\sqrt{\mathrm{l}\,x}}.$$

III. Если p будет какая-либо функция количества x и если $y=(\mathrm{l}\,p)^n$, то

$$dy=\frac{n\,dp}{p}(\mathrm{l}\,p)^{n-1}.$$

Так как дифференциал dp можно найти по предыдущим правилам, то будет известен также и дифференциал количества y.

IV. Если $y=\mathrm{l}\,p\cdot\mathrm{l}\,q$ и если p и q суть какие-либо функции x, то по правилу дифференцирования произведения, приведённому выше, будем иметь

$$dy=\frac{dp}{p}\,\mathrm{l}\,q+\frac{dq}{q}\,\mathrm{l}\,p.$$

V. Если $y=x\,\mathrm{l}\,x$, то по тому же правилу будем иметь

$$dy=dx\,\mathrm{l}\,x+\frac{x\,dx}{x}=dx\,\mathrm{l}\,x+dx.$$

VI. Если $y=x^m\,\mathrm{l}\,x-\frac{1}{m}x^m$, то, дифференцируя по отдельности части этого выражения, найдём

$$d\cdot x^m\,\mathrm{l}\,x=mx^{m-1}dx\,\mathrm{l}\,x+x^{m-1}dx \quad \text{и} \quad d\cdot\frac{1}{m}x^m=x^{m-1}dx,$$

откуда

$$dy=mx^{m-1}\,dx\,\mathrm{l}\,x.$$

VII. Если $y=x^m(\mathrm{l}\,x)^n$, то

$$dy=mx^{m-1}\,dx\,(\mathrm{l}\,x)^n+nx^{m-1}\,dx\,(\mathrm{l}\,x)^{n-1},$$

VIII. Может случиться, что встретятся логарифмы логарифмов; если, например, будем иметь $y=\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x$, то положим $\mathrm{l}\,x=p$; тогда $y=\mathrm{l}\,p$ и $dy=\frac{dp}{p}$; но $dp=\frac{dx}{x}$, откуда

$$dy=\frac{dx}{x\,\mathrm{l}\,x}.$$

IX. Если же будет $y=\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x$, то, положив $\mathrm{l}\,x=p$, будем иметь $y=\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,p$ и по предыдущему примеру получим $dy=\frac{dp}{p\,\mathrm{l}\,p}$. Но $dp=\frac{dx}{x}$; подставив эти значения, будем иметь

$$dy=\frac{dx}{x\,\mathrm{l}\,x\cdot\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x}.$$

186. Изложив дифференцирование логарифмов, мы переходим к показательным количествам, т. е. к таким степеням, показатели степени которых суть переменные количества. Дифференциалы таких функций могут быть найдены следующим образом. Пусть ищется дифференциал количества a^x; для разыскания его положим $y=a^x$; взяв логарифмы, будем иметь $\mathrm{l}\,y = x\,\mathrm{l}\,a$. Теперь возьмём дифференциалы; тогда получим $\frac{dy}{y} = dx\,\mathrm{l}\,a$, откуда $dy = y\,dx\,\mathrm{l}\,a$. А так как $y = a^x$, то $dy = a^x\,dx\,\mathrm{l}\,a$; это и есть дифференциал количества a^x. Подобным образом, если p будет какой-либо функцией x, то дифференциал показательной функции a^p будет равен $a^p\,dp\,\mathrm{l}\,a$.

187. Тот же дифференциал можно получить, непосредственно основываясь на свойстве показательных количеств, изложенном во «Введении». Пусть предложено выражение a^p, где p обозначает какую-либо функцию x; если положить $x + dx$ вместо x, эта функция перейдёт в $p + dp$. Поэтому, если положить $y = a^p$, то когда x перейдёт в $x + dx$, мы будем иметь $y + dy = a^{p+dp}$ и, значит,

$$dy = a^{p+dp} - a^p = a^p\,(a^{dp} - 1).$$

Но выше[1]) мы показали, что показательное количество a^z выражается рядом

$$1 + z\,\mathrm{l}\,a + \frac{z^2\,(\mathrm{l}\,a)^2}{2} + \frac{z^3\,(\mathrm{l}\,a)^3}{6} + \text{и т. д.},$$

откуда

$$a^{dp} = 1 + dp\,\mathrm{l}\,a + \frac{dp^2\,(\mathrm{l}\,a)^2}{2} + \text{и т. д.}$$

и $a^{dp} - 1 = dp\,\mathrm{l}\,a$, так как все следующие члены исчезают по сравнению с $dp\,\mathrm{l}\,a$. Следовательно, будем иметь

$$dy = d \cdot a^p = a^p\,dp\,\mathrm{l}\,a.$$

Поэтому дифференциал показательного количества a^p есть произведение трёх сомножителей: самого показательного количества, дифференциала dp показателя степени и логарифма постоянного количества a, которое возводится в переменную степень.

188. Пусть e есть число, гиперболический логарифм которого равен 1, так что $\mathrm{l}\,e = 1$. Тогда дифференциал количества e^x будет равен $e^x dx$. Если dx считать постоянным, то дифференциал предыдущего выражения будет равен $e^x\,dx^2$; это есть второй дифференциал количества e^x. Подобным образом третий дифференциал будет равен $e^x\,dx^3$. Поэтому, если $y = e^{nx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = ne^{nx} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = n^2e^{nx}$$

и, далее,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n^3\,e^{nx}, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = n^4\,e^{nx} \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда ясно, что первый, второй и все следующие дифференциалы количества e^{nx} образуют геометрическую прогрессию и, значит, дифференциал порядка m количества $e^{nx} = y$, т. е. $d^m y$, равен $n^m e^{nx}\,dx^m$ и, следовательно, $\frac{d^m y}{y\,dx^m}$ есть постоянное количество, равное n^m.

189. Если количество, которое возводится в степень, само будет переменным, то дифференциал найдётся подобным же образом. Пусть p и q суть какие-либо функции x и пусть предложено показа-

---

[1]) «Введение в анализ», т. I, гл. VII, § 125.

тельное количество $y=p^q$. Взяв логарифмы, будем иметь $\mathrm{l}\,y=q\,\mathrm{l}\,p$; продифференцировав, получим

$$\frac{dy}{y}=dq\,\mathrm{l}\,p+\frac{qdp}{p},$$

откуда

$$dy=y\,dq\,\mathrm{l}\,p+\frac{yq\,dp}{p}=p^q\,dq\,\mathrm{l}\,p+qp^{q-1}\,dp,$$

так как $y=p^q$. Итак, этот дифференциал состоит из двух членов, из которых первый $p^q\,dq\,\mathrm{l}\,p$ получается, если предложенное количество p^q продифференцировать так, как если бы p было постоянным количеством и лишь показатель q был бы переменным; другой же член $qp^{q-1}\,dp$ получается, если в предложенном количестве p^q показатель q рассматривается как постоянное количество и лишь количество p считается переменным. Следовательно, этот дифференциал можно было бы найти по правилу, изложенному выше (§ 170).

190. Дифференциал этого же выражения p^q можно найти, исходя из основного свойства показательных количеств. Пусть $y=p^q$; положим $x+dx$ вместо x, тогда $y+dy=(p+dp)^{q+dq}$. Если это выражение мы по известному нам способу разложим в ряд, то получим

$$y+dy=p^{q+dq}+(q+dq)\,p^{q+dq-1}\,dp+\frac{(q+dq)(q+dq-1)}{1\cdot 2}\,p^{q+dq-2}\,dp^2+$$
и т. д.;

поэтому

$$dy=p^{q+dq}-p^q+(q+dq)\,p^{q+dq-1}\,dp,$$

ибо члены, содержащие более высокие степени dp, исчезнут по сравнению с членом $(q+dq)\,p^{q+dq-1}\,dp$. Но

$$p^{q+dq}-p^q=p^q\,(p^{dq}-1)=p^q\,(1+dq\,\mathrm{l}\,p+\frac{dq^2\,(\mathrm{l}\,p)^2}{2}+\text{и т. д.}-1)=$$
$$=p^q\,dq\,\mathrm{l}\,p.$$

Второй же член, если в нём написать q вместо $q+dq$, обратится в $qp^{q-1}\,dp$, и значит, как и прежде, мы будем иметь $dy=p^q\,dq\,\mathrm{l}\,p+qp^{q-1}\,dp$.

191. Тот же дифференциал можно найти, исходя из основного свойства показательных количеств ещё следующим образом: если обозначить через e число, гиперболический логарифм которого равен 1, то $p^q=e^{q\,\mathrm{l}\,p}$. Так как логарифм обоих этих количеств есть $q\,\mathrm{l}\,p$, то $y=e^{q\,\mathrm{l}\,p}$. Поэтому, так как теперь основание степени e является постоянным, то

$$dy=e^{q\,\mathrm{l}\,p}\left(dq\,\mathrm{l}\,p+\frac{q\,dp}{p}\right),$$

как раньше было указано в правиле § 187. Восстановим снова p^q вместо $e^{q\,\mathrm{l}\,p}$, тогда будем иметь

$$dy=p^q\,dq\,\mathrm{l}\,p+p^q\,q\,dp:p=p^q\,dq\,\mathrm{l}\,p+qp^{q-1}\,dp.$$

Итак, если $y=x^x$, то $dy=x^x\,dx\,\mathrm{l}\,x+x^x\,dx$: отсюда можно определить также и следующие дифференциалы; именно, мы найдём

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^x\left(\frac{1}{x}+(1+\mathrm{l}\,x)^2\right),$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=x^x\left((1+\mathrm{l}\,x)^3+\frac{3\,(1+\mathrm{l}\,x)}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

и т. д.

192. Из дифференциалов функций, в которые входят показательные количества, в первую очередь нужно отметить в качестве примеров те, которые происходят от дифференцирования выражения $e^x p$:

$$d \cdot e^x p = e^x dp + e^x p\, dx = e^x (dp + p\, dx).$$

I. Если $y = e^x x^n$, то

$$dy = e^x n x^{n-1} dx + e^x x^n dx,$$

т. е.

$$dy = e^x dx\, (n x^{n-1} + x^n).$$

II. Если $y = e^x (x - 1)$, то

$$dy = e^x x\, dx.$$

III. Если $y = e^x (x^2 - 2x + 2)$, то

$$dy = e^x x^2 dx.$$

IV. Если $y = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x + 6)$, то

$$dy = e^x x^3 dx.$$

193. Если сами показатели будут показательными количествами, то дифференцирование выполняется по тем же правилам. Так, пусть требуется дифференцировать количество e^{e^x}; положим $e^x = p$, так что

$$y = e^{e^x} = e^p.$$

Мы будем иметь $dy = e^p dp$; но $dp = e^x dx$, откуда, если $y = e^{e^x}$, то $dy = e^{e^x} e^x dx$. Если же $y = e^{e^{e^x}}$, то

$$dy = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx.$$

Если теперь $y = p^{q^r}$, то положим $q^r = z$; будем иметь

$$dy = p^z dz\, l\, p + z p^{z-1} dp$$

и

$$dz = q^r dr\, l\, q + r q^{r-1} dq,$$

откуда

$$dy = p^z q^r dr\, l\, p\, l\, q + p^z r q^{r-1} dq\, l\, p + p^z q^r dp : p.$$

Поэтому, если $y = p^{q^r}$, то

$$dy = p^{q^r} q^r \left(dr\, l\, p\, l\, q + \frac{r\, dq\, l\, p}{q} + \frac{dp}{p} \right).$$

Таким же образом можно будет найти дифференциал любого показательного количества.

194. Перейдём теперь к тем трансцендентным количествам, к знакомству с которыми нас выше привело[1]) рассмотрение круговых дуг. Пусть в круге, радиус которого мы будем считать равным единице, предложена дуга, синус которой равен x. Эту дугу мы обозначим через $\arcsin x$ и найдём дифференциал этой дуги, т. е. приращение, которое она принимает, когда синус x возрастает на свой дифференциал dx. Это можно свести к дифференцированию логарифмов, так как во «Введении» (§ 138) мы показали, что выражение $\arcsin x$ можно

---

[1]) «Введение в анализ», т. I, гл. VIII.

представить логарифмическим выражением $\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\left(\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-1}\right)$. Итак, положим $y=\arcsin x$. Тогда

$$y=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\left(\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-1}\right).$$

После дифференцирования (§ 182 гл. VII) получим

$$dy=\frac{\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+dx\sqrt{-1}\right)}{\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-1}}=\frac{dx\left(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-1}\right)\sqrt{1-x^2}},$$

откуда

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

195. Дифференциал круговой дуги можно ещё легче найти без помощи логарифмов. Действительно, пусть $y=\arcsin x$; тогда x будет синусом дуги y, т. е. $x=\sin y$. Так как если вместо x положить $x+dx$, y перейдёт в $y+dy$, то $x+dx=\sin(y+dy)$; но так как

$$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b,$$

то

$$\sin(y+dy)=\sin y\cdot\cos dy+\cos y\sin dy.$$

Синус же исчезающей дуги dy равен самой дуге, а косинус равен полному синусу[1]); поэтому

$$\sin(y+dy)=\sin y+dy\cos y,$$

и, значит,

$$x+dx=\sin y+dy\cos y.$$

Но так как $\sin y=x$, то косинус количества y, т. е. $\cos y$, равен $\sqrt{1-x^2}$. После подстановки этих значений будем иметь $dx=dy\sqrt{1-x^2}$, откуда получим

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Итак, дифференциал дуги, синус которой предложен, равняется дифференциалу синуса, разделённому на косинус.

196. Если p будет какой-либо функцией количества x, а y будет обозначать дугу, синус которой равен p, т. е. $y=\arcsin p$, то дифференциал этой дуги $dy=\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}$, где $\sqrt{1-p^2}$ выражает косинус той же дуги. Поэтому можно найти также и дифференциал дуги, косинус которой предложен. Действительно, пусть $y=\arccos x$; тогда синус той же дуги равен $\sqrt{1-x^2}$ и, значит, $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$. Положив $p=\sqrt{1-x^2}$, будем иметь

$$dp=\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

[1]) То-есть единице, максимальному значению синуса [*Г. К.*] (Это примечание, так же как некоторые из дальнейших, отмеченные инициалами Г. К., принадлежат Г. Ковалевскому, редактору 10-го тома Полного собрания сочинений Эйлера).

и

$$\sqrt{1-p^2}=x,$$

откуда

$$dy=\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Итак, дифференциал дуги, косинус которой предложен, равняется дифференциалу косинуса, взятому с обратным знаком и разделённому на синус той же дуги.

Это можно также показать следующим образом. Пусть $y=\arccos x$; положим $z=\arcsin x$; тогда $dz=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, но дуга y и дуга z, вместе взятые, дают постоянную дугу $90°$, так что $y+z$ есть постоянное количество и, следовательно, $dy+dz=0$, т. е. $dy=-dz$, откуда $dy=\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, как и прежде.

197. Пусть требуется найти дифференциал дуги, тангенс которой дан, так что $y=\operatorname{arc\,tg} x$; но синус дуги, тангенс которой есть x, будет равен $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, а косинус равен $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Итак, положим $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=p$, так что $\sqrt{1-p^2}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Тогда $y=\arcsin p$; отсюда согласно только что данному правилу будем иметь $dy=\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}$. Но вследствие $p=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ будем иметь $dp=\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; подставив эти значения, получим

$$dy=\frac{dx}{1+x^2}.$$

Итак, дифференциал дуги, тангенс которой предложен, равняется дифференциалу тангенса, разделённому на квадрат секанса. Действительно, если x есть тангенс, то $\sqrt{1+x^2}$ есть секанс.

198. Подобным образом, если будет предложена дуга, котангенс которой дан, так что $y=\operatorname{arc\,ctg} x$, то так как тангенс той же дуги $=\frac{1}{x}$, то, положив $\frac{1}{x}=p$, будем иметь $y=\operatorname{arc\,tg} p$, и следовательно, $dy=\frac{dp}{1+p^2}$. А так как $dp=\frac{-dx}{x^2}$, то после подстановки будем иметь

$$dy=\frac{-dx}{1+x^2},$$

т. е. *дифференциал котангенса, взятый с обратным знаком и разделённый на квадрат косеканса.*

Далее, пусть предложено $y=\operatorname{arc\,sec} x$. Так как $y=\arccos\frac{1}{x}$, то

$$dy=\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Если же $y=\operatorname{arc\,cosec} x$, то будем иметь $y=\arcsin\frac{1}{x}$ и, значит,

$$dy=\frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Часто встречается и синус-версус[1]; пусть предложено $y = \arcsin \mathrm{v}\, x$. Так как $y = \arccos(1-x)$, а синус этой дуги равен $\sqrt{2x-x^2}$, то

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

199. Итак, хотя дуга, для которой дан синус, или косинус, или тангенс, или котангенс, или секанс, или косеканс, или, наконец, синус-версус, есть количество трансцендентное, однако её дифференциал, разделённый на dx, будет алгебраическим количеством и, следовательно, алгебраическими количествами будут также вторые, третьи, четвёртые и т. д. её дифференциалы, если их разделить на соответствующие степени dx. Впрочем, для того чтобы лучше усвоить это дифференцирование, дадим здесь следующие примеры:

I. Пусть $y = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$; положим $p = 2x\sqrt{1-x^2}$, так что $y = \arcsin p$, тогда $dy = \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}$. Но

$$dp = 2\,dx\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2dx\,(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

и

$$\sqrt{1-p^2} = 1-2x^2;$$

подставив эти значения, будем иметь

$$dy = \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Это ясно также и из того, что $2x\sqrt{1-x^2}$ есть синус дуги, вдвое большей чем та, для которой x есть синус; следовательно, будем иметь $y = 2\arcsin x$ и, значит, $dy = \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

II. Пусть $y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$; положим $\frac{1-x^2}{1+x^2} = p$, тогда

$$dp = \frac{-4x\,dx}{(1+x^2)^2}$$

и

$$\sqrt{1-p^2} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Так как

$$dy = \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}},$$

то будем иметь

$$dy = \frac{-2\,dx}{1+x^2}.$$

[1] Синус-версус есть проекция дуги окружности на радиус, проведённый к одному из её концов; при радиусе, равном 1, он равен $1-\cos\alpha$, где α — угловая мера дуги.

III. Пусть $y = \arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}}$; положим $\sqrt{\frac{1-x}{2}} = p$, тогда

$$\sqrt{1-p^2} = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \text{ и } dp = \frac{-dx}{4\sqrt{\frac{1-x}{2}}},$$

откуда

$$dy = \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{-dx}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

IV. Пусть $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}$; положив $p = \frac{2x}{1-x^2}$, будем иметь

$$1 + p^2 = \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}$$

и

$$dp = \frac{2\,dx\,(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

Так как по правилу дифференцирования тангенса (§ 197)

$$dy = \frac{dp}{1+p^2},$$

то

$$dy = \frac{2\,dx}{1+x^2}.$$

V. Пусть $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; положим $p = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, тогда

$$p^2 = \frac{2+x^2-2\sqrt{1+x^2}}{x^2},$$

$$1+p^2 = \frac{2+2x^2-2\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{2\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

и

$$dp = \frac{-dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} + \frac{dx}{x^2} = \frac{dx\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

Так как $dy = \frac{dp}{1+p^2}$, то будем иметь

$$dy = \frac{dx}{2(1+x^2)},$$

что ясно также из того, что

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$$

VI. Пусть $y = e^{\arcsin x}$; это выражение также можно дифференцировать по вышеизложенным правилам, и мы будем иметь

$$dy = e^{\arcsin x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Таким же образом можно будет дифференцировать все функции x, в которые, кроме логарифмов и показательных количеств, входят также круговые дуги.

200. Так как дифференциалы дуг, разделённые на dx, суть количества алгебраические, то их вторые и следующие дифференциалы можно находить по правилам дифференцирования алгебраических функций. Пусть, например, $y = \arcsin x$. Так как $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, то будем иметь $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Дифференциал этого выражения даст значение $\frac{d^2y}{dx^2}$, если считать dx постоянным. Таким образом, дифференциалы всех порядков количества y выразятся следующим образом:

если $y = \arcsin x$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

и если считать dx постоянным,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}},$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{7/2}},$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{9/2}},$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-x^2)^{11/2}},$$

и т. д.;

отсюда, как и раньше (§ 177), мы заключаем, что в общем случае будет

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} x^n + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4} + \\ + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^{n-6} + \text{и т. д.} \end{array} \right\}$$

201. Остаются количества, которые получаются из обращения вышерассмотренных, т. е. синусы и тангенсы данных дуг. Как их нужно дифференцировать, мы сейчас покажем. Пусть x есть дуга круга и пусть $\sin x$ — её синус, дифференциал которого мы должны найти. Положим $y = \sin x$; подставим $x + dx$ вместо x, y перейдёт в $y + dy$; мы будем иметь $y + dy = \sin(x + dx)$ и

$$dy = \sin(x+dx) - \sin x.$$

Но

$$\sin(x+dx) = \sin x \cdot \cos dx + \cos x \cdot \sin dx$$

и, как мы показали во «Введении» [1]),

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5} - \text{и т. д.},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{и т. д.}$$

Отбросив исчезающие члены, будем иметь $\cos dx = 1$ и $\sin dx = dx$, откуда

$$\sin(x+dx) = \sin x + dx \cos x.$$

Поэтому если $y = \sin x$, то $dy = dx \cos x$.

[1]) Часть I, гл. VIII, § 134.

Итак, дифференциал синуса какой-либо дуги равен дифференциалу этой дуги, помноженному на её косинус.

Если p будет какой-либо функцией x, то подобным образом будем иметь

$$d\cdot\sin p = dp\cdot\cos p.$$

202. Подобным образом, если требуется найти дифференциал косинуса дуги x, то положим $y=\cos x$ и, подставляя $x+dx$ вместо x, получим

$$y+dy=\cos(x+dx).$$

Но

$$\cos(x+dx)=\cos x\cos dx-\sin x\sin dx,$$

а поскольку, как мы только что видели, $\cos dx=1$ и $\sin dx=dx$, то

$$y+dy=\cos x-dx\sin x,$$

откуда

$$dy=-dx\sin x.$$

Итак, дифференциал косинуса какой-либо дуги равен дифференциалу этой дуги, взятому с обратным знаком и помноженному на её синус. Так, если p будет какой-либо функцией количества x, то

$$d\cdot\cos p=-dp\sin p.$$

Эти дифференциалы могут быть получены также из предыдущих следующим образом. Пусть $y=\sin p$; тогда $p=\arcsin y$ и

$$dp=\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Но вследствие $y=\sin p$ будем иметь $\cos p=\sqrt{1-y^2}$; подставив это значение, будем иметь $dp=\frac{dy}{\cos p}$ и

$$dy=dp\cos p,$$

как прежде. Равным образом, если $y=\cos p$, то $\sqrt{1-y^2}=\sin p$ и $p=\arccos y$; следовательно,

$$dp=\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}=-\frac{dy}{\sin p},$$

откуда, как и прежде, получаем

$$dy=-dp\sin p.$$

203. Если $y=\operatorname{tg}x$, то

$$dy=\operatorname{tg}(x+dx)-\operatorname{tg}x.$$

Но

$$\operatorname{tg}(x+dx)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}dx}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}dx};$$

если от этой дроби отнять тангенс x, то останется

$$dy=\frac{\operatorname{tg}dx\,(1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}x)}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}dx}.$$

Но тангенс исчезающей дуги dx равен самой дуге, так что $\operatorname{tg}dx=dx$, а знаменатель $1-dx\operatorname{tg}x$ обращается в единицу; поэтому будем иметь

$$dy=dx\,(1+\operatorname{tg}^2 x),$$
$$1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},$$

где $\cos^2 x$ обозначает квадрат косинуса количества x; следовательно, если $y=\operatorname{tg}x$, то

$$dy=dx\sec^2 x=\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Этот дифференциал можно найти также с помощью дифференцирования синусов и косинусов; действительно, так как $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, то

$$dy=\frac{dx\cos^2 x+dx\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{dx}{\cos^2 x}$$

вследствие

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

204. Этот же дифференциал можно найти иначе. Так как $y=\operatorname{tg}x$, то $x=\operatorname{arc}\operatorname{tg}y$, и по вышеизложенным правилам мы получим

$$dx=\frac{dy}{1+y^2}.$$

Но так как $y=\operatorname{tg}x$, мы будем иметь $\sqrt{1+y^2}=\sec x=\frac{1}{\cos x}$. Значит, $dx=dy\cos^2 x$ и

$$dy=\frac{dx}{\cos^2 x},$$

как прежде. *Итак, дифференциал тангенса какой-либо дуги равняется дифференциалу дуги, разделённому на квадрат косинуса той же дуги.*

Подобным образом, если $y=\operatorname{ctg}x$, то $x=\operatorname{arc}\operatorname{ctg}y$ и

$$dx=\frac{-dy}{1+y^2}.$$

Но

$$\sqrt{1+y^2}=\operatorname{cosec}x=\frac{1}{\sin x},$$

откуда

$$dx=-dy\sin^2 x$$

и

$$dy=\frac{-dx}{\sin^2 x}.$$

Итак, дифференциал котангенса какой-либо дуги равняется дифференциалу дуги, взятому с обратным знаком и разделённому на квадрат синуса той же дуги.

Или: так как $\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$, то, дифференцируя эту дробь, будем иметь

$$dy=\frac{-dx\sin^2 x-dx\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{dx}{\sin^2 x},$$

как только что было найдено.

205. Пусть предлагается секанс дуги, так что $y=\sec x$; так как $y=\frac{1}{\cos x}$, то

$$dy=\frac{dx\sin x}{\cos^2 x}=dx\operatorname{tg} x\sec x.$$

Подобным образом, если $y=\operatorname{cosec} x$, то вследствие $y=\frac{1}{\sin x}$ будем иметь

$$dy=\frac{-dx\cos x}{\sin^2 x}.$$

Для этих случаев формулировать специальные правила было бы излишне. Если предлагается синус-версус дуги: $y=\operatorname{sv} x$, то, так как $y=1-\cos x$, будем иметь $dy=dx\sin x$. Итак, без труда можно выполнить дифференцирование во всех случаях, когда предлагается какая-нибудь прямая линия, отнесённая к дуге, ибо её всегда можно выразить через синус или косинус. По данным правилам можно найти не только первые дифференциалы, но также вторые и следующие. Положим, что $y=\sin x$ и $z=\cos x$ и что dx есть постоянное количество; тогда будем иметь:

$y=\sin x,$	$z=\cos x,$
$dy=dx\cos x,$	$dz=-dx\sin x,$
$d^2y=-dx^2\sin x,$	$d^2z=-dx^2\cos x,$
$d^3y=-dx^3\cos x,$	$d^3z=dx^3\sin x,$
$d^4y=dx^4\sin x$	$d^4z=dx^4\cos x$
и т. д.	и т. д.

206. Подобным образом можно найти дифференциалы всех порядков тангенсов дуги x. Действительно, пусть $y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ и пусть dx постоянно; тогда

$$y=\frac{\sin x}{\cos x},$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{6}{\cos^4 x}-\frac{4}{\cos^2 x},$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{24\sin x}{\cos^5 x}-\frac{8\sin x}{\cos^3 x},$$
$$\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{120}{\cos^6 x}-\frac{120}{\cos^4 x}+\frac{16}{\cos^2 x},$$
$$\frac{d^6y}{dx^6}=\frac{720\sin x}{\cos^7 x}-\frac{480\sin x}{\cos^5 x}+\frac{32\sin x}{\cos^3 x},$$
$$\frac{d^7y}{dx^7}=\frac{5040}{\cos^8 x}-\frac{6720}{\cos^6 x}+\frac{2016}{\cos^4 x}-\frac{64}{\cos^2 x} \quad \text{и т. д.}$$

207. Итак, любые функции, в которые входят синусы или косинусы дуг, можно дифференцировать по этим правилам, что видно из следующих примеров:

I. Если $y=2\sin x\cos x=\sin 2x$, то

$$dy=2\,dx\cos^2 x-2dx\sin^2 x=2\,dx\cos 2x.$$

II. Если $y=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ или $y=\sin\frac{1}{2}x$, то

$$dy=\frac{dx\sin x}{2\sqrt{2(1-\cos x)}}.$$

Но так как

$$\sqrt{2(1-\cos x)}=2\sin\frac{1}{2}x \text{ и } \sin x=2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x,$$

то будем иметь

$$dy=\frac{1}{2}dx\cos\frac{1}{2}x,$$

что непосредственно следует из формулы $y=\sin\frac{1}{2}x$.

III. Если $y=\cos l\frac{1}{x}$, то, положив $l\frac{1}{x}=p$, будем иметь $y=\cos p$ и

$$dy=-dp\sin p.$$

Но так как $p=l1-lx$, то будет $dp=-\frac{dx}{x}$, так что

$$dy=\frac{dx}{x}\sin l\frac{1}{x}.$$

IV. Если $y=e^{\sin x}$, то

$$dy=e^{\sin x}dx\cos x.$$

V. Если $y=e^{\frac{-n}{\cos x}}$, то

$$dy=-\frac{e^{\frac{-n}{\cos x}}n\,dx\sin x}{\cos^2 x}.$$

VI. Пусть $y=l\left(1-\sqrt{1-e^{\frac{-n}{\sin x}}}\right)$; положим $e^{\frac{-n}{\sin x}}=p$; вследствие

$$y=l(1=\sqrt{1-p})$$

будем иметь

$$dy=\frac{dp}{2(1-\sqrt{1-p})\sqrt{1-p}}.$$

Но

$$dp=\frac{e^{\frac{-n}{\sin x}}n\,dx\cos x}{\sin^2 x};$$

подставив это значение, получим

$$dy=\frac{ne^{\frac{-n}{\sin x}}dx\cos x}{2\sin^2 x\left(1-\sqrt{1-e^{\frac{-n}{\sin x}}}\right)\sqrt{1-e^{\frac{-n}{\sin x}}}}.$$

ГЛАВА VII

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ДВА ИЛИ БОЛЬШЕЕ ЧИСЛО ПЕРЕМЕННЫХ

208. Если два или большее число переменных количеств x, y, z вовсе не зависят друг от друга, то может случиться, что хотя все они являются переменными, однако, когда одна из них возрастает или убывает, остальные остаются неизменными; действительно, поскольку предполагается, что они не имеют между собой никакой связи, изменение одной не влияет на другие. Значит, и дифференциалы количеств y и z не будут зависеть от дифференциала x и, следовательно, когда x возрастёт на свой дифференциал dx, количества y и z могут остаться теми же или измениться любым образом. Итак, если дифференциал количества x мы положим равным dx, то дифференциалы dy и dz остальных количеств останутся неопределёнными и по нашему произволу могут обозначать либо просто нули[1]), либо бесконечно малые, имеющие к dx какое угодно отношение.

209. Часто, однако, буквы y и z обозначают либо неизвестные функции x, либо такие функции, для которых не рассматриваются их соотношения с x. В этом случае их дифференциалы dy и dz будут иметь к dx определённое отношение. Но зависят ли y и z от x или не зависят, способ дифференцирования, который мы здесь рассматриваем, остаётся одним и тем же. Мы ищем для функции, как-либо образованной из нескольких переменных x, y и z, дифференциал, который она получает, когда каждое из переменных x, y и z возрастает на свой дифференциал dx, dy и dz. Чтобы найти этот дифференциал, мы должны в предложенной функции повсюду написать вместо количеств x, y, z соответственно $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ и от полученного таким образом выражения отнять предложенную функцию. Остаток даст искомый дифференциал, что с очевидностью ясно и из природы дифференциалов.

210. Пусть X есть функция количества x и пусть дифференциал её, т. е. приращение, которое она получает, когда x возрастёт на его дифференциал dx, равен $P\,dx$. Затем пусть Y есть функция y, а дифференциал её равен $Q\,dy$; это приращение получает Y, когда y пере-

---

1) Prorsus nihil. Здесь Эйлер хочет противопоставить постоянное количество, вовсе не получающее приращения, переменному количеству, принимающему бесконечно малое (т. е., по Эйлеру, равное нулю!) приращение.

ходит в $y+dy$. Пусть Z есть функция z и её дифференциал пусть равен $R\,dz$. Эти дифференциалы $P\,dx$, $Q\,dy$, $R\,dz$ могут быть найдены с помощью данных выше правил, если известна природа функций X, Y и Z. Если теперь будет предложено количество $X+Y+Z$, которое является, таким образом, функцией трёх переменных x, y и z, то его дифференциал будет равен $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$. Однородны между собой эти три дифференциала или нет — безразлично. Действительно, члены, которые содержат степени dx, исчезают по сравнению с $P\,dx$ так, как если бы остальных членов $Q\,dy$ и $R\,dz$ не было. То же самое произойдёт и с членами, которыми мы пренебрегаем при дифференцировании функций Y и Z.

211. Пусть обозначения X, Y и Z сохраняют прежний смысл и пусть предложена функция XYZ количеств x, y и z, для которой требуется разыскать дифференциал. Так как, если мы напишем $x+dx$ вместо x, $y+dy$ вместо y и $z+dz$ вместо z, X перейдёт в $X+P\,dx$, Y — в $Y+Q\,dy$ и Z — в $Z+R\,dz$, то сама предложенная функция XYZ перейдёт в

$$(X+P\,dx)(Y+Q\,dy)(Z+R\,dz)=$$
$$=XYZ+YZP\,dx+XZQ\,dy+XYR\,dz+ZPQ\,dx\,dy+YPR\,dx\,dz+$$
$$+XQR\,dy\,dz+PQR\,dx\,dy\,dz.$$

Но так как dx, dy и dz бесконечно малы, то однородны ли члены между собой или нет, — последний член исчезает по сравнению с любым предшествующим. Далее, член $ZPQ\,dx\,dy$ исчезает как по сравнению с $YZP\,dx$, так и по сравнению с $XZQ\,dy$. По той же причине исчезают члены $YPR\,dx\,dz$ и $XQR\,dy\,dz$. Следовательно, отняв предложенную функцию XYZ, мы найдём, что её дифференциал равен

$$YZP\,dx+XZQ\,dy+XYR\,dz.$$

212. Этих примеров функций трёх переменных x, y и z — к ним можно было бы добавить примеры функций от любого большего числа переменных — достаточно, чтобы показать, что если предложена какая-либо функция трёх переменных x, y и z, то как бы ни были соединены между собой эти переменные, дифференциал её всегда будет иметь вид $p\,dx+q\,dy+r\,dz$, где p, q и r будут функциями либо всех трёх переменных x, y и z, либо двух, либо только одной, в зависимости от того, как предложенная функция будет составлена из переменных x, y и z и постоянных количеств. Подобным образом, если предложена функция четырёх или большего числа переменных x, y, z и v, то дифференциал её всегда будет иметь вид

$$p\,dx+q\,dy+r\,dz+s\,dv.$$

213. Рассмотрим сперва функцию только двух переменных x и y; пусть она равна V. Дифференциал её должен иметь вид

$$dV=p\,dx+q\,dy.$$

Если количество y мы будем считать постоянным, то будет $dy=0$, значит, дифференциал функции V будет $p\,dx$; если же мы положим постоянным x, так что $dx=0$, то только y останется переменным, и тогда дифференциал количества V окажется равным $q\,dy$. А так как, когда оба количества x и y считаются переменными, мы имеем $dV=p\,dx+q\,dy$, то мы получаем следующее правило для дифференцирования функции V, содержащей два переменных x и y.

Сперва будем считать переменным только количество x, другое же количество y будем рассматривать как постоянное и найдём дифференциал количества V, который пусть будет равен $p\,dx$. Затем будем считать переменным только количество y, другое же количество x — постоянным и будем искать дифференциал количества V, который пусть будет равен $q\,dy$. Тогда, считая оба количества x и y переменными, мы будем иметь $dV = p\,dx + q\,dy$.

214. Подобным образом так как дифференциал функции трёх переменных x, y, z, которую положим равной V, имеет вид

$$dV = p\,dx + q\,dy + r\,dz,$$

то ясно, что если бы приняли за переменное только количество x, а остальные y и z оставить постоянными, то вследствие $dy = 0$ и $dz = 0$ дифференциал количества V оказался бы равным $p\,dx$. Равным образом мы нашли бы, что дифференциал количества V равен $q\,dy$, если x и z будут постоянными и только y мы будем считать переменным; наконец, если x и y будут считаться постоянными и только z будет предположено переменным, то дифференциал V окажется равным $r\,dz$. Поэтому для дифференцирования функций трёх или большего числа переменных нужно поочерёдно каждое из количеств считать переменным и дифференцировать функцию так, как если бы остальные были постоянными; затем отдельные дифференциалы, которые найдены в предположении переменности отдельных количеств, нужно сложить, и их сумма будет искомым дифференциалом предложенной функции.

215. В этом правиле, найденном нами для дифференцирования функции скольких угодно переменных, содержится доказательство общего правила, данного выше (§ 170), с помощью которого можно дифференцировать любую функцию, содержащую одну переменную. Действительно, если вместо отдельных частей, о которых там говорилось, мы поставим различные буквы, то функция примет вид функции стольких же различных переменных и, следовательно, по изложенному здесь способу её можно будет продифференцировать, рассматривая последовательно каждую её часть так, как если бы только она одна была переменной, и соединяя все дифференциалы, которые получаются из отдельных частей, в единую сумму. Эта сумма будет искомым дифференциалом после того, как в ней будут восстановлены вместо отдельных букв их значения. Таким образом, это правило является чрезвычайно широким и распространяется на функции многих переменных, как бы они ни были составлены. Вследствие этого оно имеет обширное применение повсюду в дифференциальном исчислении.

216. После того как мы нашли общее правило, с помощью которого можно дифференцировать функции какого угодно числа переменных, полезно будет показать его применение на нескольких примерах.

I. Если $V = xy$, то

$$dV = x\,dy + y\,dx.$$

II. Если $V = \frac{x}{y}$, то

$$dV = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2}.$$

III. Если $V = \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, то

$$dV = \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{yx\,dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$$

IV. Если $V = (\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n$, то

$$dV = m(\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1} (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^n (\alpha\, dx + \beta\, dy) + \\ + n(\alpha x + \beta y + \gamma)^m (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1} (\delta\, dx + \varepsilon\, dy)$$

или

$$dV = (\alpha x + \beta y + \gamma)^{m-1} (\delta x + \varepsilon y + \zeta)^{n-1} \times$$
$$\times \left(\left.\begin{matrix} +m\alpha\delta \\ +n\alpha\delta \end{matrix}\right\} x\,dx \left.\begin{matrix} +m\beta\delta \\ +n\alpha\varepsilon \end{matrix}\right\} x\,dy \left.\begin{matrix} +m\alpha\varepsilon \\ +n\beta\delta \end{matrix}\right\} y\,dx \left.\begin{matrix} +m\beta\varepsilon \\ +n\beta\varepsilon \end{matrix}\right\} y\,dy \left.\begin{matrix} +m\alpha\zeta \\ +n\gamma\delta \end{matrix}\right\} dx \left.\begin{matrix} +m\beta\zeta \\ +n\gamma\varepsilon \end{matrix}\right\} dy \right).$$

V. Если $V = y\,\mathrm{l}\,x$, то

$$dV = dy\,\mathrm{l}\,x + \frac{y\,dx}{x}.$$

VI. Если $V = x^y$, то

$$dV = yx^{y-1}\,dx + x^y\,dy\,\mathrm{l}\,x.$$

VII. Если $V = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$, то

$$dV = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

VIII. Если $V = \sin x \cos y$, то

$$dV = dx \cos x \cos y - dy \sin x \sin y.$$

IX. Если $V = \frac{e^z y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то

$$dV = \frac{e^z\, y\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{e^z (x^2\,dy - yx\,dx)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

X. Если $V = e^z \arcsin \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}$, то мы найдём

$$dV = e^z\,dz \arcsin \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} + e^z \frac{xy\,dy - y^2\,dx}{(x + \sqrt{x^2 - y^2})(x^2 - y^2)^{3/4}\sqrt{x}}.$$

217. Мы видели, что если V есть какая-либо функция двух переменных x и y, то её дифференциал будет иметь вид $dV = P\,dx + Q\,dy$, где P и Q суть функции, зависящие от функции V и определяемые ею. Отсюда следует, что эти два количества P и Q каким-то определённым образом зависят друг от друга, ибо каждое из них зависит от одной и той же функции V.

Какова бы ни была эта связь между конечными количествами P и Q — эту связь мы впоследствии установим — очевидно, что не все дифференциальные выражения вида $P\,dx + Q\,dy$, в которых P и Q были бы произвольно образованы из x и y, могут быть дифференциалами некоторой конечной функции V количеств x и y. Действительно, если между функциями P и Q не соблюдается то взаимоотношение, которого требует природа дифференцирования, то дифференциал $P\,dx + Q\,dy$ никак не может произойти от дифференцирования и, значит, не будет иметь интеграла.

218. Таким образом, при интегрировании нам чрезвычайно важно знать это соотношение между количествами P и Q для того, чтобы можно было отличить те дифференциалы, которые в самом деле произошли из дифференцирования некоторой конечной функции, от тех, которые образованы по произволу и не имеют никаких интегралов. Хотя мы пока ещё и не занимаемся интегрированием, однако и для более глубокого изучения свойств действительных дифференциалов полезно установить это соотношение; знакомство с ним необходимо не только в интегральном исчислении, к которому здесь мы подготовляем путь, и в дифференциальном исчислении оно очень многое уясняет. Прежде всего ясно, что если V есть функция двух переменных x и y, то в её дифференциале $P\,dx+Q\,dy$ должны содержаться оба дифференциала dx и dy. Не может быть ни $P=0$, ни $Q=0$. Поэтому если P есть функция x и y, то выражение Pdx не может быть дифференциалом никакого конечного количества, т. е. не существует никакого конечного количества, дифференциал которого был бы равен $P\,dx$.

219. Так, например, не существует никакого конечного количества V, алгебраического или трансцендентного, дифференциал которого равнялся бы $yx\,dx$, если только y есть переменное количество, не зависящее от x. Действительно, если мы предположим, что такого рода конечное количество V существует, то так как y входит в его дифференциал, необходимо чтобы y входило также и в само количество V; но если бы V содержало y, то вследствие переменности y дифференциал dy необходимо должен был бы входить в дифференциал V. А так как этого нет, то и не может быть, чтобы дифференциал $yx\,dx$ произошёл из дифференцирования какого-либо конечного количества. Так как теперь ясно, что выражение $P\,dx+Q\,dy$, если Q равно 0, а P содержит y, не может быть действительным дифференциалом, то ясно, что количество Q не может быть взято по произволу и что оно зависит от значения количества P.

220. Чтобы найти соотношения между P и Q в дифференциале $dV=P\,dx+Q\,dy$, мы положим сначала, что V есть функция нулевого измерения количеств x и y; от частных случаев мы потом поднимемся к общему соотношению[1]). Если мы положим $y=tx$, то количество x совершенно исчезнет из функции V, и мы получим функцию одного только t; пусть она равна T, а дифференциал её равен $\Theta\,dt$, где Θ есть функция от t. Положим теперь также и в дифференциале $P\,dx+Q\,dy$ повсюду $y=tx$ и $dy=t\,dx+x\,dt$; тогда мы получим $Pdx+Qt\,dx+Qx\,dt$. Так как dx не должен сюда входить, то необходимо, чтобы $P+Qt=0$, т. е. чтобы $Q=-\frac{P}{t}=-\frac{Px}{y}$, т. е. будет

$$Px+Qy=0.$$

Таково соотношение между P и Q для данного случая. Далее, должно быть $\Theta=Qx$ и, значит, Qx должно быть функцией количества t, т. е. функцией нулевого измерения количеств x и y. Точно так же вследствие $Q=\frac{\Theta}{x}$ мы имеем $P=-\frac{\Theta y}{x^2}$, и как Px, так и Qy будут функциями нулевого измерения переменных x и y.

221. Итак, если дифференцируется функция V нулевого измерения количеств x и y, то её дифференциал $dV=P\,dx+Q\,dy$ всегда составлен так, что $Px+Qy=0$, т. е. если в дифференциале вместо дифференциалов dx и dy написать x и y, то получатся количества, равные 0, как явствует из следующих примеров.

---

[1]) См. вступ. статью (§ 13).

I. Пусть $V=\frac{x}{y}$; тогда

$$dV=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2},$$

и если положить x вместо dx и y вместо dy, то будем иметь $\frac{yx-xy}{y^2}=0$.

II. Пусть $V=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$; тогда

$$dV=\frac{-y^2dx+yx\,dy}{(x^2-y^2)^{3/2}},$$

откуда

$$\frac{-y^2x+y^2x}{(x^2-y^2)^{3/2}}=0.$$

III. Пусть $V=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{-y+\sqrt{x^2+y^2}}$; эта функция является функцией нулевого измерения количеств x и y; мы будем иметь

$$dV=\frac{2x^2dy-2xy\,dx}{(\sqrt{x^2+y^2}-y)^2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Это выражение, если вместо dx и dy положить x и y, станет равным нулю.

IV. Пусть $V=\mathrm{l}\,\frac{x+y}{x-y}$; тогда

$$dV=\frac{2x\,dy-2y\,dx}{x^2-y^2}$$

и

$$\frac{2xy-2yx}{x^2-y^2}=0.$$

V. Пусть $V=\arcsin\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$; тогда

$$dV=\frac{y\,dx-x\,dy}{(x+y)\sqrt{2y(x-y)}}.$$

Это выражение обладает тем же свойством.

222. Рассмотрим теперь другие однородные функции и пусть V есть функция n измерений количеств x и y. Поэтому если положить $y=tx$, то V примет вид Tx^n, где T есть функция t. Пусть $dT=\Theta dt$; тогда

$$dV=x^n\,\Theta dt+n\,Tx^{n-1}\,dx;$$

таким образом, если мы положим $dV=P\,dx+Q\,dy$, то вследствие $dy=t\,dx+x\,dt$ будем иметь

$$dV=P\,dx+Qt\,dx+Qx\,dt.$$

Так как это выражение должно совпадать с предыдущим, то

$$P+Qt=nTx^{n-1}=\frac{Vn}{x},$$

так как $V=Tx^n$. Вследствие этого и в силу $t=\frac{y}{x}$ мы имеем

$$Px+Qy=nV.$$

Это уравнение определяет соотношение между P и Q таким образом, что если одно из них известно, то другое легко находится. Так как, далее, $Qx = x^{n}(\cdot)$, то Qx, а значит, и Qy и Px будут функциями n измерений количеств x и y.

223. Итак, если в дифференциале какой-либо однородной функции от x и y вместо dx и dy положить x и y, то полученное количество будет равняться самой функции, дифференциал которой был найден, помноженной на число измерения.

I. Если $V = \sqrt{x^2+y^2}$, то $n=1$ и вследствие

$$dV = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

будем иметь

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = V = \sqrt{x^2+y^2}.$$

II. Если $V = \frac{y^3+x^3}{y-x}$, то $n=2$ и

$$dV = \frac{2y^3\,dy - 3y^2x\,dy + 3yx^2\,dx - 2x^3\,dx + y^3\,dx - x^3\,dy}{(y-x)^2}.$$

Положим x вместо dx и y вместо dy; получим

$$\frac{2y^4 - 2y^3x + 2yx^3 - 2x^4}{(y-x)^2} = \frac{2y^3+2x^3}{y-x} = 2V.$$

III. Если $V = \frac{1}{(y^2+x^2)^2}$, то $n = -4$ и

$$dV = -\frac{4y\,dy + 4x\,dx}{(y^2+x^2)^3}.$$

Если положить x и y вместо dx и dy, это выражение перейдёт в

$$-\frac{4y^2+4x^2}{(x^2+y^2)^3} = -4V.$$

IV. Если $V = x^2 \,\mathrm{l}\,\frac{y+x}{y-x}$, то $n=2$ и

$$dV = 2x\,dx\,\mathrm{l}\,\frac{y+x}{y-x} + \frac{2x^2(y\,dx - x\,dy)}{y^2-x^2}.$$

После упомянутой подстановки получим

$$2x^2\,\mathrm{l}\,\frac{y+x}{y-x} = 2V.$$

224. То же свойство будет соблюдено и в том случае, когда V будет однородной функцией многих переменных. Пусть V есть функция количеств x, y, z, которые в совокупности всюду дают n измерений. Дифференциал её dV будет иметь вид $P dx + Q dy + R dz$. Теперь положим $y = tx$ и $z = sx$, так что

$$dy = t\,dx + x\,dt \quad \text{и} \quad dz = s\,dx + x\,ds.$$

Тогда функция V примет вид Ux^n, где U есть функция двух переменных t и s; следовательно, если положить $dU = p\,dt + q\,ds$, то будем иметь

$$dV = x^n p\,dt + x^n q\,ds + nUx^{n-1}\,dx.$$

Первое же выражение dV даст

$$dV = P\,dx + Qt\,dx + Qx\,dt + Rs\,dx + Rx\,ds.$$

Сопоставив эти выражения, мы получим

$$P+Qt+Rs=nUx^{n-1}=\frac{nV}{x},$$

откуда

$$Px+Qy+Rz=nV.$$

Это же свойство распространяется и на любое большее число переменных.

225. Итак, если будет предложена однородная функция скольких угодно переменных x, y, z, v и т. д., то её дифференциал всегда будет обладать тем свойством, что если вместо дифференциалов dx, dy, dz, dv и т. д. написать соответственно конечные количества x, y, z, v и т. д., то получится сама предложенная функция, умноженная на число измерений. Это правило сохраняет силу и тогда, если V есть однородная функция одного только переменного x. Действительно, в этом случае V будет степенью x и представится выражением $V=ax^n$, которое является однородной функцией n измерений; и, конечно, не существует другой какой-либо функции количества x, кроме степени n, в которой x повсюду имел бы n измерений. Так как теперь $dV=nax^{n-1}dx$, то, положив x вместо dx, мы получим nax^n, т. е. nV. Это замечательное свойство однородных функций нужно хорошо заметить, так как в интегральном исчислении оно принесёт нам большую пользу.

226. Чтобы разыскать теперь общее соотношение, которым связаны количества P и Q, составляющие дифференциал $P\,dx+Q\,dy$ какой-либо функции V двух переменных x и y, нужно обратить внимание на следующее. Пусть V есть какая-либо функция x и y и пусть V переходит в R, если вместо x положить $x+dx$; если же положить $y+dy$ вместо y, то пусть V переходит в S; а если одновременно вместо x и y написать $x+dx$ и $y+dy$, то пусть V изменится в V^{I}. Поскольку R получается из V, если вместо x положить $x+dx$, то ясно, что если затем в R положить $y+dy$ вместо y, то получится V^{I}; но то же самое будет и тогда, если в V одновременно положим $x+dx$ вместо x и $y+dy$ вместо y. Подобным образом, если в S положить $x+dx$ вместо x, то, так как S уже получилось из V после подстановки $y+dy$ вместо y, снова получится V^{I}. Это можно яснее усмотреть из следующей схемы:

Количество	переходит в	если вместо	положить
V	R	x	$x+dx$
V	S	y	$y+dy$
V	V^{I}	x y	$x+dx$ $y+dy$
R	V^{I}	y	$y+dy$
S	V^{I}	x	$x+dy$

227. Итак, пусть V дифференцируется так, что только x рассматривается как переменное, количество же y — как постоянное. Так как при подстановке $x+dx$ вместо x функция V переходит в R, то её дифференциал будет равен $R-V$; но из формулы $dV=P\,dx+Q\,dy$ следует, что тот же дифференциал будет равен $P\,dx$, откуда будем иметь $R-V=P\,dx$. Если же теперь вместо y положить $y+dy$, а x рассматривать как постоянное, то R перейдёт в V^{I}, а V перейдёт в S, так что количество $R-V$ перейдёт в $V^{\mathrm{I}}-S$ и, значит, дифференциал количества $R-V=P\,dx$, который получается в том случае, если только количество y принимается за переменное, будет равен

$$V^{\mathrm{I}}-R-S+V.$$

Подобным образом, так как V после подстановки $y+dy$ вместо y переходит в S, то дифференциал количества V, если считать только y переменным, будет $S-V$, и поэтому $S-V=Q\,dy$. А так как S при подстановке $x+dx$ вместо x переходит в V^{I} и V переходит в R, то количество $S-V$ перейдёт в $V^{\mathrm{I}}-R$, и дифференциал количества $S-V=Q\,dy$, который получается, если считать только x переменным, будет равен

$$V^{\mathrm{I}}-R-S+V,$$

т. е. в точности совпадает с ранее найденным дифференциалом.

228. Из этого совпадения можно вывести следующее заключение. Пусть дифференциал какой-либо функции V двух переменных x и y будет $dV=P\,dx+Q\,dy$; тогда дифференциал количества $P\,dx$, который получается, если одно только количество y рассматривается как переменное, а x считается постоянным, будет равен дифференциалу количества $Q\,dy$, который получается, если одно только количество y рассматривается как переменное, а x считается постоянным. Пусть, считая переменным только y, мы будем иметь $dP=Z\,dy$; тогда дифференциал количества $P\,dx$, взятый в том же предположении, будет равен $Z\,dx\,dy$, а если считать только x переменным, то мы будем иметь также $dQ=Z\,dx$; действительно, только в этом случае дифференциал количества $Q\,dy$, взятый указанным образом, также будет равен $Z\,dx\,dy$. Отсюда становится ясным соотношение, связывающее количества P и Q. Коротко говоря, оно состоит в том, что дифференциал количества $P\,dx$ при постоянном x равен дифференциалу количества $Q\,dy$ при постоянном y.

229. Это замечательное свойство будет более понятным, если мы поясним его несколькими примерами.

I. Пусть $V=yx$; тогда

$$dV=y\,dx+x\,dy,$$

так что

$$P=y \quad \text{и} \quad Q=x,$$

откуда, считая x постоянным, будем иметь

$$d\cdot P\,dx=dx\,dy,$$

а считая y постоянным, будем иметь

$$d\cdot Q\,dy=dx\,dy.$$

Эти два дифференциала равны друг другу.

II. Пусть $V=\sqrt{x^2+2xy}$; тогда

$$dV=\frac{x\,dx+y\,dx+x\,dy}{\sqrt{x^2+2xy}},$$

так что

$$P=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy}} \quad \text{и} \quad Q=\frac{x}{\sqrt{x^2+2xy}},$$

откуда, считая постоянным x, будем иметь

$$d\cdot P\,dx=\frac{xy\,dx\,dy}{(x^2+2xy)^{3/2}},$$

а считая постоянным y, будем иметь

$$d\cdot Q\,dy=\frac{xy\,dx\,dy}{(x^2+2xy)^{3/2}}.$$

III. Пусть $V=x\sin y+y\sin x$ [1]), тогда

$$dV=dx\sin y+x\,dy\cos y+dy\sin x+y\,dx\cos x.$$

Поэтому

$$P\,dx=dx\sin y+y\,dx\cos x$$

и

$$Q\,dy=dy\sin x+x\,dy\cos y.$$

Следовательно, при постоянном x будем иметь

$$d\cdot P\,dx=dx\,dy\cos y+dx\,dy\cos x,$$

а при постоянном y будем иметь

$$d\cdot Q\,dy=dx\,dy\cos y+dx\,dy\cos x.$$

IV. Пусть $V=x^y$; тогда

$$dV=x^y\,dy\,\mathrm{l}\,x+yx^{y-1}\,dx,$$

так что

$$P\,dx=yx^{y-1}\,dx$$

и

$$Q\,dy=x^y\,dy\,\mathrm{l}\,x.$$

Поэтому при постоянном x будем иметь

$$d\cdot P\,dx=x^{y-1}dx\,dy+yx^{y-1}\,dx\,dy\,\mathrm{l}\,x,$$

а при постоянном y будем иметь

$$d\cdot Q\,dx=yx^{y-1}\cdot dx\,dy\,\mathrm{l}\,x+x^{y-1}\,dx\,dy.$$

230. Это свойство можно выразить иным образом, и тогда мы обнаружим весьма изящное свойство всех функций двух переменных. Если какая-либо функция V двух переменных дифференцируется в предположении, что только x переменно, и этот дифференциал снова дифференцируется в предположении, что переменно только y, то после этого двукратного дифференцирования получается тот же результат,

[1]) В оригинале $V=x\sin A\,y+y\sin A\,x$, где буква A служит обозначением слова arcus — дуга.

который мы получили бы, если бы, идя в обратном порядке, сначала дифференцировали функцию V, считая переменным только y, а затем дифференцировали бы этот дифференциал, считая переменным только x; а именно в обоих случаях получится одно и то же выражение вида $Z\,dx\,dy$. Объяснение этой тождественности с очевидностью вытекает из предыдущего свойства. Действительно, если V дифференцируется в предположении, что только x является переменным, то получается $P\,dx$; если же V дифференцируется в предположении, что переменным является только y, то получается $Q\,dy$. Но мы раньше доказали, что дифференциалы этих дифференциалов, взятые указанным образом, равны между собой. Впрочем, это свойство непосредственно следует из расчёта, произведённого в § 227.

231. Соотношение между P и Q, если $P\,dx+Q\,dy$ будет дифференциалом функции V, можно выразить также следующим образом. Поскольку P и Q суть функции от x и y, продифференцируем обе, считая переменными как x, так и y. Пусть

$$dP = p\,dx + r\,dy$$

и

$$dQ = q\,dx + s\,dy.$$

Значит, считая x постоянным, будем иметь

$$dP = r\,dy \quad \text{и} \quad d\cdot P\,dx = r\,dx\,dy.$$

Далее, считая y постоянным, будем иметь

$$dQ = q\,dx \quad \text{и} \quad d\cdot Q\,dy = q\,dx\,dy.$$

А так как два дифференциала $r\,dx\,dy$ и $q\,dx\,dy$ равны между собой, то мы заключаем, что

$$q = r.$$

Итак, функции P и Q связаны друг с другом так, что если мы продифференцируем их, как мы это сделали, то количества q и r будут равны между собой. Для краткости нам удобно будет, по крайней мере в этой главе, ввести новые обозначения для количеств r и q. Именно, мы обозначим количество r через $\left(\frac{dP}{dy}\right)$; в этой записи обозначено, что P дифференцируется таким образом, что только y считается переменным количеством и что дифференциал dP делится на dy; действительно, таким образом мы получаем конечное количество r. Подобным образом $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ будет обозначать конечное количество q, ибо эта запись обозначает, что функция Q дифференцируется в предположении, что только x переменно, и затем дифференциал dQ делится на dx.

232. Мы будем пользоваться этим способом записи, хотя он и мог бы иной раз внести двусмысленность (здесь она устраняется скобками), для того чтобы избежать многословности при описании условий дифференцирования. Таким образом, мы можем кратко выразить соотношение между P и Q, записав, что

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Итак, в такого рода дробях знаменатель, кроме общего своего значения, состоящего в том, что числитель нужно разделить на него, указывает ещё, что дифференциал числителя должен быть взят таким образом, чтобы переменным считалось только, то количество дифференциал которого стоит в знаменателе. Таким образом, благодаря делению дифференциалы будут вовсе устранены из исчисления, и дроби $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ и $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ будут выражать конечные количества, которые в данном случае будут равны между собой. Итак, приняв этот способ, мы можем представить также количества p и s в виде

$$p=\left(\frac{dP}{dx}\right);\quad s=\left(\frac{dQ}{dy}\right).$$

При этом, как мы уже отмечали, дифференцирование числителя подчинено условию, накладываемому знаменателем.

233. Это свойство удивительным образом согласуется с тем, которым, как выше было показано, обладают однородные функции. Пусть V есть однородная функция n измерений количеств x и y; положим $dV=P\,dx+Q\,dy$ и докажем, что $nV=Px+Qy$, т. е. что

$$Q=\frac{nV}{y}-\frac{Px}{y}.$$

Пусть $dP=p\,dx+r\,dy$; тогда

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=r.$$

Что это выражение равно $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, мы докажем следующим образом. Дифференцируем Q, считая переменным только x; так как при нашем предположении [1])

$$dQ=\frac{nP\,dx}{y}-\frac{P\,dx}{y}-\frac{xp\,dx}{y},$$

то будем иметь

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right)=\frac{(n-1)P}{y}-\frac{px}{y},$$

и должно будет иметь место соотношение

$$\frac{(n-1)P}{y}-\frac{px}{y}=r,$$

т. е.

$$(n-1)P=px+ry.$$

Справедливость этого равенства очевидна из того, что P есть однородная функция $n-1$ измерений количеств x и y, вследствие чего её дифференциал по свойству однородных функций должен быть составлен так, что

$$(n-1)P=px+ry.$$

234. Свойство, выражаемое равенством $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, которое, как мы показали, является общим для всех функций двух переменных

[1]) То-есть в предположении $Q=\frac{nV}{y}-\frac{Px}{y}$ или, что то же, в предположении $nV=Px+Qy$, которое подлежит доказательству. Как видно из дальнейшего, это «доказательство» состоит в том, что мы приходим к соотношению, справедливость которого сама носит столь же гипотетический характер.

ных, позволяет нам обнаружить свойство функций трёх и большего числа переменных. Пусть V есть какая-либо функция трёх переменных x, y и z. Положим

$$dV = P\,dx = Q\,dy + R\,dz.$$

Если в этом дифференциальном выражении считать количество z постоянным, то мы будем иметь $dV = P\,dx + Q\,dy$; но в этом случае по предыдущему должно быть $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Если же считать постоянным количество y, то будет $dV = P\,dx + R\,dz$ и, следовательно, будем иметь $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$. Наконец, полагая x постоянным, найдём $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$. Итак, в дифференциале $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ функции V количества P, Q, R связаны друг с другом таким образом, что

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right), \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

235. Отсюда вытекает следующее свойство функций, содержащих три или большее число переменных количеств, аналогичное свойству, которое мы выше (§ 230) доказали для функций двух переменных. Если V будет какая-либо функция трёх переменных x, y и z и если её трижды дифференцировать, полагая переменным сначала одно только количество, скажем x, при втором дифференцировании только y и при третьем только z, то мы получим выражение вида $Z\,dx\,dy\,dz$, которое будет одним и тем же, в каком бы другом порядке мы ни взяли количества x, y и z. После трёхкратного дифференцирования мы придём, таким образом, к одному и тому же выражению $Z\,dx\,dy\,dz$ шестью различными способами, ибо возможно шестью способами взять количества x, y и z в различном порядке. Но какой бы порядок ни избрать, если функцию V дифференцировать, считая переменным только первое количество, этот дифференциал снова дифференцировать, считая переменным только второе, в дифференциал опять дифференцировать, считая переменным только третье количество, мы получим одно и то же выражение.

236. Чтобы это свойство стало более ясным, положим, что

$$dV = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

и будем дифференцировать количества P, Q и R; их дифференциалы, как прежде было доказано, будут составлены следующим образом:

$$dP = p\,dx + s\,dy + t\,dz,$$
$$dQ = s\,dx + q\,dy + u\,dz,$$
$$dR = t\,dx + u\,dy + r\,dz.$$

Дифференцируем теперь V, считая переменным только x; получим $P\,dx$. Этот дифференциал снова дифференцируем, считая переменным только y; тогда получим $s\,dx\,dy$; если мы будем дифференцировать это количество, считая переменным только z, то после деления на $dx\,dy\,dz$ мы получим $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Разместим теперь переменные в порядке y, x, z; тогда первое дифференцирование даст $Q\,dy$, второе $S\,dy\,dz$ и третье (после деления на $dx\,dy\,dz$) даст $\left(\frac{ds}{dz}\right)$, как и раньше. Расположим переменные в порядке z, y, x; тогда первое дифференцирование даст

$R\,dz$, второе $u\,dy\,dz$ и третье после деления на $dx\,dy\,dz$ даст $\left(\frac{du}{dx}\right)$. Но так как при постоянном y мы имеем $dQ = s\,dx + u\,dz$, то $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$, что было доказано прежде.

237. Положим, что

$$V = \frac{x^2y}{a^2 - z^2},$$

и продифференцируем эту функцию столько раз трижды, сколькими способами можно расположить переменные x, y, z в различном порядке.

	I. Дифференцируем	II. Дифференцируем	III. Дифференцируем
считая переменным	только x $\frac{2xy\,dx}{a^2 - z^2}$	только y $\frac{2x\,dx\,dy}{a^2 - z^2}$	только z $\frac{4xz\,dx\,dy\,dz}{(a^2 - z^2)^2}$
считая переменным	только x $\frac{2xy\,dx}{a^2 - z^2}$	только z $\frac{4xyz\,dx\,dz}{(a^2 - z^2)^2}$	только y $\frac{4xz\,dx\,dy\,dz}{(a^2 - z^2)^2}$
считая переменным	только y $\frac{x^2\,dy}{a^2 - z^2}$	только x $\frac{2x\,dx\,dz}{a^2 - z^2}$	только z $\frac{4xz\,dx\,dy\,dz}{(a^2 - z^2)^2}$
считая переменным	только y $\frac{x^2\,dy}{a^2 - z^2}$	только z $\frac{2x^2z\,dy\,dz}{(a^2 - z^2)^2}$	только x $\frac{4xz\,dx\,dy\,dz}{(a^2 - z^2)^2}$
считая переменным	только z $\frac{2x^2yz\,dz}{(a^2 - z^2)^2}$	только x $\frac{4xyz\,dx\,dz}{(a^2 - z^2)^2}$	только y $\frac{4xz\,dx\,dy\,dz}{(a^2 - z^2)^2}$
считая переменным	только z $\frac{2x^2yz\,dz}{(a^2 - z^2)^2}$	только y $\frac{2x^2z\,dy\,dz}{(a^2 - z^2)^2}$	только x $\frac{4xz\,dx\,dy\,dz}{(a^2 - z^2)^2}$.

Из этого примера ясно, что в каком бы порядке ни были взяты три переменные, после трёхкратного дифференцирования получается одно и то же выражение

$$\frac{4xz\,dx\,dy\,dz}{(a^2 - z^2)^2}.$$

238. Подобно тому как после трёхкратного дифференцирования мы пришли к одному и тому же выражению, мы можем усмотреть согласованность и в дифференциалах, получаемых после двукратного дифференцирования. Именно, в них каждое выражение встречается дважды, и мы видим, что выражения, в которые входят те же дифференциалы, равны между собой. Точно так же и третьи дифференциалы все равны между собой вследствие того, что в них входят те же дифференциалы $dx\,dy\,dz$. Отсюда мы заключаем, что если V будет функцией скольких угодно переменных x, y, z, v, u и т. д. и если её последовательно дифференцировать несколько раз так, чтобы каждый раз считать переменным только одно переменное количество, то всякий раз, как мы получим выражения, в которые входят одни и те же дифференциалы, эти выражения вместе с тем будут равны между собой. Так, после двукратного дифференцирования, если один раз считать переменным только x, а другой раз только y, получится одно и то же выражение вида $Z\,dx\,dy$, вне зависимости от того, какое из двух переменных было взято раньше, а какое потом. Подобным образом шестью различными способами мы придём к одному и тому же выражению вида $Z\,dx\,dy\,dz$ и двадцатью четырьмя способами к выражению вида $Z\,dx\,dy\,dz\,dv$ и т. д.

239. В справедливости этих теорем сможет легко убедиться каждый, кто внимательно отнесётся к вышеразъяснённым основным положениям, и самостоятельное размышление даст для понимания больше чем многословные рассуждения, без которых нельзя было бы провести доказательство. Так как значение этих свойств весьма важно при изучении интегрального исчисления, то начинающим рекомендуется не только тщательно вдуматься в них и убедиться в их справедливости, но и проверить их на многочисленных примерах, чтобы таким образом приобрести навык в этих вещах и впоследствии пожать плоды, которые этим будут порождены. Это мы советуем не только начинающим, но и тем, кто уже знаком с основами дифференциального исчисления, так как почти все руководства по этому разделу анализа вовсе обходят этот вопрос. По большей части авторы их довольствуются изложением правил дифференцирования и их применения к высшей геометрии; они не занимаются исследованием свойств дифференциалов, между тем как эти свойства обогащают интегральное исчисление очень важными вспомогательными средствами. По этой причине нам казалось необходимым в настоящей главе подробно рассмотреть этот почти совершенно новый вопрос, что вместе с тем подготовит почву для выполнения более трудных интегрирований и облегчит работу, которую мы должны будем предпринять в дальнейшем.

240. Познакомившись, таким образом, со свойствами, которыми обладают дифференциалы функций двух и большего числа переменных, мы легко будем в состоянии узнать, может ли предложенное дифференциальное выражение, в которое входят два или большее число переменных, получиться в результате дифференцирования какой-нибудь функции, или это невозможно. Действительно, если в выражении $P\,dx+Q\,dx$ не будет иметь места равенство

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

то мы, наверное, можем утверждать, что не существует никакой функции количеств x и y, дифференциал которой был бы равен $P\,dx+Q\,dy$, и, следовательно, в интегральном исчислении нельзя разыскивать интеграл такого выражения. Так, поскольку в выражении $yx\,dx+x^2\,dy$ упомянутое условие не соблюдено, не существует функции, дифференциал которой был бы равен $yx\,dx+x^2\,dy$. На вопрос же о том, всякий ли раз, когда

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

выражение $P\,dx+Q\,dy$ можно получить дифференцированием некоторой функции, — на этот вопрос надёжный ответ нам смогут дать лишь основные начала интегрирования.

241. Если в предложенном дифференциальном выражении имеются три переменных количества или большее их число, как, например,

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

тогда оно никоим образом не может получиться в результате дифференцирования, если не удовлетворены следующие три условия:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right), \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

Если из этих условий хотя бы одно не имеет места, то мы наверное можем утверждать, что не существует никакой функции количеств x, y и z, дифференциал которой был бы равен

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz;$$

следовательно, никак нельзя разыскать интеграл такого дифференциального выражения, и потому говорят, что оно совсем не имеет интеграла. Совершенно ясно, что в интегральном исчислении, раньше чем предпринимать разыскание интеграла, надлежит узнать, могут ли быть интегрированы данные дифференциальные выражения.

ГЛАВА VIII

О ПОВТОРНОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

242. Если имеется одно единственное переменное и его первый дифференциал считается постоянным, то мы можем вышеизложенным методом найти дифференциалы любого порядка. Именно, если дифференциал какой-либо функции снова дифференцировать, то получается её второй дифференциал; снова дифференцируя его, получаем третий дифференциал функции и т. д. То же правило имеет место и тогда, когда функция содержит несколько переменных или только одно, дифференциал которого не считается постоянным. Пусть сначала V есть какая-либо функция количества x, причём dx не является постоянным, а меняется как угодно, так что дифференциал количества dx равен d^2x, дифференциал последнего равен d^3x и т. д. Будем искать второй и следующий дифференциалы функции V.

243. Положим, что первый дифференциал функции V равен $P\,dx$, где P есть какая-либо функция x, вид которой зависит от вида V. Если теперь мы желаем найти второй дифференциал функции V, то нужно снова дифференцировать первый дифференциал $P\,dx$. Он является произведением двух переменных количеств P и dx; пусть первое из них имеет дифференциал $dP = p\,dx$, второе имеет дифференциал d^2x. По правилу дифференцирования произведения мы будем иметь второй дифференциал

$$d^2V = P\,d^2x + p\,dx^2.$$

Если затем положить $dp = q\,dx$, то, так как дифференциал количества dx^2 есть $2\,dx\,d^2x$, дифференцируя снова, получаем

$$d^3V = P\,d^3x + dP\,d^2x + 2p\,dx\,d^2x + dp\,dx^2.$$

Но вследствие

$$dP = p\,dx \quad \text{и} \quad dp = q\,dx$$

будем иметь

$$d^3V = P\,d^3x + 3p\,dx\,d^2x + q\,dx^3;$$

подобным образом найдутся и следующие дифференциалы.

244. Применим это к степеням количества x и найдём дифференциалы их в том случае, когда dx не полагается постоянным.

I. Пусть $V = x$; тогда

$$dV = dx; \quad d^2V = d^2x; \quad d^3V = d^3x; \quad d^4V = d^4x \text{ и т. д.}$$

II. Пусть $V = x^2$, тогда

$$
\begin{aligned}
dV &= 2x\,dx,\\
d^2V &= 2x\,d^2x + 2\,dx^2,\\
d^3V &= 2x\,d^3x + 6\,dx\,d^2x,\\
d^4V &= 2x\,d^4x + 8\,dx\,d^3x + 6\,d^2x^2,\\
d^5V &= 2x\,d^5x + 10\,dx\,d^4x + 20\,d^2x\,d^3x.
\end{aligned}
$$

III. Вообще, если $V = x^n$, то

$$
\begin{aligned}
dV &= nx^{n-1}\,dx,\\
d^2V &= nx^{n-1}\,d^2x + n(n-1)\,x^{n-2}\,dx^2,\\
d^3V &= nx^{n-1}d^3x + 3n(n-1)\,x^{n-2}\,dx\,d^2x + n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}\,dx^3,\\
d^4V &= nx^{n-1}\,d^4x + 4n(n-1)\,x^{n-2}\,dx\,d^3x + 3n(n-1)\,x^{n-2}\,d^2x^2 +\\
&\quad + 6n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}\,dx^2d^2x + n(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-4}\,dx^4.
\end{aligned}
$$

Если dx будет постоянным и вследствие этого $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, $d^4x = 0$ и т. д., то мы снова получим те же дифференциалы, которые уже раньше были найдены в этом предположении.

245. Так как дифференциалы любого порядка количества x дифференцируются по тому же закону как конечные количества, то всякое выражение, в которое, кроме конечного количества, входят его дифференциалы, можно будет дифференцировать по вышеизложенным правилам. Так как это иногда приходится делать, то мы приведём здесь несколько примеров.

I. Если $V = \frac{x\,d^2x}{dx^2}$, то, дифференцируя, будем иметь

$$dV = \frac{x\,d^3x}{dx^2} + \frac{d^2x}{dx} - \frac{2x\,d^2x^2}{dx^3}.$$

II. Если $V = \frac{x}{dx}$, то

$$dV = 1 - \frac{x\,d^2x}{dx^2};$$

то, что мы взяли в качестве функции v бесконечно большое количество, не создаёт здесь никакой помехи.

III. Пусть $V = x^2\,\mathrm{l}\frac{d^2x}{dx^2}$; так как V преобразуется в

$$x^2\,\mathrm{l}\,d^2x - 2x^2\,\mathrm{l}\,dx,$$

то, дифференцируя по обычным правилам, будем иметь

$$dV = 2x\,dx\,\mathrm{l}\,d^2x + \frac{x\,d^3x}{d^2x} - 4x\,dx\,\mathrm{l}\,dx - \frac{2x^2\,d^2x}{dx}.$$

Подобным образом найдутся и высшие дифференциалы количества V.

246. Если предложенное выражение содержит два переменных количества x и y, то можно принять, что дифференциал одного из них является постоянным либо что ни один из дифференциалов не является постоянным; действительно, мы можем по произволу принять за постоянное любой из двух дифференциалов, ибо от нашего произвола зависит, по какому закону будут возрастать последовательные значения одного из переменных. Однако мы не можем считать, что дифференциалы обоих переменных постоянны одновременно; действительно, этим мы приняли бы, что между количествами x и y существует определённое соотношение, тогда как либо его вовсе нет, либо оно считается неизвестным. В самом деле, если мы считаем, что x возрастает равномерно, и в то же время устанавливаем, что y также принимает равные приращения, то этим самым мы утверждаем, что $y=ax+b$, так что y зависит от x, чего, однако, принять мы не имеем права. Поэтому можно принять либо, что постоянным является только одно переменное, либо, что ни одно не является постоянным. Но если мы будем уметь производить дифференцирование, не считая постоянным ни один из дифференциалов, то тем самым нам будут известны и дифференциалы, получаемые в предположении, что какой-либо один дифференциал является постоянным; для этого достаточно, если, скажем, dx полагается постоянным, повсюду вычеркнуть члены, содержащие d^2x, d^3x, d^4x и т. д.

247. Итак, пусть V есть какая-либо конечная функция количеств x и y и пусть $dV=P\,dx+Q\,dy$. Желая найти второй дифференциал количества V, мы будем считать оба дифференциала dx и dy переменными; так как P и Q суть функции x и y, то положим

$$dP=p\,dx+q\,dy,$$
$$dQ=r\,dx+q\,dy,$$

ибо, как мы видели,

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)=r.$$

Теперь будем дифференцировать

$$dV=P\,dx+Q\,dy$$

и найдём

$$d^2V=P\,d^2x+p\,dx^2+2r\,dx\,dy+Q\,d^2y+q\,dy^2.$$

Если дифференциал dx считать постоянным, то

$$d^2V=p\,dx^2+2r\,dx\,dy+Q\,d^2y+q\,dy^2;$$

если же считать постоянным дифференциал dy, то

$$d^2V=P\,d^2x+p\,dx^2+2r\,dx\,dy+q\,dy^2.$$

248. Итак, если какая-либо функция количеств x и y дифференцируется дважды, причём никакой из дифференциалов не полагается постоянным, то её второй дифференциал всегда имеет вид

$$d^2V=P\,d^2x+Q\,d^2y+R\,dx^2+S\,dy^2+T\,dx\,d\,y,$$

причём количества P, Q, R, S и T зависят друг от друга таким образом, что при обозначениях, введённых в предшествующей главе,

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right),\quad R=\left(\frac{dP}{dx}\right),\quad S=\left(\frac{dQ}{dy}\right)$$

и

$$T=2\left(\frac{dQ}{dx}\right)=2\left(\frac{dP}{dy}\right).$$

Если из этих условий хотя бы одно не выполняется, то мы можем наверное утверждать, что предложенное выражение не является вторым дифференциалом ни для какой функции. Итак, тотчас же можно будет распознать, является ли выражение подобного вида вторым дифференциалом какого-либо количества или не является.

249. Подобным образом можно найти третьи и следующие дифференциалы; лучше показать это на частных примерах, чем применять общие формулы.

Пусть $V = xy$; тогда

$$\begin{aligned} dV &= y\,dx + x\,dy, \\ d^2V &= y\,d^2x + 2dx\,dy + x\,d^2y, \\ d^3V &= y\,d^3x + 3dy\,d^2x + 3dx\,d^2y + x\,d^3y, \\ d^4V &= y\,d^4x + 4dy\,d^3x + 6d^2x\,d^2y + 4dx\,d^3y + x\,d^4y \end{aligned}$$

и т. д.

В этом примере числовые коэффициенты следуют друг за другом по тому же закону, что и коэффициенты степени бинома, так что их можно выписать сколько угодно.

Если же $V = \frac{y}{x}$, то

$$dV = \frac{dy}{x} - \frac{y\,dx}{x^2},$$

$$d^2V = \frac{d^2y}{x} - \frac{2dx\,dy}{x^2} + \frac{2y\,dx^2}{x^3} - \frac{y\,d^2x}{x^2},$$

$$d^3V = \frac{d^3y}{x} - \frac{3\,dx\,d^2y}{x^2} + \frac{6\,dx^2\,dy}{x^3} - \frac{3\,dy\,d^2x}{x^2} + \frac{6y\,dx\,d^2x}{x^3} - \frac{6\,y\,dx^3}{x^4} - \frac{y\,d^3x}{x^2}$$

и т. д.

В этом примере закон следования коэффициентов при дифференциалах усматривается не столь легко, как в предшествующем.

250. Этот метод дифференцирования применим не только к конечным функциям; тем же способом можно найти дифференциалы всякого выражения, которое уже содержит в себе дифференциалы, причём можно принять, что какой-либо один дифференциал является постоянным или что постоянных дифференциалов нет. В самом деле, поскольку каждый дифференциал можно дифференцировать таким же образом и по тому же закону, как дифференцируются конечные количества, правила, изложенные в предшествующих главах, сохраняют силу и должны соблюдаться и здесь. Таким образом, пусть V есть выражение, конечное или бесконечно большое или бесконечно малое, и его нужно дифференцировать. Способ дифференцирования усматривается из следующих примеров.

I. Пусть $V = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, тогда

$$dV = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

II. Пусть $V = \frac{y\,dx}{dy}$, тогда

$$dV = dx + \frac{y\,d^2x}{dy} - \frac{y\,dx\,d^2y}{dy^2}.$$

III. Пусть $V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$, тогда

$$dV = \frac{(3dx\,d^2x + 3dy\,d^2y)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x)}{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

Эти дифференциалы взяты в наиболее общем виде, так как никакой из дифференциалов мы не считали постоянным; но отсюда легко найти те дифференциалы, которые получаются, если считать постоянным dx или dy.

251. Если никакой из дифференциалов мы не принимаем за постоянное количество, то мы не устанавливаем никакого закона, по которому следовали бы друг за другом значения переменных. Поэтому вторые и следующие дифференциалы будут неизвестны и не будут обозначать ничего определённого. Выражение, в котором будут содержаться вторые и высшие дифференциалы, не будет иметь никакого определённого значения, пока какой-либо дифференциал не будет предположен постоянным; до этого значение его останется неопределённым и будет меняться, смотря по тому, положим ли мы постоянным тот или другой дифференциал. Однако существуют такие выражения, содержащие вторые дифференциалы, которые даже в том случае, если ни один из дифференциалов мы не будем считать постоянным, всё же будут иметь определённое значение, которое останется одним и тем же, какой бы дифференциал мы ни положили бы постоянным. Свойства таких выражений мы в дальнейшем рассмотрим более обстоятельно и укажем, как отличать их от тех, которые не имеют определённых значений.

252. Чтобы уяснить эту особенность выражений, содержащих вторые или более высокие дифференциалы, мы возьмём сначала выражения, содержащие одно только переменное. Легко видеть, что если в какое-либо выражение входит второй дифференциал d^2x переменного количества x и если никакой дифференциал не взят за постоянное, то выражение не может иметь никакого определённого значения. Действительно, если мы положим постоянным дифференциал количества x, то будет $d^2x=0$; если же мы будем считать постоянным дифференциал количества x^2, а значит, и выражение $x\,dx$, то так как дифференциал $x\,d^2x+dx^2$ количества $x\,dx$ должен быть равен 0, будем иметь $d^2x=-\frac{dx^2}{x}$. Если же постоянным должен быть дифференциал $nx^{n-1}\,dx$ некоторой степени x^n, а значит, и выражения $x^{n-1}\,dx$, то второй её дифференциал будет равен нулю:

$$x^{n-1}\,d^2x+(n-1)\,x^{n-2}\,dx^2=0,$$

и значит,

$$d^2x=-\frac{(n-1)\,dx^2}{x}.$$

Мы получим ещё другие значения для d^2x, если будем считать постоянными дифференциалы других функций количества x. Ясно, что выражение, в которое входит d^2x, будет иметь самые различные значения, в зависимости от того, напишем ли мы вместо d^2x нуль или $-\frac{dx^2}{x}$, или $-\frac{(n-1)\,dx^2}{x}$, или другое выражение подобного рода. Так, пусть будет предложено выражение $\frac{x^2d^2x}{dx^2}$, которое вследствие однородности бесконечно малых количеств d^2x и dx^2 должно иметь конечное значение; оно станет равным нулю, если dx считать постоянным; если же постоянным будет $d\cdot x^2$, то оно перейдёт в $-x$, если постоянным будет $d\cdot x^3$, оно перейдёт в $-2x$; если постоянным будет $d\cdot x^4$, то оно перейдёт в $-3x$ и т. д. Итак, оно не может иметь определённого значения, пока не будет указано, какой дифференциал считается постоянным.

253. Таким же образом мы убедимся в непостоянстве значения какого-либо выражения, содержащего третий дифференциал. Рассмотрим, например, выражение $\frac{x^3d^3x}{dx\,d^2x}$, которое, подобно предыдущему, должно иметь конечное значение. Если дифференциал dx является постоянным, то это выражение переходит в выражение $\frac{0}{0}$, значение которого вскоре будет найдено. Пусть теперь постоянным будет $d\cdot x^2$; тогда $d^2x = -\frac{dx^2}{x}$, и, дифференцируя снова, будем иметь

$$d^3x = -\frac{2dx\,d^2x}{x} + \frac{dx^3}{x^2} = \frac{3dx^3}{x^2},$$

ибо $d^2x = -\frac{dx^2}{x}$; итак, в этом случае предложенное выражение переходит в $-3x^2$. Если же постоянным будет $d\,.\,x^n$, то $d^2x = -\frac{(n-1)\,dx^2}{x}$, и значит,

$$d^3x = -\frac{2(n-1)\,dx\,d^2x}{x} + \frac{(n-1)\,dx^3}{x^2} = \frac{2(n-1)^2\,dx^3}{x^2} + \frac{(n-1)\,dx^3}{x^2} = \frac{(2n-1)(n-1)\,dx^3}{x^2}.$$

Итак, в этом случае будем иметь

$$\frac{d^3n}{d^2x} = -\frac{(2n-1)\,dx}{x}$$

и

$$\frac{x^3\,d^3x}{dx\,d^2x} = -(2n-1)\,x^2,$$

откуда ясно, что если $n=1$, т. е. если dx постоянно, то значение предложенного выражения будет равно $-x^2$. Мы видим отсюда, что если в какую-либо формулу входят дифференциалы третьего или высшего порядка, но при этом не указано, какой дифференциал принимается за постоянное, то формула не имеет никакого определённого значения и потому решительно ничего не выражает; поэтому такого рода выражения не могут встретиться в исчислении.

254. Подобным образом если формула содержит два или большее число переменных и если в неё входят дифференциалы второго или высших порядков, то она, очевидно, не может иметь определённого значения, пока какой-нибудь дифференциал не будет положен постоянным. Исключение составляют только некоторые случаи, которые мы сейчас разберём. Действительно, если в некоторую формулу входит d^2x, то, поскольку значение d^2x меняется каждый раз, как тот или иной дифференциал полагается постоянным, не может быть, чтобы формула имела одно определённое значение. То же имеет место и для какого-либо дифференциала высшего порядка количества x, а также для вторых и высших дифференциалов остальных переменных. Однако если в формулу входят вторые дифференциалы двух или большего числа переменных, то может оказаться, что непостоянство, порождаемое одним, уничтожается непостоянством остальных. Вследствие этого и возникает тот упомянутый выше случай, когда такого рода формула, содержащая дифференциалы двух или большего числа переменных, может иметь определённое значение, несмотря на то что ни один из дифференциалов не полагается постоянным.

255. Так, например, формула

$$\frac{y\,d^2x + x\,d^2y}{dx\,dy}$$

не может иметь фиксированного значения, пока какой-либо дифференциал не будет положен постоянным. Ибо, если положить постоянным dx, то получится $\frac{x\,d^2y}{dx\,dy}$; если же положить постоянным dy, то получится $\frac{y\,d^2x}{dx\,dy}$; ясно, однако, что эти выражения не обязательно равны между собой. Ибо, если бы они были обязательно равными, то они должны были бы оставаться равными, какая бы функция количества x ни была подставлена вместо y. Положим, что $y = x^2$; поскольку при постоянном dx будем иметь $d^2y = 2\,dx^2$, формула $\frac{x\,d^2y}{dx\,dy}$ даст 1; если же положить постоянным dy, т. е. $2x\,dx$, то будем иметь $d^2y = 2x\,d^2x + 2dx^2 = 0$, и значит, $d^2x = -\frac{dx^2}{x}$, так что формула $\frac{y\,d^2x}{dx\,dy}$ даст $-\frac{1}{2}$. Так как уже в одном случае мы обнаружили расхождение, то тем более в общем случае $\frac{xd^2y}{dx\,dy}$ при постоянном dx не будет равно $\frac{yd^2x}{dx\,dy}$ при постоянном dy. Так как, далее, формула $\frac{yd^2x + xd^2y}{dx\,dy}$ не сохраняет неизменного значения, когда постоянным полагается один раз dx, а другой раз dy, то тем более она не сохранит неизменного значения, если постоянным будет положен дифференциал какой-нибудь функции количества x, или количества y, или обоих этих количеств.

256. Отсюда ясно, что такого рода формула может иметь определённое значение лишь в том случае, если она составлена так, что после того, как вместо тех переменных y, z и т. д., которые входят в неё кроме x, подставить какие-либо функции количества x, вторые и высшие дифференциалы количества x, т. е. d^2x, d^3x и т. д., совершенно устраняются из вычисления. Действительно, пусть после какой-либо такой подстановки в формуле ещё будет оставаться d^2x, или d^3x, или d^4x и т. д.; так как эти дифференциалы меняют своё значение всякий раз, как мы берём одни или другие постоянные, то и значение этой формулы будет неопределённым. Именно так и составлена формула $\frac{yd^2x + xd^2y}{dx\,dy}$, которую мы выше рассматривали. Если бы она имела определённое значение, что бы ни обозначало y, она должна была бы иметь определённое значение, когда y есть какая-либо функция x. Однако, уже если посложить $y = x$, то формула наша обратится в формулу $\frac{2xd^2x}{dx^2}$, а эта последняя, безусловно, является неопределённой, так как в неё входит d^2x, и она будет принимать всё новые и новые значения, всякий раз как новые дифференциалы будут полагаться постоянными; это нам хорошо известно из § 252.

257. Может, однако, возникнуть сомнение, существуют ли такие формулы, содержащие два или больше дифференциалов второго или более высокого порядка, которые обладали бы тем свойством, что если подставить какие-либо функции одного переменного вместо остальных переменных, дифференциалы второго порядка должны взаимно уничтожиться. Это сомнение мы устраним, указав формулу, которая действительно обладает этим свойством; таким образом, сущность дела выяснится путём проверки. А именно, я утверждаю, что формула

$$\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dx^3}$$

обладает упомянутым свойством, т. е. какую бы функцию количества x ни подставить вместо y, всегда дифференциалы второго порядка совершенно исчезают. Проверим это свойство на следующих примерах:

I. Пусть $y = x^2$; тогда

$$dy = 2x\,dx \quad \text{и} \quad d^2y = 2x\,d^2x + 2dx^2.$$

Если эти значения подставить в формулу $\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dx^3}$, мы получим

$$\frac{2x\,dx\,d^2x - 2x\,dx\,d^2x - 2dx^3}{dx^3} = -2.$$

II. Пусть $y = x^n$; тогда

$$dy = nx^{n-1}\,dx, \qquad d^2y = nx^{n-1}\,d^2x + n(n-1)\,x^{n-2}\,dx^2.$$

Если эти значения подставить в формулу $\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dx^3}$, то последняя преобразуется следующим образом:

$$\frac{nx^{n-1}\,dx\,d^2x - nx^{n-1}dx\,d^2x - n(n-1)\,x^{n-2}dx^3}{dx^3} = -n(n-1)\,x^{n-2}.$$

III. Пусть $y = -\sqrt{1-x^2}$; тогда

$$dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad d^2y = \frac{x\,d^2x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dx^2}{(1-x^2)^{3/2}};$$

и формула

$$\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dx^3}$$

перейдёт в

$$\frac{x\,d^2x}{dx^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{x\,d^2x}{dx^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{-1}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Итак, во всех этих примерах вторые дифференциалы d^2x взаимно уничтожаются, и так же будет всегда, какие бы другие функции ни подставить вместо y.

258. Хотя уже эти примеры показывают справедливость нашего утверждения, что формула $\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dx^3}$ имеет вполне определённое значение, какой бы дифференциал ни был принят за постоянное количество, однако мы можем без труда доказать это утверждение. Пусть y есть какая-либо функция количества x; пусть её дифференциал есть $dy = p\,dx$; количество p также есть некоторая функция x и, значит, его дифференциал будет иметь вид $dp = q\,dx$, где q снова будет функцией x. Так как $dy = p\,dx$, то, дифференцируя, будем иметь $d^2y = p\,d^2x + q\,dx^2$ и

$$dy\,d^2x - dx\,d^2y = p\,dx\,d^2x - p\,dx\,d^2x - q\,dx^3 = -q\,dx^3.$$

Так как это выражение не содержит никаких вторых дифференциалов, то оно будет иметь фиксированное значение и $\frac{dy\,dx^2 - dx\,d^2y}{dx^3}$ будет равно $-q$. Итак, какова бы ни была зависимость y от x, вторые дифференциалы взаимно уничтожатся, и потому значение этой формулы, которое при других обстоятельствах было бы неопределённым, становится определённым и фиксированным.

259. Хотя здесь мы считали, что y есть функция от x, однако это положение остаётся истинным и в том случае, если y вовсе не зависит от x. Действительно, поскольку мы вместо y подставляли какую угодно функцию от x и не определили, какая это будет функция, мы не приписываем количеству y никакой зависимости от x. Впрочем, можно провести доказательство таким образом, чтобы вовсе не упоминать о функции. Действительно, пусть y есть какое-либо количество, зависящее от x или не зависящее; его дифференциал dy будет однороден с дифференциалом dx, так что $\frac{dy}{dx}$ будет представлять конечное количество, дифференциал которого, т. е. приращение, получаемое им, когда x переходит в $x+dx$, а y в $y+dy$, будет фиксированным и не будет зависеть от закона образования вторых дифференциалов. Положим $\frac{dy}{dx}=p$; тогда будем иметь $dy=p\,dx$ и $d^2y=p\,d^2x+{}$ $+dp\,dx$, откуда

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = dp\,dx^2.$$

Значение этого выражения не является неопределённым, ибо оно содержит только первые дифференциалы и поэтому остаётся одним и тем же независимо от того, примем ли мы за постоянное количество какой-нибудь дифференциал или никакой дифференциал не будем полагать постоянным.

260. Так как выражение $dy\,d^2x - dx\,d^2y$, несмотря на то что в него входят вторые дифференциалы (можно считать, что они потенциально взаимно уничтожаются), имеет фиксированное значение, то и всякое выражение, в которое вторые дифференциалы входят только через посредство формулы $dy\,d^2x - dx\,d^2y$, равным образом будет иметь фиксированное значение. Вообще, если положить $dy\,d^2x - dx\,d^2y = \omega$ и если V будет количество, составленное из первых дифференциалов dx, dy и ω каким бы то ни было образом, то оно будет иметь фиксированное значение. Действительно, так как на дифференциалы dx и dy не оказывает никакого влияния произвольный закон, по которому мы заставляем расти значения количества x, а в ω вторые дифференциалы взаимно уничтожаются, то и количество V будет не неопределённым, а фиксированным. Так выражение

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

обладает фиксированным значением, хотя и может показаться, что вторые дифференциалы его портят. Сверх того, так как числитель и знаменатель однородны, выражение это имеет конечное значение, разве что случайно оно окажется бесконечно большим или бесконечно малым.

261. Таким же образом, как доказано, что формула $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ имеет фиксированное значение, можно доказать, что и формулы

$$dx\,d^2z - dz\,d^2x \quad \text{и} \quad dy\,d^2z - dz\,d^2y$$

имеют конечные значения. Следовательно, выражения, которые содержат три переменные x, y и z, если в них не входят никакие другие вторые дифференциалы, кроме здесь указанных, будут иметь фиксированные значения, как если бы в них вовсе не было вторых дифференциалов. Так, выражение

$$\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx+dz)\,d^2y-(dy+dz)\,d^2x+(dx-dy)\,d^2z},$$

несмотря на наличие вторых дифференциалов, обладает фиксированным значением. Подобным образом можно получить формулы, содержащие большее число переменных, в которых наличие вторых дифференциалов не препятствует тому, чтобы они имели фиксированные значения.

262. За исключением формул такого рода, все остальные формулы, содержащие вторые дифференциалы, имеют неопределённые значения и потому не могут иметь места в исчислении, если только не указан какой-либо дифференциал, который полагается постоянным. Но как только какой-нибудь дифференциал положен постоянным, тотчас же все выражения, сколько бы переменных они ни содержали и какие бы дифференциалы порядка выше первого в них ни входили, получат фиксированные значения, и теперь они могут входить в исчисление. Так, если, например, dx положен постоянным, то дифференциалы второго и высшего порядков исчезают, и какие бы функции от x ни подставлялись вместо y, z и т. д., их вторые дифференциалы выразятся через dx^2, третьи — через dx^3 и т. д., и таким образом непостоянство, вызванное наличием вторых дифференциалов, перестаёт иметь место. То же самое происходит в том случае, когда постоянным полагается первый дифференциал другого переменного или какой-либо функции.

263. Из этого следует, что дифференциалы второго и более высоких порядков на самом деле никогда не входят в исчисление и вследствие неопределённости их значений вообще непригодны для анализа. Действительно, когда вторые дифференциалы, по видимости, имеются налицо, то либо какой-нибудь первый дифференциал полагается постоянным, либо никакой постоянным не полагается. В первом случае вторые дифференциалы вовсе исчезают из исчисления, поскольку они выражаются через первые. Во втором же случае, если только вторые дифференциалы не уничтожаются взаимно, их значение будет неопределённым, и потому им не место в анализе; если же они взаимно уничтожаются, то их наличие является лишь кажущимся, и нужно считать, что на самом деле есть только конечные величины и их первые дифференциалы. Так как, однако, они часто, хотя и кажущимся образом, используются в исчислении, то мы должны были показать, как с ними обращаться. Сейчас мы покажем, каким образом всегда можно избавиться от вторых и высших дифференциалов.

264. Если выражение содержит только одно переменное количество x и если в него входят высшие дифференциалы d^2x, d^3x, d^4x и т. д., то оно может иметь фиксированное значение лишь в том случае, когда какой-либо первый дифференциал полагается постоянным. Пусть t есть то переменное количество, дифференциал которого полагается постоянным, так что $d^2t=0$, $d^3t=0$, $d^4t=0$ и т. д. Положим $dx=p\,dt$; тогда p будет конечное количество, на дифференциал которого неопределённость вторых дифференциалов не оказывает влияния, и, кроме того, $\frac{dp}{dt}$ будет конечным количеством. Пусть $dp = q\,dt$ и подобным образом, далее, $dq = r dt$, $dr = s dt$ и т. д. Количества q, r, s и т. д. будут конечными и будут иметь фиксированные значения. Так как $dx = p\,dt$, то

$$d^2x = dp\,dt = q\,dt^2, \quad d^3x = q\,dt^2 = r\,dt^3, \quad d^4x = dr\,dt^3 = s\,dt^4 \quad \text{и т. д.};$$

если эти значения подставить вместо d^2x, d^3x, d^4x и т. д., то выражение будет содержать только конечные количества и первый дифференциал dt, так что оно уже не будет иметь неопределённого значения.

265. Если x есть функция от t, то таким образом можно совершенно исключить количество x, так что останется только количество t и его дифференциал; если же t есть функция от x, то и обратно, x есть функция от t. Можно, однако, удержать в вычислении количество x и его дифференциал, если повсюду, по выполнении ранее сделанных подстановок, восстановить вместо t и dt их выражения через x и dx. Чтобы пояснить это, положим t равным x^n, так что постоянным полагается первый дифференциал количества x^n. Так как $dt = nx^{n-1}\,dx$, то

$$p = \frac{1}{nx^{n-1}} \quad \text{и} \quad dp = \frac{-(n-1)\,dx}{nx^n} = q\,dt = n\,qx^{n-1}\,dx,$$

откуда

$$q = \frac{-(n-1)}{n^2x^{2n-1}} \quad \text{и} \quad dq = \frac{(n-1)\,(2n-1)\,dx}{n^2x^{2n}} = r\,dt = n\,rx^{n-1}\,dx.$$

Далее,

$$r = \frac{(n-1)\,(2n-1)}{n^3x^{3n-1}} \quad \text{и} \quad s = -\frac{(n-1)\,(2n-1)\,(3n-1)}{n^4x^{4n-1}}.$$

Поэтому, если дифференциал количества x^n положить постоянным, то будем иметь

$$d^2x = -\frac{(n-1)\,dx^2}{x}, \quad d^3x = \frac{(n-1)\,(2n-1)\,dx^3}{x^2},$$

$$d^4x = -\frac{(n-1)\,(2n-1)\,(3n-1)\,dx^4}{x^3}$$

и т. д.

266. Если выражение содержит два переменных x и y и если дифференциал одного из них, например, дифференциал x, полагается постоянным, то вследствие $d^2x = 0$ из вторых и высших дифференциалов войдут только дифференциалы d^2y, d^3y и т. д. Их можно устранить тем самым способом, который мы использовали выше, если положим

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx, \quad dr = s\,dx \quad \text{и т. д.}$$

Действительно, тогда будем иметь:

$$d^2y = q\,dx^2, \quad d^3y = r\,dx^3, \quad d^4y = s\,dx^4 \quad \text{и т. д.}$$

По выполнении этих подстановок получится выражение, которое, помимо конечных количеств x, y, p, q, r, s и т. д., может содержать только первый дифференциал dx. Так, если будет предложено выражение

$$\frac{y\,dx^4 + x\,dy\,d^3y + x\,d^4y}{(x^2+y^2)\,d^2y}$$

и если dx принято за постоянное, то положим

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx \quad \text{и} \quad dz = s\,dx.$$

После подстановки этих значений предложенное выражение преобразуется в выражение

$$\frac{(y + xpr + xs)\,dx^2}{(x^2+y^2)\,q},$$

которое уже не содержит вторых и высших дифференциалов.

267. Подобным же образом можно устранить вторые и высшие дифференциалы, приняв за постоянное dy. Если же мы будем считать постоянным какой-нибудь другой первый дифференциал dt, то сначала вышеизложенным способом мы устраним из вычисления высшие дифференциалы количества x, полагая

$$dx = p\,dt, \quad dp = q\,dt, \quad dq = r\,dt, \quad dr = s\,dt \quad \text{и т. д.},$$

откуда

$$d^2x = q\,dt^2, \quad d^3x = r\,dt^3, \quad d^4x = s\,dt^4 \quad \text{и т. д.},$$

а затем таким же образом устраним высшие дифференциалы y, полагая

$$dy = P\,dt, \quad dP = Q\,dt, \quad dQ = R\,dt, \quad dR = S\,dt \quad \text{и т. д.},$$

откуда

$$d^2y = Q\,dt^2, \quad d^3y = R\,dt^3, \quad d^4y = S\,dt^4 \quad \text{и т. д.}$$

Подставив эти значения, получим выражение, которое, помимо конечных количеств x, p, q, r, s и т. д., y, P, Q, R, S и т. д., может содержать только дифференциал dt и поэтому не будет иметь неопределённого значения.

268. Зависит ли первый дифференциал, который полагается постоянным, только от x, или только от y, или, наконец, одновременно от x и от y, — нет нужды вводить два ряда количеств p, q, r и т. д. Действительно если dt зависит только от x, то буквы p, q, r и т. д. становятся функциями количества x, и в выражение войдут только буквы P, Q, R и т. д. То же самое случится, если постоянный дифференциал dt будет зависеть только от y. Если же dt зависит от обоих переменных, то нужно несколько видоизменить действия. Пусть, например, за постоянное количество принимается дифференциал $y\,dx$; тогда $y\,d^2x + dx\,dy = 0$, откуда

$$d^2x = -\frac{dx\,dy}{y}.$$

Пусть теперь

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx \quad \text{и т. д.}$$

Тогда

$$d^2x = -\frac{p\,dx^2}{y}.$$

Дифференцируя ещё раз, получаем

$$d^3x = -\frac{q\,dx^3}{y} + \frac{p^2\,dx^3}{y^2} - \frac{2p\,dx\,d^2x}{y}.$$

Подставим сюда вместо d^2x его значение $-\frac{p\,dx^2}{y}$; будем иметь

$$d^3x = -\frac{q\,dx^3}{y} + \frac{3p^2\,dx^3}{y^2}.$$

Далее

$$d^4x = -\frac{r\,dx^4}{y} + \frac{pq\,dx^4}{y^2} + \frac{6pq\,dx^4}{y^2} - \frac{6p^3dx^4}{y^3} + \left(\frac{3p^2}{y^2} - \frac{q}{y}\right) 3dx^2\,d^2x,$$

и, подставляя вместо d^2x значение $-\frac{p\,dx^2}{y}$, получим

$$d^4x = \left(\frac{-r}{y} + \frac{10\,pq}{y^2} - \frac{15\,p^3}{y^3}\right) dx^4$$

и т. д. Далее, так как $dy = p\,dx$, то

$$d^2y = q\,dx^2 + p\,d^2x = \left(q - \frac{p^2}{y}\right) dx^2.$$

Подставляя каждый раз вместо d^2x выражение $-\frac{p\,dx^2}{y}$, будем получать

$$d^3y = \left(r - \frac{4\,pq}{y} + \frac{3\,p^3}{y^2}\right) dx^3$$

и

$$d^4y = \left(s - \frac{7\,pr}{y} - \frac{4q^2}{y} + \frac{25\,p^2q}{y^2} - \frac{15\,p^4}{y^3}\right) dx^4$$

и т. д.

После подстановки этих значений высших дифференциалов, предложенное выражение примет такой вид, что в нём уже не будет содержаться больше никаких высших дифференциалов, и мы избавляемся от необходимости рассматривать какой-либо дифференциал как постоянное количество. В самом деле, так как после выполнения этого преобразования больше нет вторых дифференциалов, то и нет необходимости вспоминать о том, какой дифференциал прежде был принят за постоянное количество.

269. В приложениях дифференциального исчисления к теории кривых линий часто случается, что за постоянное принимают первый дифференциал $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Поэтому мы покажем, как нужно в этом случае исключать вторые и высшие дифференциалы. Тем самым станет ясно, как решается такой же вопрос, если нужно будет принять за постоянное какой-нибудь другой дифференциал.

Положим снова

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx, \quad dr = s\,dx \quad \text{и т. д.};$$

тогда дифференциал $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ примет вид $dx\,\sqrt{1 + p^2}$. Так как он является постоянным, то будем иметь

$$d^2x\,\sqrt{1 + p^2} + \frac{pq\,dx^2}{\sqrt{1 + p^2}} = 0,$$

и значит,

$$d^2x = -\frac{pq\,dx^2}{1 + p^2};$$

таким образом, мы имеем значение количества d^2x. Далее, будем иметь

$$d^3x = -\frac{pr\,dx^3}{1+p^2} - \frac{q^2\,dx^3}{1+p^2} + \frac{2p^2q^2\,dx^3}{(1+p^2)^2} - \frac{2pq\,dx\,d^2x}{1+p^2} =$$

$$= -\frac{pr\,dx^3}{1+p^2} - \frac{q^2\,dx^3}{1+p^2} + \frac{4p^2q^2\,dx^3}{(1+p^2)^2} = -\frac{pr\,dx^3}{1+p^2} + \frac{(3p^2-1)\,q^2\,dx^3}{(1+p^2)^2}.$$

Далее, получим

$$d^4x = -\frac{ps\,dx^4}{1+p^2} + \frac{(10p^2-3)\,qr\,dx^4}{(1+p^2)^2} - \frac{(15p^2-13)\,pq^3\,dx^4}{(1+p^2)^3}.$$

Но так как мы положили $dy = p\,dx$, то, дифференцируя, будем иметь

$$d^2y = q\,dx^2 + p\,d^2x = q\,dx^2 - \frac{p^2q\,dx^2}{1+p^2} = \frac{q\,dx^2}{1+p^2},$$

$$d^3y = \frac{r\,dx^3}{1+p^2} - \frac{2pq^2\,dx^3}{(1+p^2)^2} + \frac{2q\,dx\,d^2x}{1+p^2},$$

откуда

$$d^3y = \frac{r\,dx^3}{1+p^2} - \frac{4pq^2\,dx^3}{(1+p^2)^2}.$$

Дифференцируя ещё раз, находим

$$d^4y = \frac{s\,dx^4}{1+p^2} - \frac{13pq\,r\,dx^4}{(1+p^2)^2} + \frac{4\,(6p^2-1)\,q^3\,dx^4}{(1+p^2)^3}.$$

Итак, все высшие дифференциалы обеих переменных x и y выразятся через конечные количества и через степени dx, и после этих подстановок мы получим выражение, совершенно свободное от вторых дифференциалов.

270. Изложив способ, которым можно освободиться от вторых и высших дифференциалов, покажем его применение на нескольких примерах.

I. Пусть предложено выражение $\frac{x\,d^2y}{dx^2}$, в котором dx положено постоянным. Если положить $dy = p\,dx$, и $dp = q\,dx$, то вследствие $d^2y = q\,dx^2$ предложенное выражение перейдёт в конечное выражение xq.

II. Пусть предложено выражение $\frac{dx^2+dy^2}{d^2x}$, в котором положено постоянным dy. Положим $dx = p\,dy$, $dp = q\,dy$; так как $d^2x = q\,dy^2$, то получится $\frac{1+p^2}{q}$. Если же мы пожелали бы положить, как прежде, $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, то вследствие постоянства dy будем иметь $0 = p\,d^2x + dp\,dx$ и $d^2x = -\frac{q\,dx^2}{p}$, следовательно, предложенное выражение перейдёт в $\frac{-p\,(1+p^2)}{q}$.

III. Пусть предложено выражение $\frac{y\,d^2x - x\,d^2y}{dx\,dy}$, в котором положено постоянным ydx. Положим $dy = pdx$ и $dp = qdx$; согласно § 268 будем иметь $d^2x = -\frac{p\,dx^2}{y}$ и $d^2y = q\,dx^2 - \frac{p^2dx^2}{y}$; после этих подстановок предложенное выражение преобразуется в выражение $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$.

IV. Пусть предложено выражение $\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$, в котором постоянным положено $\sqrt{dx^2+dy^2}$. Снова положим $dy = pdx$, $dp = qdx$; по предыдущему параграфу будем иметь $d^2y=\frac{q\,dx^2}{1+p^2}$; следовательно, предложенное выражение перейдёт в $\frac{(1+p^2)^2}{q}$.

Из этих примеров становится достаточно ясным, каким образом в каждом представляющемся случае, если какой-нибудь первый дифференциал принимается за постоянное, нужно исключать вторые и высшие дифференциалы.

271. Итак, если указанным образом ввести конечные количества p, q, r, s и т. д., вторые и высшие дифференциалы можно исключить, так что всё данное выражение, помимо конечных количеств x, y, p, q, r, s и т. д., будет содержать только дифференциал dx. Обратно, если предлагается такого рода приведённое выражение, то его снова можно привести к первоначальному виду, введя вместо p, q, r, s и т. д. вторые и высшие дифференциалы. При этом совершенно безразлично, какой именно первый дифференциал принимается за постоянное, тот ли самый, что раньше, или какой-либо другой. Более того, можно не принимать за постоянное никакого дифференциала, и таким образом получатся выражения, содержащие вторые и более высокие дифференциалы, которые, хотя никакой дифференциал и не принимается за постоянное, всё же будут обладать фиксированными значениями. Что такого рода выражения существуют, мы показали выше.

272. В самом деле, пусть предложено какое-нибудь выражение, содержащее конечные количества x, y, p, q, r и т. д. и дифференциал dx, причём

$$p=\frac{dy}{dx},\quad q=\frac{dp}{dx},\quad r=\frac{dq}{dx}\quad \text{и т. д.}$$

Если мы пожелаем исключить буквы p, q, r и т. д. так, чтобы вместо них вошли вторые и высшие дифференциалы количеств x и y и чтобы никакой дифференциал не был принят за постоянное, то будем иметь

$$dp=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^2}$$

и отсюда

$$q=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Дифференцируя эту формулу, получим

$$dq=\frac{dx^2\,d^3y-3dx\,d^2x\,d^2y+3dy\,d^2x^2-dx\,dy\,d^3x}{dx^4},$$

откуда

$$r=\frac{dx^2\,d^3y-3dx\,d^2x\,d^2y+3dy\,d^2x^2-dx\,dy\,d^3x}{dx^5}.$$

Если, сверх того, в выражение входит буква s, обозначающая $\frac{dr}{dx}$, то вместо неё нужно подставить значение

$$s=\frac{dx^3\,d^4y-6dx^2\,d^2x\,d^3y-4dx^2\,d^2y\,d^3y+15dx\,d^2x^2\,d^2y+10dx\,dy\,d^2x\,d^3x}{dx^7}+$$
$$+\frac{-15dy\,d^2x^3-dx^2\,dy\,d^4x}{dx^7}.$$

После подстановки этих значений вместо количеств p, q, r, s и т. д. предложенное выражение преобразуется в другое, содержащее высшие дифференциалы количеств x и y; это выражение, хотя бы никакой дифференциал не принимался за постоянное, всё же будет иметь не неопределённое, а фиксированное значение.

273. Таким образом, всякая формула, содержащая дифференциал высших порядков, в которой некоторый первый дифференциал предполагается постоянным, может быть преобразована в другую формулу, в которой никакой дифференциал не полагается постоянным и которая, несмотря на это, имеет одно и то же фиксированное значение. А именно, сперва с помощью изложенного выше метода мы исключим высшие дифференциалы, положив $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$, $dr = s\,dx$ и т. д., а затем подставим вместо p, q, r, s и т. д. найденные только что значения. Тогда получится выражение, равное первому и не требующее, чтобы какой-либо дифференциал был принят за постоянное количество. Это преобразование мы поясним следующими примерами:

I. Пусть предложено выражение $\frac{xd^2y}{dx^2}$, в котором dx полагается постоянным. Требуется преобразовать его в другое выражение, в котором никакой дифференциал не принимается за постоянное. Положим $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, тогда, как мы видели в § 270, предложенное выражение перейдёт в выражение qx. Подставим теперь вместо q значение, которое оно получает, когда никакой дифференциал не полагается постоянным, т. е. значение $q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$; тогда найдём выражение

$$\frac{x\,dx\,d^2y - x\,dy\,d^2x}{dx^3},$$

равное предложенному и не содержащее никакого постоянного дифференциала.

II. Пусть предложено выражение $\frac{dx^2+dy^2}{d^2x}$, в котором dy принято за постоянное. Положим $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$; тогда данное выражение перейдёт в выражение $-\frac{p(1+p^2)}{q}$; положим теперь (§ 270) $p = \frac{dy}{dx}$ и $q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$; тогда мы найдём выражение

$$\frac{dy\,(dx^2+dy^2)}{dy\,d^2x - dx\,d^2y},$$

которое имеет фиксированное значение, когда никакой дифференциал не принимается за постоянное, и которое имеет то же значение, что предложенное выражение.

III. Пусть предложено выражение $\frac{yd^2x - x\,d^2y}{dx\,dy}$, в котором за постоянное принят дифференциал ydx. Положим $dy = pdx$, $dp = qdx$; тогда, как мы видели раньше (§ 270), это выражение преобразуется в выражение $-1 - \frac{xq}{p} + \frac{xp}{y}$, которое, не принимая никакого дифференциала за постоянное, мы преобразуем в выражение

$$-1 - \frac{x\,dx\,d^2y - x\,dy\,d^2x}{dx^2\,dy^2} + \frac{x\,dy}{y\,dx} = \frac{x\,dx\,dy^2 - y\,dx^2\,dy - yx\,dx\,d^2y + yx\,dy\,d^2x}{y\,dx^2\,dy}.$$

IV. Пусть предложено выражение $\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}$, в котором за постоянное принят дифференциал $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Положим $dy = p\,dx$ и $dp = q\,dx$;

тогда получится выражение $\frac{(1+p^2)^2}{q}$. Положим теперь

$$p=\frac{dy}{dx} \text{ и } q=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3};$$

тогда, не принимая никакого дифференциала за постоянное, мы получим выражение

$$\frac{(dx^2+dy^2)^2}{dx^2\,d^2y-dx\,dy\,d^2x},$$

равносильное предложенному.

V. Пусть предложено выражение $\frac{dx\,d^3y}{d^2y}$, в котором дифференциал dx принят за постоянное. Положим $dy=pdx$, $dp=qdx$ и $dq=rdx$; тогда вследствие $d^2y=qdx^2$ и $d^3y=rdx^3$ предложенная формула перейдёт в формулу $\frac{rdx^2}{q}$. Теперь вместо q и r подставим значения, которые они получают, когда никакой дифференциал не принимается за постоянное, т. е. значения

$$q=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3} \quad \text{и} \quad r=\frac{dx^2\,d^3y-3dx\,d^2x\,d^2y+3dy\,d^2x^2-dx\,dy\,d^3x}{dx^5};$$

мы получим следующее выражение, равносильное предложенному:

$$\frac{dx^2d^3y-3dx\,d^2x\,d^2y+3dy\,d^2x^2+dx\,dyd^3x}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}=\frac{dx\,(dx\,d^3y-dy\,d^3x)}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}-3d^2x.$$

274. Если мы внимательнее рассмотрим эти преобразования, то мы сможем установить более удобный метод их выполнения, при котором не понадобится вводить буквы p, q, r и т. д. Для достижения этой цели применяются различные приёмы, смотря по тому, будет ли тот или иной дифференциал принят в предложенном выражении за постоянное. Положим сперва, что в предложенной дифференциальной формуле постоянным является дифференциал dx; так как мы положили pdx вместо dy, а потом снова $\frac{dy}{dx}$ вместо p, то первые дифференциалы dx и dy всюду, где они входили в предложенное выражение, останутся неизменными. Там же, где встречалось d^2y, вместо него мы пишем qdx^2, а потом вместо q подставляем значение $\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}$. Поэтому преобразование будет выполнено, если повсюду вместо d^2y прямо положить $\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx}$, т. е. $d^2y-\frac{dy\,d^2x}{dx}$.

Пусть, сверх того, в предложенное выражение входит d^3y; тогда, поскольку вместо него полагается rdx^3, а затем вместо r подставляется приведённое выше значение, нужно будет всюду вместо d^3y написать

$$d^3y-\frac{3d^2x\,d^2y}{dx}+\frac{3dy\,d^2x^2}{dx^2}-\frac{dy\,d^3x}{dx},$$

после чего предложенное выражение преобразуется в другое, которое не будет содержать никакого постоянного дифференциала. Так, если будет предложено выражение $\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y}$, в котором dx

полагается постоянным, то, положив $d^2y - \frac{dy\, d^2x}{dx}$ вместо d^2y, мы найдём равное ему выражение

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x},$$

не содержащее никакого дифференциала.

275. Теперь легко понять, что если в некотором выражении за постоянное принимается дифференциал dy, то повсюду вместо d^2x нужно написать $d^2x - \frac{dx\, d^2y}{dy}$ и вместо d^3x написать $d^3x - \frac{3dx^2\, dy^2}{dy} + \frac{3dx\, d^2y^2}{dy^2} - \frac{dx\, d^3y}{dy}$, и тогда получится равносильное выражение, в котором никакой дифференциал не полагается постоянным. Если же в предложенном выражении за постоянное будет принят дифференциал $y\,dx$, то, так как [§ 268]

$$d^2x = -\frac{p\,dx^2}{y} \quad \text{и} \quad d^2y = q\,dx^2 - \frac{p^2\,dx^2}{y},$$

мы должны будем повсюду вместо d^2x написать $-\frac{dx\,dy}{y}$, а вместо d^2y написать $d^2y - \frac{dy\, d^2x}{dx} - \frac{dy^2}{dx}$; более высокие дифференциалы я не рассматриваю, так как они встречаются в таких вопросах очень редко. Если же в предложенном выражении за постоянное будет принят дифференциал $\sqrt{dx^2+dy^2}$, то, так как мы нашли [§ 269], что

$$d^2x = -\frac{pq\,dx^2}{1+p^2} \quad \text{и} \quad d^2y = \frac{q\,dx^2}{1+p^2},$$

вместо d^2x повсюду нужно будет написать $\frac{dy^2\, d^2x - dx\, dy\, d^2y}{dx^2+dy^2}$, а вместо d^2y написать $\frac{dx^2\, d^2y - dx\, dy\, d^2x}{dx^2+dy^2}$. Так, если будет предложено выражение $\frac{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2x}$, в котором $\sqrt{dx^2+dy^2}$ принято за постоянное, то оно преобразуется в выражение

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\, d^2x - dx\, d^2y},$$

в котором никакой дифференциал не принимается за постоянное.

276. Чтобы эти преобразования можно было легче производить на практике, мы собрали их в нижеследующую таблицу.

Итак, каждая дифференциальная формула высшего порядка преобразуется в другую, не содержащую никакого постоянного дифференциала, с помощью следующих подстановок.

I. Если за постоянное принимается дифференциал dx,

вместо	нужно написать
d^2y	$d^2y - \frac{dy\, d^2x}{dx}$,
d^3y	$d^3y - \frac{3d^2x\, d^2y}{dx} + \frac{3dy\, d^2x^2}{dx^2} - \frac{dy\, d^3x}{dx}$.

II. Если за постоянное принимается дифференциал dy,

вместо	нужно написать
d^2x	$d^2x - \frac{dx\,d^2y}{dy}$,
d^3x	$d^3x - \frac{3d^2x\,d^2y}{dy} + \frac{3dx\,d^2y^2}{dy^2} - \frac{dx\,d^3y}{dy}$.

III. Если за постоянное принимается дифференциал $y\,dx$.

вместо	нужно написать
d^2x	$-\frac{dx\,dy}{y}$,
d^2y	$d^2y - \frac{dy\,d^2x}{dx} - \frac{dy^2}{y}$,
d^3x	$\frac{dy\,d^2x}{y} - \frac{dx\,d^2y}{y} + \frac{3dx\,dy^2}{y^2}$,
d^3y	$d^3y - \frac{3d^2x\,d^2y}{dx} + \frac{3dy\,d^2x^2}{dx^2} - \frac{dy\,d^3x}{dx} - \frac{4dy\,d^2y}{y} + \frac{4dy^2\,d^2x}{y\,dx} + \frac{3dy^3}{y^2}$.

IV. Если за постоянное принимается дифференциал $\sqrt{dx^2 + dy^2}$,

вместо	нужно написать
d^2x	$\frac{dy^2\,d^2x - dx\,dy\,d^2y}{dx^2 + dy^2}$,
d^2y	$\frac{dx^2\,d^2y - dx\,dy\,d^2x}{dx^2 + dy^2}$,
d^3x	$\frac{dy^2\,d^3x - dx\,dy\,d^3y}{dx^2 + dy^2} + \frac{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)(3dy^2\,d^2y - dx^2d^2y + 4dx\,dy\,d^2x)}{(dx^2 + dy^2)^2}$,
d^3y	$\frac{dx^2\,d^3y - dx\,dy\,d^3x}{dx^2 + dy^2} + \frac{(dy\,d^2x - dx\,d^2y)(3dx^2\,d^2x - dy^2\,d^2x + 4dx\,dy\,d^2y)}{(dx^2 + dy^2)^2}$.

277. Итак, выражения, не содержащие никакого постоянного дифференциала, будут составлены таким образом, что можно принять за постоянное по произволу какой угодно дифференциал. Исходя из этого, можно, рассматривая дифференциальные выражения, в которых никакой дифференциал не полагается постоянным, установить, является ли их значение неопределённым или фиксированным. Для этого сначала положим какой-нибудь дифференциал, например dx, постоянным; затем по правилу предшествующего параграфа приведём выражение снова к такому виду, в котором никакой дифференциал не предполагается постоянным. Если это выражение совпадёт с предложенным, то последнее будет фиксированным и не будет зависеть от непостоянства вторых дифференциалов; если же получится выражение, отличное от предложенного, тогда последнее имеет неопределённое значение. Так, пусть предложено выражение $yd^2x - xd^2y$, в котором никакой дифференциал не полагается постоянным; для того чтобы установить, имеет ли оно фиксированное или неопределённое значение, положим dx постоянным; тогда предложенное выражение перейдёт в $-xd^2y$; теперь по первому правилу предшествующего параграфа вместо d^2y положим $d^2y - \frac{dy\,d^2x}{dx}$, и мы найдём выражение $-xd^2y + \frac{x\,dy\,d^2x}{dx}$, несходство которого с предложенным указывает на то, что предложенное выражение не имеет фиксированного и определённого значения.

278. Подобным образом, если будет предложено общее выражение вида

$$Pd^2x + Qdx\,dy + Rd^2y,$$

можно установить условие, при котором оно имеет фиксированное значение, когда никакой дифференциал не принят за постоянное. Для этого положим dx постоянным; тогда предложенное выражение перейдёт в выражение $Qdx\,dy + Rd^2y$; последнее мы снова преобразуем так, чтобы его значение оставалось одним и тем же, хотя бы никакой дифференциал не считался постоянным; мы получим, таким образом, выражение $Qdx\,dy + Rd^2y - \frac{Rdy\,d^2x}{dx}$, которое совпадёт с предшествующим, если $Pdx + Rdy = 0$; таким образом, только в этом случае его значение будет фиксированным. Если же мы не будем иметь $P = -\frac{Rdy}{dx}$, или, что то же, $R = -\frac{Pdx}{dy}$, то предложенное выражение $Pd^2x + Qdx\,dy + Rd^2y$ не будет иметь фиксированного значения; его значение будет неопределённым и будет меняться в зависимости от того, принимается ли за постоянное тот или иной дифференциал.

279. Основываясь на этих началах, легко также будет преобразовать дифференциальное выражение, в котором какой-нибудь дифференциал положен постоянным, к другому виду, где принимается за постоянное другой дифференциал. Для этого нужно сначала привести выражение к такому виду, который не содержит никакого постоянного дифференциала, а затем положить постоянным этот другой дифференциал. Так, если в предложенном выражении дифференциал dx принят за постоянное и требуется преобразовать его в другое выражение, которое содержало бы постоянный дифференциал dy, то в формулах, которые должны быть подставлены вместо d^2y и d^3y, нужно вследствие постоянства dy положить $d^2y = 0$, $d^3y = 0$, так что вместо d^2y нужно будет подставить $-\frac{dy\,d^2x}{dx}$ и вместо d^3y подставить $\frac{3dy\,d^2x^2}{dx^2} - \frac{dy\,d^3x}{dx}$. Таким образом, выражение $-\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y}$, в котором dx положено постоянным, преобразуется в выражение $\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dy\,d^2x}$, в котором постоянным полагается dy.

280. Если, наоборот, выражение, в котором dy полагается постоянным, требуется преобразовать в другое, в котором постоянным является dx, то вместо d^2x нужно подставить $-\frac{dx\,d^2y}{dy}$, а вместо d^3x выражение $\frac{3dx\,d^2y^2}{dy^2} - \frac{dx\,d^3y}{dy}$. Подобным образом, если формулу, в которой постоянным положено $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, нужно преобразовать в другую, в которой постоянным будет dx, то вместо d^2x нужно написать $-\frac{dx\,dy\,d^2y}{dx^2 + dy^2}$ и вместо d^2y нужно написать $\frac{dx^2\,d^2y}{dx^2 + dy^2}$. Если же формулу, в которой dx принято за постоянное, нужно преобразовать в другую, в которой постоянным будет $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, то вследствие постоянства $dx^2 + dy^2$ имеем

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$$

и

$$d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx}.$$

Приняв это значение вместо d^2x, мы должны написать вместо d^2y выражение

$$d^2y + \frac{dy^2 d^2y}{dx^2} = \frac{(dx^2+dy^2)\,d^2y}{dx^2}.$$

Таким образом, выражение $-\frac{(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y}$, в котором dx есть постоянное, преобразуется в другое, в котором постоянным полагается $\sqrt{dx^2+dy^2}$, а именно в выражение

$$-\frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2y}.$$

ГЛАВА IX

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

281. В этой главе мы ставим себе задачей прежде всего объяснить, как дифференцируются функции количества x, неявно определяемые уравнением, которое содержит в себе соотношение между функцией y и количеством x. После этого мы остановимся на рассмотрении природы дифференциальных уравнений и покажем, каким образом они возникают из конечных уравнений. Поскольку в интегральном исчислении наиболее трудным вопросом является интегрирование дифференциальных уравнений, т. е. нахождение таких конечных уравнений, которые согласовались бы с дифференциальными уравнениями, мы должны будем здесь внимательно рассмотреть свойства дифференциальных уравнений, вытекающие из их происхождения, и таким образом подготовить путь к изучению интегрального исчисления.

282. Приступая к решению поставленного вопроса, положим, что y есть такая функция количества x, которая определяется квадратным уравнением

$$y^2+Py+Q=0.$$

Так как выражение y^2+Py+Q равно нулю при любом значении x, оно будет также равно нулю, если вместо x написать $x+dx$; при этом y перейдёт в $y+dy$. Если от количества, полученного после этой подстановки, отнять первоначальное количество y^2+Py+Q, в остатке получится его дифференциал, который в силу сказанного также будет равен нулю. Отсюда ясно, что всегда, если какое-либо выражение будет равно нулю, его дифференциал также будет равен нулю, и если два количества будут равны между собой, то и их дифференциалы будут равны. Таким образом, поскольку $y^2+Py+Q=0$, мы будем иметь также

$$2y\,dy+P\,dy+y\,dP+dQ=0,$$

а так как P и Q суть функции x, то их дифференциалы будут иметь вид

$$dP=p\,dx \quad \text{и} \quad dQ=q\,dx,$$

следовательно, будем иметь

$$2y\,dy+P\,dy+yp\,dx+q\,dx=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{yp+q}{2y+P}.$$

283. Подобно тому как конечное уравнение

$$y^2+Py+Q=0$$

выражает соотношение между y и x, так дифференциальное уравнение выражает соотношение между dx и dy, т. е. отношение между dy и dx. Но так как мы имеем $\frac{dy}{dx}=-\frac{yp+q}{2y+P}$, то это отношение $dy:dx$ будет известно лишь тогда, если будет известна сама функция y. Иначе и быть не может. В самом деле, так как конечное уравнение даёт два значения y, то каждое из них будет иметь свой дифференциал и из выражения $-\frac{yp+q}{2y+P}$ получится как тот, так и другой дифференциал, смотря по тому, подставим ли мы в это выражение то или другое значение y. Подобным образом, если функция y определяется из кубического уравнения, то функция $\frac{dy}{dx}$ будет иметь три значения, соответствующие трём значениям количества y. Если в предложенном конечном уравнении y имело бы четыре или большее число измерений, то столько же значений должно иметь $\frac{dy}{dx}$.

284. Функция y может быть, однако, исключена из уравнения, так как мы имеем два уравнения, содержащие y, а именно, конечное уравнение и уравнение дифференциальное. Но тогда дифференциал dy будет иметь столько измерений, сколько прежде их имело y, так что полученное уравнение будет заключать в себе все различные отношения количества dy к dx. В качестве примера возьмём снова уравнение $y^2+Py+Q=0$; его дифференциальное уравнение есть $2y\,dy+P\,dy+$ $+y\,dP+dQ=0$; из последнего находим

$$y=-\frac{P\,dy+dQ}{2dy+dP}.$$

Подставив это значение вместо y в первое уравнение, получим уравнение

$$(4Q-P^2)\,dy^2+(4Q-P^2)\,dP\,dy+Q\,dP^2-P\,dP\,dQ+dQ^2=0,$$

корни которого суть

$$dy=-\frac{1}{2}dP\pm\frac{\frac{1}{2}P\,dP-dQ}{\sqrt{P^2-4Q}}.$$

Эти корни дают два дифференциала, соответствующие двум значениям

$$y=-\frac{1}{2}P\pm\frac{1}{2}\sqrt{P^2-4Q},$$

получаемым из конечного уравнения.

285. После того как найдено значение dy, можно повторным дифференцированием найти значение d^2y, а затем значения d^3y, d^4y и т. д. А так как они будут неопределёнными, пока какой-либо первый дифференциал не будет принят за постоянное, то мы для большего удобства будем считать постоянным dx. Возьмём в качестве примера уравнение

$$y^3+x^3=3a\,xy;$$

дифференцируя его, мы получим

$$3y^2\,dy+3x^2\,dx=3ax\,dy+3ay\,dx,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay-y^2}{y^2-ax}.$$

Возьмём снова дифференциалы, положив dx постоянным; мы найдём

$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{-ay^2\,dy-a^2x\,dy+2x^2y\,dy-2xy^2\,dx+a^2y\,dx+ax^2\,dx}{(y^2-ax)^2}.$$

Подставим вместо dy только что найденное его значение $\frac{ay\,dx+x^2\,dx}{y^2-ax}$ и разделим на dx; тогда будем иметь

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(ay-x^2)(2x^2y-ay^2-a^2x)}{(y^2-ax)^3}+\frac{ax^2+a^2y-2xy^2}{(y^2-ax)^2}$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6ax^2y^2-2x^4y-2xy^4-2a^3xy}{(y^2-ax)^3}=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3},$$

так как из конечного уравнения мы имеем $2x^4y-2xy^4=6ax^2y^2$. Таким образом, с помощью конечного уравнения мы можем эти значения преобразовывать к бесчисленным видам.

286. Точно так же и первое дифференциальное уравнение можно видоизменять бесчисленными способами, если его комбинировать с конечным уравнением. Так, в предшествующем примере мы нашли дифференциальное уравнение

$$y^2\,dy+x^2\,dx=ax\,dy+ay\,dx;$$

если его помножить на y, получим

$$y^3\,dy+x^2y\,dx=axy\,dy+ay^2dx;$$

если в это уравнение вместо y^3 подставить его выражение $3axy-x^3$, получим новое уравнение

$$2axy\,dy-x^3\,dy+x^2y\,dx=ay^2\,dx;$$

если его снова помножить на y и затем вместо y^3 подставить его выражение, то будем иметь

$$2axy^2\,dy-x^3y\,dy+x^2y^2\,dx=3a^2xy\,dx-ax^3\,dx.$$

Вообще, пусть P, Q, R суть какие-либо функции количеств x и y. Если дифференциальное уравнение помножить на P, будем иметь

$$Py^2\,dy+Px^2\,dx=aPx\,dy+aPy\,dx.$$

С другой стороны, так как $x^3+y^3-3axy=0$, то будем также иметь

$$(x^3+y^3-3axy)\,(Q\,dx+R\,dy)=0.$$

Если эти дифференциальные уравнения сложить, получим общее дифференциальное уравнение, порождаемое предложенным конечным уравнением.

287. Бесчисленное множество дифференциальных уравнений из одного и того же конечного уравнения можно получить также и в результате самого дифференцирования, если прежде чем дифференцировать конечное уравнение мы помножим или разделим его на какое-нибудь количество. Пусть, например, P есть какая-либо функция x и y, причём $dP=p\,dx+q\,dy$. Если помножить конечное уравнение на P, а затем дифференцировать, получится общее дифференциальное уравнение, которое может иметь бесчисленное множество видов, которые будут различными всякий раз, как за P мы будем принимать всё новые и новые функции. Множество возрастёт ещё в бесконечное число раз, если к найденному дифференциальному уравнению мы прибавим данное конечное уравнение, помноженное на выражение вида $Q\,dx+R\,dy$, где за Q и R можно принять какие угодно функции x и y. Хотя все эти уравнения дают соотношение между dy и dx, связывающее дифференциал функции y, зависимость которой от x определяется конечным уравнением, с dx, однако они имеют гораздо более широкое поле действия и выражают также дифференциалы количества y, определяемые из других конечных уравнений. Причина этого выяснится лучше всего в интегральном исчислении.

288. Не только из одного и того же конечного уравнения можно вывести бесчисленное множество дифференциальных уравнений, но также можно найти много, и притом бесконечно много, конечных уравнений, которые приводят к одним и тем же дифференциальным уравнениям. Так, два уравнения

$$y^2=ax+ab$$

и

$$y^2=ax$$

совершенно отличны друг от друга, ибо в первом уравнении вместо b можно подставить любое постоянное количество. Однако оба эти уравнения после дифференцирования дают одно и то же дифференциальное уравнение

$$2y\,dy=a\,dx.$$

Более того, все уравнения вида $y^2=ax$, какое бы значение ни приписать количеству a, могут быть охвачены одним дифференциальным уравнением, в которое a не входит. В самом деле, разделим наше уравнение на x, так что будем иметь $\frac{y^2}{x}=a$; после дифференцирования это уравнение даст

$$2x\,dy-y\,dx=0.$$

Точно так же трансцендентные уравнения и уравнения алгебраические могут приводить к одному и тому же дифференциальному уравнению, как это имеет место для уравнений

$$y^2-ax=0$$

и

$$y^2-ax=b^2e^{\frac{x}{a}}.$$

Действительно, если то и другое уравнения разделить на $e^{\frac{x}{a}}$, то получим уравнения

$$e^{-\frac{x}{a}}(y^2-ax)=0$$

и

$$e^{-\frac{x}{a}}(y^2-ax)=b^2.$$

После дифференцирования любого из них получается одно и то же дифференциальное уравнение

$$2y\,dy - a\,dx - \frac{y^2\,dx}{a} + x\,dx = 0.$$

289. Причина этой множественности состоит в том, что дифференциал постоянного количества равен нулю. Так, если конечное уравнение привести к такому виду, чтобы некоторое постоянное количество стояло бы одиноко и не умножалось или не делилось бы на переменные количества, то дифференцирование даст уравнение, в которое это постоянное количество вовсе не войдёт. Таким образом, любое постоянное количество, входящее в конечное уравнение, может быть устранено с помощью дифференцирования. Так, пусть будет предложено уравнение

$$x^3 + y^3 = 3a\,xy.$$

Если его разделить на xy, мы получим $\frac{x^3+y^3}{xy} = 3a$; будучи продифференцировано, это уравнение даст уравнение

$$2x^3y\,dx + 2xy^3\,dy - x^4\,dy - y^4\,dx = 0,$$

в которое постоянное a больше не входит.

290. Если нужно избавиться от нескольких постоянных количеств, входящих в конечное уравнение, то это можно сделать с помощью дифференцирования, повторённого дважды или несколько раз. Таким образом, в конце концов будут получены дифференциальные уравнения высших порядков, совершенно не содержащие этих постоянных количеств. Так, пусть будет предложено уравнение

$$y^2 = ma^2 - nx^2$$

и пусть требуется с помощью дифференцирования избавиться от постоянных количеств ma^2 и n. Первое из них устраняется после первого дифференцирования, и мы получаем

$$y\,dy + nx\,dx = 0;$$

отсюда мы образуем уравнение $\frac{ydy}{xdx} + n = 0$, которое при постоянном dx даст после дифференцирования уравнение

$$xy\,d^2y + x\,dy^2 - y\,dx\,dy = 0,$$

которое, хотя оно и не содержит никаких постоянных, однако охватывает все уравнения, представленные формулой $y^2 = ma^2 - nx^2$, какие бы значения ни были приписаны буквам m, n и a^2.

291. С помощью дифференцирования можно устранить не только постоянные, входящие в конечное уравнение, но также и одно из переменных, а именно то, дифференциал которого принят за постоянное. Для этого из предложенного уравнения, связывающего x и y, нужно найти значение x; мы получим $x = Y$, где Y есть некоторая функция количества y; тогда будем иметь $dx = dY$ и, так как dx принято за постоянное, после дифференцирования мы имеем $0 = d^2Y$. Если же мы будем иметь уравнение

$$x^2 + ax + b = Y,$$

то, трижды дифференцируя его, получим $0 = d^3Y$. Уравнение же

$$x^3 + ax^2 + bx + c = Y,$$

четырежды дифференцированное, даст $0 = d^4Y$. Может показаться, что в эти уравнения входит только одно переменное количество, и тогда оно перестало бы быть переменным, так как ни в каком уравнении переменное не может быть только одно. Однако так как мы приняли, что дифференциал dx является постоянным и так как его отношение должно содержаться в уравнении, то нужно считать, что на самом деле он в уравнение входит. Неудивительно поэтому, что часто встречаются дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков, в которые входит, повидимому, только одно переменное.

292. Особенно нужно отметить, что с помощью дифференцирования можно освободиться от иррациональных и трансцендентных количеств, входящих в уравнение. Что касается количеств иррациональных, то, так как иррациональность можно устранить при помощи известных преобразований, после дифференцирования мы получим уравнение, свободное от иррациональности. Но часто удобнее это можно сделать, не прибегая к упомянутым преобразованиям, ибо, сравнивая дифференциальное уравнение с конечным, мы можем исключить иррациональное выражение, если оно имеется в единственном числе. Если же конечное уравнение содержит два или большее число иррациональных членов, то его дифференциальное уравнение нужно снова дифференцировать, и таким образом мы найдём столько дифференциальных уравнений высших порядков, сколько нужно для исключения иррациональных членов. Таким же образом можно устранить неопределённые показатели степени, а также показатели дробные. Так, если будем иметь

$$y^m = (a^2 - x^2)^n,$$

то после дифференцирования получим

$$my^{m-1}\,dy = -2n\,(a^2 - x^2)^{n-1}\,x\,dx.$$

Разделив это уравнение на конечное, найдём уравнение

$$\frac{m\,dy}{y} = -\frac{2nx\,dx}{a^2 - x^2},$$

в которое больше не входит неопределённый показатель степени. Отсюда ясно, что дифференциальное уравнение, свободное от всякой иррациональности, может произойти из иррационального конечного уравнения и даже из уравнения, содержащего трансцендентные количества.

293. Чтобы стало понятным, каким образом с помощью дифференцирования можно исключить трансцендентные количества, мы начнём с логарифмов. Так как их дифференциалы являются алгебраическими, то вопрос решается без труда. Пусть, например,

$$y = x\,\mathrm{l}\,x.$$

Тогда будем иметь $\frac{y}{x} = \mathrm{l}\,x$, откуда, дифференцируя, получаем

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{dx}{x}$$

и, следовательно,

$$x\,dy - y\,dx = x\,dx.$$

Если логарифм входит дважды, то нужно дифференцировать два раза. Пусть, например,

$$y\,\mathrm{l}\,x = x\,\mathrm{l}\,y.$$

Будем иметь $\frac{y\,\mathrm{l}\,x}{x} = \mathrm{l}\,y$ и, дифференцируя,

$$\frac{x\,dy\,\mathrm{l}\,x + y\,dx - y\,dx\,\mathrm{l}\,x}{x^2} = \frac{dy}{y}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\mathrm{l}\,x = \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{yx\,dy - y^2\,dx}.$$

Снова дифференцируем это уравнение, полагая dx постоянным; получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{x^2\,d^2y + 2x\,dx\,dy - 2y\,dx\,dy}{yx\,dy - y^2\,dx} + \frac{(y^2\,dx - x^2\,dy)\,(yx\,d^2y + x\,dy^2 - y\,dx\,dy)}{(yx\,dy - y^2\,dx)^2}$$

или

$$\frac{dx}{x} = \frac{y^3x\,dx\,d^2y - y^2x^2\,dx\,d^2y + 3yx^2dx\,dy^2 - y^2x\,dx\,dy^2 + y^3\,dx^2\,dy - 2xy^2\,dx^2\,dy - x^3\,dy^3}{(yx\,dy - y^2\,dx)^2}.$$

Это уравнение после упрощений даст

$$y^3x\,dx\,d^2y - y^2x^2\,dx\,d^2y + 3yx^2\,dx\,dy^2 - 2xy^2\,dx\,dy^2 + 3y^3\,dx^2\,dy - \\ - 2xy^2\,dx^2\,dy - x^3\,dy^3 - \frac{y^4\,dx^3}{x} = 0,$$

или

$$y^2x^2\,(y - x)\,dx\,d^2y + 3yx\,dx\,dy\,(x^2\,dy + y^2\,dx) - 2y^2x^2\,dx\,dy\,(dx + dy) = \\ = x^4\,dy^3 + y^4\,dx^3.$$

294. Показательные количества устраняются из уравнения таким же образом, как логарифмы. Пусть, например, предложено будет уравнение

$$P = e^Q,$$

где P и Q суть какие-либо функции x и y; это уравнение можно преобразовать в логарифмическое уравнение $\mathrm{l}\,P = Q$, дифференциал которого есть $\frac{dP}{P} = dQ$ или

$$dP = P\,dQ.$$

Ничто не мешает применить этот приём и в том случае, если показательные количества войдут в бо́льшем числе. В самом деле, если одного дифференцирования окажется недостаточно, вопрос решится с помощью двух или нескольких дифференцирований.

I. Пусть $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$; помножим числитель и знаменатель этой дроби на e^x, получим $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$, откуда $e^{2x} = \frac{y+1}{y-1}$ и $2x = \mathrm{l}\,\frac{y+1}{y-1}$. Дифференциал этого уравнения есть

$$dx = -\frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{dy}{1 - y^2}.$$

II. Пусть $y = \mathrm{l}\,\frac{e^x + e^{-x}}{2}$; первое дифференцирование даёт $dy = \frac{(e^x - e^{-x})\,dx}{e^x + e^{-x}}$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, откуда $e^{2x} = \frac{dy + dx}{dx - dy}$. Следовательно,

$2x = 1\dfrac{dy + dx}{dx - dy}$. Полагая dx постоянным, будем иметь $dx = \dfrac{dx\,d^2y}{dx^2 - dy^2}$ или

$$dx^2 = d^2y + dy^2.$$

295. Таким же образом устранятся из уравнения с помощью дифференцирования трансцендентности, зависящие от круговых функций, что видно из следующих примеров:

I. Пусть $y = a \arcsin \dfrac{x}{a}$; тогда

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

II. Пусть $y = a \cos \dfrac{y}{x}$; тогда $\dfrac{y}{a} = \cos \dfrac{y}{x}$ и $\dfrac{dy}{a} = \dfrac{-x\,dy + y\,dx}{x^2} \sin \dfrac{y}{x}$. Но так как $\cos \dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{a}$, то $\sin \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}$; подставив это значение, получим

$$\frac{dy}{a} = \frac{(y\,dx - x\,dy)\sqrt{a^2 - y^2}}{ax^2},$$

или

$$x^2\,dy = (y\,dx - x\,dy)\sqrt{a^2 - y^2}.$$

III. Пусть $y = m \sin x + n \cos x$; после первого дифференцирования получим

$$dy = m\,dx \cos x - n\,dx \sin x;$$

дифференцируя ещё раз при постоянном dx, будем иметь

$$d^2y = -m\,dx^2 \sin x - n\,dx^2 \cos x.$$

Это уравнение, разделённое на первое, даёт $\dfrac{d^2y}{y} = -dx^2$, или

$$d^2y + y\,dx^2 = 0.$$

В этом уравнении не содержатся не только синус и косинус, но также постоянные m и n.

IV. Пусть $y = \sin lx$; тогда $\arcsin y = lx$; с помощью дифференцирования получаем $\dfrac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \dfrac{dx}{x}$; возводя в квадрат, получаем уравнение

$$x^2\,dy^2 = dx^2 - y^2\,dx^2;$$

полагая в последнем dx постоянным и дифференцируя ещё раз, получаем

$$2x^2\,dy\,d^2y + 2x\,dx\,dy^2 = -2y\,dx^2\,dy$$

или

$$x^2\,d^2y + x\,dx\,dy + y\,dx^2 = 0.$$

V. Пусть $y = ae^{mx} \sin nx$; дифференцируя, будем иметь уравнение

$$dy = mae^{mx}\,dx \sin nx + nae^{mx}\,dx \cos nx.$$

Разделив его на предложенное, получим

$$\frac{dy}{y} = m\,dx + \frac{n\,dx \cos nx}{\sin nx} = m\,dx + n\,dx \operatorname{ctg} nx.$$

Следовательно,

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{dy}{ny\,dx}-\frac{m}{n}\right)=nx.$$

Это уравнение, будучи продифференцировано при постоянном dx, даёт

$$n\,dx=\frac{n\,dx\,dy^2-ny\,dx\,d^2y}{m^2y^2\,dx^2+n^2y^2\,dx^3-2my\,dx\,dy+dy^2},$$

или

$$(m^2+n^2)\,y^2\,dx^2-2my\,dx\,dy=-y\,d^2y\,^{1)}.$$

Итак, ясно, что хотя бы в дифференциальном уравнении и не было никаких трансцендентных количеств, однако оно может произойти из конечного уравнения, в которое каким-нибудь образом входят трансцендентные количества.

296. Так как дифференциальные уравнения первого и высших порядков, содержащие две переменные x и y, происходят из конечных уравнений, то и дифференциальные уравнения выражают соотношение между этими переменными. А именно, если предложено какое-либо дифференциальное уравнение, содержащее два переменных x и y, то оно обозначает, что между x и y существует некоторое соотношение, в силу которого y является какой-то функцией от x. Таким образом, природа дифференциального уравнения будет выяснена, если можно будет представить y в виде такой функции от x, которая указывается дифференциальным уравнением, т. е. которая составлена таким образом, что если повсюду подставить её вместо y, её дифференциал вместо dy, её высшие дифференциалы вместо d^2y, d^3y и т. д., то получится тождественное уравнение. Разысканием таких функций и занимается интегральное исчисление, цель которого состоит в том, чтобы по данному дифференциальному уравнению определить ту функцию количества x, которой равно другое переменное y, или, что то же, найти конечное уравнение, дающее соотношение между x и y.

