Н.И.Гольдфарб

СБОРНИК ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

М.: Высш. школа, 1982.— 351 с.

Пособие представляет собой сборник вопросов и задач по всем разделам программы вступительных экзаменов в вузы с повышенными требованиями по физике.

В пособие включено много интересных и оригинальных вопросов и задач, которые предлагались в различных вузах технического и физического профилей.

4-е издание вышло в 1976 г.

Для слушателей подготовительных отделений втузов. Может быть полезно учащимся средних школ, лицам, готовящимся к конкурсным экзаменам, а также преподавателям физики.

Содержание

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее пособие представляет собой систематический сборник задач и вопросов по физике по всем разделам программы подготовительных отделений и вступительных экзаменов в вузы. Оно в основном предназначено для слушателей подготовительных отделений вузов, а также лиц, самостоятельно готовящихся к конкурсным экзаменам в вузы с повышенными требованиями по физике.

Достаточно широкий выбор задач позволяет учесть особенности требований и других институтов.

Сборник может быть использован в школах на факультативных занятиях и в физматшколах.

В сборник помещен ряд вопросов и задач, предлагавшихся на экзаменах в технических вузах и вузах физического профиля. Автор счел целесообразным включить некоторые задачи из задачников средней школы, а также ряд задач, методически интересных и доступных для учащихся, из сборников для высшей школы.

Большинство задач снабжено решениями или указаниями. Указаниям дано предпочтение – читатель, получив в указании разъяснение основной физической идеи задачи, сможет дальше развить решение, проявив уже бóльшую самостоятельность. Последнее очень важно: самостоятельное решение задач – наиболее активное проявление знаний и понимания физических явлений и законов, а умение решать задачи достигается упражнениями и размышлениями. Поэтому в данном издании увеличено количество задач, снабженных только ответами.

Работа над задачником должна идти параллельно с работой над курсом физики типа трехтомного «Элементарного учебника физики» под редакцией академика Г. С. Ландсберга или новых учебников физики для средней школы. Необходимые дополнительные теоретические сведения и соответствующие общие методы решения задач, которыми еще не в достаточной степени владеют учащиеся, даются непосредственно в решениях и указаниях, с которыми после предварительной самостоятельной работы познакомится читатель.

Решения и указания составлены так, чтобы дать возможность читателю разобраться в физической постановке вопроса и приобрести знания и навыки в применении наиболее общих и целесообразных методов в решении конкретных физических задач. Уделено достаточное внимание графическим приемам решения задач, а также записи решений в векторной форме и в проекциях на оси координат, направления которых наиболее удобны при решении данной задачи. Иногда дается два способа решения – второй способ дается в том случае, если он расширяет физическое осмысление задачи читателем. Например, в решении некоторых задач используется более удобная система отсчета, вводятся силы инерции, понятие центра массы, используется условие равновесия твердого тела.

Для облегчения пользования задачником табличные данные, необходимые для решения, как правило, приводятся в условиях задач. В условиях и решениях используется СИ.

В настоящее издание внесены некоторые исправления и дополнения.

В составлении настоящего сборника оказали помощь: Л. Г. Асламазов, Р. С. Варшавская, В. Н. Новиков и И. Ш. Слободецкий. Л. Ф. Корженевич принял участие в подготовке рукописи к изданию.

Автор воспользовался ценными замечаниями преподавателей МИФИ проф. И. В. Савельева, проф. И. Е. Иродова, доц. В. В. Светозарова и А. Н. Варгина, методиста-учителя Я. Ф. Лернера, ст. преп. МЭИС В. Л. Кагана и ряда читателей. Всем указанным лицам, а также кафедре физики МИЭМ (рецензент 2-го издания) автор приносит глубокую благодарность.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке сборника к печати были устранены замеченные в предыдущем издании неточности и опечатки; тексты задач и решений приведены в соответствие с современными требованиями школьных программ по физике.

Подготовка сборника к переизданию была проведена В. Н. Новиковым.

Редакция

I. Механика

1. КИНЕМАТИКА *

1.1. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно l, одновременно навстречу друг другу начали двигаться два тела: первое со скоростью v_1, второе – v_2. Определить, через сколько времени они встретятся и расстояние от точки A до места их встречи. Решить задачу также графически.

1.2. Через какое время и где встретились бы тела (см. задачу 1.1), если бы они двигались в одном и том же направлении $A \to B$, причем из точки B тело начало двигаться через t_0 секунд после начала движения его из точки A?

1.3. Моторная лодка проходит расстояние между двумя пунктами A и B по течению реки за время $t_1 = 3$ ч, а плот – за время $t = 12$ ч. Сколько времени t_2 затратит моторная лодка на обратный путь?

1.4. Эскалатор метро спускает идущего по нему вниз человека за 1 мин. Если человек будет идти вдвое быстрее, то он спустится за 45 с. Сколько времени спускается человек, стоящий на эскалаторе?

1.5. Человек бежит по эскалатору. В первый раз он насчитал $n_1 = 50$ ступенек, во второй раз, двигаясь в ту же сторону со скоростью втрое большей, он насчитал $n_2 = 75$ ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы на неподвижном эскалаторе?

1.6. Между двумя пунктами, расположенными на реке на расстоянии $s = 100$ км один от другого, курсирует катер, который, идя по течению, проходит это расстояние за время $t_1 = 4$ ч, а против течения,– за время $t_2 = 10$ ч. Определить скорость течения реки u и скорость катера v относительно воды.

1.7. Мимо пристани проходит плот. В этот момент в поселок, находящийся на расстоянии $s_1 = 15$ км от пристани, вниз по реке отправляется моторная лодка. Она дошла до поселка за время $t = 3/4$ ч и, повернув обратно, встретила плот на расстоянии $s_2 = 9$ км от поселка. Каковы скорость течения реки и скорость лодки относительно воды?

---

* Во всех задачах, в которых указана просто скорость, имеется в виду скорость относительно Земли.

1.8. Колонна войск во время похода движется со скоростью $v_1 = 5$ км/ч, растянувшись по дороге на расстояние $l = 400$ м. Командир, находящийся в хвосте колонны, посылает велосипедиста с поручением головному отряду. Велосипедист отправляется и едет со скоростью $v_2 = 25$ км/ч и, на ходу выполнив поручение, сразу же возвращается обратно с той же скоростью. Через сколько времени t после получения поручения он вернулся обратно?

1.9. Вагон шириной $d = 2{,}4$ м, движущийся со скоростью $v = 15$ м/с, был пробит пулей, летевшей перпендикулярно движению вагона. Смещение отверстий в стенках вагона относительно друг друга равно $l = 6$ см. Какова скорость движения пули?

1.10. Какова скорость капель v_2 отвесно падающего дождя, если шофер легкового автомобиля заметил, что капли дождя не оставляют следа на заднем стекле, наклоненном вперед под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, когда скорость автомобиля v_1 больше 30 км/ч?

1.11. На улице идет дождь. В каком случае ведро, стоящее в кузове грузового автомобиля, наполнится быстрее водой: когда автомобиль движется или когда он стоит?

1.12. С какой скоростью v и по какому курсу должен лететь самолет, чтобы за время $t = 2$ ч пролететь точно на Север путь $s = 300$ км, если во время полета дует северо-западный ветер под углом $\alpha = 30°$ к меридиану со скоростью $u = 27$ км/ч?

1.13. По гладкому горизонтальному столу движется со скоростью v черная доска. Какой формы след оставит на этой доске мел, брошенный горизонтально со скоростью u перпендикулярно направлению движения доски, если: а) трение между мелом и доской пренебрежимо мало; б) трение велико?

1.14. Корабль выходит из пункта A и идет со скоростью $\vec{v}$, составляющей угол α с линией AB (рис. 1). Под каким углом β к линии AB следовало бы выпустить из пункта B торпеду,

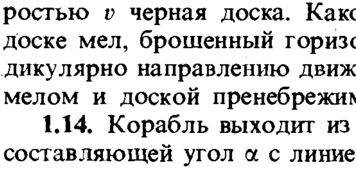


Рис. 1

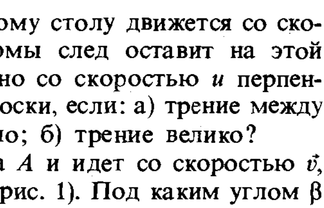


Рис. 2

чтобы она поразила корабль? Торпеду нужно выпустить в тот момент, когда корабль находился в пункте A. Скорость торпеды равна $\vec{u}$.

1.15. К ползуну, который может перемещаться по направляющей рейке (рис. 2), прикреплен шнур, продетый через кольцо. Шнур выбирают со скоростью v. С какой скоростью u движется ползун в момент, когда шнур составляет с направляющей угол α?

1.16. Рабочие, поднимающие груз (рис. 3), тянут канаты с одинаковой скоростью v. Какую скорость u имеет груз в тот момент, когда угол между канатами, к которым он прикреплен, равен 2α?

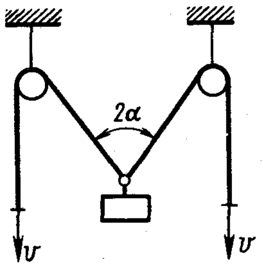


Рис. 3

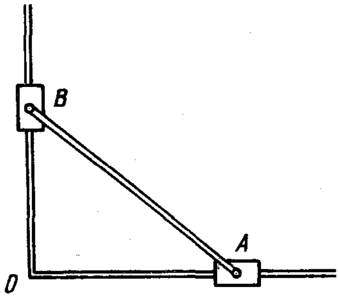


Рис. 4

1.17. Стержень длиной $l = 1$ м шарнирно соединен с муфтами A и B, которые перемещаются по двум взаимно перпендикулярным рейкам (рис. 4). Муфта A движется с постоянной скоростью $v_A = 30$ см/с. Найти скорость v_B муфты B в момент, когда угол $OAB = 60°$. Приняв за начало отсчета времени момент, когда муфта A находилась в точке O, определить расстояние OB и скорость муфты B в функции времени.

1.18. Танк движется со скоростью 72 км/ч. С какой скоростью движутся относительно Земли: а) верхняя часть гусеницы; б) нижняя часть гусеницы; в) точка гусеницы, которая в данный момент движется вертикально по отношению к танку?

1.19. 1. Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, вторую – со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найти среднюю скорость на всем пройденном пути.

2. Автомобиль проехал половину пути со скоростью $v_1 = 60$ км/ч, оставшуюся часть пути он половину времени шел со скоростью $v_2 = 15$ км/ч, а последний участок – со скоростью $v_3 = 45$ км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля на всем пути.

1.20. Поезд первую половину пути шел со скоростью в $n = 1{,}5$ раза большей, чем вторую половину пути. Средняя скорость поезда на всем пути $v_{ср} = 43{,}2$ км/ч. Каковы скорости поезда на первой (v_1) и второй (v_2) половинах пути?

1.21. Два шарика начали одновременно и с одинаковой скоростью двигаться по поверхностям, имеющим форму, изображенную на рис. 5. Как будут отличаться скорости и времена движения шариков к моменту их прибытия в точку B? Трением пренебречь.

1.22. Самолет летит из пункта A в пункт B и возвращается назад в пункт A. Скорость самолета в безветренную погоду равна v. Найти отношение средних скоростей всего перелета для двух случаев, когда во время перелета ветер дует: а) вдоль линии AB; б) перпендикулярно линии AB. Скорость ветра равна u.

1.23. Расстояние между двумя станциями $s = 3$ км поезд метро проходит со средней скоростью $v_{ср} = 54$ км/ч. При этом на разгон он затрачивает время $t_1 = 20$ с, затем идет равномерно некоторое время t_2 и на замедление до полной остановки тратит время $t_3 = 10$ с. Построить график скорости движения поезда и определить наибольшую скорость поезда $v_{макс}$.

1.24. От движущегося поезда отцепляют последний вагон. Поезд продолжает двигаться с той же скоростью v_0. Как будут относиться пути, пройденные поездом и вагоном к моменту остановки вагона? Считать, что вагон двигался равнозамедленно. Решить задачу также графически.

1.25. В момент, когда тронулся поезд, провожающий начал равномерно бежать по ходу поезда со скоростью $v_0 = 3{,}5$ м/с. Принимая движение поезда равноускоренным, определить скорость поезда v в тот момент, когда провожаемый поравняется с провожающим.

1.26. График зависимости скорости некоторого тела от времени изображен на рис. 6. Начертить графики зависимости

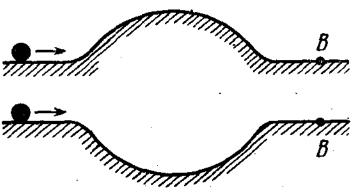


Рис. 5

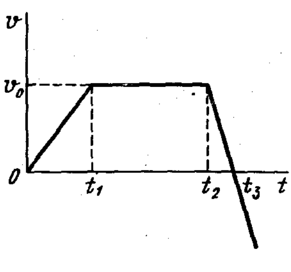


Рис. 6

ускорения и координаты тела, а также пройденного им пути от времени.

1.27. График зависимости ускорения тела от времени имеет форму, изображенную на рис. 7. Начертить графики зависимости скорости, смещения и пути, пройденного телом, от времени. Начальная скорость тела равна нулю (на участке разрыва ускорение равно нулю).

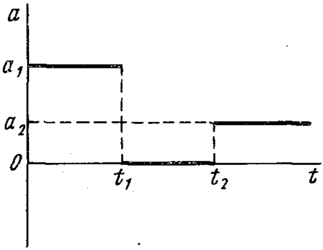


Рис. 7

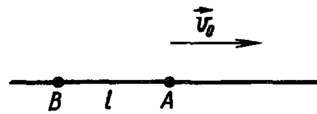


Рис. 8

1.28. Тело начинает двигаться из точки A со скоростью $\vec{v}_0$ и через некоторое время попадает в точку B (рис. 8). Какой путь прошло тело, если оно двигалось равноускоренно с ускорением, численно равным a? Расстояние между точками A и B равно l. Найти среднюю скорость тела.

1.29. На рис. 9 дан график зависимости координаты тела от времени. После момента $t = t_1$ кривая графика – парабола. Что за движение изображено на этом графике? Построить график зависимости скорости тела от времени.

1.30. На рис. 10 даны графики скоростей для двух точек, движущихся по одной прямой от одного и того же начального положения. Известны моменты времени t_1 и t_2. В какой момент времени t_3 точки встретятся? Построить графики движения.

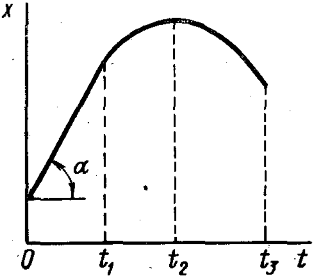


Рис. 9

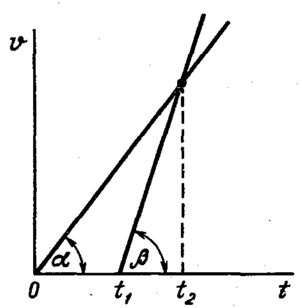


Рис. 10

1.31. За какую секунду от начала движения путь, пройденный телом в равноускоренном движении, втрое больше пути, пройденного в предыдущую секунду, если движение происходит без начальной скорости?

1.32. Вагонетка должна перевезти груз в кратчайший срок с одного места на другое, находящееся на расстоянии L. Она может ускорять или замедлять свое движение только с одинаковым по величине и постоянным ускорением a, переходя затем в равномерное движение или останавливаясь. Какой наибольшей скорости v должна достичь вагонетка, чтобы выполнить указанное выше требование?

1.33. Реактивный самолет летит со скоростью $v_0 = 720$ км/ч. С некоторого момента самолет движется с ускорением в течение $t = 10$ с и в последнюю секунду проходит путь $s = 295$ м. Определить ускорение a и конечную скорость v самолета.

1.34. Первый вагон поезда прошел мимо наблюдателя, стоящего на платформе, за $t_1 = 1$ с, а второй – за $t_2 = 1{,}5$ с. Длина вагона $l = 12$ м. Найти ускорение a поезда и его скорость v_0 в начале наблюдения. Движение поезда считать равнопеременным.

1.35. Шарик, пущенный вверх по наклонной плоскости, проходит последовательно два равных отрезка длиной l каждый и продолжает двигаться дальше. Первый отрезок шарик прошел за t секунд, второй – за $3t$ секунд. Найти скорость v шарика в конце первого отрезка пути.

1.36. Доска, разделенная на пять равных отрезков, начинает скользить по наклонной плоскости. Первый отрезок прошел мимо отметки, сделанной на наклонной плоскости в том месте, где находился передний край доски в начале движения, за $\tau = 2$ с. За какое время пройдет мимо этой отметки последний отрезок доски? Движение доски считать равноускоренным.

1.37. Пуля, летящая со скоростью 400 м/с, ударяет в земляной вал и проникает в него на глубину 36 см. Сколько времени двигалась она внутри вала? С каким ускорением? Какова была ее скорость на глубине 18 см? На какой глубине скорость пули уменьшилась в три раза? Движение считать равнопеременным. Чему будет равна скорость пули к моменту, когда пуля пройдет 99 % своего пути?

1.38. По наклонной доске пустили катиться снизу вверх шарик. На расстоянии $l = 30$ см от начала пути шарик побывал дважды: через $t_1 = 1$ с и через $t_2 = 2$ с после начала движения. Определить начальную скорость v_0 и ускорение a движения шарика, считая его постоянным.

1.39. Тело падает с высоты 100 м без начальной скорости. За какое время тело проходит первый и последний метры своего пути? Какой путь проходит тело за первую, за последнюю секунду своего движения?

1.40. Определить время открытого положения фотографического затвора τ, если при фотографировании шарика, падающего вдоль вертикальной сантиметровой шкалы от нулевой отметки без начальной скорости, на негативе была получена полоска, простирающаяся от n_1 до n_2 деления шкалы?

1.41. Свободно падающее тело прошло последние 30 м за время 0,5 с. Найти высоту падения.

1.42. Свободно падающее тело за последнюю секунду падения прошло 1/3 своего пути. Найти время падения и высоту, с которой упало тело.

1.43. С какой начальной скоростью v_0 надо бросить вниз мяч с высоты h, чтобы он подпрыгнул на высоту $2h$? Трением о воздух и другими потерями механической энергии пренебречь.

1.44. С каким промежутком времени оторвались от карниза крыши две капли, если спустя две секунды после начала падения второй капли расстояние между каплями было 25 м? Трением о воздух пренебречь.

1.45. Тело бросают вертикально вверх. Наблюдатель замечает промежуток времени t_0 между двумя моментами, когда тело проходит точку B, находящуюся на высоте h. Найти начальную скорость бросания v_0 и время всего движения тела t.

1.46. Из точек A и B, расположенных по вертикали (точка A выше) на расстоянии $l = 100$ м друг от друга, бросают одновременно два тела с одинаковой скоростью 10 м/с: из A — вертикально вниз, из B — вертикально вверх. Через сколько времени и в каком месте они встретятся?

1.47. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Когда оно достигло высшей точки пути, из того же начального пункта с той же скоростью v_0 брошено второе тело. На какой высоте h от начального пункта они встретятся?

1.48. Два тела брошены вертикально вверх из одной и той же точки с одинаковой начальной скоростью $v_0 = 19{,}6$ м/с с промежутком времени $\tau = 0{,}5$ с. Через какое время t после бросания второго тела и на какой высоте h встретятся тела?

1.49. Аэростат поднимается с Земли вертикально вверх с ускорением $a = 2$ м/с^2. Через $\tau = 5$ с от начала его движения из него выпал предмет. Через сколько времени t этот предмет упадет на Землю?

1.50. С аэростата, опускающегося со скоростью u, бросают вверх тело со скоростью v_0 относительно Земли. Какое будет расстояние l между аэростатом и телом к моменту наивысшего подъема тела относительно Земли? Каково наибольшее расстояние $l_{макс}$ между телом и аэростатом? Через какое время τ от момента бросания тело поравняется с аэростатом?

1.51. Тело, находящееся в точке B на высоте $H = 45$ м от Земли, начинает свободно падать. Одновременно из точки A, расположенной на расстоянии $h = 21$ м ниже точки B, бросают другое тело вертикально вверх. Определить начальную скорость v_0 второго тела, если известно, что оба тела упадут на Землю одновременно. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ м/с^2.

1.52. Тело свободно падает с высоты h. В тот же момент другое тело брошено с высоты H ($H > h$) вертикально вниз. Оба тела упали на землю одновременно. Определить начальную скорость v_0 второго тела. Проверить правильность решения на численном примере: $h = 10$ м, $H = 20$ м. Принять $g = 10$ м/с^2.

1.53. Камень бросают горизонтально с вершины горы, имеющей уклон α. С какой скоростью v_0 должен быть брошен камень, чтобы он упал на гору на расстоянии L от вершины?

1.54. Двое играют в мяч, бросая его друг другу. Какой наибольшей высоты достигает мяч во время игры, если он от одного игрока к другому летит 2 с?

1.55. Самолет летит на постоянной высоте h по прямой со скоростью v. Летчик должен сбросить бомбу в цель, лежащую впереди самолета. Под каким углом к вертикали он должен видеть цель в момент сбрасывания бомбы? Каково в этот момент расстояние от цели до точки, над которой находится самолет? Сопротивление воздуха движению бомбы не учитывать.

1.56. Два тела падают с одной и той же высоты. На пути одного тела находится расположенная под углом 45° к горизонту площадка, от которой это тело упруго отражается. Как различаются времена и скорости падения этих тел?

1.57. Лифт поднимается с ускорением 2 м/с^2. В тот момент, когда его скорость стала равна 2,4 м/с, с потолка лифта начал падать болт. Высота лифта 2,47 м. Вычислить время падения болта и расстояние, пройденное болтом относительно шахты.

1.58. На некоторой высоте одновременно из одной точки брошены два тела под углом 45° к вертикали со скоростью 20 м/с: одно вниз, другое вверх. Определить разность высот Δh, на которых будут тела через 2 с. Как движутся эти тела друг относительно друга?

1.59. Доказать, что при свободном движении тел вблизи поверхности Земли их относительная скорость постоянна.

1.60. Из точки A свободно падает тело. Одновременно из точки B под углом α к горизонту бросают другое тело так, чтобы оба тела столкнулись в воздухе (рис. 11). Показать, что угол α не зависит от начальной скорости v_0 тела, брошенного из точки B, и определить этот угол, если $\frac{H}{l} = \sqrt{3}$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

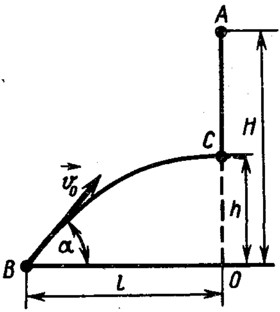


Рис. 11

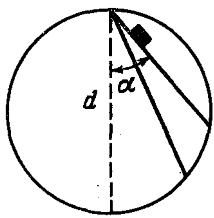


Рис. 12

1.61. Тело брошено под углом α к горизонту со скоростью v_0. Определить скорость v этого тела на высоте h над горизонтом. Зависит ли эта скорость от угла бросания? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.62. Под углом $\alpha = 60°$ к горизонту брошено тело с начальной скоростью $v = 20$ м/с. Через сколько времени t оно будет двигаться под углом $\beta = 45°$ к горизонту? Трение отсутствует.

1.63. Из трех труб, расположенных на земле, с одинаковой скоростью бьют струи воды: под углом 60, 45 и 30° к горизонту. Найти отношения наибольших высот h подъема струй воды, вытекающих из каждой трубы, и дальностей падения l воды на землю. Сопротивление воздуха движению водяных струй не учитывать.

1.64. Из точки, лежащей на верхнем конце вертикального диаметра d некоторой окружности, по желобам, установленным вдоль различных хорд этой окружности, одновременно начинают скользить без трения грузы (рис. 12). Определить, через какой промежуток времени t грузы достигнут окружности. Как это время зависит от угла наклона хорды к вертикали?

1.65. Начальная скорость брошенного камня $v_0 = 10$ м/с, а спустя $t = 0{,}5$ с скорость камня $v = 7$ м/с. На какую максимальную высоту над начальным уровнем поднимется камень?

1.66. На некоторой высоте одновременно из одной точки с одинаковыми скоростями выбрасываются по всевозможным направлениям шарики. Что будет представлять собой геометрическое место точек нахождения шариков в любой момент времени? Сопротивлением воздуха пренебречь.

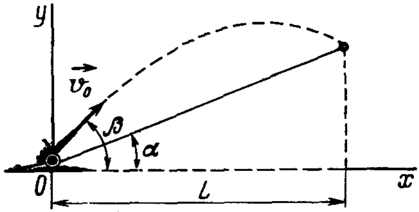


Рис. 13

1.67. Цель, находящаяся на холме, видна с места расположения орудия под углом α к горизонту. Дистанция (расстояние по горизонтали от орудия до цели) равна L. Стрельба по цели производится при угле возвышения β (рис. 13). Определить начальную скорость v_0 снаряда, попадающего в цель. Сопротивление воздуха не учитывать. При каком угле возвышения β_0 дальность стрельбы вдоль склона будет максимальной?

1.68. Упругое тело падает с высоты h на наклонную плоскость. Определить, через сколько времени t после отражения тело упадет на наклонную плоскость. Как время зависит от угла наклонной плоскости?

1.69. С высоты H на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол $\alpha = 45°$, свободно падает мяч и упруго отражается с той же скоростью. Найти расстояние от места первого удара до второго, затем от второго до третьего и т. д. Решить задачу в общем виде (для любого угла α).

1.70. Расстояние до горы определяют по времени между выстрелом и его эхом. Какова может быть погрешность τ в определении моментов выстрела и прихода эха, если расстояние до горы не менее 1 км, а его нужно определить с точностью 3%? Скорость звука в воздухе $c = 330$ м/с.

1.71. Глубину колодца хотят измерить с точностью 5%, бросая камень и замечая время τ, через которое будет слышен всплеск. Начиная с каких значений τ необходимо учитывать время прохождения звука? Скорость звука в воздухе $c = 330$ м/с.

2. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

2.1. С сортировочной горки скатываются два вагона: один груженый, другой порожний. Какой из вагонов отъедет дальше по прямолинейному участку пути после скатывания с горки? Считать силу сопротивления движению пропорциональной нагрузке на колеса и не зависящей от скорости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.2. Какую массу балласта m надо сбросить с равномерно опускающегося аэростата, чтобы он начал равномерно подниматься с той же скоростью? Масса аэростата с балластом $M = 1200$ кг, подъемная сила аэростата постоянна и равна $F = 8000$ Н. Силу сопротивления воздуха считать одинаковой при подъеме и при спуске.

2.3. Шахтная клеть массой $M = 3 \cdot 10^3$ кг начинает подниматься с ускорением $a = 0{,}49$ м/с^2. Определить: а) натяжение троса, при помощи которого поднимается клеть; б) натяжение троса в начале спуска клети с тем же ускорением; в) натяжение троса при движении клети с постоянной скоростью вверх и вниз.

2.4. В лифте установлены пружинные весы, на которых стоит человек. Как изменяются показания весов при движении лифта вверх и вниз с учетом изменений характера движения лифта?

2.5. На доске стоит человек. Внезапно он приседает. Что произойдет в первый момент: увеличится или уменьшится прогиб доски? Что произойдет, если человек сидел на корточках и внезапно выпрямился?

2.6. Ящик, заполненный шарами, брошен вверх. Как меняется сила давления шаров на дно и боковые стенки ящика и друг на друга во время полета ящика? Как изменится ответ, если ящик брошен под углом к горизонту? Сопротивление воздуха не учитывать.

2.7. Тяжелое тело подвешено на пружине к потолку кабины лифта. Каково будет движение тела относительно кабины, если внезапно кабина начинает свободно падать под действием силы тяжести?

2.8. На подставке лежит тело, подвешенное к потолку с помощью пружины. В начальный момент пружина не растянута. Подставку начинают опускать вниз с ускорением a. Через какое время Δt тело оторвется от подставки? Жесткость пружины k, масса тела m.

2.9. К концам шнура, перекинутого через блок, подвешены грузы $m_1 = 50$ г и $m_2 = 75$ г. Пренебрегая трением и считая шнур и блок невесомыми, а шнур нерастяжимым, определить ускорения, с которыми будут двигаться грузы, силу натяжения шнура и показание динамометра, на котором висит блок.

2.10. Две гири массами $m_1 = 7$ кг и $m_2 = 11$ кг висят на концах малорастяжимой нити, которая перекинута через блок. Гири вначале находятся на одной высоте. Через какое время t после начала движения более легкая гиря окажется на 10 см выше тяжелой? Массой блока, нити и сопротивлением движению пренебречь.

2.11. Два одинаковых груза массой M подвешены на невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок. На один из них положен грузик массой m. Определить силу f давления грузика на груз M и силу F, действующую на ось блока.

2.12. Через середину стержня проходит горизонтальная ось, вокруг которой он может вращаться. На концах стержня укреплены грузы массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 8$ кг. Стержень приведен в горизонтальное положение и освобожден без толчка.

1. Найти силу давления стержня на ось в начальный момент после его освобождения? Массой стержня и трением в оси пренебречь, грузы рассматривать как материальные точки.

2. Решить задачу для случая, когда ось проходит не через середину стержня, а на расстоянии 1/3 его длины от меньшей массы.

2.13. Через невесомый блок, укрепленный на ребре призмы, грани которой образуют углы α и β с горизонтом, перекинута нить (рис. 14). К концам нити прикреплены грузы массами m_1 и m_2. Найти ускорения грузов и силу натяжения нити. Трением пренебречь.

2.14. Два груза массами $m = 0{,}2$ кг и $M = 4$ кг соединены нитью и лежат на гладком столе (трением пренебрегаем). К первому грузу приложена сила $F_1 = 0{,}2$ Н, действующая вдоль направления нити, ко второму – в противоположном направлении сила $F_2 = 0{,}5$ Н. С каким ускорением a будут двигаться грузы и какова сила натяжения T соединяющей их нити? Решить задачу в общем виде и сделать вывод о силе натяжения нити, когда $m \ll M$.

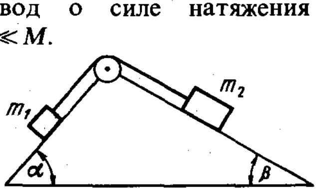


Рис. 14

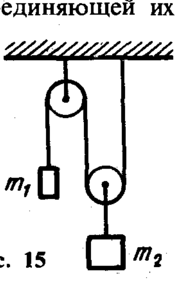


Рис. 15

2.15. Найти ускорения a_1 и a_2 масс m_1 и m_2 и силу натяжения T нити в системе, изображенной на рис. 15. Массой блоков и нити и трением пренебречь.

2.16. На тележке стоит сосуд с жидкостью; тележка движется в горизонтальном направлении с ускорением a. Определить угол наклона α поверхности жидкости к горизонтали, считая положение жидкости в сосуде установившимся.

2.17. Определить угол наклона поверхности жидкости в сосуде, скользящем без трения по наклонной плоскости.

2.18. В лифте находится ведро с водой, в котором плавает тело. Изменится ли глубина погружения тела, если лифт будет двигаться с ускорением a, направленным вверх? вниз?

2.19. Доска массой M может двигаться без трения по наклонной плоскости с углом α к горизонту. В каком направлении и с каким ускорением должна бежать по доске собака массой m, чтобы доска не соскальзывала с наклонной плоскости? Каким должен быть коэффициент трения k между лапами собаки и доской, чтобы задача имела решение?

2.20. На цилиндр массой M намотана нить. Затем цилиндр отпускают, а нить тянут вверх так, что центр массы цилиндра остается при разматывании нити на одной и той же высоте. Чему равна сила натяжения нити?

2.21. Через неподвижный блок перекинута веревка, к одному из концов которой привязан груз массой $m_1 = 64$ кг. На другом конце повис человек массой $m_2 = 65$ кг, который, выбирая веревку, поднимает груз, оставаясь при этом на одном и том же расстоянии от пола. Через какое время t груз будет поднят на высоту $h = 3$ м? Массой веревки и блока пренебречь.

2.22. 1. Два мальчика равных масс, стоящие на коньках на расстоянии l друг от друга, выбирают натянутую между ними веревку: один со скоростью v, другой со скоростью $2v$. Через сколько времени и в каком месте они сойдутся? Решить задачу для случая, когда массы мальчиков относятся как 1:1,5.

2. За концы веревки, перекинутой через неподвижный блок, ухватились два гимнаста, имеющих одинаковые массы, которые начинают одновременно подниматься вверх: один со скоростью v, а другой со скоростью $2v$ относительно веревки. Через сколько времени каждый из них достигнет блока? Длина веревки l. Концы веревки в начальный момент находились на одинаковом расстоянии от блока.

2.23. Тело массой $m = 1$ кг лежит на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения $k = 0{,}1$. На тело действует горизонтальная сила F. Определить силу трения для двух случаев: $F = 0{,}5$ Н и $F = 2$ Н.

2.24. Брусок массой $m = 2$ кг находится на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения при скольжении бруска равен $k = 0{,}2$. Изобразить графически зависимость силы трения от силы тяги, приложенной к бруску вдоль плоскости скольжения. Явлением застоя пренебречь.

2.25. Брусок находится на плоскости, угол наклона которой может изменяться от 0 до 90°. Построить график зависимости силы трения бруска о плоскость от угла наклона плоскости к горизонту. Явлением застоя пренебречь.

2.26. Определить приближенное значение коэффициента трения k песка о песок, если угол наклона горки, образовавшийся после осыпания песка, равен α.

2.27. Через легкий вращающийся без трения блок перекинут шнурок. На одном конце шнурка привязан груз массой m_1. По другому концу шнурка может скользить кольцо массой m_2 (рис. 16).

1. С каким ускорением a движется кольцо, если груз m_1 неподвижен? Чему равна сила трения $F_{тр}$ кольца о шнурок?

2. Кольцо соскальзывает с постоянным относительно шнурка ускорением a_2. Найти ускорение a_1 груза массой m_1 и силу трения $F_{тр}$ кольца о шнурок. Массой шнурка можно пренебречь; считать, что груз m_1 опускается.

2.28. Тело массой M движется прямолинейно с ускорением a по горизонтальной плоскости под действием некоторой силы F, образующей с горизонтом угол α. Определить величину этой силы, если коэффициент трения между передвигаемым телом и плоскостью равен k.

2.29. Доска A движется по горизонтальному столу под действием силы натяжения привязанной к ней нити. Нить перекинута через прикрепленный к столу блок и прикреплена к другой доске B, падающей вниз.

1. Определить силу натяжения нити T, если масса доски A $m_1 = 200$ г, масса доски B $m_2 = 300$ г, коэффициент трения $k = 0{,}25$. Масса блока ничтожно мала.

2. Как изменится ответ, если доски поменять местами?

3. Определить силу F, действующую на ось блока в случаях (1) и (2).

2.30. Система из двух грузов массами m_1 и m_2 (рис. 17) находится в лифте, движущемся с ускорением a, направленным вверх. Найти силу натяжения T нити, если коэффициент трения между грузом m_1 и опорой равен k. Изменится ли состояние движения (или покоя) грузов, если ускорение лифта сменится на обратное?

2.31. Два груза массами $M_1 = 3$ кг и $M_2 = 5$ кг лежат на гладком горизонтальном столе, связанные шнуром, который разрывается при силе натяжения $T = 24$ Н. Какую максимальную силу F можно приложить к грузу M_1? к грузу M_2? Как изменится ответ, если учесть трение? Коэффициенты трения грузов о стол одинаковы.

2.32. $n + 1$ одинаковых грузов массой m каждый соединены друг с другом n одинаковыми невесомыми пружинами (рис. 18). К крайнему грузу приложена некоторая сила $\vec{F}$, под действием которой система движется с ускорением a в горизонтальном направлении. Определить величину силы F и изменение длины каждой пружины, если коэффициент трения между грузами и плоскостью равен f и жесткость пружины равна k.

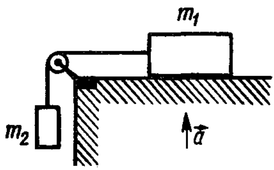


Рис. 17

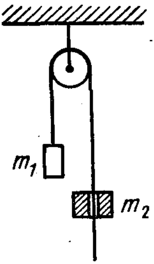


Рис. 16

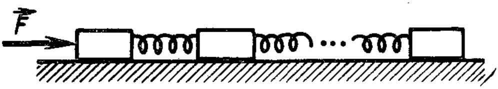


Рис. 18

2.33. Два бруска массами m_1 и m_2, связанные нерастяжимой нитью, находятся на горизонтальной плоскости. К ним приложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 19), составляющие с горизонтом углы α и β. Найти ускорение системы a и силу натяжения T нити. Коэффициенты трения брусков о плоскость одинаковы и равны k. Силы F_1 и F_2 не отрывают бруски от плоскости. Система движется влево.

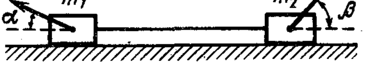


Рис. 19

2.34. 1. Бруски A и B массами m_2 и m_1 находятся на столе (рис. 20, a). К бруску B приложена сила $\vec{F}$, направленная под углом α к горизонту. Найти ускорения движения брусков, если коэффициенты трения брусков друг о друга и бруска о стол равны соответственно k_1 и k_2. Сила трения между поверхностями максимальна.

2. На наклонную плоскость с углом α помещена плоская плита массой m_2, а на нее – брусок массой m_1. Коэффициент трения между бруском и плитой k_1. Определить, при каких значениях коэффициента трения k_2 между плитой и плоскостью плита не будет двигаться, если известно, что брусок скользит по плите (рис. 20, *б*).

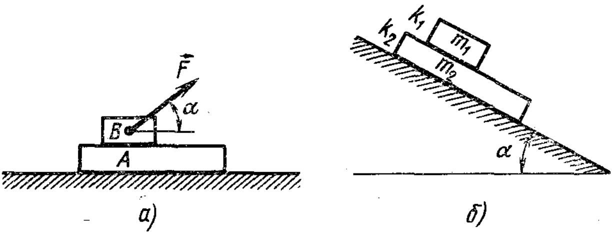


Рис. 20

2.35. Тело брошено вертикально вверх. Чему равно ускорение тела в высшей точке подъема? Как будет изменяться ускорение тела во время его движения? Рассмотреть два случая: 1) сопротивление воздуха отсутствует; 2) сопротивление воздуха растет с увеличением скорости тела.

2.36. Два шарика падают в воздухе. Шарики (сплошные) сделаны из одного материала, но диаметр одного из шариков вдвое больше, чем у другого. В каком соотношении будут находиться скорости шариков при установившемся (равномерном) движении? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поперечного сечения движущегося тела и квадратично зависит от скорости движения тела.

2.37. Шар массой m падает в жидкости плотностью ρ с постоянной скоростью v. С какой силой нужно тянуть этот шар, для того чтобы он поднимался в той же жидкости со скоростью $2v$? Объем шара равен V. Сопротивление при движении шара в жидкости пропорционально скорости шара.

2.38. Почему крупные капли дождя падают с большей скоростью, чем мелкие?

2.39. Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в четыре раза больше плотности материала шарика. Определить силу сопротивления жидкости при движении в ней шарика, считая ее постоянной. Масса шарика 10 г.

2.40. Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 4°. Требуется определить: а) при каком предельном значении коэффициента трения k тело начнет скользить по наклонной плоскости? б) с каким ускорением a будет скользить тело по плоскости, если коэффициент трения равен 0,03? в) время t прохождения при этих условиях 100 м пути; г) скорость v тела в конце этого пути.

2.41. За какое время t тело соскользнет с наклонной плоскости высотой h, наклоненной под углом α к горизонту, если по наклонной плоскости с углом наклона β оно движется равномерно?

2.42. Два бруска с одинаковыми массами m скреплены нитью и находятся на наклонной плоскости с углом наклона α. Определить силу натяжения нити T при движении брусков вдоль наклонной плоскости, если коэффициент трения k верхнего бруска о плоскость в два раза больше коэффициента трения нижнего.

2.43. На верхнем краю наклонной плоскости укреплен блок, через который перекинута нить. К одному концу нити привязан груз массой $m_1 = 2$ кг, лежащий на наклонной плоскости. На другом конце нити висит груз массой $m_2 = 1$ кг. Наклонная плоскость образует с горизонтом угол $\alpha = 20°$; коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью $k = 0{,}1$. Считая нить и блок невесомыми, найти ускорение a, с которым движутся грузы, и силу натяжения нити T.

2.44. Невесомый блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$. Гири равной массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Найти: а) ускорение a, с которым движутся гири; б) силу натяжения нити T. Коэффициент трения гирь о наклонные плоскости $k = 0{,}1$ (см. рис. 14). Трением в блоке, массой нити и ее растяжением пренебречь.

2.45. Ледяная горка составляет с горизонтом угол $\alpha = 10°$. По ней пускают вверх камень, который, поднявшись на некоторую высоту, соскальзывает по тому же пути вниз. Каков коэффициент трения k, если время спуска в $n = 2$ раза больше времени подъема?

2.46. На горизонтальной доске лежит груз. Коэффициент трения между доской и грузом $k = 0{,}1$. Какое ускорение a в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз мог с нее соскользнуть?

2.47. На листе бумаги стоит прямой цилиндр, высота которого 20 см и диаметр основания 2 см. С каким наименьшим ускорением нужно потянуть лист, чтобы цилиндр упал? Предполагается, что цилиндр не скользит по поверхности листа.

2.48. Тележка массой M может катиться без трения по горизонтальному пути. У заднего края тележки лежит брусок массой m. Коэффициент трения между бруском и тележкой k. К бруску приложена горизонтальная сила $\vec{F}$, достаточная для того, чтобы брусок начал скользить. Через какое время t брусок упадет с тележки, если длина ее l (рис. 21)? При какой минимальной силе F_0 брусок начнет скользить?

2.49. По достаточно длинной доске массы M, лежащей на гладкой горизонтальной плоскости и удерживаемой шнуром (рис. 22), скользит равномерно со скоростью v_0 брусок массой m под действием силы $\vec{F}$. В некоторый момент $t = 0$, когда брусок прошел путь l_0, шнур перерезают. Описать дальнейшее движение бруска и доски. Через какое время t_1 и как изменится сила трения между ними? Какова минимальная длина доски l, при которой брусок не соскользнет с нее?

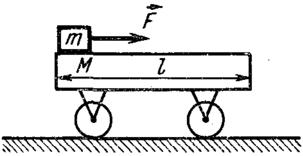


Рис. 21

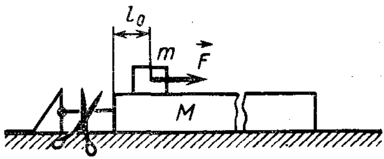


Рис. 22

2.50. От поезда M, идущего с постоянной скоростью, отрывается последний вагон массой m, который проходит путь s и останавливается. На каком расстоянии l от вагона в момент его остановки будет находиться поезд, если тяга тепловоза постоянная, а сопротивление движению каждой части поезда не зависит от скорости и пропорционально ее весу?

3. ИМПУЛЬС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

3.1. Шарик массой $m = 100$ г, движущийся со скоростью $v = 1$ м/с, упруго ударяется о плоскость. Определить изменение импульса шарика, если направление скорости составляет с плоскостью угол α, равный: а) 90°; б) 30°.

3.2. Шарик массой $m = 10$ г падает на горизонтальную плоскость с высоты $h_1 = 27$ см. Найти среднюю силу удара $F_{ср}$ в следующих случаях: а) шарик пластилиновый (абсолютно неупругий удар); б) шарик и плоскость из стали (абсолютно упругий удар); в) шарик пластмассовый и после удара поднимается на высоту $h_2 = 12$ см. Рассмотреть первые два случая удара шарика о плоскость, наклоненную под углом $\alpha = 30°$. Считать во всех случаях, что соприкосновение шарика с плоскостью длилось (длительность удара) 0,03 с.

3.3. Две частицы массами m и $2m$ движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями соответственно

$2v$ и v. На частицы начинает действовать одинаковая сила. Определить величину и направление скорости частицы массой $2m$ в момент времени, когда скорость частицы массой m стала такой, как показано пунктиром: а) на рис. 23, *а*; б) на рис. 23, *б*.

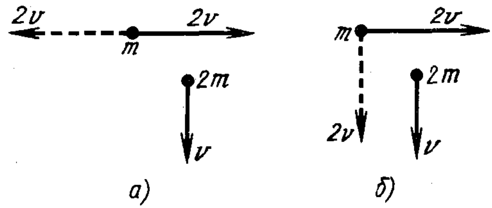


Рис. 23

3.4. Струя воды сечением $S = 6$ см^2 ударяет в стенку под углом $\alpha = 60°$ к нормали и упруго отскакивает от нее (без потери скорости). Найти силу F, действующую на стенку, если известно, что скорость течения воды в струе $v = 12$ м/с.

3.5. Железнодорожная платформа с установленным на ней орудием движется со скоростью $v_1 = 9$ км/ч. Общая масса $M = 20$ т. Из орудия выпущен снаряд массой $m = 25$ кг со скоростью $v_2 = 700$ м/с относительно центра масс. Определить скорость платформы u после выстрела: а) когда выстрел произведен в направлении движения платформы; б) когда выстрел произведен в противоположном направлении. Трением платформы о рельсы пренебречь.

3.6. Граната, летевшая со скоростью 10 м/с, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составляла 60 % массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но с увеличенной скоростью, равной 25 м/с. Найти скорость меньшего осколка.

3.7. Снаряд в верхней точке траектории на высоте $h = 100$ м разорвался на две части: $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг. Скорость снаряда в этой точке $v_0 = 100$ м/с. Скорость большего осколка v_2 оказалась горизонтальной, совпадающей по направлению с v_0 и равной 250 м/с. Определить расстояние s между точками падения обоих осколков. Сопротивление воздуха не учитывать.

3.8. Снаряд, вылетевший из орудия под некоторым углом к горизонту, в верхней точке своей параболической траектории разрывается на два осколка равной массы. Один осколок после взрыва возвращается к орудию по прежней траектории. Где упадет второй осколок? Упадут ли оба осколка на землю одновременно? Сопротивление воздуха не учитывать.

3.9. Снаряд разрывается в верхней точке траектории на высоте $h = 19{,}6$ м на две одинаковые части. Через время $\tau = 1$ с после взрыва одна часть падает на Землю под тем местом, где произошел взрыв. На каком расстоянии s_2 от места выстрела упадет вторая часть снаряда, если первая упала на расстоянии $s_1 = 1000$ м? Силу сопротивления воздуха при решении задачи не учитывать.

3.10. От двухступенчатой ракеты общей массой $M = 1000$ кг в момент достижения скорости $v_0 = 171$ м/с отделилась ее вторая ступень массой $m = 400$ кг, скорость которой при этом увеличилась до $v_2 = 185$ м/с. Найти, с какой скоростью v_1 стала двигаться первая ступень ракеты. Скорости указаны относительно наблюдателя, находящегося на Земле.

3.11. Космический корабль летит с постоянной скоростью в облаке неподвижных микрометеорных частиц, которые испытывают с ним абсолютно неупругие соударения. Во сколько раз нужно увеличить силу тяги двигателя, чтобы: а) скорость корабля увеличить в два раза? б) при попадании в область частиц с плотностью, в три раза большей, скорость корабля не изменилась?

3.12. Третья ступень ракеты состоит из ракеты-носителя массой $m_р = 500$ кг и головного конуса $m_к = 10$ кг. Между ними помещена сжатая пружина. При испытаниях на Земле пружина сообщила конусу скорость $v_{отн} = 5{,}1$ м/с по отношению к свободно подвешенной в горизонтальном положении ракете-носителю. Каковы будут скорости конуса $v_к$ и ракеты $v_р$, если их разделение произойдет на орбите при движении со скоростью $v = 8000$ м/с?

3.13. Однородный стержень длиной l нижним концом касается гладкой горизонтальной поверхности. Верхний конец стержня подвешен на нити, так что стержень образует с горизонтальной плоскостью угол α. Нить пережигают. В какую сторону и на сколько сместится нижний конец стержня, когда он упадет?

3.14. Два шарика массами m_1 и m_2 соединены нерастяжимым невесомым горизонтальным стержнем. В начальный момент у поверхности Земли шарикам сообщили скорости v_1 и v_2, направленные под углами α и β к горизонту (рис. 24). Какое соотношение должно быть между углами α и β, чтобы шарикам можно было сообщить эти скорости? Каков характер движения системы? На какую высоту поднимется центр масс системы?

3.15. Человек массой $m = 70$ кг находится на корме лодки, находящейся в озере. Длина лодки $l = 5$ м и масса ее $M = 280$ кг. Человек переходит на нос лодки. На какое расстояние человек передвинется относительно дна? Сопротивлением воды пренебречь.

3.16. Лодка неподвижно стоит в озере. На корме и на носу лодки на расстоянии $l = 5$ м друг от друга сидят рыболовы. Масса лодки $M = 150$ кг, массы рыболовов $m_1 = 90$ кг и $m_2 = 60$ кг. Рыболовы меняются местами. На сколько переместится при этом лодка? Сопротивлением воды пренебречь.

3.17. Три лодки одинаковой массой M идут в кильватер (друг за другом) с одинаковой скоростью v. Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю бросают со скоростью u относительно лодки грузы массой m. Каковы будут скорости лодок после переброски грузов? Сопротивлением воды пренебречь.

3.18. Тележка, масса которой $M = 120$ кг, движется по рельсам без трения со скоростью $v = 6$ м/с. С тележки соскакивает человек массой $m = 80$ кг под углом $\alpha = 30°$ к направлению ее движения в горизонтальной плоскости. Скорость тележки уменьшается при этом до $v' = 5$ м/с. Какова была скорость u человека во время прыжка относительно земли?

3.19. Две трубы с сечениями S_1 и S_2 соединены друг с другом, заполнены гремучим газом и закрыты поршнями массами m и M (рис. 25). После взрыва поршни вылетают из труб. Первый из них вылетел со скоростью v_1. С какой скоростью v_2 вылетел второй, если: а) трубы закреплены; б) масса труб равна M_0 и они не закреплены? Какую скорость при этом будут иметь трубы? Трением поршней о стенки труб и массой газа пренебречь. Время движения обоих поршней внутри труб одинаково.

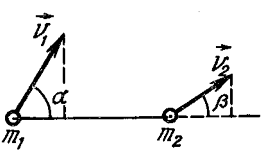


Рис. 24

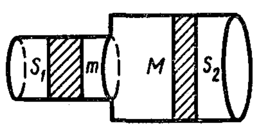


Рис. 25

3.20. По наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, начинает соскальзывать без трения ящик с песком массой M. В тот момент, когда ящик прошел путь l, в него попало тело массой m, скорость которого направлена под углом β к горизонту. Ящик при этом остановился. С какой скоростью v двигалось тело?

3.21. С гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, соскальзывает с высоты h небольшое тело. Как будет двигаться тело, если оно в конце наклонной плоскости встречает: а) вполне упругую горизонтальную плоскость; б) горизонтальную плоскость неупругую, но гладкую?

3.22. Сосуд с водой движется по наклонной плоскости с углом наклона α так, что уровень воды устанавливается параллельно этой плоскости (рис. 26). Из отверстия около дна сосуда вытекает вода со скоростью v. Определить коэффициент трения k между сосудом и плоскостью, если масса сосуда с водой равна m, а площадь отверстия S. Изменением массы воды, связанным с ее истечением из сосуда, пренебречь.

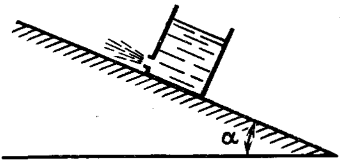


Рис. 26

3.23. Благодаря какой внешней силе движется автомобиль?

3.24. Из реактивной установки массой $M = 0{,}5$ т, находящейся первоначально в покое, в горизонтальном направлении выбрасываются последовательно две порции вещества со скоростью $v_0 = 1000$ м/с относительно установки. Масса каждой порции $m = 25$ кг. Какой станет скорость установки v_2 после выброса второй порции? Трение отсутствует.

3.25. Из ракеты массой M выбрасываются продукты сгорания порциями, массы которых m, со скоростью v относительно ракеты. Пренебрегая действием силы тяжести и сопротивлением воздуха, определить скорость u_n ракеты после вылета n-й порции.

3.26. На платформе массой M, которая может двигаться по горизонтальной плоскости без трения, стоят n человек, каждый массой m. В каком случае платформе будет сообщена бóльшая скорость u: а) если каждый из них последовательно пробежит по платформе с относительной скоростью v и спрыгнет на землю; б) в том случае, когда все люди одновременно побегут по платформе и одновременно спрыгнут с нее с той же относительной скоростью v?

Разберите случай, когда эти люди стоят на краю платформы и спрыгивают или поочередно или одновременно.

3.27. Ракету массой M запускают вертикально. Скорость истечения газов из сопла двигателя равна v. При каком расходе топлива μ (массы в единицу времени) сила тяги двигателя будет достаточна, чтобы: а) уравновесить действующую на ракету силу тяжести; б) сообщить ракете ускорение $a = 19{,}6$ м/с^2.

4. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ *

4.1. Двое ухватились за веревку и тянут ее в разные стороны. Один из них перетянул. Означает ли это, что он прилагает к веревке большую силу, нежели другой? Сравните работы, совершаемые силами, приложенными к веревке.

4.2. Чему равна работа A по подъему цепи, взятой за один конец и лежащей на плоскости, на высоту, равную ее длине? Длина цепи $l = 2$ м, масса $m = 5$ кг.

4.3. Оконная шторка массой $M = 1$ кг и длиной $l = 2$ м свертывается на тонкий валик наверху окна. Какая при этом совершается работа? Трением пренебречь.

4.4. Гибкий резиновый шланг длиной l висит так, что один из его концов находится на $^1/_3\ l$ ниже другого. В шланг налито максимально возможное количество воды; ее плотность равна ρ. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вылить воду из шланга, поднимая его за нижний конец и удерживая верхний конец на неизменной высоте? Внутренний диаметр шланга d. Массой шланга пренебречь. Радиус закругления шланга в изгибе много меньше l.

4.5. Цепь массой M и длиной l лежит у границы двух соприкасающихся полуплоскостей из разных материалов (рис. 27). Какую работу надо совершить, чтобы передвинуть цепь на вторую полуплоскость? Коэффициенты трения полуплоскостей с цепью соответственно равны k_1 и k_2. Решить задачу также графически.

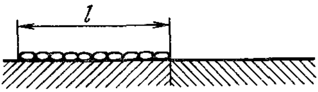


Рис. 27

4.6. Мотор с полезной мощностью 15 кВт, установленный на автомобиле, может сообщить ему при движении по горизонтальному участку дороги скорость 90 км/ч. Тот же мотор, установленный на моторной лодке, обеспечивает ей скорость не выше 15 км/ч. Определить силу сопротивления F_c движению автомобиля и моторной лодки при заданных скоростях.

4.7. Трамвай массой M проходит по улице, поднимающейся вверх под углом α к горизонту с определенной скоростью. На горизонтальном участке пути он может с той же скоростью идти с прицепным вагоном массой M_1. Как велика масса M_1, если коэффициент трения качения колес равен k? Мощность двигателя постоянна.

---

* В задачах этого раздела коэффициент трения (сопротивления) считается независящим от скорости движения.

4.8. Локомотив, работая с постоянной мощностью, может вести поезд массой $M = 2000$ т вверх по уклону $\alpha_1 = 0{,}005$ со скоростью $v_1 = 30$ км/ч или по уклону $\alpha_2 = 0{,}0025$ со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Определить величину силы сопротивления F_c, считая ее постоянной.

4.9. Пуля, летящая с определенной скоростью, углубляется в стенку на расстояние $l_1 = 10$ см. На какое расстояние l_2 углубляется в ту же стенку пуля, которая будет иметь скорость вдвое большую?

4.10. Пуля, летящая со скоростью v_0, пробивает несколько одинаковых досок, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. В какой по счету доске застрянет пуля, если ее скорость после прохождения первой доски равна $v_1 = 0{,}83\ v_0$?

4.11. Какую работу надо совершить, чтобы заставить поезд массой $M = 800$ т: а) увеличить свою скорость от $v_1 = 36$ км/ч до $v_2 = 54$ км/ч; б) остановиться при начальной скорости $v_3 = 72$ км/ч? Сопротивлением пренебречь.

4.12. Поезд массой $M = 2000$ т, двигаясь с места с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2, достигает нужной скорости через минуту, после чего движется равномерно. Определить мощность тепловоза при установившемся движении, если коэффициент сопротивления* $k = 0{,}005$.

4.13. Автомобиль массой $M = 2000$ кг трогается с места и идет в гору, наклон которой $\alpha = 0{,}02$. Пройдя расстояние $s = 100$ м, он развивает скорость $v = 32{,}4$ км/ч. Коэффициент сопротивления $k = 0{,}05$. Определить среднюю мощность, развиваемую двигателем автомобиля.

4.14. Ракета массой M с работающим двигателем неподвижно «зависла» над Землей. Скорость вытекающих из ракеты газов u. Определить мощность двигателя.

4.15. В каком случае двигатель автомобиля должен совершить бóльшую работу: для разгона с места до скорости 27 км/ч или на увеличение скорости от 27 до 54 км/ч? Силу сопротивления и время разгона в обоих случаях считать одинаковыми.

4.16. Камень массой $m = 200$ г брошен с горизонтальной поверхности под углом к горизонту и упал на нее обратно на расстоянии $s = 5$ м через $t = 1{,}2$ с. Найти работу бросания. Сопротивлением воздуха пренебречь.

---

* Коэффициентом сопротивления называют отношение силы сопротивления к силе тяжести.

4.17. Определить работу, которую нужно произвести для того, чтобы сжать пружину на $x = 10$ см, если для сжатия ее на $x_0 = 1$ см необходима сила $F_0 = 100$ Н.

4.18. Вагон массой $M = 2 \cdot 10^4$ кг, двигаясь со скоростью $v = 0{,}5$ м/с, ударяется в два неподвижных пружинных буфера. Найти наибольшее сжатие буферов x, если буфер сжимается на 1 см при действии силы $5 \cdot 10^4$ Н. Трением пренебречь.

4.19. Действуя постоянной силой $F = 200$ Н, поднимают груз массой $M = 10$ кг на высоту $h = 10$ м. Какую работу A совершает сила F? Какой потенциальной энергией П будет обладать поднятый груз?

4.20. Лифт массой $M = 1000$ кг равноускоренно поднимался лебедкой. На некотором отрезке пути длиной $l = 1$ м лифт двигался со средней скоростью $v_{ср} = 5$ м/с и его скорость возросла на $\Delta v = 0{,}5$ м/с. Какую работу совершила сила, перемещающая лифт на указанном отрезке его пути?

4.21. Какую работу совершит сила $F = 30$ Н, подняв по наклонной плоскости груз массой $m = 2$ кг на высоту $h = 2{,}5$ м с ускорением $a = 10$ м/с^2. Сила действует параллельно наклонной плоскости. Трением о плоскость пренебречь.

4.22. Некоторая сила толкает тело массой $m = 16$ кг вверх по наклонной плоскости длиной $l = 3{,}1$ м и с наклоном $\alpha = 30°$ к горизонту.

1. Скорость тела у основания наклонной плоскости была $v_0 = 0{,}6$ м/с, а у ее верхнего края $v_1 = 3{,}1$ м/с. Чему равна работа, произведенная силой? Трения нет.

2. Чему равна работа той же силы и какова будет кинетическая энергия тела в верхней точке наклонной плоскости, если есть трение и коэффициент трения $k = 0{,}1$?

Сила направлена вдоль наклонной плоскости.

4.23. Грузовой автомобиль массой $M = 6 \cdot 10^3$ кг въезжает на паром, привязанный к берегу двумя канатами, со скоростью $v = 18$ км/ч. Въехав на паром, автомобиль остановился, пройдя при торможении путь $s = 10$ м. Определить суммарную силу натяжения канатов.

4.24. Автомобиль, шедший со скоростью $v = 54$ км/ч, при резком торможении стал двигаться «юзом» (заторможенные колеса не вращаются, скользят по дороге). Определить ускорение a и путь s, который пройдет автомобиль, если коэффициент трения скольжения колес об асфальт: а) в сырую погоду $k_1 = 0{,}3$; б) в сухую $k_2 = 0{,}7$.

***4.25.** Автомобиль с полностью включенными тормозами (колеса не вращаются) может удержаться на склоне горы с уклоном до 23°. Каков тормозной путь автомобиля s при торможении на горизонтальной дороге при скорости движения 10 м/с? Коэффициент сцепления колес с грунтом на склоне горы и на дороге одинаков.

4.26. Сани с грузом массой $M = 120$ кг скатываются по уклону горы под углом к горизонту $\alpha = 14°$. Длина спуска $l = 60$ м. Коэффициент трения скольжения саней $k = 0{,}14$. Определить: а) ускорение a_1 саней при движении с горы; б) скорость v в конце спуска; в) время спуска t_1; г) кинетическую энергию T_1 в конце спуска; д) какое расстояние s прокатятся сани после спуска по горизонтали; е) сколько времени t_2 продолжается движение по горизонтали; ж) ускорение a_2 при движении по горизонтальному участку пути.

4.27. Тело скользит вниз по наклонной плоскости. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 20°$, длина ее $l = 4$ м, коэффициент трения тела о плоскость $k = 0{,}2$. С какой скоростью v будет двигаться тело в момент перехода с наклонной плоскости на горизонтальную поверхность?

4.28. Бассейн площадью $S = 100$ м^2, заполненный водой до уровня $h = 1$ м, разделен пополам вертикальной перегородкой. Перегородку медленно передвигают в горизонтальном направлении так, что она делит бассейн в отношении 1:3. Какую для этого надо совершить работу, если вода не проникает через перегородку?

4.29. Два автомобиля одновременно трогаются с места и движутся равноускоренно. Массы автомобилей одинаковы. Во сколько раз средняя мощность двигателя первого автомобиля больше средней мощности второго, если за одно и то же время первый автомобиль развивает скорость вдвое большую, чем второй? Сопротивлением движению пренебречь.

4.30. Самолет для взлета должен иметь скорость $v = 25$ м/с. Длина пробега перед взлетом $s = 100$ м. Какова мощность моторов, если масса самолета $m = 1000$ кг и коэффициент сопротивления $k = 0{,}02$? Считать движение самолета при взлете равноускоренным.

4.31. Поезд массой $M = 5 \cdot 10^5$ кг поднимается со скоростью 30 км/ч в гору с уклоном 10 м на километр. Коэффициент сопротивления $k = 0{,}002$. Определить мощность, развиваемую тепловозом.

4.32. Разогнавшись, конькобежец некоторое время движется по горизонтальной ледяной дорожке равномерно. Затем, перестав отталкиваться, он, двигаясь равнозамедленно, проезжает до остановки путь $s = 60$ м в течение $t = 25$ с. Масса конькобежца $m = 50$ кг. Определить: а) коэффициент трения; б) мощность, затрачиваемую конькобежцем при равномерном движении.

4.33. Тепловоз тянет поезд, общая масса которого m равна 2000 т. Принимая, что мощность тепловоза N постоянна и равна 1800 кВт и что коэффициент сопротивления $k = 0{,}005$, определить: а) ускорения поезда a в те моменты, когда скорость поезда $v_1 = 4$ м/с и когда скорость поезда $v_2 = 12$ м/с; б) максимальную скорость $v_{\text{макс}}$ поезда.

4.34. Шкив радиусом R делает n оборотов в секунду, передавая ремнем мощность N. Найти силу натяжения T ремня, идущего без скольжения.

4.35. Найти мощность воздушного потока, имеющего поперечное сечение в виде круга диаметром $d = 18$ м и текущего со скоростью $v = 12$ м/с. Плотность воздуха (при нормальных условиях) $\rho = 1{,}3$ кг/м^3.

4.36. Горный ручей с сечением потока S образует водопад высотой h. Скорость течения воды в ручье v. Найти мощность водопада.

4.37. Уклон участка шоссе равен 0,05. Спускаясь под уклон при выключенном двигателе, автомобиль движется равномерно со скоростью $v = 60$ км/ч. Какова должна быть мощность двигателя автомобиля, чтобы он мог подниматься на такой же подъем с той же скоростью? Масса автомобиля $m = 1{,}5$ т.

4.38. Грузовики, снабженные двигателями мощностью N_1 и N_2, развивают скорости соответственно v_1 и v_2. Какова будет скорость грузовиков, если их соединить тросом?

4.39. Аэросани движутся вверх по слабому подъему с установившейся скоростью $v_1 = 20$ м/с; если они движутся в обратном направлении, т. е. под уклон, то при той же мощности двигателя устанавливается скорость $v_2 = 30$ м/с. Какая скорость v установится при той же мощности двигателя во время движения по горизонтальному пути?

4.40. Поезд массой $m = 500$ т шел равномерно по горизонтальному пути. От поезда оторвался задний вагон массой $m_1 = 20$ т. Проехав после этого $s = 240$ м, машинист прекратил доступ пара в машину. На каком расстоянии друг от друга остановятся оторвавшийся вагон и остальной состав поезда? Предполагается, что сила тяги при работе машины постоянна, а сопротивление движению поезда и вагона пропорционально их массам.

4.41. Найти работу, которую необходимо совершить, чтобы втащить тело массой $m = 50$ кг на горку произвольного профиля по плоской траектории из точки A в точку B, расстояние между которыми по горизонтали $l = 10$ м, а по вертикали $h = 10$ м. Коэффициент трения между телом и горкой всюду одинаков и равен $k = 0{,}1$. Профиль горки такой, что касательная к нему в любой точке составляет острый угол с горизонтом. Сила, приложенная к телу, всюду действует по касательной к траектории его перемещения.

5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

5.1. Нить с подвешенным на ней грузом отклонили на угол α и отпустили. На какой угол β отклонится нить с грузом, если при своем движении она будет задержана штифтом, поставленным на вертикали, посередине длины нити?

5.2. 1. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 16$ м/с. На какой высоте h кинетическая энергия тела равна его потенциальной энергии?

2. С какой начальной скоростью надо бросить мяч с высоты h, чтобы он подпрыгнул на высоту $2h$? Удар упругий. Сопротивлением воздуха пренебречь.

5.3. С башни высотой $H = 25$ м горизонтально брошен камень со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Найти кинетическую и потенциальную энергии камня спустя одну секунду после начала движения. Масса камня $m = 0{,}2$ кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

5.4. Определить величину кинетической энергии тела массой 1 кг, брошенного горизонтально со скоростью 20 м/с, в конце четвертой секунды его движения. Принять $g = 10$ м/с^2.

5.5. Гибкий однородный канат длиной L лежит на гладком горизонтальном столе. Один конец каната находится у края стола. В некоторый момент от небольшого толчка канат начал двигаться, непрерывно соскальзывая со стола. Как зависит ускорение и скорость каната от длины x куска его, свешивающегося со стола? Какова будет скорость каната к моменту, когда он сползет со стола?

5.6. Канат длиной L переброшен через штырь. В начальный момент концы каната находились на одном уровне. После слабого толчка канат пришел в движение. Определить скорость v каната к моменту, когда он соскользнет со штыря. Трением пренебречь.

5.7. Конькобежец, разогнавшись до скорости $v = 27$ км/ч, въезжает на ледяную гору. На какую высоту H от начального уровня въедет конькобежец с разгона, если подъем горы составляет $h = 0{,}5$ м на каждые $s = 10$ м по горизонтали и коэффициент трения коньков о лед $k = 0{,}02$?

5.8. Тело массой $m = 1{,}5$ кг, брошенное вертикально вверх с высоты $h = 4{,}9$ м со скоростью $v_0 = 6$ м/с, упало на землю со скоростью $v = 5$ м/с. Определить работу сил сопротивления воздуха.

5.9. Камень массой 50 г, брошенный под углом к горизонту с высоты 20 м над поверхностью земли со скоростью 18 м/с, упал на землю со скоростью 24 м/с. Найти работу по преодолению сил сопротивления воздуха.

5.10. Самолет массой $m = 10^3$ кг летит горизонтально на высоте $H = 1200$ м со скоростью $v_1 = 50$ м/с. Затем мотор отключается, самолет переходит в планирующий полет и достигает земли со скоростью $v_2 = 25$ м/с. Определить среднюю силу сопротивления воздуха при спуске, принимая длину спуска равной 8 км.

5.11. Тело массой $m = 1$ кг движется по столу, имея в начальной точке скорость $v_0 = 2$ м/с. Достигнув края стола, высота которого $h = 1$ м, тело падает. Коэффициент трения тела о стол $k = 0{,}1$. Определить количество теплоты, выделившееся при неупругом ударе о землю. Путь, пройденный телом по столу, $s = 2$ м.

5.12. Прикрепленный к вертикальной пружине груз медленно опускают до положения равновесия, причем пружина растягивается на длину x_0. На сколько растянется пружина, если тому же грузу предоставить возможность падать свободно с такого положения, при котором пружина не растянута? Какой максимальной скорости $v_{\text{макс}}$ достигнет при этом груз? Каков характер движения груза? Масса груза m. Массой пружины пренебречь.

5.13. Падающим с высоты $h = 1{,}2$ м грузом забивают сваю, которая от удара уходит в землю на $s = 2$ см. Определить среднюю силу удара $F_{\text{ср}}$ и его продолжительность τ, если масса груза $M = 5 \cdot 10^2$ кг, масса сваи много меньше массы груза.

5.14. С горы высотой $h = 2$ м и основанием $b = 5$ м съезжают санки, которые затем останавливаются, пройдя по горизонтали путь $l = 35$ м от основания горы. Найти коэффициент трения.

5.15. Стальной шарик массой $m = 20$ г, падая с высоты $h_1 = 1$ м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту $h_2 = 81$ см. Найти: а) импульс силы, действовавшей на плиту за время удара; б) количество теплоты, выделившееся при ударе.

5.16. Легкий шарик начинает свободно падать и, пролетев расстояние l, сталкивается упруго с тяжелой плитой, движущейся вверх со скоростью u. На какую высоту h подскочит шарик после удара?

5.17. Воздушный шар, удерживаемый веревкой, поднялся на некоторую высоту. Как изменилась потенциальная энергия системы шар – воздух – Земля?

5.18. Хоккейная шайба, имея начальную скорость $v_0 = 5$ м/с, скользит до удара о борт площадки $s = 10$ м. Удар считать абсолютно упругим, коэффициент трения шайбы о лед $k = 0{,}1$, сопротивлением воздуха пренебречь. Определить, какой путь l пройдет шайба после удара.

5.19. Тело соскальзывает без трения с клина, лежащего на горизонтальной плоскости, два раза: первый раз клин закреплен; второй раз клин может скользить без трения. Будет ли скорость тела в конце соскальзывания с клина одинакова в обоих случаях, если тело оба раза соскальзывает с одной и той же высоты?

5.20. Почему трудно допрыгнуть до берега с легкой лодки, стоящей вблизи берега, и легко это сделать с парохода, находящегося на таком же расстоянии от берега?

5.21. Конькобежец массой $M = 70$ кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 3$ кг со скоростью $v = 8$ м/с относительно Земли. Найти, на какое расстояние s откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $k = 0{,}02$.

5.22. Человек стоит на неподвижной тележке и бросает горизонтально камень массой $m = 8$ кг со скоростью $v_1 = 5$ м/с относительно Земли. Определить, какую при этом человек совершает работу, если масса тележки вместе с человеком $M = 160$ кг. Проанализируйте зависимость работы от массы M. Трением пренебречь.

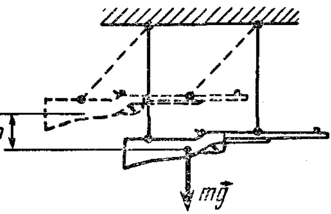


Рис. 28

5.23. Винтовка массой $M = 3$ кг подвешена горизонтально на двух параллельных нитях. При выстреле в результате отдачи она отклонилась вверх на $h = 19{,}6$ см (рис. 28). Масса пули $m = 10$ г. Определить скорость v_1, с которой вылетела пуля.

5.24. Пуля, летевшая горизонтально со скоростью $v = 40$ м/с, попадает в брусок, подвешенный на нити длиной $l = 4$ м, и застревает в нем. Определить угол α, на который отклонится брусок, если масса пули $m_1 = 20$ г, а бруска $m_2 = 5$ кг.

5.25. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на очень легком жестком стержне, и застревает в нем.

Масса пули в $n = 1000$ раз меньше массы шара. Расстояние от точки подвеса стержня до центра шара $l = 1$ м. Найти скорость пули v, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол $\alpha = 10°$.

5.26. Пуля массой $m_1 = 10$ г, летевшая горизонтально со скоростью $v_1 = 600$ м/с, ударилась в свободно подвешенный на длинной нити деревянный брусок массой $m_2 = 0{,}5$ кг и застряла в нем, углубившись на $s = 10$ см. Найти силу F_c сопротивления дерева движению пули. На какую глубину s_1 войдет пуля, если тот же брусок закрепить.

5.27. В покоящийся шар массой $M = 1$ кг, подвешенный на длинном жестком стержне, закрепленном в подвесе на шарнире, попадает пуля массой $m = 0{,}01$ кг. Угол между направлением полета пули и линией стержня равен $\alpha = 45°$. Удар центральный. После удара пуля застревает в шаре и шар вместе с пулей, отклонившись, поднимается на высоту $h = 0{,}12$ м относительно первоначального положения. Найти скорость пули v. Массой стержня пренебречь.

5.28. Маятник представляет собой прямой тонкий стержень длиной $l = 1{,}5$ м, на конце которого находится стальной шар массой $M = 1$ кг. В шар попадает летящий горизонтально со скоростью $v = 50$ м/с стальной шарик массой $m = 20$ г. Определить угол максимального отклонения маятника, считая удар упругим и центральным. Массой стержня пренебречь.

5.29. На нити, перекинутой через блок, подвешены два груза неравных масс m_1 и m_2. Найти ускорение центра масс этой системы. Решить задачу двумя способами, применяя: 1) закон сохранения энергии и 2) закон движения центра масс. Массами блока и нити пренебречь.

5.30. Молот массой $m = 1{,}5$ т ударяет по раскаленной болванке, лежащей на наковальне, и деформирует ее. Масса наковальни вместе с болванкой $M = 20$ т. Определить коэффициент полезного действия η при ударе молота, считая удар неупругим. Считать работу, совершенную при деформации болванки, полезной.

5.31. Тело массой m_1 ударяется неупруго о покоящееся тело массой m_2. Найти долю q потерянной при этом кинетической энергии.

5.32. На передний край платформы массой M, движущейся горизонтально без трения со скоростью v, опускают с небольшой высоты короткий брусок массой m. При какой минимальной длине платформы l брусок не упадет с нее, если коэффициент трения между бруском и платформой k. Какое количество теплоты Q выделится при этом.

5.33. Телу массой $m = 1$ кг, лежащему на длинной горизонтальной платформе покоящейся тележки, сообщают скорость $v = 10$ м/с. Коэффициент трения тела о платформу $k = 0{,}2$. Какой путь пройдет тележка к тому моменту, когда тело остановится на ней? Какое количество теплоты выделится при движении тела вдоль платформы? Тележка катится по рельсам без трения, ее масса $M = 100$ кг.

5.34. Два груза массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 15$ кг подвешены на нитях длиной $l = 2$ м так, что соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол $\alpha = 60°$ и отпущен. На какую высоту поднимутся оба груза после удара? Удар грузов считать неупругим. Какое количество теплоты при этом выделяется?

5.35. Шарик движется между двумя очень тяжелыми вертикальными параллельными стенками, соударяясь с ними по закону абсолютно упругого удара. Одна из стенок закреплена, другая движется от нее с постоянной горизонтальной скоростью $u_x = 0{,}5$ м/с. Определить число соударений n и окончательную скорость v_x шарика, если перед первым соударением со стенкой она была равна $v_{0x} = 19{,}5$ м/с.

5.36. Два шара подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Массы шаров $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 100$ г. Первый шар отклоняют так, что его центр тяжести поднимается на высоту $h = 4{,}5$ см, и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после соударения, если удар: а) упругий; б) неупругий?

5.37. Во сколько раз уменьшится скорость атома гелия после центрального упругого столкновения с неподвижным атомом водорода, масса которого в четыре раза меньше массы атома гелия?

5.38. На шар, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, налетает другой шар такого же радиуса, движущийся горизонтально. Между шарами происходит упругий центральный удар. Построить график зависимости доли переданной энергии от отношения масс шаров $\alpha = m_1/m_2$.

5.39. Для получения медленных нейтронов их пропускают сквозь вещества, содержащие водород (например, парафин). Найти, какую наибольшую часть своей кинетической энергии нейтрон массой m_0 может передать: а) протону (масса m_0); б) ядру атома свинца (масса $m = 207\ m_0$). Наибольшая часть передаваемой энергии соответствует упругому центральному удару.

5.40. Два идеально упругих шарика массами m_1 и m_2 движутся вдоль одной и той же прямой со скоростями v_1 и v_2.

Во время столкновения шарики начинают деформироваться и часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем деформация уменьшается, а запасенная потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую. Найти значение максимальной потенциальной энергии деформации.

5.41. Небольшое тело обтекаемой формы с плотностью ρ_1 падает в воздухе с высоты h на поверхность жидкости с плотностью ρ_2, причем $\rho_1 < \rho_2$. Определить глубину h_1 погружения тела в жидкость, время погружения t и ускорение a. Сопротивлением жидкости пренебречь.

5.42. На нити длиной l подвешен груз массой m. Определить, на какую минимальную высоту надо поднять этот груз, чтобы он, падая, разорвал нить, если минимальный груз массой M, подвешенный на нити и разрывающий ее, растягивает нить в момент разрыва на 1 % от ее длины. Принять, что для нити справедлив закон Гука вплоть до разрыва.

5.43. Определить максимальную дальность полета струи s из шприца диаметром $d = 4$ см, на поршень которого давит сила $F = 30$ Н. Плотность жидкости $\rho = 1000$ кг/м^3. Сопротивлением воздуха пренебречь ($S_{\text{отв}} \ll S_{\text{порш}}$).

5.44. Цилиндр диаметром D заполнен водой и расположен горизонтально. С какой скоростью u перемещается в цилиндре поршень, если на него действует сила F, а из отверстия в дне цилиндра вытекает струя диаметром d? Трением пренебречь. Силу тяжести не учитывать. Плотность жидкости ρ.

5.45. По гладкому горизонтальному проволочному кольцу могут без трения скользить две бусинки массами m_1 и m_2. Вначале бусинки были соединены ниткой и между ними находилась сжатая пружина. Нитку пережигают. После того как бусинки начали двигаться, пружинку убирают. В каком месте кольца бусинки столкнуться в 11-й раз? Столкновения бусинок абсолютно упругие. Массой пружины пренебречь.

5.46. Протон массой m, летящий со скоростью v_0, столкнулся с неподвижным атомом массой M, после чего стал двигаться в прямо противоположную сторону со скоростью $0{,}5v_0$, а атом перешел в возбужденное состояние. Найти скорость v и энергию E возбуждения атома.

5.47. При распаде неподвижного ядра образуются три осколка массами m_1, m_2 и m_3 с общей кинетической энергией E_0. Найти скорости осколков, если направления скоростей составляют друг с другом углы в 120°.

5.48. В неподвижный шар ударяется не по линии центров другой такой же шар. Под каким углом разлетятся шары, если они абсолютно упругие и абсолютно гладкие?

5.49. Два шара A и B с различными неизвестными массами упруго сталкиваются между собой. Шар A до соударения находился в покое, а шар B двигался со скоростью v. После соударения шар B приобрел скорость 0,5 v и начал двигаться под прямым углом к направлению своего первоначального движения. Определить направление движения шара A и его скорость v_A после столкновения.