297. Пусть, например, предложено уравнение

$$2y\,dy-a\,dx-\frac{y^2\,dx}{a}+x\,dx=0,$$

к которому мы пришли раньше (§ 288); оно определяет соотношение между x и y, выражаемое в то же время конечным уравнением

$$y^2-ax=b^2e^{\frac{x}{a}}.$$

Так как из этого уравнения мы находим $y^2=ax+b^2e^{\frac{x}{a}}$, то ясно, что $\sqrt{ax+b^2e^{\frac{x}{a}}}=y$ есть та функция от x, которой равно переменное y в силу предложенного уравнения. Ибо, если подставить в уравнение вместо y^2 значение $ax+b^2e^{\frac{x}{a}}$ и вместо $2y\,dy$ его дифференциал

---

[1]) В первом издании

$$n\,dx=\frac{n\,dx\,dy^2-ny\,dx\,d^2y}{m^2y^2\,dx^2+n^2y^2\,dx^2-2my\,dx\,dy}\quad\text{или}\quad(m^2+n^2)\,y^2\,dx^2-2my\,dx\,dy=dy^2-y\,d^2y$$

[Г. К.].

$a\,dx + \frac{b^2}{a} e^{\frac{x}{a}} dx$, то получим тождественное уравнение

$$a\,dx + \frac{b^2}{a} e^{\frac{x}{a}} dx - a\,dx - x\,dx - \frac{b^2}{a} e^{\frac{x}{a}} dx + x\,dx = 0.$$

Таким образом, ясно, что всякое дифференциальное уравнение, так же как и уравнение конечное, выражает определённое соотношение между переменными x и y; однако это соотношение нельзя найти без помощи интегрального исчисления.

298. Чтобы лучше это понять, положим, что нам известна та функция от x, которая равна количеству y в силу какого-нибудь дифференциального уравнения первого или высшего порядка. Пусть

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx \text{ и т. д.}$$

Если, кроме того, в дифференциальном уравнении дифференциал dx был принят за постоянное, то будем иметь $d^2y = q\,dx^2$, $d^3y = r\,dx^3$ и т. д. Когда эти значения будут подставлены в уравнение, все его члены станут однородными, так что от дифференциалов dx мы освободимся с помощью деления. Мы получим тогда уравнение, содержащее только конечные количества x, y, p, q, r и т. д. А так как p, q, r и т. д. суть количества, зависящие от вида функции y, то в действительности предложенное уравнение даёт соотношение только между двумя количествами x и y. Таким образом, всякое дифференциальное уравнение определяет некоторое определённое соотношение между переменными x и y. Поэтому, если, решая какую-нибудь задачу, мы придём к дифференциальному уравнению, связывающему x и y, то нужно считать, что оно таким же образом выражает соотношение между x и y, как если бы мы пришли к конечному уравнению.

299. Итак, указанным способом можно всякое дифференциальное уравнение привести к такому конечному виду, чтобы в нём содержались только конечные количества, дифференциалы же, т. е. количества бесконечно малые, вовсе не входили бы. Действительно, если y есть некоторая функция от x, то, положив $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$ и т. д., какой бы дифференциал ни был принят за постоянное, мы сможем выразить вторые и высшие дифференциалы через степени количества dx, которые затем совершенно устранятся с помощью деления. Так, пусть предложено уравнение

$$xy\,d^3y + x^2\,dy\,d^2y + y^2\,dx\,d^2y - xy\,dx^3 = 0,$$

в котором dx положено постоянным. Положив $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$ и $dq = r\,dx$ и разделив всё уравнение на dx^3, мы придём к уравнению

$$xyr + x^2pq + y^2q - xy = 0.$$

Это конечное уравнение и определяет соотношение между x и y.

300. Итак, все дифференциальные уравнения, каков бы ни был их порядок, с помощью подстановок

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx \text{ и т. д.}$$

приводятся к уравнениям, содержащим только конечные количества. Если дифференциальное уравнение было первого порядка, так что в него входили только первые дифференциалы, то это преобразование вводит, кроме количеств x и y, ещё количество p. Если дифференциальное уравнение было второго порядка, т. е. содержало вторые дифференциалы, то вводится, кроме того, количество q; если третьего порядка, то, сверх того, количество r, и т. д. Поскольку, таким образом, дифференциалы вовсе исключаются из вычисления, постоянный дифференциал становится совершенно излишним, и нам больше нет нужды, хотя бы в уравнение входили количества q, r, возникающие из вторых дифференциалов, указывать, принят ли за постоянное какой-либо дифференциал. В самом деле, теперь безразлично, сочтём ли мы по произволу какой-либо дифференциал постоянным или никакой дифференциал не будем считать постоянным.

301. Если предлагается дифференциальное уравнение второго или высшего порядка и если указано, что в нём никакой дифференциал не принят за постоянное, то тотчас же можно узнать, содержится ли в нём определённое соотношение между x и y или не содержится. В самом деле, так как никакой дифференциал не принимается за постоянное, то от нашего произвола зависит, какой дифференциал положить постоянным. Значит, нужно только рассмотреть, выражает ли уравнение одно и то же соотношение между x и y, если различные дифференциалы полагать постоянными. Если это не имеет места, то мы имеем верный признак того, что уравнение не выражает никакого определённого соотношения и потому не может иметь места при решении какой-либо задачи. Вернейшим же и в то же время самым лёгким способом узнать это является тот самый способ, который мы изложили выше (§ 277) применительно к дифференциальным выражениям и который позволяет узнать, имеют ли они фиксированные значения.

302. Итак, если предложено такое дифференциальное уравнение второго или более высокого порядка, в котором никакой дифференциал не положен постоянным, то нужно сначала принять за постоянное дифференциал dx, затем снова привести это уравнение к такому виду, который соответствует предположению, что никакой дифференциал не принят за постоянное. Как было показано выше (§ 276) применительно к дифференциальным выражениям, для этого нужно положить

$$d^2y - \frac{dy\,d^2x}{dx} \quad \text{вместо } d^2y$$

и

$$d^3y - \frac{3d^2x\,d^2y}{dx} + \frac{3dy\,d^2x^2}{dx^2} - \frac{dy\,d^3x}{dx} \quad \text{вместо } d^3y$$

и т. д.

После этого нужно посмотреть, совпадает ли полученное таким образом уравнение с предложенным; если совпадает, то предложенное уравнение выражает определённое соотношение между x и y; если же не совпадает, то уравнение будет неопределённым и не будет выражать определённого соотношения между переменными x и y, как это было подробно показано выше.

303. Чтобы лучше уяснить это, рассмотрим уравнение

$$P\,d^2x + Q\,d^2y + R\,dx^2 + S\,dx\,dy + T\,dy^2 = 0.$$

Пусть указано, что оно найдено в предположении, что никакой дифференциал не принят за постоянное. Положим, что постоянным является dx; тогда предложенное уравнение перейдёт в уравнение

$$Q\,d^2y + R\,dx^2 + S\,dx\,dy + T\,dy^2 = 0.$$

Если мы теперь снова откажемся от рассмотрения постоянных дифференциалов, то из этого уравнения мы по вышеизложенному способу получим уравнение

$$-\frac{Q\,d^2x\,dy}{dx}-Q\,d^2y+R\,dx^2+S\,dx\,dy+T\,dy^2=0.$$

Так как оно отличается от предложенного только тем, что у них первые члены различны, то нужно посмотреть, имеет ли место равенство $P=-\frac{Q\,dy}{dx}$. Если да, то предложенное уравнение выражает фиксированное соотношение между x и y. Это соотношение найдётся по правилам, которые мы изложим в интегральном исчислении, какой бы первый дифференциал ни был принят за постоянное. Если же не будет иметь места $P=-\frac{Q\,dy}{dx}$, то предложенное уравнение будет невозможным.

304. Итак, чтобы уравнение

$$P\,d^2x+Q\,d^2y+R\,dx^2+S\,dx\,dy+T\,dy^2=0$$

не было нелепым, необходимо, чтобы $P\,dx+Q\,dy=0$; это может произойти двояким образом: либо в действительности будем иметь $P=-\frac{Q\,dy}{dx}$, т. е. уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$ будет тождественным, либо $P\,dx+Q\,dy=0$ будет тем дифференциальным уравнением первого порядка, из дифференцирования которого произошло предложенное уравнение. В этом последнем случае уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$ будет совпадать с предложенным и выражать то же соотношение между x и y. Тогда это соотношение можно найти без помощи интегрального исчисления. Действительно, так как $P\,dx+Q\,dy=0$, то, дифференцируя, будем иметь

$$P\,d^2x+Q\,d^2y+dP\,dx+dQ\,dy=0.$$

Если отнять это уравнение от предложенного, в остатке получится

$$P\,dx^2+S\,dx\,dy+T\,dy^2=dP\,dx+dQ\,dy.$$

А так как $dy=-\frac{P\,dx}{Q}$, то дифференциалы можно вовсе устранить, и мы получим конечное уравнение, содержащее x и y, дающее соотношение между ними.

305. Пусть при решении задачи мы, не полагая никакого дифференциала постоянным, пришли к уравнению

$$x^3d^2x+x^2y\,d^2y-y^2\,dx^2+x^2\,dy^2+a^2\,dx^2=0.$$

Так как известно, что это уравнение не является нелепым, то будем иметь

$$x^3\,dx+x^2y\,dy=0$$

или

$$x\,dx+y\,dy=0.$$

Дифференциал этого уравнения будет

$$x^3\,d^2x+x^2y\,d^2y+3x^2\,dx^2+2xy\,dx\,dy+x^2\,dy^2=0.$$

Отняв это уравнение от предложенного, будем иметь в остатке

$$a^2\,dx^2-y^2\,dx^2-3x^2\,dx^2-2xy\,dx\,dy=0$$

или
$$a^2\,dx - y^2\,dx - 3x^2\,dx - 2xy\,dy = 0.$$
Но так как $x\,dx + y\,dy = 0$, то будем иметь
$$2xy\,dx = -2x^2\,dx$$
и, следовательно,
$$a^2\,dx - y^2\,dx - x^2\,dx = 0$$
или
$$y^2 + x^2 = a^2.$$

Это уравнение выражает истинное соотношение между x и y, поскольку оно согласуется с ранее найденным дифференциальным уравнением $x\,dx + y\,dy = 0$. Если такой согласованности не обнаружилось бы, то предложенное уравнение нужно было бы считать невозможным. А так как в данном случае согласованность имеет место, то мы смогли найти конечное уравнение $x^2 + y^2 = a^2$ без помощи интегрального исчисления.

306. Дадим теперь пример невозможного уравнения. Пусть предложено уравнение
$$y^2\,d^2x - x^2\,d^2y + y\,dx^2 - x\,dy^2 + a\,dx\,dy = 0,$$
в котором никакой дифференциал не принят за постоянное. Тогда мы будем иметь $y^2\,dx - x^2\,dy = 0$ и, дифференцируя, получим
$$y^2\,d^2x - x^2\,d^2y + 2y\,dx\,dy - 2x\,dx\,dy = 0.$$
Положив это выражение равным предложенному, мы получим
$$y\,dx^2 - x\,dy^2 + a\,dx\,dy = 2y\,dx\,dy - 2x\,dx\,dy.$$
А так как $dy = \frac{y^2\,dx}{x^2}$, то, освободившись от дифференциалов, мы получим
$$y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{ay^2}{x^2} = \frac{2y^3}{x^2} - \frac{2y^2}{x}$$
или
$$x^3 - y^3 + axy = 2xy^2 - 2x^2y.$$
Согласуется ли это уравнение с дифференциальным уравнением $y^2\,dx - x^2\,dy = 0$, легко выяснится дифференцированием. Мы будем иметь
$$3x^2\,dx - 3y^2\,dy + ax\,dy + ay\,dx = 2y^2\,dx + 4xy\,dy - 2x^2\,dy - 4xy\,dx,$$
т. е.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + ay - 2y^2 + 4xy}{3y^2 - ax + 4xy - 2x^2}.$$
Отсюда $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$, и следовательно, будем иметь
$$3x^4 + 4x^3y + ax^2y = 3y^4 + 4xy^3 - axy^2$$
или
$$axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x + y} = 3y^3 + xy^2 - x^2y - 3x^3.$$
Но прежде из конечного уравнения мы нашли, что
$$axy = y^3 + 2xy^2 - 2x^2y - x^3.$$
Вычитая это уравнение из предыдущего, получим уравнение
$$0 = 2y^3 - xy^2 + x^2y - 2x^3,$$

которое распадается на уравнения

$$0=y-x$$

и

$$2y^2+yx+2x^2=0.$$

Первое из них. $y=x$, хотя и согласуется с дифференциальным уравнением $dy=\frac{y^2\,dx}{x^2}$, однако противоречит прежде найденному конечному уравнению, если только не положить $a=0$ или если не считать оба переменных x и y постоянными. Но в этом случае, если $dx=0$ и $dy=0$, удовлетворяется всякое дифференциальное уравнение; поэтому предложенное уравнение не может существовать.

307. Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения, содержащие три переменные x, y и z; они могут быть первого, второго или высшего порядков. Чтобы изучить их природу, нужно заметить, что конечные уравнения, содержащие три переменные, определяют соотношение, которое существует между одной из них и двумя остальными; иными словами, оно определяет, какой функцией количеств x и y является z. Итак, конечное уравнение такого рода будет решено, если мы найдём, какую функцию количеств x и y нужно подставить вместо z, чтобы уравнение удовлетворилось. Таким же образом дифференциальное уравнение, содержащее три переменных, будет определять, какова та функция, которая выражает одно переменное через другие; и нужно считать, что решил дифференциальное уравнение тот, кто указал такую функцию двух переменных x и y, которая, подставленная вместо третьего переменного z, удовлетворит уравнению, т. е. сделает его тождественным. Итак, дифференциальное уравнение будет решено, если либо будет определена функция от x и y, выражающая значение количества z, либо будет указано конечное уравнение, выражающее значение, которое должно иметь z.

308. Всякое дифференциальное уравнение, содержащее только два переменных, всегда выражает определённое соотношение между ними. Для уравнений с тремя переменными это имеет место не всегда. Есть такие уравнения, которым ни в каком случае, какие бы функции x и y ни подставлять вместо z, удовлетворить нельзя. Так, если предложено уравнение

$$z\,dy=y\,dx,$$

то, как легко видеть, не существует такой функции количеств x и y, которая, будучи подставлена вместо z, даст $z\,dy=y\,dx$; действительно, дифференциалы dx и dy никаким образом не уничтожатся. Таким же образом мы убедимся, что нет никакой функции количеств x и z, которая, будучи подставлена вместо y, удовлетворила бы тому же уравнению. Действительно, какую бы функцию x и z мы ни взяли, в её дифференциал будет входить дифференциал dz, который не может уничтожиться, так как его нет в уравнении. Поэтому не может существовать никакого конечного уравнения, связывающего x, y и z, которое соответствовало бы дифференциальному уравнению $z\,dy=y\,dx$.

309. Следовательно, дифференциальные уравнения, содержащие три переменных количества, нужно подразделить на действительные и мнимые. Мнимым или нелепым будет такое уравнение, которому нельзя удовлетворить никаким конечным уравнением; таково, например, уравнение $z\,dy = y\,dx$, которое мы только что рассмотрели. Действительным же будет то уравнение, для которого можно найти такое равносильное ему конечное уравнение, которое выражало бы одно из переменных в функции двух других. Таково уравнение

$$z\,dy + y\,dz = x\,dz + z\,dx + x\,dy + y\,dx.$$

Действительно, оно совпадает с конечным уравнением $yz = xz + xy$ и даёт

$$z = \frac{xy}{y - x}.$$

Это различие между действительными и мнимыми уравнениями надо соблюдать очень тщательно, особенно в интегральном исчислении, ибо было бы смешно искать интеграл какого-нибудь дифференциального уравнения, т. е. конечное уравнение, удовлетворяющее ему, когда такого конечного уравнения вовсе не существует.

310. Прежде всего ясно, что все дифференциальные уравнения, содержащие три переменных, в которые, однако, входят только два дифференциала, являются мнимыми и нелепыми. Действительно, пусть в уравнение, содержащее z, входят только дифференциалы dx и dy, дифференциал же dz вовсе не входит. Тогда ясно, что нельзя найти никакой функции от x и y, которая, будучи подставлена вместо z, сделала бы уравнение тождественным. Действительно, дифференциалы dx и dy никаким образом не будут уничтожены. Итак, в этих случаях вообще не существует конечного уравнения, удовлетворяющего дифференциальному, разве что случайно окажется возможным задать такое соотношение между x и y, которое могло бы иметь место, каково бы ни было z, как это мы имеем для уравнения

$$z\,dy - z\,dx = y\,dy - x\,dx,$$

которому удовлетворяет уравнение $y = x$. Однако в каждом случае легко выяснить, может ли это случиться; для этого нужно только сначала найти соотношение между x и y при $z = 0$, а затем проверить, удовлетворяет ли это соотношение предложенному уравнению при каком угодно значении количества z.

311. Уравнение с тремя переменными может быть нелепым не только в том случае, когда в него входят только два дифференциала, но и тогда, когда в него входят все три дифференциала. Положим, например, что P и Q суть функции количеств x и y и что мы имеем уравнение

$$dz = P\,dx + Q\,dy.$$

Если оно не является нелепым, то будет существовать некоторая функция z количеств x и y, дифференциал которой будет равен $dz = p\,dx + q\,dy$, и будет $P = p$ и $Q = q$. Но выше (§ 232) мы доказали, что $p\,dx + q\,dy$ может быть дифференциалом некоторой функции от x и y лишь в том случае, если $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, где, как было раньше условлено, $\left(\frac{dp}{dy}\right)$ обозначает дифференциал количества p, взятый в предположении, что только y переменно, и разделённый на dy, а $\left(\frac{dq}{dx}\right)$ есть дифференциал количества q, взятый в предположении, что переменно только x, и разделённый на dx. Поэтому уравнение $dz=P\,dx+Q\,dy$ может быть действительным лишь в том случае, если

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

312. Совершенно в таком же положении находится уравнение

$$dZ=P\,dx+Q\,dy,$$

если в нём Z обозначает какую-либо функцию от z, а P и Q суть функции x и y, не содержащие третьего переменного z. Действительно, для того чтобы Z могло быть равным функции от x и y, необходимо, чтобы $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Этот критерий позволяет судить относительно всякого уравнения, принадлежащего к рассматриваемому общему виду, является ли оно действительным или нелепым. Так, уравнение $z\,dz=y\,dx+x\,dy$, очевидно, является действительным, ибо вследствие $P=y$ и $Q=x$ мы имеем

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=1=\left(\frac{dQ}{dx}\right)=1.$$

Уравнение же $az\,dz=y^2dx+x^2dy$ является нелепым; действительно,

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=2y \quad \text{и} \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right)=2x,$$

а эти значения не равны.

313. Установим теперь наиболее общий критерий. Пусть P, Q и R суть какие-либо функции от x, y и z; тогда всякое дифференциальное уравнение первого порядка с тремя переменными будет принадлежать к виду

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0.$$

Всякий раз, как это уравнение является действительным, z будет равняться некоторой функции количеств x и y, и значит, его дифференциал будет иметь вид $dz=p\,dx+q\,dy$. Поэтому, если в предложенное уравнение подставить эту функцию количеств x и y вместо z и $p\,dx+q\,dy$ вместо dz, то необходимо должно получиться тождественное уравнение $0=0$. Но из предложенного уравнения мы имеем

$$dz=-\frac{P\,dx}{R}-\frac{Q\,dy}{R}.$$

Поэтому, если в P, Q и R подставить вместо z его значение, то должно получиться

$$p=-\frac{P}{R} \quad \text{и} \quad q=-\frac{Q}{R}.$$

314. Но так как $dz=p\,dx+q\,dy$, то по ранее доказанному будем иметь $\left(\frac{dp}{dy}\right)=\left(\frac{dq}{dx}\right)$. Поскольку же после подстановки вместо z его выражения через x и y должно быть

$$p=-\frac{P}{R} \quad \text{и} \quad q=-\frac{Q}{R},$$

мы будем иметь

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)=\left(\frac{-R\,dP+P\,dR}{R^2dy}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dq}{dx}\right)=\left(\frac{-R\,dQ+Q\,dR}{R^2dx}\right),$$

так что после умножения на R^2 получим уравнение

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right)-R\left(\frac{dP}{dy}\right)=Q\left(\frac{dR}{dx}\right)-R\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

где знаменатели dy и dx попрежнему указывают, что в дифференциалах, стоящих в числителях, нужно считать постоянным только то переменное количество, дифференциал которого стоит в знаменателе. Но дифференциалы dP, dQ, dR будут известны лишь после того, как в самих количествах P, Q и R вместо z будет подставлено надлежащее значение, а так как оно неизвестно, то нужно поступить следующим образом:

315. Так как P, Q и R суть функции количеств x, y и z, то положим

$$dP=\alpha dx+\beta dy+\gamma dz,$$
$$dQ=\delta dx+\varepsilon dy+\zeta dz,$$
$$dR=\eta dx+\vartheta dy+\iota dz,$$

где α, β, γ, δ, ε и т. д. обозначают те функции, которые происходят от дифференцирования. Представим теперь, что вместо z повсюду подставлено его выражение через x и y, и положим вместо dz значение $p\,dx+q\,dy$; тогда будем иметь:

$$dP=(\alpha+\gamma p)\,dx+(\beta+\gamma q)\,dy,$$
$$dQ=(\delta+\zeta p)\,dx+(\varepsilon+\zeta q)\,dy,$$
$$dR=(\eta+\iota p)\,dx+(\vartheta+\iota q)\,dy.$$

Из этих выражений будем иметь

$$\left(\frac{dR}{dy}\right)=\vartheta+\iota q,\qquad \left(\frac{dR}{dx}\right)=\eta+\iota p,$$
$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\beta+\gamma q,\qquad \left(\frac{dQ}{dx}\right)=\delta+\zeta p.$$

316. Так как для того, чтобы уравнение было действительным, требуется, чтобы

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right)-R\left(\frac{dP}{dy}\right)=Q\left(\frac{dR}{dx}\right)-R\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

то, подставив сюда найденные значения, будем иметь

$$P(\vartheta+\iota q)-R(\beta+\gamma q)=Q(\eta+\iota p)-R(\delta-\zeta p).$$

Но раньше мы нашли, что

$$p=-\frac{P}{R}\quad\text{и}\quad q=-\frac{Q}{R}.$$

Так как в эти выражения дифференциалы больше не входят, то ими можно пользоваться и без того, чтобы вместо z было подставлено его выражение через x и y. Итак, мы будем иметь

$$P\vartheta-\frac{PQ\iota}{R}-R\beta+Q\gamma=Q\eta-\frac{PQ\iota}{R}-R\delta+P\zeta$$

или

$$0=P(\zeta-\vartheta)+Q(\eta-\gamma)+R(\beta-\delta).$$

А так как количества β, δ, γ, η, ζ, ϑ находятся дифференцированием, то при указанном выше способе обозначения мы будем иметь

$$0=P\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)+Q\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+R\left(\frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right).$$

Если уравнение этим свойством не обладает, оно будет не действительным, а мнимым и нелепым.

317. Хотя это правило получено из рассмотрения переменного z, однако так как в него все количества входят равноправно, то очевидно, что мы получили бы то же выражение и из рассмотрения остальных переменных. Итак, если предложено какое-либо дифференциальное уравнение первого порядка с тремя переменными, тотчас же можно судить, действительное ли оно или мнимое. Для этого нужно сравнить его с уравнением общего вида

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

и найти значение выражения

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Если оно равно нулю, то уравнение будет действительным; если же оно не будет равно нулю, то это — верный признак того, что уравнение является мнимым или нелепым.

318. Предложенное уравнение всегда можно также привести к виду

$$Pdx + Qdy + dz = 0;$$

так как первоначальное уравнение принимает этот вид при $R = 1$, то критерий можно выразить проще следующим образом:

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Всякий раз, как это выражение на самом деле оказывается равным нулю, предложенное уравнение является действительным; если же имеет место противное, то уравнение будет мнимым. Последнее утверждение в силу доказанного является безусловно достоверным. Что касается первого, то пока можно было бы усомниться в том, что уравнение является действительным всегда, когда упомянутый критерий указывает на это. В данном месте это не может быть доказано со всей полнотой и может быть подтверждено доказательством лишь в интегральном исчислении. Здесь мы ограничимся утверждением этого факта, и если кто-либо склонен был на минуту усомниться в его истинности, то он может не бояться никакой опасности.

319. Из этого критерия прежде всего явствует, что если в уравнении

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

P будет функцией только одного переменного x, Q — функцией только переменного y и R — функцией только переменного z, то уравнение всегда будет действительным. Действительно, в этом случае

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = 0, \quad \left(\frac{dP}{dz}\right) = 0, \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0, \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0 \text{ и } \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0,$$

так что всё выражение, которое составляет критерий, само собой исчезает.

320. Если P попрежнему является функцией только переменного x, Q — функцией только переменного y, а R — какой-либо функцией x, y и z, то уравнение будет действительным, если

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right)$$

или

$$\left(\frac{dR}{dx}\right):\left(\frac{dR}{dy}\right)=P:Q.$$

Так, пусть будет предложено уравнение

$$\frac{2dx}{x}+\frac{3dy}{y}+\frac{x^2y^3dz}{z^6}=0.$$

Так как здесь

$$P=\frac{2}{x},\quad Q=\frac{3}{y}\quad \text{и}\quad R=\frac{x^2y^3}{z^6}$$

и, значит,

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)=\frac{2xy^3}{z^6}\quad \text{и}\quad \left(\frac{dR}{dy}\right)=\frac{3x^2y^2}{z^6},$$

то

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right)=Q\left(\frac{dR}{dx}\right)=\frac{6xy^2}{z^6}$$

и, следовательно, предложенное уравнение действительное.

321. Пусть P и Q будут функциями переменных x и y, а R — функцией только переменного z; так как

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)=0,\qquad \left(\frac{dQ}{dz}\right)=0,\qquad \left(\frac{dR}{dx}\right)=0,\qquad \left(\frac{dR}{dy}\right)=0,$$

то уравнение будет действительным, если $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$. То же самое условие имеет место, если $Pdx+Qdy$ должно быть полным дифференциалом, т. е. дифференциалом, происшедшим от дифференцирования какой-то конечной функции количеств x и y. Уже раньше (§ 312) мы заметили, что уравнение $dZ=Pdx+Qdy$, где Z есть функция только количества z, а P и Q — функции количеств x и y, может быть действительным лишь в том случае, когда $\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Эти случаи полностью согласуются друг с другом, ибо вместо Rdz, если R есть функция только количества z, можно положить dZ, где Z есть функция только количества z.

322. Чтобы пояснить этот критерий на примере, рассмотрим уравнение

$$(6xy^2z-5yz^3)\,dx+(5x^2yz-4xz^3)\,dy+(4x^2y^2-6xyz^2)\,dz=0;$$

сравнив его с уравнением общего вида, получаем:

$$\begin{aligned}
&P=6xy^2z-5yz^3, && \left(\frac{dP}{dy}\right)=12xyz-5z^3, && \left(\frac{dP}{dz}\right)=6xy^2-15yz^2,\\
&Q=5x^2yz-4xz^3, && \left(\frac{dQ}{dx}\right)=10xyz-4z^3, && \left(\frac{dQ}{dz}\right)=5x^2y-12xz^2,\\
&R=4x^2y^2-6xyz^2, && \left(\frac{dR}{dx}\right)=8xy^2-6yz^2, && \left(\frac{dR}{dy}\right)=8x^2y-6xz^2.
\end{aligned}$$

После того как эти значения найдены, уравнение, дающее критерий, примет вид

$$(6xy^2z-5yz^3)\,(-3x^2y-6xz^2)+(5x^2yz-4xz^3)\,(2xy^2+9yz^2)+\\
+(4x^2y^2-6xyz^2)\,(2xyz-z^3)=0.$$

Если это выражение развернуть, то все члены взаимно уничтожатся, и мы получим $0=0$; это указывает на то, что предложенное уравнение действительно.

323. Когда же выражение, которое, таким образом, получается из критерия, не исчезает, это есть признак того, что предложенное уравнение мнимое. Так как, однако, критерий даёт конечное уравнение, то, если последнее согласуется с дифференциальным уравнением, оно вместе с тем выражает соотношение между переменными x и y. Таким образом, возникают те случаи, о которых мы уже упоминали выше (§ 310). Так, пусть предложено уравнение

$$(z-x)\,dx+(y-z)\,dy=0.$$

Здесь

$$P=z-x, \quad Q=y-z \quad \text{и} \quad R=0.$$

Далее,

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)=1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{dQ}{dz}\right)=-1.$$

Уравнение, служащее критерием, имеет вид

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right)=Q\left(\frac{dP}{dz}\right)$$

или

$$z-x=z-y,$$

откуда

$$y=x.$$

А так как здесь случайно оказывается, что уравнение $y=x$ вместе с тем удовлетворяет дифференциальному уравнению, то предложенное уравнение не означает ничего иного, кроме того, что $y=x$.

324. Итак, если предложено дифференциальное уравнение, содержащее три переменных

$$Pdx+Qdy+Rdz=0,$$

то нужно различать три случая, к которым может привести уравнение

$$P\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)+Q\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+R\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=0.$$

Первый случай имеет место, если это выражение в самом деле равно нулю. Тогда предложенное уравнение действительно. Если же это конечное выражение не является тождественным, то нужно посмотреть, удовлетворяет ли оно предложенному уравнению. Если удовлетворяет, то мы будем иметь конечное уравнение; это — второй случай. Третий же случай имеет место, если конечное уравнение не совместно с предложенным дифференциальным уравнением, и тогда предложенное уравнение будет мнимым, и нельзя будет найти никакого конечного уравнения, которое удовлетворило бы ему.

325. Первый и третий случаи являются сами собой очевидными; второй же, хотя он встречается очень редко, нужно хорошо заметить. Так как в примере, которым мы выше его пояснили, мы имели уравнение, содержавшее лишь два дифференциала, то приведём ещё уравнение

$$(z-y)\,dx+xdy+(y-z)\,dz,$$

в которое входят все три дифференциала. Мы будем здесь иметь

$$
\begin{aligned}
P &= z-y, & \left(\frac{dQ}{dz}\right) &= 0, & \left(\frac{dR}{dy}\right) &= 1,\\
Q &= x, & \left(\frac{dR}{dx}\right) &= 0, & \left(\frac{dP}{dz}\right) &= 1,\\
R &= y-z, & \left(\frac{dP}{dy}\right) &= -1, & \left(\frac{dQ}{dx}\right) &= 1,
\end{aligned}
$$

откуда получаем конечное уравнение, дающее критерий

$$z-x-y=0$$

или

$$z=x+y.$$

Подставим это значение вместо z в дифференциальное уравнение; мы будем иметь

$$x\,dx+x\,dy-x\,(dx+dy)=0.$$

Так как это уравнение является тождественным, то отсюда следует, что дифференциальное уравнение не выражает ничего, кроме

$$z=x+y.$$

326. Мы сказали, что все дифференциальные уравнения первого порядка с тремя переменными содержатся в уравнении вида

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0.$$

Однако может возникнуть сомнение относительно таких уравнений, которые содержат вторые или высшие измерения дифференциалов, каковым является, например, уравнение

$$P\,dx^2+Q\,dy^2+R\,dz^2=2S\,dx\,dy+2T\,dx\,dz+2V\,dy\,dz.$$

Об этих уравнениях нужно заметить, что они ни в каком случае не могут быть действительными, если только они не распадаются на множителей выше рассмотренного вида; тогда они сводятся к простейшим уравнениям. Действительно, так как наше уравнение даёт

$$dz=\frac{T\,dx+V\,dy\pm\sqrt{dx^2\,(T^2-PR)+2dx\,dy\,(TV+RS)+dy^2\,(V^2-QR)}}{R},$$

то ясно, что z может быть равным некоторой функции количеств x и y, т. е. dz равным выражению вида $p\,dx+q\,dy$, лишь в том случае, если иррациональное количество становится рациональным, т. е. если

$$(T^2-PR)\,(V^2-QR)=(TV-RS)^2$$

или

$$R=\frac{PV^2+2STV+QT^2}{PQ-S^2}.$$

Итак, если это конечное уравнение не удовлетворяет предложенному уравнению, то последнее будет мнимым.

327. Мы должны были бы в этой главе остановиться ещё на дифференциальных уравнениях высших порядков и установить случаи, когда они оказываются действительными и когда мнимыми. Но так как эти критерии оказались бы очень сложными, то мы не станем выполнять этой работы, тем более что эти критерии проистекают из того же источника, которым мы здесь уже пользовались. Впрочем, если в интегральном исчислении нам понадобятся эти критерии, мы легко сможем тогда их найти. По той же причине мы не будем здесь рассматривать и уравнения, содержащие большее число переменных. Они почти никогда не встречаются, а если когда-либо встретятся, то без труда смогут быть рассмотрены, исходя из изложенных здесь основных начал. Поэтому после всего вышеизложенного мы заканчиваем здесь изучение правил дифференциального исчисления и переходим к тем замечательным применениям, которые это исчисление имеет как в самом анализе, так и в высшей геометрии.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ,

СОДЕРЖАЩАЯ ПРИМЕНЕНИЕ ЭТОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В АНАЛИЗЕ КОНЕЧНЫХ, А ТАКЖЕ В УЧЕНИИ О РЯДАХ

ГЛАВА I

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ РЯДОВ

1. Так как нам нужно показать применение дифференциального исчисления в общем анализе и в учении о рядах, то здесь придётся привести некоторые вспомогательные сведения из общей алгебры, которые обычно не излагаются. Хотя бо́льшая их часть уже рассмотрена нами во «Введении», однако кое-что мы там опустили, отчасти потому, что считали более удобным изложить это тогда, когда в этом будет необходимость, а отчасти потому, что нельзя было предвидеть всё, что нам позднее понадобится. Сюда относится преобразование рядов, которому мы посвящаем эту главу и с помощью которого какой-либо ряд можно преобразовать в бесчисленные другие ряды, которые все будут иметь одну и ту же сумму, так что если известна сумма предложенного ряда, то и остальные ряды можно будет тотчас же суммировать. На основе того, что будет изложено в этой главе, мы сможем в дальнейшем с помощью дифференциального и интегрального исчислений расширить учение о рядах.

2. Мы будем рассматривать преимущественно такие ряды, отдельные члены которых содержат множителями последовательные степени некоторого неопределённого количества, ибо такие ряды имеют более широкое применение и приносят бо́льшую пользу.

Пусть предложен следующий общий ряд, сумму которого, известна она или нет, мы положим равной S, так что

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{ и т. д.}$$

Теперь положим $x = \frac{y}{1+y}$; разложение в бесконечные ряды даёт:

$$\begin{aligned}
x &= y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + \text{ и т. д.},\\
x^2 &= y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + 5y^6 - 6y^7 + \text{ и т. д.},\\
x^3 &= y^3 - 3y^4 + 6y^5 - 10y^6 + 15y^7 - 21y^8 + \text{ и т. д.},\\
x^4 &= y^4 - 4y^5 + 10y^6 - 20y^7 + 35y^8 - 56y^9 + \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

и т. д.

Подставив эти значения и расположив ряд по степеням количества y, мы получим

$$\begin{aligned}
S = ay - ay^2 &+ ay^3 - ay^4 + ay^5 \quad \text{и т. д.} +\\
&+ b - 2b + 3b - 4b +\\
&\quad\;\; + c - 3c + 6c +\\
&\qquad\quad + d - 4d +\\
&\qquad\qquad + e.
\end{aligned}$$

3. Так как мы положили $x=\frac{y}{1+y}$, то $y=\frac{x}{1-x}$; после подстановки этого значения вместо y предложенный ряд

$$S=ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+\text{ и т. д.}$$

преобразуется в ряд

$$S=a\frac{x}{1-x}+(b-a)\frac{x^2}{(1-x)^2}+(c-2b+a)\frac{x^3}{(1-x)^3}+\text{ и т. д.},$$

в котором коэффициент $b-a$ первого члена есть первая разность количества a, взятая из ряда a, b, c, d, e и т. д.; её мы выше обозначали через Δa; коэффициент третьего члена $c-2b+a$ есть вторая разность $\Delta^2 a$; коэффициент четвёртого есть третья разность $\Delta^3 a$ и т. д. Таким образом, пользуясь последовательными разностями количества a, которые образуются из ряда a, b, c, d, e и т. д., мы преобразуем предложенный ряд к виду

$$S=\frac{x}{1-x}a+\frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a+\frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a+\frac{x^4}{(1-x^4)}\Delta^3 a+\text{ и т. д.}$$

Следовательно, сумма этого ряда будет известна, если известна сумма предложенного ряда.

4. Если ряд a, b, c, d и т. д. построен таким образом, что в конце концов его разности становятся постоянными, это имеет место в том случае, если его общий член будет целой рациональной функцией, то второй ряд $\frac{x}{1-x}a+\frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a+$ и т. д. в конце концов будет иметь исчезающие члены и, таким образом, его сумму можно будет представить конечным выражением. Так, если уже первые разности ряда a, b, c, d и т. д. постоянны, то сумма ряда $ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+$ и т. д. будет равна

$$\frac{x}{1-x}a+\frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a.$$

Если постоянными будут вторые разности коэффициентов ряда, то сумма предложенного ряда будет равна

$$\frac{x}{1-x}a+\frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a+\frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a.$$

Таким образом, сумма рядов такого вида легко находится с помощью разностей коэффициентов.

I. Пусть ищется сумма ряда

$$1x+3x^2+5x^3+7x^4+9x^5+\text{и т. д.}$$

Первые разности 2, 2, 2, 2 и т. д.

Так как первые разности постоянны и так как $a=1$ и $\Delta a=2$, то сумма предложенного ряда будет равна

$$\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{(1-x)^2}=\frac{x+x^2}{(1-x)^2}.$$

II. Пусть ищется сумма ряда

$$1x+4x^2+9x^3+16x^4+25x^5+\text{и т. д.}$$

Первые разности 3, 5, 7, 9 и т. д.
Вторые разности 2, 2, 2 и т. д.

Так как $a=1$, $\Delta a=3$, $\Delta^2 a=2$, то сумма предложенного ряда будет равна

$$\frac{x}{1-x}+\frac{3x^2}{(1-x)^2}+\frac{2x^3}{(1-x)^3}=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

III. Пусть ищется сумма ряда

$$S=4x+15x^2+40x^3+85x^4+156x^5+259x^6+\text{и т. д.}$$

Первые разности	11,	25,	45,	71,	103	и т. д.
Вторые разности	14,	20,	26,	32		и т. д.
Третьи разности	6,	6,	6			и т. д.

Так как $a=4$, $\Delta a=11$, $\Delta^2 a=14$, $\Delta^3 a=6$, то сумма будет

$$S=\frac{4x}{1-x}+\frac{11x^2}{(1-x)^2}+\frac{14x^3}{(1-x)^3}+\frac{6x^4}{(1-x)^4}$$

или

$$S=\frac{4x-x^2+4x^3-x^4}{(1-x)^4}=\frac{x(1+x^2)(4-x)}{(1-x)^4}.$$

5. Этим способом находятся суммы рядов с бесконечным числом членов, но таким же образом эти ряды можно суммировать и вплоть до данного какого-либо члена. Пусть, например, предлагается ряд

$$S=ax+bx^2+cx^3+dx^4+\ldots+ox^n$$

и ищется его сумма. Если этот ряд бесконечный, то сумма будет равна

$$\frac{x}{1-x}a+\frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a+\frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a+\text{и т. д.}$$

Рассмотрим теперь члены этого ряда, следующие за членом ox^n, т. е. члены

$$px^{n+1}+qx^{n+2}+rx^{n+3}+sx^{n+4}+\text{и т. д.}$$

Сумма последнего ряда, если его предварительно разделить на x^n, может быть найдена, как раньше; снова умножив на x^n, мы получим

$$\frac{x^{n+1}}{1-x}p+\frac{x^{n+2}}{(1-x)^2}\Delta p+\frac{x^{n+3}}{(1-x)^3}\Delta^2 p+\text{и т. д.}$$

Если эту сумму отнять от суммы ряда продолженного до бесконечности, то останется искомая сумма предложенной части ряда

$$S=\frac{x}{1-x}(a-x^n p)+\frac{x^2}{(1-x)^2}(\Delta a-x^n\Delta p)+\frac{x^3}{(1-x)^3}(\Delta^2 a-x^n\Delta^2 p)+\text{и т. д.}$$

I. Пусть ищется сумма конечного ряда

$$S=1x+2x^2+3x^3+4x+{}^4\ldots+nx^n.$$

Найдём разности его коэффициентов, а также коэффициентов, следующих за последним коэффициентом

1,	2,	3,	4	и т. д.	$n+1$,	$n+2$,	$n+3$	и т. д.
1,	1,	1		и т. д.	1,	1		и т. д.

Мы будем иметь $a=1$, $\Delta a=1$, $p=n+1$, $\Delta p=1$, поэтому искомая сумма есть

$$S=\frac{x}{1-x}(1-(n+1)x^n)+\frac{x^2}{(1-x)^2}(1-x^n)$$

или

$$S=\frac{x-(n+1)\,x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

II. Пусть ищется сумма конечного ряда

$$S=x+4x^2+9x^3+16x^4+\ldots+n^2x^n.$$

Найдём сначала его разности

1, 4, 9, 16 и т. д.	$(n+1)^2$, $(n+2)^2$, $(n+3)^2$ и т. д.
3, 5, 7 и т. д.	$2n+3$, $2n+5$ и т. д.
2, 2 и т. д.	2 и т. д.

Искомая сумма будет

$$S=\frac{x}{1-x}(1-(n+1)^2x^2)+\frac{x^2}{(1-x)^2}(3-(2n+3)\,x^n)+\frac{x^3}{(1-x)^3}(2-2x^n)$$

или

$$S=\frac{x+x^2+(n+1)^2x^{n+1}+(2n^2+2n-1)\,x^{n+2}-n^2x^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

6. Если предложенный ряд не имеет таких коэффициентов, для которых разности в конце концов становятся постоянными, тогда для определения его суммы применённое здесь преобразование ничего не даёт. С его помощью даже приближённо определить сумму ряда нельзя будет с бо́льшим удобством, чем это можно сделать путём сложения членов предложенного ряда. Действительно, если в ряде $ax+bx^2+cx^3+dx^4$ и т. д. будет $x<1$, а только в этом случае может иметь место, так сказать, собственное суммирование, то будет $\frac{x}{1-x}>x$, и следовательно, новый ряд сходится медленнее, чем предложенный. Если же в предложенном ряде будет $x=1$, тогда все члены нового ряда будут бесконечными, так что в этом случае такое преобразование совершенно бесполезно.

7. Рассмотрим ряд, в котором знаки + и — чередуются и который получается из предыдущего, если x взять отрицательным. Таким образом, пусть имеем ряд

$$S=ax-bx^2+cx^3-dx^4+ex^5-\text{и т. д.},$$

который получается, если в предшествующем ряде x взять отрицательным; возьмём, как и раньше, разности Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$ и т. д. из ряда коэффициентов a, b, c, d, e и т. д., отнеся знаки только к степеням количества x. Тогда предложенный ряд преобразуется в ряд

$$S=\frac{x}{1+x}\,a-\frac{x^2}{(1+x)^2}\,\Delta a+\frac{x^3}{(1+x)^3}\,\Delta^2 a-\frac{x^4}{(1+x)^4}\,\Delta^3 a+\text{и т. д.},$$

и мы видим, что прадложенное уравнение можно суммировать в тех же случаях, как и предшествующее, а именно, если ряд a, b, c, d и т. д. в конце концов даёт постоянные разности.

8. Однако в этом случае преобразование позволяет удобнее найти приближённое значение предложенного ряда $ax-bx^2+cx^3-dx^4+ex^5$ и т. д.; действительно, каково бы ни было число x, дробь $\frac{x}{1+x}$, по степеням которой располагается второй ряд, меньше единицы; если x равно 1, то $\frac{x}{1+x}=\frac{1}{2}$. Если же $x<1$, то, положив $x=\frac{1}{n}$, будем иметь

$\frac{x}{1+x}=\frac{1}{n+1}$, так что ряд, полученный после преобразования, сходится всегда быстрее, чем предложенный. Рассмотрим, прежде всего, случай, когда $x=1$, который для суммирования рядов является очень важным. Пусть

$$S=a-b+c-d+e-f+\text{и т. д.}$$

и пусть первые, вторые и следующие разности количества a, которые получаются из прогрессии a, b, c, d, e и т. д., обозначаются через Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$ и т. д.; тогда будет

$$S=\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\Delta a+\frac{1}{8}\Delta^2 a-\frac{1}{16}\Delta^3 a+\text{и т. д.}$$

Этот ряд, если он и не оборвётся, легко даст сумму с очень большим приближением.

9. Покажем применение этого последнего преобразования в случае $x=1$ на нескольких примерах и, прежде всего, на таких примерах, в которых истинная сумма может быть выражена в конечном виде. Таковыми являются расходящиеся ряды, в которых числа a, b, c, d и т. д. в конце концов дают постоянные разности; так как суммы их в обычном значении этого слова не могут быть собственно говоря, представлены, то термин «сумма» мы здесь будем понимать в том смысле, который мы ему приписали выше (§ 111 1-й части), так что суммой мы будем называть значение того конечного выражения, из разложения которого возникает предложенный ряд.

I. Пусть предложен следующий ряд Лейбница:

$$S=1-1+1-1+1-1+\text{и т. д.}$$

Так как в нём все члены равны, то все разности равны нулю, и так как $a=1$, то $S=\frac{1}{2}$.

II. Пусть предложен ряд

$$S=1-2+3-4+5-6+\text{ и т. д.}$$

Первые разности 1, 1, 1, 1, 1 и т. д.

Так как $a=1$, $\Delta a=1$, то

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

III. Пусть предложен ряд

$$S=1-3+5-7+9-\text{ и т. д.}$$

Первые разности 2, 2, 2, 2 и т. д.

Так как $a=1$ и $\Delta a=2$, то

$$S=\frac{1}{2}-\frac{2}{4}=0.$$

IV. Пусть предложен ряд треугольных чисел

$$S=1-3+6-10+15-21+\text{ и т. д.}$$

Первые разности 2, 3, 4, 5, 6 и т. д.
Вторые разности 1, 1, 1 и т. д.

Так как здесь $a=1$, $\Delta a=2$ и $\Delta^2 a=1$, то

$$S=\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

V. Пусть предложен ряд квадратов

$$S = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \text{и т. д.}$$

Первые разности 3, 5, 7, 9, 11 и т. д.

Вторые разности 2, 2, 2, 2 и т. д.

Так как $a = 1$, $\Delta a = 3$, $\Delta^2 a = 2$, то

$$S = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = 0.$$

VI. Пусть предложен ряд биквадратов

$$S = 1 - 16 + 81 - 256 + 625 - 1296 + \text{и т. д.}$$

Первые разности 15, 65, 175, 369, 671 и т. д.

Вторые разности 50, 110, 194, 302 и т. д.

Третьи разности 60, 84, 108 и т. д.

Четвёртые разности 24, 24 и т. д.

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} - \frac{15}{4} + \frac{50}{8} - \frac{60}{16} + \frac{24}{32} = 0.$$

10. Если ряд расходится в большей степени, чем геометрический ряд и другие подобные последнему, то он тотчас же преобразуется в быстро сходящийся ряд; если же преобразованный ряд ещё недостаточно быстро сходится, то его можно таким же образом превратить в другой, быстрее сходящийся.

I. Пусть предложен геометрический ряд

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \text{и т. д.}$$

Первые разности 1, 2, 4, 8, 16 и т. д.

Вторые разности 1, 2, 4, 8 и т. д.

Третьи разности 1, 2, 4 и т. д.

Так как во всех разностях первый член равен единице, то сумма ряда выразится следующим образом:

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \text{и т. д.}$$

Сумма последнего ряда равна $\frac{1}{3}$. Действительно, ряд этот возникает из разложения дроби $\frac{1}{2+1}$, тогда как предложенный ряд возникает из разложения дроби $\frac{1}{1+2}$.

II. Пусть предложен рекуррентный ряд

$$S = 1 - 2 + 5 - 12 + 29 - 70 + 169 - \text{и т. д.}$$

Первые разности 1, 3, 7, 17, 41, 99 и т. д.

Вторые разности 2, 4, 10, 24, 58 и т. д.

Третьи разности 2, 6, 14, 34 и т. д.

Четвёртые разности 4, 8, 20 и т. д.

Пятые разности 4, 12 и т. д.

Шестые разности 8 и т. д.

и т. д.

Таким образом, первые члены разностей составляют следующую удвоенную геометрическую прогрессию 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16 и т. д.; следовательно,

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{2}{16}+\frac{4}{32}-\frac{4}{64}+\frac{8}{128}-\text{ и т. д.}$$

Так как все члены, кроме первого, попарно взаимно уничтожаются, то $S=\frac{1}{2}$. Предложенный же ряд происходит из разложения дроби $\frac{1}{1+2-1}=\frac{1}{2}$, как мы показали это при изучении свойств рекуррентных рядов [1]).

III. Пусть предложен гипергеометрический ряд [2])

$$S=1-2+6-24+120-720+5040 \text{ и т. д.}$$

Его последовательные разности нам удобно будет представить следующим образом:

	Первые разности	Вторые разности	Третьи разности	
1	1	3	11	
2	4	14	64	
6	18	78	426	
24	96	504	3 216	и т. д.
120	600	3 720	27 240	
720	4 320	30 950	256 320	
5 040	35 280	287 280	2 656 080	
40 320	322 560	2 943 360		
362 880	3 265 920			
3 628 800				

Если продолжить вычисление этих разностей, то будем иметь

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{11}{16}+\frac{53}{32}-\frac{309}{64}+\frac{2119}{128}-\frac{16\,687}{256}+$$
$$+\frac{148\,329}{512}-\frac{1\,468\,457}{1024}+\frac{16\,019\,531}{2048}-\frac{190\,899\,411}{4096}+\text{ и т. д.}$$

Сложим два первых члена; тогда получим $\dot{S}=\frac{1}{4}+A$, где

$$A=\frac{3}{8}-\frac{11}{16}+\frac{53}{32}-\frac{309}{64}+\frac{2119}{128}-\text{ и т. д.}$$

Если теперь таким же образом взять разности, то будем иметь

$$A=\frac{3}{2^4}-\frac{5}{2^6}+\frac{21}{2^8}-\frac{99}{2^{10}}+\frac{615}{2^{12}}-\frac{4401}{2^{14}}+$$
$$+\frac{36\,585}{2^{16}}-\frac{342\,207}{2^{18}}+\frac{3\,565\,321}{2^{20}}-\frac{40\,866\,525}{2^{22}}+\text{ и т. д.}$$

---

1) «Введение в анализ», т. I, гл. IV и XIII.

2) Общий член этого ряда есть $(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. [Г. К.].

Сложим два начальных члена и будем иметь $A=\frac{7}{2^6}+B$, где

$$B=\frac{21}{2^8}-\frac{99}{2^{10}}+\text{и т. д.}$$

Снова взяв разности этого ряда, будем иметь

$$B=\frac{21}{2^9}-\frac{15}{2^{12}}+\frac{159}{2^{15}}-\frac{429}{2^{18}}+\frac{5241}{2^{21}}-\frac{26\,283}{2^{24}}+\frac{338\,835}{2^{27}}-\frac{2\,771\,097}{2^{30}}+\text{и т. д.}$$

Соберём воедино четыре начальных члена и положим

$$B=\frac{153}{2^{12}}+\frac{843}{2^{28}}+C,$$

где

$$C=\frac{5241}{2^{21}}-\frac{26\,283}{2^{24}}+\text{ и т. д.}$$

Если сложить несколько членов этого ряда, то получим приближённо $C=\frac{15\,645}{2^{24}}-\frac{60\,417}{2^{30}}$. Отсюда мы можем заключить, что сумма предложенного ряда $S=0{,}400\,820\,55$ [1]); однако едва ли это значение может считаться точным за пределами трёх или четырёх десятичных знаков, так как расходимость ряда очень велика; во всяком случае это значение меньше истинного. В другом месте я нашёл, что эта сумма равна 0,403 652 407 7, причём все цифры вплоть до последней здесь верны [2]).

11. В первую очередь это преобразование чрезвычайно полезно для преобразования рядов, которые хотя и сходятся, но медленно, в другие ряды, которые сходятся гораздо быстрее. Так как при этом последующие члены меньше, чем предыдущие, то первые разности отрицательны; поэтому при последующих вычислениях нужно внимательно учитывать знаки.

I. Пусть предложен ряд

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\text{ и т. д.}$$

$$\text{Первые разности }-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2\cdot 3},\ -\frac{1}{3\cdot 4},\ -\frac{1}{4\cdot 5},\ -\frac{1}{5\cdot 6}\text{ и т. д.}$$

$$\text{Вторые разности }\frac{1}{3},\ \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4},\ \frac{2}{3\cdot 4\cdot 5},\ \frac{2}{4\cdot 5\cdot 6}\text{ и т. д.}$$

$$\text{Третьи разности }-\frac{1}{4},\ -\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\ -\frac{2\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\text{ и т. д.}$$

$$\text{Четвёртые разности }+\frac{1}{5}\text{ и т. д.}$$

и т. д.

Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 16}+\frac{1}{5\cdot 32}+\text{и т. д.}$$

---

[1]) В оригинале $S=0{,}400\,820\,38$. Исправлено Г. Ковалевским.

[2]) Истинное значение S есть $1-e\int\limits_1^\infty\frac{e^{-t}\,dt}{t}$, или, как теперь пишут, $1+e\,\mathrm{li}\left(\frac{1}{e}\right)$, где li обозначает интегральный логарифм. Если произвести вычисление точно, пользуясь таблицами интегральных логарифмов, то найдём, что $S=0{,}403\,652\,637\,67\ldots$ Таким образом, четыре последние цифры Эйлера не верны. Эту ошибку впервые указал Маскерони (Mascheronii Adnotationes ad Euleri calculum integralem, Ticini, 1790) [*Г. К.*].

Оба эти ряда, как мы уже нашли во «Введении» [1]), представляют гиперболический логарифм двойки.

II. Пусть предложен ряд, из которого определяется длина окружности [2]):

$$S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{ и т. д.}$$

$$\text{Первые разности } -\frac{2}{1\cdot 3},\ -\frac{2}{3\cdot 5},\ -\frac{2}{5\cdot 7},\ -\frac{2}{7\cdot 9},\ -\frac{2}{9\cdot 11}\text{ и т. д.}$$

$$\text{Вторые разности } +\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5},\ \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7},\ \frac{2\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9},\ \frac{2\cdot 4}{7\cdot 9\cdot 11}\text{ и т. д.}$$

$$\text{Третьи разности } -\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7},\ -\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\text{ и т. д.}$$

и т. д.

Следовательно, сумма ряда будет

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 2}+\text{ и т. д.}$$

или

$$2S=1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\text{ и т. д.}$$

III. Пусть ищется значение бесконечного ряда

$$S=l2-l3+l4-l5+l6-l7+\text{ и т. д.}$$

Так как вначале разности очень отличны друг от друга, то сложим первые члены вплоть до $l10$, взяв их значения из таблиц. Мы найдём, что значение этих членов равно $-0{,}391\,1005$, и будем иметь

$$S=0{,}391105+l10-l11+l12-l13+\text{ и т. д.}$$

до бесконечности. Взяв эти логарифмы из таблиц, найдём их разности.

	Первые разности	Вторые разности	Третьи разности	Четвёртые разности	Пятые разности
$l10=1{,}000\,000\,0$	+	—	+	—	+
$l11=1{,}041\,392\,7$	413 927				
		36 042			
$l12=1{,}079\,181\,2$	377 885		5779		
		30 263		1292	
$l13=1{,}113\,943\,2$	347 622		4487		368
		25 776		924	
$l14=1{,}146\,128\,0$	321 846		3563		
		22 213			
$l15=1{,}166\,091\,3$	299 633				

Отсюда найдём

$$l10-l11+l12-l13+\text{ и т. д.}=$$
$$=\frac{1{,}00000}{2}-\frac{413\,927}{2}-\frac{36\,042}{8}-\frac{5779}{16}-\frac{1292}{32}-\frac{363}{64}=0{,}489\,160\,6.$$

---

[1]) «Введение», т. I, гл. VII.

[2]) Сумма этого ряда равна $\frac{\pi}{4}$, т. е. длине восьмой части окружности радиуса 1.

Следовательно, значение предложенного ряда будет

$$S = 12 - 13 + 14 - 15 + \text{ и т. д.} = 0{,}098\,060\,1.$$

Этому логарифму отвечает число 1,253315.

12. Таким же образом, как эти преобразования мы получили, подставляя в ряд вместо x дробь $\frac{y}{1 \pm y}$, мы получим бесчисленное множество других преобразований, если вместо x подставим другие функции количества y. Так, пусть снова предложен ряд

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \text{ и т. д.}$$

Положим $x = y(1 - y)$; после этого мы получим ряд

$$\begin{aligned} S = ay - ay^2 &+ \\ + by^2 - 2by^3 &+ by^4 + \\ + cy^3 - 3cy^4 &+ 3cy^5 - cy^6 + \\ + dy^4 &- 4dy^5 + 6dy^6 + \\ &+ ey^5 - 5ey^6 + \\ &+ fy^6 + \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Если один из этих рядов будет суммируемым, то будет известна также и сумма другого. Так, если

$$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{ и т. д.} = \frac{x}{1 - x},$$

то

$$S = y - y^3 - y^4 + y^6 + y^7 - y^9 - y^{10} + \text{ и т. д.}$$

Сумма этого ряда будет равна $\frac{y - y^2}{1 - y + y^2}$.

13. Если второй ряд где-нибудь обрывается, тогда сумма первого ряда может быть найдена точно. Положим, что $a = 1$ и что в найденном ряде все члены, следующие за первым, исчезают. Тогда $S = y$ и вследствие $x = y - y^2$ сумма первого ряда равна $\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x\right)}$. Но так как $a = 1$, то

$$\begin{aligned} b &= 1 = \frac{1}{4} \cdot 2^2, \\ c &= 2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} 2^4, \\ d &= 5 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} 2^6, \\ e &= 14 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} 2^8, \\ f &= 42 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} 2^{10}, \\ g &= 132 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} 2^{12} \end{aligned}$$

и т. д.

, значит, первый ряд имеет вид

$$S = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x\right)} = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + 132x^7 + \text{ и т. д.}$$

Этот же ряд мы получим, если иррациональное количество будет разложено в ряд и вычтено из половины.

14. Чтобы получить более общее преобразование, положим $x = y(1+ny)^\nu$, тогда предложенный ряд

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{и т. д.}$$

преобразуется в следующий:

$$\begin{aligned} S = ay &+ \\ &+ \frac{\nu}{1} nay^2 + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} n^2ay^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} n^3ay^4 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} n^4ay^5 + \\ &+ by^2 + \frac{2\nu}{1} nby^3 + \frac{2\nu(2\nu-1)}{1\cdot 2} n^2by^4 + \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} n^3by^5 + \\ &+ cy^3 + \frac{3\nu}{1} ncy^4 + \frac{3\nu(3\nu-1)}{1\cdot 2} n^2cy^5 + \\ &+ dy^4 + \frac{4\nu}{1} ndy^5 + \\ &+ ey^5 + \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Если сумма этого ряда будет известна, будет известна и сумма первого, и наоборот. А так как n и ν можно взять по произволу, то из одного суммируемого ряда можно, таким образом, получить бесчисленное множество других.

15. Можно произвести преобразование так, чтобы сумма найденного ряда оказалась иррациональной. Это можно сделать следующим образом.

Пусть предложен ряд

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + fx^{11} + \text{и т. д.}$$

Тогда

$$Sx = ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + ex^{10} + fx^{12} + \text{и т. д.}$$

Положим теперь

$$x = \frac{y}{\sqrt{1-ny^2}}.$$

Тогда $x^2 = \frac{y^2}{1-ny^2}$, и предложенный ряд преобразуется в ряд

$$\begin{aligned} \frac{Sy}{\sqrt{1-ny^2}} = ay^2 + nay^4 + n^2ay^6 + n^3ay^8 + n^4ay^{10} + &\text{ и т. д.} \\ + by^4 + 2nby^6 + 3n^2by^8 + 4n^3by^{10} + &\text{ и т. д.} \\ + cy^6 + 3ncy^8 + 6n^2cy^{10} + &\text{ и т. д.} \\ + dy^8 + 4ndy^{10} + &\text{ и т. д.} \\ + ey^{10} + &\text{ и т. д.} \\ \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Таким образом, если сумма S будет известна из первого ряда, то мы будем иметь также и сумму ряда

$$\frac{S}{\sqrt{1-ny^2}} = ay + (na+b)y^3 + (n^2a + 2nb + c)y^5 + \text{и т. д.}$$

16. Если положим $n=-1$, то коэффициенты этого ряда будут последовательными разностями количества a, взятыми из ряда $a, b\ c, d$ и т. д.; если же в предложенном ряде знаки чередуются, тогда коэффициенты будут этими разностями, если положить $n=1$. Пусть, таким образом, Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$ и т. д. суть первые, вторые, третьи и т. д. разности количества a, взятые из ряда чисел a, b, c, d и т. д. Если

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + \text{и т. д.},$$

то, положив $x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$, будем иметь

$$\frac{S}{\sqrt{1+y^2}} = ay^2 + \Delta ay^3 + \Delta^2 ay^5 + \Delta^3 ay^7 + \text{ и т. д.}$$

Если же

$$S = ax - bx^3 + cx^5 - dx^7 + ex^9 - \text{и т. д.},$$

то, положив $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, будем иметь

$$\frac{S}{\sqrt{1-y^2}} = ay - \Delta ay^3 + \Delta^2 ay^5 - \Delta^3 ay^7 + \text{ и т. д.}$$

Таким образом, если ряд a, b, c, d и т. д. в конце концов даёт постоянные разности, то оба ряда могут быть точно просуммированы; впрочем, это суммирование вытекает также из изложенного выше.

17. Положим, что коэффициенты a, b, c, d и т. д. образуют ряд

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{9} \text{ и т. д.}$$

Тогда, как мы раньше (§ 11 ч. 2) видели,

$$a = 1, \quad \Delta a = -\frac{2}{3}, \quad \Delta^2 a = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}, \quad \Delta^3 a = -\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} \text{ и т. д.}$$

Поэтому мы можем просуммировать следующие два ряда:

I. Пусть $S = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + $ и т. д., тогда

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x}.$$

Положим теперь $x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$, тогда будем иметь

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{1+y^2}+y}{\sqrt{1+y^2}-y} = \mathrm{l}\,(\sqrt{1+y^2}+y),$$

откуда

$$\frac{\mathrm{l}\,(\sqrt{1+y^2}+y)}{\sqrt{1+y^2}} = y - \frac{2}{3}\,y^3 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}y^5 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\,y^7 + \text{ и т. д.}$$

II. Пусть $S = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + $ и т. д., тогда

$$S = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Положим теперь $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, тогда будем иметь

$$S = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y = \arccos\sqrt{1-y^2}.$$

Таким образом, мы сможем выполнить следующее суммирование:

$$\frac{\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}} = y + \frac{2}{3}y^3 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}y^5 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}y^7 + \text{ и т. д.}$$

18. Вместо x можно подставлять также и трансцендентные функции количества y и, таким образом, произвести другие, более трудные суммирования. Однако для того, чтобы новые ряды не были слишком сложными, нужно выбирать такие функции, степени которых можно легко выразить. Таковыми являются показательные количества e^y. Итак, пусть предложен ряд

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \text{ и т. д.}$$

Положим $x = e^{ny}y$, где e есть число, гиперболический логарифм которого равен 1; тогда $x^2 = e^{2ny}\cdot y^2$, $x^3 = e^{3ny}\cdot y^3$ и т. д. Но, как известно,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.}$$

Поэтому предложенный ряд преобразуется в ряд

$$\begin{aligned} S = ay + nay^2 + \frac{1}{2}n^2ay^3 + \frac{1}{6}n^3ay^4 + \frac{1}{24}n^4ay^5 + \text{ и т. д. } +\\ + by^2 + \frac{2}{1}nby^3 + \frac{4}{2}n^2by^4 + \frac{8}{6}n^3by^5 + \text{ и т. д. } +\\ + cy^3 + \frac{3}{1}ncy^4 + \frac{9}{2}n^2cy^5 + \text{ и т. д. } +\\ + dy^4 + \frac{4}{1}ndy^5 + \text{ и т. д. } +\\ + ey^5 + \text{ и т. д.}\\ \text{и т. д.} \end{aligned}$$

I. Пусть предложен геометрический ряд

$$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{ и т. д.};$$

тогда

$$S = \frac{x}{1-x}.$$

Положим теперь $n = -1$, так что $x = e^{-y}y$ и

$$S = \frac{e^{-y}y}{1-e^{-y}y} = \frac{y}{e^y - y};$$

мы найдём тогда сумму

$$\frac{y}{e^y - y} = y - \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{6}y^4 + \frac{5}{24}y^5 + \frac{19}{120}y^6 \text{ и т. д.},$$

однако закон составления этого ряда не усматривается.

II. Пусть во втором ряду все члены, кроме первого, равны нулю; тогда

$$b=-na,\quad c=\frac{3}{2}n^2a,\quad d=-\frac{8}{3}n^3a,\quad e=\frac{125}{24}n^4a,\quad f=-\frac{54}{5}n^5a\,^{1)} \text{ и т. д.}$$

А так как $S=ay$ и $x=ye^{ny}$, то

$$y=x-nx^2+\frac{3}{2}n^2x^3-\frac{8}{3}n^3x^4+\frac{125}{24}n^4x^5-\frac{54}{4}n^5x^6+ \text{ и т. д.}$$

Так как в этих рядах закон их составления не выявляется, то суммирования, получаемые с помощью этой подстановки, приносят мало пользы. Особого же внимания заслуживают преобразования, происходящие из подстановки $x=\frac{y}{1+y}$, ибо они дают не только замечательные суммирования, но также и удобные способы для приближённого нахождения сумм рядов. Теперь, после того как мы предпослали те средства, которые найдены без помощи дифференциального исчисления, мы переходим к применению этого исчисления к учению о рядах.

---

1) В оригинале $f=-\frac{29}{30}n^5a$ [*Г. К.*].

ГЛАВА II

О РАЗЫСКАНИИ СУММИРУЕМЫХ РЯДОВ

19. Если будет известна сумма ряда, в члены которого входит неопределённое количество x и который, следовательно, будет функцией от x, то, какое бы значение ни было задано количеству x, всегда можно будет указать сумму ряда. Поэтому, если вместо x положить $x+dx$, то, сумма полученного в результате ряда будет равна сумме первоначального ряда, взятой вместе с её дифференциалом. Отсюда следует, что дифференциал суммы равен дифференциалу ряда. Поскольку, таким образом, как сумма, так и отдельные члены ряда будут помножаться на dx, то, если повсюду разделить на dx, получится новый ряд, сумма которого будет известна. Подобным же образом, если дифференцировать этот новый ряд и его сумму, а затем повсюду произвести деление на dx, получится ещё один ряд вместе с его суммой. Таким образом, из одного суммируемого ряда, содержащего неопределённое количество, последовательным дифференцированием можно получить бесчисленное множество новых рядов, которые также будут суммируемы.

20. Чтобы это стало яснее, рассмотрим неопределённую геометрическую прогрессию, ибо сумма её

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{ и т. д.}$$

известна.

Если теперь выполнить дифференцирование, будем иметь

$$\frac{dx}{(1-x)^2} = dx + 2x\,dx + 3x^2\,dx + 4x^3\,dx + 4x^4\,dx + 6x^5\,dx + \text{ и т. д.}$$

и после деления на dx получим

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{ и т. д.}$$

Если снова дифференцировать и разделить на dx, получится

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + 4\cdot 5x^3 + 5\cdot 6x^4 + \text{ и т. д.}$$

или

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x - 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + \text{ и т. д.,}$$

где коэффициенты суть треугольные числа. Если дифференцировать последний ряд и разделить на dx, получится ряд

$$\frac{1}{(1-x)^4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + \text{ и т. д.},$$

коэффициенты которого суть первые пирамидальные числа. Если поступать так дальше, будут получаться те же самые ряды, которые мы уже умеем находить из разложения дроби $\frac{1}{(1-x)^n}$.

21. Этот метод разыскания рядов получит более широкое развитие, если, прежде чем выполнять какое-либо дифференцирование, мы помножим сам ряд и его сумму на какую-либо степень или какую-либо функцию количества x. Так, поскольку

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{ и т. д.},$$

то, помножив повсюду на x^m, будем иметь

$$\frac{x^m}{1-x} = x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + x^{m+3} + x^{m+4} + \text{ и т. д.}$$

Теперь дифференцируем этот ряд; после деления на dx получим

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)x^m}{(1-x)^2} = mx^{m-1} + (m+1)x^m + (m+2)x^{m+1} + (m+3)x^{m+2} + \text{ и т. д.}$$

Теперь разделим на x^{m-1}; будем иметь

$$\frac{m-(m-1)x}{(1-x)^2} = \frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = m + (m+1)x + (m+2)x^2 + \text{ и т. д.}$$

Прежде чем выполнить новое дифференцирование, помножим этот ряд на x^n; тогда получим

$$\frac{mx^n}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{(1-x)^2} = mx^n + (m+1)x^{n+1} + (m+2)x^{n+2} + \text{ и т. д.}$$

Теперь выполним дифференцирование и разделим на dx; будем иметь

$$\frac{mnx^{n-1}}{1-x} + \frac{(m+n+1)x^n}{(1-x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1-x)^3} =$$
$$= mnx^{n-1} + (m+1)(n+1)x^n + (m+2)(n+2)x^{n+1} + \text{ и т. д.}$$

Разделив ещё на x^{n-1}, получим

$$\frac{mn}{1-x} + \frac{(m+n+1)x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} =$$
$$= mn + (m+1)(n+1)x + (m+2)(n+2)x^2 + \text{ и т. д.}$$

Так можно будет поступать и дальше, и всегда мы будем находить те же ряды, которые порождаются разложением дробей, составляющих сумму.

22. Так как для первоначально взятой геометрической прогрессии можно найти её сумму вплоть до некоторого члена, то таким образом можно будет найти также сумму ряда, состоящего из конечного числа членов. Так, поскольку

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n,$$

то, выполнив дифференцирование и разделив члены на dx, будем иметь

$$\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{(n+1)x^n-nx^{n+1}}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}.$$

Отсюда можно найти суммы натуральных чисел вплоть до некоторого предела. Помножим теперь этот ряд на x, получим ряд

$$\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}=x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n.$$

Если его снова дифференцировать и разделить на dx, он даст ряд

$$\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}=1+4x+9x^2+\ldots+n^2x^{n-1},$$

который, помноженный на x, даст

$$\frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2n^2+2n-1)x^{n+2}-n^2x^{n+3}}{(1-x)^3}=x+4x^2+9x^2+\ldots+n^2x^n,$$

а этот ряд после дифференцирования, деления на dx, умножения на x даст ряд

$$x+8x^2+27x^3+\ldots+n^3x^n,$$

сумма которого, таким образом, будет найдена. Подобным же образом можно найти сумму биквадратов и высших степеней.

23. Этот метод может быть приложен ко всем рядам, содержащим неопределённое количество, суммы которых известны. Так как, кроме геометрического ряда, все рекуррентные ряды обладают тем преимуществом, что их можно суммировать не только до бесконечности, но и вплоть до некоторого члена, то и из них этим методом можно найти бесчисленное множество других суммируемых рядов. Так как подробное рассмотрение было бы слишком пространным, то мы остановимся только на одном случае.

Именно, пусть предложен ряд

$$\frac{x}{1-x-x^2}=x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+13x^7+ \text{ и т. д.}$$

Дифференцируя его и разделив на dx, мы получим

$$\frac{1+x^2}{(1-x-x^2)^2}=1+2x+6x^2+12x^3+25x^4+48x^5+91x^6+ \text{ и т. д.}$$

Легко видеть, что все ряды, получаемые таким образом, будут также рекуррентными, так что их суммы можно найти и из их основного свойства.

24. Вообще, если для ряда, принадлежащего к виду

$$ax+bx^2+cx^3+dx^4+ \text{ и т. д.}$$

будет известна сумма, которую мы положим равной S, то можно найти и сумму ряда, получаемого умножением отдельных членов на члены арифметической прогрессии. Действительно, пусть имеем ряд

$$S=ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+ \text{ и т. д.}$$

Помножим на x^m; будем иметь

$$Sx^m=ax^{m+1}+bx^{m+2}+cx^{m+3}+dx^{m+4}+ex^{m+5}+ \text{ и т. д.}$$

ıфференцируем это уравнение и разделим на dx:

$$mSx^{m-1}+x^m\frac{dS}{dx}=(m+1)\,ax^m+(m+2)\,bx^{m+1}+(m+3)\,cx^{m+2}+\text{ и т. д.}$$

ıзделим на x^{m-1}; тогда будем иметь

$$mS+\frac{x\,dS}{dx}=(m+1)\,ax+(m+2)\,bx^2+(m+3)\,cx^3\quad\text{и т. д.}$$

:ли же мы желали бы найти сумму ряда

$$\alpha ax+(\alpha+\beta)\,bx^2+(\alpha+2\beta)\,cx^3+(\alpha+3\beta)\,dx^4+\quad\text{и т. д.},$$

› нужно будет помножить предыдущий ряд на β и положить $\beta+\beta=\alpha$, так что $m=\frac{\alpha-\beta}{\beta}$; тогда сумма последнего ряда окажется ıвной

$$(\alpha-\beta)\,S+\frac{\beta x\,dS}{dx}\;.$$

25. Можно также найти сумму ряда, получаемого из предложенˇого помножением отдельных его членов на члены ряда второго поядка, т. е. ряда, вторые разности которого постоянны. Действительно, ы уже нашли раньше, что

$$mS+\frac{x\,dS}{dx}=(m+1)\,ax+(m+2)\,bx^2+(m+3)\,cx^3+\quad\text{и т. д}$$

[омножим на x^n; будем иметь

$$mSx^n+\frac{x^{n+1}\,dS}{dx}=(m+1)\,ax^{n+1}+(m+2)\,bx^{n+2}+\quad\text{и т. д.}$$

[ифференцируем, считая dx постоянным; после деления на dx получим

$$mnSx^{n-1}+\frac{(m+n+1)\,x^n\,dS}{dx}+\frac{x^{n+1}\,d^2S}{dx^2}=$$
$$=(m+1)\,(n+1)\,ax^n+(m+2)\,(n+2)bx^{n+1}+\quad\text{и т. д.}$$

ʼазделим на x^{n-1} и помножим на k, получим:

$$mnkS+\frac{(m+n+1)\,kx\,dS}{dx}+\frac{kx^2\,d^2S}{dx^2}=$$
$$=(m+1)\,(n+1)\,kax+(m+2)\,(n+2)\,kbx^2+(m+3)\,(n+3)\,kcx^3+\quad\text{и т. д.}$$

:равним теперь этод ряд с тем[1]); будем иметь

	Первая разность	Вторая разность
$kmn+km+kn+k=\alpha$		
$kmn+2km+2kn+4k=\alpha+\beta$	$km+kn+3k=\beta$	$2k=\gamma$
$kmn+3km+3kn+9k=\alpha+2\beta+\gamma$	$km+kn+5k=\beta+\gamma$	

следовательно, $k=\frac{1}{2}\gamma$, $m+n=\frac{2\beta}{\gamma}-3$ и

$$mn=\frac{\alpha}{k}-m-n-1=\frac{2\alpha}{\gamma}-\frac{2\beta}{\gamma}+2=\frac{2\,(\alpha-\beta+\gamma)}{\gamma}\;.$$

[1]) То-есть с рядом, получаемым почленным умножением ряда $ax+bx^2+cx^3+\ldots$ на члены α, $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta+\gamma,\ldots$ ряда с постоянными вторыми разностями.

Значит, сумма предложенного ряда будет

$$(\alpha-\beta+\gamma)\,S+\frac{(\beta-\gamma)\,x\,dS}{dx}+\frac{\gamma x^2\,d^2S}{2dx^2}\,.$$

26. Подобным образом можно найти сумму ряда

$$Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+Eex^4+\ \text{и т. д.},$$

если известна сумма S ряда

$$S=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\ \text{и т. д.}$$

и если A, B, C, D и т. д. образуют ряд с постоянными разностями. Действительно, так как предложенный ряд должен быть составлен из рядов предшествующих видов, то положим, что его сумма равна

$$\alpha S+\frac{\beta x\,dS}{dx}+\frac{\gamma x^2\,d^2S}{2dx^2}+\frac{\delta x^3\,d^3S}{6dx^3}+\frac{\varepsilon x^4\,d^4S}{24\,dx^4}+\ \text{и т. д.}$$

Чтобы найти теперь α, β, γ, δ и т. д., напишем каждый из рядов в развёрнутом виде; мы будем иметь:

$$\begin{aligned}
\alpha S&=\alpha a+\alpha bx+\alpha cx^2+\alpha dx^3+\alpha ex^4+\ \text{и т. д.},\\
\frac{\beta x\,dS}{dx}&=\beta bx+2\beta cx^2+3\beta dx^3+4\beta ex^4+\ \text{и т. д.},\\
\frac{\gamma x^2\,d^2S}{2dx^2}&=\ldots\ \gamma cx^2+3\gamma dx^3+6\gamma ex^4+\ \text{и т. д.},\\
\frac{\delta x^3\,d^3S}{6dx^3}&=\ldots\ldots\ \delta dx^3+4\delta ex^4+\ \text{и т. д.},\\
\frac{\varepsilon x^4\,d^4S}{24\,dx^4}&=\ldots\ldots\ldots\ \varepsilon ex^4+\ \text{и т. д.},
\end{aligned}$$

и т. д.

Эти ряды, взятые вместе, сравним с предложенным рядом

$$Z=Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+Eex^4+\ \text{и т. д.}$$

Сравнение отдельных членов даст:

$$\begin{aligned}
\alpha&=A,\\
\beta&=B-\alpha=B-A,\\
\gamma&=C-2\beta-\alpha=C-2B+A,\\
\delta&=D-3\gamma-3\beta-\alpha=D-3C+3B-A
\end{aligned}$$

и т. д.

После того как эти значения, таким образом, найдены, мы получим искомую сумму

$$Z=AS+\frac{(B-A)\,x\,dS}{1\cdot dx}+\frac{(C-2B+A)\,x^2\,d^2S}{1\cdot 2\cdot dx^2}+\frac{(D-3C+3B-A)\,x^3\,d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}+\ \text{и т. д.}$$

или, если последовательные разности ряда A, B, C, D, E и т. д. обозначить обычным образом, будем иметь

$$Z=AS+\frac{\Delta A\cdot x\,dS}{1\cdot dx}+\frac{\Delta^2 Ax^2\,d^2S}{1\cdot 2\cdot dx^2}+\frac{\Delta^3 A\cdot x^3\,d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}+\ \text{и т. д.},$$

если, как мы приняли,

$$S=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\ \text{и т. д.}$$

Таким образом, если ряд A, B, C, D в конце концов будет иметь эянные разности, то сумму ряда Z можно будет выразить в конечвиде.

27. Если через e обозначить число, гиперболический логарифм рого равен 1, то

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{ и т. д.}$$

мём этот ряд за первоначальный; так как $S = e^x$, то

$$\frac{dS}{dx} = e^x, \quad \frac{d^2S}{dx^2} = e^x \text{ и т. д.}$$

ому сумма ряда

$$A + \frac{Bx}{1} + \frac{Cx^2}{1\cdot 2} + \frac{Dx^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{Ex^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.},$$

рый составлен из предшествующего и из ряда A, B, C, D и т. д., азится следующим образом:

$$e^x \left(A + \frac{x\Delta A}{1} + \frac{x^2\Delta^2 A}{1\cdot 2} + \frac{x^2\Delta^3 A}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4\Delta^4 A}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.}\right).$$

пусть предложен ряд

$$2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1\cdot 2} + \frac{17x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{26x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{37x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{ и т. д.}$$

авим разности ряда

$$\begin{array}{rccccl} & A, & B, & C, & D, & E \text{ и т. д.}, \\ A = & 2, & 5, & 10, & 17, & 26 \text{ и т. д.}, \\ \Delta A = & & 3, & 5, & 7, & 9 \text{ и т. д.}, \\ \Delta^2 A = & & & 2, & 2, & 2 \text{ и т. д.} \end{array}$$

эда видно, что сумма ряда

$$2 + 5x + \frac{10x^2}{2} + \frac{17x^3}{6} + \frac{24x^4}{24} + \text{ и т. д.}$$

т равна

$$e^x (2 + 3x + x^2) = e^x (1 + x)(2 + x),$$

впрочем, и само собой ясно. Действительно, мы имеем:

$$\begin{aligned} 2e^x &= 2 + \frac{2x}{1} + \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^3}{6} + \frac{2x^4}{24} + \text{ и т. д.}, \\ 3xe^x &= \phantom{2+{}} 3x + \frac{3x^2}{1} + \frac{3x^3}{2} + \frac{3x^4}{6} + \text{ и т. д.}, \\ x^2e^x &= \phantom{2+3x+{}} x^2 + \frac{x^3}{1} + \frac{x^4}{2} + \text{ и т. д.} \\ \hline e^x (2 + 3x + x^2) &= 2 + 5x + \frac{10x^2}{2} + \frac{17x^3}{6} + \frac{26x^4}{24} + \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

28. То, что было выше сказано, относится не только к рядам сконечным числом членов, но и к суммам какого-либо числа их нов; ведь коэффициенты a, b, c, d и т. д. можно либо брать в бесконом числе, либо оборвать. Но так как этот случай не требует особого снения, то мы точнее сформулируем результат, найденный выше. к, пусть предложен какой-либо ряд, отдельные члены которого оят из двух сомножителей. Одни из них пусть образуют ряд, прищий к постоянным разностям. Тогда сумма этого ряда может быть

определена, если после того, как эти множители будут опущены, ряд окажется суммируемым. Именно, пусть предложен ряд

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \text{ и т. д.},$$

в котором количества A, B, C, D, E и т. д. составляют такой ряд, который в конце концов сводится к постоянным разностям. Тогда сумма этого ряда может быть получена, если известна сумма S ряда

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{ и т. д.}$$

В самом деле, если из ряда A, B, C, D, E и т. д. мы найдём последовательные разности, как было показано в начале этой книги,

$$\begin{array}{c} A,\quad B,\quad C,\quad D,\quad E,\quad F \text{ и т. д.},\\ \Delta A,\ \Delta B,\ \Delta C,\ \Delta D,\ \Delta E \text{ и т. д.},\\ \Delta^2 A,\ \Delta^2 B,\ \Delta^2 C,\ \Delta^2 D \text{ и т. д.},\\ \Delta^3 A,\ \Delta^3 B,\ \Delta^3 C \text{ и т. д.},\\ \Delta^4 A,\ \Delta^4 B \text{ и т. д.},\\ \Delta^5 A, \end{array}$$

то сумма предложенного ряда будет

$$Z = SA + \frac{x\,dS}{1\cdot dx} + \frac{x^2\,d^2S}{1\cdot 2\cdot dx^2}\Delta^2 A + \frac{x^3\,d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}\Delta^3 A + \text{ и т. д.},$$

где в высших дифференциалах количества S дифференциал dx полагается постоянным.

29. Если ряд A, B, C, D и т. д. никогда не приводит к постоянным разностям, то сумма ряда Z выразится через посредство нового ряда, который, однако, может сходиться быстрее, чем предложенный. Таким образом, предложенный ряд преобразуется в другой, равный ему. Пусть, например, предложен ряд

$$Y = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^6}{6} + \text{ и т. д.},$$

который, как известно, представляет $\mathrm{l}\,\frac{1}{1-y}$, так что $Y = -\mathrm{l}\,(1-y)$. Разделим этот ряд на y и положим $y = x$ и $Y = yZ$, так что

$$Z = -\frac{1}{y}\,\mathrm{l}\,(1-y) = -\frac{1}{x}\,\mathrm{l}\,(1-x).$$

Тогда

$$Z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6} + \text{ и т. д.}$$

Сравнив этот ряд с рядом

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{и т. д.} = \frac{1}{1-x},$$

мы получим для ряда A, B, C, D, E и т. д. следующие значения:

$$\begin{array}{c} 1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5} \text{ и т. д.},\\ -\frac{1}{1\cdot 2},\ -\frac{1}{2\cdot 3},\ -\frac{1}{3\cdot 4},\ -\frac{1}{4\cdot 5} \text{ и т. д.},\\ \frac{1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4},\ \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5} \text{ и т. д.},\\ -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \text{ и т. д.}\\ \text{и т. д.} \end{array}$$

аким образом, будем иметь

$$A=1, \quad \Delta A=-\frac{1}{2}, \quad \Delta^2 A=\frac{1}{3}, \quad \Delta^3 A=-\frac{1}{4} \text{ и т. д.}$$

алее, так как $S=\frac{1}{1-x}$, то

$$\frac{dS}{dx}=\frac{1}{(1-x)^2}, \quad \frac{d^2S}{1\cdot 2\,dx^2}=\frac{1}{(1-x)^3}, \quad \frac{d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3}=\frac{1}{(1-x)^4} \text{ и т. д.}$$

одставив эти значения, получим сумму

$$Z=\frac{1}{1-x}-\frac{x}{2(1-x)^2}+\frac{x^2}{3(1-x)^3}-\frac{x^3}{4(1-x)^4}+\frac{x^4}{5(1-x)^5}- \text{ и т. д.}$$

так как $x=y$ и $Y=-l(1-y)=yZ$, то

$$-l(1-y)=\frac{y}{1-y}-\frac{y^2}{2(1-y)^2}+\frac{y^3}{3(1-y)^3}-\frac{y^4}{4(1-y)^4}+ \text{ и т. д.}$$

аким образом, этот ряд выражает $l\left(1+\frac{y}{1-y}\right)=l\,\frac{1}{1-y}=-l(1-y)$, ıраведливость чего устанавливается на основании ранее доказанного.

30. Чтобы показать применение этого метода в том случае, когда меются только нечётные степени, а знаки чередуются, рассмотрим яд

$$Y=y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}+\frac{y^9}{9}-\frac{y^{11}}{11}+ \text{ и т. д.}$$

ıзвестно, что $Y=\operatorname{arc\,tg} y$.

Разделим этот ряд на y и положим $\frac{Y}{y}=Z$ и $y^2=x$, тогда

$$Z=1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}-\frac{x^3}{7}+\frac{x^4}{9}-\frac{x^5}{11}+ \text{ и т. д.}$$

ꞏсли этот ряд сравнить с рядом

$$S=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+ \text{ и т. д.},$$

о получим, что $S=\frac{1}{1+x}$ и что ряд коэффициентов A, B, C, D и т. д. удет:

$$\begin{array}{llllll}
A=1, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{7}, & \frac{1}{9} & \text{и т. д.,}\\
\Delta A= & -\frac{2}{3}, & -\frac{2}{3\cdot 5}, & -\frac{2}{5\cdot 7}, & -\frac{2}{7\cdot 9} & \text{и т. д.,}\\
\Delta^2 A= & \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}, & \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7}, & \frac{2\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9} & \text{и т. д.,} & \\
\Delta^3 A= & -\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}, & -\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} & \text{и т. д.,} & & \\
\Delta^4 A= & \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} & \text{и т. д.,} & & &
\end{array}$$

и т. д.

Ꮞо так как $S=\frac{1}{1+x}$, то

$$\frac{dS}{dx}=-\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \frac{d^2S}{1\cdot 2\cdot dx^2}=\frac{1}{(1+x)^3}, \quad \frac{d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3}=-\frac{1}{(1+x)^4} \text{ и т. д.}$$

Подставив эти значения, мы получим

$$Z=\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{3(1+x)^2}+\frac{2\cdot 4x^2}{3\cdot 5(1+x)^3}+\frac{2\cdot 4\cdot 6x^3}{3\cdot 5\cdot 7(1+x)^4}+\text{ и т. д.}$$

Положив снова $x=y^2$ и помножив на y, получим

$$Y=\operatorname{arc\,tg} y=\frac{y}{1+y^2}+\frac{2y^3}{2(1+y^2)^2}+\frac{2\cdot 4y^5}{3\cdot 5(1+y^2)^3}+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot y^7}{3\cdot 5\cdot 7(1+y^2)^4}+\text{ и т. д.}$$

31. Рассмотренный выше ряд, который представляет выражение дуги круга через тангенс, можно преобразовать также и другим способом, сравнивая его с логарифмическим рядом. Рассмотрим ряд

$$Z=1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}-\frac{x^3}{7}+\frac{x^4}{9}-\frac{x^5}{11}+\text{ и т. д.}$$

и сравним его с рядом

$$S=\frac{1}{0}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{8}-\text{ и т. д.}=\frac{1}{0}-\frac{1}{2}\,l\,(1+x).$$

Тогда значения букв A, B, C, D и т. д. будут:

$$A=\frac{0}{1},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{6}{7},\quad \frac{8}{9}\text{ и т. д.,}$$

$$\Delta A=\quad \frac{2}{3},\quad \frac{+2}{3\cdot 5},\quad \frac{+2}{5\cdot 7},\quad \frac{+2}{7\cdot 9}\text{ и т. д.,}$$

$$\Delta^2 A=\quad \frac{-2\cdot 4}{3\cdot 5},\quad \frac{-2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7},\quad \frac{-2\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9}\text{ и т. д.,}$$

$$\Delta^3 A=\quad \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\text{ и т. д.,}$$

и т. д.

Далее, так как $S=\frac{1}{0}-\frac{1}{2}\,l\,(1+x)$, то

$$\frac{dS}{1\,dx}=-\frac{1}{2(1+x)},\qquad \frac{d^2S}{1\cdot 2\cdot dx^2}=\frac{1}{4(1+x)^2},$$

$$\frac{d^3S}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3}=-\frac{1}{6(1+x)^3},\quad \frac{d^4S}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4}=\frac{1}{8(1+x)^4}\text{ и т. д.}$$

Следовательно, $SA=S\frac{0}{1}=1$, и из остальных выражений получаем

$$Z=1-\frac{x}{3(1+x)}-\frac{2x^2}{3\cdot 5(1+x)^2}-\frac{2\cdot 4x^3}{3\cdot 5\cdot 7(1+x)^3}-\text{ и т. д.}$$

Положим теперь $x=y^2$ и помножим на y; будем иметь

$$Y=\operatorname{arc\,tg} y=y-\frac{y^3}{3(1+y^2)}-\frac{2y^5}{3\cdot 5(1+y^2)^2}-\frac{2\cdot 4y^7}{3\cdot 5\cdot 7(1+y^2)^3}-\text{ и т. д.}$$

Таким образом, этому преобразованию не служил помехой бесконечный член $\frac{1}{0}$, который входил в ряд S. Если же у кого остаётся сомнение, тот пусть разложит отдельные члены ряда, кроме первого, по степеням количества y в ряд; он убедится, что действительно получается первоначально предложенный ряд.

32. До сих пор мы рассматривали только такие ряды, в которые входили степени переменного количества. Теперь же мы перейдём к другим рядам, которые содержат в отдельных своих членах одну и ту же степень переменного, как, например, ряд

$$S=\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}+\frac{1}{c+x}+\frac{1}{d+x}+\text{ и т. д.}$$

Если будет известна сумма S этого ряда и если она выражается некоторой функцией количества x, то, дифференцируя и деля на $-dx$, будем иметь

$$\frac{-dS}{dx}=\frac{1}{(a+x)^2}+\frac{1}{(b+x)^2}+\frac{1}{(c+x)^2}+\frac{1}{(d+x)^2}+\text{ и т. д.}$$

Если мы будем дифференцировать этот ряд и затем разделим на $-2dx$, то найдём ряд кубов

$$\frac{d^2S}{2\,dx^2}=\frac{1}{(a+x)^3}+\frac{1}{(b+x)^3}+\frac{1}{(c+x)^3}+\frac{1}{(d+x)^3}+\text{ и т. д.}$$

Если этот ряд снова дифференцировать и разделить на $-3dx$, то получим

$$\frac{-d^3S}{6\,dx^3}=\frac{1}{(a+x)^4}+\frac{1}{(b+x)^4}+\frac{1}{(c+x)^4}+\frac{1}{(d+x)^4}+\text{ и т. д.}$$

Подобным же образом найдутся суммы всех следующих степеней, если только будет известна сумма первоначального ряда.

33. Подобного рода ряды дробей, содержащие неопределённое количество, мы нашли прежде во «Введении» [1]), где мы показали, что если обозначить через π полуокружность круга, радиус которого равен 1, то будет

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m}{n}\pi}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}-\text{ и т. д.},$$

$$\frac{\pi\cos\frac{m}{n}\pi}{n\sin\frac{m}{n}\pi}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}-\text{ и т. д.}$$

Так как за m и n можно принять любые числа, то положим $n=1$ и $m=x$, чтобы получить ряды, подобные тому, который был предложен в предыдущем параграфе. Тогда будем иметь

$$\frac{\pi}{\sin\pi x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3-x}-\text{ и т. д.},$$

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3-x}+\text{ и т. д.}$$

Следовательно, с помощью дифференцирований можно найти суммы каких-либо степеней, получаемых из этих дробей.

---

[1]) «Введение», т. I, гл. X.

34. Рассмотрим первый ряд и пусть для краткости $\frac{\pi}{\sin \pi x} = S$; высшие его дифференциалы будем брать, полагая dx постоянным. Тогда

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \text{ и т. д.},$$

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} - \frac{1}{(3-x)^2} - \text{ и т. д.},$$

$$\frac{d^2S}{2\,dx^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} + \frac{1}{(3-x)^3} - \text{ и т. д.},$$

$$\frac{-d^3S}{6\,dx^3} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{(1-x)^4} - \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2-x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4} - \frac{1}{(3-x)^4} - \text{ и т. д.},$$

$$\frac{d^4S}{24\,dx^4} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{(1-x)^5} - \frac{1}{(1+x)^5} - \frac{1}{(2-x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5} + \frac{1}{(3-x)^5} - \text{ и т. д.},$$

$$\frac{-d^5S}{120\,dx^5} = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{(1-x)^6} - \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(2-x)^6} + \frac{1}{(2+x)^6} - \frac{1}{(3-x)^6} - \text{ и т. д.},$$

и т. д.

Заметим, что для чётных степеней знаки подчиняются одному и тому же закону и точно так же для нечётных степеней соблюдается один и тот же закон знаков. Таким образом, суммы всех этих рядов находятся из дифференциалов выражения $S = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.

35. Чтобы проще выразить эти дифференциалы, положим

$$\sin \pi x = p \quad \text{и} \quad \cos \pi x = q;$$

тогда

$$dp = \pi\, dx \cos \pi x = \pi q\, dx \quad \text{и} \quad dq = -\pi p\, dx.$$

А так как $S = \frac{\pi}{p}$, то

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi^2 q}{p^2},$$

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{\pi^3 (p^2 + 2q^2)}{p^3} = \frac{\pi^3 (q^2+1)}{p^3}, \text{ так как } p^2 + q^2 = 1,$$

$$\frac{-d^3S}{dx^3} = \pi^4 \left(\frac{5q}{p^2} + \frac{6q^3}{p^4}\right) = \frac{\pi^4 (q^3 + 5q)}{p^4},$$

$$\frac{d^4S}{dx^4} = \pi^5 \left(\frac{24q^4}{p^5} + \frac{28q^2}{p^3} + \frac{5}{p}\right) = \frac{\pi^5 (q^4 + 18q^2 + 5)}{p^5},$$

$$\frac{-d^5S}{dx^5} = \pi^6 \left(\frac{120q^5}{p^6} + \frac{180q^3}{p^4} + \frac{61q}{p^2}\right) = \frac{\pi^6 (q^5 + 58q^3 + 61q)}{p^6},$$

$$\frac{d^6S}{dx^6} = \pi^7 \left(\frac{720q^6}{p^7} + \frac{1320q^4}{p^5} + \frac{662q^2}{p^3} + \frac{61}{p}\right) = \frac{\pi^7 (q^6 + 179q^4 + 479q^2 + 61)}{p^7},$$

$$\frac{-d^7S}{dx^7} = \pi^8 \left(\frac{5040q^7}{p^8} + \frac{10\,920q^5}{p^6} + \frac{7266q^3}{p^4} + \frac{1385q}{p^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi^8}{p^8} (q^7 + 543q^5 + 3111q^3 + 1385q),$$

$$\frac{d^8S}{dx^8} = \pi^9 \left(\frac{40\,320q^8}{p^9} + \frac{100\,800q^6}{p^7} + \frac{83\,664q^4}{p^5} + \frac{24\,568q^2}{p^3} + \frac{1385}{p}\right) =$$

$$= \frac{\pi^9}{p^9} (q^8 + 1636q^6 + 18\,270q^4 + 19\,028q^2 + 1385) \text{ и т. д.}$$

Эти выражения легко получать и дальше до какого угодно предела; действительно, если будем иметь

$$\pm\frac{d^nS}{dx^n}=\pi^{n+1}\left(\frac{\alpha q^n}{p^{n+1}}+\frac{\beta q^{n-2}}{p^{n-1}}+\frac{\gamma q^{n-4}}{p^{n-3}}+\frac{\delta q^{n-6}}{p^{n-5}}+\text{ и т. д.}\right),$$

то следующий дифференциал после перемены знака будет иметь вид

$$\mp\frac{d^{n+1}S}{dx^{n+1}}=\pi^{n+2}\left\{\begin{array}{l}(n+1)\frac{\alpha q^{n+1}}{p^{n+2}}+(n\alpha+(n-1)\beta)\frac{q^{n-1}}{p^n}+\\ \quad+((n-2)\beta+(n-3)\gamma)\frac{q^{n-3}}{p^{n-2}}+\\ \quad+((n-4)\gamma+(n-5)\delta)\frac{q^{n-5}}{p^{n-4}}+\text{ и т. д.}\end{array}\right\}.$$

36. Отсюда получатся суммы рядов, найденных выше, в § 34, а именно:

$$S=\pi\cdot\frac{1}{p},$$
$$\frac{-dS}{dx}=\frac{\pi^2}{1}\cdot\frac{q}{p^2},$$
$$\frac{d^2S}{2\,dx^2}=\frac{\pi^3}{2}\left(\frac{2q^2}{p^3}+\frac{1}{p}\right),$$
$$\frac{-d^3S}{6\,dx^3}=\frac{\pi^4}{6}\left(\frac{6q^3}{p^4}+\frac{5q}{p^2}\right),$$
$$\frac{d^4S}{24\,dx^4}=\frac{\pi^5}{24}\left(\frac{24q^4}{p^5}+\frac{28q^2}{p^3}+\frac{5}{p}\right),$$
$$\frac{-d^5S}{120\,dx^5}=\frac{\pi^6}{120}\left(\frac{120q^5}{p^6}+\frac{180q^3}{p^4}+\frac{61q}{p^2}\right),$$
$$\frac{d^6S}{720\,dx^6}=\frac{\pi^7}{720}\left(\frac{720q^6}{p^7}+\frac{1320q^4}{p^5}+\frac{662q^2}{p^3}+\frac{61}{p}\right),$$
$$\frac{-d^7S}{5040\,dx^7}=\frac{\pi^8}{5040}\left(\frac{5040q^7}{p^8}+\frac{10\,920q^5}{p^6}+\frac{7266q^3}{p^4}+\frac{1385q}{p^2}\right),$$
$$\frac{d^8S}{40\,320\,dx^8}=\frac{\pi^9}{40\,320}\left(\frac{40\,320q^8}{p^9}+\frac{100\,800q^6}{p^7}+\frac{83\,664q^4}{p^5}+\frac{24\,568q^2}{p^3}+\frac{1385}{p}\right).$$

37. Таким же образом поступим с другим рядом, который мы нашли выше (§ 33):

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3-x}\text{ и т. д.}$$

Положив для краткости $\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x}=T$, мы получим следующие суммирования:

$$T=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}-\text{ и т. д.},$$
$$\frac{-dT}{dx}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(2-x)^2}+\frac{1}{(2+x)^2}+\text{ и т. д.},$$
$$\frac{d^2T}{2\,dx^2}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{1}{(1+x)^3}-\frac{1}{(2-x)^3}+\frac{1}{(2+x)^3}-\text{ и т. д.},$$
$$\frac{-d^3T}{6\,dx^3}=\frac{1}{x^4}+\frac{1}{(1-x)^4}+\frac{1}{(1+x)^4}+\frac{1}{(2-x)^4}+\frac{1}{(2+x)^4}+\text{ и т. д.},$$
$$\frac{d^4T}{24\,dx^4}=\frac{1}{x^5}-\frac{1}{(1-x)^5}+\frac{1}{(1+x)^5}-\frac{1}{(2-x)^5}+\frac{1}{(2+x)^5}-\text{ и т. д.},$$
$$\frac{-d^5T}{120\,dx^5}=\frac{1}{x^6}+\frac{1}{(1-x)^6}+\frac{1}{(1+x)^6}+\frac{1}{(2-x)^6}+\frac{1}{(2+x)^6}+\text{ и т. д.},$$

и т. д.,

где для чётных степеней все члены положительны, а для нечётных знаки $+$ и $-$ чередуются.

38. Чтобы найти значения этих дифференциалов, положим, как и раньше,

$$\sin\pi x = p \quad \text{и} \quad \cos\pi x = q,$$

так что $p^2+q^2=1$; тогда

$$dp = \pi q\,dx \quad \text{и} \quad dq = -\pi p\,dx.$$

С помощью этих выражений мы будем иметь:

$$T = \pi\cdot\frac{q}{p},$$
$$\frac{-dT}{dx} = \pi^2\left(\frac{q^2}{p^2}+1\right) = \frac{\pi^2}{p^2},$$
$$\frac{d^2T}{dx^2} = \pi^3\left(\frac{2q^3}{p^3}+\frac{2q}{p}\right) = \frac{2\pi^3 q}{p^3},$$
$$\frac{-d^3T}{dx^3} = \pi^4\left(\frac{6q^4}{p^4}+\frac{8q^2}{p^2}+2\right) = \pi^4\left(\frac{6q^2}{p^4}-\frac{2}{p^2}\right),$$
$$\frac{d^4T}{dx^4} = \pi^5\left(\frac{24q^3}{p^5}+\frac{16q}{p^3}\right),$$
$$\frac{-d^5T}{dx^5} = \pi^6\left(\frac{120q^4}{p^6}+\frac{120q^2}{p^4}+\frac{16}{p^2}\right),$$
$$\frac{d^6T}{dx^6} = \pi^7\left(\frac{720q^5}{p^7}+\frac{960q^3}{p^5}+\frac{272q}{p^3}\right),$$
$$\frac{-d^7T}{dx^7} = \pi^8\left(\frac{5040q^6}{p^8}+\frac{8400q^4}{p^6}+\frac{3696q^2}{p^4}+\frac{272}{p^2}\right),$$
$$\frac{d^8T}{dx^8} = \pi^9\left(\frac{40\,320q^7}{p^9}+\frac{80\,640q^5}{p^7}+\frac{48\,384q^3}{p^5}+\frac{7936q}{p^3}\right)$$

и т. д.

Эти формулы легко получить и дальше до какого угодно предела. Действительно, если

$$\pm\frac{d^nT}{dx^n} = \pi^{n+1}\left(\frac{\alpha q^{n-1}}{p^{n+1}}+\frac{\beta q^{n-3}}{p^{n-1}}+\frac{\gamma q^{n-5}}{p^{n-3}}+\frac{\delta q^{n-7}}{p^{n-5}}+\text{ и т. д.}\right),$$

то следующее выражение будет

$$\pm\frac{d^{n+1}T}{dx^{n+1}} = \pi^{n+2}\left(\frac{(n+1)\alpha q^n}{p^{n+2}}+\frac{(n-1)(\alpha+\beta)q^{n-2}}{p^n}+\frac{(n-3)(\beta+\gamma)q^{n-4}}{p^{n-2}}+\text{ и т. д.}\right).$$

39. Итак, положив $\sin\pi x = p$ и $\cos\pi x = q$, мы получим следующие суммы рядов, данных в § 37:

$$T = \pi\cdot\frac{q}{p},$$
$$\frac{-dT}{dx} = \pi^2\frac{1}{p^2},$$
$$\frac{d^2T}{2\,dx^2} = \pi^3\frac{q}{p^3},$$
$$\frac{-d^3T}{6\,dx^3} = \pi^4\left(\frac{q^2}{p^4}+\frac{1}{3p^2}\right),$$
$$\frac{d^4T}{24\,dx^4} = \pi^5\left(\frac{q^3}{p^5}+\frac{2q}{3p^3}\right),$$
$$\frac{-d^5T}{120\,dx^5} = \pi^6\left(\frac{q^4}{p^6}+\frac{3q^2}{3p^4}+\frac{2}{15p^2}\right),$$

$$\frac{d^6T}{720\,dx^6}=\pi^7\left(\frac{q^6}{p^7}+\frac{4q^3}{3p^5}+\frac{17q}{45p^3}\right),$$
$$\frac{-d^7T}{5040\,dx^7}=\pi^8\left(\frac{q^8}{p^8}+\frac{5q^4}{3p^6}+\frac{11q^2}{15p^4}+\frac{17}{315p^2}\right),$$
$$\frac{d^8T}{40\,390\,dx^8}=\pi^9\left(\frac{q^7}{p^9}+\frac{6q^5}{3p^7}+\frac{6q^3}{5p^5}+\frac{62q}{315p^3}\right)$$
и т. д.

40. Помимо этих рядов, мы нашли во «Введении» [1]) некоторые другие, из которых с помощью дифференцирования подобным образом можно получить новые ряды.

Так, мы показали, что

$$\frac{1}{2x}-\frac{\pi\sqrt{x}}{2x\operatorname{tg}\pi\sqrt{x}}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{4-x}+\frac{1}{9-x}+\frac{1}{16-x}-\frac{1}{25-x}+\text{ и т. д.}$$

Положим, что сумма этого ряда равна S, так что

$$S=\frac{1}{2x}-\frac{\pi}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{\cos\pi\sqrt{x}}{\sin\pi\sqrt{x}}.$$

Тогда

$$\frac{dS}{dx}=-\frac{1}{2x^2}+\frac{\pi}{4x\sqrt{x}}\cdot\frac{\cos\pi\sqrt{x}}{\sin\pi\sqrt{x}}+\frac{\pi^2}{4x(\sin\pi\sqrt{x})^2}.$$

Следовательно, это выражение представляет сумму ряда

$$\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(4-x)^2}+\frac{1}{(9-x)^2}+\frac{1}{(16-x)^2}+\frac{1}{(25-x)^2}+\text{ и т. д.}$$

Далее, мы показали также, что

$$\frac{\pi}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4+x}+\frac{1}{9+x}+\frac{1}{16+x}+\text{ и т. д.}$$

Если эту сумму положить равной S, то будем иметь

$$\frac{-dS}{dx}=\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(4+x)^2}+\frac{1}{(9+x)^2}+\frac{1}{(16+x)^2}+\text{ и т. д.}$$

Но

$$\frac{dS}{dx}=\frac{-\pi}{4x\sqrt{x}}\cdot\frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1}-\frac{\pi^2}{x}\cdot\frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}}-1)^2}+\frac{1}{2x^2}.$$

Следовательно, сумма последнего ряда равна

$$\frac{-dS}{dx}=\frac{\pi}{4x\sqrt{x}}\cdot\frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1}+\frac{\pi^2}{x}\cdot\frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}}-1)^2}-\frac{1}{2x^2}.$$

Подобным образом можно с помощью дальнейших дифференцирований найти суммы следующих степеней.

41. Если будет известно значение какого-либо произведения, составленного из множителей, содержащих неопределённую букву, то из него можно будет тем же методом найти бесчисленное множество суммируемых рядов. Так, пусть значение произведения

$$(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)(1+\varepsilon x)\text{ и т. д.}$$

---

[1]) «Введение», т. I, гл. X.

равно S, т. е. некоторой функции количества x. Взяв логарифм, будем иметь

$$\mathrm{l}\,S = \mathrm{l}\,(1+\alpha x) + \mathrm{l}\,(1+\beta x) + \mathrm{l}\,(1+\gamma x) + \mathrm{l}\,(1+\delta x) + \text{ и т. д.}$$

Теперь возьмём дифференциалы; после деления на dx получим

$$\frac{dS}{S\,dx} = \frac{\alpha}{1+\alpha x} + \frac{\beta}{1+\beta x} + \frac{\gamma}{1+\gamma x} + \frac{\delta}{1+\delta x} + \text{ и т. д.}$$

Дальнейшим дифференцированием можно найти суммы каких-либо степеней этих дробей, совершенно так же, как мы подробно объяснили в предыдущих примерах.

42. Во «Введении»[1]) мы нашли некоторые выражения подобного рода; применим к ним этот метод. Если π есть дуга в 180° круга, радиус которого равен 1, то, как было нами показано,

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\cdot\frac{4n^2-m^2}{4n^2}\cdot\frac{16n^2-m^2}{16n^2}\cdot\frac{36n^2-m^2}{36n^2} \text{ и т. д.,}$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \frac{n^2-m^2}{n^2}\cdot\frac{9n^2-m^2}{9n^2}\cdot\frac{25n^2-m^2}{25n^2}\cdot\frac{49n^2-m^2}{49n^2} \text{ и т. д.}$$

Положим $n=1$ и $m=2x$, так что

$$\sin\pi x = \pi x\,\frac{1-x^2}{1}\cdot\frac{4-x^2}{4}\cdot\frac{9-x^2}{9}\cdot\frac{16-x^2}{16}\cdot \text{ и т. д.}$$

или

$$\sin\pi x = \pi x\,\frac{1-x}{1}\cdot\frac{1+x}{1}\cdot\frac{2-x}{2}\cdot\frac{2+x}{2}\cdot\frac{3-x}{3}\cdot\frac{3+x}{3}\cdot\frac{4-x}{4}\cdot \text{ и т. д.}$$

и

$$\cos\pi x = \frac{1-4x^2}{1}\cdot\frac{9-4x^2}{9}\cdot\frac{25-4x^2}{25}\cdot\frac{49-4x^2}{49}\cdot \text{ и т. д.}$$

или

$$\cos\pi x = \frac{1-2x}{1}\cdot\frac{1+2x}{1}\cdot\frac{3-2x}{3}\cdot\frac{3+2x}{3}\cdot\frac{5-2x}{5}\cdot\frac{5+2x}{5}\cdot \text{ и т. д.}$$

Если взять логарифмы этих выражений, то будем иметь

$$\mathrm{l}\sin\pi x = \mathrm{l}\,\pi x + \mathrm{l}\,\frac{1-x}{1} + \mathrm{l}\,\frac{1+x}{1} + \mathrm{l}\,\frac{2-x}{2} + \mathrm{l}\,\frac{2+x}{2} + \mathrm{l}\,\frac{3-x}{3} + \text{ и т. д.,}$$

$$\mathrm{l}\cos\pi x = \mathrm{l}\,\frac{1-2x}{1} + \mathrm{l}\,\frac{1+2x}{1} + \mathrm{l}\,\frac{3-2x}{3} + \mathrm{l}\,\frac{3+2x}{3} + \mathrm{l}\,\frac{5-2x}{5} + \text{ и т. д.}$$

43. Возьмём теперь дифференциалы этих логарифмических рядов; после того как повсюду будет выполнено деление на dx, первый ряд даст

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \text{ и т. д.}$$

Это тот же самый ряд, который мы рассматривали в § 37. Другой же ряд даст

$$\frac{-\pi\sin\pi x}{\cos\pi x} = -\frac{2}{1-2x} + \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{3-2x} + \frac{2}{3+2x} - \frac{2}{5-2x} + \text{ и т. д.}$$

[1]) «Введение», т. I, гл. IX и X.

Положим $2x = z$, так что $x = \frac{z}{2}$, и разделим на -2; будем иметь

$$\frac{\pi \sin \frac{1}{2} \pi z}{2 \cos \frac{1}{2} \pi z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} + \frac{1}{5-z} - \text{ и т. д.}$$

Но так как

$$\sin \frac{1}{2} \pi z = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi z}{2}} \quad \text{и} \quad \cos \frac{1}{2} \pi z = \sqrt{\frac{1 + \cos \pi z}{2}},$$

то

$$\frac{\pi \sqrt{1 - \cos \pi z}}{\sqrt{1 + \cos \pi z}} = \frac{2}{1-z} - \frac{2}{1+z} + \frac{2}{3-z} - \frac{2}{3+z} + \frac{2}{5-z} - \text{ и т. д.}$$

или, если написать x вместо z,

$$\frac{\pi \sqrt{1 - \cos \pi x}}{\sqrt{1 + \cos \pi x}} = \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1+x} + \frac{2}{3-x} - \frac{2}{3+x} + \frac{2}{5-x} - \text{ и т. д.}$$

Прибавим этот ряд к первоначально найденному

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \text{ и т. д.},$$

тогда мы найдём, что сумма ряда

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \text{ и т. д.}$$

равна $\frac{\pi \sqrt{1 - \cos \pi x}}{\sqrt{1 + \cos \pi x}} + \frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x}$. Но дробь $\frac{\sqrt{1 - \cos \pi x}}{\sqrt{1 + \cos \pi x}}$, если числитель и знаменатель помножить на $\sqrt{1 - \cos \pi x}$, примет вид $\frac{1 - \cos \pi x}{\sin \pi x}$. Поэтому сумма ряда будет равна $\frac{\pi}{\sin \pi x}$, эта та же сумма, которую мы нашли в § 34; поэтому мы не будем подвергать её дальнейшему рассмотрению.

ГЛАВА III

О НАХОЖДЕНИИ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

41. Каким образом из конечных разностей функций легко можно найти их дифференциалы, это мы подробно изложили в начале книги; и именно из этого мы исходили при выводе основных свойств дифференциалов. Действительно, если разности, которые прежде считались конечными, теперь исчезают и обращаются в нуль, то возникают дифференциалы; а так как в этом случае многие, а часто и бесчисленные члены, составляющие конечную разность, отбрасываются, то дифференциалы можно найти гораздо легче и выразить гораздо удобнее и проще, чем конечные разности. Поэтому обратный путь, путь подъёма от дифференциалов к конечным разностям, казалось бы, закрыт. Однако по тому способу, которым мы здесь будем пользоваться, можно будет из дифференциалов всех порядков какой-либо функции определить все её конечные разности.

45. Пусть y есть какая-либо функция от x. Так как она, если положить $x+dx$ вместо x, переходит в $y+dy$, то, если снова положить $x+dx$ вместо x, значение $y+dy$ возрастёт на свой дифференциал $dy+d^2y$ и станет равным $y+2dy+d^2y$; таким образом, это значение будет соответствовать значению $x+2dx$ количества x. Подобным образом, если мы положим, что количество x непрерывно возрастает на свой дифференциал dx, так что оно принимает последовательно значения $x+dx$, $x+2dx$, $x+3dx$, $x+4dx$ и т. д., то y будет иметь следующие указанные в приводимой таблице соответствующие значения:

Значение количества	Соответствующие значения функции
x	y
$x+dx$	$y+dy$
$x+2dx$	$y+2dy+d^2y$
$x+3dx$	$y+3dy+3d^2y+d^3y$
$x+4dx$	$y+4dy+6d^2y+4d^3y+d^4y$
$x+5dx$	$y+5dy+10d^2y+10d^3y+5d^4y+d^5y$
$x+6dx$	$y+6dy+15d^2y+20d^3y+15d^4y+6d^5y+d^6y$
и т. д.	и т. д.

46. Вообще, если x перейдёт в $x+ndx$, то функция y примет вид

$$y+\frac{n}{1}dy+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d^2y+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d^3y+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d^4y+\text{ и т. д.}$$

Хотя в этом выражении каждый член бесконечно меньше, чем предшествующий, но зато мы не опустили ни одного члена для того, чтобы эта формула оказалась пригодной для решения рассматриваемого вопроса. Действительно, мы будем считать n бесконечно большим числом, а так как, как мы раньше указывали, произведение бесконечно большого количества на количество бесконечно малое может равняться конечному количеству, то второй член сможет оказаться однородным с первым, т. е. ndy сможет представлять конечное количество. По этой же причине, хотя d^2y в бесконечное число раз меньше чем dy, третий член $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d^2y$ сможет выражать конечное количество, так как другой множитель $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ в бесконечно большее число раз больше чем n; таким образом, если n полагается бесконечным числом, то нельзя будет отбросить никакой из членов этого выражения.

47. Если же n положить бесконечным числом, то какое бы конечное число ни было прибавлено или отнято, результирующее число будет иметь к n отношение равенства, и потому вместо отдельных сомножителей $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$ и т. д. можно будет повсюду написать n. А так как $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d^2y=\frac{1}{2}n^2d^2y-\frac{1}{2}nd^2y$, то первый член $\frac{1}{2}n^2d^2y$ к последующему $\frac{1}{2}nd^2y$ будет относиться, как n к 1, так что второй исчезает по сравнению с первым; следовательно, вместо $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ можно написать $\frac{1}{2}n^2$. Подобным образом коэффициент четвёртого члена $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ можно свести к $\frac{n^3}{6}$ и равным образом в последующих членах можно пренебречь теми числами, которые вычитаются из n в сомножителях. Поэтому функция y, если в ней вместо x положить $x+ndx$, где n есть бесконечное число, получит следующее значение:

$$y+\frac{ndy}{1}+\frac{n^2d^2y}{1\cdot 2}+\frac{n^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{n^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{n^5d^5y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\text{ и т. д.}$$

48. Поскольку при бесконечно большом n произведение ndx может выражать конечное число, несмотря на то что dx есть бесконечно малое, положим $ndx=\omega$, так что $n=\frac{\omega}{dx}$; таким образом, n, будучи частным от деления конечного количества ω на бесконечно малое dx, будет числом бесконечным. Но с помощью полученного здесь значения n мы найдём, что если переменное количество x возрастёт на некоторое конечное количество ω, т. е. если вместо x мы положим $x+\omega$, то какая-либо его функция y примет вид

$$y+\frac{\omega\,dy}{1\cdot dx}+\frac{\omega^2d^2y}{1\cdot 2\,dx^2}+\frac{\omega^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3}+\frac{\omega^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4}+\text{ и т. д.}$$

В этом выражении отдельные члены могут быть найдены последовательным дифференцированием количества y. Но выше мы показали, что когда y является функцией от x, все эти функции $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д. представляют конечные количества.

49. Когда переменное количество x предполагается возрастающим на конечное количество ω, какая-либо его функция y возрастает на первую её разность, которую мы выше обозначали через Δy, причём мы имели

$\omega = \Delta x$. Поэтому можно будет с помощью последовательного дифференцирования найти разность количества y, именно мы будем иметь

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ и т. д.}$$

или

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24}\frac{d^4y}{dx^4} + \text{ и т. д.}$$

Таким образом, конечная разность Δy выразится рядом, члены которого расположены по степеням количества Δx. В свою очередь отсюда ясно, что если количество x возрастает лишь на бесконечно малое количество, так что Δx становится его дифференциалом dx, то все члены, кроме первого, исчезают, и мы имеем $\Delta y = dy$; действительно, если сделать $\Delta y = dx$, то разность Δy, по определению, переходит в дифференциал dy.

50. Поскольку, если вместо x положить $x+\omega$, какая-либо его функция y принимает значение

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{\omega^3 dy^3}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ и т. д.};$$

справедливость этого выражения можно будет проверить на примерах, в которых высшие дифференциалы количества y, в конце концов исчезают; действительно, в этих случаях число членов вышеприведённого выражения станет конечным.

Пример 1

Пусть ищется значение выражения $x^2 - x$, если вместо x положить $x+1$.

Положим $y = x^2 - x$; так как предполагается, что x переходит в $x+1$, то $\omega = 1$; взяв теперь дифференциалы, будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Значит, функция $y = x^2 - x$, если положить $x+1$ вместо x, перейдёт в

$$x^2 - x + 1\,(2x-1) + \frac{1}{2}\cdot 2 = x^2 + x.$$

Действительно, если в $x^2 - x$ вместо x мы на самом деле положим $x+1$, то

x^2 перейдёт в x^2+2x+1,

x » » $x+1$

следовательно, $x^2 - x$ перейдёт в $x^2 + x$

Пример 2

Пусть ищется значение выражения $x^3 + x^2 + x$, если вместо x положить $x+2$.

Положим $y = x^3 + x^2 + x$ и $\omega = 2$; так как теперь

$$y = x^3 + x^2 + x,$$

то

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x + 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 2, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 6, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда значение функции $y = x^3 + x^2 + x$, если вместо x положить $+2$, будет

$$x^3 + x^2 + x + 2(3x^2 + 2x + 1) + \frac{4}{2}(6x + 2) + \frac{8}{6} \cdot 6 = x^3 + 7x^2 + 17 + x14.$$

То же значение получится, если на самом деле вместо x подставить $+2$.

Пример 3

Пусть ищется значение выражения $x^2 + 3x + 1$, если вместо x положить $x - 3$.

Здесь, следовательно, $\omega = -3$; положив

$$y = x^2 + 3x + 1,$$

будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \text{ и т. д.},$$

откуда, если положить $x - 3$ вместо x, функция $x^2 + 3x + 1$ перейдёт в

$$x^2 + 3x + 1 - \frac{3}{1}(2x + 3) + \frac{9}{2} \cdot 2 = x^2 - 3x + 1.$$

51. Если за ω мы примем отрицательное число, мы найдём значение, которое принимает какая-либо функция количества, когда x уменьшается на данное количество ω. Именно, если вместо x положить $x - \omega$, то какая-либо функция y от x примет значение

$$y - \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 d^2y}{dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{dx^4} - \text{ и т. д.};$$

отсюда могут быть найдены все те изменения, которым может подвергнуться количество y, когда количество x изменяется каким-либо образом. Если y будет целой рациональной функцией от x, то, так как в конце концов мы придём к исчезающим её дифференциалам, изменённое её значение представится конечным выражением; если же y не будет функцией этого рода, то изменённое значение выразится бесконечным рядом, сумму которого, следовательно, можно будет представить конечным выражением, ибо, если на самом деле сделать подстановку, изменённое значение легко находится.

52. Так же, как была найдена первая разность, можно представить и следующие разности подобными же выражениями. Действительно, пусть x принимает последовательно значения $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$, $x + 4\omega$ и т. д. и пусть соответствующие значения y обозначаются через y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV} и т. д., как мы положили в начале этой книги. Так как y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV} и т. д. суть значения, которые порождает y, если вместо x написать соответственно $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$, $x + 4\omega$ и т. д., то эти значения количества y, по доказанному, представятся следующим образом:

$$y^{\mathrm{I}} = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ и т. д.},$$

$$y^{\mathrm{II}} = y + \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ и т. д.},$$

$$y^{\mathrm{III}} = y + \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ и т. д.},$$

$$y^{\mathrm{IV}} = y + \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ и т. д.}$$

и т. д.

53. Так как, если Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$ и т. д. суть первая, вторая, третья, четвёртая и т. д. разности, то

$$\Delta y = y^{\mathrm{I}} - y,$$
$$\Delta^2 y = y^{\mathrm{II}} - 2y^{\mathrm{I}} + y,$$
$$\Delta^3 y = y^{\mathrm{III}} - 3y^{\mathrm{II}} + 3y^{\mathrm{I}} - y,$$
$$\Delta^4 y = y^{\mathrm{IV}} - 4y^{\mathrm{III}} + 6y^{\mathrm{II}} - 4y^{\mathrm{I}} + y$$

и т. д.,

и эти разности выразятся через дифференциалы следующим образом:

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 d^2 y}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \text{и т. д.},$$

$$\Delta^2 y = \frac{(2^2 - 2 \cdot 1)\,\omega^2 d^2 y}{2dx^2} + \frac{(2^3 - 2 \cdot 1)\,\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{(2^4 - 2 \cdot 1)\,\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \text{и т. д.},$$

$$\Delta^3 y = \frac{(3^3 - 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 1)\,\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{(3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 1)\,\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \text{и т. д.},$$

$$\Delta^4 y = \frac{(4^4 - 4 \cdot 3^4 + 6 \cdot 2^4 - 4 \cdot 1)\,\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \frac{(4^5 - 4 \cdot 3^5 + 6 \cdot 2^5 - 4 \cdot 1)\,\omega^5 d^5 y}{120dx^5} + \text{и т. д.}$$

и т. д.

54. Само собой ясно, насколько полезны эти выражения разностей в учении о рядах и прогрессиях; в дальнейшем это будет подробно изложено. В этой же главе мы остановимся на тех применениях, которые непосредственно обогащают наши познания о рядах. Хотя обычно принимают, что индексы членов какого-нибудь ряда составляют арифметическую прогрессию, разность которой есть единица, однако для того, чтобы обеспечить возможность более широкого использования и более лёгкого применения метода, мы положим, что разность равна ω. Таким образом, если общий член, т. е. тот, который соответствует индексу x, будет y, то последующим членам будут отвечать индексы $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$ и т. д. Итак, если этим индексам соответствуют нижеследующие члены ряда

$$\begin{array}{llllll} x, & x+\omega, & x+2\omega, & x+3\omega, & x+4\omega & \text{и т. д.}, \\ y, & P, & Q, & R, & S & \text{и т. д.}, \end{array}$$

то эти члены выразятся через y и через его дифференциалы следующим образом:

$$P = y + \frac{\omega\, dy}{dx} + \frac{\omega^2\, d^2 y}{2dx^2} + \frac{\omega^3\, d^3 y}{6dx^3} + \frac{\omega^4\, d^4 y}{24dx^4} + \text{и т. д.},$$

$$Q = y + \frac{2\omega\, dy}{dx} + \frac{4\omega^2\, d^2 y}{2dx^2} + \frac{8\omega^3\, d^3 y}{6dx^3} + \frac{16\omega^4\, d^4 y}{24dx^4} + \text{и т. д.},$$

$$R = y + \frac{3\omega\, dy}{dx} + \frac{9\omega^2\, d^2 y}{2dx^2} + \frac{27\omega^3\, d^3 y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4\, d^4 y}{24dx^4} + \text{и т. д.},$$

$$S = y + \frac{4\omega\, dy}{dx} + \frac{16\omega^2\, d^2 y}{2dx^2} + \frac{64\omega^3\, d^3 y}{6dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \text{и т. д.},$$

$$T = y + \frac{5\omega\, dy}{dx} + \frac{25\omega^2\, d^2 y}{2dx^2} + \frac{125\omega^3\, d^3 y}{6dx^3} + \frac{625\omega^4\, d^4 y}{24dx^4} + \text{и т. д.}$$

55. Если эти выражения вычитать друг из друга, то в разности количество y больше не войдёт, и мы будем иметь:

$$P-y=\frac{\omega\, dy}{dx}+\frac{\omega^2\, d^2y}{2dx^2}+\frac{\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{\omega^4\, d^4y}{24\, dx^4}+\text{и т. д.},$$
$$Q-P=\frac{\omega\, dy}{dx}+\frac{3\omega^2\, d^2y}{2dx^2}+\frac{7\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{15\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.},$$
$$R-Q=\frac{\omega\, dy}{dx}+\frac{5\omega^2\, d^2y}{2dx^2}+\frac{19\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{65\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.},$$
$$S-R=\frac{\omega\, dy}{dx}+\frac{7\omega^2\, d^2y}{2dx^2}+\frac{37\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{175\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.},$$
$$T-S=\frac{\omega\, dy}{dx}+\frac{9\omega^2\, d^2y}{2dx^2}+\frac{61\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{369\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.}$$

Если эти выражения снова вычитать друг из друга, то взаимно уничтожатся также первые дифференциалы, и мы будем иметь:

$$Q-2P+y=\frac{2\omega^2\, d^2y}{2dx^2}+\frac{6\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{14\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.},$$
$$R-2Q+P=\frac{2\omega^2\, d^2y}{2dx^2}+\frac{12\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{50\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.},$$
$$S-2R+Q=\frac{2\omega^2 d^2y}{2dx^2}+\frac{18\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{110\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.},$$
$$T-2S+R=\frac{2\omega^2\, d^2y}{2dx^2}+\frac{24\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{194\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.}$$

Если же эти выражения вычитать друг из друга, то из выкладки устранятся также вторые дифференциалы:

$$R-3Q+3P-y=\frac{6\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{36\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.},$$
$$S-3R+3Q-P=\frac{6\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{60\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.},$$
$$T-3S+3R-Q=\frac{6\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{84\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.}$$

Продолжая вычитание дальше, получим:

$$S-4R+6Q-4P+y=\frac{24\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.},$$
$$T-4S+6R-4Q+P=\frac{24\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.}$$
$$T-5S+10R-10Q+5P-y=\frac{120\omega^5\, d^5y}{120dx^5}+\text{и т. д.}$$

56. Если y будет целой рациональной функцией количества x, то её высшие дифференциалы в конце концов исчезнут, и мы, поступая по этому способу, в конце концов придём к исчезающим выражениям. Так как эти выражения суть разности количества y, то мы должны внимательно присмотреться к их виду и к их коэффициентам:

$$y=y,$$
$$\Delta y=\frac{\omega\, dy}{dx}+\frac{\omega^2\, d^2y}{2dx^2}+\frac{\omega^3\, d^3y}{6dx^3}+\frac{\omega^4\, d^4y}{24dx^4}+\frac{\omega^5\, d^5y}{120\, dx^5}+\text{и т. д.},$$
$$\Delta^2 y=\frac{\omega^2\, d^2y}{dx^2}+\frac{3\omega^3\, d^3y}{3dx^3}+\frac{7\omega^4\, d^4y}{3\cdot 4dx^4}+\frac{15\omega^5\, d^5y}{3\cdot 4\cdot 5\cdot dx^5}+\frac{31\omega^6\, d^6y}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6dx^6}+\text{и т. д.},$$
$$\Delta^3 y=\frac{\omega^3\, d^3y}{dx^3}+\frac{6\omega^4\, d^4y}{4dx^4}+\frac{25\omega^5\, d^5y}{4\cdot 5dx^5}+\frac{90\omega^6\, d^6y}{4\cdot 5\cdot 6dx^6}+\frac{301\omega^7\, d^7y}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7dx^7}+\text{и т. д.},$$

$$\Delta^4 y = \frac{\omega^4 d^4y}{dx^4} + \frac{10\omega^5 d^5y}{5dx^5} + \frac{65\omega^6 d^6y}{5\cdot 6dx^6} + \frac{350\omega^7 d^7y}{5\cdot 6\cdot 7dx^7} + \frac{1701\omega^8 d^8y}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8dx^8} + \text{и т. д.},$$

$$\Delta^5 y = \frac{\omega^5 d^5y}{dx^5} + \frac{15\omega^6 d^6y}{6dx^6} + \frac{140\omega^7 d^7y}{6\cdot 7dx^7} + \frac{1050\omega^8 d^8y}{6\cdot 7\cdot 8dx^8} + \frac{6951\omega^9 d^9y}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9dx^9} + \text{и т. д.},$$

$$\Delta^6 y = \frac{\omega^6 d^6y}{dx^6} + \frac{21\omega^7 d^7y}{7dx^7} + \frac{266\omega^8 d^8y}{7\cdot 8dx^8} + \frac{2646\omega^9 d^9y}{7\cdot 8\cdot 9dx^9} + \frac{22\,827\omega^{10} d^{10}y}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10dx^{10}} + \text{и т. д.}$$

Каким образом в этих рядах следуют друг за другом знаменатели — это ясно. Что касается числителей, то коэффициенты их образуются таким образом, что каждый коэффициент числителя есть сумма коэффициента, стоящего выше и предшествующего коэффициента, помноженного на показатель разности. Так, например, в ряде, выражающем разность $\Delta^6 y$, $2646 = 1050 + 6\cdot 266$.

57. Рассмотрим ещё тот же ряд, продолженный и в обратную сторону; он будет содержать члены, отвечающие индексам

$$x-\omega,\quad x-2\omega,\quad x-3\omega \quad \text{и т. д.}$$

$$x-4\omega,\ x-3\omega,\ x-2\omega,\ x-\omega,\ x,\ x+\omega,\ x+2\omega,\ x+3\omega,\ x+4\omega \quad \text{и т. д.},$$
$$s,\ r,\ q,\ p,\ y,\ P,\ Q,\ R,\ S \quad \text{и т. д.}$$

Так как

$$p = y - \frac{\omega\, dy}{dx} + \frac{\omega^2 d^2y}{2dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{и т. д.},$$

$$q = y - \frac{2\omega\, dy}{dx} + \frac{4\omega^2 d^2y}{2dx^2} - \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{и т. д.},$$

$$z = y - \frac{3\omega\, dy}{dx} + \frac{9\omega^2 d^2y}{2dx^2} - \frac{27\omega^2 d^3y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{и т. д.},$$

$$s = y - \frac{4\omega\, dy}{dx} + \frac{16\omega^2 d^2y}{2dx^2} - \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{и т. д.},$$

то если вычесть эти значения из вышеприведённых значений P, Q, R, S и т. д. будем иметь:

$$\frac{P-p}{2} = \frac{\omega\, dy}{dx} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{и т. д.},$$

$$\frac{Q-q}{2} = \frac{2\omega\, dy}{dx} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{32\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{и т. д.},$$

$$\frac{R-r}{2} = \frac{3\omega\, dy}{dx} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{243\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{и т. д.},$$

$$\frac{S-s}{2} = \frac{4\omega\, dy}{dx} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{1024\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{и т. д.}$$

Если же эти члены сложить с вышеприведёнными, то так как здесь отсутствуют дифференциалы чётных порядков, из выкладки устранятся нечётные дифференциалы. Действительно, мы будем иметь:

$$\frac{P+p}{2} = y + \frac{\omega^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \text{и т. д.},$$

$$\frac{Q+q}{2} = y + \frac{4\omega^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{64\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \text{и т. д.},$$

$$\frac{R+r}{2} = y + \frac{9\omega^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{729\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \text{и т. д.},$$

$$\frac{S+s}{2} = y + \frac{16\omega^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{4096\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \text{и т. д.}$$

58. Так как все вышеприведённые члены ряда могут быть выражены, то мы можем, сложив их, найти суммационный член предложен-

ого ряда. А именно, пусть первый член соответствует индексу $x-n\omega$; огда сам первый член будет

$$y-\frac{n\omega\,dy}{dx}+\frac{n^2\omega^2\,d^2y}{2dx^2}-\frac{n^3\omega^3\,d^3y}{6dx^3}+\frac{n^4\omega^4\,d^4y}{24dx^4}+\text{и т. д.}$$

'ак как член, соответствующий индексу x, есть y, а число всех чле-:ов равно $n+1$, то сумма всех членов, взятых от первого до послед-его y включительно, т. е. суммационный член, будет равна

$$\begin{aligned}(n+1)\,y-&\frac{\omega\,dy}{dx}(1+2+3+\ldots+n)+\\ +&\frac{\omega^2\,d^2y}{2dx^2}(1+2^2+3^2+\ldots+n^2)-\\ -&\frac{\omega^3\,d^3y}{6dx^3}(1+2^3+3^3+\ldots+n^3)+\\ +&\frac{\omega^4\,d^4y}{24dx^4}(1+2^4+3^4+\ldots+n^4)-\\ -&\frac{\omega^5\,d^5y}{120dx^5}(1+2^5+3^5+\ldots+n^5)+\text{ и т. д.}\end{aligned}$$

59. Но выше (§ 62 первой части) мы выразили суммы содержащихся здесь рядов. Если эти выражения мы подставим сюда, то сумма нашего предложенного ряда будет равна

$$\begin{aligned}(n+1)\,y-&\frac{\omega\,dy}{dx}\left(\frac{1}{2}\,n^2+\frac{1}{2}\,n\right)+\\ +&\frac{\omega^2\,d^2y}{2dx^2}\left(\frac{1}{3}\,n^3+\frac{1}{2}\,n^2+\frac{1}{6}\,n\right)-\\ -&\frac{\omega^3\,d^3y}{6dx^3}\left(\frac{1}{4}\,n^4+\frac{1}{2}\,n^3+\frac{1}{4}\,n^2\right)+\\ +&\frac{\omega^4\,d^4y}{24dx^4}\left(\frac{1}{5}\,n^5+\frac{1}{2}\,n^4+\frac{1}{3}\,n^3-\frac{1}{30}\,n\right)-\\ -&\frac{\omega^5\,d^5y}{120dx^5}\left(\frac{1}{6}\,n^6+\frac{1}{2}\,n^5+\frac{5}{12}\,n^4-\frac{1}{12}\,n^2\right)+\text{ и т. д.,}\end{aligned}$$

где n определится из индекса первого члена, начиная с которого подсчитывается сумма. Так, если положить $\omega=1$ и если индекс первого члена равен 1, второго равен 2, а последнего — x, так что предложенным является ряд

$$\begin{gathered}1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ x,\\ a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,\ y,\end{gathered}$$

то, поскольку $x-n=1$ и $n=x-1$, сумма этого ряда будет равна

$$\begin{aligned}xy-&\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{2}\,x^2-\frac{1}{2}\,x\right)+\\ +&\frac{d^2y}{2dx^2}\left(\frac{1}{3}\,x^3-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{6}\,x\right)-\\ -&\frac{d^3y}{6dx^3}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}\,x^3+\frac{1}{4}\,x^2\right)+\\ +&\frac{d^4y}{24dx^4}\left(\frac{1}{5}\,x^5-\frac{1}{2}\,x^4+\frac{1}{3}\,x^3-\frac{1}{30}\,x\right)-\\ -&\frac{d^5y}{120dx^5}\left(\frac{1}{6}\,x^6-\frac{1}{2}\,x^5+\frac{5}{12}\,x^4-\frac{1}{12}\,x^2\right)+\\ +&\frac{d^6y}{720dx^6}\left(\frac{1}{7}\,x^7-\frac{1}{2}\,x^6+\frac{1}{2}\,x^5-\frac{1}{6}\,x^3+\frac{1}{42}\,x\right)-\text{и т. д.}\end{aligned}$$

60. Так как коэффициенты в этой сумме, если x будет большим числом, будут быстро увеличиваться, то такое её выражение большой пользы учению о рядах не приносит. Однако будет всё же полезно отметить некоторые свойства, вытекающие отсюда. Пусть общий член есть $y = x^n$, и обозначим суммационный член через $S \cdot y$ или $S \cdot x^n$. Применяя повсюду это обозначение, будем иметь

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = S \cdot x - x,$$
$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = S \cdot x^2 - x^2,$$
$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = S \cdot x^3 - x^3 \text{ и т. д.}$$

Поэтому из вышеприведённого выражения мы получим

$$Sx^n = x^{n+1} - nx^{n-1}S \cdot x + nx^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}S \cdot x^2 -$$
$$- \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^n - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}S \cdot x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^n + \text{ и т. д.}$$

Но так как

$$(1-1)^n = 0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{и т. д.},$$

то будем иметь

$$n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \text{и т. д.} = 1;$$

поэтому, за исключением случая $n = 0$, когда это выражение равно нулю,

$$S \cdot x^n = x^{n+1} + x^n - nx^{n-1}S \cdot x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}S \cdot x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}S \cdot x^3 +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^{n-4}S \cdot x^4 - \text{и т. д.}$$

61. Чтобы лучше усмотреть как справедливость, так и силу этой формулы, рассмотрим частные случаи. Пусть сначала $n = 1$; тогда $S \cdot x = x^2 + x - S \cdot x$, и поэтому $S \cdot x = \frac{x^2 + x}{2}$, а это хорошо известно. Положим теперь $n = 2$; тогда будем иметь

$$S \cdot x^2 = x^3 + x^2 - 2xS \cdot x + S \cdot x^2.$$

Так как в этом равенстве члены $S \cdot x^2$, входящие в обе его части, взаимно уничтожаются, то оно даёт то же самое, что предшествующее, а именно, $S \cdot x = \frac{x^2 + x}{2}$. Если $n = 3$, то будем иметь

$$S \cdot x^3 = x^4 + x^3 - 3x^2S \cdot x + 3xS \cdot x^2 - S \cdot x^3$$

и потому

$$S \cdot x^3 = \frac{3}{2}xS \cdot x^2 - \frac{3}{2}x^2S \cdot x + \frac{1}{2}x^3(x+1).$$

Если положим $n = 4$, получим

$$S \cdot x^4 = x^5 + x^4 - 4x^3S \cdot x + 6x^2S \cdot x^2 - 4xS \cdot x^3 + S \cdot x^4,$$

откуда, так как $S \cdot x^4$ уничтожится, будем иметь

$$S \cdot x^3 = \frac{3}{2}xS \cdot x^2 - x^2S \cdot x + \frac{1}{4}x^3(x+1).$$

Утроив это равенство и вычтя удвоенное предыдущее, будем иметь в остатке

$$S \cdot x^3 = \frac{3}{2}xS \cdot x^2 - \frac{1}{4}x^3(x+1).$$

и положить $n=5$, то получится

$$S\cdot x^5 = x^6 + x^5 - 5x^4S\cdot x + 10x^3S\cdot x^2 - 10x^2S\cdot x^3 + 5xS\cdot x^4 - S\cdot x^5$$

$$S\cdot x^5 = \frac{5}{2}xS\cdot x^4 - 5x^2S\cdot x^3 + 5x^3S\cdot x^2 - \frac{5}{2}x^4S\cdot x + \frac{1}{2}x^5(x+1).$$

и $n=6$ получится

$$S\cdot x^6 = x^7 + x^6 - 6x^5S\cdot x + 15x^4S\cdot x^2 - 20x^3S\cdot x^3 + 15x^2S\cdot x^4 - \\ - 6xS\cdot x^5 + S\cdot x^6$$

$$S\cdot x^5 = \frac{5}{2}xS\cdot x^4 - \frac{10}{3}x^2S\cdot x^3 + \frac{5}{2}x^3S\cdot x^2 - x^4S\cdot x + \frac{1}{6}x^5(x+1).$$

62. Отсюда мы заключаем, что вообще, если $n=2m+1$, то

$$x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2}xS\cdot x^{2m} - \frac{(2m+1)\,2m}{2\cdot 1\cdot 2}x^2S\cdot x^{2m-1} + \\ + \frac{(2m+1)\,2m\,(2m-1)}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}x^3S\cdot x^{2m-2} - \ldots - \frac{2m+1}{2}x^{2m}S\cdot x + \frac{1}{2}x^{2m+1}(x+1).$$

и же $n=2m+2$, то, так как члены $S\cdot x^{2m+2}$ взаимно уничтожаются, цём

$$x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2}xS\cdot x^{2m} - \frac{(2m+1)\,2m}{2\cdot 3}x^2S\cdot x^{2m-1} + \\ + \frac{(2m+1)\,2m\,(2m-1)}{2\cdot 3\cdot 4}x^3S\cdot x^{2m-2} - \ldots - x^{2m}S\cdot x + \frac{1}{2m+2}x^{2m+1}(x+1).$$

Следовательно, суммы нечётных степеней можно двояким образом эделить из сумм низших степеней и из различных комбинаций этих к формул можно образовывать бесчисленные другие.

63. Но гораздо легче находить суммы нечётных степеней из предтвующих сумм; для этого даже достаточно знать только одну предтвующую сумму чётных степеней. Действительно, из найденных іе (§ 62, ч. 1) выражений сумм известно, что число членов, авляющих сумму, возрастает только у чётных степеней, так что ма нечётных степеней состоит из стольких же членов, сколько их эт предшествующая сумма чётных степеней. Так, если сумма чётстепени x^{2n} есть

$$S\cdot x^{2n} = \alpha x^{2n+1} + \beta x^{2n} + \gamma x^{2n-1} - \delta x^{2n-3} + \varepsilon x^{2n-5} - \text{и т. д.}$$

видели ведь, что члены, следующие за третьим, через один отсутют, а также что знаки чередуются), то из неё можно найти сумму (ующей степени x^{2n+1}, если отдельные члены первой суммы помноь соответственно на числа

$$\frac{2n+1}{2n+2}x,\quad \frac{2n+1}{2n+1}x,\quad \frac{2n+1}{2n}x,\quad \frac{2n+1}{2n-1}x,\quad \frac{2n+1}{2n-2}x \ \text{и т. д.};$$

ь не оставлены без внимания и отсутствующие члены. Таким зом, мы будем иметь

$$S\cdot x^{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\alpha x^{2n+2} + \frac{2n+1}{2n+1}\beta x^{2n+1} + \frac{2n+1}{2n}\gamma x^{2n} - \frac{2n+1}{2n-2}\delta x^{2n-2} + \\ + \frac{2n+1}{2n-4}\varepsilon x^{2n-4} - \frac{2n+1}{2n-6}\zeta x^{2n-6} + \text{и т. д.}$$

ім образом, если известна сумма степени x^{2n}, то из неё тотчас же но образовать сумму степени x^{2n+1}.

64. Этот способ разыскания последующих сумм можно распространить и на чётные степени. Но так как в их суммы входит новый член, то последний с помощью этого метода не определяется. Однако его всегда можно найти, основываясь на том известном свойстве самого ряда, что если положить $x=1$, то и сумма должна стать равной 1. Обратно, если известна сумма какой-либо степени, всегда можно найти суммы предшествующих степеней. Действительно, если

$$S\cdot x^n=\alpha x^{n+1}+\beta x^n+\gamma x^{n-1}-\delta x^{n-3}+\varepsilon^{n-5}-\zeta x^{n-7}+ \text{ и т. д.},$$

то для предшествующей степени будем иметь

$$S\cdot x^{n-1}=\frac{n+1}{n}\alpha x^n+\frac{n}{n}\beta x^{n-1}+\frac{n-1}{n}\gamma x^{n-2}-\frac{n-3}{n}\delta x^{n-4}+\text{и т. д.},$$

и таким же образом можно итти назад дальше, сколько будет угодно. Следует при этом отметить, что всегда будем иметь $\alpha=\frac{1}{n+1}$ и $\beta=\frac{1}{2}$, что ясно из данных выше формул.

65. При некотором внимании станет тотчас же ясным, что сумма степеней x^{n-1} получается, если дифференцировать сумму степеней x^n и дифференциал её разделить на $n\,dx$ [1]). Таким образом, $d\cdot S\cdot x^n=$ $=n\,dx\cdot S\cdot x^{n-1}$, а так как $d\cdot x^n=nx^{n-1}dx$, то будем иметь

$$d\cdot S\cdot x^n=S\cdot nx^{n-1}dx=S\cdot d\cdot x^n,$$

из чего ясно, что дифференциал суммы равен сумме дифференциала. И вообще, если общий член какого-либо ряда равен y и $S\cdot y$ есть его суммационный член, то будем также иметь $S\cdot dy=d\cdot S\cdot y$, т. е. сумма дифференциалов всех членов равняется дифференциалу суммы самих членов. Причину этого равенства легко усмотреть из того, что было сказано выше о дифференцировании рядов. Действительно, так как

$$S\cdot x^n=x^n+(x-1)^n+(x-2)^n+(x-3)^n+(x-4)^n+\text{ и т. д.},$$

то будем иметь

$$\frac{d\cdot S\cdot x^n}{n dx}=x^{n-1}+(x-1)^{n-1}+(x-2)^{n-1}+(x-3)^{n-1}+\text{ и т. д.}=S\cdot x^{n-1}.$$

Это доказательство применимо и ко всем другим рядам.

66. Вернёмся, однако, к тому, от чего мы сделали отступление, т. е. к разностям функций. О них мы должны сделать ещё несколько замечаний. Мы видели, что если y есть какая-либо функция от x и если вместо x всюду положить $x\pm\omega$, то функция y примет следующее значение:

$$y\pm\frac{\omega\,dy}{1\,dx}+\frac{\omega^2d^2y}{1\cdot 2dx^2}\pm\frac{\omega^3d^3y}{1\cdot2\cdot3\,dx^3}+\frac{\omega^4d^4y}{1\cdot2\cdot3\cdot4dx^4}\pm\frac{\omega^5d^5y}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5dx^5}+\text{ и т. д.}$$

Это выражение будет иметь место независимо от того, будет ли за ω принято какое-либо постоянное количество или количество, зависящее от x. Действительно, после того как с помощью дифференцирования найдены значения дробей $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д., переменность множителей ω, ω^2, ω^3 и т. д. уже не имеет значения, и потому безразлично, обозначает ли ω постоянное или переменное количество, зависящее от x.

67. Итак, положим, что $\omega=x$, так что в функции y вместо x пишется $x-x$. Тогда мы получаем, что если в какой-либо функции y

[1]) Если n есть чётное число, то нужно опустить последний член. (*Г. К.*)

· x повсюду написать 0 вместо x, то функция получит значение

$$y-\frac{x\,dy}{1\,dx}+\frac{x^2d^2y}{1\cdot 2\,dx^2}-\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3}+\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}-\text{ и т. д.}$$

ледовательно, это выражение всегда представляет то значение, кото-)е получает какая-либо функция y, если в ней положить $x=0$. праведливость этого покажут следующие примеры:

Пример 1

Пусть $y=x^2+ax+ab$; *найдём значение* y *при* $x=0$ *при этом 'ранее известно, что оно равно* ab.

Так как $y=x^2+ax+ab$, то

$$\frac{dy}{1\,dx}=2x+a,\quad \frac{d^2y}{1\cdot 2dx^2}=1,$$

)этому искомое значение окажется равным

$$x^2+ax+ab-x\,(2x+a)+xx\cdot 1=ab.$$

Пример 2

Пусть $y=x^3-2x+3$; *требуется найти значение* y *при* $x=0$; *ıвестно, что оно равно* 3.

Так как $y=x^2-2x+3$, то

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-2,\quad \frac{d^2y}{1\cdot 2\,dx^2}=3x,\quad \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3}=1.$$

скомое значение окажется равным

$$x^3-2x+3-x\,(3x^2-2)+x^2\cdot 3x-x^3=3.$$

Пример 3

Пусть $y=\frac{x}{1-x}$; *требуется найти значение* y *при* $x=0$; *известно, по оно равно нулю.*

Так как $y=\frac{x}{1-x}$, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1-x)^2},\quad \frac{d^2y}{1\cdot 2\,dx^2}=\frac{1}{(1-x)^3},\quad \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}=\frac{1}{(1-x)^4}\text{ и т. д.}$$

ледовательно, искомое значение равно

$$\frac{x}{1-x}-\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x)^3}-\frac{x^3}{(1-x)^4}+\frac{x^4}{(1-x)^5}-\text{ и т. д.}$$

, следовательно, значение этого ряда равно нулю. Это ясно также з того, что этот ряд, если отбросить его первый член, примет вид $\frac{x}{1-x)^2}-\frac{x^2}{(1-x)^3}+\frac{x^3}{(1-x)^4}-$ и т. д., а это — геометрический ряд и его умма равна $\frac{x}{(1-x)^2+x\,(1-x)}=\frac{x}{1-x}$, так что найденное значение будет авно

$$\frac{x}{1-x}-\frac{x}{1-x}=0.$$

Пример 4

Пусть $y=e^x$, где e есть число, гиперболический логарифм которого равен единице, и пусть требуется найти значение y при $x=0$; известно, что оно равно 1.

Так как $y=e^x$, то

$$\frac{dy}{dx}=e^x,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^x \text{ и т. д.};$$

поэтому искомое значение будет равно

$$e^x-\frac{e^x\cdot x}{1}+\frac{e^x\cdot x^2}{1\cdot 2}-\frac{e^x\cdot x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{e^x\cdot x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\text{ т. д.}=$$
$$=e^x\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\text{ и т. д.}\right).$$

Но выше [1]) мы видели, что ряд

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\text{ и т. д.}$$

выражает значение e^{-x}; следовательно, искомое значение будет равно $e^x\cdot e^{-x}=\frac{e^x}{e^x}=1$.

Пример 5

Пусть $y=\sin x$. Ясно, что при $x=0$ будет $y=0$; это покажет и общая формула.

Действительно, так как $y=\sin x$, то

$$\frac{dy}{dx}=\cos x,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x,\quad \frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x,\quad \frac{d^4y}{dx^4}=\sin x \text{ и т. д.}$$

При $x=0$ значение y будет таково:

$$\sin x-\frac{x}{1}\cos x-\frac{x^2}{1\cdot 2}\sin x+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cos x+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin x-\text{ и т. д.},$$

а это равно

$$\sin x\left(1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\text{ и т. д.}\right)-$$
$$-\cos x\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^7}{1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\text{ и т. д.}\right).$$

Но из этих рядов первый выражает $\cos x$, второй $\sin x$; поэтому искомое значение будет равно $\sin x\cos x-\cos x\sin x=0$.

68. Отсюда [1]) мы видим, что и обратно, если y есть такая функция от x, что она исчезает при $x=0$, то

$$y-\frac{x\,dy}{1dx}+\frac{x^2d^2y}{1\cdot 2dx^2}-\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}-\text{ и т. д.}=0.$$

Следовательно, это есть общее уравнение всех функций от x, которые, когда x становится равным нулю, в то же время сами исчезают. Поэтому это уравнение обладает тем свойством, что какую бы функцию от x, лишь бы она исчезала при исчезающем x, ни подставить вместо y, она всегда будет этому уравнению удовлетворять. Если же y будет такая функция от x, которая при $x=0$ получает данное значе-

[1]) «Введение», т. I, гл. VII.

равное A, тогда будем иметь уравнение

$$y-\frac{x\,dy}{1dx}+\frac{x^2d^2y}{1\cdot 2dx^2}-\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}-\text{ и т. д. }=A,$$

юе охватывает все функции от x, получающие при $x=0$ значе-
4.

;9. Если вместо x написать $2x$, т. е. $x+x$, то какая-либо функция
которую мы обозначим через y, получит значение

$$y+\frac{x\,dy}{1\,dx}+\frac{x^2d^2y}{1\cdot 2dx^2}+\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}+\text{ и т. д.}$$

же вместо x написать nx, т. е. $x+(n-1)x$, то функция y получит
ние

$$y+\frac{(n-1)\,x\,dy}{1dx}+\frac{(n-1)^2x^2d^2y}{1\cdot 2dx^2}+\frac{(n-1)^3\,x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\text{ и т. д.}$$

це же, если вместо x написать t, то в силу $t=x+t-x$ какая
ю функция y преобразуется к виду

$$y+\frac{(t-x)\,dy}{1dx}+\frac{(t-x)^2\,d^2y}{1\cdot 2dx^2}+\frac{(t-x)^3\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\text{ и т. д.}$$

м образом, если v есть такая же функция от t, какой является y
то, так как v получается из y, если положить t вместо x, будем
,

$$v=y+\frac{(t-x)\,dy}{1dx}+\frac{(t-x)^2\,d^2y}{1\cdot 2dx^2}+\frac{(t-x)^3\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\text{ и т. д.}$$

)аведливости этого можно убедиться на каком угодно примере.

Пример

Iусть $y=x^2-x$; очевидно, что если вместо x положить t, то
: иметь $v=t^2-t$; то же самое даст и найденное выражение.

[бо вследствие $y=x^2-x$ мы будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=2x-1 \quad\text{и}\quad \frac{d^2y}{2dx^2}=1,$$

а

$$v=x^2-x+(t-x)(2x-1)+(t-x)^2=$$
$$=x^2-x+2tx-2x^2-t+x+t^2-2tx+x^2=t^2-t.$$

если y будет такой функцией от x, которая при $x=a$ пере-
в A, то вследствие $t=a$ и $v=A$ будем иметь

$$A=y+\frac{(a-x)\,dy}{1dx}+\frac{(a-x)^2\,d^2y}{1\cdot 2dx^2}+\frac{(a-x)^3\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\text{ и т. д.}$$

;довательно, этому уравнению удовлетворяют все те функции от x,
ые при $x=a$ переходят в A.

То-есть из формулы, данной в начале настоящего параграфа.

ГЛАВА IV
О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ

70. В предыдущей главе мы отчасти уже показали, как применяются найденные там общие выражения конечных разностей для разыскания рядов, которые выражали бы значение какой-либо функции количества x. В самом деле, если y есть данная функция от x, то значение, которое она принимает при $x=0$, будет известно; если положить его равным A, то, как мы нашли,

$$y-\frac{x\,dy}{dx}+\frac{x^2d^2y}{1\cdot 2dx^2}-\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}- \text{ и т. д.} = A.$$

Здесь мы не только имеем ряд, продолжающийся по большей части до бесконечности, сумма которого равняется постоянному количеству A, хотя в отдельные члены его входит переменное количество x, но также и самую функцию y мы можем выразить с помощью ряда. Действительно, мы будем иметь

$$y=A+\frac{x\,dy}{dx}-\frac{x^2d^2y}{1\cdot 2dx^2}+\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}-\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}+ \text{ и т. д.}$$

Несколько примеров на это уже было приведено.

71. Чтобы для разыскания этих рядов открывался бóльший простор, положим, что функция y переходит в z, когда вместо y всюду пишется $y+\omega$, так что x есть такая же функция от $x+\omega$, какой y является от x. Мы показали (§ 48), что

$$z=y+\frac{\omega\,dy}{dx}+\frac{\omega^2d^2y}{1\cdot 2dx^2}+\frac{\omega^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{\omega^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}+ \text{ и т. д.}$$

Так как отдельные члены этого ряда можно найти с помошью последовательного дифференцирования количества y, полагая $dx=\text{const.}$, и так как вместе с тем значение количества z можно фактически выразить подстановкой $x+\omega$ вместо z, то этим способом мы всегда получим ряд, равный значению количества z, который, если ω будет очень малым количеством, сходится очень быстро и приближённо представит значение z, если взять даже не очень большое число членов. Поэтому эта формула имеет очень широкое применение в приближённых вычислениях.

72. Чтобы при ознакомлении с замечательными применениями этой формулы соблюсти порядок, будем сначала подставлять вместо y алгебраические функции от x. Пусть сперва $y=x^n$; тогда, если вместо x

і положим $x+\omega$, будем иметь $z=(x+\omega)^n$. А так как

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2}, \frac{d^3y}{dx^3}=n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \text{ и т. д.},$$

по подстановке этих значений получится

$$(x+\omega)^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\omega+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\omega^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\omega^3+\text{ и т. д.}$$

о — хорошо известное ньютоново выражение, с помощью которого эпень бинома $(x+\omega)^n$ обращается в ряд. Число членов этого ряда эгда конечно, если n есть целое положительное число.

73. Отсюда мы можем также найти такой ряд, который выразил значение степени бинома так, чтобы этот ряд обрывался всякий з, как показатель степени будет отрицательным числом [1]). Для этого ложим

$$\omega=\frac{-ux}{x+u};$$

гда

$$z=(x+\omega)^n=\left(\frac{x^2}{x+u}\right)^n;$$

значит, мы будем иметь

$$\frac{x^{2n}}{(x+u)^n}=x^n-\frac{nx^nu}{1(x+u)}+\frac{n(n-1)x^nu^2}{1\cdot 2(x+u)^2}-\frac{n(n-1)(n-2)x^nu^3}{1\cdot 2\cdot 3(x+u)^3}+\text{ и т. д.}$$

зделим всюду на x^{2n}; будем иметь

$$(x+u)^n=x^{-n}-\frac{nx^nu}{1(x+u)}+\frac{n(n-1)x^{-n}u^2}{1\cdot 2(x+u)^2}-\frac{n(n-1)(n-2)x^{-n}u^3}{1\cdot 2\cdot 3(x+u)^3}+\text{ и т. д.}$$

ложим теперь $-n=m$; получим

$$(x+u)^m=x^m+\frac{mx^mu}{1(x+u)}+\frac{m(m+1)x^mu^2}{1\cdot 2(x+u)^2}+\frac{m(m+1)(m+2)x^mu^3}{1\cdot 2\cdot 3(x+u)^3}+\text{ и т. д.}$$

от ряд, если m есть целое отрицательное число, будет состоять из нечного числа членов. Этот ряд, следовательно, будет равняться рвому найденному, если в нём вместо ω и n написать u и m, после го он будет иметь вид

$$(x+u)^m=x^m+\frac{mx^{m-1}u}{1}+\frac{m(m-1)x^{m-2}u^2}{1\cdot 2}+\frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}u^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{ и т. д.}$$

74. Тот же ряд можно получить из выражения, данного в начале 70. Действительно, если y переходит в A при $x=0$, но мы имеем

$$y-\frac{xdy}{dx}+\frac{x^2d^2y}{1\cdot 2dx^2}-\frac{x^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\frac{x^4d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4}-\text{ и т. д.}=A;$$

ложим $y=(x+a)^n$; тогда $A=a^n$ и вследствие

$$\frac{dy}{dx}=n(x+a)^{n-1},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=n(n-1)(x+a)^{n-2},$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=n(n-1)(n-2)(x+a)^{n-3} \text{ и т. д.}$$

---

[1]) Здесь, конечно, подразумевается слово «целым».

мы получим

$$(x+a)^n - \frac{n}{1}x(x+a)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2(x+a)^{n-2} - \text{ и т. д.} = a^n.$$

Разделим на $a^n(x+a)^n$; тогда получится

$$(x+a)^{-n} = a^{-n} - \frac{na^{-n}x}{1(x+a)} + \frac{n(n-1)a^{-n}x^2}{1\cdot 2(x+a)^2} - \text{ и т. д.}$$

Если положить вместо x, a и n соответственно u, x и $-m$, то получится ранее найденный ряд.

75. Если вместо m представлять дробные числа, то оба ряда станут бесконечными; однако если u по сравнению с x будет очень невелико, то ряды будут быстро сходиться к истинному значению. Итак, пусть $m = \frac{\mu}{\nu}$ и $x = a^\nu$; из первого найденного нами ряда получим

$$(a^\nu + u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1 + \frac{\mu}{\nu}\frac{u}{a^\nu} + \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu\cdot 2\nu}\frac{u^2}{a^{2\nu}} + \frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)}{\nu\cdot 2\nu\cdot 3\nu}\frac{u^3}{a^{3\nu}} + \text{ и т. д.}\right),$$

А ряд, который мы нашли позднее, даст

$$(a^\nu + u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1 + \frac{\mu u}{\nu(a^\nu+u)} + \frac{\mu(\mu+\nu)u^2}{\nu\cdot 2\nu(a^\nu+u)^2} + \frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)u^3}{\nu\cdot 2\nu\cdot 3\nu(a^\nu+u)^3} + \text{ и т. д.}\right).$$

Этот ряд сходится быстрее, чем первый, так как его члены убывают и тогда, если $u > a^\nu$, первый же ряд в этом случае расходится.

Если, например, $\mu = 1$, $\nu = 2$, то

$$\sqrt{a^2+u} = a\left(1 + \frac{1\cdot u}{2(a^2+u)} + \frac{1\cdot 3u^2}{2\cdot 4(a^2+u)^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5u^3}{2\cdot 4\cdot 6(a^2+u)^3} + \text{ и т. д.}\right).$$

Подобным образом, полагая вместо ν числа 3, 4, 5 и т. д. и сохраняя $\mu = 1$, мы будем иметь:

$$\sqrt[3]{a^3+u} = a\left(1 + \frac{1u}{3(a^3+u)} + \frac{1\cdot 4u^2}{3\cdot 6(a^3+u)^2} + \frac{1\cdot 4\cdot 7u^3}{3\cdot 6\cdot 9(a^3+u)^3} + \text{ и т. д.}\right),$$

$$\sqrt[4]{a^4+u} = a\left(1 + \frac{1u}{4(a^4+u)} + \frac{1\cdot 5u^2}{4\cdot 8(a^4+u)^2} + \frac{1\cdot 5\cdot 9u^3}{4\cdot 8\cdot 12(a^4+u)^3} + \text{ и т. д.}\right),$$

$$\sqrt[5]{a^5+u} = a\left(1 + \frac{1u}{5(a^5+u)} + \frac{1\cdot 6u^2}{5\cdot 10(a^5+u)^2} + \frac{1\cdot 6\cdot 11u^3}{5\cdot 10\cdot 15(a^5+u)^3} + \text{ и т. д.}\right).$$

и т. д.

76. Из этих формул можно будет легко найти корень какой-либо степени из какого угодно предложенного числа. Действительно, пусть предложено какое-нибудь число c. Найдём близкую к этому числу степень, которая может быть либо больше его, либо меньше. В первом случае u будет отрицательным числом, во втором случае — положительным. Если окажется, что полученный ряд недостаточно быстро сходится, то мы помножим число c на какую-нибудь степень, скажем на f^ν, если нужно извлечь корень степени ν, и будем искать корень из числа $f^\nu c$; разделённый на f, он даст искомый корень из числа c. Чем больше число f, тем быстрее будет сходиться ряд; особенно если некоторая степень a^ν не сильно отличается от $f^\nu c$.

Пример 1

Пусть ищется квадратный корень из числа 2.

Если без предварительной подготовки положить $a=1$ и $u=1$, то лучится

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^3}+\text{ и т. д.}$$

отя уже этот ряд достаточно быстро сходится, однако предпочтительно ежде умножить число 2 на какой-нибудь квадрат, например на 25, тобы произведение 50 было очень мало отличным от другого квадта 49. Поэтому будем искать квадратный корень из 50; разделёный на 5, он даст $\sqrt{2}$. Мы будем теперь иметь $a=7$ и $u=1$, так что

$$\sqrt{50}=5\sqrt{2}=7\left(1+\frac{1}{2\cdot 50}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 50^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 50^3}+\text{ и т. д.}\right)$$

ли

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1\cdot 3}{100\cdot 200}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{100\cdot 200\cdot 300}+\text{ и т. д.}\right).$$

то выражение очень удобно для подсчёта в десятичных дробях.

Действительно, мы будем иметь:

$$\begin{array}{rr}
\frac{7}{5}= & 1{,}400\,000\,000\,000\,0\\
\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{100}= & 140\,000\,000\,000\\
\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{3}{200}= & 2\,100\,000\,000\\
\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{3}{200}\cdot\frac{5}{300}= & 35\,000\,000
\end{array}$$

роизведение предыдущего

на $\frac{7}{400}=$ 652 100

роизведение предыдущего

на $\frac{9}{500}=$ 11 025

произведение предыдущего

на $\frac{11}{600}=$ 202

произведение предыдущего

на $\frac{13}{700}=$ 3

Следовательно, $\sqrt{2}=1{,}414\,213\,562\,373\,0$.

Пример 2

Пусть ищется кубический корень из 3.

Помножим 3 на куб 8 и будем искать кубический корень из 24; в самом деле $\sqrt[3]{24}=2\sqrt[3]{3}$. Положим $a=3$ и $u=-3$; тогда

$$\sqrt{24}=3\left(1-\frac{1\cdot 3}{3\cdot 24}+\frac{1\cdot 4\cdot 3^2}{3\cdot 6\cdot 24^2}-\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 3^3}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 24^3}+\text{ и т. д.}\right)$$

и

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 8^2} - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 8^3} + \text{и т. д.}\right)$$

или

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{24} + \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48} - \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48}\cdot\frac{7}{72} + \text{и т. д.}\right).$$

Этот ряд сходится уже очень быстро, ибо каждый его член более чем в восемь раз превосходит предшествующий. Если же 3 помножить на куб 729, то получим 2187 и $\sqrt[3]{2187} = \sqrt[3]{13^3 - 10} = 9\sqrt[3]{3}$. Так как теперь $a = 13$ и $u = -10$, то будем иметь

$$\sqrt[3]{3} = \frac{13}{9}\left(1 - \frac{1\cdot 10}{3\cdot 2187} + \frac{1\cdot 4\cdot 10^2}{3\cdot 6\cdot 2187^2} - \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10^3}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 2187^3} + \text{и т. д.}\right);$$

каждый член этого ряда более чем в двести раз превосходит предшествующий.

77. Разложение степени бинома имеет очень широкое применение; оно может охватить все алгебраические функции. Пусть, например, ищется значение функции $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$, выраженное с помощью ряда. Его можно будет получить по предыдущим формулам, рассматривая два члена вместе как один. Далее, это представление можно получить с помощью первого из приведённых нами выражений. Ибо, если положить $\sqrt{a + 2bx + cx^2} = y$, то так как при $x = 0$ будет $y = \sqrt{a}$, то $A = \sqrt{a}$, и так как дифференциалы функции y выражаются формулами

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + cx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ac - b^2}{(a + 2bx + cx^2)^{3/2}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3(b^2 - ac)(b + cx)}{(a + 2bx + cx^2)^{5/2}}, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{3(b^2 - ac)(ac - 5b^2 - 8bcx - 4c^2x^2)}{(a + 2bx + cx^2)^{7/2}} \text{ и т. д.},$$

то из них получим

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} - \frac{(b + cx)x}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} - \frac{(b^2 - ac)x^2}{2(a + 2bx + cx^2)^{3/2}} - \frac{(b^2 - ac)(b + cx)x^3}{2(a + 2bx + cx^2)^{5/2}} -$$
$$- \frac{(b^2 - ac)(5b^2 - ac + 8bcx + 4c^2x^2)x^4}{8(a + 2bx + cx^2)^{7/2}} - \text{ и т. д.} = \sqrt{a}.$$

Если везде помножить на $\sqrt{a + 2bx + cx^2}$, то ряд станет рациональным, и мы будем иметь:

$$\sqrt{a(a + 2bx + cx^2)} = a + 2bx + cx^2 - (b + cx)x - \frac{(b^2 - ac)x^2}{2(a + 2bx + cx^2)} -$$
$$- \frac{(b^2 - ac)(b + cx)x^3}{2(a + 2bx + cx^2)^2} - \frac{(b^2 - ac)(5b^2 - ac + 8bcx + 4c^2x^2)x^4}{8(a + 2bx + cx^2)^3} - \text{ и т. д.}$$

или

$$\sqrt{a + 2bx + cx^2} =$$
$$= \sqrt{a} + \frac{bx}{\sqrt{a}} - \frac{(b^2 - ac)x^2}{2(a + 2bx + cx^2)\sqrt{a}} - \frac{(b^2 - ac)(b + cx)x^3}{2(a + 2bx + cx^2)^2\sqrt{a}} - \text{ и т. д.}$$

78. Перейдём теперь к трансцендентным функциям и будем подставлять их вместо y. Пусть сперва $y = \mathrm{l}\,x$; положив $x + \omega$ вместо x, будем иметь $z = \mathrm{l}\,(x + \omega)$. Пусть это какие угодно логарифмы, которые меют к гиперболическим отношение, равное $n:1$. Для гиперболических логарифмов $n=1$, а для табличных $n=0{,}434\,294\,481\,903\,2$. Тогда ифференциалы функции $y=\mathrm{l}\,x$ будут

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{n}{x^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2n}{x^3}\ \text{и т. д.}$$

Із них получается

$$\mathrm{l}\,(x+\omega)=\mathrm{l}\,x+\frac{n\omega}{x}-\frac{n\omega^2}{2x^2}+\frac{n\omega^3}{3x^3}-\frac{n\omega^4}{4x^4}+\ \text{и т. д.}$$

Іодобным образом, если ω положить отрицательным, будем иметь

$$\mathrm{l}\,(x-\omega)=\mathrm{l}\,x-\frac{n\omega}{x}-\frac{n\omega^2}{2x^2}-\frac{n\omega^3}{3x^3}-\frac{n\omega^4}{4x^4}-\ \text{и т. д.}$$

Если этот ряд вычесть из предыдущего, будем иметь

$$\mathrm{l}\,\frac{x+\omega}{x-\omega}=2n\left(\frac{\omega}{x}+\frac{\omega^3}{3x^3}+\frac{\omega^5}{5x^5}+\frac{\omega^7}{7x^7}+\ \text{и т. д.}\right).$$

79. Если в первом из найденных рядов

$$\mathrm{l}\,(x+\omega)=\mathrm{l}\,x+\frac{n\omega}{x}-\frac{n\omega^2}{2x^2}+\frac{n\omega^3}{3x^3}-\frac{n\omega^4}{4x^4}+\ \text{и т. д.}$$

положить

$$\omega=\frac{x^2}{u-x},$$

то

$$x+\omega=\frac{ux}{u-x}$$

и

$$\mathrm{l}\,(x+\omega)=\mathrm{l}\,u+\mathrm{l}\,x-\mathrm{l}\,(u-x)=\mathrm{l}\,x+\frac{nx}{u-x}+\frac{nx^2}{2\,(u-x)^2}+\ \text{и т. д.}$$

и

$$\mathrm{l}\,(u-x)=\mathrm{l}\,u-\frac{nx}{u-x}-\frac{nx^2}{2\,(u-x)^2}-\frac{nx^3}{3\,(u-x)^3}-\ \text{и т. д.}$$

Взяв x отрицательным, получим

$$\mathrm{l}\,(u+x)=\mathrm{l}\,u+\frac{nx}{u+x}+\frac{nx^2}{2\,(u+x)^2}+\frac{nx^3}{3\,(u+x)^3}+\frac{nx^4}{4\,(u+x)^4}+\ \text{и т. д.}$$

С помощью этих рядов логарифмы можно находить очень быстро, если ряды хорошо сходятся. Такими будут ряды, которые легко выводятся из предшествующих, а именно

$$\mathrm{l}\,(x+1)=\mathrm{l}\,x+n\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\ \text{и т. д.}\right),$$

$$\mathrm{l}\,(x-1)=\mathrm{l}\,x-n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{4x^4}+\ \text{и т. д.}\right).$$

Так как эти ряды отличаются друг от друга только знаками, то, если ими пользоваться для вычислений, можно с их помощью, не затрачивая лишнего труда, найти логарифмы сразу двух чисел $x+1$ и $x-1$. Далее, будем иметь ещё такие ряды:

$$\mathrm{l}\,(x+1)=\mathrm{l}\,(x-1)+2n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\ \text{и т. д.}\right),$$

$$\mathrm{l}\,(x-1)=\mathrm{l}\,x-n\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2\,(x-1)^2}+\frac{1}{3\,(x-1)^3}-\frac{1}{4\,(x-1)^4}+\ \text{и т. д.}\right),$$

$$\mathrm{l}\,(x+1)=\mathrm{l}\,x+n\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\,(x+1)^2}+\frac{1}{3\,(x+1)^3}+\frac{1}{4\,(x+1)^4}+\ \text{и т. д.}\right).$$

80. Таким образом, по данному логарифму числа x можно найти без труда логарифмы соседних чисел $x+1$ и $x-1$; более того, по логарифму числа $x-1$ можно отыскать число, на два большее, и обратно. Хотя это подробно было показано во «Введении» [1]), мы всё же добавим здесь несколько примеров.

Пример 1

По данному гиперболическому логарифму числа 10, *равному* 2,302 585 092 994 0, *найти гиперболические логарифмы чисел* 11 *и* 9.

Так как здесь ищутся гиперболические логарифмы, то будем иметь $n=1$ и, следовательно, получим такие ряды:

$$l\,11 = l\,10 + \frac{1}{10} - \frac{1}{2\cdot 10^2} + \frac{1}{3\cdot 10^3} - \frac{1}{4\cdot 10^4} + \frac{1}{5\cdot 10^5} - \text{и т. д.},$$

$$l\,9 = l\,10 - \frac{1}{10} - \frac{1}{2\cdot 10^2} - \frac{1}{3\cdot 10^3} - \frac{1}{4\cdot 10^4} - \frac{1}{5\cdot 10^5} - \text{и т. д.}$$

Для разыскания сумм этих рядов соберём по отдельности чётные и нечётные члены, будем иметь:

$\frac{1}{10} = 0{,}100\,000\,000\,000\,0$	$\frac{1}{2\cdot 10^2} = 0{,}005\,000\,000$
$\frac{3}{3\cdot 10^3} = 0{,}000\,333\,333\,333\,3$	$\frac{1}{4\cdot 10^4} = 0{,}000\,025\,000\,000\,0$
$\frac{1}{5\cdot 10^5} = 0{,}000\,002\,000\,000\,0$	$\frac{1}{6\cdot 10^6} = 0{,}000\,000\,166\,666\,6$
$\frac{1}{7\cdot 10^7} = 0{,}000\,000\,014\,285\,7$	$\frac{1}{8\cdot 10^8} = 0{,}000\,000\,001\,250\,0$
$\frac{1}{9\cdot 10^9} = 0{,}000\,000\,000\,111\,1$	$\frac{1}{10\cdot 10^{10}} = 0{,}000\,000\,000\,010\,0$
$\frac{1}{11\cdot 10^{11}} = 0{,}000\,000\,000\,000\,9$	$\frac{1}{12\cdot 10^{12}} = 0{,}000\,000\,000\,000\,1$
Сумма $= 0{,}100\,335\,347\,731\,0$	Сумма $= 0{,}005\,025\,167\,926\,7$

Сумма обеих сумм будет	0,105 360 515 657 7
Разность их будет	0,095 310 179 804 3
Но	$l\,10 = 2{,}302\,585\,092\,994\,0$
Следовательно,	$l\,11 = 2{,}397\,895\,272\,798\,3$
и	$l\,9 = 2{,}197\,224\,577\,336\,3.$
Отсюда, далее,	$l\,3 = 1{,}098\,612\,288\,668\,1$
и	$l\,99 = 4{,}595\,119\,850\,134\,6$

Пример 2

По найденному теперь логарифму числа 99 *найти логарифм числа* 101.

Для этого воспользуемся найденным выше рядом

$$l(x+1) = l(x-1) + \frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + \frac{2}{5x^5} + \frac{2}{7x^7} + \text{и т. д.},$$

[1]) «Введение», т. I, гл. VII.

котором положим $x = 100$; тогда будем иметь ряд

$$l\,101 = l\,99 + \frac{2}{100} + \frac{2}{3\cdot 100^3} + \frac{2}{5\cdot 100^5} + \frac{2}{7\cdot 100^7} + \text{и т. д.},$$

сумма которого, определённая из этих его четырёх членов, оказывается равной 0,020 000 666 706 6; прибавив её к $l\,99$, получим $l\,101 = 4{,}615\,120\,516\,841\,2$.

Пример 3

По данному табличному логарифму числа 10, *равному* 1, *найти логарифмы чисел* 11 *и* 9.

Так как здесь мы ищем обыкновенные табличные логарифмы, будем иметь

$$n = 0{,}434\,294\,481\,903\,2;$$

следовательно, положив $x = 10$, будем иметь

$$l\,11 = l\,10 + \frac{n}{10} - \frac{n}{2\cdot 10^2} + \frac{n}{3\cdot 10^3} - \frac{n}{4\cdot 10^4} + \text{и т. д.},$$

$$l\,9 = l\,10 - \frac{n}{10} - \frac{n}{2\cdot 10^2} - \frac{n}{3\cdot 10^3} - \frac{n}{4\cdot 10^4} - \text{и т. д.}$$

Соберём по отдельности чётные и нечётные члены.

$\frac{n}{10}$	$= 0{,}043\,429\,448\,190\,3$	$\frac{n}{2\cdot 10^2}$	$= 0{,}002\,171\,472\,409\,5$
$\frac{n}{3\cdot 10^3}$	$= 0{,}000\,144\,764\,827\,3$	$\frac{n}{4\cdot 10^4}$	$= 0{,}000\,010\,857\,362\,0$
$\frac{n}{5\cdot 10^5}$	$= 0{,}000\,000\,868\,588\,9$	$\frac{n}{6\cdot 10^6}$	$= 0{,}000\,000\,072\,382\,4$
$\frac{n}{7\cdot 10^7}$	$= 0{,}000\,000\,006\,204\,2$	$\frac{n}{8\cdot 10^8}$	$= 0{,}000\,000\,000\,542\,8$
$\frac{n}{9\cdot 10^9}$	$= 0{,}000\,000\,000\,048\,2$	$\frac{n}{10\cdot 10^{10}}$	$= 0{,}000\,000\,000\,004\,3$
$\frac{n}{11\cdot 10^{11}}$	$= 0{,}000\,000\,000\,000\,4$	$\frac{n}{12\cdot 10^{12}}$	$= 0{,}000\,000\,000\,000\,0$
Сумма	$= 0{,}043\,575\,087\,859\,3$	Сумма	$= 0{,}002\,182\,402\,701\,0$

Сумма обеих сумм	$= 0{,}045\,757\,490\,560\,3.$
Разность их	$= 0{,}041\,392\,685\,158\,3,$
а так как	$l\,10 = 1{,}000\,000\,000\,000\,0,$
то	$l\,11 = 1{,}041\,392\,685\,158\,3$
и	$l\,9 = 0{,}954\,242\,509\,439\,7$ [1]),
отсюда	$l\,3 = 0{,}477\,121\,254\,719\,8$
и	$l\,99 = 1{,}995\,635\,194\,598\,0$ [2]).

Пример 4

По найденному здесь табличному логарифму числа 99 *найти табличный логарифм числа* 101.

[1]) В первом издании $l\,9 = 0{,}954\,242\,509\,439\,6$. [*Г. К.*]

[2]) В первом издании $l\,99 = 1{,}995\,635\,194\,597\,9$. [*Г. К.*]

Применив здесь тот же ряд, которым мы пользовались во втором примере, будем иметь

$$1\,101 = 1\,99 + 2n\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{3\cdot 100^3} + \frac{1}{5\cdot 100^5} + \text{ и т. д.}\right).$$

Если в этот ряд подставить значение, которое должно иметь n, то быстро найдём сумму, равную

$$0{,}008\,686\,179\,184\,9.$$

Прибавив её к

$$1\,99 = 1{,}995\,635\,194\,598\,0\ ^{1)},$$

получим

$$1\,101 = 2{,}004\,321\,373\,782\,9.$$

81. Пусть теперь в нашем общем выражении y есть показательная функция и пусть $y = a^x$; положив $x + \omega$ вместо x, мы будем иметь $z = a^{x+\omega}$; вследствие

$$\frac{dy}{dx} = a^x\,1\,a, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^x\,(1\,a)^2, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = a^x\,(1\,a)^3 \text{ и т. д.}$$

будем иметь

$$a^{x+\omega} = a^x\left(1 + \frac{\omega\,1\,a}{1} + \frac{\omega^2\,(1\,a)^2}{1\cdot 2} + \frac{\omega^3\,(1\,a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ и т. д.}\right).$$

Если разделить на a^x, получится ряд, выражающий значение показательного количества, который мы нашли уже во «Введении» [2]), а именно

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega\,1\,a}{1} + \frac{\omega^2\,(1\,a)^2}{1\cdot 2} + \frac{\omega^3\,(1\,a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ и т. д.}$$

Подобным образом, взяв ω отрицательным, будем иметь

$$a^{-\omega} = 1 - \frac{\omega\,1\,a}{1} + \frac{\omega^2\,(1\,a)^2}{1\cdot 2} - \frac{\omega^3\,(1\,a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ и т. д.}$$

Из сочетания этих рядов получим

$$\frac{a^\omega + a^{-\omega}}{2} = 1 + \frac{\omega^2\,(1\,a)^2}{1\cdot 2} + \frac{\omega^4\,(1\,a)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\omega^6\,(1\,a)^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{ и т. д.},$$

$$\frac{a^\omega - a^{-\omega}}{2} = \frac{\omega\,1\,a}{1} + \frac{\omega^3\,(1\,a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\omega^5\,(1\,a)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{ и т. д.}$$

Напомним, что $1\,a$ означает гиперболический логарифм числа a.

82. С помощью этой формулы можно найти по данному логарифму соответствующее ему число. Пусть в какой-нибудь системе логарифмов, в которой логарифм числа a положен равным 1, предложен какой-либо логарифм x. Найдём в той же системе логарифм, близкий к u, и пусть $u = x + \omega$; число же, соответствующее логарифму x, пусть равно $y = a^x$. Число, отвечающее логарифму $x + \omega = u$, будет равно $a^{x+\omega} = z$, и мы будем иметь

$$z = y\left(1 + \frac{\omega\,1\,a}{1} + \frac{\omega^2\,(1\,a)^2}{1\cdot 2} + \frac{\omega^3\,(1\,a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\omega^4\,(1\,a)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.}\right).$$

---

[1]) В первом издании повторяется ошибка, указанная в предыдущем примечании.

[2]) «Введение», т. I, гл. VII.

от ряд, так как ω есть небольшое число, быстро сходится. Покажем, к пользоваться этим рядом, на следующем примере:

Пример

Пусть ищется число, равное степени 2^{24} *числа* 2.

Так как $2^{24} = 16\,777\,216$, то $2^{2^{24}} = 2^{16\,777\,216}$, и если взять обыкновенные логарифмы, то логарифм этого числа будет равен $16\,777\,216\,\mathrm{l}\,2$.) так как

$$\mathrm{l}\,2 = 0{,}301\,029\,995\,663\,981\,195\,213\,738\,89,$$

логарифм искомого числа будет

$$5\,050\,445{,}259\,733\,675\,932\,039\,063.$$

о характеристика указывает, что искомое число выражается 5 050 446 фрами; так как их невозможно найти все, достаточно будет определить начальные цифры; их нужно найти по мантиссе

$$0{,}259\,733\,675\,932\,039\,063 = u.$$

з таблиц находим, что число, логарифм которого близко подходит этому, равно 1,818; положим его равным y; его логарифм

$$x = 0{,}259\,593\,878\,885\,948\,644,$$

сюда

$$\omega = 0{,}000\,139\,797\,046\,090\,419.$$

ак как здесь

$$a = 10,$$
$$\mathrm{l}\,a = 2{,}302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\,4$$
$$\omega\,\mathrm{l}\,a = 0{,}000\,321\,894\,594\,372\,400\ ^{1)}.$$

алее,

$$\begin{aligned}
y &= 1{,}818\,000\,000\,000\,000\,000,\\
\frac{\omega\,\mathrm{l}\,a}{1}\,y &= \qquad 585\,204\,372\,569\,023\ ^{2)},\\
\frac{\omega^2(\mathrm{l}\,a)^2}{1\cdot 2}\,y &= \qquad\qquad 94\,187\,062\,066\ ^{2)},\\
\frac{\omega^3(\mathrm{l}\,a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,y &= \qquad\qquad\qquad 10\,106\,102\ ^{2)},\\
\frac{\omega^4(\mathrm{l}\,a)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,y &= \qquad\qquad\qquad\qquad 813\\
\hline
& 1{,}818\,585\,298\,569\,738\,004\ ^{3)}.
\end{aligned}$$

Таковы начальные цифры искомого числа; из них все, за исключением, может быть, последней, верны.

83. Рассмотрим круговые трансцендентные количества, и пусть, ак всегда, мы полагаем, радиус круга равен 1 и y есть дуга круга, инус которого равен x, т. е. $y = \arcsin x$. Положим $x + \omega$ вместо x;

---

[1]) В первом издании $\omega\,\mathrm{l}\,a = 0{,}000\,321\,894\,594\,372\,398$. [*Г. К.*]

[2]) В первом издании последние цифры 0, 4, 0. [*Г. К.*]

[3]) В первом издании 1 818 585 298 569 737 997. [*Г. К.*]

тогда $z = \arcsin(x+\omega)$. Чтобы выразить его значение, найдём дифференциалы количества y (§ 200 первой части):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}},\quad \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{7/2}},$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=\frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{9/2}},\quad \frac{d^6y}{dx^6}=\frac{225x+600x^3+120x^5}{(1-x^2)^{11/2}}$$

и т. д.

Из этого находим

$$\arcsin(x+\omega)=\arcsin x+\frac{\omega}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\omega^2 x}{2(1-x^2)^{3/2}}+\frac{\omega^3(1+2x^2)}{6(1-x^2)^{5/2}}+$$
$$+\frac{\omega^4(9x+6x^3)}{24(1-x^2)^{7/2}}+\frac{\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{120(1-x^2)^{9/2}}+ \text{ и т. д.}$$

84. Итак, если известна дуга, синус которой равен x, то с помощью этой формулы можно найти дугу, синус которой есть $x+\omega$, если ω есть весьма малое количество. Нужно найти сумму ряда, и она выразит дугу в частях радиуса, которые легко перевести в дуговые меры, как это будет видно из следующего примера:

Пример

Пусть ищется дуга круга, синус которой равен $\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\,333\,3$.

Найдём из таблиц дугу круга, синус которой равен числу, ближайшему меньшему чем $\frac{1}{3}$; она будет равна $19°28'$. Синус её равен $0{,}333\,258\,4$. Итак, положим $19°28' = \arcsin x = y$; тогда $x = 0{,}333\,258\,4$ и $\omega = 0{,}000\,074\,9$ и из таблиц находим $\sqrt{1-x^2} = \cos y = 0{,}942\,835\,6$. Следовательно, искомая дуга z, для которой предложен синус, равный $\frac{1}{3}$, будет равна

$$19°28' + \frac{\omega}{\cos y} + \frac{\omega^2 \sin y}{2\cos^3 y}.$$

Это выражение уже является достаточным. Произведя вычисления с помощью логарифмов, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}\,\omega &= 5{,}874\,481\,8\\
\mathrm{l}\cos y &= 9{,}974\,435\,9\\
\mathrm{l}\frac{\omega}{\cos y} &= 5{,}900\,045\,9 & \qquad \frac{\omega}{\cos y} &= 0{,}000\,079\,441\,2\\
\mathrm{l}\frac{\omega^2}{\cos^2 y} &= 1{,}800\,091\,8\\
\mathrm{l}\frac{\sin y}{\cos y} &= 9{,}548\,345\,2\\
&\overline{1{,}348\,437\,0}\\
\mathrm{l}\,2 &= 0{,}301\,030\,0\\
\frac{\omega^2\sin y}{2\cos^3 y} &= 1{,}047\,407\,0 & \qquad \frac{\omega^2\sin y}{2\cos^3 y} &= 0{,}000\,000\,001\,1\\
& & \text{Сумма} &= 0{,}000\,079\,442\,3
\end{aligned}$$

есть значение дуги, которую нужно прибавить к $19°28^{\mathrm{I}}$, чтобы азить её в секундах; возьмём её логарифм, который равен

$$5{,}900\,051\,8,$$

него вычтем

$$\frac{4{,}685\,574\,9}{1{,}214\,476\,9}.$$

му логарифму отвечает число

$$16{,}38615,$$

орое является числом секунд; дробную его часть выразим в тер-х, квартах и т. д. и получим, что искомая дуга равна

$$19°28^{\mathrm{I}}\,16^{\mathrm{II}}\,23^{\mathrm{III}}\,10^{\mathrm{IV}}\,8^{\mathrm{V}}\,24^{\mathrm{VI}}.$$

85. Подобным образом найдём выражение и для случая косинуса. южим $y = \arccos x$. Так как $dy = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, то ранее найденный ряд нется неизменным, только переменятся знаки. Итак, мы будем ть

$$\arccos(x+\omega) = \arccos x - \frac{\omega}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\omega^2 x}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{\omega^3(1+2x^2)}{6(1-x^2)^{5/2}} - \frac{\omega^4(9x+6x^3)}{24(1-x^2)^{7/2}} - \frac{\omega^5(9+72x^2+24x^4)}{120(1-x^2)^{9/2}} - \text{ и т. д.}$$

т ряд, как и предыдущий, будет сходиться очень быстро, если из лицы синусов взять углы, близкие к истинным, так что по большей ти достаточно взять один только первый член $\frac{\omega}{\sqrt{1-x^2}}$. Однако если удет очень близок к 1, т. е. к полному синусу, то вследствие того, знаменатели становятся очень малыми, сходимость ряда ослабе-т [1]). Поэтому в тех случаях, когда x лишь немногим меньше чем 1, ду того, что тогда разности становятся очень малыми, удобнее ьзоваться обычной интерполяцией.

86. Положим теперь, что y есть дуга, тангенс которой даётся, усть будет $y = \operatorname{arc\,tg} x$ и $z = \operatorname{arc\,tg}(x+\omega)$. Тогда

$$z = y + \frac{\omega\,dy}{dx} + \frac{\omega^2\,d^2y}{2\,dx^2} + \frac{\omega^3\,d^3y}{6\,dx^3} + \text{ и т. д.}$$

Чтобы найти члены этого ряда, найдём дифференциалы коли-ства y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3},$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24x-24x^3}{(1+x^2)^4}, \quad \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{24-240x^2+120x^4}{(1+x^2)^5}, \quad \frac{d^6y}{dx^6} = \frac{-720x+2400x^3-720x^5}{(1+x^2)^6}$$

и т. д.,

гда находим, что

$$\operatorname{arc\,tg}(x+\omega) = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\omega}{1+x^2} + \frac{\omega^2 x}{(1+x^2)^2} + \frac{\omega^3}{(1+x^2)^3}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{\omega^4}{(1+x^2)^4}(x^3 - x) + \frac{\omega^5}{(1+x^2)^5}\left(x^4 - 2x^2 + \frac{1}{5}\right) - \frac{\omega^6}{(1+x^2)^6}\left(x^5 - \frac{10}{3}x^3 + x\right) + \text{ и т. д.}$$

---

[1]) Illa series convergentiam amittit.

87. Этот ряд, закон составления которого не столь очевиден, можно преобразовать к другому виду, где закон следования тотчас же бросается в глаза. С этой целью положим $\operatorname{arc\,tg} x = 90^\circ - u$, так что $x = \operatorname{ctg} u = \frac{\cos u}{\sin u}$; тогда $1 + x^2 = \frac{1}{\sin^2 u}$, откуда $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \sin^2 u$. Так как, далее, $dx = -\frac{du}{\sin^2 u}$, т. е. $du = -dx \sin^2 u$, то, беря дальнейшие дифференциалы, будем иметь

$$\frac{d^2y}{dx} = 2\,du \sin u \cos u = du \sin 2u = -dx \sin^2 u \sin 2u,$$

так что

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin^2 u \sin 2u,$$

$$\frac{d^3y}{2dx^2} = -du \sin u \cos u \sin 2u - du \sin^2 u \cos 2u = -du \sin u \sin 3u = dx \sin^3 u \sin 3u,$$

так что

$$\frac{d^3y}{1\cdot 2dx^3} = +\sin^3 u \sin 3u,$$

$$\frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} = du \sin^2 u\,(\cos u \sin 3u + \sin u \cos 3u) = du \sin^2 u \sin 4u = -dx \sin^4 u \sin 4u,$$

так что

$$\frac{d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^4} = -\sin^4 u \sin 4u \text{ и т. д.}$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\operatorname{arc\,tg}(x+\omega) = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\omega}{1}\sin u \sin u - \frac{\omega^2}{2}\sin^2 u \sin 2u + \frac{\omega^3}{3}\sin^3 u \sin 3u - \frac{\omega^4}{4}\sin^4 u \sin 4u + \frac{\omega^5}{5}\sin^5 u \sin 5u - \text{и т. д.};$$

так как здесь $\operatorname{arc\,tg} x = y$ и $\operatorname{arc\,tg} x = 90^\circ - u$, то будем иметь

$$y = 90^\circ - u.$$

88. Если положить $\operatorname{arc\,ctg} x = y$ и $\operatorname{arc\,ctg}(x+\omega) = z$, то

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\omega^3 dy^3}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \frac{\omega^4 dy^4}{1\cdot 2\cdot 3dx^4} + \text{ и т. д.}$$

А так как $dy = \frac{-dx}{1+x^2}$, то члены этого ряда, кроме первого, совпадают, если не считать знаков, с членами ранее найденного ряда. Поэтому положим, как прежде, $\operatorname{arc\,tg} x = 90^\circ - u$ или $\operatorname{arc\,ctg} x = u$, так что $u = y$. Тогда

$$\operatorname{arc\,ctg}(x+\omega) = \operatorname{arc\,ctg} x - \frac{\omega}{1}\sin u \sin u + \frac{\omega^2}{2}\sin^2 u \sin 2u - \frac{\omega^3}{3}\sin^3 u \sin 3u + \frac{\omega^4}{4}\sin^4 u \sin 4u - \text{и т. д.}$$

Это выражение непосредственно вытекает из предшествующего; действительно, поскольку

$$\operatorname{arc\,ctg}(x+\omega) = 90^\circ - \operatorname{arc\,tg}(x+\omega)$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x = 90^\circ - \operatorname{arc\,tg} x,$$

м иметь

$$\operatorname{arc\,ctg}(x+\omega) - \operatorname{arc\,ctg} x = -\operatorname{arc\,tg}(x+\omega) + \operatorname{arc\,tg} x.$$

?9. Из этих выражений вытекают многие важные частные случаи, чаемые подстановкой различных данных значений вместо x и ω. ь сначала $x=0$; так как $u = -\operatorname{arc\,tg} x + 90^\circ$, то $u = 90^\circ$ и $\sin u = 1$, $u = 0$, $\sin 3u = -1$, $\sin 4u = 0$, $\sin 5u = 1$, $\sin 6u = 0$, $\sin 7u = -1$ д., откуда получаем

$$\operatorname{arc\,tg} \omega = \frac{\omega}{1} - \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^5}{5} - \frac{\omega^7}{7} + \frac{\omega^9}{9} - \frac{\omega^{11}}{11} + \text{ и т. д.}$$

есть хорошо известный ряд, выражающий дугу, тангенс которой н ω.

Пусть теперь $x=1$; тогда $\operatorname{arc\,tg} x = 45^\circ$; следовательно, $u = 45^\circ$; да

$$\text{n}\, u = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin 2u = 1, \quad \sin 3u = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin 4u = 0, \quad \sin 5u = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin 6u = -1, \quad \sin 7u = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и т. д.}$$

значения дают

$$\text{с}\operatorname{tg}(1+\omega) = 45^\circ + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2\cdot 2} + \frac{\omega^3}{3\cdot 4} - \frac{\omega^5}{5\cdot 8} + \frac{\omega^6}{6\cdot 8} - \frac{\omega^7}{7\cdot 16} + \frac{\omega^9}{9\cdot 32} - \\ - \frac{\omega^{10}}{10\cdot 32} + \frac{\omega^{11}}{11\cdot 64} - \frac{\omega^{13}}{13\cdot 128} + \frac{\omega^{14}}{14\cdot 128} - \text{ и т. д.}$$

ім образом, если $\omega = -1$, то, поскольку $\operatorname{arc\,tg}(1+\omega) = 0$ и $= \frac{\pi}{4}$, получаем

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} - \frac{1}{5\cdot 2^3} - \frac{1}{6\cdot 2^3} - \frac{1}{7\cdot 2^4} + \frac{1}{9\cdot 2^5} + \frac{1}{10\cdot 2^5} + \text{ и т. д.}$$

это значение подставить в предыдущее выражение вместо дуги то будем иметь

$$\operatorname{tg}(1=\omega) = \frac{\omega+1}{1\cdot 2} - \frac{\omega^2-1}{2\cdot 2} + \frac{\omega^3+1}{3\cdot 2^2} - \frac{\omega^5+1}{5\cdot 2^3} + \frac{\omega^6-1}{6\cdot 2^3} - \frac{\omega^7+1}{7\cdot 2^4} + \text{ и т. д.}$$

ряд очень удобен для отыскания приближённого значения $\frac{\pi}{4}$.

?0. Так как

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} - \frac{1}{5\cdot 2^3} - \frac{1}{6\cdot 2^3} - \frac{1}{7\cdot 2^4} + \text{ и т. д.},$$

ены, имеющие в знаменателях 2, 6, 10 и т. д.,

$$\frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{6\cdot 2^3} + \frac{1}{10\cdot 2^5} - \frac{1}{14\cdot 2^7} + \text{ и т. д.},$$

жают $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$, то

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} - \frac{1}{5\cdot 2^3} - \frac{1}{7\cdot 2^4} + \frac{1}{9\cdot 2^5} + \frac{1}{11\cdot 2^6} - \text{ и т. д.}$$

С другой стороны, поскольку, если во второй формуле взять ω отрицательным,

$$\operatorname{arc\,tg}(1-\omega)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}-\frac{1}{5\cdot 2^3}-\frac{1}{6\cdot 2^3}-\frac{1}{7\cdot 2^4}+\text{ и т. д.}-$$
$$-\frac{\omega}{1\cdot 2}-\frac{\omega^2}{2\cdot 2}-\frac{\omega^3}{3\cdot 2^2}+\frac{\omega^5}{5\cdot 2^3}+\frac{\omega^6}{6\cdot 2^3}+\frac{\omega^7}{7\cdot 2^4}-\text{ и т. д.},$$

то, если $\omega=\frac{1}{2}$, будем иметь

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}-\frac{1}{5\cdot 2^3}-\frac{1}{6\cdot 2^3}-\frac{1}{7\cdot 2^4}+\text{ и т. д.}-$$
$$-\frac{1}{1\cdot 2^2}-\frac{1}{2\cdot 2^3}-\frac{1}{3\cdot 2^5}+\frac{1}{5\cdot 2^8}+\frac{1}{6\cdot 2^9}+\frac{1}{7\cdot 2^{11}}-\text{ и т. д.}$$

Снова взяв члены, которые разделены на 2, 6, 10 и т. д., будем иметь

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}-\frac{1}{5\cdot 2^3}-\frac{1}{7\cdot 2^4}+\frac{1}{9\cdot 2^5}+\text{ и т. д.}-$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}-\frac{1}{1\cdot 2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^5}+\frac{1}{5\cdot 2^8}+\frac{1}{7\cdot 2^{11}}-\frac{1}{9\cdot 2^{14}}-\text{ и т. д.},$$

так что

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}-\frac{1}{5\cdot 2^3}-\frac{1}{7\cdot 2^4}+\text{ и т. д.}-$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}-\frac{1}{1\cdot 2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^5}+\frac{1}{5\cdot 2^8}+\frac{1}{7\cdot 2^{11}}-\frac{1}{9\cdot 2^{14}}-\text{ и т. д.}$$

Если подставить это значение в предыдущий ряд и при этом разложить в ряд также и $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}$, то найдём:

$$\frac{\pi}{4}=\left\{\begin{array}{l}1+\frac{1}{3\cdot 2^1}-\frac{1}{5\cdot 2^2}-\frac{1}{7\cdot 2^3}+\frac{1}{9\cdot 2^4}+\text{ и т. д.}-\\ -\frac{1}{1\cdot 2^2}-\frac{1}{3\cdot 2^5}+\frac{1}{5\cdot 2^8}+\frac{1}{7\cdot 2^{11}}-\frac{1}{9\cdot 2^{14}}-\text{ и т. д.}-\\ -\frac{1}{1\cdot 2^4}+\frac{1}{3\cdot 2^{10}}-\frac{1}{5\cdot 2^{16}}+\frac{1}{7\cdot 2^{22}}-\frac{1}{9\cdot 2^{28}}+\text{ и т. д.}\end{array}\right.$$

90a [1]). Полагая $x=1$, можно найти ещё много других рядов. Если же положим $x=\sqrt{3}$, так что $\operatorname{arc\,tg}x=60^\circ$, то

$$u=30^\circ\ \text{ и }\ \sin u=\frac{1}{2},\quad \sin 2u=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin 3u=1,\quad \sin 4u=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
$$\sin 5u=\frac{1}{2},\quad \sin 6u=0,\quad \sin 7u=-\frac{1}{2}\ \text{ и т. д.},$$

откуда

$$\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}+\omega)=60^\circ+\frac{\omega}{1\cdot 2^2}-\frac{\omega^2\sqrt{3}}{2\cdot 2^3}+\frac{\omega^3}{3\cdot 2^2}-\frac{\omega^4\sqrt{3}}{4\cdot 2^5}+$$
$$+\frac{\omega^5}{3\cdot 2^6}-\frac{\omega^7}{7\cdot 2^8}+\frac{\omega^8\sqrt{3}}{8\cdot 2^9}-\frac{\omega^9}{9\cdot 2^9}+\text{ и т. д.}$$

[1]) В первом издании по ошибке повторён номер 90. [*Г. К.*]

сли же положить $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, так что $\operatorname{arc\,tg} x = 30^\circ$, то

$$u = 60^\circ \text{ и } \sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 3u = 0, \quad \sin 4u = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 5u = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 6u = 0, \quad \sin 7u = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и т. д.}$$

одставив эти значения, будем иметь

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \omega\right) = 30^\circ + \frac{3\omega}{1\cdot 2^2} - \frac{3\omega^2\sqrt{3}}{2\cdot 2^3} + \frac{3^2\omega^4\sqrt{3}}{4\cdot 2^5} - \frac{3^3\omega^5}{5\cdot 2^6} + \text{ и т. д.}$$

начит, если $\omega = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, то, поскольку $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, будем иметь

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{1\cdot 2^2} + \frac{1}{2\cdot 2^3} - \frac{1}{4\cdot 2^5} - \frac{1}{5\cdot 2^6} + \frac{1}{7\cdot 2^8} + \frac{1}{8\cdot 2^9} - \text{ и т. д.}$$

91. Вернёмся к найденному общему выражению

$$\operatorname{arc\,tg}(x+\omega) = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\omega}{1}\sin u \sin u - \frac{\omega^2}{2}\sin^2 u \sin 2u + \frac{\omega^3}{3}\sin^3 u \sin 3u - \text{ и т. д.}$$

положим $\omega = -x$, так что $\operatorname{arc\,tg}(x+\omega) = 0$; тогда

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1}\sin u \sin u + \frac{x^2}{2}\sin^2 u \sin 2u + \frac{x^3}{3}\sin^3 u \sin 3u + \text{ и т. д.}$$

о так как $\operatorname{arc\,tg} x = 90^\circ - u = \frac{\pi}{2} - u$, то

$$x = \operatorname{ctg} u = \frac{\cos u}{\sin u}.$$

оэтому

$$= u + \cos u \sin u + \frac{1}{2}\cos^2 u \sin 2u + \frac{1}{3}\cos^3 u \sin 3u + \frac{1}{4}\cos^4 u \sin 4u \text{ и т. д.}$$

гот ряд заслуживает особого внимания потому, что какую бы дугу ы ни взяли вместо u, значение ряда получается всегда одно и то же: ю равно $\frac{\pi}{2}$.

Если же $\omega = -2x$, то, поскольку $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$, получается

$$2\operatorname{arc\,tg} x = \frac{2x}{1}\sin u \sin u + \frac{4x^2}{2}\sin^2 u \sin 2u + \frac{8x^3}{3}\sin^3 u \sin 3u + \text{ и т. д.}$$

так как $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - u$ и $x = \frac{\cos u}{\sin u}$, то

$$\pi = 2u + \frac{2}{1}\cos u \sin u + \frac{2^2}{2}\cos^2 u \sin 2u + \frac{2^3}{3}\cos^3 u \sin 3u + \text{ и т. д.}$$

усть $u = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$; тогда

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin 2u = 1, \quad \sin 3u = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin 4u = 0,$$

$\mathrm{n}\,5u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 6u = -1$, $\sin 7u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 8u = 0$ и т. д. и будем меть

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{2^3}{6} - \frac{2^3}{7} + \frac{2^4}{9} + \frac{2^5}{10} + \frac{2^5}{11} - \text{ и т. д.}$$

Этот ряд, хотя он и расходится, достоин внимания вследствие его простоты.

92. Положим в найденном общем выражении

$$\omega = -x - \frac{1}{x} = \frac{-1}{\sin u \cos u}.$$

Вследствие

$$x = \frac{\cos u}{\sin u}$$

будем иметь

$$\operatorname{arc\,tg}(x+\omega) = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} x.$$

Отсюда получится следующее выражение:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sin u}{1\cos u} + \frac{\sin 2u}{2\cos^2 u} + \frac{\sin 3u}{3\cos^3 u} + \frac{\sin 4u}{4\cos^4 u} + \text{ и т. д.}$$

При $u = 45^\circ$ оно даст тот же ряд, который был найден последним.

Если же положить $\omega = -\sqrt{1+x^2}$, то вследствие $x = \frac{\cos u}{\sin u}$ получится

$$\omega = -\frac{1}{\sin u}$$

и

$$\operatorname{arc\,tg}(x - \sqrt{1+x^2}) = -\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{1+x^2} - x) =$$
$$= -\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right) = -\frac{1}{2}u$$

и

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - u.$$

Поэтому будем иметь

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{1}\sin u + \frac{1}{2}\sin 2u + \frac{1}{3}\sin 3u + \frac{1}{4}\sin 4u + \text{ и т. д.}$$

Если дифференцировать это уравнение, будем иметь уравнение

$$0 = \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cos 3u + \cos 4u + \text{ и т. д.},$$

смысл которого уясняется из свойств рекуррентных рядов[1]).

93. Если подобным образом дифференцировать прежде найденные ряды, получатся новые суммируемые ряды. Прежде всего из ряда

$$\operatorname{arc\,tg}(1+\omega) = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2\cdot 2} + \frac{\omega^3}{3\cdot 4} - \frac{\omega^5}{5\cdot 8} + \frac{\omega^6}{6\cdot 8} - \text{ и т. д.},$$

вытекает ряд

$$\frac{1}{2+2\omega+\omega^2} = \frac{1}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{4} - \frac{\omega^4}{8} + \frac{\omega^5}{8} - \frac{\omega^6}{16} + \frac{\omega^8}{32} - \text{ и т. д.},$$

который получается разложением дроби

$$\frac{2-2\omega+\omega^2}{4+\omega^4} = \frac{1}{2+2\omega+\omega^2}.$$

Далее ряд

$$\frac{\pi}{2} = u + \cos u \sin u + \frac{1}{2}\cos^2 u \sin u + \frac{1}{3}\cos^3 u \sin 3u + \frac{1}{4}\cos^4 u \sin 4u + \text{ и т. д.},$$

[1]) Cuius ratio ex natura serierum recurrentium.

ли его дифференцировать, даст

$$0 = 1 + \cos 2u + \cos u \cos 3u + \cos^2 u \cos 4u + \cos^3 u \cos 5u + \text{ и т. д.}$$

аконец, ряд

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin 2u}{2\cos^2 u} + \frac{\sin 3u}{3\cos^3 u} + \frac{\sin 4u}{4\cos^4 u} + \text{ и. т. д.}$$

ёт

$$0 = \frac{1}{\cos^2 u} + \frac{\cos u}{\cos^3 u} + \frac{\cos 2u}{\cos^4 u} + \frac{\cos 3u}{\cos^5 u} + \text{ и т. д.}$$

и

$$0 = 1 + \frac{\cos u}{\cos u} + \frac{\cos 2u}{\cos^2 u} + \frac{\cos 3u}{\cos^3 u} + \frac{\cos 4u}{\cos^4 u} + \frac{\cos 5u}{\cos^5 u} + \text{ и т. д.}$$

94. Но в первую очередь найденное общее выражение

$$\operatorname{arc\,tg}(x + \omega) = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\omega}{1}\sin u \sin u - \frac{\omega^2}{2}\sin^2 u \sin 2u + \\ + \frac{\omega^3}{3}\sin^3 u \sin 3u - \text{ и т. д.},$$

е

$$x = \operatorname{ctg} u \quad \text{или} \quad u = \operatorname{arc\,ctg} x = 90° - \operatorname{arc\,tg} x,$$

ожет служить для нахождения угла или дуги, отвечающих каждому нному тангенсу. Действительно, пусть предложенный тангенс равен t. цем в таблицах тангенс, близко к нему подходящий. Пусть он вен x и пусть ему отвечает дуга, равная y. Тогда $u = 90° - y$. Пожим тогда $x + \omega = t$, т. е. $\omega = t - x$, и искомая дуга будет равна

$$y + \frac{\omega}{1}\sin u \sin u - \frac{\omega^2}{2}\sin^2 u \sin 2u + \text{ и т. д.}$$

о правило особенно полезно, тогда когда предложенный тангенс лик и вследствие этого искомая дуга мало отличается от 90°. Действительно, в этих случаях вследствие быстрого роста тангенсов обычй метод интерполяции даёт результат, очень далёкий от истинного. ссмотрим следующий пример:

Пример

Пусть ищется дуга, тангенс которой равен 100; *радиус полатся равным единице.*

Дуга, приближённо равная данной, есть 89°25′; тангенс её есть

$$x = 98{,}217943.$$

ычитая его из

$$t = \underline{100{,}000000},$$

лучаем в остатке

$$\omega = 1{,}782057.$$

лее, так как $y = 89°25'$, то $u = 0°35'$, $2u = 1°10'$, $3u = 1°45'$ и т. д. йдём теперь отдельные члены с помощью логарифмов. К

$$l\,\omega = 0{,}250\,921\,5$$

ибавим

$$l \sin u = 8{,}007\,786\,7$$
$$l \sin u = 8{,}007\,786\,7$$

$$l\,\omega \sin u \sin u = 6{,}266\,494\,9$$

вычтем

$$\frac{4{,}685\,574\,9}{1{,}580\,920\,0}$$

Следовательно,

$$\omega \sin u \sin u = 38{,}099\,56 \text{ секунды.}$$

К

$$1\,\omega \sin^2 u = 6{,}266\,494\,9$$

прибавим

$$1\,\omega = 0{,}250\,921\,5$$
$$1 \sin 2u = 8{,}308\,794\,1$$
$$\overline{\phantom{1 \sin 2u = {}} 4{,}826\,210\,5}$$

вычтем

$$12 = 0{,}301\,030\,0$$

$$1\,\frac{1}{2}\,\omega^2 \sin^2 u \sin 2u = 4{,}525\,180\,5$$

вычтем

$$4{,}685\,574\,9$$

останется

$$9{,}839\,605\,6$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\,\omega^2 \sin^2 u \sin 2u = 0{,}69120 \text{ секунды.}$$

Далее, к

$$1\,\omega^3 = 0{,}752\,764\,5$$

прибавим

$$1 \sin^3 u = 4{,}023\,360\,1$$
$$1 \sin^3 u = 8{,}484\,847\,9$$
$$\overline{\phantom{1 \sin^3 u = {}} 3{,}260\,972\,5}$$

вычтем

$$13 = 0{,}477\,121\,3$$
$$\overline{\phantom{13 = {}} 2{,}783\,851\,2}$$

вычтем

$$\frac{4{,}685\,574\,9}{8{,}098\,276\,3}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{3}\,\omega^3 \sin^3 u \sin 3u = 0{,}01254 \text{ секунды.}$$

Наконец, к

$$1\,\omega^4 = 1{,}003\,686\,0$$

прибавим

$$1 \sin^4 u = 2{,}031\,146\,8$$
$$1 \sin 4u = 8{,}609\,734\,1$$
$$\overline{\phantom{1 \sin 4u = {}} 1{,}644\,566\,9}$$

вычтем

$$
\begin{array}{r}
14 = 0{,}602\,060\,0 \\
\hline
1{,}042\,506\,9
\end{array}
$$

вычтем

$$
\begin{array}{r}
4{,}689\,574\,9 \\
\hline
6{,}356\,932\,0
\end{array}.
$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}\omega^4 \sin^4 u \sin 4u = 0{,}00023 \text{ секунды.}$$

Отсюда

Члены, которые нужно прибавить	Члены, которые нужно отнять
38,09956	0,69120
0,01254	0,00023
38,11210	0,69143

отнимем

$$
\begin{array}{r}
0{,}69143 \\
\hline
37{,}42067 = 37^{\text{II}}\,25^{\text{III}}\,14^{\text{IV}}\,24^{\text{V}}\,36^{\text{VI}}.
\end{array}
$$

Поэтому дуга, тангенс которой в сто раз больше радиуса, будет равна

$$89°25^{\text{I}}\,37^{\text{II}}\,25^{\text{III}}\,14^{\text{IV}}\,24^{\text{V}}\,36^{\text{VI}}.$$

В квартах ошибка содержаться не будет. Она может оказаться лишь в квинтах; таким образом, мы можем сказать, что этот угол равен $89°25^{\text{I}}\,37^{\text{II}}\,25^{\text{III}}\,14^{\text{IV}}$. Если будет предложен ещё бóльший тангенс, то даже если ω будет иметь большее значение, дугу можно будет, поскольку u будет ещё меньшим углом, определить с той же быстротой.

95. До сих пор мы подставляли вместо y дугу круга. Теперь будем полагать вместо y обратные функции, каковыми являются $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и т. д. Итак, пусть $y = \sin x$; положив $x + \omega$ вместо x, будем иметь $z = \sin(x + \omega)$. Уравнение

$$z = y + \frac{\omega\, dy}{dx} + \frac{\omega^2\, d^2y}{1 \cdot 2\, dx^2} + \frac{\omega^3\, d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dx^2} + \text{ и т. д.}$$

вследствие

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2x}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x \text{ и т. д.}$$

даст

$$\sin(x + \omega) = \sin x + \omega \cos x - \frac{1}{2}\omega^2 \sin x - \frac{1}{6}\omega^3 \cos x + \frac{1}{24}\omega^4 \sin x + \text{ и т. д.}$$

Взяв ω отрицательным, будем иметь

$$\sin(x - \omega) = \sin x - \omega \cos x - \frac{1}{2}\omega^2 \sin x + \frac{1}{6}\omega^3 \cos x + \frac{1}{24}\omega^4 \sin x - \text{ и т. д.}$$

Если же положить $y = \cos x$, то вследствие

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \sin x, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \cos x \text{ и т. д.}$$

будем иметь

$$\cos(x+\omega) = \cos x - \omega \sin x - \frac{1}{2}\omega^2 \cos x + \frac{1}{6}\omega^3 \sin x + \frac{1}{24}\omega^4 \cos x - \text{ и т. д.},$$

а взяв ω отрицательным, будем иметь

$$\cos(x-\omega) = \cos x + \omega \sin x - \frac{1}{2}\omega^2 \cos x - \frac{1}{6}\omega^3 \sin x + \frac{1}{24}\omega^4 \cos x + \text{ и т. д.}$$

96. Эти формулы имеют очень важное значение как для составления таблиц синусов и косинусов, так и для интерполирования их. В самом деле, если будут известны синус и косинус какой-либо дуги x, то с их помощью легко будет найти синус и косинус углов $x+\omega$ и $x-\omega$, если разность ω будет достаточно мала; действительно, в этом случае найденные ряды сходятся очень быстро. Но необходимо, чтобы дуга ω была выражена в частях радиуса. Так как дуга 180° есть

$$3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,46,$$

то это легко сделать; в самом деле, разделив на 180, будем иметь

$$\text{дуга } 1^\circ = 0{,}017\,453\,292\,519\,943\,295\,769,$$
$$\text{дуга } 1^{\text{I}} = 0{,}000\,290\,888\,208\,665\,721\,596,$$
$$\text{дуга } 10^{\text{II}} = 0{,}000\,048\,481\,368\,110\,953\,599.$$

Пример 1

Найти синус и косинус углов $45^\circ 1^{\text{I}}$ *и* $44^\circ 59^{\text{I}}$ *по данным синусу и косинусу угла* 45°; *оба они равны*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,106\,781\,186\,5.$$

Так как

$$\sin x = \cos x = 0{,}707\,106\,781\,186\,5$$

и

$$\omega = 0{,}000\,290\,888\,208\,6,$$

то, чтобы легче выполнить вычисления, найдём предварительно:

$$2\omega = 0{,}000\,581\,776\,417\,3,$$
$$3\omega = 0{,}000\,872\,664\,625\,9,$$
$$4\omega = 0{,}001\,163\,552\,834\,6,$$
$$5\omega = 0{,}001\,454\,441\,043\,3\ ^{1)},$$
$$6\omega = 0{,}001\,745\,329\,251\,9,$$
$$7\omega = 0{,}002\,036\,217\,460\,6\ ^{1)},$$
$$8\omega = 0{,}002\,327\,105\,669\,3\ ^{1)},$$
$$9\omega = 0{,}002\,617\,993\,877\,9.$$

[1]) В первом издании $5\omega = 0{,}001\,454\,441\,043\,2$, $7\omega = 0{,}002\,036\,217\,460\,5$, $8\omega = 0{,}002\,327\,105\,669\,2$. [*Г. К.*]

Теперь $\omega \sin x$ и $\omega \cos x$ найдутся следующим образом:

7	.	0,000 203 621 746 606 [1]		
0	.	. . . . . .		
7	.	0,000 002 036 217 46 [2]		
1	.			2 908 882
0	.	.		. .
6	.	.		174 532
7	.	.		20 362
8	.	.		2 327
1	.	.	.	29
1	.	.	.	2
8	.	.	.	2
6	.	.	.	0

$$\omega \sin x = \omega \cos x = 0{,}000\,205\,689\,024\,88\ [3].$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\omega \cos x = 0{,}000\,102\,844\,512\,44\ [4].$$

Помножим на ω:

1	.	0,000 000 029 088 82		
0	.	.	.	
2	.	.	.	58 177
8	.	.	.	23 271
4	.	.	.	1 163
4	.	.	.	116
5	.	.	.	14

$$\frac{1}{2}\omega^2 \cos x = 0{,}000\,000\,029\,916\,23$$

$$\frac{1}{6}\omega^2 \cos x = 0{,}000\,000\,009\,972\,08.$$

Помножаем на ω:

9	.	0,000 000 000 002 61
9	.	26
7	.	2

$$\frac{1}{6}\omega^3 \cos x = 0{,}000\,000\,000\,002\,89.$$

Следовательно, для отыскания $\sin 45°1^{\text{I}}$ к

$$\sin x = 0{,}707\,106\,781\,186\,5$$

прибавим

$$\omega \cos x = \quad 2\,056\,890\,249$$

$$0{,}707\,312\,470\,211\,4$$

вычтем

$$\frac{1}{2}\omega^2 \sin x = \quad 299\,162$$

$$0{,}707\,312\,440\,295\,2$$

---

[1]) В первом издании 0,000 203 621 746 05. [*Г. К.*]
[2]) В первом издании 0,000 002 036 217 4. [*Г. К.*]
[3]) В первом издании 0,000 205 689 024 90. [*Г. К.*]
[4]) В первом издании 0,000 102 844 512 45. [*Г. К.*]

вычтем

$$\frac{1}{6}\omega^3\cos x = \qquad 29$$

$$\sin 45°1^{\text{I}} = 0{,}707\,312\,440\,292\,3 = \cos 44°59^{\text{I}}.$$

Для отыскания же $\cos 45°1^{\text{I}}$ от

$$\cos x = 0{,}707\,106\,781\,186\,5$$

вычтем

$$\omega\sin x = \qquad 2\,056\,890\,249$$

$$0{,}706\,901\,092\,161\,6$$

вычтем

$$\frac{1}{2}\omega^2\cos x = \qquad 299\,162$$

$$0{,}706\,901\,062\,245\,4$$

прибавим

$$\frac{1}{6}\omega^3\cos x = \qquad 29$$

$$\cos 45°1^{\text{I}} = 0{,}706\,901\,062\,248\,3 = \sin 44°49^{\text{I}}$$

Пример 2

По данным синусу и косинусу дуги $67°30^{\text{I}}$ *найти синус и косинус дуг* $67°31^{\text{I}}$ *и* $67°29^{\text{I}}$.

Будем производить это вычисление с точностью до седьмого десятичного знака, с какой обычно составляются таблицы, и тогда с помощью логарифмов работа будет выполнена легко. Так как $x = 67°30^{\text{I}}$ и $\omega = 0{,}000\,290\,888$, то

$$\mathrm{l}\,\omega = 6{,}463\,725\,9$$

и

$$\begin{array}{rlrl}
\mathrm{l}\sin x &= 9{,}965\,615\,3 & \mathrm{l}\cos x &= 9{,}582\,839\,7\\
\mathrm{l}\,\omega &= 6{,}463\,725\,9 & \mathrm{l}\,\omega &= 6{,}463\,725\,9\\
\hline
\mathrm{l}\,\omega\sin x &= 6{,}429\,341\,2 & \mathrm{l}\,\omega\cos x &= 6{,}046\,565\,6\\
\mathrm{l}\,\frac{1}{2}\omega &= 6{,}162\,695\,9 & \mathrm{l}\,\frac{1}{2}\omega &= 6{,}162\,695\,9\\
\hline
\mathrm{l}\,\frac{1}{2}\omega^2\sin x &= 2{,}592\,037\,1 & \mathrm{l}\,\frac{1}{2}\omega^2\cos x &= 2{,}209\,261\,5
\end{array}$$

Следовательно,

$$\omega\sin x = 0{,}000\,268\,74, \qquad \omega\cos x = 0{,}000\,111\,32,$$

$$\frac{1}{2}\omega^2\sin x = 0{,}000\,000\,04, \qquad \frac{1}{2}\omega^2\cos x = 0{,}000\,000\,01,$$

откуда

$$\sin 67°31^{\text{I}} = 0{,}923\,990\,8, \qquad \cos 67°31^{\text{I}} = 0{,}382\,414\,7,$$

$$\sin 67°29^{\text{I}} = 0{,}923\,768\,1 \qquad \cos 67°29^{\text{I}} = 0{,}382\,952\,2.$$

Здесь можно было обойтись даже без членов $\frac{1}{2}\omega^2\sin x$ и $\frac{1}{2}\omega^2\cos x$.

97. Комбинируя ряды, которые мы нашли выше,

$$\sin(x+\omega) = \sin x + \omega\cos x - \frac{1}{2}\omega^2\sin x - \frac{1}{6}\omega^3\cos x + \frac{1}{24}\omega^4\sin x + \text{ и т. д.},$$

$$\cos(x+\omega) = \cos x - \omega\sin x - \frac{1}{2}\omega^2\cos x + \frac{1}{6}\omega^3\sin x + \frac{1}{24}\omega^4\cos x - \text{ и т. д.},$$

$$\sin(x-\omega) = \sin x - \omega\cos x - \frac{1}{2}\omega^2\sin x + \frac{1}{6}\omega^3\cos x + \frac{1}{24}\omega^4\sin x - \text{ и т. д.},$$

$$\cos(x-\omega) = \cos x + \omega\sin x - \frac{1}{2}\omega^2\cos x - \frac{1}{6}\omega^3\sin x + \frac{1}{24}\omega^4\cos x + \text{ и т. д.},$$

мы находим, что

$$\frac{\sin(x+\omega)+\sin(x-\omega)}{2} =$$
$$= \sin x - \frac{1}{2}\omega^2\sin x + \frac{1}{24}\omega^4\sin x - \frac{1}{720}\omega^6\sin x + \text{ и т. д. } = \sin x\cos\omega$$

и

$$\frac{\sin(x+\omega)-\sin(x-\omega)}{2} =$$
$$= \omega\cos x - \frac{1}{6}\omega\cos x + \frac{1}{120}\omega^5\cos x - \frac{1}{5040}\omega^7\cos x + \text{ и т. д. } = \cos x\sin\omega,$$

откуда получаются найденные выше[1]) ряды для косинусов и синусов:

$$\cos\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{24}\omega^4 - \frac{1}{720}\omega^6 + \text{ и т. д.},$$
$$\sin\omega = \omega - \frac{1}{6}\omega^3 + \frac{1}{120}\omega^5 - \frac{1}{5040}\omega^7 + \text{ и т. д.}$$

Эти ряды получаются из рядов, выписанных вначале, если положить $x=0$; действительно, так как $\cos x = 1$ и $\sin x = 0$, то первый ряд даст $\sin\omega$, а второй $\cos\omega$.

98. Положим теперь $y = \operatorname{tg} x$, так что $z = \operatorname{tg}(x+\omega)$; вследствие $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d^2y}{2\,dx^2} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}, \quad \frac{d^3y}{2\,dx^3} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x},$$
$$\frac{d^4y}{2\cdot 4\,dx^4} = \frac{3\sin x}{\cos^5 x} - \frac{\sin x}{\cos^3 x}, \quad \frac{d^5y}{2\cdot 4\,dx^5} = \frac{15}{\cos^6 x} - \frac{15}{\cos^4 x} + \frac{2}{\cos^2 x},$$

откуда следует, что

$$\operatorname{tg}(x+\omega) = \operatorname{tg} x + \left\{\begin{matrix} \dfrac{\omega}{\cos^2 x} + \dfrac{\omega^2\sin x}{\cos^3 x} + \dfrac{\omega^3}{\cos^4 x} + \dfrac{\omega^4\sin x}{\cos^5 x} + \text{ и т. д.} - \\ - \dfrac{2\omega^3}{3\cos^2 x} - \dfrac{\omega^4\sin x}{3\cos^3 x} - \text{ и т. д.} \end{matrix}\right\}$$

С помощью этой формулы можно по данному тангенсу некоторого угла найти тангенсы близких углов. Так как ряд, стоящий в верхней строке, является геометрическим, то, собрав его в единую сумму, мы будем иметь

$$\operatorname{tg}(x+\omega) = \operatorname{tg} x + \frac{\omega + \omega^2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x - \omega^2} - \frac{2\omega^3}{3\cos^2 x} - \frac{\omega^4\sin x}{3\cos^3 x} - \text{ и т. д.}$$

или

$$\operatorname{tg}(x+\omega) = \frac{\sin x\cos x + \omega}{\cos^2 x - \omega^2} - \frac{2\omega^3}{3\cos^2 x} - \frac{\omega^4\sin x}{3\cos^3 x} - \text{ и т. д.}$$

Эта формула удобнее для применения.

[1]) «Введение в анализ», ч. I, гл. VII, § 134.

99. Подобные выражения можно найти также для логарифмов синусов, косинусов и тангенсов. Действительно, если y равен логарифму синуса угла x, что мы обозначим так: $y = \mathrm{l}\sin x$, тогда $z = \mathrm{l}\sin(x+\omega)$. Вследствие $\frac{dy}{dx} = \frac{n\cos x}{\sin x}$ будем иметь $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{n}{\sin^2 x}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{+2n\cos x}{\sin^3 x}$ и т. д., откуда

$$z = \mathrm{l}\sin(x+\omega) = \mathrm{l}\sin x + \frac{n\omega\cos x}{\sin x} - \frac{n\omega^2}{2\sin^2 x} + \frac{n\omega^3\cos x}{3\sin^3 x} - \text{и т. д.},$$

где n обозначает число, на которое нужно помножить гиперболические логарифмы, чтобы получить предложенные логарифмы. Если же $y = \mathrm{l}\,\mathrm{tg}\, x$ и $z = \mathrm{l}\,\mathrm{tg}(x+\omega)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{\sin x\cos x} = \frac{2n}{\sin 2x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2n\cos 2x}{(\sin 2x)^2},$$

так что

$$\mathrm{l}\,\mathrm{tg}(x+\omega) = \mathrm{l}\,\mathrm{tg}\, x + \frac{2n\omega}{\sin 2x} - \frac{2n\omega^2\cos^2 x}{(\sin 2x)^2} + \text{и т. д.}$$

С помощью этих формул можно интерполировать логарифмы синусов и косинусов.

100. Пусть y обозначает дугу, для которой логарифм синуса равен x, т. е. пусть $y = \mathrm{A}\cdot\mathrm{l}\sin x$[1]). Пусть z есть дуга, для которой логарифм синуса равен $x+\omega$, т. е. $z = \mathrm{A}\cdot\mathrm{l}\sin(x+\omega)$, тогда $x = \mathrm{l}\sin y$,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{n\cos y}{\sin y},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{n\cos y}.$$

Мы будем иметь $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{n\cos^2 y} = \frac{dx\sin y}{n^2\cos^3 y}$; значит, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin y}{n^2\cos^3 y}$.

Следовательно,

$$z = y + \frac{\omega\sin y}{n\cos y} + \frac{\omega^2\sin y}{2n^2\cos^3 y} + \text{и т. д.}$$

Подобным образом найдётся выражение, если будет дан логарифм косинуса.

Если же $y = \mathrm{A}\,\mathrm{l}\,\mathrm{tg}\, x$[2]) и $z = \mathrm{A}\cdot\mathrm{l}\,\mathrm{tg}(x+\omega)$, то, так как $x = \mathrm{l}\,\mathrm{tg}\, y$, получим

$$\frac{dx}{dy} = \frac{n}{\sin y\cos y} \text{ и } \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y\cos y}{n} = \frac{\sin 2y}{2n}.$$

Поэтому

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{2dy\cos 2y}{2n} = \frac{dx\sin 2y\cos 2y}{2n^2}$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin 2y\cos 2y}{2n^2} = \frac{\sin 4y}{4n^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\sin 2y\cos 4y}{2n^3} \text{ и т. д.}$$

Отсюда

$$z = y + \frac{\omega\sin 2y}{2n} + \frac{\omega^2\sin 2y\cos 2y}{4n^2} + \frac{\omega^3\sin 2y\cos 4y}{12n^3} + \text{и т. д.}$$

---

[1]) Здесь сохранено обозначение Эйлера, аналогичное его обозначению $\mathrm{A}\sin x$, соответствующему нашему $\arcsin x$. Точка, стоящая перед $\mathrm{l}\sin x$, заменяет скобки, в которые заключается это выражение. Эйлерова запись $y = \mathrm{A}\,\mathrm{l}\sin x$ обозначает, что $x = \mathrm{l}\sin y$. Аналогично нужно понимать употребляемые данные выражения $\mathrm{A}\cdot\mathrm{l}\,\mathrm{tg}\, x$.

[2]) См. предыдущую сноску.

101. Так как способ пользования этими выражениями при составлении таблиц логарифмов синусов и тангенсов легко понять из вышесказанного, то мы на этом дольше останавливаться не будем. Рассмотрим ещё такое выражение: $y = e^x \sin nx$, и пусть $z = e^{x+\omega} \sin n(x+\omega)$; так как мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = e^x (\sin nx + n \cos x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x ((1-n^2)\sin nx + 2n \cos x),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^x ((1-3n^2)\sin nx + n(3-n^2)\cos nx),$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = e^x ((1-6n^2+n^4)\sin nx + n(4-4n^2)\cos nx),$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = e^x ((1-10n^2+5n^4)\sin nx + n(5+10n^2+n^4)\cos nx) \text{ и т. д.}$$

то, подставив эти значения и разделив на e^x, будем иметь:

$$e^\omega \sin n(x+\omega) = \sin nx + \omega \sin nx + \frac{1-n^2}{2}\omega^2 \sin nx + \frac{1-3n^2}{6}\omega^3 \sin nx + \frac{1-6n^2+n^4}{24}\omega^4 \sin nx + \text{и т. д.} + n\omega \cos nx + \frac{2n}{2}\omega^2 \cos nx + \frac{n(3-n^2)}{6}\omega^3 \cos nx + \frac{n(4-4n^2)}{24}\omega^4 \cos nx + \text{и т. д.}$$

102. Отсюда можно получить многие частные случаи. Нам достаточно будет рассмотреть следующее.

Если $x=0$, то будем иметь

$$e^\omega \sin n\omega = n\omega + \frac{2n}{2}\omega^2 + \frac{n(3-n^2)}{6}\omega^3 + \frac{n(4-4n^2)}{24}\omega^4 + \frac{n(5-10n^2+n^4)}{120}\omega^5 + \text{и т. д.}$$

Если $\omega = -x$, то вследствие $\sin n(x+\omega) = 0$ будем иметь

$$\operatorname{tg} nx = \frac{nx - \frac{2n}{2}x^2 + \frac{n(3-n^2)}{6}x^3 - \frac{n(4-4n^2)}{24}x^4 + \text{и т. д.}}{1 - x + \frac{1-n^2}{2}x^2 - \frac{1-3n^2}{6}x^3 + \frac{1-6n^2+n^4}{24}x^4 - \text{и т. д.}}.$$

Если вообще $n=1$, то получим

$$e^\omega \sin(x+\omega) = \sin x \left(1 + \omega - \frac{1}{3}\omega^3 - \frac{1}{6}\omega^4 - \frac{1}{30}\omega^5 + \frac{1}{630}\omega^7 + \text{и т. д.}\right) + \omega \cos x \left(1 + \omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \frac{1}{30}\omega^4 - \frac{1}{90}\omega^5 - \frac{1}{630}\omega^6 + \text{и т. д.}\right).$$

Если же $n=0$, то вследствие $\sin n(x+\omega) = n(x+\omega)$, $\sin nx = nx$ и $\cos nx = 1$, после того как всюду разделим на n, получим

$$e^\omega (x+\omega) = x + \omega x + \frac{1}{2}\omega^2 x + \frac{1}{6}\omega^3 x + \frac{1}{24}\omega^4 x + \text{и т. д.} + \omega + \omega^2 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{6}\omega^4 + \frac{1}{24}\omega^5 + \text{и т. д.}$$

Способ составления этого ряда очевиден.

ГЛАВА V

РАЗЫСКАНИЕ СУММЫ РЯДА ПО ОБЩЕМУ ЧЛЕНУ

103. Пусть общий член какого-либо ряда, равный y, отвечает индексу x, так что y есть некоторая функция от x. Пусть далее Sy есть сумма или суммационный член ряда, выражающий результат сложения всех членов от первого или какого-нибудь иного фиксированного члена до y включительно. Мы будем подсчитывать суммы рядов от первого члена, так что, если $x=1$, то y даст первый член, и Sy также выразит этот первый член. Если же положить $x=0$, то суммационный член должен обратиться в нуль, так как тогда нет никаких суммируемых членов. Таким образом, суммационный член Sy будет такого рода функцией от x, которая исчезает при $x=0$.

104. Если общий член y состоит из нескольких частей, так что $y=p+q+r+$ и т. д., тогда сам ряд может рассматриваться как составленный из нескольких других рядов, общие члены которых суть p, q, r и т. д. Поэтому, если будут известны суммы отдельных этих рядов, то вместе с тем можно будет определить сумму предложенного ряда; в самом деле, она будет равна результату сложения отдельных сумм. Поэтому, если $y=p+q+r+$ и т. д., то будем иметь $Sy=Sp+Sq+$ $+Sr+$ и т. д. А так как выше мы определили суммы рядов, общие члены которых суть какие-нибудь степени x, имеющие целые положительные показатели, то можно будет найти суммационный член всякого ряда, общий член которого есть $ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+$ и т. д., где α, β, γ, и т. д. суть целые положительные числа, т. е. общий член которого есть целая рациональная функция от x.

105. Пусть в ряде, общий член которого, т. е. член, отвечающий индексу x, равен y, член, предшествующий общему, т. е. отвечающий индексу $x-1$, равен v. Поскольку v получается из y, если вместо x написать $x-1$, будем иметь

$$v=y-\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{2dx^2}-\frac{d^3y}{6dx^3}+\frac{d^4y}{24dx^4}-\text{ и т. д.}$$

Если y будет общий член ряда

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots x-1 & x \\ a+ & b+ & c+ & d+ & \ldots +v & +y \end{matrix}$$

и член этого ряда, отвечающий индексу 0, будет равен A, то v, поскольку оно является функцией от x, будет общим членом ряда

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots & x, \\ A+ & a+ & b+ & c+ & d+\ldots & +v. \end{matrix}$$

Поэтому, если Sv есть сумма этого ряда, то $Sv = Sy - y + A$. Таким образом, при $x = 0$, поскольку $Sy = 0$ и $y = A$, также и Sv исчезает.

106. Так как

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \text{ и т. д.},$$

то, по доказанному,

$$Sv = Sy - S\frac{dy}{dx} + S\frac{d^2y}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + \text{ и т. д.}$$

и вследствие $Sv = Sy - y + A$ будем иметь

$$y - A = S\frac{dy}{dx} - S\frac{d^2y}{2dx^2} + S\frac{d^3y}{6dx^3} - S\frac{d^4y}{24dx^4} + \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получится

$$S\frac{dy}{dx} = y - A + S\frac{d^2y}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + S\frac{d^4y}{24dx^4} - \text{ и т. д.}$$

Итак, если известны суммационные члены рядов, общие члены которых суть $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, то из них найдётся суммационный член ряда, общий член которого есть $\frac{dy}{dx}$. Постоянное же количество A должно быть взято так, чтобы при $x = 0$ суммационный член $S\frac{dy}{dx}$ исчезал, и с помощью этого условия оно определится легче, чем если мы скажем, что оно является членом, соответствующим индексу 0, в ряде, общий член которого равен y.

107. Это даёт возможность найти суммы степеней натуральных чисел. Действительно, пусть $y = x^{n+1}$; так как

$$\frac{dy}{dx} = (n+1)\,x^n, \quad \frac{d^2y}{2dx^2} = \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}\,x^{n-1}, \quad \frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^{n-2},$$
$$\frac{d^4y}{24dx^4} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,x^{n-3} \text{ и т. д.}$$

то, подставляя эти значения, будем иметь

$$(n+1)Sx^n = x^{n+1} - A + \frac{(n+1)\,n}{1\cdot 2}\,Sx^{n-1} - \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,Sx^{n-2} + \text{ и т. д.};$$

если обе части равенства разделить на $n+1$, будем иметь

$$Sx^n = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + \frac{n}{2}\,Sx^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{2\cdot 3}\,Sx^{n-2} + \text{ и т. д.} - \text{const}.$$

Постоянное это должно быть взято так, чтобы при $x = 0$ весь суммационный член исчезал. Таким образом, с помощью этой формулы из известных уже сумм низших степеней, общие члены которых суть x^{n-1}, x^{n-2} и т. д., можно найти сумму высших степеней, выражаемых общим членом x^n.

108. Если в этом выражении n есть целое положительное число, то число членов будет конечным. Таким образом, сумма низших степеней будет известна с полной точностью. Действительно, если $n = 0$, то

$$Sx^0 = x.$$

Зная её, можно будет перейти к высшим степеням; в самом деле, полагая $n = 1$, будем иметь

$$Sx^1 = \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,Sx^0 = \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x.$$

Если положить $n=2$, получим

$$Sx^2 = \frac{1}{3}x^3 + Sx - \frac{1}{3}Sx^0 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x,$$

далее,

$$Sx^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}Sx^2 - Sx + \frac{1}{4}Sx^0 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2,$$

$$Sx^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{2}Sx^3 - \frac{4}{2}Sx^2 + Sx - \frac{1}{5}Sx^0,$$

или

$$Sx^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x.$$

Таким же образом и дальше суммы высших степеней будут составляться из сумм низших. Это легче можно сделать следующим образом.

109. Так как выше мы нашли, что

$$S\frac{dy}{dx} = y + \frac{1}{2}S\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{6}S\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{24}S\frac{d^4y}{dx^4} - \text{и т. д.},$$

то если положить $\frac{dy}{dx} = z$, будем иметь $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2z}{dx^2}$ и т. д. Поскольку теперь $dy = z\,dx$, то y будет количеством, дифференциал которого равен $z\,dx$, что можно обозначить так: $y = \int z\,dx$. Хотя нахождение количества y по данному z требует применения интегрального исчисления, однако здесь мы можем пользоваться формулой $\int z\,dx$, если только мы не будем подставлять вместо z никаких других функций от x, кроме таких, чтобы эта функция, дифференциал которой равен $z\,dx$, могла быть получена из известного ранее. Итак, подставив эти значения, будем иметь

$$Sz = \int z\,dx + \frac{1}{2}S\frac{dz}{dx} - \frac{1}{6}S\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} - \text{и т. д.},$$

причём нужно прибавить такое постоянное, чтобы при $x=0$ сумма Sz исчезала.

110. Если в первое из этих выражений подставить вместо y букву z, или, что то же, если дифференцировать второе, получится

$$S\frac{dz}{dx} = z + \frac{1}{2}S\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} - \text{и т. д.}$$

Если же вместо y положить $\frac{dz}{dx}$, то будем иметь

$$S\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{1}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} + \frac{1}{24}S\frac{d^5z}{dx^5} - \text{и т. д.}$$

Подобным образом, если вместо y последовательно полагать $\frac{d^2z}{dx^2}$ и $\frac{d^3z}{dx^3}$ и т. д., найдём

$$S\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{1}{6}S\frac{d^5z}{dx^5} + \frac{1}{24}S\frac{d^6z}{dx^6} - \text{и т. д.},$$

$$S\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{2}S\frac{d^5z}{dx^5} - \frac{1}{6}S\frac{d^6z}{dx^6} - \frac{1}{24}S\frac{d^7z}{dx^7} - \text{и т. д.}$$

и т. д. до бесконечности.

111. Если теперь эти значения $S\frac{dz}{dx}$, $S\frac{d^2z}{dx^2}$, $S\frac{d^3z}{dx^3}$ и т. д. последо-
ельно подставить в выражение

$$Sz=\int z\,dx+\frac{1}{2}S\frac{dz}{dx}-\frac{1}{6}S\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3}-\text{и т. д.},$$

мы найдём для Sz выражение, которое будет состоять из чле-
: $\int z\,dx, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}$ и т. д., коэффициенты которых легко **найти**
дующим образом. Положим

$$Sz=\int z\,dx+\alpha z+\beta\frac{dz}{dx}+\gamma\frac{d^2z}{dx^2}+\delta\frac{d^3z}{dx^3}-\text{и т. д.}$$

место этих членов подставим те их выражения, которые получаются
предшествующих рядов, из которых

$$\begin{array}{rl}
\int z\,dx = & Sz-\frac{1}{2}S\frac{dz}{dx}+\frac{1}{6}S\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{120}S\frac{d^4z}{dx^4}-\text{и т. д.},\\
\alpha z = & +\alpha S\frac{dz}{dx}-\frac{\alpha}{2}S\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\alpha}{6}S\frac{d^3z}{dx^3}-\frac{\alpha}{24}S\frac{d^4z}{dx^4}+\text{и т. д.},\\
\beta\frac{dz}{dx} = & \beta S\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{\beta}{2}S\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{\beta}{6}S\frac{d^4z}{dx^4}-\text{и т. д.},\\
\gamma\frac{d^2z}{dx^2} = & \gamma S\frac{d^3z}{dx^3}-\frac{\gamma}{2}S\frac{d^4z}{dx^4}+\text{и т. д.},\\
\delta\frac{d^3z}{dx^3} = & \delta S\frac{d^4z}{dx^4}-\text{и т. д.}\\
 & \text{и т. д.}
\end{array}$$

к как эти значения, будучи сложены, должны дать Sz, то коэф-
фициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т. д. определятся из следующих уравнений:

$$\alpha-\frac{1}{2}=0,\quad \beta-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{6}=0,\quad \gamma-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{6}-\frac{1}{24}=0,$$

$$\delta-\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{6}-\frac{\alpha}{24}+\frac{1}{120}=0,\quad \varepsilon-\frac{\delta}{2}+\frac{\gamma}{6}-\frac{\beta}{24}+\frac{\alpha}{120}-\frac{1}{720}=0,$$

$$\zeta-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\delta}{6}-\frac{\gamma}{24}+\frac{\beta}{120}-\frac{\alpha}{720}+\frac{1}{5040}=0\ \text{и т. д.}$$

112. Из этих уравнений можно будет последовательно найти зна-
ния всех букв $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т. д.; мы получим

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12},\quad \gamma=\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{24}=0,$$

$$\delta=\frac{\gamma}{2}-\frac{\beta}{6}+\frac{\alpha}{24}-\frac{1}{120}=-\frac{1}{720},\quad \varepsilon=\frac{\delta}{2}-\frac{\gamma}{6}+\frac{\beta}{24}-\frac{\alpha}{120}+\frac{1}{720}=0\ \text{и т. д.}$$

родолжая эти вычисления дальше, будем последовательно находить,
о члены попеременно исчезают. Именно, члены, стоящие на третьем,
том, седьмом и т. д. месте, будут равны нулю. Но первый член
едставляет исключение, и вследствие этого представляется, что ряд
их значений вступает в столкновение с законом непрерывности. Тем
лее необходимо поэтому строго доказать, что все нечётные члены,
оме первого, необходимо должны исчезать.

113. Так как отдельные буквы определяются из предшествующих по их постоянному закону, то они образуют рекуррентный ряд. Чтобы выразить его, рассмотрим ряд

$$1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\zeta u^6+ \text{ и т. д.}$$

Пусть значение его равно V. Тогда очевидно, что упомянутый рекуррентный ряд проистекает из разложения дроби

$$V=\frac{1}{1-\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}u^2-\frac{1}{24}u^3+\frac{1}{120}u^4-\text{ и т. д.}}.$$

И если можно эту дробь другим способом разложить в ряд, расположенный по степеням u, то необходимо должен получиться тот же самый ряд

$$V=1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\text{ и т. д.}$$

Таким образом, будет найден другой закон, из которого определятся те же значения $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т. д.

114. Если e есть число, гиперболический логарифм которого равен единице, то

$$e^{-u}=1-u+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{24}u^4-\frac{1}{120}u^5+\text{ и т. д.}$$

Поэтому будем иметь

$$\frac{1-e^{-u}}{u}=1-\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}u^2-\frac{1}{24}u^3+\frac{1}{120}u^4-\text{ и т. д.},$$

так что

$$V=\frac{u}{1-e^{-u}}.$$

Уничтожим теперь в ряде второй его член $\alpha u=\frac{1}{2}u$, так что получится

$$V-\frac{1}{2}u=1+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5 \quad \text{и т. д.}$$

Тогда будем иметь

$$V-\frac{1}{2}u=\frac{\frac{1}{2}u(1+e^{-u})}{1-e^{-u}}.$$

Помножим числитель и знаменатель на $e^{\frac{1}{2}u}$; будем иметь

$$V-\frac{1}{2}u=\frac{u\left(e^{\frac{1}{2}u}+e^{-\frac{1}{2}u}\right)}{u\left(e^{\frac{1}{2}u}-e^{-\frac{1}{2}u}\right)}.$$

Разложив количества $e^{\frac{1}{2}u}$ и $e^{-\frac{1}{2}u}$ в ряды, получим

$$V-\frac{1}{2}u=\frac{1+\frac{u^2}{2\cdot4}+\frac{u^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{u^6}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}+\text{ и т. д.}}{2\left(\frac{1}{2}+\frac{u^2}{2\cdot4\cdot6}+\frac{u^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}+\text{ и т. д.}\right)},$$

или

$$V-\frac{1}{2}u=\frac{1+\frac{u^2}{2\cdot4}+\frac{u^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{u^6}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}+\text{ и т. д.}}{1+\frac{u^2}{4\cdot6}+\frac{u^4}{4\cdot6\cdot8\cdot10}+\frac{u^6}{4\cdot6\ldots14}+\text{ и т. д.}}.$$

115. Так как в этой дроби совершенно отсутствуют нечётные степени, то и в его разложение вовсе не войдут никакие чётные степени. Поэтому, так как $V-\frac{1}{2}u$ равен ряду

$$1+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\text{ и т. д.},$$

то коэффициенты нечётных степеней $\gamma, \varepsilon, \eta, \iota$ и т. д. все исчезают. Таким образом, становится очевидна причина, почему в ряде $1+\alpha u+\beta u^2+$ $+\gamma u^3+\delta u^4+$ и т. д. члены, занимающие чётные места, все равны нулю, кроме второго, и при этом всё же сохраняет силу закон непрерывности. Итак, будем иметь

$$U=1+\frac{1}{2}u+\beta u^2+\delta u^4+\zeta u^6+\theta u^8+\text{ и т. д.}$$

Если буквы $\beta, \delta, \zeta, \theta$ будут определены с помощью разложения вышеприведённой дроби, мы получим суммационный член Sz ряда, общий член которого, отвечающий индексу x, равен z, в виде

$$Sz=\int z\,dx+\frac{1}{2}z+\beta\frac{dz}{dx}+\delta\frac{d^3z}{dx^3}+\xi\frac{d^5z}{dx^5}+\text{ и т. д.}$$

116. Так как ряд $1+\beta u^2+\delta u^4+\zeta u^6+\theta u^8+$ и т. д. происходит из разложения дроби

$$\frac{1+\frac{u^2}{2\cdot4}+\frac{u^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{u^6}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}+\text{ и т. д.}}{1+\frac{u^2}{4\cdot6}+\frac{u^4}{4\cdot6\cdot8\cdot10}+\frac{u^6}{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14}+\text{ и т. д.}},$$

то буквы $\beta, \delta, \zeta, \theta$ и т. д. подчинены такому закону:

$$\beta=\frac{1}{2\cdot4}-\frac{1}{4\cdot6},$$

$$\delta=\frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot8}-\frac{\beta}{4\cdot6}-\frac{1}{4\cdot6\cdot8\cdot10},$$

$$\zeta=\frac{1}{2\cdot4\ldots12}-\frac{\delta}{4\cdot6}-\frac{\beta}{4\cdot6\cdot8\cdot10}-\frac{1}{4\cdot6\ldots14},$$

$$\theta=\frac{1}{2\cdot4\ldots16}-\frac{\zeta}{4\cdot6}-\frac{\delta}{4\cdot6\cdot8\cdot10}-\frac{\beta}{4\cdot6\ldots10}-\frac{1}{4\cdot6\ldots18}$$

и т. д.

Эти значения попеременно положительны и отрицательны.

117. Если мы припишем этим буквам, взятым через одно, отрицательные знаки, так что

$$Sz=\int z\,dx+\frac{1}{2}z-\beta\frac{dz}{dx}+\delta\frac{d^3z}{dx^3}-\zeta\frac{d^5z}{dx^5}+\theta\frac{d^7z}{dx^7}-\text{ и т. д.},$$

то буквы $\beta, \delta, \zeta, \theta$ и т. д. определятся из дроби

$$\frac{1-\frac{u^2}{2\cdot4}+\frac{u^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8}-\frac{u^6}{2\cdot4\ldots12}+\frac{u^8}{2\cdot4\ldots16}-\text{ и т. д.}}{1-\frac{u^2}{4\cdot6}+\frac{u^4}{4\cdot6\cdot8\cdot10}-\frac{u^6}{4\cdot6\ldots14}+\frac{u^8}{4\cdot6\ldots18}-\text{ и т. д.}}.$$

если её разложить в ряд

$$1+\beta u^2+\delta u^4+\zeta u^6+\theta u^8+\text{ и т. д.}$$

Поэтому будем иметь

$$\beta=\frac{1}{6\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 4},$$
$$\delta=\frac{\beta}{4\cdot 6}-\frac{1}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8},$$
$$\zeta=\frac{\delta}{4\cdot 6}-\frac{\beta}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\frac{1}{4\cdot 6\ldots 14}-\frac{1}{2\cdot 4\ldots 12}\text{ и т. д.,}$$

и теперь все члены будут положительны.

118. Положим $\beta=-A$, $\delta=-B$, $\zeta=-C$ и т. д., так что

$$Sz=\int z\,dx+\frac{1}{2}z+A\frac{dz}{dx}-B\frac{d^3z}{dx^3}+C\frac{d^5z}{dx^5}-\text{ и т. д.,}$$

и для определения букв A, B, C, D и т. д. рассмотрим ряд

$$1-Au^2-Bu^4-Cu^6-Du^8-\text{ и т. д.,}$$

который происходит из разложения дроби

$$\frac{1-\dfrac{u^2}{2\cdot 4}+\dfrac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}-\dfrac{u^6}{2\cdot 4\ldots 12}+\dfrac{u^8}{2\cdot 4\ldots 16}-\text{ и т. д.}}{1-\dfrac{u^2}{4\cdot 6}+\dfrac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}-\dfrac{u^6}{4\cdot 6\ldots 14}+\dfrac{u^8}{4\cdot 6\ldots 18}-\text{ и т. д.}}.$$

Или можно рассмотреть ряд

$$\frac{1}{u}-Au-Bu^3-Cu^5-Du^7-Eu^9-\text{ и т. д.}=S,$$

который происходит из разложения дроби

$$s=\frac{1-\dfrac{u^2}{2\cdot 4}+\dfrac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}-\dfrac{u^6}{2\cdot 4\ldots 12}+\text{ и т. д.}}{u-\dfrac{u^3}{4\cdot 6}+\dfrac{u^5}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}-\dfrac{u^7}{4\cdot 6\ldots 14}+\text{ и т. д.}}.$$

А так как

$$\cos\frac{1}{2}u=1-\frac{u^2}{2\cdot 4}+\frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}-\frac{u^6}{2\cdot 4\ldots 12}+\text{ и т. д.,}$$
$$\sin\frac{1}{2}u=\frac{u}{2}-\frac{u^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{u^5}{2\cdot 4\ldots 10}-\frac{u^7}{2\cdot 4\ldots 14}+\text{ и т. д.,}$$

то отсюда следует, что

$$s=\frac{\cos\frac{1}{2}u}{2\sin\frac{1}{2}u}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}u.$$

Поэтому, если котангенс дуги $\frac{1}{2}u$ разложить в ряд, члены которого расположены по степеням u, то из этого ряда можно будет найти значения букв A, B, C, D, E и т. д.

119. Так как $s=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}u$, то $\frac{1}{2}u=\operatorname{arcctg}2s$; дифференцируя, будем иметь $\frac{1}{2}du=\frac{-2ds}{1+4s^2}$ или $4ds+du+4s^2du=0$ или

$$4\frac{ds}{du}+1+4s^2=0.$$

Но так как

$$s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - \text{ и т. д.}$$

то

$$4\frac{ds}{du} = -\frac{1}{u^2} - 4A - 3 \cdot 4Bu^2 - 5 \cdot 4Cu^4 - \text{ и т. д.}$$

$$1 = 1$$

$$4s^2 = \frac{4}{u^2} - 8A - 8Bu^2 - 8Cu^4 - 8Du^6 - \text{ и т. д.} + {}$$
$$+ 4A^2u^2 + 8ABu^4 + 8ACu^6 + \text{ и т. д.} + {}$$
$$+ 4B^2u^6 + \text{ и т. д.}$$

Приравнивая нулю суммы однородных членов, будем иметь

$$A = \frac{1}{12}, \quad B = \frac{A^2}{5}, \quad C = \frac{2AB}{7}, \quad D = \frac{2AC + B^2}{9}, \quad E = \frac{2AD + 2BC}{11},$$
$$F = \frac{2AE + 2BD + C^2}{13}, \quad G = \frac{2AF + 2BE + 2CD}{15} \text{ и т. д.}$$

Уже из этих формул ясно, что эти значения положительны.

120. Так как знаменатели этих дробей очень велики, и это очень мешает при вычислениях, то вместо букв A, B, C, D и т. д. введём следующие новые буквы:

$$A = \frac{\alpha}{1\cdot2\cdot3}, \quad B = \frac{\beta}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}, \quad C = \frac{\gamma}{1\cdot2\cdot3\ldots7},$$
$$D = \frac{\delta}{1\cdot2\cdot3\ldots9}, \quad E = \frac{\varepsilon}{1\cdot2\cdot3\ldots11} \text{ и т. д.}$$

Тогда найдём, что

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{2}{3}\alpha^2, \quad \gamma = 2 \cdot \frac{3}{3}\alpha\beta, \quad \delta = 2 \cdot \frac{4}{3}\alpha\gamma + \frac{8}{4} \cdot \frac{7}{5}\beta^2,$$
$$\varepsilon = 2 \cdot \frac{5}{3}\alpha\delta + 2\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\ldots5}\beta\gamma, \quad \zeta = 2\frac{12}{1\cdot2\cdot3}\alpha\varepsilon + 2\frac{12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\ldots5}\beta\delta + \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\ldots7}\gamma^2,$$
$$\eta = 2\frac{14}{1\cdot2\cdot3}\alpha\zeta + 2\frac{14\cdot13\cdot12}{1\cdot2\ldots5}\beta\varepsilon + 2\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\ldots7}\gamma\delta \text{ и т. д.}$$

121. Удобнее же будет воспользоваться формулами

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{4}{3}\frac{\alpha^2}{2}, \quad \gamma = \frac{6}{3}\alpha\beta, \quad \delta = \frac{8}{3}\alpha\gamma + \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot4\cdot5}\frac{\beta^2}{2},$$
$$\varepsilon = \frac{10}{3}\alpha\delta + \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot4\cdot5}\beta\gamma, \quad \zeta = \frac{12}{3}\alpha\varepsilon + \frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot4\cdot5}\beta\delta + \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\frac{\gamma^2}{2},$$
$$\eta = \frac{14}{3}\alpha\zeta + \frac{14\cdot13\cdot12}{3\cdot4\cdot5}\beta\varepsilon + \frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\gamma\delta,$$
$$\theta = \frac{16}{3}\alpha\eta + \frac{16\cdot15\cdot14}{3\cdot4\cdot5}\beta\zeta + \frac{16\cdot15\ldots12}{3\cdot4\ldots7}\gamma\varepsilon + \frac{16\cdot15\ldots10}{3\cdot4\ldots9}\frac{\delta^2}{2} \text{ и т. д.}$$

Согласно этому закону вычисление совершается без труда, а если найдены будут значения букв $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т. д., то суммационный член какого угодно ряда, общий член которого, соответствующий индексу x, равен z, выразится следующим образом:

$$Sz = \int z\,dx + \frac{1}{2}z + \frac{\alpha\,dz}{1\cdot2\cdot3\,dx} - \frac{\beta\,d^3z}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\,dx^3} + \frac{\gamma\,d^5z}{1\cdot2\ldots7\,dx^5} - \frac{\delta\,d^7z}{12\ldots9\,dx^7} + {}$$
$$+ \frac{\varepsilon\,d^9z}{1\cdot2\ldots11\,dx^9} - \frac{\zeta\,d^{11}z}{1\cdot2\ldots13\,dx^{11}} + \text{ и т. д.}$$

Буквы же $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ и т. д., как мы нашли, имеют следующие значения:

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad 1\cdot 2\alpha = 1,$$
$$\beta = \frac{1}{6} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\beta = 1,$$
$$\gamma = \frac{1}{6} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\gamma = 4,$$
$$\delta = \frac{3}{10} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\delta = 36,$$
$$\varepsilon = \frac{5}{6} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\ldots 6\varepsilon = 600,$$
$$\zeta = \frac{691}{210} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\ldots 7\zeta = 24\cdot 691,$$
$$\eta = \frac{35}{2} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\ldots 8\eta = 20\,160\cdot 35,$$
$$\theta = \frac{3617}{30} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\ldots 9\theta = 12\,006\cdot 3617,$$
$$\iota = \frac{43\,867}{42} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\ldots 10\iota = 86\,400\cdot 43\,867,$$
$$\varkappa = \frac{1\,222\,277}{110} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\ldots 11\varkappa = 362\,880\cdot 1\,222\,277,$$
$$\lambda = \frac{854\,513}{6} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\ldots 12\lambda = 79\,833\,600\cdot 854\,513,$$
$$\mu = \frac{1\,181\,820\,455}{546} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\ldots 13\mu = 11\,404\,800\cdot 1\,181\,820\,455,$$
$$\nu = \frac{76\,977\,927}{2} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\ldots 14\nu = 43\,589\,145\,600\cdot 76\,977\,927\ ^{1)},$$
$$\xi = \frac{23\,749\,461\,029}{30} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\ldots 15\xi = 43\,589\,145\,600\cdot 23\,749\,461\,029,$$
$$\pi = \frac{8\,615\,841\,276\,005}{462} \qquad 1\cdot 2\cdot 3\ldots 16\pi = 45\,287\,424\,000\cdot 8\,615\,841\,276\,005$$

и т. д.

122. Эти числа имеют очень широкое применение повсюду в учении о рядах. В самом деле, во-первых, из этих чисел можно образовать последние члены в суммах чётных степеней, которые, как выше мы отметили, нельзя, подобно остальным членам, найти из предшествующих сумм. В суммах чётных степеней последние члены содержат произведение x на некоторые числа. Эти числа для степеней II, IV, VI, VIII и т. д. суть $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$ и т. д. с чередующимися знаками. Но эти числа получаются, если вышенайденные значения $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т. д. разделить соответственно на нечётные числа $3, 5, 7, 9$ и т. д., так что эти числа, которые по имени открывшего их Якова Бернулли [2])

[1]) В первом издании $1\cdot 2\cdot 3\ldots 14\nu = 109\,109\,145\,600\cdot 7\,697\,792$ [Г. К.].

[2]) Яков Бернулли получил эти числа (он обозначал их через $A, B, C, D\ldots$) как коэффициенты в найденном им выражении суммы степеней натуральных чисел:

$$Sn^c = 1^c + 2^c + \ldots + n^c = \frac{n^{c+1}}{c+1} + \frac{n^c}{2} + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{c-3} + \\ + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}cn^{c-5}. \qquad (1)$$

называют бернуллиевыми, будут

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{3}=\frac{1}{6}=\mathfrak{A}, && \frac{\iota}{19}=\frac{43\,867}{798}=\mathfrak{I},\\
&\frac{\beta}{5}=\frac{1}{30}=\mathfrak{B}, && \frac{\varkappa}{21}=\frac{174\,611}{330}=\mathfrak{K}=\frac{283\cdot 617}{330},\\
&\frac{\gamma}{7}=\frac{1}{42}=\mathfrak{C}, && \frac{\lambda}{23}=\frac{854\,513}{138}=\mathfrak{L}=\frac{11\cdot 131\cdot 593}{2\cdot 3\cdot 23},\\
&\frac{\delta}{9}=\frac{1}{30}=\mathfrak{D}, && \frac{\mu}{25}=\frac{236\,364\,091}{2730}=\mathfrak{M},\\
&\frac{\varepsilon}{11}=\frac{5}{66}=\mathfrak{E}, && \frac{\nu}{27}=\frac{8\,553\,103}{6}=\mathfrak{N}=\frac{13\cdot 657\,931}{6},\\
&\frac{\zeta}{13}=\frac{691}{2730}=\mathfrak{F}, && \frac{\xi}{29}=\frac{23\,749\,461\,029}{870}=\mathfrak{O},\\
&\frac{\eta}{15}=\frac{7}{6}=\mathfrak{G}, && \frac{\pi}{31}=\frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322}=\mathfrak{P}.\\
&\frac{\theta}{17}=\frac{3617}{510}=\mathfrak{H}, &&
\end{aligned}
$$

123. Таким образом, эти бернуллиевы числа можно **найти** непосредственно из следующих уравнений:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}&=\frac{1}{6},\\
\mathfrak{B}&=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{5}\mathfrak{A},\\
\mathfrak{C}&=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\frac{2}{7}\mathfrak{A}\mathfrak{B},\\
\mathfrak{D}&=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{2}{9}\mathfrak{A}\mathfrak{C}+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{9}\mathfrak{B}^2,\\
\mathfrak{E}&=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\frac{2}{11}\mathfrak{A}\mathfrak{D}+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{2}{11}\mathfrak{B}\mathfrak{C},\\
\mathfrak{F}&=\frac{2\cdot 11}{1\cdot 2}\cdot\frac{2}{13}\mathfrak{A}\mathfrak{E}+\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{2}{13}\mathfrak{B}\mathfrak{D}+\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\frac{1}{13}\mathfrak{C}^2,\\
\mathfrak{G}&=\frac{14\cdot 13}{1\cdot 2}\cdot\frac{2}{15}\mathfrak{A}\mathfrak{F}+\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{2}{15}\mathfrak{B}\mathfrak{E}+\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\frac{2}{15}\mathfrak{C}\mathfrak{D}
\end{aligned}
$$

и т. д.,

закон составления которых очевиден сам собой; следует только отметить, что там, где входит квадрат какой-либо буквы, коэффициент вдвое меньше, чем он, казалось бы, должен быть по общему правилу. На самом же деле члены, которые содержат произведения неравных букв,

---

Эта замечательная формула дана в его работе Ars conjectandi («Наука предугадывания», т. е. теория вероятностей), опубликованной после смерти автора в 1713 г. и составленной около 1685 г. Формуле (1) предшествует вывод частных формул для Sn^c при $c=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ и 10. Они имеют тот же вид, что формулы § 62 ч. 1 «Дифференциального исчисления» Эйлера. Доказательства общей формулы (1) Бернулли не даёт. Можно думать, что путём сравнения коэффициентов соответствующих членов частных формул Бернулли обнаруживает мультипликативный закон образования третьего, четвёртого и т. д. коэффициента, как это делает Эйлер в § 63 ч. 1. Доказательство формулы (1) в развёрнутом виде впервые дано Эйлером в настоящей книге (§ 132 ч. 2). Так как формула суммирования, из которой исходит Эйлер, была опубликована им в «Записках петербургской Академии» за 1733/34 г. (т. 6) (доказательство дано несколько позднее в т. 8 тех же «Записок»), то не подлежит сомнению, что уже в начале тридцатых годов Эйлер владел доказательством формулы (1).

должны считаться входящими дважды; так например,

$$13\mathfrak{F}=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}\mathfrak{A}\mathfrak{E}+\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mathfrak{B}\mathfrak{D}+\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\mathfrak{C}^2+$$
$$+\frac{12\cdot 11\cdot 10\ldots 5}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 8}\mathfrak{D}\mathfrak{B}+\frac{12\cdot 11\cdot 10\ldots 3}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 10}\mathfrak{E}\mathfrak{A}.$$

124. Те же числа α, β, γ, δ и т. д. входят далее в выражения сумм рядов дробей следующего общего вида:

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{ и т. д.},$$

если n есть чётное положительное число. Действительно, во «Введении» мы дали выражения этих сумм через степени полуокружности π круга радиуса 1, и можно усмотреть, что в коэффициенты этих степеней входят эти самые числа α, β, γ, δ, ε и т. д. Но для того чтобы убедиться в том, что это совпадение не является случайным, а должно необходимо иметь место, мы разыщем эти суммы особым способом, благодаря которому легко будет обнаружить закон составления этих сумм. Так как выше (§ 43) мы нашли, что

$$\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{m}{n}\pi=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\text{ и т. д.},$$

то, соединяя члены попарно, будем иметь

$$\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\frac{m}{n}\pi=\frac{1}{m}-\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}-\frac{2m}{9n^2-m^2}-\frac{2m}{16n^2-m^2}-\text{ и т. д.},$$

откуда заключаем, что

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{16n^2-m^2}+\text{ и т. д.}=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn}\operatorname{ctg}\frac{m}{n}\pi.$$

Положим теперь $n=1$ и вместо m возьмём u, так что

$$\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{4-u^2}+\frac{1}{9-u^2}+\frac{1}{16-u^2}+\text{ и т. д.}=\frac{1}{2u^2}-\frac{\pi}{2u}\operatorname{ctg}\pi u.$$

Каждую из этих дробей разложим в ряд

$$\frac{1}{1-u^2}=1+u^2+u^4+u^6+u^8+\text{ и т. д.},$$
$$\frac{1}{4-u^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{u^2}{2^4}+\frac{u^4}{2^6}+\frac{u^6}{2^8}+\frac{u^8}{2^{10}}+\text{ и т. д.},$$
$$\frac{1}{9-u^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{u^2}{3^4}+\frac{u^4}{3^6}+\frac{u^6}{3^8}+\frac{u^8}{3^{10}}+\text{ и т. д.},$$
$$\frac{1}{16-u^2}=\frac{1}{4^2}+\frac{u^2}{4^4}+\frac{u^4}{4^6}+\frac{u^6}{4^8}+\frac{u^8}{4^{10}}+\text{ и т. д.},$$

и т. д.

125. Если положить

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{ и т. д.}=\mathfrak{a},\quad 1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\text{ и т. д.}=\mathfrak{d},$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{ и т. д.}=\mathfrak{b},\quad 1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\text{ и т. д.}=\mathfrak{e},$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{ и т. д.}=\mathfrak{c},\quad 1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\text{ и т. д.}=\mathfrak{f}$$

и т. д.,

то вышеприведённый ряд преобразуется в ряд

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}u^2 + \mathfrak{c}u^4 + \mathfrak{d}u^6 + \mathfrak{e}u^8 + \mathfrak{f}u^{10} + \text{ и т. д.} = \frac{1}{2u^2} + \frac{\pi}{2u}\operatorname{ctg}\pi u.$$

Но в § 118 мы нашли, что числа, обозначенные буквами A, B, C, D и т. д., обладают тем свойством, что, если положить

$$s = \frac{1}{u} - Au + Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \text{ и т. д.},$$

то $s = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}u$. Поэтому, положив πu вместо $\frac{1}{2}u$ или $2\pi u$ вместо u, получим

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\pi u = \frac{1}{2\pi u} - 2A\pi u - 2^3B\pi^3u^3 - 2^5C\pi^5u^5 - \text{и т. д.},$$

откуда, умножая на $\frac{\pi}{u}$, будем иметь

$$\frac{\pi}{2u}\operatorname{ctg}\pi u = \frac{1}{2u^2} - 2A\pi^2 - 2^3B\pi^4u^2 - 2^5C\pi^6u^4 - 2^7D\pi^8u^6 - \text{и т. д.},$$

а отсюда следует, что

$$\frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u}\operatorname{ctg}\pi u = 2A\pi^2 + 2^3B\pi^4u^2 + 2^5C\pi^6u^4 + 2^7D\pi^8u^6 + \text{ и т. д.}$$

Так как мы только что нашли, что

$$\frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u}\operatorname{ctg}\pi u = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}u^2 + \mathfrak{c}u^4 + \mathfrak{d}u^6 + \text{ и т. д.},$$

то необходимо должно быть

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= 2A\pi^2 = \frac{2\alpha}{1\cdot 2\cdot 3}\pi^2 = \frac{2\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\pi^2,\\
\mathfrak{b} &= 2^3B\pi^4 = \frac{2^3\beta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\pi^4 = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\pi^4,\\
\mathfrak{c} &= 2^5C\pi^6 = \frac{2^5\gamma}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 7}\pi^6 = \frac{2^5\mathfrak{C}}{1\cdot 2\ldots 6}\pi^6,\\
\mathfrak{d} &= 2^7D\pi^8 = \frac{2^7\delta}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9}\pi^8 = \frac{2^7\mathfrak{D}}{1\cdot 2\ldots 8}\pi^8,\\
\mathfrak{e} &= 2^9E\pi^{10} = \frac{2^9\varepsilon}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11}\pi^{10} = \frac{2^9\mathfrak{E}}{1\cdot 2\ldots 10}\pi^{10},\\
\mathfrak{f} &= 2^{11}F\pi^{12} = \frac{2^{11}\zeta}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 13}\pi^{12} = \frac{2^{11}\mathfrak{F}}{1\cdot 2\ldots 12}\pi^{12}
\end{aligned}$$

и т. д.

126. Это очень простое рассуждение не только позволяет легко суммировать все ряды обратных степеней, которые мы получили в предыдущем параграфе, но в то же время показывает, каким образом эти суммы образуются по известным значениям букв α, β, γ, δ, ε и т. д. или из бернуллиевых чисел $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д. Так как в § 122 мы определили пятнадцать таких чисел, то из них можно найти все суммы обратных чётных степеней вплоть до суммы ряда

$$1 + \frac{1}{2^{30}} + \frac{1}{3^{30}} + \frac{1}{4^{30}} + \frac{1}{5^{30}} + \text{ и т. д.}$$

Именно, сумма этого ряда будет равна

$$\frac{2^{29}\pi}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 31}\pi^{30} = \frac{2^{29}\mathfrak{P}}{1\cdot 2\ldots 30}\pi^{30}.$$

Если же кто захотел бы определять эти суммы дальше, то это будет очень легко сделать, продолжив определение чисел α, β, γ, δ и т. д. или чисел $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и т. д.

127. Числа α, β, γ и т. д. или образованные из них числа $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д. лучше всего производить из разложения котангенса какого-либо угла в бесконечный ряд. Действительно, так как

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}u=\frac{1}{u}-Au-Bu^3-Cu^5-Du^7-Eu^9-\text{ и т. д.},$$

то

$$Au^2+Bu^4+Cu^6+Du^8+\text{ и т. д.}=1-\frac{u}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}u;$$

если теперь вместо коэффициентов A, B, C и т. д. подставить их значения, то мы найдём

$$\frac{\alpha u^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\beta u^4}{1\cdot 2\ldots 5}+\frac{\gamma u^6}{1\cdot 2\ldots 7}+\frac{\delta u^8}{1\cdot 2\ldots 9}+\text{и т. д.}=1-\frac{u}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}u.$$

Пользуясь же бернуллиевыми числами, будем иметь

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1\cdot 2}+\frac{\mathfrak{B}u^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\mathfrak{C}u^6}{1\cdot 2\ldots 6}+\frac{\mathfrak{D}u^8}{1\cdot 2\ldots 8}+\text{и т. д.}=1-\frac{u}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}u.$$

Из этих рядов с помощью дифференцирования можно найти бесчисленные другие и, таким образом, суммировать бесчисленные ряды, в которые входят эти весьма замечательные числа.

128. Возьмём первое уравнение и помножим его на u, так что

$$\frac{\alpha u^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\beta u^5}{1\cdot 2\ldots 5}+\frac{\gamma u^7}{1\cdot 2\ldots 7}+\frac{\delta u^9}{1\cdot 2\ldots 9}+\text{и т. д.}=u-\frac{u^2}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}u.$$

Дифференцируя и деля на du, получим

$$\frac{\alpha u^2}{1\cdot 2}+\frac{\beta u^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\gamma u^6}{1\cdot 2\ldots 6}+\frac{\delta u^8}{1\cdot 2\ldots 8}+\text{ и т. д.}=$$
$$=1-u\operatorname{ctg}\frac{1}{2}u+\frac{u^2}{4\sin^2\frac{1}{2}u};$$

если дифференцировать ещё раз, будем иметь

$$\frac{\alpha u}{1}+\frac{\beta u^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\gamma u^5}{1\cdot 2\ldots 5}+\text{ и т. д.}=-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}u+\frac{u}{\sin^2\frac{u}{2}}-\frac{u^2\cos\frac{1}{2}u}{4\sin^3\frac{1}{2}u}.$$

Если же дифференцировать второе уравнение, будем иметь

$$\frac{\mathfrak{A}u}{1}+\frac{\mathfrak{B}u^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\mathfrak{C}u^5}{1\cdot 2\ldots 5}+\frac{\mathfrak{D}u^7}{1\cdot 2\ldots 7}+\text{ и т. д.}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}u+\frac{u}{4\sin^2\frac{1}{2}u}.$$

Если положить $u=\pi$, то из этих уравнений, так как $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi=0$ и $\sin\frac{1}{2}=1$, получим следующие суммирования:

$$1=\frac{\alpha\pi^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\beta\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{\gamma\pi^6}{1\cdot 2\ldots 7}+\frac{\delta\pi^8}{1\cdot 2\ldots 9}+\text{ и т. д.},$$
$$1+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\alpha\pi^2}{1\cdot 2}+\frac{\beta\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\gamma\pi^6}{1\cdot 2\ldots 6}+\frac{\delta\pi^8}{1\cdot 2\ldots 8}+\text{ и т. д.},$$
$$\pi=\frac{\alpha\pi}{1}+\frac{\beta\pi^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\gamma\pi^5}{1\cdot 2\ldots 5}+\frac{\delta\pi^7}{1\cdot 2\ldots 7}+\text{ и т. д.}$$

и

$$1=\alpha+\frac{\beta\pi^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\gamma\pi^4}{1\cdot2\ldots5}+\frac{\delta\pi^6}{1\cdot2\ldots7}+\text{ и т. д.}$$

ли из последнего уравнения вычесть первое, в остатке получится

$$\alpha=\frac{(\alpha-\beta)\pi^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{(\beta-\gamma)\pi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{(\gamma-\delta)\pi^6}{1\cdot2\ldots7}+\text{ и т. д.}$$

чно так же получим

$$1=\frac{\mathfrak{A}\pi^2}{1\cdot2}+\frac{\mathfrak{B}\pi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{\mathfrak{C}\pi^6}{1\cdot2\ldots6}+\frac{\mathfrak{D}\pi^8}{1\cdot2\ldots8}+\text{ и т. д.},$$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\mathfrak{A}\pi}{1}+\frac{\mathfrak{B}\pi^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\mathfrak{C}\pi^5}{1\cdot2\ldots5}+\frac{\mathfrak{D}\pi^7}{1\cdot2\ldots7}+\text{ и т. д.}$$

и

$$\frac{1}{4}=\frac{\mathfrak{A}}{1}+\frac{\mathfrak{B}\pi^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\mathfrak{C}\pi^4}{1\cdot2\ldots5}+\frac{\mathfrak{D}\pi^6}{1\cdot2\ldots7}+\text{ и т. д.}$$

129. Из таблицы значений α, β, γ, δ и т. д., которые мы нашли ше (§ 121), явствует, что они сначала убывают, а затем возрастают увеличиваются до бесконечности. Поэтому стоит труда исследовать, каком отношении эти числа, после того как они продолжены уже статочно далеко, продолжают расти дальше. Пусть φ есть какое-личисло этого ряда чисел α, β, γ, δ и т. д., очень далёкое от начала, пусть ψ есть следующее из этих чисел. Так как с помощью этих сел определяются суммы обратных степеней, то пусть $2n$ есть показеть тех степеней, в сумму которых входит число φ; тогда $2n+2$ дет показатель степени, отвечающий числу ψ, и число n будет очень лико. Из § 125 будем иметь

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\text{ и т. д. }=\frac{2^{2n-1}\varphi}{1\cdot2\cdot3\ldots(2n+1)}\pi^{2n},$$

$$1+\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{3^{2n+2}}+\frac{1}{4^{2n+2}}+\text{ и т. д. }=\frac{2^{2n+1}\psi}{1\cdot2\cdot3\ldots(2n+3)}\pi^{2n+2}.$$

ли второе уравнение разделить на первое, будем иметь

$$\frac{1+\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{3^{2n+2}}+\text{ и т. д.}}{1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\text{ и т. д.}}=\frac{4\psi\pi^2}{(2n+2)(2n+3)\varphi}.$$

так как n есть очень большое число, то каждый из рядов прижённо равен 1, и мы будем иметь

$$\frac{\psi}{\varphi}=\frac{(2n+2)(2n+3)}{4\pi^2}=\frac{n^2}{\pi^2}.$$

к как n обозначает, какое по порядку место занимает число φ, и отсчёт вести от первого числа α, то это число φ будет относиться следующему за ним ψ, как π^2 к n^2; это отношение будет совершенно ласным с истинным, если n будет бесконечным числом. Так как ближённо $\pi^2=10$, то, если положить $n=100$, сотый член будет мерно в тысячу раз меньше следующего за ним. Итак числа α, β, δ и т. д., равно как и бернуллиевы числа $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д., азуют очень сильно расходящийся ряд, который расходится больше, любая геометрическая прогрессия, члены которой возрастают.

130. После того как найдены значения чисел α, β, γ и т. д. или $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и т. д., если предложен ряд, общий член которого z есть какая-либо функция индекса x, то суммационный член Sz этого ряда выразится следующим образом:

$$\begin{aligned}Sz = \int z\,dx + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}\frac{dz}{1\cdot 2\,dx} - \frac{1}{30}\frac{d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^3} + \\ + \frac{1}{42}\frac{d^5z}{1\cdot 2\ldots 6\,dx^5} - \frac{1}{30}\frac{d^7z}{1\cdot 2\ldots 8\,dx^7} + \\ + \frac{5}{66}\cdot\frac{d^9z}{1\cdot 2\ldots 10\,dx^9} - \frac{691}{2730}\frac{d^{11}z}{1\cdot 2\ldots 12\,dx^{11}} + \\ + \frac{7}{6}\frac{d^{13}z}{1\cdot 2\ldots 14\,dx^{13}} - \frac{3617}{510}\frac{d^{15}z}{1\cdot 2\ldots 16\,dx^{15}} + \\ + \frac{43\,867}{798}\frac{d^{17}z}{1\cdot 2\ldots 18\,dx^{17}} - \frac{174\,611}{330}\frac{d^{19}z}{1\cdot 2\ldots 20\,dx^{19}} + \\ + \frac{854\,513}{138}\frac{d^{21}z}{1\cdot 2\ldots 22\,dx^{21}} - \frac{236\,364\,091}{2730}\frac{d^{23}z}{1\cdot 2\ldots 24\,dx^{23}} + \\ + \frac{8\,553\,103}{6}\frac{d^{25}z}{1\cdot 2\ldots 26\,dx^{25}} - \frac{23\,749\,461\,029}{870}\frac{d^{27}z}{1\cdot 2\ldots 28\,dx^{27}} + \\ + \frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322}\frac{d^{29}z}{1\cdot 2\ldots 30\,dx^{29}} - \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Следовательно, если известен интеграл $\int z\,dx$, т. е. то количество, дифференциал которого равен $z\,dx$, то суммационный член найдётся с помощью последовательного дифференцирования. Но постоянно следует помнить, что к этому выражению надлежит всегда прибавлять такое постоянное, чтобы сумма становилась равной нулю, если положить x равным нулю.

131. Если z есть целая рациональная функция от x, то поскольку все её дифференциалы, в конце концов, исчезают, суммационный член выразится конечным выражением. Мы поясним это следующими примерами.

Пример 1

Пусть ищется суммационный член ряда

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & x \\ 1 + & 9 + & 25 + & 49 + & 81 + & \ldots & + & (2x-1)^2. \end{array}$$

Так как здесь

$$z = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1,$$

то

$$\int z\,dx = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x.$$

Действительно, дифференцируя это выражение, получаем $z\,dx = 4x^2\,dx - 4x\,dx + dx$. Далее, с помощью дифференцирования будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = 8x - 4, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 8, \quad \frac{d^3z}{dx^3} = 0 \text{ и т. д.}$$

Значит, искомый суммационный член будет

$$\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \pm \text{const}.$$

Это постоянное должно уничтожать члены $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; следовательно, будем иметь

$$S(2x-1)^2=\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{3}x=\frac{x}{3}(2x-1)(2x+1).$$

Так, при $x=4$ сумма четырёх первых членов будет

$$1+9+25+81=\frac{4}{3}7\cdot 9=84.$$

Пример 2

Пусть ищется суммационный член ряда

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \quad x \\ 1+27+ & 125+ & 343+ & \ldots & +(2x-1)^3. \end{array}$$

Так как

$$z=(2x-1)^3=8x^3-12x^2+6x-1,$$

то

$$\int z\,dx=2x^4-4x^3+3x^2-x,$$

$$\frac{dz}{dx}=24x^2-24x+6,\qquad \frac{d^2z}{dx^2}=48x-24,\qquad \frac{d^3z}{dx^3}=48,$$

следующие дифференциалы исчезают. Поэтому

$$\begin{aligned} S(2x-1)^3=2x^4-4x^3+3x^2-x+ \\ +4x^3-6x^2+3x-\frac{1}{2}+ \\ +2x^2-2x+\frac{1}{2}- \\ -\frac{1}{15}\pm\text{const.}, \end{aligned}$$

т. е.

$$S(2x-1)^3=2x^4-x^2=x^2(2x^2-1).$$

Так, при $x=4$ будем иметь $1+27+125+343=496$.

132. После того как мы нашли общее выражение для суммационного члена, само собой получается тот суммационный член, который мы дали в первой части (§§ 29 и 61) для степеней натуральных чисел и доказательств которого мы там привести не имели возможности. В самом деле, если положить $z=x^n$, то $\int z\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$; дифференциалы же выразятся так:

$$\frac{dz}{dx}=nx^{n-1},\qquad \frac{d^2z}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2},\qquad \frac{d^3z}{dx^3}=n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

$$\frac{d^5z}{dx^5}=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5},\quad \frac{d^7z}{dx^7}=n(n-1)\ldots(n-6)x^{n-7}\text{ и т. д.}$$

Отсюда мы получаем следующий суммационный член, отвечающий общему члену x^n:

$$Sx^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{6}\cdot\frac{n}{2}x^{n-1} - \frac{1}{30}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3\cdot 4}x^{n-3} +$$
$$+\frac{1}{42}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^{n-5} - \frac{1}{30}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{2\cdot 3\ldots 8}x^{n-7} +$$
$$+\frac{5}{66}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-8)}{2\cdot 3\ldots 10}x^{n-9} - \frac{691}{2730}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-10)}{2\cdot 3\ldots 12}x^{n-11} +$$
$$+\frac{7}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-12)}{2\cdot 3\ldots 14}x^{n-13} - \frac{3617}{510}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-14)}{2\cdot 3\ldots 16}x^{n-15} +$$
$$+\frac{43\,867}{798}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-16)}{2\cdot 3\ldots 18}x^{n-17} - \frac{174\,611}{330}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-18)}{2\cdot 3\ldots 20}x^{n-19} +$$
$$+\frac{854\,513}{138}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-20)}{2\cdot 3\ldots 22}x^{n-21} - \frac{236\,364\,091}{2730}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-22)}{2\cdot 3\ldots 24}x^{n-23} +$$
$$+\frac{8\,553\,103}{6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-24)}{2\cdot 3\ldots 26}x^{n-25} - \frac{23\,749\,461\,029}{870}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-26)}{2\cdot 3\ldots 28}x^{n-27} +$$
$$+\frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-28)}{2\cdot 3\ldots 30}x^{n-29}.$$

Это выражение не отличается от вышевыведенного; только здесь мы ввели бернуллиевы числа $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и т. д., тогда как раньше мы пользовались числами α, β, γ и т. д. Впрочем, согласие между обоими выражениями и само собой очевидно. Итак, мы можем получить отсюда суммационные члены для всех степеней вплоть до тридцатой включительно. Если бы мы пошли по другому пути, это можно было бы сделать лишь с помощью очень длинных и скучных вычислений.

133. Выше (§ 59) мы дали почти такое же выражение суммационного члена через общий член. Действительно, оно равным образом содержало последовательные дифференциалы общего члена; но от найденного здесь оно отличалось главным образом тем, что оно не требовало вычисления интеграла $\int z\,dx$, но зато отдельные дифференциалы общего члена помножались там на некоторые функции от x. Сейчас мы снова получим такое же выражение нижеследующим способом, более соответствующим природе рядов; из этого способа станет в то же время более ясным тот закон, согласно которому следуют друг за другом коэффициенты дифференциалов. Итак, пусть общий член ряда z есть какая-либо функция от индекса x и пусть искомый суммационный член есть s; как мы видели, он является такой функцией от x, которая исчезает при $x=0$. Согласно доказанному выше (§ 68) свойству этих функций будем иметь

$$s - \frac{x\,ds}{1dx} + \frac{x^2d^2s}{1\cdot 2dx^2} - \frac{x^3d^3s}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \frac{x^4d^4s}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} - \text{ и т. д. } = 0.$$

134. Так как s есть сумма всех членов ряда от первого до последнего z, то очевидно, что, если в s вместо x положить $x-1$, то первоначальная сумма лишается своего последнего члена. Значит, мы будем иметь

$$s - z = s - \frac{ds}{dx} + \frac{d^2s}{2dx^2} - \frac{d^3x}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \text{ и т. д.},$$

так что

$$z = \frac{ds}{dx} - \frac{d^2s}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} - \text{ и т. д.}$$

Это уравнение даёт возможность определить общий член по данному суммационному члену, что и само по себе очень легко. Но с помощью удачного сочетания этого уравнения с тем, которое было дано в предыдущем параграфе, можно определить выражение s через x и z. Для этого положим, что

$$s - Az + \frac{B\,dz}{dx} - \frac{Cd^2z}{dx^2} + \frac{Dd^3z}{dx^3} - \frac{Ed^4z}{dx^4} + \text{ и т. д. } = 0,$$

где A, B, C, D и т. д. суть необходимые коэффициенты, постоянные или переменные. Так как

$$z = \frac{ds}{dx} - \frac{d^2s}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120\,dx^5} - \text{ и т. д.},$$

то, если получаемые отсюда значения z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$ и т. д. подставить в предыдущее уравнение, найдём

$$\begin{aligned}
s &= s\\
-Az &= -\frac{A\,ds}{dx} + \frac{A\,d^2s}{2dx^2} - \frac{A\,d^3s}{6dx^3} + \frac{A\,d^4s}{24dx^4} - \frac{A\,d^5s}{120dx^5} + \text{ и т. д.}\\
+\frac{B\,dz}{dx} &= \qquad\qquad + \frac{B\,d^2s}{dx^2} - \frac{B\,d^3s}{2dx^3} + \frac{B\,d^4s}{6dx^4} - \frac{B\,d^5s}{24dx^5} + \text{ и т. д.}\\
-\frac{C\,d^2z}{dx^2} &= \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{C\,d^3s}{dx^3} + \frac{C\,d^4s}{2dx^4} - \frac{C\,d^5s}{6dx^5} + \text{ и т. д.}\\
+\frac{D\,d^3z}{dx^3} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{D\,d^4s}{dx^4} - \frac{D\,d^5s}{2dx^5} + \text{ и т. д.}\\
-\frac{E\,d^4s}{dx^4} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{E\,d^5s}{dx^5} + \text{ и т. д.},\\
&\qquad\qquad \text{и т. д.}
\end{aligned}$$

Таким образом, эти ряды, взятые вместе, будут равны нулю.

135. Так как ранее мы нашли, что

$$0 = s - \frac{x\,ds}{dx} + \frac{x^2d^2s}{2dx^2} - \frac{x^3d^3s}{6dx^3} + \frac{x^4d^4s}{24dx^4} - \text{ и т. д.},$$

то если положить предыдущие уравнения равными последнему, то получатся следующие выражения для букв A, B, C, D и т. д.:

$$A = x, \quad B = \frac{x^2}{2} - \frac{A}{2}, \quad C = \frac{x^3}{6} - \frac{B}{2} - \frac{A}{6},$$

$$D = \frac{x^4}{24} - \frac{C}{2} - \frac{B}{6} - \frac{A}{24}, \quad E = \frac{x^5}{120} - \frac{D}{2} - \frac{C}{6} - \frac{B}{24} - \frac{A}{120} \text{ и т. д.}$$

После этого как эти значения букв A, B, C, D и т. д. найдены, мы определим по общему члену z суммационный член $s = Sz$ следующим образом:

$$Sz = Az - \frac{B\,dz}{dx} + \frac{C\,d^2z}{dx^2} = \frac{D\,d^3z}{dx^3} + \frac{E\,d^4z}{dz^4} - \frac{F\,d^5z}{dx^5} + \text{ и т. д.}$$

136. Так как

$$A = x, \quad B = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, \quad C = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x,$$

$$D = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^2 \text{ и т. д.},$$

то ясно, что эти коэффициенты те же, что мы имели выше (§ 59); таким образом, полученное здесь выражение суммационного члена совпадает с тем, которое мы нашли там, и потому

$$A = Sx^0 = S1, \quad B = \frac{1}{1} Sx^1 - \frac{1}{1} x, \quad C = \frac{1}{2} Sx^2 - \frac{1}{2} x^2,$$
$$D = \frac{1}{6} Sx^3 - \frac{1}{6} x^3, \quad E = \frac{1}{24} Sx^4 - \frac{1}{24} x^4 \text{ и т. д.}$$

Следовательно, будем иметь

$$Sz = xz - \frac{dz}{dx} Sx + \frac{d^2z}{2dx^2} Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3} Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4} Sx^4 - \text{ и т. д.}$$
$$+ \frac{x\,dz}{dx} - \frac{x^2d^2z}{2dx^2} + \frac{x^3d^3z}{6dx^3} - \frac{x^4d^4z}{24dx^4} + \text{ и т. д.}$$

Но если в общем члене z положить $x = 0$, получится член, отвечающий индексу, равному нулю. Если положить этот член равным a, то будем иметь

$$a = z - \frac{x\,dz}{dx} + \frac{x^2d^2z}{2dx^2} - \frac{x^3d^3z}{6dx^3} + \text{ и т. д.},$$

так что

$$\frac{x\,dz}{dx} - \frac{x^2d^2z}{2dx^2} + \frac{x^3d^3z}{6dx^3} - \frac{x^4d^4z}{24dx^4} + \text{ и т. д.} = z - a.$$

После подстановки этого значения будем иметь

$$Sz = (x+1)\,z - a - \frac{dz}{dx} Sx + \frac{d^2z}{2dx^2} Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3} Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4} Sx^4 - \text{ и т. д.}$$

Итак, если известны суммы степеней, то для какого угодно общего члена можно будет найти соответствующий суммационный член.

137. Так как мы нашли выражение суммационного члена Sz в двух видах, и в одном из них содержится интеграл $\int z\,dx$, то если эти два выражения положить равными друг другу, мы получим значение интеграла $\int z\,dx$, представленное с помощью ряда. В самом деле, так как

$$\int z\,dx + \frac{1}{2} z + \frac{\mathfrak{A}\,dz}{1\cdot 2dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^5z}{1\cdot 2\ldots 6dx^5} - \text{ и т. д.} =$$
$$= (x+1)\,z - a - \frac{dz}{dx} Sx + \frac{d^2z}{1\cdot 2dx^2} Sx^2 - \frac{d^3z}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} Sx^3 + \text{ и т. д.},$$

то

$$\int z\,dx = \left(x + \frac{1}{2}\right) z - a - \frac{dz}{dx}\left(Sx + \frac{1}{2}\mathfrak{A}\right) + \frac{d^2z}{2dx^2} Sx^2 -$$
$$- \frac{d^3z}{6dx^3}\left(Sx^3 - \frac{1}{4}\mathfrak{B}\right) + \frac{d^4z}{24dx^4} Sx^4 - \frac{d^5z}{120dx^5}\left(Sx^5 + \frac{1}{6}\mathfrak{C}\right) + \text{ и т. д.},$$

где $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и т. д. суть бернуллиевы числа, которые мы получили выше (§ 122).

Пусть, например, $z = x^2$; тогда $a = 0$, $\frac{dz}{dx} = 2x$ и $\frac{d^2z}{2dx^2} = 1$, следовательно, будем иметь

$$\int x^2dx = \left(x + \frac{1}{2}\right) x^2 - 2x\left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{12}\right) + 1\left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x\right),$$

или $\int x^3\,dx = \frac{1}{3}x^3$; действительно, дифференцируя $\frac{1}{3}x^3$, находим как раз x^2dx.