5.50. При бомбардировке гелия α-частицами с энергией E_0 налетающая частица отклонилась на угол $\varphi = 60°$ по отношению к направлению ее движения до столкновения. Считая удар абсолютно упругим, определить энергии α-частицы W_α и ядра W_{He} после столкновения. Энергия теплового движения атомов гелия много меньше E_0.

5.51. Гладкий шарик из мягкого свинца налетает на такой же шарик, первоначально покоящийся. После столкновения второй шарик летит под углом α к направлению скорости первого шарика до столкновения. Определить угол β, под которым разлетаются шары после столкновения. Какая часть кинетической энергии T перейдет при столкновении в тепло Q?

5.52. Шар массой m, движущийся со скоростью v, налетает на покоящийся шар массой $m/2$ и после упругого удара продолжает двигаться под углом $\alpha = 30°$ к направлению своего первоначального движения. Найти скорости шаров после столкновения.

6. ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ (КИНЕМАТИКА, ДИНАМИКА)

6.1. Найти линейную скорость Земли v при ее орбитальном движении. Средний радиус земной орбиты $R = 1{,}5 \cdot 10^8$ км.

6.2. Пропеллер самолета радиусом 1,5 м вращается при посадке с частотой 2000 мин$^{-1}$, посадочная скорость самолета относительно Земли равна 162 км/ч. Определить скорость точки на конце пропеллера. Какова траектория движения этой точки?

6.3. Диск радиусом R катится без скольжения с постоянной скоростью v. Найти геометрическое место точек на диске, которые в данный момент имеют скорость v.

6.4. Цилиндрический каток радиусом R помещен между двумя параллельными рейками. Рейки движутся в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 (рис. 29). Определить угловую скорость вращения катка и скорость его центра, если проскальзывание отсутствует. Решить задачу для случая, когда скорости реек направлены в разные стороны.

6.5. По горизонтальной плоскости катится без скольжения с постоянной скоростью v_C обруч радиусом R. Каковы скорости и ускорения различных точек обруча относительно Земли? Выразить скорость как функцию угла между вертикалью и прямой, проведенной между точкой прикосновения обруча с плоскостью и данной точкой обруча.

6.6. Автомобиль движется со скоростью $v = 60$ км/ч. С какой частотой n вращаются его колеса, если они катятся по шоссе без скольжения, а внешний диаметр покрышек колес равен $d = 60$ см? Найти центростремительное ускорение $a_{ц.с}$ внешнего слоя резины на покрышках его колес.

6.7. На горизонтальную плоскость кладут тонкостенный цилиндр, вращающийся со скоростью v_0 вокруг своей оси. Какой будет скорость движения оси цилиндра, когда прекратится проскальзывание цилиндра относительно плоскости?

6.8. Совершает ли работу равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?

6.9. Груз массой m может скользить без трения по горизонтальному стержню, вращающемуся вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Груз соединяют с этим концом стержня пружиной, коэффициент упругости которой k. При какой угловой скорости ω пружина растянется на 50% первоначальной длины?

6.10. Две точечные массы m_1 и m_2 прикреплены к нити и находятся на абсолютно гладком столе. Расстояния от них до закрепленного конца нити равны l_1 и l_2 соответственно (рис. 30). Система вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через закрепленный конец, с угловой скоростью ω. Найти силы натяжения участков нити T_1 и T_2.

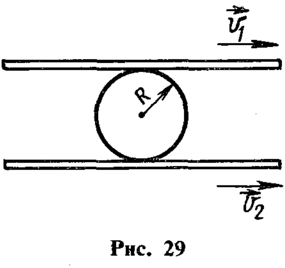


Рис. 29

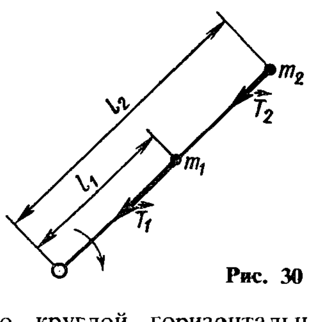


Рис. 30

6.11. Человек сидит на краю круглой горизонтальной платформы радиусом $R = 4$ м. С какой частотой n должна вращаться платформа вокруг вертикальной оси, чтобы человек не мог удержаться на ней при коэффициенте трения $k = 0{,}27$?

6.12. Тело массой m находится на горизонтальном диске на расстоянии r от оси. Диск начинает раскручиваться с малым ускорением. Построить график зависимости составляющей силы трения в радиальном направлении, действующей на тело, от угловой скорости вращения диска. При каком значении угловой скорости диска начнется соскальзывание тела?

6.13. Камень массой $m = 0,5$ кг, привязанный к веревке длиной $l = 50$ см, вращается в вертикальной плоскости. Сила натяжения веревки, когда камень проходит низшую точку окружности, $T = 44$ Н. На какую высоту h над нижней точкой окружности поднимется камень, если веревку перерезать в тот момент, когда его скорость направлена вертикально вверх?

6.14. Спортсмен посылает молот (ядро на тросике) на расстояние $l = 70$ м по траектории, обеспечивающей максимальную дальность броска. Какая сила T действует на руки спортсмена в момент броска? Масса молота $m = 5$ кг. Считать, что спортсмен разгоняет молот, вращая его в вертикальной плоскости по окружности радиусом $R = 1,5$ м. Сопротивление воздуха не учитывать.

6.15. Автомобиль массой $M = 3 \cdot 10^3$ кг движется с постоянной скоростью $v = 36$ км/ч: а) по горизонтальному мосту; б) по выпуклому мосту; в) по вогнутому мосту. Радиус кривизны моста в последних двух случаях $R = 60$ м. С какой силой давит автомобиль на мост (в последних двух случаях) в тот момент, когда линия, соединяющая центр кривизны моста с автомобилем, составляет угол $\alpha = 10^\circ$ с вертикалью?

6.16. По выпуклому мосту, радиус кривизны которого $R = 90$ м, со скоростью $v = 54$ км/ч движется автомобиль массой $m = 2$ т. В точке моста, направление на которую из центра кривизны моста составляет с направлением на вершину моста угол α, автомобиль давит с силой $F = 14\,400$ Н. Определить угол α.

6.17. Шарик массой $m = 100$ г подвешен на нити длиной $l = 1$ м. Шарик раскрутили так, что он начал двигаться по окружности в горизонтальной плоскости. При этом угол, составляемый нитью с вертикалью, $\alpha = 60^\circ$. Определить полную работу, совершаемую при раскручивании шарика.

6.18. С какой наибольшей скоростью может двигаться автомобиль на повороте с радиусом закругления $R = 150$ м, чтобы его не «занесло», если коэффициент трения скольжения шин о дорогу $k = 0,42$?

6.19. 1. Каким должен быть максимальный коэффициент трения скольжения k между шинами автомобиля и асфальтом, чтобы автомобиль мог пройти закругление радиусом $R = 200$ м при скорости $v = 100$ км/ч?

2. Автомобиль со всеми ведущими колесами, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу окружности $\alpha = 30°$ радиусом $R = 100$ м. С какой максимальной скоростью автомобиль может выехать на прямой участок пути? Коэффициент трения колес о землю $k = 0{,}3$.

6.20. Поезд движется по закруглению радиусом $R = 800$ м со скоростью $v = 72$ км/ч. Определить, на сколько внешний рельс должен быть выше внутреннего, чтобы на колесах не возникало бокового усилия. Расстояние между рельсами по горизонтали принять равным $d = 1{,}5$ м.

6.21. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью 72 км/ч, делая поворот радиусом кривизны 100 м. На сколько при этом он должен наклониться, чтобы не упасть на повороте?

6.22. 1. С какой максимальной скоростью v может ехать по горизонтальной плоскости мотоциклист, описывая дугу радиусом $R = 90$ м, если коэффициент трения скольжения $k = 0{,}4$?

2. На какой угол φ от вертикального направления он должен при этом отклониться?

3. Чему будет равна максимальная скорость мотоциклиста, если он будет ехать по наклонному треку с углом наклона $\alpha = 30°$ при том же радиусе закругления и коэффициенте трения?

4. Каким должен быть угол наклона трека α_0 для того, чтобы скорость мотоциклиста могла быть сколь угодно большой?

6.23. Самолет совершает поворот, двигаясь по дуге окружности с постоянной скоростью $v = 360$ км/ч. Определить радиус R этой окружности, если корпус самолета повернут вокруг направления полета на угол $\alpha = 10°$.

6.24. На повороте дороги радиусом $R = 100$ м равномерно движется автомобиль. Центр тяжести автомобиля находится на высоте $h = 1$ м, ширина колеи автомобиля $a = 1{,}5$ м. Определить скорость v, при которой автомобиль может опрокинуться. В поперечном направлении автомобиль не скользит.

6.25. Шофер, едущий на автомобиле, внезапно заметил впереди себя забор, перпендикулярный направлению его движения. Что выгоднее сделать, чтобы предотвратить аварию: затормозить или повернуть в сторону?

6.26. В вагоне поезда, идущего равномерно по криволинейному пути со скоростью $v = 72$ км/ч, производится взвешивание груза на пружинных весах. Масса груза $m = 5$ кг, а радиус закругления пути $R = 200$ м. Определить показание пружинных весов (силу натяжения пружины T).

6.27. Найти силу $F_{\text{ед.об}}$, отделяющую сливки (плотность $\rho_с = 0{,}93$ г/см^3) от снятого молока ($\rho_м = 1{,}03$ г/см^3) в расчете на единицу объема, если отделение происходит: а) в неподвижном сосуде; б) в центробежном сепараторе, вращающемся с частотой 6000 мин$^{-1}$, если жидкость находится на расстоянии $r = 10$ см от оси вращения.

6.28. Самолет делает «мертвую петлю» с радиусом $R = 100$ м и движется по ней со скоростью $v = 280$ км/ч. С какой силой F тело летчика массой $M = 80$ кг будет давить на сиденье самолета в верхней и нижней точках петли?

6.29. Определить силу натяжения T каната гигантских шагов, если масса человека $M = 70$ кг и канат при вращении образует со столбом угол $\alpha = 45°$. С какой угловой скоростью ω будут вращаться гигантские шаги, если длина подвеса $l = 5$ м?

6.30. Найти период T вращения маятника, совершающего круговые движения в горизонтальной плоскости. Длина нити l. Угол, образуемый нитью с вертикалью, α.

6.31. Грузик, подвешенный на нити, вращается в горизонтальной плоскости так, что расстояние от точки подвеса до плоскости, в которой происходит вращение, равно h. Найти частоту n вращения груза, считая ее неизменной.

6.32. Люстра массой $m = 100$ кг подвешена к потолку на металлической цепи, длина которой $l = 5$ м. Определить высоту h, на которую можно отклонить люстру, чтобы при последующих качениях цепь не оборвалась? Известно, что разрыв цепи наступает при силе натяжения $T > 1960$ Н.

6.33. Шарик массой m подвешен на нерастяжимой нити. На какой минимальный угол $\alpha_{\text{мин}}$ надо отклонить шарик, чтобы при дальнейшем движении нить оборвалась, если максимально возможная сила натяжения нити $1{,}5\,mg$?

6.34. Маятник отклоняют в горизонтальное положение и отпускают. При каком угле α с вертикалью сила натяжения нити будет равна по величине действующей на маятник силе тяжести? Маятник считать математическим.

6.35. Груз массой m, привязанный к нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости. Найти максимальную разность сил натяжений нити.

6.36. Гимнаст «крутит солнце» на перекладине. Масса гимнаста m. Считая, что вся его масса сосредоточена в центре тяжести, а скорость в верхней точке равна нулю, определить силу, действующую на руки гимнаста в нижней точке.

6.37. Один грузик подвешен на нерастяжимой нити длиной l, а другой – на жестком невесомом стержне такой же длины. Какие минимальные скорости нужно сообщить этим грузикам, чтобы они вращались в вертикальной плоскости?

6.38. Шарик массой M подвешен на нити. В натянутом состоянии нить расположили горизонтально и отпустили шарик. Вывести зависимость силы натяжения нити T от угла α, который образует в данный момент нить с горизонтальным направлением. Проверить выведенную формулу, решив задачу для случая прохождения шарика через положение равновесия, при $\alpha = 90°$.

6.39. Математический маятник длиной l и массой M отвели на угол φ_0 от положения равновесия и сообщили ему начальную скорость v_0, направленную перпендикулярно к нити вверх. Найти силу натяжения нити маятника T в зависимости от угла φ нити с вертикалью.

6.40. Грузик, подвешенный на нити, отводят в сторону так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают. Какой угол с вертикалью α образует нить в тот момент, когда вертикальная составляющая скорости грузика наибольшая?

6.41. Одинаковые упругие шарики массой m, подвешенные на нитях равной длины к одному крючку, отклоняют в разные стороны от вертикали на угол α и отпускают. Шарики ударяются и отскакивают друг от друга. Какова сила F, действующая на крючок: а) при крайних положениях нитей; б) в начальный и конечный моменты удара шариков; в) в момент наибольшей деформации шариков?

6.42. Математическому маятнику с гибкой нерастяжимой нитью длиной l сообщают из положения равновесия горизонтальную скорость v_0. Определить максимальную высоту его подъема h при движении по окружности, если $v_0^2 = 3gl$. По какой траектории будет двигаться шарик маятника после того, как он достиг максимальной высоты подъема h на окружности? Определить максимальную высоту H, достигаемую при этом движении маятника.

6.43. Маленький шарик подвешен в точке A на нити длиной l. В точке O на расстоянии $l/2$ ниже точки A в стену вбит гвоздь. Шарик отводят так, что нить занимает горизонтальное положение, и отпускают. В какой точке траектории исчезает сила натяжения нити? Как дальше будет двигаться шарик? До какой наивысшей точки поднимется шарик?

6.44. Сосуд, имеющий форму расширяющегося усеченного конуса с диаметром дна $D = 20$ см и углом наклона стенок $\alpha = 60°$, вращается вокруг вертикальной оси OO_1. При какой угловой скорости вращения сосуда ω маленький шарик, лежащий на его дне, будет выброшен из сосуда? Трение не учитывать.

6.45. Сфера радиусом $R = 2$ м равномерно вращается вокруг оси симметрии с частотой 30 $мин^{-1}$. Внутри сферы находится шарик массой $m = 0{,}2$ кг. Найти высоту h, соответствующую положению равновесия шарика относительно сферы, и реакцию сферы N.

6.46. Внутри конической поверхности, движущейся с ускорением a, вращается шарик по окружности радиусом R. Определить период T движения шарика по окружности. Угол при вершине конуса 2α.

6.47. Небольшое тело массой m соскальзывает вниз по наклонному скату, переходящему в мертвую петлю радиусом R (рис. 31). Трение ничтожно мало. Определить: а) какова должна быть наименьшая высота h ската, чтобы тело сделало полную петлю, не выпадая; б) какое давление F при этом производит тело на помост в точке, радиус-вектор которой составляет угол α с вертикалью.

6.48. Лента конвейера наклонена к горизонту под углом α. Определить минимальную скорость ленты $v_{мин}$, при которой частица руды, лежащая на ней, отделяется от поверхности ленты в месте набегания ее на барабан, если радиус барабана равен R.

6.49. Небольшое тело скользит с вершины сферы вниз. На какой высоте h от вершины тело оторвется от поверхности сферы радиусом R? Трением пренебречь.

6.50. Найти кинетическую энергию обруча массой m, катящегося со скоростью v. Проскальзывания нет.

6.51. Тонкий обруч без проскальзывания скатывается в яму, имеющую форму полусферы. На какой глубине h сила нормального давления обруча на стенку ямы равна его силе тяжести? Радиус ямы R, радиус обруча r.

6.52. Маленький обруч катится без скольжения по внутренней поверхности большой полусферы. В начальный момент у ее верхнего края обруч покоился. Определить: а) кинетическую энергию обруча в нижней точке полусферы; б) какая доля кинетической энергии приходится на вращательное движение обруча вокруг его оси; в) нормальную силу, прижимающую обод к нижней точке полусферы. Масса обруча равна m, радиус полусферы R.

6.53. Вода течет по трубе, расположенной в горизонтальной плоскости и имеющей закругление радиусом $R = 2$ м. Найти боковое давление воды. Диаметр трубы $d = 20$ см. Через поперечное сечение трубы в течение одного часа протекает $M = 300$ т воды.

6.54. Тело соскальзывает из точки A в точку B по двум искривленным наклонным поверхностям, проходящим через точки A и B один раз по выпуклой дуге, второй – по вогнутой. Обе дуги имеют одинаковую кривизну и коэффициент трения в обоих случаях один и тот же (рис. 32). В каком случае скорость тела в точке больше?

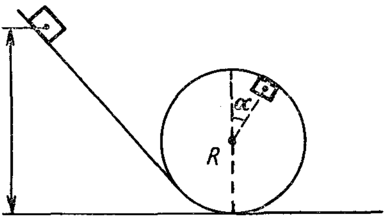


Рис. 31

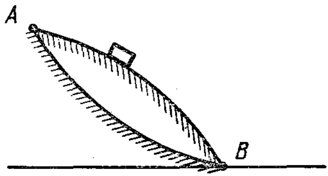


Рис. 32

6.55. Стержень ничтожной массы длиной l с двумя маленькими шариками m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) на концах может вращаться около оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно к нему. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. Определить угловую скорость ω и силу давления F на ось в момент прохождения стержнем с шариками положения равновесия.

6.56. На виток цилиндрической спирали, ось которой вертикальна, надевают маленькое колечко массой m. Колечко без трения начинает скользить по спирали. С какой силой F будет колечко давить на спираль после того, как оно пройдет n полных витков? Радиус витка R, расстояние между соседними витками h (шаг витка). Считать $h \ll R$.

6.57. Замкнутая металлическая цепочка лежит на гладком горизонтальном диске, будучи свободно насажена на центрирующее ее кольцо, соосное с диском. Диск приведен во вращение. Принимая форму цепочки за горизонтальную окружность, определить силу натяжения T вдоль цепочки, если ее масса $m = 150$ г, длина $l = 20$ см и цепочка вращается с частотой $n = 20$ с$^{-1}$

6.58. Реактивный самолет $m = 30$ т летит вдоль экватора с запада на восток со скоростью $v = 1800$ км/ч. На сколько изменится подъемная сила, действующая на самолет, если он будет лететь с той же скоростью с востока на запад?

7. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ. СПУТНИКИ. НЕВЕСОМОСТЬ

7.1. Найти размерность гравитационной постоянной γ в СИ. По ее значению и ускорению силы тяжести найти массу Земли M. Радиус Земли $R \approx 6400$ км.

7.2. Определить силы, с которыми действуют друг на друга вследствие тяготения два соприкасающихся свинцовых шара диаметром по метру каждый. Плотность свинца 11,3 г/см^3.

7.3. В свинцовом шаре радиусом R сделана сферическая полость, поверхность которой касается поверхности шара и проходит через его центр. Масса шара M. Используя закон всемирного тяготения, определить, с какой силой свинцовый шар будет притягивать маленький шарик массой m, находящийся на расстоянии $d > R$ от центра свинцового шара на прямой, соединяющей центры шара и полости, со стороны полости?

7.4. На каком расстоянии от поверхности Земли ускорение силы тяжести равно 1 м/с^2?

7.5. Определить ускорение g силы тяжести на высоте $h = 20$ км над Землей, принимая ускорение силы тяжести на поверхности Земли $g_0 = 981$ см/с^2, а радиус Земли $R = 6400$ км.

7.6. Доказать, что сила тяготения, действующая на материальную точку с массой m, помещенную внутри Земли, будет равна $F = mgr/R_0$, где r – расстояние точки от центра; R_0 – радиус Земли. Плотность Земли считать постоянной.

7.7. По оси вращения земного шара пробуравлена шахта. В нее падает тело. Определить максимальную скорость тела. Сопротивление движению не учитывать.

7.8. В каком направлении и с какой горизонтальной скоростью должен лететь вдоль экватора самолет, чтобы скомпенсировать уменьшение веса, обусловленное вращением Земли?

7.9. Почему космические ракеты, как правило, запускают в направлении с запада на восток? Почему наиболее выгодно запускать ракеты в плоскости экватора?

7.10. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность вещества планеты $\rho = 3 \cdot 10^3$ кг/м^3. Определить период обращения планеты вокруг собственной оси.

7.11. Найти среднюю плотность планеты, у которой на экваторе пружинные весы показывают вес тела на 10% меньше, чем на полюсе. Сутки на планете составляют $T = 24$ ч.

7.12. Какой продолжительности должны быть сутки на Земле, чтобы тела на экваторе были невесомы?

7.13. Найти зависимость веса тела от географической широты.

7.14. Вычислить отношение масс Солнца и Земли по таким данным: Луна совершает 13 обращений в течение года; среднее расстояние от Солнца до Земли в 390 раз больше расстояния от Луны до Земли.

7.15. Найти массу Солнца по постоянной тяготения γ, периоду T обращения Земли вокруг Солнца и расстоянию L от Земли до Солнца; $L = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м.

7.16. Может ли спутник двигаться по орбите, плоскость которой не проходит через центр Земли?

7.17. Спутник движется вокруг Земли на расстоянии h от ее поверхности. Радиус Земли R. Считая орбиту спутника круговой, выразить скорость движения и период обращения спутника через h, R и ускорение силы тяжести g на поверхности Земли.

7.18. Найти среднюю угловую ω и линейную v скорости орбитального движения искусственного спутника Земли, если период обращения его вокруг Земли составляет 105 мин.

7.19. Какими должны быть радиус обращения искусственного спутника Земли по круговой орбите и его линейная скорость, чтобы период обращения спутника был таким же, как у Земли? Какую траекторию будет описывать спутник при наблюдении с Земли? В какой плоскости должна находиться траектория полета спутника, чтобы наблюдателю, находящемуся на Земле, спутник казался неподвижным?

7.20. Какова первая космическая скорость для планеты, масса и радиус которой в два раза больше, чем у Земли?

7.21. Какова первая космическая скорость для планеты с такой же плотностью, как у Земли, но вдвое меньшим радиусом?

7.22. При выводе спутника на круговую орбиту, проходящую вблизи поверхности Земли, была совершена работа $A = 3{,}2 \cdot 10^{10}$ Дж. Найти массу спутника. Радиус Земли $R_З$ принять равным 6400 км.

7.23. Найти отношение затрат энергии на поднятие спутника на высоту $h_1 = 3200$ км и на запуск его по круговой орбите на той же высоте. Тот же вопрос для высоты $h_2 = 6400$ км.

7.24. В какой стадии движения межпланетного корабля космонавт почувствует состояние невесомости?

7.25. Как изменяется ход маятниковых («ходиков») и пружинных (наручных) часов в межпланетном корабле?

7.26. Как измерить массу тела в условиях невесомости?

7.27. Можно ли создать весомость внутри космического корабля?

7.28. Изменяется ли потенциальная энергия тел относительно Земли, если они перемещаются внутри движущегося по орбите искусственного спутника Земли?

7.29. Справедливы ли в условиях невесомости законы Паскаля и Архимеда?

7.30. Как будут изменяться линейная и угловая скорости спутника, движущегося в условиях слабого трения. Считать орбиту спутника круговой.

7.31. В каком случае и почему при трении о воздух космическая ракета нагревается сильнее: при ее запуске или при падении на Землю.

8. СТАТИКА

8.1. Фонарь массой $M = 10$ кг подвешен над серединой улицы шириной $l = 10$ м на канатике, допустимая сила натяжения которого $T = 500$ Н. Определить высоту H крепления концов канатика, если точка крепления фонаря должна находиться на высоте $h = 5$ м?

8.2. Можно ли натянуть трос горизонтально так, чтобы он не провисал?

8.3. Какова должна быть сила F, чтобы можно было равномерно двигать ящик массой $M = 60$ кг вдоль горизонтальной поверхности, если коэффициент трения между ящиком и площадкой $k = 0{,}27$, а сила действует под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту?

8.4. Какой угол α должно составлять направление силы с горизонтом, чтобы при равномерном перемещении груза по горизонтальной плоскости сила F была наименьшей? Сила приложена в центре тяжести груза, коэффициент трения равен k.

8.5. Катушка находитя на столе (рис. 33). В какую сторону она будет двигаться, если нить натягивается силой F_1, F_2 или F_3 (продолжение линии действия силы F_2 проходит через точку, лежащую на линии соприкосновения катушки со столом)?

8.6. Стержень AB, шарнирно закрепленный в точке A, опирается концом B на платформу (рис. 34). Какую минимальную силу F нужно приложить для того, чтобы сдвинуть платформу с места? Масса стержня m, коэффициент трения стержня о платформу k и угол, образуемый стержнем с верти-

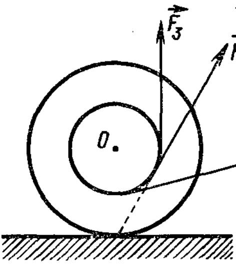


Рис. 33

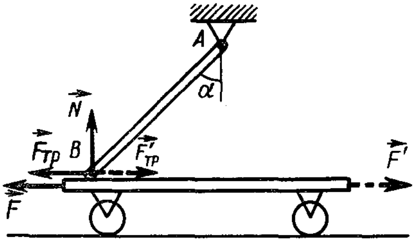


Рис. 34

калью, равен α. Трением качения колес платформы и трением в осях пренебречь.

8.7. К вертикальной гладкой стене в точке A на веревке длиной l подвешен шар массой m (рис. 35). Какова сила натяжения веревки T и сила давления шара на стену F, если его радиус равен R? Трением о стену пренебречь.

8.8. На плоскости, имеющей угол наклона к горизонту α, стоит цилиндр радиусом r. Какова наибольшая высота цилиндра, при которой он еще не опрокидывается, если он сделан из однородного материала?

8.9. Взвешивание металлического бруска было произведено при помощи нескольких динамометров с предельной нагрузкой по 50 Н у каждого. Общая масса бруска оказалась равной 17,5 кг. Каким образом было произведено взвешивание бруска и какое наименьшее количество динамометров потребовалось для этого?

8.10. Каков должен быть коэффициент трения k для того, чтобы клин, заколоченный в бревно, не выскакивал из него? Угол при вершине клина равен 30°.

8.11. Труба массой $M = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг лежит на земле. Какое усилие F надо приложить, чтобы приподнять краном трубу за один из ее концов?

8.12. Автомобиль массой 1,35 т имеет колесную базу длиной 3,05 м. Центр тяжести расположен на расстоянии 1,78 м позади передней оси. Определить силу, действующую на каждое из передних колес и на каждое из задних колес со стороны горизонтальной поверхности земли.

8.13. К двум одинаковым пружинам, соединенным один раз последовательно, а другой — параллельно (рис. 36), подвешивают один и тот же груз массой m. Найти удлинение Δx пружин в обоих

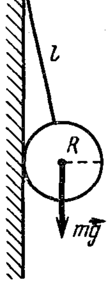


Рис. 35

случаях, если жесткость каждой пружины k. Будет ли одинаковым в обоих случаях расстояние Δl, на которое опустится груз?

8.14. Две пружины с коэффициентами упругости k_1 и k_2 соединяют один раз последовательно, другой раз – параллельно (см. рис. 36). Какой должна быть жесткость $k_{экв}$ пружины, которой можно было бы заменить эту систему из двух пружин?

8.15. К концу пружины, первоначальная длина которой равна l, подвешивают груз массой m. При этом длина пружины увеличивается на 0,1 l. В какой точке нерастянутой пружины нужно было подвесить груз массой $2m$, чтобы точка его подвеса оказалась на одинаковом расстоянии от концов пружины? Груз m по-прежнему прикреплен к нижнему концу пружины. Массой пружины пренебречь.

8.16. Каков должен быть минимальный коэффициент трения $k_{мин}$ материала стенок куба о горизонтальную плоскость, чтобы его можно было опрокинуть через ребро горизонтальной силой, приложенной к верхней грани? Чему должна быть равна приложенная сила F? Масса куба M.

8.17. Какой минимальной силой $F_{мин}$ можно опрокинуть через ребро куб, находящийся на горизонтальной плоскости? Каков должен быть при этом минимальный коэффициент трения k куба о плоскость? Масса куба M.

8.18. Высокий прямоугольный брусок с квадратным основанием стоит на горизонтальной поверхности. Как приблизительно определить коэффициент трения между бруском и поверхностью, располагая для этой цели только линейкой?

8.19. Железный прут массой M изогнут пополам так, что его части образуют прямой угол (рис. 37). Прут подвешен за один из концов на шарнире. Найти угол α, который образует с вертикалью верхний стержень в положении равновесия.

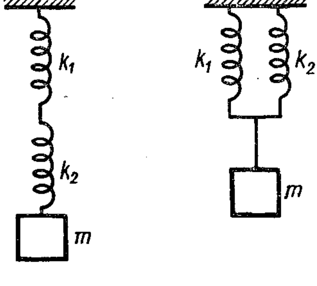


Рис. 36

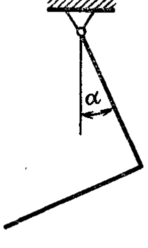


Рис. 37

8.20. Однородная балка массой M и длиной l подвешена за концы на двух пружинах (рис. 38). Обе пружины в ненагруженном состоянии имеют одинаковую длину, но жесткость левой пружины в n раз больше жесткости правой (при действии одинаковой нагрузки удлинение у правой пружины в n раз больше, чем у левой). На каком расстоянии x от левого конца балки надо подвесить груз массой m, чтобы она приняла горизонтальное положение? Считать, что $n = 2$.

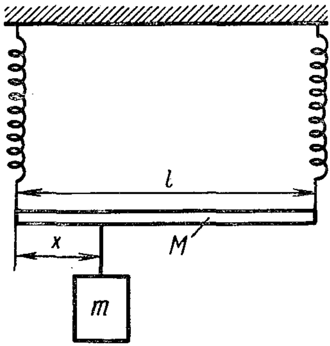


Рис. 38

8.21. Шар массой $m = 4{,}9$ кг опирается на две гладкие плоскости, образующие угол, причем левая образует с горизонтом угол $\alpha = 35^\circ$, а правая – $\beta = 20^\circ$. Определить силы F_1 и F_2, с которыми шар давит на плоскости. Решить задачу двумя способами: а) разложением сил и б) правилом момента.

8.22. Колесо радиусом R и массой m стоит перед ступенькой высотой h. Какую наименьшую горизонтальную силу F надо приложить к оси колеса O, чтобы оно могло подняться на ступеньку? Трением пренебречь.

8.23. Как легче сдвинуть с места железнодорожный вагон: прилагая силу к корпусу вагона или к верхней части обода колеса?

8.24. При резком торможении автомобиля его передок опускается. Почему?

8.25. На поверхности воды плавает деревянная пластинка, к которой прилагается пара сил (две равные антипараллельные силы, не действующие по одной прямой) в горизонтальном направлении. Относительно какой точки поворачивается пластинка?

8.26. Тяжелая однородная доска массой M и длиной l упирается одним концом в угол между стенкой и полом, к другому концу доски привязан канат. Определить силу натяжения каната F, если угол между доской и канатом $\beta = 90^\circ$. Как меняется эта сила с увеличением угла α между доской и полом, если угол β остается постоянным?

8.27. К совершенно гладкой вертикальной стенке приставлена лестница массой m. Лестница образует с горизонтальной опорой угол α. Центр тяжести ее расположен в середине.

Как направлены и чему равны силы, действующие на лестницу со стороны стенки и опоры? Найти построением направление силы, действующей на лестницу со стороны опоры.

8.28. Стержень AB массой $m = 5$ кг прикреплен к неподвижной опоре шарниром A и может вращаться в вертикальной плоскости (рис. 39). К концу B стержня прикреплена нить. Нить перекинута через блок C и к ней подвешен груз массой $m_1 = 2{,}5$ кг. Оси блока C и шарнира A расположены на одной вертикали, причем $AC = AB$. Найти, при каком угле α между стержнем и вертикалью система будет в равновесии. Какая сила F_{AB} действует вдоль стержня в точке A? Является ли равновесие устойчивым?

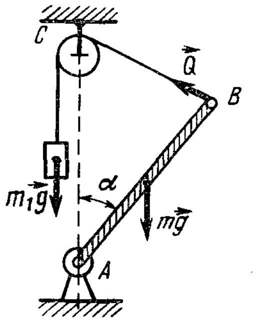


Рис. 39

8.29. У стены стоит лестница. Коэффициент трения лестницы о стену $k_1 = 0{,}4$, коэффициент трения лестницы о землю $k_2 = 0{,}5$. Центр тяжести лестницы находится на середине ее длины. Определить наименьший угол α, который лестница может образовать с горизонтом, не соскальзывая.

8.30. Лестница длиной $l = 4$ м приставлена к гладкой стене под углом к полу $\alpha = 60°$. Максимальная сила трения между лестницей и полом $F_{тр} = 200$ Н. На какую высоту h может подняться по лестнице человек массой $m = 60$ кг, прежде чем лестница начнет скользить? Массой лестницы пренебречь.

8.31. Кубик стоит у стены так, что одна из его граней образует угол α с полом. При каком значении коэффициента трения кубика о пол это возможно, если трение о стенку пренебрежимо мало?

8.32. 1. На веревочной петле в горизонтальном положении висит стержень. Нарушится ли равновесие, если справа от петли стержень согнуть?

2. Допустим, что стержень с одной стороны утолщен. Одинаковы ли массы частей стержня справа и слева от петли?

8.33. Доказать, что центр тяжести плоского треугольника находится в точке пересечения медиан.

8.34. Доказать, что центр тяжести треугольника, составленного из однородных тонких стержней, лежит в центре круга, вписанного в треугольник, вершины которого лежат на серединах сторон данного треугольника.

8.35. Десять шариков, массы которых соответственно равны 1, 2, 3, ..., 10 г, укреплены на невесомом стержне длиной

90 см так, что между центрами двух соседних шариков расстояние равно 10 см. Найти центр массы системы.

8.36. Однородная тонкая пластинка имеет форму круга радиусом R, в котором вырезано круглое отверстие вдвое меньшего радиуса, касающееся края пластинки. Где находится центр тяжести?

8.37. Где находится центр тяжести куба, из которого удален кубик с ребром, равным $a/2$ (рис. 40)?

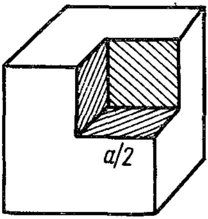


Рис. 40

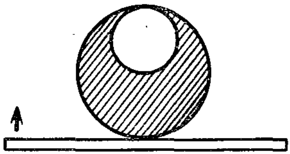


Рис. 41

8.38. В гладкий высокий цилиндрический стакан помещена палочка длиной $l = 15$ см и массой $m = 0{,}025$ кг. С какими силами действует палочка на дно и стенки стакана, если радиус основания стакана $R = 6$ см? Трением пренебречь.

8.39. Два одинаковых шара радиусом r и массой m положены в вертикальный открытый с обеих сторон полый цилиндр радиусом $R\,(r > R/2)$. Вся система находится на горизонтальной плоскости. Какой должна быть минимальная масса полого цилиндра M, чтобы шары не могли его опрокинуть?

8.40. На земле лежат вплотную два одинаковых бревна цилиндрической формы. Сверху кладут такое же бревно. При каком коэффициенте трения k между ними они не раскатятся (по земле бревна не скользят)?

8.41. Параллельно оси цилиндра радиусом R на расстоянии $R/2$ от его центра просверлено круглое отверстие. Радиус отверстия равен $R/2$. Цилиндр лежит на дощечке, которую медленно поднимают за один конец (рис. 41). Найти предельный угол α наклона дощечки, при котором цилиндр еще будет находиться в равновесии. Коэффициент трения цилиндра о дощечку $k = 0{,}2$.

8.42. Полушар и цилиндр одинакового радиуса, из одного и того же материала соединены, как показано на рис. 42. Система опирается на горизонтальную плоскость. При какой высоте x цилиндра она будет находиться в безразличном равновесии? Центр тяжести полушара находится на оси симметрии, отступая на 3/8 радиуса от центра.

8.43. В цилиндрический стакан наливают воду. При каком уровне воды центр тяжести стакана с водой занимает наинизшее положение?

8.44. Тяжелый брусок удерживается силой трения между двумя горизонтальными стержнями A и B (рис. 43). Каково должно быть расстояние от центра тяжести бруска до точки соприкосновения со стержнем A, чтобы он не мог выскользнуть из своих опор? Расстояние a, угол α и коэффициент трения k заданы.

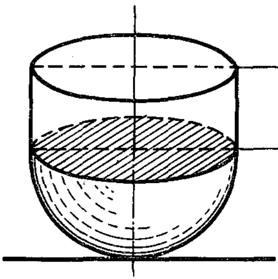


Рис. 42

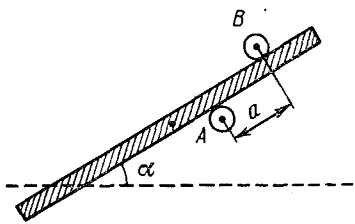


Рис. 43

8.45. Какую нужно совершить работу, чтобы повернуть вокруг ребра на другую грань: а) куб массой 200 кг; б) полый куб, наполовину наполненный водой? Масса куба мала по сравнению с массой наполняющей его воды. Ребро куба равно 1 м. Работу силы тяжести после перехода кубом положения неустойчивого равновесия не учитывать.

8.46. Ящик в форме куба перемещают на некоторое расстояние: один раз волоком, а другой – кантованием (т. е. опрокидыванием через ребро). При каком значении коэффициента трения скольжения k работы перемещения волоком и кантованием равны?

9. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

9.1. Составить уравнение гармонического колебания, если амплитуда колебания 4 см, а период – 0,01 с, $x_0 = 0$.

9.2. За какую часть периода T тело, совершающее гармонические колебания, проходит весь путь от среднего положения до крайнего? первую половину пути? вторую его половину?

9.3. Какую часть периода груз маятника находится в пределах 1 см от положения равновесия, если амплитуда его колебаний равна 2 см?

9.4. Показать, что период движения по окружности математического маятника, описывающего конус (так называемый конический маятник), равен периоду его колебаний, совершающихся в одной плоскости при малых углах отклонения.

9.5. На какую часть длины надо уменьшить длину математического маятника, чтобы период колебаний маятника на высоте 10 км был равен периоду его колебаний на поверхности Земли *?

9.6. Определить, на сколько отстанут маятниковые (ходиковые) часы за сутки, если их поднять на высоту 5 км над поверхностью Земли *.

9.7. Как по изменению периода колебаний маятника, помещенного над рудным месторождением, плотность которого равна ρ, можно приблизительно оценить объем месторождения, считая его по форме шарообразным? Плотность Земли равна ρ_0 $(\rho_0 > \rho)$.

9.8. Изменится ли период колебаний маятника от того, что мы поместим его в воду? Маятнику придана идеально обтекаемая форма и можно принять, что трение о воду равно нулю.

9.9. В неподвижном лифте висит маятник, период колебаний которого $T = 1$ с. С каким ускорением движется лифт, если период колебаний этого маятника стал равным $T_1 = 1{,}1$ с? В каком направлении движется лифт?

9.10. Найти период колебаний T математического маятника длиной l, подвешенного в вагоне, движущемся горизонтально с ускорением a.

9.11. Определить длину звуковой волны λ в воде, вызываемой источником колебаний с частотой 200 Гц, если скорость звука в воде равна 1450 м/с.

9.12. Какой камертон звучит дольше: закрепленный в тисках или стоящий на резонаторном ящике?

9.13. Скорость звука в воде 1450 м/с. На каком расстоянии находятся ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний равна 725 Гц?

9.14. При какой скорости v поезда маятник длиной $l = 44$ см, подвешенный в вагоне, особенно сильно раскачивается, если длина рельсов 25 м?

9.15. Волны распространяются со скоростью 360 м/с при частоте, равной 450 Гц. Чему равна разность фаз двух точек, отстоящих друг от друга на 20 см?

---

* Вращение Земли не учитывать.

9.16. Тело находится в некоторой точке A на внутренней поверхности сферы. В каком случае оно быстрее достигнет нижней точки сферы B: если будет скользить по поверхности сферы или по наклонной плоскости AB? Трение в обоих случаях пренебрежимо мало, начальная скорость тела равна нулю и расстояние AB много меньше радиуса сферы.

9.17. Груз, подвешенный к пружине, вызвал ее удлинение на $\Delta l = 4$ см. Найти период T собственных колебаний пружины вместе с грузом.

9.18. Найти период T собственных колебаний в системах, описанных в задаче 8.14 (см. рис. 36).

10. ГИДРОСТАТИКА

10.1. В полый куб с ребром a налита доверху жидкость плотностью ρ. Определить силы, действующие на грани куба.

10.2. Сосуд, имеющий форму усеченного конуса с приставным дном, опущен в воду. Если в сосуд налить 200 г воды, то дно оторвется. Отпадет ли дно, если на него поставить гирю 200 г? налить 200 г масла? налить 200 г ртути?

10.3. В сосуд с водой вставлена трубка сечением $S = 2$ см^2. В трубку налили 72 г масла ($\rho_м = 900$ кг/м^3). Найти разность уровней масла и воды.

10.4. При подъеме груза массой $m = 2$ т с помощью гидравлического пресса была затрачена работа $A = 40$ Дж. При этом малый поршень сделал $n = 10$ ходов, перемещаясь за один ход на $h = 10$ см. Во сколько раз площадь большого поршня больше площади малого, если к. п. д. пресса равен 1.

10.5. В сообщающиеся сосуды диаметрами D_1 и D_2 налита вода. На сколько изменится уровень воды в сосудах, если положить кусок дерева массой m в первый сосуд? во второй? Плотность воды ρ_0.

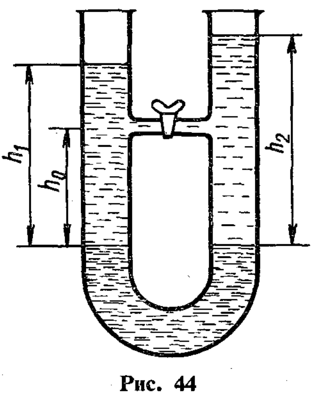


Рис. 44

10.6. В колена U-образной трубки налиты вода и спирт, разделенные ртутью. Уровень ртути в обоих коленах одинаков. На высоте 24 см от уровня ртути колена соединены горизонтальной трубкой с краном (рис. 44). Вначале кран закрыт. Определить высоту столба спирта h_2 ($\rho_с = 800$ кг/м^3), если высота столба воды $h_1 = 32$ см. Что будет, если открыть кран? При каком расположении трубки при открывании крана будет сохраняться равновесие?

10.7. Льдина площадью поперечного сечения $S = 1$ м^2 и высотой $H = 0{,}4$ м плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

10.8. В стакане плавает кусок льда. Изменится ли уровень воды, когда лед растает? Рассмотреть дополнительно случаи: 1) когда во льду находился пузырек воздуха; 2) когда во льду находилась свинцовая пластинка.

10.9. Одна из бутылок наполнена водой, другая – ртутью. Потонет ли бутылка с водой, если ее опустить в воду? Потонет ли бутылка с ртутью, если ее опустить в ртуть?

10.10. Прямоугольная коробочка из жести массой $m = 76$ г с площадью дна $S = 38$ см^2 и высотой $H = 6$ см плавает в воде. Определить высоту h надводной части коробочки.

10.11. Кастрюля емкостью 2 л доверху наполнена водой. В нее ставят тело объемом 0,5 л и массой 0,6 кг. Сколько воды вытечет из кастрюли?

10.12. Жестяная банка с грузом плавает на поверхности воды, налитой в сосуд. При этом уровень воды в сосуде равен H_1. Больше или меньше H_1 будет уровень H_2, если груз из банки переложить на дно сосуда? Плотность груза больше плотности воды.

10.13. В сосуд с вертикальными стенками и площадью дна S налита жидкость с плотностью ρ. На сколько изменится уровень жидкости в сосуде, если в него опустить тело произвольной формы массой m, которое не тонет?

10.14. В U-образной трубке сечением S налита жидкость с плотностью ρ. На сколько поднимется уровень жидкости в правом колене трубки по отношению к первоначальному уровню, если в левое колено опустили тело массой m и плотностью $\rho_1 < \rho$?

10.15. На дне водоема установлена бетонная конструкция грибовидной формы, размеры которой указаны на рис. 45. Глубина реки H. С какой силой давит конструкция на дно реки? Плотность бетона ρ, воды ρ_0.

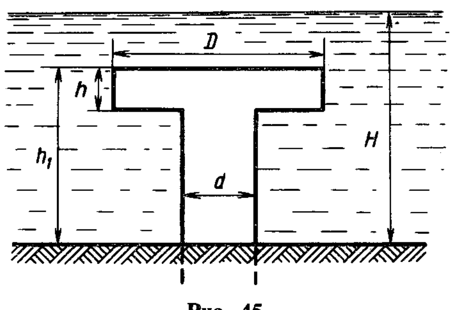


Рис. 45

10.16. Деревянный кубик лежит на дне сосуда. Всплывет ли он, если в сосуд налить воду (вода не проникает под кубик)?

10.17. Круглая дырка площадью S_1 в дне сосуда прикрыта без усилия конической пробкой с площадью основания S_2. При каком наибольшем значении плотности материала пробки ρ можно добиться ее всплытия, доливая воду в сосуд? Плотность воды ρ_0.

10.18. Пустую открытую бутылку погрузили в воду горлышком вниз на некоторую глубину h и опустили. При этом бутылка не всплывала, не опускалась, а находилась в положении равновесия. Почему? Будет ли это равновесие устойчивым? Определить глубину погружения, если емкость бутылки $V_0 = 0{,}5$ л, масса $m = 0{,}4$ кг. Давление атмосферы $p_0 = 101$ кПа, температура постоянная. Объемом стенок бутылки пренебречь.

10.19. Полый шар (внешний радиус R_1, внутренний R_2), сделанный из материала с плотностью ρ_1, плавает на поверхности жидкости с плотностью ρ_2. Какова должна быть плотность ρ вещества, которым следует заполнить внутреннюю полость шара, чтобы он находился в безразличном равновесии внутри жидкости?

10.20. Полый шар, отлитый из чугуна, плавает в воде, погрузившись ровно наполовину. Найти объем V внутренней полости шара, если масса шара $m = 5000$ г, а плотность чугуна $\rho = 7{,}8$ г/см^3.

10.21. На весах уравновешен сосуд с водой. Как изменится равновесие, если в воду целиком опустить подвешенный на нитке брусок размером $5 \times 3 \times 3$ см^3 так, чтобы он не касался дна? Какой груз и на какую чашку надо положить, чтобы сохранить равновесие?

10.22. Алюминиевый и железный сплошные шары уравновешены на рычаге. Нарушится ли равновесие, если шары погрузить в воду? Рассмотреть два случая: а) шары одинаковой массы; б) шары одинакового объема.

10.23. Вес куска железа в воде $P = 1{,}67$ Н. Найти его объем $V_ж$. Плотность железа $\rho_ж = 7{,}8$ г/см^3.

10.24. Вес тела в воде в три раза меньше, чем в воздухе. Какова плотность материала тела?

10.25. Брусок дерева плавает в воде. Как изменится глубина погружения бруска в воде, если поверх воды налить масло?

10.26. Некоторое тело плавает на поверхности воды в закрытом сосуде. Как изменится глубина погружения тела, если накачать воздух в сосуд?

10.27. Один конец нити закреплен на дне, а второй прикреплен к пробковому поплавку. При этом 0,75 всего объема поплавка погружено в воду. Определить силу натяжения нити F, если масса поплавка равна 2 кг и плотность пробки 0,25 г/см^3. Массой нити пренебречь.

10.28. На крюке динамометра висит ведерко. Изменится ли показание динамометра, если ведерко наполнить водой и погрузить в воду?

10.29. Сосуд, предельно наполненный водой, висит на динамометре. Изменится ли показание динамометра, если в воду опустить гирю, подвешенную на нити, не касаясь дна?

10.30. На рычажных весах уравновешены сосуд с водой и штатив с медной гирей массой $m = 100$ г (рис. 46). Затем гиря, подвешенная на нити, опускается в воду. Как восстановить равновесие весов? Плотность меди $\rho_м = 8{,}9$ г/см^3.

10.31. Тонкая однородная палочка шарнирно укреплена за верхний конец. Нижняя часть палочки погружена в воду, причем равновесие достигается тогда, когда палочка расположена наклонно к поверхности воды и в воде находится половина палочки. Какова плотность материала, из которого сделана палочка?

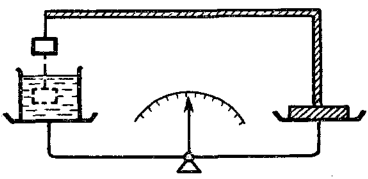


Рис. 46

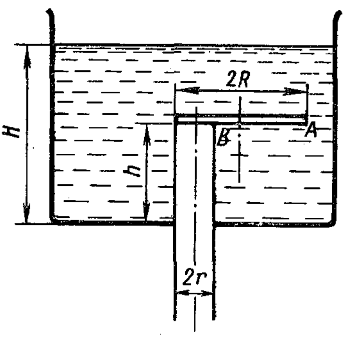


Рис. 47

10.32. Два шарика радиусами r_1 и r_2, сделанные из материалов с плотностями ρ_1 и ρ_2, соединены невесомым стержнем длиной l. Затем вся система помещена в жидкость с плотностью ρ, причем $\rho < \rho_1$ и $\rho < \rho_2$. В какой точке стержня нужно его повесить, для того чтобы система находилась в равновесии при горизонтальном положении стержня?

10.33. Из сосуда, заполненного водой, выходит труба радиусом r и высотой h (рис. 47). Труба закрыта круглой пластиной радиусом R и массой M, которую прижимает к трубе давление воды. С какой силой F нужно подействовать на пластину в точке A, для того чтобы она повернулась, открыв трубу? Сосуд заполнен водой до высоты H. Толщина пластины пренебрежимо мала.

10.34. На весах уравновешено тело, погруженное в жидкость. Изменится ли показание весов при нагревании жидкости вместе с погруженным в нее телом?

10.35. Сплошное однородное тело объемом V, плотность материала которого ρ, плавает на границе между тяжелой жидкостью с плотностью ρ_1 и более легкой жидкостью с плотностью ρ_2. Какая часть объема тела V_1 будет находиться в тяжелой жидкости?

10.36. Кубик из дерева, имеющий сторону 10 см, плавает между маслом и водой, находясь ниже уровня масла на 2,5 см. Нижняя поверхность кубика на 2,5 см ниже поверхности раздела. Какова масса m кубика, если плотность масла 0,8 г/см^3? Определить силы давления F_1 и F_2 на верхнюю и нижнюю грани кубика. Изменится ли глубина погружения кубика в воду при доливании масла?

10.37. Стальной кубик плотностью 7,8 г/см^3 плавает в ртути (плотность 13,6 г/см^3). Поверх ртути наливается вода так, что она покрывает кубик тонким слоем. Какова высота H слоя воды? Длина ребра кубика $a = 10$ см. Определить давление p на нижнюю грань кубика.

10.38. Кусок пробки весит в воздухе 0,147 Н, кусок свинца 1,1074 Н. Если эти куски связать, а затем подвесить к чашке весов и опустить в керосин, то показания весов будет 0,588 Н. Определить плотность пробки, учитывая, что плотность керосина 0,8 г/см^3, а свинца 11,3 г/см^3.

10.39. В сосуд с водой погружается открытый цилиндрический стакан: один раз дном вверх, а другой – дном вниз, на одну и ту же глубину. В каком из этих случаев работа, которую нужно совершить, чтобы погрузить стакан в воду, будет больше? Вода из сосуда не выливается и в стакан, погруженный дном вниз, не попадает.

10.40. Две одинаковые по массе оболочки шара – одна из эластичной резины, а вторая из прорезиненной ткани – наполнены одним и тем же количеством водорода и у Земли занимают равный объем. Который из шаров поднимется выше и почему, если водород из них выходить не может?

10.41. Во сколько раз изменится подъемная сила газа, наполняющего аэростат (дирижабль), если будет применяться гелий вместо водорода?

10.42. К динамометру подвешена тонкостенная трубка ртутного барометра. Что показывает динамометр? Будут ли изменяться его показания при изменении атмосферного давления?

10.43. Определить приближенно массу газовой оболочки, окружающей земной шар.

10.44. Г-образная трубка, длинное колено которой открыто, наполнена водородом. Куда будет выгнута резиновая пленка, закрывающая короткое колено трубки?

10.45. В трубе с сужением течет вода. В трубу пущен эластичный резиновый мячик. Как изменится его диаметр при прохождении узкой части трубы?

10.46. Тело, имеющее массу $m = 2$ кг и объем $V = 1000$ см^3, находится в озере на глубине $h = 5$ м.

Какая работа должна быть совершена при его подъеме на высоту $H = 5$ м над поверхностью воды?

Равна ли совершенная при этом работа изменению потенциальной энергии тела? Объясните результат.

10.47. В водоеме укреплена вертикальная труба с поршнем таким образом, что нижний ее конец погружен в воду. Поршень, лежавший вначале на поверхности воды, медленно поднимают на высоту $H = 15$ м. Какую работу пришлось при этом совершить? Площадь поршня $S = 1$ дм^2, атмосферное давление $p = 101$ кПа. Весом поршня пренебречь.

10.48. Подводная лодка находится на глубине $h = 100$ м. С какой скоростью через отверстие в корпусе лодки будет врываться струя воды? Сколько воды проникает за один час, если диаметр отверстия равен $d = 2$ см? Давление воздуха в лодке равно атмосферному давлению. Изменением давления внутри лодки пренебречь.

10.49. Из брандспойта бьет струя воды. Расход воды $Q = 60$ л/мин. Какова площадь поперечного сечения струи S_1 на высоте $h = 2$ м над концом брандспойта, если вблизи него сечение равно $S_0 = 1{,}5$ см^2?

10.50. Почему быстролетящая пуля пробивает в пустом пластмассовом стакане лишь два маленьких отверстия, а стакан, наполненный водой, разбивается при попадании пули вдребезги?

II. Молекулярная физика

11. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

11.1. Сколько молекул содержится в 1 $см^3$ воды? Какова масса молекулы воды? Каков приблизительный размер молекулы воды?

11.2. Хорошо откачанная лампа накаливания объемом 10 $см^3$ имеет трещину, в которую ежесекундно проникает миллион частиц газа. Сколько времени понадобится для наполнения лампы до нормального давления, если скорость проникновения газа остается постоянной? Температура 0 °С.

11.3. За 10 суток полностью испарилось из стакана 100 г воды. Сколько в среднем вылетало молекул с поверхности воды за 1 с?

11.4. В озеро средней глубиной 10 м и площадью 10 $км^2$ бросили кристаллик поваренной соли NaCl массой 0,01 г. Сколько ионов хлора оказалось бы в наперстке воды объемом 2 $см^3$, зачерпнутом из этого озера, если считать, что соль, растворившись, равномерно распределилась в озере?

11.5. Кристаллы поваренной соли NaCl кубической системы состоят из чередующихся атомов (ионов) Na и Cl (рис. 48). Определить наименьшее расстояние между их центрами. Молярная масса поваренной соли $\mu = 59{,}5$ г/моль, а ее плотность $\rho = 2{,}2$ г/$см^3$.

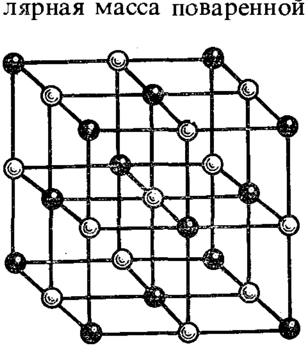


Рис. 48

11.6. Кубическая кристаллическая решетка железа содержит один атом железа на элементарный куб, повторяя который, можно получить всю решетку кристалла. Определить расстояние между ближайшими атомами железа, если плотность железа $\rho = 7{,}9$ г/$см^3$, атомная масса $A = 56$.

11.7. На пути молекулярного пучка стоит «зеркальная» стенка. Найти давление, испытываемое этой стенкой, если скорость молекул в пучке $v = 10^3$ м/с, концентрация $n = 5 \cdot 10^{17}$ 1/м^3, масса $m = 3{,}32 \cdot 10^{-27}$ кг. Рассмотреть три случая: а) стенка расположена перпендикулярно скорости пучка и неподвижна; б) пучок движется по направлению, составляющему со стенкой угол $\alpha = 45°$; в) стенка движется навстречу молекулам со скоростью $u = 50$ м/с.

11.8. Как изменилось бы давление в сосуде с газом, если бы внезапно исчезли силы притяжения между его молекулами?

12. ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

12.1. В два сосуда конической формы, расширяющихся кверху и книзу, и цилиндрический налита вода при температуре $t = 100$ °С. Как изменится давление на дно сосудов после охлаждения воды до комнатной температуры?

12.2. Две линейки – одна медная, другая железная – наложены одна на другую так, что они совпадают только одним концом. Определить длины линеек при $t = 0$ °С, зная, что разность их длин при любой температуре составляет $\Delta l = 10$ см. Коэффициент линейного расширения меди $\alpha_1 = 17 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$, железа – $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$.

12.3. Часы, маятник которых состоит из груза малых размеров и легкой латунной нити, идут правильно при 0 °С. Найти коэффициент линейного расширения латуни, если при повышении температуры до $t = +20$ °С часы отстанут за сутки на 16 с.

12.4. На сколько часы будут уходить вперед за сутки при $t_0 = 0$ °С, если они выверены при $t = 20$ °С, и материал, из которого сделан маятник, имеет коэффициент линейного расширения $\alpha = 0{,}000012$ К$^{-1}$?

12.5. При $t_0 = 0$ °С часы спешат в сутки на $\tau = 20$ с. При какой температуре часы будут идти точно? Коэффициент линейного расширения материала маятника $\alpha = 1{,}9 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

12.6. Какую силу F надо приложить к стальному стержню сечением $S = 1$ см^2, чтобы растянуть его на столько же, на сколько он удлиняется при нагревании на $\Delta t = 1$ °С? Коэффициент линейного расширения $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$. Модуль Юнга $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Н/м^2.

12.7. Толщина биметаллической пластинки, составленной из одинаковых полосок стали и цинка, равна $d = 0{,}1$ см. Определить радиус кривизны r пластинки при повышении температуры на $\Delta t = 11$ °С. Коэффициент линейного расширения цинка $\alpha_1 = 25 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$, а стали $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$.

12.8. Концы стального стержня сечением $S = 1$ см^2, находящегося при температуре $t = 20\,°C$, прочно закреплены. С какой силой стержень будет действовать на опоры, если его нагреть до $t_1 = 200\,°C$? Модуль Юнга стали $E = 2{,}0 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, коэффициент линейного расширения $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$?

12.9. Каково давление газа p_0 в электрической лампочке, объем которой $V = 1$ л, если при отламывании кончика последней под поверхностью воды на глубине $h = 1$ м в лампочку вошло $m = 998{,}7$ г воды? Атмосферное давление нормальное.

12.10. Стеклянный баллон объемом $V = 1$ л был наполнен испытуемым газом до давления $p = 10^5$ Па и взвешен. Его вес оказался равным $Q = 0{,}9898$ Н. Затем часть газа была удалена так, что давление в баллоне упало до $p_1 = 5 \cdot 10^4$ Па. Новый вес баллона оказался равным $Q_1 = 0{,}9800$ Н. Какова плотность испытуемого газа при нормальном атмосферном давлении? Температура постоянна.

12.11. В ртутный барометр попал пузырек воздуха, вследствие чего барометр показывает давление меньше истинного. При сверке его с точным барометром оказалось, что при давлении $p = 768$ мм рт. ст. барометр показывает $p' = 748$ мм рт. ст., причем расстояние от уровня ртути до верхнего основания трубки $l = 80$ мм. Каково истинное давление, если барометр показывает $p'_1 = 734$ мм рт. ст.? Температура воздуха постоянная.

12.12. Открытую стеклянную трубку длиной $l = 1$ м наполовину погружают в ртуть. Затем трубку закрывают пальцем и вынимают. Какой длины столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление равно $H = 750$ мм рт. ст.

12.13. В запаянной с одного конца стеклянной трубке длиной $l = 90$ см находится столбик воздуха, запертый сверху столбиком ртути высотой $h = 30$ см; столбик ртути доходит до верхнего края трубки. Трубку осторожно переворачивают открытым концом вниз, причем часть ртути выливается. Какова высота столбика ртути, которая останется в трубке, если атмосферное давление $H = 750$ мм рт. ст.?

12.14. В сосуд со ртутью опускают открытую стеклянную трубку, оставляя над поверхностью конец длиной $l = 60$ см. Затем трубку закрывают и погружают еще на 30 см. Определить высоту столба воздуха в трубке. Атмосферное давление $p_0 = 760$ мм рт. ст.

12.15. Барометрическая трубка погружена в глубокий сосуд с ртутью так, что уровни ртути в трубке и в сосуде совпадают. При этом воздух в трубке занимает столб длиной l см. Трубку поднимают на l' см. На сколько сантиметров поднимается ртуть в трубке? Атмосферное давление равно H см рт. ст.

12.16. Посередине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки длиной $L = 1$ м находится столбик ртути длиной $h = 20$ см. Если трубку поставить вертикально, столбик ртути сместится на $l = 10$ см. До какого давления была откачана трубка? Плотность ртути $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3.

12.17. Расположенная горизонтально запаянная с обоих концов стеклянная трубка разделена столбиком ртути на две равные части. Длина каждого столбика воздуха 20 см. Давление 750 мм рт. ст. Если трубку повернуть вертикально, ртутный столбик опускается на 2 см. Определить длину столбика ртути.

12.18. Цилиндрический сосуд делится на две части тонким подвижным поршнем. Каково будет равновесное положение поршня, когда в одну часть сосуда помещено некоторое количество кислорода, в другую — такое же по массе количество водорода, если длина сосуда $l = 85$ см?

12.19. В закрытом цилиндрическом сосуде с площадью основания S находится газ, разделенный поршнем массой M на два равных отсека. Масса газа под поршнем при этом в k раз больше массы газа над ним. Температуры газов одинаковы. Пренебрегая трением и массой газа по сравнению с массой поршня, найти давление газа в каждом отсеке.

12.20. Имеются два мяча различных радиусов, давление воздуха в которых одинаково. Мячи прижимают друг к другу. Какой формы будет поверхность соприкосновения?

12.21. Найти число n ходов поршня, которое надо сделать, чтобы поршневым воздушным насосом откачать воздух из сосуда емкостью V от давления p_0 до давления p, если емкость насоса ΔV.

12.22. Упругость воздуха в сосуде равна 97 кПа. После трех ходов откачивающего поршневого насоса упругость воздуха упала до 28,7 кПа. Определить отношение объемов сосуда и цилиндра насоса.

12.23. Два баллона соединены трубкой с краном. В первом находится газ при давлении $p = 10^5$ Па, во втором — при $p_1 = 0{,}6 \cdot 10^5$ Па. Емкость первого баллона $V_1 = 1$ л, второго — $V_2 = 3$ л. Какое давление установится в баллонах (в мм рт. ст.), если открыть кран? Температура постоянная. Объемом трубки можно пренебречь.

12.24. Три баллона емкостями $V_1 = 3$ л, $V_2 = 7$ л и $V_3 = 5$ л наполнены соответственно кислородом ($p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па), азотом ($p_2 = 3 \cdot 10^5$ Па) и углекислым газом ($p_3 = 6 \cdot 10^4$ Па), при одной и той же температуре. Баллоны соединяют между собой, причем образуется смесь той же температуры. Каково давление смеси?

12.25. На гладком горизонтальном столе находится сосуд, разделенный перегородкой на две равные части. В одной части сосуда находится кислород, а в другой – азот. Давление азота вдвое больше давления кислорода. На сколько сдвинется сосуд, если перегородка станет проницаемой? Длина сосуда $l = 20$ см. Массой сосуда пренебречь. Процесс считать изотермическим.

12.26. В цилиндре, закрытом легко подвижным поршнем массой m и площадью S, находится газ. Объем газа равен V. Каким станет объем газа, если цилиндр передвигать вертикально с ускорением: а) $+a$; б) $-a$? Атмосферное давление равно p_0, температура газа постоянна.

12.27. Начертить графики изотермического, изобарического и изохорического процессов в идеальном газе в координатах p, V; p, T; V, T. Объяснить, почему коэффициент объемного расширения идеальных газов равен термическому коэффициенту давления.

12.28. На рис. 49 изображены две изотермы одной и той же массы газа.

1. Чем отличаются состояния газов, если газы одинаковы?
2. Чем отличаются газы, если температуры газов одинаковы?

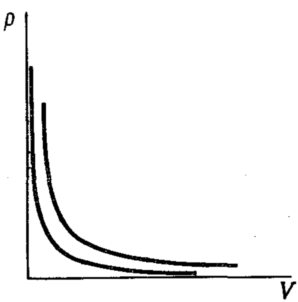


Рис. 49

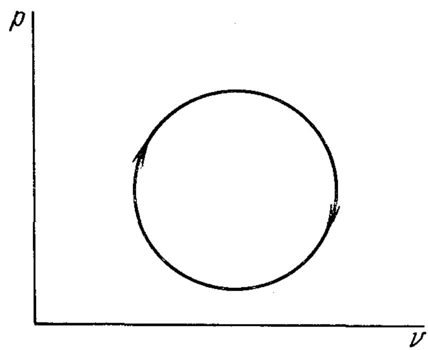


Рис. 50

12.29. Как менялась температура идеального газа – увеличивалась или уменьшалась – при процессе, график которого в координатах p, V изображен на рис. 50.

12.30. При нагревании газа получен график зависимости давления от абсолютной температуры в виде прямой, продолжение которой пересекает ось p в некоторой точке выше (ниже) начала координат. Определить, сжимался или расширялся газ во время нагревания.

12.31. На рис. 51 дан график изменения состояния идеального газа в координатах p, V. Представить этот круговой процесс (цикл) в координатах p, T и V, T, обозначив соответствующие точки.

12.32. Сколько ртути войдет в стеклянный баллончик объемом 5 $см^3$ (рис. 52), нагретый до $t_1 = 400\,°C$, при его остывании до $t_2 = 16\,°C$, если плотность ртути при $t = 16\,°C$ равна $\rho = 13{,}6$ $г/см^3$?

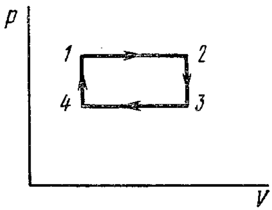


Рис. 51

Рис. 52

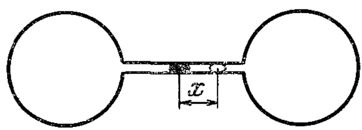


Рис. 53

12.33. При какой температуре находился газ, если при нагревании его на $\Delta t = 22\,°C$ при постоянном давлении объем удвоился? Для каких газов это возможно?

12.34. До какой температуры нужно нагреть воздух, взятый при $t = 20\,°C$, чтобы его объем удвоился, если давление останется постоянным?

12.35. Определить, каким был бы коэффициент объемного расширения идеального газа, если бы за начальный объем его принимали объем не при $t_0 = 0\,°C$, а при $t_1 = 100\,°C$?

12.36. В цилиндре, площадь основания которого равна $S = 100$ $см^2$, находится воздух при температуре $t_1 = 12\,°C$. Атмосферное давление $p_1 = 101$ кПа. На высоте $h_1 = 60$ см от основания цилиндра расположен поршень. На сколько опустится поршень, если на него поставить гирю массой $m = 100$ кг, а воздух в цилиндре при этом нагреть до $t_2 = 27\,°C$? Трение поршня о стенки цилиндра и вес самого поршня не учитывать.

12.37. Два одинаковых баллона, содержащие газ при $t = 0\,°C$, соединены узкой горизонтальной трубкой диаметром $d = 5$ мм, посередине которой находится капелька ртути (рис. 53). Капелька делит весь сосуд на два объема по $V = 200$ $см^3$. На какое расстояние x переместится капелька, если один баллон нагреть на $\Delta t = 2\,°C$, а другой на столько же охладить? Изменением объемов сосудов пренебречь.

12.38. Два одинаковых сосуда соединены трубкой, объемом которой можно пренебречь. Система наполнена газом и находится при абсолютной температуре T. Во сколько раз изменится давление в такой системе, если один из сосудов нагреть до абсолютной температуры T_1, а другой поддерживать при прежней температуре T?

12.39. 1. В горизонтально расположенном сосуде, разделенном легко подвижным поршнем, находятся с одной стороны от поршня m_1 граммов кислорода, а с другой – m_2 граммов водорода. Температуры газов одинаковы и равны T_0. Каким будет отношение объемов, занимаемых газами, если температура водорода останется равной T_0, а кислород нагреется до температуры T_1?

2. Вертикально расположенный сосуд разделен на две равные части тяжелым теплонепроницаемым поршнем, который может скользить без трения. В верхней половине сосуда находится водород при температуре T и давлении p. В нижней части – кислород при температуре $2T$. Сосуд перевернули. Чтобы поршень по-прежнему делил сосуд на две равные части, пришлось охладить кислород до температуры $T/2$. Температура водорода осталась прежней. Определить давление кислорода в первом и втором случаях.

12.40. На некоторой высоте давление воздуха $p = 3 \cdot 10^4$ Па, а температура $t = -43$ °C. Какова плотность воздуха на этой высоте?

12.41. Определить давление кислорода, масса которого $m = 4$ кг, заключенного в сосуд емкостью $V = 2$ м^3, при температуре $t = 29$ °C.

12.42. Определить удельный объем азота при температуре 27 °C и давлении $p = 4{,}9 \cdot 10^4$ Па.

12.43. Определить массу кислорода, заключенного в баллоне емкостью $V = 10$ л, если при температуре $t = 13$ °C манометр на баллоне показывает давление $p = 9 \cdot 10^6$ Па.

12.44. Какова разница в массе воздуха, заполняющего помещение объемом $V = 50$ м^3, зимой и летом, если летом температура помещения достигает $t_1 = 40$ °C, а зимой падает до $t_2 = 0$ °C? Давление нормальное.

12.45. Сколько молекул воздуха выходит из комнаты объемом $V_0 = 120$ м^3 при повышении температуры от $t_1 = 15$ °C до $t_2 = 25$ °C? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

12.46. Компрессор захватывает при каждом качании $V_0 = 4$ л воздуха при атмосферном давлении $p = 10^5$ Па и температуре $t_0 = -3$ °C и нагнетает его в резервуар емкостью $V = 1{,}5$ м^3, причем температура воздуха в резервуаре держится около $t_1 = 45\ °C$. Сколько качаний должен сделать компрессор, чтобы давление в резервуаре увеличилось на $\Delta p = 1{,}96 \cdot 10^5$ Па?

12.47. На весах установлены два одинаковых сосуда. Один заполнен сухим воздухом, другой – влажным (насыщенный водяными парами) при одинаковых давлениях и температурах. Какой из сосудов тяжелее?

12.48. По газопроводу течет углекислый газ при давлении $p = 5 \cdot 10^5$ Па и температуре $t = 17\ °C$. Какова скорость движения газа в трубе, если за $\tau = 5$ мин через площадь поперечного сечения трубы $S = 6$ см^2 протекает $m = 2{,}5$ кг углекислого газа?

12.49. Из баллона со сжатым водородом емкостью $V = 10$ л вследствие неисправности вентиля утекает газ. При температуре $t_1 = 7\ °C$ манометр показывал $p = 5 \cdot 10^6$ Па. Через некоторое время при температуре $t_2 = 17\ °C$ манометр показал такое же давление. Сколько утекло газа?

12.50. Какая часть газа осталась в баллоне, давление в котором было равно $p = 1{,}2 \cdot 10^7$ Па, а температура $t = 27\ °C$, если давление упало до $p_1 = 10^5$ Па? Баллон при этом охладился до $t_1 = -23\ °C$.

12.51. До какой температуры нужно нагреть запаянный шар, содержащий $m = 17{,}5$ г воды, чтобы шар разорвался, если известно, что стенки шара выдерживают давление 10^7 Па, а объем шара $V = 1$ л?

12.52. В цилиндре объемом V, заполненном газом, имеется предохранительный клапан в виде маленького цилиндрика с поршнем. Поршень упирается в дно цилиндра через пружину жесткости k (рис. 54). При температуре T_1 поршень находится на расстоянии l от отверстия, через которое газ выпускается в атмосферу. До какой температуры T_2 должен нагреться газ в цилиндре, для того чтобы клапан выпустил часть газа в атмосферу? Площадь поршня S, масса газа в цилиндре m, его молярная масса μ. Объем цилиндрика клапана пренебрежимо мал по сравнению с объемом цилиндра.

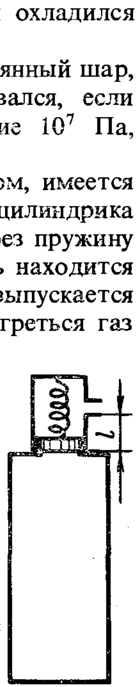


Рис. 54

12.53. В баллоне емкостью $V = 110$ л помещено $m_1 = 0{,}8$ кг водорода и $m_2 = 1{,}6$ кг кислорода. Определить давление смеси на стенки сосуда. Температура окружающей среды $t = 27\ °C$.

12.54. В сосуде объемом 1 л заключено $m = 0{,}28$ г азота. Азот нагрет до температуры $T = 1500\ °C$. При этой температуре $\alpha = 30\%$ молекул азота диссоциировано на атомы. Определить давление в сосуде.

12.55. В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T, когда азот полностью диссоциирован на атомы, давление равно p (диссоциацией водорода можно пренебречь). При температуре $2T$, когда оба газа полностью диссоциированы, давление в сосуде $3p$. Каково отношение масс азота и водорода в смеси?

12.56. Оболочка аэростата объемом $V = 1600$ м^3, находящегося на поверхности Земли, наполнена водородом на $n = 7/8$ при давлении $p = 101$ кПа и температуре $t = 15\,°C$. Аэростат поднялся на некоторую высоту, где давление $p_1 = 79{,}3$ кПа и температура $t_1 = 2\,°C$. Сколько водорода потерял аэростат при своем подъеме в результате расширения газа?

12.57. Доказать, что в атмосфере с постоянной температурой независимо от закона изменения давления с высотой подъемная сила воздушного шара с эластичной оболочкой постоянна. Газ из воздушного шара не вытекает. Пренебречь давлением, обусловленным кривизной оболочки.

13. ТЕПЛОТА И РАБОТА

13.1. 1. В калориметре находится два слоя одной и той же жидкости: внизу более холодная, вверху – теплая. Изменится ли общий объем жидкости при выравнивании температур?

2. Рассмотреть случай, когда в сосуде находятся равные массы воды при температурах 0 и 8 °С.

13.2. Можно ли передать некоторое количество теплоты веществу, не вызывая этим повышения его температуры?

13.3. Как надо поступить, чтобы сильнее остудить горячий чай: сразу бросить в него сахар и затем подождать пять минут или, выждав пять минут, положить сахар и растворить его? Растворение сахара идет с поглощением тепла.

13.4. В железном калориметре массой $m = 0{,}1$ кг находится $m_1 = 0{,}5$ кг воды при температуре $t_1 = 15\,°C$. В калориметр бросают свинец и алюминий общей массой $m_2 = 0{,}15$ кг и температурой $t_2 = 100\,°C$. В результате температура воды поднимается до $t = 17\,°C$. Определить массы свинца и алюминия. Удельная теплоемкость свинца $c_1 = 125{,}7$ Дж/(кг · К), алюминия $c_2 = 836$ Дж/(кг · К), железа $c = 460$ Дж/(кг · К).

13.5. Какое количество теплоты требуется, чтобы медный стержень длиной $l = 10$ см и площадью поперечного сечения $S = 2$ см^2 удлинился от нагревания на $\Delta l = 0{,}1$ мм? Длина стержня при 0 °С равна $l_0 = 9{,}9$ см. Плотность меди $\rho = 8{,}9$ г/см^3, коэффициент линейного расширения $\alpha = 1{,}7 \times 10^{-5}$ К$^{-1}$, удельная теплоемкость $c = 376$ Дж/(кг · К).

13.6. Свинцовая пуля пробивает деревянную стенку, причем скорость в момент удара о стенку была $v = 400$ м/с, а в момент вылета $v_1 = 100$ м/с. Какая часть пули расплавилась, считая, что на нагревание ее идет 60% потерянной механической энергии? Температура пули в момент удара $t_1 = 50$ °C. Удельная теплоемкость свинца $c = 125{,}7$ Дж/(кг · К), температура плавления $t_п = 327$ °C, удельная теплота плавления $\lambda = 26{,}4 \cdot 10^3$ Дж/кг.

13.7. Найти расход бензина автомобиля «Запорожец» на $s = 1$ км пути при скорости $v = 60$ км/ч. Мощность мотора $N = 23$ л. с., коэффициент полезного действия мотора $\eta = 30\%$. Теплотворная способность бензина $q = 45 \cdot 10^6$ Дж/кг.

13.8. Автомобиль «Москвич» расходует $m = 5{,}67$ кг бензина на $s = 50$ км пути. Определить мощность N, развиваемую двигателем, если скорость движения $v = 90$ км/ч и к. п. д. двигателя $\eta = 22\%$. Теплотворная способность бензина $q = 45 \cdot 10^6$ Дж/кг.

13.9. Автомобиль массой $M = 1200$ кг на горизонтальном пути развивает скорость $v = 72$ км/ч, расходуя при этом $m = 80$ г бензина на $s = 1$ км пути. Какую скорость разовьет автомобиль при той же мощности на пути с подъемом $h = 3{,}5$ м на $l = 100$ м? К. п. д. двигателя $\eta = 28\%$. Теплотворная способность бензина $q = 45 \cdot 10^6$ Дж/кг.

13.10. Реактивный самолет имеет четыре двигателя, развивающих силу тяги $F = 20\,000$ Н каждый. Сколько керосина израсходуют двигатели на перелет $l = 5000$ км? Теплотворная способность керосина $q = 45 \cdot 10^6$ Дж/кг, к. п. д. двигателя $\eta = 25\%$.

13.11. Некоторая установка, выделяющая мощность $N = 30$ кВт, охлаждается проточной водой, текущей по спиральной трубке диаметром $d = 15$ мм. При установившемся режиме проточная вода нагревается на $\Delta t = 15$ °C. Определить скорость воды, предполагая, что вся выделяемая мощность установки идет на нагрев воды.

13.12. На сколько температура воды у основания водопада с высотой в $h = 20$ м больше, чем у вершины? Считать, что вся механическая энергия идет на нагревание воды.

13.13. Свинцовая гиря падает на Землю и ударяется о препятствие. Скорость при ударе $v = 330$ м/с. Вычислить, какая часть гири расплавится, если вся теплота, выделяемая при ударе, поглощается гирей. Температура гири перед ударом $t_0 = 27$ °C; температура плавления свинца $t_{пл} = 327$ °C; удельная теплоемкость свинца $c = 125{,}7$ Дж/(кг · К); удельная теплота плавления $\lambda = 26{,}4 \cdot 10^3$ Дж/кг.

13.14. Тело массой $m = 1$ кг скользит по наклонной плоскости длиной $l = 21$ м, которая образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Скорость тела у основания наклонной плоскости равна $v = 4{,}1$ м/с. Вычислить количество теплоты, выделившееся при трении тела о плоскость, если начальная скорость тела равна нулю.