138. Теперь перед нами открывается новый путь для нахождения суммационных членов рядов степеней. Действительно, эти суммационные члены легко образуются из коэффициентов A, B, C и т. д., которые мы ввели выше, а каждый из этих коэффициентов выражается через предыдущие. Поэтому, если в формулы, данные в § 135, подставить вместо этих букв их значения, приведённые в § 136, то будем иметь

$$Sx^1 - x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,$$

$$Sx^2 - x^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{2}\,Sx - x),$$

$$Sx^3 - x^3 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}(Sx^2 - x^2) - \frac{3\cdot 2}{2\cdot 3}(Sx - x),$$

$$Sx^4 - x^4 = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{5}x - \frac{4}{2}(Sx^3 - x^3) - \frac{4\cdot 3}{2\cdot 3}(Sx^2 - x^2) - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4}(Sx - x) \text{ и т. д.}$$

Отсюда, следовательно, суммы высших степеней можно выразить через суммы низших степеней.

139. Если мы внимательно присмотримся к закону, по которому, как мы выше (§ 135) нашли, коэффициенты A, B, C, D и т. д., следуют друг за другом, то увидим, что они образуют рекуррентный ряд. Действительно, если мы разложим дробь

$$\frac{x + \frac{1}{2}x^2u + \frac{1}{6}x^3u^2 + \frac{3}{24}x^4u^3 + \frac{1}{120}x^5u^4 + \text{ и т. д.}}{1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{124}u^4 + \text{ и т. д.}}$$

по степеням u и примем, что получается ряд

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + \text{ и т. д.},$$

то, как ранее мы нашли[1]),

$$A = x, \quad B = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}A \text{ и т. д.}$$

Таким образом, после того как будет найден этот ряд, мы получим суммационные члены рядов степеней. Но дробь, из разложения которой получается этот ряд, можно представить в виде $\frac{e^{xu}-1}{e^u-1}$. А эта дробь, если x будет целым положительным числом, перейдёт в

$$1 + e^u + e^{2u} + e^{3u} + \ldots + e^{(x-1)u}.$$

Так как теперь

$$1 = 1,$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1\cdot 2} + \frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{u^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.},$$

$$e^{2u} = 1 + \frac{2u}{1} + \frac{4u^2}{1\cdot 2} + \frac{8u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{16u^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.},$$

$$e^{3u} = 1 + \frac{3u}{1} + \frac{9u^2}{1\cdot 2} + \frac{27u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{81u^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.},$$

$$e^{(x-1)u} = 1 + \frac{(x-1)u}{1} + \frac{(x-1)^2u^2}{1\cdot 2} + \frac{(x-1)^3u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(x-1)^4u^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.},$$

---

[1]) «Введение», ч. 1, гл. IV.

то

$$A = x,$$
$$B = S(x-1) = Sx - x,$$
$$C = \frac{1}{2} S(x-1)^2 = \frac{1}{2} Sx^2 - \frac{1}{2} x^2,$$
$$D = \frac{1}{6} S(x-1)^3 = \frac{1}{6} Sx^3 - \frac{1}{6} x^3$$

и т. д.

Этим полностью подтверждается и доказывается ранее уже обнаруженная связь этих коэффициентов с суммами степеней.

ГЛАВА VI

О СУММИРОВАНИИ ПРОГРЕССИЙ С ПОМОЩЬЮ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

140. В предыдущей главе мы нашли для суммационного члена какого-либо ряда, общий член которого, т. е. член, отвечающий индексу x, равен z, выражение

$$Sz = \int z\,dx + \frac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A}\,dz}{1\cdot 2dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^5z}{1\cdot 2\ldots 6dx^5} - \text{ и т. д.}$$

Оно непосредственно даёт сумму рядов, общие члены которых суть какие-либо целые рациональные функции индекса x, ибо в этих случаях мы, в конце концов, приходим к исчезающим дифференциалам. Если же z не является такого рода функцией от x, тогда дифференциалы её следуют друг за другом до бесконечности, и таким образом получается бесконечный ряд, выражающий сумму предложенного ряда вплоть до члена с данным индексом x. Поэтому сумма предложенного ряда, продолженного до бесконечности, получится, если положить $x=\infty$; с помощью этого приёма мы найдём другой бесконечный ряд, равный первоначальному.

141. Если положить $x=0$, то выражение, дающее сумму, должно, как мы уже отмечали, исчезать. Если же это не происходит, то нужно прибавить к сумме или отнять от неё такое постоянное количество, чтобы это условие было удовлетворено. После этого, если положить $x=1$, найденная сумма представит первый член ряда; если положить $x=2$, она даст совокупность первого и второго члена, если же положить $x=3$, получим совокупность трёх первых членов ряда, и т. д. А так как сумма одного, двух, трёх и т. д. членов известна, то будет известно значение бесконечного ряда, которым эта сумма выражается, и этим способом можно суммировать бесчисленные ряды.

142. Если к сумме мы прибавим такое постоянное, что при $x=0$ сумма исчезает, то и во всех остальных случаях, какие бы числа ни были подставлены вместо x, сумма даст правильное значение. Поэтому, очевидно, что если к найденной сумме прибавить такое постоянное количество, чтобы сумма давала истинный результат в каком-нибудь одном случае, то и во всех остальных случаях должна получаться истинная сумма. Вследствие этого, если, положив $x=0$, нельзя будет выяснить, какое значение получает выражение суммы, и значит, нельзя будет отсюда найти постоянную, которую нужно прибавить, тогда можно будет взять за x какое-нибудь другое число и прибавить такое постоянное, чтобы получалась должная сумма. Как это нужно делать — будет лучше видно из следующих примеров.

142a [1]**.** Рассмотрим, прежде всего, гармоническую прогрессию

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{x}=S.$$

Так как общий её член равен $\frac{1}{x}$, то $z=\frac{1}{x}$ и суммационный член находится следующим образом. Прежде всего, будем иметь $\int z\,dx=\int\frac{dx}{x}=\mathrm{l}\,x$; далее найдём дифференциалы

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x^2},\quad \frac{d^2z}{2dx^2}=\frac{1}{x^3},\quad \frac{d^3z}{6dx^3}=-\frac{1}{x^4},$$
$$\frac{d^4z}{24\,dx^4}=\frac{1}{x^5},\quad \frac{d^5z}{120\,dx^5}=-\frac{1}{x^6}\ \text{и т. д.}$$

Таким образом, отсюда будем иметь

$$s=\mathrm{l}\,x+\frac{1}{2x}=\frac{\mathfrak{A}}{2x^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4x^4}+\frac{\mathfrak{C}}{6x^6}+\frac{\mathfrak{D}}{8x^8}-\ \text{и т. д.}+\mathrm{const}.$$

Здесь постоянное, которое нужно прибавить, нельзя определить из случая $x=0$. Поэтому положим $x=1$, так как теперь $s=1$, то будем иметь

$$1=\frac{1}{2}-\frac{\mathfrak{A}}{2}+\frac{\mathfrak{B}}{4}-\frac{\mathfrak{C}}{6}+\frac{\mathfrak{D}}{8}-\ \text{и т. д.}+\mathrm{const}.,$$

откуда найдём, что эта постоянная равна

$$\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{2}-\frac{\mathfrak{B}}{4}+\frac{\mathfrak{C}}{6}-\frac{\mathfrak{D}}{8}+\ \text{и т. д.},$$

так что искомый общий член будет

$$s=\mathrm{l}\,x+\frac{1}{2x}-\frac{\mathfrak{A}}{2x^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4x^4}-\frac{\mathfrak{C}}{6x^6}+\frac{\mathfrak{D}}{8x^8}-\ \text{и т. д.}+$$
$$+\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{2}=\frac{\mathfrak{B}}{4}+\frac{\mathfrak{C}}{6}-\frac{\mathfrak{D}}{8}+\ \text{и т. д.}$$

143. Так как бернуллиевы числа $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д. образуют расходящийся ряд, то это значение постоянного нельзя узнать. Но если вместо x подставить большее число и если фактически найти сумму некоторого числа членов, то значение постоянного легко найдётся. Положим с этой целью $x=0$ и, сложив десять первых членов, найдём, что их сумма равна

$$2{,}928\,968\,253\,968\,253\,968.$$

Этому числу должно равняться выражение суммы, если в нём положить $x=10$, так что получим

$$\mathrm{l}\,10+\frac{1}{20}-\frac{\mathfrak{A}}{200}+\frac{\mathfrak{B}}{40\,000}-\frac{\mathfrak{C}}{6\,000\,000}+\frac{\mathfrak{D}}{800\,000\,000}-\ \text{и т. д.}+C.$$

[1]) В первом издании по ошибке повторён номер 142. (Г. К.)

Если вместо $l10$ взять гиперболический логарифм десяти, а вместо $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и т. д. подставить выше (§ 122) найденные значения, то найдём это постоянное[1])

$$C = 0{,}5\,772\,156\,649\,015\,325.$$

Следовательно, это число выражает сумму ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} + \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \text{и т. д.}$$

144. Если вместо x подставлять числа, не слишком большие, то, так как сумма легко находится непосредственно, мы получим сумму следующего ряда:

$$\frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} + \text{ и т. д.} = s - lx - C.$$

Если же x будет очень большим числом, то тогда, наоборот, легко определяется значение этого бесконечного выражения в десятичных дробях, и этим определяется сумма ряда. Однако ясно, что если ряд продолжить до бесконечности, то его сумма будет бесконечно большой; в самом деле, при $x = \infty$ бесконечным будет и lx, хотя отношение lx к x бесконечно мало. Чтобы можно было удобнее определять сумму любого числа членов ряда, мы выразим значения $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и т. д. в десятичных дробях:

$$\mathfrak{A} = 0{,}166\,666\,666\,666\,6,$$
$$\mathfrak{B} = 0{,}033\,333\,333\,333\,3,$$
$$\mathfrak{C} = 0{,}023\,809\,523\,809\,5,$$
$$\mathfrak{D} = 0{,}033\,333\,333\,333\,3,$$
$$\mathfrak{E} = 0{,}075\,757\,575\,757\,5,$$
$$\mathfrak{F} = 0{,}253\,113\,553\,113\,5,$$
$$\mathfrak{G} = 1{,}166\,666\,666\,666\,6,$$
$$\mathfrak{H} = 7{,}092\,156\,862\,745\,1 \text{ и т. д}$$

Следовательно,

$$\frac{\mathfrak{A}}{2} = 0{,}083\,333\,333\,333\,3,$$
$$\frac{\mathfrak{B}}{4} = 0{,}008\,333\,333\,333\,3,$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{6} = 0{,}003\,968\,253\,968\,2,$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{8} = 0{,}004\,166\,666\,666\,6,$$
$$\frac{\mathfrak{E}}{10} = 0{,}007\,575\,757\,575\,7,$$
$$\frac{\mathfrak{F}}{12} = 0{,}021\,092\,796\,092\,8,$$
$$\frac{\mathfrak{G}}{14} = 0{,}083\,333\,333\,333\,3 \text{ и т. д.}$$

[1]) Число C есть так называемая эйлерова постоянная, часто встречающаяся в исчислении конечных разностей. В приводимом здесь её выражении неверен только последний знак. Не лишне отметить, что ряд, из которого её Эйлер здесь получает, является, как легко видеть, расходящимся при всех значениях x; только возрастание членов начинается не сразу, а с члена, номер которого растёт с ростом x. Можно доказать, что частичные суммы *убывающих* членов этого ряда при $x \to \infty$ имеют предел; этот предел и есть эйлерова постоянная. Разумеется, Эйлер не видел никакой надобности в подобном доказательстве.

Пример 1

Найти сумму тысячи членов ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+$ и т. д. Положим $x=1000$, так как

$$\mathrm{l}\,10=2{,}302\,585\,092\,994\,045\,684\,0,$$

то

$$\begin{aligned}\mathrm{l}\,x&=6{,}907\,755\,278\,982\,1\\ \text{const.}&=0{,}577\,215\,664\,901\,5\\ \frac{1}{2x}&=0{,}000\,500\,000\,000\,0\\ \hline &\,7{,}485\,470\,943\,883\,6\end{aligned}$$

Вычтем

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{A}}{2x^2}&=0{,}000\,000\,083\,333\,3\\ \hline &\,7{,}485\,470\,860\,550\,3\end{aligned}$$

Прибавим

$$\frac{\mathfrak{B}}{4x^4}=0{,}000\,000\,000\,000\,0$$

Следовательно,

$$7{,}485\,470\,860\,550\,3$$

есть искомая сумма тысячи членов; она не составляет и семи с половиной единиц.

Пример 2

Найти сумму миллионов членов ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+$ и т. д. Так как $x=1\,000\,000$, то $\mathrm{l}\,x=6\,\mathrm{l}\,10$; следовательно,

$$\begin{aligned}\mathrm{l}\,x&=13{,}815\,510\,557\,964\,2\\ \text{const.}&=0{,}577\,215\,664\,901\,5\\ \frac{1}{2x}&=0{,}000\,000\,500\,000\,0\\ \hline &\,14{,}392\,726\,722\,865\,7=\text{искомой сумме.}\end{aligned}$$

145. Если вместо x положить очень большое число, то сумма найдётся достаточно точно из одного только первого члена $\mathrm{l}\,x$, если прибавить к нему постоянное C. Отсюда можно вывести важные следствия. Так, пусть x есть очень большое число; положим

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{x}=s$$

и

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x+y}=t;$$

так как приближённо $s=\mathrm{l}\,x+C$ и $t=\mathrm{l}\,(x+y)+C$, то

$$t-s=\mathrm{l}\,(x+y)-\mathrm{l}\,x=\mathrm{l}\,\frac{x+y}{x},$$

и, следовательно, этот логарифм приближённо выразится гармоническим рядом, состоящим из конечного числа членов, следующим образом:

$$\mathrm{l}\,\frac{x+y}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\ldots+\frac{1}{x+y}.$$

Этот логарифм выразится точнее, если упомянутые суммы s и t мы возьмём с большей точностью. Так, если взять

$$s = \mathrm{l}\, x + C + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} \quad \text{и} \quad t = \mathrm{l}\,(x+y) + C + \frac{1}{2(x+y)} - \frac{1}{12(x+y)^2},$$

то будем иметь

$$t - s = \mathrm{l}\,\frac{x+y}{x} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+y)} + \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{12(x+y)^2},$$

и, значит,

$$\mathrm{l}\,\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x-y)} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{12(x+y)^2}.$$

Если же x есть столь большое число, что можно отбросить два последних члена, то приближённо будем иметь

$$\mathrm{l}\,\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y}\right).$$

145а[1]. Из того же гармонического ряда можно вывести сумму следующего ряда, в который входят только нечётные числа:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2x+1}.$$

Действительно, если взять все члены, то

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+1} =$$
$$= \mathrm{l}\,(2x+1) + C + \frac{1}{2(2x+1)} - \frac{\mathfrak{A}}{2(2x+1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4(2x+1)^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6(2x+1)^6} + \text{ и т. д.}$$

Сумма же членов, стоящих на чётных местах,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2x}$$

будет вдвое меньше, именно

$$\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\mathrm{l}\,x + \frac{1}{4x} + \frac{\mathfrak{A}}{4x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{8x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{12x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{16x^8} - \text{ и т. д.}$$

Если этот ряд отнять от первого, будем иметь

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2x+1} =$$
$$= \frac{1}{2}C + \mathrm{l}\,\frac{2x+1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2(2x+1)} - \frac{\mathfrak{A}}{2(2x+1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4(2x+1)^4} - \text{ и т. д.} -$$
$$- \frac{1}{4x} + \frac{\mathfrak{A}}{4x^2} - \frac{\mathfrak{B}}{8x^4} + \text{ и т. д.}$$

146. С помощью того же общего выражения можно найти также и сумму какого угодно гармонического ряда. Действительно, пусть

$$\frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \ldots + \frac{1}{mx+n} = s.$$

---

[1]) В первом издании по ошибке повторён номер 145. (Г. К.)

Так как общий член есть $z=\frac{1}{mx+n}$, то

$$\int z\,dx=\frac{1}{m}\,\mathrm{l}\,(mx+n),\ \frac{dz}{dx}=-\frac{m}{(mx+n)^2},\ \frac{d^2z}{2dx^2}=\frac{m^2}{(mx+n)^3},$$
$$\frac{d^3z}{6dx^3}=-\frac{m^3}{(mx+n)^4},\ \frac{d^4z}{24dx^4}=\frac{m^4}{(mx+n)^5},\ \frac{d^5z}{120\,dx^5}=-\frac{m^5}{(mx+n)^6}\ \text{и т. д.}$$

Отсюда находим

$$s=D+\frac{1}{m}\,\mathrm{l}\,(mx+n)+\frac{1}{2(mx+n)}-\frac{\mathfrak{A}m}{2(mx+n)^2}+\frac{\mathfrak{B}m^3}{4(mx+n)^4}-$$
$$-\frac{\mathfrak{C}m^5}{6(mx+n)^6}+\frac{\mathfrak{D}m^7}{8(mx+n)^8}-\ \text{и т. д.}$$

Если положить $x=0$, то найдём, что постоянное, которое нужно прибавить, равно

$$D=-\frac{1}{m}\,\mathrm{l}\,n-\frac{1}{2n}+\frac{\mathfrak{A}m}{2n^2}-\frac{\mathfrak{B}m^3}{4n^4}+\frac{\mathfrak{C}m^5}{6n^6}-\ \text{и т. д.}$$

147. Положим $n=0$; так как сумма ряда

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3m}+\ldots+\frac{1}{mx}$$

равна

$$\frac{1}{m}C+\frac{1}{m}\,\mathrm{l}\,x+\frac{1}{2mx}-\frac{\mathfrak{A}}{2mx^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4mx^4}-\ \text{и т. д.},$$

а сумма ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{mx}$$

равна

$$C+\mathrm{l}\,mx+\frac{1}{2mx}-\frac{\mathfrak{A}}{2m^2x^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4m^4x^4}-\ \text{и т. д.},$$

то, если от этого ряда отнять первый, взятый m раз, получим ряд

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}+\ldots+\frac{1}{2m}+\ldots+\frac{1}{3m}+\ldots+\frac{1}{mx}-$$
$$-\frac{m}{m}\qquad-\frac{m}{2m}\qquad-\frac{m}{3m}\qquad-\frac{m}{mx},$$

сумма которого равна

$$\mathrm{l}\,m+\frac{1}{2mx}-\frac{\mathfrak{A}}{2m^2x^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4m^4x^4}-\ \text{и т. д.}-\frac{1}{2x}+\frac{\mathfrak{A}}{2x^2}-\frac{\mathfrak{B}}{4x^4}+\text{и т. д.}$$

и, если положить $x=\infty$, сумма будет равна $\mathrm{l}\,m$. Следовательно, полагая вместо m числа 2, 3, 4 и т. д., будем иметь

$$\mathrm{l}\,2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ \text{и т. д.},$$
$$\mathrm{l}\,3=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\ \text{и т. д.},$$
$$\mathrm{l}\,4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}+\ \text{и т. д.},$$
$$\mathrm{l}\,5=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{4}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{4}{10}+\ \text{и т. д.},$$

и т. д.

148. Оставив гармонический ряд, перейдём к рассмотрению ряда обратных квадратов. Пусть

$$s = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{x^2}.$$

Так как в этом ряде общий член есть $z = \frac{1}{x^2}$, то $\int z\,dx = -\frac{1}{x}$ и дифференциалы количества z будут

$$\frac{dz}{2dx} = -\frac{1}{x^3}, \quad \frac{d^2z}{2\cdot 3dx^2} = \frac{1}{x^4}, \quad \frac{d^3z}{2\cdot 3\cdot 4dx^3} = -\frac{1}{x^5} \text{ и т. д.},$$

откуда сумма будет

$$s = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{\mathfrak{A}}{x^3} + \frac{\mathfrak{B}}{x^5} - \frac{\mathfrak{C}}{x^7} + \frac{\mathfrak{D}}{x^9} - \frac{\mathfrak{E}}{x^{11}} + \text{ и т. д.}$$

В ней постоянное C, которое должно быть прибавлено, нужно определить из какого-нибудь одного случая, для которого сумма известна. Положим $x = 1$; так как $s = 1$, то мы должны иметь

$$C = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \text{ и т. д.}$$

Но этот ряд, будучи сильно расходящимся, не даёт значения постоянного C. Но так как выше (§ 125) мы доказали, что сумма этого ряда, продолженного до бесконечности, равна $\frac{\pi^2}{6}$, то положим $x = \infty$ и $s = \frac{\pi^2}{6}$; тогда $C = \frac{\pi^2}{6}$, ибо все остальные члены исчезают. Следовательно, будем иметь

$$1 + 1 - \frac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \text{ и т. д.} = \frac{\pi^2}{6}.$$

149. Если бы сумма этого ряда не была известна, то значение постоянного C нужно было бы найти из другого какого-нибудь случая, для которого сумма непосредственно найдена. С этой целью можно положить $x = 10$; выполнив сложение десяти членов, найдём

$$s = 1{,}549\,767\,731\,166\,540\,690.$$

Тогда

прибавим $\frac{1}{x} = 0{,}1$,

вычтем $\frac{1}{2x^2} = 0{,}005$

$1{,}644\,767\,731\,166\,540\,690$,

прибавим

$\frac{\mathfrak{A}}{x^3} = 0{,}000\,166\,666\,666\,666\,666$

$1{,}644\,934\,397\,833\,207\,356$,

вычтем

$\frac{\mathfrak{B}}{x^5} = 0{,}000\,000\,333\,333\,333\,333$

$1{,}644\,934\,064\,499\,874\,023$,

прибавим

$\frac{\mathfrak{C}}{x^7} = 0{,}000\,000\,002\,380\,952\,381$

$1{,}644\,934\,066\,880\,826\,404$,

вычтем

$$\frac{\mathfrak{D}}{x^9} = 0{,}000\,000\,000\,033\,333\,333$$
$$\overline{1{,}644\,934\,066\,847\,493\,071},$$

прибавим

$$\frac{\mathfrak{E}}{x^{11}} = 0{,}000\,000\,000\,000\,757\,575$$
$$\overline{1\,644\,934\,066\,848\,250\,646},$$

вычтем

$$\frac{\mathfrak{F}}{x^{13}} = 0{,}000\,000\,000\,000\,025\,311$$
$$\overline{1{,}644\,934\,066\,848\,225\,335},$$

прибавим

$$\frac{\mathfrak{G}}{x^{15}} = 0{,}000\,000\,000\,000\,001\,166$$
$$\overline{1{,}644\,934\,066\,848\,226\,501},$$

вычтем

$$\frac{\mathfrak{H}}{x^{17}} = \qquad\qquad 71$$
$$\overline{1{,}644\,934\,066\,848\,226\,430} = C.$$

Это число вместе с тем есть значение выражения $\frac{\pi^2}{6}$, что станет ясно тому, кто произведёт вычисление, исходя из известного значения числа π [1]). Отсюда вместе с тем мы видим, что хотя ряд $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и т. д. расходится, однако этот способ даёт истинную сумму.

150. Пусть теперь $z = \frac{1}{x^3}$ и

$$s = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{x^3}.$$

Так как

$$\int z\,dx = -\frac{1}{2x^2}, \quad \frac{dz}{1\cdot2\cdot3\,dx} = -\frac{1}{2x^4}, \quad \frac{d^2z}{1\cdot2\cdot3\cdot4\,dx^2} = \frac{1}{2x^5},$$
$$\frac{d^3z}{1\cdot2\ldots5\,dx^3} = -\frac{1}{2x^6}, \quad \frac{d^4z}{1\cdot2\ldots6\,dx^4} = \frac{1}{2x^7}, \quad \frac{d^5z}{1\cdot2\ldots7\,dx^5} = -\frac{1}{2x^8} \text{ и т. д.,}$$

то будем иметь

$$s = C - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} + \frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} - \frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} \text{ и т. д.}$$

Положим здесь $x = 1$; поскольку тогда $s = 1$, получим

$$C = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathfrak{A} - \frac{5}{2}\mathfrak{B} + \frac{7}{2}\mathfrak{C} - \frac{9}{2}\mathfrak{D} + \text{ и т. д.,}$$

и это значение C вместе с тем должно дать сумму предложенного ряда, продолженного до бесконечности. Но так как в отличие от сумм чётных степеней суммы нечётных степеней нам не известны, то значение C нужно найти из известной суммы нескольких членов. Пусть, например, $x = 10$; тогда

$$C = s + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} - \frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} + \frac{7\mathfrak{N}}{2x^8} \text{ и т. д.}$$

[1]) Последняя цифра найденного здесь результата неверна: истинное её значение равно не нулю, а шести.

Чтобы легче выполнить вычисления, предварительно найдём

$$\frac{3\mathfrak{A}}{2} = 0{,}250\,000\,000\,000\,0$$

$$\frac{5\mathfrak{B}}{2} = 0{,}083\,333\,333\,333\,3$$

$$\frac{7}{2} = 0{,}083\,333\,333\,333\,3$$

$$\frac{9\mathfrak{D}}{2} = 0{,}150\,000\,000\,000\,0$$

$$\frac{11\mathfrak{E}}{2} = 0{,}416\,666\,666\,666\,6$$

$$\frac{13\mathfrak{F}}{2} = 1{,}645\,238\,095\,238\,0$$

$$\frac{15\mathfrak{G}}{2} = 8{,}750\,000\,000\,000\,0$$

$$\frac{17\mathfrak{H}}{2} = 60{,}283\,333\,333\,333\,3$$

и т. д.

Таким образом, члены, которые нужно прибавить к s, будут

$$\frac{1}{2x^2} = 0{,}005\,000\,000\,000\,000\,000$$

$$\frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} = 0{,}000\,025\,000\,000\,000\,000$$

$$\frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} = 0{,}000\,000\,000\,833\,333\,333$$

$$\frac{11\mathfrak{E}}{2x^{12}} = 0{,}000\,000\,000\,000\,416\,666$$

$$\frac{15\mathfrak{G}}{2x^{16}} = 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,875$$

$$0{,}005\,025\,000\,833\,750\,875$$

Члены же, которые нужно вычесть, будут

$$\frac{1}{2x^3} = 0{,}000\,500\,000\,000\,000\,000$$

$$\frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} = 0{,}000\,000\,083\,333\,333\,333$$

$$\frac{9\mathfrak{D}}{2x^{10}} = 0{,}000\,000\,000\,015\,000\,000$$

$$\frac{13\mathfrak{F}}{2x^{14}} = 0{,}000\,000\,000\,000\,016\,452$$

$$\frac{17\mathfrak{H}}{2x^{18}} = 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,060$$

$$0{,}000\,500\,083\,348\,349\,845$$

$$\text{от } 0{,}005\,025\,000\,833\,750\,875$$

$$0{,}004\,524\,917\,485\,401\,030$$

$$s = 1{,}197\,531\,985\,674\,193\,251$$

$$C = 1{,}202\,056\,903\,159\,594\,281\ ^{1})$$

[1]) Истинное значение C есть 1,202 056 903 159 594 285 39... [*Г. К.*]

151. Если таким же образом мы пойдём дальше, то найдём суммы всех рядов обратных степеней, выраженные десятичными дробями.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{и т. д.}=1{,}644\,934\,066\,848\,226\,4=\frac{2\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\pi^2,$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{и т. д.}=1{,}202\,056\,903\,159\,594\,2,$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{и т. д.}=1{,}082\,323\,233\,711\,138\,1=\frac{2^3\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\pi^4,$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\text{и т. д.}=1{,}036\,927\,755\,143\,369\,9\ ^{1)},$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{и т. д.}=1{,}017\,343\,061\,984\,449\,1=\frac{2^5\mathfrak{C}}{1\cdot 2\ldots 6}\pi^6,$$

$$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+\text{и т. д.}=1{,}008\,349\,277\,381\,922\,8\ ^{2)},$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\text{и т. д.}=1{,}004\,077\,356\,197\,944\,3=\frac{2^7\mathfrak{D}}{1\cdot 2\ldots 8}\pi^8,$$

$$1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{4^9}+\text{и т. д.}=1{,}002\,008\,392\,826\,082\,2,$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\text{и т. д.}=1{,}000\,994\,575\,127\,818\,0=\frac{2^9\mathfrak{E}}{1\cdot 2\ldots 10}\pi^{10},$$

$$1+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{4^{11}}+\text{и т. д.}=1{,}000\,494\,188\,604\,119\,4\ ^{3)},$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\text{и т. д.}=1{,}000\,246\,086\,553\,308\,0=\frac{2^{11}\mathfrak{F}}{1\cdot 2\ldots 12}\pi^{12},$$

$$1+\frac{1}{2^{13}}+\frac{1}{3^{13}}+\frac{1}{4^{13}}+\text{и т. д.}=1{,}000\,122\,713\,347\,578\,4\ ^{4)},$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\text{и т. д.}=1{,}000\,061\,248\,135\,058\,7=\frac{2^{13}\mathfrak{G}}{1\cdot 2\ldots 14}\pi^{14},$$

$$1+\frac{1}{2^{15}}+\frac{1}{3^{15}}+\frac{1}{4^{15}}+\text{и т. д.}=1{,}000\,030\,588\,236\,307\,0,$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\text{и т. д.}=1{,}000\,015\,282\,259\,408\,6=\frac{2^{15}\mathfrak{H}}{1\cdot 2\ldots 16}\pi^{16}.$$

152. Отсюда, обратно, можно найти суммы выше полученных бесконечных рядов, состоящих из бернуллиевых чисел. Именно, будем иметь

$$1+0-\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{2}-\frac{\mathfrak{B}}{4}+\frac{\mathfrak{C}}{6}-\frac{\mathfrak{D}}{8}+\text{и т. д.}=0{,}57\,721\ \text{и т. д.},$$

$$1+1-\frac{1}{2}+\mathfrak{A}-\mathfrak{B}+\mathfrak{C}-\mathfrak{D}+\text{и т. д.}=\frac{2\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\pi^2,$$

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3\mathfrak{A}}{2}-\frac{5\mathfrak{B}}{2}+\frac{7\mathfrak{C}}{2}-\frac{9\mathfrak{D}}{2}+\text{и т. д.}=1{,}2020\ \text{и т. д.},$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3\cdot 4\mathfrak{A}}{2\cdot 3}-\frac{5\cdot 6\mathfrak{B}}{2\cdot 3}+\frac{7\cdot 8\mathfrak{C}}{2\cdot 3}-\frac{9\cdot 10\mathfrak{D}}{2\cdot 3}+\text{и т. д.}=\frac{2^3\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\pi^4,$$

---

1) В первом издании 1,036 927 755 106 863 2. [*Г. К.*]
2) В первом издании 1,003 349 277 386 601 8. [*Г. К.*]
3) В первом издании 1,000 494 183 604 109 4. [*Г. К.*]
4) В первом издании 1,000 122 723 347 585 7. [*Г. К.*]

$$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3\cdot4\cdot5\mathfrak{A}}{2\cdot3\cdot4}-\frac{5\cdot6\cdot7\mathfrak{B}}{2\cdot3\cdot4}+\frac{7\cdot8\cdot9\mathfrak{C}}{2\cdot3\cdot4}-\frac{9\cdot10\cdot11\mathfrak{D}}{2\cdot3\cdot4}+$$
$$+\text{и т. д.}=1{,}0369 \quad \text{и т. д.}$$
$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6\mathfrak{A}}{2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8\mathfrak{B}}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10\mathfrak{C}}{2\cdot3\cdot4\cdot5}-\text{и т. д.}=\frac{2^5\mathfrak{C}}{1\cdot2\ldots6}\pi^6$$

и т. д.

Таким образом, стоящие на чётных местах ряды можно суммировать с помощью квадратуры круга; от какого трансцендентного количества зависят остальные ряды — до сих пор не известно; во всяком случае они не могут быть выражены нечётными степенями количества π так, чтобы коэффициенты были рациональными числами. Чтобы по крайней мере приблизительно составить представление, каковы были бы коэффициенты степеней π для нечётных степеней, мы присоединим следующую таблицу:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{и т. д. до бесконечности}=\frac{\pi}{0{,}0000}=\infty,$$
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{и т. д.}\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{6{,}0000}\ \text{точно},$$
$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{и т. д.}\ldots\ldots=\frac{\pi^3}{25{,}794\,36}\ \text{приближённо},$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{и т. д.}\ldots\ldots=\frac{\pi^4}{90{,}000\,00}\ \text{точно},$$
$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\text{и т. д.}\ldots\ldots=\frac{\pi^5}{295{,}1215}\ \text{приближённо},$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{и т. д.}\ldots\ldots=\frac{\pi^6}{945{,}000}\ \text{точно},$$
$$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+\text{и т. д.}\ldots\ldots=\frac{\pi^7}{2\,995{,}284}\ \text{приближённо}^{1)},$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\text{и т. д.}\ldots\ldots=\frac{\pi^8}{9\,450{,}000}\ \text{точно},$$
$$1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{4^9}+\text{и т. д.}\ldots\ldots=\frac{\pi^9}{29\,749{,}35}\ \text{приближённо}$$

и т. д.

153. Исходя из этого, можно интерполировать ряд бернуллиевых чисел

$$\overset{1}{\mathfrak{A}},\ \overset{2}{\mathfrak{B}},\ \overset{3}{\mathfrak{C}},\ \overset{4}{\mathfrak{D}},\ \overset{5}{\mathfrak{E}},\ \overset{6}{\mathfrak{F}},\ \text{и т. д.},$$

хотя он и представляется неправильным, т. е. можно определить члены, стоящие посредине между какими-нибудь двумя членами этого ряда. Действительно, если член, лежащий посредине между первым членом $\mathfrak{A}$ и вторым $\mathfrak{B}$, т. е. член, отвечающий индексу $1\frac{1}{2}$, будет равен p, то будем иметь

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\text{и т. д.}=\frac{2^2p}{1\cdot2\cdot3}\pi^3.$$

Поэтому

$$p=\frac{3}{2\pi^3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\text{и т. д.}\right)=0{,}05\,815\,227.$$

[1]) В первом издании [*Г. К.*]

Подобным образом, если член, лежащий посредине между $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, т. е. член, имеющий индекс $2\frac{1}{2}$, положим равным q, то, поскольку

$$1-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\text{и т. д.}=\frac{2^4 q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\pi^5,$$

будем иметь

$$q=\frac{15}{2\pi^5}\left(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\text{и т. д.}\right)=0{,}025\,413\,27.$$

Таким образом, если бы можно было найти суммы тех рассмотренных нами рядов, у которых показатели степеней суть нечётные числа, тогда можно было бы также интерполировать ряд бернуллиевых чисел.

154. Положим теперь $z=\frac{1}{n^2+x^2}$ и будем искать сумму ряда

$$s=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+4}+\frac{1}{n^2+9}+\ldots+\frac{1}{n^2+x^2}.$$

Так как $\int z\,dx=\int\frac{dx}{n^2+x^2}$, то будем иметь

$$\int z\,dx=\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}.$$

Положим $\operatorname{arcctg}\frac{x}{n}=u$; тогда

$$\int z\,dx=\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}-u\right),$$

и

$$\frac{x}{n}=\operatorname{ctg}u=\frac{\cos u}{\sin u},\qquad \frac{n^2+x^2}{n^2}=\frac{1}{\sin^2 u},\qquad z=\frac{\sin^2 u}{n^2}\quad\text{и}\quad\frac{dx}{n}=-\frac{du}{\sin^2 u},$$

откуда

$$du=-\frac{dx\sin^2 u}{n}.$$

Дифференциалы количества z найдутся следующим образом:

$$dz=\frac{2du\sin u\cos u}{n^2}=-\frac{dx\sin^2 u\sin 2u}{n^3}\quad\text{и}\quad\frac{dz}{dx}=-\frac{\sin^2 u\cdot\sin^2 2u}{n^3}.$$

$$\frac{d^2z}{2dx}=-\frac{du(\sin u\cos u\sin 2u+\sin^2 u\cos 2u)}{n^3}=\frac{dx\sin^3 u\sin 3u}{n^4}$$

и

$$\frac{d^2z}{2dx^2}=\frac{\sin^3 u\cdot\sin 3u}{n^4}.$$

Подобным образом, как мы нашли уже раньше (§ 87) для того же случая

$$\frac{d^3z}{2\cdot 3dx^3}=-\frac{\sin^4 u\cdot\sin 4u}{n^5},\qquad\frac{d^4z}{2\cdot 3\cdot 4dx^4}=\frac{\sin^5 u\cdot\sin 5u}{n^6}\quad\text{и т. д.}$$

Из этих значений получится искомая сумма

$$s=\frac{\pi}{2n}-\frac{u}{n}+\frac{\sin^2 u}{2n^2}-\frac{\mathfrak{A}}{2}\frac{\sin^2 u\cdot\sin 2u}{n^3}+\frac{\mathfrak{B}}{4}\frac{\sin^4 u\cdot\sin 4u}{n^5}-\frac{\mathfrak{C}}{6}\frac{\sin^6 u\cdot\sin 6u}{n^7}+$$
$$+\frac{\mathfrak{D}}{8}\frac{\sin^8 u\cdot\sin 8u}{n^9}-\text{и т. д.}+\text{const}.$$

Если для того, чтобы определить постоянное, положить здесь $x=0$, что даст $s=0$, то мы будем иметь $\operatorname{ctg}u=0$, так что угол u будет иметь 90°, и поэтому $\sin u = 1$, $\sin 2u = 0$, $\sin 4u = 0$, $\sin 6u = 0$ и т. д. Таким образом, на первый взгляд представляется, что

$$0 = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2n^2} + C, \quad \text{откуда} \quad C = -\frac{1}{2n^2}.$$

Однако, нужно заметить, что хотя все остальные члены исчезают, но так как коэффициенты $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и т. д., в конце концов, становятся бесконечными, то сумма может быть конечной.

155. Для того чтобы надлежащим образом определить это постоянное, положим $x = \infty$. Сумму рассматриваемого ряда, продолженного до бесконечности, мы уже нашли во «Введении» [1]) и показали, что она равна

$$-\frac{1}{2n^2} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}.$$

Но если положить $x = \infty$, то $u = 0$, так что и $\sin u = 0$; вместе с тем исчезают и синусы всех кратных дуг. А так как в нашем ряде степени $\sin u$ возрастают, то расходимость ряда не может помешать тому, чтобы в этом случае значение ряда исчезло. Таким образом, $s = \frac{\pi}{2n} + C$, откуда будем иметь

$$\frac{\pi}{2n} + C = -\frac{1}{2n^2} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)} \quad \text{и} \quad C = -\frac{1}{2n^2} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}.$$

Поэтому сумма искомого ряда будет

$$s = \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{\sin^2 u}{2n^2} - \frac{\mathfrak{A}}{2}\,\frac{\sin^2 u \sin 2u}{n^3} +$$
$$+ \frac{\mathfrak{B}}{4}\,\frac{\sin^4 u \cdot \sin 4u}{n^5} - \frac{\mathfrak{C}}{6}\,\frac{\sin^6 u \cdot \sin 6u}{n^7} + \text{ и т. д. } + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}.$$

Нужно заметить, что если n будет очень большим числом, то последний член $\frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}$ сделается столь малым, что им можно пренебречь.

156. Положим, что $x = n$, так что

$$s = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 4} + \frac{1}{n^2 + 9} + \ldots + \frac{1}{n^2 + n^2}.$$

Тогда $\operatorname{ctg} u = 1$ и $u = 45° = \frac{\pi}{4}$. Поэтому получим $\sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 2u = 1$, $\sin 4u = 0$, $\sin 6u = -1$, $\sin 8u = 0$, $\sin 10u = 1$ и т. д. Поэтому будем иметь

$$s = \frac{\pi}{4\pi} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4n^2} - \frac{\mathfrak{A}}{2 \cdot 2n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{6 \cdot 8n^4} - \frac{\mathfrak{E}}{10 \cdot 2^5 n^{11}} + \text{ и т. д. } + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi} - 1)}.$$

В это выражение из бернуллиевых чисел входят только числа, стоящие на нечётных местах. Поэтому, если мы сначала найдём с помощью непосредственного подсчёта значение s, то отсюда можно будет определить количество π; действительно, мы будем иметь

$$\pi = 4ns + \frac{1}{n} + \frac{\mathfrak{A}}{1n^2} - \frac{\mathfrak{C}}{3 \cdot 2^2 n^6} + \frac{\mathfrak{E}}{5 \cdot 2^4 n^{10}} + \text{ и т. д. } - \frac{4\pi}{e^{2n\pi} - 1}.$$

Хотя в последний член входит π, однако так как он весьма мал, то достаточно иметь значение π с небольшой точностью.

---

[1]) «Введение», ч. 1, гл. X.

Пример

Пусть $n=5$; тогда

$$s=\frac{1}{26}+\frac{1}{29}+\frac{1}{34}+\frac{1}{41}+\frac{1}{50}.$$

Если выполнить сложение, эти члены дадут

$$s=0{,}146\,746\,305\,690\,549\,494.$$

Тогда члены ряда будут

$$4ns=2{,}934\,926\,113\,810\,989\,88,$$

$$\frac{1}{n}=0{,}2,$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{n^2}=\frac{0{,}006\,666\,666\,666\,666\,66}{3{,}141\,592\,780\,477\,565\,4},$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{3\cdot 2^2\cdot n^6}=\frac{0{,}000\,000\,126\,984\,126\,98}{3{,}141\,592\,653\,493\,529\,56},$$

$$\frac{\mathfrak{E}}{5\cdot 2^4\cdot n^{10}}=\frac{0{,}000\,000\,000\,096\,969\,69}{3{,}141\,592\,653\,590\,499\,25},$$

$$\frac{\mathfrak{G}}{7\cdot 2^6\cdot n^{14}}=\frac{0{,}000\,000\,000\,000\,426\,66}{3{,}141\,592\,653\,590\,072\,59},$$

$$\frac{\mathfrak{J}}{9\cdot 2^8\cdot n^{18}}=\frac{625}{3{,}141\,592\,653\,590\,078\,84}.$$

Это значение столь близко подходит к истинному, что удивительно, как можно было столь лёгким вычислением достигнуть этого. Разумеется, это выражение несколько больше истинного; действительно, от него нужно ещё отнять $\frac{4\pi}{e^{2n-\pi}-1}$; значение этого выражения, так как приближённое значение π известно, можно найти. С помощью логарифмов мы сделаем это таким образом.

Так как $\pi\,\mathrm{l}\,e=1{,}364\,376\,353\,8$, то

$$\mathrm{l}\,e^{2n\pi}=10\pi\,\mathrm{l}\,e=13{,}643\,763\,5.$$

А так как

$$\frac{4\pi}{e^{2n\pi}-1}=\frac{4\pi}{e^{2n\pi}}+\frac{4\pi}{e^{4n\pi}}+\text{ и т. д.},$$

то легко видеть, что для нашего вычисления достаточно взять лишь первый член. Увеличим характеристику на 17; так как у нас имеется 17 десятичных знаков, будем иметь

$$\begin{array}{r} \mathrm{l}\,\pi=17{,}497\,149\,8\\ \mathrm{l}\,4=\ \ 0{,}602\,060\,0\\ \hline 18{,}099\,209\,8 \end{array}$$

вычитаем

$$\begin{array}{r} \mathrm{l}\,e^{2n\pi}=13{,}643\,763\,5\\ \hline 4{,}455\,446\,3 \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{4\pi}{e^{2n\pi}}=28\,539.$$

Вычитая из

$$3{,}141\,592\,653\,590\,078\,84,$$

будем иметь

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,45.$$

Это выражение отличается от истинного только в предпоследнем десятичном знаке; это неудивительно, ибо мы ещё должны были бы отнять член $\frac{\mathfrak{L}}{11 \cdot 2^{10} \cdot n^{22}}$, который даёт 22, и тогда неверным мог бы быть лишь последний знак. Ясно, впрочем, что если за n мы возьмём большее число, например, число 10, тогда можно будет без труда найти окружность с точностью до 25 и более знаков.

157. Будем теперь полагать z трансцендентными функциями x, и пусть $z = \mathrm{l}\,x$. Мы будем брать гиперболические логарифмы, ибо десятичные легко к ним приводятся; пусть

$$s = \mathrm{l}\,1 + \mathrm{l}\,2 + \mathrm{l}\,3 + \mathrm{l}\,4 + \ldots + \mathrm{l}\,x.$$

Так как теперь $z = \mathrm{l}\,x$, то

$$\int z\,dx = x\,\mathrm{l}\,x - x;$$

действительно, дифференциал этого выражения есть $dx\,\mathrm{l}\,x$. Далее,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^3z}{1 \cdot 2\,dx^3} = \frac{1}{x^3}, \quad \frac{d^4z}{1 \cdot 2 \cdot 3\,dx^4} = -\frac{1}{x^4} \text{ и т. д.}$$

Отсюда заключаем, что

$$s = x\,\mathrm{l}\,x - x + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,x + \frac{\mathfrak{A}}{1 \cdot 2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3 \cdot 4x^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5 \cdot 6x^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7 \cdot 8x^7} + \text{ и т. д. } + \mathrm{const}.$$

Если положить $x = 1$, то, поскольку $s = \mathrm{l}\,1 = 0$, постоянное C пришлось бы определять из ряда

$$C = 1 - \frac{\mathfrak{A}}{1 \cdot 2} + \frac{\mathfrak{B}}{3 \cdot 4} - \frac{\mathfrak{C}}{5 \cdot 6} + \frac{\mathfrak{D}}{7 \cdot 8} - \text{ и т. д.}$$

Но этот ряд вследствие сильной его расходимости непригоден даже для приближённого вычисления количества C.

158. Однако мы можем найти не только приближённое, но и точное значение C, если рассмотрим валлисово выражение, найденное для значения π и доказанное во «Введении» [1]). Это выражение имело вид

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \text{ и т. д.}}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \text{ и т. д.}}.$$

Действительно, логарифмируя, будем иметь

$$\mathrm{l}\,\pi - \mathrm{l}\,2 = 2\,\mathrm{l}\,2 + 2\,\mathrm{l}\,4 + 2\,\mathrm{l}\,6 + 2\,\mathrm{l}\,8 + 2\,\mathrm{l}\,10 + \mathrm{l}\,12 + \text{ и т. д.} -$$
$$- \mathrm{l}\,1 - 2\,\mathrm{l}\,3 - 2\,\mathrm{l}\,5 - 2\,\mathrm{l}\,7 - 2\,\mathrm{l}\,9 - 2\,\mathrm{l}\,11 - \text{ и т. д.}$$

Положим теперь в рассматриваемом ряде $x = \infty$. Так как

$$\mathrm{l}\,1 + \mathrm{l}\,2 + \mathrm{l}\,3 + \mathrm{l}\,4 + \ldots + \mathrm{l}\,x = C + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{l}\,x - x,$$

то

$$\mathrm{l}\,1 + \mathrm{l}\,2 + \mathrm{l}\,3 + \mathrm{l}\,4 + \ldots + \mathrm{l}\,2x = C + \left(2x + \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{l}\,2x - 2x$$

и

$$\mathrm{l}\,2 + \mathrm{l}\,4 + \mathrm{l}\,6 + \mathrm{l}\,8 + \ldots + \mathrm{l}\,2x = C + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{l}\,x + x\,\mathrm{l}\,2 - x.$$

[1]) «Введение», т. I, гл. XI.

Следовательно,

$$l\,1+l\,3+l\,5+l\,7+\ldots+l\,(2x-1)=xl\,x+\left(x+\frac{1}{2}\right)l\,2-x.$$

Поскольку, таким образом, мы имеем

$$l\,\frac{\pi}{2}=2l\,2+2l\,4+2l\,6+\ldots+2l\,2x-l\,2x-$$
$$-2l\,1-2l\,3-2l\,5-\ldots-2l\,(2x-1),$$

то, полагая $x=\infty$, получим

$$l\,\frac{\pi}{2}=2C+(2x+1)\,l\,x+2xl\,2-2x-l\,2-l\,x-2xl\,x-(2x+1)\,l\,2+2x,$$

так что $l\,\frac{\pi}{2}=2C-2l\,2$; следовательно, $2C=l\,2\pi$ и $C=\frac{1}{2}\,l\,2\pi$, откуда в десятичных дробях найдём

$$C=0{,}9\,189\,385\,332\,046\,727\,417\,803\,297,$$

и вместе с тем суммируется следующий бесконечный ряд

$$1-\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2}+\frac{\mathfrak{B}}{3\cdot 4}-\frac{\mathfrak{C}}{5\cdot 6}+\frac{\mathfrak{D}}{7\cdot 8}-\text{ и т. д. }=\frac{1}{2}\,l\,2\pi.$$

159. После того как это постоянное $C=\frac{1}{2}\,l\,2\pi$ найдено, можно получить сумму логарифмов, взятых в любом числе из ряда $l\,1+l\,2+l\,3+$ и т. д. В самом деле, если положить

$$s=l\,1+l\,2+l\,3+\ldots+l\,x,$$

то будем иметь

$$s=\frac{1}{2}\,l\,2\pi+\left(x+\frac{1}{2}\right)l\,x-x+\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2x}-\frac{\mathfrak{B}}{3\cdot 4x^3}+\frac{\mathfrak{C}}{5\cdot 6x^5}-\frac{\mathfrak{D}}{7\cdot 8x^7}+\text{ и т. д.}$$

если, конечно, предложенные логарифмы были гиперболическими; если же предложены были бы обыкновенные логарифмы, тогда в членах $\frac{1}{2}\,l\,2\pi+\left(x+\frac{1}{2}\right)l\,x$ нужно было бы взять вместо $l\,2\pi$ и $l\,x$ обыкновенные логарифмы; остальные же члены ряда

$$-x+\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2x}-\frac{\mathfrak{B}}{3\cdot 4x^3}+\text{ и т. д.}$$

нужно было бы помножить на $0{,}434\,294\,481\,903\,251\,827=n$. Таким образом, для обыкновенных логарифмов имеем

$$l\,\pi=0{,}497\,149\,872\,694\,133\,854\,351\,268$$
$$l\,2=0{,}301\,029\,995\,663\,981\,195\,213\,738$$
$$l\,2\pi=0{,}798\,179\,868\,358\,115\,049\,565\,006$$
$$\frac{1}{2}\,l\,2\pi=0{,}399\,089\,934\,179\,057\,524\,782\,503$$

Пример

Пусть ищется сумма тысячи табличных логарифмов

$$s=l\,1+l\,2+l\,3+\ldots+l\,1000.$$

Следовательно, будем иметь $x=1000$ и

$$l\,x=3{,}000\,000\,000\,000\,0,$$

откуда

$$
\begin{aligned}
x\,\mathrm{l}\,x &= 3000{,}000\,000\,000\,000\,0\\
\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,x &= 1{,}500\,000\,000\,000\,0\\
\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,2\pi &= 0{,}399\,089\,934\,179\,0\\
\hline
&\ 3001{,}899\,089\,934\,179\,0
\end{aligned}
$$

Вычтем

$$
\begin{aligned}
nx &= 434{,}294\,481\,903\,251\,8\\
\hline
&\ 2567{,}604\,608\,030\,927\,2
\end{aligned}
$$

Далее,

$$\frac{n\mathfrak{A}}{1\cdot 2x} = 0{,}000\,036\,191\,206\,8$$

вычитаем

$$
\begin{aligned}
\frac{n\mathfrak{B}}{3\cdot 4x^3} &= 0{,}000\,000\,000\,001\,2\\
\hline
&\ 0{,}000\,036\,191\,205\,6
\end{aligned}
$$

прибавляем

$$2567{,}604\,608\,030\,927\,2$$

Искомая сумма

$$s = 2567{,}604\,644\,222\,132\,8.$$

Так как s есть логарифм произведения чисел

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots 1000,$$

то ясно, что это произведение, если его вычислить, будет иметь 2568 знаков; слева его начальные цифры будут 423 872, а за ними будет следовать ещё 2561 цифра.

160. С помощью этого суммирования логарифмов можно также найти приближённо произведение какого угодно числа последовательных натуральных чисел. Сюда можно прежде всего отнести задачу об определении среднего, т. е. максимального биномиального коэффициента в разложении какой-либо степени $(a+b)^m$. Заметим, что если m есть нечётное число, то имеется два средних коэффициента, равных между собой. Взятые вместе, они должны дать средний коэффициент разложения следующей чётной степени. Так как, следовательно, максимальный коэффициент в разложении какой-либо чётной степени вдвое больше, чем средний коэффициент в разложении нечётной степени, то достаточно определить максимальный средний коэффициент для нечётных степеней. Итак, пусть $m = 2n$; средний член можно представить в виде

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n}.$$

Обозначим этот средний коэффициент через u и представим его в виде

$$u = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots 2n}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n)^2}.$$

Логарифмируя, будем иметь

$$\mathrm{l}\,u = \mathrm{l}\,1 + \mathrm{l}\,2 + \mathrm{l}\,3 + \mathrm{l}\,4 + \mathrm{l}\,5 + \ldots + \mathrm{l}\,2n -$$
$$- 2\,\mathrm{l}1 - 2\,\mathrm{l}2 - 2\,\mathrm{l}3 - 2\,\mathrm{l}4 - 2\,\mathrm{l}5 - \ldots - 2\,\mathrm{l}n.$$

161. Возьмём здесь гиперболические логарифмы; будем иметь

$$\mathrm{l}\,1 + \mathrm{l}\,2 + \mathrm{l}\,3 + \mathrm{l}\,4 + \ldots + \mathrm{l}\,2n =$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,2\pi + \left(2n + \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\,n + \left(2n + \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\,2 - 2n +$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}}{1 \cdot 2 \cdot 2n} - \frac{\mathfrak{B}}{3 \cdot 4 \cdot 2^3 n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5 \cdot 6 \cdot 2^5 n^5} - \text{ и т. д.}$$

и

$$2\,\mathrm{l}1 + 2\,\mathrm{l}2 + 2\,\mathrm{l}3 + 2\,\mathrm{l}4 + \ldots + 2\,\mathrm{l}n =$$
$$= \mathrm{l}\,2\pi + (2n+1)\,\mathrm{l}n - 2n + \frac{2\mathfrak{A}}{1 \cdot 2n} - \frac{2\mathfrak{B}}{3 \cdot 4n^3} + \frac{2\mathfrak{C}}{5 \cdot 6n^5} - \text{ и т. д.}$$

Отняв это выражение от предыдущего, получим в остатке

$$\mathrm{l}\,u = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\pi - \frac{1}{2}\,\mathrm{l}n + 2n\,\mathrm{l}\,2 + \frac{\mathfrak{A}}{1 \cdot 2 \cdot 2n} - \frac{\mathfrak{B}}{3 \cdot 4 \cdot 2^2 n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5 \cdot 6 \cdot 2^5 n^5} - \text{ и т. д.}$$
$$- \frac{2\mathfrak{A}}{1 \cdot 2n} + \frac{2\mathfrak{B}}{3 \cdot 4 \cdot n^3} - \frac{2\mathfrak{C}}{5 \cdot 6 \cdot n^5} + \text{ и т. д.}$$

Собрав эти члены попарно, будем иметь

$$\mathrm{l}\,u = \mathrm{l}\,\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3\mathfrak{A}}{1 \cdot 2 \cdot 2n} + \frac{15\mathfrak{B}}{3 \cdot 4 \cdot 2^3 n^3} - \frac{63\mathfrak{C}}{5 \cdot 6 \cdot 2^5 n^5} + \frac{255\mathfrak{D}}{7 \cdot 8 \cdot 2^7 n^7} - \text{ и т. д.}$$

Пусть

$$\frac{3\mathfrak{A}}{1 \cdot 2 \cdot 2^2 n^2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3 \cdot 4 \cdot 2^4 n^4} + \frac{63\mathfrak{C}}{5 \cdot 6 \cdot 2^6 n^6} - \frac{255\mathfrak{D}}{7 \cdot 8 \cdot 2^8 n^8} + \text{ и т. д.} =$$
$$= \mathrm{l}\left(1 + \frac{A}{2^2 n^2} + \frac{B}{2^4 n^4} + \frac{C}{2^6 n^6} + \frac{D}{2^8 n^8} + \text{ и т. д.}\right).$$

Тогда

$$\mathrm{l}\,u = \mathrm{l}\,\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - 2n\,\mathrm{l}\left(1 + \frac{A}{2^2 n^2} + \frac{B}{2^4 n^4} + \frac{C}{2^6 n^6} + \text{ и т. д.}\right),$$

так что

$$u = \frac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{A}{2^2 n^2} + \frac{B}{2^4 n^4} + \text{ и т. д.}\right)^{2n} \sqrt{n\pi}}.$$

Но при $2n = m$ будем иметь

$$\mathrm{l}\left(1 + \frac{A}{2^2 n^2} + \frac{B}{2^4 n^4} + \frac{C}{2^6 n^6} + \frac{D}{2^8 n^8} + \text{ и т. д.}\right) =$$
$$= \frac{A}{m^2} + \frac{B}{m^4} + \frac{C}{m^6} + \frac{D}{m^8} + \frac{E}{m^{10}} + \text{ и т. д.} -$$
$$- \frac{A^2}{2m^4} - \frac{AB}{m^6} - \frac{AC}{m^8} - \frac{AD}{m^{10}} - \text{ и т. д.} -$$
$$- \frac{B^2}{2m^8} - \frac{BC}{m^{10}} - \text{ и т. д.} +$$
$$+ \frac{A^3}{3m^6} + \frac{A^2 B}{m^8} + \frac{A^2 C}{m^{10}} + \text{ и т. д.} +$$
$$+ \frac{AB^2}{m^{10}} + \text{ и т. д.} -$$
$$- \frac{A^4}{4m^8} - \frac{A^3 B}{m^{10}} - \text{ и т. д.} +$$
$$+ \frac{A^5}{5m^{10}} + \text{ и т. д.}$$

Так как это выражение должно быть равным выражению

$$\frac{3\mathfrak{A}}{1\cdot 2m^2}-\frac{15\mathfrak{B}}{3\cdot 4m^4}+\frac{63\mathfrak{C}}{5\cdot 6m^6}-\frac{255\mathfrak{D}}{7\cdot 8m^8}+\text{ и т. д.},$$

то получим

$$A=\frac{3\mathfrak{A}}{1\cdot 2},$$

$$B=\frac{A^2}{2}-\frac{15\mathfrak{B}}{3\cdot 4},$$

$$C=AB-\frac{1}{3}A^3+\frac{63\mathfrak{C}}{5\cdot 6},$$

$$D=AC+\frac{1}{2}B^2-A^2B+\frac{1}{4}A^4-\frac{255\mathfrak{D}}{7\cdot 8},$$

$$E=AD+BC-A^2C-AB^2+A^3B-\frac{1}{5}A^5+\frac{1023\mathfrak{E}}{9\cdot 10}$$

и т. д.

162. Так как $\mathfrak{A}=\frac{1}{6}$, $\mathfrak{B}=\frac{1}{30}$, $\mathfrak{C}=\frac{1}{42}$, $\mathfrak{D}=\frac{1}{30}$, $\mathfrak{E}=\frac{5}{66}$, то

$$A=\frac{1}{4},\quad B=-\frac{1}{96},\quad C=\frac{27}{640},\quad D=-\frac{90\,031}{2^{11}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}\text{ и т. д.}$$

Отсюда находим

$$u=\frac{2^{2n}}{\left(1+\frac{1}{2^4n^2}-\frac{1}{2^9\cdot 3n^4}+\frac{27}{2^{13}\cdot 5n^6}-\frac{90\,031}{2^{19}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7n^8}+\text{ и т. д.}\right)^{2n}\sqrt{n\pi}}$$

или

$$u=\frac{2^{2n}\left(1-\frac{1}{2^4n^2}+\frac{7}{2^9\cdot 3n^4}-\frac{121}{2^{13}\cdot 5n^6}+\frac{107\,489}{2^{19}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7n^8}-\text{ и т. д.}\right)^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

или, если выполнить возведение в степень, будем иметь приближённо

$$u=\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}\left(1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{32n^2}-\frac{1}{128n^3}-\frac{5}{16\cdot 128n^4}+\text{ и т. д.}\right)}.$$

Таким образом, средний член в разложении $(1+1)^{2n}$ будет относиться к сумме всех членов 2^{2n},

$$\text{как } 1 \text{ к } \sqrt{n\pi}\left(1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{32n^2}-\frac{1}{128n^3}-\frac{1}{16\cdot 128n}+\text{ и т. д.}\right)$$

или, если для краткости положить $4n=\nu$,

$$\text{как } 1 \text{ к } \sqrt{n\pi}\left(1+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{2\nu^2}-\frac{1}{2\nu^3}-\frac{5}{8\nu^4}+\frac{23}{8\nu^5}+\text{ и т. д.}\right).$$

Пример 1

Пусть ищется средний коэффициент в разложении бинома $(a+b)^{10}$. Известно, что он равен

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=252.$$

Применяя последнюю найденную для u формулу, будем иметь при $n=5$:

$$\frac{1}{4n} = 0{,}050\,000\,0$$
$$\frac{1}{32n^2} = 0{,}001\,250\,0$$
$$0{,}051\,250\,0$$

Вычтем

$$\frac{1}{128n^3} = \qquad 625$$
$$0{,}051\,187\,5$$

Вычтем

$$\frac{5}{16\cdot 128n^4} = \qquad 39$$

Следовательно,

$$1+\frac{1}{4n}+\text{и т. д.} = 1{,}051\,183\,6$$

Его логарифм

$$= 0{,}021\,678\,4$$
$$\operatorname{l} n = 0{,}698\,970\,0$$
$$\operatorname{l} \pi = 0{,}497\,149\,8$$
$$1{,}217\,798\,2$$
$$\operatorname{l} \sqrt{n\pi\,(1+\text{и т. д.})} = 0{,}608\,899\,1;$$

отнимая от

$$\operatorname{l} 2^{2n} = 3{,}010\,299\,9$$
$$\operatorname{l} u = 2{,}401\,400\,8,$$

откуда

$$u = 252.$$

Пример 2

Пусть ищется отношение, в котором средний член разложения сотой степени бинома $1+1$ находится к сумме 2^{100} всех членов.

Воспользуемся для этого ранее найденной формулой

$$\operatorname{l} u = \operatorname{l}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3\mathfrak{A}}{1\cdot 2\cdot 2n} + \frac{15\mathfrak{B}}{3\cdot 4\cdot 2^3 n^3} - \frac{63\mathfrak{C}}{5\cdot 6\cdot 2^5 n^5} + \text{и т. д.}$$

Положим в ней $2n=m$, так что будем иметь степень $(1+1)^m$, и подставим вместо $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д. их значения. Получим

$$\operatorname{l} u = \operatorname{l}\frac{2^m}{\sqrt{\frac{1}{2}m\pi}} - \frac{1}{4m} + \frac{1}{24m^3} - \frac{1}{20m^5} + \frac{17}{112m^7} - \frac{31}{36m^9} + \text{и т. д.}$$

Так как здесь логарифмы являются гиперболическими, то помножим их на

$$k = 0{,}434\,294\,481\,903\,251$$

так, чтобы они преобразовались в табличные; тогда

$$1u = 1\frac{2^m}{\sqrt{\frac{1}{2}m\pi}} - \frac{k}{4m} + \frac{k}{24m^3} - \frac{k}{20m^5} + \frac{17k}{112m^7} - \frac{31k}{36m^9} + \text{и т. д.}$$

Так как средний коэффициент есть u, то искомое отношение будет $2^m : u$, так что

$$1\frac{2^m}{u} = 1\sqrt{\frac{1}{2}m\pi} + \frac{k}{4m} - \frac{k}{24m^3} + \frac{k}{20m^5} - \frac{17k}{112m^7} + \frac{31k}{36m^9} - \text{и т. д.}$$

Так как показатель $m = 100$, то

$$\frac{k}{m} = 0{,}004\,342\,944\,8,\ \frac{k}{m^3} = 0{,}000\,000\,434\,3,\ \frac{k}{m^5} = 0{,}000\,000\,00.$$

Поэтому будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{k}{4m} &= 0{,}001\,085\,736\,2 \\ \frac{k}{24m^3} &= 0{,}000\,000\,018\,1 \\ \hline &\ 0{,}001\,085\,718\,1 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} 1\pi &= 0{,}497\,149\,872\,6 \\ 1\frac{1}{2}m &= 1{,}698\,970\,004\,3 \\ \hline 1\frac{1}{2}m\pi &= 2{,}196\,119\,876\,9 \\ \hline 1\sqrt{\frac{1}{2}m\pi} &= 1{,}098\,059\,938\,4 \\ \frac{k}{4m} - \frac{k}{24m^3} + \text{и т. д.} &= 0{,}001\,085\,718\,1 \\ \hline &\ 1{,}099\,145\,656\,5 = 1\frac{2^{100}}{u}. \end{aligned}$$

Следовательно, будем иметь $\frac{2^{100}}{u} = 12{,}564\,51$ и, значит, в разложении степени $(1+1)^{100}$ средний член будет относиться к сумме 2^{100} всех членов, как 1 к 12,564 51.

163. Пусть теперь общий член z есть показательная функция a^x, так что суммировать нужно следующий геометрический ряд:

$$s = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^x.$$

Так как он является геометрическим, то его сумма заранее известна; она равна $s = \frac{(a^x - 1)a}{a - 1}$. Найдём теперь эту сумму по изложенному здесь способу. Так как $z = a^x$, то будем иметь $\int z\,dx = \frac{a^x}{1a}$; действительно, дифференциал этого выражения есть $a^x\,dx$; далее будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = a^x\,1a,\quad \frac{d^2z}{dx^2} = a^x\,(1a)^2,\quad \frac{d^3z}{dx^3} = a^x\,(1a)^3 \text{ и т. д.},$$

откуда следует, что

$$s=a^x\left(\frac{1}{\mathrm{l}\,a}+\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\mathrm{l}\,a-\frac{\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\mathrm{l}\,a)^3+\frac{\mathfrak{C}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 6}(\mathrm{l}\,a)^5-\text{и т. д.}\right)+C.$$

Для определения постоянного C положим $x=0$; так как $s=0$, то будем иметь

$$C=-\frac{1}{\mathrm{l}\,a}-\frac{1}{2}-\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\mathrm{l}\,a+\frac{\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\mathrm{l}\,a)^3-\text{ и т. д.},$$

так что получим

$$s=(a^x-1)\left(\frac{1}{\mathrm{l}\,a}+\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\mathrm{l}\,a-\frac{\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\mathrm{l}\,a)^3+\frac{\mathfrak{C}}{1\cdot 2\ldots 6}(\mathrm{l}\,a)^5-\text{и т. д.}\right).$$

Так как сумма есть $\frac{(a^x-1)\,a}{a-1}$, то будем иметь

$$\frac{a}{a-1}=\frac{1}{\mathrm{l}\,a}+\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\mathrm{l}\,a-\frac{\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\mathrm{l}\,a)^3+\frac{\mathfrak{C}}{1\cdot 2\ldots 6}(\mathrm{l}\,a)^5-\text{и т. д.},$$

где $\mathrm{l}\,a$ есть гиперболический логарифм количества a; отсюда

$$\frac{(a+1)\,\mathrm{l}\,a}{2(a-1)}=1+\frac{\mathfrak{A}(\mathrm{l}\,a)^2}{1\cdot 2}-\frac{\mathfrak{B}(\mathrm{l}\,a)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\mathfrak{C}(\mathrm{l}\,a)^6}{1\cdot 2\ldots 6}-\text{ и т. д.},$$

и таким образом можно будет определить сумму этого ряда.

164. Пусть общий член есть $z=\sin ax$ и

$$s=\sin a+\sin 2a+\sin 3a+\cdots+\sin ax.$$

Так как этот ряд является рекуррентным, то его также можно суммировать; мы будем иметь

$$s=\frac{\sin a+\sin ax-\sin(ax+a)}{1-2\cos a+1}=\frac{\sin a+(1-\cos a)\sin ax-\sin a\cos ax}{2(1-\cos a)}.$$

С другой стороны, будем иметь

$$\int z\,dx=\int dx\sin ax=-\frac{1}{a}\cos ax$$

и

$$\frac{dz}{dx}=a\cos ax,\quad \frac{d^3z}{dx^3}=-a^3\cos ax,\quad \frac{d^5z}{dx^5}=a^5\cos ax\ \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$s=C-\frac{1}{a}\cos ax+\frac{1}{2}\sin ax+\frac{\mathfrak{A}}{1\cdot 2}a\cos ax+\frac{\mathfrak{B}a^3\cos ax}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+$$
$$+\frac{\mathfrak{C}a^5\cos ax}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 6}+\frac{\mathfrak{D}a^7\cos ax}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 8}+\text{и т. д.}$$

Положим $x=0$, так что $s=0$; тогда

$$C=\frac{1}{a}-\frac{\mathfrak{A}a}{1\cdot 2}-\frac{\mathfrak{B}a^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{\mathfrak{C}a^5}{1\cdot 2\ldots 6}-\text{ и т. д.},$$

следовательно,

$$s=\frac{1}{2}\sin ax+(1-\cos ax)\left(\frac{1}{a}-\frac{\mathfrak{A}a}{1\cdot 2}-\frac{\mathfrak{B}a^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{\mathfrak{C}a^5}{1\cdot 2\ldots 6}-\text{и т. д.}\right).$$

Но так как

$$s=\frac{1}{2}\sin ax+\frac{(1-\cos ax)\sin a}{2(1-\cos a)},$$

то получим

$$\frac{\sin a}{2(1-\cos a)} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1\cdot 2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1\cdot 2\ldots 6} - \text{ и т. д.}$$

Этот же ряд мы получили уже выше (§ 127).

165. Пусть теперь $z=\cos ax$ и ряд, который нужно суммировать, есть

$$s = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos ax.$$

Так как этот ряд является рекуррентным, то сумма его есть

$$s = \frac{\cos a - 1 + \cos ax - \cos(ax+a)}{1-2\cos a+1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos ax + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}a\sin ax.$$

Чтобы определить сумму по нашему методу, найдём

$$\int z\,dx = \int dx\cos ax = \frac{1}{a}\sin ax$$

и

$$\frac{dz}{dx} = -a\sin ax, \quad \frac{d^3z}{dx^3} = a^3\sin ax, \quad \frac{d^5z}{dx^5} = -a^5\sin ax \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$s = C + \frac{1}{a}\sin ax + \frac{1}{2}\cos ax - \frac{\mathfrak{A}a\sin ax}{1\cdot 2} - \frac{\mathfrak{B}a^3\sin ax}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{ и т. д.}$$

Пусть $x=0$; тогда $s=0$ и $C=-\frac{1}{2}$, так что будем иметь

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos ax + \frac{1}{a}\sin ax - \frac{\mathfrak{A}a\sin ax}{1\cdot 2} - \frac{\mathfrak{B}a^3\sin ax}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \text{ и т. д.}$$

Так как

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos ax + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}a\cdot\sin ax,$$

то, как мы уже нашли выше (§ 164), будем иметь

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1\cdot 2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 6} - \text{ и т. д.}$$

166. Выше (§ 92) мы нашли, что если a есть какая-либо дуга, то

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a}{2} + \sin a + \frac{1}{2}\sin 2a + \frac{1}{3}\sin 3a + \frac{1}{4}\sin 4a + \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим этот ряд и пусть $z=\frac{1}{x}\sin ax$, так что

$$s = \sin a + \frac{1}{2}\sin 2a + \frac{1}{3}\sin 3a + \ldots + \frac{1}{x}\sin ax.$$

В этом случае мы имеем

$$\int z\,dx = \int\frac{dx}{x}\sin ax;$$

этот интеграл нельзя найти. Но мы будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a}{x}\cos ax - \frac{1}{x^2}\sin ax, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{a^2}{x}\sin ax - \frac{2a}{x^2}\cos ax + \frac{2}{x^3}\sin ax,$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{a^3}{x}\cos ax + \frac{3a^2}{x^2}\sin ax + \frac{6a}{x^3}\cos ax - \frac{6}{x^4}\sin ax,$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{a^4}{x}\sin ax + \frac{4a^3}{x^2}\cos ax - \frac{12a^2}{x^3}\sin ax - \frac{24a}{x^4}\cos ax + \frac{24}{x^5}\sin ax.$$

Таким образом, поскольку нельзя ни найти выражения интегральной формулы $\int z\,dx$, ни выразить достаточно удобно этих дифференциалов, мы не можем определить этим методом суммы данного ряда так, чтобы отсюда можно было вывести какие-либо заключения. С таким же неудобством мы встречаемся во многих других случаях, когда общий член ряда не является достаточно простым для того, чтобы его дифференциалы можно было выразить удобным законом. Поэтому в следующей главе мы выведем другие общие выражения для сумм рядов, у которых общие члены либо имеют слишком сложный вид, либо вовсе не могут быть даны. Эти выражения можно будет использовать с большим успехом. Несовершенство изложенного здесь метода становится особенно очевидным, если переменить знаки членов предложенного ряда. Действительно, тогда, хотя бы общий член и был простым, суммационный член этим методом не может быть удобно выражен.

ГЛАВА VII

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ВЫШЕИЗЛОЖЕННОГО МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ

167. Чтобы восполнить недостаток изложенного выше метода суммирования, мы рассмотрим в этой главе такие ряды, общие члены которых имеют более сложный вид. Так как вышенайденное выражение не может представить истинную сумму геометрической прогрессии конечной формулой, хотя другими методами эту прогрессию можно легко суммировать, то здесь мы прежде всего рассмотрим такие ряды, члены которых суть произведения членов геометрического ряда на члены другого какого-либо ряда. Итак, пусть предложен ряд

$$\overset{1}{s = ap} + \overset{2}{bp^2} + \overset{3}{cp^3} + \overset{4}{dp^4} + \ldots + \overset{x}{yp^x},$$

составленный из геометрического ряда p, p^2, p^3, p^4 и т. д. и какого-либо другого $a + b + c + d +$ и т. д., общий член которого, т. е. член, отвечающий индексу x, равен y, и найдём общее выражение для значения суммы этого ряда $s = S \cdot yp^x$.

168. Будем следовать тому же способу, которым мы пользовались выше, и пусть v есть член, предшествующий члену y в ряде $a + b + c + d +$ и т. д. и A — член, предшествующий a, т. е. тот член, который отвечает индексу 0. Тогда vp^{x-1} будет общий член ряда

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{ap} + \overset{3}{bp^2} + \overset{4}{cp^3} + \ldots + \overset{x}{vp^{x-1}}.$$

Если сумму этого ряда обозначить через $S \cdot vp^{x-1}$, то будем иметь

$$S \cdot vp^{x-1} = \frac{1}{p} S \cdot vp^x = S \cdot yp^x - yp^x + A.$$

Но так как

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \text{ и т. д.},$$

то будем иметь

$$S \cdot yp^x - yp^x + A = \frac{1}{p} S \cdot yp^x - \frac{1}{p} S \cdot \frac{dy}{dx} p^x + \frac{1}{2p} S \cdot \frac{d^2y}{dx^2} p^x -$$
$$- \frac{1}{6p} S \cdot \frac{d^3y}{dx^3} p^x + \frac{1}{24p} S \cdot \frac{d^4y}{dx^4} p^x - \text{ и т. д.}$$

Отсюда

$$S\cdot yp^x=\frac{1}{p-1}\left(yp^{x+1}-Ap-S\cdot\frac{dy}{dx}p^x+S\cdot\frac{d^2y}{2dx^2}p^x-\text{ и т. д.}\right).$$

Итак, если известны суммационные члены рядов, общие члены которых суть $\frac{dy}{dx}p^x$, $\frac{d^2y}{dx^2}p^x$, $\frac{d^3y}{dx^3}p^x$ и т. д., то из них можно найти суммационный член $S\cdot yp^x$.

169. Отсюда можно найти суммы рядов, общие члены которых имеют вид x^np^x. Действительно, пусть $y=x^n$; тогда $A=0$, если только n не равно нулю; в последнем случае $A=1$. Так как

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1},\quad \frac{d^2y}{2dx^2}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2},\quad \frac{d^3y}{6dx^3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\text{ и т. д.,}$$

то

$$S\cdot x^np^x=\frac{1}{p-1}\left\{\begin{array}{c}x^np^{x+1}-Ap-nS\cdot x^{n-1}p^x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}S\cdot x^{n-2}p^x-\\ -\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}S\cdot x^{n-3}p^x+\\ +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}S\cdot x^{n-4}p^x-\text{ и т. д.}\end{array}\right\}.$$

Если в эту формулу вместо n последовательно подставлять числа 0, 1, 2, 3 и т. д., то мы получим нижеприведённые суммирования; в первом случае, когда $n=0$, нужно положить $A=1$, в остальных же случаях $A=0$:

$$S\cdot x^0p^x=S\cdot p^x=\frac{1}{p-1}(p^{x+1}-p)=\frac{p^{x+1}-p}{p-1}=\frac{p(p^x-1)}{p-1}.$$

Это есть известная сумма геометрической прогрессии.

$$S\cdot xp^x=\frac{1}{p-1}(xp^{x+1}-S\cdot p^x)=\frac{xp^{x+1}}{p-1}-\frac{p^{x+1}-p}{(p-1)^2}$$

или

$$S\cdot xp^x=\frac{pxp^x}{p-1}-\frac{p(p^x-1)}{(p-1)^2};$$

$$S\cdot x^2p^x=\frac{1}{p-1}(x^2p^{x+1}-2S\cdot xp^x+S\cdot p^x)$$

или

$$S\cdot x^2p^x=\frac{x^2p^{x+1}}{p-1}-\frac{2xp^{x+1}}{(p-1)^2}+\frac{p(p+1)(p^x-1)}{(p-1)^3}.$$

Далее,

$$Sx^3p^x=\frac{1}{p-1}(x^3p^{x+1}-3S\cdot x^2p^x+3S\cdot xp^x-S\cdot p^x)$$

или

$$S\cdot x^3p^x=\frac{x^3p^{x+1}}{p-1}-\frac{3x^2p^{x+1}}{(p-1)^2}+\frac{3(p+1)xp^{x+1}}{(p-1)^3}-\frac{p(p^2+4p+1)(p^x-1)}{(p-1)^4};$$

таким же образом, идя дальше, мы сможем определить суммы высших степеней x^4p^x, x^5p^x, и т. д. Однако это можно удобнее сделать с помощью общего выражения, которое мы сейчас установим.

170. Так как мы нашли, что

$$S\cdot yp^x=\frac{1}{p-1}\left(yp^{x+1}-Ap-S\cdot\frac{dy}{dx}p^x+S\cdot\frac{d^2y}{2dx^2}p^x-\text{ и т. д.}\right),$$

где A есть такое постоянное, что сумма становится равной нулю, если положить $x=0$ (ибо в этом случае $y=A$ и $yp^{x+1}=Ap$), то мы можем опустить это постоянное; только нужно всегда помнить, что к сумме необходимо прибавлять такое постоянное, чтобы сумма исчезала при $x=0$ или чтобы она удовлетворяла какому-нибудь другому условию. Подставим теперь z вместо y; будем иметь

$$S\cdot p^x z=\frac{p^{x+1}z}{p-1}-\frac{1}{p-1}S\cdot p^x\frac{dz}{dx}+\frac{1}{2(p-1)}S\cdot p^x\frac{d^2z}{dx^2}-$$
$$-\frac{1}{6(p-1)}S\cdot p^x\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{24(p-1)}S\cdot p^x\frac{d^4z}{dx^4}-\frac{1}{120(p-1)}S\cdot p^x\frac{d^5z}{dx^5}+\text{ и т. д.}$$

Далее будем последовательно полагать $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$ и т. д. вместо y; тогда будем иметь

$$S\cdot p^x\frac{dz}{dx}=\frac{p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{dz}{dx}-\frac{1}{p-1}S\cdot\frac{p^xd^2z}{dx^2}+\frac{1}{2(p-1)}S\cdot\frac{p^xd^3z}{dx^3}-\text{и т. д.}$$
$$S\cdot\frac{p^xd^2z}{dx^2}=\frac{p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{p-1}S\cdot\frac{p^xd^3z}{dx^3}+\frac{1}{2(p-1)}S\cdot\frac{p^xd^4z}{dx^4}-\text{и т. д.}$$
$$S\cdot\frac{p^xd^3z}{dx^3}=\frac{p^{x+1}}{p-1}\cdot\frac{d^3z}{dx^3}-\frac{1}{p-1}S\cdot\frac{p^xd^4z}{dx^4}+\frac{1}{2(p-1)}S\cdot\frac{p^xd^5z}{dx^5}-\text{и т. д.}$$
и т. д.

Если теперь последовательно подставлять эти выражения, то $S\cdot p^xz$ представится в следующем виде:

$$S\cdot p^xz=\frac{p^{x+1}z}{p-1}-\frac{\alpha p^{x+1}}{p-1}\frac{dz}{dx}+\frac{\beta p^{x+1}}{p-1}\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{\gamma p^{x+1}}{p-1}\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{\delta p^{x+1}}{p-1}\frac{d^4z}{dx^4}-\frac{\varepsilon p^{x+1}}{p-1}\frac{d^5z}{dx^5}+\text{ и т. д.}$$

171. Для того чтобы определить значения букв α, β, γ, δ, ε и т. д., подставим вместо всех членов найденные для них ряды, а именно

$$\frac{p^{x+1}z}{p-1}=S\cdot p^xz+\frac{1}{p-1}S\cdot\frac{p^xdz}{dx}-\frac{1}{2(p-1)}S\cdot\frac{p^xd^2z}{dx^2}+\frac{1}{6(p-1)}S\cdot\frac{p^xd^3z}{dx^3}-\text{и т. д.,}$$
$$\frac{p^{x+1}dz}{(p-1)dx}=S\frac{p^xdz}{dx}+\frac{1}{p-1}S\cdot\frac{p^xd^2z}{dx^2}-\frac{1}{2(p-1)}S\frac{p^xd^3z}{dx^3}+\text{ и т. д.,}$$
$$\frac{p^{x+1}d^2z}{(p-1)dx^2}=S\cdot\frac{p^xd^2z}{dx^2}+\frac{1}{p-1}S\cdot\frac{p^xd^3z}{dx^3}-\text{и т. д.,}$$
$$\frac{p^{x+1}d^3z}{(p-1)dx^3}=S\cdot\frac{p^xd^3z}{dx^3}+\text{и т. д.}$$

Тогда мы будем иметь

$$\begin{array}{llll}
S\cdot p^xz=S\cdot p^xz+ & & & \\
+\frac{1}{p-1}S\cdot\frac{p^xdz}{dx}- & \frac{1}{2(p-1)}S\cdot\frac{p^xd^2z}{dx^2}+ & \frac{1}{6(p-1)}S\cdot\frac{p^xd^3z}{dx^3}- & \frac{1}{24(p-1)}S\cdot\frac{p^xd^4z}{dx^4}+\text{и т. д.}-\\
-\alpha & -\frac{\alpha}{p-1} & +\frac{\alpha}{2(p-1)} & -\frac{\alpha}{6(p-1)}+\\
 & +\beta & +\frac{\beta}{p-1} & -\frac{\beta}{2(p-1)}-\\
 & & -\gamma & -\frac{\gamma}{p-1}+\\
 & & & +\delta,
\end{array}$$

откуда получим следующие значения коэффициентов α, β, γ, δ, ε и т. д.:

$$\alpha=\frac{1}{p-1}, \quad \beta=\frac{1}{p-1}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right), \quad \gamma=\frac{1}{p-1}\left(\beta+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{6}\right),$$
$$\delta=\frac{1}{p-1}\left(\gamma+\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{24}\right), \quad \varepsilon=\frac{1}{p-1}\left(\delta+\frac{\gamma}{2}+\frac{\beta}{6}+\frac{\alpha}{24}+\frac{1}{120}\right)$$

и т. д.

172. Положим для краткости $\frac{1}{p-1}=q$; тогда будем иметь

$$\alpha=q,$$
$$\beta=\alpha q+\frac{1}{2}q=q^2+\frac{1}{2}q,$$
$$\gamma=\beta q+\frac{1}{2}\alpha q+\frac{1}{6}q=q^3+q^2+\frac{1}{6}q,$$
$$\delta=\gamma q+\frac{1}{2}\beta q+\frac{1}{6}\alpha q+\frac{1}{24}q=q^4+\frac{3}{2}q^3+\frac{7}{12}q^2+\frac{1}{24}q,$$
$$\varepsilon=\delta q+\frac{1}{2}\gamma q+\frac{1}{6}\beta q+\frac{1}{24}\alpha q+\frac{1}{120}q=q^5+2q^4+\frac{5}{4}q^3+\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{120}q,$$
$$\zeta=q^6+\frac{5}{2}q^5+\frac{13}{6}q^4+\frac{3}{4}q^3+\frac{31}{360}q^2+\frac{1}{720}q$$

и т. д.

Это можно выразить ещё следующим образом:

$$\alpha=\frac{q}{1},$$
$$\beta=\frac{2q^2+q}{1\cdot 2},$$
$$\gamma=\frac{6q^3+6q^2+q}{1\cdot 2\cdot 3},$$
$$\delta=\frac{24q^4+36q^3+14q^2+q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$
$$\varepsilon=\frac{120q^5+240q^4+150q^3+30q^2+q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$
$$\zeta=\frac{720q^6+1800q^5+1560q^4+540q^3+62q^2+q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6},$$
$$\eta=\frac{5040q^7+15120q^6+16800q^5+8400q^4+1806q^3+126q^2+q}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

и т. д.,

где какой-либо коэффициент, например 16 800, получается, если сумму двух вышестоящих коэффициентов $1560+1800$ помножить на показатель степени количества q, который здесь равен 5.

173. Восстановим снова вместо q выражение $\frac{1}{p-1}$. Тогда получим

$$\alpha=\frac{1}{1(p-1)},$$
$$\beta=\frac{p+1}{1\cdot 2(p-1)^2},$$
$$\gamma=\frac{p^2+4p+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (p-1)^3},$$

$$\delta=\frac{p^3+11p^2+11p+1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\,(p-1)^4},$$
$$\varepsilon=\frac{p^4-26p^3+66p^2+26p+1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\,(p-1)^5},$$
$$\zeta=\frac{p^5+57p^4+302p^3+302p^2+57p+1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\,(p-1)^6},$$
$$\eta=\frac{p^6+120p^5+1191p^4+2416p^3+1191p^2+120p+1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\,(p-1)^7}.$$

Закон составления этих количеств таков: если какой-либо член представить в виде

$$\frac{p^{n-2}+Ap^{n-3}+Bp^{n-4}+Cp^{n-5}+Dp^{n-6}+\text{и т. д.}}{1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)(p-1)^{n-1}},$$

то

$$A=2^{n-1}-n,$$
$$B=3^{n-1}-n\cdot2^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2},$$
$$C=4^{n-1}-n\cdot3^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}2^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3},$$
$$D=5^{n-1}-n\cdot4^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}3^{n-1}-$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}2^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}.$$

Таким образом, отсюда можно продолжать вычисление коэффициентов α, β, γ, δ и т. д., до какого угодно предела.

174. Если вглядеться в закон, которым связаны между собой эти коэффициенты, то легко обнаруживается, что они составляют рекуррентный ряд и получаются от разложения дроби

$$\frac{1}{1-\frac{u}{p-1}-\frac{u^2}{2(p-1)}-\frac{u^3}{6(p-1)}-\frac{u^4}{24(p-1)}-\text{и т. д.}}.$$

Действительно, оно даст некоторый ряд

$$1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\zeta u^6+\text{и т. д.}$$

Положим эту дробь равной V; так как

$$V=\frac{p-1}{p-1-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}-\frac{u^4}{24}-\text{и т. д.}},$$

то будем иметь

$$V=\frac{p-1}{p-e^u},$$

где e есть число, гиперболический логарифм которого равен единице. Если значение V выразить рядом, расположенным по степеням количества u, то получим ряд

$$V=1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\zeta u^6+\text{и т. д.},$$

коэффициенты которого α, β, γ и т. д. будут теми самыми, которые нам нужны в данной задаче. После того как они будут найдены, мы получим выражение

$$S\cdot p^x z=\frac{p^{x+1}}{p-1}\left(z-\frac{\alpha\,dz}{dx}+\frac{\beta\,d^2z}{dx^2}-\frac{\gamma\,d^3z}{dx^3}+\frac{\delta\,d^4z}{dx^4}-\text{ и т. д.}\right)+\text{const.},$$

которое является суммационным членом ряда

$$ap+bp^2+cp^3+\ldots+p^xz,$$

общий член которого равен p^xz.

175. Так как мы нашли, что $V=\frac{p-1}{p-e^u}$, то мы будем иметь

$$e^u=\frac{pV-p+1}{V}.$$

Логарифмируя, получим

$$u=\mathrm{l}\,(pv-p+1)-\mathrm{l}\,v$$

и, дифференцируя, будем иметь

$$du=\frac{(p-1)\,dV}{pV^2-(p-1)\,V};$$

вследствие этого

$$pV^2=(p-1)\,V+\frac{(p-1)\,dV}{du}.$$

А так как

$$V=1+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3+\delta u^4+\varepsilon u^5+\text{ и т. д.},$$

то

$$\begin{aligned}pV^2=p+2\alpha pu+2\beta pu^2+2\gamma pu^3+2\delta pu^4+2\varepsilon pu^5+\text{ и т. д. }+\\+\alpha^2pu^2+2\alpha\beta pu^3+2\alpha\gamma pu^4+2\alpha\delta pu^5+\text{ и т. д. }+\\+\beta^2pu^4+2\beta\gamma pu^5+\text{ и т. д.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p-1)\,V=(p-1)+\alpha\,(p-1)\,u+\beta\,(p-1)\,u^2+\gamma\,(p-1)\,u^3+\\+\delta\,(p-1)\,u^4+\varepsilon\,(p-1)\,u^5+\text{ и т. д.},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(p-1)\,dV}{du}=(p-1)\,\alpha+2\,(p-1)\,\beta u+3\,(p-1)\,\gamma u^2+4\,(p-1)\,\delta u^3+\\+5\,(p-1)\,\varepsilon u^4+6\,(p-1)\,\zeta u^5+\text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Приравняв эти выражения друг другу, мы найдём:

$$\begin{aligned}&(p-1)\,\alpha=1,\\&2\,(p-1)\,\beta=\alpha\,(p+1),\\&3\,(p-1)\,\gamma=\beta\,(p+1)+\alpha^2p,\\&4\,(p-1)\,\delta=\gamma\,(p+1)+2\alpha\beta p,\\&5\,(p-1)\,\varepsilon=\delta\,(p+1)+2\alpha\gamma p+\beta^2p,\\&6\,(p-1)\,\zeta=\varepsilon\,(p+1)+2\alpha\delta p+2\beta\gamma p,\\&7\,(p-1)\,\eta=\zeta\,(p+1)+2\alpha\varepsilon p+2\beta\delta p+\gamma^2p\end{aligned}$$

и т. д.

Из этих формул, если за p принять некоторое данное число, значения коэффициентов α, β, γ, δ и т. д. можно определить легче, чем из ранее найденного закона.

176. Прежде чем обратиться к рассмотрению частных значений p, положим, что $z=x^n$, так что требуется суммировать ряд

$$s=p+2^np^2+3^np^3+4^np^4+\ldots+x^np^x.$$

С помощью ранее найденного выражения мы получим

$$s = p^x \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{p-1} x^n - \frac{p}{(p-1)^2} nx^{n-1} + \frac{p^2+p}{(p-1)^3} \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2} - \\ \quad - \frac{p^3+4p^2+p}{(p-1)^4} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-3} + \text{ и т. д.} \end{array} \right\} \pm C,$$

где C есть постоянное количество, выбираемое так, чтобы $s=0$ при $x=0$.

Подставляя вместо n последовательно числа 0, 1, 2, 3, 4 и т. д., будем иметь

$$S \cdot x^0 p^x = p^x \frac{p}{p-1} - \frac{p}{p-1},$$

$$S \cdot x^1 p^x = p^x \left(\frac{px}{p-1} - \frac{p}{(p-1)^2} \right) + \frac{p}{(p-1)^2},$$

$$S \cdot x^2 p^x = p^x \left(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)}{(p-1)^3} \right) - \frac{p(p+1)}{(p-1)^3},$$

$$S \cdot x^3 p^x = p^x \left(\frac{px^3}{p-1} - \frac{3px^2}{(p-1)^2} + \frac{3p(p+1)x}{(p-1)^3} - \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4} \right) + \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4},$$

$$S \cdot x^4 p^x = p^x \left(\frac{px^4}{p-1} - \frac{4px^3}{(p-1)^2} + \frac{6p(p+1)x^2}{(p-1)^3} - \frac{4p(p^2+4p+1)x}{(p-1)^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5} \right) - \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5},$$

$$S \cdot x^5 p^x = \frac{p^{x+1}x^5}{p-1} - \frac{5p^{x+1}x^4}{(p-1)^2} + \frac{10(p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^3} - \frac{10(p^2+4p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^4} +$$
$$+ \frac{5(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^5} - \frac{(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^6},$$

$$S \cdot x^6 p^x = \frac{p^{x+1}x^6}{p-1} - \frac{6p^{x+1}x^5}{(p-1)^2} + \frac{15(p+1)p^{x+1}x^4}{(p-1)^3} - \frac{20(p^2+4p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^4} +$$
$$+ \frac{15(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^5} - \frac{6(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^6} +$$
$$+ \frac{(p^5+57p^4+302p^3+302p^2+57p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^7} \text{ и т. д.}$$

177. Отсюда ясно, что каждый раз, как z будет целой рациональной функцией от x, можно будет найти сумму ряда, общий член которого есть $p^x z$, ибо, беря дифференциалы количества z, мы в конце концов дойдём до исчезающих дифференциалов. Так, если предложен ряд

$$p + 3p^2 + 6p^3 + 10^4 + \ldots + \frac{x^2+x}{2} p^x,$$

то, поскольку

$$z = \frac{x^2+x}{2} \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dx} = x + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 1,$$

суммационный член будет

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1} \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{2x+1}{2(p-1)} + \frac{p+1}{2(p-1)^2} \right) - \frac{p}{p-1} \left(\frac{p+1}{1(p-1)^2} - \frac{1}{2(p-1)} \right)$$

или

$$s = p^{x+1} \left(\frac{x^2}{2(p-1)} + \frac{(p-3)x}{2(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3} \right) - \frac{p}{(p-1)^3}.$$

Если же z не будет целой рациональной функцией, тогда выражение суммационного члена станет бесконечным. Так, если $z = \frac{1}{x}$, так что суммировать нужно ряд

$$s = p + \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{3} p^3 + \ldots + \frac{1}{x} p^x,$$

то, поскольку

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{2\cdot 3}{x^4}, \quad \frac{d^4z}{dx^4} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5} \text{ и т. д.},$$

мы получим суммационный член

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(p-1)x^2} + \frac{p+1}{(p-1)^2x^3} + \frac{p^2+4p+1}{(p-1)^3x^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{p^3+11p^2+11p+1}{(p-1)^4x^5} + \text{ и т. д.}\right) + C.$$

Здесь постоянное C нельзя определить из случая $x = 0$; для определения этого постоянного положим поэтому $x = 1$; так как тогда $s = p$, то

$$C = p - \frac{p^2}{p-1}\left(1 + \frac{1}{p-1} + \frac{p+1}{(p-1)^2} + \frac{p^2+4p+1}{(p-1)^3} + \text{ и т. д.}\right).$$

178. Отсюда видно, что до тех пор, пока p не обозначает какого-либо определённого числа, мы не получаем большой пользы для приближённого суммирования рядов. Но сразу же ясно, что вместо d нельзя написать 1, ибо тогда все коэффициенты α, β, γ, δ и т. д. стали бы бесконечно большими. А так как ряд, который мы сейчас рассматриваем, при $p = 1$ обращается в ряд, который мы уже рассмотрели выше, то удивительно, что этот как будто бы самый лёгкий случай нельзя получить из здесь рассматриваемого. Далее, замечательно также и то, что в случае $p = 1$ суммирование требует вычисления интеграла $\int z\,dx$, тогда как в общем случае сумма получается без всякого интегрирования. Таким образом, оказывается, что в то время, как все коэффициенты α, β, γ и т. д. становятся бесконечными, появляется это интегральное выражение. При этом случай $p = 1$ является единственным, к которому нельзя применить найденное здесь общее выражение. Впрочем, не следует думать, что в этом случае общая формула даёт неверный результат, ибо, хотя все члены её и становятся бесконечными, однако на самом деле все бесконечности взаимно уничтожаются, и остаётся конечное количество, равное сумме и совпадающее с тем, которое находится по первому методу, что будет подробнее разъяснено ниже.

179. Пусть теперь $p = -1$. Тогда в ряде, который подлежит суммированию, знаки чередуются:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & x \\ -a & +b & -c & +d & - \ldots & \pm z, \end{array}$$

где z положительно, если x есть чётное число, и отрицательно, если x есть нечётное число. Итак, положим

$$-a + b - c + d - \ldots + z = s.$$

Тогда будем иметь

$$s=\frac{\pm 1}{2}\left(z-\frac{\alpha\,dz}{dx}+\frac{\beta\,d^2z}{dx^2}-\frac{\gamma\,d^3z}{dx^3}+\frac{\delta\,d^4z}{dx^4}-\text{ и т. д.}\right)+C,$$

где верхний знак нужно брать, если x есть число чётное, и нижний — если x есть число нечётное. Переменив знаки, получаем

$$a-b+c-d+e-f+\ldots\mp z=\mp\frac{1}{2}\left(z-\frac{\alpha\,dz}{dx}+\frac{\beta\,d^2z}{dx^2}-\frac{\gamma\,d^3z}{dx^4}-\text{ и т. д.}\right)+C,$$

где выбор знака совершается по тому же закону.

180. В этом случае коэффициенты могут быть найдены из ранее полученных выражений, в которые всюду подставляется $p=-1$. Однако они легче находятся по формулам, данным выше в § 175, из которых тотчас же усматривается, что эти коэффициенты, взятые через один, исчезают. Действительно, если положить $p=-1$, то эти формулы принимают вид

$$-2\alpha=1,\quad -4\beta=0,\quad -6\gamma=0-\alpha^2,\quad -8\delta=0-2\alpha\beta,$$
$$-10\varepsilon=0-2\alpha\gamma-\beta^2,\quad -12\zeta=0-2\alpha\delta-2\beta\gamma\ \text{ и т. д.},$$

откуда находим, что так как $\beta=0$, то также и $\delta=0$, далее, $\zeta=0$, $\theta=0$ и т. д. Остальные же буквы определяются следующим образом:

$$\alpha=-\frac{1}{2},\quad \gamma=\frac{\alpha^2}{6},\quad \varepsilon=\frac{2\alpha\gamma}{10},\quad \eta=\frac{2\alpha\varepsilon+\gamma^2}{14},\quad \iota=\frac{2\alpha\eta+2\gamma\varepsilon}{18}\ \text{ и т. д.}$$

181. Чтобы эти вычисления можно было произвести удобнее, введём новые буквенные обозначения; пусть

$$\alpha=-\frac{A}{1\cdot 2},\quad \gamma=\frac{B}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\quad \varepsilon=-\frac{C}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6},$$
$$\eta=\frac{D}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 8},\quad \iota=-\frac{E}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 10}$$

и т. д.

Тогда ранее найденная сумма будет

$$\mp\frac{1}{2}\left(z+\frac{A\,dz}{1\cdot 2dx}-\frac{B\,d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3}+\frac{C\,d^5z}{1\cdot 2\ldots 6dx^5}-\text{ и т. д.}\right)+C.$$

Коэффициенты же определятся из следующих формул:

$$A=1,$$
$$3B=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\frac{A^2}{2},$$
$$5C=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}AB,$$
$$7D=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}AC+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{B^2}{2},$$
$$9E=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}AD+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}BC,$$
$$11F=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}AE+\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}BD+\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\frac{C^2}{2},$$

и т. д.,

которые можно представить в более лёгком и удобном для вычисления виде следующим образом:

$$\begin{aligned}
A &= 1,\\
B &= 2\frac{A^2}{2},\\
C &= 3AB,\\
D &= 4AC + 4\cdot\frac{6\cdot 5}{3\cdot 4}\frac{B^2}{2},\\
E &= 5AD + 5\cdot\frac{8\cdot 7}{3\cdot 4}BC,\\
F &= 6AE + 6\frac{10\cdot 9}{3\cdot 4}BD + 6\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\frac{C^2}{2},\\
C &= 7AF + 7\frac{12\cdot 11}{3\cdot 4}BE + 7\,\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}CD
\end{aligned}$$

и т. д.

Выполнив эти вычисления, найдём

$$\begin{aligned}
A &= 1,\\
B &= 1,\\
C &= 3,\\
D &= 17,\\
E &= 155 &&= 5\cdot 31,\\
F &= 2073 &&= 691\cdot 3,\\
G &= 38\,227 &&= 7\cdot 5461 = 7\,\frac{127\cdot 129}{3}\\
H &= 929\,569 &&= 3617\cdot 257,\\
I &= 28\,820\,619 &&= 43\,867\cdot 9\cdot 73
\end{aligned}$$

и т. д.

182. Если внимательно рассмотреть эти числа, то наличие в них множителей 691, 3617, 43 867 легко позволит сделать заключение, что эти числа имеют связь с вышенайденными бернуллиевыми числами и могут быть из них определены. Тому, кто будет искать это соотношение, тотчас же станет ясно, что эти числа можно образовать из бернуллиевых чисел $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ и т. д. следующим образом:

$$\begin{aligned}
A &= 2\cdot 1\cdot 3\mathfrak{A} &&= 2(2^2-1)\mathfrak{A},\\
B &= 2\cdot 3\cdot 5\mathfrak{B} &&= 2(2^4-1)\mathfrak{B},\\
C &= 2\cdot 7\cdot 9\mathfrak{C} &&= 2(2^6-1)\mathfrak{C},\\
D &= 2\cdot 15\cdot 17\mathfrak{D} &&= 2(2^8-1)\mathfrak{D},\\
E &= 2\cdot 31\cdot 33\mathfrak{E} &&= 2(2^{10}-1)\mathfrak{E},\\
F &= 2\cdot 63\cdot 65\mathfrak{F} &&= 2(2^{12}-1)\mathfrak{F},\\
G &= 2\cdot 127\cdot 129\mathfrak{G} &&= 2(2^{14}-1)\mathfrak{G},\\
H &= 2\cdot 255\cdot 257\mathfrak{H} &&= 2(2^{16}-1)\mathfrak{H}
\end{aligned}$$

и т. д.

Так как бернуллиевы числа являются дробными, а наши коэффициенты — целые, то ясно, что эти множители всегда уничтожают дроби;

итак, мы будем иметь

$$
\begin{aligned}
A &= 1,\\
B &= 1,\\
C &= 3,\\
D &= 17,\\
E &= 5 \cdot 31 = 155,\\
F &= 3 \cdot 691 = 2073,\\
G &= 7 \cdot 43 \cdot 127 = 38\,227,\\
H &= 257 \cdot 3617 = 929\,569,\\
I &= 9 \cdot 73 \cdot 43\,867 = 28\,820\,619,\\
K &= 5 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 174\,611 = 1\,109\,652\,905,\\
L &= 89 \cdot 683 \cdot 854\,513 = 51\,943\,281\,731,\\
M &= 3 \cdot 4097 \cdot 236\,364\,091 = 2\,905\,151\,042\,481,\\
N &= 2731 \cdot 8191 \cdot 8\,553\,103 = 191\,329\,672\,483\,963
\end{aligned}
$$

и т. д.

Обратно, из этих целых чисел можно найти бернуллиевы числа.

183. Итак, если бернуллиевы числа использовать для предложенного ряда

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & x\\
a & -b & +c & -d & +e & -\ldots & \mp z,
\end{array}
$$

то его сумма будет

$$\pm\left(\frac{1}{2}z+\frac{(2^2-1)\mathfrak{A}\,dz}{1\cdot 2\,dx}-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}\,d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^3}+\frac{(2^6-1)\mathfrak{C}\,d^5z}{1\cdot 2\ldots 6\,dx^5}-\text{и т. д.}\right)+\text{const}.$$

Легко усмотреть, что эти числа не случайно входят в это выражение. Действительно, поскольку предложенный ряд получается, если из ряда

$$a+b+c+d+\ldots+z,$$

где все члены имеют знак $+$, отнять дважды взятую сумму членов, стоящих на чётных местах, $b+d+f+$ и т. д., постольку и найденное выражение может быть разложено на две части, из которых одна есть сумма всех членов, взятых со знаком $+$; она будет равна

$$\int z\,dx+\frac{1}{2}z+\frac{\mathfrak{A}\,dz}{1\cdot 2\,dx}-\frac{\mathfrak{B}\,d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^3}+\frac{\mathfrak{C}\,d^5z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,dx^5}-\text{и т. д.};$$

сумма же членов, стоящих на чётных местах, находится тем же способом, которым мы пользовались выше. В самом деле, так как последний член z отвечает индексу x, то предпоследний, отвечающий индексу $x-2$, будет

$$z-\frac{2\,dz}{dx}+\frac{2^2d^2z}{1\cdot 2\,dx^2}-\frac{2^3d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3}+\frac{2^4d^4z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4}-\text{и т. д.}$$

Эта формула получается из той, которой ранее выражался предпоследний член, если вместо x написать $\frac{x}{2}$. Таким образом, сумма членов, стоящих на нечётных местах, получится, если в сумме всех членов заменить повсюду x через $\frac{x}{2}$. Следовательно, она равна

$$\frac{1}{2}\int z\,dx+\frac{1}{2}z+\frac{2\mathfrak{A}\,dz}{1\cdot 2dx}-\frac{2^3\mathfrak{B}\,d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3}+\frac{2^5\mathfrak{C}\,d^5z}{1\cdot 2\ldots 6dx^5}-\text{и т. д.}$$

Если удвоить эту сумму и вычесть из предыдущей суммы, или если, в случае, когда x есть чётное число, предыдущую сумму вычесть из удвоенной этой суммы, то остаток даст сумму ряда

$$\overset{1}{a}-\overset{2}{b}+\overset{3}{c}-\overset{4}{d}+\overset{5}{e}-\ldots\mp\overset{x}{z},$$

которая, следовательно, будет равна

$$\mp\left(\frac{1}{2}z+\frac{(2^2-1)\,\mathfrak{A}\,dz}{1\cdot 2dx}-\frac{(2^4-1)\,\mathfrak{B}\,d^3z}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3}+\text{и т. д.}\right)+C.$$

Это выражение совпадает с только что найденным.

184. Возьмём в качестве z степень x^n количества x и найдём сумму ряда

$$1-2^n+3^n-4^n+\ldots\mp x^n.$$

Так как

$$\frac{dz}{1\cdot dx}=\frac{n}{1}x^{n-1},\qquad \frac{d^3z}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\quad\text{и т. д.},$$

то, пользуясь коэффициентами A, B, C, D, найдём, что искомая сумма есть

$$\mp\frac{1}{2}\left\{\begin{aligned}&x^n+\frac{A}{2}nx^{n-1}-\\&-\frac{B}{4}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}+\frac{C}{6}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{n-5}-\\&\qquad-\frac{D}{8}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{1\cdot 2\ldots 7}x^{n-7}+\text{и т. д.}+\text{const.}\end{aligned}\right\},$$

где верхний знак берётся, если x есть чётное число, нижний же — если x есть число нечётное. Постоянное же нужно определить так, чтобы сумма исчезала при $x=0$ (в этом случае берётся верхний знак). Подставляя вместо n последовательно числа 0, 1, 2, 3 и т. д., найдём следующие суммирования

$$\text{I. } 1-1+1-1+\ldots\mp 1=\mp\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}.$$

Таким образом, если число членов чётно, то сумма будет равна 0; если же оно нечётно, то сумма будет равна 1.

$$\text{II. } 1-2+3-4+\ldots\mp x=\mp\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}.$$

Таким образом, если число членов чётно, то сумма будет равна $-\frac{1}{2}x$, при нечётном же числе членов она равна $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

$$\text{III. } 1-2^2+3^2-4^2+\ldots\mp x^2=\mp\frac{1}{2}(x^2+x).$$

Таким образом, для чётного числа членов сумма равна $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$, для нечётного же она равна $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$.

$$\text{IV.}\quad 1-2^3+3^3-4^3+\ldots\mp x^3=\mp\frac{1}{2}\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{8}.$$

Таким образом, для чётного числа членов сумма равна $-\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2$, для нечётного же равна $\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}$.

$$\text{V.}\quad 1-2^4+3^4-4^4+\ldots\mp x^4=\mp\frac{1}{2}(x^4+2x^3-x).$$

Таким образом, для чётного числа сумма равна $-\frac{1}{2}x^4-x^3+\frac{1}{2}x$, для нечётного равна $\frac{1}{2}x^4+x^3-\frac{1}{2}x$ и т. д.

185. Мы видим, что для чётных степеней постоянное слагаемое исчезает, и в этих случаях сумма чётного числа членов отличается от суммы нечётного числа лишь знаком. Если же x будет бесконечным числом, то так как оно не является ни чётным, ни нечётным, это различение должно терять силу, и следовательно, в сумме нужно будет отбросить члены, имеющие двойной знак. Отсюда следует, что сумма таких рядов, если их продолжить до бесконечности, выражается одним только постоянным количеством, подлежащим прибавлению.

Поэтому будем иметь

$$\begin{aligned}
&1-1+1-1+\text{ и т. д. до бесконечности} &&=\frac{1}{2},\\
&1-2+3-4+\text{ и т. д.}\ \ldots\ldots\ldots &&=\frac{A}{4}=+\frac{(2^2-1)\mathfrak{A}}{2},\\
&1-2^2+3^2-4^2+\text{ и т. д.}\ \ldots\ldots\ldots &&=0,\\
&1-2^3+3^3-4^3+\text{ и т. д.}\ \ldots\ldots\ldots &&=-\frac{B}{8}=-\frac{(2^4-1)\mathfrak{B}}{4},\\
&1-2^4+3^4-4^4+\text{ и т. д.}\ \ldots\ldots\ldots &&=0,\\
&1-2^5+3^5-4^5+\text{ и т. д.}\ \ldots\ldots\ldots &&=\frac{C}{12}=+\frac{(2^6-1)\mathfrak{C}}{6},\\
&1-2^6+3^6-4^6+\text{ и т. д.}\ \ldots\ldots\ldots &&=0,\\
&1-2^7+3^7-4^7+\text{ и т. д.}\ \ldots\ldots\ldots &&=-\frac{D}{16}=-\frac{(2^8-1)\mathfrak{D}}{8}
\end{aligned}$$

и т. д.

Эти же суммы находятся с помощью изложенного выше (§ 8) метода суммирования рядов с чередующимися знаками $+$ и $-$.

186. Если вместо n мы будем брать отрицательные числа, то выражение суммы станет бесконечным. Пусть $n=-1$; тогда будем иметь сумму ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\mp\frac{1}{x}=$$
$$=\mp\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{A}{2x^2}+\frac{B}{4x^4}-\frac{C}{6x^6}+\frac{D}{8x^8}-\text{ и т. д.}\right)+\text{const}.$$

Так как в этом случае постоянную нельзя определить из случая $x=0$, она должна быть найдена из другого случая. Положим $x=1$.

Так как тогда сумма равна 1 и знак берётся нижний, то будем иметь

$$\text{const.} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{A}{2} + \frac{B}{4} - \frac{C}{6} + \text{ и т. д.}\right)$$

или

$$\text{const.} = \frac{1}{2} + \frac{A}{4} - \frac{B}{8} + \frac{C}{12} - \frac{D}{16} + \text{ и т. д.}$$

Можно также положить $x = 2$; так как сумма теперь равна $\frac{1}{2}$ и знак нужно взять нижний, то будем иметь

$$\text{const.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2 \cdot 2^2} + \frac{B}{4 \cdot 2^4} - \frac{C}{6 \cdot 2^6} + \text{ и т. д.}\right)$$

или

$$\text{const.} = \frac{3}{4} - \frac{A}{4 \cdot 2^2} + \frac{B}{8 \cdot 2^4} - \frac{C}{12 \cdot 2^6} + \text{ и т. д.}$$

Если же положить $x = 4$, то будем иметь

$$\text{const.} = \frac{17}{24} - \frac{A}{4 \cdot 4^2} + \frac{B}{8 \cdot 4^4} - \frac{C}{12 \cdot 4^6} + \frac{D}{16 \cdot 4^8} \quad \text{ и т. д.}$$

Как бы мы ни определяли постоянное, всегда получится одно и то же значение, которое вместе с тем даст сумму ряда, продолженного до бесконечности.

187. С помощью этих новых чисел A, B, C, D, E и т. д. можно также удобно суммировать ряды обратных чётных степеней, в которые входят только нечётные числа. Действительно, если положить

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \text{ и т. д. } = s,$$

то будем иметь

$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \text{ и т. д. } = \frac{s}{2^{2n}}.$$

Если этот ряд отнять от предыдущего, то в остатке получим

$$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \text{ и т. д. } = \frac{(2^{2n} - 1)s}{2^{2n}}.$$

А так как значения s для отдельных чисел n мы нашли уже выше (§ 125), то будем иметь

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{ и т. д. } = \frac{A}{1 \cdot 2}\frac{\pi^2}{4},$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{ и т. д. } = \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\frac{\pi^4}{4},$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{ и т. д. } = \frac{C}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 6}\frac{\pi^6}{4},$$

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{ и т. д. } = \frac{D}{1 \cdot 2 \ldots 8}\frac{\pi^8}{4},$$

$$1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \text{ и т. д. } = \frac{E}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 10}\frac{\pi^{10}}{4}$$

и т. д.

Если же будут входить все числа, но знаки будут чередоваться, то, так как

$$1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \text{ и т. д. } = \frac{(2^{2n} - 1)s - s}{2^{2n}},$$

мы будем иметь

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\text{ и т. д. }=\frac{A-2\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\ \frac{\pi^2}{4}=\frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\pi^2,$$
$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\text{ и т. д. }=\frac{B-2\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\ \frac{\pi^4}{4}=\frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\pi^4,$$
$$1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}-\text{ и т. д. }=\frac{C-2\mathfrak{C}}{1\cdot 2\ldots 6}\ \frac{\pi^6}{4}=\frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1\cdot 2\ldots 5\cdot 6}\pi^6,$$
$$1-\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}-\text{ и т. д. }=\frac{D-2\mathfrak{D}}{1\cdot 2\ldots 8}\ \frac{\pi^8}{4}=\frac{(2^7-1)\mathfrak{D}}{1\cdot 2\ldots 8}\pi^8,$$
$$1-\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}-\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}-\text{ и т. д. }=\frac{E-2\mathfrak{E}}{1\cdot 2\ldots 10}\ \frac{\pi^{10}}{10}=\frac{(2^9-1)\mathfrak{E}}{1\cdot 2\ldots 10}\pi^{10}$$

и т. д.

188. Так же как до сих пор мы рассматривали ряды, члены которых суть произведения членов геометрической прогрессии p, p^2, p^3, p^4 и т. д. на члены какого-нибудь ряда a, b, c, d и т. д., можем мы рассматривать и ряд, члены которого суть произведения членов каких-либо двух рядов, из которых один можно считать как бы известным. Пусть известный ряд есть

$$\overset{1}{A}+\overset{2}{B}+\overset{3}{C}+\ldots+\overset{x}{Z},$$

а другой, неизвестный, есть

$$a+b+c+\ldots+z,$$

и пусть ищется сумма ряда

$$Aa+Bb+Cc+\ldots+Zz.$$

Положим её равной Zs. Пусть предпоследний член известного ряда равен Y; тогда, если положить $x-1$ вместо x, выражение суммы $S\cdot Zz$ перейдёт в

$$Y\left(s-\frac{ds}{dx}+\frac{d^2s}{2dx^2}-\frac{d^3s}{6dx^3}+\frac{d^4s}{24dx^4}-\text{ и т. д.}\right).$$

Так как это выражение представляет сумму ряда Zs без последнего его члена Zz, то будем иметь

$$Zs-Zz=Ys-\frac{Y\,ds}{dx}+\frac{Y\,d^2s}{2dx^2}-\frac{Y\,d^3s}{6dx^3}+\text{ и т. д.}$$

Это уравнение содержит в себе соотношение, которым сумма Zs ставится в зависимость от Y, Z и z.

189. Для того чтобы решить это уравнение, пренебрегаем сначала членами, содержащими дифференциалы. Тогда будем иметь $s=\frac{Zz}{Z-Y}$. Обозначим это значение $\frac{Zz}{Z-Y}$ через $P^{\rm I}$; тогда истинное значение $s=$ $=P^{\rm I}+p$; подставив это значение в уравнение, получим

$$(Z-Y)\,p=-\frac{Y\,dP^{\rm I}}{dx}+\frac{Y\,d^2P^{\rm I}}{2dx^2}-\text{ и т. д. }-\frac{Y\,dp}{dx}+\frac{Y\,d^2p}{2dx^2}-\text{ и т. д.}$$

Прибавим с обеих сторон $YP^{\rm I}$; так как $P^{\rm I}-\frac{dP^{\rm I}}{dx}+\frac{d^2P^{\rm I}}{2dx^2}-$ и т. д. есть то значение количества $P^{\rm I}$, которое получается, если вместо x подставить $x-1$, то положим это значение равным P. Тогда будем иметь

$$(Z-Y)\,p+YP^{\mathrm{I}}=YP-\frac{Y\,dp}{dx}+\frac{Y\,d^2p}{2dx^2}- \text{ и т. д.}$$

Пренебрегая здесь дифференциалами, будем иметь

$$p=\frac{Y(P-P^{\mathrm{I}})}{Z-Y}.$$

Положим $\frac{Y(P-P^{\mathrm{I}})}{Z-Y}=Q^{\mathrm{I}}$ и пусть $p=Q^{\mathrm{I}}+q$; тогда получим

$$(Z-Y)\,q=-\frac{Y(dQ^{\mathrm{I}}+dq)}{dx}+\frac{Y(d^2Q^{\mathrm{I}}+d^2q)}{2dx^2}- \text{ и т. д.}$$

Обозначив через Q значение количества Q^{I}, которое оно примет, если вместо x написать $x-1$, будем иметь

$$(Z-Y)\,q+YQ^{\mathrm{I}}=YQ-\frac{Y\,dq}{dx}+\frac{Y\,d^2q}{2\,dx^2}- \text{ и т. д.}$$

Пренебрегая здесь дифференциалами, получим

$$q=\frac{Y(Q-Q^{\mathrm{I}})}{Z-Y}.$$

Положим $\frac{Y(Q-Q^{\mathrm{I}})}{Z-Y}=R^{\mathrm{I}}$ и пусть истинное значение $q=R^{\mathrm{I}}+r$; подобным же образом найдём

$$r=\frac{Y(R-R^{\mathrm{I}})}{Z-Y}.$$

Продолжая поступать так же, найдём искомую сумму

$$Zs=Z(P^{\mathrm{I}}+Q^{\mathrm{I}}+R^{\mathrm{I}}+ \text{ и т. д.}).$$

190. Итак, если предложен какой-либо ряд

$$Aa+Bb+Cc+\ldots+Yy+Zz,$$

то его сумму можно определить следующим образом:

положим	если подставить $x-1$ вместо x
$\frac{Zz}{Z-Y}=P^{\mathrm{I}}$	пусть P^{I} перейдёт в P,
$\frac{Y(P-P^{\mathrm{I}})}{Z-Y}=Q^{\mathrm{I}}$	пусть Q^{I} перейдёт в Q,
$\frac{Y(Q-Q^{\mathrm{I}})}{Z-Y}=R^{\mathrm{I}}$	пусть R^{I} перейдёт в R,
$\frac{Y(R-R^{\mathrm{I}})}{Z-Y}=S^{\mathrm{I}}$	пусть S^{I} перейдёт в S

и т. д.

После того как эти значения найдены, сумма ряда будет равна

$$ZP^{\mathrm{I}}+ZQ^{\mathrm{I}}+ZR^{\mathrm{I}}+ZS^{\mathrm{I}}+ \text{ и т. д.}$$

+ постоянное, которое должно обратить сумму в нуль, если положить $x=0$, или, что то же, которое обеспечивало бы, чтобы удовлетворялось какое-либо условие.

191. Эта формула, которая не содержит никаких дифференциалов, в очень многих случаях легко применяется и часто даёт истинную сумму. Так, пусть предложен ряд

$$p+4p^2+9p^3+16p^4+\ldots+x^2p^x.$$

Здесь $Z=p^x$ и $z=x^2$; мы будем иметь $Y=p^{x-1}$, $\frac{Z}{Z-Y}=\frac{p}{p-1}$ и $\frac{Y}{Z-Y}=$ $=\frac{1}{p-1}$. Отсюда получим

$$P^{\mathrm{I}}=\frac{px^2}{p-1}, \qquad P=\frac{px^2-2px+p}{p-1},$$
$$Q^{\mathrm{I}}=\frac{-2px+p}{(p-1)^2}, \qquad Q=\frac{-2px+3p}{(p-1)^2},$$
$$R^{\mathrm{I}}=\frac{2p}{(p-1)^3}, \qquad R=\frac{2p}{(p-1)^3},$$
$$S^{\mathrm{I}}=0.$$

Все остальные исчезают; таким образом, сумма будет равна

$$p^x\left(\frac{px^2}{p-1}-\frac{2px-p}{(p-1)^2}+\frac{2p}{(p-1)^3}\right)-\frac{p}{(p-1)^2}-\frac{2p}{(p-1)^3}=$$
$$=p^{x+1}\left(\frac{x^2}{p-1}-\frac{2x}{(p-1)^2}+\frac{p+1}{(p-1)^3}\right)-\frac{p(p+1)}{(p-1)^3},$$

как выше (§ 176) уже было нами найдено.

192. Таким же способом, которым мы пришли к этому выражению суммы, мы можем найти другое выражение, если предложенный ряд не составлен из двух других. Это выражение можно будет употреблять преимущественно в тех случаях, когда в предыдущем выражении получаются исчезающие знаменатели. Итак, пусть предложен ряд

$$\begin{array}{c} 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad x \\ s=a+b+c+d+\ldots+z; \end{array}$$

так как, если положить $x-1$ вместо x, сумма лишается своего последнего числа, то будем иметь

$$s-z=s-\frac{ds}{dx}+\frac{d^2s}{2dx^2}-\frac{d^3s}{6dx^3}+\frac{d^4s}{24dx^4}-\text{ и т. д.}$$

или

$$z=\frac{ds}{dx}-\frac{d^2s}{2dx^2}+\frac{d^3s}{6dx^3}-\frac{d^4s}{24dx^4}+\text{ и т. д.}$$

Так как в эту сумму s не входит, то пренебрегаем высшими дифференциалами и получаем $s=\int z\,dx$; положим $\int z\,dx=P^{\mathrm{I}}$ и пусть P^{I} переходит в P, если вместо x написать $x-1$.

Пусть истинная сумма $s=P^{\mathrm{I}}+p$. Тогда будем иметь

$$z=\frac{dP^{\mathrm{I}}}{dx}-\frac{d^2P^{\mathrm{I}}}{2dx^2}+\text{ и т. д. }+\frac{dp}{dx}-\frac{d^2p}{2dx^2}+\text{ и т. д.}$$

Так как

$$P=P^{\mathrm{I}}-\frac{dP^{\mathrm{I}}}{dx}+\frac{d^2P^{\mathrm{I}}}{2dx^2}-\text{ и т. д.},$$

то

$$z-P^{\mathrm{I}}+P=\frac{dp}{dx}-\frac{d^2p}{2dx^2}+\text{ и т. д.},$$

откуда

$$p = \int (z - P^{\mathrm{I}} + P)\, dx.$$

Положим, далее, $\int (z - P^{\mathrm{I}} + P)\, dx = Q^{\mathrm{I}}$, и пусть это значение переходит в Q, когда $x-1$ подставляется вместо x. Пусть

$$\int (z - P^{\mathrm{I}} + P - Q^{\mathrm{I}} + Q)\, dx = R^{\mathrm{I}} = Q^{\mathrm{I}} - \int (Q^{\mathrm{I}} - Q)\, dx.$$

Пусть, далее,

$$R^{\mathrm{I}} - \int (R^{\mathrm{I}} - R)\, dx = S^{\mathrm{I}}$$

и т. д. Искомая сумма будет

$$s = P^{\mathrm{I}} + Q^{\mathrm{I}} + R^{\mathrm{I}} + S^{\mathrm{I}} + \text{ и т. д. } + \text{const},$$

причём постоянное должно удовлетворять какому-нибудь условию.

193. Несколько изменив обозначения, мы представим это суммирование в следующем виде. Если предложен подлежащий суммированию ряд

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & x \\ s = a & + b & + c & + d & + \ldots & + z, \end{array}$$

положим	если подставить $x-1$ вместо x,
$\int z\, dx = P$	пусть P перейдёт в p,
$P - \int (P - p)\, dx = Q$	пусть Q перейдёт в q,
$Q - \int (Q - q)\, dx = R$	пусть R перейдёт в r.

После того как эти значения найдены, сумма ряда будет равна

$$s = P + Q + R + S + \text{ и т. д.}$$

Это выражение легко даст сумму, если можно будет выразить указанные выше интегралы. Чтобы пояснить применение этой формулы, возьмём для примера $z = x^2 + x$. Тогда

$$P = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2, \quad p = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6}, \quad P - p = x^2 - \frac{1}{6}$$

и

$$\int (P - p)\, dx = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{6} x; \quad Q = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x,$$
$$q = \frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{6} x + \frac{1}{3}, \quad Q - q = x - \frac{1}{3}$$

и

$$\int (Q - q)\, dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x, \quad R = \frac{1}{2} x, \quad r = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2}, \quad R - r = \frac{1}{2}$$

и

$$\int (R - r)\, dx = \frac{1}{2} x;$$

$S=0$ и остальные значения исчезают. Поэтому искомая сумма будет

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\\+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+\\+\frac{1}{2}x\end{aligned}\right\}=\frac{1}{3}x^3+x^2+\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}x(x+1)(x+2).$$

Таким же образом с помощью последовательных интегрирований можно найти суммы всех рядов, общие члены которых суть целые рациональные функции от x. Отсюда легко усмотреть, как широко простирается учение о рядах, и многих томов было бы недостаточно для того, чтобы охватить все методы, как уже имеющиеся, так и те, которые можно ещё придумать.

194. До сих пор мы искали сумму, начиная с первого члена и кончая тем, индекс которого есть x. Если такая сумма известна, то, положив $x=\infty$, можно узнать сумму ряда, продолженного до бесконечности. Часто, однако, предпочтительно искать не сумму членов от первого до члена с индексом x, а сумму всех членов от члена, индекс которого есть x, до бесконечности. В этом случае мы получаем более удобные окончательные выражения. Итак, пусть предложен ряд, общий член которого, т. е. член, отвечающий индексу x, равен z; пусть следующий член, отвечающий индексу $x+1$, равен z^{I}; следующие же за ним пусть будут z^{II}, z^{III} и т. д., и пусть ищется сумма следующего бесконечного ряда

$$\begin{array}{llll} x & x+1 & x+2 & x+3 \quad \text{и т. д.} \\ s=z+z^{\mathrm{I}} & +z^{\mathrm{II}} & +z^{\mathrm{III}}+ & \text{и т. д. до бесконечности.}\end{array}$$

Таким образом, сумма s будет функцией от x; если в ней положить $x+1$ вместо x, получится первоначальная сумма без первого члена z. Но так как при этой замене s переходит в

$$s+\frac{ds}{dx}+\frac{d^2s}{2dx^2}+\quad \text{и т. д.,}$$

то мы будем иметь

$$s-z=s+\frac{ds}{dx}+\frac{d^2s}{2dx^2}+\frac{d^3s}{6dx^3}+\frac{d^4s}{24dx^4}+\quad \text{и т. д.}$$

или

$$0=z+\frac{ds}{dx}+\frac{d^2s}{2dx^2}+\frac{d^3s}{6dx^3}+\frac{d^4s}{24dx^4}+\quad \text{и т. д.}$$

195. Рассуждая, как раньше, найдём, пренебрегая высшими дифференциалами, что $s=C-\int z\,dx$. Положим $\int z\,dx=P$ и пусть истинное значение $s=C-P+p$; тогда

$$0=z-\frac{dP}{dx}-\frac{d^2P}{2dx^2}-\frac{d^3P}{6dx^3}-\text{ и т. д. }+\frac{dp}{dx}+\frac{d^2p}{2dx^2}+\frac{d^3p}{6dx^3}+\text{ и т. д.}$$

Пусть P переходит в P^{I}, если вместо x положить $x-1$. Тогда

$$0=z+P-P^{\text{I}}+\frac{dp}{dx}+\frac{d^2p}{2dx^2}+\frac{d^3p}{6dx^3}+\text{и т. д.}$$

Отсюда, пренебрегая высшими дифференциалами, получаем

$$p=\int(P^{\text{I}}-P)\,dx-P.$$

Положим

$$\int(P^{\text{I}}-P)\,dx-P=-Q$$

и пусть $p=-Q+q$; тогда

$$0=z+P-P^{\text{I}}-\frac{dQ}{dx}-\frac{d^3Q}{2dx^2}-\text{и т. д.}+\frac{dq}{dx}+\frac{d^2q}{2dx^2}+\text{и т. д.}$$

Пусть Q переходит в Q^{I}, если вместо x положить $x+1$. Тогда

$$0=z+P-P^{\text{I}}-Q-Q^{\text{I}}+\frac{dq}{dx}+\frac{d^2q}{2dx^2}+\text{и т. д.},$$

откуда следует, что $q=\int(Q^{\text{I}}-Q)\,dx-Q$. Поэтому, если цифра I, поставленная при каждом количестве сверху, будет обозначать то значение, которое это количество принимает, когда вместо x мы полагаем $x+1$, и если положить

$$\int z\,dx=P,$$
$$P-\int(P^{\text{I}}-P)\,dx=Q,$$
$$Q-\int(Q^{\text{I}}-Q)\,dx=R,$$
$$R-\int(R^{\text{I}}-R)\,dx=S$$
$$\text{и т. д.},$$

то предложенный ряд $z+z^{\text{I}}+z^{\text{II}}+z^{\text{III}}+z^{\text{IV}}+\text{и т. д.}$ будет иметь сумму, равную $C-P-Q-R-S-\text{и т. д.}$, где постоянное C нужно определить таким образом, чтобы при $x=\infty$ вся сумма исчезала. Так как приложение этого выражения требует выполнения интегрирований, то в данном месте мы не можем разъяснять, как пользоваться этим выражением.

196. Чтобы избежать интегральных формул, положим сумму ряда равной ys, где y есть некоторая известная функция от x. Тогда будут известны значения y^{I}, y^{II} и т. д., которые эта функция принимает, если вместо x полагать $x+1, x+2$ и т. д. Если положить $x+1$ вместо x, получим прежний ряд без первого члена; сумма этого ряда, следовательно, будет

$$y^{\text{I}}\left(s+\frac{ds}{dx}+\frac{d^2s}{2dx^2}+\frac{d^3s}{6dx^3}+\text{и т. д.}\right)=ys-z$$

или

$$z+\frac{y^{\text{I}}ds}{dx}+\frac{y^{\text{I}}d^2s}{2dx^2}+\frac{y^{\text{I}}d^3s}{6dx^3}+\text{и т. д.}=(y-y^{\text{I}})\,s.$$

Пренебрегая здесь дифференциалами, получим $s=\frac{z}{y-y^{\text{I}}}$. Положим

$\frac{z}{y^I - y} = P$, и пусть истинное значение $s = -P + p$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{y^I dP}{dx} - \frac{y^I d^2P}{2dx^2} - \frac{y^I d^3P}{6dx^3} - \text{и т. д.} \\ &+\frac{y^I dp}{dx} + \frac{y^I d^2p}{2dx^2} + \frac{y^I d^3p}{6dx^3} + \text{и т. д.}\end{aligned}\right\} \quad (y - y^I)\,p.$$

так что

$$\frac{y^I dp}{dx} + \frac{y^I d^2p}{2dx^2} + \frac{y^I d^3p}{6dx^3} + \text{и т. д.} = y^I(P^I - P) - (y^I - y)\,p.$$

Положим $Q = \frac{y^I(P^I - P)}{y^I - y}$, и пусть $p = Q + q$; тогда

$$y^I(Q^I - Q) + y^I\left(\frac{dq}{dx} + \frac{d^2q}{2dx^2} + \text{и т. д.}\right) = -(y^I - y)\,q.$$

Положим $R = \frac{y^I(Q^I - Q)}{y^I - y}$ и пусть $q = -R + r$.

Если мы будем итти дальше таким же образом, то сумма предложенного ряда $z + z^I + z^{II} + z^{III} + z^{IV} +$ и т. д. найдётся следующим образом. Взяв произвольно функцию от x, которая пусть равна y, положим

$$\begin{aligned} P &= \frac{z}{y^I - y} = \frac{z}{\Delta y}, \\ Q &= \frac{y^I(P^I - P)}{y^I - y} = \frac{y\Delta P}{\Delta y} + \Delta P, \\ R &= \frac{y^I(Q^I - Q)}{y^I - y} = \frac{y\Delta Q}{\Delta y} + \Delta Q, \\ S &= \frac{y^I(R^I - R)}{y^I - y} = \frac{y\Delta R}{\Delta y} + \Delta R \end{aligned}$$

и т. д.

Тогда искомая сумма будет равна

$$C - Py + Qy - Ry + Sy - \text{и т. д.},$$

где за C нужно принять такое постоянное количество, при котором сумма исчезает, если положить $x = \infty$.

197. Возьмём $y = a^x$, так как $y^I = a^{x+1}$, то будем иметь $y^I - y = a^x(a-1)$, откуда

$$\begin{aligned} P &= \frac{z}{a^x(a-1)}, & P^I &= \frac{z^I}{a^{x+1}(a-1)}, \\ Q &= \frac{a(P^I - P)}{a-1} = \frac{z^I - az}{a^x(a-1)^2}, & Q^I &= \frac{z^{II} - az^I}{a^{x+1}(a-1)^2}, \\ R &= \frac{a(Q^I - Q)}{a-1} = \frac{z^{II} - 2az^I + a^2z}{a^x(a-1)^3}, & R^I &= \frac{z^{III} - 2az^{II} + a^2z^I}{a^{x+1}(a-1)^3}, \\ S &= \frac{a(R^I - R)}{a-1} = \frac{z^{III} - 3az^{II} + 3a^2z^I - a^3z}{a^x(a-1)^4} \end{aligned}$$

и т. д.

Поэтому сумма предложенного ряда будет

$$C = \frac{z}{a-1} - \frac{z^{\mathrm{I}} - az}{(a-1)^2} + \frac{z^{\mathrm{II}} - 2az^{\mathrm{I}} + a^2 z}{(a-1)^3} - \frac{z^{\mathrm{III}} - 3az^{\mathrm{II}} + 3a^2 z^{\mathrm{I}} - a^3 z}{(a-1)^4} + \text{и т. д.}$$

Такое же выражение суммы мы нашли уже выше, в первой главе. Если давать количеству y другие значения, можно получить бесчисленные другие выражения, из которых можно выбирать такие, которые наилучшим образом подходят к тому или иному случаю.

ГЛАВА VIII

О ПРИМЕНЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ОБРАЗОВАНИЮ РЯДОВ

198. Мы расскажем ещё об одном применении дифференциального исчисления к учению о рядах, а именно, о применении его к самому образованию рядов. Мы уже упоминали об этом, когда речь шла о разложении в ряд дроби, знаменатель которой есть степень какой-либо функции. Этот метод сходен с тем, который мы уже применяли несколько раз, когда полагали функцию, разлагаемую в ряд, равной некоторому ряду, имеющему при отдельных членах неопределённые коэффициенты, которые затем должны быть определены из устанавливаемых равенств. Этот способ определения коэффициентов часто облегчается удивительным образом, если, прежде чем его применить, мы продифференцируем уравнение, введя первые, а иной раз и вторые дифференциалы. Так как этот метод имеет очень широкое применение в интегральном исчислении, то мы его изложим здесь обстоятельно.

199. Прежде всего повторим вкратце то, что ранее было сказано о разложении дробей в ряды без помощи дифференциального исчисления. Пусть предложена какая-нибудь дробь

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{и т. д.}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{и т.д.}}=s,$$

которую нужно представить в виде ряда, расположенного по степеням x. Представим себе, что s выражается неопределённым рядом

$$s=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\mathfrak{E}x^4+\mathfrak{F}x^5+\text{и т. д.}$$

Так как, если с помощью умножения освободиться от дроби, мы будем иметь

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+\text{и т. д.}=$$
$$=s(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\zeta x^5+\eta x^6+\text{и т. д.}),$$

то, подставив вместо s предполагаемый ряд, получим уравнение:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
A+Bx & +Cx^2 & +Dx^3 & +Ex^4 & +Fx^5 & & +\text{и т. д.} \\ \hline
=\mathfrak{A}\alpha+\mathfrak{B}\alpha x & +\mathfrak{C}\alpha x^2 & +\mathfrak{D}\alpha x^3 & +\mathfrak{E}\alpha x^4 & +\mathfrak{F}\alpha x^5 & & +\text{и т. д.} \\
+\mathfrak{A}\beta & +\mathfrak{B}\beta & +\mathfrak{C}\beta & +\mathfrak{D}\beta & +\mathfrak{E}\beta & & +\text{и т. д.} \\
& +\mathfrak{A}\gamma & +\mathfrak{B}\gamma & +\mathfrak{C}\gamma & +\mathfrak{D}\gamma & & +\text{и т. д.} \\
& & +\mathfrak{A}\delta & +\mathfrak{B}\delta & +\mathfrak{C}\delta & & +\text{и т. д.} \\
& & & +\mathfrak{A}\varepsilon & +\mathfrak{B}\varepsilon & & +\text{и т. д.} \\
& & & & +\mathfrak{A}\zeta & & +\text{и т. д.}
\end{array}$$

Приравняв друг другу отдельные члены, содержащие одну и ту же степень x, получим

$$\begin{gathered}
\mathfrak{A}\alpha - A = 0,\\
\mathfrak{B}\alpha + \mathfrak{A}\beta - B = 0,\\
\mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{A}\gamma - C = 0,\\
\mathfrak{D}\alpha + \mathfrak{C}\beta + \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{A}\delta - D = 0,\\
\mathfrak{E}\alpha + \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{B}\delta + \mathfrak{A}\varepsilon - E = 0
\end{gathered}$$

и т. д.

Из этих уравнений определяются предположительно взятые коэффициенты, и таким образом находим бесконечный ряд

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{и т. д.},$$

равный предложенной дроби s. Этим способом, если как числитель, так и знаменатель имеют конечное число членов, можно получить все рекуррентные ряды, о которых мы подробно говорили выше[1]).

200. Если же либо числитель, либо знаменатель, либо и тот и другой возводятся в какую-либо степень, то тогда этим способом ряд получить трудно, так как работа становится чрезвычайно утомительной, если только возводимая в степень функция не является биномом. С помощью же дифференциального исчисления этой работы можно избежать. Пусть сперва мы имеем один только числитель и пусть

$$s = (A + Bx + Cx^2)^n;$$

требуется найти ряд, расположенный по степеням x, равный этой степени трёхчлена; заранее, конечно, известно, что ряд будет конечным, если показатель n будет целым положительным числом. Представим себе снова, что s выражается неопределённым рядом

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{ и т. д.}$$

Заранее известно, что первый член $\mathfrak{A}$ этого ряда равен A^n, действительно, если положить $x = 0$, то из предложенной первоначальной формулы находим, что $s = A^n$, а из предположительно взятого ряда $s = \mathfrak{A}$. Такой способ определения первого члена необходим по самой сути дела, если мы желаем перейти к дифференциалам, ибо, как сейчас станет ясным, из них первый член не определяется.

201. Так как $s = (A + Bx + Cx^2)^n$, то, логарифмируя, будем иметь

$$\mathrm{l}\, s = n\, \mathrm{l}\,(A + Bx + Cx^2).$$

Отсюда, дифференцируя, получим

$$\frac{ds}{s} = \frac{nB\,dx + 2nCx\,dx}{A + Bx + Cx^2} \quad \text{или} \quad (A + Bx + Cx^2)\frac{ds}{dx} = ns(B + 2Cx).$$

А из предположительно взятого ряда мы имеем

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + 5\mathfrak{F}x^4 + \text{ и т. д.}$$

[1]) «Введение», ч. 1, гл. IX и XII.

Если вместо $\frac{ds}{dx}$ подставить этот ряд, а вместо s подставить предположительно взятый ряд, получится следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
&A\mathfrak{B} + 2A\mathfrak{C}x + 3A\mathfrak{D}x^2 + 4A\mathfrak{E}x^3 + 5A\mathfrak{F}x^4 + \text{ и т. д.}\\
&\qquad + B\mathfrak{B} + 2B\mathfrak{C} + 3B\mathfrak{D} + 4B\mathfrak{E} + \text{ и т. д.}\\
&\qquad\qquad + C\mathfrak{B} + 2C\mathfrak{C} + 3C\mathfrak{D} + \text{ и т. д.}\\
&= nB\mathfrak{A} + nB\mathfrak{B} + nB\mathfrak{C} + nB\mathfrak{D} + nB\mathfrak{E} + \text{ и т. д.}\\
&\qquad + 2nC\mathfrak{A} + 2nC\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{C} + 2nC\mathfrak{D} + \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Приравнивая друг другу члены, имеющие одинаковые степени количества x, будем иметь

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= \frac{nB\mathfrak{A}}{1},\\
\mathfrak{C} &= \frac{(n-1)B\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{A}}{2A},\\
\mathfrak{D} &= \frac{(n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B}}{3A},\\
\mathfrak{E} &= \frac{(n-3)B\mathfrak{D} + (2n-2)C\mathfrak{C}}{4A},\\
\mathfrak{F} &= \frac{(n-4)B\mathfrak{E} + (2n-3)C\mathfrak{D}}{5A}\\
&\text{и т. д.}
\end{aligned}$$

Поскольку, как мы видели, $\mathfrak{A} = A^n$, будем иметь $\mathfrak{B} = nA^{n-1}B$, и отсюда последовательно определятся все остальные коэффициенты. Из этих формул очень легко виден закон, которому подчинены эти коэффициенты; он оставался бы очень тёмным, если бы мы пожелали непосредственно возводить трёхчлен в степень.

202. Тот же метод пригоден и в том случае, если требуется возвести какой угодно многочлен в какую угодно степень. Пусть

$$s = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ и т. д.})^n;$$

допустим, что

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{ и т. д.}$$

Тогда $\mathfrak{A} = A^n$; это значение мы получаем, положив $x = 0$. Как мы делали это прежде, будем логарифмировать и затем дифференцировать. Тогда мы найдём

$$\frac{ds}{s} = \frac{nB\,dx + 2nCx\,dx + 3nDx^2\,dx + 4nEx^3\,dx + \text{ и т. д.}}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ и т. д.}}$$

или

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ и т. д.})\frac{ds}{dx} =$$
$$= s(nB + 2nCx + 3nDx^2 + 4nEx^3 + \text{ и т. д.}).$$

Так как

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + \text{ и т. д.},$$

то, подставляя эти ряды вместо s и $\frac{ds}{dx}$, будем иметь

$$\begin{array}{rrrrrl}
A\mathfrak{B} + 2A\mathfrak{C}x & + 3A\mathfrak{D}x^2 & + 4A\mathfrak{E}x^3 & + 5A\mathfrak{F}x^4 + & & \text{и т. д.} \\
+ B\mathfrak{B} & + 2B\mathfrak{C} & + 3B\mathfrak{D} & + 4B\mathfrak{E} + & & \text{и т. д.} \\
 & + C\mathfrak{B} & + 2C\mathfrak{C} & + 3C\mathfrak{D} + & & \text{и т. д.} \\
 & & + D\mathfrak{B} & + 2D\mathfrak{C} + & & \text{и т. д.} \\
 & & & + E\mathfrak{B} + & & \text{и т. д.} \\
= nB\mathfrak{A} + nB\mathfrak{B} & + nB\mathfrak{C} & + nB\mathfrak{D} & + nB\mathfrak{E} + & & \text{и т. д.} \\
+ 2nC\mathfrak{A} & + 2nC\mathfrak{B} & + 2nC\mathfrak{C} & + 2nC\mathfrak{D} + & & \text{и т. д.} \\
 & + 3nD\mathfrak{A} & + 3nD\mathfrak{B} & + 3nD\mathfrak{C} + & & \text{и т. д.} \\
 & & + 4nE\mathfrak{A} & + 4nE\mathfrak{B} + & & \text{и т. д.} \\
 & & & + 5F\mathfrak{A} + & & \text{и т. д.}
\end{array}$$

Отсюда для определения коэффициентов получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
A\mathfrak{B} &= nB\mathfrak{A}, \\
2A\mathfrak{C} &= (n-1)\,B\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{A}, \\
3A\mathfrak{D} &= (n-2)\,B\mathfrak{C} + (2n-1)\,C\mathfrak{B} + 3nD\mathfrak{A}, \\
4A\mathfrak{E} &= (n-3)\,B\mathfrak{D} + (2n-2)\,C\mathfrak{C} + (3n-1)\,D\mathfrak{B} + 4nE\mathfrak{A}, \\
5A\mathfrak{F} &= (n-4)\,B\mathfrak{E} + (2n-3)\,C\mathfrak{D} + (3n-2)\,D\mathfrak{C} + (4n-1)\,E\mathfrak{B} + 5nF\mathfrak{A}
\end{aligned}$$

и т. д.

Отсюда становится совершенно очевидным, как связаны между собой предположительно взятые коэффициенты $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и как их определить, исходя из равенства $\mathfrak{A} = A^n$.

203. Если количество $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ и т. д. имеет конечное число членов, а n есть целое положительное число, то любая степень также должна иметь конечное число членов. Ясно, что в этом случае только что найденные выражения должны в конце концов исчезать, а так как все члены должны быть налицо [1]), то, как только один впервые исчезнет, должны исчезать и все следующие. Положим, что предложенное выражение есть трёхчлен $A + Bx + Cx^2$ и ищется его куб, так что $n = 3$. Тогда будем иметь

$$\begin{array}{rlcl}
\mathfrak{A} &= A^3, & \text{так что} & \mathfrak{A} = A^3, \\
A\mathfrak{B} &= 3B\mathfrak{A}, & & \mathfrak{B} = 3A^2B, \\
2A\mathfrak{C} &= 2B\mathfrak{B} + 6C\mathfrak{A}, & & \mathfrak{C} = 3AB^2 + 3A^2C, \\
3A\mathfrak{D} &= 1B\mathfrak{C} + 5C\mathfrak{B}, & & \mathfrak{D} = B^3 + 6ABC, \\
4A\mathfrak{E} &= 0 + 4C\mathfrak{C}, & & \mathfrak{E} = 3B^2C + 3AC^2, \\
5A\mathfrak{F} &= -B\mathfrak{E} + 3C\mathfrak{D}, & & \mathfrak{F} = 3BC^2, \\
6A\mathfrak{G} &= -2B\mathfrak{F} + 2C\mathfrak{E}, & & \mathfrak{G} = C^3, \\
7A\mathfrak{H} &= -3B\mathfrak{G} + 1C\mathfrak{F} & & \mathfrak{H} = 0, \\
8A\mathfrak{J} &= -4B\mathfrak{H} + 0, & & \mathfrak{J} = 0.
\end{array}$$

Так как уже два коэффициента равны нулю, а каждый следующий зависит от двух предшествующих, то, очевидно, все следующие равным

[1]) Эйлер, очевидно, хочет сказать, что в общей формуле разложения ни один из коэффициентов низких степеней не может тождественно равняться нулю.

образом должны исчезать. Поэтому тем более замечательным является найденный нами закон, которым связаны друг с другом эти коэффициенты.

204. Если n будет отрицательным числом, так что s будет равно дроби, то ряд станет бесконечным. Пусть

$$s = \frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ и т. д.})^n};$$

предположим, что его значение выражается рядом

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{ и т. д.}$$

Если в предыдущих формулах положить $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$ и т. д. и вместе с тем n сделать отрицательным, то получим следующие формулы для определения коэффициентов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д.:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} = \alpha^{-n} &= \frac{1}{a^n}, \\
\alpha\mathfrak{B} + n\beta\mathfrak{A} &= 0, \\
2\alpha\mathfrak{C} + (n+1)\beta\mathfrak{B} + 2n\gamma\mathfrak{A} &= 0, \\
3\alpha\mathfrak{D} + (n+2)\beta\mathfrak{C} + (2n+1)\gamma\mathfrak{B} + 3n\delta\mathfrak{A} &= 0, \\
4A\mathfrak{E} + (n+3)\beta\mathfrak{D} + (2n+2)\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)\delta\mathfrak{B} + 4n\varepsilon\mathfrak{A} &= 0, \\
5A\mathfrak{F} + (n+4)\beta\mathfrak{E} + (2n+3)\gamma\mathfrak{D} + (3n+2)\delta\mathfrak{C} + (4n+1)\varepsilon\mathfrak{B} + 5n\zeta\mathfrak{A} &= 0
\end{aligned}$$
и т. д.

Эти формулы дают тот же закон зависимости между коэффициентами, который мы подметили уже прежде во «Введении»[1] и справедливость которого теперь, наконец, можно было доказать строго.

205. Так обстоит дело, если числитель дроби есть единица или даже какая-либо степень количества x, скажем, x^m; в самом деле, в последнем случае достаточно будет помножить найденный для первого случая ряд $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 +$ и т. д. на x^m. Если же числитель имеет два или большее число членов, тогда мы не будем наблюдать вышеустановленного закона следования коэффициентов. Поэтому найдём его здесь с помощью дифференцирования. Пусть

$$s = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ и т. д.}}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ и т. д.})^n}$$

и представим себе, что значение этой дроби выражается рядом

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{ и т. д.}$$

Чтобы определить первый его член, положим $x = 0$; тогда из первого выражения будем иметь $\frac{A}{a^n}$, а из предположенного $s = \mathfrak{A}$; следовательно, необходимо, чтобы $\mathfrak{A} = \frac{A}{a^n}$. После того как этот член определён, остальные найдутся с помощью дифференцирования.

206. Логарифмируя, будем иметь

$$\mathrm{l}\, s = \mathrm{l}\,(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ и т. д}) - n\, \mathrm{l}\,(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{ и т. д.}).$$

---

[1] «Введение», ч. 1, гл. IV.

Отсюда, дифференцируя, получим

$$\frac{ds}{s}=\frac{B\,dx+2Cx\,dx+3Dx^2\,dx+\text{ и т. д.}}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ и т. д.}}-\frac{n\beta\,dx+2n\gamma x\,dx+3n\delta x^2\,dx+\text{ и т. д.}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{ и т. д.}}$$

Освободившись от дробей с помощью умножения, будем иметь

$$\left\{\begin{array}{r} A\alpha+A\beta x+A\gamma x^2+A\delta x^3+\text{ и т. д.}\\ +B\alpha+\quad B\beta+\quad B\gamma+\text{ и т. д.}\\ +\quad C\alpha+\quad C\beta+\text{ и т. д.}\\ +\quad D\alpha+\text{ и т. д.}\end{array}\right\}\cdot\frac{ds}{dx}=$$

$$=\left\{\begin{array}{r} B\alpha+B\beta x+B\gamma x^2+B\delta x^3+\text{ и т. д.}\\ +2C\alpha+2C\beta+2C\gamma+\text{ и т. д.}\\ +3D\alpha+3D\beta+\text{ и т. д.}\\ +4E\alpha+\text{ и т. д.}\end{array}\right\}s-$$

$$-\left\{\begin{array}{r} A\beta+2A\gamma x+3A\delta x^2+4A\varepsilon x^3+\text{ и т. д.}\\ +\quad B\beta+\quad 2B\gamma+\quad 3B\delta+\text{ и т. д.}\\ +\quad C\beta+\quad 2C\gamma+\text{ и т. д.}\\ +\quad D\beta+\text{ и т. д.}\end{array}\right\}ns.$$

А так как $\frac{ds}{dx}=\mathfrak{B}+2\mathfrak{C}x+3\mathfrak{D}x^2+$ и т. д., то, выполнив подстановки, будем иметь

$$\left.\begin{array}{r} A\alpha\mathfrak{B}+nA\beta\mathfrak{A}\\ -B\alpha\mathfrak{A}\end{array}\right\}=0;$$

$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha\mathfrak{C}A+(n+1)\,A\beta\mathfrak{B}+2nA\gamma\mathfrak{A}\\ +\quad 0B\alpha\mathfrak{B}+(n-1)\,B\beta\mathfrak{A}\\ -2C\alpha\mathfrak{A}\end{array}\right\}=0;$$

$$\left.\begin{array}{r} 3A\alpha\mathfrak{D}+(n+2)\,A\beta\mathfrak{C}+\quad(2n+1)\,A\gamma\mathfrak{B}+\qquad 3nA\delta\mathfrak{A}\\ +B\alpha\mathfrak{C}\qquad +\quad nB\beta\mathfrak{B}+(2n-1)B\gamma\mathfrak{A}\\ -\quad C\alpha\mathfrak{B}+(n-2)\,C\beta\mathfrak{A}\\ -3D\alpha\mathfrak{A}\end{array}\right\}=0;$$

$$\left.\begin{array}{r} 4A\alpha\mathfrak{E}+(n+3)\,A\beta\mathfrak{D}+(2n+2)\,A\gamma\mathfrak{C}+(3n+1)\,A\delta\mathfrak{B}+\qquad 4nA\varepsilon\mathfrak{A}\\ +\quad 2B\alpha\mathfrak{D}+\quad(n+1)\,B\beta\mathfrak{C}+\qquad 2nB\gamma\mathfrak{B}+(3n-1)\,B\delta\mathfrak{A}\\ +\quad 0C\alpha\mathfrak{C}+(n-1)\,C\beta\mathfrak{B}+(2n-2)\,C\gamma\mathfrak{A}\\ -D\alpha\mathfrak{B}+(n-3)\,D\beta\mathfrak{A}\\ -4E\alpha\mathfrak{A}\end{array}\right\}=0$$

и т. д.

Отсюда легко усмотреть закон составления этих формул. В самом деле, первая строка каждого уравнения составлена по тому же закону, который мы имели в § 204. Коэффициенты вторых строк получаются из коэффициентов первых строк вычитанием $n+1$; таким же образом, вычитая $n+1$ из коэффициентов вторых строк, получаем коэффициенты третьих, точно так же получаются коэффициенты всех последующих строк из коэффициентов предшествующих. Что касается самих букв, из которых составляется какой-либо член, то их очень легко образовать, руководствуясь только наблюдением.

207. Пусть теперь и числитель будет какой-либо степенью, т. е. пусть

$$s = \frac{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ и т. д.})^m}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{ и т. д.})^n}\,.$$

Представим себе, что

$$s = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\mathfrak{E}x^4+\text{и т. д.}$$

Тогда будем иметь $\mathfrak{A} = \frac{A^m}{\alpha^n}$; остальные же коэффициенты определятся следующих формул:

$$\left.\begin{array}{r} A\alpha\mathfrak{B}+nA\beta\mathfrak{A} \\ -mB\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} 2A\alpha\mathfrak{C}+(n+1)\,A\beta\mathfrak{B}+2nA\gamma\mathfrak{A} \\ -(m-1)\,B\alpha\mathfrak{B}+(n-m)\,B\beta\mathfrak{A} \\ -2mC\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} 3A\alpha\mathfrak{D}+(n+2)\,A\beta\mathfrak{C}+(2n+1)\,A\gamma\mathfrak{B}+3nA\delta\mathfrak{A} \\ -(m-2)\,B\alpha\mathfrak{C}+(n-m+1)\,B\beta\mathfrak{B}+(2n-m)\,B\gamma\mathfrak{A} \\ -(2m-1)\,C\alpha\mathfrak{B}+(n-2m)\,C\beta\mathfrak{A} \\ -3mD\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} 4A\alpha\mathfrak{E}+(n+3)\,A\beta\mathfrak{D}+(2n+2)\,A\gamma\mathfrak{C}+(3n+1)\,A\delta\mathfrak{B}+4nA\varepsilon\mathfrak{A} \\ -(m-3)\,B\alpha\mathfrak{D}+(n-m+2)\,B\beta\mathfrak{C}+(2n-m+1)\,B\gamma\mathfrak{B}+(3n-m)\,B\delta\mathfrak{A} \\ -(2m-2)\,C\alpha\mathfrak{C}+(n-2m+1)\,C\beta\mathfrak{B}+(2n-2m)\,C\gamma\mathfrak{A} \\ -(3m-1)\,D\alpha\mathfrak{B}+(3n-m)\,D\beta\mathfrak{A} \\ -4mE\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0.$$

и т. д.

Закон, по которому эти формулы дальше следуют друг за другом, легче уяснить из наблюдения, чем описать словесно. По мере спуска коэффициенты уменьшаются на $n+m$; по мере же продвижения в горизонтальном направлении они постоянно возрастают на $n-1$.

208. Вот каким образом мы расширили учение о рядах, пополнив вышеуказанный недостаток и определив закон образования коэффициентов не только для того случая, когда один знаменатель дроби является какой-либо степенью, но и для того случая, когда и числитель состоит из какого угодно числа членов; для того чтобы открыть этот закон, одной индукции оказалось недостаточно. Рекуррентные ряды, помимо тех применений, которые мы уже показали, приносят также очень большую пользу для приближённого нахождения сумм всевозможных рядов. Пример этого мы имели уже в главе первой настоящей части, когда мы преобразовывали ряд подстановкой $x = \frac{y}{1+ny}$ в другой ряд, который часто может содержать конечное число членов. Тот же метод можно было бы распространить шире, если подставлять вместо x другие функции. Так как, однако, закон последовательного составления тех рядов, которые следовало бы подставлять вместо степеней количества x, был тогда недостаточно явственным, то мы сочли нужным отложить рассмотрение этого расширенного метода до настоящего момента, когда упомянутый закон был бы уже обнаружен. Однако, обдумав вопрос более внимательно, мы увидели, что при решении его можно обойтись без этого закона последовательного составления рядов, прибегнув лишь к помощи того самого метода, которым мы воспользовались для разыскания упомянутого закона.

209. Итак, пусть предложен какой-либо ряд

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{ и т. д.}$$

и требуется преобразовать его в другой ряд, члены которого суть дроби, знаменатели которых — степени следующего выражения:

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ и т. д.}$$

Чтобы начать с простейшего случая, положим, что

$$s = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{B}x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha + \beta x)^4} + \text{ и т. д.}$$

Приравняв этот ряд данному выражению, помножим с обеих сторон на $\alpha + \beta x$; тогда получим

$$\left.\begin{array}{l} A\alpha + B\alpha x + C\alpha x^2 + D\alpha x^3 + \text{и т. д.} \\ \quad + A\beta + B\beta + C\beta + \text{ и т. д.} \end{array}\right\} = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha + \beta x)^2} + \text{и т. д.}$$

Положим $\mathfrak{A} = A\alpha$; тогда

$$\begin{gathered} A\beta + B\alpha = A', \\ B\beta + C\alpha = B', \\ C\beta + D\alpha = C', \\ D\beta + E\alpha = D' \\ \text{и т. д.} \end{gathered}$$

Разделив на x, будем иметь

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{и т. д.} = \frac{\mathfrak{B}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{C}}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \text{ и т. д.}$$

Снова помножим на $\alpha + \beta x$; тогда, положив

$$\begin{gathered} A'\beta + B'\alpha = A'', \\ B'\beta + C'\alpha = B'', \\ C'\beta + D'\alpha = C'' \\ \text{и т. д.,} \end{gathered}$$

будем иметь

$$A'\alpha + A''x + B''x^2 + C''x^3 + \text{и т. д.} = \mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{C}x}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha + \beta x)^2} + \text{и т. д.}$$

Положим теперь $\mathfrak{B} = A'\alpha$ и будем поступать, как раньше; если положить

$$\begin{array}{ll} A''\beta + B''\alpha = A'''; & A'''\beta + B'''\alpha = A'''', \\ B''\beta + C''\alpha = B''', & B'''\beta + C'''\alpha = B'''', \\ C''\beta + D''\alpha = C''' & C'''\beta + D'''\alpha = C'''' \\ \text{и т. д.,} & \text{и т. д.,} \end{array}$$

то будем иметь $\mathfrak{C} = A''\alpha$, $\mathfrak{D} = A'''\alpha$, $\mathfrak{E} = A''''\alpha$ и т. д. Следовательно, сумма предложенного ряда представится выражением

$$s = \frac{A\alpha}{\alpha + \beta x} + \frac{A'\alpha x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{A''\alpha x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \frac{A'''\alpha x^3}{(\alpha + \beta x)^4} + \text{и т. д.}$$

То же выражение мы получили бы, если бы применили подстановку

$$\frac{x}{\alpha+\beta x}=y \quad \text{или} \quad x=\frac{dy}{1-\beta y}.$$

210. Это преобразование применяется с наибольшим успехом, если предложенный ряд $A+Bx+Cx^2+$ и т. д. составлен таким образом, что он, в конце концов, совпадает с рекуррентным или, лучше, с геометрическим рядом, получаемым из дроби $\frac{P}{\alpha+\beta x}$ [1]). Действительно, тогда значения A', B', C' и т. д. в конце концов исчезают, и тем более буквы A'', A''', A'''' и т. д. составляют очень быстро сходящийся ряд.

Подобным же образом мы сможем воспользоваться трёхчленными и многочленными знаменателями, которые будут очень полезными, если предложенный ряд, в конце концов, будет совпадать с рекуррентным. Пусть предложен ряд

$$s=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{и т. д.}$$

Положим

$$s=\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\frac{\mathfrak{A}'x^2+\mathfrak{B}'x^3}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2}+\frac{\mathfrak{A}''x^4+\mathfrak{B}''x^5}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^3}+\frac{\mathfrak{A}'''x^6+\mathfrak{B}'''x^7}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^4}+\text{и т. д.}$$

Помножим с обеих сторон на $\alpha+\beta x+\gamma x^2$; положив

$$\begin{aligned} &A\gamma+B\beta+C\alpha=A' \\ &B\gamma+C\beta+D\alpha=B', \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}=A\alpha, \\ &C\gamma+D\beta+E\alpha=C' \qquad \mathfrak{B}=A\beta+B\alpha \\ &\qquad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

получим после деления на x^2 уравнение того же вида, что первое:

$$A'+B'x+C'x^2+D'x^3+E'x^4+\text{и т. д}=$$
$$=\frac{\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'x}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\frac{\mathfrak{A}''x^2+\mathfrak{B}''x^3}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2}+\frac{\mathfrak{A}'''x^4+\mathfrak{B}'''x^5}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^3}+\text{и т. д.}$$

Если теперь будем поступать, как раньше, полагая

$$\begin{aligned} &A'\gamma+B'\beta+C'\alpha=A'', \\ &B'\gamma+C'\beta+D'\alpha=B'', \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}'=A'\alpha, \\ &C'\gamma+D'\beta+E'\alpha=C'' \qquad \mathfrak{B}'=A'\beta+B'\alpha \\ &\qquad \text{и т. д.}; \end{aligned}$$

затем

$$\begin{aligned} &A''\gamma+B''\beta+C''\alpha=A''', \\ &B''\gamma+C''\beta+D''\alpha=B''', \qquad \mathfrak{A}''=A''\alpha, \\ &C''\gamma+D''\beta+E''\alpha=C''' \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}''=A''\beta+B''\alpha \\ &\qquad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

и дальше будем находить подобные выражения, то будем иметь

$$s=\frac{A\alpha+(A\beta+B\alpha)x}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\frac{[A'\alpha+(A'\beta+B'\alpha)x]x^2}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}+\frac{[A''\alpha+(A''\beta+B''\alpha)x]x^4}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^3}+\text{и т. д.}$$

---

[1]) Как видно из последующего, это выражение не нужно понимать в том смысле, что, начиная с некоторого члена данного ряда, он представляет собой в точности геометрическую прогрессию. Речь идёт о ряде, для которого отношение последующего коэффициента к предыдущему стремится (и притом быстро) к пределу, равному $-\frac{\beta}{\alpha}$. Тогда величины $A\beta+B\alpha=A'$, $B\beta+C\alpha=B'$ и т. д. образуют последовательность, имеющую предел, равный нулю.

211. Положим $x=1$, что нисколько не уменьшает общности, поскольку α, β, γ могут быть взяты по произволу. Тогда

$$s=A+B+C+D+E+F+G+\text{и т. д.}$$

Если будем последовательно образовывать выражения

$$\begin{array}{ll} A\gamma+B\beta+C\alpha=A', & A'\gamma+B'\beta+C'\alpha=A'', \\ B\gamma+C\beta+D\alpha=B', & B'\gamma+C'\beta+D'\alpha=B'', \\ C\gamma+D\beta+E\alpha=C' & C'\gamma-D'\beta+E'\alpha=C'' \\ \text{и т. д.} & \text{и т. д.} \end{array} \qquad \text{и т. д.}$$

и если, кроме того, для краткости положим

$$\alpha+\beta+\gamma=m,$$

то сумма предложенного ряда выразится следующим образом:

$$s=\left\{\begin{array}{l} (\alpha+\beta)\left(\frac{A}{m}+\frac{A'}{m^2}+\frac{A''}{m^3}+\frac{A'''}{m^4}+\text{и т. д.}\right)+ \\ +\alpha\left(\frac{B}{m}+\frac{B'}{m^2}+\frac{B''}{m^3}+\frac{B'''}{m^4}+\text{и т. д.}\right) \end{array}\right\}.$$

212. Подобным же образом можно взять знаменатели, состоящие из большего числа членов, и, так как из предыдущего легко понять ход решения, мы рассмотрим здесь только случай четырёхчленного знаменателя. Пусть

$$s=A+B+C+D+E+F+G+\text{и т. д.}$$

Ищем следующие значения:

$$\begin{array}{c} A\delta+B\gamma+C\beta+D\alpha=A', \\ B\delta+C\gamma+D\beta+E\alpha=B', \\ C\delta+D\gamma+E\beta+F\alpha=C' \\ \text{и т. д.} \\ A'\delta+B'\gamma+C'\beta+D'\alpha=A'', \\ B'\delta+C'\gamma+D'\beta+E'\alpha=B'', \\ C'\delta+D'\gamma+E'\beta+F'\alpha=C'' \\ \text{и т. д.} \\ A''\delta+B''\gamma+C''\beta+D''\alpha=A''', \\ B''\delta+C''\gamma+D''\beta+E''\alpha=B''', \\ C''\delta+D''\gamma+E''\beta+F''\alpha=C''' \\ \text{и т. д.} \end{array}$$

Пусть $\alpha+\beta+\gamma+\delta=m$; тогда

$$s=\left\{\begin{array}{l} (\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{A}{m}+\frac{A'}{m^2}+\frac{A''}{m^3}+\frac{A'''}{m^4}+\text{и т. д.}\right) \\ \qquad (\alpha+\beta)\left(\frac{B}{m}+\frac{B'}{m^2}+\frac{B''}{m^3}+\frac{B'''}{m^4}+\text{и т. д.}\right) \\ \qquad\qquad +\alpha\left(\frac{C}{m}+\frac{C'}{m^2}+\frac{C''}{m^3}+\frac{C'''}{m^4}+\text{и т. д.}\right) \end{array}\right\}.$$

Отсюда вместе с тем становится совершенно ясно, как будут строиться последующие выражения, если в знаменателе мы будем брать большее число членов.

213. Вовсе нет необходимости в том, чтобы знаменатели дробей, через которые мы выражаем ряд, были степенями одного и того же выражения

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{и т. д.}$$

Это выражение может меняться в отдельных членах. Для большей ясности возьмём сначала только два члена и представим себе, что ряд

$$s=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\text{и т. д.}$$

обращается в следующий ряд дробей:

$$s=\frac{\mathfrak{A}}{\alpha+\beta x}+\frac{\mathfrak{A}'x}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta'x)}+\frac{\mathfrak{A}''x}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta'x)(\alpha''+\beta''x)}+\text{и т. д.}$$

Помножим сначала с обеих сторон на $\alpha+\beta x$ и положим

$$\begin{aligned}&A\beta+B\alpha=A',\\&B\beta+C\alpha=B', \quad \text{и } \mathfrak{A}=A\alpha.\\&C\beta+D\alpha=C'\\&\text{и т. д.}\end{aligned}$$

Разделив на x, будем иметь

$$A'+B'x+C'x^2+D'x^3+\text{и т. д.}=\frac{\mathfrak{A}'}{\alpha'+\beta'}+\frac{\mathfrak{A}''}{(\alpha'+\beta')(\alpha''+\beta'')}+\text{и т. д.}$$

Далее будем помножать таким же образом на $\alpha'+\beta'x$, затем на $\alpha''+\beta''x$ и т. д. и будем полагать

$$\begin{aligned}&A'\beta'+B'\alpha'=A'', && A''\beta''+B''\alpha''=A''', && A'''\beta'''+B'''\alpha'''=A'''',\\&B'\beta'+C'\alpha'=B'', && B''\beta''+C''\alpha''=B''', && B'''\beta'''+C'''\alpha'''=B'''',\\&C'\beta'+D'\alpha'=C'' && C''\beta''+D''\alpha''=C''' && C'''\beta'''+D'''\alpha'''=C''''\\&\text{и т. д.,} && \text{и т. д.,} && \text{и т. д.}\end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$\mathfrak{A}'=A'\alpha', \quad \mathfrak{A}''=A''\alpha'', \quad \mathfrak{A}'''=A'''\alpha''' \text{ и т. д.,}$$

и, значит, предложенный ряд обратится в ряд вида

$$s=\frac{A\alpha}{\alpha+\beta x}+\frac{A'\alpha'x}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta'x)}+\frac{A''\alpha''x^2}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta'x)(\alpha''+\beta''x)}+\text{и т. д.,}$$

где значения α, β, α', β', α'', β'', α''', β''' и т. д. произвольны и в каждом случае могут быть выбраны так, чтобы новый ряд сходился очень быстро.

214. Применим этот же способ к трёхчленным множителям. Пусть предложен какой-либо ряд $s=A+B+C+D+E+F+$ и т. д.

$$\begin{aligned}&A\gamma+B\beta+C\alpha=A', && A'\gamma'+B'\beta'+C'\alpha'=A'',\\&B\gamma+C\beta+D\alpha=B', && B'\gamma'+C'\beta'+D'\alpha'=B'',\\&C\gamma+D\beta+E\alpha=C' && C'\gamma'+D'\beta'+E'\alpha'=C''\\&\text{и т. д.} && \text{и т. д.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A''\gamma''+B''\beta''+C''\alpha''=A''', && A'''\gamma'''+B'''\beta'''+C'''\alpha'''=A'''',\\&B''\gamma''+C''\beta''+D''\alpha''=B''', && B'''\gamma'''+C'''\beta'''+D'''\alpha'''=B'''',\\&C''\gamma''+D''\beta''+E''\alpha''=C''' && C'''\gamma'''+D'''\beta'''+E'''\alpha'''=C''''\\&\text{и т. д.} && \text{и т. д.}\end{aligned}$$

Далее, положим для краткости

$$\alpha+\beta+\gamma=m,$$
$$\alpha'+\beta'+\gamma'=m',$$
$$\alpha''+\beta''+\gamma''=m'',$$
$$\alpha'''+\beta'''+\gamma'''=m'''$$
и т. д.

Тогда сумма предложенного ряда будет

$$s=\frac{\alpha(A+B)}{m}+\frac{\alpha'(A'+B')}{mm'}+\frac{\alpha''(A''+B'')}{mm'm''}+\frac{\alpha'''(A'''+B''')}{mm'm''m'''}+\text{и т. д.}+$$
$$+\frac{\beta A}{m}+\frac{\beta' A'}{mm'}+\frac{\beta'' A''}{mm'm''}+\frac{\beta''' A'''}{mm'm''m'''}+\text{и т. д.}$$

215. Так как полученные результаты имеют столь общий характер, что применение их может оказаться недостаточно ясным, то мы ограничим преобразование, данное в § 213. Мы положим $x=-1$, так что будем иметь ряд

$$s=A-B+C-D+E-F+G-\text{и т. д.}$$

и положим

$$\begin{array}{llll} B-A=A', & B'-2A'=A'', & B''-3A''=A''', & B'''-4A'''=A'''', \\ C-B=B', & C'-2B'=B'', & C''-3B''=B''', & C'''-4B'''=B'''', \\ D-C=C', & D'-2C'=C'', & D''-3C''=C''', & D'''-4C'''=C'''', \\ E-D=D' & E'-2D'=D'' & E''-3D''=D''' & E'''-4D'''=D'''' \\ \text{и т. д.} & \text{и т. д.} & \text{и т. д.} & \text{и т. д.} \end{array}$$

После того как эти значения будут найдены, сумма предложенного ряда будет равна следующему ряду:

$$s=\frac{A}{2}-\frac{A'}{2\cdot 3}+\frac{A''}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{A'''}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{A''''}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}-\text{и т. д.}$$

Подобным же образом какой угодно предложенный ряд можно преобразовать в бесчисленные другие ряды, ему равные. Среди них, без сомнения, найдутся ряды, сходящиеся очень быстро, и с их помощью можно будет найти сумму с очень большой степенью точности.

216. Но вернёмся к разысканию рядов, закон составления которых раскрывает дифференциальное исчисление. Так как алгебраические количества мы уже рассмотрели, перейдём теперь к количествам трансцендентным. Пусть ищется ряд, равный следующему логарифму:

$$s=\mathrm{l}\,(1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\text{и. т. д}).$$

Предположим, что условию удовлетворяет ряд

$$s=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}x^2+\mathfrak{C}x^3+\mathfrak{D}x^4+\mathfrak{E}x^5+\text{и т. д.}$$

Так как дифференцирование этого уравнения даёт

$$\frac{ds}{dx}=\frac{\alpha+2\beta x+3\gamma x^2+4\delta x^3+5\varepsilon x^4+\text{и т. д.}}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\text{и т. д.}},$$

то будем иметь

$$(1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\text{и т. д.})\frac{ds}{dx}=\alpha+2\beta x+3\gamma x^2+4\delta x^3+\text{и т. д.}$$

А так как из предположенного равенства мы имеем

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \text{и т. д.},$$

то после этой подстановки мы получим следующее уравнение:

$$\begin{array}{r} \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \text{и т. д.} \\ + \ \mathfrak{A}\alpha + 2\mathfrak{B}\alpha + 3\mathfrak{C}\alpha + 4\mathfrak{D}\alpha + \text{и т. д.} \\ + \ \mathfrak{A}\beta + 2\mathfrak{B}\beta + 3\mathfrak{C}\beta + \text{и т. д.} \\ + \mathfrak{A}\gamma + 2\mathfrak{B}\gamma + \text{и т. д.} \\ + \ \mathfrak{A}\delta + \text{и т. д.} \\ \hline = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + \text{и т. д.} \end{array}$$

Из него получаем следующие формулы для определения коэффициентов:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \alpha, \\ \mathfrak{B} &= -\frac{1}{2}\mathfrak{A}\alpha + \beta, \\ \mathfrak{C} &= -\frac{2}{3}\mathfrak{B}\alpha - \frac{1}{3}\mathfrak{A}\beta + \gamma, \\ \mathfrak{D} &= -\frac{3}{4}\mathfrak{C}\alpha - \frac{2}{4}\mathfrak{B}\beta - \frac{1}{4}\mathfrak{A}\gamma + \delta, \\ \mathfrak{E} &= -\frac{4}{5}\mathfrak{D}\alpha - \frac{3}{5}\mathfrak{C}\beta - \frac{2}{5}\mathfrak{B}\gamma - \frac{1}{5}\mathfrak{A}\delta + \varepsilon \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

217. Пусть теперь предложено показательное количество

$$s = e^{\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{и т. д.}},$$

где e есть число, гиперболический логарифм которого равен единице, и предположим, что искомый ряд есть

$$s = 1 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \text{и т. д.}$$

Уже из случая $x = 0$ ясно, что первый член должен быть единицей. Так как, логарифмируя, мы имеем

$$\mathrm{l}s = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \text{ и т. д.},$$

то, дифференцируя, будем иметь

$$\frac{ds}{dx} = s(\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + \text{ и т. д.}).$$

Но из предположенного равенства будем иметь

$$\begin{array}{r} \dfrac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \text{ и т. д.} \\ \hline = \alpha + \mathfrak{A}\alpha x + \mathfrak{B}\alpha x^2 + \mathfrak{C}\alpha x^3 + \mathfrak{D}\alpha x^4 + \text{ и т. д.} \\ + 2\beta \ + 2\mathfrak{A}\beta \ + 2\mathfrak{B}\beta \ + 2\mathfrak{C}\beta + \text{ и т. д.} \\ + 3\gamma \ + 3\mathfrak{A}\gamma + 3\mathfrak{B}\gamma + \text{ и т. д.} \\ + 4\delta \ + 4\mathfrak{A}\delta + \text{ и т. д.} \\ + 5\varepsilon \ + \text{ и т. д.}, \end{array}$$

откуда получаются следующие формулы для определения букв $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д.:

$$\mathfrak{A}=\alpha,$$

$$\mathfrak{B}=\beta+\frac{1}{2}\mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{C}=\gamma+\frac{2}{3}\mathfrak{A}\beta+\frac{1}{3}\mathfrak{B}\alpha,$$

$$\mathfrak{D}=\delta+\frac{3}{4}\mathfrak{A}\gamma+\frac{2}{4}\mathfrak{B}\beta+\frac{1}{4}\mathfrak{C}\alpha,$$

$$\mathfrak{E}=\varepsilon+\frac{4}{5}\mathfrak{A}\delta+\frac{3}{5}\mathfrak{B}\gamma+\frac{2}{5}\mathfrak{C}\beta+\frac{1}{5}\mathfrak{D}\alpha$$

и т. д.

218. Точно так же, если дуга, синус или косинус которой ищется, выражается биномом или полиномом, или даже бесконечным рядом, можно тем же способом выразить её синус или косинус бесконечным рядом. Но чтобы это сделать наиболее удобным образом, нужно не останавливаться на первых дифференциалах, а прибегнуть к помощи вторых дифференциалов. Пусть

$$s=\sin(\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\text{ и т. д.}).$$

Представим себе, что искомый ряд есть

$$s=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}x^2+\mathfrak{C}x^3+\mathfrak{D}x^4+\mathfrak{E}x^5+\text{ и т. д.}$$

В самом деле, известно, что первый член исчезает. Но так как нам предстоит спуститься ко вторым дифференциалам, то нужно определить также и коэффициент $\mathfrak{A}$. Для этого посмотрим, что произойдёт, если x положить бесконечно малым. Тогда дуга будет равна αx, а синус будет равен ей; следовательно, будем иметь $\mathfrak{A}=\alpha$. Положим теперь для краткости

$$z=\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\text{ и т. д.},$$

так что $s=\sin z$. Дифференцируя, будем иметь $ds=dz\cos z$ и, снова дифференцируя, $d^2s=d^2z\cos z-dz^2\sin z$. Так как теперь мы имеем $\sin z=s$ и $\cos z=\frac{ds}{dz}$, то будем иметь

$$d^2s=\frac{ds\,d^2z}{dz}-s\,dz^2 \quad \text{или} \quad dz\,d^2s+s\,dz^3=ds\,d^2z.$$

219. Положим, что дуга z выражается только двучленом и что

$$z=\alpha x+\beta x^2.$$

Тогда

$$dz=(\alpha+2\beta x)\,dx$$

и при постоянном dx

$$d^2z=2\beta\,dx^2$$

и

$$dz^3=(\alpha^3+6\alpha^2\beta x+12\alpha\beta^2x^2+8\beta^3x^3)\,dx^3.$$

Далее, так как $s=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}x^2+\mathfrak{C}x^3+\mathfrak{D}x^4+$ и т. д., то

$$\frac{ds}{dx}=\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}x+3\mathfrak{C}x^2+4\mathfrak{D}x^3+\text{ и т. д.}$$

и

$$\frac{d^2s}{dx^2}=2\mathfrak{B}+6\mathfrak{C}x+12\mathfrak{D}x^2+\text{ и т. д.}$$

Таким образом, мы имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^8}{1\cdot 2\ldots 8} - \text{ и т. д.},$$

что было уже подробно доказано выше [1]).

Первый же ряд, представляющий синус, при $\beta = 0$ и $\alpha = 1$ даст

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\ldots 7} + \text{ и т. д.}$$

221. Из этих хорошо известных рядов для синуса и для косинуса выводятся ряды для тангенса, котангенса, секанса и косеканса какого угодно угла. Тангенс получается, если синус разделить на косинус, котангенс — если косинус разделить на синус, секанс — если радиус *1* разделить на косинус и косеканс — если радиус разделить на синус. Ряды, получающиеся от деления, кажутся весьма неправильными; однако, за исключением ряда, представляющего секанс, остальные можно с помощью определённых выше бернуллиевых чисел свести к простому закону последовательности членов. Действительно, так как выше (§ 127) мы нашли, что

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1\cdot 2} + \frac{\mathfrak{B}u^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\mathfrak{C}u^6}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 6} + \frac{\mathfrak{D}u^8}{1\cdot 2\ldots 8} + \text{ и т. д.} = 1 - \frac{u}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}u,$$

то, полагая $\frac{1}{2}u = x$, будем иметь

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1\cdot 2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 6} - \frac{2^8\mathfrak{D}x^7}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 8} - \text{ и т. д.},$$

если же положить $\frac{1}{2}x$ вместо x, то будем иметь

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2\mathfrak{A}x}{1\cdot 2} - \frac{2\mathfrak{B}x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{2\mathfrak{C}x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{2\mathfrak{D}x^7}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 8} - \text{ и т. д.}$$

222. Отсюда можно выразить рядом и тангенс какой-либо дуги следующим образом. Так как

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

то

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{2\operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

и потому

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x.$$

А так как

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1\cdot 2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1\cdot 2\ldots 6} - \text{ и т. д.},$$

$$2\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{x} - \frac{2^4\mathfrak{A}x}{1\cdot 2} - \frac{2^8\mathfrak{B}x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{2^{12}\mathfrak{C}x^5}{1\cdot 2\ldots 6} - \text{ и т. д.},$$

[1]) «Введение», ч. I, гл. VIII.

Таким образом, мы имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^8}{1 \cdot 2 \ldots 8} - \text{ и т. д.},$$

что было уже подробно доказано выше [1]).

Первый же ряд, представляющий синус, при $\beta = 0$ и $\alpha = 1$ даст

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \ldots 7} + \text{ и т. д.}$$

221. Из этих хорошо известных рядов для синуса и для косинуса выводятся ряды для тангенса, котангенса, секанса и косеканса какого угодно угла. Тангенс получается, если синус разделить на косинус, котангенс — если косинус разделить на синус, секанс — если радиус *1* разделить на косинус и косеканс — если радиус разделить на синус. Ряды, получающиеся от деления, кажутся весьма неправильными; однако, за исключением ряда, представляющего секанс, остальные можно с помощью определённых выше бернуллиевых чисел свести к простому закону последовательности членов. Действительно, так как выше (§ 127) мы нашли, что

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1 \cdot 2} + \frac{\mathfrak{B}u^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\mathfrak{C}u^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 6} + \frac{\mathfrak{D}u^8}{1 \cdot 2 \ldots 8} + \text{ и т. д.} = 1 - \frac{u}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} u,$$

то, полагая $\frac{1}{2} u = x$, будем иметь

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 \mathfrak{A} x}{1 \cdot 2} - \frac{2^4 \mathfrak{B} x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{2^6 \mathfrak{C} x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 6} - \frac{2^8 \mathfrak{D} x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 8} - \text{ и т. д.},$$

если же положить $\frac{1}{2} x$ вместо x, то будем иметь

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} x = \frac{2}{x} - \frac{2 \mathfrak{A} x}{1 \cdot 2} - \frac{2 \mathfrak{B} x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{2 \mathfrak{C} x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{2 \mathfrak{D} x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 8} - \text{ и т. д.}$$

222. Отсюда можно выразить рядом и тангенс какой-либо дуги следующим образом. Так как

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^3 x},$$

то

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{2 \operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

и потому

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x.$$

А так как

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 \mathfrak{A} x}{1 \cdot 2} - \frac{2^4 \mathfrak{B} x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{2^6 \mathfrak{C} x^5}{1 \cdot 2 \ldots 6} - \text{ и т. д.},$$

$$2 \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{x} - \frac{2^4 \mathfrak{A} x}{1 \cdot 2} - \frac{2^8 \mathfrak{B} x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{2^{12} \mathfrak{C}^5}{1 \cdot 2 \ldots 6} - \text{ и т. д.},$$

[1]) «Введение», ч. I, гл. VIII.

то, вычитая второй ряд из первого, будем иметь

$$\operatorname{tg} x = \frac{2^2(2^2-1)\mathfrak{A}x}{1\cdot 2} + \frac{2^4(2^4-1)\mathfrak{B}x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2^6(2^6-1)\mathfrak{C}x^5}{1\cdot 2\ldots 6} + \text{ и т. д.}$$

Если ввести числа A, B, C, D и т. д., найденные в § 182, то будем иметь

$$\operatorname{tg} x = \frac{2Ax}{1\cdot 2} + \frac{2^3Bx^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2^5Cx^5}{1\cdot 2\ldots 6} + \frac{2^7Dx^7}{1\cdot 2\ldots 8} + \text{ и т. д.}$$

223. Косеканс же мы найдём следующим образом. Так как

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} + 2\operatorname{ctg} 2x,$$

то будем иметь

$$\operatorname{ctg}^2 x = 2\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} 2x + 1.$$

Извлекая корень, получим

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{cosec} 2x,$$

откуда

$$\operatorname{cosec} 2x = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x$$

и, положив x вместо $2x$, будем иметь

$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}x - \operatorname{ctg} x.$$

Так как мы уже имеем котангенс, именно

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2\mathfrak{A}x}{1\cdot 2} - \frac{2\mathfrak{B}x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{2\mathfrak{C}x^5}{1\cdot 2\ldots 6} - \text{ и т. д.},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1\cdot 2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1\cdot 2\ldots 6} - \text{ и т. д.},$$

то, вычитая второй ряд из первого, будем иметь

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)\mathfrak{A}x}{1\cdot 2} + \frac{2(2^3-1)\mathfrak{B}x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2(2^5-1)\mathfrak{C}x^5}{1\cdot 2\ldots 6} + \text{ и т. д.}$$

224. Секанс же нельзя выразить через эти бернуллиевы числа; для этого требуются другие числа, а именно числа, которые входят в суммы нечётных обратных степеней. Именно, если положить

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ и т. д.} = \alpha\cdot\frac{\pi}{2^2},$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{ и т. д.} = \frac{\beta}{1\cdot 2}\cdot\frac{\pi^3}{2^4},$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{ и т. д.} = \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{\pi^5}{2^6},$$

$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \text{ и т. д.} = \frac{\delta}{1\cdot 2\ldots 6}\cdot\frac{\pi^7}{2^8},$$

$$1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \frac{1}{9^9} - \text{ и т. д.} = \frac{\varepsilon}{1\cdot 2\ldots 8}\cdot\frac{\pi^9}{2^{10}},$$

$$1 - \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{5^{11}} - \frac{1}{7^{11}} + \frac{1}{9^{11}} - \text{ и т. д.} = \frac{\zeta}{1\cdot 2\ldots 10}\cdot\frac{\pi^{11}}{2^{12}}$$

и т. д.

то будем иметь

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1,\\
\beta &= 1,\\
\gamma &= 5,\\
\delta &= 61,\\
\varepsilon &= 1385,\\
\zeta &= 50\,521,\\
\eta &= 2\,702\,765,\\
\theta &= 199\,360\,981,\\
\iota &= 19\,391\,512\,145,\\
\varkappa &= 2\,404\,879\,661\,671\ ^{1})
\end{aligned}$$

и т. д.

Из этих значений [2]) получим

$$\sec x = \alpha + \frac{\beta}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{\delta}{1\cdot 2\ldots 6}x^6 + \frac{\varepsilon}{1\cdot 2\ldots 8}x^8 - \text{ и т. д.},$$

225. Чтобы доказать эту связь ряда, представляющего секанс, с числами α, β, γ, δ и т. д., рассмотрим ряд

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \text{ и т. д.},$$

с которым мы уже имели дело выше (§ 33). Положим $m = \frac{1}{2}n - k$; тогда будем иметь

$$\frac{\pi}{2n\cos\frac{k}{n}\pi} = \frac{1}{n-2k} + \frac{1}{n+2k} - \frac{1}{3n-2k} - \frac{1}{3n+2k} + \frac{1}{5n-2k} + \text{ и т. д.}$$

Пусть $\frac{k\pi}{n} = x$, т. е. $k\pi = xn$; тогда

$$\frac{\pi}{2n}\sec x = \frac{\pi}{n\pi - 2nx} + \frac{\pi}{n\pi + 2nx} - \frac{\pi}{3n\pi - 2nx} - \frac{\pi}{3n\pi + 2nx} + \text{ и т. д.},$$

или

$$\sec x = \frac{2}{\pi - 2x} + \frac{2}{\pi + 2x} - \frac{2}{3\pi - 2x} - \frac{2}{3\pi + 2x} + \frac{2}{5\pi - 2x} + \text{ и т. д.},$$

или

$$\sec x = \frac{4\pi}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{4\cdot 3\pi}{9\pi^2 - 4x^2} + \frac{4\cdot 5\pi}{25\pi^2 - 4x^2} - \frac{4\cdot 7\pi}{49\pi^2 - 4x^2} + \text{ и т. д.}$$

Если теперь каждый член разложить в ряд, получим

$$\begin{aligned}
\sec x = {} & \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ и т. д.}\right)\\
& + \frac{2^4x^2}{\pi^3}\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{ и т. д.}\right)\\
& + \frac{2^6x^4}{\pi^5}\left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{ и т. д.}\right)\\
& \text{и т. д.}
\end{aligned}$$

Если вместо этих рядов подставить введённые выше значения, то получится тот ряд для секанса, который мы выше привели.

---

[1]) Истинное значение $\varkappa$ есть 2 404 879 675 441. (*Г. К.*)

[2]) Числа α, β, γ, δ, и т. д. называются теперь эйлеровыми числами. (*Г. К.*)

226. Отсюда тотчас же обнаруживается закон, по которому следуют друг за другом числа α, β, γ, δ и т. д., участвующие в выражениях сумм нечётных обратных степеней. Действительно, так как

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \alpha + \frac{\beta}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \frac{\delta}{1 \cdot 2 \ldots 6} x^6 + \text{ и т. д.},$$

то необходимо, чтобы этот ряд был равен дроби

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \ldots 6} + \frac{x^8}{1 \cdot 2 \ldots 8} - \text{ и т. д.}};$$

приравняв их, получим

$$\begin{aligned}
1 = \alpha + \frac{\beta}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \frac{\delta}{1 \cdot 2 \ldots 6} x^6 + \frac{\varepsilon}{1 \cdot 2 \ldots 8} x^8 + \text{ и т. д.} \\
- \frac{\alpha}{1 \cdot 2} - \frac{\beta}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} - \frac{\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 1 \ldots 4} - \frac{\delta}{1 \cdot 2 \cdot 1 \ldots 6} - \text{ и т. д.} \\
+ \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\beta}{1 \ldots 4 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{\gamma}{1 \ldots 4 \cdot 1 \ldots 4} + \text{ и т. д.} \\
- \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \ldots 6} - \frac{\beta}{1 \ldots 6 \cdot 1 \cdot 2} - \text{ и т. д.} \\
+ \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \ldots 8} + \text{ и т. д.},
\end{aligned}$$

откуда вытекают следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1, \\
\beta &= \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \alpha, \\
\gamma &= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \beta - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha, \\
\delta &= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \gamma - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \beta + \frac{6 \ldots 1}{1 \ldots 6} \alpha, \\
\varepsilon &= \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \delta - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \gamma + \frac{8 \ldots 3}{1 \ldots 6} \beta - \frac{8 \ldots 1}{1 \ldots 8} \alpha
\end{aligned}$$

и т. д.

Из этих формул нами и найдены те значения этих букв, которые приведены в § 224 и с помощью которых можно выразить суммы рядов, имеющих вид

$$1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \text{ и т. д.},$$

если n есть нечётное число.

ГЛАВА IX

О ПРИМЕНЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ

227. Выше было уже достаточно выяснено, что понятие уравнения можно свести к понятию функции[1]). В самом деле, пусть y есть какая-либо функция от x. Если мы положим $y=0$, то эта формула будет охватывать всевозможные конечные уравнения, как алгебраические, так и трансцендентные. Говорят, что уравнение $y=0$ решено, если найдено такое значение x, которое, будучи подставлено в функцию y, делает её на самом деле равной нулю. Часто существует несколько такого рода значений x. Они называются корнями уравнения $y=0$. Итак, если положим, что числа f, g, h, i и т. д. суть корни уравнения $y=0$, то функция y составлена таким образом, что, если в неё вместо x подставить либо f, либо g, либо h и т. д., получится на самом деле $y=0$.

228. Так как функция y исчезает, если в неё вместо x подставить f, т. е. $x+(f-x)$, где f есть корень уравнения $y=0$, то на основании того, что выше (§ 48) было доказано о функциях, мы будем иметь

$$0=y+\frac{(f-x)\,dy}{dx}+\frac{(f-x)^2\,d^2y}{2\,dx^2}+\frac{(f-x)^3\,d^3y}{6\,dx^3}+\text{ и т. д.}$$

Из этого уравнения значение f корня $y=0$ определяется так, что какое бы число мы ни подставили вместо x, мы всегда, подставив соответствующие значения y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{2\,dx^2}$ и т. д., получим уравнение, дающее истинное значение f. Чтобы это было понятнее, положим, что

$$y=x^3-2x^2+3x-4;$$

тогда будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-4x+3,\quad \frac{d^2y}{2\,dx^2}=3x-2\quad\text{и}\quad \frac{d^3y}{6\,dx^3}=1.$$

Подставив эти значения, получим

$$0=x^3-2x^2+3x-4+(f-x)(3x^2-4x+3)+(f-x)^2(3x-2)+(f-x)^3.$$

---

[1]) В оригинале: Constitutionem aequationum ad functianum rationem reduci posse supra iam satis ostensum est. Мне неясно, на какое место «Дифференциального исчисления» или «Введения в анализ» здесь ссылается Эйлер. Во всяком случае в следующих строках вопрос освещён с достаточной полнотой.

Или, выполнив умножения,

$$f^3-2f^2+3f-4=0,$$

т. е. мы получаем уравнение, сходное с предложенным; оно, следовательно, имеет те же корни.

229. Хотя таким образом мы не приходим к новому уравнению, из которого можно было бы легче определить значение корня f, однако отсюда можно вывести очень полезные вспомогательные приёмы для разыскания корней. Действительно, если мы примем за x значение, которое уже близко подходит к корню какого-либо уравнения, так что $f-x$ есть очень малое количество, тогда члены уравнения

$$0=y+\frac{(f-x)\,dy}{dx}+\frac{(f-x)^2\,d^2y}{2\,dx^2}+\frac{(f-x)^3\,d^3y}{6\,dx^3}+\text{ и т. д.}$$

образуют очень быстро сходящийся ряд. Поэтому мы не допустим большой погрешности, если отбросим все члены, кроме двух начальных. Итак, если за x принять значение, которое уже приближённо равно корню какого-либо уравнения $y=0$, то мы будем иметь приближённо

$$0=y+\frac{(f-x)\,dy}{dx}\quad\text{или}\quad f=x-\frac{y\,dx}{dy}.$$

Из этой формулы мы найдём, хотя и не точное, но ещё более близкое к истинному, значение корня f. Подставив его снова вместо x, мы получим гораздо более точное значение f и, продолжая поступать таким же образом, будем подходить к истинному значению корня.

230. Так можно находить прежде всего корни всех степеней из каких-либо чисел. Действительно, пусть предложено число a^n+b, и требуется извлечь из него корень степени n. Положим $x^n=a^n+b$, т. е. $x^n-a^n-b=0$, так что $y=x^n-a^n-b$; тогда будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1};\quad \frac{d^2y}{2\,dx^2}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2},\quad \frac{d^3y}{6\,dx^3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\quad\text{и т. д.}$$

Следовательно, если искомый корень положим равным f, так что $f=\sqrt[n]{a^n+b}$, то будем иметь

$$0=x^n-a^n+b+n(f-x)\,x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(f-x)^2\,x^{n-2}+\text{ и т. д.}$$

Если теперь мы возьмём вместо f число, которое приближённо равно искомому корню, что будет, когда мы положим $x=a$, если только b есть столь малое число, что $a^n+b<(a+1)^n$, то будем иметь приближённо $b=na^{n-1}(f-a)$, и потому

$$f=a+\frac{b}{na^{n-1}},$$

что даёт нам гораздо более точное значение корня. Если же мы пожелаем взять ещё и третий член, так что

$$b=na^{n-1}(f-a)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}(f-a)^2,$$

то получим

$$(f-a)^2=-\frac{2a}{n-1}(f-a)+\frac{2b}{n(n-1)\,a^{n-2}}$$

и, значит,

$$f = a - \frac{a}{n-1} \pm \sqrt{\frac{a^2}{(n-1)^2} + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}}$$

или

$$f = \frac{(n-2)a + \sqrt{a^2 + 2(n-1)b : na^{n-2}}}{n-1}.$$

Таким образом, с помощью извлечения квадратного корня мы найдём ещё более точное значение корня.

Пример

Найдём квадратный корень из какого-либо числа c, т. е. пусть $x^2 - c = y$.

Возьмём число, близкое к корню и равное a, и положим $b = c - a^2$. Так как $a^2 + b = c$, то, поскольку $n = 2$, первая формула даёт $f = a + \frac{c-a^2}{2a} = \frac{c+a^2}{2a}$; вторая же даёт $f = \sqrt{c}$; это есть сам искомый корень. Так как теперь мы имеем приближённое значение корня, равное $\frac{c+a^2}{2a}$, то напишем это значение вместо a и тогда получим более точное значение корня $f = \frac{c^2+6a^2c+a^4}{4a(c+a^2)}$. Пусть, например, $c = 5$; из первой формулы будем иметь $f = \frac{5}{2a} + \frac{a}{2}$. Положив $a = 2$, будем иметь $f = 2{,}25$; теперь положим $a = 2{,}25$; получим $f = 2{,}236\,111$; положим далее $a = 2{,}236\,111\,1$; тогда будем иметь $f = 2{,}236\,067\,9$; это значение уже очень мало отличается от истинного.

231. Подобным же образом можно приближённо найти корень какого угодно уравнения с помощью уравнения $f = x - \frac{y\,dx}{dy}$, приняв сначала за x значение, мало отличающееся от какого-либо корня уравнения. А для того чтобы найти такое значение x, будем подставлять вместо x последовательно различные значения и из них выберем такое, которое даст функции наименьшее, т. е. наиболее близкое к нулю, значение. Так, пусть

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4.$$

Тогда

полагая	получаем
$x = 0$,	$y = -4$,
$x = 1$,	$y = -2$,
$x = 2$,	$y = +2$,

откуда можно видеть, что корень содержится между значениями 1 и 2 количества x. Так как теперь мы имеем $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 3$, то для разыскания корня f уравнения $x^3-2x^2+3x-4=0$ мы получим следующее уравнение:

$$f=x-\frac{y\,dx}{dy}=x-\frac{x^3-2x^2+3x-4}{3x^2-4x+3}.$$

Пусть $x=1$; тогда $f=1+\frac{2}{2}=2$. Положим теперь $x=2$; тогда будем иметь $f=2-\frac{2}{7}=\frac{12}{7}$. Пусть, следовательно, $x=\frac{12}{7}$; тогда $f=\frac{12}{7}-\frac{104}{1701}=$ $=\frac{2812}{1701}=1{,}653$. Если мы захотим итти дальше, то будет лучше воспользоваться логарифмами.

Итак, положим $x=1{,}653$; тогда

$\mathrm{l}\,x=$	$0{,}218\,272\,9$	$x=$	$1{,}653\,000$
$\mathrm{l}\,x^2=$	$0{,}436\,545\,8$	$x^2=$	$2{,}732\,409$
$\mathrm{l}\,x^3=$	$0{,}654\,818\,4$	$x^3=$	$4{,}516\,673$
$x^3=$	$4{,}516\,673$		
$3x=$	$4{,}959\,000$		
$x^3+3x=$	$9{,}475\,673$	$3x^2+3=$	$11{,}197\,227$
$2x^2+4=$	$9{,}464\,818$	$4x=$	$6{,}612\,000$
числитель $=$	$0{,}010\,855$	знам. $=$	$4{,}585\,227$
l числ. $=$	$8{,}035\,629\,8$		
l знам. $=$	$0{,}661\,360\,8$	$x=$	$1{,}653\,000$
l дроби $=$	$7{,}374\,269\,0$	дробь $=$	$0{,}002\,367$
		$f=$	$1{,}650\,633$

Это значение уже очень близко к истинному.

232. Можно, однако, вывести из общего выражения более быстрые приближения. В самом деле, было найдено, что если корень какого-либо уравнения $y=0$ есть $x=f$, то

$$0=y+\frac{(f-x)\,dy}{dx}+\frac{(f-x)^2\,d^2y}{2\,dx^2}+\frac{(f-x)^3\,d^3y}{6\,dx^3}+\text{ и т. д.}$$

Пусть $f-x=z$, так что корень есть $f=x+z$, и положим

$$\frac{dy}{dx}=p,\quad \frac{dp}{dx}=q,\quad \frac{dq}{dx}=r,\quad \frac{dr}{dx}=s\text{ и т. д.}$$

Тогда

$$0=y+zp+\frac{z^2q}{2}+\frac{z^3r}{6}+\frac{z^4s}{24}+\frac{z^5t}{120}+\text{ и т. д.}$$

В этом уравнении нужно, взяв за x какое-либо значение, которое вместе с тем определяет значения y, p, q, r, s и т. д., найти количество z. Если оно будет найдено, то мы будем иметь корень $f=x+z$ предложенного уравнения $y=0$. Дело сводится, таким образом, к тому, чтобы найти отсюда наиболее удобным образом значение неизвестного z.

233. Вообразим, что z представлено таким сходящимся рядом

$$z=A+B+C+D+E+\text{ и т. д.}$$

После подстановки будем иметь

$$\begin{array}{llllll}
y = y & & & & & \\
pz = Ap + Bp & + Cp & + Dp & + Ep & + & \text{и т. д.} \\
\frac{1}{2} qz^2 = \quad + \frac{1}{2} A^2q + ABq & + ACq & + ADq & & + & \text{и т. д.} \\
 & + \frac{1}{2} B^2q & + Bcq & & + & \text{и т. д.} \\
\frac{1}{6} rz^3 = & + \frac{1}{6} A^3r + \frac{1}{2} A^2Br & + \frac{1}{2} A^2Cr & & + & \text{и т. д.} \\
 & & + \frac{1}{2} AB^2r & & + & \text{и т. д.} \\
\frac{1}{24} sz^4 = & & \frac{1}{24} A^4s + \frac{1}{6} A^3Bs & & + & \text{и т. д.} \\
\frac{1}{120} tz^5 = & & & \frac{1}{120} A^5t & + & \text{и т. д.}
\end{array}$$

Отсюда получаем следующие уравнения:

$$A = -\frac{y}{p},$$

$$B = -\frac{y^2q}{2p^3},$$

$$C = -\frac{y^3q^2}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4},$$

$$D = -\frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5}$$

и т. д.

и, значит, будем иметь

$$z = -\frac{y}{p} - \frac{y^2q}{2p^3} - \frac{y^3q^2}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4} - \frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5} - \text{ и т. д.}$$

Пример

Пусть предложено уравнение $x^5 + 2x - 2 = 0$.

Мы будем, следовательно, иметь

$$y = x^5 + 2x - 2, \quad \frac{dy}{dx} = p = 5x^4 + 2, \quad \frac{dp}{dx} = q = 20x^3,$$

$$\frac{dq}{dx} = r = 60x^2, \quad \frac{dr}{dx} = s = 120x \text{ и т. д.}$$

Положим теперь $x = 1$, ибо это значение мало отличается от корня. Будем иметь

$$y = 1, \quad p = 7, \quad q = 20, \quad r = 60, \quad s = 120,$$

откуда получаем

$$z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{200}{7^5} + \frac{10}{7^4} - \frac{5 \cdot 1000}{7^7} + \frac{500}{7^6} - \frac{5}{7^5} + \text{ и т. д.}$$

или

$$z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{130}{7^5} - \frac{1745}{7^7} - \text{ и т. д.}$$

Следовательно, будем иметь $z = -0{,}18$ и корень $f = 0{,}82$; если это значение снова подставить вместо x, то получится корень, чрезвычайно близкий к истинному.

234. Таким образом, мы нашли бесконечный ряд, который выражает корень какого угодно уравнения; он имеет, однако, то неудобство что, с одной стороны, не виден закон его составления, с другой же стороны, он слишком сложен и недостаточно пригоден для пользования. Поэтому мы предпримем то же исследование другим способом и найдём более правильный ряд, выражающий корень какого угодно предложенного уравнения.

Пусть, как прежде, предложено уравнение $y=0$, где y есть какая-либо функция от x; вопрос сводится к тому, чтобы определить значение количества x, которое, будучи подставлено вместо x, сделало бы функцию y равной нулю. Но так как y есть функция от x, то и обратно, можно рассматривать x как функцию от y, и с этой точки зрения разысканию подлежит то значение функции x, которое она получает, когда количество y исчезает. Таким образом, если положим, что f есть то значение количества x, которое является корнем уравнения $y=0$, то поскольку x переходит в f, если положить $y=0$, мы будем иметь по доказанному выше (§ 67)

$$f=x-y\frac{dx}{dy}+\frac{y^2\,d^2x}{2dy^2}-\frac{y^3\,d^3x}{6dy^3}+\frac{y^4\,d^4x}{24dy^4}-\text{ и т. д.}$$

В этом уравнении дифференциал dy полагается постоянным. Если положить

$$\frac{dx}{dy}=p,\quad \frac{dp}{dy}=q,\quad \frac{dq}{dy}=r,\quad \frac{dr}{dy}=s\text{ и т. д.,}$$

то, введя эти обозначения, чтобы не связывать себя выбором постоянного дифференциала, будем иметь

$$f=x-py+\frac{1}{2}qy^2-\frac{1}{6}ry^3+\frac{1}{24}sy^4-\frac{1}{120}ty^5+\text{ и т. д.}$$

235. Если количеству x приписать какое-либо значение, то тем самым определятся и значения количеств p, q, r, s и т. д., а, найдя их, мы будем иметь бесконечный ряд, выражающий значение корня f. Если же уравнение $y=0$ имеет несколько корней, то они получаются когда вместо x мы возьмём различные значения, а так как y может принимать одно и то же значение, когда x мы даём различные значения, то неудивительно, что один и тот же ряд часто может давать несколько значений. Для того чтобы в этих случаях устранить возможность сомнений, и в то же время чтобы сделать ряд сходящимся, нужно принимать за x такое значение, которое уже близко подходит к значению искомого корня. Тогда значение y станет весьма малым, и члены ряда будут быстро убывать, так что, взяв небольшое число членов, мы найдём для f значение, которое уже достаточно близко к истинному. Если теперь это значение снова подставить вместо x, то количество y станет ещё меньшим, ряд будет сходиться ещё быстрее, и таким образом мы теперь найдём корень f столь точно, что погрешность будет ничтожно малой.

236. Положим, что требуется извлечь корень степени n из какого-либо числа N. Если взять ближайшую n-ю степень, то предложенное число легко представляется в виде $N=a^n+b$. Таким образом, мы будем иметь

$$x^n=a^n+b\quad\text{и}\quad y=x^n-a^n-b,$$

откуда

$$dy = nx^{n-1}dx \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{nx^{n-1}},$$

$$dp = -\frac{(n-1)\,dx}{nx^n} \quad \text{и} \quad \frac{dp}{dy} = q = -\frac{n-1}{n^2x^{2n-1}},$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)\,dx}{n^2x^{2n}} \quad \text{и} \quad \frac{dq}{dy} = r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}},$$

$$dr = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)\,dx}{n^3x^{3n}} \quad \text{и} \quad \frac{dr}{dy} = s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n-1}}$$

и т. д.

Положим теперь $x = a$; тогда $y = -b$ и искомый корень $f = \sqrt[n]{a^n + b}$ выразится следующим образом:

$$f = a + \frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)\,b^2}{n\cdot 2na^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)\,b^3}{n\cdot 2n\cdot 3na^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{n\cdot 2n\cdot 3n\cdot 4n\cdot a^{4n-1}} + \text{и т. д.}$$

Таким образом, мы находим тот самый ряд, который обычно получается разложением бинома.

237. Выполняя извлечение корня, мы нашли приближённый корень a и вместе с тем остаток b; теперь нужно, чтобы получить более точный корень, прибавить к корню a значение дроби $\frac{b}{na^{n-1}}$. При этом

$$a^{n-1} = \frac{N-b}{a},$$

так как $N = a^n + b$. Однако найденный таким образом корень больше истинного, так как нужно ещё отнять третий член. Поэтому, чтобы с помощью деления остатка b найти корень, ещё более близкий к истинному, нужно найти более удобный делитель; предположим, что он есть

$$na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \text{и т. д.}$$

А так как должно быть

$$\frac{b}{na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \text{и т. д.}} =$$
$$= \frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)\,b^2}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)\,b^3}{6n^3a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)\,b^4}{24n^4a^{4n-1}} + \text{и т. д.},$$

то, выполнив умножение на $na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + $ и т. д., получим

$$\begin{aligned} b = b &- \frac{(n-1)\,b^2}{2na^n} + \frac{(n-1)(2n-1)\,b^3}{6n^2-a^{2n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)\,b^4}{24n^3a^{3n}} + \text{и т. д.}\\ &+ \frac{\alpha b^2}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)\,\alpha b^3}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)\,\alpha b^4}{6n^3a^{3n-1}} + \\ &\qquad + \frac{\beta b^3}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)\,\beta b^4}{2n^2a^{2n-1}} + \\ &\qquad\qquad + \frac{\gamma b^4}{na^{n-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда выводятся следующие уравнения, определяющие α, β, γ и т. д.

$$\alpha = \frac{n-1}{2a},$$

$$\beta = \frac{(n-1)\,\alpha}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6na^{n+1}} = -\frac{(n-1)(n+1)}{12na^{n+1}},$$

$$\gamma = \frac{(n-1)\,\beta}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)\,\alpha}{6n^2a^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^2a^{2n+1}} = \frac{(n-1)(n+1)}{24na^{2n+1}}.$$

Таким образом, дробь, которую нужно прибавить к ранее найденному корню a, будет

$$\frac{b}{na^{n-1}+\frac{(n-1)b}{2a}-\frac{(n^2-1)b^2}{12na^{n+1}}+\frac{(n^2-1)b^3}{24na^{2n+1}}-\text{и т. д.}}.$$

238. Таким образом, если нужно извлечь квадратный корень из числа N, и если уже найдено приближённое значение корня a, а также остаток b, то к найденному корню нужно добавить частное от деления остатка b на

$$2a+\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{8a^3}+\frac{b^3}{16a^5}-\text{ и т. д.}$$

Если же нужно извлечь кубический корень, то остаток b нужно разделить на

$$3a^2+\frac{b}{a}-\frac{2b^2}{9a^4}+\frac{b^3}{9a^7}-\text{ и т. д.}$$

Применение этих формул мы поясним на следующих примерах.

Пример 1

Пусть извлекается квадратный корень из числа 200.

Положим $N=200$; так как ближайший квадрат есть 196, то будем иметь $a=14$ и остаток $b=4$; его нужно, следовательно, разделить на

$$28+\frac{1}{7}-\frac{1}{7\cdot 196}+\frac{1}{7\cdot 196\cdot 98},$$

так что делитель будет равен 28,142135. Если на него разделить 4, то получим десятичную дробь, которая должна быть прибавлена к 14 и которая будет верна в десятом знаке и в дальнейших.

Пример 2

Пусть извлекается кубический корень из числа $N=10$.

Ближайший куб есть 8, и остаток равен 2, откуда имеем $a=2$ и $b=2$, делитель же равен $12+1-\frac{1}{18}=12{,}9444$. Поэтому искомый кубический корень приближённо равен,

$$2\frac{2}{12\cdot 9444}=2\frac{10\,000}{64\,722}.$$

239. Ряд, найденный нами для корня, можно считать как бы рекуррентным, происшедшим из некоторой дроби; таким образом, большое число членов ряда можно заменить гораздо меньшим числом членов, составляющих числитель и знаменатель дроби. Так, при некотором внимании можно заметить, что приближённо мы имеем

$$(a+b)^n=a^n-\frac{a+\frac{n+1}{2}b}{a-\frac{n-1}{2}b},$$

а ещё более точно,

$$(a+b)^n=a^n-\frac{a^2+\frac{n+2}{2}ab+\frac{(n+1)(n+2)}{12}b^2}{a^2-\frac{n-2}{2}ab+\frac{(n-1)(n-2)}{12}b^2}.$$

Подобным образом, если ввести большее число членов, можно получить ещё более точные дроби, как, например,

$$(a+b)^n = a^n \frac{a^3 + \frac{n+3}{2} a^2 b + \frac{(n+3)(n+2)}{10} ab^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{120} b^3}{a^3 - \frac{n-3}{2} a^2 b + \frac{(n-3)(n-2)}{10} ab^2 - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{120} b^3}.$$

Более того, можно получить общую формулу подобного рода; для того чтобы представить её в удобном виде, положим

$$A = \frac{m(n+m)}{1\cdot 2m}, \qquad \mathfrak{A} = \frac{m(n-m)}{1\cdot 2m},$$

$$B = \frac{(m-1)(n+m-1)}{2(2m-1)} A, \qquad \mathfrak{B} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{2(2m-1)} \mathfrak{A},$$

$$C = \frac{(m-2)(n+m-2)}{3(2m-2)} B, \qquad \mathfrak{C} = \frac{(m-2)(n-m+2)}{3(2m-2)} \mathfrak{B},$$

$$D = \frac{(m-3)(n+m-3)}{4(2m-3)} C \qquad \mathfrak{D} = \frac{(m-3)(n-m+3)}{4(2m-3)} \mathfrak{C}$$

и т. д. и т. д.

После того как эти значения определены, будем иметь

$$(a+b)^n = a^n \frac{a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + \text{и т. д.}}{a^m - \mathfrak{A}a^{m-1}b + \mathfrak{B}a^{m-2}b^2 + \mathfrak{C}a^{m-3}b^3 + \text{и т. д.}}$$

240. Если подставить вместо n дробное число, то эти формулы будут весьма удобны для приближённого извлечения корня. Так, если нужно извлечь корень какой-либо степени из выражения $a^n + b$, то можно воспользоваться следующими формулами:

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a\,\frac{2na^n + (n+1)b}{2na^n + (n-1)b},$$

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a\,\frac{12n^2a^{2n} + 6n(2n+1)a^n b + (2n+1)(n+1)b^2}{12n^2a^{2n} + 6n(2n-1)a^n b + (2n-1)(n-1)b^2}.$$

Если же положить $a^n + b = N$, так что $a^n = N - b$, то будем иметь

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a\,\frac{2nN - (n-1)b}{2nN - (n+1)b},$$

$$(a^n+b)^{\frac{1}{n}} = a\,\frac{12n^2N^2 - 6n(2n-1)Nb + (2n-1)(n-1)b^2}{12n^2N^2 - 6n(2n+1)Nb + (2n+1)(n+1)b^2}.$$

241. Общая формула для разыскания корня какого-либо уравнения применяется к уравнениям, имеющим несколько членов, совершенно так же, как обычная формула бинома к решению чистых уравнений $x^n = c$. Притом в этом случае общая формула переходит в формулу бинома. Но наше общее выражение с одинаковым успехом применяется и тогда, когда уравнение является многочленным[1]), или даже трансцендентным, и даёт бесконечный ряд, который выражает значение корня. Так как именно в этих случаях и сказывается вся сила этой общей формулы, то мы покажем здесь несколько подробнее способ её применения. Пусть, например, предложено многочленное уравнение, состоящее из трёх членов:

$$x^n + cx = N,$$

[1]) В оригинале: si . . . aequatio fuerit affecta.

где c и N суть какие-либо данные выражения. Положим $x^n + cx - N = y$; тогда $dy = (nx^{n-1} + c)\, dx$, откуда $p = \frac{1}{nx^{n-1} + c}$; таким образом, мы имеем

$$dp = -\frac{n(n-1)x^{n-2}\,dx}{(nx^{n-1}+c)^2} \quad \text{и} \quad q = \frac{-n(n-1)x^{n-2}}{(nx^{n-1}+c)^3}.$$

Так как $r = \frac{dq}{dy}$, $s = \frac{dr}{dy}$ и т. д., то подобным образом находим

$$r = \frac{n^2(n-1)(2n-1)x^{2n-4} - n(n-1)(n-2)cx^{n-3}}{(nx^{n-1}+c)^5},$$

$$s = \frac{-n^3(n-1)(3n-1)(2n-1)x^{3n-6} + 4n^2(n-1)(n-2)(2n-1)cx^{2n-5}}{(nx^{n-1}+c)^7} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)c^2x^{n-4}}{(nx^{n-1}+c)^7};$$

$$t = \frac{\left(\begin{array}{l} n^4(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)x^{4n-8} - \\ -n^3(n-1)(n-2)(2n-1)(29n-11)cx^{3n-7} + \\ +n^2(n-1)(n-2)(2n-1)(11n-29)c^2x^{2n-6} - \\ -n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)c^3x^{n-5} \end{array}\right)}{(nx^{n-1}+c)^9}$$

и т. д.

После того как найдены эти значения, корень предложенного уравнения представится в виде

$$f = x - py + \frac{1}{2}qy^2 - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ty^5 + \text{и т. д.}$$

Какое бы число мы ни подставили вместо x, — после этого и буквы y, p, q, r, s и т. д. получат определённые значения, — сумма ряда будет равна значению одного из корней.

Пример 1

Пусть предложено уравнение $x^3 + 2x = 2$.

Здесь $c = 2$, $N = 2$, $n = 3$ и $y^3 + 2x - 2$.

Положим $x = 1$; тогда $y = 1$ и

$$p = \frac{1}{5}, \quad q = -\frac{6}{5^3}, \quad r = \frac{78}{5^5}\text{[1]}, \quad s = -\frac{16\cdot 90}{5^7} \text{ и т. д.}$$

Корень уравнения будет

$$f = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{5^3} - \frac{60}{5^7} - \text{и т. д.} = 0{,}771072\text{[1]}.$$

Положим теперь $x = 0{,}77$; так как $y = x^3 + 2x - 2$, то

$$p = \frac{1}{3x^2+2}, \quad q = -6p^3x, \quad r = 90x^2p^5 - 12p^5$$

и

$$s = -2160\,p^7x^3 + 720p^7x.$$

---

[1]) В первом издании $r = \frac{84}{5^5}$, $f = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{5^3} - \frac{14}{5^5} - \frac{60}{5^7} - \text{и т. д.} = 0{,}770\,751$.

Логарифмируя, будем иметь:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{l}\,x = 9{,}886\,490\,7 & x = 0{,}77 \\
\mathrm{l}\,x^2 = 9{,}772\,981\,4 & x^2 = 0{,}592\,9 \\
\mathrm{l}\,x^3 = 9{,}659\,472\,1 & x^3 = 0{,}456\,533 \\
 & 2x = 1{,}54 \\
\hline
 & x^3 + 2x = 1{,}996\,533 \\
 & y = -0{,}003\,467
\end{array}$$

Следовательно.

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{l}\,(-y) = 7{,}539\,953\,8 & 3x^2 + 2 = 3{,}7787 \\
\mathrm{l}\,p = 9{,}422\,657\,5 & \mathrm{l}\,(3x^2 + 2) = 0{,}577\,342\,4 \\
\mathrm{l}\,(-py) = 6{,}962\,611\,3 & -py = 0{,}000\,917\,511 \\
\hline
\mathrm{l}\,p^3 = 8{,}267\,972\,5 & \\
\mathrm{l}\,x = 9{,}886\,490\,7 & \\
\mathrm{l}\,3 = 0{,}477\,121\,3 & \\
\mathrm{l}\,y^2 = 5{,}079\,907\,6 & \\
\hline
\mathrm{l}\left(-\frac{1}{2}qy^2\right) = 3{,}711\,492\,1 & -\frac{1}{2}qy^2 = 0{,}000\,000\,514
\end{array}$$

Следовательно, корень $f = 0{,}770\,916\,997$, что лишь в последнем знаке может содержать ошибку.

Пример 2

Пусть предложено уравнение $x^4 - 2x^2 + 4x = 8$.

Положим $y = x^4 - 2x^2 + 4x - 8$; будем иметь

$$dy = 4dx\,(x^3 - x + 1), \quad p = \frac{1}{4\,(x^3 - x + 1)}, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{-3x^2 + 1}{4\,(x^3 - x + 1)^2};$$

следовательно,

$$q = \frac{-3x^2 + 1}{16\,(x^3 - x + 1)^3}, \quad \frac{dq}{dx} = \frac{21x^4 - 12x^2 - 6x + 3}{16\,(x^3 - x + 1)^4} \quad \text{и} \quad r = \frac{21x^4 - 12x^2 - 6x + 3}{64\,(x^3 - x + 1)^5} \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда будем иметь корень предложенного уравнения

$$f = x - \frac{y}{4\,(x^3 - x + 1)} - \frac{(3x^2 - 1)\,y^2}{32\,(x^3 - x + 1)^3} - \frac{(7x^4 - 4x^2 - 2x + 1)\,y^3}{128\,(x^3 - x + 1)^5} - \text{ и т. д.}$$

Теперь нужно дать количеству x удобное значение, чтобы наш ряд стал сходящимся. Прежде всего ясно, что если количеству дать такое значение, при котором $x^3 - x + 1 = 0$, то все члены ряда, кроме первого, станут бесконечными, и значит, мы не сможем получить никакого результата. Следовательно, нужно дать количеству x такое значение, чтобы y оказалось малым, а $x^3 - x + 1$ не слишком малым. Пусть $x = 1$; тогда $y = -5$ и

$$f = 1 + \frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64} - \text{ и т. д.}$$

Так как три члена $\frac{5}{4}$, $-\frac{25}{16}$, $+\frac{125}{64}$ образуют геометрическую прогрессию, сумма которой есть $\frac{5}{9}$, то приближённо будем иметь $f = \frac{14}{9}$. Положим поэтому $x = \frac{3}{2}$; будем иметь

$$y = -\frac{23}{16} \quad \text{и} \quad x^3 - x + 1 = \frac{23}{8},$$

откуда

$$f = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} + \frac{391}{256 \cdot 529} - \text{ и т. д. } = 1{,}61 \text{ [1]}.$$

Положим теперь $x = 1{,}61$; тогда будем иметь

$\mathrm{l}\, x = 0{,}206\,825\,9$		$x = 1{,}61$ Пусть $x^3 - x + 1 = z$
$\mathrm{l}\, x^2 = 0{,}413\,651\,8$		$x^2 = 2{,}502\,1$
$\mathrm{l}\, x^3 = 0{,}620\,477\,7$		$x^3 = 4{,}173\,281$
$\mathrm{l}\, x^4 = 0{,}827\,303\,6$		$x^4 = 6{,}718\,983$;
$\mathrm{l}\,(-y) = 8{,}401\,693\,4$	отсюда	
$\mathrm{l}\, z = 0{,}551\,850\,2$		$y = -0{,}025\,217$
		$z = \quad 3{,}563\,281$
$\mathrm{l}\left(\frac{-y}{z}\right) = 7{,}849\,843\,2$		
$\mathrm{l}\, 4 = 0{,}602\,060\,0$		
$\mathrm{l}\, \frac{-y}{4z} = 7{,}247\,783\,2$		$\frac{y}{4z} = 0{,}001\,769\,2$
$\mathrm{l}\,(3x^2 - 1) = 0{,}830\,992\,6$		$3x^2 1 = 6{,}7763$
$\mathrm{l}\, y^2 = 6{,}803\,386\,8$		
$7{,}634\,379\,4$		
$\mathrm{l}\, z^3 = 1{,}655\,550\,6$		
$5{,}978\,828\,8$		
$\mathrm{l}\, 32 = 1{,}505\,150\,0$		$\frac{(3x^2-1)\,y^2}{32z^3} = 0{,}000\,002\,976.$
$4{,}473\,678\,8$		

Следовательно, $f = 1{,}611\,766\,2$ [2].

242. Этот метод разыскания приближённых корней уравнения таким же образом применим и к трансцендентным количествам. Пусть, например, мы ищем число x, логарифм которого, взятый по какому-либо основанию, относится к самому числу, как 1 к n. Тогда мы получаем уравнение $x - n\,\mathrm{l}\,x = 0$. Пусть k есть модуль этих логарифмов, так что эти логарифмы можно получить умножением гиперболических логарифмов на k. Тогда будем иметь $d\,\mathrm{l}\,x = \frac{k\,dx}{x}$. Положим, следовательно, $x - n\,\mathrm{l}\,x = y$ и пусть f есть искомое значение количества x, при котором $x = n\,\mathrm{l}\,x$. Тогда будем иметь

$$dy = dx - \frac{kn\,dx}{x} = \frac{dx\,(x - kn)}{x}$$

[1]) В первом издании $f = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} + \frac{407}{256 \cdot 529}$ — и т. д. $= 1{,}61$. Исправил Г. Ковалевский.

[2]) В первом издании $\mathrm{l}\, 32 = \frac{1{,}204\,120\,0}{4{,}774\,708\,8} \left| \frac{(3x^2-1)\,y^2}{32z^3} \right. = 0{,}000\,005\,952$. Следовательно, $f = 1{,}611\,763\,2$. (*Г. К.*)

и

$$\frac{dx}{dy}=p=\frac{x}{x-kn}, \quad \text{откуда} \quad dp=-\frac{kn\,dx}{(x-kn)^2};$$

следовательно,

$$\frac{dp}{dy}=q=\frac{-knx}{(x-kn)^3}, \quad dq=\frac{2knx\,dx+k^2n^2dx}{(x-kn)^4},$$

$$\frac{dq}{dy}=r=\frac{knx(2x+kn)}{(x-kn)^5} \quad \text{и т. д.}$$

Поэтому мы получаем

$$f=x-\frac{xy}{x-kn}-\frac{knxy^2}{2(x-kn)^3}-\frac{knxy^3(2x+kn)}{6(x-kn)^5}-\text{ и т. д.}$$

Ниже (§ 272) мы покажем, что эта задача имеет решение лишь в том случае, если $kn>e$, где e есть число, гиперболический логарифм которого равен 1, т. е. должно быть $kn>2{,}718\,281\,8$.

Пример

Пусть ищется число, неравное 10, табличный логарифм которого равен десятой части самого числа.

Так как в задаче речь идёт о табличных логарифмах, то будем иметь $k=0{,}434\,294\,481\,903\,25$ и, так как $n=10$, будем иметь $kn=4{,}342\,944\,819\,032\,5$. Положив теперь $x=1$, будем иметь $y=1$, и получим

$$f=1+\frac{1}{3{,}3429}+\frac{2{,}171\,472\,4}{(3{,}3429)^3}-\text{ и т. д.}$$

Таким образом, приближённо будем иметь $f=1{,}37$. Положим, следовательно, $x=1{,}37$; будем иметь $\mathrm{l}\,x=0{,}136\,720\,567\,156\,406$ и, так как $y=x-10\,\mathrm{l}\,x$, будем иметь $y=0{,}002\,794\,328\,435\,94$ и $-x+kn=2{,}972\,944\,819\,032\,5$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathrm{l}\,x&=0{,}136\,720\,5\\ \mathrm{l}\,y&=7{,}446\,277\,3\\ \hline &\,7{,}582\,997\,8\\ \mathrm{l}\,(kn-x)&=0{,}473\,186\,6\\ \hline &\,7{,}109\,811\,2 \end{aligned} \qquad \frac{-xy}{x-kn}=0{,}001\,287\,69.$$

Так как, далее, третий член есть $\dfrac{-knxy^2}{2(x-kn)^3}=\dfrac{kny}{2(x-kn)^2}\cdot\dfrac{-xy}{x-kn}$, то будем иметь

$$\begin{aligned} \mathrm{l}\,\frac{-xy}{x-kn}&=7{,}109\,811\,2\\ \mathrm{l}\,y&=7{,}446\,277\,3\\ \mathrm{l}\,kn&=0{,}637\,784\,2\\ \hline &\,5{,}193\,872\,7\\ \mathrm{l}\,(kn-x)^2&=0{,}946\,373\,2\\ \hline &\,4{,}247\,499\,5\\ \mathrm{l}\,2&=0{,}301\,030\,0 \end{aligned}$$

l третьего члена $= 3{,}946\,469\,5$

$$\begin{array}{rl} \text{I член } x & = 1{,}37 \\ \text{II член } & = 0{,}001\,287\,69 \\ \text{III член } & = 0{,}000\,000\,88 \\ \hline f & = 1{,}371\,288\,57 \\ \mathrm{l}\,f & = 0{,}137\,128\,857. \end{array}$$

243. Если уравнение будет показательным, его можно привести к логарифмическому; так, если ищется такое значение x, при котором $x^x = a$, то будем иметь $x\,\mathrm{l}\,x = \mathrm{l}\,a$. Поэтому, положив $y = x\,\mathrm{l}\,x - \mathrm{l}\,a$ получим

$$dy = dx\,\mathrm{l}\,x + dx \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{1+\mathrm{l}\,x};$$

далее

$$dp = \frac{-dx}{x(1+\mathrm{l}\,x)^2} \quad \text{и} \quad \frac{dp}{dy} = q = \frac{-1}{x(1+\mathrm{l}\,x)^3};$$

$$dq = \frac{dx}{x^2(1+\mathrm{l}\,x)^3} + \frac{3dx}{x^2(1+\mathrm{l}\,x)^4}, \quad \text{так что} \quad \frac{dq}{dy} = r = \frac{1}{x^2(1+\mathrm{l}\,x)^4} + \frac{3}{x^2(1+\mathrm{l}\,x)^5}$$

Далее будем иметь

$$dr = \frac{-2dx}{x^3(1+\mathrm{l}\,x)^4} - \frac{10dx}{x^3(1+\mathrm{l}\,x)^5} - \frac{15dx}{x^3(1+\mathrm{l}\,x)^6}.$$

Следовательно,

$$s = \frac{-2}{x^3(1+\mathrm{l}\,x)^5} - \frac{10}{x^3(1+\mathrm{l}\,x)^6} - \frac{15}{x^3(1+\mathrm{l}\,x)^7}$$

и

$$t = \frac{6}{x^4(1+\mathrm{l}\,x)^6} + \frac{40}{x^4(1+\mathrm{l}\,x)^7} + \frac{105}{x^4(1+\mathrm{l}\,x)^8} + \frac{105}{x^4(1+\mathrm{l}\,x)^9},$$

$$u = \frac{-24}{x^5(1+\mathrm{l}\,x)^7} - \frac{196}{x^5(1+\mathrm{l}\,x)^8} - \frac{700}{x^5(1+\mathrm{l}\,x)^9} - \frac{1260}{x^5(1+\mathrm{l}\,x)^{10}} - \frac{945}{x^5(1+\mathrm{l}\,x)^{11}}.$$

Таким образом, если истинное значение x равно f, так что $f^f = a$, то будем иметь

$$\begin{aligned} f = x + \frac{y}{1+\mathrm{l}\,x} - \frac{y^2}{2x(1+\mathrm{l}\,x)^3} - \frac{y^3}{2x^2(1+\mathrm{l}\,x)^5} - \frac{5y^4}{8x^3(1+\mathrm{l}\,x)^7} - \frac{7y^5}{8x^4(1+\mathrm{l}\,x)^9} - \\ - \frac{y^3}{6x^2(1+\mathrm{l}\,x)^4} - \frac{5y^4}{12x^3(1+\mathrm{l}\,x)^6} - \frac{7y^5}{8x^4(1+\mathrm{l}\,x)^8} - \\ \frac{y^4}{12x^3(1+\mathrm{l}\,x)^5} - \frac{y^5}{3x^4(1+\mathrm{l}\,x)^7} - \\ - \frac{y^5}{20x^4(1+\mathrm{l}\,x)^6} \end{aligned}$$

и т. д.

Это выражение, продолженное до бесконечности, какое бы значение x ни подставить в него, если взять $y = x\,\mathrm{l}\,x - \mathrm{l}\,a$, даст истинное значение f. Так, если положить $x = 1$, то будем иметь $y = -\mathrm{l}\,a$ и

$$f = 1 + \mathrm{l}\,a - \frac{(\mathrm{l}\,a)^2}{2} + \frac{2(\mathrm{l}\,a)^3}{3} - \frac{9(\mathrm{l}\,a)^4}{8} + \frac{32(\mathrm{l}\,a)^5}{15} - \frac{625(\mathrm{l}\,a)^6}{144} - \text{ и т. д.}$$

Следует иметь в виду, что здесь $\mathrm{l}\,a$ есть гиперболический логарифм a.

Пример

Пусть ищется такое число f, для которого $f^f = 100$.

Так как $a = 100$ и $y = x\,\mathrm{l}\,x - \mathrm{l}\,a = x\,\mathrm{l}\,x - \mathrm{l}\,100$, то, поскольку очевидно, что $f > 3$ и < 4, положим $x = \frac{7}{2}$, тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}\,x &= 1{,}252\,762\,968\,49 \\
x\,\mathrm{l}\,x &= 4{,}384\,670\,389\,72\ ^{1)} \\
\mathrm{l}\,100 &= \underline{4{,}605\,170\,185\,99} \\
y &= -0{,}220\,499\,796\,27\ ^{1)} \\
1 + \mathrm{l}\,x &= 2{,}252\,762\,968\,49.
\end{aligned}$$

Пользуясь обыкновенными логарифмами, будем иметь

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}\,(-y) &= 9{,}343\,408\,3 \\
\mathrm{l}\,(1 + \mathrm{l}\,x) &= 0{,}352\,715\,6 \\
& \overline{8{,}990\,692\,7} \qquad \frac{-y}{1 + \mathrm{l}\,x} = 0{,}097\,879\,7 \\
\mathrm{l}\,y^2 &= 8{,}686\,816\,6 \\
3\,\mathrm{l}\,(1 + \mathrm{l}\,x) &= \underline{1{,}058\,146\,8} \\
&= 7{,}628\,669\,8 \\
\mathrm{l}\,2x = \mathrm{l}\,7 = \underline{0{,}845\,098\,0} & \qquad \frac{y^2}{2x(1 + \mathrm{l}\,x)^3} = 0.000\,607\,5. \\
6{,}783\,571\,8 &
\end{aligned}$$

Следовательно, приближённо будем иметь $f = 3{,}597\,272\,2$. Если же сверх этого взять следующие члены, то будем иметь $f = 3{,}597\,285\,2$.

244. Дифференциальное исчисление приносит, кроме того, очень большую пользу при решении таких уравнений, для которых заранее известно некоторое соотношение между их корнями. Пусть предложено уравнение $y = 0$, в котором y есть некоторая функция от x. Если известно, например, что два корня этого уравнения разнятся друг от друга на данное количество a, то эти два корня легко находятся следующим образом. Пусть x есть меньший из этих корней; тогда больший будет равен $x + a$. Поскольку функция y исчезает, когда x есть один из корней уравнения $y = 0$, y будет также исчезать, если вместо x подставить $x + a$. Поэтому будем иметь

$$0 = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{a^2\,d^2y}{2dx^2} + \frac{a^3\,d^3y}{6dx^3} + \text{ и т. д.}$$

Так как $y = 0$, то мы будем отсюда иметь также

$$0 = \frac{dy}{dx} + \frac{a\,d^2y}{2dx^2} + \frac{a^2\,d^3y}{6dx^3} + \frac{a^3\,d^4y}{24dx^4} + \text{ и т. д.}$$

Эти два уравнения, взятые совместно, с помощью метода исключения дадут значение того корня x, который меньше другого на количество a.

---

[1]) В первом издании $x\,\mathrm{l}\,x = 4{,}384\,670\,349\,72\ldots$ $y = -0{,}220\,499\,836\,27$. Исправил Г. К.

Пример

Пусть предложено уравнение $x^5-24x^3+49x^2-36=0$ *и пусть откуда-либо известно, что оно имеет два корня, разнящихся на единицу.*

Положив $y=x^5-24x^3+49x^2-36$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=5x^4-72x^2+98x,$$

$$\frac{d^2y}{2dx^2}=10x^3-72x+49,$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3}=10x^2-24,$$

$$\frac{d^4y}{24dx^4}=5x,$$

$$\frac{d^5y}{120dx^5}=1.$$

Так как $a=1$, то будем иметь

$$A\ \ldots\ldots 5x^4+10x^3-62x^2+31x+26=0.$$

Но мы имеем

$$B\ \ldots\ldots x^5-24x^3+49x^2-36=0.$$

Помножим верхнее уравнение на x, а нижнее на 5 и вычтем одно из другого. В остатке получим

$$10x^4+58x^3-214x^2+26x+180=0$$

или

$$C\ \ldots\ldots 5x^4+29x^3-107x^2+13x+90=0.$$

Вычитая отсюда первое уравнение A, получим в остатке

$$\begin{array}{ll}
D\ \ldots\ldots & 19x^3-45x^2-18x+64=0\\
D\cdot 5x\ \ldots\ldots & 95x^4-225x^3-90x^2+320x=0\\
A\cdot 19\ \ldots\ldots & 95x^4+190x^3-1178x^2+589x+494=0\\
\hline
E\ \ldots\ldots & 415x^3-1088x^2+269x+494=0\\
D\cdot 415\ \ldots\ldots & 7885x^3-18\,675x^2-7470x+26\,560=0\\
E\cdot 19\ \ldots\ldots & 7885x^3-20\,672x^2+5111x+9386=0\\
\hline
F\ \ldots\ldots & 1997x^2-12\,581x+17\,174=0\\
D\cdot 247\ \ldots\ldots & 4693x^3-11\,115x^2-4446x+15\,808=0\\
E\cdot 32\ \ldots\ldots & 13\,280x^3-34\,816x^2+8608x+15\,808=0\\
\hline
 & 8587x^3-23\,701x^2+13\,054x=0\\
\hline
G & 8587x^2-23\,701x+13\,054=0\\
F\cdot 8587\ \ldots & 17\,148\,239x^2-108\,033\,047x+147\,473\,138=0\\
G\cdot 1997\ \ldots & 17\,148\,239x^2-47\,330\,897x+26\,068\,838=0\\
\hline
 & 60\,702\,150x-121\,404\,300=0
\end{array}$$

Из этого уравнения следует, что $x=2$ и потому $x=3$ также будет корнем уравнения. Оба эти значения удовлетворяют уравнению.

245. Эти действия можно выполнить и без помощи дифференциального исчисления, ибо то же самое уравнение, которое даёт диффeренциальное исчисление, получается, если в самом предложенном уравнении положить $x+a$ вместо x. Впрочем, этот метод исключения слишком утомителен, и если бы уравнение имело более высокую степень, то работа была бы совершенно непосильной; тем более этот метод может иметь место для трансцендентных уравнений. Но если мы положим, что два корня предложенного уравнения равны между собой, тогда, в силу $a=0$, дифференциальное уравнение принимает вид $\frac{dy}{dx}=0$. Таким образом, всякий раз, как уравнение $y=0$ будет иметь два равных корня, мы будем иметь $\frac{dy}{dx}=0$, и эти два уравнения, совместно взятые, дадут то значение x, которому равны оба корня. Отсюда, обратно, если два уравнения $y=0$ и $\frac{dy}{dx}=0$ имеют общий корень, то он будет двойным корнем уравнения $y=0$. А это имеет место в том случае, если после того как количество x будет совершенно исключено из двух уравнений $y=0$ и $\frac{dy}{dx}=0$, мы придём к тождественному уравнению. Так, пусть предложено уравнение

$$x^3-2x^2-4x+8=0.$$

Мы будем иметь также $3x^2-4x-4=0$. Если второе уравнение удвоить и сложить с первым, то получится

$$x^3+4x^2-12x=0 \quad \text{или} \quad x^2+4x-12=0.$$

Утроив, находим

$$3x^2+12x-36=0$$

вычтем

$$\begin{array}{r} 3x^2-\ \ 4x-\ \ 4=0 \\ \hline 16x-32=0. \end{array}$$

Так как мы получаем $x=2$, то подставим это значение в одно из предыдущих $3x^2-4x-4=0$; получаем тождественное уравнение $12-8-{}$ $-4=0$. Отсюда заключаем, что предложенное уравнение $x^3-2x^2-{}$ $-4x+8=0$ имеет два равных корня, каждый из которых равен 2.

246. Итак, если мы имеем алгебраическое уравнение скольких угодно измерений[1])

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+Dx^{n-4}+ \text{ и т. д.} =0,$$

которое имеет два равных между собой корня, то мы также будем иметь

$$nx^{n-1}+(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}+(n-3)Cx^{n-4}+(n-4)Dx^{n-5}+$$
$$+\text{ и т. д. } =0.$$

Иначе говоря, двойной корень первого уравнения будет в то же время корнем второго уравнения. Помножим первое уравнение на n, второе на x и вычтем из первого. Получим следующее новое уравнение:

$$Ax^{n-1}+2Bx^{n-2}+3Cx^{n-3}+4Dx^{n-4}+ \text{ и т. д.} =0.$$

[1]) Т. е. какой угодно степени.

Сложим теперь первое уравнение, умноженное на a, и последнее, умноженное на b. Будем иметь

$$ax^n+(a+b)Ax^{n-1}+(a+2b)Bx^{n-2}+(a+3b)Cx^{n-3}+\text{ и т. д. }=0.$$

Это уравнение, взятое совместно с первым, обнаружит наличие равных корней, если предложенное уравнение имело их. Так как количества a, b можно взять по произволу, то коэффициенты a, $a+b$, $a+2b$ и т. д. составляют произвольную арифметическую прогрессию. Поэтому, если предложенное уравнение имеет два равных корня, то они будут найдены, если отдельные члены уравнения помножить соответственно на члены какой-нибудь арифметической прогрессии; новое уравнение, полученное таким образом, будет также обладать тем же корнем, который является двойным корнем предложенного уравнения. Так, уравнение

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+Dx^{n-4}+\text{ и т. д. }=0,$$

если его члены помножить на арифметическую прогрессию

$$a,\quad a+b,\quad a+2b,\quad a+3b,\quad a+4b\text{ и т. д.},$$

даст новое уравнение

$$ax^n+(a+b)Ax^{n-1}+(a+2b)Bx^{n-2}+C(a+3b)x^{n-3}+\text{ и т. д. }=0.$$

Это уравнение, взятое совместно с первым, обнаружит наличие равных корней. Это есть хорошее известное правило для разыскания равных корней какого-либо уравнения.

247. Если уравнение $y=0$ имеет три равных корня, то будем иметь не только $\frac{dy}{dx}=0$, но также и $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, если вместо x подставить значение того корня, который является для уравнения $y=0$ тройным. Чтобы показать это, положим, что уравнение $y=0$ имеет три корня x, $x+a$ и $x+b$, которые сначала пусть отстоят друг от друга на конечные интервалы a и b. Так как y исчезает, если вместо x положить $x+a$ или $x+b$, то будем иметь

$$y+\frac{a\,dy}{dx}+\frac{a^2d^2y}{2dx^2}+\frac{a^3d^3y}{6dx^3}+\frac{a^4d^4y}{24dx^4}+\text{ и т. д. }=0,$$
$$y+\frac{b\,dy}{dx}+\frac{b^2d^2y}{2dx^2}+\frac{b^3d^3y}{6dx^3}+\frac{b^4d^4y}{24dx^4}+\text{ и т. д. }=0.$$

Если от каждого из двух последних уравнений отнять первое, будем иметь

$$\frac{dy}{dx}+\frac{ad^2y}{2dx^2}+\frac{a^2d^3y}{6dx^3}+\frac{a^3d^4y}{24dx^4}+\text{ и т. д. }=0,$$
$$\frac{dy}{dx}+\frac{bd^2y}{dx^2}+\frac{b^2d^3y}{6dx^3}+\frac{a^3d^4y}{24dx^4}+\text{ и т. д. }=0.$$

Вычтем одно из этих уравнений из другого и разделим на $a-b$, тогда будем иметь

$$\frac{d^2y}{2dx^2}+\frac{(a+b)\,d^3y}{6dx^3}+\frac{(a^2+ab+b^2)\,d^4y}{24dx^4}+\text{ и т. д. }=0.$$

Положим теперь $a=0$ и $b=0$, так что теперь три корня равны между собой. Так как все члены, кроме первых, теперь исчезают, то будем иметь

$$y=0,\quad \frac{dy}{dx}=0\quad\text{и}\quad\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

248. Итак, всякий раз, как уравнение $y=0$ имеет три равных корня, скажем, f, f и f, это количество будет также корнем не только уравнения $\frac{dy}{dx}=0$, но и уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. Отсюда ясно, что, так как f есть общий корень уравнений $\frac{dy}{dx}=0$ и его дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, то на основании того, что выше было доказано о двойных равных корнях, f должно быть двойным корнем уравнения $\frac{dy}{dx}=0$. Поэтому, если уравнение

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+Dx^{n-4}+\text{ и т. д. }=0$$

имеет три равных корня f, f и f, то, если члены его помножить на члены какой-либо арифметической прогрессии, получаемое в результате уравнение будет иметь два равных корня f и f; поэтому его можно снова помножить на какую-либо арифметическую прогрессию, и тогда получим уравнение, имеющее то же количество f простым корнем. Таким образом, получатся три уравнения, имеющие общий корень f. Комбинируя их, легко этот корень исключить. Если выбрать такие прогрессии, у которых либо первый, либо последний член равен нулю, тогда получим уравнение, степень которого на единицу ниже, и таким образом исключение можно будет выполнить легче.

249. Подобным образом можно показать, что если уравнение $y=0$ имеет четыре равных корня, f, f, f, f, то положив $x=f$, мы будем иметь не только $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$ и $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, но также $\frac{d^3y}{dx^3}=0$. Иными словами, если уравнение $y=0$ имеет четырёхкратный корень $x=f$, то уравнение $\frac{dy}{dx}=0$ имеет этот корень трижды, уравнение $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ — дважды и уравнение $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ — однократно. Это легче усмотреть, если обратить внимание на то, что функция y в этом случае должна иметь вид $(x-f)^4X$, где X есть некоторая функция от x. Если мы возьмём её в этом виде, то будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=(x-f)^3\left(4X+\frac{(x-f)\,dX}{dx}\right),$$

так что можно разделить на $(x-f)^3$. Далее таким же образом $\frac{d^2y}{dx^2}$ будем иметь множитель $(x-f)^2$ и $\frac{d^3y}{dx^3}$ — множитель $x-f$; из этого ясно, что если корень $x=f$ входит в уравнение $y=0$ четырежды, то он в уравнение $\frac{dy}{dx}=0$ должен входить трижды, в уравнение $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ — дважды и в уравнение $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ — однократно.

ГЛАВА X

О МАКСИМУМАХ И МИНИМУМАХ

250. Если функция количества x составлена так, что при возрастании значения x она всё время возрастает или всё время убывает, то эта функция не имеет ни максимума, ни минимума. В самом деле, какое бы значение этой функции ни взять, последующие значения будут больше, а предшествующие меньше. Такой функцией является, например, функция x^3+x, значение которой при возрастании x возрастает, а при убывании x убывает; следовательно, эта функция может иметь максимум лишь в том случае, если задать количеству x максимальное, т. е. бесконечное значение. Подобным же образом она получит минимальное значение, если положить $x=-\infty$. Но за исключением этого случая, когда функция составлена так, что при возрастании x она всё время возрастает или всё время убывает, она где-либо будет иметь максимальное или минимальное значение, т. е. такое значение, которое либо больше, либо меньше, чем предшествующие и последующие значения. Так, функция $x^2-2x+3=0$ имеет минимальное значение, если положить $x=1$; действительно, какое бы другое значение мы ни дали количеству x, функция всегда будет иметь большее значение.

251. Чтобы яснее усмотреть свойство максимумов и минимумов, положим, что y есть такая функция от x, которая получает максимальное значение, если положить $x=f$. Понятно, что если положить x бо́льшим или меньшим, чем f, то получаемое значение количества y будет меньше, чем то, которое оно принимает при $x=f$. Подобным образом, если при $x=f$ функция y получает минимальное значение, необходимо, чтобы, положив x либо бо́льшим, либо меньшим, чем f, мы получали всегда большее значение количества y. Таково определение абсолютного максимума или минимума. Но кроме того, говорят, что функция y принимает максимальное значение, например, при $x=f$, если это значение функции больше, чем те последующие или предшествующие, которые получаются, если y положить лишь немного бо́льшими или немного меньшими, чем f, хотя бы при подстановке других значений x функция принимала гораздо бо́льшие значения. Подобным образом, говорят, что функция y принимает минимальное значение при $x=f$, если это значение функции меньше, чем те, которые она принимает, если вместо x подставлять либо ближайшие бо́льшие, либо ближайшие меньшие, чем f, значения. В этом втором смысле мы в дальнейшем и будем употреблять термины «максимум» и «минимум».

252. Прежде чем будет показано, как находить эти максимумы и минимумы, следует отметить, что это исследование имеет место собственно лишь по отношению к тем функциям, которые мы выше назвали *однозначными* и которые составлены таким образом, что для каждого значения x они принимают лишь одно значение. *Двузначными* же и *многозначными* функциями мы назвали такие функции, которые для отдельных значений x имеют два или большее число значений; такими функциями и являются, например, корни квадратных уравнений и уравнений большего числа измерений. Если y является такого рода двузначной или многозначной функцией от x, тогда, собственно, нельзя сказать, что она принимает наибольшее или наименьшее значение при $x=f$. Действительно, при $x=f$ она получает два или большее число значений одновременно, точно так же и предшествующих и последующих значений она имеет несколько, и судить о максимуме или минимуме становится не так легко, разве что значения функции y, отвечающие отдельным значениям x, все, кроме одного, являются мнимыми; в этом случае она имеет обманчивый вид однозначной функции. Итак, сначала мы рассмотрим однозначные функции и те функции, которые имеют обманчивый вид однозначных; потом только мы укажем, каким образом следует применить полученный критерий к многозначным функциям.

253. Итак, пусть y есть однозначная функция от x; поэтому, какое бы значение ни подставить вместо x, она получает всегда только одно действительное значение; пусть x есть то значение, которое даёт функции y наибольшее или наименьшее значение. В первом случае, если вместо x подставить либо $x+\alpha$, либо $x-\alpha$, значение y будет меньше, чем если положить $\alpha=0$, во втором же случае—больше. Но так как, если подставить $x+\alpha$ вместо x, функция y переходит в

$$y+\frac{\alpha\,dy}{dx}+\frac{\alpha^2\,d^2y}{2dx^2}+\frac{\alpha^3\,d^3y}{6dx^3}+\text{ и т. д.},$$

а если положить $x-\alpha$ вместо x, функция y переходит в

$$y-\frac{\alpha\,dy}{dx}+\frac{\alpha^2\,d^2y}{2dx^2}-\frac{\alpha^3\,d^3y}{6dx^3}+\text{ и т. д.},$$

то необходимо, чтобы в случае максимума было

$$y>y+\frac{\alpha\,dy}{dx}+\frac{\alpha^2\,d^2y}{2dx^2}+\frac{\alpha^3\,d^3y}{6dx^3}+\text{ и т. д.}$$

и

$$y>y-\frac{\alpha\,dy}{dx}+\frac{\alpha^2\,d^2y}{2dx^2}-\frac{\alpha^3\,d^3y}{6dx^3}+\text{ и т. д.}$$

В случае же, если значение y есть минимум, будем иметь

$$y<y+\frac{\alpha\,dy}{dx}+\frac{\alpha^2\,d^2y}{2dx^2}+\frac{\alpha^3\,d^3y}{6dx^3}+\text{ и т. д.},$$

$$y<y-\frac{\alpha\,dy}{dx}+\frac{\alpha^2\,d^2y}{2dx^2}-\frac{\alpha^3\,d^3y}{6dx^3}+\text{ и т. д.}$$

254. Так как это должно иметь место тогда, когда α есть очень малое количество, то положим α столь малым, чтобы можно было отбросить его высшие степени; тогда как для случая максимума, так и для случая минимума должно будет иметь место $\frac{\alpha\,dy}{dx}=0$. Таким образом, если $\frac{a\,dy}{dx}$ не будет равно нулю, то значение y не может быть ни максимумом, ни минимумом. Таким образом, мы получаем для нахождения как максимумов, так и минимумов такое общее правило. Нужно положить дифференциал предложенной функции y равным нулю, и тогда то значение x, которое даёт для функции максимальное или минимальное значение, будет корнем этого уравнения. Остаётся, однако, неизвестным, будет ли найденное значение y максимумом или минимумом; более того, может оказаться, что y не будет ни максимумом, ни минимумом. Ведь мы нашли только, что в том и другом случае будет $\frac{dy}{dx}=0$, но мы не утверждали, что всякий раз как $\frac{dy}{dx}=0$, y получает наибольшее или наименьшее значение.

255. Однако для разыскания тех случаев, когда значение y оказывается наибольшим или наименьшим, нужно прежде всего выполнить эту операцию, т. е. приравнять дифференциал предложенной функции нулю и найти все корни уравнения $\frac{dy}{dx}=0$. Затем, когда корни будут найдены, нужно будет посмотреть, какой из них даёт функции максимальное или минимальное значение, или никакой не даёт ни максимума, ни минимума. Мы покажем, действительно, что возможны случаи, когда нет ни максимума, ни минимума, хотя и имеет место $\frac{dy}{dx}=0$. Пусть f — то значение, или одно из тех значений, которое мы получаем из уравнения

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

Подставим это значение в выражения $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д., и пусть в результате этой подстановки

$$\frac{d^2y}{dx^2}=p, \quad \frac{d^3y}{dx^3}=q, \quad \frac{d^4y}{dx^4}=r \quad \text{и т. д.}$$

Пусть функция y, если положить f вместо x, переходит в F; тогда, если вместо x положить $f+\alpha$, эта функция перейдёт в

$$F+\frac{1}{2}\alpha^2p+\frac{1}{6}\alpha^3q+\frac{1}{24}\alpha^4r+\text{ и т. д.};$$

если же вместо x положить $f-\alpha$, она перейдёт в

$$F+\frac{1}{2}\alpha^2p-\frac{1}{6}\alpha^3q+\frac{1}{24}\alpha^4r-\text{ и т. д.}$$

Отсюда ясно, что если p будет количеством положительным, то оба значения будут меньше, чем F, по крайней мере, если α есть очень малое количество; поэтому значение F, которое функция принимает при $x=f$, будет минимумом. Если же p есть количество отрицательное, тогда при $x=f$ функция получает максимальное значение.

256. Если же $p=0$, тогда нужно посмотреть, каково значение количества q. Если оно не будет равно нулю, то значение y не будет ни максимумом, ни минимумом; ибо, положив $x=f+\alpha$, мы будем иметь $F+\frac{1}{6}\alpha^3q>F$, а положив $x=f-\alpha$, будем иметь $F-\frac{1}{6}\alpha^3q<F$. Если же и $q=0$, то нужно посмотреть, каково значение количества r; если оно будет положительным, то значение F, которое функция принимает при $x=f$, будет минимальным; если же r имеет отрицательное значе-

ние, то F будет максимумом. Если же также и r исчезает, то ответ на вопрос нужно искать, рассматривая значение следующей буквы s, совершенно так же, как раньше мы делали это по отношению к букве q. Именно, если s не будет равно нулю, то функция не будет ни максимумом, ни минимумом. Если же также и $s=0$, то следующая буква t, если она будет иметь положительное значение, укажет, что имеет место минимум; если же она будет иметь отрицательное значение, она укажет максимум. Если же и эта буква t исчезает, то для решения вопроса нужно поступать совершенно так же, как мы делали в предыдущих случаях. Таким образом, о каждом корне уравнения $\frac{dy}{dx}=0$ мы сможем сказать, даёт ли он функции y максимальное или минимальное значение, или не даёт ни того, ни другого; и таким образом можно будет найти все максимумы и минимумы, которые может принимать функция y.

257. Если уравнение $\frac{dy}{dx}=0$ имеет два равных корня, так что оно имеет множителем квадрат $(x-f)^2$, то, если положить $x=f$, одновременно исчезает и $\frac{d^2y}{dx^2}$, и мы будем иметь $p=0$, но q не будет равно нулю. Значит, в этом случае функция y не имеет ни максимума, ни минимума. Если же уравнение $\frac{dy}{dx}=0$ имеет три равных корня, т. е. $\frac{dy}{dx}$ имеет множителем куб $(x-f)^3$, тогда, если положить $x=f$, получим $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ и $\frac{d^3y}{dx^3}=0$, но $\frac{d^4y}{dx^4}$ не будет равно нулю. Значит, если значение этого члена будет положительным, будет иметь место минимум, если же отрицательным, то максимум. Таким образом, высказанный ранее признак сводится к тому, что, если выражение $\frac{dy}{dx}$ имеет множителем $(x-f)^n$, где n есть нечётное число, то функция y, если в ней положить $x=f$, примет максимальное или минимальное значение, если же число n будет чётным, тогда подстановка не даёт ни максимума, ни минимума.

258. Разыскание максимума и минимума часто не мало облегчается следующими соображениями. В тех случаях, когда функция y имеет максимум или минимум, какое-либо её кратное ay, если a есть положительное число, также одновременно имеет максимум или минимум. То же имеет место для y^3, y^5, y^7 и т. д. и вообще для ay^n, если n есть нечётное положительное число, ибо эти выражения составлены так, что они возрастают при возрастании y и убывают при убывании y. Далее, в тех случаях, когда y является максимумом или минимумом, $-y$, $-ay$, $b-ay$ и вообще $b-ay^n$, где n есть нечётное положительное число, будут, в обратном порядке, минимумом или максимумом. Подобным образом, в тех случаях, когда y есть максимум или минимум, выражения $\frac{a}{y}$, $\frac{a}{y^3}$, $\frac{a}{y^5}$ и вообще $\frac{a}{y^n}\pm b$, где a есть положительное количество и n есть нечётное положительное число, дадут, в обратном порядке, минимум или максимум. Если же a будет отрицательным количеством, тогда эти формулы дадут максимальное значение, если y есть максимум, или минимальное, если y есть минимум.

259. Эти заключения нельзя в неизменном виде перенести на чётные степени; действительно, если y принимает отрицательные значения, то его чётные степени получают положительные значения; поэтому может случиться, что в то время, как y принимает минимальное значение, именно значение отрицательное, его чётные степени становятся максимумами. При этих обстоятельствах мы можем утверждать, что если y будет максимумом или минимумом, имея положительное значение, тогда и его чётные степени y^2, y^4 и т. д. будут также максимумами или минимумами, если же максимумом будет отрицательное значение y, тогда его квадрат y^2 получит минимальное значение, и обратно, если отрицательное значение y будет минимумом, тогда y^2, y^4 и т. д. будут максимумами. Если же показатели степени количества y будут отрицательны, тогда произойдёт обратное. Впрочем, то, что здесь было сказано о чётных и нечётных показателях, имеет место не только для целых чисел, но и для дробей, знаменатели которых являются нечётными числами; в этом вопросе дроби $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ и т. д. равносильны нечётным числам, дроби же $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ и т. д. — чётным.

260. Если же знаменатели будут чётными числами, тогда, поскольку, когда y имеет отрицательное значение, его степени $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{3}{4}}$ и т. д. будут мнимыми, — о них можно утверждать лишь следующее: если положительное значение количества y будет максимумом или минимумом, тогда также $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{3}{2}}$, $y^{\frac{1}{4}}$ и т. д. равным образом будут максимумами или минимумами; напротив, $y^{-\frac{1}{2}}$, $y^{-\frac{3}{2}}$, $y^{-\frac{1}{4}}$ и т. д. — минимумами или максимумами. Но так как эти иррациональные количества имеют одновременно два значения, одно положительное, а другое — отрицательное, то для отрицательных значений нужно будет утверждать противоположное тому, что здесь было сказано о положительных. Если же отрицательное значение количества y даёт максимум или минимум, тогда, поскольку все рассматриваемые степени становятся мнимыми, их нельзя причислить ни к максимумам, ни к минимумам. С помощью вышеизложенных соображений становится часто очень лёгким разыскание максимума и минимума, которое иначе было бы чрезвычайно трудным.

261. Так как вышесказанное в первую очередь относится к рациональным функциям, ибо только они одни являются однозначными [1]), то прежде всего мы рассмотрим целые функции и отыщем их максимумы и минимумы. Так как такие функции можно привести к виду

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{ и т. д.},$$

то прежде всего ясно, что их значение не может быть больше чем то, которое получится, если положить $x = \infty$; далее, если $x = -\infty$, то эта формула принимает значение, равное ∞^n, если n есть чётное число, и $-\infty^n$, если n есть число нечётное; тогда последнее значение

---

[1]) Г. Ковалевский в примечании к этому месту замечает, что в § 10 первой главы «Введения в анализ», а также в начале § 263 «Дифференциального исчисления» Эйлер указывает на существование трансцендентных однозначных функций. Мне кажется, что данное место не противоречит этим высказываниям Эйлера. Говоря о том, что рациональные функции одни только являются однозначными, Эйлер противопоставляет их не трансцендентным, а «иррациональным функциям», которые (см. § 10 «Введения») по Эйлеру, «все являются многозначными, потому что знаки радикалов обладают неопределённостью».

будет самым минимальным из всех. Кроме того, однако, часто существуют другие максимумы и минимумы в том смысле этих слов, который мы им приписали. Поясним это следующими примерами.

Пример 1

Найти значения x, при которых функция $(x-a)^n$ становится максимумом или минимумом.

Положив $(x-a)^n = y$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = n(x-a)^{n-1}.$$

Положив это равным нулю, получим $x = a$. А так как $\frac{dy}{dx}$ имеет множителем $(x-a)^{n-1}$, то из § 257 ясно, что y может быть максимумом или минимумом лишь в том случае, если $n-1$ есть нечётное число, т. е. n есть число чётное. Так как в этом случае мы имеем

$$\frac{d^n y}{dx^n} = n(n-1)(n-2)\ldots 1,$$

т. е. y есть число положительное, то, следовательно, значение y при $x=a$ будет минимальным. В этом легко убедиться, ибо при $x=a$ мы имеем $y=0$; если же x положить бо́льшим или меньшим, чем a, то так как n есть чётное число, то y получит положительное значение, т. е. значение, большее нуля; если же n есть нечётное число, то функция $y=(x-a)^n$ не имеет ни максимума, ни минимума. Далее, очевидно, что то же самое имеет место, если n есть число дробное, чётное или нечётное, а именно, $(x-a)^{\mu/\nu}$ становится минимумом при $x=a$, если μ есть число чётное, а ν — нечётное; если же оба эти числа нечётные, то не будет ни максимума, ни минимума.

Пример 2

Найти случаи, в которых значение формулы x^2+3x+2 становится максимальным или минимальным.

Положим $x^2+3x+2=y$; тогда

$$\frac{dy}{dx} = 2x+3, \quad \frac{d^2y}{2dx^2} = 1.$$

Положим, следовательно, $2x+3=0$; получим $x=-\frac{3}{2}$. Даёт ли этот случай максимум или минимум, мы должны узнать из значения $\frac{d^2y}{2dx^2}=1$; так как оно положительно при любом x, то мы имеем минимум. Если положить $x=-\frac{3}{2}$, то получаем $y=-\frac{1}{4}$, если же количеству x мы будем приписывать какие-либо другие значения, то будем всегда получать значения y, большие, чем $-\frac{1}{4}$. Так же и из природы самой формулы x^2+3x+2 ясно, что она должна иметь минимальное значение; действительно, так как она возрастает до бесконечности как при $x=\infty$, так и при $x=-\infty$, то необходимо, чтобы некоторое значение количества x давало бы количеству y минимальное из всех значений.

Пример 3

Найти случаи, в которых выражение $x^3 - ax^2 + bx - c$ получает максимальное или минимальное значение.

Положив $y = x^3 - ax^2 + bx - c$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2ax + b \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{2dx^2} = 3x - a, \quad \frac{d^3y}{6dx^3} = 1.$$

Положив $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2ax + b = 0$, будем иметь

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 3b}}{3}.$$

Отсюда ясно, что предложенная формула не будет иметь ни максимума, ни минимума, если только не будет $a^2 > 3b$. Если же $a^2 > 3b$, то в одном из случаев будет максимум, в другом — минимум. Действительно, мы имеем

$$\frac{d^2y}{2dx^2} = \pm\sqrt{a^2 - 3b},$$

откуда видно, что если не имеет места $a^2 = 3b$, то значение $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$ делает формулу $y = x^3 - ax^2 + bx - c$ минимальной, а значение $x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$ — максимальной. Найдём теперь, каковы будут эти значения количества y. Так как $3x^2 - 2ax + b = 0$, т. е. $x^3 - \frac{2}{3}ax^2 + \frac{1}{3}bx = 0$, то будем иметь

$$y = -\frac{1}{3}ax^2 + \frac{2}{3}bx - c;$$

а так как $\frac{1}{3}ax^2 - \frac{2a^2}{9}x + \frac{ab}{9}$, то

$$y = \frac{2}{9}(3b - a^2)x + \frac{ab}{9} - c = -\frac{2a(a^2 - 3b)}{27} \mp \frac{2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b}}{27} + \frac{ab}{9} - c$$

или

$$y = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c \mp \frac{2}{27}(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}},$$

где верхний знак нужно взять для минимума, а нижний — для максимума.

Остаётся ещё случай $a^2 = 3b$; так как в этом случае $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, а следующий член $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$ не равен нулю, то, следовательно, в этом случае предложенная формула не будет принимать ни максимального, ни минимального значения.

Пример 4

Найти случаи, в которых функция $x^4 - 8x^3 + 22x - 24x + 12$ количества x становится максимальной или минимальной.

Положив $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24, \quad \frac{d^2y}{2dx^2} = 6x^2 - 24x + 22.$$

Теперь положим

$$\frac{dy}{dx}=4x^3-24x^2+44x-24=0 \quad \text{или} \quad x^3-6x^2+11x-6=0.$$

Мы получим для x три действительных значения

$$\text{I. } x=1, \quad \text{II. } x=2, \quad \text{III. } x=3.$$

Из первого значения получаем $\frac{d^2y}{2dx^2}=4$; поэтому при $x=1$ предложенная функция становится минимумом. Из второго значения $x=2$ получаем $\frac{d^2y}{2dx^2}=-2$, поэтому предложенная функция имеет максимум. Из третьего значения $x=3$ получаем $\frac{d^2y}{2dx^2}=+4$; поэтому предложенная функция снова имеет минимум.

Пример 5

Пусть предложена функция $y=x^5-5x^4+5x^3+1$; *спрашивается, в каких случаях она становится максимумом или минимумом.*

Так как

$$\frac{dy}{dx}=5x^4-20x^3+15x^2,$$

то составим уравнение $x^4-4x^3+3x^2=0$; его корни суть

$$\text{I и II. } x=0, \quad \text{III. } x=1, \quad \text{IV. } x=3.$$

Так как первый и второй корни равны, то они не дают ни максимума, ни минимума; действительно, $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, но $\frac{d^3y}{dx^3}$ не исчезает. Третий же корень $x=1$, так как $\frac{d^2y}{2dx^2}=10x^3-30x^2+15x$ даёт $\frac{d^2y}{2dx^2}=-5$; следовательно, в этом случае функция становится максимумом. Из четвёртого корня $x=3$ получаем $\frac{d^2y}{2dx^2}=45$, так что предложенная функция является минимумом.

Пример 6

Найти случаи, в которых формула $y=10x^6-12x^5+15x^4-20x^3+20$ *становится максимумом или минимумом.*

Мы будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=60x^5-60x^4+60x^3-60x^2 \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{60dx^2}=5x^4-4x^3+3x^2-2x.$$

Составим уравнение $x^5-x^4+x^3-x^2=0$; так как, разложив его на множители, мы имеем $x^2(x-1)(x^2+1)=0$, то оно имеет два равных корня $x=0$, затем корень $x=1$ и сверх того два мнимых корня, получаемых из уравнения $x^2+1=0$. Так как двойной корень $x=0$ не даёт ни максимума, ни минимума, то остаётся только рассмотреть корень $x=1$, который даёт $\frac{d^2y}{60dx^2}=2$; это значение положительно, что указывает минимум.

262. Таким образом, определение максимумов и минимумов зависит от корней дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=0$; наивысшая степень этого уравнения на единицу ниже, чем степень предложенной функции y, если, конечно, y есть целая рациональная функция. Ясно, что в общем случае, если предлагается функция

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{ и т. д. } = y.$$

то её максимумы и минимумы определяются корнями уравнения

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \text{ и т. д. } = 0.$$

Положим, что действительные корни α, β, γ, δ и т. д. этого уравнения расположены в порядке их величины, так что α есть наибольший корень, $\beta < \alpha$, $\gamma < \beta$ и т. д. Рассмотрим сначала случай, когда все эти корни не равны между собой; тогда каждый из них даст предложенной формуле y максимальное или минимальное значение и, следовательно, функция y будет иметь столько максимумов или минимумов, сколько действительных корней будет иметь уравнение $\frac{dy}{dx} = 0$. Если же два или большее число корней будут равны между собой, то дело будет обстоять так, что два равных корня не дадут ни максимума, ни минимума, тройные же корни будут равносильны одному; и вообще, если число равных корней будет чётным, то отсюда не получится ни максимума, ни минимума; если же это число будет нечётным, то отсюда получится либо один максимум, либо один минимум.

263. Какие корни дают максимум, а какие минимум — можно определить и без помощи вышеизложенного правила. Так как функция y при $x = \infty$ становится также бесконечной и так как в границах между бесконечностью и α значения количества x не дают никакого максимума и никакого минимума, то очевидно, что значения функции y, когда вместо x последовательно подставляются значения от ∞ до α, должны всё время убывать; поэтому значение $x = d + \omega$ даёт функции y большее значение, чем значение $x = \alpha$. Отсюда следует, что так как $x = \alpha$ должно давать либо максимальное, либо минимальное значение, то необходимо, чтобы в этом случае функция y стала минимумом; значит, если x уменьшать дальше и положить $x = \alpha - \omega$, то значение количества y будет снова возрастать до тех пор, пока x не станет равным β, т. е. второму корню уравнения $\frac{dy}{dx} = 0$, дающему максимум или минимум. Поэтому этот второй корень $x = \beta$ даёт максимум, и при значении $x = \beta - \omega$ функция y будет оставаться меньшей, чем при $x = \beta$, всё время, пока x не станет равным γ. Следовательно, последнее значение снова даст минимум. Из этого рассуждения ясно, что первый, третий, пятый и т. д. корни уравнения $\frac{dy}{dx}$ дают минимумы, второй же, четвёртый, шестой и т. д. — максимумы. В то же время отсюда ясно, что в случае двух равных корней максимум и минимум срастаются и, таким образом, не имеет места ни максимум, ни минимум.

264. Таким образом, если в предложенной функции

$$y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{и т. д.}$$

наибольший показатель n будет чётным числом, то уравнение

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + (n-1)\ Ax^{n-2} + (n-2)\ Bx^{n-3} + \text{и т. д.} = 0$$

будет иметь нечётную степень и потому будет иметь либо один действительный корень, либо три, либо пять, либо иное нечётное их число. Если действительным будет один корень, то он даст минимум; если будут три действительных корня, то наибольший даст минимум, средний — максимум, а наименьший — снова минимум. Если же действительных корней будет пять, то функция будет иметь три минимума и два максимума, и так далее.

Если же показатель n будет нечётным числом, то уравнение $\frac{dy}{dx} = 0$ будет иметь чётную степень и потому либо совсем не будет иметь действительных корней, либо будет иметь их два, либо четыре, либо шесть и т. д. В первом случае функция y не будет иметь ни максимума, ни минимума, во втором же случае, если существуют два корня, то из них больший даст минимум, а меньший—максимум; если существуют четыре корня, то первый (самый большой) и третий дадут минимум, второй же и четвёртый — максимум. И всегда, каково бы ни было число корней, максимумы и минимумы чередуются друг с другом.

265. Перейдём теперь к дробным рациональным функциям, составляющим другой вид однозначных функций. Пусть

$$y = \frac{P}{Q},$$

где P и Q суть какие-либо функции[1]) количества x; прежде всего ясно, что если количеству x дать такое значение, чтобы было $Q = 0$, то если только вместе с тем не исчезает P, функция y становится бесконечной, и может показаться, что здесь мы имеем максимум. Однако этот случай нельзя считать за случай максимума; действительно, обратная дробь $\frac{Q}{P}$ становится минимальной во всех тех случаях, когда предложенная дробь $\frac{P}{Q}$ является максимальной; поэтому дробь $\frac{Q}{P}$ должна была бы стать минимальной в случае, когда Q исчезает; это, однако, происходит не всегда, ибо она может принимать и ещё меньшие значения, а именно, отрицательные. После того как это сомнение устранено, мы ещё раз убеждаемся в справедливости данного выше правила, что максимумы и минимумы должны быть получены из уравнения $\frac{dy}{dx} = 0$. Итак, в предложенном случае должно быть

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q\,dP - P\,dQ}{Q^2\,dx}$$

и, следовательно,

$$Q\,dP - P\,dQ = 0.$$

Корни этого уравнения и могут дать функции y максимальные или минимальные значения. Если же возникает сомнение, имеет ли место максимум или минимум, то нужно обратиться к значению $\frac{d^2y}{dx^2}$; если оно положительно, будет иметь место минимум; если же отрицательно — максимум. Если же и это значение $\frac{d^2y}{dx^2}$ исчезает, что происходит

[1]) Подразумевается, очевидно, «целые».

в том случае, если уравнение $\frac{dy}{dx}=0$ имеет два или большее число равных корней, то всегда нужно помнить, что чётное число равных корней не даёт ни максимума, ни минимума.

Пример 1

Найти случаи, в которых функция $\frac{x}{1+x^2}$ становится максимумом или минимумом.

Прежде всего ясно, что эта функция обращается в нуль в трёх случаях: $x=\infty$, $x=0$, $x=-\infty$; поэтому она имеет по крайней мере два максимума или минимума. Чтобы найти их, положим $y=\frac{x}{1+x^2}$: тогда будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3}.$$

Положим теперь $\frac{dy}{dx}=0$; тогда $1-x^2=0$ и либо $x=+1$, либо $x=-1$. В первом случае $x=+1$ мы имеем $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4}{2^3}$, и потому y имеет максимум, равный $\frac{1}{2}$; во втором случае $x=-1$ мы имеем $\frac{d^2y}{dx^2}=+\frac{4}{2^3}$, поэтому y имеет минимум, равный $-\frac{1}{2}$.

То же самое можно найти легче, если обратить предложенную дробь $\frac{x}{1+x^2}$, положив $y=\frac{1+x^2}{x}=x+\frac{1}{x}$; нужно только заметить, что максимум, который мы найдём, обратится в минимум, и наоборот. Мы будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{x^2}, \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{x^3}.$$

Таким образом, положив $\frac{dy}{dx}=0$, будем иметь $x^2-1=0$ и, следовательно, либо $x=+1$, либо $x=-1$, как и прежде. В случае $x=+1$ мы имеем $\frac{d^2y}{dx^2}=2$, поэтому y есть минимум, а предложенная формула $\frac{1}{y}$ — максимум. В случае же $x=-1$ мы имеем $\frac{d^2y}{dx^2}=-2$, откуда y есть максимум, а $\frac{1}{y}$ — минимум.

Пример 2

Найти случаи, в которых формула $\frac{2-3x+x^2}{2+3x+x^2}$ становится максимумом или минимумом.

Положив $y=\frac{2-3x+x^2}{2+3x+x^2}$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x^2-12}{(x^2+3x+2)^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-12x^3+72x+72}{(x^2+3x+2)^3}.$$

Положим $\frac{dy}{dx}=0$; тогда либо $x=+\sqrt{2}$, либо $x=-\sqrt{2}$. В первом случае $x=+\sqrt{2}$ будем иметь

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{48\sqrt{2}+72}{(4+3\sqrt{2})^3}.$$

Это значение положительно, так как числитель и знаменатель положительны; следовательно, минимальное значение y равно

$$\frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}=12\sqrt{2}-17=-0{,}029\,437\,25.$$

Во втором случае $x=-\sqrt{2}$ имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-48\sqrt{2}+72}{(4-3\sqrt{2})^3}=\frac{24(3-2\sqrt{2})}{(4-3\sqrt{2})^3}.$$

Это значение будет отрицательным, так как числитель положителен, а знаменатель отрицателен; поэтому максимальное значение y будет равно

$$\frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}=-12\sqrt{2}-17=-33{,}970\,562\,74.$$

Хотя это значение меньше, чем первое, минимальное, однако оно является максимумом, так как оно больше, чем ближайшие соседние значения, получаемые, если вместо x подставить значения либо немного большие, либо немного меньшие, чем $-\sqrt{2}$. Так как $\sqrt{2}$ содержится между пределами $\frac{4}{3}$ и $\frac{3}{2}$, то легко произвести проверку следующим образом:

если $x=\frac{4}{3}$, то $y=-\frac{2}{70}=-0{,}0285$;

если $x=\sqrt{2}$, то $y=12\sqrt{2}-17=-0{,}0294$ минимум;

если $x=\frac{3}{2}$, то $y=-\frac{1}{35}=-0{,}0285$;

если $x=-\frac{4}{3}$, то $y=-35$;

если $x=-\sqrt{2}$, то $y=-33{,}970$ максимум;

если $x=-\frac{3}{2}$, то $y=-35$.

Пример 3

Найти случаи, в которых формула $\frac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$ становится максимумом или минимумом.

Положим $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$, тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x^2-4x}{(x^2+x-1)^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-4x^3+12x^2+4}{(x^2+x-1)^3}.$$

Положим $\frac{dy}{dx}=0$, тогда либо $x=0$, либо $x=2$; в первом случае $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4}{1}$, поэтому y будет иметь максимум, равный -1. Во втором случае $x=2$

мы имеем $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{20}{5^3}$, поэтому y имеет минимум, равный $\frac{3}{5}$, хотя тот максимум меньше, чем этот минимум. Это можно будет проверить, давая x следующие значения:

если $x=-\frac{1}{3}$, то $y=-\frac{13}{11}$;
если $x=0$, то $y=-1$ максимум;
если $x=+\frac{1}{3}$, то $y=-\frac{7}{5}$;
если $x=2-\frac{1}{3}$ то $y=\frac{19}{31}$;
если $x=2$, то $y=\frac{3}{5}$ минимум;
если $x=2+\frac{1}{3}$, то $y=\frac{37}{61}$.

Из того, что если положить $x=1$, будем иметь $y=1$ и, следовательно, $y>-1$, мы заключаем, что между значениями 0 и 1 количества x содержится какое-то одно значение, при котором $y=\infty$.

Пример 4

Пусть ищутся случаи, в которых дробь $\frac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$ *становится максимумом или минимумом.*

Положив $y=\frac{x^3+x}{x^4-x^2+1}$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^6-4x^4+4x^2+1}{(x^4-x^2+1)^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x^9+18x^7-30x^5-16x^3+12x\ ^{1})}{(x^4-x^2+1)^3}.$$

Следовательно, мы будем иметь уравнение

$$x^6+4x^4-4x^3-1=0;$$

оно разлагается на два уравнения:

$$x^2-1=0 \quad \text{и} \quad x^4+5x^2+1=0,$$

из которых первое имеет корни $x=+1$ и $x=-1$, а второе, будучи разрешённым, дает $x^2=-\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, из чего не получается никакого действительного корня. Из двух найденных корней первый $x=+1$ даёт $\frac{d^2y}{dx^2}=-14$[2]), и потому y имеет максимум, равный 2; второй же корень $x=-1$ даёт $\frac{d^2y}{dx^2}=+14$[3]), поэтому y имеет минимум, равный -2.

---

[1]) В первом издании $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x^9+18x^7-24x^5-16x^3+12x}{(x^4-x^2+1)^3}$. [Г.К.]

[2]) В первом издании $\frac{d^2y}{dx^2}=-8$. [Г. К.]

[3]) В первом издании $\frac{d^2y}{dx^2}=+8$. [Г. К.]

Пример 5

Найти случаи, в которых дробь $\frac{x^3-x}{x^4-x^2+1}$ *становится максимумом или минимумом.*

Положив $y=\frac{x^3-x}{x^4-x^2+1}$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^6+2x^4+2x^2-1}{(x^4-x^2+1)^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x^9-6x^7-18x^5+20x^3}{(x^4-x^2+1)^3}.$$

Положив же $\frac{dy}{dx}=0$, будем иметь

$$x^6-2x^4-2x^2+1=0;$$

разделив это на x^2+1, получим

$$x^4-3x^2+1=0.$$

Это уравнение разлагается на

$$x^2-x-1=0 \quad \text{и} \quad x^2+x-1=0,$$

откуда получаем следующие четыре действительных корня:

$$\text{I. } x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{II. } x=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{III. } x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{IV. } x=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Так как все эти корни содержатся в уравнении $x^4-3x^2+1=0$, то, положив $x^4=3x^2-1$, мы будем иметь для всех корней

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x(10-20x^2)}{8x^6}=\frac{5(1-2x^2)}{2x^5}=\frac{5(1-2x^2)}{2x(3x^2-1)} \quad \text{и} \quad y=\frac{x^3-x}{2x^2}=\frac{x^2-1}{2x}.$$

Для двух же первых корней, получаемых из уравнения $x^2=x+1$, мы будем иметь

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{5(2x+1)}{2x(3x+2)}=-\frac{5(2x+1)}{2(5x+3)} \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, первый корень $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ даёт

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{5(2+\sqrt{5})}{11+5\sqrt{5}},$$

и потому y есть максимум. Второй корень $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ даёт

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{5(2-\sqrt{5})}{11-5\sqrt{5}}=-\frac{5(\sqrt{5}-2)}{5\sqrt{5}-11},$$

и потому $y=\frac{1}{2}$ также будет максимумом. Два остальных корня дают значение $y=-\frac{1}{2}$, которое является минимумом.

266. В этих примерах исследование того, какое из найденных значений даёт максимум, а какое минимум, можно было бы произвести легче. Действительно, так как $\frac{dy}{dx}=0$, то значение члена $\frac{d^2y}{dx^2}$, принимая во внимание это уравнение, можно выразить проще. Пусть предложена дробь $y=\frac{P}{Q}$. Так как

$$dy=\frac{Q\,dP-P\,dQ}{Q^2} \quad \text{и} \quad Q\,dP-P\,dQ=0,$$

то

$$d^2y=\frac{d(Q\,dP-P\,dQ)}{Q^2}-\frac{2dQ\,(Q\,dP-P\,dQ)}{Q^3}.$$

Но так как $Q\,dP-P\,dQ=0$, то второй член исчезает, и мы будем иметь

$$d^2y=\frac{d(Q\,dP-P\,dQ)}{Q^2}=\frac{Q\,d^2P-P\,d^2Q}{Q^2}.$$

Так как решение вопроса зависит от того, является ли значение этого члена положительным или отрицательным, а знаменатель его Q^2 всегда положителен, то дело сводится к рассмотрению только числителя: всякий раз как $Q\,d^2P - P\,d^2Q$ или $\frac{d(Q\,dP-P\,dQ)}{dx^2}$ будет положительным, мы можем сказать, что имеется минимум, если же это значение отрицательно, то максимум. Другими словами, после того как будет найдено $\frac{dy}{dx}$, которое будет иметь вид $\frac{R}{Q^2}$, нужно отыскать только $\frac{dR}{dx}$, и если корень этого выражения даёт положительное значение, то из него получается минимум, если же отрицательное — то максимум.

267. Если знаменатель предложенной дроби будет квадратом или какой-либо более высокой степенью, так что $y=\frac{P}{Q^n}$ то получим

$$dy=\frac{Q\,dP-nP\,dQ}{Q^{n+1}}.$$

Положив $\frac{Q\,dP-nP\,dQ}{dx}=R$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{R}{Q^{n+1}},$$

и максимумы и минимумы определятся из корней уравнения $R=0$. Так как, далее,

$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{Q\,dR-(n+1)\,R\,dQ}{Q^{n+2}},$$

то, поскольку $R=0$, будем иметь

$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{dR}{Q^{n+1}};$$

если это значение положительно, будем иметь минимум, а если отрицательно — максимум. Но ясно, что если n есть нечётное число, то поскольку Q^{n+1} всегда положительно, заключение можно вывести, рассматривая только $\frac{dR}{dx}$; если же n есть чётное число, то нужно воспользоваться выражением $\frac{Q\,dR}{dx}$.

Положим далее, что предлагается дробь $\frac{P^m}{Q^n}=y$; тогда

$$dy=\frac{(mQ\,dP-nP\,dQ)\,P^{m-1}}{Q^{n+1}}.$$

Таким образом, если положить $\frac{mQ\,dP-nP\,dQ}{dx}=R$, то корни уравнения $R=0$ укажут случаи, в которых функция y становится максимумом или минимумом. Так как

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P^{m-1}R}{Q^{n+1}},$$

то

$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{P^{m-2}R\,((m-1)\,Q\,dP-(n+1)\,P\,dQ)}{Q^{n+2}}+\frac{P^{m-1}\,dR}{Q^{n+1}},$$

и поскольку $R=0$, получим

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P^{m-1}\,dR}{Q^{n+1}\,dx}.$$

Это выражение можно сверх того разделить на какой-либо квадрат $\frac{P^{2\mu}}{Q^{2\nu}}$. Кроме того, уравнение $P=0$ также даст максимум или минимум, если m будет чётным числом; таким же образом, если мы рассмотрим обратное выражение $\frac{Q^n}{P^m}$, то увидим, что максимум или минимум получится при $Q=0$, если n будет числом чётным, как мы уже указывали выше (§ 257). Здесь, однако, мы не останавливаемся на тех максимумах или минимумах, которые проистекают отсюда, и для разъяснения метода исследуем лишь те, которые получаются из уравнения $R=0$.

Пример 1

Предлагается функция $\frac{(\alpha+\beta x)^m}{(\gamma+\delta x)^n}$; *спрашивается, в каком случае она становится максимумом или минимумом.*

Положим $y=\frac{(\alpha+\beta x)^m}{(\gamma+\delta x)^n}$; прежде всего ясно, что $y=0$, если $x=-\frac{\alpha}{\beta}$ и $y=\infty$, если $x=-\frac{\gamma}{\delta}$. Первый из этих случаев даст минимум, а второй — максимум, если m и n будут чётными числами. Кроме того, будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\alpha+\beta x)^{m-1}}{(\gamma+\delta x)^{n+1}}\,((m-n)\,\beta\delta x+m\beta\gamma-n\alpha\delta),$$

и потому

$$R=(m-n)\,\beta\delta x+m\beta\gamma-n\alpha\delta.$$

Положив $R=0$, будем иметь

$$x=\frac{n\alpha\delta-m\beta\gamma}{(m-n)\,\beta\delta}.$$

Далее, поскольку $\frac{dR}{dx}=(m-n)\,\beta\delta$, нужно посмотреть, является ли

$$\frac{P^{m-1}\,dR}{Q^{n+1}\,dx}=\frac{m^{m-1}\,\beta^{n+1}}{n^{n+1}\,\delta^{m-1}}\left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{m-n}\right)^{m-n-2}\cdot\frac{dR}{dx}.$$

положительным или отрицательным количеством. В первом случае предложенная формула будет минимумом, во втором — максимумом.

Так, если $y=\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$, то $\frac{P^{m-1}\,dR}{Q^{n+1}\,dx}=\frac{9}{8}$, и поэтому формула $\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ будет минимумом, если положить $x=0$.

Если же $y=\frac{(x-1)^m}{(x+1)^n}$, то

$$\frac{P^{m-1}\,dR}{Q^{n+1}\,dx}=\frac{m^{m-1}}{n^{n+1}}\left(\frac{n-m}{2}\right)^{m-n+2}(m-n)$$

и $x=\frac{n+m}{n-m}$. Так как m и n предполагаются положительными числами, то решение вопроса получается из формулы $(n-m)^{n-m+2}\,(m-n)$ или $(n-m)^{n-m}\,(m-n)$. Если $n>m$, то найденное значение $x=\frac{n+m}{n-m}$ всегда даст максимум; если же $n<m$, то чётное число $m-n$ даст минимум, нечётное же — максимум; так, например, $\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ будет максимумом при $x=-5$; действительно, $y=-\frac{6^3}{4^2}=-\frac{27}{2}$.

Пример 2

Пусть предложена формула $y=\frac{(1+x)^3}{(1+x^2)^2}$.

Мы будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+x)^2}{(1+x^2)^3}(3-4x-x^2) \quad \text{и} \quad \frac{P^{m-1}}{Q^{n+1}}\cdot\frac{dR}{dx}=-\frac{(1+x)^2}{(1+x^2)^3}(2x+4).$$

Так как здесь $(1+x)^2$ и $(1+x^2)^3$ всегда имеют положительное значение, то решение вопроса сводится к рассмотрению формулы $-x-2$; если она положительна — имеем минимум, если же отрицательна — максимум. Но из уравнения $3-4x-x^2=0$ следует, что либо

$$x=-2+\sqrt{7} \quad \text{либо} \quad x=-2-\sqrt{7}.$$

В первом случае $-x-2=-\sqrt{7}$, так что предложенная дробь будет максимумом; во втором же случае — минимумом, так как $-x-2=+\sqrt{7}$. Если положить $x=-2+\sqrt{7}$, то будем иметь $1+x=-1+\sqrt{7}$ и $1+x^2=12-4\sqrt{7}$, откуда

$$y=\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{12-4\sqrt{7}}\right)(\sqrt{7}-1)=\frac{(2+\sqrt{7})^2\,(\sqrt{7}-1)}{16}=\frac{17+7\sqrt{7}}{16}=2{,}220.$$

Если же положить $x=-2-\sqrt{7}$, то будем иметь

$$y=\frac{17-7\sqrt{7}}{16}=-0{,}0950.$$

268. Существуют также иррациональные и трансцендентные функции, которые обладают свойством однозначных функций и потому для них максимумы и минимумы могут быть найдены тем же способом. Действительно, кубические корни и корни всех нечётных степеней являются на самом деле однозначными, так как они дают лишь одно действительное значение. Что же касается квадратных корней и корней всех чётных степеней, то хотя они на самом деле, если только являются действительными, имеют два значения — одно положительное, другое — отрицательное, однако каждый из этих корней может рассматриваться сам по себе, и в этом смысле можно искать максимум и минимум. Так, если y будет какой-либо функцией от x, то хотя корень из y имеет два значения, однако каждое из них можно рассматривать отдельно, а именно, $+\sqrt{y}$ будет иметь максимальное или минимальное значение, если y будет иметь таковое, и притом будет положительным, ибо в противном случае корень из y будет мнимым. Наоборот, $-\sqrt{y}$ будет минимумом или максимумом в тех случаях, в которых $+\sqrt{y}$ будет максимумом или минимумом. Что же касается какой-либо степени $y^{\frac{m}{n}}$, то она будет максимумом или минимумом в тех же случаях, если n будет числом нечётным; если же n будет чётным числом, то нужно рассматривать лишь те случаи, в которых y получает положительное значение, в этих случаях одно из двух значений даёт максимум, а другое минимум.

269. Так как дифференциальное уравнение, порождаемое степенью функции y^m, есть $\frac{y^{m-1}\,dy}{dx}=0$ и так как корни этого уравнения указывают вместе с тем те случаи, в которых иррациональная степень $y^{\frac{m}{n}}$ является максимумом или минимумом, то для определения максимума и минимума мы имеем два уравнения: одно $y^{m-1}=0$ и другое $\frac{dy}{dx}=0$. Первое из них переходит в $y=0$ и даёт максимум или минимум лишь в том случае, если $m-1$ есть нечётное число, т. е. если m есть число чётное. Причина этого была выяснена в § 257. Но если n есть нечётное число, то число m чётно. Поэтому, если мы будем обозначать чётные числа через 2μ, а нечётные — через $2\nu-1$, то функция $y^{2\mu:(2\nu-1)}$ окажется максимумом или минимумом, когда количеству x мы будем давать те значения, которые оно получает как из уравнения $y=0$, так и из уравнения $\frac{dy}{dx}=0$. Если же m есть нечётное число, то функция $y^{(2\mu-1):(2\nu-1)}$ или $y^{(2\mu-1):2\nu}$ становится максимумом или минимумом лишь тогда, когда вместо x мы будем подставлять значения, удовлетворяющие уравнению $\frac{dy}{dx}=0$. При этом во втором случае, т. е. в случае $y^{(2\mu-1):2\nu}$ максимумы и минимумы получатся лишь тогда, когда получаемые из уравнения $\frac{dy}{dx}=0$ значения x дают y положительные значения.

270. Так, выражение $x^{\frac{2}{3}}$ становится минимумом, если положить $x=0$, ибо в этом случае x^2 становится минимумом. Но если выражение $x^{\frac{2}{3}}$ мы не приведём к виду x^2, то вышеизложенный метод ничего не даст, ибо в случае $x=0$ члены ряда

$$y+\frac{\omega\,dy}{dx}+\frac{\omega^2\,d^2y}{2dx^2}+\frac{\omega^3\,d^3y}{6dx^3}+\ldots,$$

которые должны давать критерий, все, кроме первого, становятся бесконечными. Действительно, положив $y=x^{\frac{2}{3}}$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{2\cdot 4}{27x^{\frac{7}{3}}}\quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, ни уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=0$ не даёт значения $x=0$, ни следующие члены не дают признака максимума или минимума. Так как мы приняли, что ряд

$$y+\frac{\omega\, dy}{dx}+\frac{\omega^2 d^2y}{2\,dx^2}+\frac{\omega^3 d^3y}{6\,dx^3}+\cdots$$

становится сходящимся, если ω положить очень малым, то естественно, что общему методу не подчиняются те случаи, в которых этот ряд является расходящимся, что и имеет место в приведённом здесь примере $y=x^{\frac{2}{3}}$, если положить $x=0$. Поэтому в таких случаях необходимо прибегнуть к приведению, которым мы выше воспользовались, чтобы свести предложенное выражение к другому, которое не обладало бы этим недостатком. Это приходится делать, впрочем, в очень редких случаях, которые либо содержатся в формуле $y^{\frac{2\mu}{2\nu-1}}$, либо легко к ней приводятся. Так, если ищутся максимумы или минимумы выражения $y^{\frac{2\mu}{2\nu-1}}\,z$, где есть какая-либо функция от x, то нужно исследовать выражение $y^{2\mu}z^{2\nu-1}$, ибо оно становится максимумом или минимумом в тех же случаях, что и предложенное.

271. За исключением этого случая, который теперь не представляет затруднений, функции, содержащие иррациональные количества, можно изучать так же, как рациональные, и их максимумы и минимумы можно находить таким же образом. Мы поясним это следующими примерами.

Пример 1

Пусть предложена формула $\sqrt{a^2+x^2}-x$; спрашивается, в каких случаях она становится максимумом или минимумом.

Положив $y=\sqrt{a^2+x^2}-x$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-1 \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Таким образом, положив $\frac{dy}{dx}=0$, будем иметь $x=\sqrt{a^2+x^2}$ и, следовательно, $x=\infty$. При этом $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. Подобным образом все следующие члены $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ и т. д. будут равны нулю; таким образом остаётся неизвестным, максимум это или минимум. Причина здесь в том, что на самом деле x может быть равным как $-\infty$, так и $+\infty$. Между тем, полагая $x=+\infty$, мы в силу

$$\sqrt{a^2+x^2}=x+\frac{a^2}{2x}\,,$$

получаем $y=0$; это значение является наименьшим из всех.

Пример 2

Пусть ищутся случаи, в которых выражение $\sqrt{a^2+2bx+mx^2}-nx$ становится максимумом или минимумом.