13.15. С какой скоростью влетает метеорит в атмосферу Земли, если при этом он нагревается, плавится и превращается в пар? Метеорное вещество состоит из железа. Начальную температуру метеора принять равной $T = 273$ К. Какой будет вычисленная скорость: минимальной, средней, максимальной? Температура плавления железа $t_п = 1535$ °С, теплота плавления $\lambda = 2{,}7 \cdot 10^5$ Дж/кг. Удельная теплоемкость железа $c = 0{,}46 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К). Температура кипения $t_к = 3050$ °С, удельная теплота парообразования $q = 0{,}58 \cdot 10^5$ Дж/кг. Предполагается, что парообразование происходит при температуре кипения.

13.16. Одинаковое ли количество теплоты необходимо для нагревания газа до одной и той же температуры в сосуде, прикрытом поршнем, если: 1) поршень не перемещается; 2) поршень легко подвижный?

13.17. В нижней части цилиндрического сосуда с площадью основания $S = 1$ м^2 заключен при нормальных условиях $V_0 = 1$ м^3 воздуха, который закрыт невесомым поршнем. Воздух под поршнем нагревается на $\Delta t = 1$ °С, при этом поршень поднимается. Определить величину работы, которую совершает расширяющийся воздух, перемещая поршень. Зависит ли величина работы от площади поршня?

13.18. В цилиндре при $t = 20$ °С находится $m = 2$ кг воздуха под давлением $p = 9{,}8 \cdot 10^5$ Па. Определить работу воздуха при его изобарном нагревании на $\Delta t = 100$ °С? Молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль.

13.19. В цилиндр заключено $m = 1{,}6$ кг кислорода при температуре $t = 17$ °С и давлении $p = 4 \cdot 10^5$ Па. До какой температуры нужно изобарно нагреть кислород, чтобы работа по расширению была равна $A = 4 \cdot 10^4$ Дж?

13.20. На рис. 51 в координатах p, V изображен круговой процесс некоторой массы идеального газа. Указать, на каких стадиях процесса газ получал и на каких отдавал тепло.

13.21. В цилиндре под поршнем находится воздух. Его состояние последовательно меняется следующим образом: 1) при постоянном объеме увеличивается давление; 2) при постоянном давлении увеличивается объем; 3) при постоянной температуре увеличивается объем; 4) при постоянном давлении воздух возвращается к исходному состоянию. Начертить диаграмму в координатах p, V и указать, при каких указанных четырех изменениях воздух в цилиндре получает теплоту и при каких отдает.

13.22. Масса m идеального газа, находящегося при температуре T, охлаждается изохорически так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Определить совершенную газом работу. Молярная масса газа μ.

13.23. 1. Над идеальным газом проводят два замкнутых процесса: $1 \to 2 \to 3 \to 1$ и $3 \to 2 \to 4 \to 3$ (рис. 55, *а*). В каком из них газ совершит большую работу?

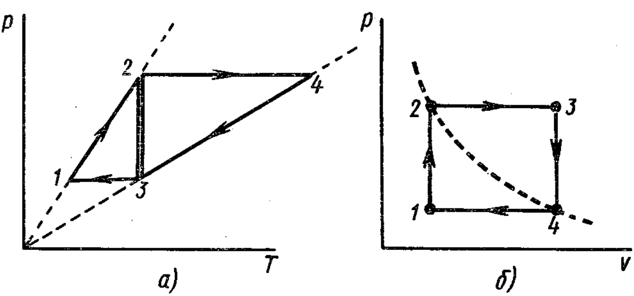


Рис. 55

2. Над одной грамм-молекулой идеального газа совершают цикл (замкнутый процесс), состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 55, *б*). Температуры в точках *1* и *3* равны соответственно T_1 и T_3. Определить работу, совершенную газом за цикл, если точки *2* и *4* лежат на одной изотерме.

14. ИЗМЕНЕНИЕ АГРЕГАТНОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА. ВЛАЖНОСТЬ

14.1. Температура $t = 0\,°C$ является, как известно, одновременно и температурой таяния льда и температурой замерзания воды. Что произойдет, если в сосуд с водой при $t = 0\,°C$ поместить кусок льда той же температуры? Построить график изменения температуры льда с начальной температурой $t_1 = -10\,°C$, нагреваемого до таяния, а затем образовавшейся воды до $t_2 = +10\,°C$ в зависимости от времени нагревания. Мощность нагревателя постоянна.

14.2. В сосуд с водой с общей теплоемкостью $C = 1670$ Дж/К при $t = 20\,°C$ поместили $m_1 = 100$ г льда при

$t_1 = -8\,°C$. Какая установится температура? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость $2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

14.3. В калориметр с $m = 100$ г льда при $t = 0\,°C$ впущен пар при $100\,°C$. Сколько воды окажется в калориметре непосредственно после того, как весь лед растает? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Теплоемкостью калориметра пренебречь. Удельная теплота парообразования воды $2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

14.4. Смесь, состоящую из $m_1 = 5$ кг льда и $m_2 = 15$ кг воды при общей температуре $t_1 = 0\,°C$, нужно нагреть до температуры $\theta = 80\,°C$ пропусканием водяного пара при $t_2 = 100\,°C$. Определить необходимое количество пара. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Удельная теплота парообразования воды при $100\,°C$ $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

14.5. Выпал мокрый снег. Каким способом можно определить процентное содержание влаги в нем?

14.6. В калориметр, содержащий $m_1 = 250$ г воды при $t_1 = 15\,°C$, брошено $m_2 = 20$ г мокрого снега. Температура в калориметре понизилась на $\Delta t = 5\,°C$. Сколько воды было в снеге? Теплоемкостью калориметра пренебречь.

14.7. До какой температуры надо нагреть алюминиевый куб, чтобы он, будучи положен на лед, полностью в него погрузился? Температура льда $0\,°C$, удельная теплоемкость алюминия $c = 836$ Дж/(кг · К), плотность льда $\rho_1 = 9{,}2 \cdot 10^2$ кг/м^3, плотность алюминия $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

14.8. Пробирка, содержащая $M = 12$ г воды, помещается в охлаждающую смесь, где вода переохлаждается до $t = -5\,°C$. Затем пробирка вынимается и встряхивается, причем часть воды замерзает. Сколько воды должно обратиться в лед, если считать, что между водой и стенками пробирки не происходит теплообмена?

14.9. Почему температура воды в открытых водоемах почти всегда в летнюю погоду ниже температуры окружающего воздуха?

14.10. Будет ли кипеть вода в кастрюле, которая плавает в другой кастрюле с кипящей водой?

14.11. Большая кастрюля с кипяченой водой, в которой плавает маленькая кастрюля с сырой водой, поставлена на плиту. Вода в маленькой кастрюле закипела раньше, чем в большой. Объяснить, почему это произошло. Будет ли кипеть вода в маленькой кастрюле, если бросить щепоточку чая в большую кастрюлю?

14.12. Как заставить воду кипеть без нагревания? Как заставить воду замерзнуть кипением?

14.13. В колбе находилась вода при 0 °C. Выкачивая из колбы воздух, заморозили всю воду посредством собственнюго испарения. Какая часть воды при этом испарилась, если притока тепла извне не было? Удельная теплота испарения при $t = 0\,°C$ $r = 2543 \cdot 10^3$ Дж/кг, теплота плавления льда $\lambda = 335{,}2 \cdot 10^3$ Дж/кг.

Почему с повышением температуры теплота парообразования уменьшается?

14.14. В сосуде Дьюара хранится $V = 2$ л жидкого азота при температуре $t_1 = -195\,°C$. За одни сутки ($\tau_а = 24$ ч) испарилась половина данного количества азота. Определить удельную теплоту испарения азота $r_а$, если известно, что при температуре $t = 0\,°C$ в том же сосуде в течение $\tau_л = 22{,}5$ ч растает $m_л = 40$ г льда. Температура окружающего воздуха $t_2 = 20\,°C$. Плотность жидкого азота $\rho = 8 \cdot 10^2$ кг/м^3; удельная теплота плавления льда $\lambda_л = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Считать, что скорость подвода тепла внутрь сосуда пропорциональна разности температур снаружи и внутри сосуда.

14.15. Найти, какая часть затраченной на парообразование энергии идет на совершение внешней работы, если принять теплоту парообразования воды при $t = 100\,°C$ равной $q = 2258 \cdot 10^3$ Дж/кг и удельный объем пара $V = 1{,}65$ м^3/кг.

14.16. В каком состоянии вещества плотность повышается с повышением температуры и почему это происходит?

14.17. В запаянной U-образной трубке находится вода. Как узнать, воздух или только насыщенный пар жидкости находится над водой в трубке?

14.18. Жидкость налита в сообщающиеся сосуды разных диаметров. Широкий сосуд плотно закрывается. Изменится ли распределение уровней жидкости в коленах сосуда и почему?

14.19. График изменения давления пара в закрытом сосуде при повышении его температуры имеет форму, показанную на рис. 56. Какое заключение можно сделать относительно процессов испарения внутри сосуда?

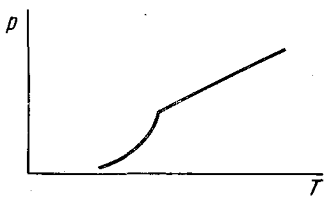


Рис. 56

14.20. В комнате объемом $V = 120$ м^3 при температуре $t = 15\,°C$ относительная влажность составляет $f = 60\,\%$. Определить массу водяных паров в воздухе комнаты. Упругость насыщенного водяного пара при $t = 15\,^{\circ}C$ равна $p_0 = 12{,}79$ мм рт. ст. (1,7 кПа).

14.21. В помещение нужно подать $V = 20\,000$ м^3 воздуха при $t_1 = 18\,^{\circ}C$ и относительной влажности $f_1 = 50\,\%$, забирая его с улицы при $t_2 = 10\,^{\circ}C$ и относительной влажности $f_2 = 60\,\%$. Сколько воды надо дополнительно испарить в подаваемый воздух? Плотность насыщающих водяных паров при $t_2 = 10\,^{\circ}C$ равна $\rho_2 = 9{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, при $t_1 = 18\,^{\circ}C$ $\rho_1 = 15{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3.

14.22. Относительная влажность воздуха при $t_1 = 30\,^{\circ}C$ равна $f_1 = 0{,}80$. Какова будет относительная влажность f_2, если этот воздух нагреть при постоянном объеме до $t_2 = 50\,^{\circ}C$? Давление насыщенных паров воды при $30\,^{\circ}C$ $p_1 = 31{,}8$ мм рт. ст. (4,23 кПа), при $50\,^{\circ}C$ $p_2 = 92{,}5$ мм рт. ст. (12,3 кПа).

14.23. В сосуде $V = 100$ л при $t = 27\,^{\circ}C$ находится воздух с относительной влажностью $f = 30\,\%$. Какова станет относительная влажность f_1, если в сосуд внесли $m = 1$ г воды? Давление насыщенных паров воды при $27\,^{\circ}C$ $p_0 = 3{,}55$ кПа.

14.24. В герметически закрытом сосуде объемом $V = 1{,}1$ л находятся $m = 100$ г кипящей воды и ее пары при температуре $100\,^{\circ}C$ (воздуха в сосуде нет). Найти массу пара.

14.25. В закрытом с обоих концов цилиндре объемом $V = 2$ л свободно ходит невесомый тонкий поршень. В пространстве с одной стороны поршня вводится $m_1 = 2$ г воды; с другой стороны поршня $m_2 = 1$ г азота. На какой части длины цилиндра установится поршень при $t = 100\,^{\circ}C$?

14.26. Можно ли расплавить свинец в воде? При каких условиях это возможно?

III. Электричество

15. ЗАКОН КУЛОНА

15.1. Как с помощью отрицательно заряженного проводника, не изменяя его заряда, зарядить другой проводник положительно? зарядить два проводника: один положительно, другой отрицательно?

15.2. Как получить на двух произвольных полых изолированных проводниках заряды, равные по величине и знаку?

15.3. К шарику заряженного электроскопа подносят, не касаясь его, незаряженное металлическое тело. Как изменяется отклонение листочков? Что будет, если поднести к заряженному шарику кусок стекла?

15.4. Положительно заряженное тело притягивает подвешенный на нити легкий шаровой проводник. Можно ли заключить отсюда, что проводник заряжен отрицательно?

15.5. Положительно заряженная стеклянная палочка отталкивает подвешенное на нити тело. Следует ли отсюда, что тело заряжено положительно?

15.6. Почему два разноименно заряженных металлических шара взаимодействуют друг с другом с большей силой, нежели заряженные одноименно (при всех прочих одинаковых условиях)? Решение поясните чертежами. Возможно ли чтобы два одноименно заряженных проводника притягивались?

15.7. Два разноименно заряженных шарика находятся на некотором расстоянии друг от друга. Между ними вносят стеклянный стержень. Как изменится сила их взаимодействия?

15.8. Какое численное значение будет иметь коэффициент пропорциональности в законе Кулона, если количество электричества выражать в кулонах, силу взаимодействия – в ньютонах, а расстояние – в метрах?

15.9. Заряженные шарики, находящиеся на расстоянии $l = 2$ м друг от друга, отталкиваются с силой $F = 1$ Н. Общий заряд шариков $Q = 5 \cdot 10^{-5}$ Кл. Как распределен этот заряд между шариками?

15.10. Два маленьких, одинаковых по размеру заряженных шарика, находящихся на расстоянии 0,2 м, притягиваются с силой $F = 4 \cdot 10^{-3}$ Н. После того как шарики были приведены в соприкосновение и затем разведены на прежнее расстояние, они стали отталкиваться с силой $F_2 = 2{,}25 \cdot 10^{-3}$ Н. Определить первоначальные заряды шариков.

15.11. Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускаются в керосин. Какова должна быть плотность материала шариков ρ, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был один и тот же? Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$, плотность $\rho_к = 0{,}8$ г/см^3.

15.12. Два одинаковых маленьких проводящих шарика подвешены на длинных непроводящих нитях к одному крючку. Шарики заряжены одинаковыми зарядами и находятся на расстоянии $a = 5$ см друг от друга. Один из шариков разрядили. Каким стало расстояние между шариками?

15.13. По первоначальным предположениям Бора, электрон в водородном атоме движется по круговой орбите. С какой скоростью v должен двигаться такой электрон, если заряд его $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, заряд ядра $e = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, радиус орбиты можно положить равным $r = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м, масса электрона $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

15.14. На двух одинаковых капельках воды находится по одному лишнему электрону, причем сила электрического отталкивания капелек уравновешивает силу их взаимного тяготения. Каковы радиусы капелек?

15.15. Заряды $+Q$, $-Q$ и $+q$ расположены в углах правильного треугольника со стороной a. Каково направление силы, действующей на заряд $+q$?

15.16. Три одинаковых одноименных заряда расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд q_1 нужно поместить в центре этого треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

15.17. В центр квадрата, в вершинах которого находится по заряду q, помещен отрицательный заряд. Какова должна быть величина этого заряда, чтобы система находилась в равновесии? Будет ли равновесие устойчивым?

15.18. Три маленьких шарика массой $m = 10$ г каждый подвешены на шелковых нитях длиной по 1 м, сходящихся наверху в одном узле. Шарики одинаково заряжены и висят в вершинах равностороннего треугольника со стороной 0,1 м. Каков заряд каждого шарика?

15.19. Четыре одинаковых заряда по $q = 3{,}3 \cdot 10^{-9}$ Кл расположены на равных расстояниях друг от друга $a = 5$ см. Какую силу и в каком направлении надо приложить к каждому заряду, чтобы эту систему удержать в равновесии?

15.20. На стоящем вертикально диэлектрическом кольце радиусом R закреплены два шарика A и B, расположенные на концах дуги в 90° так, что прямая AB горизонтальна. Два других шарика C и D, имеющие одинаковые заряды q и массы m, могут перемещаться вдоль кольца без трения. Какие заряды следует сообщить шарикам A и B, чтобы все четыре шарика расположились в вершинах квадрата? Рассмотреть случаи, изображенные на рис. 57, *а*, *б*.

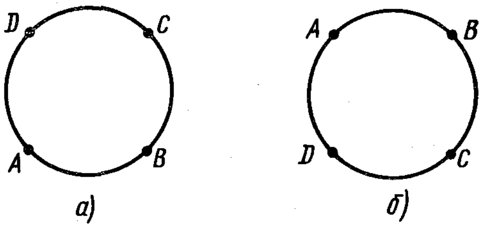


Рис. 57

15.21. Внутри гладкой диэлектрической сферы находится маленький заряженный шарик. Какой величины заряд нужно поместить в нижней точке сферы, чтобы шарик удерживался в верхней точке? Диаметр сферы d, заряд шарика q, его масса m.

16. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ. РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ПОТЕНЦИАЛ

16.1. 1. Нарисовать картину силовых линий поля между двумя точечными зарядами $+2q$ и $-q$.

2. Могут ли силовые линии электростатического поля быть замкнутыми?

16.2. Иногда говорят, что силовые линии – это траектории, по которым двигался бы в поле точечный положительный заряд, если его, внеся в это поле, предоставить самому себе. Правильно ли это утверждение?

16.3. Три одинаковых заряда, $q = 10^{-9}$ Кл каждый, расположены в вершинах прямоугольного треугольника с катетами $a = 40$ см и $b = 30$ см. Найти напряженность электрического поля, создаваемого всеми зарядами в точке пересечения гипотенузы с перпендикуляром, опущенным на нее из вершины прямого угла.

16.4. Четыре одноименных заряда q расположены в вершинах квадрата со стороной a. Какова будет напряженность поля на расстоянии $2a$ от центра квадрата: 1) на продолжении диагонали; 2) на прямой, проходящей через центр квадрата и параллельной сторонам?

16.5. На рис. 58, *а*, *б* и *в* показаны картины силовых линий трех электрических полей. Как будет вести себя незаряженный шарик, помещенный в каждое из полей?

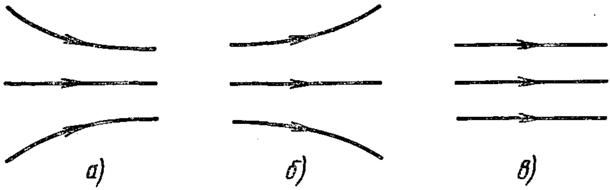


Рис. 58

16.6. Имеются два точечных заряженных тела с зарядами $-q$ и $+Q$ и массами m и M соответственно. На каком расстоянии d друг от друга должны быть расположены заряды, чтобы во внешнем однородном электрическом поле с напряженностью E, направленном вдоль прямой, проходящей через заряды, они ускорялись как одно целое (т. е. не изменяя взаимного расположения)?

16.7. Точка A находится на расстоянии $r_1 = 2$ м, а точка B – на $r_2 = 1$ м от точечного заряда $q = 10^{-6}$ Кл. Чему равна разность потенциалов точек A и B? Как она зависит от угла между прямыми qA и qB?

16.8. Какую работу нужно совершить для того, чтобы переместить заряд q из точки A в точку B в поле двух точечных зарядов q_1 и q_2 (рис. 59)?

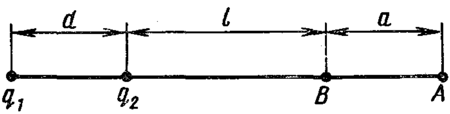


Рис. 59

16.9. Вблизи Земли напряженность электрического поля около 130 В/м. Можно ли использовать напряжение между точками, отстоящими по вертикали на 1 м друг от друга, для питания электрической лампочки? Дайте объяснение.

Найти заряд Земли и электрический потенциал поверхности, если радиус $R = 6400$ км.

16.10. Два точечных заряда $q_1 = 6{,}6 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = 1{,}32 \cdot 10^{-8}$ Кл находятся на расстоянии $r_1 = 40$ см. Какую надо совершить работу, чтобы сблизить их до расстояния $r_2 = 25$ см?

16.11. Построить графики изменения напряженности и потенциала поля вдоль линии, проходящей через два точечных заряда, находящихся на расстоянии $2d$ друг от друга. Величины зарядов равны: а) $+q$ и $-q$; б) $+q$ и $+q$; в) $+q$ и $-3q$.

16.12. Два металлических шарика радиусом r с зарядами q на каждом расположены на расстоянии a друг от друга и на очень больших равных расстояниях от Земли. Первый шар заземляют и заземляющий проводник убирают. Затем такую же процедуру проделывают со вторым шариком. После этого снова заземляют первый шар и т. д. Каким будет отношение зарядов шаров после n заземлений второго шара?

16.13. Электрон, двигавшийся со скоростью $5 \cdot 10^6$ м/с, влетает в параллельное его движению электрическое поле напряженностью $1 \cdot 10^3$ В/м.

1. Какое расстояние пройдет электрон в этом поле до момента остановки и сколько времени ему для этого потребуется?

2. Какую долю своей первоначальной кинетической энергии потеряет электрон, двигаясь в этом поле, если электрическое поле обрывается на расстоянии 0,8 см пути электрона?

16.14. С какой скоростью достигают анода электронной лампы электроны, испускаемые катодом, если напряжение между катодом и анодом равно 200 В? Начальной скоростью электронов можно пренебречь.

16.15. Плоский конденсатор, пластины которого велики по сравнению с расстоянием между ними, присоединен к источнику постоянного напряжения. Изменится ли напряженность электрического поля внутри конденсатора, если заполнить пространство между обкладками диэлектриком? Рассмотреть два случая: а) источник остается включенным, б) источник отключен.

16.16. Пылинка взвешена в плоском конденсаторе. Ее масса $m = 10^{-11}$ г, расстояние между пластинами конденсатора $d = 0{,}5$ см. Пылинка освещается ультрафиолетовым светом и, теряя заряд, выходит из равновесия. Какой заряд потеряла пылинка, если первоначально к конденсатору было приложено напряжение $U = 154$ В, а затем, чтобы опять вернуть пылинку в равновесие, пришлось прибавить 8 В?

16.17. В плоском конденсаторе, помещенном в вакууме, взвешена заряженная капелька ртути. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ см, приложенная разность потенциалов $U_1 = 1000$ В. Внезапно разность потенциалов падает до $U_2 = 995$ В. Через какое время капелька достигнет нижней пластины, если она первоначально находилась посередине конденсатора?

16.18. Между вертикальными пластинами плоского конденсатора, находящегося в воздухе, подвешен на тонкой шелковой нити маленький шарик, несущий заряд $q = 3{,}3 \cdot 10^{-9}$ Кл. Какой величины заряд надо сообщать пластинам конденсатора, чтобы нить с шариком отклонилась на угол $\alpha = 45°$ от вертикали? Масса шарика $m = 0{,}04$ г, площадь пластин конденсатора $S = 314$ см^2. Массой нити можно пренебречь.

16.19. Между двумя вертикальными пластинами, находящимися на расстоянии $d = 2$ см друг от друга, висит заряженный бузиновый шарик массой $m = 0{,}1$ г. После того как на пластины была подана разность потенциалов $U = 1000$ В, нить с шариком отклонилась на угол $\alpha = 5°$ Найти заряд шарика q.

16.20. Электрическое поле образовано двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии $d = 2$ см друг от друга; разность потенциалов между ними $U = 120$ В. Какую скорость получил электрон под действием поля, пройдя по силовой линии расстояние $l = 3$ мм? Начальная скорость электрона равна нулю.

16.21. Электрон вылетает из точки, потенциал которой $\varphi = 600$ В, со скоростью $v = 12 \cdot 10^6$ м/с в направлении силовых линий поля. Определить потенциал точки, дойдя до которой, электрон остановится.

16.22. Электрон влетает со скоростью v_0 в пространство между пластинами плоского конденсатора под углом α к плоскости пластин через отверстие в нижней пластине (рис. 60). Расстояние между пластинами d, разность потенциалов U. Какую кривую опишет электрон при своем движении? На сколько приблизится он к верхней пластине? Силой тяжести пренебречь.

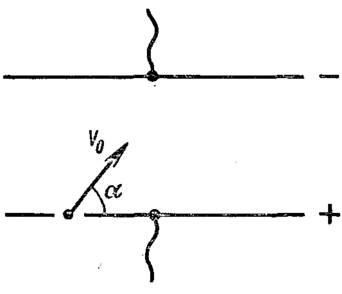


Рис. 60

16.23. Движущийся электрон в некоторый момент времени зафиксирован в середине плоского конденсатора, заряженного до 100 В. Определить изменение кинетической энергии электрона в конденсаторе к моменту, когда электрон находится у поверхности пластины. Изменится ли при этом энергия конденсатора? Начальное и конечное положения электрона находятся далеко от краев пластины.

16.24. Протон и α-частица, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше отклонения α-частицы?

16.25. В плоский конденсатор длиной $l = 5$ см влетает электрон под углом $\alpha = 15°$ к пластинам. Энергия электрона $W = 1500$ эВ. Расстояние между пластинами $d = 1$ см. Определить величину напряжения на конденсаторе U, при котором электрон при выходе из пластин будет двигаться параллельно им.

16.26. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v = 10^7$ м/с. Напряженность поля в конденсаторе $E = 100$ В/см, длина конденсатора $l = 5$ см. Найти величину и направление скорости электрона перед вылетом его из конденсатора.

16.27. Поток электронов, получивших свою скорость под действием напряжения, равного $U_1 = 5000$ В, влетает в середину между пластинками плоского конденсатора параллельно им. Какое самое меньшее напряжение U_2 нужно приложить к конденсатору, чтобы электроны не вылетали из него, если размеры конденсатора таковы: длина конденсатора $l = 5$ см; расстояние между пластинками $d = 1$ см?

16.28. Электрон влетает параллельно пластинам в плоский конденсатор, поле в котором $E = 60$ В/см. Найти изменение модуля скорости электрона к моменту вылета его из конденсатора, если начальная скорость $v_0 = 2 \cdot 10^7$ м/с, а длина пластины конденсатора $l = 6$ см.

16.29. По наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, соскальзывает с высоты h небольшое тело, заряженное отрицательным зарядом $-q$. В точке пересечения вертикали, проведенной через начальное положение тела, с основанием находится заряд $+q$. Определить скорость, с которой тело достигнет основания наклонной плоскости. Проанализируйте зависимость скорости от угла α: а) $\alpha = 45°$, б) $\alpha < 45°$, в) $\alpha > 45°$. Трением пренебречь. Масса тела m. Начальная скорость равна нулю.

16.30. Упругий металлический шар лежит на изолирующей горизонтальной упругой подставке. Шар имеет заряд $+q$. На какую высоту поднимется второй такой же шар после удара о первый, если он падает с высоты H *, а его заряд равен: а) $-q$; б) $+q$? Радиус шара $r \ll H$, его масса m.

---

* H – расстояние между центрами шаров.

16.31. Два электрона, находящиеся на бесконечно большом расстоянии один от другого, начинают двигаться навстречу друг другу, причем скорости их v_0 в этот момент одинаковы по величине и противоположны по направлению. Определить наименьшее расстояние между электронами, если $v_0 = 10^6$ м/с; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг.

16.32. Два электрона находятся на бесконечно большом расстоянии один от другого, причем один электрон вначале покоится, а другой имеет скорость v, направленную к центру первого. Масса электрона m, заряд e. Определить наименьшее расстояние, на которое они сблизятся.

16.33. Четыре одноименных точечных заряда величиной q были расположены вдоль одной прямой на расстоянии r друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы поместить их в вершинах тетраэдра с ребром, равным r?

16.34. Металлическое кольцо радиусом R имеет заряд q. Чему равны напряженность поля и потенциал: а) в центре кольца; б) на расстоянии a от центра вдоль оси, перпендикулярной к плоскости кольца?

16.35. С какой скоростью пролетит электрон, втягиваемый в кольцо, заряженное положительно и с линейной плотностью γ, через центр кольца? Электрон находился в бесконечности.

16.36. Проводящий шар B находится в электрическом поле шара A. Является ли при этом поверхность шара B эквипотенциальной поверхностью?

16.37. Чему равны напряженность поля и потенциал внутри заряженного шарового проводника?

16.38. Внутрь полой проводящей незаряженной сферы помещен шарик с зарядом $+Q$.

1. Как распределятся индуцированные заряды на сфере?

2. Нарисовать примерную картину силовых линий электрического поля внутри и вне сферы.

3. Будет ли заряд $+Q$ действовать на заряженный шарик, находящийся вне сферы? Разобрать подробнее, что при этом происходит.

4. Как изменится распределение зарядов, если сферу соединить с Землей?

16.39. Заряд Q равномерно распределен по объему шара радиусом R из непроводящего материала. Найти напряженность поля на расстоянии r от центра; построить график зависимости E от r. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1$.

16.40. Имеется непроводящая оболочка сферической формы с одинаковой объемной плотностью заряда (рис. 61). Изобразите на графике зависимость $E(r)$.

16.41. Металлический заряженный шар помещен в центре толстого сферического слоя, изготовленного: а) из металла; б) из диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 2$.

1. Нарисовать картины силовых линий внутри и вне сферического слоя.

2. Начертить графики зависимости напряженности поля и потенциала от расстояния до центра сферы.

16.42. Внутри полой тонкостенной сферы радиусом R находится сфера радиусом r. Сфере радиусом R сообщается заряд Q, а сфере радиусом r — заряд q. Определить потенциалы поверхностей сфер.

16.43. Металлический шар радиусом $R_1 = 2$ см несет на себе заряд $q_1 = 1{,}33 \cdot 10^{-8}$ Кл. Шар окружен концентрической металлической оболочкой радиусом $R_2 = 5$ см, заряд которой равен $q_2 = -2 \cdot 10^{-8}$ Кл. Определить напряженность и потенциал поля на расстояниях $l_1 = 1$ см, $l_2 = 4$ см, $l_3 = 6$ см от центра шара.

16.44. Металлический шар радиусом R_1, заряженный до потенциала φ, окружают сферической проводящей оболочкой радиусом R_2. Как изменится потенциал шара после того, как он будет на короткое время соединен проводником с оболочкой?

16.45. Металлический шар радиусом R_1, заряженный до потенциала φ, окружают концентрической сферической проводящей оболочкой радиусом R_2. Чему станет равен потенциал шара, если заземлить внешнюю оболочку?

16.46. Двум металлическим шарам с радиусами r_1 и r_2, соединенным длинным тонким проводником, сообщен заряд Q. Затем шар радиусом r_1 помещают внутрь металлической заземленной сферы радиусом $R = 3r_1$ (рис. 62). Какое количе-

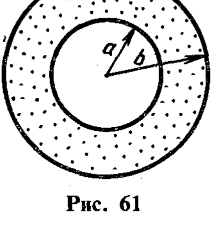


Рис. 61

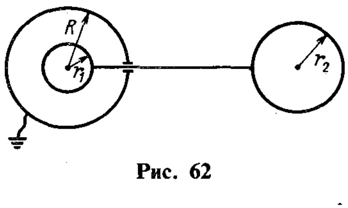


Рис. 62

ство электричества перейдет при этом по соединительному проводнику?

16.47. Внутрь тонкостенной металлической сферы радиусом $R = 20$ см концентрически помещен металлический шар радиусом $r = 10$ см. Шар через отверстие в сфере соединен с Землей с помощью очень тонкого длинного проводника. На внешнюю сферу помещают заряд $Q = 10^{-8}$ Кл. Определить потенциал φ этой сферы.

16.48. Из трех концентрических очень тонких металлических сфер с радиусами r_1, r_2 и r_3 крайние заземлены, а средней сообщен заряд q. Найти напряженность электрического поля во всех точках пространства. Сферы находятся в вакууме.

16.49. Вычислить работу сил электрического поля при перенесении точечного заряда $q = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $d = 1$ см от поверхности шара радиусом $r = 1$ см с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10^{-9}$ Кл/см^2?

16.50. На шарик радиусом $R = 10$ см падает пучок электронов. Какой заряд можно накопить таким способом на шарике, если электрическая прочность воздуха при нормальном атмосферном давлении равна $3 \cdot 10^6$ В/м?

16.51. В закрепленном полом металлическом шаре радиусом R проделано очень маленькое отверстие. Заряд шара равен Q. Точечный заряд q с массой m летит по прямой, проходящей через центры сферы и отверстия, имея на очень большом расстоянии от сферы скорость v_0. Какой будет скорость v этого точечного заряда внутри сферы?

16.52. Внутренняя поверхность сферического конденсатора, емкость которого C, эмиттирует (испускает) n электронов в секунду. Через время t после начала эмиссии заряд на конденсаторе перестанет возрастать. Найти начальную кинетическую энергию электронов, испускаемых поверхностью.

16.53. Начертить приблизительный вид эквипотенциальных поверхностей и силовых линий поля, возникающего между заряженным металлическим шариком и заземленным металлическим листом.

16.54. Маленький шарик, заряженный до величины $q = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл, находится на расстоянии $a = 3$ см от неограниченной или заземленной плоской металлической поверхности. С какой силой они взаимодействуют?

16.55. На расстоянии r от центра изолированного металлического незаряженного шара находится точечный заряд q. Определить потенциал шара.

17. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ

17.1. Имеются два металлических заряженных шара. Показать, что после соединения шаров тонкой металлической проволокой плотности зарядов σ на шарах будут обратно пропорциональны их радиусам. Расстояние между шарами много больше их радиусов.

17.2. Два шара, один диаметром $d_1 = 10$ см и зарядом $q_1 = 6 \cdot 10^{-10}$ Кл, другой — $d_2 = 30$ см и $q_2 = -2 \cdot 10^{-9}$ Кл, соединяются длинной тонкой проволокой. Какой заряд переместится по ней?

17.3. Заряженный до потенциала $\varphi = 1000$ В шар радиусом $R = 20$ см соединяется с незаряженным шаром длинным проводником. После этого соединения потенциал шаров оказался $\varphi_1 = 300$ В. Каков радиус второго шара?

17.4. Маленькие одинаковые капли ртути заряжены одноименно до потенциала φ_0 каждая. Определить потенциал большой капли, получающейся от слияния n малых капель.

17.5. К пластинам плоского конденсатора, одна из которых заземлена, приложено напряжение $U = 100$ В. В воздушный зазор шириной $d = 4$ см между пластинами вдвигается незаряженная тонкая металлическая пластина на расстоянии $l = 3$ см от заземленной пластины. Определить потенциал внутренней пластины и напряженность поля по обе стороны от нее. Изменится ли емкость конденсатора?

17.6. В конденсатор, описанный в задаче 17.5, вдвигаются две нейтральные тонкие проводящие пластины, соединенные проводником. Пластины устанавливаются параллельно электродам конденсатора на расстоянии 1 см от каждого из них. Определить потенциалы внутренних пластин и напряженность поля. Изменится ли заряд конденсатора после введения пластин?

17.7. Конденсатор состоит из трех полосок станиоли площадью по $S = 6$ см^2 каждая, разделенных двумя слоями слюды по $d = 0{,}1$ мм толщиной. Крайние полоски станиоли соединены между собой. Какова емкость такого конденсатора? Диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 7$.

17.8. Как изменится емкость плоского конденсатора, если между его обкладками будет вдвинута: а) пластинка из диэлектрика (ε); б) пластинка из проводника? Толщина каждой пластинки равна половине расстояния между обкладками.

17.9. Даны три конденсатора с емкостями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ и $C_3 = 3$ мкФ, соединенных, как показано на рис. 63, и подключенных к источнику тока с э. д. с. $\mathcal{E} = 12$ В. Определить заряды на каждом из них.

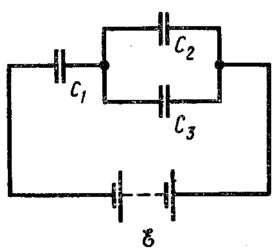


Рис. 63

17.10. Три конденсатора с емкостями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ и $C_3 = 3$ мкФ, имеющие максимально допустимые напряжения соответственно $U_1 = 1000$ В, $U_2 = 200$ В и $U_3 = 500$ В, соединены в батарею. При каком соединении конденсаторов можно получить наибольшее напряжение? Чему равны напряжение и емкость батареи?

17.11. Два последовательно соединенных конденсатора емкостями $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 4$ мкФ присоединены к источнику постоянного напряжения $U = 120$ В. Определить напряжение на каждом конденсаторе.

17.12. Два одинаковых плоских конденсатора соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов $U = 150$ В. Определить разность потенциалов на конденсаторах U_1, если после отключения их от источника тока у одного конденсатора уменьшили расстояние между пластинами в два раза.

17.13. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектриков: стекла толщиной $d_1 = 1$ см и парафина толщиной $d_2 = 2$ см. Разность потенциалов между обкладками $U = 3000$ В. Определить напряженность поля E и падение потенциала в каждом из слоев. Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon_1 = 7$, парафина $\varepsilon_2 = 2$.

17.14. Конденсатор, заряженный до напряжения 100 В, соединяется с конденсатором такой же емкости, но заряженным до 200 В: один раз одноименно заряженными обкладками, другой – разноименно заряженными обкладками. Какое напряжение установится между обкладками в обоих случаях?

17.15. Обкладки конденсатора с неизвестной емкостью C_1, заряженного до напряжения $U_1 = 80$ В, соединяют с обкладками конденсатора емкостью $C_2 = 60$ мкФ, заряженного до $U_2 = 16$ В. Определить емкость C_1, если напряжение на конденсаторах после их соединения $U = 20$ В, конденсаторы соединяются обкладками, имеющими: а) одноименные заряды; б) разноименные заряды.

17.16. Два одинаковых конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику э. д. с. Во сколько раз изменится разность потенциалов на одном из конденсаторов, если другой погрузить в жидкость с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$?

17.17. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов $U = 60$ В и отключен от источника электрического тока. После этого внутрь конденсатора параллельно обкладкам вводится пластинка из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Толщина пластинки в два раза меньше величины зазора между обкладками конденсатора.

Чему равна разность потенциалов между обкладками конденсатора после введения диэлектрика?

17.18. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику э. д. с. Внутрь одного из них вносят диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. Диэлектрик заполняет все пространство между обкладками. Как и во сколько раз изменится напряженность электрического поля в этом конденсаторе?

17.19. Диэлектрик пробивается при напряженности поля $E = 1800$ В/мм. Два плоских конденсатора емкостями $C_1 = 600$ см и $C_2 = 1500$ см с изолирующим слоем из этого диэлектрика толщиной $d = 2$ мм соединены последовательно. При каком наименьшем напряжении будет пробита эта система?

17.20. Конденсатор имеет два диэлектрика с диэлектрическими постоянными ε_1 и ε_2 (рис. 64). При каком соотношении между толщинами d_1 и d_2 слоев диэлектриков падение потенциала в каждом слое диэлектрика окажется равным половине разности потенциалов, приложенной к конденсатору? Найти емкость этого конденсатора, если площадь каждой пластины S.

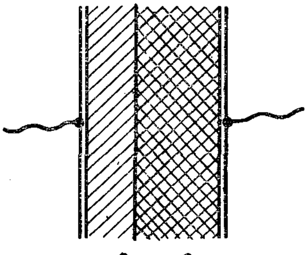


Рис. 64

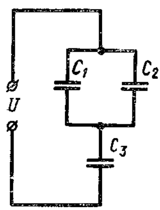


Рис. 65

17.21. Два конденсатора соединены последовательно. Емкости конденсаторов равны C_1 и C_2. К какому напряжению $U_{\text{макс}}$ можно подключать эту батарею, если каждый из конденсаторов выдерживает напряжения U_1 и U_2 соответственно?

17.22. Как изменятся заряд и разность потенциалов обкладок конденсатора C_3 (рис. 65) при пробое конденсатора C_2? Во сколько раз?

17.23. Определить разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рис. 66.

17.24. Определить разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рис. 67.

17.25. Найти емкость системы конденсаторов, включенных между точками A и B, как показано на рис. 68.

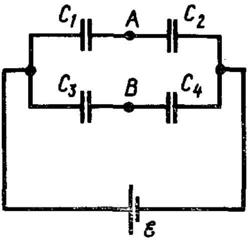


Рис. 66

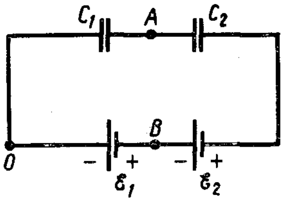


Рис. 67

17.26. Плоский конденсатор состоит из двух металлических пластин, пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической постоянной $\varepsilon = 2$. Как изменится емкость конденсатора, если его поместить в изолированную металлическую коробку? Просвет между стенками коробки и пластинами вдвое меньше, чем расстояние между пластинами.

17.27. Между каждой парой из n данных точек включен конденсатор емкостью C. Определить емкость системы между двумя произвольными точками.

17.28. Три источника э. д. с.: $\mathscr{E}_1 = 6$ кВ, $\mathscr{E}_2 = 3$ кВ и $\mathscr{E}_3 = 2$ кВ – и три конденсатора: $C_1 = 3$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ и $C_3 = 1$ мкФ – соединяются между собой последовательно в замкнутую цепь, чередуясь друг с другом. Найти напряжение на каждом конденсаторе.

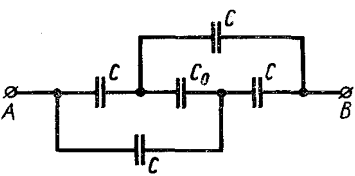


Рис. 68

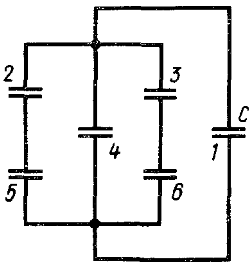


Рис. 69

17.29. К конденсатору *1* емкостью C, заряженному до разности потенциалов U, подсоединена батарея из таких же конденсаторов (рис. 69). Найти заряд на каждом из 6 конденсаторов.

17.30. Конденсаторы емкостями $C_1 = 5$ мкФ и $C_2 = 10$ мкФ образуют цепь, показанную на рис. 70, *а*. К точкам *a* и *b* приложена разность потенциалов $U_{ab} = 16$ В. Найти разность потенциалов между точками *f* и *b*.

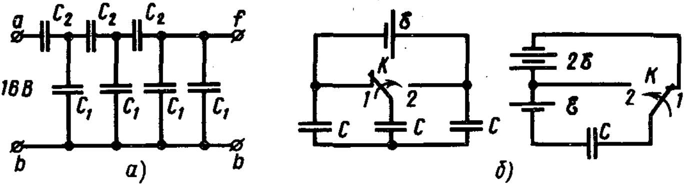


Рис. 70

17.31. Рассчитать, с какой силой F притягиваются друг к другу пластины заряженного плоского конденсатора, емкость которого равна C, а разность потенциалов U. Расстояние между пластинами d.

17.32. Две плоские одинаковые пластины находятся на расстоянии, малом по сравнению с их размерами. На одной из пластин находится заряд $+q$, на другой $+4q$. Определить разность потенциалов между пластинами. Площадь каждой пластины S, а расстояние между ними d.

17.33. Пластины изолированного плоского конденсатора раздвигают так, что емкость его меняется от C_1 до C_2 ($C_1 > C_2$). Какую работу надо совершить при этом, если заряд конденсатора Q? При решении учесть, что напряженность поля между пластинами равна сумме напряженностей полей от каждой из пластин в отдельности.

17.34. Между обкладками заряженного конденсатора плотно вдвигается пластинка из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε. Какие изменения произойдут с зарядом q конденсатора, разностью потенциалов U на обкладках, напряженностью электрического поля E в диэлектрике, запасенной энергией W? Рассмотреть случаи, когда конденсатор: а) отключен от батареи; б) присоединен к батарее.

17.35. Импульсную стыковую сварку медной проволоки осуществляют с помощью разряда конденсатора емкостью $C = 1000$ мкФ при напряжении на конденсаторе $U = 1500$ В. Какова средняя полезная мощность разряда импульса, если его время $\tau = 2$ мкс и к. п. д. установки $\eta = 4\%$?

17.36. Конденсатор подключен к аккумулятору. Раздвигая пластины конденсатора, мы преодолеваем силы притяжения между пластинами конденсатора и, следовательно, совершаем работу. На что затрачивается эта работа? Что происходит с энергией конденсатора?

17.37. Два удаленных изолированных сферических проводника радиусов R_1 и R_2 были заряжены до потенциалов φ_1 и φ_2 соответственно. Затем их соединили тонким проводником. Чему равно изменение энергии системы? Объяснить результат.

17.38. Обкладки конденсатора емкостью C, заряженного до разности потенциалов U, соединяются с обкладками такого же, но не заряженного конденсатора. Какое максимальное количество теплоты может выделиться в проводниках, соединяющих конденсаторы? Зависит ли полное количество выделившейся энергии от сопротивления проводников? Что происходит при изменении сопротивления проводников, соединяющих конденсаторы?

17.39. Какое количество теплоты выделится в цепях (рис. 70, *б*) при переключении ключа K из положения *1* в положение *2*?

17.40. Найти емкость шарового проводника радиусом r, окруженного прилегающим концентрическим слоем диэлектрика с внешним радиусом R и диэлектрической постоянной ε.

18. СИЛА ТОКА. ЗАКОН ОМА ДЛЯ УЧАСТКА ЦЕПИ

18.1. Какое количество электричества пройдет по проводам, соединяющим обкладки плоского конденсатора с зажимами аккумулятора, при вынимании конденсатора из керосина, в который он был погружен? Площадь конденсатора $S=270$ см^2, зазор между пластинами $d = 2$ мм, э. д. с. аккумулятора $\mathscr{E} = 6$ В. Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$.

18.2. Плоский конденсатор с пластинами квадратной формы размерами $a^2 = 21 \times 21$ см^2 и расстоянием между пластинами $d = 2$ мм присоединен к полюсам источника э. д. с. $\mathscr{E} = 750$ В. В пространство между пластинами с постоянной скоростью $v = 8$ см/с вдвигают стеклянную пластинку толщиной 2 мм. Какой ток пойдет при этом по цепи? Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$.

18.3. Металлический сплошной цилиндр вращается вокруг своей оси с частотой $n = 20$ с$^{-1}$. Определить напряженность электрического поля, возникающего внутри него, как функцию расстояния до оси и разность потенциалов между осью и периферией цилиндра. Диаметр цилиндра $D = 5$ см.

18.4. Плоский конденсатор заполнен средой с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ. Чему равно его сопротивление, если емкость равна C?

18.5. Определить среднюю скорость v направленного движения электронов вдоль медного проводника при плотности постоянного тока $j = 11$ А/мм^2, если считать, что на каждый атом меди в металле имеется один свободный электрон. Атомная масса меди $A \approx 64$. Плотность меди $\rho = 8{,}9$ г/см^3.

18.6. Разность потенциалов между концами медного провода диаметром d и длиной l равна U. Как изменится средняя скорость направленного движения электронов вдоль проводника, если удвоить: а) U; б) l; в) d?

18.7. Имеется катушка медной проволоки с площадью поперечного сечения 0,1 мм^2. Масса всей проволоки 0,3 кг. Определить сопротивление проволоки. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Плотность меди 8,9 г/см^3.

18.8. Какое напряжение можно приложить к катушке, имеющей $n = 1000$ витков медного провода со средним диаметром витков $d = 6$ см, если допустимая плотность тока $j = 2$ А/мм^2; удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м?

18.9. Электрическая лампочка с вольфрамовой нитью включена в цепь низкого напряжения при температуре $t_1 = 25$ °С. При этом вольтметр показывает $U_1 = 10$ мВ, амперметр $I_1 = 4$ мА. В рабочем состоянии напряжение на зажимах лампочки $U_2 = 120$ В, сила тока $I_2 = 4$ А. Определить температуру вольфрамовой нити в рабочем состоянии. Термический коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha = 0{,}0042$ К$^{-1}$.

18.10. Угольный стержень соединен последовательно с железным такой же толщины. При каком соотношении их длин сопротивление данной комбинации не зависит от температуры? Температурные коэффициенты сопротивления угля и железа соответственно: $\alpha_1 = -0{,}8 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$ и $\alpha_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$; $\rho_1 = 4 \cdot 10^{-5}$ Ом·м и $\rho_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом·м.

18.11. Определить сопротивление R, если амперметр показывает ток $I = 5$ А, вольтметр, подключенный к концам сопротивления,– напряжение $U = 100$ В, а внутреннее сопротивление вольтметра $r = 2500$ Ом. Какова ошибка в определении сопротивления, если пренебречь внутренним сопротивлением вольтметра?

18.12. Измеряется сопротивление r_x по двум схемам (рис. 71). Рассчитать величину сопротивления по показаниям вольтметра V и амперметра A и их внутренним сопротивлениям r_A и r_V по обеим схемам. Если не учитывать внутреннее сопротивление

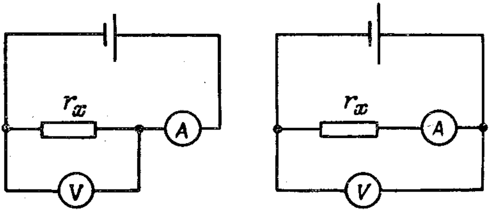


Рис. 71

приборов, то какая из этих схем выгоднее в отношении погрешностей, если приходится измерять: большие сопротивления? малые сопротивления?

18.13. Как измерить величину неизвестного сопротивления, имея вольтметр, амперметр и источник э. д. с. с неизвестными внутренними сопротивлениями?

19. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЯ ПРОВОДНИКОВ

19.1. Электрическая цепь составлена из четырех кусков провода одной и той же длины и сделанных из одинакового материала, соединенных последовательно. Сечение всех четырех кусков различно: $S_1 = 1$ мм^2, $S_2 = 2$ мм^2, $S_3 = 3$ мм^2 и $S_4 = 4$ мм^2. Разность потенциалов на концах цепи равна $U = 100$ В. Определить падение напряжения на каждом проводнике.

19.2. К сети напряжением 120 В присоединяются два сопротивления. При их последовательном соединении ток равен 3 А, а при параллельном суммарный ток равен 16 А. Чему равны сопротивления?

19.3. Два проводника, соединенные последовательно, имеют сопротивление в 6,25 раза больше, чем при их параллельном соединении. Найти, во сколько раз сопротивление одного проводника больше сопротивления другого.

19.4. Последовательно соединены n равных сопротивлений. Во сколько раз изменится сопротивление цепи, если их соединить параллельно?

19.5. На сколько равных частей надо разрезать проводник, чтобы при параллельном соединении этих частей получить сопротивление в n раз меньшее?

19.6. Из куска проволоки сопротивлением $R = 10$ Ом сделано кольцо. Где следует присоединить провода, подводящие ток, чтобы сопротивление кольца равнялось $r = 1$ Ом?

19.7. Четыре одинаковых сопротивления соединяют различными способами. Сколько возможных способов соединения? Начертить их схемы. Определить эквивалентное сопротивление во всех случаях.

19.8. Из одинаковых сопротивлений по 5 Ом требуется получить сопротивление 3 Ом. Как их следует соединить, для того, чтобы обойтись наименьшим количеством сопротивлений?

19.9. Для каждой из трех схем включения реостата (рис. 72), имеющего сопротивление R, построить график зависимости сопротивления цепи R_i от сопротивления r правой части реостата.

19.10. Если на вход электрической цепи (рис. 73) подано напряжение $U_1 = 100$ В, то напряжение на выходе $U_3 = 40$ В. При этом через сопротивление R_2 идет ток $I_2 = 1$ А. Если на выход цепи подать напряжение $U'_3 = 60$ В, то напряжение на входе окажется равным $U'_1 = 15$ В. Определить величины сопротивлений R_1, R_2 и R_3.

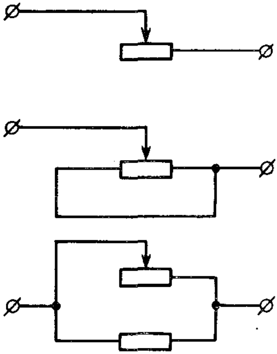


Рис. 72

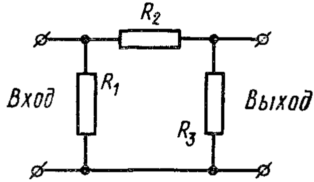


Рис. 73

19.11. Для управления током в цепи применяются два реостата с подвижным контактом, соединенные параллельно, причем сопротивление реостата $R_1 = 10R_2$ (рис. 74). Какие операции надо проделать, чтобы отрегулировать ток требуемой величины? Почему параллельное соединение двух таких реостатов лучше, чем применение одного реостата R_1?

19.12. Какими должны быть сопротивления r_1, r_2 и r_3 для того, чтобы «звезду», составленную из них, можно было бы включить вместо треугольника, составленного из сопротивлений R_1, R_2 и R_3 (рис. 75)?

19.13. Чему равно сопротивление проволочного каркаса в виде прямоугольника со сторонами a и b и диагональю d, если: а) каркас включен в цепь вершинами, между которыми проведена диагональ; б) каркас включен точками, между которыми находится сторона a? Сопротивление единицы длины проволоки r_0.

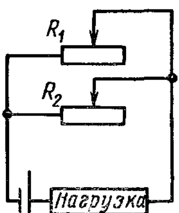


Рис. 74

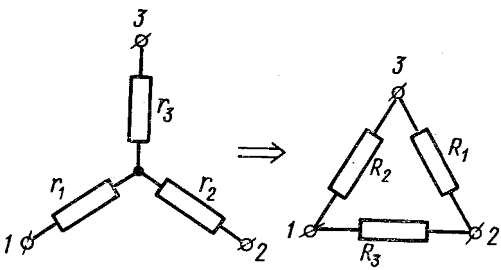


Рис. 75

19.14. Определить сопротивление между точками A и B цепи, изображенной на рис. 76. Величины соответствующих сопротивлений указаны на рисунке. Найти также силу тока во всех участках.

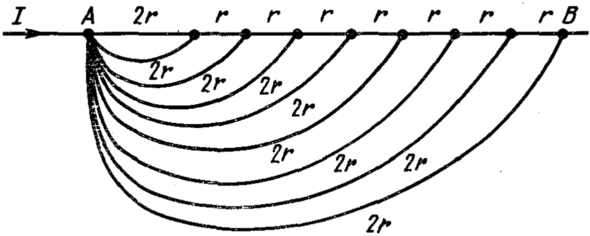


Рис. 76

19.15. Определить электрическое сопротивление следующих проволочных сеток:

1) каркаса в виде квадрата, середины противоположных сторон которого соединены между собой и в центре спаяны. Каркас включен в цепь диагональными вершинами;

2) шестиугольника, в котором одна из точек соединена со всеми остальными точками (всего, таким образом, девять проводников), включенного в цепь диагональными вершинами (одна из вершин – точка, где сходятся диагонали);

3) каркаса в виде тетраэдра, включенного в цепь двумя вершинами;

4) сетки в виде шестиугольника с тремя большими диагоналями, спаянными в центре, и включенной в цепь: а) точками, между которыми проведена одна из диагоналей; б) точками, лежащими на середине противоположных сторон;

5) каркасного куба, включенного в цепь двумя вершинами. Рассмотреть все возможные случаи.

Сопротивление каждого из звеньев r.

19.16. Определить сопротивление цепочки между точками A и B, изображенной на рис. 77. Сопротивление каждого звена r.

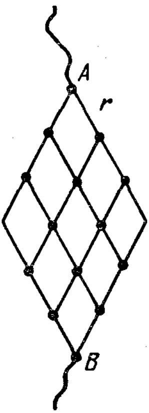


Рис. 77

19.17. Три равных сопротивления были соединены последовательно. Затем вход цепи соединили проводником с точкой, лежащей между вторым и третьим сопротивлениями, а выход – с точкой между первым и вторым сопротивлениями. Начертить схему и определить, как изменилось сопротивление цепи. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

19.18. Цепь образована проводниками одинакового сопротивления, соединяющими каждую из n точек со всеми остальными. К проводнику, соединяющему точки 1 и 2, подключена э. д. с. источника. Показать, что токи протекают только в проводниках, проходящих через эти точки. Найти сопротивление цепи.

19.19. Цепь составлена из бесконечного числа ячеек, состоящих из трех одинаковых сопротивлений r (рис. 78). Найти сопротивление этой цепи.

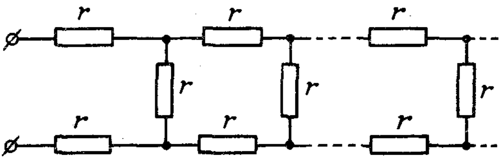


Рис. 78

19.20. Какой ток $I_а$ течет через амперметр с пренебрежимо маленьким внутренним сопротивлением в схеме, показанной на рис. 79?

19.21. Какой ток будет идти через амперметр в схеме, изображенной на рис. 80? Э. д. с. источника равна $\mathscr{E}$. Внутренними сопротивлениями амперметра и источника пренебречь. Рассмотреть два случая: а) $R_1 = R_4 = r$; $R_2 = R_3 = 2r$; б) $R_1 = R_2 = R_3 = r$, $R_4 = 2r$.

19.22. Вольтметр имеет четыре предела измерения: 3, 15, 75 и 150 В. Наибольший допустимый (номинальный) ток прибора $I_{ном} = 0{,}3$ мА. Найти добавочные сопротивления R_1, R_2, R_3, R_4, если внутреннее сопротивление вольтметра $r_в = 10^3$ Ом.

19.23. К батарее через переменное сопротивление подключен вольтметр. Если сопротивление уменьшить втрое, то показания вольтметра возрастут вдвое. Во сколько раз изме-

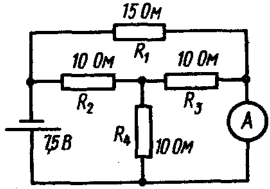


Рис. 79

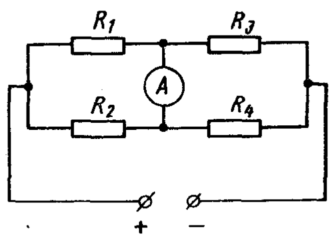


Рис. 80

нится показание вольтметра, если сопротивление уменьшить до нуля?

19.24. К гальванометру, сопротивление которого $r = 290$ Ом, присоединили шунт, понижающий чувствительность гальванометра в 10 раз. Какое сопротивление R надо включить последовательно с шунтированным гальванометром, чтобы общее сопротивление осталось неизменным?

19.25. Параллельно к каждой из половин реостата, имеющего сопротивление $R = 10$ кОм, включены два вольтметра. Внутреннее сопротивление одного из вольтметров $R_1 = 6$ кОм, другого $R_2 = 4$ кОм. К реостату подведено напряжение $U = 180$ В. Каковы показания вольтметров?

19.26. Гальванометр с сопротивлением $R_г$, шунтированный сопротивлением $R_ш$ и соединенный последовательно с сопротивлением R, применен в качестве вольтметра. Он дает отклонение стрелки в одно деление на $U_1 = 1$ В. Как изменить сопротивление R, чтобы гальванометр давал отклонение в одно деление на $U_2 = 10$ В?

19.27. Если к амперметру, рассчитанному на максимальную силу тока $I = 2$ А, присоединить шунт сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом, то цена деления шкалы амперметра возрастет в 10 раз. Определить, какое добавочное сопротивление необходимо присоединить к тому же амперметру, чтобы его можно было использовать как вольтметр, измеряющий напряжение до $U = 220$ В.

19.28. Имеется прибор с ценой деления $n = 1$ мкА. Шкала прибора имеет 100 делений, внутреннее сопротивление $r = 1{,}0$ кОм. Как из этого прибора сделать вольтметр для измерения напряжения до $U = 100$ В или амперметр для измерения тока до $I = 1$ А?

19.29. Каким сопротивлением нужно зашунтировать гальванометр с внутренним сопротивлением $r = 100$ Ом, вся шкала которого рассчитана на силу тока $I = 2 \cdot 10^{-5}$ А, чтобы его можно было в качестве измерителя присоединить к термопаре, дающей максимальную термо-э.д.с. $\mathscr{E} = 0{,}02$ В и внутренним сопротивлением $r_{тп} = 1$ Ом?

19.30. Два одинаковых сопротивления R, соединенных последовательно, подключены к источнику напряжения. К концам одного сопротивления подключен вольтметр с таким же внутренним сопротивлением R. На сколько возрастет показание вольтметра, присоединенного к этим же точкам, если вместо вольтметра с внутренним сопротивлением R включить вольтметр с внутренним сопротивлением $10R$? Э.д.с. источника равна $\mathscr{E}$, его внутренним сопротивлением можно пренебречь.

19.31. В цепь генератора включены последовательно два сопротивления: $R_1 = 200$ Ом и $R_2 = 1000$ Ом. К концам сопротивления R_2 подключен вольтметр. Чему равно сопротивление вольтметра, если он показывает 160 В? Э.д.с. генератора 200 В, его сопротивлением можно пренебречь.

19.32. Вольтметр, включенный последовательно с сопротивлением $R = 7000$ Ом, показывает $U_1 = 50$ В при напряжении в цепи $U = 120$ В. Какое показание дает при этом же напряжении в цепи вольтметр, если включить его последовательно с сопротивлением 35 000 Ом?

19.33. Для измерения напряжения сети 120 В последовательно соединили два вольтметра с номинальными напряжениями 100 В и сопротивлениями 20 и 15 кОм. Определить показания каждого вольтметра и наибольшее напряжение, которое можно измерить вольтметрами.

19.34. В цепи известны сопротивления R_1, R_2 и R_3 и ток I_3, проходящий по сопротивлению R_3. Определить токи I_1 и I_2 через сопротивления R_1 и R_2; R_2 и R_3 соединены между собой параллельно и подключены к R_1 последовательно. Найти напряжение.

19.35. Собрана цепь, изображенная на рис. 81. Вольтметр показывает напряжение $U_1 = 20$ В. Напряжение на входе цепи $U_0 = 100$ В. Найти отношение тока, идущего через вольтметр, к току, идущему через правую часть потенциометра, если отношение сопротивлений, на которые движок делит потенциометр, $n = 2/3$, причем большее сопротивление справа от движка.

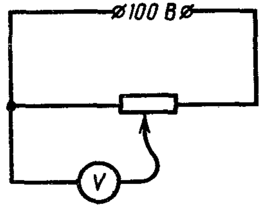


Рис. 81

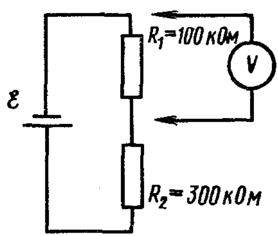


Рис. 82

19.36. Каким должно быть сопротивление вольтметра, для того чтобы погрешность измерения падения напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2 (рис. 82) была не более 5%? Сопротивление источника r составляет несколько Ом.

19.37. К потенциометру с сопротивлением $R = 4$ кОм приложена разность потенциалов $U = 110$ В. Между концом потенциометра и движком включен вольтметр сопротивлением $R_в = 10$ кОм. Что покажет вольтметр, если движок стоит посередине потенциометра?

19.38. На вход цепочки из сопротивлений, показанной на рис. 83, подано напряжение $U = 160$ В. Определить напряжение U_1 на выходе.

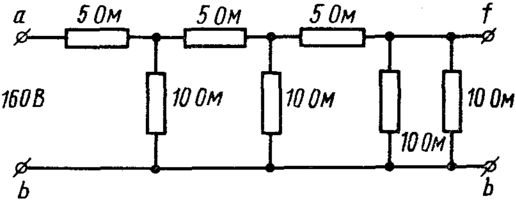


Рис. 83

19.39. Имеются два сопротивления. Если амперметр зашунтировать одним из них, то цена его деления увеличится в n_1 раз, если амперметр зашунтировать другим, то цена деления увеличится в n_2 раз. Как изменится цена деления амперметра, если для шунта использовать оба сопротивления, включив их между собой: а) последовательно; б) параллельно?

19.40. Имеются два сопротивления. Если к вольтметру подключить одно из них, то цена его деления увеличится в n_1 раз, если включить второе, то она увеличится в n_2 раз. Как изменится цена деления вольтметра, если эти сопротивления использовать одновременно, включив их между собой: а) последовательно; б) параллельно?

19.41. Почему при включении каких-либо тепловых приборов большой мощности (например, мощной плитки) у горящих лампочек внезапно уменьшается яркость, а затем их яркость несколько возрастает? Как будет протекать наблюдаемое явление, если вместо плитки включить ламповый реостат из угольных ламп?

19.42. В коридор квартиры подведено напряжение $U = 120$ В. В середине коридора и в противоположном от ввода конце горят 100-ваттные лампочки. От ввода до второй лампочки в конце коридора расстояние $l = 20$ м. На сколько изменится потребляемая лампочками мощность, если на равном расстоянии между ними включить электроплитку, потребляющую ток $I = 5$ А? Сечение провода $S = 2$ мм^2 (изменения сопротивлений лампочек можно не учитывать). Проводка медная, $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

20. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ВСЕЙ ЦЕПИ. СОЕДИНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ В БАТАРЕИ

20.1. Каждая из n точек соединена со всеми остальными точками проволоками, имеющими сопротивление R. К двум из этих точек подключается батарея с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r. Найти силу тока, протекающего через источник.

20.2. Амперметр, накоротко присоединенный к гальваническому элементу с э. д. с. $\mathscr{E} = 1{,}6$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом, показывает ток $I = 4$ А. Каково будет показание амперметра, если его зашунтировать сопротивлением $R_ш = 0{,}1$ Ом?

20.3. Какова электродвижущая сила элемента, если при измерении напряжения на его зажимах вольтметром с внутренним сопротивлением $R_1 = 20$ Ом мы получаем $U_1 = 1{,}37$ В, а при замыкании элемента на $R_2 = 10$ Ом получаем ток $I_2 = 0{,}132$ А?

20.4. Определить э. д. с. батареи, если известно, что при увеличении сопротивления нагрузки, подключенной к батарее, в n раз напряжение на нагрузке увеличивается от U_1 до U_2.

20.5. Гальванический элемент дает на внешнее сопротивление $R_1 = 4$ Ом ток $I_1 = 0{,}2$ А. Если же внешнее сопротивление $R_2 = 7$ Ом, то элемент дает ток $I_2 = 0{,}14$ А. Какой ток даст элемент, если его замкнуть накоротко?

20.6. Определить внутреннее сопротивление аккумулятора, если известно, что при замыкании его на внешнее сопротивление $R_1 = 1$ Ом напряжение на зажимах аккумулятора $U_1 = 2$ В, а при замыкании на сопротивление $R_2 = 2$ Ом напряжение на зажимах $U_2 = 2{,}4$ В. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

20.7. Батарея аккумуляторов с общим внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнута на сопротивление R. Вольтметр, подключенный к зажимам батареи, показывает напряжение $U_1 = 20$ В. Когда параллельно R присоединяется такое же сопротивление, показания вольтметра уменьшаются до $U_2 = 15$ В. Определить R, считая, что сопротивление вольтметра намного больше R. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

20.8. Правильно ли утверждение, что вольтметр, подключенный к клеммам разомкнутого источника, показывает э. д. с.?

20.9. 1. Источник э. д. с. замыкается двумя последовательно соединенными сопротивлениями r_1 и r_2. Если вольтметр подключить к сопротивлению r_1, то он покажет 6 В, к r_2 – он покажет 4 В, если вольтметр подключить к источнику, то он покажет 12 В. Найти действительные значения падения напряжений на сопротивлениях r_1 и r_2. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

2. Два вольтметра, соединенные между собой последовательно, при подключении к зажимам ненагруженной батареи показывают: один U_1, другой U_2. При включении только первого вольтметра он показывает соответственно U'_1. Определить по этим показаниям э. д. с. батареи.

20.10. Как будут изменяться показания вольтметров при перемещении ползунка реостата влево (рис. 84)?

20.11. Батарея аккумуляторов с э. д. с. $\mathscr{E}=6$ В замкнута на два последовательно соединенных реостата, каждый сопротивлением $r=5$ кОм? Что покажет вольтметр, присоединенный к клеммам одного реостата, если сопротивление вольтметра: 1) $R=100$ кОм; 2) $R=10$ кОм? (Внутреннее сопротивление батареи мало.)

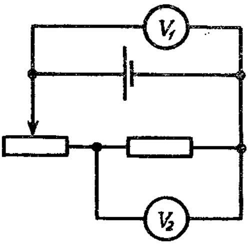


Рис. 84

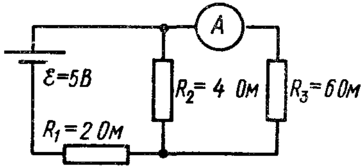


Рис. 85

20.12. Что покажет амперметр в схеме, изображенной на рис. 85? Как изменится показание амперметра, если его и источник э. д. с. поменять местами? Внутренними сопротивлениями источника и амперметра пренебречь.

20.13. Цепь состоит из аккумулятора с внутренним сопротивлением r и нагрузки сопротивлением R. Вольтметр, подключенный последовательно и параллельно к сопротивлению R, дает одно и то же показание. Найти сопротивление вольтметра.

20.14. Машина постоянного тока с э. д. с. $\mathscr{E}=130$ В должна питать осветительную сеть, состоящую из параллельно включенных десяти ламп сопротивлением по $R_1=200$ Ом, пяти ламп по $R_2=100$ Ом и десяти ламп по $R_3=150$ Ом. Найти ток нагрузки и напряжение на зажимах машины, если внутреннее сопротивление ее $r=0{,}5$ Ом. Сопротивлением проводов пренебречь.

20.15. Сопротивление якоря динамомашины «смешанного соединения» (компаунд) равно $R_1 = 0{,}12$ Ом. Сопротивления последовательной обмотки $R_2 = 0{,}05$ Ом, параллельной — $R_3 = 42$ Ом, внешней цепи $R = 5$ Ом. Э. д. с. машины $\mathscr{E} = 112$ В. Нарисовать схему и рассчитать силу тока в якоре I_1, силы токов I_2 и I_3 в обмотках, силу тока I во внешней цепи. Как велика разность потенциалов на клеммах?

20.16. До какого потенциала зарядится конденсатор C, присоединенный к источнику тока с э. д. с. $\mathscr{E} = 3{,}6$ В по схеме, изображенной на рис. 86? Какой заряд будет при этом на обкладках конденсатора, если его емкость равна 2 мкФ?

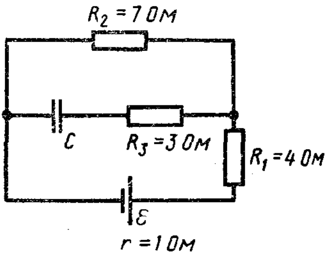


Рис. 86

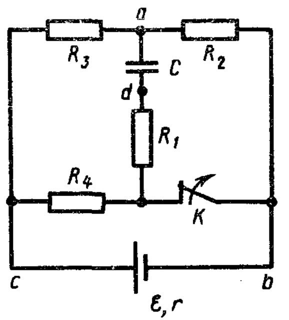


Рис. 87

20.17. Определить заряд на конденсаторе (рис. 87), если $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 20$ Ом, $\mathscr{E} = 500$ В, $r = 10$ Ом и $C = 10$ мкФ.

20.18. Определить, какой заряд пройдет через сопротивление R_1 (см. рис. 87 и задачу 20.17) после размыкания ключа K.

20.19. Найти заряды на конденсаторах C_1 и C_2 в схеме, показанной на рис. 88. Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

20.20. Два одинаковых сопротивления по $r = 100$ Ом, соединенных параллельно, и последовательно соединенное с ними сопротивление $R = 200$ Ом подключены к источнику постоянного тока. К концам параллельно соединенных сопротивлений подключен конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Определить э. д. с. источника тока $\mathscr{E}$, если заряд на конденсаторе $q = 2{,}2 \cdot 10^{-4}$ Кл. Внутренним

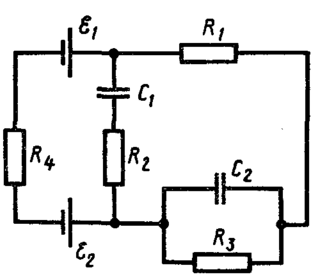


Рис. 88

сопротивлением источника и сопротивлением проводов можно пренебречь.

20.21. Найти разность потенциалов между точками A и B в цепи, изображенной на рис. 89. Внутренним сопротивлением источника пренебречь. Э. д. с. источника равна $\mathscr{E}$.

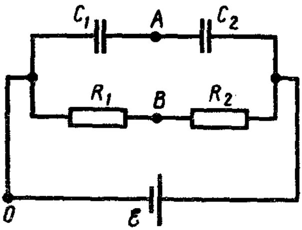


Рис. 89

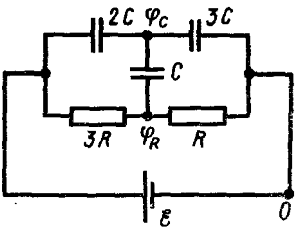


Рис. 90

20.22. Найти заряд на конденсаторе C (рис. 90). Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

20.23. В схеме, изображенной на рис. 91, известны величины R_1, R_2, C_1, C_2, U. Какой заряд пройдет через ключ K, если его замкнуть?

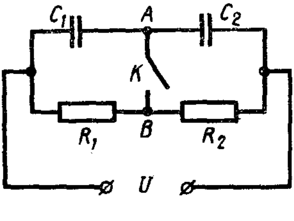


Рис. 91

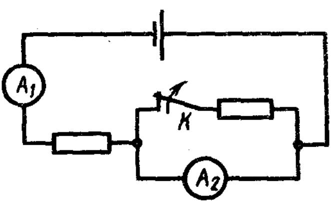


Рис. 92

20.24. Как изменят свои показания амперметры, если в схеме, показанной на рис. 92, разомкнуть ключ K?

20.25. Есть две батареи, одна составлена из нескольких одинаковых гальванических элементов, соединенных последовательно, другая – из того же числа таких же элементов, соединенных параллельно. На какие одинаковые сопротивления R надо замкнуть каждую из батарей, чтобы токи в них были равны? Внутреннее сопротивление каждого гальванического элемента равно r_0. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

20.26. Батарея состоит из $n = 8$ элементов, соединенных последовательно. Э. д. с. каждого элемента $\mathscr{E}_0 = 1{,}5$ В, внутреннее сопротивление $r_0 = 0{,}25$ Ом. Внешняя цепь представляет соединенные параллельно два проводника сопротивлениями $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 50$ Ом. Определить напряжение на зажимах батареи.

20.27. Из 400 одинаковых элементов составлена батарея так, что образовано n соединенных последовательно групп, в каждой из которых содержится m элементов, соединенных параллельно. Внутреннее сопротивление одного элемента $r = 1$ Ом. При каких значениях n и m батарея, будучи замкнута на внешнее сопротивление $R = 100$ Ом, даст максимальную силу тока?

20.28. Батарея из $n = 55$ аккумуляторов, соединенных последовательно, заряжается от динамомашины, дающей напряжение $U = 140$ В. Какое добавочное сопротивление нужно ввести в цепь, если внутреннее сопротивление каждого аккумулятора равно $r = 0{,}02$ Ом, э. д. с. $\mathscr{E} = 2{,}1$ В и заряжать их нужно током $I = 10$ А?

20.29. В конце зарядки батареи аккумуляторов током $I_2 = 3$ А присоединенный к ней вольтметр показывал напряжение $U_2 = 4{,}25$ В. В начале разрядки той же батареи током $I_1 = 4$ А вольтметр показывал напряжение $U_1 = 3{,}9$ В. Ток, проходящий по вольтметру, очень мал. Определить э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r батареи.

20.30. Динамомашина дает э. д. с. $\mathscr{E}_1 = 12$ В. Ее внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}2$ Ом. Она заряжает аккумуляторную батарею с э. д. с. $\mathscr{E}_2 = 10$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 0{,}6$ Ом. Параллельно батарее включена лампочка с сопротивлением $r_3 = 3$ Ом. Определить силу тока в батарее, в лампочке и в генераторе.

20.31. Две батареи соединили последовательно и замкнули на сопротивление $R = 4$ Ом. При этом ток в цепи оказался равным $I_1 = 1{,}83$ А. Затем один из источников перевернули, включая навстречу другому источнику. Ток в цепи стал равным $I_2 = 0{,}34$ А. Каковы э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ и внутренние сопротивления r_1 и r_2 батарей, если при замыкании каждой из них на сопротивление R через нее идут токи соответственно $I_3 = 1$ А и $I_4 = 1{,}3$ А?

20.32. Имеется два последовательно соединенных элемента одинаковой э. д. с., но разных внутренних сопротивлений r_1 и r_2. При каком внешнем сопротивлении разность потенциалов на зажимах одного из элементов равна нулю и на каком?

20.33. Найти условие, при котором ток, даваемый двумя соединенными последовательно разными гальваническими элементами, обладающими соответственно э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2, будет меньше тока, даваемого первым из них, если они включены на одно и то же внешнее сопротивление R.

20.34. 1. Какова будет разность потенциалов между любыми точками цепи, изображенной на рис. 93? Э. д. с. каждого элемента $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление каждого элемента r. Сопротивлением проводов пренебречь.

2. Как изменится ответ, если элементы будут обращены друг к другу одноименными полюсами?

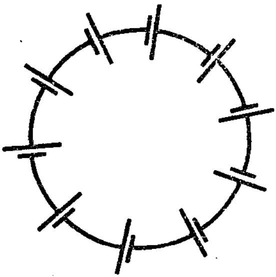


Рис. 93

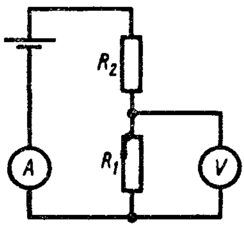


Рис. 94

20.35. При каких условиях напряжение на зажимах батареи выше ее э. д. с.?

20.36. Два одинаковых гальванических элемента с э. д. с. $\mathscr{E} = 1{,}5$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом соединены последовательно (включение элементов согласное) и замкнуты накоротко. Какой ток проходит через элементы? Что покажет вольтметр, измеряющий напряжение на них? Что покажет вольтметр, если внутреннее сопротивление одного гальванического элемента $r_1 = 3$ Ом, а другого $r_2 = 1$ Ом? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь, сопротивление вольтметра велико.

20.37. Два элемента соединены параллельно. Э. д. с. первого элемента равна $\mathscr{E}_1$, второго $\mathscr{E}_2$, внутренние сопротивления их равны. Определить разность потенциалов между зажимами элементов.

20.38. Два элемента с э. д. с., равными $\mathscr{E}_1 = 1{,}5$ В и $\mathscr{E}_2 = 2$ В, соединены одинаковыми полюсами. Вольтметр, подключенный к клеммам батареи, показал напряжение $U = 1{,}7$ В. Определить отношение внутренних сопротивлений. Током вольтметра пренебречь.

20.39. Два аккумулятора с э. д. с. $\mathscr{E}_1 = 1{,}3$ В и $\mathscr{E}_2 = 2$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0{,}1$ и $r_2 = 0{,}25$ Ом соединены параллельно. Найти силу тока в цепи и напряжение на зажимах аккумуляторов.

20.40. Два элемента с равными э. д. с. $\mathscr{E} = 2$ В соединены параллельно (одинаковыми полюсами) и замкнуты на внешнее сопротивление R. Внутренние сопротивления этих элементов равны соответственно $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$ Ом. Чему равно внешнее сопротивление R, если ток I_1, текущий через первый элемент, равен 1 А? Найти силу тока I_2, идущего через второй элемент, а также силу тока I_R, идущего через сопротивление R.

20.41. В цепь включены одинаковыми полюсами два гальванических элемента с разными э. д. с. $\mathscr{E}_1 = 1{,}9$ В и $\mathscr{E}_2 = 1{,}1$ В и с внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}1$ Ом и $r_2 = 0{,}8$ Ом. Элементы замкнуты на внешнее сопротивление $R = 10$ Ом. Чему равны токи I_1 и I_2, проходящие через элементы? Как велико напряжение U на сопротивлении R внешней цепи?