Положив $y=\sqrt{a^2+2+bxmx^2}-nx$, будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b+mx}{\sqrt{a^2+2bx+mx^2}}-n.$$

Приравняв это нулю, будем иметь

$$b^2+2mbx+m^2x^2=n^2a^2+2n^2bx+mn^2x^2$$

или

$$x^2=\frac{2bx(n^2-m)+n^2a^2-b^2}{m^2-mn^2}.$$

Поэтому

$$x=\frac{(n^2-m)b\pm\sqrt{mn^2(m-n^2)a^2-n^2(m-n^2)b^2}}{m(m-n^2)}$$

или

$$x=-\frac{b}{m}\pm\frac{n}{m}\sqrt{\frac{ma^2-b^2}{m-n^2}},$$

откуда

$$\sqrt{a^2+2bx+mx^2}=\frac{b+mx}{n}\pm\sqrt{\frac{ma^2-b^2}{m-n^2}}.$$

Но так как

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{ma^2-b^2}{(a^2+2bx+mx^2)^{\frac{3}{2}}},$$

то будем иметь

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{ma^2-b^2}{\pm\left(\frac{ma^2-b^2}{m-n^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\pm\frac{(m-n^2)\sqrt{m-n^2}}{\sqrt{ma^2-b^2}}.$$

Следовательно, если $\frac{m-n^2}{ma^2-b^2}$ не будет положительным количеством, то ни максимума, ни минимума вовсе не будет. Если же оно будет положительным, то верхний знак даст минимум, если $m>n^2$, и максимум, если $m<n^2$.

Если взять нижний знак, будем иметь обратное. Так, если $m=2$, $n=1$ и $b=0$, то формула $\sqrt{a^2+2x^2}-x$ становится минимумом при $x=+\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}=\frac{9}{\sqrt{2}}$ и максимумом при $x=-\frac{9}{\sqrt{2}}$. Таким образом, минимум будет равен $a\sqrt{2}-\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ и максимум будет равен $a\sqrt{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{3a}{\sqrt{2}}$.

Пример 3

Пусть ищутся случаи, в которых выражение $\sqrt{1+mx^4}+\sqrt[4]{1-nx^4}$ *становится максимумом или минимумом.*

Так как $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{mx^3}{(1+mx^4)^{\frac{3}{4}}}-\dfrac{nx^3}{(1-nx^4)^{\frac{3}{4}}}$, то

$$mx^3(1-nx^4)^{\frac{3}{4}}=nx^3(1+mx^4)^{\frac{3}{4}},\ \text{так, что}\ m^4(1-nx^4)^3=n^4(1+mx^4)^3$$

или

$$n^4-m^4+3mn(n^3+m^3)x^4+3m^2n^2(n^2-m^2)x^8+m^3n^3(m+n)x^{12}=0.$$

Таким образом, если это уравнение не имеет положительного корня для количества x^4, то вовсе нет ни максимума, ни минимума. Это уравнение неудобно решать в общем виде; так как один из корней есть

$$x^4=\frac{m^{\frac{4}{3}}-n^{\frac{4}{3}}}{mn(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n})}\quad\text{или}\quad x^4=\frac{m-\sqrt[3]{m^2n}+\sqrt[3]{mn^2}-n}{mn},$$

то мы возьмём частный случай $m=8n$; тогда будем иметь

$$-4095+24\cdot 513nx^4-3\cdot 63\cdot 64n^2x^8+9\cdot 512n^3x^{12}=0$$

или

$$512n^3x^{12}-1344n^2x^8+1368nx^4-455=0.$$

Положим $8nx^4=z$; тогда будем иметь

$$z^3-21z^2+171z-455=0.$$

Это уравнение имеет делитель $z-5$; другой сомножитель будет $z^2-16z+91=0$; он имеет мнимые корни. Таким образом, мы имеем только $z=8nx^4=5$, так что $x=\sqrt{\dfrac{5}{8n}}$. Это значение делает выражение $\sqrt[4]{(1+8nx^4)}+\sqrt[4]{1-nx^4}$ максимумом или минимумом. Чтобы узнать, какой из этих случаев имеет место, найдём

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3mx^2}{(1+mx^4)^{\frac{7}{4}}}-\frac{3nx^2}{(1-nx^4)^{\frac{7}{4}}}.$$

Так как $m=8n$, положим $x^4=\dfrac{5}{8n}$, тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{24n}{6^{\frac{7}{4}}}-\frac{3n}{(3:8)^{\frac{7}{4}}}\right)x^2=-\frac{360\,nx^2}{6^{\frac{7}{4}}},$$

так что $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ отрицательно. Следовательно, $\sqrt[4]{1+8nx^4}+\sqrt{1-nx^4}$ при $x=\sqrt[4]{\dfrac{5}{8n}}$ становится максимумом. Этот максимум равен

$\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{\frac{3}{8}}=\frac{3\sqrt[4]{6}}{2}$. Если вместо nx^4 положить u, то, очевидно, выражение $\sqrt{1+8u}+\sqrt[4]{1-u}$ становится максимумом при $u=\frac{5}{8}$, и это максимальное значение будет равно $\frac{3\sqrt[4]{6}}{2}=2{,}347\,627$. Следовательно, какое бы значение ни написать вместо $\frac{5}{8}$, наше выражение примет меньшее значение.

272. Подобным же образом будут определяться максимумы и минимумы, если в предложенное выражение будут входить также и трансцендентные количества. За исключением случая, когда предложенная функция будет многозначной и нужно будет несколько её значений рассматривать одновременно, корни дифференциального уравнения дадут максимумы или минимумы, если только не окажется, что имеются равные корни в чётном числе. Мы поясним это исследование на нескольких примерах.

Пример 1

Найти число, которое имеет минимальное отношение к своему логарифму.

Что такое минимальное отношение существует — ясно из того, что это отношение становится бесконечным как при $x=1$, так и при $x=\infty$. Следовательно, обратно, дробь $\frac{lx}{x}$ где-то имеет максимальное значение, именно там, где $\frac{x}{lx}$ становится минимумом. Чтобы найти решение этого вопроса, положим $y=\frac{lx}{x}$; тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}-\frac{lx}{x^2}.$$

Положив его равным нулю, будем иметь $lx=1$ и, так как здесь мы взяли гиперболический логарифм, то, если обозначить через e число, гиперболический логарифм которого равен 1, то будем иметь $x=e$. А так как всякие логарифмы находятся в постоянном отношении к гиперболическим, то и при любом основании логарифмов отношение $\frac{e}{le}$ будет минимальным, т. е. отношение $\frac{le}{e}$ — максимальным. Так как для табличных логарифмов $le=0{,}434\,294\,481\,9$, то дробь $\frac{lx}{x}$ будет всегда меньше, чем $\frac{434\,294\,481\,9}{271\,828\,182\,84}$, т. е. приблизительно меньше, чем $\frac{47}{305}$, и нет такого числа, которое имело бы к своему логарифму отношение, меньшее, чем 305 к 47. Что в этом случае мы имеем максимум, ясно из того, что вследствие $\frac{dy}{dx}=\frac{1-lx}{x^2}$ мы будем иметь

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^3}-\frac{2(1-lx)}{x^3}=-\frac{1}{x^3},$$

ибо $1-lx=0$; таким образом, $\frac{d^2y}{dx^2}$ отрицательно.

Пример 2

Найти такое число x, чтобы степень $x^{\frac{1}{x}}$ стала максимумом.

Что у этого выражения есть максимум видно из того, что, подставляя вместо x числа, мы имеем

$$1^{\frac{1}{1}} = 1{,}000\,000$$
$$2^{\frac{1}{2}} = 1{,}414\,213$$
$$3^{\frac{1}{3}} = 1{,}442\,250$$
$$4^{\frac{1}{4}} = 1{,}414\,213$$

Положим $x^{\frac{1}{x}} = y$; тогда

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1x}{x^2}\right).$$

Положив это значение равным нулю, будем иметь $1x = 1$ и $x = e$, где $e = 2{,}718\,281\,828$.

А так как $\frac{dy}{dx} = (1 - 1x)\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, то будем иметь

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^3} + (1 - 1x)\frac{d}{dx}\cdot\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^3}\ ^{1)},$$

ибо $1 - 1x = 0$. Так как $\frac{d^2y}{dx^2}$ есть отрицательное количество, то $x^{\frac{1}{x}}$ становится максимумом при $x = e$. Но так как $e = 2{,}718\,281\,182\,8$, то находим, что $e^{\frac{1}{e}} = 1{,}444\,667\,861\,009\,764\,7$. Это значение легко получается из ряда

$$e^{\frac{1}{e}} = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{6e^3} + \frac{1}{24e^4} + \text{ и т. д.}$$

Этот пример легко также решить, основываясь на предыдущем. Действительно, если $x^{\frac{1}{x}}$ есть максимум, то также и его логарифм, который равен $\frac{1x}{x}$, должен быть максимумом; а для этого, как мы нашли, должно быть $x = e$.

Пример 3

Найти такую дугу x, чтобы её синус был максимумом или минимумом.

Положив $\sin x = y$, будем иметь $\frac{dy}{dx} = \cos x$; поэтому $\cos x = 0$. Отсюда получаются следующие значения x: $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$ и т. д. Но

---

[1]) В первом издании $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^3} + (1 - 1x)\,d\cdot\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^3}$. [*Г. К.*]

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$. Так как эти значения, будучи подставлены вместо x, дают для количества $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$, либо -1, либо $+1$, то в первом случае будем иметь максимумы, а во втором — минимумы, как и известно.

Пример 4

Найти такую дугу x, чтобы прямоугольник $x \sin x$ стал максимальным.

Что максимум существует — ясно из того, что как в случае $x = 0°$, так и в случае $x = 180°$ предложенный прямоугольник исчезает. Положим $y = x \sin x$; тогда

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + x \cos x.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} x = -x.$$

Пусть $x = 90° + u$; тогда $\operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg} u$; следовательно, $\operatorname{ctg} u = 90° + u$. Чтобы решить это уравнение по способу, изложенному выше (§ 234), положим $z = 90° + u - \operatorname{ctg} u$, и пусть f есть искомое значение дуги u. Так как $dz = du + \frac{du}{\sin^2 u}$, то

$$p = \frac{du}{dz} = \frac{\sin^2 u}{1 + \sin^2 u}, \quad dp = \frac{2\, du \sin u \cos u}{(1 + \sin u)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{dp}{dz} = q = \frac{2 \sin^3 u \cos u}{(1 + \sin^2 u)^3}, \quad dq = \frac{6\, du \sin^2 u \cos^2 u - 2\, du \sin^4 u}{(1 + \sin^2 u)^3} - \frac{12\, du \sin^4 u \cos^2 u}{(1 + \sin^2 u)^4}.$$

Следовательно,

$$\frac{dq}{dz} = r = \frac{6 \sin^4 u \cos^2 u - 2 \sin^6 u}{(1 + \sin^2 u)^4} - \frac{12 \sin^6 u \cos^2 u}{(1 + \sin^2 u)^5} = \frac{6 \sin^4 u - 14 \sin^6 u + 4 \sin^8 u}{(1 + \sin^2 u)^5}.$$

Отсюда будем иметь

$$f = u - pz + \frac{1}{2} qz^2 - \frac{1}{6} rz^3 + \text{ и т. д.}$$

Положим, что после нескольких проб мы нашли для f приближённое значение $u = 26° 15'$; тогда $90° + u = 116° 15'$ и дуга, равная котангенсу, определится следующим образом. От

$$\operatorname{l\,ctg} u = 10{,}307\,025\,0$$

отнимем

$$\begin{array}{r} 4{,}685\,574\,9 \\ \hline 5{,}621\,450\,1 \\ \hline \end{array}$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} u = 418\,263{,}7''$$

или

$$\operatorname{ctg} u = 116° \, 11' 3 \tfrac{7}{10}'',$$

откуда

$$z = 3' 56 \tfrac{3}{10}'' = 236{,}3''.$$

Чтобы найти значение члена pz, выполним следующее вычисление:

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}\sin u &= 9{,}645\,705\,8\\
\mathrm{l}\sin^2 u &= 9{,}291\,411\,6\\
1+\sin^2 u &= 1{,}195\,61\\
\mathrm{l}(1+\sin^2 n) &= 0{,}077\,589\,5\\
\mathrm{l}\,p &= 9{,}213\,822\,1\\
\mathrm{l}\,z &= 2{,}373\,463\,7\\
\mathrm{l}\,pz &= 1{,}587\,285\,8
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$pz = 38{,}6621 \text{ секунды}$$

или

$$pz = 38''\,39'''\,43''''$$

отняв от

$$u = 26^\circ\,15'$$

получим

$$f = 26^\circ\,14'\,21''\,20'''\,17''''$$

и искомая дуга

$$x = 116^\circ\,14'\,21''\,20'''\,17''''.$$

Кроме того, нужно прибавить третий член $\frac{1}{2}qz^2 = \frac{\sin^3 u \cos u}{(1+\sin^2 u)^3} z^2$.

Для того чтобы найти его значение, нужно выразить z в частях радиуса следующим образом:

$$\mathrm{l}\,z = 2{,}373\,463\,7$$

прибавим

$$\begin{aligned}
&4{,}685\,574\,9\\
&7{,}059\,038\,6
\end{aligned}$$

прибавим

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2 u}{1+\sin^2 u} z &= 1{,}587\,285\,8\\
&\ 8{,}646\,324\,4
\end{aligned}$$

прибавим

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}\sin u &= 9{,}645\,705\,8\\
\mathrm{l}\cos u &= 9{,}952\,730\,8\\
&\ 8{,}244\,760\,0
\end{aligned}$$

вычтем

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}(1+\sin^2 u)^3 &= 0{,}155\,179\,0\\
\mathrm{l}\,\frac{1}{2}qz^2 &= 8{,}089\,581\,0
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} qz^2 = 0{,}012\,291$$

или

$$\frac{1}{2} qz^2 = 44'''' \, 15'''''.$$

Учтя и этот член, получим искомую дугу

$$x = 116^\circ \, 14' \, 21'' \, 21''' \, 0'''';$$

если же воспользоваться более точными логарифмами, найдём

$$x = 116^\circ \, 14' \, 21'' \, 20''' \, 35'''' \, 47'''''.$$

ГЛАВА XI

О МАКСИМУМАХ И МИНИМУМАХ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

273. Если y будет многозначной функцией от x, так что для каждого значения x она будет получать несколько действительных значений, то при изменении x эти несколько значений будут связаны друг с другом таким образом, что они представят несколько рядов значений. В самом деле, если y мы будем рассматривать как ординату кривой линии, а x — как абсциссу, то сколько y будет иметь различных действительных значений, столько различных ветвей одной и той же кривой будут отвечать одной и той же абсциссе; и те значения y, которые составляют одну и ту же ветвь, мы должны считать связанными друг с другом; значения же, относящиеся к различным ветвям, будут разъединёнными друг от друга. Итак, мы будем иметь столько рядов взаимно связанных значений y, сколько различных действительных корней y принимает при каком-либо значении x. И в каждом из рядов значения y, когда x возрастает, либо возрастают, либо убывают, либо сначала возрастают, а потом убывают, либо наоборот. Отсюда ясно, что в каждом ряде взаимно связанных значений существуют максимумы и минимумы так же, как для функций однозначных.

274. Для разыскания этих максимумов и минимумов пригоден тот же метод, который был изложен в предыдущей главе для однозначных функций. Действительно, так как при возрастании переменного x на ω функция y всегда принимает вид

$$y+\frac{\omega\, dy}{dx}+\frac{\omega^2\, d^2y}{2\, dx^2}+\frac{\omega^3\, d^3y}{6\, dx^3}+\text{ и т. д.},$$

то необходимо, чтобы для случая максимума или минимума член $\frac{\omega\, dy}{dx}$ исчезал, т. е. чтобы $\frac{dy}{dx}=0$. Следовательно, корни уравнения $\frac{dy}{dx}=0$ укажут те значения x, которым в отдельных рядах взаимно связанных значений y соответствуют максимумы или минимумы. При этом не возникнет сомнений, в каком именно ряде взаимно связанных значений будет иметь место максимум или минимум. В самом деле, так как в уравнение $\frac{dy}{dx}=0$ будут входить обе переменные x и y, то нельзя будет определить значения x иначе, как исключив переменное y с помощью уравнения, дающего отношение между x и y. Но прежде чем сделать это, мы придём к уравнению, которое представит значение y в виде рациональной или однозначной функции от x. Таким образом, найдя значения x, мы для каждого из них найдём и соответствующее значение y, которое будет максимумом или минимумом в том ряде последовательных взаимно связанных значений, которому оно принадлежит.

275. Признак же того, являются ли эти значения максимумами или минимумами, можно установить таким же образом, как это было указано раньше. Именно, нужно найти значение количества $\frac{d^2y}{dx^2}$, выраженное в конечном виде, и в него вместо x подставить последовательно все найденные значения x; в то же время вместо y нужно подставлять значения, соответствующие взятым значениям x. После этого нужно посмотреть, примет ли выражение $\frac{d^2y}{dx^2}$ положительное или отрицательное значение. В первом случае будем иметь минимум, а во втором максимум. Если же и $\frac{d^2y}{dx^2}$ исчезает, тогда нужно взять выражение $\frac{d^3y}{dx^3}$; если оно в этом случае не исчезает, то мы не имеем ни максимума, ни минимума; если же и $\frac{d^3y}{dx^3}$ исчезает, то нужно исследовать выражение $\frac{d^4y}{dx^4}$ таким же образом, как раньше мы исследовали $\frac{d^2y}{dx^2}$; если же в каком-либо случае и $\frac{d^4y}{dx^4}$ будет исчезать, нужно будет взять пятый дифференциал количества $\frac{d^5y}{dx^5}$, и всегда, как бы далеко ни пришлось итти, заключение, к которому приводят дифференциалы нечётного порядка, будет тем же, которое указано для выражения $\frac{d^3y}{dx^3}$. Таким образом, в этих случаях нужно будет брать выражения $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ и т. д., до тех пор, пока не придём к такому, которое в предложенном случае не исчезает; если это будет дифференциальная формула нечётного порядка, то не будет ни максимума, ни минимума; если же чётного порядка, то положительное значение будет служить признаком минимума, а отрицательное—признаком максимума.

276. Положим, что функция y определяется через x каким-либо уравнением; дифференцируя это уравнение, получим формулу вида $P\,dx + Q\,dy = 0$. Следовательно, положив $\frac{dy}{dx} = 0$, будем иметь $\frac{P}{Q} = 0$ и, значит, либо $P = 0$, либо $Q = \infty$. Последнее уравнение не может, однако, иметь места, если соотношение между x и y выражено целым рациональным уравнением, ибо либо x, либо y тогда должно было бы стать бесконечным. Поэтому исследованию подлежит только уравнение $P = 0$; его корни, т. е. значения, которые x получает после того, как с помощью предложенного уравнения переменное y будет полностью исключено, укажут случаи, когда значения y становятся максимальными или минимальными. Для суждения же о том, получается ли максимум или минимум, нужно рассмотреть формулу $\frac{d^2y}{dx^2}$. Если дифференциальное уравнение $P\,dx + Q\,dy = 0$, мы продифференцируем ещё раз и положим

$$dP = R\,dx + S\,dy \quad \text{и} \quad dQ = T\,dx + V\,dy,$$

то при постоянном dx будем иметь

$$R\,dx^2 + S\,dx\,dy + T\,dx\,dy + V\,dy^2 + Q\,d^2y = 0.$$

А так как мы уже имеем $\frac{dy}{dx} = 0$, то, разделив уравнение на dx^2, получим

$$R + Q\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{так что} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{R}{Q}.$$

Следовательно, в дифференциальном уравнении $P\,dx + Q\,dy = 0$ нужно дифференцировать только количество P, полагая y постоянным; тогда мы получим $R\,dx$; затем найдём значение дроби $\frac{R}{Q}$; если оно будет положительным, будем иметь минимум; если отрицательным — максимум.

277. Пусть y есть двузначная функция от x, определяемая уравнением $y^2 + py + q = 0$, где p и q суть какие-либо однозначные функции от x. Дифференцируя, будем иметь $2y\,dy + p\,dy + y\,dp + dq = 0$ и, следовательно, $P\,dx = y\,dp + dq$. Положив $P = 0$, будем иметь $y\,dp + dq = 0$ и получим $y = -\frac{dq}{dp}$, так что y представится однозначной функцией от x; таким образом, какое бы значение ни было найдено для x, из него и из y будет найдено одно определённое значение этой функции. Исключение же y выполняется легко: если в предложенное уравнение $y^2 + py + q = 0$ вместо y подставить значение $-\frac{dq}{dp}$, то получим $dq^2 - p\,dp\,dq + q\,dp^2 = 0$; если это уравнение разделить на dx^2 и разрешить, то получим все значения x, которым соответствуют максимумы или минимумы; это будет яснее из следующих примеров.

Пример 1

Предложено уравнение $y^2 + mxy + a^2 + bx + nx^2 = 0$. Определить максимумы или минимумы функции y.

Продифференцировав уравнение, будем иметь

$$2y\,dy + mx\,dy + my\,dx + b\,dx + 2nx\,dx = 0,$$

откуда

$$P = my + b + 2nx \quad \text{и} \quad Q = 2y + mx.$$

Положив $P = 0$, получим $y = -\frac{b + 2nx}{m}$; это значение, будучи подставлено в самое уравнение, даёт

$$4\frac{n^2}{m^2}x^2 + \frac{4nb}{m^2}x + \frac{b^2}{m^2} - 2nx^2 - bx + a^2 + nx^2 + bx = 0$$

или

$$x^2 = \frac{4nbx + b^2 + m^2a^2}{m^2n - 4n^2},$$

откуда

$$x = \frac{2nb \pm \sqrt{m^2nb^2 + m^2n(m^2 - 4n)a^2}}{m^2n - 4n^2}$$

или

$$x = \frac{2nb \pm m\sqrt{nb^2 + n(m^2 - 4n)a^2}}{n(m^2 - 4n)} \quad \text{и} \quad y = \frac{-mb \mp 2\sqrt{nb^2 + n(m^2 - 4n)a^2}}{m^2 - 4n}.$$

Полагая теперь переменным только x, получаем $dP = 2n\,dx$, так что $R = 2n$. Но

$$Q = 2y + mx = \pm \frac{\sqrt{nb^2 + n(m^2 - 4n)a^2}}{n},$$

откуда

$$\frac{R}{Q} = \frac{\pm 2n^2}{\sqrt{nb^2 + n(m^2 - 4n)a^2}}.$$

Так как числитель $2n^2$ всегда положителен, то если взять верхний знак, получим для y максимальное значение, если же взять нижний знак — минимальное. Здесь нужно заметить следующее:

I. Если $m = 0$, то из уравнения $P = 0$ тотчас же следует $x = -\frac{b}{2n}$, так что нет нужды ни в каком исключении. Так как $y = \pm\frac{1}{2n}\sqrt{(nb^2 - 4n^2a^2)}$, то этому значению соответствуют два значения y, из которых положительное является максимумом, а отрицательное — минимумом.

II. Если $n = 0$, то получаем $y = -\frac{b}{m}$ и x возрастает до бесконечности[1]), а y на бесконечном протяжении[2]) сохраняет одно и то же значение, так что нет ни максимума, ни минимума.

III. Если $m^2 = 4n$, то будем иметь $4nbx + b^2 + m^2a^2 = 0$ или $x = \frac{b^2 + m^2a^2}{-m^2b}$ и

$$y = -\frac{b + 2nx}{m} = -\frac{2b + m^2x}{2m} = -\frac{2b}{2m} + \frac{b^2 + m^2a^2}{2mb} = \frac{m^2a^2 - b^2}{2mb}\ ^{3)}.$$

Следовательно, соответствующее этому значению $x = -\frac{m^2a^2 + b^2}{m^2b}$ значение $y = \frac{m^2a^2 - b^2}{2mb}$ будет наибольшим или наименьшим. А так как, чтобы получилось это значение y, нужно в выражении

$$y = \frac{-mb \mp \sqrt{nb^2 + n(m^2 - 4n)a^2}}{m^2 - 4n}$$

взять нижний знак, то значение y будет минимальным[4]).

---

[1]) В оригинале in infinitum excrescit. Это выражение у Эйлера обычно означает, что x принимает бесконечно большое значение. Смысл этой фразы можно понимать двояко. Если Эйлер хочет сказать, что y при всевозможных значениях x сохраняет одно и то же значение, то это, конечно, неверно. Но, повидимому, Эйлер хочет сказать, что при достаточно больших значениях x изменения y сколь угодно малы, т. е. что y асимптотически приближается к $-\frac{b}{m}$.

[2]) Per spatium infinitum. Если предыдущее толкование правильно, то здесь имеются в виду значения x, превосходящие некоторое достаточно большое число.

[3]) В первом издании в знаменателях нет множителя 2. Исправил Г. Ковалевский.

[4]) Чтобы получить y из этого выражения, в котором при $m^2 = 4n$ знаменатель обращается в нуль, Эйлер здесь должен был бы разложить числитель в ряд. Верхний знак даст бесконечное значение y; ему соответствует бесконечное значение x. Картина становится совершенно ясной, если прибегнуть к графическому изображению. Данное уравнение в рассматриваемом случае представляет параболу. Характерно, что Эйлер ни здесь, ни в других примерах не прибегает к геометрической интерпретации, хотя он во второй части «Введения в анализ» дал все необходимые в данном случае сведения по аналитической геометрии.

Пример 2

Предложено уравнение $y^2 - x^2y + x - x^3 = 0$; *определить максимальные или минимальные значения* y.

Продифференцировав уравнение, получим

$$2y\,dy - x^2\,dy - 2xy\,dx + dx - 3x^2\,dx + 0.$$

Следовательно,

$$P = 1 - 3x^2 - 2xy \quad \text{и} \quad Q = 2y - x^2.$$

Поэтому, положив $P = 0$, будем иметь $y = \frac{1-3x^2}{2x}$ и, подставив это значение,

$$\frac{1}{4x^2} - \frac{3}{2} + \frac{9x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}x^3 + x - x^3 = 0$$

или

$$1 - 6x^2 + 2x^3 + 9x^4 + 2x^5 = 0.$$

Один корень этого уравнения есть $x = -1$; ему соответствует $y = 1$. Положив y постоянным, имеем $R = -6x - 2y$ и, следовательно,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y + 6x}{2y - x^2};$$

это выражение при $x = -1$ и $y = 1$ даёт -4, так что значение $y = 1$ является максимумом. Значению $x = -1$ соответствует ещё другое значение y, определяемое из уравнения $y^2 - y = 0$. Оно равно нулю и не является ни максимумом, ни минимумом. Если найденное нами уравнение пятой степени разделить на $x + 1$, то получится уравнение, корни которого нельзя определить просто.

Пример 3

Пусть предложено уравнение $y^3 + 2x^2y + 4x - 3 = 0$; *из него требуется найти максимальные или минимальные значения* y.

Дифференцирование даёт уравнение

$$2y\,dy + 2x^2\,dy + 4xy\,dx + 4dx = 0.$$

Положив $\frac{dy}{dx} = 0$, будем иметь $xy + 1 = 0$, откуда $y = -\frac{1}{x}$; это значение, будучи подставлено в предложенное уравнение, даёт уравнение

$$\frac{1}{x^2} - 2x + 4x - 3 = 0 = 2x^3 - 3x^2 + 1,$$

корни которого суть $x = 1$, $x = 1$ и $x = -\frac{1}{2}$. Так как теперь мы имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy + 4}{2y + 2x^2} = -\frac{2xy + 2}{y + x^2},$$

то, дифференцируя, будем иметь $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2y}{y + x^2}$, при этом мы считаем y постоянным (так как принимаем $dy = 0$) и полагаем $xy + 1 = 0$. Итак, мы получаем следующие значения:

x	y	$\frac{d^2y}{dx^2}$
1	-1	∞
1	-1	∞
$-\frac{1}{2}$	2	$-\frac{16}{9}$ максимум.

Так как для равных корней мы имеем $\frac{d^2y}{dx^2}=\infty$, то остаётся неизвестным, имеет ли здесь место максимум или минимум. А так как мы имеем вместе с тем $y+x^3=0$, то в этом случае даже не имеет места $\frac{dy}{dx}=0$, ибо в дроби $\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{Q}$ мы имеем $P=0$ и $Q=0$. Поэтому, коль скоро не имеет места основное свойство максимума и минимума, здесь нет ни того, ни другого. Но мы имеем здесь признак того, что в случае $x=1$ оба значения y равны между собой[1]). Об этом свойстве мы будем говорить подробнее ниже, когда перейдём к приложению дифференциального исчисления к учению о кривых линиях. Правда, вопрос этот имеет отношение и к здесь рассматриваемому, но, чтобы не было необходимости касаться его дважды, мы целиком отложим его до последующего рассмотрения[2]).

278. Для многозначных уравнений существует сверх того другой вид максимумов и минимумов, которые не находятся по вышеизложенному методу. Их свойство можно легко объяснить на примере двузначных функций. Пусть y есть какая-либо двузначная функция от x, так что, какое бы значение ни дать количеству x, для y получатся два значения, которые либо оба действительные, либо оба мнимые. Положим, что эти значения y становятся мнимыми, если положить $x>f$, и действительными, если положить $x<f$. Тогда при $x=f$ два значения y сливаются в одно; пусть оно равно g. Так как при $x>f$ функция не имеет никакого действительного значения, то если окажется, что при $x<f$ оба значения y либо больше, чем g, либо меньше, чем g, тогда в первом случае значение $y=g$ будет минимальным, а во втором — максимальным, ибо в первом случае оно меньше, чем оба предшествующие, а во втором — больше. Такой максимум или минимум нельзя найти по вышеизложенному методу, так как здесь мы не имеем $\frac{dy}{dx}=0$. Такие максимумы или минимумы бывают различных родов, ибо в иных случаях они являются максимумами и минимумами относительно предшествующих и последующих значений, взятых во взаимно связанных рядах, в иных же случаях — максимумами и минимумами относительно двух разделённых значений, либо только предшествующих, либо только последующих.

279. Такой случай имеет место, если предложенное уравнение будет иметь вид

$$y=p\pm(f-x)\sqrt{(f-x)}\,q,$$

где p и x суть функции от x, не делящиеся на $f-x$. Пусть q принимает положительное значение, если положить $x=f$, или немного большим, или немного меньшим. Пусть $p=g$ при $x=f$; очевидно, что при $x=f$ оба значения y сливаются в одно $y=g$; если же $x>f$, то оба значения y становятся мнимыми. Положим поэтому, что x несколько меньше, чем f, скажем, $x=f-\omega$; тогда функция p переходит в

$$g-\frac{\omega\, dp}{dx}+\frac{\omega^2\, d^2p}{2dx^2}-\text{ и т. д.},$$

[1]) В данном случае одновременно удовлетворяются три уравнения $f(xy)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, т. е. для кривой $f(x, y)=0$ точка $x=1$ является кратной.

[2]) См. § 10 вводной статьи.

а функция q — в

$$q - \frac{\omega\, dq}{dx} + \frac{\omega^2 d^2q}{2dx^2} - \text{ и т. д.}$$

Таким образом, в этом случае будем иметь

$$y = g - \frac{\omega\, dp}{dx} + \frac{\omega^2 d^2p}{2dx^2} - \text{ и т. д.} \pm \omega \sqrt{\omega\left(q - \frac{\omega\, dq}{dx} + \frac{\omega^2 d^2q}{2dx^2} - \text{ и т. д.}\right)}.$$

Возьмём ω очень малым, так что по сравнению с ω высшие его степени исчезают; тогда будем иметь $y = g - \frac{\omega\, dp}{dx} \pm \omega\sqrt{\omega q}$. Эти значения количества y будут оба меньше, чем g, если $\frac{dp}{dx}$ будет положительным, и больше, если $\frac{dp}{dx}$ будет отрицательным. Следовательно, двойное значение $y = g$ в первом случае будет максимумом, а во втором случае — минимумом.

280. Таким образом, эти максимумы и минимумы происходят оттого, что, во-первых, при $x = f$ оба значения количества y становятся равными, при $x > f$ — мнимыми, а при $x < f$ — действительными; во-вторых, оттого, что при $x = f - \omega$ второй иррациональный член даёт более высокие степени ω, чем рациональный член. То же самое имеет место и в том случае, если $y = p \pm (f - x)^n \sqrt{(f-x)\, q}$, причём n есть целое число, большее нуля. А так как не только квадратный корень, но и всякий другой корень чётной степени даёт ту же неопределённость знака, то такой же случай будет иметь место, если будем иметь $y = p \pm (f-x)^{\frac{2n+1}{2m}} q$, если только $2n+1 > 2m$; тогда мы будем иметь $(y-p)^{2m} = (f-x)^{2n+1} q^{2m}$ или $(y-p)^{2m} = (f-x)^{2n+1} Q$. Всякий раз как функция y выражается такого рода уравнением, причём $2n+1 > 2m$, значение количества y при $x = f$ будет максимумом или минимумом; первое имеет место, если $\frac{dp}{dx}$ — положительное количество, второе же — если $\frac{dp}{dx}$ — отрицательное количество при $x = f$. Если же в этом случае $\frac{dp}{dx} = 0$, тогда будем иметь

$$y = g + \frac{\omega^2 d^2p}{2dx^2} \pm \omega^{\frac{2n+1}{2m}} q;$$

поэтому если только не имеет места $\frac{2n+1}{2m} > 2$, то мы не будем иметь ни максимума, ни минимума; если же $\frac{2n+1}{2m} > 2$, тогда $y = g$ будет максимумом, если $\frac{d^2p}{dx^2}$ имеет отрицательное значение, и минимумом, если $\frac{d^2p}{dx^2}$ имеет положительное значение; если же и $\frac{d^2p}{dx^2}$ исчезает, то для решения вопроса нужно таким же образом поступать дальше.

281. Итак, если y будет такого рода функцией от x, то может случиться, что кроме максимумов и минимумов, которые даёт первый метод, будут существовать также максимумы и минимумы упомянутого второго рода; их можно будет исследовать изложенным здесь способом. Поясним это следующими примерами.

Пример 1

Определить максимумы и минимумы функции y, которая определяется уравнением

$$y^2 - 2xy - 2x^2 - 1 + 3x + x^3 = 0.$$

Чтобы найти максимумы и минимумы первого рода, продифференцируем уравнение; мы будем иметь

$$2y\,dy - 2x\,dy - 2y\,dx - 4x\,dx + 3dx + 3x^2\,dx = 0.$$

Положим $\frac{dy}{dx} = 0$; будем иметь

$$y = \frac{3}{2} - 2x + \frac{3}{2}x^2.$$

Это значение, будучи подставлено в первое уравнение, даёт уравнение

$$9x^4 - 32x^3 + 42x^2 - 24x + 5 = 0,$$

которое распадается на

$$9x^2 - 14x + 5 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Второе уравнение даёт дважды $x = 1$, и тогда $y = 1$; следовательно, в этом случае в дроби

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3 + 4x - 3x^2}{2y - 2x}$$

исчезает также знаменатель и, таким образом, здесь нет максимума или минимума первого рода; первое же уравнение даст $x = 1$ и $x = \frac{5}{9}$; первое из этих значений порождает то же неудобство, что предыдущие. Положив же $x = \frac{5}{9}$, мы имеем $y = \frac{3}{2} - \frac{10}{9} + \frac{25}{24} = \frac{23}{27}$.

А так как $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3 + 4x - 3x^2}{2y - 2x}$, то $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4 - 6x}{2y - 2x} = \frac{-3x + 2}{y - x}$, ибо $dy = 0$ и числитель равен нулю. Следовательно, будем иметь $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9}{8}$, так что значение $x = \frac{5}{9}$ даёт минимум первого рода. Далее, так как $(y - x)^2 = (1 - x)^3$, то будем иметь

$$y = x \pm (1 - x)\sqrt{(1 - x)},$$

и поэтому при $x = 1$ мы имеем максимум второго рода. Действительно, положив $x = 1 - \omega$, будем иметь $y = 1 - \omega \pm \omega\sqrt{\omega}$; оба эти значения меньше чем 1, если ω взять очень малым.

Пример 2

Найти максимумы и минимумы функции $y = 2x - x^2 \pm (1 - x)^2\sqrt{1 - x}$.

Для нахождения максимумов и минимумов первого рода продифференцируем уравнение; тогда будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2x \mp \frac{5}{2}(1 - x)\sqrt{1 - x}.$$

Это значение, если его положить равным нулю, даёт прежде всего $x=1$, а так как

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2\pm\frac{15}{4}\sqrt{1-x},$$

то y в этом случае будет максимумом первого рода, и будем иметь $y=1$. Разделив же уравнение $\frac{dy}{dx}=0$ на $1-x$, будем иметь

$$4\mp 5\sqrt{1-x}=0 \quad \text{или} \quad 16=25-25x,$$

откуда $x=\frac{9}{25}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}=-2\pm 3$. Поэтому, если взять верхний знак, то будем иметь минимальное значение $y=\frac{2869}{3125}$; если же взять нижний знак, то будем иметь $y=\frac{821}{3125}$, и может показаться, что это максимум; на самом же деле может иметь место только верхний знак, ибо $4\mp 5\sqrt{1-x}$ может быть равным нулю лишь в том случае, если $\sqrt{1-x}=+\frac{4}{5}$. Итак, мы нашли максимум первого рода в случае $x=1$ и $y=1$ и минимум первого рода в случае $x=\frac{9}{25}$ и $y=\frac{2869}{3125}$. Кроме того, мы получаем также максимум второго рода, если $x=1$; в этом случае $y=1$. Действительно, положив $x=1-\omega$, мы будем иметь, что $y=1-\omega^2\pm\omega^2\sqrt{\omega}$ в обоих случаях меньше чем единица. Итак, при $x=1$ сливается два максимума, один первого, другой второго рода; они составляют как бы смешанный максимум.

282. Эти примеры не только уясняют природу этого второго вида максимумов и минимумов, но также позволяют образовать сколько угодно таких функций, которые обладают максимумами или минимумами второго рода. На вопрос же о том, каким образом, если предложена какая-либо функция, можно узнать, обладает ли она такого рода максимумами и минимумами или нет, мы дадим ответ в следующем разделе[1]), так как это исследование очень хорошо пояснит свойства кривых линий. Легко, впрочем, понять, что если y будет такой функцией от x, которая имеет максимум или минимум второго вида, то также и обратно, x будет такого же рода функцией от y. Ибо если в уравнении $(y-x)^2=(1-x)^3$, которое при $x=1$ даёт y максимальное значение второго рода, поменять местами переменные y и x, то уравнение $(x-y)^2=(1-y)^3$ также даст для y такого рода функцию от x, которая будет иметь максимум второго рода. Действительно, положив $x=1$, мы будем иметь $(1-y)^2=(1-y)^3$ и, следовательно, дважды будет $y=1$ и один раз $-y=0$. Если же положить $x=1+\omega$, то будем иметь $(1+\omega-y)^2=(1-y)^3$; значит, если мы положим $y=1+\psi$, то будем иметь $(\omega-\psi)^2=(-\varphi)^3=-\varphi^3$ и, следовательно, φ должно быть отрицательным. Пусть поэтому $y=1-\varphi$; тогда будем иметь $(\omega+\varphi)^2=\varphi^3$. Так как если φ взять очень малым, φ^3 исчезает по сравнению с φ^2, то ω необходимо должно быть отрицательным; следовательно, значению $x=1+\omega$ не будут соответствовать никакие действительные значения количества y. Если же положить $x=1-\omega$ и $y=1-\varphi$, то вследствие $(\varphi-\omega)^2=\varphi^3$ будем иметь $\varphi=\omega\pm\omega\sqrt{\omega}$ и, значит,

[1]) См. § 10 вводной статьи.

$y=1-\omega\mp\omega\sqrt{\omega}$, следовательно, оба значения y, отвечающие значению $x=1-\omega$, меньше, чем значение $y=1$, отвечающее значению $x=1$. Следовательно, это значение y будет максимумом.

283. До сих пор мы рассматривали только двузначные функции; максимумы и минимумы их легко исследуются, так как два их значения легко могут быть выражены с помощью решения квадратного уравнения. Если же функция y выражается уравнением более высокой степени, то можно применить с тем же успехом ранее изложенный метод, с помощью которого мы находили максимумы и минимумы первого рода. Разыскание же максимумов и минимумов второго рода мы откладываем до следующего раздела. Здесь мы приведём несколько примеров того, как нужно поступать с трёхзначными и многозначными функциями.

Пример 1

Пусть функция y, максимумы или минимумы которой ищутся, определена уравнением

$$y^3+x^3=3axy.$$

Дифференцируя это уравнение, получаем

$$3y^2\,dy+3x^2\,dx=3ax\,dy+3ay\,dx,$$

так что

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

Максимум или минимум будет, следовательно, иметь место, если $ay=x^2$ или $y=\frac{x^2}{a}$; если подставить это значение в предложенное уравнение, получим

$$\frac{x^6}{a^3}+x^3=3x^3 \quad \text{или} \quad x^6=2a^3x^3.$$

Таким образом, будем иметь трижды $x=0$; в этом случае также и знаменатель $y^2-ax=0$, ибо $y=\frac{x^2}{a}=0$. Имеет ли место в этом случае максимум или минимум, мы узнаем, если дадим количеству x значение, очень мало отличное от нуля. Таким образом, пусть $x=\omega$ и $y=\varphi$; так как $\varphi^3+\omega^3=3a\omega\varphi$, то либо $\varphi=\alpha\sqrt{\omega}$, либо $\varphi=\beta\omega^2$. В первом случае будем иметь $\alpha^3\omega\sqrt{\omega}=3\alpha a\omega\sqrt{\omega}$ и, следовательно, $\alpha=\sqrt{3a}$. Таким образом, при $x=\omega$ будем иметь $y=\pm\sqrt{3a\omega}$. Следовательно, хотя ω не может быть отрицательным, однако из двух значений y одно больше чем нуль, а другое меньше, и потому $y=0$ не является ни максимумом ни минимумом. Если же положить $\varphi=\beta\omega^2$, то будем иметь $\omega^3=3a\beta\omega^3$ и, следовательно, $\beta=\frac{1}{3a}$ и $\varphi=\frac{\omega^2}{3a}$. Таким образом, в этом случае взять ли x равным $+\omega$ или $-\omega$, значение количества y будет больше нуля, так что в этом случае $y=0$ будет минимумом. Остаётся ещё рассмотреть третий случай из уравнения $x^3=2a^3$, которое даёт $x=a\sqrt[3]{2}$ и $y=a\sqrt[3]{4}$. Чтобы узнать максимум это или минимум, найдём из уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$ второй дифференциал; поскольку $dy=0$ и $ay-x^2=0$, мы будем иметь $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2x}{y^2-ax}$; в рассматриваемом случае значение этого выражения есть $-\frac{2a\sqrt[3]{2}}{2a^2\sqrt[3]{2}-a^2\sqrt[3]{2}}=-\frac{2}{a}$; это указывает на то, что значение y является максимумом.

Пример 2

Пусть функция y определяется уравнением $y^4+x^4+ay^3+ax^4=$ $=b^3x+b^3y$; найти её максимальные или минимальные значения.

Так как с помощью дифференцирования мы получаем

$$4y^3\,dy+3ay^2\,dy-b^3\,dy=b^3\,dx-3ax^2\,dx-4x^3\,dx,$$

то будем иметь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^3-3ax^2-4x^3}{4y^3+3ay^2-b^3},$$

так что нужно положить $b^3=3ax^2+4x^3$. Вопрос, следовательно, сводится к тому, чтобы найти максимумы и минимумы однозначной функции $b^3-ax^3-x^4$; они вместе с тем будут максимумами или минимумами функции y. Пусть $a=2$ и $b=3$, т. е. пусть предлагается уравнение $y^4+x^4+2y^3+2x^3=27x+27y$; тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{27-6x^2-4x^3}{4y^3+6y^2-27} \text{ и } 4x^3+6x^2-27=0.$$

Разделив последние уравнения на $2x-3=0$, получим $2x^2+6x+9=0$; так как корни этого второго уравнения мнимы, то будем иметь $x=\frac{3}{2}$ и уравнение $y^4+2y^3-27y=\frac{459}{16}$, отдельные корни которого будут либо максимумами, либо минимумами. А так как

$$\frac{dy}{dx}=\frac{27-6x^2-4x^3}{4y^3+6y^2-27}, \text{ то } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-12x-12x^2}{4y^3+6y^2-27};$$

если это выражение при $x=\frac{3}{2}$ будет положительным, будем иметь минимум, в противоположном же случае — максимум.

Пример 3

Пусть $y^m+ax^n=by^px^q$; определить максимумы и минимумы количества y.

Дифференцируя, получаем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{qby^px^{q-1}-nax^{n-1}}{my^{m-1}-pby^{p-1}x^q}.$$

Если приравнять это нулю, то будем иметь прежде всего $x=0$, если только n и q будут больше единицы, и вместе с тем $y=0$. Для того чтобы в этом случае решить, имеем ли мы максимум или минимум, нужно исследовать ближайшие значения, ибо знаменатель также становится равным нулю. Результат этого исследования будет зависеть в первую очередь от показателей. Кроме того, уравнение $\frac{dy}{dx}=0$ даст также $y^p = \frac{na}{qb} x^{n-q}$; если это значение подставить в предложенное уравнение и положить $\frac{na}{q^b} = g$, то будем иметь

$$g^{\frac{m}{p}} x^{\frac{mn-mq}{p}} + ax^n = \frac{na}{q} x^n \quad \text{или} \quad g^{\frac{m}{p}} x^{\frac{mn-mq-np}{p}} = \frac{(n-q)a}{q},$$

откуда

$$x = \left(\frac{(n-q)a}{q}\right)^{p:(mn-mq-np)} : g^{m:(mn-mq-mp)}$$

и вместе с тем будет найдено значение количества y. Затем нужно посмотреть, получает ли дифференцио-дифференциал [1])

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q(q-1)\,by^p x^{q-2} - n(n-1)\,ax^{n-2}}{my^{m-1} - pby^{p-1}x^q}$$

положительное или отрицательное значение; в первом случае можно будет сказать, что мы имеем минимум, во втором же — максимум.

Пример 4

Пусть $y^4 + x^4 = 4xy - 2$; найти максимумы и минимумы функции y. Выполнив дифференцирование, получим

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - x^3}{y^3 - x},$$

отсюда $y = x^3$. Следовательно, $x^{12} = 3x^4 - 2$ или $x^{12} - 3x^4 + 2 = 0$; это уравнение распадается на уравнения $x^8 + x^4 - 2 = 0$ и $x^4 - 1 = 0$, а первое распадается на $x^4 - 1$ и $x^4 + 2 = 0$. Отсюда будем иметь дважды либо $x = +1$, либо $x = -1$; в обоих случаях исчезает также и знаменатель дроби $\frac{dy}{dx}$. Поэтому, чтобы исследовать, имеет ли в этих случаях место максимум или минимум, положим $x = 1 - \omega$ и $y = 1 - \varphi$; будем иметь

$$1 - 4\varphi + 6\varphi^2 - 4\varphi^3 + \varphi^4 + 1 - 4\omega + 6\omega^2 - 4\omega^3 + \omega^4 = 4 - 4\omega - 4\varphi + 4\omega\varphi - 2;$$

поэтому

$$4\omega\varphi = 6\varphi^2 + 6\omega^2 - 4\varphi^3 - 4\omega^3 + \varphi^4 + \omega^4,$$

и так как ω и φ очень малы, то $4\omega\varphi = 6\varphi^2 + 6\omega^2$. Следовательно, значение φ будет мнимым, возьмём ли мы ω положительным или отрицательным. Если y и x будут координатами кривой, то она при $x = 1$ и $y = 1$ будет иметь изолированную точку [2]). Это значение, следовательно, нельзя считать ни максимумом, ни минимумом, ибо предшествующие и последующие значения, которые нужно было бы взять для сравнения, становятся мнимыми.

284. Если уравнение, выражающее соотношение между x и y, будет составлено так, что функция количества x будет приравнена к функции количества x, скажем $Y = X$, то для нахождения максимумов или минимумов следует положить $dX = 0$; y будет максимумом в тех случаях, в которых X будет максимумом или минимумом.

---

[1]) Т. е. второй дифференциал.

[2]) В оригинале punctum coniugatum.

Подобным образом, если x рассматривать как функцию количества y, то x будет максимумом или минимумом, если $dY=0$, т. е. если Y будет максимумом или минимумом. Однако отсюда не следует, что y и x одновременно будут максимумами или минимумами. Так, если будем иметь уравнение $2ay-y^2=2bx-x^2$, то y будет максимумом или минимумом, если $x=b$, и тогда $y=a\pm\sqrt{a^2-b^2}$. Количество же x становится максимумом или минимумом при $y=a$, и тогда $x=b\pm\sqrt{b^2-a^2}$, но y не будет максимумом или минимумом при $x=b\pm\sqrt{b^2-a^2}$, хотя x в этом случае есть максимум или минимум. Впрочем, в этом случае, если y имеет максимальные или минимальные значения, то x этим свойством вовсе не будет обладать, ибо y не может иметь максимум или минимум, если не имеет места $a>b$, а в этом случае максимум или минимум количества x становится мнимым.

285. Может также случиться, что не все корни уравнения $dX=0$ дадут максимальные или минимальные значения y; действительно, если это уравнение будет иметь два равных корня, то мы не получим ни максимума, ни минимума; то же самое случится, если несколько корней в чётном числе будут равны между собой. Так, если предлагается уравнение $b(y-a)^2=(x-b)^3+c^3$, то, дифференцируя его, получим $2b\,dy(y-a)=3dx(x-b)^2$, но функция y при $x=b$ не будет ни максимумом, ни минимумом, так как здесь мы имеем два равных корня. Если же x рассматривать как функцию от y, то эта функция становится максимумом или минимумом, если положить $y=a$, и тогда $x=b-c$ будет минимумом. Наконец, так как в уравнении вида $Y=X$ переменные x и y не смешиваются друг с другом, то если количеству x задать значение, которое являлось бы корнем уравнения $dX=0$, то все значения количества y, если только они действительны, будут максимумами или минимумами; этого не будет, если в уравнении будут перемешаны оба переменных.

286. То, что остаётся ещё сказать о свойствах максимумов и минимумов, мы отложим до следующего раздела, так как это удобнее будет объяснить и изобразить на фигурах. Мы переходим поэтому к функциям, составленным из нескольких переменных и будем искать значения, которые нужно задать отдельным переменным так, чтобы сама функция получила максимальное или минимальное значение. Прежде всего, ясно, что если переменные не будут перемешаны между собой так, что предложенная функция будет иметь вид $X+Y$, где X есть функция переменного x, а Y есть функция переменного y, то предложенная функция $X+Y$ будет максимумом, если одновременно X и Y будут максимумами, и минимумом, если одновременно X и Y будут минимумами. Следовательно, для разыскания максимума нужно найти те значения переменого x, при которых X становится максимумом, и точно так же значения y, при которых Y становится максимумом, и эти значения, найденные для x и y, дадут функции $X+Y$ максимальное значение; то же самое следует сделать для разыскания минимума. Нужно, таким образом, остерегаться, как бы не оказались взятыми два значения x и y различной природы, т. е. такие, что первое делает X максимумом, а второе даёт Y минимальное значение, или наоборот. В самом деле, если это произойдёт, то функция $X+Y$ не будет ни максимумом, ни минимумом. Функция же $X-Y$ будет максимумом, если X будет максимумом и в то же время Y минимумом. Наоборот, $X-Y$ будет минимумом, если X будет минимумом, а Y — максимумом. Если же обе функции X и Y будут либо максимумами, либо минимумами, то их разность $X-Y$ не будет ни максимумом, ни минимумом. Всё это ясно и понятно из свойств максимумов и минимумов, изложенных ранее.

287. Таким образом, если ищутся максимумы или минимумы функции двух переменных, то решение вопроса требует гораздо больше предосторожности, чем если бы переменное было одно. В самом деле, нужно не только тщательно различать для каждого из переменных случаи, в которых имеют место максимум и минимум, но также нужно соединять их попарно таким образом, чтобы предложенная функция была максимумом или минимумом; это станет более ясным из примеров.

Пример 1

Пусть предложена следующая функция двух переменных x и y: $y^4-8y^3+18y^2-8y+x^3-3x^2-3x$; требуется найти значения, которые нужно подставить вместо y и x, чтобы эта функция получила максимальное или минимальное значения.

Так как это выражение разлагается на две части вида $Y+X$, из которых одна есть функция переменного y, а вторая—функция переменного x, то нужно разыскать случаи, в которых каждая из этих частей является максимумом или минимумом. Так как

$$Y=y^4-8y^3+18y^2-8y,$$

то

$$\frac{dY}{dy}=4y^3-24y^2+36y-8.$$

Если положить это выражение равным нулю, то, разделив на 4, будем иметь уравнение

$$y^3-6y^2+9y-2=0,$$

корни которого суть $y=2$ и $y=2\pm\sqrt{3}$. А так как $\frac{d^2Y}{4dy^2}=3y^2-12y+9$, то при $y=2$ получится максимум. Для остальных же двух корней $y=2\pm\sqrt{3}$, получаемых из уравнения $y^2-4y+1=0$, будем иметь $\frac{d^2Y}{12dy^2}=y^2-4y+3=2$, так что оба корня дают минимум. Итак, в этих случаях будем иметь:

$$\begin{array}{lll} y=2 & Y=8 & \text{максимум,} \\ y=2-\sqrt{3} & Y=-1 & \text{минимум,} \\ y=2+\sqrt{3} & Y=-1 & \text{минимум.} \end{array}$$

Подобным же образом, так как

$$X=x^3-3x^2-3x,$$

то будем иметь

$$\frac{dX}{dx}=3x^2-6x-3,$$

откуда получаем уравнение

$$x^2=2x+1$$

и $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Значит, $\frac{d^2X}{6dx^2} = x - 1 = \pm\sqrt{2}$. Следовательно, корень $x = 1 + \sqrt{2}$ даёт минимум, а именно, $X = -5 - 4\sqrt{2}$, а $x = 1 - \sqrt{2}$ даёт максимум, именно, $X = -5 + 4\sqrt{2}$. Вследствие этого предложенная формула

$$X + Y = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x$$

становится максимумом, если положить $y = 2$ и $x = 1 - \sqrt{2}$ и получается $X + Y = 3 + 4\sqrt{2}$. Эта же формула $X + Y$ становится минимумом, если взять либо $y = 2 - \sqrt{3}$, либо $y = 2 + \sqrt{3}$ и $x = 1 + \sqrt{2}$; в обоих случаях будем иметь $X + Y = -6 - 4\sqrt{2}$.

Пример 2

Пусть предложена следующая функция двух переменных $y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y - x^3 + 3x^2 + 3x$; *требуется найти, в каких случаях она становится максимумом или минимумом.*

При обозначениях предыдущего примера будем иметь

$$Y = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y \quad \text{и} \quad X = x^3 - 3x^2 - 3x.$$

Предложенная формула будет иметь вид $Y - X$ и поэтому будет максимумом, если Y будет максимум, а X минимум. Так как эти случаи мы уже рассмотрели раньше, то ясно, что $Y - X$ получит максимальное значение при $y = 2$ и $x = 1 + \sqrt{2}$, и будем иметь $Y - X = 13 + 4\sqrt{2}$. Минимальным же значение $Y - X$ будет в том случае, если Y — минимум, а X — максимум, что имеет место при $y = 2 \pm \sqrt{3}$ и $x = 1 - \sqrt{2}$ и тогда $Y - X = 4 - 4\sqrt{2}$. Впрочем, в обоих примерах ясно, что те значения, которые мы нашли, не являются наибольшими или наименьшими из всех; ибо, если в том и другом случае положить, например, $y = 100$ и $x = 0$, то, несомненно, получится значение большее, чем найденное нами; подобным же образом, если положить $y = 0$, а $x = -100$ или $x = +100$, то получится значение, меньшее чем те, которые мы нашли для случая минимума. Таким образом, нужно хорошо усвоить то понятие о природе максимумов и минимумов, которое было дано выше, т. е. что максимальным называется такое значение, которое больше как предыдущих, так и последующих ближайших соседних значений, а минимальным — такое, которое меньше как предшествующих, так и последующих таких значений. Так, в нашем примере значение количества $Y - X$, получающееся при $y = 2$ и $x = 1 + \sqrt{2}$ больше, чем значения, которые получаются, если положить $y = 2 \pm \omega$ и $x = 1 + \sqrt{2} \pm \varphi$, где за ω и φ взяты достаточно малые количества.

288. После рассмотрения этих примеров нам легче будет найти пути для решения общего вопроса. Пусть V есть какая-либо функция двух переменных x и y и пусть требуется найти для x и y такие значения, которые дают функции V максимальное или минимальное значение. Так как для этого обоим переменным x и y нужно дать определённые значения, то положим, что одна из них y уже имеет то значение, которое требуется, чтобы сделать функцию V максимумом или минимумом. Тогда задача будет состоять только в том, чтобы и для другого переменного x найти подходящее значение. Это мы сделаем, дифференцируя функцию V в предположении, что переменным является только x и полагая дифференциал равным нулю. Подобным же образом, если мы предположим, что переменное x уже имеет то значение, которое способно сделать функцию V максимумом или минимумом, то значение переменного y мы найдём, дифференцируя V в предположении, что только y является переменным и полагая этот дифференциал равным нулю. Таким образом, если дифференциал функции V будет равен $P\,dx+Q\,dy$, то нужно будет, чтобы и $P=0$ и $Q=0$; из этих двух уравнений можно будет найти значения обоих переменных x и y.

289. Поскольку, таким образом, мы находим значения x и y, не делая различия между случаями, в которых функция V становится максимумом или минимумом, нам необходимо теперь тщательно различить друг от друга случаи максимума и минимума. Для того чтобы функция V была максимумом, необходимо, чтобы оба переменных содействовали этому; ибо если одно даст максимум, а другое — минимум, то функция не станет ни максимумом, ни минимумом. Поэтому, найдя из уравнения $P=0$ и $Q=0$ значения переменных x и y, нужно исследовать, дают ли они одновременно максимум или одновременно минимум функции V; и лишь тогда, когда будет установлено, что значения обоих переменных, полученные нами, дают максимум, мы сможем утверждать, что функция в этом случае получает максимальное значение. То же самое нужно сказать о минимуме, так что функция V не может принимать минимальное значение, если оба переменных x и y не дают минимума. Таким образом, нужно отбросить все те случаи, в которых одно переменное даёт максимум, а другое — минимум. Может случиться так, что значение одного из переменных, или даже значения обоих переменных, найденные из уравнений $P=0$ и $Q=0$, не дают ни максимума, ни минимума. Эти случаи равным образом должны быть отброшены как вовсе негодные.

290. Вопрос о том, дают ли найденные значения x и y максимум или минимум, нужно исследовать относительно каждого из них таким же образом, как делали мы это выше, когда имели только одно переменное. А именно, чтобы установить критерий относительно переменного x, нужно рассматривать другое переменное y как постоянное; пусть тогда $dV=P\,dx$ или $\frac{dV}{dx}=P$. Дифференцируем P ещё раз, считая y постоянным, так что получаем $\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{dP}{dx}$; теперь нужно посмотреть, положительным или отрицательным будет значение количества $\frac{dP}{dx}$, после того как в него будут подставлены вместо x и y ранее найденные значения. В первом случае будем иметь минимум, во втором же — максимум. Подобным же образом пусть при постоянном x мы имеем $dV=Q\,dy$, т. е. $\frac{dV}{dy}=Q$; дифференцируем Q ещё раз, считая переменным только y и рассмотрим значение, которое получает $\frac{dQ}{dy}$ после подстановки вместо x и y значений, найденных из уравнений $P=0$ и $Q=0$. Если это значение положительно, то мы будем иметь минимум, если же отрицательно — максимум. Отсюда ясно, что если найденные значения x и y дают выражениям $\frac{dP}{dx}$ и $\frac{dQ}{dy}$ различные знаки, т. е. одному — положительный, а другому—отрицательный, тогда функция V не может иметь ни максимума, ни минимума. Если же оба выражения $\frac{dP}{dx}$ и $\frac{dQ}{dy}$ положительны, то получим минимум; в противоположном же случае, если оба будут отрицательными — максимум [1]).

291. Если же одно из выражений $\frac{dP}{dx}$ и $\frac{dQ}{dy}$ или оба исчезают, когда вместо x и y подставляются найденные значения, тогда нужно перейти к следующим дифференциалам $\frac{d^2P}{dx^2}$ и $\frac{d^2Q}{dy^2}$, если они не исчезают, то не имеет места ни максимум, ни минимум; если же они исчезают, то нужно обратиться к следующим дифференциалам и поступать таким же образом, как это мы делали с выражениями $\frac{dP}{dx}$ и $\frac{dQ}{dy}$. Чтобы яснее было, в каких случаях с этим приходится иметь дело, положим, что получается значение $x = \alpha$; если оно делает выражение $\frac{dP}{dx}$ исчезающим, то $\frac{dP}{dx}$ должно иметь множителем $x - \alpha$; если этот множитель является уединённым и не имеет соседнего равного себе, то не будет ни максимума, ни минимума. То же самое произойдёт, если $\frac{dP}{dx}$ будет иметь множителем $(x-\alpha)^3$ или $(x-\alpha)^5$ и так далее. Если же будем иметь множитель $(x-\alpha)^2$ или $(x-\alpha)^4$ и так далее, то это будет служить указанием на максимум или минимум; но, кроме того, нужно посмотреть, согласуется ли это с тем, на что указывает y.

292. В этих случаях, однако, можно удивительным образом избавиться от труда, связанного с переходом к высшим дифференциалам. В самом деле, положим для большей общности, что мы нашли $\alpha x + \beta = 0$ и что выражение $\frac{dP}{dx}$ имеет множителем $(\alpha x+\beta)^2$, так что $\frac{dP}{dx} = (\alpha x+\beta)^2 T$. Так как $\alpha x+\beta = 0$, то $\frac{d^3P}{dx^3} = 2\alpha^2 T$ и, следовательно, так как $2\alpha^2$ положительно, можно будет решить вопрос, рассматривая количество T; если оно получит положительное значение, будем иметь минимум, в противоположном же случае — максимум. Этим же способом можно будет пользоваться и при нахождении максимума и минимума функции одного переменного, так что никогда не будет надобности подниматься к более высоким дифференциалам. Более того, нет необходимости прибегать и ко вторым дифференциалам; в самом деле, если из уравнения $P = 0$ получаем $\alpha x + \beta = 0$, то необходимо, чтобы P имело множителем $\alpha x + \beta$. Пусть $P = (\alpha x+\beta)\, T$; так как

$$\frac{dP}{dx} = \alpha T + (\alpha x+\beta)\frac{dT}{dx},$$

---

[1]) Здесь Эйлер допускает грубую ошибку; условия $\frac{dP}{dx} > 0$; $\frac{dQ}{dy} > 0$, конечно, являются необходимыми, но они отнюдь не являются достаточными. Удивительно, что Эйлер не усмотрел этого хотя бы на простейших примерах. Так, функция $z = x^2 - 3xy + y^2$ при $x = 0$, $y = 0$ не имеет ни максимума, ни минимума, хотя условия $\frac{dP}{dx} = 2 > 0$, $\frac{dQ}{dy} = 2 > 0$ удовлетворены. Действительно, она имеет минимум $z = 0$, если изменять только x или только y, но значения $x = \omega$, $y = \omega$ дают функции z отрицательное значение $-\omega^2$. Достаточным условием экстремума является, как известно, положительность выражения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2$.

то, в силу $\alpha x+\beta=0$, будем иметь $\frac{dP}{dx}=\alpha T$. Таким образом, этот множитель T, смотря по тому, будет ли значение αT положительным или отрицательным, сразу же укажет наличие минимума или максимума.

293. После всего сказанного будет уже нетрудно, если предложена какая-либо функция, содержащая два переменных, разыскать случаи, в которых эта функция становится максимумом или минимумом. Если понадобится сверх того сделать какие-либо замечания, то они будут подсказаны развитием самих примеров. Поэтому сейчас полезно будет пояснить данное правило несколькими примерами.

Пример 1

Пусть предложена следующая функция двух переменных $V=x^2+xy+y^2-ax-by$; *требуется найти, в каких случаях она становится максимумом или минимумом.*

Так как $dV=2x\,dx+y\,dx+x\,dy+2y\,dy-a\,dx-b\,dx$, то если сравнить это выражение с общим выражением $dV=P\,dx+Q\,dy$, будем иметь

$$P=2x+y-a \quad \text{и} \quad Q=2y+x-b.$$

Отсюда получим уравнения

$$2x+y-a=0 \quad \text{и} \quad 2y+x-b=0.$$

Исключая из них y, получим $x-b=4x-2a$ и, следовательно,

$$x=\frac{2a-b}{3} \quad \text{и} \quad y=a-2x=\frac{2b-a}{3}.$$

А так как

$$\frac{dP}{dx}=2 \quad \text{и} \quad \frac{dQ}{dy}=2,$$

то оба эти выражения указывают наличие минимума; отсюда мы заключаем, что формула

$$x^2+xy+y^2-ax-by$$

становится минимумом, если положить $x=\frac{2a-b}{3}$ и $y=\frac{2b-a}{3}$. Таким образом, получаем значение

$$V=\frac{-3a^2+3ab-3b^2}{9}=\frac{-a^2+ab-b^2}{3};$$

так как оно единственно, то оно является наименьшим из всех. Следовательно, единственным способом можно получить

$$x^2+xy+y^2-ax-by=\frac{-a+ab-b^2}{3},$$

и так как меньше это выражение не может быть, то уравнение

$$x^2+xy+y^2-ax-by=\frac{-a^2+ab-b^2}{3}-c^2$$

невозможно.

Пример 2

Пусть предложена формула $V = x^3 + y^3 - 3axy$; требуется найти случаи, в которых V получает максимальное или минимальное значение.

Так как $dV = 3x^2\,dx + 3y^2\,dy - 3ay\,dx - 3ax\,dy$, то

$$P = 3x^2 - 3ay \quad \text{и} \quad Q = 3y^2 - 3ax,$$

откуда

$$ay = x^2 \quad \text{и} \quad ax = y^2.$$

Так как $y^2 = x^4 : a^2 = ax$, то $x^4 - a^3x = 0$ и, значит, либо $x = 0$, либо $x = a$. В первом случае $y = 0$, во втором же $y = a$. Так как

$$\frac{dP}{dx} = 6x \; \frac{d^2P}{dx^2} = 6 \quad \text{и} \quad \frac{dQ}{dy} = 6y \quad \text{и} \quad \frac{d^2Q}{dy^2} = 6,$$

то в первом случае, когда $x = 0$ и $y = 0$, нет ни максимума, ни минимума. Во втором же случае, когда $x = a$ и $y = a$, получается минимум, если a будет положительным количеством, и тогда $V = -a^3$. Однако это значение меньше лишь по отношению к ближайшим предшествующим и последующим; ибо, конечно, V может принимать гораздо меньшие значения, если обоим переменным x и y давать отрицательные значения.

Пример 3

Пусть предложена функция $V = x^3 + ay^2 - bxy + cx$; требуется найти её максимальные или минимальные значения.

Так как $dV = 3x^2\,dx + 2ay\,dy - bx\,dy - by\,dx + c\,dx$, то

$$P = 3x^2 - by + c \quad \text{и} \quad Q = 2ay - bx.$$

Положив эти значения равными нулю, будем иметь $y = \frac{bx}{2a}$ и потому

$$3x^2 - \frac{b^2x}{2a} + c = 0 \quad \text{или} \quad x^2 = \frac{2b^2x - 4ac}{12a},$$

откуда

$$x = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - 48a^2c}}{12a}.$$

Таким образом, если не будет иметь места $b^4 - 48a^2c > 0$, то не будет ни максимума, ни минимума. Положим $b^4 - 48a^2c = b^2f^2$, так что $c = \frac{b^2(b^2 - f^2)}{48a^2}$; тогда будем иметь

$$x = \frac{b^2 \pm bf}{12a} \quad \text{и} \quad y = \frac{b^2(b \pm f)}{24a^2}.$$

Так как, далее,

$$\frac{dP}{dx} = 6x \quad \text{и} \quad \frac{dQ}{dy} = 2a,$$

то

$$\frac{dP}{dx} = \frac{b(b \pm f)}{2a}.$$

Таким образом, если $2a$ и $\frac{b(b \pm f)}{2a}$ не являются количествами одного и того же знака, то нет ни максимума, ни минимума. Если же оба положительны, либо отрицательны, что имеет место, если произведение их $b(b \pm f)$ будет положительным, то функция V будет минимумом, если a — положительное количество, и максимумом, если a — количество отрицательное. Следовательно, если $f=0$ или $c=\frac{b^4}{48a^2}$, то так как b^2 есть положительное количество, функция V будет минимумом, если a есть количество положительное, тогда $x=\frac{b^2}{12a}$ и $y=\frac{b^3}{24a^2}$; если же, напротив, a отрицательно, то эти значения дадут максимум. Если $f<b$, то в обоих случаях получается или максимум или минимум; если же $f>b$, тогда только случай $x=\frac{b(b+f)}{12a}$ и $y=\frac{b^2(b+f)}{24a^2}$ даст максимум или минимум, смотря по тому, будет ли a положительным или отрицательным. Пусть, например, $a=1$, $b=3$ и $f=1$, так что имеем формулу $V=x^3+y^3-3xy+\frac{3}{2}x$; так как a положительно, то оно становится минимумом, если положить $x=1$ и $y=\frac{3}{2}$, или $x=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{3}{4}$. В первом случае получаем $V=\frac{1}{4}$, а во втором $V=\frac{5}{16}$. Однако ясно, что, давая x отрицательные значения, можно получить много меньшие значения для V. Таким образом, нужно иметь в виду, что значения $V=\frac{1}{4}$ меньше, чем те, которые получаются при $x=1+\omega$ и $y=\frac{3}{2}+\varphi$, когда ω и φ — малые числа, положительные или отрицательные; предел, которого ω не должно превзойти, равен $-\frac{15}{14}$, ибо при $\omega<-\frac{15}{14}$ может случиться, что V будет меньше, чем $\frac{1}{4}$.

Пример 4

Найти максимумы или минимумы функции

$$V=x^4+y^4-ax^2y-axy^2+c^2x^2+c^2y^2.$$

Дифференцируя, будем иметь

$$P=4x^3-2axy-ay^2+2c^2x \quad \text{и} \quad Q=4y^3-ax^2-2axy+2c^2y.$$

Положив эти значения равными нулю и вычитая одно из другого, будем иметь

$$4x^3-4y^3+ax^2-ay^2+2c^2x-2c^2y=0.$$

Так как это делится на $x-y$, то будем иметь прежде всего $y=x$ и $4x^3-3ax^2+2c^2x=0$, что даёт

$$x=0 \quad \text{и} \quad 4x^2=3ax-2c^2, \quad \text{или} \quad x=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2-32c^2}}{8}.$$

Если положить $x=0$, то будет также $y=0$ и так как

$$\frac{dP}{dx}=12x^2-2ay+2c^2 \quad \text{и} \quad \frac{dQ}{dy}=12y^2-2ax+2c^2,$$

то функция V будет минимумом и будет равна нулю. Если же положим

$x=y=\dfrac{3a\pm\sqrt{9a^2-32c^2}}{8}$, причём должно быть $9a^2>32c^2$, то вследствие $4x^2=3ax-2c^2$ будем иметь

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy}=12x^2-2ax+2c^2=7ax-4c^2=\frac{21a^2-32c^2\pm7a\sqrt{9a^2-32c^2}}{8};$$

так как при $32c^2<9a^2$ это значение всегда положительно, то значение V и в этом случае является минимумом, и мы будем иметь

$$V=-\frac{27}{256}a^4+\frac{9}{16}a^2c^2-\frac{1}{2}c^4\mp\frac{a}{256}(9a^2-32c^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Теперь разделим уравнение $4x^3-4y^3+ax^2-ay^2+2c^2x-2c^2y$ на $x-y$; будем иметь $4x^2+4xy+4y^2+ax+ay+2c^2=0$. Из уравнения же $P=0$ будем иметь $y^2=-2xy+\frac{4}{a}x^3+\frac{2c^2x}{a}$; подставив это значение в предыдущее уравнение, получим

$$y=\frac{16x^3+4ax^2+a^2x+8c^2x+2ac^2}{4ax-a^2}.$$

Но предыдущее уравнение само даёт

$$y=-x\pm\sqrt{\frac{4x^3+ax^2+2c^2x}{a}},$$

откуда

$$16x^3+8ax^2+8c^2x+2ac^2=(4x-a)\sqrt{4ax^3+a^2x^2+2ac^2x}\text{ [1]}.$$

Освобождаясь от иррациональности, получим

$$\begin{aligned}256x^6+192ax^5+80a^2x^4+4a^3x^3-a^4x^2-2a^3c^2x+4a^2c^4=0;\\ +256c^2+160ac^2+48a^2c^2+32ac^4\quad\\ +64c^4.\quad\end{aligned}$$

Действительные корни этого уравнения, если они имеются, укажут максимумы или минимумы функции V, если количества $\frac{dP}{dx}$ и $\frac{dQ}{dy}$ будут иметь один и тот же знак.

Пример 5

Найти максимумы или минимумы выражения

$$x^4+mx^2y^2+y^4+a^2x^2+na^2xy+a^2y^2=V.$$

Дифференцируя, будем иметь

$$P=4x^3+2mxy^2+2a^2x+na^2y=0,$$

$$Q=4y^3+2mx^2y+2a^2y+na^2x=0.$$

Сложив эти уравнения и вычтя их одно из другого, будем иметь

$$(4x^2+4xy+4y^2-2mxy+2a^2-na^2)(x-y)=0,$$

$$(4x^2-4xy+4y^2+2mxy+2a^2+na^2)(x+y)=0.$$

---

[1] В первом издании вместо $8c^2x$ стоит $4c^2x$, а в следующем уравнении вместо $256c^2$, $160ac^2$, $64c^4$, $32ac^4$ поставлены неверные коэффициенты $128c^2$, $96ac^2$, $16c^4$, $16ac^4$.

Разделив эти уравнения на $x-y$ и $x+y$, затем снова выполнив сложение и вычитание, получим

$$4x^2+4y^2+2a^2=0 \quad \text{и} \quad 4xy-2mxy-na^2=0.$$

Второе из этих уравнений даёт $y=\frac{na^2}{2(2-m)x}$; первое же не имеет действительных корней. Итак, мы имеем три случая:

I. Пусть $y=x$; тогда $4x^3+2mx^3+2a^2x+na^2x=0$, откуда имеем либо $x=0$, либо $2(2+m)x^2+(2+n)a^2=0$. Пусть $x=0$; тогда также $y=0$ и в силу

$$\frac{dP}{dx}=12x^2+2my^2+2a^2 \quad \text{и} \quad \frac{dQ}{dy}=12y^2+2mx^2+2a^2.$$

В этом случае $V=0$ будет минимумом, если коэффициент a^2 положителен. Во втором случае мы получаем $x^2=-\frac{(n+2)a^2}{2(2+m)}$; действительное решение имеет место лишь тогда, когда $\frac{n+2}{m+2}$ есть отрицательное число. Пусть $\frac{n+2}{m+2}=-2k^2$ или $n=-2k^2m-4k^2-2$, тогда $x=\pm ka$ и $y=\pm ka$. Но

$$\frac{dP}{dx}=12k^2a^2+2mk^2a^2+2a^2 \quad \text{и} \quad \frac{dQ}{dy}=12k^2a^2+2mk^2a^2+2a^2.$$

Так как эти значения равны, то V будет максимумом или минимумом, смотря по тому, будут ли эти количества положительны или отрицательны.

II. Пусть $y=-x$; тогда $2(m+2)x^3=(n-2)a^2x$ и, следовательно, либо $x=0$, либо $x^2=\frac{(n-2)a^2}{2(m+2)}$. Первый корень $x=0$ приводит нас к предшествующему случаю. Второй же корень будет действительным, если $\frac{(n-2)a^2}{2(m+2)}$ будет положительным количеством, и, так как мы имеем $\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy}$, даст либо максимум, либо минимум.

III. Пусть $y=\frac{na^2}{2(2-m)x}$; тогда

$$4x^3+\frac{mn^2a^4}{2(2-m)^2x}+2a^2x+\frac{n^3a^4}{2(2-m)x}=0 \text{ или } 4x^4+2a^2x^2+\frac{n^2a^4}{(2-m)^2}=0.$$

Это уравнение не имеет действительных корней, разве что a^2 есть отрицательное количество.

Пример 6

Пусть предложена следующая определённая функция $V=x^4+y^4-x^2+xy-y^2$; найти её максимальные или минимальные значения.

Так как здесь $P=4x^3-2x+y=0$ и $Q=4y^3-2y+x=0$, то из первого уравнения $y=2x-4x^3$; подставив это во второе, получим

$$256x^9-384x^7+192x^5-40x^3+3x=0.$$

Один корень этого уравнения есть $x=0$, откуда $y=0$. Следовательно, в этом случае вследствие

$$\frac{dP}{dx}=12x^2-2 \quad \text{и} \quad \frac{dQ}{dy}=12x^2-2$$

будет максимум $V=0$. Если же найденное уравнение разделить на x, будем иметь уравнение

$$256x^8-384x^6+192x^4-40x^2+3=0,$$

которое имеет множитель $4x^2-1$, откуда $4x^2=1$ и $x=\pm\frac{1}{2}$ и $y=\pm\frac{1}{2}$; тогда $\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy}=1$; следовательно, в обоих случаях получаем минимум $V=-\frac{1}{8}$. Разделим предыдущее уравнение на $4x^2-1$; тогда получим уравнение

$$64x^6-80x^4+28x^2-3=0,$$

которое снова дважды содержит множитель $4x^2-1=0$, так что получим предыдущий случай. Кроме того, будем иметь $4x^2-3=0$ и $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; этому значению соответствует значение $y=\frac{\mp\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, будем иметь $\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy}=7$ и, значит, V будет минимумом и будет равно $-\frac{9}{8}$. Это значение есть наименьшее из всех, которые может иметь функция V, и поэтому уравнение $V=-\frac{9}{8}-c^2$ всегда является невозможным. Из вышесказанного становится ясным также и метод разыскания максимумов и минимумов функций, содержащих три и большее число переменных.

ГЛАВА XII

О ПРИМЕНЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ К РАЗЫСКАНИЮ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ

294. Основное свойство максимумов и минимумов даёт нам возможность узнать, являются ли действительными или мнимыми корни уравнения. Действительно, пусть предложено уравнение какой-либо степени

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{и т. д.} = 0,$$

корни которого пусть будут p, q, r, s, t и т. д. и притом p пусть будет наименьший корень, q — следующий по величине, а также остальные корни пусть располагаются в порядке их величины, т. е. $q > p$, $r > q$, $s > r$, $t > s$ и т. д. Примем, что все корни уравнения действительны; тогда наибольший показатель n будет в то же время и числом корней p, q, r и т. д. Мы будем считать, что все эти корни не равны между собой; этим, однако, не исключается равенство корней, так как неравные корни, если разность их становится бесконечно малой, делаются равными.

295. Предложенное выражение $x^n - Ax^{n-1} +$ и т. д. лишь тогда становится равным нулю, когда вместо x подставляется одно из значений p, q, r и т. д., во всех же остальных случаях оно не исчезает. Положим

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{и т. д.} = z,$$

так что z можно рассматривать как функцию от x. Представим себе теперь, что вместо x последовательно подставляются всевозможные значения, начиная с наименьшего $x = -\infty$ и непрерывно увеличивающиеся; очевидно, что тогда z будет получать значения либо большие нуля, либо меньшие, и исчезнет не раньше, чем положим $x = p$. В этом случае будем иметь $z = 0$. Будем увеличивать x, давая ему значения, большие p; тогда значения z будут либо положительны, либо отрицательны, пока мы не придём к значению $x = q$; в этом случае снова будем иметь $z = 0$. Поскольку, таким образом, значения z изменяются от нуля и снова до нуля, необходимо, чтобы где-то в промежутке z имело либо максимальное, либо минимальное значение: максимальное, если значения z, когда x изменяется между пределами p и q, будут положительны; минимальное — если они будут отрицательны. Подобным образом, когда x изменяется, увеличиваясь от q до r, функция z

должна достигать максимума или минимума, а именно, максимума, если раньше был минимум, и наоборот. В самом деле, мы видели выше (§ 263), что максимумы и минимумы чередуются друг с другом.

296. Так как между двумя какими-либо корнями количества x имеется значение, при котором функция z становится максимумом или минимумом, то число максимумов и минимумов, которые имеет функция z, на единицу меньше, чем число действительных корней, и они чередуются друг с другом так, что максимальные значения z положительны, а минимальные отрицательны. Наоборот, если функция z имеет положительный максимум или по крайней мере положительное значение при $x=f$ и отрицательный минимум или по крайней мере отрицательное значение при $x=g$, то, поскольку при переходе x от f к g функция z из положительной становится отрицательной, необходимо, чтобы в промежутке она прошла через нуль, и потому будет существовать корень количества x, заключённый между пределами f и g. Если же условие, чтобы максимальные и минимальные значения количества z поочерёдно были положительными и отрицательными, не выполняется, то такого заключения сделать нельзя. Действительно, если у функции z будут минимумы, которые также будут положительны, то может случиться, что значение количества z перейдёт от максимума к следующему минимуму, не исчезая в промежутке. Из сказанного, впрочем, ясно, что если у предложенного уравнения и не все корни действительны, всё же всегда между какими-либо двумя корнями имеется максимум или минимум. Обратное же предложение вообще несправедливо, т. е. между двумя какими-либо максимумами или минимумами может не содержаться действительный корень. Это заключение, однако, можно сделать, если добавлено условие, что одно из значений z будет положительным, а другое отрицательным.

297. Мы видели выше, что значения количества x, при которых функция

$$z=x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-\text{и т. д.}$$

становится максимумом или минимумом, являются корнями дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dx}=nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}-(n-3)Cx^{n-4}+\text{и т. д.}=0.$$

Поэтому очевидно, что если все корни уравнения $z=0$ — их число равно n — будут действительны, тогда и все корни уравнения $\frac{dz}{dx}=0$ будут действительны. В самом деле, так как z имеет столько максимумов или минимумов, сколько единиц содержит число $n-1$, то необходимо, чтобы уравнение $\frac{dz}{dx}=0$ имело $n-1$ действительных корней[1]).

[1]) Со времени Жирара и Декарта, т. е. с тридцатых годов XVII века, ни у кого из математиков не было сомнения в правильности «основной теоремы» алгебры, гласящей, что уравнение n-й степени всегда имеет n корней. Однако доказать эту теорему сколько-нибудь строго до середины XVIII века никто не пытался. Эйлер в 1749 году опубликовал два доказательства, но оба они неудовлетворительны, причём одно из них исходит из утверждения, что уравнение любой степени должно быть разрешимым в радикалах. Эта же ложная идея появляется и в позднейших работах Эйлера. За три года до Эйлера Даламбер предложил доказательство, которое хотя и не было достаточным, содержало плодотворные идеи, использованные позднее Коши. Первое доказательство основной теоремы алгебры, основанное на верных, хотя и на не доведённых до конца рассуждениях, было дано

В то же время отсюда ясно, что функция $\frac{dz}{dx}$ не может иметь максимумов или минимумов больше чем $n-1$. Итак, мы имеем следующее очень важное правило: если все корни уравнения $z=0$ будут действительны, тогда и все корни уравнения $\frac{dz}{dx}=0$ будут действительными. Отсюда следует, что если не все корни уравнения $z=0$ будут действительными, то и не все корни уравнения $\frac{dz}{dx}$ будут действительными.

298. Так как между какими-либо двумя действительными корнями уравнения $z=0$ существует одно значение, при котором функция z становится максимумом или минимумом, то отсюда следует, что если уравнение $z=0$ имеет два действительных корня, один корень уравнения $\frac{dz}{dx}=0$ необходимо будет действительным. Таким же образом, если уравнение $z=0$ имеет три действительных корня, то уравнение $\frac{dz}{dx}=0$ наверное будет иметь два действительных корня. И вообще, если уравнение $z=0$ имеет m действительных корней, то уравнение $\frac{dz}{dx}=0$ должно иметь по крайней мере $m-1$ действительных корней. Поэтому, если уравнение $\frac{dz}{dx}=0$ имеет корней меньше, чем $m-1$, то в свою очередь уравнение $z=0$ наверное будет иметь меньше чем m действительных корней. Следует, однако, остерегаться, чтобы не принять за истинное обратное предложение; в самом деле, если дифференциальное уравнение $\frac{dz}{dx}=0$ имеет несколько действительных корней или даже все его корни действительны, то отсюда не следует, что хотя бы один корень уравнения $z=0$ действителен. Может случиться, что все корни уравнения $\frac{dz}{dx}=0$ действительны, но все корни уравнения $z=0$ мнимые.

299. Однако, если присоединить вышеупомянутое условие, то можно будет высказать обратное предложение таким образом, что по числу действительных корней уравнения $\frac{dz}{dx}=0$ можно будет наверное узнать, сколько действительных корней имеет уравнение $z=0$. Действительно, положим, что α, β, γ, δ и т. д. суть действительные корни уравнения $\frac{dz}{dx}=0$ и что α есть наибольший из них, а остальные расположены в порядке их величины. Таким образом, если подставлять эти значения вместо x в функцию z, она будет принимать поочерёдно максимальные и минимальные значения. Так как функция z становится равной ∞, если положить $x=\infty$, то её значения, очевидно, должны постоянно убывать, в то время как значения x убывают от ∞ до α. Поэтому при $x=\alpha$ z становится минимумом. Если при этом функция z при $x=\alpha$ получает отрицательное значение, то необходимо, чтобы где-то прежде она была равной нулю, так что уравнение $z=0$ будет иметь действительный корень $x>\alpha$. Если же при $x=\alpha$ функция z всё ещё сохраняет положительное значение, то она не могла никогда прежде

в 1799 г. Гауссом. См. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, том III, стр. 585–587, 601–604; том IV, стр. 96–98, а также Ф. Клейн, Лекции о развитии математики в 19 столетии, ч. 1. Русский перевод Б. Ливанца и др., 1937, стр. 85 и след.

быть меньше; в противном случае существовал бы ещё один минимум до того, как x, уменьшаясь, достигло бы α, а это противоречило бы сделанному предположению. Следовательно, уравнение $z=0$ не может иметь ни одного действительного корня, большего чем α. Итак, если положим, что $z=\mathfrak{A}$ при $x=\alpha$, то можно высказать следующее суждение: если $\mathfrak{A}$ будет количеством положительным, то уравнение не будет иметь ни одного действительного корня, большего чем α, если же $\mathfrak{A}$ будет количеством отрицательным, то уравнение всегда будет иметь действительный корень, больший чем α, и притом только один.

300. Чтобы такие суждения можно было высказать и дальше, положим, что

при	мы имеем
$x=\alpha$	$z=\mathfrak{A}$
$x=\beta$	$z=\mathfrak{B}$
$x=\gamma$	$z=\mathfrak{C}$
$x=\delta$	$z=\mathfrak{D}$
$x=\varepsilon$	$z=\mathfrak{E}$
и т. д.	и т. д.

Так как $\mathfrak{A}$ было минимумом, то $\mathfrak{B}$ будет максимумом, и если $\mathfrak{A}$ было положительным, то и $\mathfrak{B}$ будет положительным, и тогда между пределами α и β не будет действительных корней уравнения $z=0$. Поэтому, если это уравнение не имеет ни одного действительного корня, большего чем α, то оно не будет также иметь ни одного корня, большего чем β. Если же $\mathfrak{A}$ будет количеством отрицательным, — в этом случае уравнение имеет один действительный корень $x>\alpha$, — нужно посмотреть, положительно или отрицательно значение $\mathfrak{B}$. В первом случае будет существовать корень $x>\beta$, во втором же между пределами α и β не будет ни одного корня. Подобным же образом, так как $\mathfrak{B}$ было максимумом, то $\mathfrak{C}$ будет минимумом; поэтому, если $\mathfrak{B}$ имело отрицательное значение, то тем более $\mathfrak{C}$ будет отрицательным, и в этом случае между пределами β и γ не будет ни одного корня. Если же $\mathfrak{B}$ будет положительно, то будет существовать один действительный корень между пределами β и γ, если и $\mathfrak{C}$ отрицательно; если же и $\mathfrak{C}$ положительно, тогда между пределами их β и γ не будет ни одного корня; подобным же образом можно будет высказать и дальнейшие суждения.

301. Чтобы эти суждения легче было уяснить, я сопоставил их в следующей таблице.

Уравнение $z=0$ будет иметь один действительный корень, заключённый между пределами			если будем иметь		
$x=\infty$	и	$x=\alpha$	$\mathfrak{A}=-$		
$x=\alpha$	и	$x=\beta$	$\mathfrak{A}=-$	и	$\mathfrak{B}=+$
$x=\beta$	и	$x=\gamma$	$\mathfrak{B}=+$	и	$\mathfrak{C}=-$
$x=\gamma$	и	$x=\delta$	$\mathfrak{C}=-$	и	$\mathfrak{D}=+$
$x=\delta$	и	$x=\varepsilon$	$\mathfrak{D}=+$	и	$\mathfrak{E}=-$
и. т. д.,			и т. д.		

Для этих предложений имеют место со всей строгостью также и обратные отрицательные, а именно:

уравнение $z=0$ не будет иметь ни одного действительного корня, заключённого между пределами	если не будем иметь
$x=\infty$ и $x=\alpha$	$\mathfrak{A}=-$
$x=\alpha$ и $x=\beta$	$\mathfrak{A}=-$ и $\mathfrak{B}=+$
$x=\beta$ и $x=\gamma$	$\mathfrak{B}=+$ и $\mathfrak{C}=-$
$x=\gamma$ и $x=\delta$	$\mathfrak{C}=-$ и $\mathfrak{D}=+$
$x=\delta$ и $x=\varepsilon$	$\mathfrak{D}=+$ и $\mathfrak{E}=-$
и т. д.,	и т. д.

С помощью этих правил, если будут известны корни уравнения $\frac{dz}{dx}=0$, мы найдём не только число действительных корней уравнения $z=0$, но также и пределы, между которыми будут содержаться отдельные корни.

Пример

Пусть предложено уравнение $x^4-14x^2+24x-12=0$; *спрашивается, имеет ли оно действительные корни и сколько их.*

Дифференциальное уравнение будет $4x^3-28x+24=0$ или $x^3-7x+6=0$; корни его суть 1, 2 и -3. Если расположить их в порядке величины, будем иметь

	откуда
$\alpha=2,$	$\mathfrak{A}=-4,$
$\beta=1,$	$\mathfrak{B}=-1,$
$\gamma=-3,$	$\mathfrak{C}=-129.$

Так как $\mathfrak{A}$ отрицательно, то предложенное уравнение будет иметь действительный корень, больший чем 2, и так как $\mathfrak{B}$ отрицательно, то ни между пределами 2 и 1, ни между пределами 1 и -3 действительных корней не будет. А так как при $x=-3$ мы имеем $z=\mathfrak{C}=-129$ и так как, положив $x=-\infty$, будем иметь $z=\infty$, то необходимо, чтобы существовал действительный корень, заключённый между пределами -3 и $-\infty$. Итак, предложенное уравнение имеет два действительных корня, один из них больше чем 2, другой — меньше чем -3. Следовательно, два корня будут мнимыми. Таким образом, из рассмотрения последнего максимума или минимума предложенного уравнения можно вывести такие же заключения, как из рассмотрения одного первого. А именно, если предложенное уравнение будет чётной степени, то если последний максимум или минимум (а в этом случае он будет минимумом) будет отрицателен, мы будем иметь действительный корень, если же положительным, то мнимый.

302. Таким образом, правило, позволяющее судить о наличии действительных или мнимых корней, может быть высказано следующим образом. Пусть предложено какое-либо уравнение $z=0$; рассмотрим его дифференциальное уравнение $\frac{dz}{dx}0=$. Пусть корни последнего, расположенные в порядке их величины, будут α, β, γ, δ и т. д. и пусть при

$$x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \text{и т. д.}$$

имеем

$$z=\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{F},\ \text{и т. д.}$$

Если знаки будут

$$-\ +\ -\ +\ -\ +\ \text{и т. д.},$$

то уравнение $z=0$ будет иметь столько действительных корней, сколько есть букв α, β, γ и т. д. и, сверх того, ещё один. Если же одна из больших букв не будет иметь поставленного внизу её знака, это будет признаком наличия пары мнимых корней. Так, если $\mathfrak{A}$ будет иметь знак $+$, то между пределами ∞ и β не будет ни одного действительного корня. Если $\mathfrak{B}$ будет иметь знак $-$, то не будет ни одного корня между пределами α и β, если же $\mathfrak{C}$ будет иметь знак $+$, то не будет ни одного корня между пределами β и δ и так далее. Вообще же сверх мнимых корней, обнаруживаемых таким образом, уравнение $z=0$ будет иметь столько мнимых корней, сколько их имеет уравнение $\frac{dz}{dx}=0$.

303. Если окажется, что какое-либо из значений $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ и т. д. исчезает, то в этом месте уравнение $z=0$ будет иметь два равных корня. Так, если $\mathfrak{A}=0$, то оно будет иметь два корня, равных α; если же $\mathfrak{B}=0$, то будет два корня, равных β. Действительно, в этом случае уравнение $z=0$ будет иметь один корень, общий с дифференциальным уравнением $\frac{dz}{dx}=0$; а выше мы доказали (§ 245), что это служит признаком наличия двух равных корней. Если же уравнение $\frac{dz}{dx}=0$ имеет два или большее число равных корней, то, если число их чётное, не будет ни максимума, ни минимума. Значит, для нашей цели равными корнями в чётном числе можно пренебрегать. Если же число равных корней уравнения $\frac{dz}{dx}=0$ будет нечётным, то при установлении критерия можно отбросить все, кроме одного, если только случайно не окажется, что в этом случае исчезает также функция z. В самом деле, если это случится, то и уравнение $z=0$ будет иметь равные корни, и притом на один больше, чем уравнение $\frac{dz}{dx}=0$. Так, если будем иметь $\frac{dz}{dx}=(x-\zeta)^n R$, так что это уравнение будет иметь n корней, равных ζ, то если при $x=\zeta$ также и z исчезает, уравнение $z=0$ будет иметь $n+1$ корней, равных ζ.

304. Применим эти правила к простейшим уравнениям и начнём с квадратного уравнения. Пусть предложено уравнение

$$z=x^2-Ax+B=0;$$

его дифференциальное уравнение будет

$$\frac{dz}{dx}=2x-A.$$

Положив его равным нулю, будем иметь

$$x=\frac{1}{2}A \quad \text{или} \quad \alpha=\frac{1}{2}A.$$

Подставим это значение вместо x; тогда получим

$$z = -\frac{1}{4}A^2 + B = \mathfrak{A},$$

откуда заключаем, что если значение $\mathfrak{A}$ отрицательно, т. е. если $A^2 > 4B$, то уравнение будет иметь два действительных корня, один — больший чем $\frac{1}{2}A$, другой — меньший. Если же значение $\mathfrak{A}$ будет положительно, т. е. если $A^2 < 4B$, тогда оба корня предложенного уравнения будут мнимыми. Если же $\mathfrak{A} = 0$, т. е. $A^2 = 4B$, тогда предложенное уравнение будет иметь два равных корня, и каждый из них будет равен $\frac{1}{2}A$. Так как всё это хорошо известно из свойств квадратных уравнений, то правильность наших принципов находит неплохое подтверждение, и в то же время обнаруживается их полезность в этом деле.

305. Перейдём теперь к кубическому уравнению и будем производить исследование тем же способом. Итак, пусть предложено уравнение

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = z = 0.$$

Его дифференциальное уравнение есть

$$3x^2 - 2Ax + B = \frac{dz}{dx}.$$

Если мы положим это равным нулю, получим уравнение

$$x^2 = \frac{2Ax - B}{3},$$

корни которого либо оба мнимые, либо равные, либо неравные действительные. Так как отсюда

$$x = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3},$$

то оба корня будут мнимые, если $A^2 < 3B$; в этом случае кубическое уравнение будет иметь только один действительный корень, для которого нельзя установить никаких других границ, кроме $+\infty$ и $-\infty$. Пусть теперь оба корня равны между собой, т. е. $A^2 = 3B$; тогда $x = \frac{A}{3}$. Таким образом, если только не имеет места одновременно $z = 0$, то эти два корня учитывать не нужно, и уравнение попрежнему будет иметь один действительный корень; если же при $x = \frac{A}{3}$ в то же время $z = 0$, что будет иметь место, если будем иметь $-\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB - C = 0$ или $C = \frac{1}{3}AB - \frac{2}{27}A^3$, т. е. если $B = \frac{1}{3}A^2$ и $C = \frac{1}{27}A^3$, то уравнение будет иметь три равных корня, каждый из которых равен $\frac{1}{3}A$. Рассмотрим теперь третий случай, когда два корня дифференциального уравнения действительны и не равны между собой, что имеет место, если

$A^2 > 3B$. Пусть, следовательно, $A^2 = 3B + f^2$ или $B = \frac{1}{3}A^2 - \frac{1}{3}f^2$; тогда эти два корня будут

$$x = \frac{A \pm f}{3}.$$

Мы получим, таким образом, $\alpha = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$ и $\beta = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Теперь нужно найти соответствующие значения z и количеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$; так как оба эти значения удовлетворяют уравнению $x^2 = \frac{2}{3}Ax - \frac{1}{3}B$, то будем иметь

$$z = -\frac{1}{3}Ax^2 + \frac{2}{3}Bx - C = -\frac{2}{9}A^2x + \frac{1}{9}AB + \frac{2}{3}Bx - C.$$

Итак, мы получаем отсюда

$$\mathfrak{A} = -\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB - \frac{2}{27}A^2f + \frac{2}{9}Bf - C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Af^2 - \frac{2}{27}f^3 - C,$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB + \frac{2}{27}A^2f - \frac{2}{9}Bf - C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Af^2 + \frac{2}{27}f^3 - C,$$

ибо $B = \frac{1}{3}A^2 - \frac{1}{3}f^2$. Значит, если $\mathfrak{A}$ будет количеством отрицательным, что произойдёт, если $C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Af^2 - \frac{2}{27}f^3$, то уравнение $z = 0$ будет иметь один действительный корень, больший чем α, т. е. больший чем $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$. Положим, таким образом, что

$$C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Af^2 - \frac{2}{27}f^3$$

или что

$$C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Af^2 - \frac{2}{27}f^3 + g^2.$$

Тогда, как мы видели, предложенное кубическое уравнение будет иметь действительный корень, больший чем $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$. Каковы же будут остальные корни, мы узнаем, рассмотрев количество $\mathfrak{B}$. Но $\mathfrak{B} = \frac{4}{27}f^3g^2$; если оно положительно, то уравнение имеет ещё два действительных корня, один в границах между α и β, т. е. между $\frac{1}{8}A + \frac{1}{3}f$ и $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$, а другой будет меньше, чем $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Если же $g^2 > \frac{4}{27}f^3$, т. е. если $\mathfrak{B}$ будет отрицательно, тогда уравнение будет иметь два мнимых корня. Если же $\mathfrak{B} = 0$, т. е. если $\frac{4}{27}f^3 = g^2$, тогда будем иметь два равных корня, каждый из которых равен $\beta = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Наконец, если значение $\mathfrak{A}$ положительно, т. е. $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Af^2 - \frac{2}{27}f^3$, то уравнение будет иметь два мнимых корня, третий же будет действительным и будет меньше, чем $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Если же значение $\mathfrak{A} = 0$, то два корня будут равны α, а третий остаётся меньшим, чем $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$.

306. Итак, для того чтобы все три корня уравнения $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ были действительными, требуется выполнение трёх условий. Во-первых, должно быть

$$B < \frac{1}{3}A^2.$$

Пусть поэтому $B = \frac{1}{3}A^2 - \frac{1}{3}f^2$. Во-вторых, необходимо, чтобы

$$C > \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Af^2 - \frac{2}{27}f^3.$$

В-третьих, необходимо, чтобы

$$C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Af^2 + \frac{2}{27}f^3.$$

Последние два условия сводятся к тому, что C должно содержаться между пределами

$$\frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Af^2 - \frac{2}{27}f^3 \quad \text{и} \quad \frac{1}{27}A^3 - \frac{1}{9}Af^2 + \frac{2}{27}f^3,$$

или между пределами

$$\frac{1}{27}(A+f)^2(A-2f) \quad \text{и} \quad \frac{1}{27}(A-f)^2(A+2f).$$

Если из этих условий не выполняется хотя бы одно, то уравнение будет иметь два мнимых корня. Так, если $A = 3$, $B = 2$, то $\frac{1}{3}f^2 = \frac{1}{3}A^2 - B = 1$ и $f^2 = 3$; так что все корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 2x - C = 0$ не могут быть действительными, если только C не содержится между пределами $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ и $+\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Поэтому, если мы будем иметь либо $C < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, т. е. $C < -0{,}3849$, либо $C > +\frac{2\sqrt{3}}{9}$, т. е. $C > 0{,}3849$, или, выражая эти два условия совместно $C^2 > \frac{4}{27}$, то уравнение будет иметь только один действительный корень.

307. Так как в каждом уравнении можно освободиться от второго члена, то положим, что $A = 0$, после чего будем иметь следующее кубическое уравнение:

$$x^3 + Bx - C = 0.$$

Таким образом, для того чтобы все три корня этого уравнения были действительными, необходимо, чтобы, во-первых, было $B < 0$, т. е. B должно быть отрицательным количеством. Пусть $B = -k^2$, тогда $f^2 = 3k^2$; кроме того, требуется, чтобы количество C было заключено между пределами $-\frac{2}{27}f^3$ и $\frac{2}{27}f^3$, т. е. между $-\frac{2}{9}k^2\sqrt{3k^2}$ и $+\frac{2}{9}k^2\sqrt{3k^2}$.

Следовательно, будем иметь $C^2 < \frac{4}{27}k^6$ или $C^2 < -\frac{4}{27}B^3$. Таким образом, характерный признак кубических уравнений, имеющих три действительных корня, можно выразить единым условием, если сказать, что количество

$$4B^3 + 27C^2$$

должно быть отрицательным. Действительно, этим уже потребовано, чтобы B было отрицательным количеством, так как в противном случае $4B^3 + 27C^2$ не могло бы быть отрицательным. Поэтому мы можем вообще утверждать, что все три корня уравнения $x^3 + Bx \pm C = 0$ будут действительными, если $4B^3 + 27C^2$ будет отрицательным количеством; если же это количество будет положительным, тогда только один корень будет действительным, остальные же два мнимыми; если же $4B^3 + 27C^2 = 0$, то все корни будут действительными, но среди них будут два равных.

308. Перейдём теперь к биквадратным уравнениям и положим, что у них отсутствует второй член. Пусть, таким образом,

$$x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0.$$

Положим $x = \frac{1}{u}$; тогда будем иметь уравнение

$$1 + Bu^2 - Cu^3 + Du^4 = 0,$$

для которого дифференциальное уравнение есть

$$2Bu - 3Cu^2 + 4Du^3 = 0;$$

один его корень равен нулю; затем будем иметь

$$u^2 = \frac{6Cu - 4B}{8D}$$

и

$$u = \frac{3C \pm \sqrt{9C^2 - 32BD}}{8D}.$$

Таким образом, для того чтобы все четыре корня были действительными, требуется прежде всего, чтобы $9C^2 > 32BD$. Положим поэтому $9C^2 = 32BD + g^2$; тогда $u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$. Здесь количество C мы всегда можем считать положительным; в самом деле, если бы этого не было, то если положить $u = -v$, это будет иметь место. Но мы вскоре докажем, что все корни могут быть действительными лишь в том случае, если B есть количество отрицательное. Поэтому положим $B = -g^2$, тогда будем иметь

$$9C^2 = 9f^2 - 32g^2D \quad \text{и} \quad u = \frac{3C \pm 3f}{8D}.$$

Теперь нужно рассмотреть два случая: первый, когда D есть количество положительное, и второй, когда оно—отрицательное.

I. Пусть D есть положительное количество; тогда $f > C$, и три корня количества u, расположенные в порядке их величины, будут:

$$1.\ u = \frac{3C + 3f}{8D}; \qquad 2.\ u = 0; \qquad 3.\ u = \frac{3C - 3f}{8D}.$$

Уравнение же

$$u^4 - \frac{Cu^3}{D} + \frac{Bu^2}{D} + \frac{1}{D} = 0,$$

если в него подставить вместо u эти значения, даст следующие три значения:

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096D^4} + \frac{1}{D}, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{D}, \quad \mathfrak{C} = \frac{27(C-f)^3(C+3f)}{4096D^4} + \frac{1}{D},$$

из которых первое и третье должны быть отрицательными; так как C положительно и $C < f$, то как первое, так и третье значение меньше, чем $\frac{1}{D}$. Итак, нужно, чтобы

$$\frac{1}{D} < \frac{27(C+f)^3(3f-C)}{4096D^4} \quad \text{и} \quad \frac{1}{D} < \frac{27(f-C)^3(C+3f)}{4096D^4}$$

или

$$4096D^3 < 27(f+C)^3(3f-C) \quad \text{и} \quad 4096D^3 < 27(f-C)^3(C+3f).$$

Но первое количество всегда гораздо больше, чем второе; поэтому достаточно, если будем иметь $D^3 < \frac{27}{4096}(f-C)^3(C+3f)$, и одновременно $B = \frac{9C^2-9f^2}{32D}$ и $f > C$; тогда и $D > 0$. Итак, если D будет положительным количеством, C—положительным и B—отрицательным, так что $f > C$ и $D^3 < \frac{27}{4096}(f-C)^3(C+3f)$, т. е. $D < \frac{3}{16}(f-C)\sqrt[3]{3f+C}$, тогда все корни уравнения будут действительными. Если же $D > \frac{3}{16}(f-C)\sqrt[3]{3f+C}$, но $D < \frac{3}{16}(f+C)\sqrt[3]{3f-C}$, тогда два корня будут действительными и два мнимыми. Если же $D > \frac{3}{16}(f+C)\sqrt[3]{3f-C}$, то все четыре корня будут мнимыми.

II. Пусть D есть отрицательное количество, положим его равным $-F$, причём C остаётся положительным, а B отрицательным, так как $B = \frac{9C^2-9f^2}{32D} = \frac{9f^2-9C^2}{32F}$, то $C > f$. Таким образом, так как $u = \frac{3C \pm 3f}{8D} = -\frac{3C \pm 3f}{8F}$, то три значения количества u, расположенные в порядке их величины, будут

$$1.\ u = 0, \qquad 2.\ u = -\frac{3C-3f}{8F}, \qquad 3.\ u = -\frac{3C+3f}{8F}.$$

Они дадут следующие значения:

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{F}, \quad \mathfrak{B} = \frac{27(C-f)^3(C+3f)}{4096F} - \frac{1}{F}, \quad \mathfrak{C} = \frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096F^4}.$$

Так как $\mathfrak{A}$ есть отрицательное количество, то уравнение безусловно будет иметь один, а, значит, и два действительных корня. Для того же, чтобы все корни были действительными, нужно, чтобы $\mathfrak{B}$ было положительным количеством, т. е. чтобы $27(C-f)^3(C+3f) > 4096F^3$; далее необходимо, чтобы $\mathfrak{C}$ было отрицательным количеством, т. е. чтобы

$27(C+f)^3(C-3f) < 4096F^3$. Поэтому, для того чтобы все корни были действительными, необходимо, чтобы F^3 содержалось между пределами

$$\frac{27}{4096}(C+f)^3(C-3f) \quad \text{и} \quad \frac{27}{4096}(C-f)^3(C+3f),$$

т. е. чтобы F содержалось между пределами

$$\frac{3}{16}(C+f)\sqrt[3]{C-3f} \quad \text{и} \quad \frac{3}{16}(C-f)\sqrt[3]{C+3f};$$

и если F не содержится между этими пределами, то два корня будут мнимыми.

III. Положим теперь, что B есть положительное количество и D — также положительное; так как $B=\frac{C^2-9f^2}{32D}$, то будем иметь $C>f$, и так как $u=\frac{3C\pm 3f}{8D}$, то корни, расположенные в порядке их величины, будут

$$1.\ u=\frac{3(C+f)}{8D}, \qquad 2.\ u=\frac{3(C-f)}{8D}, \qquad 3.\ u=0,$$

откуда получаются следующие значения:

$$\mathfrak{A}=\frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096D^4}+\frac{1}{D}, \qquad \mathfrak{B}=\frac{27(C-f)(C+3f)}{4096D^4}+\frac{1}{D}, \qquad \mathfrak{C}=\frac{1}{D}.$$

Так как здесь $\mathfrak{C}$ есть положительное количество, то два корня наверное будут мнимыми. Если при этом $\mathfrak{A}$ будет отрицательным, что произойдёт, если $4096D^3 < 27(C+f)^3(-C+3f)$, то два корня будут действительными; если же $4096D^4 > 27(C+f)^3(3f-C)$, тогда все четыре корня будут мнимыми.

IV. Пусть B остаётся положительным, а D пусть отрицательно и равно $-F$; тогда, поскольку $B=\frac{9f^2-9C^2}{32F}$, будем иметь $f>C$, и так как $u=-\frac{3C+3f}{8F}$, то три корня количества u, расположенные в порядке их величины, будут

$$1.\ u=\frac{3(f-C)}{8F}, \qquad 2.\ u=0 \ \text{ и } \ 3.\ u=-\frac{3(C+f)}{8F},$$

откуда получаем следующие значения:

$$\mathfrak{A}=-\frac{27(f-C)^3(C+3f)}{4096F^4}-\frac{1}{F}, \qquad \mathfrak{B}=-\frac{1}{F}, \qquad \mathfrak{C}=-\frac{27(C+f)(3f-C)}{4096F^4}-\frac{1}{F}.$$

Так как здесь $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ отрицательны, то уравнение наверное имеет два действительных корня, а так как $\mathfrak{B}$ отрицательно, то два корня будут мнимыми.

309. Пусть теперь буквы B, C, D обозначают положительные количества; тогда мы получаем четыре признака, которые вследствие $f=\sqrt{C^2-\frac{32}{9}BD}$ можно высказать следующим образом:

I. Пусть уравнение имеет вид $x^4-Bx^2+Cx+D=0$. Тогда все его корни будут действительными, если

$$D>\frac{3}{16}\left(\sqrt{C^2+\frac{32}{9}BD}-C\right)\sqrt[3]{3\sqrt{C^2+\frac{32}{9}BD}+C};$$

два корня будут действительными, а два мнимыми, если

$$D > \frac{3}{16}\left(\sqrt{C^2+\frac{32}{9}BD}-C\right)\sqrt[3]{3\sqrt{C^2+\frac{32}{9}BD}+C}$$

и

$$D < \frac{3}{16}\left(\sqrt{C^2+\frac{32}{9}BD}+C\right)\sqrt[3]{3\sqrt{C^2+\frac{32}{9}BD}-C};$$

и, наконец, все корни будут мнимыми, если

$$D > \frac{3}{16}\left(\sqrt{C^2+\frac{32}{9}BD}+C\right)\sqrt[3]{3\sqrt{C^2+\frac{32}{9}BD}-C}.$$

II. Пусть уравнение имеет вид $x^4-Bx^2+Cx-D=0$; тогда два корня всегда будут действительными; два остальных будут также действительными, если количество D будет содержаться между следующими пределами:

$$D > \frac{3}{16}\left(\sqrt{C^2-\frac{32}{9}BD}+C\right)\sqrt[3]{C-3\sqrt{C^2-\frac{32}{9}BD}},$$

$$D < \frac{3}{16}\left(C-\sqrt{C^2-\frac{32}{9}BD}\right)\sqrt[3]{C+3\sqrt{C^2-\frac{32}{9}BD}};$$

если же D не будет содержаться между этими пределами, то два остальных корня будут мнимыми.

III. Пусть уравнение имеет вид $x^4+Bx^2\pm Cx+D=0$; тогда два корня всегда будут мнимыми. Два остальных будут действительными, если

$$D < \frac{3}{16}\left(\sqrt{C^2-\frac{32}{9}BD}+C\right)\sqrt[3]{3\sqrt{C^2-\frac{32}{9}BD}-C};$$

но эти два остальных корня будут также мнимыми, если

$$D > \frac{3}{16}\left(\sqrt{C^2-\frac{32}{9}BD}+C\right)\sqrt[3]{3\sqrt{C^2-\frac{32}{9}BD}-C}.$$

IV. Пусть уравнение имеет вид $x^4+Bx^2\pm Cx-D=0$; два корня этого уравнения всегда действительны, а два остальных — всегда мнимые.

Пример 1

Пусть предложено уравнение $x^4-2x^2+3x+4=0$, спрашивается, каковы его корни, действительные они или мнимые.

Этот пример подходит под первый случай; здесь $B=2$, $C=3$ и $D=4$, откуда

$$C^2+\frac{32}{9}BD=9+\frac{32\cdot 8}{9}=\frac{337}{9} \quad \text{и} \quad \sqrt{C^2+\frac{32}{9}BD}=\frac{\sqrt{337}}{3},$$

следовательно, условия, чтобы все корни были действительными, суть

$$4 < \frac{3}{16}\left(\sqrt{\frac{337}{9}}+3\right)\sqrt[3]{\sqrt{337}-3}=\frac{1}{16}(9+\sqrt{337})\sqrt[3]{\sqrt{337}-3},$$

$$4 < \frac{3}{16}\left(\frac{\sqrt{337}}{3}-3\right)\sqrt[3]{\sqrt{337}+3}=\frac{1}{16}(\sqrt{337}-9)\sqrt[3]{\sqrt{337}+3}.$$

Таким образом, если воспользоваться приближёнными значениями, нужно исследовать, имеем ли мы $4<\frac{69}{16}$ и $4<\frac{24}{16}$. Так как имеет место лишь первое условие, то два корня уравнения действительные и два мнимые.

Пример 2

Пусть предложено уравнение $x^4-9x^2+12x-4=0$.

Так как оно подходит под второй случай, то оно будет иметь два действительных корня. Исследуем природу остальных корней; так как здесь $B=9$, $C=12$ и $D=4$, то будем иметь

$$\sqrt{C^2-\frac{32}{9}BD}=\sqrt{144-32\cdot 4}=4.$$

Таким образом, нужно посмотреть, имеем ли мы

$$4>\frac{3}{16}16\sqrt[3]{0},\quad \text{т. е.}\quad 4>0$$

и

$$4<\frac{3}{16}8\sqrt[3]{24},\quad \text{т. е.}\quad 4<3\sqrt[3]{3}.$$

Так как выполняются и то и другое условия, то предложенное уравнение будет иметь четыре действительных корня.

Пример 3

Пусть предложено уравнение $x^4+x^2-2x+6=0$.

Так как оно подходит под третий случай, то два корня наверное будут мнимыми. Далее мы имеем здесь $B=1$, $C=2$ и $D=6$ и, значит,

$$\sqrt{C^2-\frac{32}{9}BD}=\sqrt{4-\frac{64}{3}}.$$

Так как это количество мнимое, то два остальных корня наверное будут мнимыми.

Пример 4

Пусть предложено уравнение $x^4-4x^3+8x^2-16x+20=0$.

Избавимся сначала от второго члена; подставляя $x=y+1$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
x^4 &= y^4+4y^3+6y^2+4y+1\\
-4x^3 &= \quad -4y^3-12y^2-12y-4\\
+8x^2 &= \qquad\qquad +8y^2+16y+8\\
-16x &= \qquad\qquad\qquad -16y-16\\
+20 &= \qquad\qquad\qquad\qquad +20
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$y^4+2y^2-8y+9=0.$$

Так как это уравнение подходит под третий случай, то оно будет иметь два мнимых корня. Так как здесь $B=2$, $C=8$, $D=9$, то

$$\sqrt{C^2-\frac{32}{9}BD}=\sqrt{64-64}=0.$$

Нужно, следовательно, сравнить $D=9$ и $\frac{3}{16}8\sqrt[3]{-8}=-3$. Так как $D=9>-3$, то два остальных корня также будут мнимыми.

Пример 5

Пусть предложено уравнение $x^4-4x^3-7x^2+34x-24=0$; *известно, что его корни суть* 1, 2, 4 и -3.

Применим теперь правила; уничтожим второй член, полагая $x=y+1$; получим уравнение

$$y^4-13y^2+12y+0=0,$$

которое подходит под второй случай; мы имеем $B=13$, $C=12$ и $D=0$. Следовательно, должно быть $D>\frac{3}{16}24\sqrt[3]{-24}$ или $0>-9\sqrt[3]{3}$ и $D<0$; а так как D не является бо́льшим, чем 0, то уравнение будет иметь четыре действительных корня. Действительно, если $D=0$, то второе уравнение принимает вид $D<\frac{3}{16}\left(\frac{16BD}{9C}\right)\sqrt[3]{4C}$, так что $1<\frac{B}{3C}\sqrt[3]{4C}$ или $27C^2<4B^3$; и в самом деле, мы имеем $27\cdot 144<4\cdot B^3$, т. е. $16\cdot 27<13^3$.

310. Если бы мы захотели перенести подобные признаки на уравнения более высоких степеней, то столкнулись бы с очень большими трудностями, так как корни дифференциальных уравнений по большей части не могли бы быть определены; но всякий раз, как эти корни представляется возможным указать, вышеизложенные правила позволят заключить, сколько действительных и сколько мнимых корней будет иметь предложенное уравнение. Поэтому, в случае уравнения, состоящего только из трёх членов, можно определить число его действительных и мнимых корней. Действительно, пусть предложено следующее общее уравнение:

$$x^{m+n}+Ax^n+B=0=z.$$

Возьмём его дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dx}=(m+n)\,x^{m+n-1}+nAx^{n-1}.$$

Положив его равным нулю, мы будем иметь, прежде всего, $x^{n-1}=0$, поэтому если n есть число нечётное, то не получается ни одного корня, дающего максимум или минимум; если же n есть число чётное, то один из корней, подлежащих учёту, будет $x=0$. Затем мы будем иметь $(m+n)\,x^m+nA=0$; это уравнение, если m есть число чётное и A есть положительное количество, не имеет ни одного действительного корня. Поэтому подлежат рассмотрению следующие случаи.

I. Пусть m есть число чётное, n есть число нечётное; тогда корня $x=0$ в расчёт принимать не нужно. Таким образом, если A есть положительное количество, то не будет ни одного корня, дающего максимум или минимум. А так как $m+n$ есть нечётное число, то предложенное уравнение будет иметь единственный действительный корень. Если же A будет отрицательным количеством (положим $A=-E$), будем иметь

$$x=\pm\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}},$$

откуда

$$\alpha=+\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}} \quad \text{и} \quad \beta=-\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}.$$

Из этих значений получаем

$$\mathfrak{A}=(x^m-E)\,x^n+B=-\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m}+B$$

и

$$\mathfrak{B}=+\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m}+B.$$

Таким образом, если $\mathfrak{A}$ есть отрицательное количество, т. е. если

$$\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m}>B,$$

то уравнение будет иметь один действительный корень, больший чем α. Если сверх того

$$B>-\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m},$$

т. е., соединяя оба условия в одно, если

$$(m+n)^{m+n}B^m<m^mn^nE^{m+n},$$

тогда уравнение будет иметь три действительных корня; если же это условие не имеет места, то уравнение будет иметь единственный действительный корень. Всё это справедливо для уравнения $x^{m+n}-Ex^n+B=0$, если m есть число чётное, а n — нечётное. Если здесь E будет числом отрицательным, то уравнение всегда будет иметь единственный действительный корень.

II. Пусть оба числа m и n будут нечётными, так что $m+n$ есть число чётное, и корень $x=0$ не должен приниматься в расчёт. Так как $(m+n)\,x^m+nA=0$, то $x=-\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$. Если этот единственный корень обозначить через α, то будем иметь

$$\mathfrak{A}=\frac{mA}{m+n}\,x^n+B=-\frac{mA}{m+n}\left(\frac{nA}{m+n}\right)^{n:m}+B.$$

Если это значение будет отрицательным, то предложенное уравнение будет иметь два действительных корня, в противоположном же случае не будет иметь ни одного. Итак, предложенное уравнение $x^{m+n}+Ax^n+B=0$ будет иметь два действительных корня, если

$$m^mn^nA^{m+n}>(m+n)^{m+n}B^m;$$

если же

$$m^mn^nA^{m+n}<(m+n)^{m+n}B^m,$$

то ни одного действительного корня не будет.

III. Пусть оба числа m и n будут чётными; тогда и $m+n$ будет чётным, и один корень $x=0$ даст максимум или минимум. Этот корень будет единственным, если A есть положительное количество; полагая $\alpha=0$, будем иметь $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$. Поэтому, если также и B будет положительным количеством, то уравнение не будет иметь действительных корней. Если же B есть отрицательное количество, то будут существовать два действительных корня, но не больше, если только A будет количеством положительным. Положим теперь, что A есть отрицательное количество, т. е. $A=-E$, тогда $x=\pm\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$, и мы будем иметь три максимума или минимума, а именно,

$$\alpha=+\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}, \quad \beta=0, \quad \gamma=-\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}.$$

Им будут соответствовать следующие значения количества

$$z=x^{m+n}-Ex^n+B:$$

$$\mathfrak{A}=-\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{\frac{n}{m}}+B, \quad \mathfrak{B}=B, \quad \mathfrak{C}=-\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{\frac{n}{m}}+B.$$

Таким образом, если B есть отрицательное количество, то, поскольку $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ отрицательны, уравнение будет иметь только два действительных корня, ибо также $\mathfrak{B}=B$ будет отрицательным. Если же B будет положительным количеством, то уравнение будет иметь четыре действительных корня, если

$$(m+n)^{m+n}B^m<m^mn^nE^{m+n},$$

и ни одного действительного корня, если

$$(m+n)^{m+n}B^m>m^mn^nE^{m+n}.$$

IV. Пусть m будет нечётным числом, а n — чётным; тогда корень $x=0$ даст максимум или минимум. Кроме того, будем иметь $x=-\sqrt{\frac{nA}{m+n}}$. Таким образом, если A есть положительное число, то будем иметь $\alpha=0$ и $\beta=-\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$ и, следовательно,

$$\mathfrak{A}=B \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}=\frac{mA}{m+n}\left(\frac{nA}{m+n}\right)^{\frac{n}{m}}+B.$$

Поэтому, если B есть количество отрицательное (положим $B=-F$) и сверх того

$$m^mn^nA^{m+n}>(m+n)^{m+n}F^m,$$

то уравнение будет иметь три действительных корня; в противном же случае только один корень будет действительным. Если же A есть количество отрицательное, то, положив его равным $A=-E$, будем иметь $x=+\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$ и

$$\alpha=\sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}} \quad \text{и} \quad \beta=0.$$

Этим значениям будут соответствовать значения:

$$\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{\frac{n}{m}} + B \quad \text{и} \quad \mathfrak{B} = B.$$

Поэтому уравнение будет иметь три действительных корня, если B будет количеством положительным и

$$m^m n^n E^{m+n} > (m+n)^{m+n} B^m;$$

если это свойство не имеет места, то уравнение будет иметь только один действительный корень.

311. Пусть все коэффициенты равны 1, а μ и ν суть некоторые целые числа; тогда мы получим такие признаки для нижеследующих уравнений. Уравнение

$$x^{2\mu+2\nu-1} + x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$$

имеет единственный действительный корень. Уравнение

$$x^{2\mu+2\nu-1} - x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$$

будет иметь три действительных корня, если

$$(2\mu + 2\nu - 1)^{2\mu+2\nu-1} < (2\mu)^{2\mu} (2\nu - 1)^{2\nu-1}.$$

А так как этого никогда не может быть, то это уравнение будет иметь всегда только один действительный корень. Уравнение

$$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu-1} - 1 = 0$$

имеет два действительных корня. Уравнение

$$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu-1} + 1 = 0$$

не имеет ни одного действительного корня. Уравнение

$$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu} + 1 = 0$$

не имеет ни одного действительного корня. Уравнение

$$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu} - 1 = 0$$

имеет два действительных корня. Уравнение

$$x^{2\mu+2\nu+1} + x^{2\nu} \pm 1 = 0$$

имеет единственный действительный корень. Уравнение

$$x^{2\mu+2\nu+1} - x^{2\nu} \pm 1 = 0$$

имеет единственный действительный корень.

Впрочем, так как в третьем случае оба показателя суть чётные числа, то, полагая $x^2 = y$, можно привести уравнение к более простому виду, и, таким образом, этот случай можно было бы опустить. Теперь можно утверждать, что никакое уравнение, состоящее из трёх членов, не может иметь более трёх действительных корней.

Пример

Найти случаи, в которых уравнение $x^5 \pm Ax^2 \pm B = 0$ *имеет три действительных корня.*

Так как это уравнение подходит под четвёртый случай, то ясно, что количества A и B должны иметь противоположные знаки. Если оно не имеет такого вида, то будет иметь только один действительный корень. Если же предложенное уравнение имеет вид $x^5 \pm Ax^2 \mp B = 0$, то для того, чтобы оно имело три действительных корня, необходимо, чтобы $3^3 2^2 A^5 > 5^5 B^3$, т. е. чтобы $A^5 > \frac{3125}{108} B^3$. Таким образом, если $B = 1$, то нужно, чтобы $A^5 > \frac{3125}{108}$, т. е. чтобы $A > 1{,}960132$. Если же $A = 2$, то уравнение будет иметь три действительных корня; так как один из них есть $x = 1$, то, следовательно, и биквадратное уравнение $x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ имеет два действительных корня. Впрочем, в этом можно убедиться как с помощью изложенных правил, так и на основании того, что было доказано в предшествующей книге[1]), где мы доказали, что каждое уравнение чётной степени, свободный член которого есть отрицательное число, всегда имеет два действительных корня.

312. Эти правила позволяют также иметь суждение об уравнениях, имеющих четыре члена, в тех случаях, когда корни дифференциального уравнения можно выразить удобно, что имеет место тогда, когда показатели степени неизвестного x в трёх первых или в трёх последних членах образуют геометрическую прогрессию. Так как это рассуждение, если его проводить в общем виде, привело бы к рассмотрению множества частных случаев, то мы проведём его только на нескольких примерах.

Пример 1

Пусть предложено уравнение $x^7 - 2x^5 + x^3 - a = 0$.

Положив $z = x^7 - 2x^5 + x^3 - a$, будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = 7x^6 - 10x^4 + 3x^2.$$

Положив это значение равным нулю, получим прежде всего $x^2 = 0$; этот двойной корень не нужно принимать во внимание. Далее будем иметь $7x^4 = 10x^2 - 3$, откуда $x^2 = \frac{5 \pm 2}{7}$, и мы получаем четыре значения x, которые, если их расположить в порядке возрастания, дадут для z следующие значения:

$\alpha = 1,$	$\mathfrak{A} = -a,$
$\beta = +\sqrt{\frac{3}{7}},$	$\mathfrak{B} = \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} - a,$
$\gamma = -\sqrt{\frac{3}{7}},$	$\mathfrak{C} = -\frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} - a,$
$\delta = -1,$	$\mathfrak{D} = -a.$

Таким образом, если a есть число положительное, то будем иметь либо $a > \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$, либо $a < \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$; в первом случае, поскольку все числа $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ отрицательны, предложенное уравнение будет иметь

[1]) «Введение», ч. 1, глава II.

единственный действительный корень $x > 1$. Во втором случае, если $a < \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$, уравнение будет иметь три действительных корня; первый больше единицы, второй заключён между пределами 1 и $\sqrt{\frac{3}{7}}$ и третий между пределами $+\sqrt{\frac{3}{7}}$ и $-\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Если же a есть количество отрицательное, то, полагая $x = -y$, мы приведём уравнение к предыдущему виду. Итак, для того чтобы предложенное уравнение имело три действительных корня, необходимо, чтобы $a < 0{,}0916134$ или $a < \frac{1}{11}$.

Пример 2

Пусть предложено уравнение $ax^8 - 3x^6 + 10x^3 - 12 = 0$.

Так как здесь показатели трёх последних членов составляют арифметическую прогрессию, то положим $x = \frac{1}{y}$; тогда уравнение преобразуется к виду

$$a - 3y^2 + 10y^5 - 12y^8 = 0.$$

Поэтому положим

$$z = 12y^8 - 10y^5 + 3y^5 - a = 0;$$

дифференцируя, будем иметь

$$\frac{dz}{dy} = 96y^7 - 50y^4 + 6y = 0.$$

Из этого уравнения мы получаем прежде всего $y = 0$; далее будем иметь

$$y^6 = \frac{50y^3 - 6}{96} \quad \text{и} \quad y^3 = \frac{25 \pm 7}{96},$$

и, следовательно, либо $y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, либо $y = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$. Расположив эти три корня в порядке их величины, мы найдём следующие соответствующие значения количества z:

$$\begin{array}{l|l}
\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, & \mathfrak{A} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - a, \\
\beta = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}, & \mathfrak{B} = \frac{99}{64}\sqrt[3]{\frac{9}{256}} - a = \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}} - a, \\
\gamma = 0; & \mathfrak{C} = -a.
\end{array}$$

Таким образом, если $a > \sqrt{\frac{1}{9}}$, то предложенное уравнение будет иметь два действительных корня: один больший чем $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, другой — меньший чем 0. Кроме них, оно будет ещё иметь два действительных корня, если одновременно $\mathfrak{B}$ будет положительным количеством, т. е.

если $a < \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$. Поэтому предложенное уравнение будет иметь четыре действительных корня, если количество a будет содержаться между пределами $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ и $\frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$; эти пределы приблизительно равны 0,48075 и 0,50674. Так, при $a = \frac{1}{2}$ уравнение $x^8 - 6x^6 + 20x^3 - - 24 = 0$ будет иметь четыре действительных корня между пределами ∞, $\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$, $\sqrt[3]{3}$, 0, $-\infty$; таким образом, три будут положительны и один отрицателен.

ГЛАВА XIII

О ПРИЗНАКАХ МНИМЫХ КОРНЕЙ

313. В предыдущей главе мы изложили способ исследования природы корней какого угодно уравнения; с его помощью можно, если предложено какое-нибудь уравнение, найти, сколько оно имеет действительных и сколько мнимых корней. Однако большей частью проводить это исследование оказывается очень трудно, когда дифференциальное уравнение составлено так, что найти его корни нельзя. Правда, в этих случаях можно применить тот же способ к самому дифференциальному уравнению, исследуя природу его корней по его дифференциальному уравнению, определяя, таким образом, приближённо его корни; однако чаще всего эта работа оказалась бы слишком тягостной. Поэтому часто оказывается достаточным знание таких признаков, наличие которых дало бы возможность с уверенностью заключить, что предложенное уравнение имеет мнимые корни, хотя бы даже отсутствие их и не позволяло бы заключить, что все корни действительны. Хотя такое знание и является несовершенным, однако часто оно не лишено пользы; поэтому изложению этих признаков мы и посвящаем настоящую главу.

314. В предыдущей главе мы видели, что если все корни какого-либо уравнения

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{ и т. д. } = 0$$

действительны, то и все корни его дифференциального уравнения будут действительны. Вместе с тем мы показали, что из того, что все корни дифференциального уравнения будут действительными, не следует, что все корни предложенного уравнения будут действительными. Однако если дифференциальное уравнение имеет мнимые корни, то всегда с полным правом мы можем заключить, что и предложенное уравнение должно иметь по крайней мере столько же мнимых корней. Я говорю «по крайней мере». В самом деле, может случиться, что самое уравнение будет иметь большее число мнимых корней. Таким образом, из дифференциального уравнения нельзя заключить большего, чем то, что если оно имеет мнимые корни, то и само предложённое уравнение должно иметь мнимые корни и притом по меньшей мере столько же.

315. Если предложенное уравнение помножить на какую-либо степень x^m, где m есть целое положительное число, то все корни нового уравнения будут действительны, если все корни предложенного уравнения были действительными; точно так же в этом случае будут действительными все корни дифференциального уравнения, после того как оно будет разделено на x^{m-1}. Таким образом, если все корни уравнения

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{ и т. д. } = 0$$

действительны, то также действительными будут все корни уравнения

$$(m+n)x^n - (m+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)Bx^{n-2} - \text{ и т. д. } = 0.$$

По той же причине, если последнее уравнение помножить на x^k и затем снова продифференцировать, то все корни полученного уравнения

$$(m+n)(k+n)x^n - (m+n-1)(k+n-1)Ax^{n-1} + \\ + (m+n-2)(k+n-2)Bx^{n-2} - \text{ и т. д. } = 0$$

также будут действительными и таким же образом можно итти дальше сколько будет угодно. Если же обнаружится, что такого рода уравнение имеет мнимые корни, то тем самым будет известно, что само предложенное уравнение будет иметь по крайней мере столько же мнимых корней.

316. Если предложенное уравнение перед тем, как оно дифференцируется, не умножать ни на какую степень x, то такое же суждение можно высказать относительно уравнения на единицу низшей степени. Так, если все корни предложенного уравнения

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{ и т. д. } = 0$$

действительны, то и все корни его дифференциальных уравнений всех порядков будут действительными. Поэтому действительными будут все корни следующих уравнений:

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{и т. д.} = 0,$$

$$n(n-1)x^{n-2} - (n-1)(n-2)Ax^{n-3} + (n-2)(n-3)Bx^{n-4} - \text{ и т. д.} = 0,$$

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3} - (n-1)(n-2)(n-3)Ax^{n-4} + \text{и т. д.} = 0,$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)Ax^{n-5} + \text{и т. д.} = 0$$

и т. д.

Эти уравнения приводятся к виду

$$x^{n-1} - \frac{n-1}{n}Ax^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)}Bx^{n-3} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-4} + \text{и т. д.} \quad 0,$$

$$x^{n-2} - \frac{n-2}{n}Ax^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}Bx^{n-4} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-5} + \text{и т. д.} = 0,$$

$$x^{n-3} - \frac{n-3}{n}Ax^{n-4} + \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}Bx^{n-5} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-6} + \text{и. т. д.} = 0,$$

$$x^{n-4} - \frac{n-4}{n}Ax^{n-5} + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}Bx^{n-6} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-7} + \text{и т. д.} = 0$$

и т. д.

317. Таким образом, о корнях предложенного уравнения можно судить по уравнению низшей степени. Так, если m есть какое-либо число, меньшее чем n, и если все корни предложенного уравнения действительны, то действительными будут и все корни следующего уравнения степени m:

$$x^m - \frac{m}{n} Ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n(n-1)} Bx^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{n(n-1)(n-2)} Cx^{m-3} + \text{ и т. д.} = 0.$$

Если положить $m = 2$, получим уравнение

$$x^2 - \frac{2}{n} Ax + \frac{2-1}{n(n-1)} B = 0.$$

Его корни должны быть действительными, если все корни предложенного уравнения

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{ и т. д. } = 0$$

действительны. А так как это квадратное уравнение может иметь действительные корни лишь в том случае, если $\frac{A^2}{n^2} > \frac{2 \cdot 1}{n(n-1)} B$, то, следовательно, все корни предложенного уравнения могут быть действительными лишь в том случае, если $A^2 > \frac{2n}{n-1} B$. Поэтому, если $A^2 < \frac{2n}{n-1} B$, то это будет верным признаком того, что предложенное уравнение имеет по крайней мере два мнимых корня.

318. Таким образом, мы установили необходимое условие, которому должны быть подчинены коэффициенты трёх первых членов для того, чтобы все корни предложенного уравнения были действительными. Этот признак обладает тем свойством, о котором мы упомянули вначале, а именно, хотя в случае $A^2 > \frac{2n}{n-1} B$ нельзя ничего утверждать о действительности корней, однако если $A^2 < \frac{2n}{n-1} B$, то по крайней мере два корня наверное являются мнимыми. Таким образом, если вместо n подставлять последовательно числа 2, 3, 4, 5 и т. д., то мы найдём следующее:

$$x^2 - Ax + B = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad A^2 > 4B,$$

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0 \quad \dots\dots\dots \quad A^2 > \frac{6}{2} B,$$

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0 \quad \dots\dots \quad A^2 > \frac{8}{3} B,$$

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0 \quad \dots \quad A^2 > \frac{10}{4} B.$$

Следовательно, если второй член отсутствует, а третий коэффициент B является положительным, так что уравнение имеет вид

$$x^n + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{и т. д.} = 0,$$

то все его корни не могут быть действительными, но по крайней мере два будут мнимыми.

319. Такого же рода признаки можно установить для коэффициентов следующих членов, если мы примем во внимание, что уравнение

$$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \text{ и т. д. } = 0$$

имеет столько же действительных и столько же мнимых корней, сколько само предложенное уравнение. В самом деле, это уравнение получается из предложенного, если положить $x=\frac{1}{y}$, так что, зная корни одного уравнения, мы будем знать также корни другого. Поэтому, если все корни предложенного уравнения действительны, то и все корни дифференциального уравнения

$$-A+2By-3Cy^2+4Dy^3-\text{ и т. д. }=0,$$

полученного из взаимного уравнения, будут действительными. Подставим сюда снова x вместо $\frac{1}{y}$. Тогда получится уравнение

$$Ax^{n-1}+2Bx^{n-2}+3Cx^{n-3}-4Dx^{n-4}+\text{и т. д.}=0$$

и, следовательно, все его корни будут действительными, если таковыми были корни предложенного уравнения. Отсюда ясно, что если $n=3$, то необходимо, чтобы $B^2>3AC$.

320. Будем дифференцировать это уравнение дальше. Мы получим

$$Ax^{n-2}-\frac{2(n-2)}{n-1}Bx^{n-3}+\frac{3(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-4}-\text{ и т. д. }=0,$$

$$Ax^{n-3}-\frac{2(n-3)}{n-1}Bx^{n-4}+\frac{3(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-5}-\text{ и т. д. }=0,$$

$$Ax^{n-4}-\frac{2(n-4)}{n-1}Bx^{n-5}+\frac{3(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-6}-\text{ и т. д. }=0$$

и т. д.

Вообще, если m есть число, меньшее чем n, то

$$Ax^m-\frac{2m}{n-1}Bx^{m-1}+\frac{3m(m-1)}{(n-1)(n-2)}Cx^{m-2}-\text{ и т. д. }=0.$$

Если теперь положить $m=2$, то получим уравнение

$$Ax^2-\frac{4}{n-1}Bx+\frac{6}{(n-1)(n-2)}C=0.$$

Чтобы его корни были действительны, необходимо, чтобы $\frac{4B^2}{(n-1)^2}>$ $>\frac{6AC}{(n-1)(n-2)}$. Поэтому, если все корни предложенного уравнения действительны, то будем иметь

$$B^2>\frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC.$$

Если будет $B^2<\frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$, то это верный признак того, что предложенное уравнение имеет по крайней мере два мнимых корня. Таким образом, если $n=3$, то признак будет $B^2>3AC$; если $n=4$, то $B^2>\frac{3\cdot 3}{2\cdot 2}AC$; если $n=5$, то $B^2>\frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}AC$ и так далее.

321. Чтобы перенести эти признаки на следующие коэффициенты, возьмём снова уравнение, найденное для определения y:

$$-A+2By-3Cy^2+4Dy^3-5Ey^4+\text{ и т. д. }=0.$$

Дифференцируя его ещё раз, получим

$$2B-6Cy+12Dy^2-20Ey^3+\text{ и т. д. }=0.$$

Если в этом уравнении снова восстановить $\frac{1}{x}$ вместо y, оно даст уравнение

$$Bx^{n-2} - 3Cx^{n-3} + 6Dx^{n-4} - 10Ex^{n-5} + \text{ и т. д.} = 0,$$

из которого при дальнейшем дифференцировании следует уравнение

$$Bx^{n-3} - \frac{3(n-3)}{n-2} Cx^{n-4} + \frac{6(n-3)(n-4)}{(n-2)(n-3)} Dx^{n-5} - \text{ и т. д. } = 0$$

и вообще

$$Bx^{m} - \frac{3m}{n-2} Cx^{m-1} + \frac{6m(m-1)}{(n-2)(n-3)} Dx^{m-2} - \text{ и т. д. } = 0.$$

Если положим $m = 2$, получится квадратное уравнение

$$Bx^2 - \frac{2 \cdot 3}{n-2} Cx + \frac{6 \cdot 2}{(n-2)(n-3)} D = 0,$$

корни которого действительны, если $\frac{9C^2}{(n-2)^2} > \frac{6 \cdot 2 \cdot B \cdot D}{(n-2)(n-3)}$, т. е.

$$C^2 > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD.$$

Поэтому, если все корни предложенного уравнения действительны, будем иметь $C^2 > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$, если же это условие не выполняется, то уравнение наверное будет иметь по крайней мере два мнимых корня.

322. Если полученное выше уравнение $2B - 6Cy + 12Dy^2 -$ и т. д. $= 0$ снова продифференцировать, получим

$$-6C + 24Dy - 60Ey^2 + \text{ и т. д. } = 0$$

или

$$C - 4Dy + 10Ey^2 - 20Fy^3 + \text{ и т. д. } = 0.$$

Это уравнение, если восстановить x вместо $\frac{1}{y}$, перейдёт в уравнение

$$Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + 10Ex^{n-5} - 20Fx^{n-6} + \text{ и т. д. } = 0,$$

дальнейшее дифференцирование которого даст

$$Cx^{n-4} - \frac{4(n-4)}{n-3} Dx^{n-5} + \frac{10(n-4)(n-5)}{(n-3)(n-4)} Ex^{n-6} - \text{ и т. д. } = 0,$$

$$Cx^{n-5} - \frac{4(n-5)}{n-3} Dx^{n-6} + \frac{10(n-5)(n-6)}{(n-3)(n-4)} Ex^{n-7} - \text{ и т. д. } = 0$$

и вообще

$$Cx^{m} - \frac{4m}{n-3} Dx^{m-1} + \frac{10m(m-1)}{(n-3)(n-4)} Ex^{m-2} - \text{ и т. д. } = 0.$$

Положим $m = 2$; тогда будем иметь

$$Cx^2 - \frac{2 \cdot 4}{n-3} Dx + \frac{2 \cdot 10}{(n-3)(n-4)} E = 0.$$

Если корни этого уравнения действительны, то должно быть

$$\frac{(4 \cdot 4)}{(n-3)^2} D^2 > \frac{2 \cdot 10}{(n-3)(n-4)} CE \quad \text{или} \quad D^2 > \frac{5(n-3)}{4(n-4)} CE.$$

323. Отсюда уже становится ясным, какие соотношения будут иметь место для всех коэффициентов. Если все корни уравнения

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + \text{ и т. д. } = 0$$

будут действительны, то будем иметь

$$A^2 > \frac{2n}{1(n-1)} B,$$

$$B^2 > \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AC,$$

$$C^2 > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD,$$

$$D^2 > \frac{5(n-3)}{4(n-4)} CE,$$

$$E^2 > \frac{6(n-4)}{5(n-5)} DE$$

и т. д.

Если из этих условий не выполняется хотя бы одно, то уравнение будет иметь по крайней мере два мнимых корня. И если эти условия независимы друг от друга, то легко видеть, что какое их число не выполняется, столько же пар мнимых корней будет существовать. Если же хотя бы все эти условия выполняются для какого-нибудь уравнения, то отсюда ещё не следует, что у него нет никаких мнимых корней; напротив, может случиться, что, несмотря на это, все его корни являются мнимыми. Итак, нужно остерегаться, чтобы этим признакам не придать большего значения, чем то, которым они обладают в силу начал, из которых они выведены.

324. Легко видеть, что невыполнение каждого признака в отдельности не может служить указанием наличия пары мнимых корней. Действительно, в уравнении степени n имеется $n-1$ членов, и для каждого из них, кроме первого и последнего, можно получить по одному признаку. Таким образом, всего мы будем иметь $n-1$ признаков; но если все они не выполняются, то уравнение, конечно, не может иметь $2n-2$ мнимых корней, так как оно имеет всего только n корней. Но один признак всегда обнаруживает наличие двух мнимых корней, а так как может случиться, что два признака не укажут большего числа мнимых корней, то нужно посмотреть, являются ли эти признаки соседними или нет; в первом случае число мнимых корней не увеличится, во втором же случае, поскольку в признаки входят совершенно различные буквы, каждый из них укажет наличие пары мнимых корней [1]). Так, если будем иметь

$$A^2 < \frac{2n}{1(n-1)} B \quad \text{и} \quad B^2 < \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AC,$$

[1]) Рассуждение Эйлера, конечно, не доказывает правильности его утверждения, однако оно весьма любопытно для характеристики тех требований (вернее, той нетребовательности), которые предъявлялись к математическому доказательству в XVIII веке. Как указывает ниже сам Эйлер, приводимая здесь оценка числа мнимых корней была дана впервые Ньютоном (1707 г.) в его «Универсальной арифметике» («Arithmetica Universalis», 3-е издание, Leiden, 1732, стр. 184—187), который высказал её без всякого доказательства. Английский математик Кемпбелл в статье, напечатанной в 35-м томе Philosophical Transactions, датированном 1728 г., вывел приводимые Эйлером достаточные признаки тем самым способом, который излагается в тексте. Он доказал, таким образом, лишь то, что любой из признаков позволяет утверждать о наличии хотя бы одной пары мнимых корней. Что касается более сильного утверждения, высказанного Ньютоном в той форме, в какой мы его находим ниже в тексте, то Кемпбелл ограничивается утверждением: «из сказанного непосредственно выводится доказательство правила,

то отсюда не следует с необходимостью существование четырёх мнимых корней; может быть, что каждый из этих признаков указывает на наличие одной и той же пары. Если же будем иметь

$$A^2 < \frac{2n}{1(n-1)} B \quad \text{и} \quad C^2 < \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD,$$

причём $B^2 > \frac{3(n-1)}{2(n-2)} AC$, то это служит указанием на наличие четырёх мнимых корней.

325. Итак, два непосредственно следующие друг за другом признака дают не больше того, что можно заключить из одного; если же они идут друг за другом в прерывающемся порядке, так что между двумя какими-либо признаками располагается один или несколько противоположных признаков, тогда каждый позволяет заключить о наличии двух мнимых корней. Это рассуждение приводит нас к следующему правилу. Над всеми коэффициентами предложенного уравнения, кроме первого и последнего, следующим образом надпишем ранее найденные коэффициенты признаков:

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{2n}{1(n-1)} & \frac{3(n-1)}{2(n-2)} & \frac{4(n-2)}{3(n-3)} & \frac{5(n-3)}{4(n-4)} & \\ x^n - & Ax^{n-1} + & Bx^{n-2} - & Cx^{n-3} + & Dx^{n-4} - & \text{и т. д.} = 0. \\ + & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \text{и т. д.} \end{array}$$

Затем возьмём квадрат каждого коэффициента и посмотрим, больше он или меньше, чем надписанная дробь, помноженная на произведение прилегающих коэффициентов; в первом случае под соответствующим членом поставим знак $+$, во втором же знак $-$. Под первым же и под последним членом будем всегда ставить знак $+$. Теперь нужно будет считать, что уравнение будет иметь по крайней мере столько же мнимых корней, сколько будет перемен в ряде подписанных знаков.

326. Это есть правило, найденное Ньютоном для определения числа мнимых корней какого-либо уравнения; относительно него нужно только хорошо помнить, что, как мы уже отмечали, уравнение часто может иметь большее число мнимых корней, чем то, которое указывается этим методом. Поэтому другие авторы прилагали старание к тому, чтобы найти другие подобные правила, которые давали бы более точно число мнимых корней, так чтобы истинное число мнимых корней не так часто превосходило число, указываемое правилом. Из правил такого рода наибольшими преимуществами обладает правило Кемпбелла, данное им в дополнениях к «Универсальной арифметике» Ньютона. Поэтому следует здесь изложить это правило, хотя оно и не является совершенным. Оно основывается на следующей лемме. Пусть α, β, γ, δ, ε и т. д. суть какие-либо количества и пусть число их есть m. Положим, что сумма этих количеств

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{ и т. д. } = S,$$

сумма их квадратов

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{ и т. д. } = V,$$

которое дал знаменитый Ньютон и которым определяется число невозможных корней в каком-либо данном уравнении». Доказательство теоремы Ньютона было впервые дано Сильвестром в 1871 г. (Transactions of the R. Irish Acad., т. 24). Его можно найти в книге H. Weber, Lehrbuch der Algebra, т. I.

так что во всяком случае $V>0$. Но так как сумма парных произведений

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+ \text{ и т. д.} = \frac{S^2-V}{2},$$

то будем иметь $(m-1)V>S^2-V$ или $mV>S^2$. Ибо если взять квадраты разностей между всеми парами количеств, то сумма их будет

$$=(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+\text{и т. д.}$$

$$=(m-1)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+ \text{ и т. д.})-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\text{и т. д.})$$

$$=(m-1)V-2\frac{S^2-V}{2}=mV-S^2.$$

А так как сумма квадратов действительных чисел всегда положительна, то

$$mV-S^2>0, \text{ т. е. } mV>S^2.$$

327. Предпослав эту лемму, рассмотрим теперь уравнение

$$x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-Ex^{n-5}+Fx^{n-6}- \text{ и т. д. } =0.$$

Пусть все его корни, число которых есть n, действительны. Обозначив их через a, b, c, d, e и т. д., будем иметь, как известно из свойств уравнений, число слагаемых

$$A=a+b+c+d+ \text{ и т. д.} \qquad n$$

$$B=ab+ac+ad+bc+bd+ \text{ и т. д.} \qquad \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$$

$$C=abc+abd+abe+acd+bcd+ \text{ и т. д.} \qquad \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$D=abcd+abce+abde+ \text{ и т. д.} \qquad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

Возьмём квадраты всех членов каждого ряда и положим

$$P=a^2+b^2+c^2+d^2+ \text{ и т. д.},$$

$$Q=a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+ \text{ и т. д.},$$

$$R=a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2b^2e^2+a^2c^2d^2+ \text{ и т. д.},$$

$$S+a^2b^2c^2d^2+a^2b^2c^2e^2+a^2b^2d^4e^2+ \text{ и т. д.},$$

и т. д.

Тогда, в силу свойств сочетаний, будем иметь

$$P=A^2-2B,$$

$$Q=B^2-2AC+2D,$$

$$R=C^2-2BD+2AE-2F,$$

$$S=D^2-2CE+2BE-2AG+2H$$

и т. д.

328. В силу предпосланной леммы будем иметь

$$nP > A^2,$$
$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}Q > B^2,$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}R > C^2$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}S > D^2$$

и т. д.

Если вместо P, Q, R и т. д. подставить ранее найденные значения, получим следующие свойства действительных корней:

$$nA^2 - 2nB > A^2 \quad \text{или} \quad A^2 > \frac{2n}{n-1}B,$$
$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}B^2 - \frac{2n(n-1)}{1\cdot 2}AC + \frac{2n(n-1)}{1\cdot 2}D > B^2$$

или

$$B^2 > \frac{\dfrac{2n(n-1)}{1\cdot 2}}{\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2} - 1}(AC - D).$$

Подобным образом следующие уравнения дадут

$$C^2 > \frac{\dfrac{2n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} - 1}(BD - AE + F),$$

$$D^2 > \frac{\dfrac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - 1}(CE - BF + AG - H).$$

Здесь, таким образом, квадрат каждого коэффициента сравнивается не только с произведением ближайших прилежащих коэффициентов, но также с парными произведениями равноотстоящих коэффициентов, однако так, что знаки этих произведений чередуются.

329. Таким образом, над всеми членами уравнения, кроме первого и последнего, нужно надписать дроби, числители которых суть удвоенные коэффициенты бинома, возведённого в ту же степень, а знаменатели суть эти же биномиальные коэффициенты, уменьшённые на единицу. Таким образом, рассматривая уравнения квадратные, кубические, биквадратные и т. д., мы будем иметь, если все их корни действительны,

$$x^2 - \overset{\frac{4}{1}}{A}x + B = 0; \quad A^2 > 4B.$$

Для кубического уравнения

$$x^3 - \overset{\frac{6}{2}}{A}x^2 + \overset{\frac{6}{2}}{B}x - C = 0$$

будем иметь

$$A^2 > 3B \quad \text{и} \quad B^3 > 3AC.$$

Для биквадратного

$$x^4 - \overset{\frac{8}{3}}{A}x^3 + \overset{\frac{12}{5}}{B}x^2 - \overset{\frac{8}{3}}{C}x + D = 0$$

будем иметь

$$A^2 > \frac{8}{3}B, \quad B^2 > \frac{12}{5}(AC - D), \quad C^2 > \frac{8}{3}BD.$$

Для уравнения пятой степени

$$x^5 - \overset{\frac{10}{4}}{A}x^4 + \overset{\frac{20}{9}}{B}x^3 - \overset{\frac{20}{9}}{C}x^2 + \overset{\frac{10}{4}}{D}x - E = 0$$

будем иметь

$$A^2 > \frac{10}{4}B, \quad B^2 > \frac{20}{9}(AC - D), \quad C^2 > \frac{20}{9}(BD - AE) \text{ и } D^2 > \frac{10}{4}CE.$$

Для уравнения шестой степени

$$x^6 - \overset{\frac{12}{5}}{A}x^5 + \overset{\frac{30}{14}}{B}x^4 - \overset{\frac{40}{19}}{C}x^3 + \overset{\frac{30}{14}}{D}x^2 - \overset{\frac{12}{5}}{E}x + F = 0$$

будем иметь

$$A^2 > \frac{13}{5}B; \quad B^2 > \frac{30}{14}(AC - D), \quad C^2 > \frac{40}{19}(BD - AE + F),$$

$$D^2 > \frac{30}{14}(CE - BF), \quad E^2 > \frac{12}{5}DF$$

и т. д.

330. Если, таким образом, какой-либо из этих признаков не имеет места, то это служит указанием на то, что по крайней мере два корня предложенного уравнения являются мнимыми. Но так как, если не имеют места все эти признаки, уравнение не может иметь вдвое большего числа мнимых корней, то суждение о числе корней нужно высказать в данном случае так же, как раньше мы высказали его относительно правила Ньютона. А именно, если квадрат какого-либо члена будет больше, чем надписанная дробь, помноженная на произведения равноотстоящих членов, то мы подпишем под этим членом знак $+$, в противном же случае знак $-$; под первым же и под последним членами будем всегда подписывать знак $+$. После этого будем наблюдать порядок этих подписанных знаков, и сколько раз будем иметь перемены знака, столько мнимых корней будет указано. Каждый раз, как это правило укажет большее число корней, чем правило Ньютона, оно даст результат, более близкий к истинному. Может, однако, случиться, что уравнение будет иметь больше мнимых корней, чем на то указывают оба эти правила.

331. Таким образом, мы ошиблись бы, если бы стали применять эти признаки как точные указания о числе действительных и мнимых корней, ибо может случиться, что уравнение может иметь больше мнимых корней, чем указывают эти признаки. При этом ошибка может стать тем большей, чем выше степень уравнения. Действительно, для квадратного уравнения эти признаки дают всегда истинный результат, так что, если они не указывают ни одного мнимого корня, то уравнение никаких мнимых корней и не имеет. Кубическое же уравнение может иметь два мнимых корня, хотя бы ни одно из двух правил (оба они в данном случае совпадают) не указывало наличия мнимых корней. Найдём эти случаи. Пусть предложено общее кубическое уравнение

$$x^3-\overset{3}{A}x^2+\overset{3}{B}x-C=0.$$

Если в нём $A^2>3B$ и $B^2>3AC$, то ни одно из двух правил не указывает наличия мнимых корней. Однако выше мы видели, что для того чтобы мнимых корней не существовало, требуется, во-первых, чтобы $B<\frac{1}{3}A^2$; это условие требуется и обоими правилами; пусть, таким образом, $B=\frac{1}{3}A^2-\frac{1}{3}f^2$; тогда необходимо ещё, чтобы C содержалось между пределами

$$\frac{1}{27}A^3-\frac{1}{9}Af^2-\frac{2}{27}f^3 \quad \text{и} \quad \frac{1}{27}A^3-\frac{1}{9}Af^2+\frac{2}{27}f^3.$$

Однако оба правила требуют лишь того, чтобы было $C<\frac{B^2}{3A}$, т. е. чтобы

$$C<\frac{1}{27}A^3-\frac{2}{27}Af^2+\frac{f^4}{27A}.$$

Это условие может иметь место и в том случае, когда C не содержится между указанными пределами.

332. Действительно, пусть

$$C=\frac{1}{27}A^3-\frac{2}{27}Af^2+\frac{f^4}{27A}-g^2,$$

тогда наши правила не укажут никаких мнимых корней. Между тем два мнимых корня будут существовать, если будем иметь либо

$$\frac{1}{27}A^3-\frac{2}{27}Af^2+\frac{f^4}{27A}-g^2<\frac{1}{27}A^3-\frac{1}{9}Af^2-\frac{2}{27}f^3,$$

либо

$$\frac{1}{27}A^3-\frac{2}{27}Af^2+\frac{f^4}{27A}-g^2>\frac{1}{27}A^3-\frac{1}{9}Af^2+\frac{2}{27}f^3.$$

Таким образом, если будем иметь либо

$$g^2>\frac{(f^2+Af)^2}{27A}, \quad \text{либо} \quad g^3<\frac{(Af-f^2)^2}{27A},$$

то кубическое уравнение будет иметь два мнимых корня, хотя ни одно из правил не укажет наличия мнимых корней. Мы считали здесь, что A положительно; если бы оно было отрицательным, то, полагая $x=-y$, мы преобразовали бы уравнение к такому виду, что A было бы положительно. Таким образом, можно образовать бесчисленные кубические уравнения, которые будут иметь два мнимых корня, тогда как оба правила их не укажут. Действительно, пусть $g^2=\frac{(f^2+Af)^2}{27A}+h^2$; тогда

$$C=\frac{(f^2-A^2)^2}{27A}-g^2=\frac{1}{27}A^3-\frac{1}{9}Af^2-\frac{2}{27}f^3-h^2 \quad \text{и} \quad B=\frac{1}{3}A^2-\frac{1}{3}f^2.$$

Или пусть $g^2=\frac{(Af-f^2)^2}{27A}-h^2$, где $h^2<\frac{(Af-f^2)^2}{27A}$; тогда

$$C=\frac{1}{27}A^3-\frac{1}{9}Af^2+\frac{2}{27}f^3+h^2 \quad \text{и} \quad B=\frac{1}{3}A^2-\frac{1}{3}f^2.$$

Таким образом в обоих случаях получается уравнение, имеющее два мнимых корня, не указываемых ни одним из обоих правил. Положим, например, $A=4$, $f=1$; тогда $B=5$ и, поскольку $g^2=\frac{25}{108}+h^2$, будем иметь

$$C=\frac{225}{108}-\frac{25}{108}-h^2=\frac{50}{27}-h^2.$$

Поэтому, если $C<\frac{50}{27}$, то уравнение $x^3-4x^2+5x-C=0$ всегда будет иметь два мнимых корня. Если же взять $g^2=\frac{1}{12}-h^2$, то должно быть $h^2<\frac{1}{12}$, так что мы получим

$$C=\frac{25}{12}-\frac{1}{12}+h^2=2+h^2.$$

Пусть $h^2=\frac{1}{16}$; уравнение $x^3-4x^2+5x-\frac{33}{16}=0$ будет иметь два мнимых корня, хотя ни одно из правил не укажет их наличия.

333. Более того, можно образовать такие общие уравнения, для которых ни то, ни другое правило не обнаружит мнимых корней и которые, однако, весьма часто будут их иметь два или большее число. Это происходит тогда, когда чередуются пары одинаковых знаков, как в уравнении

$$x^n-Ax^{n-1}-Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-Ex^{n-5}-Fx^{n-6}+ \text{ и т. д.}=0$$

или в уравнении

$$x^n+Ax^{n-1}-Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}+Ex^{n-5}-Fx^{n-6}- \text{ и т. д.}=0.$$

В этом случае ни то, ни другое правило никогда не указывает никаких мнимых корней. Но такие уравнения очень часто имеют мнимые корни, что можно видеть хотя бы на примере кубического уравнения $x^3-Ax^2-Bx+C=0$, которое всегда имеет два мнимых корня, если при $f^2=A^2+3B$ будем иметь либо

$$-C<\frac{1}{27}A^3-\frac{1}{9}Af^2-\frac{2}{27}f^3, \quad \text{либо} \quad -C>\frac{1}{27}A^3-\frac{1}{9}Af^2+\frac{2}{27}f^3.$$

Однако и в таких случаях мнимые корни могут быть обнаружены с помощью наших правил, если уравнение подстановкой преобразовать к другому виду. Положим $x=y+k$; тогда будем иметь

$$\left.\begin{array}{r} y^3+3ky^2+3k^2y+k^3 \\ -Ay^2-3Aky-Ak^2 \\ -By-Bk \\ +C \end{array}\right\}=0.$$

Если к этому уравнению применить рассмотренные правила, то прежде всего сразу получаем

$$(3k-A)^2>3(3k^2-2Ak-B),$$

а для того чтобы имело место соотношение

$$(3k^2-2Ak-B)^2>3(3k-A)(k^3-Ak^2-Bk+C),$$

которое составляет второй признак, необходимо, чтобы

$$B^2+3AC+(AB-9C)k+(A^2+3B)k^2>0$$

при любом значении k. Возьмём такое число k так, чтобы это выражение приняло минимальное значение, что будет, если положить $k=\frac{9C-AB}{2(A^2+3B)}$. Если и это выражение будет больше нуля, то будет вероятным, что предложенное уравнение не будет вовсе иметь мнимых корней. Но мы получим

$$B^2+3AC-\frac{(AB-9C)^2}{2(A^2+3B)}+\frac{(AB-9C)^2}{4(A^2+3B)}>0$$

или

$$B^2+3AC>\frac{(AB-9C)^2}{4(A^2+3B)}.$$

А так как $B=\frac{1}{3}f^2-\frac{1}{3}A^2$, то будем иметь

$$4f^2\left(\frac{1}{9}f^4-\frac{2}{9}A^2f^2+\frac{1}{9}A^4+3AC\right)>\left(\frac{1}{3}Af^2-\frac{1}{3}A^3-9C\right)^2$$

или

$$4f^6-8A^2f^4+4A^4f^2+108ACf^2>A^2f^4-2A^4f^2-54ACf^2+A^6+54A^3C+729C^2$$

или

$$4f^6>9A^2f^4-6A^4f^2-162ACf^2+A^6+54A^3C+729C^2.$$

Разлагая на множители, получаем, что должно быть

$$(2f^3+A^3-3Af^2+27C)(2f^3-A^3+3Af^2-27C)>0.$$

Следовательно, наши правила укажут наличие мнимых корней, если будем иметь либо

$$C>-\frac{1}{27}A^3+\frac{1}{9}Af^2\frac{2}{27}f^3 \quad \text{и} \quad C>-\frac{1}{27}A^3+\frac{1}{9}Af^2+\frac{2}{27}f^3,$$

либо

$$C<\frac{1}{27}A^3+\frac{1}{9}Af^2-\frac{2}{27}f^3 \quad \text{и} \quad C<-\frac{1}{27}A^3+\frac{1}{9}Af^2+\frac{2}{27}f^3.$$

Это—те же условия, которые мы нашли выше. Таким образом, ясно, что с помощью удобного преобразования предложенного уравнения можно усовершенствовать правила, приведённые в этой главе, так, что они дадут истинные результаты и в том случае, если их обратить.

334. Из тех же начал можно вывести также правило Гарриота[1]), утверждающее, что какое-либо уравнение имеет столько положительных корней, сколько имеется в нём перемен знаков, или столько отрицательных корней, сколько в нём повторений знаков; это правило имеет силу только для уравнений, все корни которых действительны. Положим, что все корни уравнения

$$x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-\text{и т. д.}=0$$

---

[1]) Правило Гарриота (Harriot, 1560—1621) известно сейчас под названием правила Декарта. Гарриот установил его раньше Декарта (работа Гарриота «Artis analyticae praxis» вышла после смерти автора в 1631 г.; работа Декарта — в 1637 г.), исходя из тех же соображений, из которых получил его Декарт (см. Декарт, Геометрия, перевод А. П. Юшкевича, ОНТИ, 1938, стр. 77). Весьма возможно, что Декарт не знал работы Гарриота. См. примечания А. П. Юшкевича в упомянутой книге, стр. 227.

действительны и положительны; тогда корни его дифференциального уравнения

$$nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}- \text{ и т. д.}=0$$

не только все действительны и положительны, но и дают пределы, между которыми содержатся корни первого уравнения. Кроме того, если положить $x=\frac{1}{y}$, то и уравнение

$$1-Ay+By^2-Cy^3+Dy^4- \text{ и т. д.} =0$$

будет иметь все корни действительные и положительные, причём большие корни первого уравнения дают меньшие корни второго. Положим теперь, что предложенное уравнение последовательно подвергается дифференцированию до тех пор, пока не получится уравнение первого порядка, которое будет иметь вид $x-\frac{1}{n}A=0$ (§ 317). И у этого уравнения корень будет положительным, так что коэффициент второго члена будет иметь знак $-$, как мы и приняли. Если же этот коэффициент имел бы знак $+$, тогда можно было бы наверное заключить, что не все корни предложенного уравнения положительны, но по крайней мере один является отрицательным, а именно тот, который соответствует установленным до этого пределам.

335. Если предложенное уравнение преобразовать в уравнение, взаимное с ним, затем это взаимное уравнение продифференцировать и, наконец, снова восстановить x, и если продолжать дифференцировать до тех пор, пока не придём к простому уравнению, которое, согласно § 320, будет иметь вид

$$Ax-\frac{2}{n-1}B=0,$$

то корень этого последнего уравнения должен быть положителен, если все корни предложенного уравнения были действительными положительными; следовательно, второй и третий члены будут иметь различные знаки. Таким образом, если два члена имеют одинаковые знаки, то это укажет на наличие одного отрицательного корня, соответствующего пределу, указываемому этим уравнением, который будет отличен от предела, указываемого предыдущим уравнением, ибо теперь мы один раз произвели обращение корней. Отсюда заключаем, что если три первых члена уравнения будут иметь одинаковые знаки, то это указывает на наличие двух отрицательных корней.

336. Подобным образом, если мы будем производить обращение и дифференцирование, как в § 321, и будем продолжать их до тех пор, пока не придём к простому уравнению

$$Bx-\frac{3}{n-2}C=0,$$

то и это уравнение должно будет иметь положительный корень, если все корни предложенного уравнения были положительны. Поэтому, если третий и четвёртый члены будут иметь одинаковые знаки, то это укажет на наличие одного отрицательного корня. Таким же образом постоянно, если какие-либо два соседних члена будут иметь одинаковые знаки, получится один отрицательный корень; поэтому предложенное уравнение будет иметь по крайней мере столько же отрицательных корней, сколько раз одинаковые знаки следовали друг за другом, ибо каждый из этих признаков относился к различным пределам. Если же мы положим, что все корни предложенного уравнения отрицательны, то, поскольку корни всех выведенных из него дифференциальных уравнений также должны быть отрицательными, все члены должны будут иметь одинаковые знаки. Поэтому, если два соседних члена имеют различные знаки, то отсюда можно заключить, что имеется по крайней мере один действительный корень. Подобным же образом можно будет сказать, что уравнение имеет по крайней мере столько же положительных корней, сколько перемен знаков в нём имеется. А так как всякое уравнение имеет столько же корней, сколько имеется парных сочетаний соседних знаков, и не больше, то следовательно, каждое уравнение, все корни которого действительны, имеет столько же положительных корней, сколько в нём перемен знака, и столько отрицательных, сколько в нём повторений знака.

ГЛАВА XIV

О ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ

337. Если y есть какая-либо функция от x и если это переменное количество x получает приращение ω, так что x переходит в $x+\omega$, то функция y получает значение

$$y+\frac{\omega\,dy}{dx}+\frac{\omega^2\,d^2y}{2dx^2}+\frac{\omega^3\,d^3y}{6dx^3}+\frac{\omega^4\,d^4y}{24\,dx^4}+\text{ и т. д.},$$

так что она принимает приращение

$$\frac{\omega\,dy}{dx}+\frac{\omega^2\,d^2y}{2dx^2}+\frac{\omega^3\,d^3y}{dx^3}+\frac{\omega^4\,d^4y}{24\,dx^4}+\text{ и т. д.},$$

как мы выше доказали (§ 48). Поэтому, если $\omega=dx$, т. е. если x возрастает на свой дифференциал dx, то функция y получает приращение, равное

$$dy+\frac{1}{2}\,d^2y+\frac{1}{6}\,d^3y+\frac{1}{24}\,d^4y+\text{ и т. д.},$$

что и будет истинным дифференциалом количества y. Поскольку какой-либо член этого ряда имеет бесконечное отношение к следующим, то все члены исчезают по сравнению с первым, так что dy, взятое обычным образом, представляет истинный дифференциал количества y. Подобным же образом истинные вторые, третьи, четвёртые и т. д. дифференциалы количества y будут

$$d^2\cdot y=d^2y+\frac{3}{3}\,d^3y+\frac{7}{3\cdot4}\,d^4y+\frac{15}{3\cdot4\cdot5}\,d^5y+\frac{31}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\,d^6y+\text{ и т. д.},$$

$$d^3\cdot y=d^3y+\frac{6}{4}\,d^4y+\frac{25}{4\cdot5}\,d^5y+\frac{90}{4\cdot5\cdot6}\,d^6y+\frac{301}{4\cdot5\cdot6\cdot7}\,d^7y+\text{ и т. д.},$$

$$d^4\cdot y=d^4y+\frac{10}{5}\,d^5y+\frac{65}{5\cdot6}\,d^6y+\frac{350}{5\cdot6\cdot7}\,d^7y+\frac{1701}{5\cdot6\cdot7\cdot8}\,d^8y+\text{ и т. д.},$$

$$d^5\cdot y=d^5y+\frac{15}{6}\,d^6y+\frac{140}{6\cdot7}\,d^7y+\frac{1050}{6\cdot7\cdot8}\,d^8y+\frac{6951}{6\cdot7\cdot8\cdot9}\,d^9y+\text{ и т. д.},$$

$$d^6\cdot y=d^6y+\frac{21}{7}\,d^7y+\frac{226}{7\cdot8}\,d^8y+\frac{2646}{7\cdot8\cdot9}\,d^9y+\frac{22\,827}{7\cdot8\cdot9\cdot10}\,d^{10}y+\text{ и т. д.}$$

Они получаются из выражений § 56, если вместо ω и т. д. положить dx. Таким образом, это будут полные дифференциалы количества y, ибо в них мы не пренебрегаем и теми членами, которые исчезают по сравнению с первым. Эти члены можно найти, если последовательно дифференцировать функцию y, полагая dx постоянным. Так, если $y = ax - x^2 b$, то поскольку $dy = a\,dx - 2x\,dx$ и $d^2 y = -2dx^2$, полные дифференциалы количества y будут

$$dy = a\,dx - 2x\,dx - dx^2;\quad d^2 y = -2dx^2,$$

следующие же равны нулю.

338. Хотя в общем случае в этих выражениях последующие члены считаются нулями по сравнению с первыми, однако в особых случаях, когда исчезает сам первый член, основание для этого отпадает, и вторым членом пренебрегать уже нельзя. Так, в предшествующем примере, хотя дифференциал формулы $y = ax - x^2$ равен $(a-2x)\,dx$ и член $-dx^2$ отбрасывается, так как он бесконечно меньше, чем первый $(a-2x)\,dx$, однако при этом, очевидно, подразумевается условие, что первый член сам по себе не исчезает. Поэтому, если ищется дифференциал функции $y = ax - x^2$ в том случае, когда $x = \frac{1}{2}a$, то нужно сказать, что он равен $-dx^2$; т. е. если переменное x возрастает на дифференциал dx, то приращение функции y в случае $x = \frac{1}{2}a$ будет равно dx^2. За исключением же этого единственного случая дифференциал функции y будет равен $(a-2x)\,dx$; действительно, если не будем иметь $x = \frac{1}{2}a$, то второй член $-dx^2$ по сравнению с первым всегда может быть с полным правом отброшен. Правда, если пренебречь членом dx^2 даже в случае $x = \frac{1}{2}a$, мы не впадём в ошибку; действительно, ведь первые дифференциалы обычно сравниваются между собой; и так как $dy = -dx^2$ в случае $x = \frac{1}{2}a$ исчезает по сравнению с первым дифференциалом dx, то безразлично, будем ли мы в этом случае иметь $dy = 0$ или $dy = -dx^2$.

339. Пусть y есть некоторая функция от x и пусть, последовательно дифференцируя, мы имеем

$$dy = p\,dx,\quad dp = q\,dx,\quad dq = r\,dx,\quad dr = s\,dx \text{ и т. д.}$$

Тогда полные дифференциалы количества y, в которых мы ничем не пренебрегаем, будут

$$d\cdot y = p\,dx + \frac{1}{2}q\,dx^2 + \frac{1}{6}r\,dx^3 + \frac{1}{24}s\,dx^4 + \frac{1}{120}t\,dx^5 + \text{ и т. д.}$$

$$d^2\cdot y = q\,dx^2 + r\,dx^3 + \frac{7}{12} + s\,dx^4 + \frac{1}{4}t\,dx^5 + \text{ и т. д.}$$

$$d^3\cdot y = r\,dx^3 + \frac{3}{2}s\,dx^4 + \frac{5}{4}t\,dx^5 + \text{ и т. д.}$$

$$d^4\cdot y = s\,dx^4 + 2t\,dx^5 + \text{ и т. д.}$$

$$d^5\cdot y = t\,dx^5 + \text{ и т. д.}$$

и т. д.

Если первые члены этих выражений не исчезают, то они одни дадут дифференциалы y; если же в каком-либо случае первый член будет равен нулю, то следующий член выразит искомый дифференциал. Если же и второй член исчезает, тогда третий даст значение искомого дифференциала; если же и этот исчезнет, то четвёртый и т. д. Отсюда ясно, что ни для какой функции количества x первый дифференциал никогда не исчезает вполне; так, если бы даже мы имели $p=0$, —в этом случае обычно считается, что dy исчезает, —то этот дифференциал выразится через более высокую степень количества dx, например через $\frac{1}{2}q\,dx^2$ или, если также $q=0$, через $\frac{1}{6}r\,dx^3$ и т. д.

340. Хотя в этих случаях дифференциалом количества y по отношению к другим первым дифференциалам, с которыми он сравнивается, мы законно пренебрегаем и считаем его за нуль, однако часто полезно знать истинное его выражение. Действительно, из полной формы дифференциала тотчас же можно видеть, в каких случаях данная функция становится максимумом или минимумом. В самом деле, если

$$d\cdot y=p\,dx+\frac{1}{2}q\,dx^2+\frac{1}{6}r\,dx^3+\text{ и т. д.},$$

то для того чтобы y получило максимальное или минимальное значение, необходимо, чтобы $p=0$. Следовательно, в этом случае мы имеем $dy=\frac{1}{2}q\,dx^2$ и функция y, если вместо x положить $x\pm dx$, перейдёт в $y+\frac{1}{2}q\,dx^2$ и, следовательно, будет минимумом, если q имеет положительное значение, и максимумом, если q имеет отрицательное значение. Если же вместе с тем $q=0$, то $dy=\frac{1}{6}r\,dx^3$, и функция y, если положить $x\pm dx$ вместо x, перейдёт в $y\pm\frac{1}{6}r\,dx^3$; в этом случае не будет ни максимума, ни минимума; если же и $r=0$, то, если положить $x\pm dx$ вместо x, функция станет равной $y+\frac{1}{24}s\,dx^4$, что даст максимум, если s будет отрицательным количеством, и минимумом, если s—количество положительное. Другие случаи, когда применяются выражения полных дифференциалов, встретятся нам ниже.

341. Положим, что p исчезает при $x=a$; это произойдёт, если $p=(x-a)P$, а это будет, если

$$y=(x-a)^2P+C,$$

где C означает какое-либо постоянное количество. Действительно, так как

$$p\,dx=(x-a)^2\,dP+2(x-a)P\,dx,$$

то при $p=0$ мы действительно имеем $x=a$. Так как далее

$$dp\,dx=q\,dx^2=(x-a)^2\,d^2P+4(x-a)\,dP\,dx+2P\,dx^2,$$

то при $x=a$ получим $q\,dx^2=2P\,dx^2$ и полный дифференциал в случае $x=a$ будет

$$dy=P\,dx^2,$$

если только не исчезнет и P при $x=a$; этот случай я рассмотрю позднее.

Данный же случай можно следующим образом обобщить. Пусть

$$z=(x-a)^2P+C$$

и пусть y есть какая-либо функция от z, так что $dy = Z\,dz$, где Z есть какая-либо функция количества $z = (x-a)^2 P + C$. Тогда будем иметь

$$dz = (x-a)^2\,dP + 2\,(x-a)\,P\,dx$$

и

$$p\,dx = Z\,(x-a)^2\,dP + 2Z\,(x-a)\,P\,dx.$$

Это выражение становится равным нулю, если $x = a$; в этом случае, пренебрегая членами, содержащими множитель $(x-a)$, будем также иметь $q\,dx^2 = 2PZ\,dx^2$, так что в случае $x = a$ имеем $dy = PZ\,dx^2$, где в выражение PZ повсюду вместо x положено a. Поэтому, если y будет какой-либо функцией количества $z + (x-a)^2 P + C$, так что $dy = Z\,dz$, то в случае $x = a$ будем иметь

$$dy = PZ\,dx^2.$$

Следовательно, эта функция y даст максимум в случае $x = a$, если при этом PZ будет отрицательным количеством, и минимум, если PZ будет количеством положительным.

342. Если $p = (x-a)\,P$, то при $x = a$ исчезает также q; а подобное выражение для p получается, если

$$y = (x-a)^3 P + C.$$

Тогда будем иметь

$$p\,dx = (x-a)^3\,dP + 3\,(x-a)^2\,P\,dx,$$

$$q\,dx^2 = (x-a)^3\,d^2P + 6\,(x-a)^2\,dP\,dx + 6\,(x-a)\,P\,dx^2.$$

Оба эти выражения исчезают при $x = a$, следующее же будет

$$r\,dx^3 = (x-a)^3\,d^3P + 9\,(x-a)^2\,d^2P\,dx + 18\,(x-a)\,dP\,dx^2 + 6P\,dx^3 = 6P\,dx^3$$

при $x = a$. Так как p и q исчезают при $x = a$, то

$$dy = \frac{1}{6}\,r\,dx^3 = P\,dx^3.$$

Подобным образом, если положить

$$z = (x-a)^3 P + C$$

и если y будет какой-либо функцией от z, так что $dy = Z\,dz$, то, поскольку

$$dz(= x-a)^3\,dP + 3\,(x-a)^2\,P\,dx,$$

будем иметь также $p = 0$ и $q = 0$ и получим $r\,dx = {}^3 6PZ\,dx^3$, откуда при $x = a$ будем иметь

$$dy = PZ\,dx^3.$$

Поэтому функция y, хотя при $x = a$ мы и имеем $p = 0$, не получает ни максимального, ни минимального значения.

343. Эти дифференциалы можно легче найти из основного свойства дифференциалов. В самом деле, дифференциал количества y получается, если y вычитается из ближайшего следующего значения, которое оно получает, если вместо x подставить $x + dx$. Возьмём сначала первый из вышерассмотренных случаев, когда мы имели

$$y=(x-a)^2 P+C.$$

Положим здесь $x+dx$ вместо x; тогда будем иметь

$$y^{\mathrm{I}}=(x-a+dx)^2 P^{\mathrm{I}}+C,$$

откуда

$$dy=(x-a+dx)^2 P^{\mathrm{I}}-(x-a)^2 P;$$

следовательно, при $x=a$ будем иметь $dy=P^{\mathrm{I}}\,dx^2$, а так как отношение P^{I} к P есть отношение равенства, то

$$dy=P\,dx^2.$$

Подобным образом, если

$$z=(x-a)^2 P+C,$$

то $dz=P\,dx^2$; поэтому, если y есть какая-либо функция от z, причём $dy=Z\,dz$, то будем иметь

$$dy=PZ\,dx^2$$

при $x=a$.

Далее, пусть

$$z=(x-a)^3 P+C.$$

Тогда $z^{\mathrm{I}}=(x-a+dx)^3 P^{\mathrm{I}}+C$ и поэтому при $x=a$

$$z^{\mathrm{I}}-z=dz=P\,dx^3.$$

Если, далее, y есть какая-либо функция от z и $dy=Z\,dz$, то при $x=a$ будем иметь

$$dy=PZ\,dx^3,$$

где в функциях P и Z вместо x повсюду подставлено a. Так как в этом случае $z=C$ и Z есть функция от z, то Z будет постоянным количеством, а именно, такой функцией количества C, какой прежде оно было от количества z.

344. Вообще, если

$$y=(x-a)^n P+C,$$

то так как

$$y^{\mathrm{I}}=(x-a+dx)^n P^{\mathrm{I}}+C,$$

при $x=a$ будем иметь

$$dy=P\,dx^n;$$

если $n>1$, то этот дифференциал исчезает по отношению к другим первым дифференциалам, которые однородны с dx. Из предыдущего ясно, что функция y в случае $x=a$ будет максимумом или минимумом, если n будет числом чётным; действительно, если P при $x=a$ есть положительное количество, то y будет минимумом; если же P есть отрицательное количество, то y будет максимумом. Мы видим, что таким способом максимумы и минимумы находятся гораздо легче, чем вышеизложенным методом, ибо нет нужды переходить к высшим дифференциалам. Если же

$$z=(x-a)^n P+C$$

и y есть какая-либо функция от z, так что $dy=Z\,dz$, то в случае $x=a$ будем иметь

$$dy=PZ\,dx^n.$$

Следует заметить, что здесь n есть положительное число, т. е. больше нуля; если бы n было числом отрицательным, тогда при $x=0$ количество $(x-a)^n$ не исчезало бы, как мы принимали, но было бы бесконечно большим.

345. Теперь мы видим, что этим способом дифференциал находится гораздо легче, чем с помощью ряда, которым мы прежде выражали полный дифференциал; действительно, если n есть целое число, то нам пришлось бы рассмотреть столько членов этого ряда, сколько n содержит единиц. Если же n есть число дробное, тогда этот ряд вообще никогда не даст истинного дифференциала. В самом деле, положим, что

$$y=(x-a)^{\frac{3}{2}}+a\sqrt{a}.$$

Если мы рассмотрим ряд

$$dy=p\,dx+\frac{1}{2}q\,dx^2+\frac{1}{6}r\,dx^3+\frac{1}{24}s\,dx^4+\text{ и т. д.},$$

то будем иметь

$$p=\frac{3}{2}\sqrt{x-a},\quad q=\frac{3}{4\sqrt{x-a}},\quad r=\frac{-3}{8(x-a)\sqrt{x-a}},\quad s=\frac{9}{16(x-a)^2\sqrt{x-a}}.$$

Поэтому, если положить $x=a$, то получим, правда, $p=0$, но все следующие члены будут бесконечными, поэтому дифференциал dy в этом случае вовсе нельзя будет определить. Метод же, основанный на свойствах дифференциалов, не оставит места никакому сомнению. Действительно, так как $y=(x-a)^{3/2}+a\sqrt{a}$, то положив $x+dx$ вместо x, получим $y^{\mathrm{I}}=(x-a+dx)^{3/2}+a\sqrt{a}$ и будем иметь при $x=a$ $dy=dx\sqrt{dx}$. Следовательно, этот дифференциал исчезает по сравнению с dx, вторые же дифференциалы, однородные к dx^2, будут исчезать по сравнению с ним.

346. Рассмотрим несколько подробнее те случаи, когда показатель n есть число дробное; пусть

$$y=P\sqrt{(x-a)}+C,$$

так как $y^{\mathrm{I}}=P^{\mathrm{I}}\sqrt{x-a+dx}+C$, то

$$dy=P\sqrt{dx}$$

при $x=a$. Следовательно, этот дифференциал будет иметь бесконечное отношение к dx и к дифференциалам, однородным с dx. Отсюда ясно, как будет в этом случае обстоять дело с максимумом и минимумом. Если положить $a+dx$ вместо x, то y перейдёт в

$$C+P\sqrt{dx},$$

и вследствие двузначности $\sqrt{dx}$ функция y будет иметь два значения: одно большее, чем значение C, которое она получает при $x=a$, а другое меньшее; таким образом, в случае $x=a$ не будет ни максимума, ни минимума. Кроме того, если dx взять отрицательным, то значение y будет мнимым. То же самое произойдёт, если будем иметь

$z=P\sqrt{x-a}+C$ и y будет какой-либо функцией от z, причём $dy=Z\,dz$. Действительно, тогда будем иметь $dy=PZ\sqrt{dx}$ при $x=a$.

347. Пусть предложена функция

$$y=(x-a)^{\frac{m}{n}}P+C$$

и требуется найти её дифференциал при $x=a$; из предшествующего ясно, что он будет равен

$$dy=P\,dx^{\frac{m}{n}};$$

поэтому, если $m>n$, то этот дифференциал исчезает относительно dx, если же $m<n$, то отношение $\frac{dy}{dx}$ будет бесконечно большим. Кроме того, если n есть чётное число, то дифференциал dy будет иметь два значения: одно положительное, а другое отрицательное; таким образом, функция y, которая при $x=a$ становится равной C, будет иметь при $x=a+dx$ два значения: одно большее, чем C, а другое меньшее. Если же положить $x=a-dx$, то y станет мнимым; поэтому в данном случае y не будет ни максимумом, ни минимумом. Положим теперь, что знаменатель n есть число нечётное. Числитель m будет либо чётным, либо нечётным. Пусть сперва m есть чётное число. Так как dy сохраняет одно и то же значение, возьмём ли мы dx положительным или отрицательным, то очевидно, функция y при $x=a$ будет либо максимумом, либо минимумом, смотря по тому, будет ли P отрицательным количеством или положительным. Если же и m и n будут нечётными, то дифференциал dy переменит знак на противоположный при отрицательном dx; следовательно, в этом случае функция y при $x=a$ не будет ни максимумом, ни минимумом.

348. Если функция y будет состоять из нескольких членов, каждый из которых делится на $x-a$, так что

$$y=(x-a)^mP+(x-a)^nQ+C,$$

тогда при $x=a$ её дифференциал будет

$$dy=P\,dx^m+Q\,dx^n.$$

Если в этом выражении $n>m$, то второй член исчезает по сравнению с первым, так что получается только $dy=P\,dx^m$. Если же n есть дробь с чётным знаменателем, то хотя $Q\,dx^n$ исчезает по сравнению с $P\,dx^m$, однако вовсе пренебречь им нельзя. Действительно, благодаря этому выражению становится ясным, что если dx взять отрицательным, то значение dy будет мнимым, чего не видно из первого члена $P\,dx^m$. Таким образом, поскольку если n есть дробь с чётным знаменателем, то нельзя взять dx отрицательным, а если его взять положительным, то член $Q\,dx^n$ будет иметь два значения, — функция $y=(x-a)^mP+(x-a)^nQ+C$, которая при $x=a$ становится равной C, будет при $x=a+dx$ равна

$$y=C+P\,dx^m\pm Q\,dx^n.$$

Так как оба эти значения либо больше, либо меньше чем C, смотря по тому, будет ли P количеством положительным или отрицательным, то функция y при $x=a$ будет минимумом или максимумом второго рода (§ 278).

349. Таким образом, в этих случаях истинные дифференциалы функции нельзя найти по обычным правилам дифференцирования, ибо последние пригодны лишь в том случае, когда дифференциал функции однороден с dx. Если же в каком-либо исключительном случае дифференциал функции выражается через степень dx^n, тогда правило даёт для этого дифференциала нуль, если n есть число, большее единицы; если же n есть число, меньшее единицы, то правило даёт бесконечно большой дифференциал. Так, если ищется дифференциал функции $y=\sqrt{a-x}$ при $x=a$, то поскольку $dy=-\frac{dx}{\sqrt{a-x}}$, мы получаем при $x=a$ $dy=$ $=-\frac{dx}{0}$. Если же мы хотим прибегнуть к помощи следующих дифференциалов, то все они обращаются в бесконечность, так как знаменатели их равны нулю, так что отсюда ничего заключить нельзя. На самом же деле в этом случае, как мы видели, $dy=\sqrt{-dx}$, так что он является мнимым. Если же вместо x положить $x-dx$, то будем иметь $dy=\sqrt{dx}$, и этот дифференциал будет бесконечно больше, чем dx, так что dx будет исчезать по сравнению с dy. Таким образом, в этом случае обычное правило не приводит к ошибке, так как оно даёт для dy бесконечно большое значение.

350. Итак, от обычных правил дифференцирования приходится отступать всякий раз, как в ряде

$$p\,dx+\frac{1}{2}q\,dx^2+\frac{1}{6}r\,dx^3+\text{ и т. д.},$$

которым выражается полный дифференциал функции y, первый член p либо становится равным нулю, либо обращается в бесконечность; в этом случае дифференциал нужно находить, исходя из первых начал. Итак, всякий раз, как ищется дифференциал функции y, отвечающей данному значению x, при котором буква p становится либо бесконечно малой, либо бесконечно большой, нужно прибегать к первоосновам дифференцирования. В остальных же случаях, когда не имеет места ни $p=0$, ни $p=\infty$, обычное правило будет давать истинное значение дифференциала. Впрочем, не нужно забывать о случае, упомянутом ранее (§ 348), когда функция y содержит член вида $(x-a)^n Q$, где n есть дробь, имеющая чётный знаменатель; в самом деле, хотя в этом случае имеются дифференциалы более низкого порядка, чем $Q\,dx^n$, по сравнению с которыми $Q\,dx^n$ исчезает, однако, поскольку dx^n при отрицательном dx становится мнимым, этот член $Q\,dx^n$ обращает в мнимые все остальные, по сравнению с которыми он исчезает; как это происходит, лучше всего будет видно графически. Теперь я поясню примерами те особые случаи, в которых истинный дифференциал нельзя найти по обычному правилу.

Пример 1

Пусть ищется дифференциал функции

$$y=a+x-\sqrt{(x^2+ax-x)\sqrt{2ax-x^2}}\quad\text{при}\quad x=a.$$

Дифференцирование показывает, что дифференциал этой функции при $x=a$ нельзя найти по принятым правилам; действительно, мы имеем

$$dy=dx+\frac{-x\,dx-\frac{1}{2}a\,dx+\frac{1}{2}dx\sqrt{2ax-x^2}+(ax\,dx-x^2\,dx):\sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{x^2+ax-x\sqrt{2ax-x^2}}}.$$

Если положить $x=a$, то $dy=dx-\frac{a\,dx}{a}=0$. Будем теперь отправляться от начальных основ дифференцирования; положив $x+dx$ вместо x, мы будем иметь

$$y^{\mathrm{I}}=a+x+dx-$$
$$-\sqrt{x^2+2x\,dx+dx^2+ax+a\,dx-(x+dx)\sqrt{2ax-x^2+2a\,dx-2x\,dx-dx^2}}.$$

Если же положить $x=a$, то будем иметь

$$y^{\mathrm{I}}=2a+dx-\sqrt{2a^2+3a\,dx+dx^2-(a+dx)\sqrt{a^2-dx^2}}.$$

А так как $\sqrt{a^2-dx^2}=a-\frac{dx^2}{2a}$ (следующими членами можно без опаски пренебречь, ибо не все члены низшего порядка уничтожаются, как вскоре будет ясно), то будем иметь

$$y^{\mathrm{I}}=2a+dx-\sqrt{a^2+2a\,dx+\frac{3}{2}dx^2}.$$

Далее, извлекая корень, получим

$$y^{\mathrm{I}}=2a+dx-\left(a+dx+\frac{dx^2}{4a}\right)=a-\frac{dx^2}{4a};$$

но в случае $x=a$ будем иметь $y=a$; и потому, поскольку $y^{\mathrm{I}}=y+dy$, получим

$$dy=-\frac{dx^2}{4a}.$$

Отсюда вместе с тем ясно, что предложенная функция становится максимумом при $x=a$.

Пример 2

Найти дифференциал функции $y=2ax-x^2+a\sqrt{a^2-x^2}$ *при* $x=a$. Если выполнить дифференцирование обычным способом, получаем

$$dy=2a\,dx-2x\,dx-\frac{ax\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Это выражение при $x=a$ становится бесконечным и, следовательно, таким способом дифференциал найти нельзя. Дифференциалы же следующих порядков равным образом становятся бесконечными, так что ни из них, ни из ряда $p\,dx+\frac{1}{2}q\,dx^2+\frac{1}{6}r\,dx^3+$ и т. д. нельзя найти истинное значение дифференциала. Положим поэтому $x+dx$ вместо x; тогда будем иметь

$$y^{\mathrm{I}}=2ax-x^2+2a\,dx-2x\,dx-dx^2+a\sqrt{a^2-x^2-2x\,dx-dx^2}$$

и при $x=a$

$$y^{\mathrm{I}}=a^2-dx^2+a\sqrt{-2a\,dx-dx^2}.$$

В этом же случае $y=a^2$, откуда $dy=-dx^2+a\sqrt{-2a\,dx}$, а так как dx^2 исчезает по сравнению с $\sqrt{-2a\,dx}$, то

$$dy=a\sqrt{-2a\,dx}.$$

Поэтому, если дифференциал dx берётся положительным, то dy будет мнимым, если же вместо x написать $x-dx$, то будем иметь

$$dy=a\sqrt{2a\,dx}.$$

Так как это выражение имеет два значения—одно положительное, другое—отрицательное, то функция y при $x=a$ не будет ни максимумом, ни минимумом.

Пример 3

Найти дифференциал функции $y=3a^2x-3ax^2+x^3+(a-x)^2\sqrt{a^3-x^3}$ *при* $x=a$.

Так как эта функция преобразуется к виду

$$y=a^3-(a-x)^3+(a-x)^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{a^2+ax+x^2},$$

то при $x=a+dx$ мы имеем

$$y^{\mathrm{I}}=a^3+dx^3-dx^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{3a^2}$$

и в этом же случае $y=a^3$. Таким образом, $dy=dx^3-dx^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{3a^3}$, и так как dx^3 исчезает по сравнению с $dx^{\frac{7}{3}}$, то

$$dy=-dx^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{3a^2};$$

таким образом, при $x=a$ функция y не является ни максимумом, ни минимумом.

Пример 4

Найти дифференциал функции $y=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}=(1+\sqrt[4]{x})\sqrt{x}$ *при* $x=0$.

Так как предлагается случай $x=0$ и так как в этом случае $y=0$, то вместо x напишем только dx и будем иметь

$$dy=dx^{\frac{1}{2}}+dx^{\frac{3}{4}}\ \text{или}\ dy=(1+\sqrt[4]{dx})\sqrt{dx}.$$

Отсюда прежде всего ясно, что dx нельзя взять отрицательным. Далее, хотя корень из $\sqrt{dx}$ сам по себе имеет два значения—одно положительное, другое отрицательное, однако в данном случае, когда в выражение входит его корень $\sqrt[4]{dx}$, его можно брать только с положительным знаком. Но $\sqrt[4]{dx}$ будет иметь оба знака, так что мы будем иметь

$dy = \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx}$ и $y^{\mathrm{I}} = 0 + \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}$, так как $y = 0$. Так как оба значения y^{I} больше, чем значение y, то, следовательно, при $x = 0$ y является минимумом. То обстоятельство, что в формуле, выражающей функцию $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$, не содержится функция $y = -\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ обнаружится, когда мы ту и другую функцию приведём к рациональной форме. Действительно, если первую представить в виде $y - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$ и возвести в квадрат, получим $y^2 - 2y\sqrt{x} + x = x\sqrt{x}$ или $y^2 + x = (x + 2y)\sqrt{x}$; снова возводя в квадрат, будем иметь уравнение

$$y^4 - 2y^2x - 4x^2y + x^2 - x^3 = 0.$$

Вторая же $y + \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$ даст $y^2 + x = (x - 2y)\sqrt{x}$ и далее

$$y^4 - 2y^2x + 4x^2y + x^2 - x^3 = 0.$$

Это уравнение отлично от первого. Но другой член $\sqrt[4]{x^3}$ сохраняет двузначность. Нужно поэтому иметь в виду, что хотя вообще при знаке корня чётной степени мы имеем два знака, $+$ и $-$, однако этой двузначности не будет, если в то же выражение входят корни высших чётных степеней того же количества; ибо они становятся мнимыми, если корень низшей степени получает отрицательный знак. Это служит причиной того, что появляются максимумы и минимумы второго рода в таких случаях, в которых они на первый взгляд не имеют места.

Пример 5

Найти дифференциал функции

$$y = a + \sqrt{x - f} + (x - f)\sqrt[4]{x - f} + (x - f)^2\sqrt[8]{x - f}$$

при $x = f$.

Положим $x - f = t$; так как $y = a + \sqrt{t} + t\sqrt[4]{t} + t^2\sqrt[8]{t}$, то ищется дифференциал этого выражения при $t = 0$, ибо тогда $y = a$. Положим $t + dt$ или $0 + dt$ вместо t; получим

$$y^{\mathrm{I}} = y + dy = a + \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt},$$

поэтому будем иметь

$$dy = \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt{dt}.$$

Отсюда прежде всего ясно, что дифференциал dt нельзя взять отрицательным, ибо тогда dy будет мнимым. Далее, не только $\sqrt{dt}$, но и $\sqrt[4]{dt}$ нельзя взять отрицательным, ибо в этом случае $\sqrt[8]{dt}$ был бы мнимым; таким образом, дифференциал имеет лишь два значения:

$$dy = \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} \pm dt^2\sqrt[8]{dt};$$

так как оба эти значения больше, чем нуль, то, следовательно, функция y является минимумом второго рода при $t = 0$, т. е. при $x = f$. Итак, хотя в подобных случаях члены, какими здесь являются $dt\sqrt[4]{dt}$ и $dt^2\sqrt[8]{dt}$, исчезают по сравнению с первым, однако их нужно, если принимается во внимание множественность значений, сохранять, чтобы избежать мнимостей.

Пример 6

Найти дифференциал функции $y = ax + bx^2 + (x-f)^n + (x-f)^{m+\frac{1}{2}n}$ *при* $x = f$.

Если положить $x = f$, будем иметь $y = af + bf^2$; если же вместо x положить $x + dx$, т. е. $f + dx$, то получим ближайшее значение

$$y^{\mathrm{I}} = af + bf^2 + a\,dx + 2bf\,dx + b\,dx^2 + dx^n + dx^{m+\frac{1}{2}n},$$

так что

$$dy = a\,dx + 2bf\,dx + b\,dx^2 + dx^n + dx^m \sqrt{dx^n}.$$

Таким образом, дифференциал dx можно брать отрицательным лишь в случае, если n есть число чётное. Последний член $dx^m \sqrt{dx^n}$ имеет два знака; поэтому y^{I} будет иметь два значения; оба они больше, чем значения y, если только $a + 2bf$ будет количеством положительным и показатели n и $m + \frac{1}{2}n$ будут больше единицы. Следовательно, значение функции y при $x = f$ будет минимумом как в том случае, когда n есть число целое, так и тогда, когда оно есть дробное число, лишь бы только числитель во втором случае и самое число в первом случае не были чётными.

351. Этот метод непосредственного вывода дифференциалов из основных положений полезен главным образом для функций трансцендентных, ибо здесь в некоторых случаях дифференциал, найденный обычным способом, либо исчезает, либо представляется обращающимся в бесконечность. Здесь встречаются такие виды бесконечных и бесконечно малых количеств, с которыми никогда не приходится иметь дело при рассмотрении алгебраических выражений. Действительно, если i есть бесконечное число, то $\mathrm{l}\,i$ является также бесконечным, однако имеет бесконечно малое отношение не только к самому числу i, но и к любой его степени i^n, сколь бы малым ни был показатель n. Таким образом, дробь $\frac{\mathrm{l}\,i}{i^n}$ будет бесконечно малой и станет конечной не раньше, чем показатель n станет бесконечно малым. Итак, $\mathrm{l}\,i$ будет однороден с i^n, если показатель n будет бесконечно мал. Положим теперь $i = \frac{1}{\omega}$, где ω есть бесконечно малое количество; тогда $-\mathrm{l}\,\omega$ будет однороден с $\frac{1}{\omega^n}$, если показатель n бесконечно мал, так что $-\frac{1}{\mathrm{l}\,\omega}$ будет однородно с ω^n. Таким образом, $-\frac{1}{\mathrm{l}\,dx}$ будет бесконечно малым по сравнению с dx^n, где n есть бесконечно малая дробь. Таким образом, если будем иметь $y = -\frac{1}{\mathrm{l}\,x}$, то дифференциал функции y при $x = 0$ будет равен $-\frac{1}{\mathrm{l}\,dx} = dx^n$, и потому dy будет иметь к dx и к какой-либо степени dx бесконечное отношение, и по сравнению с $-\frac{1}{\mathrm{l}\,dx}$ будут исчезать все степени dx, сколь бы малыми ни были их показатели.

352. Далее, мы видели, что если a есть число, большее единицы, а i — бесконечное число, то a^i будет бесконечным количеством столь высокого порядка, что по сравнению с ним не только i, но и любая степень i^n исчезает; и i^n станет однородным с a^i не раньше чем показатель n станет бесконечным. Положим теперь $i=\frac{1}{\omega}$, так что ω есть бесконечно малое количество; тогда $a^{\frac{1}{\omega}}$ будет однородным $a^{\frac{1}{\omega^n}}$, где n есть бесконечно большое число, и потому $a^{-\frac{1}{\omega}}$, т. е. $\frac{1}{a^{1/\omega}}$ будет бесконечно малым по сравнению с ω^n. Значит, $\frac{1}{a^{1:dx}}$ будет бесконечно малым количеством, которое исчезает по сравнению со всеми степенями dx, ибо оно однородно со степенью dx^n, где n есть бесконечно большое число. Поэтому, если ищется дифференциал количества $y=\frac{1}{a^{1:x}}$ при $x=0$, то поскольку $y=0$, будем иметь $dy=\frac{1}{a^{1:dx}}$, так что dy будет бесконечно меньше, чем сколь угодно высокая степень dx.

353. Если же a есть число, меньшее единицы, то так как $\frac{1}{a}$ будет больше единицы, вопрос сведётся к предыдущему. Именно, если будем иметь выражение $a^{\frac{1}{\omega}}$, то оно, если положить $a=1:b$, преобразуется в $b^{-\frac{1}{\omega}}$, т. е. в $\frac{1}{b^{1:\omega}}$, которое будет, так как $b>1$, однородно с ω^n, где n есть бесконечно большое число. После этих замечаний мы сможем решить следующие примеры.

Пример 1

Найти дифференциал функции $y=x^2-\frac{1}{\mathrm{l}\,x}$ *при* $x=0$.

Так как при $x=0$ и $y=0$, то, если положить $x+dx$, т. е. $0+dx$ вместо x, получим

$$y^1=dy=dx^2-\frac{1}{\mathrm{l}\,dx}.$$

А так как $-\frac{1}{\mathrm{l}\,dx}$ однородно с dx^n, где n есть бесконечно малое число, то по сравнению с ним dx^2 исчезает, и мы будем иметь

$$dy=-\frac{1}{\mathrm{l}\,dx}=dx^n.$$

Так как логарифмы отрицательных чисел являются мнимыми, то dx нельзя взять отрицательным, и потому при $x=0$ функция будет минимумом, но не принадлежащим ни к первому, ни ко второму роду. К первому роду она не принадлежит потому, что y не имеет ближайших предшествующих значений, а является меньшей лишь по сравнению с последующими значениями, которые получаются, если x взять большим нуля. Ко второму же роду она не принадлежит потому, что последующие значения, с которыми сравнивается значение y, не являются двойными. Таким образом, мы приходим к третьему виду максимумов и минимумов, которые имеют место только для логарифмических и трансцендентных функций, для алгебраических же не встречаются никогда; об этом будет более подробно сказано в следующей части, трактующей о кривых линиях[1]).

Пример 2

Найти дифференциал функции $y=(a-x)^n - x^n(\mathrm{l}\,a-\mathrm{l}\,x)^n$ при $x=a$.

Этот дифференциал, если n есть целое число, можно найти из общей формулы

$$dy = p\,dx + \frac{1}{2}q\,dx^2 + \frac{1}{6}r\,dx^3 + \text{ и т. д.}$$

Действительно, мы будем иметь

$$p\,dx = -n(a-x)^{n-1}dx - nx^{n-1}dx\,(\mathrm{l}\,a-\mathrm{l}\,x)^n + nx^{n-1}(\mathrm{l}\,a-\mathrm{l}\,x)^{n-1}dx;$$

это значение при $x=a$ исчезает, ибо даже при $n=1$ будем иметь

$$p\,dx = -dx + dx = 0.$$

Если теперь мы пойдём дальше, то получим

$$\frac{1}{2}q\,dx^2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(a-x)^{n-2}dx^2 - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2(\mathrm{l}\,a-\mathrm{l}\,x)^n +$$
$$+\frac{n^2}{2}x^{n-2}dx^2(\mathrm{l}\,a-\mathrm{l}\,x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2(\mathrm{l}\,a-\mathrm{l}\,x)^{n-1} -$$
$$-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}dx^2(\mathrm{l}\,a-\mathrm{l}\,x)^{n-2}.$$

Отсюда, если $n=1$, то будем иметь $\frac{1}{2}q\,dx^2 = \frac{dx^2}{2a}$ при $x=a$. Подобным образом, если $n=2$, то нужно будет перейти к третьему члену и т. д. Поэтому легче будет воспользоваться основными положениями дифференцирования. Так как при $x=a$ мы имеем $y=0$, то, если положить $x+dx$, т. е. $a+dx$ вместо x, будем иметь

$$y^{\mathrm{I}} = (-dx)^n - (a+dx)^n(\mathrm{l}\,a - \mathrm{l}\,(a+dx))^n = y+dy = dy,$$

ибо $y=0$. Но

$$\mathrm{l}\,(a+dx) = \mathrm{l}\,a + \frac{dx}{a} - \frac{dx^2}{2a^2} + \frac{dx^3}{3a^3} - \text{ и т. д.},$$

откуда

$$dy = (-dx)^n - \left(a^n + na^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}dx^2 + \text{ и т. д.}\right)\times$$
$$\times\left(-\frac{dx}{a} + \frac{dx^2}{2a^2} - \frac{dx^3}{3a^3} + \text{ и т. д.}\right)^n = \frac{n}{2a}(-dx)^{n+1}.$$

Таким образом, при $x=a$ искомый дифференциал dy предложенной функции будет

если $n=1$, $dy=\frac{dx^2}{2a}$, как ранее мы нашли,

если $n=2$, $dy=-\frac{2dx^3}{2a}$,

если $n=3$, $dy=\frac{3dx^4}{2a}$,

если $n=4$, $dy=-\frac{4dx^5}{2a}$

и т. д. и т. д.

Если n будет числом нечётным, то функция y при $x=a$ будет мини-

[1]) См. § 10 вводной статьи.

мум, если же n — число чётное, то не будет ни максимума, ни минимума; то же самое будет справедливо, если n будет дробью с нечётным знаменателем. Если же n будет дробью с чётным знаменателем, тогда dx нужно считать отрицательным, чтобы не получилось мнимости и вследствие двузначности функция не будет иметь ни максимума, ни минимума.

Пример 3

Найти дифференциал функции $y=x^x$ *при* $x=\frac{1}{e}$, *где* e *есть число, гиперболический логарифм которого равен* 1.

Так как в общем случае мы имеем $dy=x^x dx(\mathrm{l}x+1)$, то в случае $x=\frac{1}{e}$, т. е. $\mathrm{l}x=-1$ этот дифференциал исчезает. Сравним этот дифференциал с общим выражением $p\,dx+\frac{1}{2}q\,dx^2+$ и т. д.; будем иметь

$$p=x^x(\mathrm{l}x+1) \quad \text{и} \quad q=x^x(\mathrm{l}x+1)^2+x^{x-1}.$$

Положив $\mathrm{l}x=-1$ или $x=\frac{1}{e}$, будем иметь

$$q=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1-e}{e}}=e^{\frac{e-1}{e}}.$$

Поэтому искомый дифференциал есть

$$dy=\frac{1}{2}\,e^{(e-1):e}\,dx^2,$$

следовательно, функция $y=x^x$ становится минимумом при $x=\frac{1}{e}$.

Пример 4

Найти дифференциал функции $y=x^n+e^{-1:x}$ *при* $x=0$.

Так как при $x=0$ и $y=0$, то, если положить $x=0+dx$, будем иметь

$$y^{\mathrm{I}}=dy=dx^n+\frac{1}{e^{1:dx}}.$$

Но, как мы видели, $\frac{1}{e^{1:dx}}$ однородно с бесконечной степенью количества dx, т. е. с dx^{∞}, поэтому оно исчезает по сравнению с dx^n, так что

$$dy=dx^n.$$

354. Подобно тому как в некоторых случаях первые дифференциалы нельзя получить по обычным правилам дифференцирования, так и для дифференциалов второго, третьего и более высоких порядков бывают случаи, когда в полном выражении дифференциала

$$d\cdot y=p\,dx+\frac{1}{2}q\,dx^2+\frac{1}{6}\,r\,dx^3+\frac{1}{24}\,s\,dx^4+\ \text{и т. д.}$$

некоторые из количеств q, r, s и т. д. либо исчезают, либо обращаются в бесконечность. А именно, так как (§ 339),

$$d^2\cdot y=q\,dx^2+r\,dx^3+\frac{7}{12}\,s\,dx^4+\ \text{и т. д.},$$

то, если в каком-либо случае $q=0$, будем иметь $d^2y=r\,dx^3$, если же в этом случае и r исчезает, тогда будем иметь $d^2y=\frac{7}{12}s\,dx^4$ и т. д. Если же либо q, либо r, либо s и т. д. становится бесконечным, тогда из этого ряда вовсе нельзя найти второй дифференциал, а нужно будет прибегнуть к основному началу дифференциалов, т. е. нужно будет положить $x+dx$ вместо x, отыскать значение y^{I}, затем положить $x+2dx$ вместо x, отыскать значение y^{II}, и тогда истинное значение второго дифференциала будет

$$d^2y=dy^{\mathrm{I}}-dy=y^{\mathrm{II}}-2y^{\mathrm{I}}+y.$$

Подобным образом, если потребуется найти третий дифференциал, то сверх того нужно будет в y вместо x написать $x+3dx$; тогда, найдя значение y^{III}, будем иметь

$$d^3y=y^{\mathrm{III}}-3y^{\mathrm{II}}+3y^{\mathrm{I}}-y$$

и т. д. Эти случаи мы поясним следующими примерами.

Пример 1

Найти второй дифференциал функции $y=\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$ *при* $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Найдём полный дифференциал y из выражения

$$dy=p\,dx+\frac{1}{2}q\,dx^2+\frac{1}{6}r\,dx^3+\frac{1}{24}s\,dx^4+\text{ и т. д.};$$

для p, q, r, s и т. д. найдём следующие значения:

$$p=-\frac{4a^2x}{(a^2+x^2)^2},\quad q=\frac{-4a^4+12a^2x^2}{(a^2+x^2)^3}\quad\text{и}\quad r=-\frac{48a^4x-48a^2x^3}{(a^2+x^2)^4}.$$

Так как теперь

$$d^2y=r\,dx^3+\frac{7}{12}s\,dx^4+\text{ и т. д.},$$

то, поскольку $q=0$ при $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, и $r=\frac{27\sqrt{3}}{8a^3}$ при том же значении q, искомый второй дифференциал будет

$$d^2y=\frac{27dx^2\sqrt{3}}{8a^3}.$$

Пример 2

Найти третий дифференциал функции $y=\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$ *при* $x=a$. Найдём, как прежде, полный дифференциал

$$dy=\frac{1}{2}q\,dx^2+\frac{1}{6}r\,dx^3+\frac{1}{24}s\,dx^4+\text{ и т. д.}$$

Так как третий дифференциал есть $d^3y=r\,dx^3+\frac{3}{2}s\,dx^4+$ и т. д. и так как

$$r=\frac{48a^4x-48a^2x^3}{(a^2+x^2)^4},$$

то будем иметь $r=0$ при $x=a$; поэтому нужно будет перейти к значению s, которое будет

$$s=\frac{48a^4-144a^2x^2}{(a^2+x^2)^4}-\frac{8x(48a^4x-48a^2x^3)}{(a^2+x^2)^5}.$$

Положив здесь $x=a$, будем иметь $s=-\frac{96a^4}{2^4a^8}=-\frac{6}{a^4}$; поэтому в данном случае будем иметь

$$d^3y=-\frac{9dx^4}{a^4}.$$

Пример 3

Найти дифференциалы всех порядков функции $y=ax^m+bx^n$ *при* $x=0$.

Если будем полагать последовательно $x+dx$, $x+2dx$, $x+3dx$ и т. д. вместо x, то найдём следующие значения функции y:

$$y^{\mathrm{I}}=a(x+dx)^m+b(x+dx)^n,$$
$$y^{\mathrm{II}}=a(x+2dx)^m+b(x+2dx)^n,$$
$$y^{\mathrm{III}}=a(x+3dx)^m+b(x+3dx)^n$$

и т. д.

Положим $x=0$, тогда $y=0$, и его дифференциалы будут

$$dy=a\,dx^m+b\,dx^n,$$
$$d^2y=(2^m-2)\,a\,dx^m+(2^n-2)\,b\,dx^n,$$
$$d^3y=(3^m-3\cdot 2^m+3)\,a\,dx^m+(3^n-3\cdot 2^n+3)\,b\,dx^n,$$
$$d^4y=(4^m-4\cdot 3^m+6\cdot 2^m-4)\,a\,dx^m+(4^n-4\cdot 3^n+6\cdot 2^n-4)\,b\,dx^n$$

и т. д.

Если показатель n будет больше, чем m, то вторые члены этих выражений будут исчезать по сравнению с первыми. Тем не менее нужно эти члены сохранить, если число n будет дробным, для того, чтобы можно было учесть случаи, когда эти дифференциалы становятся мнимыми или двузначными. Дальнейшее рассмотрение этих случаев уместно будет перенести в учение о кривых линиях[1]).

[1]) См. § 10 вводной статьи.

ГЛАВА XV

О ЗНАЧЕНИЯХ ФУНКЦИЙ, КОТОРЫЕ В НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ КАЖУТСЯ НЕОПРЕДЕЛЁННЫМИ

355. Если какая-либо функция y переменного x будет дробью $\frac{P}{Q}$, числитель и знаменатель которой при некотором значении x одновременно исчезают, то в этом случае дробь $\frac{P}{Q}$, выражающая значение функции y, становится равной $\frac{0}{0}$. Так как это выражение может быть равным любому количеству — конечному, бесконечному или бесконечно малому, то в этом случае из него вовсе нельзя найти значения y, и потому кажется, что это значение неопределённо. Легко, однако, видеть, что так как, за исключением этого случая, функция y постоянно получает определённое значение, какое бы значение ни было подставлено вместо x, то и в этом случае значение $\frac{P}{Q}$ не может быть неопределённым. Это ясно хотя бы из следующего примера: если $y=\frac{a^2-x^2}{a-x}$, то при $x=a$ мы получаем $y=\frac{0}{0}$. Однако так как, разделив числитель на знаменатель, мы получаем $y=a+x$, то очевидно, что при $x=a$ будем иметь $y=2a$, так что в этом случае дробь $\frac{P}{Q}$ равносильна количеству $2a$.

356. Поскольку выше мы показали, что между нулями может существовать какое угодно отношение, то в примерах подобного рода нужно найти то отношение, которое числитель имеет к знаменателю. А так как для нулей, взятых абсолютно, нельзя усмотреть их взаимного отличия, то вместо них нужно ввести бесконечно малые количества. Хотя последние по их значению не отличаются от нуля, однако, так как функции, составляющие числитель и знаменатель, различны, то значение дроби тотчас же определяется. Так, если мы имеем дробь $\frac{a\,dx}{b\,dx}$, то хотя на самом деле числитель и знаменатель равны нулю, однако очевидно, что значение этой дроби является определённым, а именно, оно равно $\frac{a}{b}$. Если же мы имеем дробь $\frac{a\,dx^2}{b\,dx}$, то значение её будет равно нулю, тогда как значение дроби $\frac{a\,dx}{b\,dx^2}$ бесконечно большое. Таким образом, если вместо нулей, которые часто входят в исчисление, мы введём бесконечно малые количества, то мы извлечём из этого ту выгоду, что мы сможем тотчас же узнать отношение их друг к другу, и, таким образом, не останется больше сомнения относительно значения таких выражений.

357. Чтобы всё это стало вполне ясным, положим, что у дроби $y=\frac{P}{Q}$ как числитель, так и знаменатель исчезают при $x=a$. Чтобы избежать, однако, нулей, которые нельзя сравнивать между собой, положим $x=a+dx$; эта подстановка на самом деле совпадает с первой $x=a$, так как $dx=0$. При $x=a+dx$, функции P и Q переходят в $P+dP$ и $Q+dQ$. Так как подстановка $x=a+dx$ равносильна подстановке $x=a$, то положим повсюду в этих выражениях $x=a$. Тогда функции P и Q по условию исчезают. Поэтому, если вместо x положить $a+dx$, то дробь $\frac{P}{Q}$ преобразуется в дробь $\frac{dP}{dQ}$, которая, следовательно, выражает значение функции $\frac{P}{Q}$ при $x=a$. А это выражение уже не может быть неопределённым, если взять истинные дифференциалы функций P и Q, о которых мы говорили в предыдущей главе. Действительно, при этом ни dP, ни dQ никогда не обратятся в нуль абсолютно и если не выразятся через дифференциал dx, то во всяком случае выразятся через его степени. Если мы найдём, таким образом, что $dP=R\,dx^m$ и $dQ=S\,dx^n$, то значение функции $y=\frac{P}{Q}$ в случае $x=a$ будет равно $\frac{R\,dx^m}{S\,dx^n}$. Поэтому оно будет конечным и равным $\frac{R}{S}$, если $m=n$; если $m>n$, то истинное значение предложенной дроби будет равно нулю, если же $m<n$, то это значение будет бесконечным.

358. Итак, всякий раз, как встретится дробь $\frac{P}{Q}$, числитель и знаменатель которой в некотором случае, например в случае $x=a$, исчезают одновременно, значение такой дроби в этом случае найдётся по следующему правилу.

Ищутся дифференциалы количеств P и Q при $x=a$; они подставляются вместо самих количеств P и Q, после чего дробь $\frac{dP}{dQ}$ даст искомое значение дроби $\frac{P}{Q}$.

Если дифференциалы dP и dQ, найденные обычным способом, не становятся бесконечными и не исчезают при $x=a$, то можно их сохранить; если же они одновременно оба становятся равными нулю или оба равными бесконечности, то нужно найти полные дифференциалы по способу, изложенному в предыдущей главе. Часто вычисление чрезвычайно упрощается, если сначала положить $x-a=t$ или $x=a+t$: мы получаем тогда дробь $\frac{P}{Q}$, числитель и знаменатель которой исчезают при $x=a$, и дифференциалы dP и dQ получатся, если всюду подставить dt вместо t.

Пример 1

Пусть ищется значение дроби $\frac{b-\sqrt{b^2-t^2}}{t^2}$ *при* $t=0$.

Так как в этом случае $t=0$, и как числитель, так и знаменатель исчезают, то нужно только вместо t написать dt, и искомое значение представится дробью $\frac{b-\sqrt{b^2-dt^2}}{dt^2}$. А так как $\sqrt{b^2-dt^2}=b-\frac{dt^2}{2b}$, то эта дробь переходит в дробь $\frac{dt^2}{2b\,dt^2}=\frac{1}{2b}$. Поэтому предложенная дробь $\frac{b-\sqrt{b^2-t^2}}{t^2}$ при $t=0$ получает значение $\frac{1}{2b}$.

Пример 2

Пусть ищется значение дроби $\frac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ *при* $x=0$.

Здесь снова можно сразу же вместо x подставить dx; после этого, поскольку

$$\sqrt{a^2+a\,dx+dx^2}=a+\frac{1}{2}dx+\frac{3dx^2}{8a},$$

$$\sqrt{a^2-a\,dx+dx^2}=a-\frac{1}{2}dx+\frac{3dx^2}{8a}$$

и

$$\sqrt{a+dx}=\sqrt{a}+\frac{dx}{2\sqrt{a}},$$

$$\sqrt{a-dx}=\sqrt{a}-\frac{dx}{2\sqrt{a}},$$

числитель станет равным dx, а знаменатель равным $\frac{dx}{\sqrt{a}}$; отсюда находим, что значение предложенной дроби будет равно $\sqrt{a}$.

Пример 3

Пусть ищется значение дроби $\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{2ax-a^2}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{2ax-x^2}}$ *при* $x=a$.

Если дифференцировать обычным образом и подставить дифференциалы вместо числителя и знаменателя, то получим дробь

$$\frac{3x^2-8ax+7a^2-2a^3:\sqrt{2ax-a^2}}{2x-2a+2a(a-x):\sqrt{2ax-x^2}},$$

числитель и знаменатель которой снова исчезают при $x=a$. Поэтому снова подставляем вместо числителя и знаменателя их дифференциалы; получаем дробь

$$\frac{6x-8a+2a^4:(2ax-a^2)^{3/2}}{2-2a^3:(2ax-a^2)^{3/2}},$$

числитель и знаменатель которой снова исчезают при $x=a$. Поэтому опять подставим вместо числителя и знаменателя их дифференциалы; получим

$$\frac{6-6a^5:(2ax-a^2)^{5/2}}{6a^3(a-x):(2ax-x^2)^{5/2}}=\frac{1-a^5:(2ax-a^2)^{5/2}}{a^3(a-x):(2ax-x^2)^{5/2}}.$$

И снова при $x=a$ как числитель, так и знаменатель исчезают. Поэтому снова подставляем вместо них дифференциалы; получаем

$$\frac{5a^6:(2ax-a^2)^{7/2}}{-(5a^5-8a^4x+4a^3x^2):(2ax-x^2)^{7/2}}.$$

Теперь, наконец, вместо x полагаем a и получаем определённую дробь $\frac{5:a}{-1:a^2}=-5a$, которая даёт значение искомой дроби.

Если же прежде чем предпринимать это исследование, положить $x=a+t$, то предложенная дробь преобразуется к виду

$$\frac{2a^3+2a^2t-at^2+t^3-2a^2\sqrt{a^2+2at}}{-2a^2+t^2+2a\sqrt{a^2-t^2}}.$$

Так как она принимает вид $\frac{0}{0}$ при $t=0$, то положим dt вместо t; тогда будем иметь

$$\frac{2a^3+2a^2\,dt-a\,dt^2+dt^3-2a^2\sqrt{a^2+2a\,dt}}{-2a^2+dt^2+2a\sqrt{a^2-dt^2}}.$$

Разложим теперь иррациональные выражения в ряды, которые будем продолжать до тех пор, пока члены не перестанут уничтожаться рациональными членами:

$$\sqrt{a^2+2a\,dt}=a+dt-\frac{dt^2}{2a}+\frac{dt^3}{2a^2}-\frac{5dt^4}{8a^3},$$

$$\sqrt{a^2-dt^2}=a-\frac{dt^2}{2a}-\frac{dt^4}{8a^3};$$

подставив эти значения, получаем дробь

$$\frac{5dt^4:4a}{-dt^4:4a^2}=-5a;$$

это есть ранее найденное значение предложенной дроби.

Пример 4

Найти значение дроби $\frac{a+\sqrt{2a^2-2ax}-\sqrt{2ax-x^2}}{a-x+\sqrt{a^2-x^2}}$ *при* $x=a$.

Если вместо числителя и знаменателя подставим их дифференциалы, то получим дробь

$$\frac{-a:\sqrt{2a^2-2ax}-(a-x):\sqrt{2ax-x^2}}{-1-x:\sqrt{a^2-x^2}},$$

которая при $x=a$ будет равна предложенной дроби. Числитель и знаменатель полученной дроби при $x=a$ становятся бесконечными. Однако если числитель и знаменатель помножить на $-\sqrt{a-x}$, то получим дробь

$$\frac{a : \sqrt{2a} + (a-x)^{3/2} : \sqrt{2ax - x^2}}{\sqrt{a-x} + x : \sqrt{a+x}},$$

которая при $x = a$ даст определённое значение $\frac{a : \sqrt{2a}}{a : \sqrt{2a}} = 1$, которое равно предложенной дроби при $x = a$.

359. Таким образом, если мы имеем дробь $\frac{P}{Q}$, числитель и знаменатель которой исчезают при $x = a$, то её значение можно найти и по обычным правилам дифференцирования, и нет необходимости прибегать к тем дифференциалам, которые мы изучали в предыдущей главе. Действительно, если предложенная дробь $\frac{P}{Q}$ при $x = a$ будет равна такой дроби $\frac{dP}{dQ}$, числитель и знаменатель которой при $x = a$ дадут конечные значения, то значение предложенной дроби окажется известным; если числитель будет равен нулю, а знаменатель будет конечным, то дробь будет равна нулю. Если же знаменатель будет равен нулю, а числитель конечен, то дробь будет равна бесконечности. Если либо числитель, либо знаменатель, либо оба они становятся равными бесконечности, что случается, если производится деление на количества, которые при $x = a$ исчезают, тогда, помножая числитель и знаменатель на эти делители, мы освобождаемся от этого неудобства, как это было в последнем примере. Если же как числитель, так и знаменатель при $x = a$ снова исчезают, тогда нужно снова дифференцировать, как мы сделали это сначала; тогда получим дробь $\frac{d^2P}{d^2Q}$, которая также будет равна предложенной дроби при $x = a$; а если снова случится с этой дробью, что она будет равна $\frac{0}{0}$, то вместо неё нужно взять дробь $\frac{d^3P}{d^3Q}$ и т. д., пока мы не придём к такой дроби, которая будет иметь определённое значение, будь то конечное, бесконечно большое или бесконечно малое. Так, в третьем примере нам пришлось дойти до дроби $\frac{d^4P}{d^4Q}$ прежде, чем мы смогли найти значение предложенной дроби.

360. Польза этого метода обнаруживается при определении сумм найденных выше (§ 22 гл. II) рядов, если в этих рядах положить $x = 1$. Действительно, из того, что там было сказано, следует, что

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x},$$

$$x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} = \frac{x - x^{2n+1}}{1-x^2},$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2},$$

$$x + 3x^3 + 5x^5 + \ldots + (2n-1)x^{2n-1} = \frac{x + x^3 - (2n+1)x^{2n+1} + (2n-1)x^{2n+3}}{(1-x^2)^2},$$

$$x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + n^2x^n =$$

$$= \frac{x + x^2 - (n+1)^2 x^{n+1} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+2} - n^2x^{n+3}}{(1-x)^3}$$

и т. д.

Но если бы мы пожелали определить суммы этих рядов для случая $x=1$, то в выражениях их как числитель, так и знаменатель оказались бы исчезающими. Таким образом, значения этих сумм при $x=1$ можно будет найти изложенным здесь методом. А так как эти суммы известны из других соображений, то согласие результатов ещё лучше убедит нас в правильности этого метода.

Пример 1

Определить значение дроби $\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$ *при* $x=1$; *в этом случае она выражает сумму ряда* $1+1+1+\ldots+1$, *состоящего из* n *членов, и, следовательно, будет равна* n.

Так как в случае $x=1$ числитель и знаменатель исчезают, то вместо них подставляем их дифференциалы; получаем

$$\frac{1-(n+1)x^n}{-1},$$

что при $x=1$ даёт для искомой суммы значение, равное n.

Пример 2

Найти значение дроби $\frac{x-x^{2n+1}}{1-x^2}$ *при* $x=1$; *в этом случае она выражает сумму ряда* $1+1+1+\ldots+1$, *состоящего из* n *членов и, следовательно, равна* n.

Если взять дифференциалы, то предложенная дробь преобразуется в дробь

$$\frac{1-(2n+1)x^{2n}}{-2x},$$

значение которой при $x=1$ будет равно n.

Пример 3

Найти значение дроби $\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ *при* $x=1$; *в этом случае она выражает сумму ряда* $1+2+3+\ldots+n$, *которая, как известно, равна* $\frac{n^2+n}{2}$.

Взяв дифференциалы, получим дробь

$$\frac{1-(n+1)^2x^n+n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)},$$

у которой как числитель, так и знаменатель при $x=1$ исчезают. Возьмём снова дифференциалы; получим дробь

$$\frac{-n(n+1)^2x^{n-1}+n(n+1)(n+2)x^n}{2},$$

которая при $x=1$ переходит в $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$, т. е. в сумму предложенного ряда.

Пример 4

Найти значение дроби $\frac{x+x^3-(2n+1)x^{2n+1}+(2n-1)x^{2n+3}}{(1-x^2)^2}$ *при* $x=1$; *в этом случае она выражает сумму ряда* $1+3+5+\ldots+(2n-1)$, *которая, как известно, равна* n^2.

Подставив вместо числителя и знаменателя их дифференциалы, получим дробь

$$\frac{1+3x^2-(2n+1)^2x^{2n}+(2n-1)(2n+3)x^{2n+2}}{-4x(1-x^2)};$$

так как и она имеет то неудобство, что при $x=1$ обращается в $\frac{0}{0}$, то снова возьмём дифференциалы; получим дробь

$$\frac{6x-2n(2n+1)^2x^{2n-1}+(2n-1)(2n+2)(2n+3)x^{2n+1}}{-4+12x^2},$$

которая при $x=1$ переходит в

$$\frac{6-2n(2n+1)^2+(2n-1)(2n+2)(2n+3)}{8}=n^2.$$

Пример 5

Найти значение дроби $\frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2n^2+2n-1)x^{n+2}-n^2x^{n+3}}{(1-x)^3}$ *при* $x=1$; *в этом случае она выражает сумму ряда* $1+4+9+\ldots+n^2$, *которая, как известно, равна* $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$.

Взяв дифференциалы числителя и знаменателя, получим дробь

$$\frac{1+2x-(n+1)^3x^n+(n+2)(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2(n+3)x^{n+2}}{-3(1-x)^2},$$

числитель и знаменатель которой при $x=1$ снова исчезают. Возьмём поэтому, вторые дифференциалы; получим

$$\frac{2-n(n+1)^3x^{n-1}+(n+1)(n+2)(2n^2+2n-1)x^n-n^2(n+2)(n+3)x^{n+1}}{6(1-x)}.$$

Так как попрежнему остаётся то же неудобство, перейдём к третьим дифференциалам; получим дробь

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3x^{n-2}+n(n+1)(n+2)(2n^2+2n-1)x^{n-1}-n^2-(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{-6},$$

которая, наконец, перейдёт при $x=1$ в следующее определённое выражение

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3+n(n+1)(n+2)(n^2-n-1)}{-6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n.$$

Это — то самое значение, которое, как было прежде найдено, выражает упомянутый ряд.

Пример 6

Пусть предложена дробь $\frac{x^m - x^{m+n}}{1 - x^{2p}}$; *требуется найти её значение при* $x = 1$.

Так как эта дробь есть произведение двух дробей $\frac{x^m}{1+x^p} \cdot \frac{1-x^n}{1-x^p}$ и так как значение первого множителя при $x = 1$ равняется $\frac{1}{2}$, то остаётся найти значение другого сомножителя $\frac{1-x^n}{1-x^p}$; взяв дифференциалы, найдём, что это значение равно $\frac{nx^{n-1}}{px^{p-1}} = \frac{n}{p}$; таким образом, значение предложенной дроби при $x = 1$ будет равно $\frac{n}{2p}$. То же значение мы получим, если непосредственно возьмём дифференциалы в предложенной дроби. Действительно, мы получим дробь

$$\frac{mx^{m-1} - (m+n)\,x^{m+n-1}}{-2px^{2p-1}},$$

значение которой при $x = 1$ будет равно $\frac{-n}{-2p} = \frac{n}{2p}$, как и прежде.

361. Тем же методом можно будет пользоваться и тогда, если либо числитель, либо знаменатель предложенной дроби $\frac{P}{Q}$, либо оба они будут количествами трансцендентными. Для большей ясности мы считаем полезным добавить следующие примеры.

Пример 1

Пусть предложена дробь $\frac{a^n - x^n}{\mathrm{l}\,a - \mathrm{l}\,x}$ *и пусть ищется её значение при* $x = a$.

Взяв дифференциалы, мы тотчас же приходим к дроби

$$\frac{-nx^{n-1}}{-1 : x} = nx^n,$$

значение которой при $x = a$ будет na^n.

Пример 2

Пусть предложена дробь $\frac{\mathrm{l}\,x}{\sqrt{1-x}}$ *и пусть ищется её значение при* $x = 1$.

Взяв дифференциалы числителя и знаменателя, получаем дробь

$$\frac{1 : x}{-1 : 2\sqrt{1-x}} = \frac{-2\sqrt{1-x}}{x},$$

значение которой при $x = 1$ равно нулю. Следовательно, дробь $\frac{\mathrm{l}\,x}{\sqrt{1-x}}$ при $x = 1$ исчезает.

Пример 3

Пусть предложена дробь $\frac{a-x-a\,\mathrm{l}\,a+a\,\mathrm{l}\,x}{a-\sqrt{2ax-x^2}}$ *и пусть ищется её значение при* $x=a$; *в этом случае её числитель и знаменатель исчезают.*

Дифференцируя, согласно правилу, числитель и знаменатель, будем иметь

$$\frac{-1+a:x}{-(a-x):\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{(a-x)\sqrt{2ax-x^2}}{-x(a-x)}.$$

Хотя здесь числитель и знаменатель тоже исчезают при $x=a$, однако так как оба они делятся на $a-x$, то мы получим дробь $-\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, значение которой при $x=a$ является определённым и равно -1. Итак предложенная дробь становится при $x=a$ равной -1.

Пример 4

Пусть предложена дробь $\frac{e^x-e^{-x}}{\mathrm{l}(1+x)}$, *и пусть ищется её значение при* $x=0$.

Взяв дифференциалы, будем иметь функцию

$$\frac{e^x+e^{-x}}{1:(1+x)},$$

из которой находим, что искомое значение равно 2.

Пример 5

Найти значение дроби $\frac{e^x-1-\mathrm{l}(1+x)}{x^2}$ *при* $x=0$.

Если вместо числителя и знаменателя подставить их дифференциалы, получим дробь

$$\frac{e^x-1:(1+x)}{2x}.$$

Так как она также переходит в $\frac{0}{0}$, если положить $x=0$, то снова берём дифференциалы; получаем дробь

$$\frac{e^x+1:(1+x)^2}{2},$$

которая при $x=0$ даёт $\frac{1+1}{2}=1$. То же самое получим, если сразу подставить $dx+0$ вместо x. Действительно, так как

$$e^{dx}=1+dx+\frac{1}{2}dx^2 \text{ и т. д. и } +\mathrm{l}(1+dx)=dx-\frac{1}{2}dx^2+\text{и т. д.},$$

то

$$\frac{e^{dx}-1-\mathrm{l}(1+dx)}{dx^2}=\frac{dx^2}{dx^2}=1.$$

Пример 6

Пусть ищется значение дроби $\frac{x^n}{\mathrm{l}\,x}$ *при* $x = \infty$.

Для приведения дроби к такому виду, чтобы она переходила в $\frac{0}{0}$ при $x = \infty$, представим её следующим образом:

$$\frac{1 : \mathrm{l}\,x}{1 : x^n}.$$

В самом деле, теперь при $x = \infty$ как числитель, так и знаменатель исчезают. Положим далее $x = \frac{1}{y}$, так что при $x = \infty$ будем иметь $y = 0$; тогда предложенная дробь представится в виде

$$\frac{1 : \mathrm{l}\,y}{y^n},$$

и нужно будет определить её значение при $y = 0$.

Взяв дифференциалы, будем иметь дробь $\frac{1 : y(\mathrm{l}\,y)^2}{ny^{n-1}} = \frac{1 : (\mathrm{l}\,y)^2}{ny^n}$; так как она при $y = 0$ переходит в $\frac{0}{0}$, то возьмём снова дифференциалы; тогда будем иметь $\frac{-2 : (\mathrm{l}\,y)^3}{n^2y^n}$; так как здесь снова налицо то же неудобство, то возьмём вновь дифференциалы; получится $\frac{6 : (\mathrm{l}\,y)^4}{n^3y^n}$ и, таким образом, сколько бы мы ни шли дальше, всегда будем встречаться с тем же неудобством. Чтобы, несмотря на это, получить искомое значение, обозначим через s значение дроби $\frac{1 : \mathrm{l}\,y}{y^n}$ при $y = 0$; так как в этом случае мы имеем также

$$s = \frac{1 : (\mathrm{l}\,y)^2}{ny^n}$$

и так как из того уравнения [1]) мы имеем

$$s^2 = \frac{1 : (\mathrm{l}\,y)^2}{y^{2n}},$$

то, разделив на предыдущее уравнение, получим

$$s = \frac{ny^n}{y^{2n}} = \frac{n}{y^n}.$$

Отсюда видно, что при $y = 0$ количество s становится бесконечным. Следовательно, значение дроби $\frac{1 : \mathrm{l}\,y}{y^n}$ при $x = 0$ бесконечно и потому, если положить $y = dx$, то $\frac{1}{\mathrm{l}\,dx}$ будет иметь к dx^n бесконечное отношение, как мы уже заметили выше (§ 351).

[1]) То-есть из уравнения $s = -\frac{1 : \mathrm{l}\,y}{y^n}$.

Пример 7

Пусть ищется значение дроби $\frac{x^n}{e^{-1:x}}$ *при* $x=0$; *в этом случае как числитель, так и знаменатель исчезают.*

Пусть $\frac{x^n}{e^{-1:x}}=s$; взяв дифференциалы, будем иметь также

$$s=\frac{nx^{n-1}}{e^{-1:x}:x^2}=\frac{nx^{n+1}}{e^{-1:x}}.$$

Так как мы снова встречаемся с тем же неудобством и так как это будет повторяться всё время, до каких бы пор мы ни продолжали дифференцировать, то воспользуемся применённым прежде приёмом. Первое уравнение даёт

$$x^n=e^{-1:x}s \quad \text{и} \quad x^{n(n+1)}=e^{-(n+1):x}s^{n+1};$$

второе уравнение даёт

$$x^{n+1}=e^{-1:x}s:n,$$

откуда

$$x^{n(n+1)}=e^{-n:x}s^n:n^n.$$

Если приравнять эти значения, получим

$$e^{-1:x}sn^n=1,$$

так что при $x=0$ имеем

$$s=\frac{1}{n^n e^{-1:x}}=\infty.$$

Поэтому при x бесконечно малом dx^n будет иметь к $e^{-1:dx}$ бесконечно большое отношение, какое бы конечное число мы ни взяли для n; отсюда следует, что $e^{-1:dx}$ есть бесконечно малое, однородное с dx^m, если m есть бесконечно большое число.

Пример 8

Пусть ищется значение дроби $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ при $x=\frac{\pi}{2}$, *т. е. при* x, *равном дуге в* 90°.

Взяв дифференциалы, получим дробь

$$\frac{-\cos x-\sin x}{\cos x-\sin x}.$$

Так как при $x=\frac{\pi}{2}$, $\sin x=1$ и $\cos x=0$, то эта дробь при $x=\frac{\pi}{2}$ становится равной 1, так что единица есть значение предложенной дроби. Это ясно и без дифференцирования. Действительно, так как $\cos x=\sqrt{(1+\sin x)(1-\sin x)}$, то предложенная дробь преобразуется в дробь

$$\frac{\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}},$$

которая, очевидно, становится равной 1, если $\sin x=1$.

Пример 9

Найти значение выражения $\frac{x^x - x}{1 - x + l\,x}$ *при* $x = 1$.

Если подставить вместо числителя и знаменателя их дифференциалы, то получим дробь

$$\frac{x^x(1 + l\,x) - 1}{-1 + 1 : x}.$$

Так как она при $x = 1$ становится равной $\frac{0}{0}$, то возьмём снова дифференциалы; получим дробь

$$\frac{x^x(1 + l\,x)^2 + x^x : x}{-1 : x^2},$$

которая при $x = 1$ становится равной -2; это и есть значение предложенной дроби при $x = 1$.

362. Поскольку мы решили изучить здесь все выражения, значения которых в некоторых случаях кажутся неопределёнными, то мы должны рассмотреть не только те дроби $\frac{P}{Q}$, числитель и знаменатель которых в некотором случае исчезают, но также и такие дроби, числитель и знаменатель которых в некотором случае становятся бесконечными, ибо и их значения также кажутся неопределёнными. Пусть P и Q будут такими функциями от x, что при некотором значении $x = a$ обе они становятся бесконечными, тогда дробь $\frac{P}{Q}$ получает вид $\frac{\infty}{\infty}$, ибо и бесконечности, как и нули, могут иметь друг к другу некоторое отношение. Но отсюда нельзя найти истинное значение дроби. Однако этот случай можно свести к предыдущему, если преобразовать дробь $\frac{P}{Q}$ к виду $\frac{1 : Q}{1 : P}$, ибо у этой дроби числитель и знаменатель исчезают при $x = a$; поэтому значение её можно найти по ранее изложенному способу. Но можно так же найти искомое значение и без преобразования, если вместо x подставить не a, а $a + dx$; тогда мы получим не абсолютные бесконечности ∞, а выражения вида $\frac{1}{dx}$ или $\frac{A}{dx^n}$, хотя эти выражения так же бесконечны, как ∞, но так как количество dx и его степени можно сравнивать друг с другом, то искомое значение легко найдётся.

363. К тому же классу принадлежат и произведения двух сомножителей, из которых один исчезает при некотором значении $x = a$, а другой обращается в бесконечность. Действительно, когда какое-либо количество может быть представленным в виде $0 \cdot \infty$, его значение кажется неопределённым. Пусть PQ есть такое произведение, что если подставить $x = a$, будет $P = 0$ и $Q = \infty$. Значение этого произведения мы найдём по вышеизложенным правилам, если положим $Q = \frac{1}{R}$. Действительно, тогда произведение PQ преобразуется в дробь $\frac{P}{R}$, числитель и знаменатель которой исчезают при $x = a$, так что значение её можно будет найти ранее изложенным методом.

Так, пусть ищется значение произведения $(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ при $x=1$; в этом случае $1-x=0$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\infty$. Обратим это произведение в дробь

$$\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi x},$$

числитель и знаменатель которой исчезают при $x=1$. Так как дифференциал числителя $1-x$ есть $-dx$, а дифференциал знаменателя $\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}$ равен $-\frac{\pi\, dx:2}{\left(\sin\frac{1}{2}\pi x\right)^2}$, то значение предложенной дроби при $x=1$ будет равно

$$\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{2}{\pi},$$

ибо $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

364. Сюда же в первую очередь должны быть отнесены и такие выражения, которые, если задать x некоторое определённое значение, принимают вид $\infty-\infty$; действительно, так как два бесконечных количества могут разниться друг от друга на конечную величину, то ясно, что в этом случае значение выражения нельзя определить иначе, как найдя разность между двумя бесконечностями. Подобный случай имеет место, если предлагается такая функция $P-Q$, что при $x=a$ в ней как $P=\infty$, так и $Q=\infty$. В этом случае искомое значение не столь легко можно определить с помощью вышеизложенного правила. В самом деле, если положить в этом случае $P-Q=f$, то будем иметь $e^{P-Q}=e_f$, так что $e^f=\frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$, то при $x=a$ будет исчезать как числитель, так и знаменатель, однако если применить данное выше правило, то получим $e^f=\frac{e^{-Q}dQ}{e^{-P}dP}$, откуда, так как $e^f=\frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$, получим $1=\frac{dQ}{dP}$, так что искомое значение f отсюда нельзя будет найти. Однако всякий раз как P и Q суть алгебраические количества, поскольку они могут быть бесконечными лишь в том случае, когда представляют дроби, знаменатели которых исчезают, $P-Q$ можно будет представить в виде единой дроби, знаменатель которой равным образом будет исчезать. Если при этом и числитель будет исчезать, то значение можно будет определить по вышеизложенному способу; если же числитель не исчезает, то истинное значение будет бесконечным.

Так, пусть требуется найти значение выражения

$$\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$$

при $x=1$. Так как оно переходит в выражение

$$\frac{-1+x}{1-x^2}=\frac{-1}{1+x},$$

то ясно, что искомое значение равно $-\frac{1}{2}$.

365. Если же функции P и Q будут трансцендентными, тогда такое преобразование привело бы к очень тягостному вычислению. В этих случаях на помощь может прийти прямой метод: вместо значения $x=a$, при котором оба количества P и Q обращаются в бесконечность, можно положить $x=a+\omega$, где ω есть бесконечно малое количество, за которое можно принять dx. Если после этой подстановки мы получим $P=\frac{A}{\omega}+B$ и $Q=\frac{A}{\omega}+C$, то функция $P-Q$, очевидно, перейдёт в $B-C$; это значение будет конечным. Поясним этот метод разыскания значений таких функций следующими примерами.

Пример 1

Пусть ищется значение выражения $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lx}$ *при* $x=1$. Поскольку как $\frac{x}{x-1}$, так и $\frac{1}{lx}$ становится бесконечным при $x=1$, положим $x=1+\omega$. Тогда предложенное выражение преобразуется в

$$\frac{1+\omega}{\omega}-\frac{1}{l(1+\omega)}.$$

А так как

$$l(1+\omega)=\omega-\frac{1}{2}\omega^2+\frac{1}{3}\omega^3-\text{ и т. д. }=\omega\left(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\text{ и т. д.}\right),$$

то будем иметь

$$\frac{(1+\omega)\left(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\text{и т. д.}\right)-1}{\omega\left(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\text{и т. д.}\right)}=\frac{\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{6}\omega^2\text{ и т. д.}}{\omega\left(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2\text{ и т. д.}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\omega+\text{и т. д.}}{1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\text{и т. д.}}.$$

Если теперь положить ω бесконечно малым, т. е. $\omega=0$, то ясно, что искомое значение равно $\frac{1}{2}$.

Пример 2

Пусть e есть число, гиперболический логарифм которого равен 1, а π есть полуокружность круга, радиус которого равен 1; найти значение выражения $\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ ***при*** $x=0$.

Предложенное выражение представляет сумму ряда[1])

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{4+x^2}+\frac{1}{9+x^2}+\frac{1}{16+x^2}+\frac{1}{25+x^2}+\text{ и т. д.}$$

Если положить здесь $x=0$, то должна получиться сумма ряда

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\text{ и т. д.},$$

[1]) «Введение», т. I, гл. X.

которая, как известно, равна $\frac{\pi^2}{6}$. Если же в предложенное выражение

$$\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$$

подставить $x=0$, то значение этого выражения кажется в высшей степени неопределённым, ибо все его члены бесконечны. Положим $x=\omega$, где ω есть бесконечно малое количество. Тогда первый член $\frac{\pi x-1}{2x^2}$ обращается в

$$-\frac{1}{2\omega^2}+\frac{\pi}{2\omega}.$$

Так как далее

$$e^{2\pi\omega}-1=2\pi\omega+2\pi^2\omega^2+\frac{4}{3}\pi^3\omega^3+\text{ и т. д.},$$

то второй член $\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ обращается в

$$\frac{\pi}{\omega\left(2\pi\omega+2\pi^2\omega^2+\frac{4}{3}\pi^3\omega^3+\text{ и т. д.}\right)}=\frac{1}{2\omega^2\left(1+\pi\omega+\frac{2}{3}\pi^2\omega^2+\text{ и т. д.}\right)}.$$

Но

$$\frac{1}{1+\pi\omega+\frac{2}{3}\pi^2\omega^2+\text{ и т. д.}}=1-\pi\omega+\frac{1}{3}\pi^2\omega^2-\text{ и т. д.},$$

следовательно, второй член равен

$$\frac{1}{2\omega^2}-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{1}{6}\pi^2-\text{ и т. д.}$$

Если прибавить к нему первый член, получим $\frac{1}{6}\pi^2$; это и есть искомое значение предложенного выражения при $x=0$.

Тот же результат можно получить и с помощью метода, применяющегося к дробям, числитель и знаменатель которых в некотором случае исчезают; действительно, предложенное выражение преобразуется в дробь

$$\frac{\pi xe^{2\pi x}-e^{2\pi x}+\pi x+1}{2x^2e^{2\pi x}-2x^2},$$

числитель и знаменатель которой исчезают при $x=0$. Возьмём поэтому дифференциалы; тогда получим дробь

$$\frac{\pi e^{2\pi x}+2\pi^2xe^{2\pi x}-2\pi e^{2\pi x}+\pi}{4xe^{2\pi x}+4\pi x^2e^{2\pi x}-4x}$$

или

$$\frac{\pi-\pi e^{2\pi x}+2\pi^2xe^{2\pi x}}{4xe^{2\pi x}+4\pi x^2e^{2\pi x}-4x},$$

у которой при $x=0$ числитель и знаменатель снова исчезают. Поэтому снова возьмём дифференциалы; будем иметь дробь

$$\frac{-2\pi^2e^{2\pi x}+2\pi^2e^{2\pi x}+4\pi^3xe^{2\pi x}}{4e^{2\pi x}+8\pi xe^{2\pi x}+8\pi xe^{2x\pi}+8\pi^2x^2e^{2\pi x}-4}$$

или

$$\frac{\pi^3 x e^{2\pi x}}{e^{2\pi x}+4\pi x e^{2\pi x}+2\pi^2 x^2 e^{2\pi x}-1},$$

или

$$\frac{\pi^3 x}{1+4\pi x+2\pi^2 x^2-e^{-2\pi x}},$$

числитель и знаменатель которой снова исчезают при $x=0$. Поэтому снова возьмём дифференциалы, получим дробь

$$\frac{\pi^3}{4\pi+4\pi^2 x+2\pi e^{-2\pi x}},$$

которая при $x=0$ даёт $\frac{\pi^2}{6}$, как и раньше.

Пример 3

Сохраняя те же обозначения e и π, найти значение выражения

$$\frac{\pi}{4x}-\frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$$

при $x=0$.

Это выражение преобразуется в дробь

$$\frac{\pi e^{\pi x}-\pi}{4xe^{\pi x}+4x},$$

числитель и знаменатель которой при $x=0$ исчезают. Положим $x=\omega$; так как

$$e^{\pi\omega}=1+\pi\omega+\frac{1}{2}\pi^2\omega^2+\frac{1}{6}\pi^3\omega^3+\text{ и т. д.},$$

то предложенная формула преобразуется в выражение

$$\frac{\pi^2\omega+\frac{1}{2}\pi^3\omega^2+\frac{1}{6}\pi^4\omega^3+\text{ и т. д.}}{8\omega+4\pi\omega^2+2\pi^2\omega^3+\text{ и т. д.}},$$

которое при бесконечно малом ω даёт сразу $\frac{1}{8}\pi^2$; это и есть искомое значение предложенного выражения при $x=0$. Но предложенное выражение $\frac{\pi}{4x}-\frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$ даёт сумму ряда [1])

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{9+x^2}+\frac{1}{25+x^2}+\frac{1}{49+x^2}+\text{ и т. д.},$$

которая при $x=0$ становится равной $\frac{1}{8}\pi^2$.

Пример 4

Пусть ищется значение выражения $\frac{1}{2x^2}-\frac{\pi}{2x\operatorname{tg}\pi x}$ *при* $x=0$.

Предложенная формула $\frac{1}{2x^2}-\frac{\pi}{2x\operatorname{tg}\pi x}$ выражает сумму бесконечного

---

[1]) «Введение», т I, гл. X.

ряда

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{9-x^2}+\frac{1}{16-x^2}+\text{ и т. д.}$$

Если положить $x=0$, должна получиться сумма ряда

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{ и т. д.},$$

которая равна $\frac{1}{6}\pi^2$. Так как $\operatorname{tg}\pi x=\frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}$, то предложенное выражение принимает вид

$$\frac{1}{2x^2}-\frac{\pi\cos\pi x}{2x\sin\pi x}=\frac{\sin\pi x-\pi x\cos\pi x}{2x^2\sin\pi x};$$

числитель и знаменатель этой дроби исчезают при $x=0$. Поэтому положим $x=\omega$; так как

$$\sin\pi\omega=\pi\omega-\frac{1}{6}\pi^3\omega^3+\text{ и т. д.},\qquad \cos\pi\omega=1-\frac{1}{2}\pi^2\omega^2+\text{ и т. д.},$$

то предложенное выражение будет равно выражению

$$\frac{\pi\omega-\frac{1}{6}\pi^3\omega^3+\text{ и т. д. }-\pi\omega+\frac{1}{2}\pi^3\omega^3-\text{ и т. д.}}{2\pi\omega^3-\frac{1}{3}\pi^3\omega^5+\text{ и т. д.}}=\frac{\frac{1}{3}\pi^3\omega^3-\text{ и т. д.}}{2\pi\omega^3-\text{ и т. д.}},$$

которое вследствие бесконечной малости ω даёт $\frac{1}{6}\pi^2$.

Пример 5

Зная сумму бесконечного ряда[1])

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{9-x^2}+\frac{1}{25-x^2}+\frac{1}{49-x^2}+\text{ и т. д.}=\frac{\pi\sin\frac{1}{2}\pi x}{4x\cos\frac{1}{2}\pi x},$$

найти его сумму при $x=0$.

Так как

$$\sin\frac{1}{2}\pi x=\frac{1}{2}\pi x-\frac{1}{48}\pi^3x^3\text{ и т. д. и }\cos\frac{1}{2}\pi x=1-\frac{1}{8}\pi^2x^2+\text{ и т. д.},$$

то предложенное выражение будет равно выражению

$$\frac{\frac{1}{2}\pi^2x-\frac{1}{48}\pi^4x^3\text{ и т. д.}}{4x-\frac{1}{2}\pi^2x^3\text{ и т. д.}}=\frac{\frac{1}{2}\pi^2-\frac{1}{48}\pi^4x^2+\text{ и т. д.}}{4-\frac{1}{2}\pi^2x^2+\text{ и т. д.}},$$

значение которого при $x=0$, очевидно, равно $\frac{1}{8}\pi^2$; это и есть сумма ряда

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\text{ и т. д.},$$

что выше было доказано различными способами. Если же за x взять какое-либо чётное число, то сумма предложенного ряда всегда равна нулю.

---

[1]) «Введение», т. I, гл. X.

366. В тех рядах, которые мы рассматривали в последних двух примерах, и в иных рядах, содержащих переменную букву x, количеству x можно задавать такие значения, что некоторый член обратится в бесконечность; в этих случаях и сумма всего ряда будет бесконечной. Так, если в ряд

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{9-x^2}+\frac{1}{16-x^2}+\text{ и т. д.}$$

вместо x подставить какое-либо целое число, то один из его членов станет бесконечным, ибо его знаменатель исчезает; поэтому сумма ряда становится бесконечной. Если же этот бесконечный член будет удалён из ряда, тогда остальная сумма, несомненно, будет конечной, так что сумма ряда, получаемого из данного после удаления его бесконечного члена, представится выражением вида $\infty-\infty$; какое именно значение она будет иметь, можно будет найти по изложенному здесь способу. Это будет яснее видно из нижеприводимых примеров.

Пример 1

Найти при $x=1$ сумму ряда

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{9-x^2}+\frac{1}{16-x^2}+\text{ и т. д.},$$

из которого изъят первый член, обращающийся в этом случае в бесконечность.

Так как сумма всего ряда в общем случае равна

$$\frac{1}{2x^2}-\frac{\pi}{2x\operatorname{tg}\pi x},$$

то искомая сумма будет равна

$$\frac{1}{2x^2}-\frac{\pi}{2x\operatorname{tg}\pi x}-\frac{1}{1-x^2}$$

при $x=1$. Положим $x=1+\omega$; тогда для искомой суммы получим выражение

$$\frac{1}{2(1+2\omega+\omega^2)}-\frac{\pi}{2(1+\omega)\operatorname{tg}(\pi+\omega\pi)}+\frac{1}{2\omega+\omega^2}.$$

Но

$$\operatorname{tg}(\pi+\omega\pi)=\operatorname{tg}\omega\pi=\pi\omega+\frac{1}{3}\pi^3\omega^3+\text{ и т. д.}$$

Так как здесь первый член $\frac{1}{2\pi x^2}$ при $x=1$ имеет определённое значение $\frac{1}{2}$, то нужно рассмотреть только два остальных члена

$$\frac{1}{\omega(2+\omega)}-\frac{\pi}{2\omega(1+\omega)\left(\pi+\frac{1}{3}\pi^3\omega^2\right)}=\frac{1}{\omega(2+\omega)}-\frac{1}{\omega(2+2\omega)\left(1+\frac{1}{3}\pi^2\omega^2\right)}$$

при бесконечно малом ω, а в этом случае можно будет пренебречь также членом $\frac{1}{3}\pi^2\omega^2$. Но при $\omega=0$ мы будем иметь

$$\frac{\omega}{\omega(2+\omega)(2+2\omega)}=\frac{1}{4},$$

и следовательно, сумма ряда

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\text{ и т. д.}$$

равна $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, что известно из других соображений.

Пример 2

Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{9-x^2}+\frac{1}{16-x^2}+\text{ и т. д.}$$

в случае, когда x полагается равным какому-либо целому числу n, если из ряда устраняется член $\frac{1}{n^2-x^2}$, который становится бесконечным.

Таким образом, искомая сумма представляется выражением

$$\frac{1}{2x^2}-\frac{\pi}{2x\operatorname{tg}\pi x}-\frac{1}{n^2-x^2},$$

в которое нужно подставить $x=n$; в этом случае первый член $\frac{1}{2x^2}$ обращается в $\frac{1}{2n^2}$, а два остальных становятся бесконечными. Положим $x=n+\omega$; так как

$$\operatorname{tg}(\pi n+\pi\omega)=\operatorname{tg}\pi\omega=\pi\omega,$$

то, положив ω бесконечно малым, будем иметь для искомой суммы выражение

$$\frac{1}{2n^2}-\frac{\pi}{2(n+\omega)\pi\omega}+\frac{1}{2n\omega+\omega^2}$$

или

$$\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{\omega(2n+2\omega)}+\frac{1}{\omega(2n+\omega)}=\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{(2n+2\omega)(2n+\omega)}.$$

Если здесь положить $\omega=0$, получим, что искомая сумма равна

$$\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{4n^2}=\frac{3}{4n^2}.$$

Поэтому

$$\frac{3}{4n^2}=\frac{1}{1-n^2}+\frac{1}{4-n^2}+\frac{1}{9-n^2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(n-1)^2-n^2}+\frac{1}{(n+1)^2-n^2}+\frac{1}{(n+2)^2-n^2}+$$

и т. д. до бесконечности, т. е. сумма этого бесконечного ряда будет равна

$$\frac{1}{(n+1)^2-n^2}+\frac{1}{(n+2)^2-n^2}+\frac{1}{(n+3)^2-n^2}+\text{ и т. д.}=$$

$$=\frac{3}{4n^2}+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-4}+\frac{1}{n^2-9}+\ldots+\frac{1}{n^2-(n-1)^2}.$$

Пример 3

Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{9-x^2}+\frac{1}{25-x^2}+\frac{1}{49-x^2}+\text{ и т. д.}$$

при $x=1$, *если изъять первый член* $\frac{1}{1-x^2}$, *который в этом случае становится бесконечным.*

Так как сумма этого ряда в общем случае равна $\dfrac{\pi\sin\frac{1}{2}\pi x}{4x\cos\frac{1}{2}\pi x}$, то искомая сумма будет равна значению

$$\frac{\pi\sin\frac{1}{2}\pi x}{4x\cos\frac{1}{2}\pi x}-\frac{1}{1-x^2},$$

при $x=1$. Так как оба члена становятся бесконечными, то положим $x=1-\omega$. Тогда, поскольку при бесконечно малом ω

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\omega\right)=\cos\frac{1}{2}\pi\omega=1-\frac{1}{8}\pi^2\omega^2$$

и

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\omega\right)=\sin\frac{1}{2}\pi\omega=\frac{1}{2}\pi\omega,$$

мы получим выражение

$$\frac{\pi\left(1-\frac{1}{8}\pi^2\omega^2\right)}{4(1-\omega)\frac{1}{2}\pi\omega}-\frac{1}{2\omega-\omega^2}=\frac{1}{\omega(2-2\omega)}-\frac{1}{\omega(2-\omega)},$$

которое становится равным $\frac{1}{4}$ при $\omega=0$. Таким образом,

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}+\text{ и т. д.}$$

Пример 4

Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{9-x^2}+\frac{1}{25-x^2}+\frac{1}{49-x^2}+\text{ и т. д.},$$

если положить x равным какому-либо нечётному числу $2n-1$ и если изъять из ряда член $\frac{1}{(2n-1)^2-x^2}$, *который в этом случае становится бесконечным.*

Искомая сумма будет равна

$$\frac{\pi\sin\frac{1}{2}\pi x}{4x\cos\frac{1}{2}\pi x}-\frac{1}{(2n-1)^2-x^2}$$

при $x = 2n - 1$. Положим $x = 2n - 1 - \omega$, где ω есть бесконечно малое количество; тогда

$$\sin \frac{1}{2} \pi x = \sin \left(\frac{2n-1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi \omega \right) = \pm \cos \frac{1}{2} \pi \omega,$$

где верхний знак берётся, если n есть число нечётное, нижний же — если это число чётное. Подобным образом будем иметь

$$\cos \frac{1}{2} \pi x = \cos \left(\frac{2n-1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi \omega \right) = \pm \sin \frac{1}{2} \pi \omega;$$

так что будет ли n чётным или нечётным, получим

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \pi x}{\cos \frac{1}{2} \pi x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi x} = \frac{1}{\frac{1}{2} \pi \omega}.$$

Следовательно, искомая сумма представится выражением

$$\frac{1}{2\omega (2n - 1 - \omega)} - \frac{1}{\omega (2(2n-1) - \omega)}$$

и поэтому будет равна $\frac{1}{4(2n-1)^2}$. Так, если $n = 2$, то

$$\frac{1}{36} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{40} + \frac{1}{72} + \frac{1}{112} + \text{ и т. д.}$$

Что результат этого суммирования верен — известно из других соображений.

ГЛАВА XVI

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ НЕПРЕДСТАВИМЫХ ФУНКЦИЙ

367. Непредставимыми функциями я называю здесь такие функции, которые нельзя выразить ни определёнными выражениями, ни корнями уравнений, так что не только они не являются алгебраическими, но по большей части неизвестно, к какому роду трансцендентных функций они принадлежат. Такого рода непредставимой функцией является, например, функция

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x},$$

которая, безусловно, зависит от x, но если только x не является целым числом, никоим образом не может быть представлена. Подобным образом, выражение

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots x$$

будет непредставимой функцией от x, ибо, если x есть какое угодно число, то значение её нельзя выразить не только алгебраически, но и с помощью какого-либо определённого рода трансцендентных функций. Общее понятие о таких непредставимых функциях может нам дать рассмотрение рядов. В самом деле, пусть предложен какой-либо ряд

$$\overset{1}{A}+\overset{2}{B}+\overset{3}{C}+\overset{4}{D}+\ldots+\overset{x}{X};$$

если его сумму S нельзя выразить конечной формулой, то она будет непредставимой функцией от x, а именно,

$$S=A+B+C+D+\ldots+X.$$

Подобным образом, произведение последовательных членов ряда, как, например,

$$P=A\cdot B\cdot C\cdot D\ldots X,$$

будет непредставимой функцией от x, но её можно привести к предыдущему виду с помощью логарифмов; действительно, будем иметь

$$lP=lA+lB+lC+lD+\ldots+lX.$$

368. В этой главе я хочу изложить метод разыскания дифференциалов таких непредставимых функций. Хотя может показаться, что этот вопрос относится к первой части этого сочинения, где излагались правила дифференциального исчисления, однако он требует более широких познаний в учении о бесконечных рядах, которые можно было сообщить только во второй части, поэтому, будучи вынуждены отступить от естественного порядка, мы касаемся этого вопроса здесь. Так как это исследование является совершенно новым и никем до сих пор не производилось, то мы настолько ещё далеки от возможности исчерпать эту часть дифференциального исчисления, что попытаемся лишь наметить её основы. А затем я приведу несколько вопросов, разрешение которых требует дифференцирования такого рода функций, чтобы можно было тут же видеть пользу этого исследования. В будущем она, несомненно, станет гораздо большей.

369. Чтобы дифференцировать такого рода непредставимые функции, необходимо прежде всего найти те значения, которые они получают, если вместо x положить $x+\omega$. Пусть

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4\ldots & & x \\ S=A+ & B+ & C+ & D+ & \ldots & +X \end{array}$$

и пусть Σ есть то значение количества S, которое оно получает, если вместо x положить $x+\omega$. Пусть Z есть член ряда, отвечающий индексу $x+\omega$. Члены, соответствующие индексам $x+1$, $x+2$, $x+3$ и т. д., мы обозначим через X', X'', X''' и т. д., а член, отвечающий бесконечному индексу $x+\infty$, через $X^{|\infty|}$ [1]). Подобным образом, члены, соответствующие индексам $x+\omega+1$, $x+\omega+2$, $x+\omega+3$ и т. д., мы будем обозначать через Z', Z'', Z''' и т. д.; пусть $Z^{|\infty|}$ есть член, отвечающий индексу $x+\omega+\infty$. При этих обозначениях будем иметь

$$\begin{aligned} S' &= S+X', \\ S'' &= S+X'+X'', \\ S''' &= S+X'+X''+X''', \\ S^{|\infty|} &= S+X'+X''+X'''+\ldots+X^{|\infty|}. \end{aligned}$$

Подобным же образом, так как Σ последовательно возрастает на Z', Z'' и т. д., будем иметь:

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \Sigma+Z', \\ \Sigma'' &= \Sigma+Z'+Z'', \\ \Sigma''' &= \Sigma+Z'+Z''+Z''', \\ &\text{и т. д.} \\ \Sigma^{|\infty|} &= \Sigma+Z'+Z''+Z'''+\ldots+Z^{|\infty|}. \end{aligned}$$

---

[1]) В этой главе Эйлер столь свободно обращается с бесконечностью, что его выводы могут показаться совершенно неосновательными. Между тем, по существу, рассуждения Эйлера являются совершенно законными; при некоторых, с точки зрения Эйлера само собой разумеющихся, ограничениях, накладываемых на рассматриваемые функции, их можно строго обосновать, полностью сохраняя идею Эйлера.

Постановка задачи такова: пусть $f(x)$ есть некоторая функция, определённая для всех вещественных значений аргумента x. Рассмотрим функцию $F(x)$, определённую для целочисленных положительных значений x формулой

$$F(x)=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(x). \qquad (1)$$

Задача состоит в разыскании такой функции $\Phi(x)$, которая была бы определена для всех значений x и которая совпадала бы с $F(x)$ при целочисленных значениях аргумента. Разумеется, функция $\Phi(x)$ должна быть аналитической и тогда производные «непредставимой» функции можно принять равными производным функции $\Phi(x)$ при соответствующих значениях аргумента. Решение Эйлера можно на современном языке изложить следующим образом. Пусть сначала x есть целое число. Тогда формулу (1) можно преобразовать так:

$$F(x)=[f(1)-f(x+1)]+[f(2)-f(x+2)]+\ldots+[f(y)-f(x+y)]+$$
$$+f(x+y+1)+f(x+y+2)+\ldots+f(2x+y). \qquad (2)$$

Здесь y есть любое целое число.

Если $f(x)\to 0$ при $x\to\infty$, как это имеет место во всех трёх примерах § 371, то в формуле (2) сумма последних x слагаемых стремится к нулю при $y\to\infty$ и при фиксированном x, и потому $F(x)$ можно представить сходящимся рядом:

$$F(x)=[f(1)-f(x+1)]+[f(2)-f(x+2)]+[f(3)-f(x+3)]+\ldots \qquad (3)$$

Выражение (3) можно принять за определение функции $F(x)$ при дробных значениях x. Для этого нужно, конечно, чтобы ряд (3) оставался сходящимся. Это обеспечивается, например, монотонностью функции $f(x)$ (во всех примерах § 371 функция $f(x)$ монотонна). Тогда ряд (3) для дробного x мажорируется рядом такого же вида при целочисленном x.

Эйлер разлагает выражения $f(a)-f(x+a)$ в ряды по степеням x и собирает члены, содержащие одну и ту же степень x. Накладываемое этим на функцию $f(x)$ ограничение молчаливо подразумевается Эйлером всегда. Здесь оно ещё ослабляется тем, что достаточно потребовать возможности разложения при $0<x<1$, ибо интерполяцию можно начать не с первого члена, а с члена $f(a)$, где a есть ближайшее к x целое число. Так Эйлер и поступает в § 373. Таким образом, получаются простые выражения для всех производных «непредставимой» функции. По существу же задача дифференцирования такой функции уже решена формулой (3), которую можно дифференцировать почленно вследствие предполагающейся аналитичности функции $f(x)$.

Эйлер, однако, не ограничивается рассмотрением простейшего случая, когда $f(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Он рассматривает и случай, когда $f(x)$ стремится к конечному или бесконечному пределу, но первая разность $f(x+1)-f(x)$ стремится к нулю при $x\to\infty$. Рассматривается и более общий случай, когда к нулю стремится разность какого-либо высшего порядка, тогда как разности низшего порядка к нулю не стремятся.

Пусть первая разность стремится к нулю. Тогда последние x слагаемых формулы (2) можно представить в виде

$$f(x+y+2)=f(x+y+1)+\Delta f(x+y+1),$$
$$f(x+y+3)=f(x+y+1)+\Delta f(x+y+1)+\Delta f(x+y+2)$$

и т. д. Так как, по предположению, $\Delta f(x+y+1)$, $\Delta f(x+y+2)$ и т. д. стремятся к нулю, при $y\to\infty$ и x есть фиксированное целое число, то сумма R_y рассматриваемых членов может быть представлена в виде

$$R_y=xf(x+y+1)+\varepsilon(y), \qquad (4)$$

где $\varepsilon(y)\to 0$ при $y\to\infty$.

Преобразуем выражение (4) следующим образом:

$$R_y=x\{f(1)+[f(2)-f(1)]+[f(3)-f(2)]+\ldots+[f(y+1)-f(y)]\}+$$
$$+x\{[f(y+2)-f(y+1)]+[f(y+3)-f(y+2)]+\ldots+[f(x+y+1)-f(x+y)]\}+\varepsilon(y).$$

Так как при фиксированном целом x число слагаемых во второй фигурной скобке постоянно, и первые разности при $y\to\infty$ стремятся к нулю, то

$$R_y=x\{f(1)+[f(2)-f(1)]+[f(3)-f(2)]+\ldots+[f(y+1)-f(y)]+\eta(y)+\varepsilon(y)\},$$

где $\eta(y)\to 0$ и $\varepsilon(y)\to 0$ при $y\to\infty$.

370. Теперь нужно исследовать, каким свойством обладает ряд S, S', S'', S''' и т. д., продолженный до бесконечности. Если в бесконечности он совпадает с арифметической прогрессией, что имеет место, если члены ряда X, X', X'', X''' и т. д. в бесконечном сходятся к равенству, так что в конце концов разности ряда S, S', S'' и т. д. становятся равными, то в этом случае количества $S^{|\infty|}$, $S^{|\infty+1|}$, $S^{|\infty+2|}$ и т. д. будут составлять арифметическую прогрессию, и поскольку $\Sigma^{|\infty|}=S^{|\infty+\omega|}$, ибо

$$S^{|\infty+\omega|}=S^{|\infty|}+\omega\,(S^{|\infty+1|}-S^{|\infty|})=\omega S^{|\infty+1|}+(1-\omega)\,S^{|\infty|};$$

будем иметь

$$\Sigma^{|\infty|}=\omega S^{|\infty+1|}+(1-\omega)\,S^{|\infty|}.$$

Но

$$S^{|\infty+1|}+S^{|\infty|}+X^{|\infty+1|},$$

откуда

$$\Sigma^{|\infty|}=S^{|\infty|}+\omega X^{|\infty+1|}.$$

Отсюда получим уравнение

$$\Sigma+Z'+Z''+Z'''+\ldots+Z^{|\infty|}=$$
$$=S+X'+X''+X'''+\ldots+X^{|\infty|}+\omega X^{|\infty+1|},$$

из которого определяется искомое значение Σ, которое принимает функция S, когда в неё вместо x мы подставляем $x+\omega$. Именно, мы получим

$$\Sigma=S+\omega X^{|\infty+1|}+X'+X''+X'''+ \text{ и т. д. до бесконечности } -$$
$$-Z'-Z''-Z'''- \text{ и т. д. до бесконечности.}$$

Если бесконечно удалённые члены[1]) ряда A, B, C, D и т. д. исчезают, то член $\omega X^{|\infty+1|}$ исчезает, и его можно опустить.

371. Итак, значение количества Σ выражается новым рядом; его можно получить, если известен общий член ряда $A+B+C+$ и т. д.,

---

Поэтому при целом x функция $F(x)$ представляется сходящимся рядом

$$F(x)=xf(1)+\{[f(1)-f(x+1)+x\,[f(2)-f(1)]\}+$$
$$+\{[f(2)-f(x+2)]+x\,[f(3)-f(2)]\}+\ldots, \qquad (5)$$

который можно принять за определение функции $F(x)$ при дробном x.

Разлагая разности $f(a)-f(x+a)$ в бесконечные ряды, Эйлер представляет ряд (5) в виде суммы двух рядов:

$$x\,\{f(1)+[f(2)-f(1)]+[f(3)-f(2)]+\ldots\} \qquad (6)$$

и

$$x\,[f'(1)+f'(2)+\ldots]+\frac{x^2}{2!}\,[f''(1)+f''(2)+\ldots]+\frac{x^3}{3!}\,[f'''(1)+f'''(2)+\ldots].$$

Но из текста §§ 376 и 379 ясно, что Эйлер хорошо видит, что в рассматриваемом случае ряд (6) и ряд

$$x\,[f'(1)+f'(2)+\ldots],$$

взятые по отдельности, расходятся, однако «взятые вместе» дают сходящийся ряд.

В случае, когда первая разность к нулю не стремится, но вторая разность стремится, получается более сложное выражение (§ 378). Впрочем, после сделанных разъяснений эти и дальнейшие рассуждения Эйлера не представят трудности для читателя. (*Прим. перев.*)

[1]) В оригинале termini infinitesimi.

372. Вышеизложенное позволит нам также интерполировать суммы, т. е. определять значение суммационного члена, когда число слагаемых не является целым. В самом деле, если положить $x=0$, то будем иметь также $S=0$, а Σ будет выражать сумму стольких членов, сколько единиц содержит число ω, хотя бы это число ω и не было целым. Так, в первом примере, если положить

$$\Sigma = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\omega},$$

будем иметь

$$\Sigma = \frac{\omega}{1(1+\omega)}+\frac{\omega}{2(2+\omega)}+\frac{\omega}{3(3+\omega)}+\frac{\omega}{4(4+\omega)}+ \text{ и т. д.}$$

или

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & \omega\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+ \text{ и т. д.}\right)\\ & -\omega^2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+ \text{ и т. д.}\right)\\ & +\omega^3\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+ \text{ и т. д.}\right)\\ & \text{и т. д.}\end{aligned}$$

В третьем же примере будем иметь

$$\Sigma = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\ldots+\frac{1}{\omega^n}.$$

Значение количества Σ, будет ли ω целым или дробным числом, выразится следующим образом:

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & n\omega\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}+ \text{ и т. д.}\right)\\ & -\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\omega^2\left(1+\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{3^{n+2}}+\frac{1}{4^{n+2}}+ \text{ и т. д.}\right)\\ & +\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3\left(1+\frac{1}{2^{n+3}}+\frac{1}{3^{n+3}}+\frac{1}{4^{n+3}}+ \text{ и т. д.}\right)\\ & \text{и т. д.}\end{aligned}$$

373. Тот же метод можно применить и к общему случаю. Пусть мы имеем ряд

$$\begin{array}{c}1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad x\\ S = A+B+C+D+\ldots+X.\end{array}$$

Пусть X при подстановке $x+\omega$ вместо x переходит в Z, а S в Σ; тогда

$$Z = X+\frac{\omega\, dX}{dx}+\frac{\omega^2\, d^2X}{1\cdot 2\, dx^2}+\frac{\omega^3\, d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\, dx^3}+ \text{ и т. д.},$$

а так как Z', Z'', Z''' и т. д. подобным же образом выражаются через X', X'', X''' и т. д., то будем иметь

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & S+\omega X^{(\infty+1)}-\frac{\omega}{dx}d\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.})\\ & -\frac{\omega^2}{1\cdot 2\, dx^2}d^2\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.})\\ & -\frac{\omega^3}{1\cdot 2\cdot 3\, dx^3}d^3\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.})\\ & \text{и т. д.}\end{aligned}$$

Подставив dx вместо ω, получим полный дифференциал предложенной функции S:

$$\begin{aligned} dS = dx &\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}+ \text{ и т. д.}\right) \\ -dx^2&\left(\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+3)^3}+\frac{1}{(x+4)^3}+ \text{ и т. д.}\right) \\ +dx^3&\left(\frac{1}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+2)^4}+\frac{1}{(x+3)^4}+\frac{1}{(x+4)^4}+ \text{ и т. д.}\right) \\ -dx^4&\left(\frac{1}{(x+1)^5}+\frac{1}{(x+2)^5}+\frac{1}{(x+3)^5}+\frac{1}{(x+4)^5}+ \text{ и т. д.}\right) \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Пример 2

Найти дифференциал следующей непредставимой функции от x:

$$S = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2x-1}.$$

Так как общий член этого ряда есть $X=\frac{1}{2x-1}$, то

$$\begin{array}{r|l} X' = \dfrac{1}{2x+1}, & Z' = \dfrac{1}{2x+1+2\omega}, \\ X'' = \dfrac{1}{2x+3}, & Z'' = \dfrac{1}{2x+3+2\omega}, \\ X''' = \dfrac{1}{2x+5} & Z''' = \dfrac{1}{2x+5+2\omega} \\ \text{и т. д.} & \text{и т. д.} \end{array}$$

Так как бесконечно удалённые члены этого ряда исчезают и являются равными, то значение S, если вместо x подставить $x+\omega$, становится равным

$$\begin{aligned} \Sigma = S &+ \frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x+3}+\frac{1}{2x+5}+ \text{ и т. д.} \\ &- \frac{1}{2x+1+2\omega}-\frac{1}{2x+3+2\omega}-\frac{1}{2x+5+2\omega}- \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

или

$$\Sigma = S+\frac{2\omega}{(2x+1)(2x+1+2\omega)}+\frac{2\omega}{(2x+3)(2x+3+2\omega)}+ \text{ и т. д.}$$

Если расположить члены по степеням ω, будем иметь

$$\begin{aligned} \Sigma = S + 2\omega &\left(\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+3)^2}+\frac{1}{(2x+5)^2}+ \text{ и т. д.}\right) \\ -4\omega^2&\left(\frac{1}{(2x+1)^3}+\frac{1}{(2x+3)^3}+\frac{1}{(2x+5)^3}+ \text{ и т. д.}\right) \\ +8\omega^3&\left(\frac{1}{(2x+1)^4}+\frac{1}{(2x+3)^4}+\frac{1}{(2x+5)^4}+ \text{ и т. д.}\right) \\ -16\omega^4&\left(\frac{1}{(2x+1)^5}+\frac{1}{(2x+3)^5}+\frac{1}{(2x+5)^5}+ \text{ и т. д.}\right) \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Положим теперь dx вместо ω; тогда получим полный дифференциал предложенной непредставимой функции

$$\begin{aligned} dS = 2dx &\left(\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+3)^2}+\frac{1}{(2x+5)^2}+ \text{ и т. д.}\right) \\ -4dx^2&\left(\frac{1}{(2x+1)^3}+\frac{1}{(2x+3)^3}+\frac{1}{(2x+5)^3}+ \text{ и т. д.}\right) \\ +8dx^3&\left(\frac{1}{(2x+1)^4}+\frac{1}{(2x+3)^4}+\frac{1}{(2x+5)^4}+ \text{ и т. д.}\right) \\ -16dx^4&\left(\frac{1}{(2x+1)^5}+\frac{1}{(2x+3)^5}+\frac{1}{(2x+5)^5}+ \text{ и т. д.}\right) \\ &\text{и т. д.}\end{aligned}$$

Пример 3

Найти полный дифференциал следующей непредставимой функции от x:

$$S = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\ldots+\frac{1}{x^n}.$$

Так как общий член этого ряда равен $\frac{1}{x^n}$, то бесконечно удалённые члены будут исчезать и будут равны между собой. Поэтому поскольку

$$\begin{array}{r|r} X' = \dfrac{1}{(x+1)^n}, & Z' = \dfrac{1}{(x+1+\omega)^n}, \\ X'' = \dfrac{1}{(x+2)^n}, & Z'' = \dfrac{1}{(x+2+\omega)^n}, \\ X''' = \dfrac{1}{(x+3)^n} & Z''' = \dfrac{1}{(x+3+\omega)^n} \\ \text{и т. д.} & \text{и т. д.,} \end{array}$$

будем иметь

$$X'-Z' = \frac{n\omega}{(x+1)^{n+1}}-\frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+1)^{n+2}}+\frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+1)^{n+3}}-\text{ и т. д.,}$$

$$X''-Z'' = \frac{n\omega}{(x+2)^{n+1}}-\frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+2)^{n+2}}+\frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+2)^{n+3}}-\text{ и т. д.}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \Sigma - S = n\omega &\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+2)^{n+1}}+\frac{1}{(x+3)^{n+1}}+ \text{ и т. д.}\right) \\ -\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\omega^2&\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}}+\frac{1}{(x+2)^{n+2}}+\frac{1}{(x+3)^{n+2}}+ \text{ и т. д.}\right) \\ +\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3&\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}}+\frac{1}{(x+2)^{n+3}}+\frac{1}{(x+3)^{n+3}}+ \text{ и т. д.}\right).\end{aligned}$$

Поэтому, положив $\omega = dx$, получим искомый полный дифференциал функции S.

$$\begin{aligned} dS = n\,dx &\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+2)^{n+1}}+\frac{1}{(x+3)^{n+1}}+ \text{ и т. д.}\right) \\ -\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}dx^2&\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}}+\frac{1}{(x+2)^{n+2}}+\frac{1}{(x+3)^{n+2}}+ \text{ и т. д.}\right) \\ +\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}dx^3&\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}}+\frac{1}{(x+2)^{n+3}}+\frac{1}{(x+3)^{n+3}}+ \text{ и т. д.}\right) \\ &\text{и т. д.}\end{aligned}$$

372. Вышеизложенное позволит нам также интерполировать суммы, т. е. определять значение суммационного члена, когда число слагаемых не является целым. В самом деле, если положить $x=0$, то будем иметь также $S=0$, а Σ будет выражать сумму стольких членов, сколько единиц содержит число ω, хотя бы это число ω и не было целым. Так, в первом примере, если положить

$$\Sigma = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\omega},$$

будем иметь

$$\Sigma = \frac{\omega}{1(1+\omega)}+\frac{\omega}{2(2+\omega)}+\frac{\omega}{3(3+\omega)}+\frac{\omega}{4(4+\omega)}+ \text{ и т. д.}$$

или

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & \omega\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+ \text{ и т. д.}\right)\\ & -\omega^2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+ \text{ и т. д.}\right)\\ & +\omega^3\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+ \text{ и т. д.}\right)\\ & \text{и т. д.}\end{aligned}$$

В третьем же примере будем иметь

$$\Sigma = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\ldots+\frac{1}{\omega^n}.$$

Значение количества Σ, будет ли ω целым или дробным числом, выразится следующим образом:

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & n\omega\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}+ \text{ и т. д.}\right)\\ & -\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\omega^2\left(1+\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{3^{n+2}}+\frac{1}{4^{n+2}}+ \text{ и т. д.}\right)\\ & +\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3\left(1+\frac{1}{2^{n+3}}+\frac{1}{3^{n+3}}+\frac{1}{4^{n+3}}+ \text{ и т. д.}\right)\\ & \text{и т. д.}\end{aligned}$$

373. Тот же метод можно применить и к общему случаю. Пусть мы имеем ряд

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & x \end{matrix}$$
$$S = A+B+C+D+\ldots+X.$$

Пусть X при подстановке $x+\omega$ вместо x переходит в Z, а S в Σ; тогда

$$Z = X+\frac{\omega\, dX}{dx}+\frac{\omega^2\, d^2X}{1\cdot 2\, dx^2}+\frac{\omega^3\, d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\, dx^3}+ \text{ и т. д.},$$

а так как Z', Z'', Z''' и т. д. подобным же образом выражаются через X', X'', X''' и т. д., то будем иметь

$$\begin{aligned}\Sigma = S+\omega X^{(\infty+1)} & -\frac{\omega}{dx}d\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.})\\ & -\frac{\omega^2}{1\cdot 2\, dx^2}d^2\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.})\\ & -\frac{\omega^3}{1\cdot 2\cdot 3\, dx^3}d^3\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.})\\ & \text{и т. д.}\end{aligned}$$

Если X^{i+1} не равно нулю, то, чтобы устранить из рассмотрения бесконечность, можно представить это количество следующим образом:

$$X^{i+1} = X' + (X'' - X') + (X''' - X'') + (X'''' - X''') + \text{ и т. д.}).$$

Таким образом, мы получим

$$\begin{aligned}\Sigma = S + \omega X' + \omega\,((X'' - X') + (X''' - X'') + (X'''' - X''') + &\text{ и т. д.})\\ - \frac{\omega}{dx} d \cdot (X' + X'' + X''' + X'''' + &\text{ и т. д.})\\ - \frac{\omega^2}{2dx^2} d^2 \cdot (X' + X'' + X''' + X'''' + &\text{ и т. д.})\\ - \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3 \cdot (X' + X'' + X''' + X'''' + &\text{ и т. д.})\\ &\text{и т. д.}\end{aligned}$$

Следовательно, если положить $\omega = dx$, получим для полного дифференциала количества

$$S = A + B + C + \ldots + X$$

следующее выражение:

$$\begin{aligned}dS = X'\,dx + dx\,((X'' - X') + (X''' - X'') + (X'''' - X''') + &\text{ и т. д.})\\ - d \cdot (X' + X'' + X''' + X'''' + &\text{ и т. д.})\\ - \frac{1}{2} d^2 \cdot (X' + X'' + X''' + X'''' + &\text{ и т. д.})\\ - \frac{1}{6} d^3 \cdot (X' + X'' + X''' + X'''' + &\text{ и т. д.})\\ &\text{и т. д.}\end{aligned}$$

374. Положим, что $x = 0$; тогда

$$X' = A, \quad X'' = B \text{ и т. д.},$$

так что $X' + X'' + X''' +$ и т. д. есть бесконечный ряд, общий член которого равен X. Образуем затем ряды из следующих общих членов:

$$\frac{dX}{dx}, \quad \frac{d^2X}{2dx^2}, \quad \frac{d^3X}{6dx^3}, \quad \frac{d^4X}{24dx^4} \text{ и т. д.}$$

Пусть суммы этих рядов, продолженных до бесконечности, будут

$$\int x = \mathfrak{A}, \quad \int \frac{pX}{dx} = \mathfrak{B}, \quad \int \frac{d^2X}{2dx^2} = \mathfrak{C}, \quad \int \frac{d^3X}{6dx^3} = \mathfrak{D} \text{ и т. д.}$$

При $x = 0$ также и $S = 0$, а Σ будет суммой ряда

$$A + B + C + D + \ldots + Z,$$

содержащего ω членов; действительно, Z есть член, индекс которого есть ω, является ли ω целым числом или дробью. Поэтому будем иметь

$$\begin{aligned}\Sigma = \omega A + \omega\,((B - A) + (C - B) + (D - C) + \text{ и т. д.}) -\\ - \omega\mathfrak{B} - \omega^2\mathfrak{C} - \omega^3\mathfrak{D} - \omega^4\mathfrak{E} - \text{ и т. д.},\end{aligned}$$

где первый ряд можно опустить, если члены предложенного ряда в конце концов исчезают.

375. Напишем теперь x вместо ω; тогда Σ перейдёт в S, так что

$$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & x\end{matrix}$$
$$S = A + B + C + D + \ldots + X,$$

и теперь значение S выразится бесконечным рядом следующим образом:

$$S = Ax + x\,((B-A)+(C-B)+(D-C)+ \text{ и т. д.}) -$$
$$- \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \mathfrak{F}x^5 - \text{ и т. д.}$$

Так как значение этого ряда выражается одинаково, будет ли x целым числом или дробным, то дифференциалы всех порядков количества S отсюда легко определяются:

$$\frac{dS}{dx} = A + (B-A) + (C-B) + (D-C) + \text{ и т. д.} -$$
$$- \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}x - 3\mathfrak{D}x^2 - 4\mathfrak{E}x^3 - \text{ и т. д.}$$

$$\frac{d^2S}{2dx^2} = \mathfrak{C} - 3\mathfrak{D}x - 6\mathfrak{E}x^2 - 10\mathfrak{F}x^3 - \text{ и т. д.}$$

$$\frac{d^3S}{6dx^3} = -\mathfrak{D} - 4\mathfrak{E}x - 10\mathfrak{F}x^2 - 20\mathfrak{G}x^3 - \text{ и т. д.}$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4} = -\mathfrak{E} - 5\mathfrak{F}x - 15\mathfrak{G}x^2 - 35\mathfrak{H}x^3 - \text{ и т. д.}$$

Так как полный дифференциал равен

$$dS + \frac{1}{2}d^2S + \frac{1}{6}\,d^3S + \frac{1}{24}d^4S + \text{ и т. д.},$$

то полный дифференциал предложенной функции S будет

$$dS = A\,dx + (B-A)\,dx + (C-B)\,dx + (D-C)\,dx + \text{ и т. д.}$$
$$- \mathfrak{B}\,dx - \mathfrak{C}\,(2x\,dx + dx^2) - \mathfrak{D}\,(3x^2\,dx + 3x\,dx^2 + dx^3)$$
$$- \mathfrak{E}\,(4x^3\,dx + 6x^2\,dx^2 + 4x\,dx^3 + dx^4) - \text{ и т. д.}$$

376. Итак, этим способом можно выразить дифференциал какой-либо непредставимой функции S, если бесконечно удалённые члены ряда

$$A + B + C + D + \text{ и т. д.}$$

либо исчезают, либо равны между собой. Если бесконечно удалённые члены этого ряда не будут равны нулю, то сумма ряда, образованного из общего члена $\frac{dX}{dx}$, будет бесконечной, но в соединении с рядом

$$A + (B-A) + (C-B) + (D-C) + \text{ и т. д.}$$

даст конечную сумму. Но может случиться, что члены ряда $A+B+$ $+C+D+$ и т. д. бесконечно возрастают таким образом, что не только сумма ряда $\mathfrak{B}$, но также сумма ряда $\mathfrak{C}$ становится бесконечно большой. В этом случае не достаточно прибавить сумму $A+(B-A)+(C-B)$ и т. д. Так как в этом случае бесконечно удалённые значения, рассмотренные в § 370, а именно, $S^{|\infty|}$, $S^{|\infty+1|}$, $S^{|\infty+2|}$, уже больше не составляют арифметической прогрессии, как мы принимали раньше, то нужно знать закон составления этой прогрессии. Прежде мы принимали, что первые разности этих членов равны; теперь распространим этот метод на случай, когда лишь вторые разности или третьи, или более высокие полагаются постоянными.

377. Рассуждая так же, как в § 309, положим, что вторые разности упомянутых значений являются постоянными; мы имеем

$$S^{|\infty|},\quad S^{|\infty+1|},\quad S^{|\infty+2|}.$$

Первые разности

$$X^{|\infty+1|},\quad X^{|\infty+2|}.$$

Вторые разности

$$X^{|\infty+2|}-X^{|\infty+1|}.$$

Отсюда будем иметь

$$\Sigma^{|\infty|}=S^{|\infty+\omega|}=S^{|\infty|}+\omega X^{|\infty+1|}+\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}\left(X^{|\infty+2|}-X^{|\infty+1|}\right)=$$
$$=S^{|\infty|}-\frac{\omega(\omega-3)}{1\cdot 2}X^{|\infty+1|}+\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}X^{|\infty+2|},$$

поэтому будем иметь уравнение

$$\Sigma+Z'+Z''+Z'''+\ldots+Z^{|\infty|}=S+X'+X''+X'''+\ldots+X^{|\infty|}-$$
$$-\frac{\omega(\omega-3)}{1\cdot 2}X^{|\infty+1|}+\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}X^{|+2|\infty},$$

из которого получаем

$$\Sigma=S+X'+X''+X'''+X''''+\text{ и т. д. до бесконечности}$$
$$-Z'-Z''-Z'''-Z''''-\text{ и т. д. до бесконечности}$$
$$+\omega X^{|\infty+1|}+\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}\left(X^{\infty+2}-X^{\infty+1|}\right).$$

Но бесконечно удалённые члены можно представить так, что будем иметь:

$$\Sigma=S+X'+X''+X'''+X''''+\text{ и т. д.}$$
$$-Z'-Z''-Z'''-Z''''-\text{ и т. д.}$$
$$+\omega X'+\omega\begin{Bmatrix}+X''+X'''+X''''+X'''''+\text{ и т. д.}\\-X'-X''-X'''-X''''-\text{ и т. д.}\end{Bmatrix}$$
$$\begin{matrix}+\dfrac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}X''\\ \\-\dfrac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}X'\end{matrix}\quad+\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}\begin{Bmatrix}+X'''&+X''''&+X'''''&+\text{ и т. д.}\\-2X''&-2X'''&-2X''''&-\text{ и т. д.}\\+X'&+X''&+X'''&+\text{ и т. д.}\end{Bmatrix}$$

Здесь в то же время ясен и закон, по которому будет составляться это выражение, если лишь третьи или лишь четвёртые или более высокие разности будут постоянными.

378. Как выше было доказано,

$$Z=X+\frac{\omega\,dX}{1\,dx}+\frac{\omega^2\,d^2X}{1\cdot 2\,dx^2}+\frac{\omega^3\,d^3X}{1\cdot 2\cdot 3dx^3}+\text{ и т. д.}$$

Если вместо Z', Z'', Z''' и т. д. подставить получаемые отсюда значения, то мы получим следующее выражение для значения S после подстановки в него $x+\omega$ вместо x:

$$\Sigma = S + \omega X' + \omega \left\{ \begin{array}{llllll} +X'' & +X''' & +X'''' & +X''''' & + & \text{и т. д.} \\ -X' & -X'' & -X''' & -X'''' & - & \text{и т. д.} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} +\dfrac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}X'' \\ \\ -\dfrac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}X' \end{array} \quad + \frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2} \left\{ \begin{array}{llllll} +X''' & +X'''' & +X''''' & +X'''''' & + & \text{и т. д.} \\ -2X'' & -2X''' & -2X'''' & -2X''''' & - & \text{и т. д.} \\ +X' & +X'' & +X''' & +X'''' & + & \text{и т. д.} \end{array} \right\}$$

$$-\frac{\omega}{dx} d\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.})$$

$$-\frac{\omega^2}{2dx^2} d^2\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.})$$

$$-\frac{\omega^3}{6dx^3} d^3\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.})$$

и т. д.

Если вместо ω положить dx, то получим полный дифференциал предложенной непредставимой функции S:

$$dS = X'\,dx + dx \left\{ \begin{array}{llllll} +X'' & +X''' & +X'''' & +X''''' & + & \text{и т. д.} \\ -X' & -X'' & -X''' & -X'''' & - & \text{и т. д.} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} -X''\dfrac{dx(1-dx)}{1\cdot 2} \\ \\ +X'\dfrac{dx(1-dx)}{1\cdot 2} \end{array} \quad - \frac{dx(1-dx)}{1\cdot 2} \left\{ \begin{array}{llllll} +X''' & +X'''' & +X''''' & +X'''''' & + & \text{и т. д.} \\ -2X'' & -2X''' & -2X'''' & -2X''''' & - & \text{и т. д.} \\ +X' & +X'' & +X''' & +X'''' & + & \text{и т. д.} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} +X'''\dfrac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3} \\ -2X''\dfrac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3} \\ +X'\dfrac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3} \end{array} + \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3} \left\{ \begin{array}{llll} +X'''' & +X''''' & + & \text{и т. д.} \\ -3X''' & -3X'''' & - & \text{и т. д.} \\ +3X'' & +3X''' & + & \text{и т. д.} \\ -X' & -X'' & - & \text{и т. д.} \end{array} \right\}$$

$$-d\cdot(X'+X''+X'''+X''''+X'''''+ \text{ и т. д.})$$

$$-\frac{1}{2} d^2\cdot(X'+X''+X'''+X''''+X'''''+ \text{ и т. д.})$$

$$-\frac{1}{6} d^3\cdot(X'+X''+X'''+X''''+X'''''+ \text{ и т. д.})$$

$$-\frac{1}{24} d^4\cdot(X'+X''+X'''+X''''+X'''''+ \text{ и т. д.})$$

и т. д.