20.42. В схеме, изображенной на рис. 94, $\mathscr{E} = 5$ В, $R_1 = 5$ Ом и $R_2 = 4$ Ом, сопротивление амперметра $R_а = 0{,}10$ Ом. Какая ошибка в процентах получится при измерении тока? Считать сопротивление вольтметра очень большим. Внутреннее сопротивление источника $r = 2$ Ом.

20.43. В схеме, изображенной на рис. 94, $\mathscr{E} = 5$ В, $R_1 = 50$ Ом и $R_2 = 40$ Ом, сопротивление вольтметра $R_в = 1000$ Ом. Какая ошибка делается в отсчете разности потенциалов на концах сопротивления R_1? Сопротивлением амперметра пренебречь.

21. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА. ТЕПЛОВОЕ ДЕЙСТВИЕ ТОКА

21.1. В плоский конденсатор с площадью пластины S и расстоянием между ними d вдвигают с постоянной скоростью v металлическую пластину той же площади толщиной a. Конденсатор подключен к источнику последовательно с сопротивлением R. Э. д. с. источника $\mathscr{E}$. Какая мощность будет выделяться на сопротивлении при движении пластины? Длина пластин конденсатора равна l. Падением напряжения на сопротивлении пренебречь.

21.2. Выражение мощности тока $P = I^2R$ указывает на то, что выделение джоулева тепла пропорционально сопротивлению. Выражение $P = U^2/R$ указывает на обратное. Противоречат ли эти формулы друг другу?

21.3. Две электрические лампочки включены в сеть параллельно. Сопротивление первой лампочки $R_1 = 360$ Ом, второй – $R_2 = 240$ Ом. Какая из лампочек поглощает большую мощность и во сколько раз?

21.4. В сеть с напряжением 120 В включены три одинаковые лампочки: две параллельно, а третья последовательно.

Начертить схему и определить напряжение на каждой из ламп. В какой из них выделяется бо́льшая мощность?

21.5. Имеются 25-ваттная и 100-ваттная лампочка, рассчитанные на одно и то же напряжение, соединенные последовательно и включенные в сеть. В какой из них выделяется большее количество теплоты?

21.6. Можно ли включить в сеть с напряжением 220 В последовательно две лампы, рассчитанные на 110 В: а) одинаковой мощности; б) разной мощности? Каково будет распределение напряжения?

21.7. Спираль подсоединена к сети, вследствие чего она раскалена. Как изменится накал спирали, если на часть ее попадет вода?

21.8. Две электрические лампочки одинаковой мощности, рассчитанные на напряжение U_0, включены последовательно в сеть с напряжением U_0. Одна из лампочек имеет металлическую нить накаливания, а другая – угольную. Какая лампочка будет накалена сильнее?

21.9. Утюг рассчитан на некоторую мощность при напряжении 220 В. Как надо изменить включение нагревательной спирали, чтобы утюг нормально эксплуатировался при напряжении 110 В?

21.10. Три электрические лампы, из которых одна 100 Вт и две по 50 Вт, рассчитанные на напряжение 110 В, надо включить в сеть с напряжением 220 В так, чтобы каждая из них потребляла установленную для нее мощность. Начертить схему включения и подсчитать силу тока, проходящего через лампочки.

21.11. Имеется пять электрических лампочек на 110 В с мощностью 40, 40, 40, 60 и 60 Вт. Как следует включить их в сеть с напряжением 220 В, чтобы все они горели нормальным накалом?

21.12. Электрический утюг, рассчитанный на напряжение $U_0 = 120$ В, имеет мощность $P = 300$ Вт. При включении утюга в сеть напряжение на розетке падает с $U_1 = 127$ В до $U_2 = 115$ В. Определить сопротивление подводящих проводов. Считать, что сопротивление утюга не меняется.

21.13. Миллиамперметр имеет сопротивление 25 Ом, рассчитан на предельный ток 50 мА и снабжен шунтом на 10 А. Какую мощность рассеивает прибор, если он показывает силу тока 8 А?

21.14. Э. д. с. источника тока $\mathscr{E} = 2$ В, внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Определить силу тока, если внешняя цепь потребляет мощность $P = 0{,}75$ Вт.

21.15. Определить ток короткого замыкания I_0 для аккумуляторной батареи, если при токе нагрузки $I_1 = 5$ А она отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 9{,}5$ Вт, а при токе нагрузки в 8 А – $P_2 = 14{,}4$ Вт.

21.16. Два источника с одинаковыми э. д. с. $\mathscr{E} = 120$ В соединены параллельно. Определить напряжение на зажимах источников и мощность, развиваемую каждым из них, если сопротивление внешней цепи $R = 10$ Ом, а внутренние сопротивления источников: $r_1 = 0{,}5$ Ом и $r_2 = 0{,}6$ Ом.

21.17. Дан источник напряжения с э. д. с., равной $\mathscr{E}$, и внутренним сопротивлением r, замкнутый на реостат. Выразить мощность тока P во внешней цепи как функцию силы тока I. Построить график этой функции. При каком токе мощность будет наибольшей? Построить также график зависимости к. п. д. η от силы тока в цепи.

21.18. Источник тока с э. д. с., равной $\mathscr{E}$, и внутренним сопротивлением r замкнут на реостат. Построить графики изменения силы тока I, напряжения U, мощности P, развиваемой во внешней цепи, полной мощности P_0 и к. п. д. η при изменении сопротивления реостата R. При каком соотношении внешнего и внутреннего сопротивлений достигается максимальная мощность во внешней цепи? Каков при этом к. п. д. установки?

21.19. От источника тока, э. д. с. которого $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r, желают получить мощность P, замыкая на внешнее сопротивление. Определить: а) нужную силу тока; б) разность потенциалов на зажимах; в) внешнее сопротивление R.

21.20. Элемент, э. д. с. которого $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r, замкнут на внешнее сопротивление R. Наибольшая мощность во внешней цепи $P = 9$ Вт. Сила тока, текущего при этих условиях по цепи, $I = 3$ А. Найти величины $\mathscr{E}$ и r.

21.21. Два потребителя подключаются к батарее: один раз последовательно, другой – параллельно. В каком случае к. п. д. будет больше?

21.22. К источнику с внутренним сопротивлением r подключено сопротивление $R = r$. Затем подключено второе такое же сопротивление: а) последовательно; б) параллельно. Во сколько раз изменится тепловая мощность, выделяющаяся в сопротивлении R, после подключения второго сопротивления?

21.23. Элемент замыкается один раз на сопротивление $R_1 = 4$ Ом, другой раз на $R_2 = 9$ Ом. В том и другом случаях количество теплоты Q, выделяющееся в сопротивлениях за одно и то же время, оказывается одинаковым. Каково внутреннее сопротивление элемента?

21.24. При замкнутом и разомкнутом ключе K на участке ab (рис. 95) выделяется одна и та же мощность. Найти величину сопротивления R_x, если напряжение на зажимах источника постоянно.

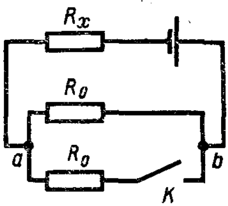


Рис. 95

21.25. Какой ток пойдет по подводящим проводам при коротком замыкании, если на двух плитках с сопротивлениями $R_1 = 200$ Ом и $R_2 = 500$ Ом выделяется при поочередном включении одинаковая мощность $P = 200$ Вт?

21.26. Напряжение в сети без нагрузки $U = 120$ В. При включении в сеть плитки номинальной мощности $P_{ном} = 300$ Вт фактически выделяющаяся мощность равна $P = 250$ Вт. Какая мощность будет выделяться в двух таких плитках, одновременно включенных параллельно в эту сеть? Плитки рассчитаны на напряжение $U_{ном} = 120$ В. Изменения сопротивления плиток при их нагревании не учитывать.

21.27. Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r = 0{,}08$ Ом при нагрузке $I_1 = 4$ А отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 8$ Вт. Какую мощность P_2 отдаст он во внешнюю цепь при нагрузке $I_2 = 6$ А?

21.28. Разветвление, состоящее из двух параллельно соединенных сопротивлений $R_1 = 6$ Ом и $R_2 = 12$ Ом, включено последовательно с сопротивлением $R_3 = 15$ Ом. Эта цепь подключена к зажимам генератора, э. д. с. которого $\mathscr{E} = 200$ В, а внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Вычислить мощность P_1, выделяющуюся на сопротивлении $R_1 = 6$ Ом. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

21.29. Два сопротивления по $r = 100$ Ом подключаются к источнику э. д. с. сначала последовательно, а затем параллельно. В обоих случаях тепловая мощность, выделяемая на каждом сопротивлении, оказалась одинакова. Найти э. д. с. источника $\mathscr{E}$, если ток, протекающий в цепи при последовательном включении сопротивлений, $I = 1$ А.

21.30. Батарея состоит из $n = 5$ последовательно соединенных элементов с э. д. с. $\mathscr{E} = 1{,}4$ В, внутреннее сопротивление которых $r = 0{,}3$ Ом каждый. При какой силе тока полезная мощность равна $P = 8$ Вт? Какова наибольшая полезная мощность, которую можно получить от батареи?

21.31. 1. Сопротивление внешней цепи увеличили в 2,25 раза, но количество теплоты, выделяющееся в ней за 1 с, не изменилось. Найти отношение внутреннего сопротивления r к внешнему R в первом случае.

2. В батарее, состоящей из n последовательно соединенных одинаковых аккумуляторов с внутренним сопротивлением каждого r, вследствие повреждения резко возросло внутреннее сопротивление одного из аккумуляторов. При этом оказалось, что количество теплоты, выделяемое на нагрузке с сопротивлением R за 1 с, не изменяется при коротком замыкании поврежденного аккумулятора. Во сколько раз изменилось внутреннее сопротивление поврежденного аккумулятора?

21.32. Электромотор включен в сеть постоянного тока напряжением 220 В. Сопротивление обмотки мотора 2 Ом. Сила потребляемого тока 10 А. Найти потребляемую мощность и к. п. д. мотора.

21.33. Электромотор питается от сети с напряжением $U = 24$ В. Чему равна мощность на валу мотора при протекании по его обмотке тока $I = 8$ А, если известно, что при полном затормаживании якоря по цепи идет ток $I_0 = 16$ А?

21.34. Дана электрическая цепь, в которой находится, помимо других сопротивлений, последовательно к ним присоединенное сопротивление R_0, потребляющее некоторую мощность. Когда к клеммам этого сопротивления подключают параллельно еще одно такое же сопротивление, то в них обоих расходуется та же мощность. Найти сопротивление всей цепи.

21.35. Электроплитка, рассчитанная на потребление от сети мощности 0,8 кВт, присоединена к сети с напряжением 120 В проводами, сопротивление которых равно 4 Ом. Определить, какое сопротивление должна иметь плитка. Объяснить ответ.

21.36. От источника с напряжением $U = 100$ кВ требуется передать на расстояние $l = 5$ км мощность $P = 5000$ кВт. Допустимая потеря напряжения в проводах $n = 1\,\%$. Рассчитать минимальное сечение медного провода, пригодного для этой цели. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м.

21.37. Под каким напряжением нужно передавать электрическую энергию постоянного тока на расстояние $l = 5$ км, чтобы при плотности тока $j = 2{,}5 \cdot 10^5$ А/м^2 в медных проводах двухпроводной линии электропередачи потери в линии составляли один процент от передаваемой мощности? Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м.

21.38. Во сколько раз следует повысить напряжение источника, чтобы снизить потери мощности в линии в 100 раз при передаче на нагрузку одной и той же мощности при условии, что в первом случае падение напряжения в линии $\Delta U = nU_1$, где U_1 – напряжение на нагрузке.

21.39. Требуется передать мощность $P = 100$ кВт на расстояние $l = 7{,}5$ км, причем потери на нагревание проводов не должны превышать 3 % передаваемой энергии. Какова масса проводов в случаях, когда ток передается: а) под напряжением $U = 2000$ В? б) под напряжением $U = 6000$ В? $\rho = 1{,}7 \times \times 10^{-8}$ Ом · м; $D = 8800$ кг/м^3.

21.40. В цепь батареи с э. д. с. $\mathscr{E} = 24$ В включен электромотор. Нагруженный мотор потребляет мощность в 10 раз большую, чем при работе вхолостую. Разность потенциалов на клеммах мотора при нагрузке падает на 20 % по сравнению с разностью потенциалов на них при холостом ходе. Ток при нагрузке $I_н = 5$ А. Найти сопротивление r подводящих проводов. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

21.41. Трамвай массой $m = 22{,}5$ т идет сначала по горизонтальному пути, а затем в гору (уклон 0,03). В первом случае ток в двигателе $I_1 = 60$ А, а во втором – $I_2 = 118$ А. Найти скорости v_1 и v_2 трамвая, если коэффициент сопротивления движению $k = 0{,}01$; напряжение в линии $U = 500$ В; к. п. д. двигателя и передачи $\eta = 0{,}75$.

21.42. Какую силу тока надо пропустить через железную проволоку длиной $l = 1$ м, массой $m = 1$ г, чтобы нагреть ее за $\tau = 1$ с до температуры плавления $t = 1600\,°C$? Передачу тепла другим телам не учитывать. Удельное сопротивление $\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м, удельная теплоемкость $c \approx 500$ Дж/(кг · К). Начальная температура 0 °С. Плотность железа $D = 7900$ кг/м^3.

21.43. Сколько витков никелиновой проволоки надо навить на фарфоровый цилиндр диаметром $D = 1{,}5$ см, чтобы устроить кипятильник, в котором в течение $\tau = 10$ мин закипит $m = 120$ г воды, если начальная температура $t = 10\,°C$? К. п. д. η принять равным 60 %. Диаметр проволоки $d = 0{,}2$ мм. Напряжение $U = 100$ В. Удельное сопротивление никелина $\rho = 4 \cdot 10^{-7}$ Ом · м.

21.44. Ток проходит через железный стержень длиной $l = 10$ см, диаметром $d = 2$ мм, являющийся чувствительным элементом реле. Через какое время τ после включения тока $I = 50$ А сработает реле, если для его срабатывания необходимо удлинение стержня на $\Delta l = 0{,}15$ мм? Теплоотдачу от стержня другим телам не учитывать. Удельное сопротивление железа $\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м, удельная теплоемкость $c \approx \approx 500$ Дж/(кг · К), плотность $D = 7900$ кг/м^3, коэффициент линейного расширения $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

21.45. Как изменится температура медного стержня, если по нему в течение $t = 0{,}5$ с будет проходить ток, плотность которого $j = 9$ А/мм^2? При расчете принять, что передача тепла окружающим телам отсутствует. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, плотность $D = 8900$ кг/м^3, удельная теплоемкость $c = 380$ Дж/(кг · К).

21.46. В условиях очень интенсивного нагревания проводников (например, обмотка индукционной нагревательной печи) их часто выполняют в виде медной трубки, по которой протекает охлаждающая вода. Каким должен быть расход охлаждающей воды в одну минуту, если длина такого проводника $l = 35$ м, наружный диаметр $D = 12$ мм, внутренний $d = 10$ мм и по нему протекает ток $I = 1500$ А? Температура поступающей воды $t_1 = 12$ °С, а уходящей $t_2 = 35$ °С. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

21.47. Определить работу электрических сил и количество теплоты, выделяемое в течение $t = 1$ с в следующих случаях: а) в проводе, по которому идет ток $I = 1$ А; напряжение между концами провода равно $U = 2$ В; б) в аккумуляторе, который заряжается током $I_1 = 1$ А; разность потенциалов между полюсами аккумулятора равна $U_1 = 2$ В; э. д. с. аккумулятора $\mathscr{E}_1 = 1{,}3$ В; в) в батарее аккумуляторов, которая дает ток $I_2 = 1$ А на внешнее сопротивление; разность потенциалов между полюсами аккумулятора равна $U_2 = 2$ В; э. д. с. батареи $\mathscr{E}_2 = 2{,}6$ В.

21.48. Электроплитка с двумя одинаковыми спиралями позволяет получить три степени нагрева в зависимости от порядка и характера включения спиралей. Начертить схемы включения. Как будут относиться количества теплоты, полученные от плитки за одно и то же время? Придумайте схему переключения.

21.49. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода в чайнике закипает через $t_1 = 15$ мин, при включении другой – через $t_2 = 30$ мин. Через сколько времени закипает вода в чайнике, если включить обе обмотки: 1) последовательно ($t_{посл}$); 2) параллельно ($t_{парал}$)?

21.50. Два чайника, каждый из которых потребляет при напряжении 220 В мощность $P = 400$ Вт, закипает при последовательном и при параллельном включении за одно и то же время. Чему равно сопротивление r подводящих проводов?

21.51. Спираль электроплитки с сопротивлением $R = 40$ Ом при включении в сеть имеет температуру на $\Delta t_1 = 400$ °С большую, чем температура воздуха. Дальнейшее нагревание прекращается из-за теплоотдачи в окружающую среду. Какова будет разность температур спирали плитки и окружающего воздуха, если последовательно с плиткой включить сопротивление $r = 10$ Ом? Теплоотдача пропорциональна разности температур спирали и окружающего воздуха.

21.52. Два проводника, сделанные из одного и того же материала, включены последовательно. Найти отношение температур проводников при подключении их в сеть, если один из проводников в два раза толще второго, а теплоотдача пропорциональна площади поверхности проводника и разности температур проводника и окружающего воздуха. Температура воздуха $t_0 = 0$ °С.

21.53. Электрическая печь имеет две секции сопротивления: $R_1 = 20$ Ом и $R_2 = 10$ Ом. При параллельном включении секций печь нагревается на $\Delta t_1 = 300$ °С выше комнатной температуры. Считая, что теплоотдача прямо пропорциональна разности температур печи и комнаты, определить, на сколько градусов нагреется печь при последовательном соединении секций и неизменном напряжении.

21.54. Вольфрамовая нить диода накаливается током силой $I_н = 10$ А до температуры T_0. Приложенное к ней напряжение $U_н = 8$ В, а анодное напряжение равно нулю. При включении анодного напряжения температура нити изменяется, что можно заметить по изменению ее свечения. Какое нужно приложить напряжение накала, чтобы в установившемся режиме при анодном напряжении $U_а = 5000$ В температура нити снова стала равной T_0? При этом известно, что мощность, доставляемая таким диодом при температуре T_0 и напряжении $U_а = 5000$ В, составляет $P = 1,2$ кВт. Работа выхода электрона для вольфрама $A = 4,5$ эВ $= 4,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж; заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Начальную кинетическую энергию электрона не учитывать.

22. ТОК В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

22.1. Пользуясь законами электролиза и постоянной Авогадро, определить массу водородного иона m_H и заряд электрона e. Постоянная Авогадро равна $N_A \approx 6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль.

22.2. Батарея гальванических элементов (э. д. с. $\mathscr{E} = 0,9$ В, внутреннее сопротивление $r = 0,6$ Ом) состоит из $n = 30$ элементов, соединенных в три одинаковые параллельные группы. Какое количество двухвалентной меди m выделится на катоде электролитической ванны за $t = 5$ мин работы батареи, подключенной к ней? Сопротивление ванны $R = 205$ Ом. Атомная масса меди 63,57.

22.3. Никелирование металлического изделия с поверхностью $S = 120$ см^2 продолжалось $t = 5$ ч при силе тока $I = 0{,}3$ А. Определить толщину h слоя никеля. Атомная масса никеля $A = 58{,}7$; валентность никеля $n = 2$; плотность $D = 8800$ кг/м^3.

22.4. Какой силы ток должен проходить через раствор электролита, чтобы за 1 мин разлагался 1 г воды? Каков объем выделившегося при этом гремучего газа (при нормальных условиях)?

22.5. Какова затрата электроэнергии на получение 1 кг алюминия, если электролиз ведется при напряжении 10 В, а к. п. д. всей установки составляет 80 %? Атомная масса алюминия $A = 27$, валентность $n = 3$.

22.6. При электролизе воды через ванну протекло 1000 Кл. Какова температура выделившегося кислорода, если он находится в объеме 0,25 л под давлением 129 кПа?

22.7. Потенциал ионизации атома ртути $\varphi = 10{,}4$ В. Какой наименьшей скоростью v должен обладать электрон, чтобы ионизовать атом ртути при ударе?

22.8. При каком напряжении зажигается неоновая лампочка, если расстояние между электродами, имеющими вид тонких плоских пластин, d; энергия ионизации неона $W_и$; длина свободного пробега электронов между двумя последовательными столкновениями с атомами неона l? Заряд электрона равен e.

22.9. Электрическая дуга низкого напряжения осуществляется между угольным электродом и большой металлической массой и питается от источника переменного тока (трансформатора). Показать, что по цепи с дугой идет отчасти выпрямленный ток. В каком направлении идет выпрямленный ток в этой цепи?

22.10. Электроды в форме диска и острия расположены на некотором расстоянии друг от друга. К каким полюсам нужно присоединить эти электроды к источнику тока, для того чтобы пробой воздушного промежутка произошел при меньшей разности потенциалов между электродами?

22.11. Электрон, вышедший из накаленного катода K электронно-лучевой трубки с достаточно малой скоростью, приобретает скорость в поле анода A, находящегося под потенциалом φ, и, пройдя между пластинами конденсатора длины l, попадает на флуоресцирующий экран, помещенный на расстоянии L от конденсатора. Когда в конденсаторе появляется электрическое поле, пятно на экране смещается на расстояние d. Чему равна напряженность поля E в конденсаторе?

23. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

23.1. Имеется два одинаковых стальных стержня, один из которых намагничен. Как узнать, какой из них намагничен, не пользуясь ничем, кроме этих стержней?

23.2. Проволока перематывается с одной катушки на другую. По проволоке идет ток. Скорость перемотки равна скорости дрейфа электронов по проволоке и направлена в противоположную сторону. Будет ли существовать магнитное поле вокруг проволоки между катушками?

23.3. По двум одинаковым металлическим обручам, расположенным один горизонтально, другой вертикально, идут одинаковые токи. Найти направление вектора индукции магнитного поля в их общем центре.

23.4. К двум произвольным точкам проволочного кольца подведены идущие радиально провода, соединенные с весьма удаленным источником тока. Показать, что индукция магнитного поля в центре равна нулю.

23.5. Из одинаковых кусков проволоки спаян куб. К противоположным вершинам по диагонали приложена э. д. с. Показать, что индукция магнитного поля в центре куба равна нулю. Поле подводящих проводов не учитывать.

23.6. Как направлена сила, с которой магнитное поле Земли действует в северном полушарии на горизонтальный проводник с током, если проводник расположен: а) в плоскости магнитного меридиана и ток идет с севера на юг; б) перпендикулярно к плоскости магнитного меридиана и ток идет с запада на восток?

23.7. Объяснить, почему прямоугольный проволочный виток с током всегда будет стремиться устанавливаться в магнитном поле так, чтобы плоскость витка была перпендикулярна к полю. Как действуют силы на виток в таком положении? (Нарисовать вид сбоку.)

23.8. Две катушки, по которым текут токи, взаимодействуют между собой с определенной силой. Как изменится сила взаимодействия катушек, если обе катушки свободно надеть на общий замкнутый железный сердечник?

23.9. Ток замыкается на вертикальную пружину, нижний конец которой на незначительную глубину погружен в ртуть (рис. 96; спираль Роже). Описать дальнейшее состояние пружины и электрической цепи.

23.10. Между полюсами электромагнита в горизонтальном магнитном поле находится прямолинейный проводник, расположенный горизонтально и перпендикулярно магнитному полю. Какой ток должен идти через проводник, чтобы уничтожить натяжения в поддерживающих его гибких проводах. Индукция поля $B = 0{,}01$ Тл, масса единицы длины проводника $m/l = 0{,}01$ кг/м?

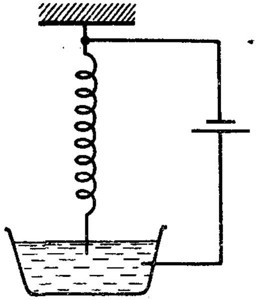


Рис. 96

23.11. Горизонтальные рельсы находятся на расстоянии $l = 0{,}3$ м друг от друга. На них лежит стержень, перпендикулярный рельсам. Какой должна быть индукция магнитного поля для того, чтобы стержень начал двигаться, если по нему пропускается ток силой $I_0 = 50$ А? Коэффициент трения стержня о рельсы $k = 0{,}2$. Масса стержня 0,5 кг.

23.12. Проволока, по которой идет ток, лежит в плоскости, перпендикулярной магнитному полю (см. рис. 236). Доказать, что сила, действующая на проволоку, не зависит от ее формы. Поле однородно.

23.13. По жесткому проволочному кольцу диаметром $d = 10$ см и сечением $S = 5$ мм^2 течет ток силой $I = 5$ А. Плоскость кольца перпендикулярна магнитному полю, индукция которого $B = 1$ Тл. Определить механическое напряжение (силу, действующую на единицу поверхности) в проволоке.

23.14. Между полюсами магнита на двух тонких вертикальных проволочках подвешен горизонтальный линейный проводник массой $m = 10$ г и длиной $l = 20$ см. Индукция однородного магнитного поля направлена вертикально и равна $B = 0{,}25$ Тл. Весь проводник находится в магнитном поле. На какой угол α от вертикали отклоняются проволочки, поддерживающие проводник, если по нему пропустить ток силой $I = 2$ А? Массами проволочек пренебречь.

23.15. Почему два параллельных проводника, по которым идут токи в одном направлении, притягиваются, а два параллельных катодных пучка отталкиваются?

23.16. Электрон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно к силовым линиям. По какой траектории будет двигаться электрон? Изменяется ли при этом численное значение скорости электрона?

23.17. Электрон, обладающий скоростью v, попадает в однородное магнитное поле, индукция которого B составляет угол α с v. Окружность какого радиуса будет описывать электрон? Чему равна работа силы, действующей на электрон? По какой траектории будет двигаться электрон?

23.18. Электроны, летящие в телевизионной трубке, обладают энергией 12 кэВ. Трубка ориентирована так, что электроны движутся горизонтально с юга на север. Вертикальная составляющая земного магнитного поля направлена вниз, и его индукция $B = 5{,}5 \cdot 10^{-5}$ Тл. В каком направлении будет отклоняться электронный луч? Каково ускорение каждого электрона? На сколько отклонился пучок электронов, пролетев 20 см внутри телевизионной трубки?

23.19. Описать движение электрона в вакууме в параллельных электрическом и магнитном полях. Начальная скорость электрона направлена под некоторым углом к направлению полей.

23.20. Прямой постоянный магнит падает сквозь замкнутое металлическое кольцо. Будет ли магнит падать с ускорением свободного падения?

23.21. Магнит падает вниз по длинной медной трубке. Описать характер падения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

23.22. Как надо двигать в магнитном поле Земли медное кольцо, чтобы в нем возбуждался индукционный ток?

23.23. Рамка произвольной формы вращается в однородном магнитном поле. Ось вращения совпадает с направлением вектора индукции поля. Будет ли индуцироваться э. д. с.?

23.24. Какие явления происходят в кольце, если в него вдвигается магнит? Рассмотреть случаи, когда кольцо сделано из: а) диэлектрика; б) сверхпроводника.

23.25. В однородном магнитном поле с индукцией B находится кольцо из сверхпроводника. Силовые линии перпендикулярны к плоскости кольца. Чему будет равен магнитный поток, пронизывающий кольцо, после того как внешнее поле выключат? Радиус кольца R.

23.26. Сверхпроводящее кольцо, по которому идет ток, изгибается в виде восьмерки с одинаковыми кольцами и затем складывается вдвое. Во сколько раз меняется при этом индукция магнитного поля в центре полученного кольца?

23.27. Однослойная катушка диаметром $D = 5$ см помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. Индукция поля равномерно изменяется со скоростью $\Delta B/\Delta t = 10^{-2}$ Тл/с. Катушка содержит $n = 1000$ витков медной проволоки ($\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м) сечением $S = 0{,}2$ мм^2.

1. К концам катушки подключен конденсатор емкостью 10 мкФ. Определить заряд на нем.

2. Концы катушки замкнуты накоротко. Определить тепловую мощность, выделяющуюся в катушке.

23.28. Однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно к плоскости медного кольца ($\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м), имеющего диаметр $D = 20$ см и толщину $d = 2$ мм. С какой скоростью должна изменяться во времени магнитная индукция B, чтобы индукционный ток в кольце равнялся 10 А?

23.29. В короткозамкнутую катушку один раз быстро, другой – медленно вдвигают магнит: а) одинаковое ли количество электричества проходит через катушку в первый и во второй раз; б) одинаковую ли работу против электромагнитных сил совершает сила руки, вдвигающей магнит?

23.30. Замкнутый контур вытаскивают из межполюсного пространства магнита.

1. Каково направление индуцированного в контуре тока?

2. Требуется ли действие силы для удаления контура из поля?

3. Зависит ли количество джоулева тепла, выделяемого при перемещении контура, от времени этого перемещения?

23.31. Внутрь короткозамкнутой катушки вставлена другая, по которой идет ток от аккумулятора. Во вторую катушку втягивается железный сердечник, вследствие чего в первой катушке индуцируется ток и она нагревается. За счет какой работы производится нагревание?

23.32. При торможении поезда метро электродвигатели отключают от контактного провода и подключают к специальным реостатам. Объяснить такой способ торможения.

23.33. Падающий ребром медный пятак попадает в зазор между полюсами электромагнита так, что магнитное поле перпендикулярно плоскости монеты. Как будет изменяться ускорение падения монеты? Магнитное поле между полюсами считать однородным.

23.34. Внутри однородного проволочного кольца магнитный поток равномерно возрастает со временем. Каков характер тока, текущего по кольцу? Чему будет равна разность потенциалов между двумя любыми точками кольца?

23.35. Между рельсами железнодорожного пути включен вольтметр. Над ним с постоянной скоростью проходит поезд. Каковы будут показания вольтметра при приближении поезда, в момент нахождения поезда над вольтметром и при удалении поезда? Магнитное поле Земли принять на данном участке однородным, вертикальная слагающая его $B_в = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл. Ширина колеи 1,2 м. Скорость поезда 60 км/ч.

23.36. Реактивный самолет, имеющий размах крыльев 50 м, летит горизонтально со скоростью 800 км/ч. Определить разность потенциалов, возникающую между концами крыльев, если вертикальная слагающая индукции магнитного поля Земли равна $5 \cdot 10^{-5}$ Тл. Можно ли использовать эту разность потенциалов для измерения скорости полета самолета?

23.37. Между концами крыльев самолета, летящего в магнитном поле Земли, натянута (изолированная) проволока. Можно ли экспериментально показать наличие индуцированного напряжения в этой проволоке?

23.38. Проводник длиной $l = 1$ м движется со скоростью $v = 5$ м/с перпендикулярно к линиям индукции однородного магнитного поля. Определить величину индукции магнитного поля, если на концах проводника возникает разность потенциалов 0,02 В.

23.39. Однородное кольцо помещено в переменное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости кольца. Выберем на кольце две произвольные точки, делящие кольцо на дуги a и b. Так как разности потенциалов на концах дуг a и b равны по величине и противоположны по знаку и ток в любом сечении кольца одинаков, то из закона Ома, примененного к участкам a и b, следует, что R_a равно R_b, т. е. сопротивление не зависит от длины проводника. Найти ошибку в рассуждениях.

23.40. В однородном магнитном поле расположен виток, площадь которого равна $S = 50$ см^2. Перпендикуляр к плоскости витка составляет с направлением магнитного поля угол, равный $\alpha = 60°$. Чему равна э. д. с. индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}}$, возникающей в витке при выключении поля, если начальная индукция магнитного поля $B = 0{,}2$ Тл, и оно спадает до нуля по линейному закону за время $\Delta t = 0{,}02$ с?

23.41. Определить изменение магнитного потока $\Delta\Phi$ через катушку, если она имеет $n = 2000$ витков и за время $t = 0{,}01$ с возникает э. д. с. индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}} = 200$ В.

23.42. Кусок провода длиной $l = 2$ м складывается вдвое и его концы замыкаются. Затем провод растягивается в квадрат так, что плоскость квадрата перпендикулярна горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли $B_{\text{гор}} = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл. Какое количество электричества пройдет через контур, если его сопротивление $R = 1$ Ом?

23.43. Виток изолированного медного провода изогнут в виде восьмерки, кольца которой имеют радиусы $r_1 = 1$ и $r_2 = 3$ см. Этот виток находится в магнитном поле с индукцией $B = 10^4$ Тл, перпендикулярном плоскости витка. Магнитное поле резко выключается. Время выключения 10^{-3} с. Произойдет ли пробой изоляции, если она выдерживает разность потенциалов между проводами $U = 10$ В?

23.44. Рамка из провода сопротивлением $R = 0{,}01$ Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}05$ Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки $S = 100$ см^2. Определить, какое количество электричества протечет через рамку за время поворота ее на угол $\Delta\alpha = 30°$ в трех случаях: 1) от 0 до 30°; 2) от 30 до 60°; 3) от 60 до 90° (угол α отсчитывается между направлением индукции и перпендикуляром к плоскости рамки).

23.45. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл расположен плоский проволочный виток, площадь которого $S = 10^3$ см^2, а сопротивление $R = 2$ Ом, таким образом, что его плоскость перпендикулярна силовым линиям. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, протекший через гальванометр при повороте витка, $q = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ Кл. На какой угол повернули виток?

23.46. Построить график изменения индукционного тока при размыкании цепи, в которой имеется катушка индуктивности. Что означает площадь фигуры, ограниченной графиком и осью времени? Изменение какой магнитной величины можно определить по графику?

23.47. Показать, что индуктивность катушки данной длины пропорциональна квадрату числа витков.

23.48. В однородное магнитное поле с индукцией B помещено металлическое кольцо радиусом l, причем его ось совпадает с направлением поля. От центра к кольцу отходят два стержня, имеющие контакт между собой и с кольцом. Один стержень неподвижен, а другой равномерно вращается с угловой скоростью ω. Найти ток, идущий через стержни, если сопротивление каждого из них R (сопротивлением кольца пренебречь).

23.49. Металлический диск радиусом $r = 10$ см, расположенный перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 1$ Тл, вращается вокруг оси, проходящей через центр, с частотой $n = 100$ с$^{-1}$. Два скользящих контакта (один на оси диска, другой – на окружности) соединяют диск с реостатом сопротивлением $R = 5$ Ом. Чему равна тепловая мощность, выделяемая на реостат?

23.50. Длина подвижного проводника AB равна l. Его сопротивление R (рис. 97). Сопротивление неподвижного проводника, по которому скользит проводник AB, пренебрежимо мало. Перпендикулярно плоскости проводников приложено магнитное поле B. Какую силу F нужно приложить к проводнику AB, для того чтобы он двигался с постоянной ско-

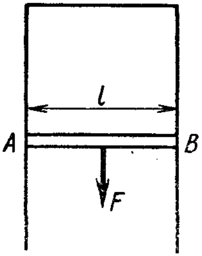


Рис. 97

ростью v? Система проводников находится в горизонтальной плоскости.

23.51. В однородное горизонтальное магнитное поле с индукцией $B = 4 \cdot 10^{-2}$ Тл помещена Н-образная конструкция из толстых медных стержней, боковые стороны которой направлены вертикально. Плоскость конструкции перпендикулярна вектору $\vec{B}$. По стержням свободно и без нарушения контакта скользит сверху вниз тонкая медная перемычка ($\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}$ Ом·м; $D = 8{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3). Какой максимальной скорости она достигает? Сопротивлением всех частей, кроме перемычки, пренебречь.

Изменятся ли направление и величина тока через толстую горизонтальную перемычку, когда подвижная перемычка пройдет мимо нее? Разобрать случай, когда плоскость конструкции составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Трением пренебречь.

23.52. Два металлических стержня расположены вертикально и замкнуты вверху проводником. По этим стержням без трения и нарушения контакта скользит перемычка длиной $l = 0{,}5$ см и массой $m = 1$ г. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл, перпендикулярной плоскости рамки. Установившаяся скорость $v = 1$ м/с. Найти сопротивление перемычки. Сопротивлением стержней и провода пренебречь.

23.53. В однородное горизонтальное магнитное поле B помещены проводящее кольцо, ось которого направлена вдоль поля, и подвижный радиальный проводник массой m, длиной l и сопротивлением R, один конец которого находится в центре кольца, а другой скользит по кольцу. Определить закон изменения тока по радиальному проводнику, необходимый для того, чтобы он вращался с постоянной угловой скоростью ω. Найти напряжение U, необходимое для поддержания этого тока.

23.54. Разборный школьный трансформатор включен в сеть. К вторичной обмотке подключена нагрузка. Как изменится ток в первичной и вторичной катушках при удалении верхней части сердечника?

23.55. Почему трансформатор может выйти из строя в том случае, если хотя бы один виток обмотки замкнется накоротко?

23.56. Трансформатор, повышающий напряжение с $U_1 = 100$ В до $U_2 = 3300$ В, имеет замкнутый сердечник в виде кольца.

Через кольцо пропущен провод, концы которого присоединены к вольтметру. Вольтметр показывает $U = 0{,}5$ В. Сколько витков имеют обмотки трансформатора? (Так можно определить число витков обмоток трансформатора, имея в своем распоряжении вольтметр и проволоку.)

23.57. Два одинаковых электромотора включены каждый в цепь с напряжением U. Один мотор вращается вхолостую, другой совершает некоторую работу. Который из них скорее нагреется?

23.58. Какую максимальную мощность может развить электромотор, включенный в сеть постоянного тока напряжением 120 В, если полное сопротивление цепи $R = 20$ Ом? Какой ток протекает при этом по цепи?

23.59. Электромотор (см. предыдущую задачу) передает приводу мощность 160 Вт. Какую э. д. с. разовьет тот же мотор, если его использовать как динамомашину с той же угловой скоростью, которую он имел, работая как двигатель? Какой смысл имеет неоднозначность полученного результата?

24. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

24.1. Мгновенное значение э. д. с. дано выражением $\mathscr{E} = 100 \sin 800\,\pi t$, где t выражено в секундах. Найдите амплитуду, частоту, период и фазу, когда $\mathscr{E} = 50$ В.

24.2. Проволочная рамка площадью S равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B вокруг оси, перпендикулярной направлению поля. Период вращения равен T. Выразить магнитный поток Φ, проходящий через рамку, и э. д. с. индукции $\mathscr{E}$ в рамке как функцию времени.

24.3. Как известно, график зависимости э. д. с. от времени при равномерном вращении рамки в однородном магнитном поле представляет собой синусоиду. Как изменится график, если частота вращения рамки удвоится?

24.4. Рамка площадью $S = 400$ см^2 имеет $n = 100$ витков и вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл, причем период вращения $T = 0{,}1$ с. Определить максимальное значение э. д. с., возникающей в рамке, если ось вращения перпендикулярна к силовым линиям.

24.5. Рамка площадью $S = 300$ см^2 имеет $n = 200$ витков и вращается в магнитном поле с индукцией $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ Тл. Определить период вращения, если максимальная э. д. с. индукции $\mathscr{E}_0 = 14{,}4$ В.

24.6. Переменный ток возбуждается в рамке из $n = 200$ витков, с площадью витка $S = 300$ см^2, в магнитном поле с индукцией $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ Тл. Определить э. д. с. индукции через $t = 0{,}01$ с после начала движения рамки из нейтрального положения. Амплитуда э. д. с. $\mathscr{E}_0 = 7{,}2$ В.

24.7. Квадратная рамка площадью $S = 625$ см^2 с замкнутой обмоткой из медного провода вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл вокруг оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной полю, совершая $n = 1200$ оборотов в минуту. Определить, как изменится температура обмотки за время $t = 1$ мин (теплоотдачей пренебречь). Удельное сопротивление, теплоемкость и плотность меди соответственно равны $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, $c = 378$ Дж/(кг·К), $D = 8800$ кг/м^3.

24.8. 1. Тепловой вольтметр, включенный в сеть переменного тока, показывает $U = 220$ В. Найти максимальное значение напряжения в сети.

2. Действующее напряжение в сети переменного тока 120 В. Определить время, в течение которого горит неоновая лампа в каждый полупериод, если лампа зажигается и гаснет при напряжении $U = 84$ В.

24.9. Почему при разомкнутой вторичной цепи (при так называемом холостом ходе) трансформатор почти не потребляет энергии?

24.10. Объяснить, почему с увеличением нагрузки во вторичной цепи (уменьшением сопротивления) автоматически возрастает потребляемая трансформатором мощность от сети?

24.11. Максимальное напряжение в колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью $L = 5$ мкГ и конденсатора емкостью $C = 13330$ пФ, равно $U_0 = 1{,}2$ В. Сопротивление ничтожно мало. Определить: а) действующее значение тока в контуре; б) максимальное значение магнитного потока, если число витков катушки $n = 28$.

24.12. Контур состоит из катушки индуктивностью $L = 28$ мкГн, сопротивления $R = 1$ Ом и конденсатора емкостью $C = 2222$ пФ. Какую мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе $U_0 = 5$ В.

24.13. Конденсатор колебательного контура приемника имеет емкость C. На какую длину волны резонирует контур приемника, если отношение максимальных значений напряжения на контуре и тока в катушке контура при резонансе равно m/n.

24.14. Что нужно для перехода к приему более коротких волн: сближать или раздвигать пластины конденсатора, включенного в колебательный контур приемника?

24.15. Приемный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 2$ мкГ и из конденсатора емкостью $C = 1800$ пФ. На какую длину волны λ рассчитан контур?

24.16. Какова должна быть емкость конденсатора C, чтобы с катушкой, имеющей коэффициент самоиндукции $L = 25$ мкГн, обеспечить настройку в резонанс на длину волны $\lambda = 100$ м?

24.17. В контур включены катушка самоиндукции с переменной индуктивностью от 0,5 до 10 мкГн и конденсатор переменной емкости от 10 до 500 пФ. Какой диапазон частот и длин волн можно охватить настройкой этого контура?

24.18. Переменный конденсатор меняет свою емкость от $C_1 = 56$ пФ до $C_2 = 667$ пФ. Какой комплект катушек самоиндукции нужно иметь, чтобы колебательный контур можно было настраивать на радиостанции в диапазоне от $\lambda_1 = 40$ м до $\lambda_2 = 2600$ м?

24.19. Сколько электромагнитных колебаний (высокой частоты) с длиной волны $\lambda = 375$ м происходит в течение одного периода звука с частотой $\nu_{зв} = 500$ Гц, произносимого перед микрофоном передающей станции?

24.20. Длина воздушной линии передачи 300 км. Частота напряжения 50 Гц. Найти сдвиг по фазе напряжения в начале и конце этой линии.

24.21. Почему увеличение дальности радиосвязи с космическими кораблями в два раза требует увеличения мощности передатчика в четыре раза? Почему увеличение дальности радиолокации в два раза требует увеличения мощности передатчика в 16 раз? Считать, что излучатель радиоволн точечный, а поглощение энергии средой пренебрежимо мало.

IV. Оптика

25. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА

25.1. Солнечный луч, проходящий через отверстие в ставне, составляет с поверхностью стола угол 48°. Как надо расположить плоское зеркало, чтобы изменить направление луча на горизонтальное?

25.2. На какой угол повернется луч, отраженный от плоского зеркала, при повороте последнего на угол α?

25.3. Высота Солнца над горизонтом составляет $\alpha = 38°$. Под каким углом β к горизонту следует расположить зеркало, чтобы осветить солнечными лучами дно вертикального колодца?

25.4. Плоское зеркало со столом образует двугранный угол α. На столе на расстоянии l от ребра двугранного угла расположена монета. Определить расстояние d, на которое смещается изображение монеты в зеркале при его повороте на угол φ относительно ребра двугранного угла.

25.5. Какова должна быть наименьшая высота вертикального зеркала, чтобы человек мог в нем видеть свое изображение во весь рост, не изменяя положения головы?

25.6. Зеркальный гальванометр расположен на расстоянии $R = 2$ м от шкалы. На какой угол повернулось зеркальце, если «зайчик» сместился от центра шкалы на 50 см?

25.7. Предмет помещен между двумя взаимно перпендикулярными зеркалами. Сколько получается изображений? Построить их. Найти решение для общего случая: когда угол между зеркалами α, причем $360°/\alpha$ есть целое число.

25.8. Небольшой предмет расположен между двумя плоскими зеркалами, поставленными под углом $\alpha = 30°$, на расстоянии $r = 10$ см от линии пересечения зеркал ближе к одному из зеркал.

1. На каком расстоянии x друг от друга находятся первые мнимые изображения предмета в зеркалах?

2. Решить задачу в общем виде для любого угла α.

25.9. Два зеркала наклонены друг к другу и образуют двугранный угол α. На них падает луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной к ребру угла. Найти, на какой угол повернется отраженный луч после отражения от обоих зеркал.

25.10. Звезда наблюдается в зрительную трубу после двукратного отражения от углового зеркала с раствором α. Как будет перемещаться изображение в трубе при небольших поворотах углового зеркала около ребра?

25.11. Луч света падает на одно из зеркал, составляющих двугранный угол $\alpha = 20°$, параллельно плоскости, делящей угол пополам под прямым углом к линии пересечения зеркал. Как он идет дальше? Какова будет сила света по выходе луча из двугранного угла, если начальная сила света равна $I = 10$ кд и если при каждом отражении сила света уменьшается в два раза?

25.12. Посередине между двумя плоскими зеркалами, параллельными друг другу помещен точечный источник света. С какими одинаковыми скоростями должны двигаться оба зеркала, оставаясь параллельными друг другу, чтобы первые мнимые изображения источника в зеркалах сближались со скоростью 5 м/с?

25.13. Вертикальный колышек высотой $h = 1$ м, поставленный вблизи уличного фонаря, отбрасывает тень длиной $l_1 = 0{,}8$ м. Если перенести колышек на $d = 1$ м дальше от фонаря (в той же плоскости), то он отбрасывает тень длиной $l_2 = 1{,}25$ м. На какой высоте H подвешен фонарь?

25.14. Столб вбит в дно реки и $h_1 = 1$ м столба возвышается над водой. Найти длину тени столба на поверхности и на дне реки, если высота Солнца над горизонтом $\alpha = 30°$, глубина реки $h_2 = 2$ м, показатель преломления воды равен $n = 1{,}33$.

25.15. Каков предельный угол при падении луча на границу стекло — вода?

25.16. На какой глубине под водой находится водолаз, если он видит отраженными от поверхности воды те части горизонтального дна, которые расположены от него на расстоянии $s = 15$ м и больше? Рост водолаза $a = 1{,}5$ м. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

25.17. В стекле с показателем преломления $n_{ст} = 1{,}52$ имеется сферическая полость радиусом $R = 3$ см, заполненная водой ($n_в = 1{,}33$). На полость падают параллельные лучи света. Определить радиус светового пучка, который проникает в полость.

25.18. Луч, падающий на плоскую границу двух сред, относительный показатель преломления которых n, частично отражается, частично преломляется. При каком угле падения отраженный луч перпендикулярен к преломленному лучу?

25.19. Луч света падает на оптическую призму из кварцевого стекла под углом 36°. Преломляющий угол призмы 40°. Под каким углом луч выйдет из призмы и каков его угол отклонения от первоначального направления? Показатель преломления кварцевого стекла 1,54.

25.20. В воде идут два параллельных луча *1* и *2*. Луч *1* выходит в воздух непосредственно, а луч *2* проходит сквозь горизонтальную плоскопараллельную стеклянную пластинку, лежащую на поверхности воды.

1. Будут ли лучи *1* и *2* параллельны по выходе в воздух?

2. Выйдет ли в воздух луч *2*, если луч *1* испытывает полное внутреннее отражение?

25.21. Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом $i = 60°$. Какова толщина пластинки d, если при выходе из нее луч сместился на 20 мм? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

25.22. Луч падает на плоскую стеклянную пластинку толщиной $d = 3$ см под углом $\alpha = 70°$. Определить смещение луча внутри пластинки. Показатель преломления стекла 1,5.

25.23. Между светящейся точкой и глазом помещается плоскопараллельная пластина. Найти построением кажущееся положение точки.

25.24. Предмет находится на расстоянии $l = 15$ см от плоскопараллельной стеклянной пластинки. Наблюдатель рассматривает предмет через пластинку, причем луч зрения нормален к ней. Определить расстояние x от изображения предмета до ближайшей к наблюдателю грани, если толщина пластинки $d = 4{,}5$ см, показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

25.25. Луч света падает на однородный прозрачный шар и проникает в него. Проходя внутри шара, он достигает поверхности раздела шар – воздух. Может ли в этой точке произойти полное внутреннее отражение?

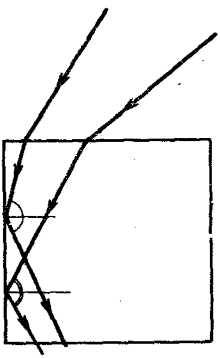


Рис. 98

25.26. Световые лучи, падающие на верхнюю грань стеклянной пластинки квадратного сечения, как показано на рис. 98, испытывают полное отражение у вертикальной грани. Каким должен быть наименьший показатель преломления стекла?

25.27. Стеклянный куб лежит на листе бумаги, покрывая собой нарисованные на ней звездочки. При этом оказывается, что звездочки невидимы через боковые стороны куба. При введении под основание куба капли воды звездочки делаются видимыми через боковые стенки. Объяснить это явление.

25.28. На основании равносторонней стеклянной призмы находится пылинка. Каково максимально допустимое значение показателя преломления n, при котором пылинку еще можно увидеть через боковые грани призмы с помощью лучей, не претерпевших ни одного отражения на границе стекло — воздух?

25.29. Найти положение изображения объекта, расположенного на расстоянии $l = 4$ см от передней поверхности плоскопараллельной стеклянной пластинки толщиной $d = 1$ см, посеребренной с задней стороны, считая, что показатель преломления пластинки $n = 1{,}5$. Изображение рассматривается перпендикулярно к поверхности пластинки.

25.30. В сосуд налиты две несмешивающиеся жидкости с показателями преломления $n_1 = 1{,}3$ и $n_2 = 1{,}5$. Сверху находится жидкость с показателем преломления n_1. Толщина ее слоя $h_1 = 3$ см. Толщина слоя второй жидкости $h_2 = 5$ см. На каком расстоянии от поверхности жидкости будет казаться расположенным дно сосуда, если смотреть на него сверху через обе жидкости?

25.31. Человек смотрит на свое изображение в зеркале, положенном на дно сосуда, наполненного водой. На какое расстояние аккомодирован глаз человека, если он находится на высоте $h = 10$ см над уровнем воды, а зеркало — на глубине $h_0 = 8$ см под уровнем воды? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

26. СФЕРИЧЕСКИЕ ЗЕРКАЛА И ЛИНЗЫ. ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

26.1. На линзу падает луч, не параллельный главной оптической оси. Построить его дальнейший ход. Фокус задан.

26.2. Светящаяся точка находится в фокальной плоскости собирающей линзы на некотором расстоянии от главной оптической оси. Сзади линзы поставлено зеркало, расположенное перпендикулярно к главной оптической оси. Где будет находиться изображение?

26.3. Даны положения оптической оси OO_1, оптического центра линзы и ход произвольного луча (рис. 99). Найти построением положения главных фокусов линзы.

26.4. Можно ли линзу применять в одной среде как рассеивающую, а в другой — как собирающую? Объяснить.

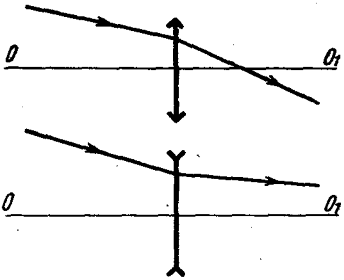


Рис. 99

26.5. Как надо расположить две линзы, чтобы параллельные лучи, пройдя через линзы, остались параллельными? Рассмотреть случаи: а) линзы собирающие; б) одна линза собирающая, другая – рассеивающая.

26.6. Даны положения главной оптической оси OO_1 сферического зеркала, светящейся точки S и ее изображения S'. Найти графическим построением положение центра кривизны и вершины зеркала. Какое было использовано зеркало: вогнутое или выпуклое? Какое изображение получилось при этом: действительное или мнимое? Решить задачу для случаев, изображенных на рис. 100.

1. Точки S и S' расположены по обе стороны оси OO_1 на разных расстояниях от оси и на некотором расстоянии друг от друга.

2. Точки S и S' расположены по одну сторону оси OO_1 на разных расстояниях от оси OO_1 и на некотором расстоянии друг от друга (рассмотреть возможные варианты).

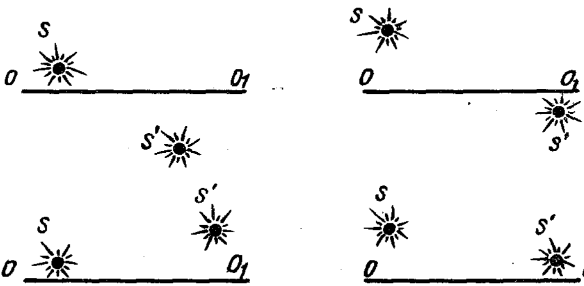


Рис. 100

26.7. Точечный источник света перемещается равномерно от центра зеркала до его вершины.

1. Как перемещается при этом изображение источника и как изменяется его скорость?

2. Во сколько раз средняя скорость перемещения изображения больше скорости перемещения предмета на участке от $d_1 = 1{,}5F$ до $d_2 = 1{,}1F$?

3. Вблизи какой точки при перемещении источника скорость перемещения изображения наибольшая?

26.8. Наблюдатель глядит сквозь тонкую стеклянную пластинку на свое изображение в выпуклом зеркале и, перемещая пластинку, добивается, чтобы изображения его глаза, видимые в зеркале и в стеклянной пластинке, налагались друг на друга и не смещались при покачивании головы (отсутствует параллакс). На каком расстоянии от глаза наблюдателя помещена пластинка, если фокусное расстояние зеркала $F = 40$ см и глаз отдален от его вершины на $l = 40$ см?

26.9. При определенном расположении изображение предмета в вогнутом зеркале в три раза меньше самого предмета. Если же предмет передвинуть на расстояние $l = 15$ см ближе к зеркалу, то изображение станет в 1,5 раза меньше предмета. Найти фокусное расстояние F зеркала.

26.10. Сходящиеся лучи падают на выпуклое зеркало так, что их продолжения пересекаются в точке, находящейся на расстоянии $d = 0{,}4$ м за зеркалом. После отражения от зеркала лучи расходятся таким образом, что их продолжения пересекаются в точке, отстоящей от зеркала на расстоянии $f = 1{,}6$ м. Обе точки пересечения лежат на главной оптической оси зеркала. Определить фокусное расстояние F зеркала.

26.11. Радиус кривизны вогнутого зеркала $R = 40$ см. Найти положение объекта, при котором его изображение будет действительным и увеличенным в два раза. Найти также положение, при котором изображение будет мнимым и увеличенным в два раза. Построить изображения объекта в обоих случаях.

26.12. 1. Круглый осколок стеклянного посеребренного шара употребляется как выпуклое сферическое зеркало. Какой диаметр имел разбитый шар, если, для того чтобы увидеть полностью собственное лицо, необходимо держать осколок на расстоянии, не меньшем чем $a = 30$ см? Диаметр осколка $D = 5$ см, длина лица $l = 20$ см.

2. Человек смотрит в вогнутое сферическое зеркало и видит прямое изображение своего глаза. Угловой размер этого изображения в $\gamma = 1{,}8$ раза больше углового размера изображения, которое получилось бы в плоском зеркале, помещенном на таком же расстоянии $a = 24$ см. Определить радиус кривизны вогнутого зеркала.

26.13. Два одинаковых сферических вогнутых зеркала поставлены друг против друга так, что их главные фокусы совпадают. Светящаяся точка S помещена на общей оси зеркал на расстоянии a от первого зеркала. Где получится изображение S' после отражения от обоих зеркал?

26.14. Два одинаковых сферических вогнутых зеркала поставлены одно против другого на расстоянии, равном учетверенному фокусному расстоянию. В фокусе одного зеркала помещен источник света. Найти четыре первых изображения источника.

26.15. В вогнутое зеркало радиусом $R = 16$ см налит тонкий слой воды (показатель преломления воды $n = 4/3$). Определить фокусное расстояние F этой системы.

26.16. Плоская поверхность плосковыпуклой линзы, фокусное расстояние которой F, посеребрена. Найти фокусное расстояние F' получившегося зеркала.

26.17. Каким будет фокусное расстояние F' зеркала, если посеребрить не плоскую, а выпуклую поверхность линзы? Радиус кривизны этой поверхности R.

26.18. Найти построением положение рассеивающей линзы и ее главных фокусов, если размеры предмета $AB = 10$ см, его изображения $A_1B_1 = 5$ см, а расстояние между точками B и B_1 на оптической оси $a = 4$ см. Проверить полученные данные расчетом.

26.19. Найти построением положение изображения предмета, расположенного на фокусном расстоянии вогнутой линзы. Проверить расчетом.

26.20. Каково главное фокусное расстояние линзы F, если для получения изображения какого-нибудь предмета в натуральную величину предмет этот должен быть помещен на расстоянии $d = 20$ см от линзы? Выразить в диоптриях оптическую силу линзы.

26.21. На каком расстоянии от выпуклой линзы с фокусным расстоянием $F = 60$ см следует поместить предмет, чтобы получить действительное изображение, увеличенное в $k = 2$ раза? Решить построением и проверить расчетом.

26.22. С помощью линзы, оптическая сила которой $D = + 4$ дптр, необходимо получить увеличенное в $k = 5$ раз изображение предмета. На каком расстоянии d перед линзой нужно поместить этот предмет? Решить построением и проверить расчетом.

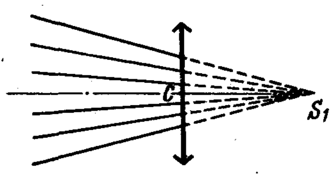


Рис. 101

26.23. Сходящийся пучок света имеет вид конуса с вершиной в точке S_1 (рис. 101). На пути пучка света помещается собирательная линза так, что ось конуса совпадает с главной оптической осью линзы. Расстояние от оптического центра C линзы до S_1 равно 30 см. В какой точке пересекутся лучи после преломления в линзе, если ее оптическая сила 4 дптр?

26.24. Точечный источник света находится на расстоянии $L=95$ см от экрана. На каком расстоянии от источника света следует поместить линзу с фокусным расстоянием $F = +16$ см и с диаметром оправы $D=10$ см, чтобы получить на экране ярко освещенный кружок диаметром $d=2{,}5$ см? Пояснить ответ чертежами.

26.25. Предмет находится на расстоянии $x = 10$ см от переднего фокуса собирательной линзы, а экран, на котором получается четкое изображение предмета, расположен на расстоянии $x'=40$ см от заднего фокуса линзы. Найти фокусное расстояние линзы.

26.26. На каком расстоянии надо поместить предмет от собирательной линзы, чтобы расстояние от предмета до его действительного изображения было наименьшим?

26.27. Расстояние от освещенного предмета до экрана $L=100$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение предмета на экране при двух положениях, расстояние между которыми $l=20$ см. Найти фокусное расстояние линзы.

26.28. Собирательная линза дает изображение некоторого объекта на экране. Высота изображения равна h_1. Оставляя неподвижным экран и объект, начинают двигать линзу к экрану и находят, что при втором четком изображении объекта высота изображения равна h_2. Найти действительную высоту предмета h. Какому условию должно удовлетворять расстояние L между объектом и экраном?

26.29. Предмет и экран зафиксированы неподвижно в вертикальном положении. Между ними находится двояковыпуклая линза, которая может перемещаться вдоль главной оптической оси. При одном положении линзы на экране получается изображение, увеличенное в три раза. Чему будет равно увеличение при другом положении линзы, при котором на экране получается четкое изображение? Определить расстояние l между обоими положениями линзы. Расстояние между предметом и экраном $L=60$ см.

26.30. Предмет находится на расстоянии $L=90$ см от экрана. Между предметом и экраном перемещают линзу, причем при одном положении линзы на экране получается увеличенное изображение предмета, а при другом – уменьшенное. Каково фокусное расстояние линзы, если линейные размеры первого изображения в четыре раза больше размеров второго?

26.31. Фокусное расстояние двояковыпуклой линзы $F=5$ см. Точечный источник света находится на оси линзы на расстоянии

$d = 6$ см от линзы. Линза разрезается плоскостью вдоль оптической оси на две равные части, которые раздвигаются на расстояние $s = 1$ см симметрично относительно оптической оси. Найти расстояние между двумя изображениями точки.

26.32. Построить график зависимости расстояния изображения f до линзы от расстояния d предмета от линзы. Рассмотреть также случай, когда предмет мнимый.

26.33. Выразить линейное увеличение k в зависимости от фокусного расстояния линзы F и расстояния предмета от линзы d для случаев: а) $d > F$; б) $d < F$. Построить график зависимости k от d.

26.34. Вдоль оптической оси тонкой собирательной линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см расположен предмет, один конец которого находится на расстоянии $a = 17{,}9$ см от линзы, а другой – на расстоянии $b = 18{,}1$ см. Определить увеличение изображения.

26.35. Найти длину изображения l' стрелки, расположенной вдоль оптической оси, вплотную к рассеивающей линзе, если длина l самой стрелки равна фокусному расстоянию линзы F. Решение обосновать построением.

26.36. Точечный источник света расположен на расстоянии $a = 30$ см от тонкой линзы, оптическая сила которой $D = 5$ дптр. На какое расстояние сместится изображение источника, если между линзой и источником поместить толстую стеклянную пластинку толщиной $h = 15$ см и показателем преломления $n = 1{,}5$?

26.37. На экране, отстоящем от объектива (тонкая линза оптической силой 5 дптр) на расстоянии 4 м, получено четкое изображение диапозитива. Экран отодвигают на 20 см. На сколько надо переместить диапозитив, чтобы восстановить четкость изображения?

26.38. Как изменится фокусное расстояние стеклянной линзы, если ее опустить в воду?

26.39. Показать, что оптическая сила двух соприкасающихся тонких линз равна сумме их оптических сил.

26.40. Объектив состоит из трех контактирующих тонких линз; первая двояковыпуклая с фокусным расстоянием $F_1 = 12{,}5$ см, вторая двояковогнутая с фокусным расстоянием $F_2 = -10$ см и третья двояковыпуклая с фокусным расстоянием $F_3 = 5$ см. Определить фокусное расстояние объектива F.

26.41. Светящаяся точка находится на главной оптической оси линзы, фокусное расстояние которой $F = 3$ см, на расстоянии $d = 4$ см от ее оптического центра. На расстоянии $\Delta = 3$ см от первой линзы находится вторая такой же оптической силы. Оптические оси обеих линз совпадают. Где получится изображение светящейся точки?

26.42. На оптической скамье расположены две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 12$ см и $F_2 = 15$ см. Расстояние между линзами $l = 36$ см. Предмет находится на расстоянии $d = 48$ см от первой линзы. На каком расстоянии f от второй линзы получится изображение предмета?

26.43. Предмет находится в 20 см слева от линзы с фокусным расстоянием +10 см. Вторая линза с фокусным расстоянием +12,5 см расположена в 30 см справа от первой. Найти положение изображения и увеличение, даваемое системой.

26.44. Изображение отдаленного источника света с помощью линзы, фокусное расстояние которой $F_1 = 20$ см, проецируется на экран. Между линзой и источником света помещается вторая линза с фокусным расстоянием $F_2 = 30$ см, причем расстояние между линзами равно $l = 10$ см. На сколько нужно будет переместить экран, чтобы восстановить резкость изображения?

26.45. Параллельный пучок света падает на линзу, затем на вогнутое зеркало. Фокусное расстояние зеркала равно $F = 24$ см. Расстояние между линзой и зеркалом $l = 32$ см. Каким должно быть фокусное расстояние линзы, чтобы свет, отразившись от зеркала, собрался в точке, удаленной от зеркала на расстояние 6 см?

26.46. В трубку вставлены две двояковыпуклые линзы таким образом, что их главные оптические оси совпадают. Расстояние между линзами $l = 16$ см. Главное фокусное расстояние 1-й линзы $F_1 = 8$ см, 2-й – $F_2 = 5$ см. Предмет высотой $h = 9$ см помещен на расстоянии $d = 40$ см от первой линзы. На каком расстоянии от 2-й линзы получилось изображение? Какова его высота h'?

26.47. Источник света находится на расстоянии $a = 35$ см от собирательной линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см. По другую сторону линзы на расстоянии $b = 38$ см расположена рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_2 = 12$ см. Где будет находиться изображение источника?

26.48. Оптическая система дает действительное изображение предмета. Где надо поставить собирательную линзу с фокусным расстоянием $F = 25$ см, для того чтобы изображение стало мнимым и увеличенным в четыре раза?

26.49. Объектив дает в фокальной плоскости действительное изображение Солнца. Можно ли найти такое положение рассеивающей линзы, при котором изображение Солнца, оставаясь действительным, стало бы в три раза больше, чем без линзы?

26.50. Вогнутая сторона вогнуто-выпуклой линзы посеребрена. Свет от небольшого источника падает на выпуклую сторону линзы и, отражаясь от посеребренного слоя, дает изображение источника по ту же сторону линзы. На каком расстоянии от линзы нужно поместить источник, для того чтобы изображение совпало с самим источником, если фокусное расстояние линзы $F = 18$ см, а радиус вогнутой поверхности $R = 40$ см?

26.51. Источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирательной линзы на ее оси. За линзой перпендикулярно к оптической оси помещено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы нужно поместить зеркало, для того чтобы лучи, отраженные от зеркала, пройдя вторично через линзу, стали параллельны?

26.52. Три линзы с фокусными расстояниями $F_1 = +10$ см, $F_2 = -20$ см и $F_3 = +9$ см расположены так, что их оптические оси совпадают, а расстояния между ними соответственно равны $a = 15$ см и $b = 15$ см. На первую линзу падает параллельный пучок света. Найти положение точки схождения этого пучка после прохождения системы.

26.53. Для определения фокусного расстояния F_2 рассеивающей линзы на оптической скамье последовательно расположили перпендикулярно оси масштабную линейку, на расстоянии $a = 15$ см от нее – положительную линзу с фокусным расстоянием $F_1 = 10$ см, затем исследуемую отрицательную линзу и зрительную трубу, установленную на бесконечность. Оказалось, что если рассеивающую линзу расположить на расстоянии $l = 10$ см от положительной, в окуляре трубы наблюдается четкое изображение линейки. Определить F_2.

26.54. Сложный объектив состоит из двух тонких линз: собирательной с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см и рассеивающей – с $F_2 = -10$ см. Линзы расположены на расстоянии $l = 15$ см друг от друга. С помощью объектива получают на экране изображение Солнца. Какое фокусное расстояние F должна иметь тонкая линза, чтобы изображение Солнца, полученное с ее помощью, имело такой же размер?

27. ЗРЕНИЕ. ОПТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

27.1. Почему близорукий глаз может различать более мелкие детали, чем глаз с нормальным зрением?

27.2. Как изменится оптическая сила хрусталика глаза при переводе взгляда со звезды на книгу (книга находится на расстоянии наилучшего зрения)?

27.3. Мальчик, сняв очки, читал книгу, держа ее на расстоянии $l = 16$ см от глаз. Какой оптической силы у него очки?

27.4. Страница текста, напечатанного мелким шрифтом, подложена под толстую стеклянную пластину, показатель преломления которой $n = 1{,}5$. Какова максимальная толщина пластинки, при которой близорукий человек без очков наиболее четко видит текст, если он пользуется очками $D = -5$ дптр?

Указание: углы падения и преломления лучей, попадающих в глаз, малы, так что отношение синусов этих углов можно заменить отношением тангенсов.

27.5. Близорукий человек без очков рассматривает предмет, находящийся на некотором расстоянии под поверхностью воды. Оказалось, что если глаз расположен вблизи поверхности воды, то максимальное погружение предмета, при котором человек еще различает его мелкие детали, $l = 30$ см. Принимая показатель преломления воды равным $n = 1{,}3$, определить, какие очки следует носить этому человеку.

27.6. Дальнозоркий глаз аккомодирует, не напрягаясь, на расстоянии, не меньшем $d_0 = 50$ см. Какова должна быть оптическая сила очков, для того чтобы предел аккомодации был понижен до $d = 20$ см, если считать и глаз и очки близко расположенными тонкими линзами?

27.7. Человек с нормальным зрением начинает смотреть через очки с оптической силой $D = +5$ дптр. Между какими двумя предельными положениями должен быть расположен рассматриваемый объект, чтобы его было ясно видно?

27.8. Можно ли сфотографировать мнимое изображение?

27.9. Обычным фотоаппаратом можно снимать предметы, расположенные не ближе $l = 50$ см от объектива. С какого расстояния можно снимать этим же фотоаппаратом, если на объектив надеть насадочную линзу с оптической силой $D = +2$ дптр?

27.10. Диапозитив имеет размер $a \times b = 8 \times 8$ см^2. Определить оптическую силу тонкой собирательной линзы, которая может служить объективом проекционного аппарата, если изображение диапозитива на экране должно иметь размеры $c \times d = 1{,}2 \times 1{,}2$ м^2. Расстояние от объектива до экрана $l = 4$ м.

27.11. Нужно изготовить фотографическим путем шкалу, разделенную на десятые доли миллиметра. Фокусное расстояние объектива $F_{об} = 13{,}5$ см. На каком расстоянии от объектива следует поместить шкалу, чтобы она была уменьшена в $k = 10$ раз?

27.12. Требуется сфотографировать конькобежца, пробегающего перед аппаратом со скоростью $v = 10$ м/с. Определить максимально допустимую экспозицию при условии, что размытость изображения не должна превышать 0,2 мм. Главное фокусное расстояние объектива $F = 10$ см и расстояние от конькобежца до аппарата $d = 5$ м. В момент фотографирования оптическая ось объектива аппарата перпендикулярна к траектории движения конькобежца.

27.13. Какие предметы можно рассмотреть на фотографии, сделанной со спутника вблизи Земли, если разрешающая способность пленки 0,01 мм? Каким должно быть время экспозиции τ, для того чтобы полностью использовались бы возможности пленки? Фокусное расстояние объектива используемой фотокамеры $F = 10$ см.

27.14. С помощью фотографического аппарата 9×12 см^2 требуется снять здание длиной $l = 50$ м. На каком расстоянии от здания нужно установить аппарат, чтобы весь фасад здания уместился на пластинке, если главное фокусное расстояние объектива $F = 12$ см?

27.15. Найти формулу увеличения лупы для того случая, когда наблюдатель устанавливает лупу так, чтобы: а) видеть изображение на расстоянии наилучшего зрения; б) адаптировать глаз на бесконечность.

27.16. Можно ли получить на экране изображение, даваемое микроскопом (телескопом)? Что нужно для этого сделать?

27.17. Увеличение микроскопа $k = 600$. Определить оптическую силу объектива, если фокусное расстояние окуляра $F_{ок} = 4$ см, а длина тубуса $l = 24$ см.

27.18. Фокусное расстояние объектива микроскопа $F_{об} = 0,5$ см, а расстояние между объективом и окуляром микроскопа $a = 16$ см. Увеличение микроскопа $k = 200$. Найти увеличение окуляра.

27.19. Фокусное расстояние объектива микроскопа $F_{об} = 1,25$ мм, окуляра — $F_{ок} = 10$ мм. Расстояние между объективом и окуляром равно $l = 16$ см. Где должен быть помещен рассматриваемый объект и каково увеличение микроскопа для наблюдателя, расстояние наилучшего зрения которого $L = 25$ см?

27.20. Телескоп, объектив которого имеет диаметр $D = 8$ см, наведен на отдаленную светящуюся точку. Из окуляра телескопа выходит параллельный пучок лучей, который можно обнаружить, поместив перед окуляром матовое стекло или просто лист бумаги, в виде круглого светлого пятна. Диаметр этого пятна $d = 4$ мм. Путь лучей в телескопе не ограничен никакими диафрагмами (не считая входного отверстия объектива). Каково увеличение телескопа?

27.21. Фокусное расстояние объектива зрительной трубы $F_{об} = 100$ см, окуляра – $F_{ок} = 8$ см. Под каким углом виден диаметр лунного диска при рассматривании изображения с расстояния наилучшего зрения $L = 25$ см? Кажущийся угловой диаметр Луны $\alpha = 0{,}5°$.

27.22. Фокусное расстояние объектива одного из рефракторов в Пулкове $F_{об} = 14{,}1$ м. Каково увеличение этого рефрактора при пользовании окуляром с фокусным расстоянием $F_{ок} = 2{,}5$ см?

27.23. Зрительная труба настроена для наблюдения Луны. На какое расстояние и в какую сторону нужно передвинуть окуляр, чтобы можно было рассматривать предметы, удаленные от трубы на $d = 100$ м? Фокусное расстояние объектива $F = 60$ см.

27.24. Из астрономической трубы, у которой фокусное расстояние объектива $F = 3$ м, вынули окуляр и просто глазом рассматривают изображение, полученное в главном фокусе объектива. Труба наведена на очень далекий предмет. Какое увеличение дает в этом случае труба?

28. ФОТОМЕТРИЯ

28.1. Свет падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку по нормали к ее поверхности. Пренебрегая поглощением и считая, что коэффициент отражения света на каждой поверхности равен α, определить τ – долю световой энергии Φ, прошедшей сквозь пластинку. Учесть многократное отражение от границ.

28.2. С какого наибольшего расстояния можно заметить ночью огонек папиросы, если сила света папиросы при сильном затягивании $I = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ кд, наименьший световой поток, воспринимаемый глазом, равен $\Phi = 10^{-13}$ лм и поверхность зрачка глаза в темноте $S = 0{,}4$ см^2?

28.3. Высота Солнца меняется от угла α_1 до α_2. Как изменится освещенность поверхности Земли?

28.4. На какой высоте над чертежной доской следует повесить лампу мощностью $P = 200$ Вт, чтобы получить освещенность доски под лампой, равную $E = 50$ лк? Светоотдача лампы равна 12 лм/Вт. Наклон доски $\alpha = 30°$.

28.5. Над горизонтальной поверхностью помещены на высоте $h = 2$ м и на расстоянии $l = 1$ м друг от друга два источника света, дающие световые потоки по $\Phi = 300$ лм каждый. Определить освещенность на поверхности: а) в точках под источниками света; б) на середине расстояния между ними.

28.6. На некотором расстоянии от точечного источника света помещен экран. Как изменится освещенность в середине экрана, если параллельно ему по другую сторону от источника на том же расстоянии от него поставить плоское зеркало? Расстояние от источника до экрана $l = 1{,}5$ м, сила света источника $I = 50$ кд.

28.7. В киноаппарате установлена лампа, дающая силу света $I = 200$ кд. Свет лампы проходит через конденсор и затем попадает в объектив аппарата; объектив проецирует изображение освещенной поверхности конденсора на экран в пятидесятикратном увеличении. На каком расстоянии от лампы находится проецируемая поверхность конденсора, если освещенность центра экрана $E = 100$ лк, а в оптической системе аппарата теряется $\varkappa = 37{,}5\%$ света?

28.8. Над полусферой находится симметрично расположенный точечный источник света силой $I = 50$ кд на высоте, равной диаметру полусферы. Определить освещенность в той точке поверхности полусферы, в которую лучи падают под углом $\alpha = 35°$. Радиус полусферы $R = 1$ м (рис. 102).

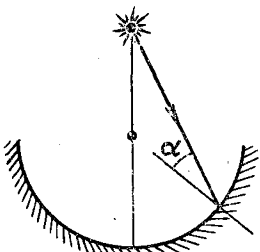


Рис. 102

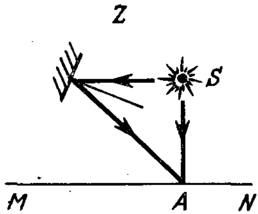


Рис. 103

28.9. Точечный источник света S освещает поверхность MN (рис. 103). Как изменится освещенность в точке A, в которой лучи от S падают на поверхность нормально, если сбоку S на таком же расстоянии, как и освещаемая поверхность, поместить зеркало Z, отражающее свет от S? Коэффициент отражения принять равным единице. Зеркало находится на одном уровне с источником S. Сделать построение.

28.10. На высоте $h \gg 1$ м от поверхности стола находится точечный источник света силой 25 кд. Какова будет освещенность в точке, расположенной под источником, если на пути лучей поместить горизонтально линзу с оптической силой 1 дптр так, чтобы источник находился в ее фокусе?

28.11. Какой будет кажущаяся сила света I источника, если, закрыв сам источник, рассматривать его отражение в зеркале: а) выпуклом; б) вогнутом? Радиусы кривизны выпуклого и вогнутого зеркал равны R, сила света самого источника I_0 и он находится на расстоянии d от зеркал.

28.12. В главном фокусе вогнутого зеркала с радиусом кривизны $R = 50$ см находится точечный источник света. На расстоянии $L = 25$ м от зеркала помещен экран, перпендикулярный главной оптической оси зеркала. Во сколько раз освещенность в центре светлого пятна, получающегося на экране, больше, чем освещенность в том же месте экрана, создаваемая источником при отсутствии зеркала? Потерями света в воздухе и при отражении пренебречь.

28.13. Какой будет кажущаяся сила света источника, если его рассматривают через линзы с фокусным расстоянием F: а) собирательную; б) рассеивающую? Сила света самого источника равна I. Источник находится на расстоянии a от линзы.

28.14. Солнечные лучи, падая нормально на экран, дают освещенность $E = 10\,000$ лк. Перед экраном помещают: а) тонкую линзу оптической силой $D_1 = 5$ дптр на расстоянии $a_1 = 60$ см; б) линзу оптической силой $D_2 = -2$ дптр на расстоянии $a_2 = 20$ см. Определить в обоих случаях среднюю освещенность экрана в тени от линзы и в светлом кольце вокруг тени. Потерями света в линзе пренебречь.

28.15. Проекционный аппарат имеет объектив с фокусным расстоянием $F = 5$ см. Квадратный диапозитив площадью $S = 10$ см^2, находящийся на расстоянии $a = 5{,}1$ см от линзы, пропускает световой поток $\Phi = 10$ лм. Определить освещенность E изображения диапозитива на экране. Считать, что световой поток не рассеивается.

28.16. При помощи линзы последовательно получены два изображения одного и того же предмета. Увеличения k_1 и k_2 оказались равными пяти и двум. Как изменилась освещенность экрана в месте получения изображения?

28.17. Лучи Солнца освещают бумагу. Как изменится освещенность бумаги, если на ней при помощи тонкой линзы с оптической силой 4 дптр и диаметром отверстия 6 см получить изображение Солнца? Угловой диаметр Солнца $\alpha = 30'$.

28.18. Большая картина фотографируется сначала целиком, а затем ряд деталей фотографируется в натуральную величину. В первом случае экспозиция $t = 5$ с. Какова должна быть экспозиция при съемке деталей?

28.19. Объективом малой светосилы фотографируется предмет с уменьшением в 2 раза. Как изменится освещенность на фотографической пластинке при съемке в тех же условиях, если снимать в масштабе 1 : 1?

28.20. Сначала фотографируется близкий объект, потом дальний. Куда надо переместить объектив? Как надо изменить экспозицию?

28.21. Планета рассматривается в телескоп, объектив которого имеет фокусное расстояние $F = 800$ мм и диаметр $D = 80$ мм. Как изменится освещенность E изображения планеты на сетчатке глаза, если окуляр с фокусным расстоянием $F_2 = 50$ мм заменить окуляром с фокусным расстоянием $F_2' = 25$ мм или окуляром с фокусным расстоянием $F_2'' = 100$ мм?