Это выражение имеет общий характер и даёт искомый дифференциал, каков бы ни был порядок тех разностей, которые становятся постоянными. Эта формула приспособлена к постоянным разностям, причём видно, каков будет закон её составления, если для получения постоянных разностей придётся итти дальше.

379. Если ряд $A+B+C+D+$ и т. д., из которого образуется непредставимая функция

$$\begin{matrix} & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \ldots & & x \\ S= & A & + & B & + & C & + & D & + & \ldots & + & X, \end{matrix}$$

составлен таким образом, что его бесконечно удалённые члены исчезают, то, как мы уже отметили,

$$\begin{aligned} dS = & -d\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.}) \\ & -\frac{1}{2}d^2\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.}) \\ & -\frac{1}{6}d^3\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.}) \\ & -\frac{1}{24}d^4\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.}) \\ & \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Если бесконечно удалённые члены этого ряда не равны нулю, но, однако, имеют исчезающие разности, тогда к этому выражению нужно сверх того добавить

$$dx\left\{X' \begin{matrix} +X''+X'''+X''''+X'''''+ \text{ и т. д.} \\ -X'-X''-X'''-X''''- \text{ и т. д.} \end{matrix}\right\}$$

Если же лишь вторые разности бесконечно удалённых членов ряда $A+B+C+D+$ и т. д. исчезают, тогда, кроме того, нужно добавить

$$\frac{dx\,(dx-1)}{1\cdot 2}\left\{\begin{matrix} & +X''' & +X'''' & +X''''' & + \text{ и т. д.} \\ -X'' & & & & \\ & -2X'' & -2X''' & -2X'''' & - \text{ и т. д.} \\ -X' & & & & \\ & +X' & +X'' & +X''' & + \text{ и т. д.} \end{matrix}\right\}$$

Если лишь третьи разности упомянутых бесконечно удалённых членов будут исчезающими, то кроме уже использованных выражений нужно добавить ещё

$$\frac{dx\,(dx-1)(dx-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left\{\begin{matrix} & +X'''' & +X''''' & +X'''''' & + \text{ и т. д.} \\ +X''' & & & & \\ & -3X''' & -3X'''' & -3X''''' & - \text{ и т. д.} \\ -2X'' & & & & \\ & +3X'' & +3X''' & +3X'''' & + \text{ и т. д.} \\ +X' & & & & \\ & -X' & -X'' & -X''' & - \text{ и т. д.} \end{matrix}\right\}$$

Такой же вид будут иметь и те выражения, которые нужно будет ещё добавить, если исчезающими будут лишь более высокие разности бесконечно удалённых членов ряда $A+B+C+D+$ и т. д. Таким образом, какой бы ряд мы ни приняли, если только его бесконечно удалённые члены в конце концов приводятся к постоянным разностям, мы сможем определить дифференциал образованной им непредставимой функции.

380. Если положить $x=0$, то будем иметь $X'=A$, $X''=B$, $X'''=C$ и т. д. Так как $A+B+C+D+$ и т. д. есть ряд, общий член которого есть X, то, образовав из общих членов

$$\frac{dX}{dx},\quad \frac{d^2X}{2dx^2},\quad \frac{d^3X}{6dx^3},\quad \frac{d^4X}{24dx^4} \text{ и т. д.}$$

подобным же способом бесконечные ряды и обозначив их суммы соответственно буквами $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ и т. д., мы выразим сумму ω членов ряда

$$A+B+C+D+ \text{ и т. д.}$$

таким образом, что будет безразлично, является ли ω целым числом или нет. Напишем x вместо ω, так что

$$\begin{array}{l} \quad\ 1 \quad\ \ 2 \quad\ \ 3 \quad\ \ 4 \quad \ldots \quad x \\ S=A+B+C+D+\ldots+X. \end{array}$$

Если бесконечно удалённые члены этого ряда исчезают, то

$$S=-\mathfrak{B}x-\mathfrak{C}x^2-\mathfrak{D}x^3-\mathfrak{E}x^4- \text{ и т. д.}$$

Если бесконечно удалённые члены имеют только постоянные первые разности, то к этому значению надо сверх того прибавить

$$x\left\{\begin{array}{l} \quad +B+C+D+E+ \text{ и т. д.} \\ A \\ \quad -A-B-C-D- \text{ и т. д.} \end{array}\right\}$$

Если же лишь вторые разности этих бесконечно удалённых членов исчезают, то, кроме того, нужно прибавить

$$\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\left\{\begin{array}{l} \qquad +C\ +D\ +E\ +F\ + \text{ и т. д.} \\ +B \\ \qquad -2B-2C-2D-2E- \text{ и т. д.} \\ -A \\ \qquad +A\ +B\ +C\ +D\ + \text{ и т. д.} \end{array}\right\}$$

Если исчезают лишь третьи разности, то сверх того нужно прибавить следующий бесконечный ряд:

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left\{\begin{array}{l} \qquad +D\ +E\ +F\ +G\ + \text{ и т. д.} \\ +C \\ \qquad -3C-3D-3E-3F- \text{ и т. д.} \\ -2B \\ \qquad +3B+3C+3D+3E+ \text{ и т. д.} \\ +A \\ \qquad -A\ -B\ -C\ -D\ - \text{ и т. д.} \end{array}\right\}$$

381. Распространим это на другой род непредставимых функций, которые представляют собой последовательные произведения нескольких членов предложенного ряда $A+B+C+D+$ и т. д. Пусть, таким образом,

$$\overset{1}{S=A}\cdot\overset{2}{B}\cdot\overset{3}{C}\cdot\overset{4}{D}\ldots\overset{x}{X},$$

и пусть ищется прежде всего значение Σ, в которое преобразуется S, если вместо x написать $x+\omega$. Положим, как и прежде, что Z здесь тот член ряда $A+B+C+D+$ и т. д., индекс которого равен $x+\omega$, и что X отвечает индексу x. Для того чтобы свести этот случай к предыдущему, возьмём логарифмы; тогда

$$1S=1A+1B+1C+1D+\ldots+1X.$$

Если бесконечно удалённые члены этого ряда исчезают, то применив тот же метод, которым мы пользовались прежде, будем иметь:

$$1\Sigma=1S+1X'+1X''+1X'''+ \text{ и т. д.}$$
$$-1Z'-1Z''-1Z''' - \text{ и т. д.}$$

Возвращаясь отсюда к числам, будем иметь

$$\Sigma=S\cdot\frac{X'}{Z'}\cdot\frac{X''}{Z''}\cdot\frac{X'''}{Z'''}\cdot\frac{X''''}{Z''''}\cdot \text{ и т. д.}$$

Это выражение пригодно, следовательно, в том случае, если бесконечно удалённые члены ряда A, B, C, D и т. д. равняются 1. Если же логарифмы бесконечно удалённых членов этого ряда не исчезают, но имеют исчезающие разности, то к ряду, который мы нашли для 1Σ нужно, кроме того, добавить ряд

$$\omega 1X'+\omega\left(1\frac{X''}{X'}+1\frac{X'''}{X''}+1\frac{X''''}{X'''}+ \text{ и т. д.}\right).$$

Взяв числа, будем иметь

$$\Sigma=S\cdot X'^{\omega}\cdot\frac{X''^{\omega}X'^{1-\omega}}{Z'}\cdot\frac{X'''^{\omega}X''^{1-\omega}}{Z''}\cdot\frac{X''''^{\omega}X'''^{1-\omega}}{Z'''}\cdot \text{ и т. д.}$$

382. Если мы положим теперь $x=0$ — в этом случае $S=1$, $X'=A$, $X''=B$, $X'''=C$ и т. д., то Σ будет обозначать произведение ω членов ряда A, B, C, D и т. д. Будем теперь вместо ω писать x, так что Σ получит то значение, которое раньше мы приписывали количеству S,

$$\overset{1}{S=A}\cdot\overset{2}{B}\cdot\overset{3}{C}\cdot\overset{4}{D}\ldots\overset{x}{X}.$$

Так как теперь Z', Z'', Z''' и т. д. переходят в X', X'', X''' и т. д., то если логарифмы бесконечно удалённых членов ряда A, B, C, D и т. д. исчезают, S выразится следующим образом:

$$S=\frac{A}{X'}\cdot\frac{B}{X''}\cdot\frac{C}{X'''}\cdot\frac{D}{X''''}\cdot \text{ и т. д.}$$

Если же исчезают лишь разности логарифмов бесконечно удалённых членов ряда A, B, C, D и т. д., то функция S выразится следующим образом:

$$S=A^{x}\cdot\frac{B^{x}A^{1-x}}{X'}\cdot\frac{C^{x}B^{1-x}}{X''}\cdot\frac{D^{x}C^{1-x}}{X'''}\cdot\frac{E^{x}D^{1-x}}{X''''}\cdot \text{ и т. д.}$$

Если лишь вторые разности этих логарифмов исчезают, то из предшествующего легко видно, какие множители нужно сверх того добавить. Этот случай мы опустим, так как вряд ли он встретится. Впрочем, применение этих выражений в деле интерполяции будет показано в следующей главе.

383. Так как прежде всего нам нужно дифференцировать такого рода непредставимые функции, то здесь мы найдём дифференциал функции

$$S = A \cdot B \cdot C \cdot D \ldots X.$$

Для этого снова возьмём ранее найденное уравнение

$$\begin{aligned} l\Sigma = lS + lX' + lX'' + lX''' + &\text{ и т. д.} \\ -lZ' - lZ'' - lZ''' - &\text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Так как lZ получается из lX, если вместо x положить $x+\omega$, то

$$lZ = lX + \frac{\omega}{dx} d \cdot lX + \frac{\omega^2}{2dx^2} d^2 \cdot lX + \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3 \cdot lX + \text{и т. д.}$$

Подставив эти значения в lZ', lZ'', lZ''' и т. д., будем иметь

$$\begin{aligned} l\Sigma = lS &- \frac{\omega}{dx} d \cdot (lX' + lX'' + lX''' + lX'''' + \text{и т. д.}) \\ &- \frac{\omega^2}{2dx^2} d^2 \cdot (lX' + lX'' + lX''' + lX'''' + \text{и т. д.}) \\ &- \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3 \cdot (lX' + lX'' + lX''' + lX'''' + \text{и т. д.}) \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Положим теперь $\omega = dx$. Тогда $l\Sigma = lS + d \cdot lS$ и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} = &- d \cdot (lX' + lX'' + lX''' + lX'''' + \text{и т. д.}) \\ &- \frac{1}{2} d^2 \cdot (lX' + lX'' + lX''' + lX'''' + \text{и т. д.}) \\ &- \frac{1}{6} d^3 \cdot (lX' + lX'' + lX''' + lX'''' + \text{и т. д.}) \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Эта формула пригодна, если логарифмы бесконечно удалённых членов ряда A, B, C, D и т. д. исчезают. Если же они не исчезают, но имеют исчезающие разности, то к предыдущему выражению полного дифференциала нужно ещё добавить ряд

$$dx\, lX' + dx \left(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X'''}{X''} + l\frac{X''''}{X'''} + \text{и т. д.} \right),$$

и тогда получится полный дифференциал.

384. То же самое можно представить иначе. Положим $x = 0$; тогда lS перейдёт в 0. Образуем теперь ряды, общие члены которых суть

$$lX, \quad \frac{d \cdot lX}{dx}, \quad \frac{d^2 \cdot lX}{2dx^2}, \quad \frac{d^3 \cdot lX}{6dx^3} \text{ и т. д.}$$

Пусть суммы этих бесконечных рядов соответственно будут $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ и т. д. Напишем x вместо ω, так что $\Sigma = S$; тогда

$$lS = -\mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \text{и т. д.},$$

если логарифмы бесконечно удалённых членов ряда A, B, C, D и т. д., общий член которого есть X, исчезают. Если же лишь разности этих логарифмов исчезают, то

$$\begin{aligned} lS = x\,lA + x\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{и т. д.}\right)& \\ - \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \text{и т. д.}& \end{aligned}$$

Таким образом, дифференциал количества lS будет

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} = dx\,lA + dx\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{и т. д.}\right)& \\ - \mathfrak{B}\,dx - 2\mathfrak{C}x\,dx - 3\mathfrak{D}x^2\,dx - 4\mathfrak{E}x^3\,dx - \text{и т. д.}& \end{aligned}$$

Если же требуется найти полный дифференциал, то он будет

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} = dx\,lA + dx\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{и т. д.}\right)& \\ - \mathfrak{B}\,dx - \mathfrak{C}\,(2x\,dx + dx^2) - \mathfrak{D}\,(3x^2\,dx + 3x\,dx^2 + dx^3) - \text{и т. д.}& \end{aligned}$$

Чтобы показать применение этих формул, мы прибавим следующие примеры, которые решим обоими способами.

Пример 1

Найти дифференциал непредставимой функции

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2x-1}{2x}.$$

Здесь прежде всего следует заметить, что бесконечно удалённые члены этого произведения обращаются в единицу, и потому их логарифмы исчезают. Так как здесь $X = \frac{2x-1}{2x}$, то

$$X' = \frac{2x+1}{2x+2}, \quad X'' = \frac{2x+3}{2x+4}, \quad X''' = \frac{2x+5}{2x+6} \text{ и т. д.}$$

и вообще

$$X^{[n]} = \frac{2x+2n-1}{2x+2n},$$

откуда

$$lX^{[n]} = l(2x+2n-1) - l(2x+2n),$$

$$d \cdot lX^{[n]} = \frac{2dx}{2x+2n-1} - \frac{2dx}{2x+2n},$$

$$d^2 \cdot lX^{[n]} = -\frac{4dx^2}{(2x+2n-1)^2} + \frac{4dx^2}{(2x+2n)^2},$$

$$d^3 \cdot lX^{[n]} = +\frac{2 \cdot 2 \cdot 4\,dx^3}{(2x+2n-1)^3} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 4\,dx^3}{(2x+2n)^3},$$

$$d^4 \cdot lX^{[n]} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6\,dx^4}{(2x+2n-1)^4} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6\,dx^4}{(2x+2n)^4}$$

и т. д.

Следовательно, полный дифференциал будет:

$$\frac{dS}{S}=-2dx\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x+3}+\frac{1}{2x+5}+\text{и т. д.}\\ -\frac{1}{2x+2}-\frac{1}{2x+4}-\frac{1}{2x+6}-\text{и т. д.}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{4}{2}dx^2\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+3)^2}+\frac{1}{(2x+5)^2}+\text{и т. д.}\\ -\frac{1}{(2x+2)^2}-\frac{1}{(2x+4)^2}-\frac{1}{(2x+6)^2}-\text{и т. д.}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{8}{3}dx^3\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(2x+1)^3}+\frac{1}{(2x+3)^3}+\frac{1}{(2x+5)^3}+\text{и т. д.}\\ -\frac{1}{(2x+2)^3}-\frac{1}{(2x+4)^3}-\frac{1}{(2x+6)^3}-\text{и т. д.}\end{array}\right\}$$

Если же ищется только первый дифференциал, то он будет

$$\frac{dS}{S}=-2dx\cdot\left(\frac{1}{(2x+1)(2x+2)}+\frac{1}{(2x+3)(2x+4)}+\frac{1}{(2x+5)(2x+6)}+\text{и т. д.}\right).$$

То же самое по другому методу, изложенному в § 394, мы найдём следующим образом. Так как

$$\mathrm{l}\,X=\mathrm{l}\,\frac{2x-1}{2x},$$

то

$$\frac{d\cdot\mathrm{l}\,X}{dx}=\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x},\quad \frac{d^2\cdot\mathrm{l}\,X}{2dx^2}=-\frac{2}{(2x-1)^2}+\frac{1}{2x^2},$$

$$\frac{d^3\cdot\mathrm{l}\,X}{6dx^3}=\frac{8}{3(2x-1)^3}-\frac{1}{3x^3}\ \text{и т. д.}$$

Поэтому

$$\mathfrak{A}=\mathrm{l}\,\frac{1}{2}+\mathrm{l}\,\frac{3}{4}+\mathrm{l}\,\frac{5}{6}+\mathrm{l}\,\frac{7}{8}+\text{и т. д.}$$

$$\mathfrak{B}=\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}+\text{и т. д.}\\ -\frac{2}{2}-\frac{2}{4}-\frac{2}{6}-\frac{2}{8}-\frac{2}{10}-\text{и т. д.}\end{array}\right\}=2\,\mathrm{l}\,2,$$

$$\mathfrak{C}=-\frac{4}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{и т. д.}\\ -\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{8^2}-\text{и т. д.}\end{array}\right\},$$

$$\mathfrak{D}=\frac{8}{3}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\text{и т. д.}\\ -\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4^3}-\frac{1}{6^3}-\frac{1}{8^3}-\text{и т. д.}\end{array}\right\},$$

$$\mathfrak{E}=-\frac{16}{4}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{и т. д.}\\ -\frac{1}{2^4}-\frac{1}{4^4}-\frac{1}{6^4}-\frac{1}{8^4}-\text{и т. д.}\end{array}\right\}$$

и т. д.

или

$$\mathfrak{B} = +\frac{2}{1}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{и т. д.}\right),$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{4}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \text{и т. д.}\right),$$

$$\mathfrak{D} = +\frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \text{и т. д.}\right),$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{16}{4}\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \text{и т. д.}\right) \text{ и т. д.}$$

Подставив найденные значения, будем иметь

$$\frac{dS}{S} = -2dx\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{и т. д.}\right)$$
$$+4x\,dx\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \text{и т. д.}\right)$$
$$-8x^2\,dx\left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \text{и т. д.}\right)$$
$$+16x^3dx\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \text{и т. д.}\right) \text{ и т. д.}$$

Таким образом, если $x = 0$, — в этом случае $1S = 0$ и $S = 1$, — то $dS = -2dx\,1\,2$.

Пример 2

Найти дифференциал непредставимой функции

$$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots x.$$

Члены ряда 1, 2, 3, 4 и т. д. возрастают до бесконечности таким образом, что разности логарифмов исчезают; действительно,

$$1(\infty + 1) - 1\,\infty = 1\left(1 + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Так как $X = x$, то

$$X' = x + 1, \quad X'' = x + 2, \quad X''' = x + 3 \text{ и т. д.}$$

Далее, так как $1X = 1x$, то

$$d \cdot 1X = \frac{dx}{x}, \quad d^2 \cdot 1X = -\frac{dx^2}{x^2}, \quad d^3 \cdot 1X = \frac{2dx^3}{x^3},$$
$$d^4 \cdot 1X = -\frac{2 \cdot 3dx^4}{x^4} \text{ и т. д.},$$

следовательно, если бы последние логарифмы исчезали, то было бы

$$\frac{dS}{S} = -dx\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \text{и т. д.}\right)$$
$$+\frac{dx^2}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \text{и т. д.}\right)$$
$$-\frac{dx^3}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \text{и т. д.}\right) \text{и т. д.}$$

Но так как лишь разности логарифмов исчезают, то сверх того нужно добавить выражение

$$dx\,1(x+1) + dx\left(1\frac{x+2}{x+1} + 1\frac{x+3}{x+2} + 1\frac{x+4}{x+3} + 1\frac{x+5}{x+4} + \text{и т. д.}\right).$$

А так как

$$l\frac{x+2}{x+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{3(x+1)^3}-\frac{1}{4(x+1)^4}+\text{и т. д.},$$

$$l\frac{x+3}{x+2}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2(x+2)^2}+\frac{1}{3(x+2)^3}-\frac{1}{4(x+2)^4}+\text{и т. д.}$$

и т. д.,

то истинный полный дифференциал будет

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S}=dx\,l(x+1)&-\frac{1}{2}(dx-dx^2)\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\text{и т. д.}\right)\\&+\frac{1}{3}(dx-dx^3)\left(\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+3)^3}+\text{и т. д.}\right)\\&-\frac{1}{4}(dx-dx^4)\left(\frac{1}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+2)^4}+\frac{1}{(x+3)^4}+\text{и т. д.}\right)\\&+\frac{1}{5}(dx-dx^5)\left(\frac{1}{(x+1)^5}+\frac{1}{(x+2)^5}+\frac{1}{(x+3)^5}+\text{и т. д.}\right)\end{aligned}$$

и т. д.

Если же мы хотим выразить этот дифференциал другим способом, то, поскольку

$$lX=lx,\quad \frac{d\cdot lX}{dx}=\frac{1}{x},\quad \frac{d^2\cdot lX}{2dx^2}=-\frac{1}{2x^2},\quad \frac{d^3\cdot lX}{6dx^3}=\frac{1}{3x^3},$$

$$\frac{d^4\cdot lX}{24dx^4}=-\frac{1}{4x^4}\ \text{и т. д.},$$

мы будем иметь следующие ряды:

$$\mathfrak{A}=l1+l2+l3+l4+l5+\text{и т. д.},$$

$$\mathfrak{B}=1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{и т. д.}\right),$$

$$\mathfrak{C}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{и т. д.}\right),$$

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\text{и т. д.}\right),$$

$$\mathfrak{E}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{и т. д.}\right)\ \text{и т. д.}$$

Так как $lA=l1=0$, то из § 384 имеем

$$\begin{aligned}lS=x&\left(l\frac{2}{1}+l\frac{3}{2}+l\frac{4}{3}+l\frac{5}{4}+\text{и т. д.}\right)\\&-x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{и т. д.}\right)\\&+\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{и т. д.}\right)\\&-\frac{1}{3}x^3\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{и т. д.}\right)\\&+\frac{1}{4}x^4\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{и т. д.}\right)\ \text{и т. д.}\end{aligned}$$

Хотя первые два ряда, на которые помножается x, каждый в отдельности имеют бесконечную сумму, однако вместе они дают конечную сумму. Действительно, если взять в каждом из этих рядов n членов, то получится

$$l(n+1)-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{n}.$$

Но выше (§ 142а) мы нашли, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}=\text{const.}+\ln+\frac{1}{2n}-\frac{\mathfrak{A}}{2n^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4n^4}-\text{и т. д.},$$

причём это постоянное равно 0,577 215 664 901 532 5 [1]). Поэтому, если положить $n=\infty$, будем иметь

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{\infty}=\text{const.}+1\,\infty.$$

Следовательно, значение этих двух рядов, продолженных до бесконечности, будет равно

$$1\,(\infty+1)-\text{const.}-1\,\infty=-\,\text{const.}$$

Отсюда будем иметь

$$\begin{aligned}1\,S={}&x\cdot 0{,}577\,215\,664\,901\,5325\\&+\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{и т. д.}\right)\\&-\frac{1}{3}x^3\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\text{и т. д.}\right)\\&+\frac{1}{4}x^4\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{и т. д.}\right)\text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Отсюда легко найти дифференциалы любого порядка. Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S}={}&-dx\cdot 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,5\\&+x\,dx\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{и т. д.}\right)\\&-x^2\,dx\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\text{и т. д.}\right)\\&+x^3\,dx\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{и т. д.}\right)\text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Если эти ряды собрать в один, будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S}={}&-dx\cdot 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,5+\\&+\frac{x\,dx}{1\,(1+x)}+\frac{x\,dx}{2\,(2+x)}+\frac{x\,dx}{3\,(3+x)}+\frac{x\,dx}{4\,(4+x)}+\text{и т. д.}\end{aligned}$$

Поэтому, если $x=0$, то

$$\frac{dS}{S}=-dx\cdot 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,5.$$

Из первого же выражения мы будем в этом случае иметь

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S}={}&-\frac{1}{2}dx\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{и т. д.}\right)\\&+\frac{1}{3}dx\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{и т. д.}\right)\\&-\frac{1}{4}dx\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{и т. д.}\right)\\&+\frac{1}{5}dx\left(1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\text{и т. д.}\right)\text{ и т. д.}\end{aligned}$$

[1]) В последнем знаке имеется погрешность; верная цифра будет 8. [*Г. К.*]

385. Дифференциалы подобного рода непредставимых функций можно определять также и для особых случаев[1]), поскольку здесь мы нашли полные дифференциалы. Поэтому если такие функции входят в выражения, которые кажутся неопределёнными—такие выражения мы рассматривали в предыдущей главе,—их значения можно определить тем же методом. Это уяснится на следующих примерах.

Пример 1

Определить значение выражения

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}}{x(x-1)}-\frac{1}{(x-1)(2x-1)}.$$

в случае, когда полагается $x=1$.

Положим

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}=S.$$

Тогда, согласно § 372,

$$\begin{aligned}S=x&\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{ и т. д.}\right)\\ -x^2&\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{ и т. д.}\right)\\ +x^3&\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{ и т. д.}\right)\end{aligned}$$

и т. д.

Но мы имеем также

$$\begin{aligned}S=&+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{ и т. д.}\\ &-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3+x}-\frac{1}{4+x}-\frac{1}{5+x}-\text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Если каждый член этого ряда сочетать с соответствующим членом предыдущего ряда, получится

$$S=1+\frac{x-1}{2(1+x)}+\frac{x-1}{3(2+x)}+\frac{x-1}{4(3+x)}+\text{ и т. д.}$$

Это выражение является более удобным, так как мы должны положить $x=1$. Пусть $x=1+\omega$; тогда будем иметь

$$S=1+\frac{\omega}{2(2+\omega)}+\frac{\omega}{3(3+\omega)}+\frac{\omega}{4(4+\omega)}+\text{ и т. д.}$$

или

$$\begin{aligned}S=1+\omega&\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{и т. д.}\right)=1+\mathfrak{B}\omega\\ -\omega^2&\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\text{ и т. д.}\right)-\mathfrak{C}\omega^2\\ +\omega^3&\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{ и т. д.}\right)+\mathfrak{D}\omega^3\end{aligned}$$

и т. д.

[1]) Т. е. в случаях, рассматриваемых в гл. XIV.

Всё выражение при $x=1+\omega$ перейдёт в выражение

$$\frac{1+\mathfrak{B}\omega-\mathfrak{C}\omega^2+\mathfrak{D}\omega^3-\text{и т. д.}}{\omega(1+\omega)}-\frac{1}{\omega(1+2\omega)},$$

или

$$\frac{\omega+\mathfrak{B}\omega+2\mathfrak{C}\omega^2-\mathfrak{C}\omega^2-\text{и т. д.}}{\omega(1+\omega)(1+2\omega)}=\frac{1+\mathfrak{B}+2\mathfrak{B}\omega-\mathfrak{C}\omega-\text{и т. д.}}{(1+\omega)(1+2\omega)}.$$

Положим теперь $\omega=0$; тогда значение предложенного выражения при $x=1$ будет равно

$$1+\mathfrak{B}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{ и т. д.}$$

Так как этот ряд равен $\frac{1}{6}\pi^2$, то, следовательно, искомое значение равно $\frac{1}{6}\pi^2$.

Пример 2

Найти значение выражения

$$\frac{2x-x^2}{(x-1)^2}+\frac{\pi^2x}{6(x-1)}-\frac{(2x-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}\right)}{x(x-1)^2}$$

в случае, когда полагается $x=1$.

Введём обозначение $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}=S$ и положим $x=1+\omega$; тогда, как мы нашли в предыдущем примере

$$S=1+\mathfrak{B}\omega-\mathfrak{C}\omega^2+\mathfrak{D}\omega^3-\text{ и т. д.},$$

где

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{ и т. д.}=\frac{1}{6}\pi^2-1,$$

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\text{ и т. д.},$$

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{ и т. д.}$$

и т. д.

Если теперь положить $x=1+\omega$, то предложенное выражение примет вид

$$\frac{1-\omega^2}{\omega^2}+\frac{(1+\mathfrak{B})(1+\omega)}{\omega}-\frac{(1+2\omega)(1+\mathfrak{B}\omega-\mathfrak{C}\omega^2+\mathfrak{D}\omega^3-\text{ и т. д.})}{(1+\omega)\omega^2}.$$

Если это выражение привести к одному знаменателю $\omega^2(1+\omega)$, будем иметь

$$\frac{1+\omega-\omega^2-\omega^3+\omega+2\omega^2+\omega^3+\mathfrak{B}\omega(1+2\omega+\omega^2)}{\omega^2(1+\omega)}-$$

$$-\frac{1-\mathfrak{B}\omega+\mathfrak{C}\omega^2-\mathfrak{D}\omega^3-2\omega-2\mathfrak{B}\omega^2+2\mathfrak{C}\omega^3-\text{ и т. д.}}{\omega^2(1+\omega)},$$

а это выражение приводится к виду

$$\frac{\omega^2+\mathfrak{C}\omega^2+\mathfrak{B}\omega^3+2\mathfrak{C}\omega^3-\mathfrak{D}\omega^3+\text{ и т. д.}}{\omega^2(1+\omega)}.$$

Пусть теперь $\omega = 0$; тогда получаем $1 + \mathfrak{C}$. Поэтому значение предложенного выражения при $x = 1$ будет равно $1 + \mathfrak{C}$, и поэтому оно представится рядом

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ и т. д.},$$

сумма которого не может быть выражена ни через логарифмы, ни через окружность круга, и до сих пор мы не можем представить искомое значение каким-либо другим образом в конечном виде. Из этих двух примеров достаточно ясно видно, какое применение может иметь дифференцирование непредставимых функций в учении о рядах.

386. Изложенный здесь метод дифференцирования непредставимых функций основан на предположении, что бесконечно удалённые члены ряда A, B, C, D, E и т. д. либо равны нулю, либо имеют исчезающие разности. Если ни то, ни другое не имеет места, то пользоваться этим методом нельзя. Поэтому я изложу здесь другой метод, не стесняемый этим условием; он основан на общем способе суммирования ряда, имеющего заданный общий член, который был подробно изложен выше (гл. V). Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ суть бернуллиевы числа, полученные в § 122, и пусть предложена следующая непредставимая функция:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & x \end{matrix}$$
$$S = A + B + C + D + \ldots + X.$$

Так как выше (§ 130) мы показали, что

$$S = \int X\,dx + \frac{1}{2}X + \frac{\mathfrak{A}\,dX}{1\cdot 2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,dx^5} - \text{и т. д.},$$

то отсюда легко будет определить дифференциал этой функции. Действительно, мы будем иметь

$$dS = X\,dx + \frac{1}{2}\,dX + \frac{\mathfrak{A}\,d^2X}{1\cdot 2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^6X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,dx^5} - \text{и т. д.}$$

387. Если же предложенная прогрессия связана с геометрической — в этом случае бесконечно удалённые её члены никогда не приводятся к постоянным разностям, и потому первый метод не может быть применён никаким образом, — тогда будет полезен метод, изложенный в § 174. В самом деле, пусть предложена функция

$$S = Ap + Bp^2 + Cp^3 + Dp^4 + \ldots + Xp^x.$$

Будем искать такие значения букв α, β, γ, δ и т. д., чтобы

$$\frac{p-1}{p-e^u} = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{ и т. д.}$$

Найдя эти значения, как мы это сделали в § 173, будем иметь

$$S = \frac{p}{p-1}\cdot p^x\left(X - \frac{\alpha\,dX}{dx} + \frac{\beta\,d^2X}{dx^2} - \frac{\gamma\,d^3X}{dx^3} + \frac{\delta\,d^4X}{dx^4} - \text{ и т. д.}\right)$$

+ постоянное. Это постоянное должно сделать сумму равной нулю при $x = 0$ или удовлетворить какому-либо другому условию. Если взять дифференциал, то это постоянное пропадёт, и мы будем иметь

$$dS = \frac{p}{p-1}\cdot p^x\,dx\,\mathrm{l}\,p\left(X - \frac{\alpha\,dX}{dx} + \frac{\beta\,d^2X}{dx^2} - \frac{\gamma\,d^3X}{dx^3} + \text{ и т. д.}\right)$$
$$+ \frac{p}{p-1}\cdot p^x\left(dX - \frac{\alpha\,d^2X}{dx} + \frac{\beta\,d^3X}{dx^2} - \frac{\gamma\,d^4X}{dx^3} + \text{и т. д.}\right)$$

или

$$dS = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(X\,dx\,\mathrm{l}\,p - (\alpha\,\mathrm{l}\,p - 1)\,dX + (\beta\,\mathrm{l}\,p - \alpha)\frac{d^2X}{dx} - (\gamma\,\mathrm{l}\,p - \beta)\frac{d^3X}{dx^2} + \text{и т. д.}\right),$$

это и есть искомый дифференциал предложенной функции S.

388. Если предложенная непредставимая функция состоит из множителей, то независимо от того, имеют ли логарифмы бесконечно удалённых сомножителей постоянные разности или нет, всегда можно этим методом найти дифференциал функции. Действительно, пусть

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots x.$$

$$S = A \cdot B \cdot C \cdot D \ldots X.$$

Так как отсюда

$$\mathrm{l}\,S = \mathrm{l}\,A + \mathrm{l}\,B + \mathrm{l}\,C + \mathrm{l}\,D + \ldots + \mathrm{l}\,X,$$

то, обращаясь к помощи бернуллиевых чисел, мы будем по предыдущему методу иметь

$$\mathrm{l}\,S = \int dx\,\mathrm{l}\,X + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,X + \frac{\mathfrak{A}\,d \cdot \mathrm{l}\,X}{1 \cdot 2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^3 \cdot \mathrm{l}\,X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\,dx^3} + \text{и т. д.}$$

Дифференцируя это выражение, получим

$$\frac{dS}{S} = dx\,\mathrm{l}\,X + \frac{1}{2}\,d \cdot \mathrm{l}\,X + \frac{\mathfrak{A}\,d^2 \cdot \mathrm{l}\,X}{1 \cdot 2\,dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^4 \cdot \mathrm{l}\,X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\,dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^6 \cdot \mathrm{l}\,X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6\,dx^5} - \frac{\mathfrak{D}\,d^8 \cdot \mathrm{l}\,X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8\,dx^7} + \text{и т. д.}$$

Если, например, будем иметь $X = x$, так что

$$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots x,$$

то, прилагая эту формулу, найдём выражение

$$\frac{dS}{S} = dx\,\mathrm{l}\,x + \frac{dx}{2x} - \frac{\mathfrak{A}\,dx}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}\,dx}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}\,dx}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}\,dx}{8x^8} \text{ и т. д.},$$

которое, если x есть очень большое число, будет более удобным, чем найденное ранее.

ГЛАВА XVII

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ РЯДОВ

389. Говорят, что ряд интерполируется, если указываются его члены, отвечающие дробным или даже иррациональным индексам. Таким образом, если известен общий член ряда, то интерполяция не представляет никаких затруднений, ибо какое бы число ни подставить вместо индекса x, это выражение даст соответствующий член. Если же ряд составлен так, что его общий член никаким образом не оказывается возможным определить, тогда интерполяция такого ряда весьма трудна, и по большей части члены, не отвечающие целым индексам, нельзя определить иначе, чем с помощью бесконечного ряда. В предыдущей главе мы определили отвечающие любым индексам значения таких выражений, которые обычными способами нельзя выразить в конечном виде. Это принесёт нам большую пользу при выполнении интерполяций. Поэтому здесь мы внимательнее рассмотрим, как в этом вопросе применяются результаты, полученные в предыдущей главе.

390. Пусть предложен какой-либо ряд

$$\overset{1}{A}+\overset{2}{B}+\overset{3}{C}+\overset{4}{D}+\ldots+\overset{x}{X},$$

общий член которого X известен, а суммационный член S неизвестен. Образуем другой ряд, общий член которого был бы равен суммационному члену данного ряда. Этот новый ряд будет

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{(A+B)},\ \overset{3}{(A+B+C)},\ \overset{4}{(A+B+C+D)},\ \overset{5}{(A+B+C+D+E)} \text{ и т. д.}$$

и его общий член, т. е. член, отвечающий индексу x, будет равен

$$A+B+C+D+\ldots+X=S.$$

Так как явное его выражение неизвестно, то интерполяция этого нового ряда связана с трудностями, о которых мы ранее упоминали. Чтобы интерполировать этот ряд, нужно найти те значения количества S, которые последнее принимает, если вместо x подставлять какие-либо нецелые числа. В самом деле, когда x есть целое число, то соответствующее значение S находится без затруднений, а именно, нужно произвести сложение стольких членов, сколько x содержит единиц.

391. Чтобы можно было использовать результаты предыдущей главы, положим, что x есть целое число, так что соответствующее ему значение $S=A+B+C+\ldots+X$ известно, и будем искать значение Σ, в которое преобразуется S, если вместо x подставить $x+\omega$, где ω есть какая-либо дробь. Тогда Σ будет тот член предложенного ряда, подлежащего интерполяции, который отвечает индексу $x+\omega$. Если мы найдём его, то интерполяция предложенного ряда тем самым будет выполнена. Пусть Z есть тот член ряда A, B, C, D, E и т. д., который отвечает индексу $x+\omega$, и пусть Z', Z'', Z''' и т. д. будут последовательные члены, имеющие индексы $x+\omega+1$, $x+\omega+2$, $x+\omega+3$ и т. д. Предположим сначала, что бесконечно удалённые члены ряда A, B, C, D и т. д. исчезают. Итак, ряд

$$\overset{1}{A},\quad \overset{2}{(A+B)}\ \overset{3}{(A+B+C)},\ \overset{4}{(A+B+C+D)} \text{ и т. д.,}$$

у которого член, отвечающий индексу x, есть $S=A+B+C+\ldots+X$ будет интерполирован, если мы отыщем его член Σ, который отвечает индексу $x+\omega$; но, как было найдено,

$$\begin{aligned}\Sigma = S &+ X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.}\\ &-Z'-Z''-Z'''-Z''''- \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Таким образом, мы будем иметь бесконечный ряд, равный искомому члену Σ. Так как

$$Z=X+\frac{\omega\,dX}{dx}+\frac{\omega^2 d^2X}{1\cdot 2\,dx^2}+\frac{\omega^3 d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3}+ \text{ и т. д.,}$$

то мы можем преобразовать этот ряд к виду

$$\begin{aligned}\Sigma = S &- \frac{\omega}{dx}\,d\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.})\\ &-\frac{\omega^2}{2\,dx^2}\,d^2\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.})\\ &-\frac{\omega^3}{6\,dx^3}\,d^3\cdot(X'+X''+X'''+X''''+ \text{ и т. д.})\\ &\text{и т. д.}\end{aligned}$$

Из этих двух формул можно применить ту, которая в каком-либо случае окажется более удобной.

392. Возьмём в качестве ряда A, B, C, D и т. д. какой-либо гармонический ряд

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}+ \text{ и т. д.,}$$

общий член которого, т. е. член, отвечающий индексу x, равен $\frac{1}{a+(x-1)b}=X$. Следовательно, нужно образовать ряд

$$\overset{1}{\frac{1}{a}},\quad \overset{2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}\right)},\quad \overset{3}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}\right)},$$

$$\overset{4}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}\right)} \text{ и т. д.,}$$

общий член которого, отвечающий индексу x, будет

$$S=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}+\ldots+\frac{1}{a+(x-1)b}.$$

Если теперь Σ есть член этого ряда, отвечающий индексу $x+\omega$, то, поскольку $Z=\frac{1}{a+(x+\omega-1)b}$, будем иметь

$$X'=\frac{1}{a+bx}, \qquad Z'=\frac{1}{a+bx+b\omega};$$

$$X''=\frac{1}{a+b+bx}; \qquad Z''=\frac{1}{a+b+bx+b\omega},$$

$$X'''=\frac{1}{a+2b+bx}. \qquad Z'''=\frac{1}{a+2b+bx+b\omega}$$

и т. д. и т. д.

Отсюда получим

$$\Sigma=S+\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{a+b+bx}+\frac{1}{a+2b+bx}+\text{ и т. д.}$$
$$-\frac{1}{a+bx+b\omega}-\frac{1}{a+b+bx+b\omega}-\frac{1}{a+2b+bx+ba}-\text{ и т. д.}$$

Другое же выражение будет иметь такой вид:

$$\Sigma=S+b\omega\left(\frac{1}{(a+bx)^2}+\frac{1}{(a+b+bx)^2}+\frac{1}{(a+2b+bx)^2}+\text{ и т. д.}\right)$$
$$-b^2\omega^2\left(\frac{1}{(a+bx)^3}+\frac{1}{(a+b+bx)^3}+\frac{1}{(a+2b+bx)^3}+\text{ и т. д.}\right)$$
$$+b^3\omega^3\left(\frac{1}{(a+bx)^4}+\frac{1}{(a+b+bx)^4}+\frac{1}{(a+2b+bx)^4}+\text{ и т. д.}\right)$$

и т. д.

Пример 1

Пусть предложен ряд

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1, & \left(1+\frac{1}{2}\right), & \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right), & \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \text{ и т. д.;} \end{array}$$

требуется определить члены его, отвечающие дробным индексам.

Здесь $a=1$ и $b=1$; поэтому, если член, отвечающий целому индексу x, положить равным

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x},$$

а член, отвечающий дробному индексу $x+\omega$, обозначить через Σ, то будем иметь

$$\sum=S+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3+x}+\frac{1}{4+x}+\frac{1}{5+x}+\text{ и т. д.}$$
$$-\frac{1}{1+x+\omega}-\frac{1}{2+x+\omega}-\frac{1}{3+x+\omega}-\frac{1}{4+x+\omega}-\frac{1}{5+x+\omega}-\text{ и т. д.}$$

Заметим, что если будет известен член, отвечающий дробному индексу ω — положим этот член равным T, то из него легко можно будет найти член с индексом $x+\omega$; действительно, если T', T'', T''' суть члены, отвечающие индексам $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$ и т. д. и т. д., то

$$T' = T + \frac{1}{1+\omega},$$

$$T'' = T + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega},$$

$$T''' = T + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega} + \frac{1}{3+\omega}$$

и т. д.,

так что достаточно найти лишь те члены, которые соответствуют индексам ω, меньшим единицы. С этой целью положим $x=0$; тогда также $S=0$, и член ряда T, отвечающий дробному индексу ω, выразится следующим образом:

$$T = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{ и т. д.}$$
$$- \frac{1}{1+\omega} - \frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{3+\omega} - \frac{1}{4+\omega} - \text{ и т. д.}$$

Если обратить эти дроби в бесконечные ряды, получится другое выражение

$$\begin{aligned} T = &+\omega\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ и т. д.}\right) \\ &-\omega^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ и т. д.}\right) \\ &+\omega^3\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ и т. д.}\right) \\ &-\omega^4\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \text{ и т. д.}\right) \end{aligned}$$

и т. д.,

которое очень удобно для нахождения приближённого значения T.

Так найдём тот член предложенного ряда, который отвечает индексу $\frac{1}{2}$; полагая его равным T, будем иметь

$$T = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{2}{9} + \text{ и т. д.}$$

или

$$T = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \text{ и т. д.}\right).$$

Значение этого ряда равно $2-2l2$, и, таким образом, член с индексом $\frac{1}{2}$ может быть выражен в конечном виде. Следовательно, члены, индексы которых равны $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ и т. д., выразятся следующим образом:

Индексы	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
Члены	$2-2l2,$	$2+\frac{2}{3}-2l2,$	$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2l2,$	$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}-2l2$

и т. д.

Пример 2

Пусть предложен ряд

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1, & \left(1+\frac{1}{3}\right), & \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right), & \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) \text{ и т. д.} \end{array}$$

требуется выразить его члены, отвечающие дробным индексам.

Здесь $a=1$, $b=2$; поэтому, если член, отвечающий целому индексу x, положить равным

$$S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2x-1},$$

а член, отвечающий дробному индексу $x+\omega$, обозначить через Σ, то будем иметь

$$\Sigma=S+\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{3+2x}+\frac{1}{5+2x}+\frac{1}{7+2x}+\text{ и т. д.}$$
$$-\frac{1}{1+2(x+\omega)}-\frac{1}{3+2(x+\omega)}-\frac{1}{5+2(x+\omega)}-\frac{1}{7+2(x+\omega)}-\text{ и т. д.}$$

Так как достаточно найти члены, индексы которых меньше единицы, то пусть $x=0$ и $S=0$. Если член, соответствующий индексу ω, положить равным T, то будем иметь

$$T=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\text{ и т. д.}$$
$$-\frac{1}{1+2\omega}-\frac{1}{3+2\omega}-\frac{1}{5+2\omega}-\frac{1}{7+2\omega}-\frac{1}{9+2\omega}-\text{ и т. д.}$$

Если положить, что ω есть какое-либо число, то поскольку T есть член, отвечающий индексу ω, T будет общим членом предложенного ряда; он выразится также следующим образом:

$$T=\frac{2\omega}{1(1+2\omega)}+\frac{2\omega}{3(3+2\omega)}+\frac{2\omega}{5(5+2\omega)}+\frac{2\omega}{7(7+2\omega)}+\text{ и т. д.}$$

или так:

$$\begin{aligned} T= {} & 2\omega\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{ и т. д.}\right) \\ & -4\omega^2\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\text{ и т. д.}\right) \\ & +8\omega^3\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{ и т. д.}\right) \\ & -16\omega^4\left(1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}+\text{ и т. д.}\right) \\ & \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Положим, что $\omega=\frac{1}{2}$; тогда член, отвечающий этому индексу, будет

$$T=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\text{ и т. д. }=l2$$

и будем иметь:

Индексы	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
Члены	$l2,$	$\frac{1}{2}+l2,$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+l2,$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+l2$ и т. д.

Если $\omega = \frac{1}{4}$, то будем иметь

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \quad \text{и т. д.}$$

$$-\frac{2}{3} - \frac{2}{7} - \frac{2}{11} - \frac{2}{15} - \quad \text{и т. д.}$$

или

$$T = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{ и т. д. } - \frac{1}{2} l 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} l 2.$$

393. Если теперь для ряда общего вида

$$\frac{1}{a}, \quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right), \quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b}\right) \text{ и т. д.}$$

ищется член, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, то нужно в выражениях предыдущего параграфа положить $x = 0$ и $\omega = \frac{1}{2}$; тогда $S = 0$, и искомый член, соответствующий индексу $\frac{1}{2}$, будет

$$\Sigma = \frac{1}{a} - \frac{2}{2a+b} + \frac{1}{a+b} - \frac{2}{2a+3b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{2}{2a+5b} + \text{ и т. д.}$$

или, если преобразовать члены к более однородному виду

$$\frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2a+2b} - \frac{1}{2a+3b} + \frac{1}{2a+4b} - \text{ и т. д.}$$

Так как в этом ряде знаки $+$ и $-$ чередуются, то если взять последовательные разности, значение $\frac{1}{2}\Sigma$ выразится по методу, изложенному выше (§ 8), рядом, сходящимся быстрее.

Но ряд разностей будет

$$\frac{-b}{2a(2a+b)}, \quad \frac{-b}{(2a+b)(2a+2b)}, \quad \frac{-b}{(2a+2b)(2a+3b)} \text{ и т. д.,}$$

$$\frac{2b^2}{2a(2a+b)(2a+2b)}, \quad \frac{2b^2}{(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} \text{ и т. д.,}$$

$$\frac{-6b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} \text{ и т. д.}$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4a} + \frac{1 \cdot b}{8a(2a+b)} + \frac{1 \cdot 2b^2}{16a(2a+b)(2a+2b)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3b^3}{32a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получим

$$\Sigma = \frac{1}{2a} + \frac{\frac{1}{2}b}{2a(2a+b)} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} b^2}{2a(2a+b)(2a+2b)} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2} b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \text{ и т. д.}$$

Этот ряд сходится очень быстро и даёт приближённое значение члена Σ без большого труда.

394. Вообще, если бесконечно удалённые члены ряда A, B, C, D, E и т. д. исчезают, член, отвечающий индексу ω, будет равен Z, а следующие за ним члены, отвечающие индексам $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$ и т. д., будут Z', Z'', Z''', Z'''' и т. д., то, положив в предыдущих формулах

(§ 391) $x=0$, так что $S=0$ и $X'=A$, $X''=B$, $X'''=C$ и т. д., найдём, что если образовать ряд

$$\overset{1}{A},\quad \overset{2}{(A+B)},\quad \overset{3}{(A+B+C)},\quad \overset{4}{(A+B+C+D)} \text{ и т. д.}$$

и положить член его, отвечающий индексу ω, равным Σ, то

$$\Sigma=(A-Z')+(B-Z'')+(C-Z''')+(D-Z'''')+ \text{ и т. д.}$$

Из этого выражения можно найти какие угодно промежуточные члены. Однако достаточно для выполнения интерполяции найти те члены, которые отвечают индексам ω, меньшим единицы. Если будет найден член Σ, отвечающий такому индексу ω, то, обозначив члены, отвечающие индексам $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$ и т. д., через Σ', Σ'', Σ''' и т. д., будем иметь

$$\begin{aligned}\Sigma' &=\Sigma+Z',\\ \Sigma'' &=\Sigma+Z'+Z'',\\ \Sigma''' &=\Sigma+Z'+Z''+Z'''\end{aligned}$$

и т. д.

Пример 1

Интерполировать ряд

$$\overset{1}{1},\quad \overset{2}{\left(1+\frac{1}{4}\right)},\quad \overset{3}{\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)},\quad \overset{4}{\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)} \text{ и т. д.}$$

Пусть Σ есть член этого ряда, отвечающий индексу ω. Так как данный ряд образован суммированием ряда

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+ \text{ и т. д.,}$$

общий член которого, отвечающий индексу ω, равен $\frac{1}{\omega^2}$, то

$$\Sigma=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+ \text{ и т. д.}$$
$$-\frac{1}{(1+\omega)^2}-\frac{1}{(2+\omega)^2}-\frac{1}{(3+\omega)^2}-\frac{1}{(4+\omega)^2}- \text{ и т. д.}$$

Таким образом, если ищется тот член предложенного ряда, который отвечает индексу $\frac{1}{2}$, то нужно положить $\omega=\frac{1}{2}$, и тогда получим

$$\Sigma=1-\frac{4}{9}+\frac{1}{4}-\frac{4}{25}+\frac{1}{9}-\frac{4}{49}+ \text{ и т. д.}$$

или

$$\Sigma=4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\frac{1}{25}+\frac{1}{36}-\frac{1}{49}+ \text{ и т. д.}\right).$$

Но так как

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{25}+ \text{ и т. д. }=\frac{\pi^2}{12},$$

то

$$\Sigma=4\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)=4-\frac{1}{3\pi^2}.$$

Это и есть член, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$. Следовательно,

индексам $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ и т. д.

будут отвечать члены $4-\frac{1}{3}\pi^2$, $\frac{4}{1}+\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\pi^2$, $\frac{4}{1}+\frac{4}{9}+\frac{4}{25}-\frac{1}{3}\pi^2$ и т. д.

Пример 2

Интерполировать ряд

$$\overset{1}{1},\quad \overset{2}{\left(1+\frac{1}{9}\right)},\quad \overset{3}{\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}\right)},\quad \overset{4}{\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}\right)} \text{ и т. д.}$$

Пусть Σ есть член, отвечающий какому-либо индексу ω; так как данный ряд образован суммированием ряда

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+ \text{ и т. д.},$$

общий член которого, отвечающий индексу ω, есть $Z=\frac{1}{(2\omega-1)^2}$, то

$$Z'=\frac{1}{(2\omega+1)^2},\quad Z''=\frac{1}{(2\omega+3)^2},\quad Z'''=\frac{1}{(2\omega+5)^2} \text{ и т. д.}$$

Поэтому будем иметь

$$\Sigma=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+ \text{ и т. д.}$$

$$-\frac{1}{(1+2\omega)^2}-\frac{1}{(3+2\omega)^2}-\frac{1}{(5+2\omega)^2}-\frac{1}{(7+2\omega)^2}- \text{ и т. д.}$$

Положим $\omega=\frac{1}{2}$, чтобы найти член предложенного ряда, отвечающий индексу, равному $\frac{1}{2}$; этот член будет

$$\Sigma=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+ \text{ и т. д. } =\frac{\pi^2}{12}.$$

Из него следующим образом определятся члены, занимающие среднее положение между какими-либо двумя данными:

индексам $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ и т. д.

будут отвечать члены $\frac{\pi^2}{12}$, $\frac{1}{4}+\frac{\pi^2}{12}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{\pi^2}{12}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{\pi^2}{12}$ и т. д.

Пример 3

Интерполировать ряд

$$\overset{1}{1},\quad \overset{2}{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)},\quad \overset{3}{\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)},\quad \overset{4}{\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)} \text{ и т. д.}$$

Пусть попрежнему Σ есть член, отвечающий индексу ω; будем иметь $Z=\frac{1}{\omega^n}$ и

$$Z'=\frac{1}{(1+\omega)^n},\quad Z''=\frac{1}{(2+\omega)^n},\quad Z'''=\frac{1}{(3+\omega)^n} \text{ и т. д.}$$

Отсюда получим

$$\Sigma=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{ и т. д.}$$

$$-\frac{1}{(1+\omega)^n}-\frac{1}{(2+\omega)^n}-\frac{1}{(3+\omega)^n}-\frac{1}{(4+\omega)^n}-\text{ и т. д.}$$

Если, следовательно, пожелаем определить член, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, то он будет равен

$$1-\frac{2^n}{3^n}+\frac{1}{2^n}-\frac{2^n}{5^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{2^n}{7^n}+\text{ и т. д.}$$

или

$$2^n\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\text{ и т. д.}\right).$$

Поэтому, если положить

$$\mathfrak{R}=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}+\text{ и т. д.},$$

то член предложенного ряда, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, будет равен $2^n(1-\mathfrak{R})$; следовательно, индексам

$$\frac{1}{2},\qquad \frac{3}{2},\qquad \frac{5}{2}\qquad \text{ и т. д.}$$

будут соответствовать члены

$$2^n-2^n\mathfrak{R},\quad 2^n+\frac{2^n}{3^n}-2^n\mathfrak{R},\quad 2^n+\frac{2^n}{3^n}+\frac{2^n}{5^n}-2^n\mathfrak{R}\text{ и т. д.}$$

Пример 4

Интерполировать ряд

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1, & \left(1+\frac{1}{3^n}\right), & \left(1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right), & \left(1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}\right)\text{ и т. д.}\end{array}$$

Пусть Σ есть член, соответствующий какому-либо индексу ω; так как $Z=\frac{1}{(2\omega-1)^2}$, то будем иметь

$$Z'=\frac{1}{(2\omega+1)^n},\quad Z''=\frac{1}{(2\omega+3)^n},\quad Z'''=\frac{1}{(2\omega+5)^n}\text{ и т. д.}$$

и

$$\Sigma=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\text{ и т. д.}$$

$$-\frac{1}{(1+2\omega)^n}-\frac{1}{(3+2\omega)^n}-\frac{1}{(5+2\omega)^n}-\frac{1}{(7+2\omega)^n}-\text{ и т. д.}$$

Положим $\omega=\frac{1}{2}$; тогда получим член, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$:

$$1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}+ \text{ и т. д. } =\Re.$$

Из него найдутся далее остальные члены, лежащие посредине между данными

Индексы $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ и т. д.

Члены $\Re$, $\frac{1}{2^n}+\Re$, $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\Re$ и т. д.

395. Положим теперь, что бесконечно удалённые члены ряда A, B, C, D, E и т. д., из суммирования которого образуется ряд, подлежащий интерполяции, не исчезают, но составлены так, что исчезают их разности, и пусть X есть член этого ряда, отвечающий индексу x, а Z есть член, отвечающий указателю $x+\omega$. Пусть далее X', X'', X''', X'''' и т. д. суть члены, следующие за X, а Z', Z'', Z''', Z'''' и т. д. — члены, следующие за Z. При этих обозначениях пусть предложено интерполировать ряд

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ A, & (A+B), & (A+B+C), & (A+B+C+D) \text{ и т. д.} \end{array}$$

Пусть его член, отвечающий индексу x, равен S, а член, отвечающий индексу $x+\omega$, равен Σ. Тогда на основании того, что было сказано в предыдущей главе, будем иметь

$$\begin{aligned} \Sigma = S &+ X' + X'' + X''' + \text{ и т. д.} \\ &- Z' - Z'' - Z''' - \text{ и т. д.} \\ +\omega X'+\omega &\begin{Bmatrix} X'' + X''' + X'''' + \text{ и т. д.} \\ -X' - X'' - X''' - \text{ и т. д.} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Здесь, как и раньше, достаточно найти члены, отвечающие индексам, меньшим единицы. Положим $x=0$, так что $S=0$, $X'=A$, $X''=B$ и т. д.; член, отвечающий индексу ω, будет

$$\begin{aligned} \Sigma = &(A-Z')+(B-Z'')+(C-Z''')+(D-Z'''')+ \text{ и т. д.} \\ &+\omega+A+\omega\,((B-A)+(C-B)+(D-C)+(E-D)+ \text{ и т. д.}) \end{aligned}$$

или, если обозначить разности принятым ранее способом, согласно которому $\Delta A=B-A$, $\Delta B=C-B$ и т. д., то будем иметь

$$\begin{aligned} \Sigma = &(A-Z')+(B-Z'')+(C-Z''')+(D-Z'''')+ \text{ и т. д.} \\ &+\omega\,(A+\Delta A+\Delta B+\Delta C+\Delta D+ \text{ и т. д.}). \end{aligned}$$

396. Если же бесконечно удалённые члены ряда A, B, C, D, E и т. д., суммированием которого образуется ряд, подлежащий интерполяции, не исчезают сами и не исчезают также их первые разности, то для того, чтобы выразить значение Σ, нужно будет добавить ещё несколько рядов, а именно, столько, чтобы прийти к исчезающим разностям бесконечно удалённых членов. Пусть попрежнему в ряде

A, B, C, D, E и т. д. член, отвечающий индексу x, равен X, а следующие за ним — X', X'', X''' и т. д.; индексу же $x+\omega$ пусть отвечает член Z, за которым следуют Z', Z'', Z''' и т. д., и пусть предложен ряд

$$\overset{1}{A}, \quad \overset{2}{(A+B)}, \quad \overset{3}{(A+B+C)}, \quad \overset{4}{(A+B+C+D)} \text{ и т. д.},$$

член которого, отвечающий индексу x, есть

$$S = A+B+C+D+\ldots+X,$$

и индексу $x+\omega$ отвечает член Σ, так что

индексам	отвечают члены
$x+\omega+1$	$\Sigma' = \Sigma+Z'$
$x+\omega+2$	$\Sigma'' = \Sigma+Z'+Z''$
$x+\omega+3$	$\Sigma''' = \Sigma+Z'+Z''+Z'''$
и т. д.	и т. д.

Если теперь разности членов выразятся следующим образом:

$$\Delta X' = X''-X', \quad \Delta X'' = X'''-X'', \quad \Delta X''' = X''''-X''' \text{ и т. д.},$$

$$\Delta^2 X' = \Delta X''-\Delta X', \quad \Delta^2 X'' = \Delta X'''-\Delta X'', \quad \Delta^2 X''' = \Delta X''''-\Delta X''' \text{ и т. д.},$$

$$\Delta^3 X' = \Delta^2 X''-\Delta^2 X', \quad \Delta^3 X'' = \Delta^2 X'''-\Delta^2 X'' \text{ и т. д.},$$

то согласно § 377 член Σ выразится так:

$$\begin{aligned}\Sigma = S &+ X'+X''+X'''+X'''' + \text{ и т. д.}\\ &- Z'-Z''-Z'''-Z''''- \text{ и т. д.}\\ &+ \omega(X'+\Delta X'+\Delta X''+\Delta X'''+\Delta X''''+ \text{ и т. д.})\\ &+ \frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}(\Delta X'+\Delta^2 X'+\Delta^2\Delta''+\Delta^2 X'''+\Delta^2 X''''+ \text{ и т. д.})\\ &+ \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\Delta^2 X'+\Delta^3 X'+\Delta^3 X''+\Delta^3 X'''+\Delta^3 X''''+ \text{ и т. д.})\end{aligned}$$

и т. д.

397. Как мы уже заметили, достаточно добавить столько рядов, чтобы дойти до постоянных разностей; если же мы пожелаем брать эти ряды до бесконечности или по крайней мере до тех пор, пока не исчезнут разности конечных членов, тогда, поскольку

$$Z' = X'+\omega\Delta X'+\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 X'+\frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 X'+ \text{ и т. д.},$$

всё найденное выражение стягивается и принимает следующий вид:

$$\Sigma = S+\omega X'+\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}\Delta X'+\frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^2 X'+ \text{ и т. д.}$$

Это выражение представляет суммационный член $A+B+C+D+$ и т. д.; если же известен суммационный член, то интерполяция не представит никаких затруднений. Можно пользоваться также и этой формулой: всякий раз, когда она обрывается, она представит любой интерполируемый член в конечном и алгебраическом виде; если же она продолжается до бесконечности, то лучше применять первую формулу, основанную на рассмотрении бесконечно удалённых членов

Последняя, если в ней положить $x=0$, так что Σ будет обозначать член, отвечающий индексу ω, примет, поскольку $S=0$, следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Sigma = {} & A+B+C+D+ \text{ и т. д.}\\
& -Z'-Z''-Z'''-Z''''- \text{ и т. д.}\\
& +\omega\,(A+\Delta A+\Delta B+\Delta C+\Delta D+ \text{ и т. д.})\\
& +\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}\,(\Delta A+\Delta^2 A+\Delta^2 B+\Delta^2 C+\Delta^2 D+ \text{ и т. д.})\\
& +\frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,(\Delta^2 A+\Delta^3 A+\Delta^3 B+\Delta^3 C+\Delta^3 D+ \text{ и т. д.})\\
& \text{и т. д.}
\end{aligned}$$

или, если положить для краткости

$$\omega=\alpha, \quad \frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}=\beta, \quad \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1\cdot 2\cdot 3}=\gamma \text{ и т. д.},$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
\Sigma = {} & \alpha A+\beta\Delta A+\gamma\Delta^2 A+\delta\Delta^3 A+ \text{ и т. д.}\\
& +A\ +\alpha\Delta A+\beta\Delta^2 A+\gamma\Delta^3 A+ \text{ и т. д.} -Z'\\
& +B\ +\alpha\Delta B+\beta\Delta^2 B+\gamma\Delta^3 B+ \text{ и т. д.} -Z''\\
& +C\ +\alpha\Delta C+\beta\Delta^2 C+\gamma\Delta^3 C+ \text{ и т. д.} -Z'''\\
& \text{и т. д.}
\end{aligned}$$

Число горизонтальных рядов является, правда, бесконечным, но каждый ряд состоит из конечного числа членов.

Пример

Интерполировать ряд

$$\overset{1}{\frac{1}{2}}, \quad \overset{2}{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)}, \quad \overset{3}{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)}, \quad \overset{4}{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)} \text{ и т. д.}$$

Пусть член этого ряда, отвечающий индексу ω, равен Σ. Так как он получается суммированием ряда $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ и т. д., то $Z=\frac{\omega}{\omega+1}$, и так как для бесконечно удалённых членов уже первые разности исчезают, то нужно взять только первые разности. Так как

$$A=\frac{1}{2}, \quad B=\frac{2}{3}, \quad C=\frac{3}{4}, \quad D=\frac{4}{5} \text{ и т. д.},$$

то эти первые разности будут

$$\Delta A=\frac{1}{2\cdot 3}, \quad \Delta B=\frac{1}{3\cdot 4}, \quad \Delta C=\frac{1}{4\cdot 5} \text{ и т. д.}$$

Отсюда будем иметь

$$\begin{aligned}
\Sigma = {} & \frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+ \text{ и т. д.}\\
& +\frac{\omega}{2\cdot 3}\ +\frac{\omega}{3\cdot 4}\ +\frac{\omega}{4\cdot 5}\ +\frac{\omega}{5\cdot 6}+ \text{ и т. д.}\\
& -\frac{\omega+1}{\omega+2}-\frac{\omega+2}{\omega+3}-\frac{\omega+3}{\omega+4}-\frac{\omega+4}{\omega+5}- \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

или, поскольку

$$\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2\cdot 3}+\frac{\omega}{3\cdot 4}+\frac{\omega}{4\cdot 5}+ \text{ и т. д. } =\omega,$$

будем иметь

$$\Sigma=\omega+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+ \text{ и т. д.}$$

$$-\frac{\omega+1}{\omega+2}-\frac{\omega+2}{\omega+3}-\frac{\omega+3}{\omega+4}-\frac{\omega+4}{\omega+5}- \text{ и т. д.}$$

Таким образом, если ищется член, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, то он будет

$$\Sigma=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-\frac{5}{7}+\frac{3}{4}-\frac{7}{9}+\frac{4}{5}-\frac{9}{11}+ \text{ и т. д.}$$

или

$$\Sigma=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 7}-\frac{1}{4\cdot 9}-\frac{1}{5\cdot 11}-\frac{1}{6\cdot 13}- \text{ и т. д.,}$$

так что

$$\frac{1}{2}\Sigma=\frac{1}{4}-\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{6\cdot 7}-\frac{1}{8\cdot 9}-\frac{1}{10\cdot 11}-\frac{1}{12\cdot 13}- \text{ и т. д.}$$

или

$$\frac{1}{2}\Sigma=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}- \text{ и т. д.}$$

$$+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+ \text{ и т. д.}$$

А так как

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+ \text{ и т. д. } =l2,$$

то будем иметь

$$\frac{1}{2}\Sigma=l2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=l2-\frac{7}{12},$$

так что

$$\Sigma=2l2-\frac{7}{6}.$$

398. Перейдём теперь к интерполированию рядов, члены которых составлены из сомножителей. Пусть предложен ряд наиболее общего вида

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ A, & AB, & ABC, & ABCD, & ABCDE \end{array} \text{ и т. д.}$$

и пусть его член, отвечающий индексу ω, равен Σ. Следовательно, $l\Sigma$ будет членом, соответствующим индексу ω в ряде

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ lA, & (lA+lB), & (lA+lB+lC), & (lA+lB+lC+lD) \end{array} \text{ и т. д.}$$

Если мы предположим, что бесконечно удалённые члены этого ряда исчезают и что член ряда A, B, C, D, E и т. д., отвечающий индексу ω.

есть Z, а следующие члены, отвечающие индексам $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\omega+4$ и т. д., суть Z', Z'', Z''', Z'''' и т. д., то по доказанному выше

$$\begin{gathered}1\Sigma = 1A + 1B + 1C + 1D + \text{ и т. д.}\\ -1Z' - 1Z'' - 1Z''' - 1Z'''' - \text{ и т. д.}\end{gathered}$$

Переходя к числам, будем иметь

$$\Sigma = \frac{A}{Z'} \cdot \frac{B}{Z''} \cdot \frac{C}{Z'''} \cdot \frac{D}{Z''''} \cdot \text{ и т. д.}$$

399. Если же логарифмы бесконечно удалённых членов ряда A, B, C, D, E и т. д. не исчезают, но имеют исчезающие разности, то, как мы видели,

$$\begin{gathered}1\Sigma = 1A + 1B + 1C + \text{ и т. д.}\\ -1Z' - 1Z'' - 1Z''' - \text{ и т. д.}\\ +\omega 1A + \omega\left(1\frac{B}{A} + 1\frac{C}{B} + 1\frac{D}{C} + \text{ и т. д.}\right).\end{gathered}$$

Переходя от логарифмов к числам, будем иметь

$$\Sigma = A^{\omega} \cdot \frac{A^{1-\omega}B^{\omega}}{Z'} \cdot \frac{B^{1-\omega}C^{\omega}}{Z''} \cdot \frac{C^{1-\omega}D^{\omega}}{Z'''} \cdot \frac{D^{1-\omega}E^{\omega}}{Z''''} \cdot \text{ и т. д.}$$

Если же лишь вторые разности логарифмов бесконечно удалённых членов исчезают, то будем иметь

$$\begin{gathered}1\Sigma = 1A + 1B + 1C + 1D + \text{ и т. д.}\\ -1Z' - 1Z'' - 1Z''' - 1Z'''' - \text{ и т. д.}\\ +\omega\left(1A + 1\frac{B}{A} + 1\frac{C}{B} + 1\frac{D}{C} + 1\frac{E}{D} + \text{ и т. д.}\right)\\ +\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}\left(1\frac{B}{A} + 1\frac{AC}{B^2} + 1\frac{BD}{C^2} + 1\frac{CE}{D^2} + 1\frac{DE}{E^2} + \text{ и т. д.}\right).\end{gathered}$$

Из этих формул получим

$$\Sigma = A^{\frac{\omega(3-\omega)}{2}} \cdot B^{\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}} \frac{A^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1\cdot 2}} B^{\omega(2-\omega)} C^{\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}}}{Z'} \times \frac{B^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1\cdot 2}} C^{\omega(2-\omega)} D^{\frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}}}{Z''} \cdot \text{ и т. д.}$$

Если $\omega < 1$, то более удобно эта формула выразится следующим образом:

$$\Sigma = \frac{A^{\frac{\omega(3-\omega)}{1\cdot 2}}}{B^{\frac{\omega(1-\omega)}{1\cdot 2}}} \cdot \frac{A^{\frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1\cdot 2}} B^{\omega(2-\omega)}}{C^{\frac{\omega(1-\omega)}{1\cdot 2}} Z'} \cdot \frac{B^{\frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1\cdot 2}} C^{\omega(2-\omega)}}{D^{\frac{\omega(1-\omega)}{1\cdot 2}} Z''} \cdot \text{ и т. д.}$$

400. Применим эту интерполяцию к ряду

$$\overset{1}{\frac{a}{b}},\quad \overset{2}{\frac{a(a+c)}{b(b+c)}},\quad \overset{3}{\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}},\quad \overset{4}{\frac{a(a+c)(a+2c)(a+3c)}{b(b+c)(b+2c)(b+3c)}} \text{ и т. д.},$$

его сомножители образуют ряд

$$\overset{1}{\frac{a}{b}},\quad \overset{2}{\frac{a+c}{b+c}},\quad \overset{3}{\frac{a+2c}{b+2c}},\quad \overset{4}{\frac{a+3c}{b+3c}} \text{ и т. д.},$$

у которого логарифмы бесконечно удалённых членов равны нулю. Следовательно, будем иметь

$$Z=\frac{a-c+c\omega}{b-c+c\omega},\quad Z'=\frac{a+c\omega}{b+c\omega}\ \text{и т. д.}$$

Если положить член этого ряда, отвечающий индексу ω, равным Σ, то согласно § 398 будем иметь

$$\Sigma=\frac{a(b+c\omega)}{b(a+c\omega)}\cdot\frac{(a+c)(b+c+c\omega)}{(b+c)(a+c+c\omega)}\cdot\frac{(a+2c)(b+2c+c\omega)}{(b+2c)(a+2c+c\omega)}\cdot\ \text{и т. д.}$$

Если, например, мы пожелаем определить член, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, то, положив $\omega=\frac{1}{2}$, будем иметь

$$\Sigma=\frac{a(2b+c)}{b(2a+c)}\cdot\frac{(a+c)(2b+3c)}{(b+c)(2a+3c)}\cdot\frac{(a+2c)(2b+5c)}{(b+2c)(2a+5c)}\cdot\ \text{и т. д.}$$

Пример

Интерполировать ряд

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1\cdot3}{2\cdot4},\quad \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6},\quad \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8},\quad \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\ \text{и т. д.}$$

Так как здесь $a=1$, $b=1$ и $c=2$, то если член, отвечающий какому угодно индексу ω, положить равным Σ, будем иметь

$$\Sigma=\frac{1(2+2\omega)}{2(1+2\omega)}\cdot\frac{3(4+2\omega)}{4(3+2\omega)}\cdot\frac{5(6+2\omega)}{6(5+2\omega)}\cdot\frac{7(8+2\omega)}{8(7+2\omega)}\cdot\ \text{и т. д.}$$

Если члены, отвечающие индексам $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$ и т. д., обозначить через Σ', Σ'', Σ''' и т. д., то

$$\Sigma'=\frac{1+2\omega}{2+2\omega}\cdot\Sigma,$$

$$\Sigma''=\frac{1+2\omega}{2+2\omega}\cdot\frac{3+2\omega}{4+2\omega}\cdot\Sigma,$$

$$\Sigma'''=\frac{1+2\omega}{2+2\omega}\cdot\frac{3+2\omega}{4+2\omega}\cdot\frac{5+2\omega}{6+2\omega}\cdot\Sigma.$$

Таким образом, если мы пожелаем определить член, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, то, положив $\omega=\frac{1}{2}$, будем иметь

$$\Sigma=\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{3\cdot5}{4\cdot4}\cdot\frac{5\cdot7}{6\cdot6}\cdot\frac{7\cdot9}{8\cdot8}\cdot\frac{9\cdot11}{10\cdot10}\cdot\ \text{и т. д.}$$

Но раньше[1]) было показано, что

$$\pi=2\cdot\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdot\frac{8\cdot8}{7\cdot9}\cdot\ \text{и т. д.},$$

где π есть полуокружность круга радиуса 1.

Поэтому промежуточные члены, отвечающие индексам $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ и т. д., можно выразить через полуокружность круга следующим

---

[1]) «Введение», т. I, гл. XI.

образом:

Индексы: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$

Члены: $\frac{2}{\pi}$, $\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{\pi}$, $\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{2}{\pi}$, $\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{2}{\pi}$ и т. д.

Эту же интерполяцию нашёл Валлис в своей «Арифметике бесконечных» [1]).

401. Рассмотрим теперь ряд

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a, & a(a+b), & a(a+b)(a+2b), & a(a+b)(a+2b)(a+3b) \text{ и т. д.}, \end{array}$$

сомножители которого составляют арифметическую прогрессию

$$a, \quad (a+b), \quad (a+2b), \quad (a+3b), \quad (a+4b) \text{ и т. д.}$$

Его бесконечно удалённые члены составлены таким образом, что разности их логарифмов исчезают. Так как $Z=a-b+ba$
и

$$Z'=a+b\omega, \quad Z''=a+b+b\omega, \quad Z'''=a+2b+b\omega \text{ и т. д.},$$

то, если Σ есть тот член предложенного ряда, индекс которого равен ω, будем иметь

$$\Sigma=a^{\omega}\cdot\frac{a^{1-\omega}(a+b)^{\omega}}{a+b\omega}\cdot\frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^{\omega}}{a+b+b\omega}\cdot\frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^{\omega}}{a+2b+b\omega}\cdot \text{ и т. д.}$$

Найдя это значение, обозначим через ω какое-либо дробное число, меньшее единицы; тогда следующие члены, отвечающие индексам $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$ и т. д., определятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \Sigma' &= (a+b\omega)\Sigma, \\ \Sigma'' &= (a+b\omega)(a+b+b\omega)\Sigma, \\ \Sigma''' &= (a+b\omega)(a+b+b\omega)(a+2b+b\omega)\Sigma \end{aligned}$$

и т. д.

Таким образом, если мы пожелаем определить член, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, то, положив $\omega=\frac{1}{2}$, будем иметь

$$\Sigma=a^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}b}\cdot\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}(a+2b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{3}{2}b}\cdot\frac{(a+2b)^{\frac{1}{2}}(a+3b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{5}{2}b}\cdot \text{ и т. д.},$$

так что, возведя в квадрат, получим

$$\Sigma^2=a\cdot\frac{a(a+b)}{\left(a+\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{1}{2}b\right)}\cdot\frac{(a+b)(a+2b)}{\left(a+\frac{3}{2}b\right)\left(a+\frac{3}{2}b\right)}\times$$
$$\times\frac{(a+2b)(a+3b)}{\left(a+\frac{5}{2}b\right)\left(a+\frac{5}{2}b\right)}\cdot \text{ и т. д.}$$

---

1) J. Wallis, Opera mathematica, т. 1, стр. 355. [*Г. К.*]

402. Положим, что в рассмотренном выше ряде (§ 400)

$$\overset{1}{\frac{f}{g}},\quad \overset{2}{\frac{f(f+h)}{g(g+h)}},\quad \overset{3}{\frac{f(f+h)(f+2h)}{g(g+h)(g+2h)}},\quad \overset{3}{\frac{f(f+h)(f+2h)(f+3h)}{g(g+h)(g+2h)(g+3h)}}\ \text{и т. д.},$$

член, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, равен θ; тогда

$$\theta=\frac{f\left(g+\frac{1}{2}h\right)}{g\left(f+\frac{1}{2}h\right)}\cdot\frac{(f+h)\left(g+\frac{3}{2}h\right)}{(g+h)\left(f+\frac{3}{2}h\right)}\cdot\frac{(f+2h)\left(g+\frac{5}{2}h\right)}{(g+2h)\left(f+\frac{5}{2}h\right)}\cdot\ \text{и т. д.}$$

Положим теперь

$$f=a,\quad g=a+\frac{1}{2}b\quad \text{и}\quad h=b;$$

тогда будем иметь

$$\theta=\frac{a(a+b)}{\left(a+\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{1}{2}b\right)}\cdot\frac{(a+b)(a+2b)}{\left(a+\frac{3}{2}b\right)\left(a+\frac{3}{2}b\right)}\cdot\ \text{и т. д.},$$

так что $\Sigma^2=a\theta$ и $\Sigma=\sqrt{a\theta}$. Поэтому, если положим, что в ряде

$$\overset{1}{a},\quad \overset{2}{a(a+b)},\quad \overset{3}{a(a+b)(a+2b)},\quad \overset{4}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}\ \text{и т. д.},$$

член, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, равен Σ, а в ряде

$$\overset{1}{\frac{a}{a+\frac{1}{2}b}},\quad \overset{2}{\frac{a(a+b)}{\left(a+\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{3}{2}b\right)}},\quad \overset{3}{\frac{a(a+b)(a+2b)}{\left(a+\frac{1}{2}b\right)\left(a+\frac{3}{2}b\right)\left(a+\frac{5}{2}b\right)}}\ \text{и т. д.}$$

член, соответствующий индексу $\frac{1}{2}$, равен θ, то будем иметь

$$\Sigma=\sqrt{a\theta}.$$

Так как здесь член ряда числителей, соответствующий индексу $\frac{1}{2}$, равен Σ, то, если положить, что член ряда знаменателей, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, равен Λ, будем иметь $\theta=\frac{\Sigma}{\Lambda}$; но $\theta=\frac{\Sigma^2}{a}$, откуда $\Sigma=\frac{a}{\Lambda}$, т. е. $\Sigma\Lambda=a$. Эти теоремы неплохо иллюстрируют интерполяцию такого рода рядов.

Пример 1

Пусть предложен следующий подлежащий интерполяции ряд:

$$1,\quad 1\cdot2,\quad 1\cdot2\cdot3,\quad 1\cdot2\cdot3\cdot4\ \text{и т. д.}$$

Так как здесь $a=1$ и $b=1$, то, если положить равным Σ член, отвечающий индексу ω, будем иметь

$$\Sigma=\frac{1^{1-\omega}\cdot2^{\omega}}{1+\omega}\cdot\frac{2^{1-\omega}\cdot3^{\omega}}{2+\omega}\cdot\frac{3^{1-\omega}\cdot4^{\omega}}{3+\omega}\cdot\frac{4^{1-\omega}\cdot5^{\omega}}{5+\omega}\cdot\ \text{и т. д.}$$

Здесь всегда можно принять, что ω есть дробь, меньшая единицы;

и тем не менее интерполяция распространяется на весь ряд. Действительно, если обозначить через Σ', Σ'', Σ''' и т. д. члены, отвечающие индексам $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$ и т. д., то будем иметь

$$\Sigma' = (1+\omega)\,\Sigma,$$

$$\Sigma'' = (1+\omega)(2+\omega)\,\Sigma,$$

$$\Sigma''' = (1+\omega)(2+\omega)(3+\omega)\,\Sigma$$

и т. д.

Таким образом, член предложенного ряда, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, будет

$$\Sigma = \frac{1^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{1^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}\cdot \text{ и т. д.}$$

или

$$\Sigma^2 = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 10}{9\cdot 9}\cdot \text{ и т. д.}$$

Отсюда, так как

$$\pi = 2\cdot\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot \text{ и т. д.},$$

будем иметь

$$\Sigma^2 = \frac{\pi}{4} \quad\text{и}\quad \Sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Следовательно, индексам $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$

будут отвечать члены $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\frac{3\cdot 5}{2\cdot 2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ и т. д.

Пример 2

Пусть предложен следующий подлежащий интерполяции ряд

1	2	3	4	
1,	1·3,	1·3·5,	1·3·5·7	и т. д.

Так как здесь $a=1$, $b=2$, то если положить равным Σ член, отвечающий индексу ω, будем иметь

$$\Sigma = \frac{1^{-\omega}\cdot 3^{\omega}}{1+2\omega}\cdot\frac{3^{1-\omega}\cdot 5^{\omega}}{3+2\omega}\cdot\frac{5^{1-\omega}\cdot 7^{\omega}}{5+2\omega}\cdot \text{ и т. д.},$$

следующие же по порядку члены будут составлены так:

$$\Sigma' = (1+2\omega)\,\Sigma,$$

$$\Sigma'' = (1+2\omega)(3+2\omega)\,\Sigma,$$

$$\Sigma''' = (1+2\omega)(3+2\omega)(5+2\omega)\,\Sigma$$

и т. д.

Таким образом, если мы пожелаем определить член, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, и обозначим этот член через Σ, то будем иметь

$$\Sigma = \frac{\sqrt{1\cdot 3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3\cdot 5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5\cdot 7}}{6}\cdot\frac{\sqrt{7\cdot 9}}{8} \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$\Sigma^2 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 9}{8\cdot 8} \text{ и т. д.} = \frac{2}{\pi},$$

так что будем иметь $\Sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ и

индексам $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, и т. д.

будут отвечать члены $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $2\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $2\cdot 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $2\cdot 4\cdot 6\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ и т. д.

Если же первый ряд и этот помножить друг на друга, так что будем иметь ряд

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1^2, & 1^2\cdot 2\cdot 3, & 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 5, & 1^2\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4\cdot 5\cdot 7, & 1^2\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 9 \text{ и т. д.,} \end{array}$$

то его член, соответствующий индексу $\frac{1}{2}$, будет равен $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, в чём легко убедиться, если этому ряду придать вид

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1\cdot 2}{2}, & \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2^2}, & \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2^3}, & \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2^4} \text{ и т. д.} \end{array}$$

Очевидно, что член этого ряда, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 3

Пусть предложен следующий, подлежащий интерполяции ряд:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{n}{1}, & \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, & \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \text{ и т. д.} \end{array}$$

Рассмотрим по отдельности числители и знаменатели этого ряда. Так как числители суть

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ n, & n(n-1), & n(n-1)(n-2), & n(n-1)(n-2)(n-3) \text{ и т. д.,} \end{array}$$

то здесь $a = n$ и $b = -1$, так что член этого ряда, отвечающий индексу ω, равен

$$n^{\omega}\cdot\frac{n^{1-\omega}(n-1)^{\omega}}{n-\omega}\cdot\frac{(n-1)^{1-\omega}(n-2)^{\omega}}{n-1-\omega}\cdot\frac{(n-2)^{1-\omega}(n-3)^{\omega}}{n-2-\omega} \text{ и т. д.}$$

Но это выражение не даёт ничего достоверного, так как множители его становятся отрицательными. Поэтому преобразуем предложенный ряд, полагая для краткости $1\cdot 2\cdot 3\ldots n = N$, в ряд

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \frac{N}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}, & \frac{N}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-2)}, & \frac{N}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-3)} \text{ и т. д.} \end{array}$$

Знаменатели этого ряда состоят из двух групп сомножителей. Одна составляет ряд

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1\cdot2\cdot3\ldots(n-1), & 1\cdot2\cdot3\ldots(n-2), & 1\cdot2\cdot3\ldots(n-3) \text{ и т. д.}, \end{array}$$

член которого, отвечающий индексу ω, совпадает с членом ряда

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1, & 1\cdot2, & 1\cdot2\cdot3, & 1\cdot2\cdot3\cdot4, & 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 \text{ и т. д.}, \end{array}$$

отвечающим индексу $n-\omega$ и равным

$$\frac{1^{1-n+\omega}\cdot2^{n-\omega}}{1+n-\omega}\cdot\frac{2^{1-n+\omega}\cdot3^{n-\omega}}{2+n-\omega}\cdot\frac{3^{1-n+\omega}\cdot4^{n-\omega}}{3+n-\omega} \text{ и т. д.}$$

Пусть член этого ряда, отвечающий индексу $1-\omega$, будет равен Θ Тогда

$$\Theta=\frac{1^{\omega}\cdot2^{1-\omega}}{2-\omega}\cdot\frac{2^{\omega}\cdot3^{1-\omega}}{3-\omega}\cdot\frac{3^{\omega}\cdot4^{1-\omega}}{4-\omega} \text{ и т. д.}$$

и так как индексам $1-\omega$, $2-\omega$, $3-\omega$ и т. д.
отвечают члены Θ, $(2-\omega)\Theta$, $(2-\omega)(3-\omega)\Theta$ и т. д.,
то индексу $n-\omega$ будет отвечать член

$$(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ldots(n-\omega)\Theta.$$

Вторая группа сомножителей, входящих в знаменатель, образует ряд

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1, & 1\cdot2, & 1\cdot2\cdot3, & 1\cdot2\cdot3\cdot4, & 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 \text{ и т. д.} \end{array}$$

Если член его, отвечающий индексу ω, положить равным Λ, то будем иметь

$$\Lambda=\frac{1^{1-\omega}\cdot2^{\omega}}{1+\omega}\cdot\frac{2^{1-\omega}\cdot3^{\omega}}{2+\omega}\cdot\frac{3^{1-\omega}\cdot4^{\omega}}{3+\omega} \text{ и т. д.}$$

После того как это найдено, положим, что член предложенного ряда

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{n}{1}, & \frac{n(n-1)}{1\cdot2}, & \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}, & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \text{ и т. д.}, \end{array}$$

отвечающий индексу ω, равен Σ; тогда будем иметь

$$\Sigma=\frac{N}{\Lambda(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ldots(n-\omega)\Theta}.$$

Но

$$\frac{N}{(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ldots(n-\omega)}=\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdots\frac{n}{n-\omega}$$

и

$$\Lambda\Theta=\frac{1\cdot2}{(1+\omega)(2-\omega)}\cdot\frac{2\cdot3}{(2+\omega)(3-\omega)}\cdot\frac{3\cdot4}{(3+\omega)(4-\omega)} \text{ и т. д.}$$

Отсюда находим, что искомый член, отвечающий индексу ω, будет

$$\Sigma=\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdot\frac{5}{5-\omega}\cdots\frac{n}{n-\omega}\times$$
$$\times\frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1\cdot2}\cdot\frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2\cdot3}\cdot\frac{(3+\omega)(4-\omega)}{3\cdot4} \text{ и т. д.}$$

Следовательно, индексу $\frac{1}{2}$ будет отвечать член

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{9\cdot 9}{8\cdot 10}\text{ и т. д.},$$

который приводится к виду

$$\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\ldots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots(2n-1)}\cdot\frac{4}{\pi},$$

т. е. будет равен

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots(2n-1)}.$$

Если положим $n=2$, получим такой подлежащий интерполяции ряд:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ 1, & 2, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 & \text{и т. д.;}\end{matrix}$$

член его, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, будет равен $\frac{16}{3\pi}$.

Пример 4

Пусть ищется член, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$ в ряде

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1, & +\frac{1}{2}, & -\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}, & +\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}, & -\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} & \text{и т. д.}\end{matrix}$$

Этот ряд получается из предыдущего, если положить $n=\frac{1}{2}$. Поэтому искомый член Σ будет равен

$$\Sigma=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n-1)}$$

при $n=\frac{1}{2}$. Положим, что при $n=\frac{1}{2}$

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n-1)}=\Theta.$$

Тогда Θ будет членом, отвечающим индексу $\frac{1}{2}$ в ряде

$$\frac{2}{1},\quad\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3},\quad\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5},\quad\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\text{ и т. д.};$$

по предыдущему он будет равен $\frac{\pi}{2}$. Поэтому искомый член предложенного ряда, отвечающий индексу $\frac{1}{2}$, будет равен 1. А так как, если член этого ряда, отвечающий какому-нибудь индексу ω, есть Σ, следующий за ним будет $\Sigma'=\frac{1-2\omega}{2+2\omega}\Sigma$, то предложенный ряд следующим образом интерполируется членами, лежащими посредине:

Индексы:

$$0,\quad\frac{1}{2},\quad 1,\quad\frac{3}{2},\quad 2,\quad\frac{5}{2},\quad 3,\quad\frac{7}{2}$$

Члены:

$$1,\quad 1,\quad\frac{1}{2},\quad 0,\quad\frac{-1\cdot 1}{2\cdot 4},\quad 0,\quad\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6},\quad 0\text{ и т. д.}$$

Пример 5

Пусть n будет каким-либо дробным числом. Найти член, отвечающий индексу ω в ряде

$$\overset{0}{1},\quad \overset{1}{\frac{n}{1}},\quad \overset{2}{\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}},\quad \overset{3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}},\quad \overset{4}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}} \text{ и т. д.}$$

Если выражение

$$\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdot\frac{4}{4-\omega}\cdots\frac{n}{n-\omega}$$

сравнить с § 400, получим $a=1$, $c=1$, $b=1-\omega$ и, положив n вместо ω, будем иметь

$$\frac{1}{1-\omega}\cdot\frac{2}{2-\omega}\cdot\frac{3}{3-\omega}\cdots\frac{n}{n-\omega}=\frac{1(1-\omega+n)}{(1-\omega)(1+n)}\cdot\frac{2(2-\omega+n)}{(2-\omega)(2+n)} \text{ и т. д.,}$$

так что искомый член, отвечающий индексу ω, который мы положим равным Σ, будет

$$\Sigma=\frac{(1-\omega+n)\cdot 2}{(1+n)(2-\omega)}\cdot\frac{(2-\omega+n)3}{(2+n)(3-\omega)} \text{ и т. д. } \frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2\cdot 3} \text{ и т. д.}$$

и потому

$$\Sigma=\frac{(1+\omega)(1+n-\omega)}{1\cdot(1+n)}\cdot\frac{(2+\omega)(2+n-\omega)}{2\cdot(2+n)}\cdot\frac{(3+\omega)(3+n-\omega)}{3\cdot(3+n)} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, всякий раз как $n-\omega$ будет целым числом, значение Σ можно выразить рационально.

Так, если $n=\omega$, то $\Sigma=1$,

если $n=1+\omega$, то $\Sigma=n$,

если $n=2+\omega$, то $\Sigma=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$,

если $n=3+\omega$, то $\Sigma=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$.

Если же $\omega-n$ будет целым положительным числом, то всегда будем иметь $\Sigma=0$.

ГЛАВА XVIII

О ПРИМЕНЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РАЗЛОЖЕНИЮ ДРОБЕЙ

403. Метод разложения какой угодно предложенной дроби на простейшие, который мы изложили во «Введении»[1]), хотя сам по себе достаточно прост, можно при помощи дифференциального исчисления упростить так, что во многих случаях применение его потребует гораздо меньшего труда. Изложенный выше метод часто наталкивается на довольно большие препятствия, когда вместо неизвестного количества приходится подставлять значение, которое определяется из какого-либо множителя; особенно затруднительно это в тех случаях, когда знаменатель разлагаемой дроби имеет неопределённую степень. В этих случаях бывает прежде всего очень трудно выполнить деление знаменателя на найденный уже его множитель. Если же прибегнуть к помощи дифференциального исчисления, то можно обойтись без этого действия благодаря тому, что не нужно будет узнавать тот второй сомножитель знаменателя, который получается от его деления на уже найденный множитель. Это преимущество достигается применением метода, с помощью которого определяется значение дроби, числитель и знаменатель которой в некотором случае вместе исчезают. В этой главе мы покажем, каким образом этот метод даёт возможность удобнее и проще производить разложение дробей, о котором выше уже говорилось, и на этом закончим настоящую книгу, в которой мы излагали применение исчисления к анализу.

404. Пусть предложена какая-либо дробь $\frac{P}{Q}$, числитель и знаменатель которой суть целые рациональные функции количества x. Прежде всего нужно посмотреть, не имеет ли x в числителе P той же степени, что в знаменателе или более высокой. Если этот случай имеет место, то дробь $\frac{P}{Q}$ содержит в себе целую часть вида $A+Bx+Cx^2+$ и т. д., которую можно будет найти с помощью деления. Оставшаяся часть даст дробь, которая будет иметь тот же знаменатель, но её числитель будет некоторой функцией R, степень которой будет ниже, чем степень знаменателя Q, так что теперь нужно будет выполнить разложение дроби $\frac{R}{Q}$. Впрочем, нет необходимости

[1]) «Введение», т. I, гл. II. [*Г. К.*]

знать этот новый числитель R, ибо те же простые дроби, которые дала бы дробь $\frac{R}{Q}$, можно найти и непосредственно из предложенной дроби, как мы отмечали уже раньше.

405. Итак, помимо целой части, если дробь $\frac{P}{Q}$ её содержит, нужно найти простейшие дроби, знаменатели которых являются либо двучленами вида $f+gx$, либо трёхчленами вида $f+2x\cos\varphi\cdot\sqrt{fg}+gx^2$, либо степенями таких выражений, вторыми, третьими или более высокими. Все эти знаменатели будут множителями знаменателя Q, так что каждый множитель количества Q даст простейшую дробь. Так, если знаменатель Q имеет множитель $f+gx$, то из него получится простейшая дробь вида

$$\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}.$$

Если в знаменатель входит множитель $(f+gx)^2$, получатся две дроби

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{f+gx}.$$

Если же знаменатель содержит множитель третьей степени $(f+gx)^3$, то из этого множителя получатся три дроби

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^3}+\frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{C}}{f+gx}$$

и т. д. Если же знаменатель Q будет иметь трёхчленный множитель вида $f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2$, то из него получится простейшая дробь такого вида:

$$\frac{\mathfrak{A}+ax}{f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2},$$

а если в нём будут два равных множителя этого вида, т. е. если в него входит множитель $(f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2)^2$, то отсюда возникнут две дроби

$$\frac{\mathfrak{A}+ax}{(f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2)^2}+\frac{\mathfrak{B}+bx}{f^2-2fgx+g^2x^2}.$$

Кубический множитель вида $(f^2-2fgx+g^2x^2)^3$ даст три простейшие дроби и т. д.

406. Итак, разложение какой-либо дроби $\frac{P}{Q}$ производится следующим образом. Сначала ищутся все множители знаменателя Q, как простые, т. е. двучленные, так и трёхчленные. Если среди них будут равные, их нужно хорошо заметить и считать за один. Затем для каждого из этих множителей знаменателя нужно найти простейшую дробь либо тем способом, который был прежде изложен, либо тем, который мы сейчас будем излагать и которым можно по произволу пользоваться вместо первого. После этого сумма всех этих простейших дробей вместе с целой частью, если предложенная дробь $\frac{P}{Q}$ содержит таковую, исчерпает значение предложенной дроби. Разыскание множителей знаменателя Q мы здесь будем считать как бы известным, поскольку оно зависит от решения уравнения $Q=0$. Поэтому здесь мы изложим метод, при посредстве которого для каждого данного множителя знаменателя с помощью дифференциального исчисления можно определить происходящую из него простейшую дробь. А так как знаменатели этих простейших дробей уже имеются, то нам предстоит показать, как находить числитель каждой дроби.

407. Итак, положим, что знаменатель Q дроби $\frac{P}{Q}$ имеет множитель $f+gx$, так что $Q=(f+gx)S$, и что другой множитель S больше не содержит множителя $f+gx$. Пусть простейшая дробь, происходящая от этого множителя, равна $\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$, а дополнение имеет вид $\frac{V}{S}$, так что

$$\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}+\frac{V}{S}=\frac{P}{Q}.$$

Таким образом, будем иметь

$$\frac{V}{S}=\frac{P}{Q}-\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}=\frac{P-\mathfrak{A}S}{(f+gx)S},$$

так что

$$V=\frac{P-\mathfrak{A}S}{f+gx}.$$

А так как V есть целая функция от x, то необходимо, чтобы $P-\mathfrak{A}S$ делилось на $f+gx$; поэтому, если положить $f+gx=0$ или $x=\frac{-f}{g}$, то выражение $P-\mathfrak{A}S$ будет исчезать. Пусть $x=\frac{-f}{g}$. Тогда, поскольку $P-\mathfrak{A}S=0$, будем иметь $\mathfrak{A}=\frac{P}{S}$, как это было найдено ранее. Но так как $S=\frac{Q}{f+gx}$, то будем иметь

$$\mathfrak{A}=\frac{(f+gx)P}{Q},$$

если всюду положить $f+gx=0$ или $x=\frac{-f}{g}$. А так как в этом случае как числитель, так и знаменатель Q исчезают, то на основании того, что ранее было сказано о разыскании значения таких дробей, будем иметь

$$\mathfrak{A}=\frac{(f+gx)\,dP+Pg\,dx}{dQ},$$

если здесь положить $x=\frac{-f}{g}$. Но, поскольку в этом случае $(f+gx)\,dP=0$, будем иметь

$$\mathfrak{A}=\frac{gP\,dx}{dQ}.$$

Таким образом, значение $\mathfrak{A}$ числителя легко находится с помощью дифференцирования.

408. Итак, если знаменатель Q предложенной дроби имеет простой множитель $f+gx$, то от него происходит простейшая дробь

$$\frac{\mathfrak{A}}{f+gx},$$

где $\mathfrak{A}=\frac{gP\,dx}{dQ}$ после того, как сюда будет подставлено вместо x значение $\frac{-f}{g}$ из уравнения $f+gx=0$. Таким образом, теперь нет необходимости разыскивать, как это мы делали прежде, второй сомножитель S знаменателя Q, который получается от деления Q на $f+gx$. Значит, если Q не представлено в виде произведения множителей, то мы можем обойтись без этого деления, особенно тягостного, если x в знаменателе Q имеет неопределённые показатели степени, ибо значение $\mathfrak{A}$ получается из формулы $\frac{gP\,dx}{dQ}$. Если же знаменатель Q уже будет разложен на множители, так что значение S отсюда сейчас же находится, тогда предпочтительно пользоваться другим выражением, которое мы нашли, именно выражением $\mathfrak{A}=\frac{P}{S}$, в котором равным образом нужно положить $x=\frac{-f}{g}$. Таким образом, для разыскания значения $\mathfrak{A}$ в каждом случае можно применять ту формулу, которая представляется более удобной. Применение этой новой формулы мы поясним несколькими примерами.

Пример 1

Пусть предложена дробь $\frac{x^9}{1+x^{17}}$; требуется определить простейшую дробь, происходящую от содержащегося в знаменателе множителя $1+x$.

Здесь $Q=1+x^{17}$, и, хотя известно, что знаменатель имеет множитель $1+x$, однако, если мы пожелали бы, как этого требует первый метод, разделить на него, мы получили бы

$$S=1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}.$$

Поэтому удобнее будет воспользоваться новой формулой $\mathfrak{A}=\frac{gP\,dx}{dQ}$. Так как здесь $f=1$, $g=1$ и $P=x^9$, то, поскольку $dQ=17x^{16}\,dx$, получим, что $\mathfrak{A}=\frac{x^9}{17x^{16}}=\frac{1}{17x^7}$ при $x=-1$, откуда $\mathfrak{A}=-\frac{1}{17}$ и простейшая дробь, происходящая от входящего в знаменатель множителя $1+x$, будет

$$\frac{-1}{17(1+x)}.$$

Пример 2

Пусть предложена дробь $\frac{x^m}{1-x^{2n}}$; определить простейшую дробь, происходящую от содержащегося в знаменателе множителя $1-x$.

Так как предложенный множитель есть $1-x$, то $f=1$ и $g=-1$. Знаменатель $Q=1-x^{2n}$ даёт $dQ=-2nx^{2n-1}\,dx$, откуда, поскольку $P=x^m$, получаем $\mathfrak{A}=\frac{-x^m}{-2nx^{2n-1}}$. А если положить из уравнения $1-x=0$ $x=1$, то получим $\mathfrak{A}=\frac{1}{2n}$, так что простейшая дробь будет

$$\frac{1}{2n(1-x)}.$$

Пример 3

Пусть предложена дробь $\frac{x^m}{1-4x^k+3x^n}$; *определить её простейшую дробь, происходящую от входящего в знаменатель множителя* $1-x$.

Здесь $f=1$, $g=-1$, $P=x^m$, $Q=1-4x^k+3x^n$ и

$$\frac{dQ}{dx}=-4kx^{k-1}+3nx^{n-1}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{A}=\frac{-x^m}{-4kx^{k-1}+3nx^{n-1}},$$

и, положив $x=1$, будем иметь $\mathfrak{A}=\frac{1}{4k-3n}$. Итак, простейшая дробь, происходящая от этого входящего в знаменатель множителя $1-x$, будет

$$\frac{1}{(4k-3n)(1-x)}.$$

409. Положим теперь, что дробь $\frac{P}{Q}$ имеет в знаменателе Q множителем квадрат $(f+gx)^2$; тогда происходящие от неё простейшие дроби суть

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{f+gx}.$$

Пусть $Q=(f+gx)^2S$, дополнение равно $\frac{V}{S}$, так что

$$\frac{V}{S}=\frac{P}{Q}-\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{f+gx} \quad \text{и} \quad V=\frac{P-\mathfrak{A}S-\mathfrak{B}(f+gx)S}{(f+gx)^2}.$$

Так как V есть целая функция, то необходимо, чтобы $P-\mathfrak{A}S-\mathfrak{B}(f+gx)S$ делилось на $(f+gx)^2$; а так как S больше не содержит множителя $f+gx$, то также и выражение $\frac{P}{S}-\mathfrak{A}-\mathfrak{B}(f+gx)$ будет делиться на $(f+gx)^2$, так что при $f+gx=0$, т. е. при $x=\frac{-f}{g}$, не только само оно, но и его дифференциал $d\cdot\frac{P}{S}-\mathfrak{B}g\,dx$ будет исчезать. Положим поэтому $x=\frac{-f}{g}$; тогда из первого уравнения будем иметь $\mathfrak{A}=\frac{P}{S}$, а из второго $\mathfrak{B}=\frac{1}{g\,dx}d\cdot\frac{P}{S}$; найдя эти значения, получим искомые дроби

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{f+gx}.$$

Пример

Пусть предложена дробь $\frac{x^m}{1-4x^3+3x^4}$, *знаменатель которой имеет множитель* $(1-x)^2$; *найти простейшие дроби, происходящие от него.*

Так как здесь $f=1$, $g=-1$, $P=x^m$ и $Q=1-4x^3+3x^4$, то будем иметь

$$\frac{P}{S}=\frac{x^m}{1+2x+3x^2} \quad \text{и} \quad d\cdot\frac{P}{S}=\frac{mx^{m-1}dx+2(m-1)x^m dx+3(m-2)x^{m+1}dx}{(1+2x+3x^2)^2};$$

Следовательно, положив $x=1$, будем иметь

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}=-1\cdot\frac{6m-8}{36}=\frac{4-3m}{18},$$

откуда получим искомые дроби

$$\frac{1}{6(1-x)^2}+\frac{4-3m}{18(1-x)}.$$

410. Если знаменатель дроби $\frac{P}{Q}$ имеет три равных множителя, т. е. если $Q=(f+gx)^3S$, то пусть простейшие дроби, происходящие от этого кубического множителя $(f+gx)^3$, суть

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^3}+\frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{C}}{f+gx},$$

а дополнение этих дробей до предложенной дроби $\frac{P}{Q}$ пусть будет $\frac{V}{S}$; тогда

$$V=\frac{P-\mathfrak{A}S-\mathfrak{B}S(f+gx)-\mathfrak{C}(f+gx)^2}{(f+gx)^3}.$$

Поэтому выражение $\frac{P}{Q}-\mathfrak{A}-\mathfrak{B}(f+gx)-\mathfrak{C}(f+gx)^2$ будет делиться на $(f+gx)^3$; следовательно, если положить $f+gx=0$, т. е. $x=\frac{-f}{g}$, то не только само это выражение, но также и его первый и второй дифференциалы становятся равными нулю. Таким образом, при $x=\frac{-f}{g}$ будем иметь:

$$\begin{aligned} &\frac{P}{S}-\mathfrak{A}-\mathfrak{B}(f+gx)-\mathfrak{C}(f+gx)^2=0,\\ &d\cdot\frac{P}{S}-\mathfrak{B}g\,dx-2\mathfrak{C}g\,dx\,(f+gx)=0,\\ &d^2\cdot\frac{P}{S}-2\mathfrak{C}g^2dx^2 \qquad\qquad =0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения будем иметь

$$\mathfrak{A}=\frac{P}{S}.$$

Из второго будем иметь

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{g\,dx}\,d\cdot\frac{P}{S}.$$

Наконец, из третьего получим

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{2g^2dx^2}\,d^2\cdot\frac{P}{S}.$$

411. Пусть вообще знаменатель Q дроби $\frac{P}{Q}$ имеет множитель $(f+gx)^n$, так что $Q=(f+gx)^nS$. Положим, что дроби, происходящие от этого множителя $(f+gx)^n$, суть

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^n}+\frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^{n-1}}+\frac{\mathfrak{C}}{(f+gx)^{n-2}}+\frac{\mathfrak{D}}{(f+gx)^{n-3}}+\frac{\mathfrak{E}}{(f+gx)^{n-4}}+\text{ и т. д.}$$

до тех пор, пока не придём к последней, знаменатель которой есть $f+gx$. Рассуждая, как прежде, найдём, что выражение

$$\frac{P}{S}-\mathfrak{A}-\mathfrak{B}(f+gx)-\mathfrak{C}(f+gx)^2-\mathfrak{D}(f+gx)^3-\mathfrak{E}(f+gx)^4+\text{ и т. д.}$$

должно делиться на $(f+gx)^n$; следовательно, как оно само, так и все его дифференциалы до порядка $n-1$ должны исчезать при $x=\frac{-f}{g}$. Из этого мы найдём, что

$$\mathfrak{A}=\frac{P}{S},$$

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{1g\,dx}\,d\cdot\frac{P}{S},$$

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{1\cdot 2g^2\,dx^2}\,d\cdot\frac{P}{S},$$

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot g^3\,dx^3}\,d^3\cdot\frac{P}{S},$$

$$\mathfrak{E}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4g^4\,dx^4}\,d^4\cdot\frac{P}{S}$$

и т. д.,

где всюду положено $x=\frac{-f}{g}$.

Следует помнить, что дифференциалы выражения $\frac{P}{S}$ нужно брать раньше, чем вместо x подставлять $\frac{-f}{g}$; действительно, в противном случае количество $\frac{P}{S}$ перестанет быть переменным.

412. Таким образом, этим способом числители $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ и т. д. выражаются проще, чем по способу, изложенному во «Введении», и часто по этому новому способу также и значения их находятся легче. Для того чтобы это сравнение можно было произвести легче, определим значения букв $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ и т. д. по первому способу.

Положив $x=-\frac{f}{g}$,	Оставляя x переменным, положим:
$\mathfrak{A}=\frac{P}{S}$,	$\frac{P-\mathfrak{A}S}{f+gx}=\mathfrak{P}$,
тогда $\mathfrak{B}=\frac{\mathfrak{P}}{S}$,	$\frac{\mathfrak{P}-\mathfrak{B}S}{f+gx}=\mathfrak{Q}$,
тогда $\mathfrak{C}=\frac{\mathfrak{Q}}{S}$,	$\frac{\mathfrak{Q}-\mathfrak{C}S}{f+gx}=\mathfrak{R}$,
тогда $\mathfrak{D}=\frac{\mathfrak{R}}{S}$,	$\frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{D}S}{f+gx}=\mathfrak{S}$
тогда $\mathfrak{E}=\frac{\mathfrak{S}}{S}$.	и т. д.

413. Если же у знаменателя Q дроби $\frac{P}{Q}$ не все простые множители действительны, тогда нужно попарно соединить те множители, произведение которых является действительным. Пусть, таким образом,

$f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2$ есть множитель знаменателя Q. Если положить его равным нулю, получим два мнимых корня

$$x=\frac{f}{g}\cos\varphi\pm\frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\varphi,$$

откуда будем иметь

$$x^n=\frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi\pm\frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}\sin n\varphi.$$

Положим, что $Q=(f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2)S$, и пусть S больше не делится на $f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2$. Пусть дробь, происходящая от этого множителя, есть

$$\frac{\mathfrak{A}+ax}{f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2},$$

а дополнение её до предложенной дроби $\frac{P}{Q}$ равно $\frac{V}{S}$; тогда

$$V=\frac{P-(\mathfrak{A}+ax)S}{f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2},$$

откуда $P-(\mathfrak{A}+ax)S$ и потому $\frac{P}{S}-\mathfrak{A}-ax$ также делятся на $f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2$. Следовательно, $\frac{P}{S}-\mathfrak{A}+ax$ исчезнет, если положить $f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2=0$, т. е. если положить либо

$$x=\frac{f}{g}\cos\varphi+\frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\varphi,$$

либо

$$x=\frac{f}{g}\cos\varphi-\frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\varphi.$$

414. Произведём в каждой из целых функций P и S одну и ту же подстановку. Так как вместо каждой степени x^n количества x нужно подставить бином

$$x^n=\frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi\pm\frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}\sin n\varphi,$$

то сначала положим в обеих функциях $\frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi$ вместо x^n; пусть после этого P перейдёт в $\mathfrak{P}$, а S в $\mathfrak{S}$. Далее, положим в обеих функциях $\frac{f^n}{g^n}\sin n\varphi$ вместо x^n; пусть после этого P перейдёт в $\mathfrak{p}$, а S в $\mathfrak{s}$; здесь нужно иметь в виду, что до этих подстановок нужно полностью развернуть функции P и S, так что, если бы они состояли из множителей, то после выполнения умножения их не останется. После того как эти значения $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{s}$ будут найдены, функция P, если в ней положить $x=\frac{f}{g}\cos\varphi\pm\frac{f}{g\sqrt{-1}}$, перейдёт, очевидно, в $\mathfrak{P}\pm\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{-1}}$, а функция S в $\mathfrak{S}\pm\frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$. Так как $\frac{P}{S}-\mathfrak{A}-ax$ или $P-(\mathfrak{A}+ax)S$ в том и другом случае должны исчезать, то будем иметь

$$\mathfrak{P}\pm\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{-1}}=\left(\mathfrak{A}+\frac{af}{g}\cos\varphi\pm\frac{af}{g\sqrt{-1}}\sin\varphi\right)\left(\mathfrak{S}\pm\frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}\right).$$

Ввиду наличия двойного знака получаем два уравнения

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{S} + \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{S}}{g}\cos\varphi - \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{s}}{g}\sin\varphi,$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\mathfrak{s} + \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{s}}{g}\cos\varphi + \frac{\mathfrak{a}f\mathfrak{S}}{g}\sin\varphi.$$

Исключая из них $\mathfrak{A}$, получаем

$$\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{a}f(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)}{g}\sin\varphi;$$

так что будем иметь

$$\mathfrak{a} = \frac{g(\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P})}{f(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\sin\varphi}.$$

Исключая затем $\sin\varphi$, будем иметь

$$\mathfrak{S}\mathfrak{P} + \mathfrak{s}\mathfrak{p} = (\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\left(\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{a}f}{g}\cos\varphi\right).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{P} + \mathfrak{s}\mathfrak{p}}{\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2} - \frac{(\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P})\cos\varphi}{(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\sin\varphi}.$$

415. Так как

$$S = \frac{Q}{f^2 - 2fgx\cos\varphi + g^2x^2}$$

и так как в случае, если

$$f^2 - 2fgx\cos\varphi + g^2x^2 = 0,$$

как числитель, так и знаменатель исчезают, то в этом случае будем иметь

$$S = \frac{dQ : dx}{2g^2x - 2fg\cos\varphi}.$$

Положим теперь, что, когда повсюду будет сделана подстановка $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi$, функция $\frac{dQ}{dx}$ перейдёт в $\mathfrak{Q}$; если же подставить $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin n\varphi$, то она перейдёт в $\mathfrak{q}$. Тогда ясно, что если положить $x = \frac{f}{g}\cos\varphi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin\varphi$, то функция $\frac{dQ}{dx}$ перейдёт в $\mathfrak{Q} \pm \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{-1}}$. Следовательно, функция S перейдёт в

$$\frac{\mathfrak{Q} \pm \mathfrak{q}\sqrt{-1}}{\pm 2fg\sin\varphi : \sqrt{-1}}.$$

Так как $S = \mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$, то, если вместо x положить то же значение, будем иметь

$$\mathfrak{Q} \pm \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{-1}} = \pm \frac{2fg\mathfrak{S}}{\sqrt{-1}}\sin\varphi - 2fg\mathfrak{s}\sin\varphi.$$

Следовательно, будем иметь

$$\mathfrak{s} = \frac{-\mathfrak{Q}}{2fg\sin\varphi} \quad \text{и} \quad \mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{q}}{2fg\sin\varphi}.$$

Подставив эти значения, получим

$$\mathfrak{a} = \frac{2g^2(\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}$$

и

$$\mathfrak{A} = \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\sin\varphi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2} - \frac{2fg(\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})\cos\varphi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}.$$

416. Таким образом, мы получаем удобный способ для определения простейшей дроби для какого-либо множителя второй степени; так как в этом способе при вычислении сохраняется знаменатель, то мы избегаем деления, с помощью которого нужно было бы определять значение буквы S и которое часто представляет немалые трудности. Итак, если знаменатель Q дроби $\frac{P}{Q}$ имеет множитель $f^2-2fgx\cos\varphi+ +g^2x^2$, то простейшая дробь, происходящая от этого множителя, мы полагаем её равной

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}x}{f^2 - 2fgx\cos\varphi + g^2x^2},$$

определится следующим образом. Положим $x = \frac{f}{g}\cos\varphi$ и вместо каждой степени x^n переменного x напишем $\frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi$. Пусть при этом P перейдёт в $\mathfrak{P}$, а функция $\frac{dQ}{dx}$ в $\mathfrak{Q}$. Затем полагаем там же $x = \frac{f}{g}\sin\varphi$; тогда для какой-либо степени будем иметь $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin n\varphi$, и P перейдёт в $\mathfrak{p}$, а $\frac{dQ}{dx}$ в $\mathfrak{q}$. Когда, таким образом, найдены значения букв $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$, количества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{a}$ определятся следующим образом:

$$\mathfrak{A} = \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\sin\varphi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2} - \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})\cos\varphi}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2},$$

$$\mathfrak{a} = \frac{2g^2(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2}.$$

Таким образом, дробь, происходящая от множителя $f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2$ знаменателя Q, будет

$$\frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\sin\varphi + 2g(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})(gx - f\cos\varphi)}{(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)(f^2 - 2fgx\cos\varphi + g^2x^2)}$$

Пример 1

Пусть предложена дробь $\frac{x^m}{a+bx^n}$, знаменатель которой $a+bx^n$ имеет множитель $f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2$. Найти простейшую дробь, отвечающую этому множителю.

Так как здесь $P=x^m$ и $Q=a+bx^n$, то

$$\frac{dQ}{dx} = nbx^{n-1},$$

откуда

$$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos m\varphi, \quad \mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m}\sin m\varphi,$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\cos(n-1)\varphi, \quad \mathfrak{q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\sin(n-1)\varphi.$$

Из этих уравнений

$$\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2=\frac{n^2b^2f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}},$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}=\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(n-m-1)\varphi$$

и

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(n-m-1)\varphi.$$

Поэтому искомая простейшая дробь есть

$$\frac{2g^{n-m}(f\sin\varphi\cdot\sin(n-m-1)\varphi+gx\cos(n-m-1)\varphi-f\cos\varphi\cdot\cos(n-m-1)\varphi)}{nbf^{n-m-1}(f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2)}$$

или

$$\frac{2g^{n-m}(gx\cos(n-m-1)\varphi-f\cos(n-m)\varphi)}{nbf^{n-m-1}(f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2)}.$$

Пример 2

Пусть предложена дробь $\frac{1}{x^m(a+bx^n)}$, *знаменатель которой пусть имеет множитель* $f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2$; *найти простейшую дробь, происходящую от него.*

Так как $P=1$ и $Q=ax^m+bx^{m+n}$, то

$$\frac{dQ}{dx}=max^{m-1}+(m+n)bx^{m+n-1},$$

так что, положив $x^n=\frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi$, мы, поскольку $P=x^0$, будем иметь $\mathfrak{P}=1$ и

$$\mathfrak{Q}=\frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\cos(m-1)\varphi+\frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(m+n-1)\varphi,$$

а положив $x^n=\frac{f^n}{g^n}\sin n\varphi$, будем иметь $\mathfrak{p}=0$ и

$$\mathfrak{q}=\frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\varphi+\frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(m+n-1)\varphi.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2=\frac{m^2a^2f^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}}+\frac{2m(m+n)abf^{2m+n-2}}{g^{2m+n-2}}\cos n\varphi+\frac{(m+n)^2b^2f^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}}.$$

Поскольку $f^2-2fgx\cos x+g^2x^2$ есть делитель выражения $a+bx^n$, будем иметь

$$a+\frac{bf^n}{g^n}\cos n\varphi=0 \quad\text{и}\quad \frac{bf^n}{g^n}\sin n\varphi=0,\quad\text{откуда}\quad a^2=\frac{b^2f^{2n}}{g^{2n}}.$$

Следовательно, будем иметь

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}=\frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\varphi+\frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(m+n-1)\varphi=$$
$$=\frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}((m+n)\sin(m+n-1)\varphi-m\cos n\varphi\cdot\sin(m-1)\varphi)=$$
$$=\frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}(n\cos n\varphi\cdot\sin(m-1)\varphi+(m+n)\sin n\varphi\cdot\cos(m-1)\varphi)$$

и

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\left((m+n)\cos(m+n-1)\varphi - m\cos n\varphi\cdot\cos(m-1)\varphi\right).$$

Или так как $f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2$ есть также делитель выражения $ax^{m-1}+bx^{m+n-1}$, то будем иметь

$$\frac{af^{m-1}}{g^{m-1}}\cos(m-1)\varphi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(m+n-1)\varphi = 0$$

и

$$\frac{af^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\varphi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(m+n-1)\varphi = 0,$$

откуда

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(m+n-1)\varphi \text{ и } \mathfrak{q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(m+n-1)\varphi$$

или

$$\mathfrak{Q} = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}}\cos(m-1)\varphi \text{ и } \mathfrak{q} = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin(m-1)\varphi.$$

Из этих значений получаем искомую дробь

$$\frac{2g^m(f\cos m\varphi - gx\cos(m-1)\varphi)}{naf^{m-1}(f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2)}.$$

Эта формула вытекает из первого примера, если положить m отрицательным; тогда не было бы необходимости рассматривать данный случай особо.

Пример 3

Пусть знаменатель дроби $\frac{x^m}{a+bx^n+cx^{2n}}$ *имеет множитель*

$$f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2;$$

найти простейшую дробь, происходящую от этого множителя.

Если $f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2$ есть множитель знаменателя $a+bx^n+cx^{2n}$, то, как было показано выше,

$$a+\frac{bf^n}{g^n}\cos n\varphi+\frac{cf^{2n}}{g^{2n}}\cos 2n\varphi=0 \text{ и } \frac{bf^n}{g^n}\sin n\varphi+\frac{cf^{2n}}{g^{2n}}\sin 2n\varphi=0.$$

Итак, $P=x^m$ и $Q=a+bx^n+cx^{2n}$; будем иметь

$$\frac{dQ}{dx}=nbx^{n-1}+2ncx^{2n-1},$$

откуда находим:

$$\mathfrak{P}=\frac{f^m}{g^m}\cos m\varphi \quad\text{и}\quad \mathfrak{p}=\frac{f^m}{g^m}\sin m\varphi,$$

$$\mathfrak{Q}=\frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\cos(n-1)\varphi+\frac{2ncf^{2n-1}}{g^{2n-1}}\cos(2n-1)\varphi,$$

$$\mathfrak{q}=\frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\sin(n-1)\varphi+\frac{2ncf^{2n-1}}{g^{2n-1}}\sin(2n-1)\varphi.$$

Поэтому будем иметь

$$\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2=\frac{n^2f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}}\left(b^2+\frac{4bcf^n}{g^n}\cos n\varphi+\frac{4c^2f^{2n}}{g^{2n}}\right).$$

Но из двух первых уравнений имеем

$$\frac{f^{2n}}{g^{2n}}\left(b^2+\frac{2bcf^n}{g^n}\cos n\varphi+\frac{c^2f^{2n}}{g^{2n}}\right)=a^2,$$

так что

$$\frac{4bcf^n}{g^n}\cos n\varphi=\frac{2g^{2n}a^2}{f^{2n}}-2b^2-\frac{2c^2f^{2n}}{g^{2n}}.$$

Подставив это значение, будем иметь

$$\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2=\frac{n^2f^{2n-2}}{g^{2n-2}}\left(\frac{2a^2g^{2n}}{f^{2n}}-b^2+\frac{2c^2\,{}^{2n}}{g^{2n}}\right)$$

или

$$\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2=\frac{n^2(2a^2g^{4n}-b^2\,{}^{2n}g^{2n}+2c^2\,{}^{4n})}{f^2g^{4n-2}}.$$

Далее, будем иметь

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q}=\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin(n-m-1)\varphi+\frac{2ncf^{m+2n-1}}{g^{m+2n-1}}\sin(2n-m-1)\varphi,$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}=\frac{nb\;{}^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos(n-m-1)\varphi+\frac{2ncf^{m+2n-1}}{g^{m+2n-1}}\cos(2n-m-1)\varphi.$$

После того как эти значения найдены, мы получаем искомую простейшую дробь

$$\frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{q}-\mathfrak{p}\mathfrak{Q})\sin\varphi+2f(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}+\mathfrak{p}\mathfrak{q})(gx-f\cos\varphi)}{(\mathfrak{Q}^2+\mathfrak{q}^2)(f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2)}.$$

417. Эти дроби выразятся проще, если мы определим множители знаменателя. Итак, пусть знаменатель предложенной дроби есть

$$a+bx^n.$$

Если представить его трёхчленный множитель в виде

$$f^2-2fgx\cos\varphi+g^2x^2,$$

то, как показано во «Введении», мы будем иметь

$$a+\frac{bf^n}{g^n}\cos n\varphi=0 \quad \text{и} \quad \frac{bf^n}{g^n}\sin n\varphi=0;$$

так как $\sin n\varphi=0$, то будем иметь либо $n\varphi=(2k-1)\pi$, либо $n\varphi=2k\pi$. В первом случае $\cos n\varphi=-1$, во втором случае $\cos n\varphi=1$. Если a и b суть положительные количества, то имеет место первый случай, когда $a=\frac{bf^n}{g^n}$. Поэтому

$$f=a^{\frac{1}{n}} \quad \text{и} \quad g=b^{\frac{1}{n}}.$$

Удержим вместо этих иррациональных количеств буквы f и g или, лучше сказать, положим $a=f^n$ и $b=g^n$, так что нужно определить множители функции

$$f^n+g^nx^n.$$

Итак, мы имеем $\varphi=\frac{(2k-1)\pi}{n}$, где k может обозначать любое целое положительное число; но за k нет необходимости принимать числа, большие тех, которые дают выражение меньшим единицы. Таким образом, множители предложенного выражения $f^n + g^n x^n$ будут следующие:

$$f^2-2fgx\cos\frac{\pi}{n}+g^2x^2,$$
$$f^2-2fgx\cos\frac{3\pi}{n}+g^2x^2,$$
$$f^2-2fgx\cos\frac{5\pi}{n}+g^2x^2$$

и т. д.,

причём нужно заметить, что если n есть нечётное число, то будет ещё один двучленный множитель

$$f+gx,$$

если же n есть число чётное, то не будет ни одного двучленного множителя.

Пример 1

Разложить дробь $\frac{x^m}{f^n+g^nx^n}$ *на её простейшие дроби.*

Так как все трёхчленные множители знаменателя содержатся в выражении

$$f^2-2fgx\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+g^2x^2,$$

то в примере 1 предыдущего параграфа нужно положить $a=f^n$; $b=g^n$ и $\varphi=\frac{(2k-1)\pi}{n}$, откуда будем иметь

$$\sin(n-m-1)\varphi=\sin(m+1)\varphi=\sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}$$

и

$$\cos(n-m-1)\varphi=-\cos(m+1)\varphi=-\cos\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}.$$

Таким образом, от этого множителя произойдёт дробь

$$\frac{2f\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\cdot\sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}-2\cos\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(f^2-2fgx\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}+g^2x^2\right)}.$$

Поэтому предложенная дробь разложится на следующие простейшие дроби:

$$\frac{2f\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(f^2-2fgx\cos\frac{\pi}{n}+g^2x^2\right)}+$$
$$+\frac{2f\sin\frac{3\pi}{n}\sin\frac{3(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{3(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{3\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(f^2-2fgx\cos\frac{3\pi}{n}+g^2x^2\right)}+$$
$$+\frac{2f\sin\frac{5\pi}{n}\sin\frac{5(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{5(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{5\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(f^2-2fgx\cos\frac{5\pi}{n}+g^2x^2\right)}$$

и т. д.

Если n есть число чётное, то мы получим, таким образом, все простейшие дроби, если же n есть число нечётное, то вследствие наличия двучленного множителя $f+gx$ к дробям, полученным этим способом, нужно, сверх того, добавить ещё дробь

$$\frac{+1}{nf^{n-m-1}g^m(f+gx)},$$

где знак $+$ берётся в том случае, когда m есть число чётное; в противном случае берётся знак $-$. Если m было бы числом, большим чем n, то к этим дробям присоединилась бы ещё целая часть вида

$$Ax^{m-n}+Bx^{m-2n}+Cx^{m-3n}+Dx^{m-4n}+ \text{ и т. д.},$$

до тех пор пока показатели остаются целыми. При этом будем иметь:

$$Ag^n=1, \quad \text{следовательно,} \quad A=\frac{1}{g^n},$$

$$Af^n+Bg^n=0, \qquad B=-\frac{f^n}{g^{2n}},$$

$$Bf^n+Cg^n=0, \qquad C=+\frac{f^{2n}}{g^{3n}},$$

$$Cf^n+Dg^n=0 \qquad D=-\frac{f^{3n}}{g^{4n}}$$

$$\text{и т. д.,} \qquad \text{и т. д.}$$

Пример 2

Разложить дробь $\dfrac{1}{x^m(f^n+g^nx^n)}$ *на её простейшие дроби.*

Что касается множителей выражения $f^n+g^nx^n$, то от них происходят те же дроби, которые мы получили в предыдущем примере; остаётся только определить те дроби, которые происходят от другого множителя x^m знаменателя. Удобнее всего сделать это следующим образом. Положим предложенную дробь равной

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m}+\frac{\mathfrak{R}x^{n-m}}{f^n+g^nx^n};$$

тогда будем иметь

$$\mathfrak{A}f^n=1, \quad \text{следовательно,} \quad \mathfrak{A}=\frac{1}{f^n},$$

$$\mathfrak{A}g^n+\mathfrak{R}=0, \qquad \mathfrak{R}=-\frac{g^n}{f^n}.$$

Если $n-m$ будет ещё оставаться отрицательным числом, то нужно будет поступить подобным же образом. Таким образом, сколь бы ни было велико m, мы получим следующий ряд простейших дробей:

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m}+\frac{B}{x^{m-n}}+\frac{\mathfrak{C}}{x^{m-2n}}+\frac{\mathfrak{D}}{x^{m-3n}}+ \text{ и т. д.},$$

в котором нужно взять столько членов, чтобы знаменатели оставались положительными. Итак, будем иметь:

$$\mathfrak{A}f^n = 1, \quad \text{следовательно,} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n},$$

$$\mathfrak{A}g^n + \mathfrak{B}f^n = 0, \qquad \mathfrak{B} = -\frac{g^n}{f^{2n}},$$

$$\mathfrak{B}g^n + \mathfrak{C}f^n = 0, \qquad \mathfrak{C} = +\frac{g^{2n}}{f^{3n}},$$

$$\mathfrak{C}g^n + \mathfrak{D}f^n = 0 \qquad \mathfrak{D} = -\frac{g^{3n}}{f^{4n}}$$

и т. д., и т. д.

Следовательно, всё разложение предложенной дроби на простейшие будет таким:

$$\frac{1}{f^n x^m} - \frac{g^n}{f^{2n} x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n} x^{m-2n}} - \frac{g^{3n}}{f^{4n} x^{m-3n}} + \text{и т. д.}$$

$$- \frac{2fg^m \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{(m-1)\pi}{n} + 2g^m \cos\frac{(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(f^2 - 2fgx\cos\frac{\pi}{n} + g^2x^2\right)}$$

$$- \frac{2fg^m \sin\frac{3\pi}{n} \cdot \sin\frac{3(m-1)\pi}{n} + 2g^m \cos\frac{3(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{3\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(f^2 - 2fgx\cos\frac{3\pi}{n} + g^2x^2\right)}$$

$$- \frac{2fg^m \sin\frac{5\pi}{n} \cdot \sin\frac{5(m-1)\pi}{n} + 2g^m \cos\frac{5(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{5\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(f^2 - 2fgx\cos\frac{5\pi}{n} + g^2x^2\right)}$$

и т. д.

Если n будет нечётным числом, то к этому выражению ввиду наличия в знаменателе множителя $f+gx$ нужно будет ещё добавить дробь

$$\frac{\pm g^m}{nf^{n+m-1}(f+gx)},$$

где верхний знак нужно взять, если m есть число чётное, а нижний — если m есть число нечётное.

418. Рассмотрим теперь выражение $a+bx^m$, в котором b есть число отрицательное. Таким образом, пусть предложена функция

$$f^n - g^n x^n.$$

Первый её множитель всегда есть $f-gx$, а если n есть чётное число, то также и $f+gx$ будет её множителем. Остальные же множители будут трёхчленными. Если общий их вид есть

$$f^2 - 2fgx\cos\varphi + g^2x^2,$$

то будем иметь

$$f^n - f^n\cos n\varphi = 0 \quad \text{и} \quad f^n \sin n\varphi = 0$$

или

$$\sin n\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \cos n\varphi = 1.$$

Чтобы эти уравнения удовлетворялись, должно быть $n\varphi=2k\pi$, где n есть некоторое целое число; поэтому будем иметь $\varphi=\frac{2k\pi}{n}$. Следовательно, общий вид множителя будет

$$f^2-2fg\cos\frac{2k\pi}{n}+g^2x^2.$$

Если брать вместо $2k$ все чётные числа, меньшие чем показатель n, получим все трёхчленные множители

$$f^2-2fgx\cos\frac{2\pi}{n}+g^2x^2,$$

$$f^2-2fgx\cos\frac{4\pi}{n}+g^2x^2,$$

$$f^2-2fgx\cos\frac{6\pi}{n}+g^2x^2$$

и т. д.

Пример 1

Разложить дробь $\frac{x^m}{f^n-g^nx^n}$ *на её простейшие дроби.*

Так как знаменатель имеет множитель $f-gx$, то от него произойдёт дробь вида $\frac{\mathfrak{A}}{f-gx}$. Чтобы определить её числитель, положим $x^m=P$ и $f^n-g^nx^n=Q$; тогда

$$dQ=-ng^nx^{n-1}\,dx,$$

и мы будем иметь

$$\mathfrak{A}=\frac{-gx^m}{-ng^nx^{n-1}}=\frac{x^m}{ng^{n-1}x^{n-1}},$$

где нужно положить $x=\frac{f}{g}$. Таким образом, $\mathfrak{A}=\frac{1}{nf^{n-m-1}g^m}$, и происходящая от множителя $f-gx$ дробь будет

$$\frac{1}{nf^{n-m-1}g^m(f-gx)}.$$

Если n есть чётное число, то, так как тогда знаменатель имеет ещё множитель $f+gx$, положим, что происходящая от него дробь равна $\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$. Тогда будем иметь

$$\mathfrak{A}=\frac{-gx^m}{ng^nx^{n-1}}=\frac{-x^m}{ng^{n-1}x^{n-1}},$$

где нужно положить $x=-\frac{f}{g}$. Так как $n-1$ есть число нечётное, то $g^{n-1}x^{n-1}=-f^{n-1}$; но $x^m=\frac{\pm f^m}{g^m}$, где верхний знак берётся, если m есть чётное число, а нижний,— если m есть число нечётное. Поэтому $\mathfrak{A}=\frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}g^m}$, а простейшая дробь от множителя $f+gx$ будет

$$\frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}g^m(f+gx)}.$$

Далее, так как общий вид трёхчленных множителей есть

$$f^2-2fgx\cos\frac{2k\pi}{n}+g^2x^2,$$

то, произведя сравнение с примером 1 § 416, будем иметь $a=f^n$, $b=-g^n$ и $\varphi=\frac{2k\pi}{n}$, откуда

$$\sin n\varphi=0,\quad \cos n\varphi=1,$$

$$\sin(n-m-1)\varphi=-\sin(m+1)\varphi=-\sin\frac{2k(m+1)\pi}{n}$$

и

$$\cos(n-m-1)\varphi=\cos(m+1)\varphi=\cos\frac{2k(m+1)\pi}{n}.$$

Следовательно, простейшая дробь, происходящая отсюда, будет

$$\frac{2f\sin\frac{2k\pi}{n}\cdot\sin\frac{2k(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{2k(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(f^2\cdot 2fgx\cos\frac{2k\pi}{n}+g^2x^2\right)}.$$

Поэтому искомые простейшие дроби будут:

$$\frac{1}{nf^{n-m-1}g^m(f-gx)}+\frac{2f\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{2(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{2(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{2\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(f^2-2fgx\cos\frac{2\pi}{n}+g^2x^2\right)}$$

$$+\frac{2f\sin\frac{4\pi}{n}\cdot\sin\frac{4(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{4(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{4\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(f^2-2fgx\cos\frac{4\pi}{n}+g^2x^2\right)}$$

$$+\frac{2f\sin\frac{6\pi}{n}\cdot\sin\frac{6(m+1)\pi}{n}-2\cos\frac{6(m+1)\pi}{n}\left(gx-f\cos\frac{6\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(f^2-2fgx\cos\frac{6\pi}{n}+g^2x^2\right)}$$

и т. д.

К ним, если n будет числом чётным, нужно, сверх того, добавить дробь

$$\frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}g^m(f+gx)},$$

при которой верхний знак — нужно взять, если m есть число чётное, а нижний $+$, если оно нечётное. Кроме того, если m есть число, не меньшее чем n, нужно добавить целую часть

$$Ax^{m-n}+Bx^{m-2n}+Cx^{m-3n}+Dx^{m-4n}+\text{ и т. д.},$$

пока показатели не станут отрицательными, причём мы будем иметь:

$$\begin{array}{ll} -Ag^n=1, \quad\text{или} & A=-\frac{1}{g^n}, \\ Af^n-Bg^n=0, & B=-\frac{f^n}{g^{2n}}, \\ Bf^n-Cg^n=0, & C=-\frac{f^{2n}}{g^{3n}}, \\ Cf^n-Dg^n=0 & D=-\frac{f^{3n}}{g^{4n}} \\ \text{и т. д.} & \text{и т. д.} \end{array}$$

Пример 2

Разложить дробь $\frac{1}{x^m(f^n - g^n x^n)}$ *на её простейшие дроби.*

Дроби, которые происходят от множителя $f^n - g^n x^n$, будут те же, что раньше, только в прежних формулах нужно взять m отрицательным. Поэтому обратимся к другому множителю x^m. Если положим, что от него происходят дроби

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{B}}{x^{m-n}} + \frac{\mathfrak{C}}{x^{m-2n}} + \frac{\mathfrak{D}}{x^{m-3n}} + \text{ и т. д.},$$

ряд которых нужно продолжать до тех пор, пока показатели степени количества x не станут отрицательными, то будем иметь:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}f^n = 1, \quad \text{следовательно,} && \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n},\\
&\mathfrak{B}f^n - \mathfrak{A}g^n = 0, && \mathfrak{B} = \frac{g^n}{f^{2n}},\\
&\mathfrak{C}f^n - \mathfrak{B}g^n = 0, && \mathfrak{C} = \frac{g^{2n}}{f^{3n}},\\
&\mathfrak{D}f^n - \mathfrak{C}g^n = 0 && \mathfrak{D} = \frac{g^{3n}}{f^{4n}}\\
&\text{и т. д.,} && \text{и т. д.}
\end{aligned}$$

Следовательно, предложенная дробь разложится на следующие простейшие дроби:

$$\frac{1}{f^n x^m} + \frac{g^n}{f^{2n}x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n}x^{m-2n}} + \frac{g^{3n}}{f^{4n}x^{m-3n}} + \text{ и т. д.}$$

$$+ \frac{g^m}{nf^{n+m-1}(f-gx)} -$$

$$- \frac{2fg^m \sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{2(m-1)\pi}{n} + 2g^m\cos\frac{2(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{2\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(f^2 - 2fgx\cos\frac{2\pi}{n} + g^2x^2\right)}$$

$$- \frac{2fg^m\cdot\sin\frac{4\pi}{n}\cdot\sin\frac{4(m-1)\pi}{n} + 2g^m\cos\frac{4(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{4\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(f^2 - 2fgx\cos\frac{4\pi}{n} + g^2x^2\right)}$$

$$- \frac{2fg^m\cdot\sin\frac{6\pi}{n}\cdot\sin\frac{6(m-1)\pi}{n} + 2g^m\cos\frac{6(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos\frac{6\pi}{n}\right)}{nf^{n+m-1}\left(f^2 - 2fgx\cos\frac{6\pi}{n} + g^2x^2\right)},$$

и т. д.,

к которым, если n есть число чётное, нужно, сверх того, добавить дробь

$$\frac{\mp g^m}{nf^{n+m-1}(f+gx)};$$

её не будет, если n будет нечётным числом. Верхний знак — берётся, если m есть чётное число, а нижний +, если m есть число нечётное.

419. Таким способом можно разложить на простейшие и все те дроби, знаменатели которых состоят из двух множителей вида $a+bx^n$. Если же знаменатель будет содержать трёхчлен $a+bx^n+cx^{2n}$, то сначала нужно посмотреть, можно ли его разложить на два действительных множителя предыдущего вида. Если это оказывается возможным, то разложение на простейшие дроби можно производить по изложенному выше способу. Действительно, пусть предложена дробь

$$\frac{x^m}{(f^n+g^nx^n)(f^n+h^nx^n)}.$$

Разложим её прежде всего на две дроби вида

$$\frac{\alpha x^m}{f^n+g^nx^n}+\frac{\beta x^m}{f^n+h^nx^n},$$

тогда будем иметь

$$\alpha f^n+\beta f^n=1 \quad \text{и} \quad \alpha h^n+\beta g^n=0,$$

откуда

$$\alpha=\frac{1}{f^n}-\beta=-\frac{\beta g^n}{h^n},$$

так что получим

$$\beta=\frac{h^n}{f^n(h^n-g^n)} \quad \text{и} \quad \alpha=\frac{g^n}{f^n(g^n-h^n)}.$$

Если показатель m будет больше чем n, то будет более удобным преобразовать данную дробь в следующие:

$$\frac{\alpha x^{m-n}}{f^n+g^nx^n}+\frac{\beta x^{m-n}}{f^n+h^nx^n},$$

при этом

$$\alpha+\beta=0 \quad \text{и} \quad \alpha h^n+\beta g^n=1,$$

так что

$$\alpha=\frac{1}{h^n-g^n} \quad \text{и} \quad \beta=\frac{1}{g^n-h^n}.$$

Какое бы из двух этих преобразований мы ни применили, обе полученные таким образом дроби разложатся по вышеизложенному методу на свои простейшие дроби, которые, взятые все вместе, будут равны предложенной дроби.

420. Точно так же изложенный выше метод будет достаточным в том случае, когда знаменатель будет состоять из нескольких членов, имея вид

$$a+bx^n+cx^{2n}+dx^{3n}+ex^{4n}+ \text{ и т. д.},$$

если его можно разложить на множители вида $f^n \pm g^nx^n$. В самом деле, положим, что нужно разложить на простейшие дроби следующую дробь:

$$\frac{x^m}{(a-x^n)(b-x^n)(c-x^n)(d-x^n) \text{ и т. д.}}.$$

Сначала разложим её на дроби

$$\frac{Ax^m}{a-x^n}+\frac{Bx^m}{b-x^n}+\frac{Cx^m}{c-x^n}+\frac{D}{d-x^n}+ \text{ и т. д.};$$

числители их определятся следующим образом:

$$A = \frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a) \text{ и т. д.}},$$

$$B = \frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b) \text{ и т. д.}},$$

$$C = \frac{1}{(a-c)(b-c)(d-c) \text{ и т. д.}}.$$

После этого подготовительного преобразования каждая из дробей разложится по вышеизложенному способу на её простейшие дроби и все они должны быть собраны в единую сумму.

421. Если же не все множители знаменателя

$$a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} + \text{ и т. д.}$$

будут действительными, то нужно будет попарно объединить мнимые множители. Положим, что произведение двух таких множителей есть

$$f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos\omega + g^{2n} x^{2n}.$$

Так как это выражение не имеет никаких действительных простых корней, то мы можем положить, что трёхчленные множители имеют общий вид

$$f^2 - 2fgx\cos\varphi + g^2x^2.$$

Число таких множителей будет равно n. Положив $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos\varphi$, получим уравнение

$$1 - 2\cos\omega\cdot\cos n\varphi + \cos 2n\varphi = 0.$$

Положим затем $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin n\varphi$; тогда получим ещё уравнение

$$-2\cos\omega\cdot\sin n\varphi + \sin 2n\varphi = 0,$$

которое, будучи разделено на $\sin n\varphi$, даёт $\cos n\varphi = \cos\omega$, так что одновременно удовлетворяет и первому уравнению. Итак, будем иметь $n\varphi = 2k\pi \pm \omega$, где k есть какое-либо целое число; поэтому будем иметь $\varphi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$, и все множители будут иметь вид

$$f^2 - 2fgx\cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + g^2x^2,$$

так что мы будем иметь следующие множители:

$$f^2 - 2fgx\cos\frac{\omega}{n} + g^2x^2,$$

$$f^2 - 2fgx\cos\frac{2\pi - \omega}{n} + g^2x^2,$$

$$f^2 - 2fgx\cos\frac{2\pi + \omega}{n} + g^2x^2,$$

$$f^2 - 2fgx\cos\frac{4\pi - \omega}{n} + g^2x^2,$$

$$f^2 - 2fgx\cos\frac{4\pi + \omega}{n} + g^2x^2$$

и т. д.

Их нужно брать до тех пор, пока число их не станет равным n.

422. Итак, пусть требуется разложить дробь

$$\frac{x^{m-1}}{f^{2n}-2f^n g^n x^n \cos\omega + g^{2n}x^{2n}}$$

на её простейшие дроби.

Так как каждый трёхчленный множитель знаменателя имеет вид

$$f^2 - 2fgx\cos\varphi + g^2x^2,$$

где $\varphi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$, то рассмотрим дробь

$$\frac{x^m}{f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1}\cos\omega + g^{2n}x^{2n+1}},$$

равную ей, и положим, что числитель $x^m = P$, а знаменатель

$$f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1}\cos\omega + g^{2n}x^{2n+1} = Q.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{dQ}{dx} = f^{2n} - 2(n+1)f^n g^n x^n \cos\omega + (2n+1)g^{2n}x^{2n}.$$

Полагая

$$x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos n\varphi,$$

будем иметь

$$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos m\varphi \quad \text{или} \quad \mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos\frac{m(2k\pi \pm \omega)}{n}$$

и

$$\mathfrak{Q} = f^{2n}(1 - 2(n+1)\cos\omega \cdot \cos n\varphi + (2n+1)\cos 2n\varphi).$$

Но так как $\cos n\varphi = \cos\omega$, то

$$\cos 2n\varphi = 2\cos^2\omega - 1,$$

так что

$$\mathfrak{Q} = f^{2n}(-2n + 2n\cos^2\omega) = -2nf^{2n}\sin^2\omega.$$

Положим, далее,

$$x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin n\varphi;$$

тогда получим

$$\mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m}\sin m\varphi = \frac{f^m}{g^m}\sin\frac{m(2k\pi \pm \omega)}{n}$$

и

$$\mathfrak{q} = -f^{2n}(2(n+1)\cos\omega \cdot \sin n\varphi - (2n+1)\sin 2n\varphi).$$

Так как

$$\sin 2n\varphi = 2\sin n\varphi \cdot \cos n\varphi = 2\cos\omega \cdot \sin n\varphi,$$

то будем иметь

$$\mathfrak{q} = 2nf^{2n}\cos\omega \cdot \sin n\varphi.$$

Но так как $n\varphi = 2k\pi \pm \omega$, то $\sin n\varphi = \pm\sin\omega$ и

$$\mathfrak{q} = \pm 2nf^{2n}\sin\omega \cdot \cos\omega.$$

Найдя это, будем иметь:

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = 4n^2f^{4n}\sin^2\omega,$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m}(\pm\cos m\varphi \cdot \sin\omega \cdot \cos\omega + \sin m\varphi \cdot \sin^2\omega),$$

или

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \pm \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} \sin\omega \cdot \cos(m\varphi \mp \omega),$$

или

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \pm \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} \sin\omega \cdot \cos\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n},$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m}(-\cos m\varphi \cdot \sin^2\omega \pm \sin m\varphi \cdot \cos\omega \cdot \sin\omega),$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \pm \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} \sin\omega \cdot \sin(m\varphi \mp \omega),$$

или

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \pm \frac{2nf^{m+2n}}{g^m} \sin\omega \cdot \sin\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}.$$

Следовательно, от содержащегося в знаменателе множителя

$$f^2 - 2fgx\cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + g^2x^2$$

произойдёт такая простейшая дробь:

$$\frac{\pm f\sin\frac{2k\pi \pm \omega}{n} \cdot \cos\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n} \pm \sin\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(f^2 - 2fgx\cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + g^2x^2\right)}$$

или

$$\frac{\pm gx\sin\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n} \pm f\sin\frac{2k(m-1)\pi \pm (m-n-1)\omega}{n}}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(f^2 - 2fgx\cos\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + g^2x^2\right)}.$$

Пример

Разложить дробь $\frac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2f^ng^nx^n\cos\omega + g^{2n}x^{2n}}$ *на её простейшие дроби.*

Искомые простейшие дроби суть:

$$\frac{f\sin\frac{\omega}{n} \cdot \cos\frac{(m-n)\omega}{n} + \sin\frac{(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos\frac{\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(f^2 - 2fgx\cos\frac{\omega}{n} + g^2x^2\right)}$$

$$-\frac{f\sin\frac{2\pi-\omega}{n} \cdot \cos\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n} + \sin\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos\frac{2\pi-\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(f^2 - 2fgx\cos\frac{2\pi-\omega}{n} + g^2x^2\right)}$$

$$+\frac{f\sin\frac{2\pi+\omega}{n} \cdot \cos\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n} + \sin\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos\frac{2\pi+\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(f^2 - 2fgx\cos\frac{2\pi+\omega}{n} + g^2x^2\right)}$$

$$-\frac{f\sin\dfrac{4\pi-\omega}{n}\cdot\cos\dfrac{4m\pi-(m-n)\omega}{n}+\sin\dfrac{4m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\dfrac{4\pi-\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(f^2-2fgx\cos\dfrac{4\pi-\omega}{n}+g^2x^2\right)}$$

$$+\frac{f\sin\dfrac{4\pi+\omega}{n}\cdot\cos\dfrac{4m\pi+(m-n)\omega}{n}+\sin\dfrac{4m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx-f\cos\dfrac{4\pi+\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin\omega\left(f^2-2fgx\cos\dfrac{4\pi+\omega}{n}+g^2x^2\right)}$$

и т. д.

Ряд этих дробей нужно продолжать до тех пор, пока число их не станет равным n. Если m будет либо бо́льшим чем $2n-1$, либо отрицательным числом, то нужно будет, сверх того, добавить: в первом случае члены, составляющие целую часть, во втором же дроби, которые легко находятся по способу, изложенному выше.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
11	21 сверху	(180 мм)	(160 мм)
97	6 снизу	окисляется	раскисляется
111	1 снизу	20 г	10 г
111	7 снизу	pH 6=7	pH=7
140	19 снизу	1–3%	3%
151	14 сверху	полуторная	ординарная, полуторная
188	3 сверху	патогенных	непатогенных
234	7 сверху	края	кран
479	17 снизу	1 : 12 000	1 : 32 000
479	23 снизу	раствор	раствор NaCl 0,4%

Зак. 917.