28.22. При наблюдении в телескоп освещенность изображения звезды в $n = 10$ раз меньше освещенности поверхности дневного неба, рассматриваемого в тот же телескоп. Во сколько раз нужно увеличить диаметр объектива телескопа, для того чтобы освещенность изображения стала в $n_1 = 10$ раз больше освещенности неба?

29. ВОЛНЫ. КВАНТЫ. ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ

29.1. Длина волны красного луча в воде равна длине волны зеленого луча в воздухе. Вода освещена красным светом. Какой цвет видит при этом свете человек, открывающий глаза под водой?

29.2. Известно, что заря красная, а небо – синее. Какие лучи сильнее рассеиваются в атмосфере?

29.3. 1. Объясните происхождение цвета: а) синего неба; б) синего стекла; в) синей бумаги.

2. На белом фоне написан текст красными буквами. Через стекло какого цвета нельзя увидеть надпись?

29.4. 1. Если две волны интерферируют друг с другом, то изменяет ли одна волна распространение другой?

2. Имеет ли место изменение энергии при интерференции волн.

3. Почему интерференционные явления наблюдаются только в тонких пленках и пластинках?

29.5. Лучи света под углом $i = 45°$ падают на тонкую прозрачную пластинку, которая при этом окрашена в зеленый цвет. Показать, что при уменьшении угла i цвет пластинки должен изменяться, переходя к красному концу спектра, а при увеличении угла i – наоборот, к фиолетовому.

29.6. Белый свет, падающий нормально на мыльную пленку ($n = 1{,}33$) и отраженный от нее, дает в видимом спектре интерференционный максимум на волне длиной $\lambda_1 = 630$ нм и ближайший к нему минимум на волне $\lambda_2 = 450$ нм. Какова толщина пленки d, если считать ее постоянной?

29.7. Определить энергию и массу фотона, длина волны которого соответствует: а) видимой части спектра ($\lambda = 0,6$ мкм); б) рентгеновскому излучению ($\lambda_1 = 10$ нм); в) γ-излучению ($\lambda_2 = 0,1$ нм).

29.8. Вычислить длину волны фотона, энергия которого равна энергии покоя электрона.

29.9. Какому числу фотонов излучений с длинами волн $\lambda_1 = 1$ мкм и $\lambda_2 = 2$ пм соответствует энергия $E = 1$ эрг?

29.10. 1. Сколько фотонов попадает за 1 мин на 1 см^2 поверхности Земли, перпендикулярной солнечным лучам? Солнечная постоянная $w \approx 1,4 \cdot 10^3$ Дж/(м$^2 \cdot$ с), средняя длина волны солнечного света $\lambda_{ср} = 5,5 \cdot 10^{-7}$ м.

2. Определить уменьшение массы Солнца в 1 с. Расстояние от Солнца до Земли $R = 1,5 \cdot 10^{11}$ м. Определить время, за которое масса Солнца уменьшается на 1 %.

29.11. Работа выхода электронов для натрия равна $A_{вых} = 2,27$ эВ. Найти красную границу фотоэффекта для натрия.

29.12. Работа выхода электрона с поверхности цезия равна $A_{вых} = 1,89$ эВ. С какой максимальной скоростью вылетают электроны из цезия, если металл освещен желтым светом с длиной волны $\lambda = 0,589$ мкм?

29.13. В опыте Столетова заряженная отрицательная цинковая пластинка облучалась светом от вольтовой дуги. До какого максимального потенциала зарядится цинковая пластинка, если она будет облучаться монохроматическим светом длиной волны $\lambda = 324$ нм (ближний ультрафиолетовый свет)? Работа выхода электронов из цинка равна $A_{вых} = 3,74$ эВ.

29.14. Красная граница фотоэффекта для железа, лития, калия определяется соответственно длинами волн 285, 520, 580 нм. Найти работу выхода электронов из металлов и выразить ее в электрон-вольтах.

29.15. Красная граница фотоэффекта у лития 520 нм. Какую обратную разность потенциалов (задерживающее напряжение) нужно приложить к фотоэлементу (к фотокатоду подключается плюс, к аноду-коллектору – минус источника напряжения), чтобы задержать электроны, испускаемые литием под действием ультрафиолетовых лучей длиной волны 200 нм.

29.16. Для исследования фотоэффекта и измерения постоянной Планка П. И. Лукирский применял фотоэлемент, у которого анодом-коллектором служили посеребренные стенки стеклянного сферического баллона, в центре которого находился фотокатод в виде шарика из исследуемого материала. Найти постоянную Планка, если фотоэлектроны, вырываемые из поверхности некоторого металла светом с частотой $1{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц, задерживаются потенциалом 3,1 В, а вырываемые светом длиной волны 125 нм – потенциалом 8,1 В.

29.17. Электрон, ускоренный электрическим полем, приобрел скорость, при которой его масса стала равной удвоенной массе покоя. Чему равна разность потенциалов, пройденная электроном?

29.18. Вычислить энергию связи ядер дейтерия ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$, трития ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$, гелия ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ (в МэВ).

Частица	m, а. е. м.	E, МэВ	Нейтральный атом	m, а. е. м.
Электрон . . .	0,00055	0,511	${}^{2}_{1}\mathrm{H}$	2,01410
Протон	1,00728	938,3	${}^{3}_{1}\mathrm{H}$	3,01605
Нейтрон	1,00866	939,6	${}^{4}_{2}\mathrm{He}$	4,00260

29.19. Какая энергия выделяется при термоядерной реакции

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n. $$

Данные а. е. м. возьмите из предыдущей задачи.

29.20. При делении одного атома ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ на два осколка выделяется около 200 МэВ. Какому количеству энергии (в кВт·ч) соответствует «сжигание» в ядерном реакторе 1 г ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$? Какое количество условного топлива (теплотворная способность $2{,}94 \cdot 10^{7}$ Дж/кг) выделяет такую же энергию?

Ответы, указания и решения

I. МЕХАНИКА

1. КИНЕМАТИКА

1.1. $t_C = l/(v_1 + v_2)$; $x_C = lv_1/(v_1 + v_2)$.

Решение. Зависимость координат тел от времени дается формулами:

$$x_1 = v_1 t; \quad x_2 = l - v_2 t.$$

Встреча ($x_1 = x_2$) произойдет через время $t = l/(v_1 + v_2)$ от начала движения в точке, находящейся на расстоянии $lv_1/(v_1 + v_2)$ от пункта A.

Графики зависимости координаты тел от времени изображены на рис. 104 ($\operatorname{tg}\alpha = v_1$; $\operatorname{tg}\beta = v_2 < 0$, так как v_2 направлена в сторону, противоположную направлению, принятому за положительное). Моменту встречи соответствует точка C пересечения графиков.

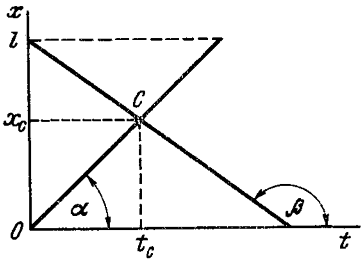


Рис. 104

1.2. $t_C = \dfrac{l - v_2 t_0}{v_1 - v_2}$; $x_C = \dfrac{(l - v_2 t_0)\, v_1}{v_1 - v_2}$.

Указание. Воспользуйтесь графиками зависимости координат тел от времени (рис. 105).

1.3. $t_2 = 6$ ч.

Решение. Обозначив через u – скорость течения, а через v – скорость лодки относительно воды, можно записать:

$$t_1 = s/(v + u); \tag{1}$$

$$t = s/u. \tag{2}$$

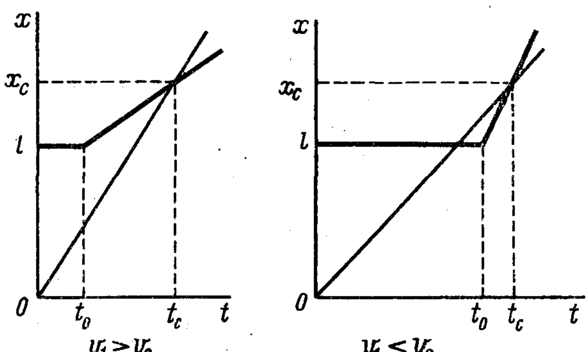


Рис. 105

Для определения времени $t_2 = s/(v - u)$, затрачиваемого лодкой на обратный путь, уравнения (1) и (2) удобно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{t_1} = \frac{v}{s} + \frac{u}{s}; \tag{3}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{u}{s}. \tag{4}$$

Вычитая из уравнения (3) удвоенное уравнение (4), получаем $\frac{1}{t_1} - \frac{2}{t} = \frac{v}{s} - \frac{u}{s} = \frac{1}{t_2}$, откуда $t_2 = \frac{tt_1}{t - 2t_1}$.

1.4. 1,5 мин.

1.5. $n = 100$.

Решение. Если бы скорость человека была направлена противоположно направлению движения эскалатора, то он насчитал бы тем меньше ступенек, чем быстрее шел (но не меньше n). В нашем же случае направления скоростей человека и эскалатора совпадают.

Пусть v – скорость эскалатора; l – его длина и n – число ступенек на неподвижном эскалаторе. Число ступенек, приходящихся на единицу длины эскалатора, равно n/l. Поэтому, если человек идет со скоростью u относительно эскалатора, то время его пребывания на эскалаторе $l/(v + u)$, а путь, пройденный по эскалатору, $ul/(v + u)$. При этом человек насчитывает число ступенек $n_1 = \frac{ul}{v + u}\frac{n}{l}$. Аналогично, во втором случае он насчитывает

$$n_2 = \frac{3ul}{v + 3u}\frac{n}{l}.$$

Таким образом, мы получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{u}{v + u}n = n_1, \\ \frac{3u}{v + 3u}n = n_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1 + \frac{v}{u} = \frac{n}{n_1}, \\ 1 + \frac{1}{3}\frac{v}{u} = \frac{n}{n_2}. \end{cases}$$

Отсюда, исключая отношение v/u, найдем $n = 2n_1n_2/(3n_1 - n_2) = 100$.

1.6. $u = 7{,}5$ км/ч; $v = 17{,}5$ км/ч.

1.7. $u = 4$ км/ч; $v = 16$ км/ч.

Решение. Выберем в качестве системы отсчета плот (воду). В этой системе отсчета лодка движется вниз и вверх по реке с одинаковой скоростью. Это означает, что время удаления лодки от плота равно времени приближения к нему; таким образом, лодка также возвращалась $^3/_4$ ч. За прошедшие 1,5 ч плот прошел расстояние $s_1 - s_2 = 6$ км. Следовательно, скорость течения (скорость плота относительно берега) $u = 4$ км/ч.

Скорость лодки относительно воды $v = s_1/t - u = 16$ км/ч.

Это решение иллюстрирует, насколько важен в кинематике удачный выбор системы отсчета.

1.8. $t = 2$ мин.

Указание. Скорость велосипедиста в системе отсчета, связанной с колонной, равна $v_2 - v_1$, когда он движется к головному отряду, и $v_2 + v_1$, когда он возвращается обратно. Поэтому $t = \frac{l}{v_2 - v_1} + \frac{l}{v_2 + v_1} = \frac{2lv_2}{v_2^2 - v_1^2}$.

1.9. 600 м/с.

1.10. $v_2 = v_1 \operatorname{tg} \alpha \approx 14{,}4$ м/с.

Решение. Для того чтобы капли дождя не оставляли следа на заднем стекле, необходимо, чтобы направление вектора скорости капли дождя $\vec{v}$ относительно автомобиля составляло с горизонтом угол не больше 60°. Относительная скорость складывается из вертикальной составляющей, равной скорости падения капли $\vec{v}_2$, и горизонтальной составляющей, равной скорости автомобиля $-\vec{v}_1$ и направленной в противоположную сторону (рис. 106). Из треугольника скоростей видно, что $v_2 = v_1 \operatorname{tg} \alpha$.

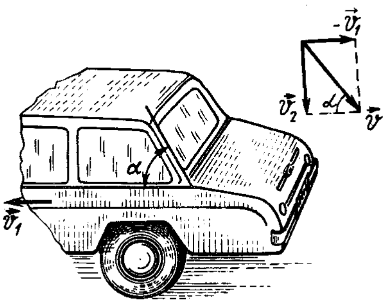


Рис. 106

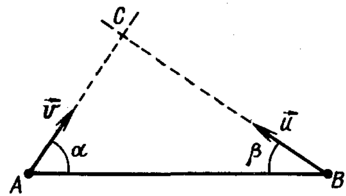


Рис. 107

1.11. Одинаково.

1.12. $v = 174$ км/ч; на северо-запад под углом 4°27′ к меридиану.

Указание. Обозначим $v_0 = s/t$ – скорость движения самолета относительно Земли. Она направлена, согласно условию, вдоль меридиана; тогда $\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{u}$. По теореме косинусов $v^2 = u^2 + v_0^2 - 2uv_0 \cos 150°$. Угол β между $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$ находим из теоремы синусов: $\sin \beta / u = \sin 150° / v$.

1.13. а) и б) – прямую, составляющую угол $\alpha = \operatorname{arctg}(u/v)$ с направлением движения доски. В случае б) след может не доходить до края доски.

Указание. Рассмотреть движение мела в системе координат, связанной с доской. Так как сила трения направлена вдоль вектора скорости мела относительно доски, то она не может изменить направление движения мела и уменьшает лишь его скорость.

1.14. $\beta = \arcsin\left(\frac{v}{u} \sin \alpha\right)$.

Указание. Точка C (рис. 107) – место встречи корабля и торпеды.

$AC = vt$, $CB = ut$, где t — время движения торпеды. Согласно теореме синусов $\dfrac{AC}{\sin\beta} = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$ или $\dfrac{vt}{\sin\beta} = \dfrac{ut}{\sin\alpha}$. Отсюда $\beta = \arcsin\left(\dfrac{v}{u}\sin\alpha\right)$.

1.15. $u = v/\cos\alpha$.

Решение. За один и тот же малый промежуток времени Δt ползун перемещается на $AB = \Delta l$, а шнур выбирают на длину $AC = \Delta l \cos\alpha$ (рис. 108) ($\angle BCA$ можно считать прямым из-за малости $\Delta\alpha$). Поэтому можно написать $\Delta l/u = \Delta l \cos\alpha/v$, откуда $u = v/\cos\alpha$, т. е. скорость выбирания веревки равна проекции скорости ползуна на направление веревки.

1.16. $u = v/\cos\alpha$.

Указание. Проекция скорости u груза на направление каждого из канатов должна быть равна скорости каната (см. задачу 1.15).

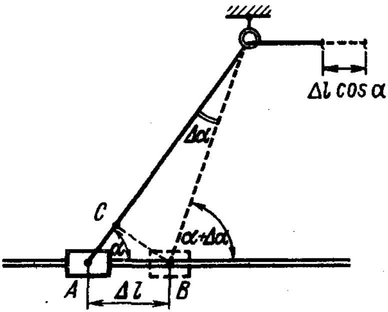


Рис. 108

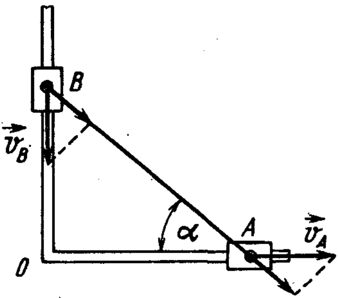


Рис. 109

1.17. $v_B = v_A \operatorname{ctg}\alpha = 17{,}3$ см/с; $OB = \sqrt{l^2 - v^2t^2}$; $v_B = v^2t/\sqrt{l^2 - v^2t^2}$.

Указание. См. решение задачи 1.15.

В любой момент времени проекции скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ концов стержня (рис. 109) на ось стержня равны между собой, так как в противном случае стержень должен был бы укорачиваться или удлиняться. Таким образом, $v_A \cos\alpha = v_B \sin\alpha$, откуда $v_B = v_A \operatorname{ctg}\alpha$.

1.18. а) 40 м/с; б) 0; в) $20\sqrt{2}$ м/с.

Указание. Скорость любой точки гусеницы относительно Земли в каждый данный момент времени складывается из скорости танка относительно Земли и скорости звена гусеницы относительно танка.

1.19. 1. $v_{\text{ср}} = \dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 48$ км/ч; 2. $v_{\text{ср}} = \dfrac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3} = 40$ км/ч.

Решение. 1. Средняя скорость $v_{\text{ср}}$ численно равна отношению всего пути, пройденного телом, ко времени движения: $v_{\text{ср}} = s_{\text{полн}}/t$. Время $t = t_1 + t_2 = \dfrac{{}^1\!/_2 s}{v_1} + \dfrac{{}^1\!/_2 s}{v_2} = {}^1\!/_2\,\dfrac{s(v_1 + v_2)}{v_1v_2}$, поэтому $v_{\text{ср}} = 2v_1v_2/(v_1 + v_2)$.

2. *Указание.* Вторую половину пути автомобиль шел со средней скоростью, равной $(v_2 + v_3)/2$.

1.20. $v_1 = v_{ср}\dfrac{n+1}{2} = 54$ км/ч; $v_2 = v_{ср}\dfrac{n+1}{2n} = 36$ км/ч.

1.21. Скорости будут одинаковы. Время движения второго шарика меньше.

Решение. Примерные графики скорости движения шариков приведены на рис. 110. Так как пути, пройденные шариками, равны, то, как видно из графика (на графике пути численно равны площадям заштрихованных фигур), $t_2 < t_1$.

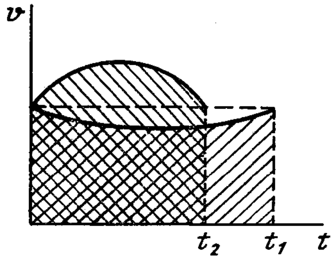


Рис. 110

1.22. $\sqrt{v^2 - u^2}/v$.

Решение. Если ветер дует вдоль линии AB, то время всего перелета $\dfrac{l}{v+u} + \dfrac{l}{v-u}$, а средняя скорость $v_{ср1} = \dfrac{2l}{\dfrac{1}{v+u} + \dfrac{1}{v-u}} = \dfrac{(v^2 - u^2)}{v}$ (l – расстояние между городами). Если же ветер перпендикулярен линии AB, то скорость самолета относительно ветра должна быть направлена под углом к линии AB, причем так, чтобы скомпенсировать «снос» (рис. 111). Скорость перелета в этом случае

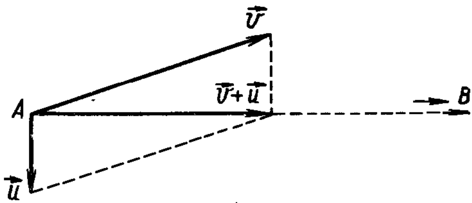


Рис. 111

постоянна и $v_{ср2} = \sqrt{v^2 - u^2}$ (время перелета в этом случае равно $2l/\sqrt{v^2 - u^2}$):

$$v_{ср1}/v_{ср2} = (v^2 - u^2)/(v\sqrt{v^2 - u^2}) = \sqrt{v^2 - u^2}/v.$$

1.23. $v_{макс} \approx 16{,}2$ м/с. График скорости движения поезда изображен на рис. 112.

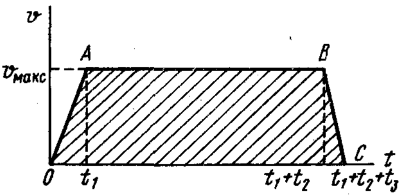


Рис. 112

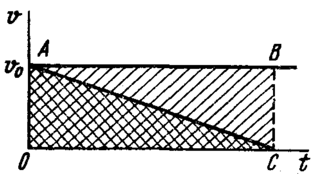


Рис. 113

Решение. Пройденный путь численно равен площади трапеции, ограниченной графиком скорости и осью t:

$$s = {}^1/_2 v_{\text{макс}} (t_1 + t_3) + v_{\text{макс}} t_2; \quad s = v_{\text{ср}} (t_1 + t_2 + t_3).$$

Из этих двух уравнений найдем: $t_2 = \dfrac{s}{v_{\text{ср}}} - (t_1 + t_3) \approx 170$ с;

$$v_{\text{макс}} = \frac{s}{\dfrac{s}{v_{\text{ср}}} - \dfrac{1}{2}(t_1 + t_3)} \approx 16{,}2 \text{ м/с}.$$

1.24. 2 : 1; см. рис. 113.

Указание. Путь, пройденный поездом после того, как от него отцепили вагон, равен площади прямоугольника $OABC$; путь, пройденный вагоном, – площади треугольника OAC.

1.25. $v = 7$ м/с; см. рис. 114.

Указание. Из графика видно, что пути, пройденные провожающим и поездом, будут равны в момент, когда $v = 2v_0$, где v_0 – скорость провожающего.

1.26. Рис. 115.

Указание. Тангенс угла наклона касательной к графику зависимости координаты (или пути) тела от времени численно равен скорости тела. Поэтому прямая, представляющая график $x(t)$ между t_1 и t_2 в точках, соответствующих моментам t_1 и t_2, будет являться касательной к параболам, описывающим движение тела до момента t_1 и после момента t_2, являющимся графиками $x(t)$ или $s(t)$ до момента t_1 и после момента t_2 соответственно.

В моменты $t = 0$ и $t = t_3$ графики $s(t)$ и $x(t)$ имеют горизонтальную касательную.

1.27. Рис. 116.

Указание. Прямая между точками t_1 и t_2 является касательной к кривым $x(t)$ и $s(t)$, описывающим движение тела до момента t_1 и после момента t_2.

1.28. $s = \dfrac{v_0^2}{a} + l; \quad v_{\text{ср}} = \dfrac{v_0^2 + al}{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al}}$.

Решение. Введем систему координат с началом в точке A и осью x, направленной по направлению скорости тела в точке A (рис. 117). Когда тело окажется в точке B, его координата будет равна $-l$.

Тело попадает в точку B только в том случае, если его ускорение a направлено противоположно скорости v_0. Поэтому зависимость скорости v от времени выражается формулой $v = v_0 - at$. В момент $t_1 = v_0/a$ скорость становится равной нулю. В этот момент тело находится на наибольшем расстоянии от точки A. При $t > t_1$ $v < 0$. Подставляя значение $t = t_1$ в кинематическое уравнение движения тела: $x = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$, найдем, что $x_{\text{макс}} = v_0^2/(2a)$. Путь s, пройденный телом за время всего движения,

$$s = 2x_{\text{макс}} + l = 2\frac{v_0^2}{2a} + l = \frac{v_0^2}{a} + l.$$

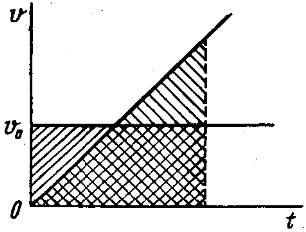


Рис. 114

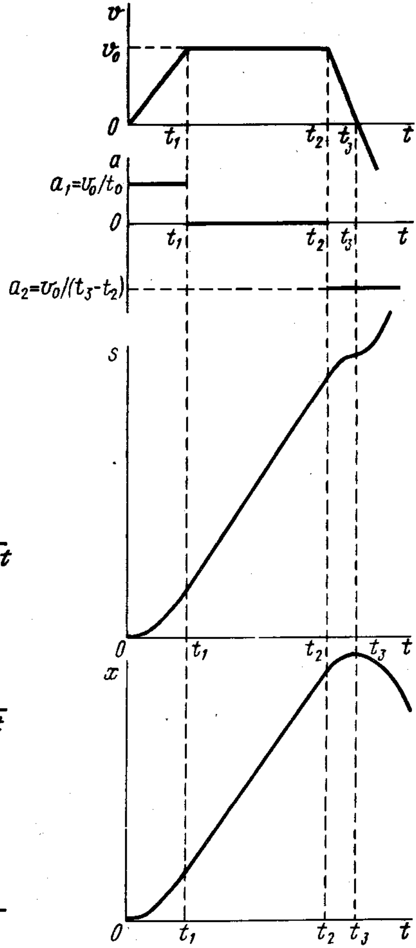


Рис. 115

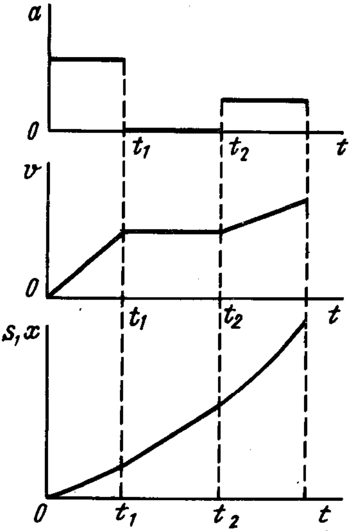


Рис. 116

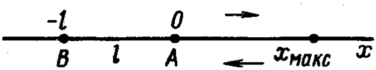


Рис. 117

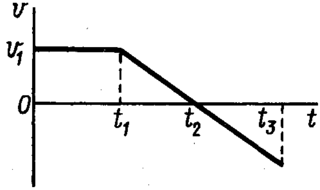


Рис. 118

Для того чтобы найти среднюю скорость тела $v_{ср}$, нужно знать время движения тела из точки A в точку B. Его можно найти, подставив в уравнение для x значение координаты точки B, т. е. $x = -l$: $t_2 = (v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al})/a$ (второй корень отрицателен, поэтому его нужно отбросить). Тогда средняя скорость движения тела

$$v_{ср} = s/t_2 = (v_0^2 + al)/(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al}).$$

1.29. См. рис. 118; $v_1 = \operatorname{tg}\alpha$. Точка t_2 соответствует максимальной координате тела. До момента $t = t_1$ движение равномерное, при $t > t_1$ – равноускоренное с отрицательным ускорением (т. е. ускорением, направленным противоположно скорости v).

1.30. $t_3 = t_2 + \sqrt{t_2(t_2 - t_1)}$.

Решение. Приравниваем пути, пройденные телами к моменту t_3 встречи:

$$a_1 t_3^2/2 = a_2 (t_3 - t_1)^2/2. \quad (1)$$

Из рис. 10 видно, что $a_1/a_2 = (t_2 - t_1)/t_2$ ($a_1 = \operatorname{tg}\alpha$; $a_2 = \operatorname{tg}\beta$).

Подставив в уравнение (1) отношение a_1/a_2 и решая полученное уравнение относительно t_3, найдем, что $t_3 = t_2 + \sqrt{t_2(t_2 - t_1)}$. Второй корень отброшен, так как должно выполняться условие $t_3 > t_2$. Графики движения изображены на рис. 119.

1.31. За вторую секунду.

1.32. $v = \sqrt{La}$.

Решение. Время перевозки груза будет наименьшим, если средняя скорость перемещения вагонетки будет наибольшей, что очевидно. Последнее, при условиях данной задачи (начало и конец движения происходят с постоянным по величине ускорением), может быть лишь в случае, если вагонетка первую половину пути двигается с ускорением $+a$, а вторую – с ускорением $-a$ (рис. 120). Таким образом, можно записать следующие соотношения:

$$v\tau/2 \cdot 2 = L/2, \quad \tau/2 = v/a,$$

откуда $v = \sqrt{La}$.

1.33. $a = 10$ м/с^2; $v = 300$ м/с.

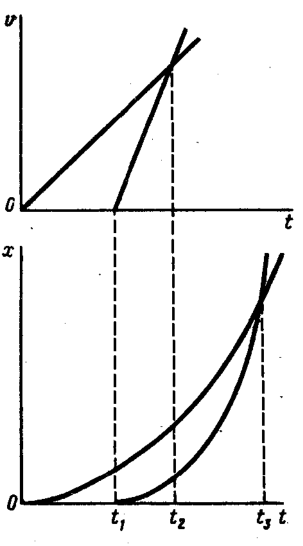


Рис. 119

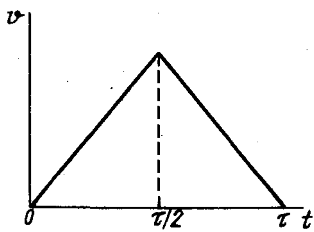


Рис. 120

1.34. $a = \dfrac{2l(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 3{,}20$ м/с^2; $v_0 = \dfrac{l}{t_1} - \dfrac{at_1}{2} \approx 13{,}6$ м/с.

Указание. Пути, пройденные поездом к моментам t_1 и $t_1 + t_2$, соответственно равны: $l = v_0 t_1 + \dfrac{at_1^2}{2}$ и $2l = v_0(t_1 + t_2) + \dfrac{a(t_1 + t_2)^2}{2}$.

1.35. $v = \dfrac{5}{6}\dfrac{l}{t}$.

Указание. Задача решается наиболее просто, если воспользоваться обратимостью движения и выбрать началом отсчета границу раздела двух отрезков. Тогда шарик имеет начальную скорость – искомое значение v, при этом ускорение в направлении к начальной точке – a, а к конечной – $(-a)$.

Написав уравнение движения для путей, пройденных шариком,

$$l = vt + \frac{at^2}{2}; \quad l = v \cdot 3t - \frac{a(3t)^2}{2}$$

и исключив a, найдем ответ.

1.36. $\tau_п = 0{,}48$ с.

Решение. Обозначим всю длину доски $5\,l$, тогда можно записать, что время прохождения первого отрезка $\tau = \sqrt{2l/a}$. Времена прохождения мимо наблюдателя начала и конца n-го отрезка соответственно равны:

$$t_1 = \sqrt{2(n-1)\,l/a} = \tau\sqrt{n-1} \text{ и } t_2 = \sqrt{2nl/a} = \tau\sqrt{n},$$

откуда $\tau_п = t_2 - t_1 = \tau(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

1.37. $t = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ с; $a \approx 2{,}21 \cdot 10^5$ м/с^2; $v \approx 282$ м/с; $s = 32$ см; $v_1 = 40$ м/с.

Указание. При определении, на какой глубине скорость пули уменьшилась в три раза, воспользоваться формулой $s = v_0^2/(2a)$.

Начиная с точки, где скорость уменьшилась в три раза, оставшийся путь будет в 3^2 раза меньше всего пути.

1.38. $v_0 = 45$ см/с; $a = 30$ см/с^2.

Решение. *1-й способ.* Зависимость координаты тела вдоль наклонной плоскости от времени выражается формулой $x = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$. Отсюда $t^2 - \dfrac{2v_0}{a}t + \dfrac{2x}{a} = 0$. Так как t_1 и t_2 – корни этого уравнения при $x = l$, то, согласно теореме Виетта, $t_1 + t_2 = 2v_0/a$ и $t_1 t_2 = 2l/a$. Из полученной системы уравнений нетрудно найти v_0 и a.

2-й способ. Зависимость скорости шарика от времени выражается формулой $v = v_0 - at$. В момент времени $t = t_1$ и $t = t_2$ шарик имел скорости, одинаковые по величине и противоположные по направлению: $v_1 = -v_2$. Но $v_1 = v_0 - at_1$ и $v_2 = v_0 - at_2$, поэтому

$$v_0 - at_1 = -v_0 + at_2, \text{ или } 2v_0 = a(t_1 + t_2). \qquad (1)$$

Так как шарик движется равноускоренно, то его средняя скорость за время t_1 $v_{ср\,1} = \dfrac{v_0 + v_1}{2} = \dfrac{2v_0 - at_1}{2}$. Поэтому,

$$l = v_{ср\,1} t_1 = (2v_0 - at_1)\,t_1/2, \text{ или } 2v_0 - at_1 = 2l/t_1. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем

$$a=\frac{2l}{t_1t_2};\quad v_0=\frac{l}{t_1}+\frac{l}{t_2}.$$

1.39. $t_1\approx 0{,}45$ с; $t_2\approx 0{,}023$ с; $s_1\approx 4{,}9$ м; $s_2\approx 40$ м.

1.40. $\tau=\sqrt{2/g}\,(\sqrt{n_2}-\sqrt{n_1})$.

1.41. $h\approx 195$ м.

1.42. $t\approx 5{,}45$ с; $h\approx 145$ м.

Указание. Обозначив через h высоту, с которой упало тело, и через t время его падения с этой высоты, можно записать следующие уравнения: $gt^2/2=h$; $g(t-1)^2/2={}^2/_3h$. Решая их совместно, получим t и h. Задачу можно решить короче, если воспользоваться формулой пути, пройденного телом за t-ю секунду:

$$s_t=\frac{g}{2}(2t-1);\quad \frac{g}{2}(2t-1)=\frac{1}{3}\,\frac{gt^2}{2}.$$

1.43. $v_0=\sqrt{2gh}$.

1.44. $\tau\approx 1$ с.

Указание. Обозначив: τ – промежуток времени между отрывом 1-й и 2-й капли, t – время с момента отрыва 2-й капли, d – расстояние между каплями через время t (с момента отрыва 2-й капли) и учитывая, что капли относительно друг друга движутся равномерно, можно записать уравнение для определения τ: $d=\dfrac{g\tau^2}{2}+g\tau t$.

1.45. $v_0=\dfrac{g}{2}\sqrt{t_0^2+\dfrac{8h}{g}}$; $t=\sqrt{t_0^2+\dfrac{8h}{g}}$.

Указание. См. задачу 1.38. Решите задачу другим способом.

1.46. 5 с; на 75 м ниже точки B.

Указание. Относительная скорость тел постоянна и равна $2v$. Оба тела сближаются с этой скоростью. Следовательно, время до встречи равно $l/(2v)=5$ с.

1.47. $h={}^3/_4h_{\text{макс}}={}^3/_4v_0^2/(2g)$.

Указание. Задача может быть решена красиво, если сообразить, что момент встречи делит время подъема, так же как и время падения тел, на равные части. Пути же, проходимые телом, падающим без начальной скорости, в последовательные равные промежутки времени относятся как 1 : 3. Следовательно, встреча произойдет на ${}^3/_4$ высоты.

1.48. $t=\dfrac{v_0}{g}-\dfrac{\tau}{2}=1{,}75$ с; $h=\dfrac{v_0^2}{2g}-\dfrac{g\tau^2}{8}\approx 19{,}3$ м.

Указание. См. задачу 1.38. Решите задачу также графически.

1.49. $t\approx 3{,}4$ с.

Решение. Возьмем ось координат, направленную вертикально вверх, с началом отсчета на поверхности Земли. Тогда кинематическое уравнение движения предмета имеет вид $y=y_0+v_0t-\dfrac{gt^2}{2}$, где $y_0=a\tau^2/2$ и $v_0=a\tau$. Подставив в это уравнение значение координаты предмета в момент падения $y=0$, найдем t.

1.50. $l = v_0^2 + 2uv_0/(2g)$; $l_{\text{макс}} = (u + v_0)^2/(2g)$; $\tau = 2(v_0 + u)/g$.

Указание. Кинематическое уравнение движения тела удобно записать в системе координат, связанной с движущимся аэростатом. Здесь $v_0 + u$ — начальная скорость тела; g — ускорение; $l_{\text{макс}}$ — координата тела в момент, когда скорость тела относительно аэростата равна нулю; l — его координата в момент t_1, когда равна нулю его скорость v относительно Земли. Так как $v = v_0 - gt$, то $v = 0$ при $t_1 = v_0/g$.

При $t = \tau$ координата тела равна нулю.

1.51. $v_0 = 7$ м/с.

Решение. *1-й способ.* Приняв за начало отсчета поверхность Земли, напишем уравнения движения обоих тел:

$$x_1 = H - \frac{gt^2}{2}; \quad (1)$$

$$x_2 = H - h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (2)$$

В момент приземления $x_1 = x_2 = 0$. Подставляя значения x_1 и x_2 в уравнения (1) и (2) и решая их относительно v_0, найдем $v_0 = h\sqrt{g/(2H)}$.

2-й способ. Оба тела сближаются, двигаясь друг относительно друга равномерно. Начальное расстояние между ними равно h. Следовательно, скорость v_0 может быть найдена из уравнения равномерного движения $v_0 = h/t$, где t — время падения первого тела с высоты H. Причем $t = \sqrt{2H/g}$. Находим $v_0 = \dfrac{h}{\sqrt{2H/g}} = h\sqrt{g/(2H)}$.

1.52. $v_0 = \dfrac{H - h}{2h}\sqrt{2gh} \approx 7$ м/с.

1.53. $v_0 = \sqrt{Lg\cos^2\alpha/(2\sin\alpha)}$.

Решение. Написав уравнения координат камня (рис. 121): $x = v_0 t$; $y = gt^2/2$ и учитывая, что в момент падения камня $x = L\cos\alpha$, $y = L\sin\alpha$, получим после исключения t, что $v_0 = \sqrt{Lg\cos^2\alpha/(2\sin\alpha)}$.

1.54. 4,9 м.

Указание. Время подъема мяча равно 1 с.

1.55. $\operatorname{tg}\alpha = v\sqrt{2/(gh)}$; $s = v\sqrt{2h/g}$.

Указание. $\operatorname{tg}\alpha = s/h$ (рис. 122).

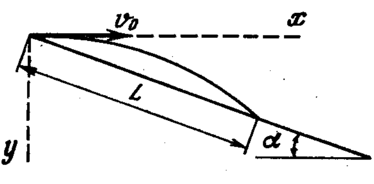


Рис. 121

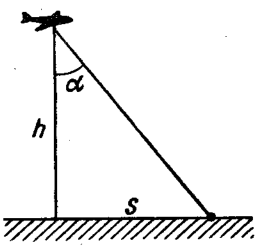


Рис. 122

1.56. Время падения первого тела, не испытавшего соударения, меньше времени падения второго тела.

Скорости же тел в те моменты, когда они находились на равной высоте, одинаковы.

Указание. При упругом ударе величина скорости сохраняется, меняется только ее направление.

1.57. 0,64 с; 0,52 м.

Указание. В системе координат, связанной с лифтом, ускорение болта равно 9,8 м/с^2 + 2 м/с^2 = 11,8 м/с^2. Относительно шахты начальная скорость болта равна 2,4 м/с, а ускорение равно 9,8 м/с^2.

1.58. $\Delta h \approx 56{,}4$ м; тела расходятся с постоянной скоростью.

Указание. В вертикальном направлении оба тела удаляются друг от друга со скоростью, равной $v_0 \cos\alpha - (-v_0 \cos\alpha) = 2v_0 \cos\alpha$.

1.59. Решение. Если начальные скорости тел равны $\vec{v}_0$ и $\vec{u}_0$, то через время t их скорости равны соответственно $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ и $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{g}t$ ($\vec{g}$ – вектор ускорения тел). Скорость второго тела относительно первого равна $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u}_0 - \vec{v}_0$.

1.60. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; $\alpha = 60°$.

Решение. *1-й способ.* Оба тела могут встретиться на линии AO (см. рис. 11) в точке C (она может лежать и ниже линии BO).

Разложим начальную скорость $\vec{v}_0$ тела, брошенного из точки B, на горизонтальную v_{0x} и вертикальную v_{0y} составляющие: $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. От начала движения до момента встречи пройдет время

$$t = l/v_{0x} = l/(v_0 \cos\alpha). \qquad (1)$$

За это время тело A опустится на

$$H - h = gt^2/2, \qquad (2)$$

а тело B поднимется на высоту

$$h = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), находим

$$H = tv_0 \sin\alpha. \qquad (4)$$

Подставляя в уравнение (4) значение t из выражения (1), получаем $\operatorname{tg}\alpha = H/l$, т. е. угол бросания α не зависит от начальной скорости, от величины ее зависит лишь расположение точки встречи C на линии AO.

2-й способ. Перейдем в систему координат, связанную с телом, падающим из точки A. Здесь скорость тела, брошенного из точки B, постоянна (см. задачу 1.59). Поэтому ясно, что тела встретятся, если вектор скорости тела направлен к точке A, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = H/l$.

1.61. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$ и не зависит от угла бросания.

1.62. $t = v(\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\beta)/g \approx 0{,}75$ с.

1.63. $h_1 : h_2 : h_3 = 3 : 2 : 1$; $l_1 : l_2 : l_3 = \sqrt{3} : 2 : \sqrt{3}$.

Указание. Максимальная высота подъема $h = v_0^2 \sin^2\alpha/(2g)$ и дальность полета воды $l = tv_0 \cos\alpha$, где t – время движения воды, равное удвоенному времени подъема на высоту h; $t = 2v_0 \sin\alpha/g$, откуда $l = v_0^2 \sin 2\alpha/g$.

1.64. $t = \sqrt{2d/g}$; от угла не зависит.

Решение. Вдоль желобов грузы будут двигаться под действием составляющей силы тяжести $mg\cos\alpha$ и, следовательно, с ускорением $a = g\cos\alpha$; длина желоба $l = d\cos\alpha$ (см. рис. 12).

Время t движения груза равно $t = \sqrt{2l/a} = \sqrt{2d/g}$. Из формулы видно, что t не зависит от угла.

1.65. $H_{\text{макс}} \approx 2{,}8$ м.

Решение. Очевидно, что камень брошен вверх под углом, так как если бы он был брошен вертикально, то его скорость через 0,5 с составляла бы $v_0 - gt = 5{,}1$ м/с.

Высота, на которую поднимается камень,

$$H_{\text{макс}} = v_{0y}^2/(2g), \tag{1}$$

где v_{0y} — вертикальная составляющая v_0; v_{0y} можно определить из следующей системы уравнений:

$$v_0^2 = v_x^2 + v_{0y}^2, \tag{2}$$

$$v^2 = v_x^2 + (v_{0y} - gt)^2, \tag{3}$$

где v_x — горизонтальная проекция v_0.

Вычитая из уравнения (3) уравнение (2), получим

$$v_{0y} = (v_0^2 - v^2 + g^2t^2)/(2gt). \tag{4}$$

Подставляя выражение (4) в уравнение (1), получим $H_{\text{макс}} = (v_0^2 - v^2 + g^2t^2)^2/(8g^3t^2)$.

1.66. Сферу с радиусом $v_0 t$, центр которой лежит ниже начальной точки на $gt^2/2$.

Указание. В качестве тела отсчета выберем тело, которое в момент выбрасывания шариков начинает падать вниз из той же точки. Относительно него шарики будут двигаться (удаляться по возможным направлениям) равномерно со скоростью v.

1.67. $v_0 = \sqrt{\dfrac{gL\cos\alpha}{2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}}$; $\beta_0 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}$.

Решение. Выберем систему координат xOy, начало которой находится в месте расположения орудия (см. рис. 13). Тогда кинематические уравнения движения снаряда в координатах x, y будут выражены следующим образом:

$$x = v_0 t\cos\beta, \quad y = v_0 t\sin\beta - \frac{gt^2}{2}.$$

Подставляя в эти уравнения координаты цели $x = L$; $y = L\,\mathrm{tg}\,\alpha$, исключив t, получим $v_0 = \sqrt{\dfrac{gL\cos\alpha}{2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}}$. Дальность l полета снаряда вдоль склона $l = L/\cos\alpha$. Поэтому формулу, которую мы получили, можно записать так: $v_0 = \sqrt{\dfrac{gl\cos^2\alpha}{2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}}$. Отсюда $l = \dfrac{2v_0^2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}{g\cos^2\alpha}$. Это выражение максимально при максимальном произведении $\cos\beta_0\sin(\beta_0-\alpha) = {}^1/_2\,[\sin(2\beta_0-\alpha) - \sin\alpha]$. Поэтому l максимально при максимальном значении $\sin(2\beta_0-\alpha) = 1$ или $\beta_0 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}$ (при $\alpha = 0$ мы получаем ответ $\beta_0 = \pi/4 = 45°$).

1.68. $t = 2\sqrt{2gh}/g$; от угла не зависит.

Решение. Возьмем систему координат xOy, начало которой расположено в точке первого соприкосновения тела с наклонной плоскостью, ось x направлена вдоль наклонной плоскости, а ось y — перпендикулярно к ней (рис. 123). При таком выборе системы координат решение задачи значительно упростится.

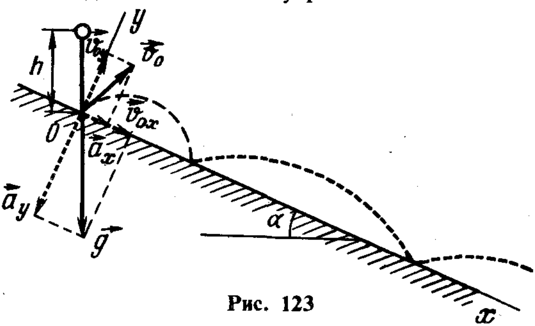


Рис. 123

Начальная скорость v_0 тела после соударения будет равна $v_0 = \sqrt{2gh}$ и образует с осью y угол α.

Уравнение движения тела по оси y выразится следующим образом: $y = v_{0y}t + \dfrac{a_yt^2}{2}$, где $v_{0y} = v_0\cos\alpha$ и $a_y = -g\cos\alpha$ — проекции скорости v_0 и ускорения g на ось y.

В момент падения тела на наклонную плоскость $y = 0$. Подставляя $y = 0$ в уравнение, написанное выше, получим $t = 2v_{0y}/a_y = 2v_0/g = 2\sqrt{2gh}/g$. Время падения не зависит от угла наклонной плоскости. Это время будет оставаться неизменным и для последующих, после первого отражения, падений на наклонную плоскость.

1.69. $4H\sqrt{2}$; $s_1 = 8H\sin\alpha$; $s_1 : s_2 : s_3 = 1 : 2 : 3$.

Решение. См. задачу 1.68.

Расстояние от места первого удара до второго определится из соотношения $x = v_{0x}t + \dfrac{a_xt^2}{2}$, где $v_{0x} = v_0\sin\alpha$ и $a_x = g\sin\alpha$ (рис. 123).

Подставляя значение t, полученное в предыдущей задаче, найдем, что
$$s_1 = \left[v_0\,\frac{2v_0}{g} + \frac{g}{2}\left(\frac{2v_0}{g}\right)^2\right]\sin\alpha = \frac{4v_0^2}{g}\sin\alpha = 8H\sin\alpha;$$

а для компонент скорости тела v_{2x} и v_{2y} к моменту второго соударения соответственно:

$$v_{2y} = v_{0y} - a_y t = \left(v_0 - g\,\frac{2v_0}{g}\right)\cos\alpha = -v_{0y};$$

$$v_{2x} = v_{0x} + a_x t = v_0 \sin\alpha + g\,\frac{2v_0}{g}\sin\alpha = 3v_0 \sin\alpha,$$

и к моменту n-го соударения: $v_{ny} = -v_{0y}$, $v_{nx} = (2n-1)\,v_0 \sin\alpha$.

Средние скорости по оси x между ударами соответственно равны: $2v_0 \sin\alpha$, $4v_0 \sin\alpha$, $6v_0 \sin\alpha$, т. е. будут относиться как $1:2:3$, а так как время движения между ударами одинаково, то $s_1 : s_2 : s_3 \ldots = 1:2:3$.

1.70. $\tau \leqslant 0{,}09$ с.

Решение. Ошибка в определении времени между выстрелом и приходом эха равна 2τ секунд. Это приводит к ошибке в определении пройденнюго звуком расстояния, равной $2\tau c$ метрам. Пройденный звуком путь равен удвоенному расстоянию до горы $2x$, поэтому относительная ошибка в определении этого расстояния равна $2\tau c/(2x) = \tau c/x$. Такова же относительная ошибка в определении расстояния до горы.

Так как $\tau c/x \leqslant 0{,}03$, то $\tau \leqslant 0{,}03\,(x/c)$. Учитывая, что $x \geqslant 1000$ м, находим, что ошибка в определении моментов выстрела и прихода эха не должна превышать 0,09 с.

1.71. $\tau \approx 1{,}77$ с.

Решение. Если не учитывать времени прохождения звука, то получим, что глубина колодца равна $h_1 = g\tau^2/2$. При учете времени прохождения звука $\tau = \tau_1 + \tau_2$, где $\tau_1 = \sqrt{2h/g}$ – время падения камня, а $\tau_2 = h/c$ – время прохождения звука (h – истинная глубина колодца):

$$\tau = \frac{h}{c} + \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{1}$$

Ошибка в измерении глубины колодца равна $\Delta h/h = (h_1 - h)/h = 0{,}05$. Отсюда $h = 0{,}95h_1 = 0{,}95\,\dfrac{g\tau^2}{2}$. Подставляя это выражение в выражение (1) и решая полученное уравнение, найдем

$$\tau = \frac{2\left(1 - \sqrt{0{,}95}\right)}{0{,}95}\,\frac{c}{g} \approx 1{,}77 \text{ с}.$$

2. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

2.1. Оба вагона пройдут одинаковые расстояния.

2.2. $m = 2\left(M - \dfrac{F}{g}\right) \approx 800$ кг.

Указание. Условия равномерного движения аэростата при спуске и подъеме выражаются соответственно:

$$Mg = F + F_{\text{сопр}}; \quad (M - m)\,g + F_{\text{сопр}} = F.$$

2.3. а) $F_н = M(g+a) \approx 3{,}1 \cdot 10^4$ Н; б) $F_н = M(g-a) \approx 2{,}8 \cdot 10^4$ Н; в) $F_н = Mg \approx 2{,}95 \cdot 10^4$ Н.

2.4. При движении лифта с ускорением, направленным вверх (это будет в начале подъема и в конце спуска), показание весов больше mg (m – масса человека). Если ускорение направлено вниз, что будет в начале спуска и в конце подъема, показание весов меньше mg. Если лифт движется равномерно, показания весов равны Mg.

Указание. Уравнение движения человека $ma = mg - N$ (уравнение написано в проекциях на направление g). Здесь a – ускорение лифта (алгебраическая величина) и N – сила реакции весов. В соответствии с третьим законом Ньютона на весы со стороны человека действует сила N', равная по величине N:$N' = N = m(g-a)$.

2.5. При приседании уменьшится, при выпрямлении – увеличится.

Указание. При приседании ускорение центра массы человека направлено вниз, а при выпрямлении – вверх.

2.6. Во время свободного движения ящика (движение в поле силы тяжести при отсутствии других сил) сила давления шаров на дно и на стенки ящика, а также друг на друга равна нулю.

2.7. Тело будет совершать колебания на пружине, амплитуда которых равна начальному удлинению пружины.

Указание. Задачу удобно решать в неинерциальной системе координат, связанной с движущимся лифтом (см. «Элементарный учебник физики» под ред. акад. Г. С. Ландсберга, т. I, гл. 6). В этой системе отсчета на груз действуют три силы: сила тяжести mg, уравновешивающая ее сила инерции $-mg$, а также сила натяжения пружины, равная в начальный момент действующей на груз силе тяжести mg.

2.8. $\Delta t = \sqrt{2m(g-a)/(ka)}$.

Решение. До момента отрыва тела от подставки оно двигается с ускорением a под действием трех сил: силы тяжести $F_1 = mg$, силы натяжения пружины $F_2 = kx$ и силы реакции подставки N. Поэтому $mg - kx - N = ma$.

В момент отрыва тела от подставки сила реакции подставки становится равной нулю. Учитывая это и подставляя в уравнение движения тела выражение для $x = a(\Delta t)^2/2$, найдем $\Delta t = \sqrt{2m(g-a)/(ka)}$.

2.9. $a \approx 1{,}96$ м/с^2; $T \approx 0{,}6$ Н; $F \approx 1{,}2$ Н.

Решение. Силы, действующие на грузы, изображены на рис. 124. Запишем уравнения движения грузов:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1, \tag{1}$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2. \tag{2}$$

Ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ грузов численно равны, так как нить нерастяжима и перемещения грузов всегда одинаковы (соотношения между ускорениями тел системы определяются их кинематической связью, т. е. связью между их перемещениями).

В общем случае силы $\vec{T}'_1$ и $\vec{T}'_2$, приложенные к концам нити, по третьему закону Ньютона, численно равные силам $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, не равны между собой, т. е. разность этих сил сообщает ускорение нити и угловое ускорение блоку. Если массой нити и блока можно пренебречь, то $\vec{T}'_1$ и $\vec{T}'_2$ и соответствующие силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, приложенные к грузам, можно считать равными друг другу.

Спроецировав векторы, входящие в уравнения (1) и (2), на направления x_1 и x_2, совпадающие с ускорениями каждого из грузов (условно считаем $m_1 > m_2$), получим следующую систему уравнений:

$$m_1 a = m_1 g - T; \quad m_2 a = T - m_2 g.$$

Решая эту систему относительно неизвестных a и T, получаем

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g; \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

(При $m_1 < m_2$ получим $a < 0$, т. е. грузы движутся в сторону, противоположную предполагаемой.) Показание динамометра равно, очевидно, сумме сил натяжения нитей:

$$F = 2T = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

2.10. $t = 0{,}21$ с.

Указание. См. предыдущую задачу. Каждая из гирь пройдет путь, равный 5 см.

2.11. $F = 4Mg\left(\dfrac{m + M}{m + 2M}\right)$; $f = 2\dfrac{Mm}{m + 2M} g$.

Решение. В соответствии со вторым законом Ньютона напишем уравнения движения каждого из тел (рис. 125):

для первого тела $Ma = T - Mg$;

для второго тела $Ma = Mg + f - T$;

для перегрузка $ma = mg - f'$,

где T — сила натяжения нити; f — сила давления перегрузка на тело, a — ускорение тел; f' — реакция опоры.

По третьему закону Ньюто

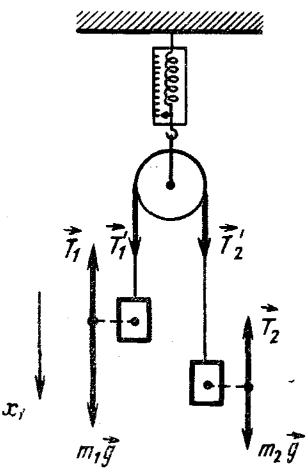


Рис. 124

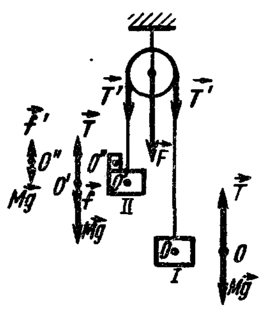


Рис. 125

на, f' и f, T' и T численно равны. Натяжения справа и слева равны, так как трением и массой блока пренебрегаем. Решая полученную систему уравнений, найдем $a = mg/(m+2M)$; $f = 2\dfrac{Mm}{m+2M}g$, $T = 2M\left(\dfrac{m+M}{m+2M}\right)g$. Сила, действующая на ось блока, $F = 2T = 4M\left(\dfrac{m+M}{m+2M}\right)g$.

2.12. 1. $F = \dfrac{4m_1m_2}{m_1+m_2}g \approx 64$ Н. 2. $F = \dfrac{9m_1m_2}{4m_1+m_2}g \approx 42{,}3$ Н.

Решение. 1. Силу $\vec{F}'$, действующую со стороны оси на стержень и по третьему закону Ньютона численно равную силе $\vec{F}$ давления на ось (рис. 126, *а*), можно заменить двумя силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенными к каждому из грузов и равными $\vec{F}/2$.

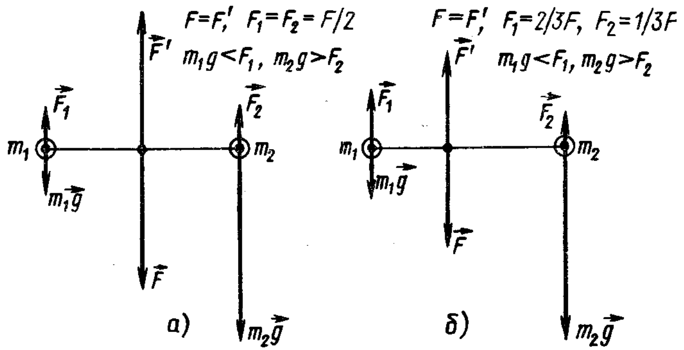


Рис. 126

Учитывая, что стержень невесомый, можно, воспользовавшись вторым законом Ньютона, записать: $m_1a = F/2 - m_1g$, $m_2a = m_2g - F/2$, откуда $F = \dfrac{4m_1m_2}{m_1+m_2}g$.

2. Силу $\vec{F}'$ нужно заменить (рис. 126, *б*) на силы $\vec{F}_1 = {}^2/_3\vec{F}$ и $\vec{F}_2 = {}^1/_3\vec{F}$, приложенные к грузам m_1 и m_2 соответственно. Ускорения же грузов связаны соотношением $a_1/l_1 = a_2/l_2$, т. е. $a_1 = a_2/2$.

2.13. $a = \dfrac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1+m_2}g$; $T = \dfrac{m_1m_2g(\sin\alpha + \sin\beta)}{m_1+m_2}$.

Решение. Напишем уравнения второго закона Ньютона для каждого из грузов, спроецировав силы, действующие на грузы (рис. 127), на направление возможного движения соответствующих грузов, т. е. вдоль граней призмы (примем, что груз m_1 опускается):

$$m_1a = m_1g \sin\alpha - T,$$

$$m_2a = T - m_2g \sin\beta.$$

Решая эту систему, найдем:

$$a = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + m_2} g;$$

$$T = \frac{m_1 m_2 (\sin\alpha + \sin\beta)}{m_1 + m_2} g.$$

Если при подстановке численных значений масс и углов окажется, что $a < 0$, то это означает, что вся система движется с ускорением a в направлении, противоположном выбранному. Последнее следует из того, что при отсутствии трения изменение выбранного направления движения грузов изменит лишь знаки правых частей приведенных выше уравнений.

2.14. $a = 0{,}12$ м/с^2; $T = 0{,}22$ Н; $T = \dfrac{F_1 M + F_2 m}{M + m} = \dfrac{F_1 + F_2 \dfrac{m}{M}}{1 + \dfrac{m}{M}} \approx$

$\approx F_1$, когда $m \ll M$.

2.15. $a_1 = 2\dfrac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g$; $a_2 = \dfrac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g$; $T = \dfrac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g$.

Указание. Из кинематической связи следует, что ускорение груза m_1 в два раза больше ускорения груза m_2 (при перемещении груза m_1 на расстояние h груз m_2 переместится на расстояние $h/2$). Со стороны нитей к грузу m_2 приложена сила, равная $2T$.

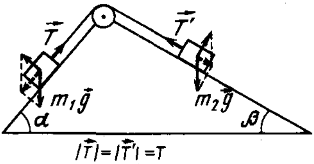


Рис. 127

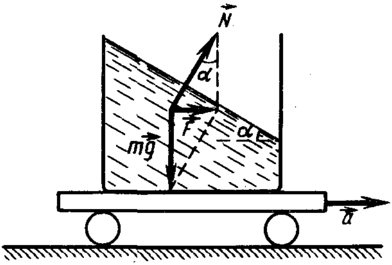


Рис. 128

2.16. $\alpha = \operatorname{arctg}(a/g)$.

Решение. Условно выделим внутри жидкости некую малую ее часть. На этот элемент жидкости массой m действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и выталкивающая (архимедова) сила $\vec{N}$ со стороны жидкости. Равнодействующая $\vec{F}$ этих сил должна быть направлена в сторону ускорения сосуда и равна $m\vec{a}$ (рис. 128). Поэтому сила $\vec{N}$ должна составлять угол $\alpha = \operatorname{arctg}(a/g)$ с вертикалью. Направление выталкивающей силы $\vec{N}$, действующей на любой выделенный объем внутри жидкости, перпендикулярно плоскостям равного давления ($p = \text{const}$) в жидкости, задается ими и, в частности, перпендикулярно ее поверхности ($p = 0$). Требование перпендикулярности однозначно связано с условием покоя жидкости относительно сосуда. Любое нарушение перпендикулярности «автоматически» устраняется благодаря текучести жидкости.

2.17. Поверхность жидкости параллельна наклонной плоскости.

1-й способ. См. решение задачи 2.16.

2-й способ. Решим задачу в системе отсчета, связанной с движущимся сосудом (в неинерциальной системе). В этом случае на любой элемент жидкости действуют силы $m\vec{g}$, $\vec{N}$ и сила инерции $|-m\vec{a}| = mg \sin \alpha$, направленная в сторону, противоположную движению сосуда (рис. 129). Равнодействующая этих сил должна равняться нулю (так как жидкость неподвижна относительно сосуда). Это возможно, когда сила $\vec{N}$ перпендикулярна наклонной плоскости. Поверхность же жидкости параллельна ей.

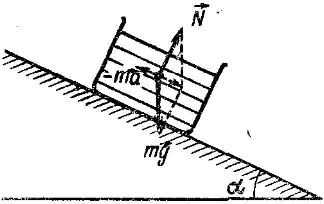


Рис. 129

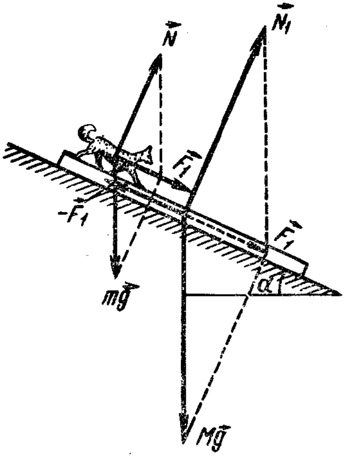


Рис. 130

2.18. Не изменится.

Решение. При движении лифта с ускорением $\vec{a}$ второй закон Ньютона для плавающего тела записывается так:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}, \tag{1}$$

где $\vec{F}$ – выталкивающая сила; m – масса тела.

Если бы объем, вытесненный телом, занимала жидкость, то на нее со стороны остальной жидкости действовала бы сила, тоже равная $\vec{F}$. По второму закону Ньютона

$$m_ж\vec{a} = m_ж\vec{g} + \vec{F}; \tag{2}$$

здесь $m_ж = \rho_ж V$, где V – объем погруженной части тела. Подставляя в уравнение (2) выражение для $\vec{F}$, найденное из равенства (1), получим $m(\vec{a} - \vec{g}) = \rho_ж V(\vec{a} - \vec{g})$, отсюда следует, что $V = m/\rho_ж$ не зависит от ускорения лифта, т. е. глубина погружения тела не изменится.

Примечание. Решение задачи становится совсем простым в системе отсчета, связанной с лифтом (см. задачу 2.17).

2.19. $a = g \sin \alpha \left(1 + \dfrac{M}{m}\right)$; $k \geqslant \dfrac{M}{m} \operatorname{tg} \alpha$.

Решение. Собака должна бежать с таким ускорением, направленным вниз, чтобы сила $-\vec{F}_1$, с которой собака отталкивала бы доску назад, уравновесила равнодействующую $\vec{F}_1$ действующей на доску силы тяжести $M\vec{g}$ и реакции опоры $\vec{N}_1$, т.е. была равна $Mg \sin\alpha$ (рис. 130). На собаку, таким образом, в направлении ее ускорения действуют сила $mg \sin\alpha$ и сила F_1 со стороны доски, равная, по третьему закону Ньютона, $Mg \sin\alpha$ (направление движения собаки не играет роли).

Уравнение движения собаки будет $ma = mg \sin\alpha + Mg \sin\alpha$, откуда

$$a = g \sin\alpha \left(1 + \frac{M}{m}\right).$$

Сила $-\vec{F}_1$, с которой собака отталкивает доску, по своей природе, — это сила трения, которая не может превышать значения kN. Задача имеет решение (собака остановит доску), если $kN \geqslant F_1$, т.е. $kmg \cos\alpha \geqslant Mg \sin\alpha$. Отсюда $k \geqslant \frac{M}{m} \operatorname{tg}\alpha$.

2.20. Mg.

Указание. Цилиндр покоится относительно Земли.

2.21. $t \approx 6{,}26$ с.

Решение. Так как человек неподвижен относительно Земли, то силы, приложенные к нему, уравновешены. Значит, сила натяжения численно равна весу человека $m_2 g$. Поэтому для груза второй закон Ньютона запишется так: $m_1 a = m_2 g - m_1 g = (m_2 - m_1) g$. Откуда ускорение груза $a = g \dfrac{m_2 - m_1}{m_1}$ и направлено вверх.

Время подъема груза определяется из формулы $h = at^2/2$:

$$t = \sqrt{2h/a} = \sqrt{\frac{2hm_1}{g(m_2 - m_1)}}.$$

2.22. 1. Оба мальчика достигнут середины расстояния между ними одновременно через время $\tau = l/(3v)$; в случае когда массы мальчиков неодинаковы, место встречи делит расстояние между ними обратно пропорционально массам мальчиков.

Решение. Так как силы, приложенные к мальчикам, одинаковы, согласно третьему закону Ньютона, то ускорения, а следовательно, и скорости мальчиков относительно Земли одинаковы. Длина веревки между мальчиками сокращается со скоростью $3v$ и мальчики достигнут середины расстояния между ними через время $\tau = l/(3v)$.

В случае когда массы мальчиков различны, ускорения и пути, пройденные ими относительно Земли, обратно пропорциональны массам мальчиков.

2. Гимнасты достигнут блока одновременно через время $\tau = l/(3v)$. Сравните решение этой задачи с решением задачи п. 1.

2.23. 0,5 Н; 1 Н.

Указание. Величина силы сухого трения не может превышать $F_{\text{тр. макс}} = kN$, где N — нормальное давление. Если тело покоится, то сила трения равна по величине сумме проекций всех сил, действующих на тело, на направление возможного движения (т. е. на направление, в котором стало бы двигаться тело, если сила трения будет равной нулю). Если сила, действующая на тело в направлении возможного движения, превышает $F_{\text{тр. макс}}$, то тело движется с ускорением, а сила трения постоянна и равна $F_{\text{тр. макс}}$.

2.24. График показан на рис. 131.

2.25. График изображен на рис. 132.

Указание. Движение тела, находящегося на наклонной плоскости, становится возможным, если $mg \sin\alpha \geqslant kmg \cos\alpha$, т. е. при угле $\alpha \geqslant \alpha_0 = \operatorname{arctg} k$. Если $\alpha < \alpha_0$, то тело покоится и сила трения равна $mg \sin\alpha$ (см. задачу 2.23). Если $\alpha \geqslant \alpha_0$, то $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр. макс}} = kmg \cos\alpha$.

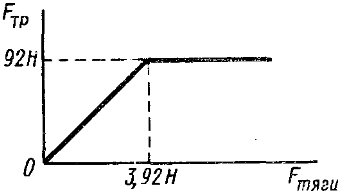


Рис. 131

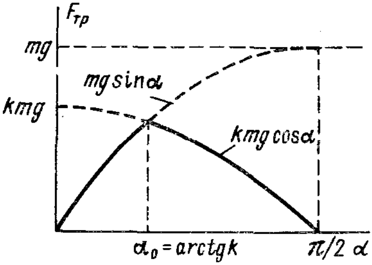


Рис. 132

2.26. $k = \operatorname{tg}\alpha$.

2.27. 1. $a = \left(1 - \dfrac{m_1}{m_2}\right) g$; $F_{\text{тр}} = m_1 g$. 2. $a_1 = \dfrac{m_1 g - m_2 (g - a_2)}{m_1 + m_2}$; $F_{\text{тр}} = \dfrac{m_1 m_2 (2g - a_2)}{m_1 + m_2}$.

Указание. 1. Так как груз m_1 неподвижен, натяжение нити, а следовательно, и сила трения кольца о нить равны $m_1 g$.

2. Сила трения равна силе натяжения нити, а ускорение кольца относительно блока равно $a_2 - a_1$. Уравнения движения грузов выражаются следующим образом:

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_{\text{тр}}; \quad m_2 (a_2 - a_1) = m_2 g - F_{\text{тр}}.$$

2.28. $F = M (kg + a)/(\cos\alpha \pm k \sin\alpha)$.

Указание. Сила нормального давления равна $Mg - F \sin\alpha$ (рис. 133, *а*) или $Mg + F \sin\alpha$ (рис. 133, *б*) в зависимости от направления действия силы $\vec{F}$.

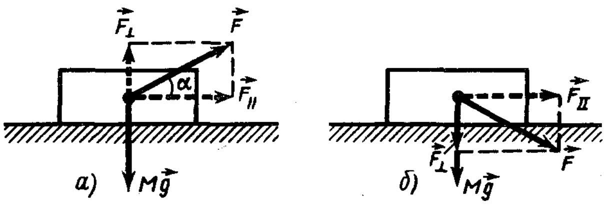


Рис. 133

2.29. 1. $T = g\,\dfrac{m_1 m_2 (1+k)}{m_1 + m_2} = 1{,}47$ Н. 2. Не изменится. 3. $F = 2{,}08$ Н.

2.30. $T = \dfrac{m_1 m_2 (g+a)(1+k)}{m_1 + m_2}$ для $km_1 < m_2$; $T = m_2 (g+a)$ для $km_1 > m_2$. Состояние движения (покоя) не изменится.

Решение. Ускорения грузов относительно стола по величине одинаковы (грузы связаны нерастяжимой нитью): $a'_1 = a'_2 = a'$. В неподвижной системе отсчета ускорение груза m_2 направлено по вертикали, причем $a_2 = a' - a$. Ускорение груза m_1 имеет вертикальную и горизонтальную составляющие: $a_{1\text{в}} = a$, $a_{1\text{г}} = a'$. Применяя второй закон Ньютона, получаем систему уравнений:

$$m_2 (a' - a) = m_2 g - T, \quad m_1 a' = T - kN, \quad m_1 a = N - m_1 g,$$

где T – натяжение нити; N – сила реакции стола. Решая эту систему, находим ответ.

Примечание. Эту систему уравнений можно представить в виде

$$m_2 a' = m_2 (g+a) - T, \quad m_1 a' = T - kN, \; N - m_1 (g+a) = 0.$$

Таким образом, движение лифта вверх с ускорением a эквивалентно системе отсчета, в которой ускорение свободного падения $g + a$.

Если $a' = 0$ (при $km_1 > m_2$), то ответ следует из уравнения $m_2 a = T - m_2 g$. В этом случае сила трения уже не равна kN и второе уравнение неверно.

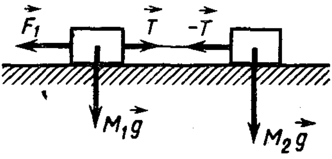
Из этого примечания сразу следует ответ на второй вопрос задачи.

2.31. $F_1 = 38{,}4$ Н; $F_2 = 64$ Н; не изменится.

Решение. Запишем уравнения движения тел (рис. 134):

$$F_1 - T = M_1 a, \qquad (1)$$

$$T = M_2 a. \qquad (2)$$



Из уравнений (1) и (2) найдем $F_1 = T\,\dfrac{M_1 + M_2}{M_2}$. Если силу приложить ко второму грузу, то $F_2 = T\,\dfrac{M_1 + M_2}{M_1}$.

Если есть трение, то уравнения движения грузов будут такими:

$$F_1 - kM_1 g - T = M_1 a; \qquad (3)$$

$$T - kM_2 g = M_2 a. \qquad (4)$$

Решая совместно уравнения (3) и (4), получим $F_1 = T\,\dfrac{M_1 + M_2}{M_2}$, т. е. наличие трения не меняет результата, если коэффициент трения одинаков.

2.32. $F = (n+1)\,m\,(a + fg)$; $X_i = mi\,\dfrac{a + fg}{k}$.

Р е ш е н и е. Найдем силу сжатия i-й пружины (рис. 135). Для этого применим второй закон Ньютона к системе из i грузов, расположенных справа от i-й пружины. Внешними силами, действующими на эту систему, будут сила давления со стороны i-й пружины T_i и силы трения, в сумме равные $ifmg$. Поэтому $ima = T_i - ifmg$, откуда

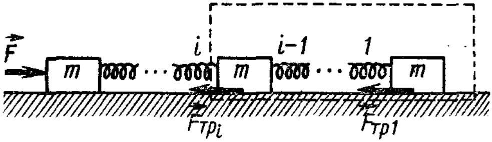


Рис. 135

$T_i = im(a + fg)$; i-я пружина соответственно станет короче на $X_i = mi\dfrac{a + fg}{k}$.

Для того чтобы найти силу F, проще всего применить второй закон Ньютона сразу ко всей системе $(n + 1)$ грузов: $(n + 1)ma = F - f(n + 1)mg$, отсюда $F = (n + 1)m(a + fg)$.

2.33. $$a = \frac{F_1(\cos\alpha + k\sin\alpha) - F_2(\cos\beta - k\sin\beta)}{m_1 + m_2} - gk;$$

$$T = \frac{F_1 m_2(\cos\alpha + k\sin\alpha) + F_2 m_1(\cos\beta - k\sin\beta)}{m_1 + m_2}.$$

Указание. См. задачу 2.28.

2.34. 1. $$a_B = \frac{F(\cos\alpha + k_1\sin\alpha)}{m_1} - k_1 g;$$

$$a_A = \frac{(k_1 - k_2)(m_1 g - F\sin\alpha)}{m_2} - k_2 g.$$

Указание. Силы давления бруска B на брусок A и бруска A на стол равны соответственно $m_1 g - F\sin\alpha$ и $(m_1 + m_2)g - F\sin\alpha$.

2. $$k_2 \geqslant \frac{m_1 k_1 + m_2 \operatorname{tg}\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Указание. Так как брусок скользит по плите, то на плиту со стороны бруска действуют две силы: сила нормального давления $N_1 = m_1 g\cos\alpha$ и сила трения $F_{\text{тр}\,1} = k_1 N_1 = k_1 m_1 g\cos\alpha$. Сила нормального давления плиты на наклонную плоскость $N_2 = N_1 + m_2 g\cos\alpha = (m_1 + m_2)g\cos\alpha$. Плита не скользит по наклонной плоскости, если $m_2 g\sin\alpha + F_{\text{тр}\,1} \leqslant F_{\text{тр}\,2} = k_2 N_2$, т. е. если $m_2 g\sin\alpha + k_1 m_1 g\cos\alpha \leqslant k_2(m_1 + m_2)g\cos\alpha$ или

$$k_2 \geqslant k_1\frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_1 k_1 + m_2 \operatorname{tg}\alpha}{m_1 + m_2}.$$

2.35. 1) Ускорение тела во все время его движения постоянно и равно $\vec{g}$; 2) в соответствии со вторым законом Ньютона $\vec{a} = (m\vec{g} + \vec{F}_{\text{сопр}})/m$. При движении вверх сила сопротивления направлена, как и сила тяжести, вниз и уменьшается по мере подъема тела (так как при этом скорость тела уменьшается), при спуске же сила сопротивления направлена вверх и увеличивается. Поэтому ускорение тела в начале движения максимально (и больше g), уменьшается при подъеме и становится равным g в верхней точке траектории, затем продолжает уменьшаться при спуске и может даже стать равным нулю.

2.36. Скорость большого шарика будет в $\sqrt{2}$ раза больше скорости меньшего шарика.

Решение. При установившемся движении сила сопротивления воздуха $F_{\text{сопр}}$ и действующая на шарик сила тяжести Mg равны, но $F_{\text{сопр}} = kv^2 (\pi D^2/4)$, а $M = \pi\rho D^3/6$, где ρ – плотность шарика; D – его диаметр. Приравнивая $F_{\text{сопр}}$ и Mg, найдем, что $v \sim \sqrt{D}$.

2.37. $3g(m - \rho V)$.

2.38. См. решение задач 2.35 и 2.36.

2.39. 0,29 Н.

2.40. а) $k = 0{,}07$; б) $a \approx 0{,}39$ м/с^2; в) $t = 22{,}7$ с; г) $v = 8{,}85$ м/с.

2.41. $t = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2h}{g(1 - \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\beta)}}$.

2.42. $T = {}^1/_4 kmg\cos\alpha$.

Решение. На верхний груз вдоль наклонной плоскости действуют составляющая силы тяжести $F = mg\sin\alpha$, сила натяжения нити T и сила трения $F_{\text{тр}} = kmg\cos\alpha$. По второму закону Ньютона получаем

$$ma = mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha + T.$$

Для нижнего груза имеем соответственно

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{k}{2} mg\cos\alpha - T$$

(груз движется с тем же ускорением, а коэффициент трения между ним и наклонной плоскостью вдвое меньше).

Вычитая из первого уравнения второе, находим силу натяжения нити $T = {}^1/_4\ kmg\cos\alpha$.

2.43. $a = g\,\dfrac{m_2 - m_1(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{m_1 + m_2} \approx 0{,}42$ м/с^2;

$$T = g\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + \sin\alpha + k\cos\alpha) \approx 9{,}36 \text{ Н}.$$

2.44. а) $a \approx 0{,}24$ м/с^2; б) $T = 6$ Н.

Указание. По второму закону Ньютона

$$m_1 g\sin\beta - km_1 g\cos\beta - T = m_1 a; \quad (1)$$

$$-m_2 g\sin\alpha - km_2 g\cos\alpha + T = m_2 a. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим a и T.

2.45. $k = \operatorname{tg}\alpha\,\dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 0{,}1$.

Указание. **Из уравнений движения камня вверх и вниз найдем, что его ускорения соответственно равны:**

$$a_1 = g(\sin\alpha + k\cos\alpha); \quad (1)$$

$$a_2 = g(\sin\alpha - k\cos\alpha). \quad (2)$$

Время движения камня $t_1 = \sqrt{2l/a_1}$; это получается из двух уравнений: $l = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2}$, $v_0 - at_1 = 0$, а $t_2 = \sqrt{2l/a_2}$, где l – расстояние до высшей точки подъема камня. Отсюда

$$t_1/t_2 = \sqrt{a_2/a_1} = 1/n \text{ (по условию).} \quad (3)$$

Решая уравнения (1), (2) и (3) совместно, найдем значение k.

2.46. $a > kg = 0{,}1g$.

Указание. На груз со стороны доски не может действовать сила, большая, чем максимальная сила трения покоя.

2.47. $a > dg/h = 0{,}1g$.

Решение. *1-й способ.* Ускорение тела $\vec{a}$ обеспечивается равнодействующей силы $\vec{F}$ и силы тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ (рис. 136). Сила $\vec{F}$ создается силой нормального давления $\vec{N}$, приложенной в граничном случае (перед опрокидыванием) в точке C, и силой трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Если ускорение больше граничного, то уже не может быть обеспечена соответствующая сила $\vec{F}$, так как для этого сила $\vec{N}$ (которая является результирующей распределенных по опоре сил давления) должна быть приложена за пределами опоры тела. Из подобия треугольников OAB и COD $ma_{\text{гр}}/(mg) = d/h$, где $a_{\text{гр}}$ – граничное ускорение, при котором тело еще не опрокидывается. Отсюда $a_{\text{гр}} = dg/h$; для опрокидывания тела $a > a_{\text{гр}}$, т. е. $a > dg/h$.

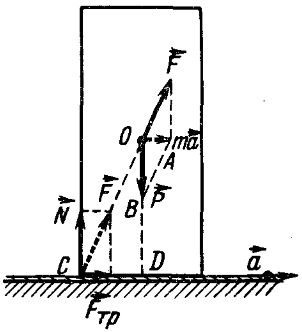


Рис. 136

2-й способ. В неинерциальной системе отсчета, связанной с листом бумаги, на тело в момент отрыва действуют сила $\vec{F} = -m\vec{a}_{\text{гр}}$ (см. решение задачи 2.17) и сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$. При $a_{\text{гр}}$ сумма моментов этих сил относительно точки C равна нулю, т. е. $-ma_{\text{гр}}\frac{h}{2} + mg\frac{d}{2} = 0$, отсюда $a_{\text{гр}} = dg/h$; для опрокидывания $a > dg/h$.

2.48. $t = \sqrt{\dfrac{2l}{\dfrac{F}{m} - kg\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)}}$; $F_0 = kmg\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)$.

Решение. На брусок действуют сила F и сила трения kmg. По второму закону Ньютона его ускорение a_1 определяется уравнением $ma_1 = F - kmg$.

На тележку, по третьему закону Ньютона, действует сила kmg со стороны бруска. Ее ускорение a_2 находится из уравнения $Ma_2 = kmg$.

Брусок скользит относительно тележки с ускорением $a = a_1 - a_2 = \frac{F}{m} - kg\left(1 + \frac{m}{M}\right)$.

Длину тележки l он проходит за время $t = \sqrt{2l/a} = \sqrt{\frac{2l}{F/m - kg\,(1 + m/M)}}$.

Минимальное значение F_0 силы F определяется условием $a = 0$.

2.49. $t_1 = v_0 M/F$; $F_{\text{тр}\,1} = F$, $F_{\text{тр}\,2} = FM/(M + m)$; $l = l_0 + \frac{Mv_0^2}{2F}$.

Решение. Из условия постоянства скорости бруска относительно неподвижной доски следует, что сила трения между ними максимальна и равна F. После перерезания шнура брусок состояния своего движения не меняет (скольжение и, следовательно, равенство нулю суммы действующих на него сил сохраняется). Доска же начинает двигаться равноускоренно под действием силы $F_{\text{тр}\,1} = F$: $a_1 = F/M$ до некоторого момента $t_1 = v_0/a_1 = Mv_0/F$. В момент t_1 скорость доски сравняется со скоростью бруска, его скольжение прекратится и дальше они будут двигаться как единое целое с ускорением $a_2 = F/(M + m)$, а сила трения (покоя) $F_{\text{тр}\,2}$ сделается равной $F - ma_2 = FM/(M + m)$. Брусок за время t_1 пройдет по доске путь $v_0 t_1 - v_0^2/(2a_1) = Mv_0^2/2F$. Таким образом, минимально необходимая длина доски, при которой брусок еще успеет остановиться на ней (пренебрегая размером бруска), $l = l_0 + Mv_0^2/(2F)$.

Постройте график скорости для обоих тел.

2.50. $= \frac{M}{M - m}\, s$,

Решение. После того как вагон оторвется, поезд будет двигаться с ускорением, сообщаемым ему силой, равной

$F_{\text{тяги}} - F_{\text{сопр}} = F_{\text{тяги}} - (F_{\text{сопр. нач}} - kmg) = kmg$ (начальное сопротивление $F_{\text{сопр. нач}}$ равнялось силе тяги тепловоза); $a_1 = kmg/(M - m)$.

Вагон будет двигаться равнозамедленно с ускорением $a_2 = -kg$. Относительно друг друга вагон и тепловоз двигаются с ускорением $a_{\text{отн}} = a_1 - a_2 = \frac{kmg}{M - m} + kg = kg\,\frac{M}{M - m}$. Расстояние между ними l будет относиться к пути s, пройденному вагоном до остановки, как $a_{\text{отн}}/|a_2|$. Другое решение см. в задаче 4.40.

3. ИМПУЛЬС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

3.1. а) $|\Delta\vec{p}| = 2mv = 0{,}2$ Н·с (рис. 137, *а*); б) $|\Delta\vec{p}| = 2mv\sin\alpha = 0{,}1$ Н·с.

Решение. б) Импульс шарика можно разложить на две составляющие: перпендикулярную плоскости и параллельную ей (рис. 137, *б*).

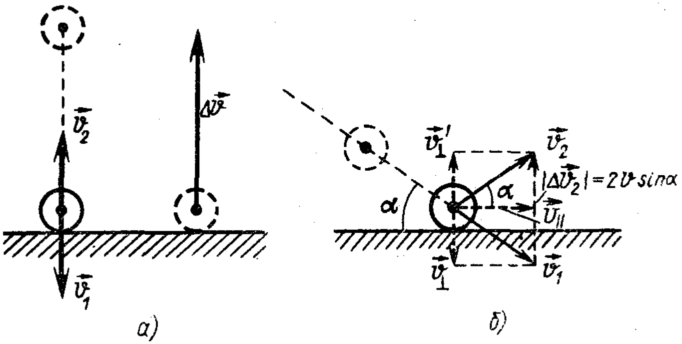


Рис. 137

Последняя при ударе шарика не меняется (так как в этом направлении на шарик не действуют силы), а нормальная составляющая меняет свое направление на противоположное, сохраняя свое численное значение. Поэтому шарик отражается от плоскости под тем же углом, под которым падает на нее.

Изменение импульса шарика, как видно из рисунка, равно $2mv \sin\alpha$.

3.2. а) $F_{\text{ср}} = F'_{\text{ср}} = \dfrac{m\sqrt{2gh_1}}{\Delta t} + mg \approx 0{,}87$ Н; б) $F_{\text{ср}} = \dfrac{2m\sqrt{2gh_1}}{\Delta t} + mg \approx 1{,}64$ Н; $F'_{\text{ср}} = \left(\dfrac{2m\sqrt{2gh_1}}{\Delta t} + mg\right)\cos\alpha \approx 1{,}43$ Н; в) $F_{\text{ср}} = \dfrac{m\sqrt{2g}\,(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})}{\Delta t} + mg \approx 1{,}38$ Н.

Указание. Воспользоваться вторым законом Ньютона в форме $\Delta(m\vec{v}) = \vec{f}\,\Delta t$, где $\vec{f} = \vec{f}_{\text{р}} + m\vec{g}$. Помнить, что импульс – величина векторная, поэтому в третьем случае $|\Delta(m\vec{v})| = mv_1 + mv_2$. Изменение импульса шарика направлено вверх. По третьему закону Ньютона на плоскость будет действовать при ударе сила, равная $-\Delta(m\vec{v})/t$ и направленная вниз.

3.3. а) $v\sqrt{5}$ под углом $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ к направлению первоначального движения; б) $v\sqrt{5}$ под углом $\beta = \arcsin(1/\sqrt{5})$ к направлению первоначального движения.

Р е ш е н и е. Изменение импульсов частиц одинаково: на них действовали одинаковые силы одинаковое время. В случае а) модуль изменения импульса первой частицы равен $2mv - (-2mv) = 4mv$. Вектор $\Delta\vec{p}$ направлен горизонтально (рис. 138, *а*). Поэтому импульс второй частицы будет равен $\sqrt{(4mv)^2 + (2mv)^2} = mv\sqrt{20}$, а скорость равна $v\sqrt{5}$, угол $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{4mv}{2mv} = \operatorname{arctg} 2$.

Аналогично найдем, что в случае б) модуль изменения импульса первой частицы равен $2mv\sqrt{2}$ (рис. 138, *б*). Так же меняется и импульс второй частицы. Он станет по модулю равным $mv\sqrt{20}$ (это нетрудно найти, воспользовавшись теоремой косинусов). Скорость ее будет соответственно равна $v\sqrt{5}$; угол $\beta = \arcsin(1/\sqrt{5})$ (воспользоваться теоремой синусов).

3.4. $F = 2\rho S v^2 \cos\alpha = 86{,}4$ Н.

Указание. Учесть, что за время t о стенку ударяется масса воды, находящаяся в цилиндре длиной $l = vt$ и поперечным сечением S, т. е. $m = \rho S v t$ (ρ – плотность воды).

3.5. а) $u = v_1 - \dfrac{m}{M-m} v_2 \approx 1{,}62$ м/с; б) $u = v_1 + \dfrac{m}{M-m} v_2 \approx$ $\approx 3{,}39$ м/с.

Указание. Так как изменение импульсов платформы и снаряда при выстреле произошло благодаря действию внутренних сил, то суммарное изменение их импульсов должно быть равно нулю.

3.6. 12,5 м/с и будет двигаться в направлении, противоположном начальному.

3.7. $s \approx 1695$ м.

Указание. Из закона сохранения количества движения $(m_1 + m_2) v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$, находим, что $v_1 = \dfrac{(m_1 + m_2) v_0 - m_2 v_2}{m_1} = -125$ м/с. Следовательно, $s = (v_1 + v_2)\sqrt{2h/g} \approx 1695$ м.

3.8. Второй осколок упадет на Землю вдвое дальше, чем упал бы снаряд. Упадут одновременно.

Указание. Осколок снаряда, возвратившийся к исходной точке, очевидно, приобрел при взрыве скорость, равную по величине скорости снаряда в верхней точке траектории, но противоположную по направлению. Из закона сохранения импульса следует, что второй осколок после взрыва будет иметь скорость, равную утроенной скорости снаряда в верхней точке.

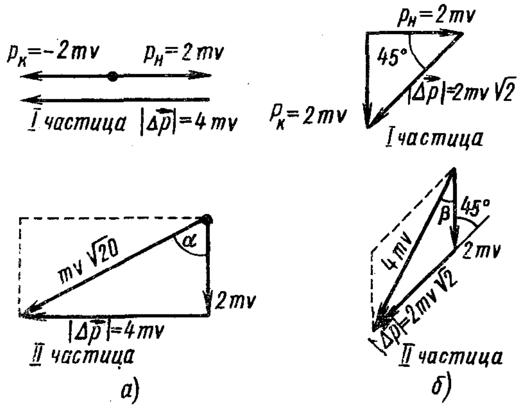


Рис. 138

3.9. $s_2 = 5000$ м.

Решение. Закон сохранения импульса в этом случае удобнее написать для проекций импульсов на оси x и y (рис. 139) (так как время разрыва мало, можно пренебречь импульсом силы тяжести):

$$2mv_x = mv_{1x} + mv_{2x}, \quad 2mv_y = mv_{1y} + mv_{2y},$$

где m – масса осколка; v_x, v_{1x}, v_{2x}, v_y, v_{1y}, v_{2y} – соответственно проекции скоростей снаряда и осколков на оси x и y.

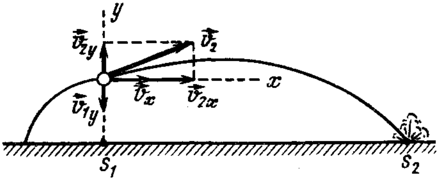


Рис. 139

Учитывая, что первый осколок упал под местом разрыва снаряда и поэтому $v_{1x} = 0$, а также что взрыв произошел в верхней точке траектории и $v_y = 0$, получаем: $v_{2x} = 2v_x$, $v_{2y} = -v_{1y}$.

Так как снаряд разорвался в высшей точке траектории $h = 19{,}6$ м, то до разрыва он двигался $t = \sqrt{2h/g} = 2$ с, а значит, $v_x = s_1/t = 500$ м/с.

Запишем теперь уравнения для координат первого и второго осколков:

$$x_1 = 0, \; y_1 = v_{1y}\tau - \frac{g\tau^2}{2};$$

$$x_2 = v_{2x}t_2, \; y_2 = v_{2y}t - \frac{gt_2^2}{2}.$$

Подставляя во второе и четвертое уравнение $\tau = 1$ с, $y_1 = y_2 = -h = -19{,}6$ м и учитывая, что $v_{2y} = -v_{1y}$, найдем t_2 и затем x_2.

Расстояние от места выстрела до точки падения второго осколка $s_2 = s_1 + x_2$.

3.10. $v_1 = \dfrac{Mv_0 - mv_2}{M - m} \approx 161{,}7$ м/с.

3.11. а) в 4 раза; б) в 3 раза.

Указание. Масса увлекаемых частиц в единицу времени $m = m_0nSv$, где m_0 – масса одной частицы; n – число их в единице объема (плотность); S – площадь сечения корабля; v – скорость корабля. Так как соударения неупругие, то импульс, сообщаемый увлекаемой массе в единицу времени, равен m_0nSv^2. По третьему закону Ньютона сила F, действующая на корабль, равна изменению импульса взаимодействующей с ним массы в единицу времени:

$$F = m_0nSv^2;$$

а) при увеличении v в 2 раза F возрастает в 4 раза;

б) при увеличении n в 3 раза F возрастает во столько же раз.

3.12. $v_к = 8005$ м/с; $v_р = 7999{,}9$ м/с.

Решение. Напишем закон сохранения импульса в системе отсчета, движущейся со скоростью v в направлении полета ракеты. В этой системе отсчета до отделения конуса ракета покоилась:

$m_р v_р' + m_к v_к' = 0$ (здесь скорости $v_р'$ и $v_к'$ – величины алгебраические). По условию $v_к' = v_{отн} + v_р'$. Решая эти уравнения совместно относительно $v_к'$, найдем $v_к' = m_р v_{отн}/(m_р + m_к)$. Скорость конуса относительно Земли равна $v_к = v + v_к' = v + m_р v_{отн}/(m_р + m_к)$. Скорость ракеты будет равна $v_р = v_к - v_{отн}$.

3.13. $\Delta x = l \sin^2(\alpha/2)$.

Указание. Так как на стержень в горизонтальном направлении не действуют никакие силы, то его центр тяжести будет двигаться вертикально.

3.14. Из условия нерастяжимости стержня следует, что $v_1 \cos\alpha = v_2 \cos\beta$, или $\cos\alpha/\cos\beta = v_2/v_1$; система будет совершать сложное движение: вращаться вокруг центра масс, который одновременно будет двигаться по такой траектории, по которой двигалась бы материальная точка, брошенная под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0 = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$; составляющие этой скорости: по горизонтали $v_x = v_1 \cos\alpha = v_2 \cos\beta$, по вертикали $v_{0y} = \dfrac{m_1 v_1 \sin\alpha + m_2 v_2 \sin\beta}{m_1 + m_2}$; высота h, на которую поднимется центр масс системы, находится из закона сохранения энергии $mv_{0y}^2/2 = mgh$, откуда

$$h = \frac{(m_1 v_1 \sin\alpha + m_2 v_2 \sin\beta)^2}{2g(m_1 + m_2)^2}.$$

3.15. Человек передвинется на расстояние $x_1 = \dfrac{M}{M+m} l = 4$ м, а лодка – на расстояние $x_2 = \dfrac{m}{M+m} l = 1$ м.

Решение. *1-й способ.* Импульс изолированной системы постоянен, а ее центр остается в покое или сохраняет свою скорость неизменной. Поэтому положение центра массы системы лодка – человек $x_{ц.м}$ в системе координат, связанной (рис. 140) с водой, не должно меняться

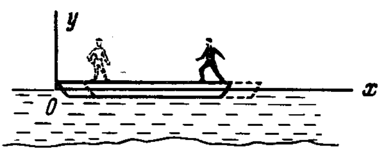


Рис. 140

при движении человека:

$$x_{ц.м} = \frac{Ma + ml}{M + m} = \frac{M(a + x_2) + mx_2}{M + m}$$

(x_2 – координата носа лодки после перемещения человека на нос; a – координата центра тяжести лодки до перемещения; m – масса человека; M – масса лодки). Отсюда найдем, что лодка переместится на расстояние $x_2 = \dfrac{m}{M+m}l$ относительно дна, а человек — на расстояние $x_1 = l - x_2 = \dfrac{M}{M+m}l$ относительно дна.

2-й способ. Обозначив через v скорость человека относительно лодки, u — скорость лодки относительно воды, можно написать: $m(v-u) = Mu$ [$(v-u)$ — скорость человека относительно дна], откуда $u = \dfrac{m}{m+M}v$. Учитывая, что пути, проходимые человеком и лодкой, пропорциональны их скоростям, найдем перемещение лодки относительно дна $x_2 = \dfrac{m}{M+m}l$, а человека $x_1 = \dfrac{M}{M+m}l$.

3.16. $x = (m_1 - m_2)l/(m_1 + m_2 + M) = 0{,}5$ м.

Указание. См. решение задачи 3.15, 1-й способ.

3.17. $v_1 = \dfrac{m(v+u) + Mv}{M+m}$; $v_2 = v$; $v_3 = \dfrac{m(v-u) + Mv}{M+m}$.

Решение. Решим задачу в системе отсчета, движущейся со скоростью v относительно берега. Очевидно, в этой системе отсчета лодки до переброски грузов неподвижны. Из закона сохранения импульса следует:

$mu = (M+m)v'_1$, поэтому скорость передней лодки $v'_1 = mu/(m+M)$;
$0 = (M+m)v'_2$, для средней лодки $v'_2 = 0$;
$-mu = (M+m)v'_3$, для задней лодки $v'_3 = -mu/(m+M)$.

Скорость v_1 первой лодки относительно Земли получим из формулы $v_1 = v'_1 + v$, аналогично найдем скорости 2-й и 3-й лодок.

3.18. $u = \dfrac{(M+m)v - Mv'}{m\cos\alpha} \approx 8{,}6$ м/с.

Решение. Закон сохранения импульса можно применять только для составляющих импульсов вдоль направления движения, так как в этом направлении внешние силы на систему не действуют: $(M+m)v = Mv' + mu\cos\alpha$. Отсюда $u = \dfrac{(M+m)v - Mv'}{m\cos\alpha}$.

3.19. $v_2 = \dfrac{S_2}{S_1}\dfrac{m}{M}v_1$; $u = \dfrac{mv_1}{M_0S_1}(S_2 - S_1)$.

Решение. Учитывая, что силы, действующие на поршни (давление газа одно и то же), пропорциональны величинам их поверхностей S_1 и S_2 и время действия одинаково, мы можем, используя второй закон Ньютона в «импульсной» записи, получить $mv_1/Mv_2 = S_1/S_2$. Отсюда $v_2 = \dfrac{S_2}{S_1}\dfrac{m}{M}v_1$ в обоих случаях. Скорость труб u во втором случае легко находится из закона сохранения импульса: $mv_1 + M_0u = Mv_2$. Для u получаем: $u = \dfrac{m}{M_0}v_1\left(\dfrac{S_2}{S_1} - 1\right)$.

3.20. $v = \dfrac{M\sqrt{2gl\sin\alpha}}{m\cos(\alpha \pm \beta)}$.

Решение. К моменту, когда ящик с песком пройдет путь l, он будет иметь скорость $u = \sqrt{2al}$, где $a = g\sin\alpha$.

Для того чтобы ящик остановился, сумма проекций импульсов ящика и тела вдоль наклонной плоскости должна быть равна нулю: $-mv\cos(\alpha \pm \beta) + Mu = 0$, знак перед β выбирается в зависимости от направления скорости тела по отношению к горизонту (время взаимодействия тела и ящика предполагается малым).

Подставив в это уравнение выражение для u, получим ответ.

3.21. а) Опишет над плоскостью параболу, вершина которой будет на высоте $h/2$; б) будет равномерно скользить по плоскости со скоростью $v = \sqrt{gh}$.

Указание. а) Горизонтальная составляющая скорости тела $v_x = \sqrt{2gh}\cdot\cos\alpha$ останется неизменной, а вертикальная $v_y = \sqrt{2gh}\cdot\sin\alpha$ изменит при ударе свое направление на противоположное. Траектория тела будет представлять собой отрезки парабол.

б) Вертикальная составляющая скорости тела станет равной нулю, и тело будет двигаться равномерно со скоростью $v = v_x = \sqrt{2gh}\cos\alpha$.

3.22. $k = \rho S v^2/(mg\cos\alpha)$.

Решение. Для сосуда с водой второй закон Ньютона имеет вид

$$ma = mg\sin\alpha + F_p - kmg\cos\alpha. \qquad (1)$$

Силы, действующие на сосуд, изображены на рис. 141. Из условия, что уровень воды параллелен наклонной плоскости, следует, что сосуд с жидкостью движется вдоль наклонной плоскости с ускорением $a = g\sin\alpha$ (см. задачу 2.17).

Рис. 141

Сила реакции (реактивная сила) F_p, возникающая благодаря истечению струи из сосуда, по второму (в импульсной форме) и третьему законам Ньютона, численно равна изменению импульса воды, вытекшей из сосуда в единицу времени: $F_p = \Delta(mv)/(\Delta t) = (\rho S \Delta l)\, v/(\Delta t) = \rho S v^2$.

Подставляя в уравнение (1) значения a и F_p, получаем

$$k = \rho S v^2/(mg\cos\alpha).$$

3.23. Внешней силой, вызывающей движение автомобиля, является сила трения покоя ведущих колес о дорогу.

3.24. $v_2 = -mv_0\left(\dfrac{1}{M} + \dfrac{1}{M-m}\right) \approx -102{,}6$ м/с.

Знак «минус» указывает на то, что скорости v_2 и v_0 направлены в противоположные стороны.

Указание. Закон сохранения импульса при выбросе первой и второй порций соответственно запишется так:

$$(M - m)v_1 + m(v_0 + v_1) = 0; \ (M - 2m)v_2' + m(v_0 + v_2') = 0,$$

где v_1 – скорость, приобретенная установкой после выброса первой порции. Второе уравнение записано в системе координат, движущейся со скоростью v_1. (Здесь все скорости – величины алгебраические). Из записанных уравнений находим v_1 и v_2' и окончательно $v_2 = v_2' + v_1$. (См. также решение задачи 3.25.)

3.25. $u_n = v\left(\frac{m}{M} + \frac{m}{M - m} + \ldots + \frac{m}{M - (n-1)m}\right) = v\sum_{k=1}^{n} \frac{m}{M - (k-1)m}$.

Решение. Запишем закон сохранения импульса для системы ракета – газ при вылете k-й порции газа в системе отсчета, движущейся со скоростью, равной скорости ракеты после вылета $(k - 1)$-й порции:

$$(M - km)\Delta u_k = m(v - \Delta u_k),$$

где Δu_k – скорость, которую приобретает ракета в этой системе отсчета после вылета k-й порции газа; $(v - \Delta u)_k$ – скорость k-й порции в момент ее разделения с ракетой, когда их взаимодействие закончилось и последняя уже приобрела скорость Δu_k.

Очевидно, что скорость ракеты относительно Земли будет равна сумме изменений ее скорости Δu_k, связанных с вылетами порций газа от первой до n-й:

$$u_n = \sum_k \Delta u_k = v\left(\frac{m}{M} + \frac{m}{M - m} + \frac{m}{M - 2m} + \ldots + \frac{m}{M - (n-1)m}\right).$$

Это решение отличается от предыдущей задачи тем, что здесь все скорости – величины арифметические (модули векторов), а их предполагаемые направления учтены при выборе знаков, т. е. все векторы скоростей спроектированы на единое направление.

3.26. В обоих случаях а) и в обоих случаях б) ответы одинаковы: а) $u = v\left(\frac{m}{M + nm} + \frac{m}{M + (n-1)m} + \ldots + \frac{m}{M + m}\right)$ (см. решение задачи 3.25); б) $u = vnm/(M + nm)$. В случаях а), как видно из ответов, скорость плота u больше.

3.27. а) $M_1 = Mg/v$; б) $\mu_2 = M(a + g)/v$.

Решение. Если расход топлива равен μ, а скорость истечения газов из сопла v, то за единицу времени ракете сообщается импульс μv, который, согласно законам Ньютона, равен реактивной силе. Поэтому:

а) $\mu_1 v = Mg$, $\mu_1 = Mg/v$; б) $Ma = \mu_2 v - Mg$, $\mu_2 = M(a + g)/v$.

4. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ

4.1. Силы одинаковы по величине; работы тоже одинаковы по величине, но противоположны по знаку, так как в одном случае направление силы, действующей на веревку, и ее перемещения совпадают, а в другом случае – противоположны.

4.2. $A = mg\dfrac{l}{2} \approx 50$ Дж.

Указание. Совершенная работа равна работе по подъему центра тяжести цепи.

4.3. $A = Mg\dfrac{l}{2} \approx 10$ Дж.

4.4. $A = \rho g l^2 \pi d^2/12$.

Указание. Работа идет на поднятие центра масс воды в шланге с высоты $^1/_6 l$ на высоту $^2/_3 l$.

4.5. $A = {}^1/_2(k_1 + k_2)Mgl$.

Решение. Сила трения, преодолеваемая при передвижении цепи:

$$F_{\text{тр}} = F_1 + F_2 = k_1\frac{Mg}{l}(l - x) + k_2\frac{Mg}{l}x = k_1 Mg - \frac{Mg}{l}(k_1 - k_2)x,$$

здесь x – расстояние от границы раздела полуплоскостей до начала цепи.

График зависимости силы трения от перемещения цепи изображен на рис. 142.

Совершаемая работа численно равна площади фигуры, ограниченной сверху графиком силы, т. е.

$$A = {}^1/_2(k_1 + k_2)Mgl.$$

Задачу можно решать также, построив графики зависимости силы трения от перемещения цепи на каждой из полуплоскостей и определив суммарную площадь полученных фигур.

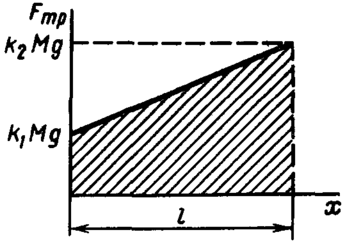


Рис. 142

4.6. $F_{c1} = 600$ Н; $F_{c2} = 3600$ Н.

4.7. $M_1 = M\left(\dfrac{\sin\alpha}{k} + \cos\alpha - 1\right)$.

Указание. Мощность равна $N = Fv$ (где F – сила тяги, v – скорость). Так как скорости в обоих случаях одинаковы, то и одинаковы силы тяги, развиваемые двигателем вагона:

$$Mg\sin\alpha + kMg\cos\alpha = (M + M_1)gk.$$

4.8. $F_c = \dfrac{Mg(v_1\sin\alpha_1 - v_2\sin\alpha_2)}{v_2 - v_1} \approx 9800$ Н.

Указание. Мощность локомотива (см. предыдущую задачу)

$$N = (Mg\sin\alpha_1 + F_c)v_1 = (Mg\sin\alpha_2 + F_c)v_2.$$

4.9. $l_2 = 40$ см.

4.10. В четвертой доске.

Указание. Потери кинетической энергии пули при пролете каждой из досок одинаковы и равны: $\Delta E = \dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2} = \dfrac{m(v_0^2 - v_1^2)}{2}$. Всю энергию пуля потеряет, пробив $n = mv_0^2/2/(\Delta E) = v_0^2/(v_0^2 - v_1^2) \approx 3{,}3$ доски, т. е. пуля застрянет в четвертой доске.

4.11. а) $A_1 = \frac{Mv_2^2}{2} - \frac{Mv_1^2}{2} = 5\cdot 10^4$ кДж;

б) $A_2 = mv_3^2/2 = 1{,}6\cdot 10^5$ кДж.

4.12. $N = Mgkat \approx 1{,}2\cdot 10^6$ Вт.

4.13. $N_{\text{ср}} = M\left(\frac{v^2}{2s} + g\alpha + kg\right)\frac{v}{2} \approx$ 9900 Вт ($\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$).

4.14. $N = Mgu/2$.

Указание. Мощность двигателя $N = \mu u^2/2$, где μ – расход топлива. Реактивная сила μu уравновешивает силу тяжести: $\mu u = Mg$.

4.15. Во втором случае: $A_2/A_1 = 3$.

Указание. Так как ускорения автомобиля и силы сопротивления в обоих случаях одинаковы, то и силы тяги $F_{\text{т}}$, равные $ma + F_{\text{сопр}}$, также равны. Путь же, пройденный автомобилем во втором случае, втрое больше.

4.16. $A = \frac{m}{2}\left(\frac{g^2t^2}{4} + \frac{s^2}{t^2}\right) \approx 5{,}2$ Дж.

Указание. Работа затрачивается на сообщение телу кинетической энергии.

4.17. $A = \frac{F_0}{x_0}\frac{x^2}{2} = 50$ Дж.

Решение. Работу, совершаемую при сжатии пружины, можно найти, построив график зависимости силы F, действующей на пружину, от величины ее деформации x, т. е. от величины смещения конца пружины из положения равновесия. По закону Гука, эта сила равна $F = kx$, где k – коэффициент упругости пружины, равный в данном случае $k = F_0/x_0 = 10^4$ Н/м. Работа сжатия пружины будет численно равна площади треугольника OAB (рис. 143):

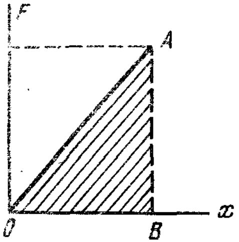


Рис. 143

$$A = \frac{kxx}{2} = \frac{kx^2}{2} = \frac{F_0}{x_0}\frac{x^2}{2} = 50 \text{ Дж}.$$

4.18. $x \approx 2{,}2$ см.

Указание. При ударе кинетическая энергия вагона идет на работу сжатия пружин, т. е. переходит в их потенциальную энергию: $W_{\text{п}} = 2kx^2/2$, где $k = 5\cdot 10^6$ Н/м (см. задачу 4.17).

4.19. $A = Fh = 2\cdot 10^3$ Дж; $\Pi = mgh = 10^3$ Дж. Тело обладает еще кинетической энергией $T = A - \Pi$.

4.20. $A = Mgl + Mv_{\text{ср}}\,\Delta v = 12{,}3\cdot 10^3$ Дж.

Указание. $\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}(v_1 - v_2) = v_{\text{ср}}\Delta v.$

4.21. $mgh\frac{F}{F - ma} \approx 147$ Дж.

Указание. Работа идет на увеличение потенциальной энергии груза mgh и сообщение кинетической энергии $\frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(\sqrt{2a\frac{h}{\sin\alpha}}\right)^2}{2} =$ $= \frac{mah}{\sin\alpha}$. Ее можно вычислить и просто по формуле $A = Fl =$ $= Fh/\sin\alpha$.

Величину $\sin\alpha$ находим из условия

$$F - mg\sin\alpha = ma.$$

4.22. 1. $A = mgl\sin\alpha + \frac{m(v_1^2 - v_0^2)}{2} = 317$ Дж.

2. Работа будет той же, кинетическая энергия меньше на величину $kmgl\cos\alpha \approx 42{,}5$ Дж и в верхней точке равна 34,4 Дж.

4.23. $F_{\text{нат}} = Mv^2/(2s) = 7500$ Н.

4.24. а) $a_1 \approx 2{,}94$ м/с^2; $s_1 \approx 38{,}3$ м; б) $a_2 \approx 6{,}86$ м/с^2; $s_2 \approx 16{,}4$ м.
Указание. Кинетическая энергия автомобиля расходуется на работу преодоления трения: $mv^2/2 = kmgs$.

4.25. $s \approx 12$ м.

Указание. Коэффициент трения колес о грунт определяется из условия неподвижности автомобиля при критическом угле склона горы α и равен $\operatorname{tg}\alpha$.

4.26. а) $a_1 = g(\sin\alpha - k\cos\alpha) = 1{,}04$ м/с^2; б) $v = \sqrt{2a_1 l} \approx$ $\approx 11{,}2$ м/с; в) $t_1 = v/a_1 = \sqrt{2l/a_1} = 10{,}7$ с; г) $T_1 = mgl(\sin\alpha - k\cos\alpha) \approx$ ≈ 7620 Дж; д) $s = \frac{l}{k}(\sin\alpha - k\cos\alpha) = 45{,}3$ м; е) $t_2 = 2s/v \approx 8$ с; ж) $a_2 =$ $= 0{,}14g$.

4.27. $v = \sqrt{2gl(\sin\alpha - k\cos\alpha)} \approx 3{,}4$ м/с.

4.28. $A = {}^1/_6\rho g h^2 S = 1{,}63\cdot10^5$ Дж.

Указание. Работа равна разности потенциальных энергий воды до и после передвижения перегородки.

4.29. В 4 раза.

Указание. Каждый из автомобилей приобретает за время t кинетическую энергию, равную соответственно $N_1 t$ и $N_2 t$, поэтому $N_1/N_2 =$ $= v_1^2/v_2^2$.

4.30. $N = mv\left(\frac{v^2}{2s} + kg\right) \approx 83{,}1$ кВт.

Указание. Мощность моторов при взлете равна $N = F_{\text{т}}v$, где $F_{\text{т}}$ — сила тяги моторов, которую можно найти, написав уравнение второго закона Ньютона: $F_{\text{т}} - kmg = ma$ и подставив в него ускорение самолета при разбеге $a = v^2/(2s)$.

4.31. $N \approx 500$ кВт.

4.32. а) $k = 2s/(gt^2) \approx 0{,}02$; б) $N = 4ms^2/t^3 \approx 46$ Вт.

4.33. а) $a = \frac{N}{mv} - kg$; $a_1 = 0{,}176$ м/с^2; $a_2 = 0{,}026$ м/с^2; б) $v_{\text{макс}} =$ $= N/(kmg) \approx 66$ км/ч.

Указание. При постоянной мощности тепловоза с изменением скорости изменяется сила его тяги, что влечет за собой изменение ускорения. Таким образом, в случае разгона сила тяги в конце концов сделается равной (постоянной) силе сопротивления движению, и ускорение станет равным нулю, т. е. будет достигнута максимальная скорость.

Ускорение поезда можно найти из уравнений

$$F_{\text{тяги}} = N/v \text{ и } F_{\text{тяги}} - kmg = ma.$$

4.34. $T = N/(2\pi Rn)$.

Указание. Мощность, передаваемая ремнем, равна $N = Tv$, где $v = 2\pi Rn$ – скорость ремня.

4.35. $N \approx 284$ кВт.

Решение. Мощность потока равна работе, которую может совершать поток в одну секунду при полном переходе его кинетической энергии в работу: $N = \dfrac{mv^2/2}{t}$. Здесь m – масса воздуха, проходящая через поперечное сечение S потока за время t. Поэтому $N = \pi\rho d^2 v^3/8$, т. е. мощность потока пропорциональна кубу его скорости.

4.36. $N = \rho g S v h + \dfrac{\rho S v^3}{2}$.

Указание. См. решение задачи 4.35.

Скорость воды у основания водопада v_1 легко найти из закона сохранения энергии: $m\dfrac{v^2}{2} + mgh = \dfrac{mv_1^2}{2}$.

4.37. $N = 2mgv\sin\alpha = 24{,}5$ кВт, где $\sin\alpha = 0{,}05$.

Решение. Мощность двигателя автомобиля должна быть равна $N = F_{\text{т}}v$, где $F_{\text{т}}$ – сила тяги. Так как автомобиль движется равномерно, $F_{\text{т}}$ равна сумме силы сопротивления движущемуся автомобилю и составляющей силы тяжести вдоль наклонной плоскости: $F_{\text{т}} = F_{\text{сопр}} + mg\sin\alpha$.

Для автомобиля, движущегося вниз, можно, с другой стороны, написать: $mg\sin\alpha - F_{\text{сопр}} = 0$, откуда $F_{\text{сопр}} = mg\sin\alpha$, а $F_{\text{т}} = 2mg\sin\alpha$. Таким образом,

$$N = 2mgv\sin\alpha.$$

4.38. $v = \dfrac{(N_1 + N_2)v_1v_2}{N_1v_2 + N_2v_1}$.

Указание. Для грузовиков, соединенных тросом, $N_1 + N_2 = (F_1 + F_2)v$, где F_1 и F_2 – силы тяги грузовиков, равные силам сопротивления движению.

4.39. $v \approx 2\dfrac{v_1v_2}{v_1 + v_2} \approx 24$ м/с.

Решение. При равномерном движении аэросаней вверх сила тяги

$$F_1 = mg\sin\alpha + kmg\cos\alpha. \tag{1}$$

При движении вниз

$$F_2 = kmg\cos\alpha - mg\sin\alpha, \tag{2}$$

где k – коэффициент трения; m – масса аэросаней. Так как мощность двигателя постоянна, то

$$N = F_1 v_1 = F_2 v_2. \tag{3}$$

При движении по горизонтальному пути

$$N = kmgv. \tag{4}$$

Складывая почленно уравнения (1) и (2), получим

$$F_1 + F_2 = 2kmg\cos\alpha. \tag{5}$$

Решая совместно уравнения (3), (4) и (5), найдем $v = 2\cos\alpha \times \times \dfrac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}$. Так как подъем слабый, т. е. α мало, то $\cos\alpha \approx 1$ и $v = 2\dfrac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}$.

4.40. 250 м.

Р е ш е н и е. Скорость поезда в тот момент, когда от него отрывается вагон, обозначим v. К моменту остановки вагона его кинетическая энергия полностью перейдет в работу по преодолению трения: $m_1 v^2/2 = km_1 g s_1$, где s_1 – путь, пройденный вагоном до остановки.

При равномерном движении поезда сила тяги уравновешивается силой сопротивления всего состава: $F_т = kmg$. Когда задний вагон оторвался, то сила сопротивления уменьшилась, а сила тяги, по условию задачи, не изменилась. На поезд стала действовать сила F, ускоряющая его движение:

$$F = kmg - k(m - m_1)g = km_1 g.$$

Поезд после отрыва вагона стал двигаться под действием этой силы ускоренно и его кинетическая энергия на пути s возросла на величину ΔT, равную работе силы F на пути s:

$$\Delta T = km_1 gs.$$

До отрыва же вагона кинетическая энергия этой части поезда была в $(m - m_1)/m_1$ раз больше, чем энергия вагона, т. е. она была равна $(m - m_1)kgs_1$. Поэтому к моменту прекращения доступа пара поезд будет иметь кинетическую энергию $T = k(m - m_1)gs_1 + km_1 gs$. Эта энергия расходуется на работу по преодолению сопротивления движению поезда на пути s_2: $k(m - m_1)gs_1 + km_1 gs = k(m - m_1)gs_2$. Из этого уравнения найдем $s_2 - s_1 = m_1 s/(m - m_1)$, а расстояние между остановившимися поездом и вагоном $x = s_2 - s_1 + s = ms/(m - m_1)$. Другое решение см. в задаче 2.50.

4.41. $A = mg(kl + h) \approx 5500$ Дж.

Р е ш е н и е. Разобьем весь путь на маленькие прямолинейные участки. Тогда работа на каждом участке равна $\Delta A = kmg\Delta l\cos\alpha + mg\Delta l\sin\alpha$, где первое слагаемое – это работа против силы трения, а второе – та часть работы, которая идет на увеличение потенциальной энергии тела. Замечая, что $\Delta l \cos\alpha$ и $\Delta l \sin\alpha$ – проекции участка пути на горизонтальное и вертикальное направления соответственно, находим, что полная работа будет равна $A = kmgl + mgh = mg(kl + h)$.

5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

5.1. $\beta = \arccos(2\cos\alpha - 1)$.

5.2. 1. $h = v_0^2/(4g) \approx 6{,}5$ м. 2. $v_0 = \sqrt{2gh}$.

5.3. $T = 32{,}2$ Дж; $\Pi = 39{,}4$ Дж.

Указание. Начальные значения кинетической и потенциальной энергии соответственно равны: $T = mv_0^2/2$, $\Pi = mgH$. Изменение потенциальной энергии $\Delta\Pi = mg\Delta h$, где $\Delta h = g/2$ – изменение высоты тела за 1 с. На эту же величину увеличится кинетическая энергия тела.

5.4. $T = 1000$ Дж.

Решение. В конце четвертой секунды скорость тела, брошенного горизонтально со скоростью v_0 с некоторой высоты, будет слагаться из горизонтальной скорости v_0 и вертикальной скорости $v_в = gt$. Скорость тела v найдем по правилу параллелограмма (рис. 144). Отсюда кинетическая энергия тела в конце четвертой секунды

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left[v_0^2 + (gt)^2\right].$$

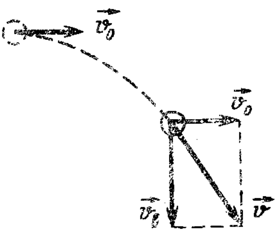


Рис. 144

5.5. $a = xg/L$; $v = x\sqrt{g/L}$; $v_{кон} = \sqrt{gL}$.

Решение. Ускорение всему канату сообщает сила тяжести свешивающейся части $F_т = mxg/L$, где m – масса каната.

Согласно второму закону Ньютона, $mxg/L = ma$. Отсюда $a = xg/L$.

Скорость каната можно найти из закона сохранения энергии. Если часть каната длиной x соскользнет со стола, то ее центр тяжести опустится на $h = x/2$, поэтому $mgx^2/2L = mv^2/2$. Отсюда $v = x\sqrt{g/L}$ и $v_{кон} = \sqrt{gL}$.

5.6. $v = \sqrt{gL/2}$.

Указание. См. решение задачи 5.5. В начальный момент центр тяжести каната находился на расстоянии $L/4$ от штыря, а в момент, когда канат покинет штырь, его центр тяжести будет находиться на расстоянии $L/2$ от штыря.

5.7. $H \approx 2$ м.

Решение. Уменьшение механической энергии конькобежца равно работе по преодолению трения:

$$\frac{mv^2}{2} - mgH = A_{тр}. \qquad (1)$$

Здесь H – высота, на которую въезжает конькобежец; с другой стороны,

$$A_{тр} = kmgl\cos\alpha = \frac{H}{\sin\alpha}kmg\cos\alpha = kmgH\frac{s}{h}, \qquad (2)$$

где l – путь, пройденный конькобежцем вдоль наклонной плоскости. Подставляя выражение (2) в уравнение (1) найдем, что

$$H = \frac{v^2}{2g\left(1 + \frac{ks}{h}\right)}.$$

5.8. $A \approx -80{,}2$ Дж.

Указание. Работа сил сопротивления равна изменению механической энергии тела:

$$A = E_2 - E_1 = \frac{mv^2}{2} - \left(mgh + \frac{mv_0^2}{2}\right).$$

5.9. $A \approx 3{,}5$ Дж.

Указание. См. задачу 5.8. Работа по преодолению сил сопротивления положительна.

5.10. $F_{ср} \approx 1570$ Н.

Указание. Работа сил сопротивления $A = \frac{mv_2^2}{2} - \left(\frac{mv_1^2}{2} + mgH\right)$.

С другой стороны, $A = -F_{ср}l$ ($F_{ср}$ – средняя сила сопротивления, которая направлена противоположно перемещению, l – длина спуска).

5.11. $Q \approx 9{,}8$ Дж.

Указание. Из закона сохранения энергии следует, что

$$mgh + \frac{mv_0^2}{2} = kmgs + Q,$$

где Q – количество теплоты, выделившееся при ударе.

5.12. $2x_0$; $v_{макс} = \sqrt{gx_0}$; колебательный.

Решение. Из условия равновесия груза $mg = kx_0$ найдем, что жесткость пружины $k = mg/x_0$. Записав теперь закон сохранения энергии $kx^2/2 = mgx$ и подставив в уравнение выражение для k, найдем $x = 2x_0$. Скорость груза максимальна, когда ускорение равно нулю и $mg = kx_0$. Так как $\frac{mv^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = mgx_0$, то $v_{макс} = g\sqrt{m/k} = \sqrt{gx_0}$. Груз будет колебаться около положения равновесия x_0.

5.13. $F_{ср} = Mg\left(1 + \frac{h}{s}\right) \approx 3 \cdot 10^5$ Н; $\tau = 2s/\sqrt{2gh} \approx 8 \cdot 10^{-3}$ с.

Решение. Работа по преодолению силы сопротивления грунта равна изменению потенциальной энергии груза: $F_{ср}s = Mg(h + s)$. Отсюда $F_{ср} = Mg\left(1 + \frac{h}{s}\right) \approx Mg\frac{h}{s} \approx 3 \cdot 10^5$ Н.

Время удара определится из соотношения

$$\tau = s/v_{ср} = 2s/v_0,$$

где v_0 – скорость груза в начале удара (мы считаем движение сваи равнозамедленным, так что $v_{ср} = v_0/2$).

В соответствии с законом сохранения энергии $v_0 = \sqrt{2gh}$. Поэтому $\tau = 2s/\sqrt{2gh} \approx 8 \cdot 10^{-3}$ с.

5.14. $k = 0{,}05$.

Решение. В конце пути санки останавливаются, и, следовательно, вся потенциальная энергия идет на работу против сил трения на наклонном и горизонтальном участках пути:

$$mgh = kmgs\cos\alpha + kmgl, \qquad (1)$$

где s – длина спуска; α – угол наклона горы.

При этом $s\cos\alpha = b$. Поэтому из уравнения (1) получаем $h = k(b + l)$, откуда $k = h/(b + l)$.

5.15. а) $p = 0{,}17$ Н·с; б) $Q = 3{,}7\cdot 10^{-2}$ Дж.

Решение. Импульс силы, действующей на шарик при ударе о плиту, в соответствии со вторым законом Ньютона равен:

$$p = |\Delta(m\vec{v})| = m(v_1 + v_2),$$

где v_1 и v_2 – скорости шарика соответственно до и после удара.

Из закона сохранения энергии найдем: $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ и $v_2 = \sqrt{2gh_2}$, поэтому $p = m\sqrt{2g}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})$. По третьему закону Ньютона импульс силы, действовавшей на плиту, за время удара численно равен p. Количество теплоты, выделившееся при ударе шарика о плиту, равно разности энергий шара до и после удара:

$$Q = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = mg(h_1 - h_2).$$

5.16. $h = (\sqrt{2gl} + 2u)^2/(2g)$.

Решение. Задачу удобнее решить, если рассматривать столкновение в системе координат, связанной с движущейся плитой. Так как скорость плиты от удара меняется пренебрежимо мало, то эту систему координат можно считать инерциальной. В ней шарик до удара о плиту имеет скорость $v' = v + u$, где $v = \sqrt{2gl}$ – скорость шарика в неподвижной системе координат, связанной с Землей. Удар шарика о плиту абсолютно упругий, поэтому после удара шарик в движущейся системе будет иметь скорость $v_1' = -v' = -(v + u)$. В системе же координат, связанной с Землей, скорость шарика будет равна $v_1 = -(v + u) - u = -(v + 2u)$ (минус означает, что шарик будет иметь скорость, направленную вверх). Поэтому шарик после удара подскочит на высоту $h = v_1^2/(2g) = (v + 2u)^2/(2g) = (\sqrt{2gl} + 2u)^2/(2g)$.

5.17. Потенциальная энергия системы шар – воздух – Земля уменьшилась, так как при подъеме шара вверх объем, занимаемый шаром, замещается воздухом, имеющим массу, бóльшую, чем шар.

5.18. $l \approx 2{,}7$ м.

Указание. При движении шайбы ее кинетическая энергия расходуется на совершение работы против трения: $mv_0^2/2 = kmg(s + l)$.

5.19. В первом случае скорость тела больше, чем во втором.

5.20. Решение. Обозначим через v минимальную скорость, с которой должен прыгнуть человек, чтобы достигнуть берега. Во время прыжка человек сообщит лодке (или пароходу) скорость u, равную на основании закона сохранения импульса $u = vm/M$ (здесь m – масса человека, M – масса лодки или парохода).

Прыгая, человек совершает работу A, равную кинетической энергии, приобретенной человеком и лодкой (или пароходом):

$$A = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Эта работа тем меньше, чем меньше отношение масс человека и лодки (парохода). Масса парохода во много раз больше массы человека ($m/M \ll 1$), поэтому, прыгая с него, человек совершает меньшую работу, чем в том случае, когда он прыгает с лодки ($m/M \approx 1$).

5.21. $s = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{v^2}{2kg} \approx 0{,}29$ м.

Решение. На основании закона сохранения импульса и энергии можно записать уравнения: $Mv' = mv$ и $Mv'^2/2 = kMgs$. Исключая из этих уравнений v', находим $s = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{v^2}{2kg}$.

5.22. $A \approx 105$ Дж.

Решение. Работа, которую совершает человек, бросив камень с тележки, расходуется на сообщение кинетической энергии камню и тележке с человеком:

$$A = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2},$$

где v_2 – скорость движения тележки.

По закону сохранения импульса, $mv_1 = Mv_2$, откуда $v_2 = mv_1/M$; подставив v_2 в выражение работы, получим

$$A = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{m^2v_1^2}{2M} = \frac{mv_1^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Если $M \gg m$, то $A \approx mv_1^2/2$, т. е. вся работа, совершаемая человеком, идет на сообщение камню кинетической энергии. В общем случае кинетические энергии, полученные взаимодействующими телами, обратно пропорциональны их массам.

5.23. $v_1 \approx 590$ м/с.

Решение. На основе закона сохранения энергии определяем скорость отдачи винтовки после выстрела v (см. рис. 28):

$$Mgh = Mv^2/2, \ v^2 = 2gh.$$

В момент выстрела на винтовку и пулю действуют только силы давления пороховых газов. Это внутренние силы. Поэтому систему винтовка – пуля можно считать замкнутой и применить к ней закон сохранения импульса. До выстрела импульс системы равнялся нулю, следовательно, после выстрела полный импульс системы тоже должен быть равен нулю: $Mv + mv_1 = 0$. Отсюда $v_1 = -\frac{Mv}{m} = -\frac{M}{m}\sqrt{2gh}$. Знак «–» означает, что скорость пули направлена в сторону, противоположную скорости отдачи винтовки.

5.24. $\alpha \approx 15°$.

Р е ш е н и е. Брусок, получивший при попадании пули скорость u, поднимается в соответствии с законом сохранения механической энергии на высоту $h = u^2/(2g)$. С другой стороны, $h = l(1 - \cos\alpha) = 2l\sin^2(\alpha/2)$. Поэтому $\sin^2(\alpha/2) = u^2/(4gl)$; u можно определить из закона сохранения импульса:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)u, \quad u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v.$$

Подставив выражение для u в уравнение для синуса угла, найдем

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}\frac{1}{\sqrt{4gl}}.$$

5.25. $v = (1 + n)\sqrt{4gl}\sin\frac{\alpha}{2} \approx 550$ м/с.

Указание. См. решение задачи 5.24.

5.26. $F_с = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)s} \approx 1{,}8 \cdot 10^4$ Н; $s_1 = s\frac{m_1 + m_2}{m_2} \approx 10{,}2$ см.

Р е ш е н и е. Напишем законы сохранения энергии и импульса для системы пуля – брусок:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + F_с s; \tag{1}$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v, \tag{2}$$

где v – скорость, которую получил брусок.

Решая систему уравнений (1) и (2), найдем $F_с$. При попадании пули в закрепленный брусок закон сохранения энергии запишется иначе: $m_1 v_1^2/2 = F_с s_1$. Подставляя сюда выражение для $F_с$, находим $s_1 = s\frac{m_1 + m_2}{m_2}$. Объясните, какое значение имеет длина нити подвеса.

5.27. $v = \frac{M + m}{m\sin\alpha}\sqrt{2gh} \approx 219$ м/с.

Р е ш е н и е. Так как шар в момент удара может двигаться только в горизонтальном направлении (рис. 145), то, применяя закон сохранения импульса к системе пуля – шар, надо учитывать только горизонтальную составляющую импульса:

$$(M + m)v_1 = mv\sin\alpha. \tag{1}$$

По закону сохранения механической энергии $(M + m)v_1^2/2 = (M + m)gh$ и, следовательно, $v_1^2 = 2gh$. Подставив это значение в уравнение (1), получим скорость пули $v = \frac{M + m}{m\sin\alpha}\sqrt{2gh}$.

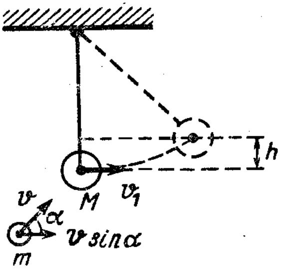


Рис. 145

5.28. $\alpha = 2\arcsin\frac{mv}{(m + M)\sqrt{gl}} \approx 30°$.

Р е ш е н и е. Рассматриваемую систему можно считать замкнутой и применять совместно законы сохранения импульса и механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mu^2}{2};$$

$$mv = Mu + mv_1 \qquad (1)$$

(v_1 и u – скорости шарика и шара маятника после столкновения).

Эти уравнения можно переписать следующим образом:

$$m(v^2 - v_1^2) = Mu^2; \qquad (2)$$

$$m(v - v_1) = Mu. \qquad (3)$$

Разделив уравнение (2) на (3), получим, что $v + v_1 = u$. Подставив полученное выражение в уравнение (1), найдем $u = 2mv/(M + m)$. Запишем теперь закон сохранения энергии при движении шара массой M после удара:

$$Mu^2/2 = Mgl(1 - \cos\alpha),$$

где α – угол максимального отклонения маятника. Так как $1 - \cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$, то $\sin(\alpha/2) = \sqrt{u^2/(4gl)}$ и

$$\alpha = 2\arcsin\frac{u}{2\sqrt{gl}} = 2\arcsin\frac{mv}{(m + M)\sqrt{gl}}.$$

5.29. $a_{\text{ц. м}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 g.$

Р е ш е н и е. *1-й способ.* Напишем закон сохранения энергии для центра масс системы:

$$(m_1 + m_2)gh_{\text{ц. м}} = m_1gh - m_2gh,$$

где m_1 и m_2 – массы грузов; $h_{\text{ц. м}}$ – высота, на которую опускается центр массы системы; h – расстояние, на которое поднялся (опустился) каждый из грузов. Но

$$h_{\text{ц. м}} = a_{\text{ц. м}}t^2/2; \; h = at^2/2,$$

где a – ускорение грузов:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g.$$

Поэтому

$$a_{\text{ц. м}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 g.$$

2-й способ. По закону движения центра масс можно написать

$$(m_1 + m_2)a_{\text{ц. м}} = m_1g + m_2g - 2T, \qquad (1)$$

где $a_{\text{ц. м}}$ – ускорение центра масс; T – сила натяжения нити.

Из уравнений движения грузов нетрудно найти, что

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g. \tag{2}$$

Подставим выражение (2) в уравнение (1):

$$a_{\text{ц. м}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 g.$$

5.30. $\eta = M/(M + m) \approx 93\,\%$.

Решение. По определению, к. п. д.

$$\eta = A_{\text{п}}/A_{\text{з}}. \tag{1}$$

В данном случае полезной будет работа $A_{\text{п}}$ по деформации болванки, а затраченной работой $A_{\text{з}}$ – кинетическая энергия, которой обладал молот перед ударом: $A_{\text{з}} = T_{\text{н}} = mv^2/2$.

Деформация болванки заканчивается в тот момент, когда скорость молота сравняется со скоростью наковальни, т. е. в момент, когда заканчивается собственно удар. Систему молот – болванка – наковальня с хорошей точностью можно считать замкнутой, так как наковальня устанавливается на фундамент через амортизаторы, гасящие колебания наковальни, и за короткое время удара в них не может развиться большое дополнительное усилие вследствие малого смещения наковальни за это время.

Таким образом, импульс, которым вначале обладал молот, сохраняется, и в результате неупругого удара переходит к системе в целом:

$$mv = (m + M)\,u, \tag{2}$$

где u – скорость совместного движения системы в момент окончания удара. Связанная с этим движением «остаточная» кинетическая энергия $T_{\text{к}}$ является неиспользованной (потерянной) частью начальной энергии $T_{\text{н}}$. Тогда полезная работа $A_{\text{п}} = T_{\text{н}} - T_{\text{к}}$, а к. п. д.

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}} = \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{к}}}{T_{\text{н}}} = 1 - \frac{T_{\text{к}}}{T_{\text{н}}}.$$

Используя формулу (2), получим $T_{\text{к}} = (M + m)\,u^2/2 = m^2v^2/[2\,(M + m)]$, и окончательно

$$\eta = 1 - \frac{m}{M + m} = \frac{M}{M + m}.$$

5.31. $q = m_2/(m_1 + m_2)$.

Указание. Доля потерянной энергии

$$q = \Delta T/T = m_1v_1^2 - (m_1 + m_2)\,u^2/(m_1v_1^2),$$

где v_1 – скорость массы m_1 до удара; u – скорость обоих тел после удара; u легко найти из закона сохранения импульса: $m_1v_1 = (m_1 + m_2)\,u$.

Эта задача фактически тождественна предыдущей. Потерянная энергия ΔT перешла **в** работу деформации тел при ударе.

5.32. $l_{\text{мин}} = \dfrac{v^2}{2kg}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{m}{M}\right)}$; $\quad Q = \dfrac{Mv^2}{2}\dfrac{m}{m+M}$.

Решение. В горизонтальном направлении действуют лишь силы трения, являющиеся внутренними силами системы платформа — брусок. Применяя законы сохранения импульса и энергии, получим наиболее короткое решение:

$$Mv = (M+m)\,u; \tag{1}$$

$$\frac{(M+m)\,u^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = -\,kmgS, \tag{2}$$

где S — расстояние, пройденное бруском по платформе.

Во втором выражении изменение кинетической энергии системы (разность начального и конечного значений) приравнено работе сил трения скольжения, которая служит мерой перехода кинетической энергии во внутреннюю (в тепло). Исключая из (1) и (2) u, находим $S = \dfrac{Mv^2}{2kg\,(M+m)}$. Условие задачи выполнено, если $S \leqslant l$. Следовательно, $l_{\text{мин}} = \dfrac{Mv^2}{2kg\,(M+m)} = \dfrac{v^2}{2kg}\cdot\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{m}{M}\right)}$.

Решите задачу другим способом, определяя ускорения бруска и платформы.

Количество выделившейся теплоты $Q = kmgS$ равно уменьшению кинетической энергии системы: $Q = \dfrac{Mv^2}{2} - \dfrac{(M+m)\,u^2}{2}$.

5.33. $s = \dfrac{mMv^2}{2kg\,(m+M)^2} \approx 0{,}25$ м; $\quad Q = \dfrac{mMv^2}{2\,(M+m)} \approx 50$ Дж.

Указание. Из закона сохранения импульса $mv = (m+M)\,u$ находим $u = mv/(M+m)$ — скорость тележки после остановки тела. Путь, пройденный тележкой, $s = u^2/(2a)$, где $a = kmg/M$ — ускорение тележки.

Выделившееся количество теплоты определяем из закона сохранения энергии:

$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{(m+M)\,u^2}{2} = \frac{mMv^2}{2\,(m+M)}.$$

5.34. $h \approx 0{,}16$ м; $Q \approx 58{,}8$ Дж.

Решение. Высота h подъема грузов после удара находится из закона сохранения механической энергии:

$$(m_1+m_2)\,gh = (m_1+m_2)\,\frac{u^2}{2}; \tag{1}$$

скорость u найдем, воспользовавшись законом сохранения импульса:

$$m_1v_1 = (m_1+m_2)\,u. \tag{2}$$

В свою очередь, v_1 находим из соотношения

$$m_1 v_1^2/2 = m_1 g l (1 - \cos\alpha) = 2m_1 g l \cdot \sin^2(\alpha/2). \tag{3}$$

Решая уравнения (1), (2) и (3) совместно, получим

$$h = 2\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 l \sin^2(\alpha/2).$$

Количество теплоты, которое выделяется при ударе,

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} gl \sin^2(\alpha/2).$$

5.35. $n = 19$ ударов; $v_x = 0{,}5$ м/с.

Указание. См. задачу 5.16. В системе координат, связанной с движущейся стенкой, скорость шарика до первого соударения была равна $v_{0x} - u_x$. После удара она меняется на противоположную и, следовательно, в неподвижной системе координат будет равна $v_{0x} - 2u_x$. После n соударений с подвижной стенкой скорость шарика равна $v_{nx} = v_{0x} - 2nu_x$. Столкновения будут продолжаться до тех пор, пока скорость шарика не станет меньшей или равной скорости стенки u_x.

5.36. а) $h_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $h_2 = 0{,}08$ м; б) $H = 0{,}02$ м.

Решение. а) Запишем уравнения законов сохранения механической энергии и импульса для системы шаров, выразив скорости шаров через высоты h_1 и h_2, на которые они поднимутся после удара:

$$m_1 gh = m_2 gh_2 + m_1 gh_1; \tag{1}$$

$$m_1\sqrt{2gh} = m_2\sqrt{2gh_2} + m_1\sqrt{2gh_1}. \tag{2}$$

Преобразуя уравнение (1) и (2) так же, как в задаче 5.28, и решая их затем совместно, найдем

$$\sqrt{h_2} = \sqrt{h_1} + \sqrt{h}. \tag{3}$$

Подставляя выражение (3) в уравнение (2), получим

$$h_1 = h\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \tag{4}$$

и, наконец, из уравнений (1) и (4) находим $h_2 = 4h\left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2$.

б) См. задачу 5.34; $H = h\left(\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2$.

5.37. $n = {}^5/_3$.

Указание. Скорость атома гелия после столкновения $v_1' = v_1 \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ (см. задачу 5.28), где m_1 – масса атома гелия; m_2 – масса атома водорода; v_1 – скорость атома гелия до столкновения;

$$n = \frac{v_1}{v_1'} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = \frac{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}{\dfrac{m_1}{m_2} - 1}.$$

5.38. $E_1 = \dfrac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} E_0$ (рис. 146).

Указание. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что энергия, переданная первоначально покоящемуся шару, $E_1 = \dfrac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} E_0$, где E_0 — полная энергия шаров; α — отношение массы налетающего шара к массе первоначально покоящегося шара. E_1 максимально, когда минимально выражение $\dfrac{(1+\alpha)^2}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} + \alpha + 2$. Но $\dfrac{1}{\alpha} + \alpha \geqslant 2$ (среднее геометрическое чисел α и $1/\alpha$ равно 1), причем $1/\alpha + \alpha = 2$, если $1/\alpha = \alpha$, т. е. $\alpha = 1$ ($\alpha > 0$). Поэтому E_1 максимально при $\alpha = 1$. При этом $E_1 = E_0$.

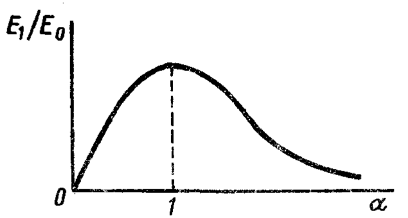


Рис. 146

5.39. а) 100 %. При упругом столкновении частиц с одинаковой массой они обмениваются скоростями; б) 1,9 %.

Указание. См. задачи 5.28, 5.37 и 5.38.

5.40. $П_{\text{макс}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$

Решение. В момент наибольшей деформации шары движутся вместе с одной и той же скоростью u. Для этого момента законы сохранения механической энергии и импульса принимают следующий вид:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + П_{\text{макс}}; \tag{1}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u. \tag{2}$$

Из уравнения (2) $u = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1 + m_2)$. Подставляя это выражение в уравнение (1), получим $П_{\text{макс}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$.

5.41. $h_1 = \dfrac{h\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$; $t = \dfrac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; $a = \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} g$.

Решение. Для тела, упавшего с высоты h над поверхностью жидкости и погрузившегося на глубину h_1, можно записать закон сохранения энергии в форме

$$mg(h + h_1) = F_{\text{выт}} h_1. \tag{1}$$

В правой стороне равенства (1) — работа выталкивающей силы $F_{\text{выт}}$ при погружении тела. По закону Архимеда

$$F_{\text{выт}} = V_{\text{тела}} g \rho_2 = mg\rho_2/\rho_1, \tag{2}$$

где m – масса тела. Подставив выражение (2) в уравнение (1), получим

$$h_1 = h\rho_1/(\rho_2 - \rho_1).$$

Время t найдем из равенства изменения импульса тела при погружении импульсу силы:

$$(F_{\text{выт}} - mg)\,t = m\sqrt{2gh}. \qquad (3)$$

Из соотношений (3) и (2) найдем $t = \dfrac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\sqrt{2h/g}$. Ускорение (по второму закону Ньютона) равно $a = \dfrac{F_{\text{выт}} - mg}{m} = \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}g$.

5.42. $h_{\text{мин}} = 0{,}01Ml/(2m)$.

Решение. Груз m будет совершать работу по растяжению нити, причем сила натяжения прямо пропорциональна величине растяжения Δl (по закону Гука). Эта работа заканчивается разрывом нити и может быть записана так (см. задачу 4.17):

$$A = F_{\text{макс}}\Delta l/2, \qquad (1)$$

где $F_{\text{макс}} = Mg$; $\Delta l = 0{,}01l$ (по условию).

Минимальная высота $h_{\text{мин}}$, падая с которой груз разорвет нить, определяется с помощью закона сохранения энергии:

$$mgh_{\text{мин}} = A \qquad (2)$$

(удлинением нити при ее натяжении здесь пренебрегаем). Подставляя в уравнение (2) выражение (1), получим

$$h_{\text{мин}} = F_{\text{макс}}\Delta l/(2mg) = 0{,}01Ml/(2m).$$

5.43. $s \approx 4{,}9$ м.

Решение. Дальность полета будет максимальна при угле наклона начальной скорости струи к горизонту, равном 45°, и определяется формулой $s = v^2/g$ (см. задачу 1.63). Скорость v струи можно определить, приравнивая кинетическую энергию выброшенной из шприца жидкости $mv^2/2$ работе поршня Fl, где l – его перемещение. Это можно сделать, так как условие $S_{\text{отв}} \ll S_{\text{порш}}$ позволяет пренебречь кинетической энергией, которой обладала жидкость, двигаясь внутри широкой части шприца до выходного отверстия (см. задачу 5.44).

Так как жидкость практически несжимаема, то масса вытекшей жидкости $m = \rho Sl$, где $S = \pi d^2/4$ – площадь поршня; ρ – плотность жидкости.

$Fl = \rho Slv^2/2$, откуда $v = \sqrt{2F/(\rho S)} = \sqrt{8F/(\pi d^2\rho)}$. Подставляя это выражение в формулу для дальности полета струи, найдем $s = 8F/(\rho g\pi d^2)$.

5.44. $u = \dfrac{d^2}{D}\sqrt{\dfrac{8F}{\pi\rho(D^4 - d^4)}}$.

Указание. Работа, совершаемая поршнем, движущимся со скоростью u за время Δt, идет на увеличение кинетической энергии массы жидкости $\Delta m = u\Delta t S\rho$ $(S = \pi D^2/4)$, вытекающей за это время из отверстия: $Fu\Delta t = \frac{\Delta m v^2}{2} - \frac{\Delta m u^2}{2}$. Скорость v, с которой вода вытекает из отверстия, связана с u соотношением $v/u = S/s = D^2/d^2$.

5.45. $l_1/l_2 = m_2/m_1$, где l_1 и l_2 – длины дуг кольца от точки начала движения до точки 11-го соударения.

Указание. Начальные импульсы бусинок равны $m_1 v_{01} = m_2 v_{02}$, так как на них действовали одинаковые силы равное время. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что после столкновения импульсы шариков не изменятся по величине, а только поменяют свое направление на обратное. 11-е столкновение произойдет в том же месте, что и первое (как и любые другие нечетные столкновения), т. е. в точке, делящей кольцо вместе с точкой начала движения в отношении m_2/m_1.

5.46. $v = \frac{3}{2}\frac{m}{M}v_0$; $E = \frac{3mv_0^2(M - 3m)}{8M}$.

Решение. Из закона сохранения импульса $mv_0 = -{}^1/_2 mv_0 + Mv$ находим $v = \frac{3}{2}\frac{m}{M}v_0$.

Энергия возбуждения E определяется из закона сохранения энергии:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = \frac{3mv_0^2(M - 3m)}{8M}.$$

5.47.

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_0 m_2 m_3}{m_1(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)}};$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2E_0 m_1 m_3}{m_2(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)}};$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2E_0 m_1 m_2}{m_3(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)}}$$

или в общем виде $v_i = \frac{1}{m_i}\sqrt{\frac{2E_0 m_1 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}}$.

Указание. Поскольку начальный импульс ядра равен нулю, то импульсы осколков должны быть одинаковыми, так как только в этом случае при углах в 120° между соответствующими векторами их векторная сумма равна нулю:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 = m_3 v_3. \qquad (1) \text{ и } (2)$$

Из условия имеем

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^3 = 2E_0. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1)–(3), находим ответ.

5.48. Под прямым углом.

Решение. *1-й способ.* Запишем закон сохранения импульса в векторной форме и закон сохранения кинетической энергии:

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}'_1 + m\vec{v}'_2, \quad (1)$$

$$mv_1^2 = mv_1'^2 + mv_2'^2, \quad (2)$$

где $\vec{v}_1$ – начальная скорость шара; $\vec{v}'_1$ и $\vec{v}'_2$ – скорости шаров после удара.

Сократив в обеих частях уравнений (1) и (2) массу, получаем

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2,$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

Одновременное выполнение этих равенств возможно, если векторы $\vec{v}'_1$ и $\vec{v}'_2$ составляют прямой угол (теорема Пифагора).

2-й способ. Непосредственное рассмотрение взаимодействия шаров приведет к тому же результату. Действительно, разложим импульс первого шара на составляющие по оси x (совпадающей с линией, соединяющей центры шаров) и оси y. По оси x происходит лобовой удар шаров. Ранее было показано, что в этом случае при равенстве масс шаров происходит обмен скоростями. Таким образом, второй шар получает скорость v_x. По оси y взаимодействия шаров не происходит (шары абсолютно гладкие). Поэтому скорость первого шара после удара v_y.

5.49. Под углом $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}5$ к направлению движения шара B до соударения; $v_A = 0{,}66v$.

Решение. Запишем закон сохранения импульса в проекциях на ось x, направленную по вектору $\vec{v}$:

$$m_B v = m_A v_{Ax},$$

и ось y:

$$m_B \cdot 0{,}5v = m_A v_{Ay},$$

где m_A и m_B – массы шаров; v_{Ax} и v_{Ay} – взаимно перпендикулярные составляющие скорости шара A после удара. Отношение $v_{Ay}/v_{Ax} = 0{,}5$ и дает тангенс угла наклона скорости шара A к оси x. Полная скорость шара A после удара $v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} \approx 1{,}1v\,\dfrac{m_B}{m_A}$. Отношение m_B/m_A можно найти из закона сохранения энергии:

$$m_B v^2 = m_B \cdot 0{,}25v^2 + 1{,}25v^2\,\frac{m_B^2}{m_A^2}\,m_A,$$

откуда $m_B/m_A = {}^3/_5$ и окончательно $v_A = 0{,}66v$.

5.50. $W_\alpha = {}^1/_4 E_0$; $W_{He} = {}^3/_4 E_0$. См. решение задачи 5.49.

5.51. $\beta = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha)$; $Q/T = {}^1/_2 \cos^2\alpha$.

Указание. В направлении, проходящем через центры шаров, происходит неупругий удар так, что составляющая импульса налетающего шара $mv\cos\alpha$ распределится поровну между шарами и будет равна по

$^1/_2 mv\cos\alpha$. Касательная же составляющая импульса налетающего шара $mv\sin\alpha$ при столкновении не изменится, так как шары гладкие.

5.52. $v_1 = \sqrt{3}v/3$; $v_2 = 2\sqrt{3}v/3$; $\beta = 30°$.

Решение. Обозначив скорости шаров m и $m/2$ после столкновения соответственно v_1 и v_2 и угол между направлениями v_2 и v через β, запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси x и y (за ось x возьмем ось, совпадающую с направлением $\vec{v}$), а также закон сохранения энергии:

$$\left.\begin{aligned} mv &= mv_1\cos\alpha + \frac{m}{2}v_2\cos\beta, \\ 0 &= mv_1\sin\alpha - \frac{m}{2}v_2\sin\beta, \\ mv^2 &= mv_1^2 + \frac{m}{2}v_2^2; \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \begin{aligned} 2v - 2v_1\cos\alpha &= v_2\cos\beta, & (1)\\ 2v_1\sin\alpha &= v_2\sin\beta, & (2)\\ 2v^2 - 2v_1^2 &= v_2^2. & (3)\end{aligned}$$

Решая уравнения (1), (2) и (3) совместно [сложив возведенные в квадрат выражения (1) и (2), подставив при этом значение v_2^2 из уравнения (3) и учитывая, что $\alpha = 30°$], получим следующее квадратное уравнение:

$$3v_1^2 - 2\sqrt{3}vv_1 + v^2 = 0.$$

Из него находим $v_1 = \sqrt{3}v/3$. Из уравнения (3) найдем $v_2 = 2\sqrt{3}v/3$ и из (2) получим $\beta = 30°$.

6. ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ (КИНЕМАТИКА, ДИНАМИКА)

6.1. $v \approx 30$ км/с.

6.2. $v \approx 316$ м/с; точка описывает винтовую линию с шагом $h \approx 1{,}35$ м.

6.3. Скорость v в данный момент имеют точки, лежащие на дуге радиуса R, центр которой находится в точке касания диска с плоскостью (мгновенном центре вращения).

6.4. $v = \dfrac{1}{2}(v_1 \pm v_2)$; $\omega = \dfrac{1}{2R}(v_1 \mp v_2)$.

Решение. Пусть каток движется поступательно со скоростью v и вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Линейная скорость точек катка в системе координат, связанной с его осью, равна ωR. Эту скорость имеют и точки касания катка с рейками. Так как проскальзывание отсутствует, то это и есть скорости реек. В системе координат, связанной с Землей, скорости реек равны сумме их скоростей относительно оси цилиндра и скорости оси цилиндра относительно Земли. Поэтому

$$v_1 = v + \omega R,\ v_2 = v - \omega R.$$

Отсюда $v = \dfrac{1}{2}(v_1 + v_2)$, $\omega = \dfrac{1}{2R}(v_1 - v_2)$.

Для случая, когда скорости реек направлены в разные стороны ($v_1 = v + \omega R$, $v_2 = \omega R - v$), получаем:

$$v = \frac{1}{2}(v_1 - v_2); \ \omega = \frac{v_1 + v_2}{2R}.$$

6.5. $v_A = 2v_C \cos\alpha$. Ускорения всех точек обода центростремительные и равны $a_{\text{цс}} = v^2/R$.

Р е ш е н и е. Угловые скорости вращения всех точек обода относительно оси, проходящей через точку касания обруча с плоскостью (мгновенный центр вращения), одинаковы и равны $\omega = v_C/R$. Линейная скорость точки A равна $v_A = \omega r = v_C \cdot 2R \cos\alpha/R = 2v_C \cos\alpha$ и перпендикулярна OA (рис. 147). Так как поступательное движение обруча

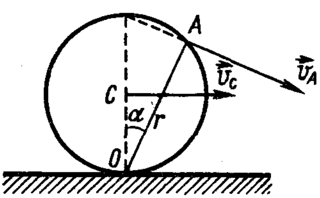


Рис. 147

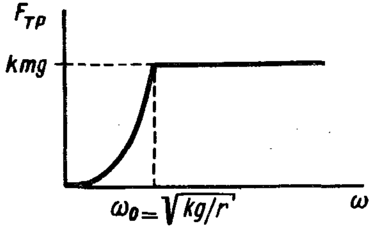


Рис. 148

равномерное, то его точки имеют только центростремительное ускорение. Это становится очевидным при рассмотрении движения обода в инерциальной системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}_C$.

6.6. $n \approx 8{,}84$ с$^{-1}$; $a_{\text{цс}} \approx 926$ м/с^2 (это ускорение в 94,4 раза больше g).

6.7. $v = v_0/2$.

Р е ш е н и е. *1-й способ.* При проскальзывании на цилиндр со стороны плоскости действует постоянная сила трения, которая ускоряет его поступательное движение и замедляет вращательное. Через время t скорость поступательного движения будет равна $v = at$, а линейная скорость вращательного движения относительно оси цилиндра станет равной $v_{\text{в}} = v_0 - at$ (так как цилиндр тонкостенный, все элементарные массы имеют одинаковое ускорение a относительно оси цилиндра, равное по величине ускорению поступательного движения). Скорость точки цилиндра, касающейся плоскости, равна разности скоростей $v_{\text{в}} - v$. Проскальзывание прекратится, когда эта скорость станет равной нулю: $v_{\text{в}} - v = (v_0 - at) - at = 0$, откуда $at = v_0/2$. Таким образом, скорость поступательного движения (скорость оси цилиндра) будет в этот момент равна $v_0/2$ и в дальнейшем меняться не будет.

2-й способ. Проскальзывая, цилиндр совершает работу по преодолению силы трения F, приложенной к нему: $A = Fs_{\text{ск}}$, где $s_{\text{ск}}$ — путь, который прошла точка (точнее линия) приложения силы трения по поверхности цилиндра при его скольжении по плоскости в течение времени t: от момента касания, когда скорость скольжения $v_{ск} = v_0$, до момента прекращения проскальзывания ($v_{ск} = 0$). Так как движение является равнопеременным, то средняя скорость скольжения равна $v_0/2$. Таким образом, $A = Fs_{ск} = Fv_0t/2$.

По закону сохранения энергии работа A равна убыли кинетической энергии цилиндра:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \left(\frac{mv^2}{2}(\text{пост}) + \frac{mv^2}{2}(\text{вращ})\right) = F\frac{v_0}{2}t \qquad (1)$$

(цилиндр тонкостенный и поэтому $T_{пост} = T_{вращ}$, см. задачу 6.50).

Сила трения F, которая за время t затормаживает вращение цилиндра до скорости v, придает ему одновременно поступательное движение с той же скоростью v. Записав для поступательного движения цилиндра второй закон Ньютона в импульсной форме $Ft = mv$ и заменяя в соответствии с ним в уравнении (1) Ft на mv, получим уравнение, из которого найдем $v = v_0/2$.

6.8. Нет. Эта сила, согласно условию задачи, обеспечивающая равномерное вращение тела, есть постоянная по величине центростремительная сила, которая в каждый момент времени направлена перпендикулярно направлению перемещения тела и работы не совершает.

6.9. $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{3}\dfrac{k}{m}}$.

Решение. Центростремительное ускорение $a_{цс} = \omega^2(l_0 + \Delta l) = 1{,}5l_0\omega^2$ (l_0 – первоначальная длина пружины; Δl – ее удлинение) сообщает грузу сила натяжения пружины, равная, в соответствии с законом Гука, $F = k\Delta l = 0{,}5l_0k$. Поэтому $1{,}5m\omega^2l_0 = 0{,}5l_0k$. Отсюда $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{3}\dfrac{k}{m}}$.

6.10. $T_1 = (m_1l_1 + m_2l_2)\omega^2$; $T_2 = m_2\omega^2l_2$.

Указание. Крайней точечной массе центростремительное ускорение сообщает сила T_2; другой – сила $(T_1 - T_2)$ (см. рис. 30).

6.11. $n = 6{,}75$ мин$^{-1}$.

Решение. Человек не сможет удержаться на платформе, если максимально возможная сила трения покоя о платформу окажется недостаточной для того, чтобы сообщать ему необходимое центростремительное ускорение, т. е. $F_{тр} = kmg < m\omega^2R$ или $n = \omega/(2\pi) > 1/(2\pi)\sqrt{kg/R}$.

6.12. См. рис. 148.

Указание. До того как тело начнет скользить, сила трения сообщает ему центростремительное ускорение $a = \omega^2r$ и поэтому, учитывая, согласно условию, малость касательного ускорения, $F_{тр} \approx m\omega^2r \leqslant kmg$. Скольжение тела начнется при $\omega = \omega_0$ такой, что $F_{цс} = kmg$, т. е. при $\omega_0^2r = kg$.

6.13. $h = l(T - mg)/(2mg) \approx 2{,}0$ м.

Указание. Кинетическая энергия камня в нижней точке окружности целиком перейдет в его потенциальную энергию при подъеме:

$mv^2/2 = mgh$, где h – высота подъема над нижней точкой окружности. Записав далее уравнение динамики вращательного движения для момента прохождения нижней точки $mv^2/l = T - mg$ и решая оба уравнения совместно, получим ответ.

6.14. $T = mg\left[\frac{l}{R} - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \approx 2205$ Н.

Указание. Дальность полета l будет максимальной, если скорость молота направлена под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. При этом (см. задачу 1.63) $l_0 = \sqrt{v^2/g}$, где l_0 – дальность полета при одинаковой высоте над уровнем Земли точек вылета и падения. В нашем случае (рис. 149) $l_0 = l - R$.

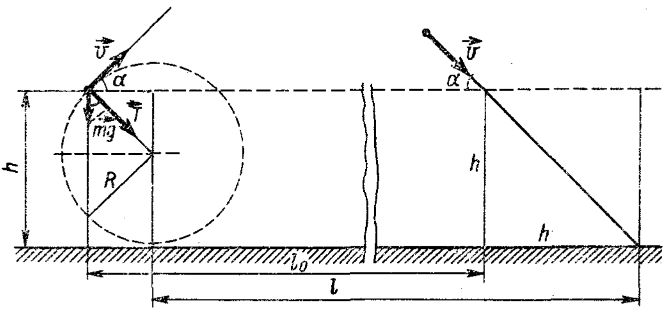


Рис. 149

Центростремительное ускорение v^2/R сообщает молоту равнодействующая силы натяжения T (равная ей сила действует на руки спортсмена) и проекция силы тяжести $mg\cos 45°$: $mv^2/R = T + mg\cos 45°$, откуда

$$T = \frac{mv^2}{R} - mg\frac{\sqrt{2}}{2} = mg\left[\frac{l}{R} - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$$

6.15. а) $F_1 = mg \approx 29\,400$ Н; б) $F_2 = mg\left(\cos\alpha - \frac{v^2}{gR}\right) \approx 24\,000$ Н; в) $F_3 = mg\left(\cos\alpha + \frac{v^2}{gR}\right) \approx 34\,000$ Н. В тот момент, когда автомобиль проходит через середину моста, $F_2 = 24\,400$ Н; $F_3 = 34\,400$ Н.

Указание. На автомобиль действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила $\vec{N}$ реакции моста, которая, по третьему закону Ньютона, равна по величине силе $\vec{F}$ давления автомобиля на мост. По искривленному мосту автомобиль движется с центростремительным ускорением, сообщаемым ему равнодействующей силы N и радиальной составляющей силы тяжести, равной $mg\cos\alpha$ (рис. 150). В соответствии со вторым законом Ньютона можно написать

$$mv^2/R = mg\cos\alpha - N_2$$

в случае выпуклого моста и

$$mv^2/R = N_3 - mg\cos\alpha$$

в случае вогнутого моста.

6.16. $\alpha = \arccos(F/(mg) + v^2/(gR)) \approx 8{,}2°$.

6.17. $A = mgl(1 + {}^1/_2 \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha - \cos\alpha) \approx 1{,}23$ Дж.

Указание. Работа идет на увеличение потенциальной и кинетической энергии. Скорость шарика находится из условия $mv^2/(l\sin\alpha) = mg\operatorname{tg}\alpha$, а $h = l(1 - \cos\alpha)$.

6.18. $v = \sqrt{kgR} \approx 89$ км/ч.

Указание. См. задачу 6.11.

6.19. 1. $k = v^2/(gR) \approx 0{,}4$.

Указание. См. задачу 6.11.

2. $v = \sqrt{2kgR\alpha}/\sqrt{1 + 4\alpha^2} \approx 14{,}5$ м/с.

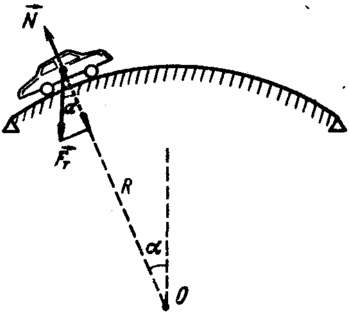


Рис. 150

Решение. Ускорение a автомобиля складывается из постоянного касательного ускорения $a_к$, обеспечивающего разгон автомобиля, и центростремительного ускорения $a_{цс} = v^2/R$ (v – скорость автомобиля). Поэтому $a = \sqrt{a_к^2 + \dfrac{v^4}{R^2}}$.

Внешней силой, сообщающей автомобилю ускорение, является сила трения колес о дорогу. Так как сила трения не может превышать величины kmg (m – масса автомобиля), то наибольшее ускорение a в момент перехода автомобиля на горизонтальный участок дороги не может быть больше величины kg: $\sqrt{a_к^2 + \dfrac{v^4}{R^2}} = kg$. Так как $v = \sqrt{2a_к l}$ ($l = R\alpha$ – путь, пройденный автомобилем; $\alpha = \pi/6$), то $a_к = v^2/(2l) = v^2/(2R\alpha)$, и после подстановки получим $v^2/R\sqrt{1/(4\alpha^2) + 1} = kg$. Отсюда $v = \sqrt{2kgR\alpha}/\sqrt{1 + 4\alpha^2}$.

6.20*. $\Delta h \approx 7{,}65$ см.

Указание. Равнодействующая $\vec{F}$ силы тяжести вагона $m\vec{g}$ и силы реакции рельсов $\vec{N}$ сообщает вагону центростремительное ускорение $m\vec{a}_{цс} = m\vec{g} + \vec{N}$; равнодействующая направлена горизонтально (так как ее направление должно совпадать с направлением ускорения поезда) и равна $mg\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 151): $mv^2/R = mg\operatorname{tg}\alpha$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = v^2/(gR)$.

Верхний рельс превышает нижний на величину $\Delta h = d\operatorname{tg}\alpha = dv^2/(gR)$.

6.21. $\alpha \approx 22°$.

Решение. Для того чтобы мотоциклист мог двигаться по окружности, он должен наклониться так, чтобы равнодействующая при-

* В этом разделе размеры тел считаются много меньшими радиуса поворота (вращения), т. е. вся масса тела считается сосредоточенной в одной точке – его центре тяжести.

ложенных к нему трех сил: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции дороги $\vec{N}$ и силы трения о дорогу $\vec{F}_{тр}$ (рис. 152) – сообщала ему центростремительное ускорение.

Так как центр тяжести мотоциклиста не перемещается по вертикали, то $N = mg$. Центростремительное же ускорение сообщается в конечном итоге силой трения: $mv^2/R = F_{тр}$.

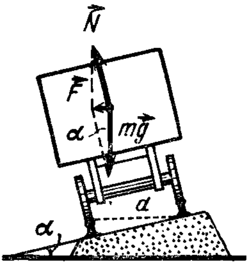


Рис. 151

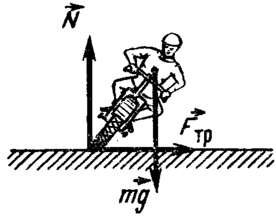


Рис. 152

Равнодействующая $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}$, очевидно, должна проходить через центр тяжести мотоциклиста (момент равнодействующей относительно центра тяжести должен быть равен нулю). Поэтому $\operatorname{ctg}\alpha = N/F_{тр} = gR/v^2$.

6.22. 1. $v \approx 18{,}8$ м/с. 2. $\varphi \approx 21{,}8°$. 3. $v_{макс} \approx 33{,}5$ м/с. 4. $\alpha_0 = \operatorname{arctg}(1/k)$.

Решение. 1. Центростремительное ускорение сообщается силой трения (см. предыдущую задачу), поэтому $mv^2/R = F_{тр}$. Но сила трения не может превысить значения $F_{тр.макс} = kN = kmg$, значит, скорость мотоциклиста не может быть больше некоторого предельного значения, определяемого этим возможным максимальным значением силы трения: $mv^2_{макс}/R = kmg$. Отсюда $v_{макс} = \sqrt{kgR}$.

2. Угол наклона мотоциклиста при этой скорости должен быть равен: $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{v^2_{макс}}{gR} = \operatorname{arctg} k$.

3. В создании центростремительного ускорения будут участвовать горизонтальные составляющие сил трения и реакции трека (рис. 153):

$$mv^2_{1\,макс}/R = F_{тр.макс}\cos\alpha + N\sin\alpha. \qquad (1)$$

Сумма вертикальных составляющих сил, действующих на мотоцикл, должна равняться нулю (в вертикальном направлении ускорения нет):

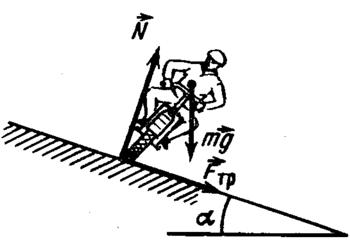


Рис. 153

$$F_{тр.макс.}\sin\alpha + mg - N\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

Максимальная сила трения

$$F_{тр.макс} = kN. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1), (2) и (3) совместно, получим $v_{макс} = \sqrt{gR\,\dfrac{k + \operatorname{tg}\alpha}{1 - k\operatorname{tg}\alpha}}$.

4. *Указание.* Из п. 3 следует, что $v_{макс} \to \infty$ при $1 - k \operatorname{tg} \alpha_0 \to 0$, откуда $\alpha_0 = \operatorname{arctg}(1/k)$.

6.23. $R \approx 5780$ м.

Решение. Самолет изменяет направление полета, переходя на движение по дуге окружности путем разворота своего корпуса вокруг направления полета. При этом центростремительное ускорение сообщается самолету равнодействующей силы тяжести и подъемной силы, перпендикулярной плоскости крыльев. Эта равнодействующая равна $mg \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 154).

По второму закону Ньютона $mg \operatorname{tg} \alpha = mv^2/R$, откуда $R = v^2/(g \operatorname{tg} \alpha)$.

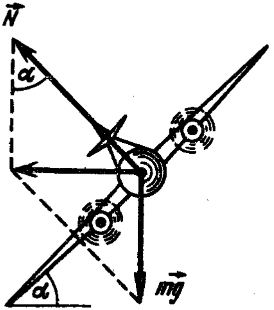


Рис. 154

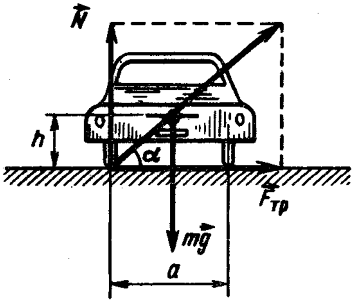


Рис. 155

6.24. $v \approx 26{,}1$ м/с.

Решение. При повороте автомобиля давление на его колеса, а значит, и силы, действующие на колеса автомобиля со стороны дороги, перераспределяются. При наибольшей допустимой скорости автомобиля силы, действующие на него со стороны дороги, будут приложены к внешним колесам и равны: а) сила реакции $N = mg$ (численно равная действующей на автомобиль силе тяжести, так как в вертикальном направлении ускорения нет) и б) сила трения $F_{тр} = m\omega^2 R = mv^2/R$ (так как она сообщает автомобилю центростремительное ускорение). Автомобиль будет переворачиваться, если направление равнодействующей этих сил проходит ниже центра тяжести автомобиля – в этом случае имеется опрокидывающий момент силы относительно центра тяжести.

Прн критической скорости эта равнодействующая проходит через центр тяжести автомобиля и поэтому (рис. 155)

$$N/F_{тр} = \operatorname{tg} \alpha = 2h/a, \text{ или } mgR/(mv^2) = 2h/a,$$

откуда $v = \sqrt{gRa/(2h)}$.

6.25. Затормозить.

Решение. При торможении сила трения $F_{тр}$ должна совершить работу $A = Fx$ (x – тормозной путь), равную кинетической энергии, которую имел автомобиль до включения тормозов: $F_{тр}x = mv^2/2$. Отсюда тормозной путь $x = mv^2/(2F_{тр})$.

Если же водитель, не тормозя, повернет в сторону, автомобиль будет ехать по дуге окружности, а центростремительное ускорение $a_{цс} = v^2/R$ (R – радиус кривизны) будет сообщать автомобилю та же самая сила трения. Из уравнения движения $F_{тр} = mv^2/R$ найдем, что радиус поворота будет равен $R = mv^2/F_{тр}$, т. е. он вдвое больше «тормозного пути». Это означает, что затормозить выгоднее, чем повернуть в сторону.

6.26. $T \approx 51$ Н.

Решение. Центростремительное ускорение сообщает взвешиваемому грузу равнодействующая силы тяжести груза и силы T натяжения пружины. Эта равнодействующая равна $mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (рис. 156). По второму закону Ньютона $mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = mv^2/R$, отсюда $\mathrm{tg}\,\alpha = v^2/(gR)$. Сила натяжения пружины

$$T = mg/\cos\alpha = mg\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} = mg\sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2R^2}}.$$

6.27. а) $F_{ед\,об} = (\rho_м - \rho_с)g \approx 980$ Н/м^3;

б) $F_{ед.об} = (\rho_м - \rho_с)\omega^2 r \approx 3{,}94 \cdot 10^6$ Н/м^3.

Указание. а) В неподвижном сосуде разделяющей силой является архимедова сила.

б) Если бы объем V, занимаемый частицей сливок, занимало молоко, то оно находилось бы в равновесии. Это означает, что на частицу сливок со стороны окружающего молока действует сила $F_1 = \rho_м\omega^2 rV$, направленная к оси вращения. Эта сила оказывается больше силы, необходимой для движения по окружности частицы сливок, равной $F_2 = \rho_с\omega^2 rV$. Разность этих сил и является разделяющей силой.

6.28. $F_в = \dfrac{Mv^2}{R} - Mg \approx 4030$ Н, $F_н = \dfrac{Mv^2}{R} + Mg \approx 5630$ Н.

Указание. См. задачу 6.15. Центростремительное ускорение в верхней и нижней точках «мертвой петли» сообщает летчику равнодействующая силы тяжести и силы реакции сиденья.

6.29. $T = Mg/\cos\alpha \approx 990$ Н; $\omega = \sqrt{g/(l\cos\alpha)} \approx 1{,}68$ рад/с.

Указание. Центростремительное ускорение сообщает человеку равнодействующая силы тяжести и силы натяжения каната; эта равнодействующая горизонтальна.

6.30. $T = 2\pi\sqrt{l\cos\alpha/g}$. При малых углах $T \approx 2\pi\sqrt{l/g}$.

Решение. Центростремительное ускорение сообщается маятнику равнодействующей силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$ (рис. 157). Эта равнодействующая лежит в плоскости движения маятника и равна $mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$. По второму закону Ньютона, $m\omega^2 R = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$ или $\dfrac{4\pi^2}{T^2} l\sin\alpha = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (так как $R = l\sin\alpha$ и $\omega = 2\pi/T$). Отсюда $T = 2\pi\sqrt{l\cos\alpha/g}$.

6.31. $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{g/h}$. (Ответ не зависит от длины подвеса.)

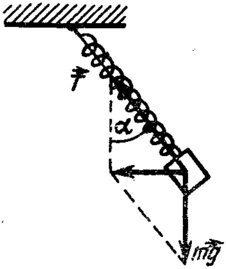


Рис. 156

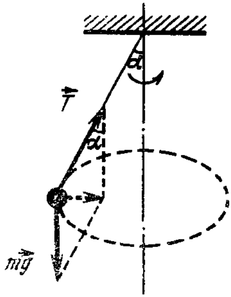


Рис. 157

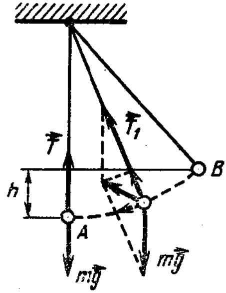


Рис. 158

6.32. $h \leqslant (T - mg)\,l/(2mg) \approx 2{,}5$ м.

Решение. На люстру в любой точке траектории действуют две силы (рис. 158): сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения цепи $\vec{T}$. При прохождении люстрой положения равновесия (точка A) силы направлены по одной прямой. Напишем для люстры уравнение второго закона Ньютона в момент прохождения ею точки A:

$$ma_{\text{цс}} = T - mg,$$

где $a_{\text{цс}} = v^2/l$ – центростремительное ускорение. Тогда

$$mv^2/l = T - mg. \qquad (1)$$

По закону сохранения энергии находим скорость люстры в точке A:

$$mgh = mv^2/2,$$

или

$$v^2 = 2gh. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), имеем

$$m2gh/l = T - mg,$$

откуда $h = (T - mg)\,l/(2mg)$. По условию, $T < 2mg$, следовательно, $h < 2{,}5$ м.

6.33. $\alpha_{\text{мин}} = \arccos 0{,}75 \approx 41{,}4°$.

Указание. См. предыдущую задачу.

6.34. $\alpha = \arccos(^1/_3)$.

6.35. $6mg$.

Указание. См. указание к задаче 6.28. Соотношение между скоростями груза в верхней $v_{\text{в}}$ и нижней $v_{\text{н}}$ точках определяется законом сохранения энергии: $\dfrac{mv_{\text{н}}^2}{2} - \dfrac{mv_{\text{в}}^2}{2} = mg \cdot 2R$.

6.36. $5mg$.

Указание. См. предыдущую задачу и задачу 6.28.

6.37. $v_{\text{мин}} = \sqrt{5gl}$ для нити; $v_{\text{мин}} = 2\sqrt{gl}$ для стержня.

Указание. В случае невесомого стержня минимальная скорость $v_{\text{мин}}$ груза в нижней точке определяется условием: изменение его потенциальной энергии при подъеме от нижней до верхней точки равнялось начальной кинетической энергии груза: $mg \cdot 2l = mv^2/2$. Скорость груза в верхней точке равняется нулю.

В случае, когда груз вращается на нерастяжимой нити, этого условия недостаточно, нужно еще одно условие: нить должна быть все время натянута вплоть до верхней точки. Скорость груза в верхней точке не может быть равной нулю, а должна быть такой, чтобы центростремительное ускорение сообщалось грузу только силой тяжести: $mv_{\text{в}}^2/l = mg$. В этот момент $T = 0$, что является условием минимума скорости.

6.38. $T = 3Mg \sin\alpha$; $T = 3Mg$.

Указание. См. задачу 6.32.

6.39. $T = Mg\left(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0 + \dfrac{v_0^2}{gl}\right)$ пока не обратится в нуль.

Указание. См. задачу 6.32. Учесть начальную кинетическую энергию маятника.

6.40. $\cos\alpha = \sqrt{3}/3$; $\alpha \approx 54{,}7°$.

Решение. Вертикальная составляющая скорости грузика будет возрастать до тех пор, пока не станет равной нулю вертикальная составляющая равнодействующей приложенных к грузику силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения $\vec{T}$ нити (рис. 159):

$$T\cos\alpha - mg = 0. \qquad (1)$$

После этого вертикальная составляющая скорости грузика будет уменьшаться. Так как грузик движется по окружности, то в соот-

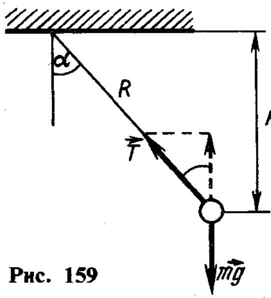


Рис. 159

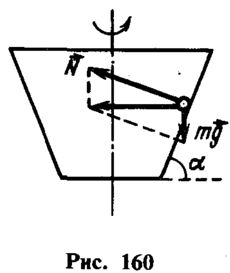


Рис. 160

ветствии со вторым законом Ньютона $mv^2/R = T - mg\cos\alpha$. Подставив в это уравнение скорость груза, найденную из закона сохранения энергии: $mv^2/2 = mgR\cos\alpha$, и решая полученное уравнение совместно с уравнением (1), найдем: $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$.

6.41. а) $F = 2mg\cos^2\alpha$; б) $F = 2mg(3 - 2\cos\alpha)$; в) $F = 2mg$.

Указание. а) Равнодействующая силы натяжения нити и силы тяжести шарика направлена перпендикулярно нити и сообщает шарику начальное ускорение $a = g\sin\alpha$.

б) Скорость каждого из шариков в начальный момент удара найдем, воспользовавшись законом сохранения механической энергии.

Далее из законов сохранения энергии и импульса следует (см. задачи 5.28 и 5.39), что скорости шариков в конечный момент удара будут равны по величине их скоростям в начальный момент удара и направлены в противоположные стороны. Зная же скорости шариков, легко найти силы натяжения нитей (см., например, задачу 6.32).

в) В момент наибольшей деформации шариков скорость каждого из шариков равна нулю.

6.42. $h = {}^4/_3\, l$; по параболе (траектории тела, брошенного под углом к горизонту); $H = 40l/27$.

Указание. См. задачи 6.37 и 6.32. В точке максимального подъема маятника сила натяжения нити обращается в нуль и центростремительное ускорение сообщается маятнику радиальной составляющей силы тяжести.

6.43. Ниже точки подвеса на $l/6$; по параболе; $2l/27$ ниже точки подвеса.

Указание. См. предыдущую задачу.

6.44. $\omega > \sqrt{2g \operatorname{tg} \alpha / D} \approx 13$ рад/с.

Указание. На шарик, находящийся на стенке вращающегося сосуда, действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$ стенки сосуда (рис. 160). При равновесии шарика относительно сосуда равнодействующая этих сил сообщает шарику центростремительное ускорение, т. е. $m\omega^2 R = mg \operatorname{tg} \alpha$. Отсюда следует, что шарик может находиться в равновесии на расстоянии R от оси вращения сосуда, если сосуд вращается с угловой скоростью $\omega = \sqrt{g \operatorname{tg} \alpha / R}$. У дна сосуда шарик еще находится в равновесии, но уже не давит на дно при $\omega_{кр} = \sqrt{2g \operatorname{tg} \alpha / D}$; если увеличить ω, то из уравнения, приведенного выше, следует, что ни при каком $R \geqslant D/2$ он не будет находиться в равновесии и будет выброшен.

6.45. $h \approx 1$ м; $N \approx 0{,}4$ Н.

Решение. При равновесии шарика относительно сферы равнодействующая силы реакции $\vec{N}$ сферы и силы тяжести $m\vec{g}$ шарика направлена к оси вращения и сообщает шарику центростремительное ускорение. Величина этой равнодействующей $Q = mg \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 161). По второму закону Ньютона $m\omega^2 l = mg \operatorname{tg} \alpha$, где $l = R \sin \alpha$ — расстояние шарика до оси вращения;

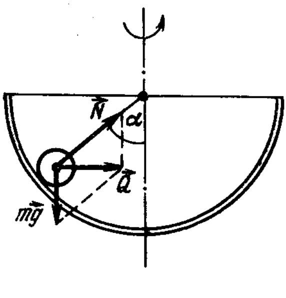


Рис. 161

$$\omega^2 R \sin \alpha = g \operatorname{tg} \alpha.$$

Это уравнение имеет два корня для α: 1) $\sin \alpha = 0$, $\alpha = 0$; 2) $\cos \alpha = g/(\omega^2 R)$.

Положение шарика с $\alpha = \arccos \dfrac{g}{\omega^2 R}$ возможно только при $\omega \geqslant \sqrt{g/R}$, а с $\alpha = 0$ — при любой угловой скорости сферы, но при $\omega < \sqrt{g/R}$ равновесие устойчиво, а при $\omega \geqslant \sqrt{g/R}$ неустойчиво. В нашем случае $\sqrt{g/R} \approx 2{,}2$ $с^{-1} < \omega$. Высота $h = R - R\cos\alpha = R\left(1 - \frac{g}{\omega^2 R}\right)$, а реакция сферы $N = mg/\cos\alpha = m\omega^2 R$.

6.46. $T = 2\pi\sqrt{R\,\mathrm{tg}\,\alpha/(a+g)}$.

Решение. Силы, действующие на шарик, должны сообщать ему как горизонтальное, так и вертикальное ускорение. Разложим силу $\vec{F}$, действующую на шарик со стороны конической поверхности, на вертикальную $F' = F\sin\alpha$ и горизонтальную $F'' = F\cos\alpha$ составляющие (рис. 162). Результирующая вертикальной составляющей силы $\vec{F}$ и силы тяжести сообщает шарику ускорение a вверх. Горизонтальная составляющая силы $\vec{F}$ сообщает шарику центростремительное ускорение $a_{цс} = \omega^2 R$ (ω – угловая скорость вращения). Поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона $ma = F\sin\alpha - mg$ и $m\omega^2 R = F\cos\alpha$. Исключая из этих уравнений F, найдем:

$$\omega = \sqrt{a + g/(R\,\mathrm{tg}\,\alpha)},\quad T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{R\,\mathrm{tg}\,\alpha/(a+g)}.$$

6.47. а) $h = 2{,}5R$; б) $F = 3mg(1 - \cos\alpha)$.

Решение. а) Тело не оторвется от петли, если в верхней точке оно имело скорость $v \geqslant \sqrt{gR}$ (см. задачу 6.37). Записав закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + mg\cdot 2R = mgh,$$

найдем, что тело должно скатываться с высоты $h = 2{,}5\,R$.

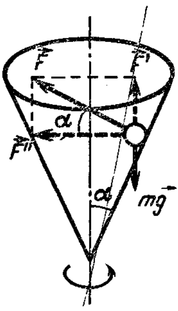


Рис. 162

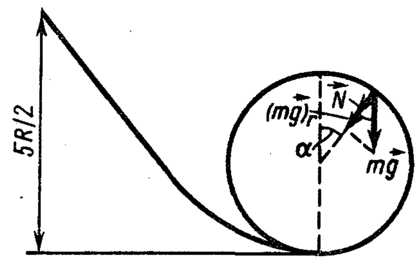


Рис. 163

б) В точке, радиус-вектор которой составляет угол α с вертикалью (рис. 163), центростремительное ускорение будет сообщать телу равнодействующая силы реакции N помоста и радиальной составляющей силы тяжести $(mg)_r = mg\cos\alpha$. По второму закону Ньютона

$$mv^2/R = N + mg\cos\alpha.$$

Скорость тела в этой точке легко определить, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$\frac{5}{2}mgR = \frac{mv^2}{2} + mg(R + R\cos\alpha),\quad v = \sqrt{gR(3 - 2\cos\alpha)}.$$

Подставляя это выражение для скорости в уравнение второго закона Ньютона, получим $N = \frac{m}{R}[gR(3 - 2\cos\alpha)] - mg\cos\alpha = 3mg \times$ $\times (1 - \cos\alpha)$, а сила давления F тела на помост численно равна силе реакции N помоста. (Определите значение N для $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$.)

6.48. $v_{\text{мин}} = \sqrt{gR\cos\alpha}$.

Указание. Отделение руды от ленты означает, что руда потеряла связь с лентой и на руду действует лишь сила тяжести. Ее радиальная составляющая сообщает частицам руды в момент набегания ленты на барабан центростремительное ускорение (рис. 164) $mv^2/R = mg\cos\alpha$.

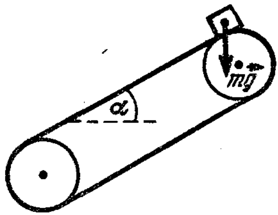


Рис. 164

6.49. $h = R/3$.

Решение. До отрыва от поверхности сферы на тело действуют его сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция опоры $\vec{N}$. Равнодействующая радиальной составляющей силы тяжести и реакции опоры сообщает телу центростремительное ускорение $mv^2/R = mg\cos\alpha - N$. По мере соскальзывания тела составляющая силы тяжести $mg\cos\alpha$ (где α — угол между вертикалью и направлением из центра сферы на тело) убывает, а его скорость возрастает, что влечет еще более быстрое уменьшение реакции опоры (реакция опоры зависит от характера движения тела). В момент отрыва N обращается в нуль и тогда

$$mv^2/R = mg\cos\alpha. \quad (1)$$

На основании закона сохранения энергии

$$mv^2/2 = mgh. \quad (2)$$

Кроме того, очевидно, что

$$\cos\alpha = (R - h)/R. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (1), (2), (3), получаем $h = R/3$.

6.50. mv^2.

Решение. Каждая точка обруча участвует в двух движениях: прямолинейном движении со скоростью v и вращении с угловой скоростью ω около центра обруча. Линейная скорость вращательного движения $v_{\text{вр}} = \omega R$. В отсутствии проскальзывания $\omega = v/R$ и поэтому $v_{\text{вр}} = v$.

Рассмотрим два диаметрально противоположных одинаковых малых элемента обруча, имеющих массу Δm (рис. 165). Их скорости равны векторной сумме скоростей поступательного и вращательного движений, а значит:

$$v_A^2 = v^2 + v_{\text{вр}}^2 - 2vv_{\text{вр}}\cos\alpha = 2v^2(1 - \cos\alpha);$$

$$v_B^2 = v^2 + v_{\text{вр}}^2 + 2vv_{\text{вр}}\cos\alpha = 2v^2(1 + \cos\alpha).$$

Суммарная кинетическая энергия этих элементов обруча равна

$$\frac{\Delta m v_A^2}{2} + \frac{\Delta m v_B^2}{2} = 2\Delta m v^2.$$

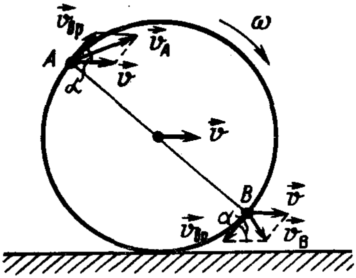


Рис. 165

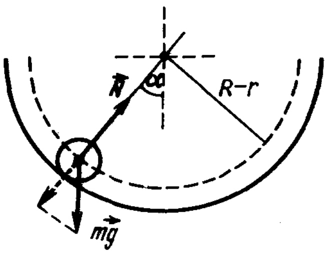


Рис. 166

Это соотношение не зависит от α, т. е. от выбора диаметра, на концах которого лежат выбранные элементы обруча. Поэтому кинетическая энергия всего обруча будет равна mv^2.

6.51. $h = (R - r)/2$.

Решение. Скатываясь, обруч движется по окружности. Центростремительное ускорение сообщает ему сумма радиальных составляющих, приложенных к обручу сил (рис. 166), равная $N - mg\cos\alpha$ (N — сила реакции полусферы, m — масса обруча и α — угол, образуемый радиусом-вектором обруча с вертикалью).

По второму закону Ньютона

$$mv^2/(R - r) = N - mg\cos\alpha, \tag{1}$$

где v — скорость центра обруча.

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m(\omega r)^2}{2} + mg\left[R - (R - r)\cos\alpha\right] = mgR. \tag{2}$$

Здесь член $mv^2/2$ соответствует кинетической энергии поступательного движения центра масс обруча; $\dfrac{m(\omega r)^2}{2} = \dfrac{m(rv/r)^2}{2}$ соответствует кинетической энергии вращения обруча относительно центра масс обруча (см. предыдущую задачу); $mg\left[R - (R - r)\cos\alpha\right]$ — потенциальная энергия обруча.

Из уравнения (2) найдем $v = \sqrt{g(R - r)\cos\alpha}$. Подставляя затем это выражение для v в уравнение (1) и приравнивая $N = mg$, окончательно получим $\cos\alpha = {}^1/_2$ и $h = (R - r)\cos\alpha = (R - r)/2$.

6.52. а) mgR; б) половина; в) $2mg$.

6.53. $p = 4M^2/(\pi\rho d^3 R t^2) \approx$ $\approx 1{,}2\cdot 10^5$ Па.

Решение. Центростремительное ускорение массе выделенного объема воды (рис. 167) сообщает сила бокового давления F со стороны стенок трубы: $mv^2/R = F$. Сила F равна произведению давления p на площадь диаметрального сечения $ABCD$, пер-

Рис. 167

пендикулярного радиусу кольца, т. е. $F = pdl$. Масса выделенного объема $m = \rho\pi d^2 l/4$.

Скорость течения воды определяется из формулы $M = \rho\pi d^2 vt/4$ (время $t = 1$ ч), откуда $v = 4M/(\pi\rho d^2 t)$. Подставив значения m и v в формулу для F, получим ответ.

6.54. При движении по выпуклой дуге.

Решение. Действительно, в этом случае давление тела на поверхность в каждой точке меньше, чем давление на поверхность в точке, находящейся на таком же расстоянии от точки A, в случае движения тела по вогнутой дуге (см. задачу 6.15). Это означает, что сила трения, действующая на тело в каждой точке, а следовательно, и работа по преодолению трения на всем пути меньше, чем при движении по вогнутой дуге, и тело в точке B имеет в этом случае большую кинетическую энергию.

6.55. $\omega = 2\sqrt{\dfrac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)l}}$; $F = g\,\dfrac{3(m_1^2 + m_2^2) - 2m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Решение. Шарики движутся с одной и той же угловой скоростью. Условимся отсчитывать потенциальную энергию от уровня, на котором находится шарик с массой m_1 в момент прохождения положения равновесия. Тогда на основании закона сохранения энергии можно написать

$$(m_1 + m_2)g\frac{l}{2} = m_2 gl + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Подставляя сюда $v_1 = v_2 = \omega l/2$, найдем $\omega = 2\sqrt{\dfrac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2)l}}$.

Сила давления F на ось равна сумме сил T_1 и T_2 натяжения частей стержня. Будем считать, что оба стержня растянуты. Тогда в соответствии со вторым законом Ньютона

$$T_1 - m_1 g = m_1\omega^2 l/2 \text{ и } m_2 g + T = m_2\omega^2 l/2.$$

Подставляя в эти уравнения значение угловой скорости ω для момента прохождения шариками положения равновесия и решая их относительно T_1 и T_2, соответственно получим:

$$T_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}(3m_1 - m_2);\ T_2 = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}(m_1 - 3m_2)$$

(при $m_1 < 3m_2$ $T_2 < 0$. Это означает, что половина стержня, к которой прикреплен шарик с массой m_2, сжата, а не растянута, как мы предполагали).

Сила давления на ось (оба стержня считаются растянутыми)

$$F = T_1 - T_2 = \frac{3(m_1^2 + m_2^2) - 2m_1 m_2}{m_1 + m_2}g.$$

6.56. $F \approx mg\sqrt{1 + \dfrac{4h^2 n^2}{R^2}}$.

Решение. Сделав n оборотов, колечко опустится на высоту nh, и из закона сохранения энергии $mgnh = mv^2/2$ следует, что в этот момент колечко будет иметь скорость $v = \sqrt{2ghn}$. Эта скорость направлена по касательной к спирали и может быть представлена как сумма вертикальной v_0 и горизонтальной (вращательной) v_1 составляющих. Причем $v_1 = v\cos\alpha$, где α – угол наклона спирали; $\alpha \approx \sin\alpha = h/2\pi R$. Учитывая, что $h \ll R$, можно положить $\cos\alpha \approx 1$ и $v_1 \approx v$.

Горизонтальная составляющая силы реакции спирали должна сообщать колечку центростремительное ускорение $a_{\text{цс}} = v_1^2/R \approx 2ghn/R$, поэтому она равна $F_{\text{гор}} = ma_{\text{цс}} = 2mghn/R$.

С такой же силой колечко давит на спираль в горизонтальном направлении. Таким образом, полная сила давления F колечка на спираль слагается из горизонтальной составляющей $F_{\text{гор}}$ и вертикальной составляющей силы тяжести $mg\cos\alpha \approx mg$:

$$F \approx \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{2mghn}{R}\right)^2} = mg\sqrt{1 + \frac{4h^2n^2}{R^2}}.$$

6.57. $T \approx mn^2 l \approx 12$ Н.

Решение. Рассмотрим малый элемент цепочки длиной $\Delta l = R\Delta\alpha$. Масса этого элемента $\Delta m = m\Delta l/l = mR\Delta\alpha/l$. При вращении цепочки центростремительное ускорение сообщают выделенному элементу силы натяжения, действующие на него со стороны остальной цепочки. Равнодействующая этих сил равна $2T\sin(\Delta\alpha/2)$ (рис. 168).

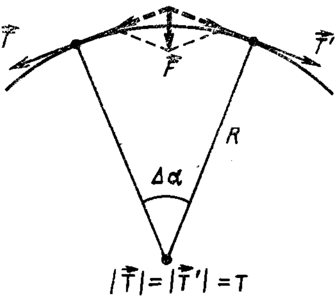


Рис. 168

По второму закону Ньютона $2T\sin(\Delta\alpha/2) = (\Delta m)\,\omega^2 R$. Подставляя сюда $\omega = 2\pi n$ и учитывая, что в силу малости углов $\sin(\Delta\alpha/2) \approx \Delta\alpha/2$, получим $2T\Delta\alpha/2 \approx mR^2\Delta\alpha\,(2\pi n)^2/l$, откуда

$$T \approx mn^2\,(2\pi R)^2/l = mln^2.$$

6.58. $\Delta F_{\text{под}} \approx 1{,}74 \cdot 10^3$ Н.

Решение. Равнодействующая силы тяжести самолета и подъемной силы $F_{\text{под}}$ сообщает ему центростремительное ускорение. При движении с запада на восток скорости самолета и Земли складываются. Поэтому можно написать

$$m(\omega R + v)^2/R = mg - F_{1\,\text{под}}, \qquad (1)$$

где ω – угловая скорость Земли; R – ее радиус.

Если самолет летит в обратном направлении, то

$$m(\omega R - v)^2/R = mg - F_{2\,\text{под}}. \qquad (2)$$

Из уравнений (2) и (1) находим изменение подъемной силы:

$$\Delta F_{\text{под}} = F_{2\text{под}} - F_{1\text{под}} = 4mv\omega = 4m2\pi v/T,$$

где T – период вращения Земли, т. е. одни сутки.

7. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ. СПУТНИКИ. НЕВЕСОМОСТЬ

7.1. $[\gamma] = м^3/(кг \cdot с^2)$; $M \approx 6 \cdot 10^{24}$ кг.

Указание. У поверхности Земли сила тяготения сообщает телам ускорение g; $mg = \gamma mM/R^2$, откуда $M = gR^2/\gamma$, где R – радиус Земли.

7.2. $F \approx 2{,}34 \cdot 10^{-3}$ Н.

7.3. $F = \frac{1}{7}\gamma Mm\left[\frac{8}{d^2} - \frac{1}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right]$.

Указание. Искомая сила находится как разность сил, которые действовали бы на шарик со стороны всего свинцового шара и той части, которая из шара была удалена.

7.4. $h \approx 13\,600$ км.

7.5. $g \approx 975$ см/с^2.

Решение. Ускорение силы тяжести находится из формул

$$g_0 = \gamma \frac{M}{R^2} \text{ и } g = \gamma \frac{M}{(R+h)^2}.$$

Отсюда $\frac{g_0}{g} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = 1 + \frac{2h}{R} + \frac{h^2}{R^2} \approx 1 + \frac{2h}{R}$, так как $h/R \ll \ll 1$, и поэтому $h^2/R^2 \ll 2h/R$. Таким образом, $g = g_0 \times \times \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \approx \frac{g_0 R}{R + 2h}$.

7.6. *Указание.* Покажем, что гравитационная сила, действующая со стороны произвольного шарового слоя на материальную точку внутри него, равна нулю. Для этого разобъем шаровой слой на тонкие сферические слои. Конус с малым углом раствора с вершиной в этой точке вырезает из слоя элементы, причем можно доказать, что $\Delta m_1/(\Delta m_2) = r_1^2/r_2^2$. Поэтому равнодействующая сил притяжения к этим элементам равна нулю. Разбивая весь слой на такие элементы, получаем начальное утверждение. Следовательно, на точку действует только масса той части Земли, которая заключена внутри сферы радиусом r.

7.7. $v = \sqrt{gR}$.

Решение. Если масса тела, падающего сквозь шахту, равна m, то ускорение a тела зависит от расстояния r до центра Земли по закону $a = F/m = \frac{mgr/R}{m} = g\frac{r}{R}$ (R – радиус Земли) (см. задачу 7.6).

Ускорение максимально при $r = R$ и становится равным нулю при $r = 0$. Это означает, что скорость тела максимальна при $r = 0$. После того как тело пройдет центр Земли, его ускорение направлено противоположно скорости и скорость тела будет уменьшаться.

Для того чтобы найти скорость тела при $r = 0$, воспользуемся законом сохранения энергии. Принимая, что потенциальная энергия тела равна нулю в центре Земли, получим $mv^2/2 = П$, где $П$ –

потенциальная энергия тела на поверхности Земли. Она равна работе, которую необходимо затратить, для того чтобы очень медленно перенести тело из центра на поверхность Земли.

Построим график зависимости силы, которую нужно приложить к телу, от расстояния r (рис. 169). Работа по перемещению тела численно равна площади заштрихованного треугольника (см. задачи 4.5 и 4.17), поэтому $П = mgR/2$ и $mv^2/2 = mgR/2$. Отсюда $v = \sqrt{gR}$.

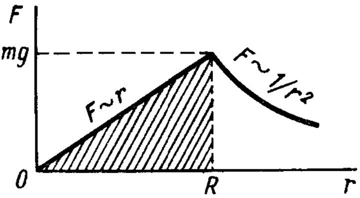


Рис. 169

7.8. В направлении с востока на запад со скоростью $v = 464$ м/с.

Указание. Самолет должен быть неподвижным в системе координат, связанной с неподвижными звездами. Для этого угловая скорость самолета должна быть равна угловой скорости Земли и направлена в другую сторону. При полете над экватором $v = \omega R_З = 2\pi R_З/T$, где $R_З$ — радиус Земли; T — период ее вращения.

7.9. Используется скорость вращения Земли.

7.10. $T = \sqrt{6\pi/(\rho\gamma)} \approx 2$ ч 41,6 мин.

Решение. Весом тела P называется сила, с которой тело действует на неподвижные относительно тела подвес или опору. По третьему закону Ньютона со стороны опоры на тело действует сила P', равная и противоположная P.

Таким образом, к покоящимся на планете телам приложены две силы: сила тяготения $F_т$ и реакции опоры P'. Эти силы и сообщают телу необходимое центростремительное ускорение при вращении планеты вокруг своей оси. На полюсе и экваторе эти силы направлены по одной линии. По второму закону Ньютона $mv^2/R = F_т - P'$, где v — скорость вращательного движения тела вместе с Землей вокруг ее оси. На полюсе $v = 0$ и центростремительное ускорение отсутствует. Реакция опоры и, следовательно, вес тела на полюсе равны силе тяготения: $P_0 = F_т$.

На экваторе $v = 2\pi R/T$, где T — период обращения. Вес тела на экваторе $P_э = F_т - \dfrac{m\cdot 4\pi^2 R}{T^2}$. По условию, $P_э = 0{,}5\,P_0 = 0{,}5\,F_т$, тогда

$$4\pi^2 mR/T^2 = 0{,}5\,F_т. \qquad (1)$$

По закону всемирного тяготения $F_т = \gamma\,\dfrac{mM}{R^2}$. Здесь m — масса тела; M — масса планеты; R — радиус планеты, но $M = {}^4/_3\pi R^3\rho$, где ρ — плотность планеты.

Подставляя в формулу (1) выражения для $F_т$ и M, получаем $0{,}5\gamma\,\dfrac{m\cdot{}^4/_3\pi R^3\rho}{R^2} = \dfrac{4\pi^2 mR}{T^2}$. После сокращения найдем $T = \sqrt{6\pi/(\rho\gamma)}$.

7.11. $\rho = 30\pi/(T^2\gamma) \approx 180$ кг/м^3.

7.12. $t \approx 1$ ч 25 мин.

Указание. См. задачу 7.10.

7.13. Решение. На взвешиваемое тело действуют две силы: сила тяготения $\vec{F}_т$, направленная к центру Земли, и сила $\vec{P}'$ реакции опоры (рис. 170); $\vec{P}'$ численно равна весу тела. Равнодействующая $\vec{Q}$ сил $\vec{F}_т$ и $\vec{P}'$ сообщает телу центростремительное ускорение $a = \omega^2 r$. Так как $r = R\cos\varphi$ (φ – географическая широта), то $a = \omega^2 R\cos\varphi$ и $Q = m\omega^2 R\cos\varphi$ (m – масса тела). В свою очередь, для силы тяготения $\vec{F}_т$ можно записать $F_т = \gamma mM/R^2 = mg_0$, где $g_0 = \gamma M/R^2$ (M – масса Земли) – коэффициент с размерностью ускорения, численно близкий ускорению свободного падения на полюсе.

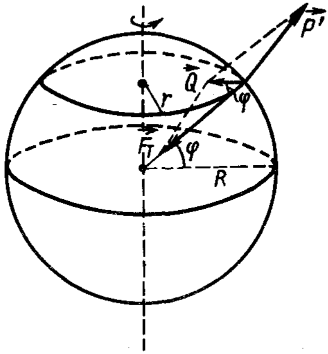


Рис. 170

По теореме косинусов из треугольника сил получаем $P' = \sqrt{F_т^2 + Q^2 - 2F_т Q\cos\varphi} = F_т\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{F_т}\right)^2 - \frac{2Q}{F_т}\cos\varphi}$. Учитывая, что $Q/F_т \ll 1$, мы можем пренебречь квадратом этой величины в подкоренном выражении. Используя далее известное приближенное равенство $\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}$ при $\alpha \ll 1$, получим окончательное выражение:

$$P' \approx F_т\left(1 - \frac{Q}{F_т}\cos\varphi\right) = m(g_0 - \omega^2 R\cos^2\varphi).$$

7.14. 336 000 раз.

Решение. Уравнения движения Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли будут:

$$\gamma\frac{m_З m_С}{R_{ЗС}^2} = m_З\omega_З^2 R_{ЗС};\ \gamma\frac{m_Л m_З}{R_{ЛЗ}^2} = m_Л\omega_Л^2 R_{ЛЗ},$$

или

$$\gamma\frac{m_С}{R_{ЗС}^3} = \omega_З^2;\ \gamma\frac{m_З}{R_{ЛЗ}^3} = \omega_Л^2.$$

Разделив первое уравнение на второе и учитывая, что $\omega = 2\pi/T$, найдем $\frac{m_С}{m_З} = \frac{R_{ЗС}^3}{R_{ЗЛ}^3}\frac{T_Л^2}{T_З^2}$.

7.15. $m_С \approx 2\cdot 10^{30}$ кг.

Указание. См. задачу 7.14.

7.16. Нет. Так как при этом у силы тяжести будет составляющая, не лежащая в плоскости орбиты.

7.17. $v = R\sqrt{g/(R+h)}$; $T = 2\pi \dfrac{R+h}{R}\sqrt{(R+h)/g}$.

Решение. Принимаем, что спутник движется по круговой орбите, центр которой находится в центре Земли. При этом спутник движется с центростремительным ускорением $a_{цс} = v^2/(R+h)$, где v – скорость движения спутника по орбите; R – средний радиус Земли; h – средняя высота спутника.

Это центростремительное ускорение спутнику сообщает сила тяготения $F = \gamma mM/(R+h)^2$, где M – масса Земли; m – масса спутника; γ – гравитационная постоянная.

Согласно второму закону Ньютона имеем $mv^2/(R+h) = \gamma mM/(R+h)^2$, откуда $v^2 = \gamma M/(R+h)$. Величину γM можно найти из следующего соотношения: вес тела по поверхности Земли $mg = \gamma mM/R^2$, откуда $\gamma M = gR^2$.

Подставляя значение γM в формулу для скорости движения спутника, получим $v = R\sqrt{g/(R+h)}$.

Период обращения спутника $T = 2\pi/\omega$, где $\omega = v/(R+h)$ – угловая скорость движения спутника по орбите. Следовательно,

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = 2\pi\frac{R+h}{R}\sqrt{\frac{R+h}{g}}.$$

7.18. $\omega = 2\pi/T \approx 0{,}001$ рад/с; $v = \sqrt[3]{2\pi g R_З^2/T} \approx 7{,}4\cdot 10^3$ м/с.

Решение. Радиус орбиты R найдем из уравнения второго закона Ньютона $mv^2/R = \gamma Mm/R^2$. Выражая линейную скорость v через угловую ω, получим $v = \omega R$. Воспользовавшись равенством $\gamma M = gR_З^2$ (см. задачу 7.17), получим $R = \sqrt[3]{gR_З^2/\omega^2}$ и, далее,

$$v = \omega R = \sqrt[3]{gR_З^2\omega} = \sqrt[3]{2\pi g R_З^2/T}.$$

7.19. $R = \sqrt[3]{gR_З^2/\omega^2} \approx 42\,000$ км; $v = \sqrt[3]{gR_З^2\omega} \approx 3{,}1$ км/ч.

Указание. См. задачу 7.18. Угловая скорость вращения спутника должна равняться угловой скорости ω вращения Земли. С Земли будет казаться, что спутник движется вперед – назад вдоль меридиана. Он покажется неподвижным, если его орбита будет лежать в плоскости экватора.

7.20. $v_1 \approx 8$ км/с, такая же, как у Земли.

Указание. Первая космическая скорость – это скорость спутника, движущегося по круговой орбите вокруг планеты вблизи ее поверхности. Поэтому $mv_1^2/R = \gamma mM/R^2$, откуда $v_1 = \sqrt{\gamma M/R}$. Так как $M/R = M_З/R_З$, а $\gamma M_З = gR_З^2$ получаем $v_1 = \sqrt{gR_З}$.

7.21. $v_1 \approx 4$ км/с, т. е. в два раза меньше, чем у Земли.

7.22. 1000 кг.

Решение. Пренебрегая изменением потенциальной энергии спутника, можно записать $A = mv^2/2$. Для того чтобы двигаться по орбите радиусом $R \approx R_З$, спутник должен иметь скорость $v = \sqrt{gR_З}$ (см. задачу 7.17), тогда $A = mgR_З/2$. Отсюда $m = 2A/(gR_З)$.

7.23. В первом случае 1:1, во втором – 2:1.

Решение. Если потенциальную энергию тела массой m в поле тяжести считать равной нулю бесконечно далеко от Земли (масса M), то на расстоянии R от центра Земли она должна быть равна $-\gamma Mm/R$ (эту формулу легко получить исходя из аналогии гравитационного и электростатического полей или рассмотрев работу, совершаемую при перенесении тела на малом отрезке ΔR).

Для поднятия спутника на высоту h над поверхностью Земли нужно совершить работу, равную изменению потенциальной энергии спутника:

$$A = П_{R_З+h} - П_{R_З} = -\gamma \frac{Mm}{R_З+h} - \left(-\gamma \frac{Mm}{R_З}\right) = mgR_З^2\left(\frac{1}{R_З} - \frac{1}{R_З+h}\right) = $$

$$= mg\frac{hR_З}{R_З+h}$$

(так как $\gamma M/R_З^2 = g$).

Для того чтобы теперь запустить спутник на эту высоту, ему нужно сообщить кинетическую энергию $mv^2/2$, т. е. совершить работу $A_1 = mv^2/2$.

Для того чтобы спутник мог вращаться по орбите на высоте h от Земли, ему нужно сообщить скорость $v = R_З\sqrt{g/(R_З+h)}$ (см. задачу 7.17), тогда $A_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{mgR_З^2}{R_З+h}$. Отношение работ равно $A/A_1 = 2h/R_З$. При $h = 3200$ км $A/A_1 = 1$, при $h = 6400$ км $A/A_1 = 2$.

7.24. Космонавт окажется в состоянии невесомости с момента выключения двигателей корабля в космическом пространстве.

Решение. Рассмотрим силы, действующие на корабль и на тела, находящиеся в нем. Корабль и тела в нем всегда движутся с одинаковым ускорением. Это ускорение для корабля определяется силой тяги $\vec{F}_т$, силой сопротивления $\vec{F}_c$ и равнодействующей гравитационных сил $\vec{F}_{гр}$, пропорциональной его массе $m_к$, а для любого тела внутри корабля – силой реакции $\vec{N}$, численно равной силе давления на опору и равнодействующей гравитационных сил $\vec{F}'_{гр}$, пропорциональной массе тела $m_т$: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}_т + \vec{F}_c + \vec{F}_{гр}}{m_к} = \dfrac{\vec{N} + \vec{F}'_{гр}}{m_т}$, но $\dfrac{\vec{F}_{гр}}{m_к} = \dfrac{\vec{F}'_{гр}}{m_т}$, отсюда $\vec{N} = \dfrac{m_т}{m_к}(\vec{F}_т + \vec{F}_c)$, а соответственно сила давления на опору («вес» тела) $\vec{P} = -\dfrac{m_т}{m_к}(\vec{F}_т + \vec{F}_c)$. Это соотношение справедливо для любой стадии движения космического корабля. Им можно воспользоваться и для определения перегрузок, испытываемых космонавтом при взлете и при вхождении в плотные слои атмосферы. Когда корабль выйдет в космическое пространство ($F_c = 0$) и его двигатели будут выключены ($F_т = 0$), то $P = 0$, т. е. все тела на корабле находятся в состоянии невесомости и не испытывают взаимодействий и внутренних напряжений, связанных с весом.

7.25. Маятниковые часы остановятся после выключения двигателя ракеты. На ход наручных часов движение корабля не скажется.

7.26. Возможны многие способы, основанные на применении второго и третьего законов Ньютона. Например: 1) измерить отношение скоростей, приобретаемых телами с известной и неизвестной массами после пережигания нити, сжимавшей пружину между телами; 2) подействовать на тело известной силой F и измерить ускорение a, полученное телом при этом, тогда $m = F/a$; 3) измерить силу натяжения предварительно отградуированной пружины при вращении тела, прикрепленного к этой пружине, с известной постоянной угловой скоростью и т. д.

7.27. Да, вращая корабль или включив двигатели.

7.28. Да. На тела в состоянии невесомости действует сила тяжести (см. задачу 7.24). Изменение потенциальной энергии по-прежнему дается формулой $\Delta П = mg_h \Delta h$, где g_h – ускорение силы тяжести на данной высоте.

7.29. Формально оба закона применимы, но закон Архимеда теряет смысл, так как и тело, и вытесненная жидкость невесомы.

7.30. Линейная и угловая скорости спутника будут расти.

Указание. Полная энергия спутника $E = П + T$. Потенциальная энергия спутника $П = -\gamma mM/r$ (см. задачу 7.23). Кинетическую энергию T находим из соотношения $mv^2/r = \gamma mM/r^2$, $T = \gamma mM/(2r)$. Таким образом, полная энергия $E = -\gamma mM/(2r)$.

В условиях движения со слабым трением работа по преодолению сил трения производится за счет полной энергии E спутника; при этом, как видно из последнего соотношения, $|E|$ должен расти, что возможно, если r уменьшается, а вследствие этого v и ω (см. задачу 7.17) растут.

7.31. При падении на Землю. При запуске ее скорость в более плотных слоях атмосферы у поверхности Земли мала, при спуске – велика.

8. СТАТИКА

8.1. $$H = h + \frac{lMg/2}{\sqrt{4T^2 - (Mg)^2}} \approx 5{,}5 \text{ м}.$$

Указание. Равнодействующая сил натяжения канатика должна быть равна весу фонаря.

8.2. Нет. В этом случае сила натяжения троса была бы бесконечной.

8.3. $F = kMg/(\cos\alpha + k\sin\alpha) \approx 162$ Н.

8.4. $\alpha = \operatorname{arctg} k$ (рис. 171).

Решение. $F = kMg/(\cos\alpha + k\sin\alpha)$ (см. задачу 8.3).

Выражение в правой части минимально, если максимальна величина знаменателя $\cos\alpha + k\sin\alpha$.

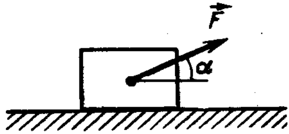


Рис. 171

Обозначив k через $\operatorname{tg}\beta$, можно это выражение преобразовать следующим образом:

$$\cos\alpha + \operatorname{tg}\beta\sin\alpha = \frac{1}{\cos\beta}(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \frac{1}{\cos\beta}\cos(\alpha - \beta).$$

Последнее выражение максимально при $\cos(\alpha - \beta) = 1$, т. е. при $\alpha - \beta = 0$, откуда $\alpha = \beta = \operatorname{arctg} k$.

8.5. Действие момента силы F_1 относительно мгновенной оси приведет к вращению катушки вокруг точки O по часовой стрелке, и она покатится направо. Момент силы F_2 относительно мгновенной оси равен нулю, поэтому в этом случае нить будет сматываться, оставляя катушку на месте. Момент силы F_3 приведет к вращению катушки против часовой стрелки, и она покатится влево.

8.6. $F = \dfrac{kmg\operatorname{tg}\alpha}{2(k + \operatorname{tg}\alpha)}$, для того чтобы сдвинуть тележку влево; $F' = \dfrac{kmg\operatorname{tg}\alpha}{2(\operatorname{tg}\alpha - k)}$, для того чтобы сдвинуть ее вправо при $\operatorname{tg}\alpha > k$. Если $\operatorname{tg}\alpha < k$, то тележку сдвинуть вправо невозможно.

Решение. Сила, с которой нужно тащить тележку, равна по величине силе трения, действующей на тележку со стороны стержня.

Рассмотрим вначале случай, когда сила F сдвигает тележку влево (см. рис. 34). В этом случае на стержень действуют силы N и $F_{тр}$, показанные на рисунке. Так как стержень находится в равновесии, то для моментов сил, действующих на него, можно написать

$mg\dfrac{l}{2}\sin\alpha - Nl\sin\alpha - F_{тр}l\cos\alpha = 0$ (l — длина стержня).

Так как $F_{тр} = kN$, т. е. $N = F_{тр}/k$, то из этого уравнения найдем, что $F = F_{тр} = \dfrac{mg\sin\alpha}{2\left(\cos\alpha + \dfrac{1}{k}\sin\alpha\right)} = \dfrac{kmg\operatorname{tg}\alpha}{1(k + \operatorname{tg}\alpha)}$.

Если теперь сила F' должна сдвинуть тележку вправо, то сила трения, действующая на стержень, направлена вправо и из условия равновесия стержня получим $mg\dfrac{l}{2}\sin\alpha - Nl\sin\alpha + F'_{тр}l\cos\alpha = 0$.

Полагая, что тележка движется, т. е. $F'_{тр} = kN$ или $N = F'_{тр}/k$, найдем $F' = F'_{тр} = \dfrac{kmg\sin\alpha}{2(\sin\alpha - k\cos\alpha)} = \dfrac{kmg\operatorname{tg}\alpha}{2(\operatorname{tg}\alpha - k)}$. Но при $\operatorname{tg}\alpha \to k$ $F'_{тр} \to \infty$. То же происходит при $\operatorname{tg}\alpha < k$.

Из уравнения равновесия стержня следует, что

$$F'_{тр} = (2N - mg)\,\mathrm{tg}\,\alpha/2.$$

При $\mathrm{tg}\,\alpha < k$ сила трения $F'_{тр} < kN - {}^1/_2 kmg$, т. е. $F'_{тр} < kN$. Это означает, что при $\mathrm{tg}\,\alpha < k$ сила трения не достигает величины kN ни при каком значении силы F', приложенной к тележке, и тележку сдвинуть с места невозможно. Происходит «заклинивание».

8.7. $T = mg\dfrac{l+R}{\sqrt{l^2+2lR}}$; $F = mg\dfrac{R}{\sqrt{l^2+2lR}}$.

Решение. Для равновесия тела должны выполняться два условия: 1) сумма всех сил, действующих на тело, должна быть равна нулю:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \qquad (1)$$

(это равенство должно выполняться и для проекций всех сил на любую прямую); 2) сумма моментов всех сил, действующих на тело относительно любой неподвижной оси, также должно равняться нулю: $\sum \vec{M}_i = 0$.

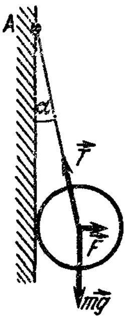


Рис. 172

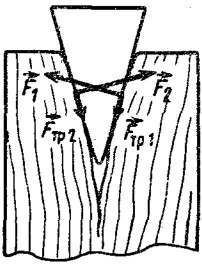


Рис. 173

В качестве неподвижной оси (рис. 172) выберем горизонтальную прямую, параллельную стене и проходящую через центр шара. Силы $\vec{F}$ и $m\vec{g}$ направлены по радиусам шара, поэтому их моменты относительно выбранной оси равны нулю. Из последнего условия следует, что момент силы $\vec{T}$ тоже должен быть равен нулю, а значит, эта сила должна быть направлена вдоль радиуса шара.

Запишем теперь уравнение (1) для проекций сил на вертикальное и горизонтальное направления: $mg - T\cos\alpha = 0$, $F - T\sin\alpha = 0$, где $\sin\alpha = R/(l+R)$, откуда найдем: $T = mg/\cos\alpha = mg\,(l+R)/\sqrt{l^2+2lR}$; $F = T\sin\alpha = mgR/\sqrt{l^2+2lR}$. По третьему закону Ньютона сила давления шара на стену равна по величине силе F и направлена в противоположную сторону.

8.8. $h = 2r\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Указание. Цилиндр не опрокидывается, если вертикаль, проходящая через центр тяжести цилиндра, проходит через его основание.

8.9. Для взвешивания достаточно четырех динамометров. Сумма их показаний равна весу бруска. Металлический брусок может быть подвешен к динамометрам, расположенным, например, на одинаковом расстоянии друг от друга.

8.10. $k \geqslant \mathrm{tg}\,15° = 0{,}268$.

Указание. Силой, выталкивающей клин, является равнодействующая сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ реакции бревна (рис. 173) (в силу симметрии $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$), а силой уравновешивающей – равнодействующая сил трения $F_{тр1} = kF_1$ и $F_{тр2} = kF_2$, направленных вдоль клина (силой тяжести по сравнению с этими силами можно пренебречь).

8.11. $F = Mg/2 \approx 6 \cdot 10^3$ Н.

8.12. 2754 Н – на передние колеса и 3861 Н – на задние.

8.13. а) $\Delta x = mg/k$; $\Delta l = 2\Delta x$; б) $\Delta x = mg/(2k)$; $\Delta l = \Delta x$.

8.14. $k_{экв} = k_1k_2/(k_1 + k_2)$ – при последовательном соединении пружин и $k_{экв} = k_1 + k_2$ – при параллельном.

Р е ш е н и е. При последовательном соединении пружин силы, растягивающие их, одинаковы и равны силе F, с которой растягивают систему пружин, а удлинение системы равно сумме удлинений пружин: $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$. Так как $F = \Delta x k_{экв}$, то $\Delta x = F/k_{экв}$. Аналогично, $\Delta x_1 = F/k_1$ и $\Delta x_2 = F/k_2$. Поэтому $\dfrac{1}{k_{экв}} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ и $k_{экв} = k_1k_2/(k_1 + k_2)$.

При параллельном соединении пружин $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2$, а $F = F_1 + F_2$. Подставляя сюда $F = \Delta x k_{экв}$, $F_1 = \Delta x k_1$ и $F_2 = \Delta x k_2$, получим $k_{экв} = k_1 + k_2$.

8.15. $l_1/l_2 = 11/13$.

Р е ш е н и е. Пусть l_1 и l_2 – длины частей, на которые делит нерастянутую пружину точка A, в которой нужно подвесить груз с массой $2m$, а k_1 и k_2 – жесткости этих частей пружины. Так как при подвешивании груза удлинение целой пружины в n раз больше удлинения $1/n$ части этой пружины, жесткость целой пружины в n раз меньше жесткости $1/n$ части пружины (см. задачу 8.14), т. е. $k_1 = lk/l_1$ и $k_2 = lk/l_2$, где $k = mg/(0{,}1l)$. При подвешивании груза с массой $2m$ на верхнюю часть пружины будет действовать груз $3m$ и она удлинится на $\Delta l_1 = \dfrac{3mg}{k_1} = \dfrac{3mg}{l}\dfrac{l_1}{k}$.

Нижняя же часть пружины удлинится на $\Delta l_2 = mg/k_2 = mgl_2/(lk)$, при этом $l_1 + \Delta l_1 = l_2 + \Delta l_2$, т. е. $l_1\left(\dfrac{3mg}{lk} + 1\right) = l_2\left(\dfrac{mg}{lk} + 1\right)$. Отсюда

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{mg + kl}{3mg + kl} = \frac{mg + \dfrac{mg}{0{,}1l}l}{3mg + \dfrac{mg}{0{,}1l}l} = \frac{11}{13}.$$

8.16. $F > Mg/2$, $k_{мин} = {}^1/_2$.

Указание. Применить второе условие (см. задачу 8.7), выбрав в качестве неподвижной оси ребро, относительно которого поворачивается куб. Максимальная сила трения должна быть не меньше приложенной к телу силы F.

8.17. $F_{мин} = Mg\sqrt{2}/4$; $k \geqslant {}^1/_3$.

Указание. Сила, необходимая для опрокидывания куба, минимальна, если она перпендикулярна диагональной плоскости, проходящей через ребро, около которого опрокидывается куб, и приложена ко второму ребру куба, лежащему в этой диагональной плоскости.

При нахождении коэффициента трения учесть, что сила F имеет как вертикальную, так и горизонтальную составляющие.

8.18. Решение. Если к бруску вблизи его основания приложить горизонтальную силу $F = kmg$, то он начнет двигаться. Если же эту силу приложить на высоте h от пола, то $Fh = mga/2$ и он начнет переворачиваться вокруг ребра основания. Поэтому $kmgh = mga/2$ и $k = a/(2h)$; a – сторона основания.

8.19. $\operatorname{tg}\alpha = {}^1/_3$.

Указание. Прут будет висеть так, что вертикаль, проходящая через точку закрепления прута A, будет проходить через его центр тяжести O (рис. 174).

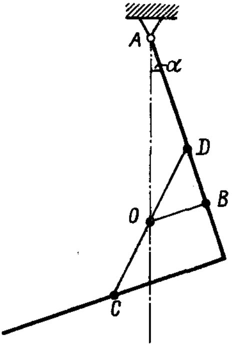


Рис. 174

Обозначив длину стержня $2l$, найдем длины отрезков:

$AB = {}^1/_2 l + DB = {}^1/_2 l + {}^1/_4 l = {}^3/_4 l$ и $OB = {}^1/_4 l$.

8.20. $x = l\,\dfrac{M(n-1) + 2mn}{2m(n+1)}$.

Указание. Удлинения пружин должны быть одинаковыми. На левую пружину при равновесии стержня действует сила $F_1 = \dfrac{Mg}{2} + \dfrac{l - x}{l} mg$, а на правую – сила $F_2 = \dfrac{Mg}{2} + \dfrac{x}{l} mg$ (см. рис. 38).

8.21. $F_1 = mg \sin\beta\,(\alpha + \beta) = 20$ Н; $F_2 = mg \sin\alpha/\sin(\alpha + \beta) = 34$ Н.

Указание. В качестве неподвижных осей удобно выбрать горизонтальные прямые, проходящие через точки касания шара с плоскостями.

8.22. $F \geqslant mg\,\dfrac{\sqrt{h(2R - h)}}{R - h}$.

Указание. Для того чтобы колесо перекатилось через ступеньку, момент силы $\vec{F}$, приложенной к колесу относительно оси, проходящей через точку A (рис. 175), должен быть больше или равен моменту силы тяжести $m\vec{g}$ колеса относительно этой же оси.

8.23. К ободу колеса. В этом случае момент приложенной силы вдвое больше.

8.24. При торможении на колеса автомобиля действует сила трения $\vec{F}_{тр}$. Приложим к центру тяжести автомобиля силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, равные $\vec{F}_{тр}$ и направленные в разные стороны (рис. 176). Это можно сделать,

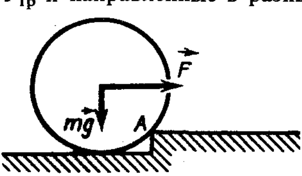


Рис. 175

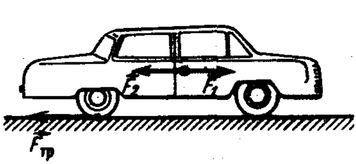


Рис. 176

так как сумма этих сил и их моментов относительно любой оси равна нулю.

Теперь $\vec{F}_2$ можно рассматривать как тормозящую силу, а $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{F}_1$ – как пару сил, вызывающую вращение автомобиля вокруг оси, проходящей через точку касания колес с дорогой, вследствие чего передок машины опускается.

8.25. Пара сил вызовет вращение пластинки вокруг ее центра масс.

Указание. Поскольку сумма действующих на пластинку сил равна нулю, центр масс ее будет покоиться.

8.26. $F = 0{,}5Mg\cos\alpha$; уменьшается.

8.27. $N_A = \dfrac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha$; $Q = \dfrac{mg}{2}\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Решение. Напишем условия равновесия лестницы (см. задачу 8.7; рис. 177, *а*).

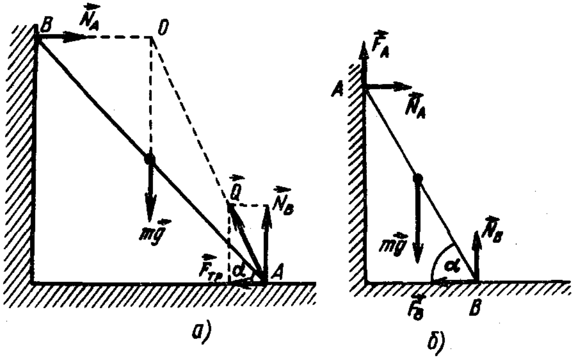


Рис. 177

1-е условие: по оси x $\quad N_A - F_{тр} = 0$;

по оси y $\quad N_B - mg = 0$;

2-е условие: для моментов сил относительно горизонтальной оси, проходящей через точки касания лестницы с опорой,

$$N_A l\sin\alpha = mgl\cos\alpha/2.$$

Равнодействующая сил N_B и $F_{тр}$ равна:

$$Q = mg/2\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Сила Q должна проходить через точку O пересечения линий, проходящих через силы $\vec{N}_A$ и $m\vec{g}$, так как сумма моментов всех сил относительно этой точки должна быть равна нулю (рис. 177, *а*).

8.28. $\sin(\alpha/2) = m_1/m$; $\alpha = 60°$; $F_{AB} = mg\cos^2(\alpha/2) \approx 36{,}75$ Н; равновесие неустойчивое.

Указание. Для определения угла α рассмотреть моменты действующих на стержень сил $Q = m_1g$ и mg относительно точки A (см. рис. 39). Рассмотрев моменты сил, действующих на стержень относительно точки C, найдем силу F_A, действующую в шарнире A (см. задачу 8.27; линия действия силы F_A проходит через точку пересечения линий действия сил $\vec{Q}$ и $m\vec{g}$, лежащую на середине стороны BC равностороннего треугольника ABC):

$$F_A l \sin(\alpha/2) = mgl \sin\alpha/2 \to F_A = m\vec{g}\cos(\alpha/2).$$

Ее проекция на направление стержня $F_{AB} = F_A \cos(\alpha/2)$.

Равновесие неустойчивое: при сколь угодно малом отклонении от найденного положения равновесия система не может вернуться к нему самостоятельно, более того, изменившееся соотношение моментов сил, действующих на стержень, будет способствовать дальнейшему смещению системы в том же направлении.

8.29. $\alpha_{\text{мин}} = \operatorname{arctg}\dfrac{(1 - k_1k_2)}{2k_2} \approx 38°40'$.

Указание. См. решение задачи 8.27. Силы, действующие на лестницу, изображены на рис. 177, *б*. Предельному углу $\alpha_{\text{мин}}$, который может образовать лестница с горизонтом, не соскальзывая, будут соответствовать предельно возможные силы трения покоя $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_B$, т. е. они должны одновременно иметь наибольшие возможные значения, равные соответственно k_1N_A и k_2N_B.

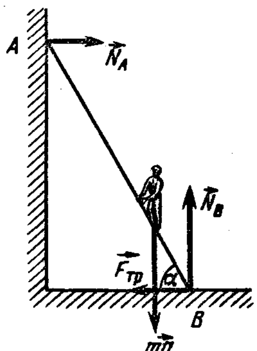


Рис. 178

8.30. $h = lF_{\text{тр}} \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha/(mg) \approx 2$ м.

Указание. См. задачу 8.27. Силы, действующие на лестницу, изображены на рис. 178.

8.31. При $k \geqslant {}^1/_2 (\operatorname{ctg}\alpha - 1)$.

Указание. Записать условие равенства нулю суммы моментов силы реакций стенки и силы тяжести относительно оси, проходящей через линию касания куба с полом, и учесть, что сила реакции стенки должна быть по величине равна силе трения kN_1, а сила N_1 — силе реакции пола, равной силе тяжести.

8.32. 1. Нарушится. 2. Масса толстого конца стержня больше.

8.33. *Указание.* Линиями, параллельными какой-нибудь из сторон, треугольник разбивается на тонкие полоски. Очевидно, что центр тяжести треугольника лежит на линии, проходящей через середины этих полосок, т. е. на медиане.

8.34. *Указание.* Центр масс каждого из стержней лежит на его середине. Соединив середины стержней, мы получим треугольник, длины сторон которого в два раза меньше длин сторон данного треугольника и, следовательно, пропорциональны массам соответствующих стержней. Биссектрисы углов полученного треугольника делят его стороны на части, пропорциональные двум другим сторонам.

8.35. На расстоянии 30 см от шарика массой 10 г.

Указание. Система будет уравновешена, если к центру массы системы приложена сила, равная сумме сил тяжестей шариков. Записав далее условие равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих на систему, относительно одной из крайних точек, найдем положение центра массы.

8.36. $R/6$ от центра.

Решение. Расстояние от центра масс пластинки до центра круга обозначим x. Из соображений симметрии очевидно, что центр масс пластинки лежит на ее диаметре, проходящем через центр отверстия (рис. 179). Если мы заполним отверстие материалом, из которого сделана пластинка, то центр полученной сплошной пластинки будет находиться в центре круга. Поэтому должно выполняться равенство $m_1R/2 = xm_2$. Подставляя сюда $m_1 = \pi R^2\rho/4$ и $m_2 = {}^3/_4\pi R^2\rho$, где ρ – поверхностная плотность материала пластинки, получим $x = R/6$.

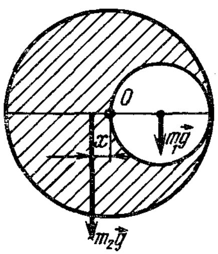


Рис. 179

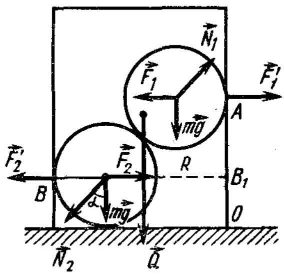


Рис. 180

8.37. $a\sqrt{3}/28$ от геометрического центра куба.

Указание. См. решение предыдущей задачи.

8.38. Горизонтальные силы равны $mgR/\sqrt{l^2 - 4R^2} \approx 0{,}16$ Н. Вертикальная сила равна $mg \approx 0{,}25$ Н.

8.39. $M \geqslant 2m\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$.

Решение. Цилиндр не опрокинется, если момент его силы тяжести $\vec{Q}$ относительно точки O (рис. 180) не меньше опрокидывающего момента сил $\vec{F}'_1$ и $\vec{F}'_2$ давления шаров на цилиндр:

$$F'_1 \cdot AO - F'_2 \cdot B_1O \leqslant MgR \;\; (Mg = Q). \qquad (1)$$

Эти силы в соответствии с третьим законом Ньютона равны по величине силам $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующим на шары. На верхний шар кроме силы $\vec{F}_1$ действуют вес $m\vec{g}$ и сила реакции нижнего шара $\vec{N}_1$, направленная вдоль линии центров. Силы, действующие на нижний шар, показаны на рисунке.

Из условия равновесия шаров находим, что $F_1 = F_2 = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Подставляя эти значения в неравенство (1) и учитывая, что $AO - B_1O = 2(R - r)\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, находим, что $Mg \geqslant 2mg\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$.

8.40. $k \geqslant 1/(2+\sqrt{3})$.

Указание. Бревна будут в равновесии, если момент силы давления со стороны верхнего бревна на каждое из нижних бревен не будет превышать момента силы трения верхнего с соответствующим нижним бревном относительно линии соприкосновения бревна с землей.

8.41. Цилиндр будет скатываться при угле наклона дощечки $\alpha = \arcsin {}^1/_6$.

Решение. Центр масс цилиндра с отверстием (точка O) находится на расстоянии ${}^1/_6 R$ от оси цилиндра (см. задачу 8.36). При повороте дощечки цилиндр поворачивается так, чтобы центр масс его находился на вертикали, проходящей через точку касания цилиндра с дощечкой. Однако если эта вертикаль проходит от оси цилиндра на расстоянии, большем ${}^1/_6 R$ (рис. 181), равновесие невозможно. Это означает, что

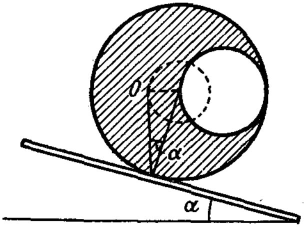


Рис. 181

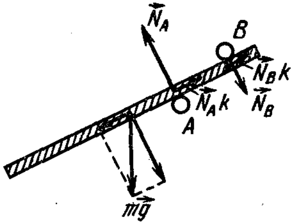


Рис. 182

цилиндр начнет скатываться, когда угол α будет таким, что $\sin\alpha_1 =$

$$= \frac{{}^1/_6 R}{R} = {}^1/_6;\ \alpha_1 = \arcsin {}^1/_6.$$

В то же время цилиндр начнет соскальзывать при таком угле наклона дощечки, при котором $\operatorname{tg}\alpha_2 = k = {}^1/_5$, отсюда $\alpha_2 = \operatorname{arctg} {}^1/_5$; $\alpha_1 < \alpha_2$, поэтому качение наступит раньше скольжения.

8.42. $x = R/\sqrt{2}$.

Указание. Система находится в безразличном равновесии, если ее центр тяжести совпадает с геометрическим центром полушара.

8.43. Центр тяжести стакана с водой находится в наинизшем положении, когда он совпадает с уровнем воды в стакане. (Объясните!)

8.44. $x \geqslant \frac{a}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{k} - 1\right)$.

Решение. Брусок не будет выскальзывать, если составляющая силы тяжести вдоль бруска не превышает максимальной силы трения (рис. 182):

$$mg\sin\alpha \leqslant F_{\text{тр. макс}} = N_A k + N_B k. \tag{1}$$

Силы давления $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$ стержней на брусок находятся из условия равенства нулю суммы моментов сил относительно точек A и B

соответственно: $mgx\cos\alpha - N_B a = 0$; $mg(a+x)\cos\alpha - N_A a = 0$. Подставляя найденные отсюда значения $\tilde{N}_A$ и $\tilde{N}_B$ в неравенство (1), найдем, что брусок не будет выскальзывать, если

$$x \geqslant \frac{a}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{k} - 1\right).$$

8.45. а) 410 Дж; б) 1100 Дж.

Указание. Минимальная работа, которую нужно совершить при бесконечно медленном переворачивании куба, равна разности потенциальных энергий куба в начальном положении и в положении неустойчивого равновесия.

8.46. $A_1 = mgka$; $A_2 = 0{,}207\,mga$ при $k = 0{,}207$ (см. указание к задаче 8.45).

9. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

9.1. $x = 4\sin 200\pi t$.

9.2. $T/4$; $T/12$; $T/6$.

Решение. *1-й способ.* На рис. 183 изображен график зависимости смещения колеблющегося тела от времени. В начальный момент смещение равно нулю. На оси абсцисс помечены фазы в радианах. Из графика видно, что весь путь от среднего положения до крайнего — максимальное смещение — колеблющееся тело проходит за $T/4$.

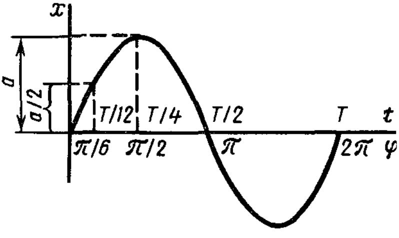


Рис. 183

Первую половину пути колеблющееся тело пройдет за $T/12$, это соответствует фазе $\pi/6$ ($\sin(\pi/6) = 0{,}5$). Вторую половину пути пройдет за время $\frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}$.

2-й способ. Смещение x тела определяется формулой $x = a\sin(2\pi t/T)$, где a — амплитуда, равная смещению до крайнего положения; t — время, отсчитываемое с момента прохождения положения равновесия.

Время t, необходимое телу для прохождения пути из среднего положения в крайнее, определяется из условия $x = a$: $a = a\sin(2\pi t_1/T)$, откуда $2\pi t_1/T = \pi/2$ и $t_1 = T/4$.

Время, необходимое для прохождения первой половины этого пути, определим из условия $x = a/2$, т. е. $a/2 = a\sin(2\pi t_2/T)$, откуда $2\pi t_2/T = \pi/6$ и $t_2 = T/12$.

Время t_3 прохождения второй половины пути равно $t_3 = t_1 - t_2 = T/6$.

9.3. $T/3$.

Указание. См. решение предыдущей задачи.

9.4. Решение. Круговые движения «конического» маятника могут быть получены, если отклоненному маятнику сообщить толчком скорость в направлении, перпендикулярном плоскости возможных колебаний после начального отклонения. Таким образом, «конические» движения можно рассматривать как результат сложения двух независимых взаимно перпендикулярных колебаний. Периоды этих колебаний одинаковы (любая плоскость качаний ничем не отличается от всякой другой). Следовательно, период сложного движения – обращения маятника по конусу – будет тот же, что и период колебания математического маятника.

Период же обращения «конического» маятника, совершающего круговые движения при малых углах при вершине конуса, равен $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ (см. задачу 6.30).

9.5. Примерно на 0,3% длины.

Указание. Условие равенства периодов колебаний маятников разной длины на разных высотах выражается следующим образом:

$$l_0/g_0 = l/g_h.$$

Образовав производную пропорцию, получаем $(l_0 - l)/l_0 = (g_0 - g_h)/g_0$.

Учитывая, что $g_h = \dfrac{\gamma M}{(R+h)^2} \approx g_0\left(\dfrac{R}{R+2h}\right)$ (см. задачу 7.5), легко найти $(l_0 - l)/l_0 \approx 2h/(R+2h) \approx 2h/R \approx 3\cdot 10^{-3}$.

9.6. $\Delta t \approx 67{,}5$ с.

Р е ш е н и е. Период колебаний маятника на высоте h: $T = 2\pi\sqrt{l/g_h}$. Ускорение земного тяготения на этой высоте $g_h = g_0\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2$, где g_0 – ускорение на поверхности Земли и R – ее радиус (см. задачу 7.5). Тогда

$$T = 2\pi\sqrt{l/g_h} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}\left(\frac{h+R}{R}\right)^2} = T_0\,\frac{h+R}{R} = T_0\left(1+\frac{h}{R}\right),$$

где T_0 – период колебаний на поверхности Земли.

Таким образом, за время T_0 часы отстают на $\Delta T = T - T_0 = hT_0/R$. За время $t = 24$ ч часы отстанут на некоторое время Δt, которое будет относиться к t, как ΔT к T_0, и, очевидно, $\Delta t/t = \Delta T/T_0$, откуда $\Delta t = t\Delta T/T_0 = th/R$.

9.7. *Указание.* Для оценки будем считать, что месторождение имеет форму шара радиусом r. Тогда сила тяжести, действующая на тело массой m, возле месторождения должна быть меньше, чем далеко от него (на поверхности Земли), на величину $\dfrac{\gamma m(\rho_0 - \rho)\cdot {}^4/_3\pi r^3}{r^2} = {}^4/_3\pi\gamma m(\rho_0 - \rho)\,r$. Ускорение g' свободного падения тела вблизи месторождения будет поэтому равно $g - \dfrac{4}{3}\pi\gamma(\rho_0 - \rho)\,r$, а период колебаний маятника $T' = 2\pi\sqrt{l/g'} = 2\pi\sqrt{l/g}\sqrt{g/g'} = T\sqrt{g/g'}$, где T — период колебаний маятника далеко от месторождения. Зная g', нетрудно найти r.

9.8. Период колебаний маятника увеличится.

Указание. Действие выталкивающей силы на маятник (архимедовой силы) уменьшает силу натяжения нити, что равносильно уменьшению g.

9.9. $a = g\left[1 - \left(\frac{T}{T_1}\right)^2\right] \approx 0{,}17g$. Ускорение направлено вниз. Направление движения лифта не играет роли.

Решение. При движении лифта с постоянным ускорением a сила натяжения нити маятника $F_н$ в положении его равновесия относительно кабины определяется из второго закона Ньютона:

$$ma = mg - F_н, \text{ откуда } F_н = m(g - a).$$

В последней формуле a — величина алгебраическая: положительная, когда ускорение лифта направлено вниз, и отрицательная, когда ускорение направлено вверх. Отсюда следует, что при отклонении маятника сила, возвращающая его к положению равновесия, будет пропорциональна не g, а $(g - a)$. Это означает, что в лифте, движущемся с ускорением a, маятник длиной l имеет период $T_1 = 2\pi\sqrt{l/(g-a)}$.

Взяв отношение периодов колебаний маятника в лифте, движущемся с ускорением, и в неподвижном лифте и возведя в квадрат, получим $(T_1/T)^2 = g/(g - a)$, откуда находим ответ: $a = g \times \left[1 - \left(\frac{T}{T_1}\right)^2\right] \approx 0{,}17g$; ответ положительный, значит, лифт движется с ускорением, направленным вниз; направление скорости не играет роли.

9.10. $T = 2\pi\sqrt{l/\sqrt{g^2 + a^2}}$.

Указание. В положении равновесия относительно вагона сила натяжения нити маятника $F_н$ будет равна: $F_н = m\sqrt{g^2 + a^2}$.

9.11. $\lambda = 7{,}25$ м.

9.12. Звучит дальше камертон, закрепленный в тисках. Излучение энергии звуковых волн в единицу времени у камертона, стоящего на резонаторном ящике, больше.

9.13. 1 м.

9.14. $v \approx 67{,}5$ км/ч.

Указание. При ударе колес вагона о стыки рельсов вагон получает импульс, имеющий наряду с вертикальной и горизонтальную составляющую. Если период между ударами будет равен периоду колебаний маятника, последний раскачается особенно сильно.

9.15. $\pi/2$.

Указание. Если две точки отстоят друг от друга на расстоянии, равном λ, то разность фаз равна 2π, а если на l, то — $2\pi l/\lambda$.

9.16. При движении по поверхности сферы.

Решение. При движении по поверхности сферы $t_1 = {}^1/_4 T = {}^1/_4 \cdot 2\pi\sqrt{R/g}$ (T – период колебаний маятника длиной R. Объясните!). При движении по наклонной плоскости $t_2 = \sqrt{2 \cdot 2R \sin\alpha/(g \sin\alpha)} = 2\sqrt{R/g} > t_1$ (α – угол наклона плоскости).

9.17. $T = 2\pi\sqrt{\Delta l/g} \approx 0{,}4$ с.

9.18. При последовательном соединении пружин $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1k_2/(k_1+k_2)}}$. При параллельном соединении $T = 2\pi \times \sqrt{m/(k_1+k_2)}$.

Указание. См. задачу 8.14.

10. ГИДРОСТАТИКА

10.1. На дно $\rho g a^3$, на боковую грань ${}^1/_2\,\rho g a^3$.

Указание. Давление p в жидкости на глубине h равно $\rho g h$, т. е. меняется с высотой по линейному закону (рис. 184). Поэтому полная сила давления на всю боковую грань куба равна по величине среднему давлению (т. е. давлению на глубине $a/2$), умноженному на площадь грани.

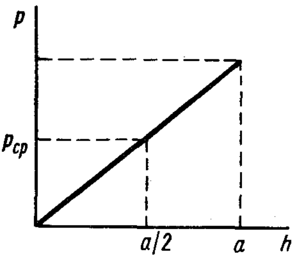


Рис. 184

10.2. Если сосуд сужается кверху, то гиря и ртуть не оторвут дно, а масло – оторвет. Если же сосуд сужается книзу, то наоборот.

Указание. На дно изнутри действует сила давления жидкости $\rho g h S$ (где ρ – плотность, h – высота уровня жидкости, S – площадь дна). Если сосуд сужается кверху, то эта сила больше веса жидкости, налитой в конус, на величину веса жидкости, занимающей заштрихованный объем (рис. 185, *а*). Поэтому ртуть и гиря не оторвут дна.

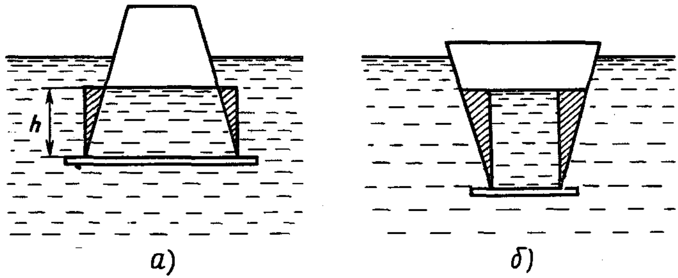


Рис. 185

Масло оторвет дно, так как в случае конуса, сужающегося кверху, произведение ρh для масла больше, чем для воды (масло займет больший объем, чем такое же количество воды. Связанное с этим относительное увеличение высоты уровня h больше относительного уменьшения плотности ρ).

Если сосуд сужается книзу, то сила давления жидкости, налитой в сосуд, на дно меньше ее веса на величину веса жидкости в заштрихованном объеме (рис. 185, *б*). Поэтому в этом случае масло не оторвет дна, а гиря и ртуть оторвут.

10.3. $\Delta h = 4$ см.

Указание. Применить условие равновесия неоднородных жидкостей в сообщающихся сосудах.

10.4. $S_2/S_1 = nhmg/A \approx 500$ раз.

10.5. Уровни воды в обоих случаях поднимаются на

$$\Delta h = \frac{m}{\frac{\pi}{4}(D_1^2 + D_2^2)\rho_0}.$$

10.6. $h_2 = 40$ см. Будет перетекать спирт. Трубка должна быть расположена наклонно, опускаясь в сторону колена с водой.

Указание. См. задачу 10.3. Построив график зависимости давления от высоты (начальный уровень – уровень ртути) для обоих колен (рис. 186), легко видеть, что на высоте, на которой находится трубка, давление в колене со спиртом больше, нежели в колене с водой. Поэтому будет перетекать спирт. Чтобы равновесие при открывании крана не нарушалось, трубку необходимо расположить наклонно. Разность высот точек подсоединения трубки можно найти с помощью графика.

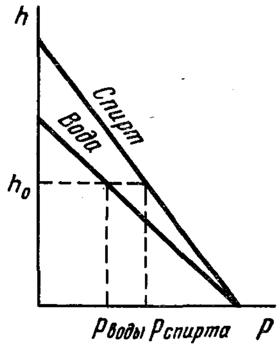


Рис. 186

10.7. $A = gSH^2(\rho_в - \rho_л)^2/(2\rho_в) \approx 7{,}84$ Дж.

Указание. При равномерном погружении льдины выталкивающая сила Q, действующая на нее, возрастает равномерно, а значит, и сила $F = Q - m_л g = (\rho_в - \rho_л)gSh$ ($m_л$ – масса льдины, $\rho_в$ – плотность воды, $\rho_л$ – плотность льда, h – глубина погружения) меняется линейно с высотой погружения от нуля (когда лед плавает) до величины $F_н = (\rho_в - \rho_л)gSH$. Поэтому работа, которую нужно совершить для погружения льдины, равна по величине работе средней силы $^1/_2 F_н$ на пути, равном толщине части льдины, выступающей над водой.

10.8. Лед вытесняет воду, вес которой равен весу льда. Когда лед растает, образуется такое же количество воды, поэтому уровень не изменится.

1) Наличие пузырька воздуха в куске льда не меняет предыдущих рассуждений (масса воздуха ничтожно мала), следовательно, и в этом случае уровень воды в сосуде останется прежним.

2) Если же лед содержит кусочек свинца, то объем воды, который образуется, когда лед растает, вместе с объемом кусочка свинца будет меньше, чем в случае куска чистого льда того же веса. Следовательно, уровень понизится.

10.9. Бутылка с водой потонет, а с ртутью – нет.

Указание. Вес бутылки с водой больше, чем вес воды, объем которой равен внешнему объему бутылки, а бутылки со ртутью – меньше веса такого же объема ртути.

10.10. $h = H - m/(\rho_0 S) = 4$ см, где ρ_0 – плотность воды.

10.11. 0,5 кг.

10.12. Меньше.

Решение. При вынимании груза из банки объем вытесняемой банкой воды уменьшится на величину $V_1 = m/\rho_1$ (m – масса груза, ρ_1 – плотность воды). При погружении груза в воду объем вытесненной воды увеличится на величину объема груза $V_2 = m/\rho_2$ (ρ_2 – плотность груза). Так как $\rho_2 > \rho_1$, то $V_2 < V_1$, а значит, $H_2 < H_1$.

10.13. $\Delta h = m/(\rho S)$.

Решение. 1-й способ. При опускании тела в сосуд сила давления на дно увеличивается на $\Delta F = mg$. Но тело само не касается дна сосуда, поэтому сила давления изменяется благодаря изменению давления воды. Если уровень воды в сосуде поднялся на Δh, то $\Delta p = \rho g \Delta h$ и $\Delta F = \rho g \Delta h S$. Поэтому $\rho g \Delta h S = mg$. Отсюда $\Delta h = m/(\rho S)$.

2-й способ. Тело массой m, плавающее на поверхности жидкости, по закону Архимеда вытеснит (займет) в ней объем ΔV, который занимала бы сама эта жидкость массой m. Таким образом, это погружение эквивалентно (в смысле изменения уровня жидкости в сосуде), доливанию в сосуд жидкости массой m. Тогда

$$\Delta h = \Delta V/S = m/(\rho S)$$

10.14. $\Delta h = m/(2\rho S)$.

Указание. См. задачу 10.13. Изменения уровней жидкости в коленах одинаковы.

10.15. $g\dfrac{\pi}{4}\{\rho_0 d^2(H-h) + (\rho - \rho_0)(D^2 - d^2)h + \rho d^2 h_1\}$.

Указание. Сила давления конструкции на дно складывается из силы давления воды на верхнюю поверхность детали, силы тяжести конструкции и силы давления воды на нижнюю поверхность, направленной вверх и равной $\dfrac{\pi}{4}(D^2 - d^2)[H - h_1 + h]\rho_0 g$.

10.16. Нет, так как выталкивающая (архимедова) сила не возникает – гидростатическое давление не передается на нижнюю грань кубика из-за отсутствия под ней жидкости.

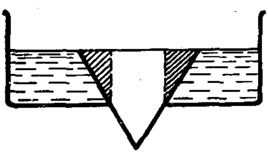


Рис. 187

10.17. $\rho = \rho_0\{1 + 2(S_1/S_2)^{3/2} - 3S_1/S_2\}$.

Указание. Выталкивающая (архимедова) сила максимальна, когда вода доходит до верха пробки. При этом она равна весу воды в заштрихованном объеме пробки (рис. 187).

10.18. $h = p_0\left(V_0 - \dfrac{m}{\rho}\right)/(mg) \approx 2{,}6$ м.

Указание. На искомой глубине h давление воды $p_1 = p_0 + \rho g h$, где p_0 – давление воздуха над поверхностью воды; ρ – ее плотность. Для воздуха в бутылке, сжимающегося при ее погружении, можно записать закон Бойля – Мариотта: $p_0 V_0 = p_1 V_1$, где V_0 и V_1 – объемы воздуха в бутылке соответственно до и после погружения. Учитывая, наконец, что бутылка на глубине h находится в равновесии, поддерживаемая архимедовой силой $mg = \rho V_1 g$, можно получить $p_1 = p_0 V_0 \rho / m$.

10.19. $\rho = R_1^3(\rho_2 - \rho_1) + R_2^3 \rho_1 / R_2^3$.

Указание. Шар будет находиться во взвешенном состоянии внутри жидкости, если его масса (вес) будет равна массе (весу) жидкости, объем которой равен объему шара.

10.20. $V = m\left(\dfrac{2}{\rho_в} - \dfrac{1}{\rho}\right) \approx 9350$ см^3.

10.21. 45 г; на другую чашку.

Указание. В соответствии с третьим законом Ньютона, на сосуд с водой со стороны бруска будет действовать сила, равная по величине архимедовой (выталкивающей) силе, действующей на брусок, и направленная вниз. Эта сила возникает из-за увеличения гидростатического давления на дно (и стенки) сосуда вследствие повышения уровня воды в сосуде после погружения бруска (см. также задачу 10.13).

10.22. В обоих случаях нарушится; железный шар перетянет.

Указание. См. предыдущую задачу. Во втором случае плечи не равны и моменты выталкивающих сил тоже не одинаковы.

10.23. $V_ж = 25{,}1$ см^3.

Решение. Так как взвешиваемый кусок железа находится в равновесии, то можем записать: $m_ж g = P + m_в g$, где $m_ж$ и $m_в$ – массы железа и воды в объемах равных $V_ж$. В правой части равенства – сумма сил, приложенных к телу: архимедовой и силы реакции опоры (подвеса), равной весу тела в воде P. Выразив массы железа и воды через объем $V_ж$ и соответствующие плотности, получим $V_ж \rho_ж = \dfrac{P}{g} + V_ж \rho_в$, откуда $V_ж = \dfrac{P}{g}(\rho_ж - \rho_в)$.

10.24. 1,5 г/см^3.

Решение. *1-й способ.* См. предыдущую задачу.

2-й способ. Допустим, что вес тела в воздухе равен трем единицам, тогда в воде, по условию, вес равен одной единице, т. е. потеря веса в воде равна двум единицам, что равно весу воды в объеме тела. Отсюда плотность равна $^3/_2$ г/см^3 = 1,5 г/см^3.

10.25. Уменьшится, так как увеличится давление жидкости на нижнюю грань бруска.

10.26. Не изменится, если сжимаемость тела такая же, как и воды; увеличится, если сжимаемость больше, чем у воды, и уменьшится в противном случае.

10.27. $F \approx 40$ Н.

10.28. Уменьшится на величину веса воды, вытесняемой стенками и дном ведра.

10.29. Показание динамометра не изменится.

Указание. Вытесненная гирей вода выльется из сосуда. Таким образом, вес воды, находящейся в сосуде, уменьшится, что точно скомпенсирует возникающую при погружении силу со стороны гири на сосуд с водой, которая равна выталкивающей (архимедовой) силе, действующей на гирю. (См. также задачу 10.21).

10.30. Положить на правую чашку весов груз массой $M = 2m\rho_в/\rho_м \approx 24$ г.

Указание. При погружении гири сила, действующая на левое плечо коромысла весов, увеличится, а на правое – уменьшится на величину, равную выталкивающей силе $F = V_г\rho_в g = m\rho_в g/\rho_м$ (см. задачу 10.21).

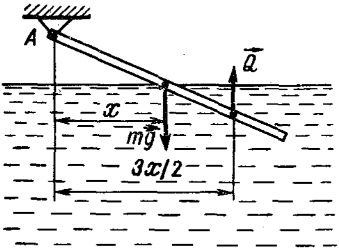


Рис. 188

10.31. 0,75 г/см^3.

Решение. Так как палочка тонкая, то можно считать, что выталкивающая сила $\vec{Q}$ приложена в середине части палочки, находящейся в воде (рис. 188).

В силу равновесия палочки моменты сил $m\vec{g}$ и $\vec{Q}$ относительно точки A должны быть равны, т. е. $mgx = Q \cdot {}^3/_2 x$, откуда $Q = {}^2/_3 mg$.

Подставляя сюда $m = \rho V$ и $Q = {}^1/_2 \rho_в V g$ (V – объем палочки, ρ – плотность материала палочки и $\rho_в$ – плотность воды), найдем $\rho = {}^3/_4 \rho_в$.

10.32. На расстоянии $x = l \dfrac{\rho_2 - \rho}{(\rho_2 - \rho) + (\rho_1 - \rho)(r_1/r_2)^3}$ от шара с плотностью ρ_1.

Указание. Разности сил тяжести и архимедовой, действующих на грузы, равны соответственно:

$$F_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3(\rho_1 - \rho)g \quad и \quad F_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3(\rho_2 - \rho)g.$$

Так как стержень с грузами находится в равновесии, то $F_1 x = F_2(l - x)$ (x – расстояние от груза с плотностью ρ_1 до точки подвеса стержня).

10.33. $F > \dfrac{\rho(H - h)\pi r^3 - M(R - 2r)}{2(R - r)} g.$

Решение. Пластина будет поворачиваться вокруг точки B (см. рис. 47). Давления воды с обеих сторон пластины уравновешивают друг друга всюду, кроме площадки над трубкой. Здесь сила давления воды равна $F = \rho g(H - h)\pi r^2$. Ее момент относительно точки B равен $\rho g(H - h)\pi r^3$.

Пластина будет переворачиваться, если

$$\rho g(H - h)\pi r^3 < Mg(R - 2r) + F(2R - 2r);$$

$$F > \frac{\rho(H - h)\pi r^3 - M(R - 2r)}{2(R - r)} g.$$

10.34. Ответ зависит от соотношения термических коэффициентов расширения тела и жидкости.

Если термический коэффициент тела меньше, чем у жидкости (как это бывает в большинстве случаев), то тело перетянет.

10.35. $V_1/V = (\rho - \rho_2)/(\rho_1 - \rho_2)$.

Решение. Масса тела должна быть равна массе вытесненных жидкостей: $\rho V = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2$, где $V_1 + V_2 = V$. Решая эти уравнения совместно, найдем $V_1 = V\dfrac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$.

10.36. $m \approx 0{,}85$ кг; $F_1 \approx 1{,}96$ Н; $F_2 \approx 10{,}29$ Н. Не изменится. *Указание.* См. решение предыдущей задачи.

10.37. $H \approx 4{,}6$ см; $p \approx 7650$ Па.

10.38. 0,2 г/см^3.

Решение. Обозначим: массу пробки m_1, ее плотность ρ_1, массу свинца m_2, его плотность ρ_2. Тогда объем пробки $V_1 = \dfrac{m_1}{\rho_1}$, объем свинца $V_2 = \dfrac{m_2}{\rho_2}$, общий объем $V = V_1 + V_2 = \dfrac{m_1}{\rho_1} + \dfrac{m_2}{\rho_2}$.

Согласно закону Архимеда, на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила F [в нашем случае $F = (m_1 + m_2)g - Q$, где Q – показание весов], равная весу вытесненной жидкости в объеме погруженного тела $F = V\rho_3 g$, где ρ_3 – плотность керосина. Отсюда
$$\frac{(m_1 + m_2)g - Q}{\rho_3} = \frac{m_1 g}{\rho_1} + \frac{m_2 g}{\rho_2}.$$

Решая полученное уравнение относительно искомой величины ρ_1, получим
$$\rho_1 = \frac{m_1 g \rho_2 \rho_3}{[(m_1 + m_2)g - Q]\,\rho_2 - m_2 g \rho_3}.$$

10.39. При погружении стакана в перевернутом положении вода, сжимая находящийся в нем воздух, частично заполняет его внутренний объем. При одинаковом погружении стакана в воду в первом случае вытесненный объем воды меньше, чем во втором случае, а потому работа меньше.

10.40. Шар из тонкой резины поднимется на бо́льшую высоту. На одной и той же высоте над Землей объем шара из тонкой резины, а значит, и действующая на него выталкивающая сила будут больше, чем для шара из ткани.

10.41. Уменьшится в 1,08 раза.

Решение. Подъемная сила $F_п$ некоторого объема газа равна разности веса $m_в g$ воздуха, вытесненного газом, и веса самого газа $m_г g$: $F_п = (m_в - m_г)g$.

Отношение подъемных сил $(m_в - m_{вод})/(m_в - m_{гелия})$ равно отношению разностей молярных масс, так как давление p, объем V и температура T одинаковы $(pV = mRT/\mu)$. Следовательно, $F_1/F_2 = (\mu_в - \mu_{вод})/(\mu_в - \mu_{гелия}) = (29 - 2)/(29 - 4) = 27/25 = 1{,}08$.

10.42. Динамометр показывает сумму веса трубки и силы атмосферного давления на трубку, равной весу ртути в трубке.

При изменении атмосферного давления показания будут соответственно изменяться.

10.43. $m = p \cdot 4\pi R^2/g \approx 5 \cdot 10^{18}$ кг, где p — атмосферное давление; R — радиус Земли.

10.44. Давление воздуха и водорода в уровне $I-I$ (рис. 189) соответственно равны:

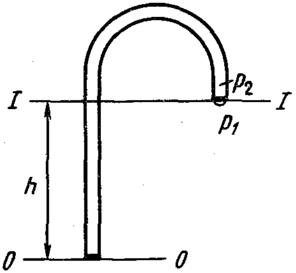


Рис. 189

$$p_1 = p_0 - \rho_в g h, \ p_2 = p_0 - \rho_{вод} g h,$$

где p_0 давление на уровне $O-O$; $\rho_в$ и $\rho_{вод}$ — плотность воздуха и водорода. Так как $\rho_{вод} < \rho_в$, то $p_1 < p_2$, и пленка будет выгнута наружу.

10.45. Увеличится, так как скорость воды в узкой части трубы больше, а давление соответственно меньше, чем в широкой части трубы.

10.46. $A = (m - \rho V)gh + mgH \approx 150$ Дж.

Решение. Для того чтобы перемещать тело в воде, к нему нужно приложить силу $F = mg - F_{выт} = mg - \rho V g$ (ρ — плотность воды). Поэтому для подъема тела с глубины h на высоту H над поверхностью воды нужно затратить работу

$$A = (m - \rho V)gh + mgH \approx 150 \text{ Дж}.$$

Эта работа на величину $\rho V g h \approx 50$ Дж меньше изменения потенциальной энергии тела $\Delta W_п = mg(h + H)$. Найденная разница есть как раз та величина, на которую уменьшилась при подъеме тела потенциальная энергия воды — объем V воды опускается с поверхности на глубину h.

10.47. $A = \dfrac{pS}{2}\left(2H - \dfrac{p}{\rho_0 g}\right) \approx 9800$ Дж, где ρ_0 — плотность воды.

Решение. Давление воды непосредственно под поршнем насоса равно величине $p - \rho_0 g h$ (h — высота подъема поршня).

Сила, поднимающая поршень, равна разности сил давлений сверху и снизу поршня, т. е. величине $F = [p - (p - \rho_0 g h)]S$. Когда поршень поднимают до высоты $h = p/\rho_0 g = 10$ м, эта сила линейно возрастает до величины pS. Далее эта сила остается постоянной. Поэтому работа, совершенная при подъеме поршня, будет равна:

$$A = \frac{pS}{2}\frac{p}{\rho_0 g} + pS\left(H - \frac{p}{\rho_0 g}\right) = \frac{pS}{2}\left(2H - \frac{p}{\rho_0 g}\right).$$

10.48. $v \approx 44{,}3$ м/с; $V = 50$ м^3.

Решение. Применяя формулу Торичелли для скорости истечения из отверстия $v^2 = 2gh$, найдем $v = \sqrt{2gh}$.

За время t в лодку проникнет объем воды, равный $V = \pi d^2 v t/4$.

10.49. $S_1 \approx 4{,}37$ см^2.

Решение. Скорость воды у конца брандспойта $v_0 = Q/S_0$. Вылетая из брандспойта, вода движется равнозамедленно с ускорением

g, поэтому на высоте h скорость воды

$$v_h = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

Из уравнения непрерывности струи $v_0 S_0 = v_h S_h$, выражающего собой то, что масса жидкости, протекающей через любое поперечное сечение струи в единицу времени, одна и та же, получим

$$S_h = \frac{v_0}{v_h} S_0 = \frac{Q}{\sqrt{(Q/S_0)^2 - 2gh}}.$$

10.50. За время пребывания пули в стакане уровень воды в нем не успевает измениться. Образовавшаяся область высокого давления при сжатии воды распространяется по всем направлениям со скоростью звука, достигает стенок стакана, и он разлетается вдребезги. Этот опыт иллюстрирует малую сжимаемость жидкостей.

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

11. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

11.1. $n = 3{,}33 \cdot 10^{22}$ 1/см^3; $m = 2{,}99 \cdot 10^{-26}$ кг; $a = 3{,}11 \cdot 10^{-10}$ м.

Указание. Масса 1 моля воды 18 г, а объем его 18 см^3; в 1 моле воды $6 \cdot 10^{23}$ молекул (постоянная Авогадро); в 1 см^3 содержится $n = N_A/18 = 3{,}33 \cdot 10^{22}$ молекул. Приблизительный объем v_0 равен $1/n$ см^3, следовательно, примерный размер молекулы $a = \sqrt[3]{1/(3{,}33 \cdot 10^{22})}$.

11.2. $t \approx 8{,}5$ млн. лет.

Указание. В 1 см^3 газа при нормальных условиях содержится $2{,}69 \cdot 10^{19}$ молекул (постоянная Лошмидта).

11.3. Примерно $4 \cdot 10^{18}$ молекул.

11.4. Примерно $2 \cdot 10^6$ ионов.

11.5. $r \approx 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ см.

Решение. Кубическая ячейка NaCl состоит из четырех ионов Na и четырех ионов Cl, находящихся в ее вершинах. Каждый ион (Na или Cl) входит в состав восьми ячеек. Поэтому в кристалле число кубических ячеек равно числу ионов Na и Cl. Следовательно, в 1 моле $2N_A$ ячеек. Объем одного моля равен μ/ρ. Объем же, приходящийся на одну ячейку, равен $\mu/(2\rho N_A)$. Размер ячейки (наименьшее расстояние между центрами ионов) равен $a = \sqrt[3]{\mu/(2\rho N_A)}$.

11.6. $2{,}3 \cdot 10^{-8}$ см.

11.7. а) $p_а = 2mv^2 n \approx 3{,}3 \cdot 10^{-3}$ Па; б) $p_б = p_а/\sqrt{2} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-3}$ Па; в) $p_в = 2mn(v + u)^2 \approx p_а$.

Указание. а) При ударе каждая молекула передает стенке импульс $2mv$ (см. задачу 3.1). За 1 с с 1 м^2 поверхности стенки соударяется nv молекул. Поэтому сила, действующая на 1 м^2 поверхности, т. е. давление, оказываемое пучком, будет $2mnv^2$.

б) Если молекула имеет скорость, наклоненную под углом α к стенке, то при ударе меняется только перпендикулярная к стенке составляющая скорости, и переданный при ударе стенке импульс будет $2mv \sin\alpha = \sqrt{2}mv$.

в) Если стенка движется, то, переходя в систему координат, связанную со стенкой, получаем, что молекулы движутся к стенке со скоростью $v + u$ и с такой же скоростью отражаются.

11.8. Давление увеличилось бы.

Решение. Если бы давление газа поддерживалось постоянным (сосуд прикрыт легкоподвижным поршнем), то после исчезновения сил притяжения между молекулами объем газа увеличился бы. Поэтому в сосуде с постоянным объемом возрастет давление газа на стенки.

12. ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ. ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

12.1. Давление на дно сосуда цилиндрической формы не изменится, так как оно численно равно весу всей жидкости, деленному на площадь дна. Здесь уменьшение высоты столба жидкости компенсируется увеличением ее плотности.

В коническом сосуде, расширяющемся кверху, высота столба жидкости при уменьшении объема жидкости изменится меньше, чем в цилиндрическом сосуде, а плотность жидкости – на столько же. В результате давление на дно этого сосуда увеличится.

Давление на дно конического сосуда, расширяющегося книзу, уменьшится.

12.2. 24 см; 34 см.

Решение. Обозначим длины медной и железной линеек соответственно l_1 и l_2. Длины медной и железной линеек при любых температурах будут:

$$\left.\begin{aligned} l_{1t} &= l_{10}(1 + \alpha_1 t); \\ l_{2t} &= l_{20}(1 + \alpha_2 t). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

По условию задачи

$$l_{2t} - l_{1t} = l_{20} - l_{10} = \Delta l. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что $l_{10}/l_{20} = \alpha_2/\alpha_1$. Начальные длины линеек должны быть обратно пропорциональны коэффициентам линейного расширения. Решая систему уравнений $l_{10}/l_{20} = \alpha_2/\alpha_1$; $l_{20} - l_{10} = \Delta l$, находим: $l_{10} = \Delta l \alpha_2/(\alpha_1 - \alpha_2)$; $l_{20} = \Delta l \alpha_2/(\alpha_1 - \alpha_2)$.

12.3. $\alpha = 18{,}5 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$.

Решение. Маятник часов можно принять за математический, так как по условию задачи он состоит из груза малых размеров и тонкой латунной нити. Период колебания маятника при $t_0 = 0\,°\mathrm{C}$ равен $T = 2\pi\sqrt{l_0/g}$.

Если температура воздуха повысилась, то длина маятника увеличилась и стала равной $l = l_0(1 + \alpha t)$. Период колебания маятника также увеличился: $T_1 = 2\pi\sqrt{l_0(1 + \alpha t)/g}$.

Отношение периодов колебаний маятников при разных температурах равно $\dfrac{T_1}{T_0} = \sqrt{1 + \alpha t} \approx 1 + \dfrac{\alpha t}{2}$. Отсюда $(T_1 - T_0)/T_0 = \alpha t/2$. Обозначая $T_1 - T_0$ через ΔT, получим $\alpha = 2\cdot\Delta T/(T_0 t)$. Замечая, что отношение $\Delta T/T_0 = 16$ с/1 сут $= 16/(24\cdot 3600)$, найдем значение α.

12.4. 10,4 с.

Решение. При 0 °C длина маятника станет равной $l_0 = l_t/(1+\alpha t)$. Период колебаний маятника пропорционален корню квадратному из его длины, поэтому отношение периодов колебаний маятника при 0 и 20 °C будет равно: $T/T_0 = \sqrt{l_t/l_0} = \sqrt{1+\alpha t} \approx 1 + \dfrac{\alpha t}{2}$. За сутки маятник сделает $n = 24\cdot 60\cdot 60/T$ ходов и уйдет вперед на $\tau = n\Delta T = n(T - T_0)$ с:

$$\tau = 86{,}4\cdot 10^3\,\frac{T-T_0}{T} = 86{,}4\cdot 10^3\left(1 - 1 + \frac{\alpha t}{2}\right) = 86{,}4\cdot 10^3\,\frac{\alpha t}{2}.$$

12.5. $t_1 \approx 28$ °C.

Решение. Пусть при $t_0 = 0$ °C период колебаний маятника часов T_0, а при t_1 он равен T_1. Тогда $\tau = \dfrac{T_1 - T_0}{T_0}3600\cdot 24$ с. Период маятника T связан с его длиной формулой $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, где g – ускорение свободного падения. Поэтому $T_1/T_0 = \sqrt{l_1/l_0}$. Зависимость же длины маятника от температуры определяется формулой $l_1 = l_0(1+\alpha t_1)$. В соответствии с этим $T_1/T_0 = \sqrt{1+\alpha t_1}$, или $1 + \dfrac{T_1 - T_0}{T_0} = \sqrt{1+\alpha t_1}$. Отсюда $t_1 = \dfrac{\left(1 + \dfrac{T_1-T_0}{T_0}\right)^2 - 1}{\alpha} \approx 2(T_1 - T_0)/(\alpha T_0)$, так как квадратом малой величины $(T_1 - T_0)/T_0$ можно пренебречь. Подставляя в эту формулу $(T_1 - T_0)/T_0$, выраженное через τ, окончательно находим $t_1 = \tau/(12\cdot 3600\alpha)$.

12.6. $F \approx 252$ Н.

Решение. Относительное удлинение стержня при нагревании на Δt °C равно $\Delta l/l = \alpha\Delta t$. При растяжении, по закону Юнга, $\Delta l/l = \sigma/E = F/ES$ (σ – напряжение в стержне). Исключая из этих уравнений отношение $\Delta l/l$, найдем, что к стержню нужно приложить силу $F = ES\alpha\Delta t$.

12.7. $R = \dfrac{d}{2}\,\dfrac{1+\alpha_2\Delta t}{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t} \approx 3{,}2$ м.

Указание. $l_1 = l_0(1+\alpha_1\Delta t)$, а $l_2 = l_0(1+\alpha_2\Delta t)$. Но $l_1 = \left(R - \dfrac{d}{2}\right)\beta$ (рис. 190), а $l_2 = \left(R + \dfrac{d}{2}\right)\beta$. Учитывая это, нетрудно найти R.

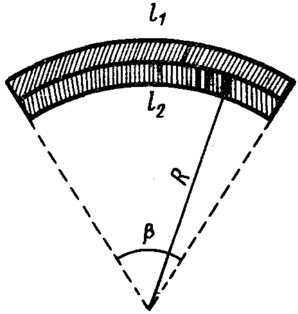


Рис. 190

12.8. 39 600 Н.

Указание. См. решение задачи 12.6.

12.9. $p_0 = 130$ Па.

Указание. Давление газа p в баллоне лампочки после заполнения части баллона станет равным атмосферному плюс давление воды, а объем V – равным (1 – 0,9987) л. Считая процесс изотермическим и воспользовавшись законом Бойля – Мариотта, найдем $p_0 = 1{,}3 \cdot 10^2$ Па.

12.10. $\rho \approx 2{,}1$ кг/м^3.

Решение. Из закона Бойля – Мариотта следует, что при атмосферном давлении газ, заполняющий баллон до откачки, занимал бы объем $V_0 = p_1 V/p_0$ ($p_0 = 10^5$ Па – нормальное давление). Газ, оставшийся в баллоне после откачки, занимал бы объем $V_0' = p_2 V/p_0$. Объем выкачанного газа при атмосферном давлении равен $V_0 - V_0' = (p_1 - p_2) V/p_0$, а его масса $m = (Q_1 - Q_2)/g$ (g – ускорение свободного падения). Отсюда плотность газа при атмосферном давлении $\rho = \dfrac{m}{V - V_0'} = \dfrac{(Q_1 - Q_2) p_0}{g(p_1 - p_2) V} \approx 2{,}1$ кг/м^3 (здесь p_1, Q_1 и p_2, Q_2 соответствуют p, Q и p_1, Q_1).

12.11. $p_1 = 751$ мм рт. ст.

Указание. Давление воздуха, находящегося в барометре над ртутью, равно разности атмосферного давления и давления, показываемого барометром.

12.12. 25 см.

Указание. После того как трубку вынимают из сосуда, давление в ней становится меньше атмосферного на величину давления оставшегося в трубке столбика ртути. Поэтому по закону Бойля – Мариотта $(l - h) \times (H - h) = Hl/2$, где h – высота оставшегося столбика ртути.

12.13. $x = {}^1/_2\left[(H + l) - \sqrt{(H + l)^2 - 4h(H + h - l)}\right] \approx 3$ см.

12.14. $h \approx 48{,}3$ см.

12.15. $x = {}^1/_2\left[(H + l + l') - \sqrt{(H + l + l')^2 - 4l'H}\right]$ см.

Указание. Из закона Бойля – Мариотта следует, что

$$(H - x)(l + l' - x) = Hl.$$

12.16. $p = \rho g h(d^2 - l^2)/(2dl) \approx 5{,}6 \cdot 10^4$ Па, где $d = (L - h)/2$.

Указание. С помощью закона Бойля – Мариотта получаем систему уравнений

$$pd = p_1(d + l); \quad pd = p_2(d - l),$$

где p_1 и p_2 – давления в верхней и нижней частях трубки соответственно, после того как ее поставили вертикально. Из условия равновесия столбика ртути имеем $p_2 - p_1 = \rho g h$.

Решая совместно эти три уравнения, находим ответ.

12.17. $l \approx 15$ см.

12.18. 80 см.

Решение. Обозначим через x длину части сосуда, заполненной водородом. Уравнения состояния водорода $p(xS) = mRT/\mu_1$ и кислорода $p[(l - x)S] = m_1 RT/\mu_2$, где $\mu_1 = 2$ г/моль и $\mu_2 = 32$ г/моль – молярные массы водорода и кислорода соответственно. Разделив одно уравнение на другое, найдем $x/(l - x) = \mu_2/\mu_1$. Отсюда $x = l\mu_2/(\mu_1 + \mu_2)$.

12.19. $p_1 = \dfrac{kMg}{(k-1)S}$; $p_2 = \dfrac{Mg}{(k-1)S}$.

Указание. Из условия равновесия поршня следует, что

$$(p_1 - p_2)S = Mg.$$

Причем $p_1/p_2 = \rho_1/\rho_2 = k$ (ρ_1 и ρ_2 – плотность газов). Решая эти системы уравнений, получим ответ.

12.20. Поверхность соприкосновения выгнута в сторону большего мяча.

Указание. У меньшего мяча относительное изменение объема будет больше.

12.21. $n = \dfrac{\lg(p/p_0)}{\lg[V/(V+\Delta V)]}$.

Решение. Процесс откачки можно считать изотермическим. Если после k-го хода поршня давление в сосуде было равно p_k, то давление после $(k+1)$-го хода поршня в соответствии с законом Бойля – Мариотта станет равным $p_{k+1} = p_k \dfrac{V}{V+\Delta V}$, поэтому после n ходов поршня давление в сосуде

$$p_n = p_{n-1}\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right) = p_{n-2}\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^2 = \ldots = p_0\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^n.$$

Для того чтобы откачать воздух в сосуде до давления p, поршень должен сделать $n = \dfrac{\lg(p/p_0)}{\lg[V/(V+\Delta V)]}$ ходов.

12.22. $V_{\text{сосуда}}/V_{\text{насоса}} = 2$.

12.23. 515 мм рт. ст.

Решение. После того как откроем кран, каждый газ заполнит весь объем сосудов $V = V_1 + V_2$. При этом в них установится давление $p = p_1 + p_2$, где p_1 и p_2 – частные (парциальные) давления газов *1* и *2* соответственно после заполнения всего объема. По закону Бойля – Мариотта $p_1' = p_1V_1/(V_1 + V_2)$ и $p_2' = p_2V_2/(V_1 + V_2)$. Следовательно, давление в сосудах будет $p = (p_1V_1 + p_2V_2)/(V_1 + V_2)$.

12.24. $2 \cdot 10^5$ Па.

Указание. По закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений газов, каждый из которых занимает весь объем баллонов. Для описания изменения состояния каждого из газов после соединения баллонов можно применить закон Бойля – Мариотта (см. задачу 12.23).

12.25. 1,36 см.

Решение. Так как в горизонтальном направлении на сосуд не действуют внешние силы, то центр тяжести системы должен оставаться на месте.

Обозначив массы кислорода и азота m_1 и m_2, можно определить начальное положение центра тяжести системы:

$$\left(\frac{l}{4} + x\right)m_1 = \left(\frac{l}{4} - x\right)m_2, \qquad (1)$$

где x – расстояние от середины сосуда до центра тяжести. Решая (1) относительно x получаем

$$x = \frac{l}{4}\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = \frac{l}{4}\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, \qquad (2)$$

где $\alpha = m_2/m_1$. Для определения α удобно воспользоваться уравнением Клапейрона – Менделеева (уравнением газового состояния)

$$pV = mRT/\mu. \qquad (3)$$

После перемешивания газов центр тяжести будет находиться посередине сосуда, и так как его положение относительно стола не должно измениться, то сосуд сдвинется на расстояние x.

Из уравнений (2) и (3) находим $x = \dfrac{l}{4}\dfrac{2\mu_{N_2} - \mu_{O_2}}{2\mu_{N_2} + \mu_{O_2}}$.

12.26. а) $V_1 = V\dfrac{mg + p_0S}{p_0S + m(g-a)}$; б) $V_2 = V\dfrac{p_0S + mg}{p_0S + m(g+a)}$.

Ускорение a поршню сообщает равнодействующая силы тяжести mg и силы давления газа на его верхнюю и нижнюю поверхности.

Поэтому в случае а)

$$ma = mg + (p_0 - p_1)S$$

и в случае б)

$$ma = (p_2 - p_0)S - mg$$

(p_1 – давление газа в цилиндре, когда он движется вниз, p_2 – давление газа в цилиндре при его движении вверх, S – площадь поршня). Давление в покоящемся цилиндре $p = p_0 + \dfrac{mg}{S}$.

Подставляя найденные из этих уравнений выражения для p, p_1 и p_2 в уравнении Бойля – Мариотта: (а) $\left(p_0 + \dfrac{mg}{S}\right)V = p_1V_1$ и (б) $\left(p_0 + \dfrac{mg}{S}\right)V = p_2V_2$, получим ответ.

12.27. См. рис. 191.

Идеальные газы подчиняются закону Бойля – Мариотта.

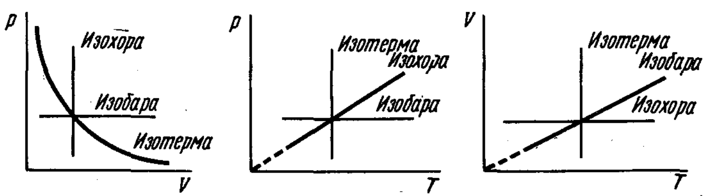


Рис. 191

12.28. 1. Температура газа на верхней кривой бо́льшая. 2. Молекулярная масса газа на верхней кривой меньшая.

Указание. Воспользоваться законом Клапейрона – Менделеева $pV = mRT/\mu$.

12.29. См. рис. 192.

Указание. Кривая уравнения изотермы в координатах p, V – гипербола; $pV = \mathrm{const}$, причем чем меньше температура газа, тем больше гипербола прижимается к осям координат. Нарисовав семейство гипербол, находим ответ.

12.30. В первом случае газ расширялся, во втором – сжимался.

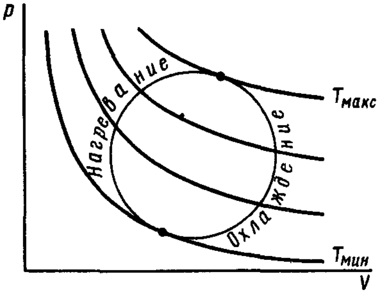


Рис. 192

Указание. Начертить в плоскости p, T изохоры, проходящие через начальные и конечные точки графика.

12.31. См. рис. 193.

Указание. Из уравнения Клапейрона – Менделеева $pV = mRT/\mu$ легко видеть, что линии постоянного объема – изохоры (в координатах p, T) и линии постоянного давления – изобары (в координатах V, T) есть прямые, проходящие через начало координат.

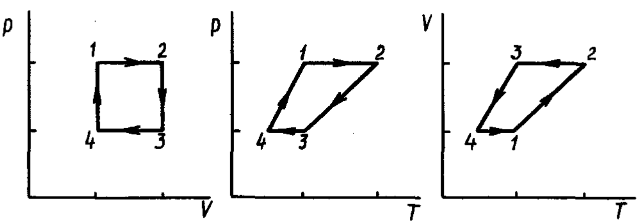


Рис. 193

Примечание. Циклу *1234* на диаграмме p, V соответствует цикл *4321* на диаграмме V, T.

12.32. 39 г.

Р е ш е н и е. Ртуть будет втягиваться в шар вследствие уменьшения давления воздуха внутри стеклянного шара при его остывании.

Таким образом, втягивающаяся ртуть поддерживает давление внутри стеклянного шара постоянным, равным внешнему.

Процесс остывания воздуха внутри шара будет изобарическим. Количество ртути, вошедшей в шар,

$$m = \rho \Delta V. \tag{1}$$

Изменение объема воздуха найдем из закона Гей-Люссака, выраженного через абсолютную температуру: $V_1/V_2 = T_1/T_2$.

Образовав производную пропорцию

$$(V_1 - V_2)/V_1 = (T_1 - T_2)/T_1,$$

найдем, что

$$\Delta V = V_1 - V_2 = V_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Подставив полученное значение ΔV в формулу (1), находим

$$m = \rho V_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

12.33. Из закона Гей-Люссака $\Delta V/V = \Delta T/T$, откуда $T = 22$ К (для газов, не сжижающихся при этой температуре – водорода и гелия).

12.34. $t_1 = 313$ °С.

Указание. Воспользоваться законом Гей-Люссака в форме $V_2/V_1 = T_2/T_1$.

12.35. $\beta_1 = 1/373$ К$^{-1}$.

Указание. Из закона Гей-Люссака $\Delta V/V = \Delta T/T$. Поэтому $\beta_1 = \dfrac{\Delta V}{\Delta T V_{100}}$.

12.36. 27 см.

Решение. Изменение объема воздуха, находящегося под поршнем, будет происходить вследствие увеличения давления воздуха и изменения его температуры. Состояние воздуха в цилиндре при положениях поршня *1* и *2* (рис. 194) связано соотношением Клапейрона $p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2$, где $p_2 = p_1 + (F/S)$ (F – вес гири, S – площадь поршня). Преобразуем это уравнение: $V_1/V_2 = p_2T_1/(p_1T_2)$. Отношение объемов можно заменить отношением высот:

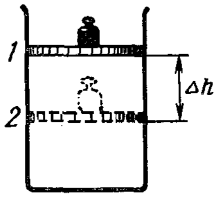


Рис. 194

$$h_1/h_2 = p_2T_1/p_1T_2.$$

Образуем производную пропорцию: $(h_1 - h_2)/h_1 = (p_2T_1 - p_1T_2)/(p_2T_1)$, откуда находим $\Delta h = h_1 - h_2 = h_1\left(1 - \dfrac{p_1T_2}{p_2T_1}\right)$.

12.37. $x \approx 7{,}45$ см.

Решение. Обозначим через V, p и T начальные объем, давление и температуру воздуха в каждой из половин сосуда и соответственно через V_1, p_1, T_1 и V_2, p_2, T_2 – состояния воздуха в них после нагревания первого шара на ΔT и такого же охлаждения второго шара. Уравнения газового состояния для газов в обоих баллонах:

$$V_1p_1/T_1 = Vp/T; \quad (1)$$

$$V_2p_2/T_2 = Vp/T. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получим

$$V_1p_1/T_1 = V_2p_2/T_2. \quad (3)$$

Но капелька ртути будет перемещаться до тех пор, пока p_1 не станет равным p_2, тогда из равенства (3) следует

$$V_1/V_2 = T_1/T_2. \qquad (4)$$

Обозначив через x смещение капельки ртути (см. рис. 53), через S – площадь сечения трубки, можно написать:

$$V_1 = V + Sx, \ V_2 = V - Sx.$$

Подставив в уравнение (4), получим $(V + Sx)/(V - Sx) = (T + \Delta T)/(T - \Delta T)$, откуда найдем $x = V\Delta T/(ST)$. Учитывая, что $S = \pi d^2/4$, получим $x = 4V\Delta T/(\pi d^2 T)$.

12.38. $2T_1/(T + T_1)$.

Решение. Уравнение состояния газа в нагретом сосуде $pV = m_1 RT_1/\mu$, а в сосуде, температура которого осталась прежней, $pV = m_2 RT/\mu$. До нагревания одного из сосудов газ описывался следующим уравнением состояния: $p_0 \cdot 2V = (m_1 + m_2) RT/\mu$. Подставляя сюда m_1 и m_2, полученные соответственно из первого и второго уравнений, найдем $p/p_0 = 2T_1/(T + T_1)$.

12.39. 1. $\dfrac{V_к}{V_в} = \dfrac{m_1}{16m_2}\dfrac{T_1}{T_0}$.

Решение. Так как поршень находится в равновесии, то давление p по обе стороны от него одинаково. Запишем уравнения Клапейрона – Менделеева для кислорода и водорода:

$$pV_к = m_1 RT_1/\mu_1; \ pV_в = m_2 RT_0/\mu_2,$$

где μ_1 и μ_2 – молярные массы кислорода и водорода, равные соответственно 0,032 и 0,002 кг/моль. Разделив эти уравнения друг на друга, получим $\dfrac{V_к}{V_в} = \dfrac{m_1}{16m_2}\dfrac{T_1}{T_0}$.

2. $p'_к = {}^8/_5 p$; $p''_к = {}^2/_5 p$.

Указание. Записать условия равновесия поршня в обоих случаях и использовать условие $\dfrac{p'_к}{p''_к} = \dfrac{2T}{{}^1/_2 T}$.

12.40. 0,45 кг/м^3.

Указание. Из уравнения $pV = mRT/\mu$ находим $\rho = m/V = p\mu/(RT)$. Задачу можно также решить, воспользовавшись тем, что при нормальном условии один моль газа занимает объем $22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3.

12.41. $p \approx 1{,}57 \cdot 10^5$ Па.

12.42. 1,82 м^3/кг.

Указание. См. задачу 12.40.

12.43. 1320 г.

12.44. 8,2 кг.

Указание. Из уравнения Клапейрона – Менделеева: $m_2 - m_1 = \dfrac{\mu p V}{R}\left(\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_1}\right)$.

12.45. $n = p_0 V_0 (T_2 - T_1) N_A/(RT_1 T_2) \approx 10^{25}$, где N_A – постоянная Авогадро.

Указание. Написав уравнение газового состояния для воздуха в комнате при температурах T_1 и T_2 и вычтя их одно из другого, получим

$$\Delta m = \mu p_0 V_0 (T_2 - T_1)/(R T_1 T_2).$$

Эта масса составляет $\Delta m/\mu$ молей или $\Delta m N_A/\mu$ молекул.

12.46. 637 качаний.

Указание. После каждого качка давление воздуха в резервуаре будет увеличиваться на одну и ту же величину p, равную парциальному давлению газа, захватываемого компрессором при качании. По объединенному газовому закону $p = p_0 V_0 T_1/(T_0 V)$.

12.47. Сухой.

Решение. Равные объемы газов при одинаковых температурах и давлениях содержат одинаковое число молекул. Следовательно, в стакане с влажным воздухом часть молекул воздуха замещена на молекулы воды, которые легче (средняя молярная масса воздуха 0,029 кг/моль, а воды 0,018 кг/моль).

12.48. $v = 1{,}55$ м/с.

Указание. Подставляя в уравнение состояния $pV = mRT/\mu$ объем газа V, протекающий за время τ, $V = vS\tau$, получим уравнение для определения v.

12.49. 1,48 г.

Указание. Воспользоваться для определения массы в начальном и конечном состояниях уравнением Клапейрона.

12.50. $\dfrac{m_1}{m} = \dfrac{p_1}{p}\dfrac{T}{T_1} \approx 0{,}05.$

12.51. 1250 К.

Указание. Для решения этой задачи можно воспользоваться уравнением Клапейрона – Менделеева.

12.52. $T_2 = T_1 + \dfrac{kl\mu V}{SmR}.$

Решение. Для того чтобы поршень, сжав пружину, поднялся на l, сила давления на него должна увеличиться на $\Delta F = kl$, а давление – на $\Delta p = \Delta F/S = kl/S$. Запишем уравнение Клапейрона для газа при температурах T_1 и T_2:

$$p_1 V = mRT_1/\mu,$$

$$p_2 (V + lS) = mRT_2/\mu.$$

Разделив первое уравнение на V и второе – на $V + lS$ и вычтя одно из другого, найдем

$$\Delta p = \frac{m}{\mu} R \left(\frac{T_2}{V + lS} - \frac{T_1}{V} \right).$$

Учитывая, что $\Delta p = kl/S$ и $lS \ll V$, получим

$$T_2 = T_1 + \frac{kl\mu V}{SmR}.$$

12.53. $p \approx 10^7$ Па.

Решение. В баллоне содержится $n_1 = 1600/32 = 50$ молей кислорода и $n_2 = 800/2 = 400$ молей водорода. Запишем уравнение состояния каждого из газов: $p_1 V/T = p_0 n_1 V_0/T_0$; $p_2 V/T = p_0 n_2 V_0/T_0$. Давление смеси на стенки сосуда равно сумме парциальных давлений: $p = p_1 + p_2 = \dfrac{p_0 V_0 T}{T_0 V}(n_1 + n_2)$.

12.54. $p = p_1 + p_2 = \left[\dfrac{m\alpha}{\mu_1} + \dfrac{m(1-\alpha)}{2\mu_1}\right]\dfrac{RT}{V} = \dfrac{m(1+\alpha)RT}{2\mu_1 V} = 1{,}8 \times 10^5$ Па, где $\alpha = 0{,}3$; $\mu_1 = 0{,}014$ кг/моль – молярная масса атомарного азота.

12.55. $\dfrac{m_а}{m_в} = {}^1/_2\,\dfrac{\mu_а}{\mu_в} = 7.$

Указание. Давление в смеси равно сумме парциальных давлений азота и водорода. Поэтому

$$p = \frac{m_а}{\mu_а/2}\frac{RT}{V} + \frac{m_в}{\mu_в}\frac{RT}{V} \text{ и } 3p = 2\frac{m_а}{\mu_а/2}\frac{RT}{V} + 2\frac{m_в}{\mu_в/2}\frac{RT}{V}.$$

Отсюда

$$\frac{m_а}{m_в} = \frac{1}{2}\frac{\mu_а}{\mu_в} = \frac{1}{2}\cdot\frac{14}{1} = 7.$$

12.56. $m \approx 8$ кг.

12.57. *Указание.* Воспользоваться законом Бойля – Мариотта и Архимеда.

13. ТЕПЛОТА И РАБОТА

13.1. 1. Не изменится. 2. Уменьшится.

Указание. 1. Начальные объемы жидкостей соответственно равны:

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{m_1}{\rho_0}(1 + \beta t_1); \; V_2 = \frac{m_2}{\rho_0}(1 + \beta t_2).$$

После выравнивания температуры $V_1' = \dfrac{m_1}{\rho_0}(1 + \beta\Theta)$ и $V_2' = \dfrac{m_2}{\rho_0}(1 + \beta\Theta)$. Так как $cm_1 t_1 + cm_2 t_2 = c(m_1 + m_2)\Theta$, то легко доказать, что $V_1 + V_2 = V_1' + V_2'$.

2. Установившаяся температура воды будет равна 4 °C, а при этой температуре вода имеет наибольшую плотность. Поэтому при выравнивании температур объем жидкости в сосуде уменьшится.

13.2. Можно, если вещество при этом будет совершать работу или претерпевать фазовый переход.

13.3. Выждать 5 мин, затем бросить сахар.

Указание. Количество теплоты, отдаваемое нагретым телом окружающей среде за одно и то же время, пропорционально разности температур тела и среды.

13.4. $m_c = 104$ г, $m_a = 46$ г.

13.5. $Q = c\rho Sl \dfrac{\Delta l}{\alpha l_0} \approx 3780$ Дж

Указание. Изменение длины стержня $\Delta l = \alpha l_0 \Delta t$. Необходимое количество теплоты $Q = cm\Delta t = c\rho Sl \dfrac{\Delta l}{l_0 \alpha}$.

13.6. $\approx 40\%$.
13.7. $m = Ns/(q\eta v) \approx 74$ г.
13.8. $N \approx 28$ кВт.

13.9. $v_1 = v \dfrac{mq\eta}{mq\eta + Mg\dfrac{h}{l}s} \approx 14$ м/с $\approx 50{,}5$ км/ч.

Указание. Во втором случае энергия двигателя расходуется не только на преодоление сил сопротивления, но и на увеличение потенциальной энергии автомобиля.
13.10. $m \approx 35{,}5$ т.
13.11. 2,7 м/с.

Решение. Условие установившегося режима, когда вся выделяемая мощность идет на нагревание проточной воды, охлаждающей установку, можно записать в виде следующего равенства:

$$N = cm\Delta t^\circ/t, \qquad (1)$$

где m/t — масса воды, протекающей за 1 с; c — удельная теплоемкость воды, равная $4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К). Но $m/t = \rho vS = \rho v\pi d^2/4$, где ρ — плотность воды; v — скорость движения воды; S — площадь сечения трубки.

Подставляя m/t в уравнение (1), получим $N = c\rho v \dfrac{\pi d^2}{4} \Delta t^\circ$, откуда $v = 4N/(c\rho\pi d^2 \Delta t^\circ)$.
13.12. $\Delta t \approx 0{,}05$ °C.
13.13. $m_1/m \approx 64\%$.

Решение. Вся кинетическая энергия свинцовой гири при ударе о препятствие идет на увеличение внутренней энергии гири, т. е. на нагрев гири до температуры плавления и на частичное ее расплавление: $\dfrac{mv^2}{2} = [cm(t_{пл} - t_0) + \lambda m_1]$. Разделив правую и левую части приведенного уравнения на m, получим $v^2/2 = c(t_{пл} - t_0) + \lambda \dfrac{m_1}{m}$, откуда искомое значение $m_1/m = \left(\dfrac{v^2}{2} - c(t_{пл} - t_0)\right)/\lambda$.

13.14. $Q = 94{,}7$ Дж.

Решение. Разность между убылью потенциальной энергии тела и приращением его кинетической энергии представляет собой работу по преодолению трения и равна количеству теплоты, выделившейся при скольжении тела по наклонной плоскости: $mgh - \frac{mv^2}{2} = Q$, но $h = l \sin \alpha$, а тогда $Q = mgl \sin \alpha - \frac{mv^2}{2}$.

13.15. $v \approx 2{,}2$ км/с (минимальная).

13.16. Во втором случае больше, так как при расширении газа совершается работа.

13.17. 370,4 Дж.

Решение. Давление p, под которым находится газ, равно атмосферному.

При нагревании воздух расширяется и поднимает поршень, преодолевая силу атмосферного давления $F = pS$, где S — площадь поршня (основание цилиндра).

Если при изобарическом нагревании поршень поднялся на высоту h, то работа, совершенная воздухом, будет $A = Fh = pSh$. Но Sh равно приращению объема воздуха $V - V_0$. Следовательно,

$$A = p(V - V_0) = p\Delta V.$$

По закону Гей-Люссака $V/V_0 = T/T_0$, откуда $V - V_0 = \Delta V = V_0 \frac{\Delta T}{T_0}$.

Подставляя значение ΔV, получаем выражение для величины работы: $A = pV_0 \frac{\Delta T}{T_0}$. Как видно из этого выражения, величина работы не зависит от площади поршня.

13.18. $A \approx 57\,000$ Дж.

Указание. $A = p\Delta V$, где изменение объема ΔV находится из уравнения газового состояния: $\Delta V = mR\Delta T/\mu p$ и $A = mR\Delta T/\mu$. Совершаемая газом работа при изобарном нагревании не зависит от начального давления.

13.19. 110 °C.

13.20. Получал: $1-2$, $4-1$. Отдавал: $2-3$, $3-4$.

Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии: количество теплоты, сообщаемое газу, идет на увеличение его внутренней энергии и на работу, совершаемую газом при его расширении.

13.21. См. рис. 195. Воздух получает теплоту на участках $1-2$, $2-3$, $3-4$. На участке $4-1$ воздух отдает теплоту.

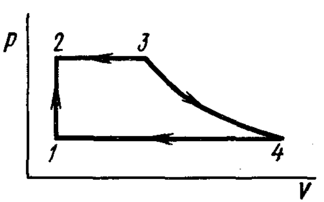


Рис. 195

13.22. $A = \frac{n-1}{n} \frac{m}{\mu} RT$.

Указание. pV-диаграмма процесса показана на рис. 196. Так как точки 1 и 3 лежат на одной изотерме, то $p_0 V_0 = \frac{1}{n} p_0 V_1$,

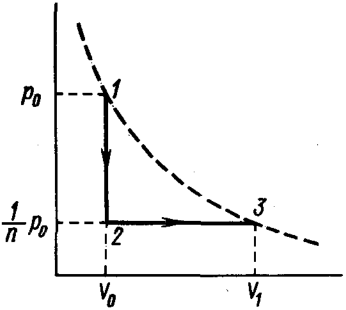


Рис. 196

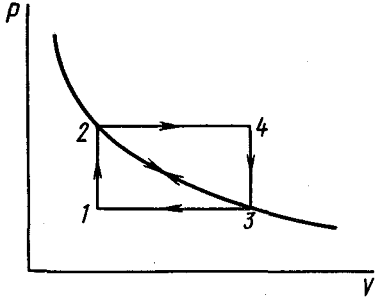


Рис. 197

отсюда $V_1 = nV_0$ и $\Delta V = V_1 - V_0 = (n-1)V_0$. Газ совершил работу $A = = \frac{1}{n}p_0\Delta V = \frac{n-1}{n}p_0V_0 = \frac{n-1}{n}\frac{m}{\mu}RT.$

13.23. 1. При процессе $3\to2\to4\to3$. 2. $A = R(T_1 - 2\sqrt{T_1T_3} + T_3) = = R(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3})^2$.

Указание. 1. Начертив диаграммы этих процессов в координатах p, V, получим прямоугольник *1234*, точки *2*, *3* которого лежат на изотерме (рис. 197) (см. задачу 12.31).

Работа, совершенная газом, равна площади фигуры цикла в координатах p, V.

2. Работа равна площади цикла:

$$A = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1) = p_2V_4 - p_1V_4 - p_2V_1 + p_1V_1.$$

Записав затем уравнение состояния газа $pV = RT$ для каждой из точек *1*, *2*, *3*, *4* и учитывая, что $p_3 = p_2$; $p_4 = p_1$; $V_1 = V_2$; $V_3 = V_4$, а также что $T_2 = T_4 = T$ и, следовательно, $T/T_1 = T_3/T$ (так как $p_1T/T_1 = p_4T_3/T$), получим ответ.

14. ИЗМЕНЕНИЕ АГРЕГАТНОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА. ВЛАЖНОСТЬ

14.1. *Указание.* Ответ зависит от температуры окружающей среды. При построении графика учесть, что $c_в/c_л \approx 2$, а $\lambda_л/(c_в\cdot 1°) \approx 80$.

14.2. $\Theta = 0$ °C. В сосуде кроме воды будет 5 г льда.

Указание. Количество теплоты, которое может отдать сосуд с водой при остывании до 0 °C, $3{,}3\cdot10^4$ Дж. Его недостаточно, для того чтобы нагреть 100 г льда на 8 °C и весь растопить.

14.3. 112,5 г воды.

14.4. $m \approx 3{,}6$ кг.

14.5. Калориметрическим методом.

14.6. $m \approx 6{,}8$ г воды.

14.7. 134 °C.

Р е ш е н и е. Если количество теплоты, которое выделит алюминиевый куб при охлаждении до 0 °С, будет равно количеству теплоты, которое необходимо, для того чтобы расплавить лед в объеме алюминиевого куба, то он полностью погрузится в лед. Следовательно, $\rho Vc(t_1 - t_0) = \rho_1 V\lambda$, где t_1 – температура, до которой нужно нагреть куб; t_0 – температура плавления льда; V – объем куба.

Отсюда $t_1 - t_0 = \rho_1\lambda/(\rho c)$.

14.8. 0,75 г.

Р е ш е н и е. Замерзание (кристаллизация) воды происходит до тех пор, пока окружающая среда будет способна поглощать выделяющуюся теплоту плавления. Кристаллизация воды прекращается, когда вся смесь окажется нагретой до температуры плавления, т. е. 0 °С.

Исходя из этого, можно написать следующее уравнение теплового баланса: $\lambda m = cM(0° - t°)$, где m – масса образовавшегося льда; λ – удельная теплота плавления льда; M – масса воды; $t°$ – температура воды.

14.9. Теплота, необходимая для испарения воды, отнимается от водоема.

14.10. Нет. Для кипения необходим подвод тепла, который может осуществиться только от более нагретого тела к менее нагретому. Если же в большей кастрюле вода была предварительно длительно прокипячена, то она может быть перегрета и в этом случае вода в меньшей кастрюле может закипеть.

14.11. Вода в большой кастрюле оказалась перегретой (нагретой выше температуры кипения), так как при предварительном ее кипячении из нее был изгнан воздух. Бросив щепотку чая, мы введем воздух, и вода в большой кастрюле закипит, при этом ее температура упадет. Вода в маленькой кастрюле перестанет кипеть, так как температуры воды в большой и малой кастрюлях сравнялись и не будет подвода тепла.

14.12. 1. Понижая давление над жидкостью до давления насыщающих паров при данной температуре. 2. Интенсивно откачивая насыщенный пар.

14.13. 11,6 % первоначальной массы воды.

Р е ш е н и е. Необходимое для образования пара тепло может быть получено только за счет теплоты отвердевания (плавления), которая освобождается при замерзании воды.

При замерзании m_1 граммов воды выделяется λm_1 джоулей тепла. За счет этого тепла образуется количество пара m_2. Если теплота парообразования воды при 0 °С равна r, то можно написать следующее равенство: $\lambda m_1 = rm_2$. Масса всей воды до откачивания $m = m_1 + m_2$. Из этих двух уравнений находим, что $m_2/(m_1 + m_2) = \lambda/(\lambda + r)$, откуда $m_2 = m\lambda/(\lambda + r) = 0{,}116\ m$.

14.14. $r_а \approx 1{,}88 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Р е ш е н и е. Количества тепла, поглощенного льдом и азотом, соответственно равны:

$$\left.\begin{aligned} Q_л &= \lambda_л m_л; \\ Q_а &= r_а m_а. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Исходя из условия, что скорость подвода тепла пропорциональна разности температур снаружи и внутри сосуда, можно записать:

$$Q_л/r_л = k\Delta t_л; \qquad (2)$$

$$Q_а/r_а = k\Delta t_а; \qquad (3)$$

$$\Delta t_л = t_2,\ \Delta t_а = t_2 - t_1.$$

Разделив уравнение (2) на выражение (3) и приняв во внимание соотношение (1), получим $\frac{\lambda_л m_л}{r_а m_а} = \frac{\Delta t_л \tau_л}{\Delta t_а \tau_а}$, откуда $r_а = \frac{\Delta t_а \tau_а}{\Delta t_л \tau_л} \lambda_л \frac{m_л}{m_а}$, где $m_а = {}^1/_2 V\rho$.

14.15. 7,3 %.

Указание. Внешняя работа равна $A = p\Delta V$, где $p = 10^5$ Па – давление пара при 100 °C, равное атмосферному давлению; ΔV – изменение объема рабочего тела; $\Delta V = mv$ (m – масса испарившейся воды). Затраченная же энергия $W = qm$. Искомая величина есть A/W.

14.16. В состоянии насыщенного пара.

14.17. Если над водой находится насыщенный пар, то при наклоне трубки уровни воды в ее коленах будут одинаковыми, а если воздух – то различными. Объясните почему.

14.18. Изменится: в узком сосуде повысится. Прекратится отвод пара из широкого колена сосуда, пар над жидкостью в этом колене станет насыщенным и его давление будет превышать давление пара над жидкостью в узком колене.

14.19. В сосуде находилось некоторое количество жидкости. Точке излома соответствует полное испарение жидкости.

14.20. 922 г.

Р е ш е н и е. Массу водяных паров в воздухе комнаты найдем, пользуясь уравнением Клапейрона – Менделеева: $pV = mRT/\mu$, откуда $m = pV\mu/(RT)$, p – фактическое давление водяных паров, равное fp_0, отсюда $m = fp_0V\mu/(RT)$.

14.21. 41,2 кг.

14.22. $f_2 = f_1 \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \approx 29\,\%$.

14.23. $f_1 = \frac{mRT}{\mu V p_0} + f \approx 0{,}7$, или 70 % (см. задачу 14.20).

14.24. $m_п = p\left(V - \frac{m}{\rho}\right)\mu/(RT) \approx 0{,}6$ г.

Указание. Так как сосуд герметичен, то пар насыщен и его давление p равно атмосферному (температура 100 °C), $\rho = 1$ г/см^3 – плотность воды.

14.25. 0,24.

Указание. Будем считать, что вода полностью испарится и пар не насыщен. Тогда он подчиняется уравнению состояния идеальных газов $pV_x = m_1RT/\mu_1$. Аналогичное уравнение можно записать и для азота: $p(V - V_x) = m_2RT/\mu_2$. Решая эти уравнения совместно, найдем $V_x/(V - V_x) = m_2\mu_1/\mu_2 m_1$, откуда $V_x/V = m_2\mu_1/(m_1\mu_2 + m_2\mu_1)$.

Для того чтобы показать, что пар действительно не насыщен, надо определить его давление и убедиться, что оно меньше атмосферного.

14.26. Возможно, когда вода нагревается в герметически закупоренном сосуде. В этом случае, оставаясь в жидком состоянии, вода может быть доведена до 374 °С (критическая температура) при давлении $2{,}21 \cdot 10^7$ Па. Температура же плавления свинца 327 °С.

III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

15. ЗАКОН КУЛОНА

15.1. Заземленный проводник поднести, не касаясь, к заряженному, затем убрать заземление. Получив положительно заряженный проводник, можно тем же способом наэлектризовать второй проводник отрицательно.

15.2. Заряженный пробный шарик внести, не касаясь, внутрь полого проводника, прикоснуться к проводнику пальцем (заземлить на короткое время) и затем шарик удалить. Так же поступить со вторым проводником.

15.3. В обоих случаях уменьшится вследствие электростатической индукции и поляризации диэлектрика.

15.4. Нет, незаряженное тело вследствие электростатической индукции будет притягиваться.

15.5. Да.

15.6. Электростатическая индукция приводит к такому перераспределению зарядов на шарах, при котором одноименные заряды оказываются на большем расстоянии, чем разноименные (рис. 198). Может случиться, что одноименно заряженные металлические шарики будут даже притягиваться. Это возможно, если заряд одного из шариков много больше заряда другого.

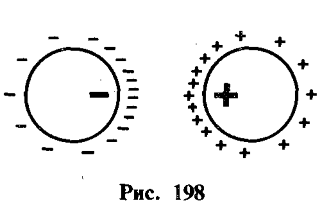


Рис. 198

15.7. Увеличится.

Указание. Рассмотреть поляризацию диэлектрика.

15.8. $9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл².

15.9. $q_1 \approx 3{,}8 \cdot 10^{-5}$ Кл;

$q_2 \approx 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Кл.

15.10. $q_1 \approx \pm 2{,}67 \cdot 10^{-7}$ Кл; $q_2 \approx \mp 0{,}67 \cdot 10^{-7}$ Кл.

Указание. После соединения потенциалы шаров становятся одинаковыми.

15.11. 1,6 г/см³.

Решение. Сумма всех сил, действующих на каждый шарик, должна равняться нулю. Поэтому (рис. 199, *а*) $F = mg\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)$, где

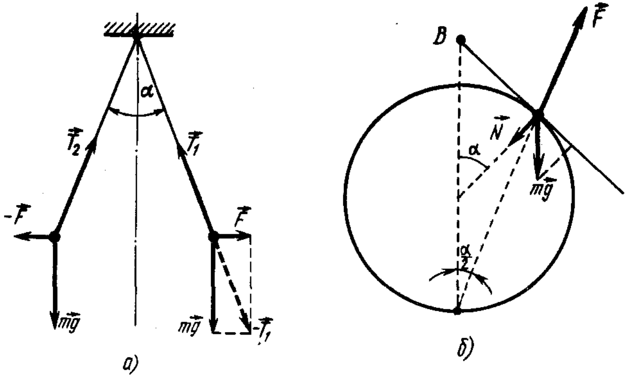


Рис. 199

F – сила электростатического отталкивания шариков; m – их масса, а α – угол расхождения.

После погружения F уменьшается в ε раз, а вертикальная сила становится равной $mg - F_{\text{выт}} = \frac{\rho - \rho_{\text{к}}}{\rho} mg$, где ρ и $\rho_{\text{к}}$ – плотности шариков и керосина соответственно. Для того чтобы α не изменилось, должно выполняться условие $\frac{\rho - \rho_{\text{к}}}{\rho}\varepsilon = 1$.

Отсюда $\rho = \frac{\varepsilon\rho_{\text{к}}}{\varepsilon - 1}$.

15.12. Шарики соприкоснутся, а затем установятся на расстоянии $a_1 = a/\sqrt[3]{4}$.

15.13. $v = 2{,}25 \cdot 10^8$ см/с.

Указание. Центростремительное ускорение сообщается электрону силой притяжения его к ядру.

15.14. $R \approx 0{,}076$ мм.

Указание. Радиус капелек найдем, приравняв силу взаимного притяжения силе электростатического отталкивания:

$$\gamma\,\frac{(^4/_3\pi R^3)^2\rho^2}{l^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2},$$

где ρ – плотность воды.

15.15. Сила, действующая на заряд $+q$, направлена вдоль прямой, параллельной линии, соединяющей заряды $+Q$ и $-Q$.

15.16. $q_1 = -q/\sqrt{3}$.

15.17. $q_1 \approx 0{,}957\ q$. Равновесие неустойчивое, достаточно малого отклонения любого из зарядов, чтобы оно нарушилось.

15.18. $q \approx 6 \cdot 10^{-8}$ Кл.

15.19. $F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{6} \approx 9{,}8 \cdot 10^{-5}$ Н. Вдоль высоты тетраэдра.

Указание. Заряды расположены в вершинах тетраэдра. Из соображений симметрии очевидно, что равнодействующая трех сил, действующих на каждый из зарядов, направлена вдоль соответствующей высоты тетраэдра. В этом можно убедиться также непосредственно. Разложим каждую из сил на две составляющие, одна из которых направлена вдоль высоты, а другая лежит в плоскости, перпендикулярной высоте. Составляющие, лежащие в этой плоскости, образуют друг с другом углы в 120° и их векторная сумма равна нулю. Каждая из составляющих вдоль высоты равна $q^2 \cos\alpha/(4\pi\varepsilon_0 a^2)$, где $\cos\alpha = \sqrt{2/3}$ (это можно найти из геометрических соотношений).

15.20. а) $Q_A = Q_B = q - 8\pi\varepsilon_0 mgR^2/q$; б) $Q_A = Q_B = q + 8\pi\varepsilon_0 mgR^2/q$.

Указание. Сумма всех сил, действующих на шарик с зарядом q в проекции на направление, касательное к окружности, равна нулю:

$$\frac{Q_A q}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^2} \pm \frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{q^2}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R^2} = 0.$$

15.21. $Q \geqslant 8\pi\varepsilon_0 mgd^2/q$.

Решение. Шарик удерживается в верхней точке, если при отклонении возникает возвращающая сила (рис. 199, *б*). Сумма проекций сил на направление касательной, проведенной через точку, в которой находится шарик, $F\sin(\alpha/2) - mg\sin\alpha > 0$, т. е.

$$\frac{qQ\sin\dfrac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0\left(d\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2} - 2mg\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} > 0,$$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}\left\{\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left(d\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2} - 2mg\cos\dfrac{\alpha}{2}\right\} > 0$ (α – угол между вертикалью и радиусом, проведенным в точку касания), должна быть положительна при малых α (вплоть до нуля). Поэтому $Q \geqslant 8\pi\varepsilon_0 mgd^2/q$.

16. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ. РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ПОТЕНЦИАЛ

16.1. 1. См. рис. 200.

2. Нет, не могут. Если бы существовала замкнутая силовая линия, то, перенося вдоль нее заряд, мы совершили бы работу, не равную нулю.

16.2. Нет. Направление касательной к силовой линии совпадает с направлением силы, действующей на заряд, а значит, с направлением ускорения заряда. Траектория же движения заряда – это линия, касательная к которой совпадает с направлением скорости заряда.

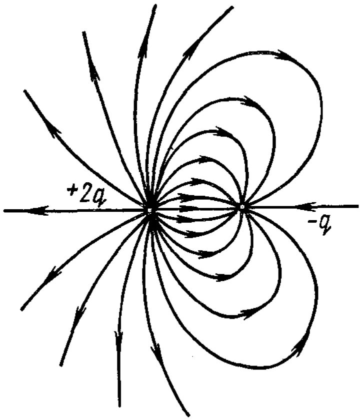


Рис. 200

16.3. $E = 246$ В/м.

Указание. Напряженности складываются векторно.

16.4. 1) $E_1 = 1{,}15q/(4\pi\varepsilon_0 a^2)$; 2) $E_2 = 1{,}06q/(4\pi\varepsilon_0 a^2)$.

16.5. а) Двигаться вправо; б) двигаться влево; в) оставаться в покое.

Указание. Незаряженный шарик должен двигаться в том направлении, в котором возрастает величина напряженности поля.

16.6. $d = \sqrt{\dfrac{qQ\,(M+m)}{4\pi\varepsilon_0 E\,(Qm+qM)}}$.

Указание. Ускорение, приобретаемое каждым заряженным телом в направлении E, определяется суммой сил взаимодействия зарядов и действия поля:

$$\frac{1}{m}\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 d^2} - qE\right) = \frac{1}{M}\left(QE - \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\right).$$

16.7. $\Delta\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) = 4{,}5\cdot 10^3$ В. От угла между прямыми qA и qB не зависит.

16.8. $A = q\Delta\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\dfrac{q_1}{d+l} + \dfrac{q_2}{l}\right) - \left(\dfrac{q_1}{d+l+a} + \dfrac{q_2}{l+a}\right)\right] =$

$$= \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{(d+l)(d+l+a)} + \frac{q_2}{l(l+a)}\right].$$

16.9. Нельзя, так как соединение точек проводником уравнивает их потенциалы: $q = 4\pi\varepsilon_0 ER^2 \approx 5{,}9\cdot 10^5$ Кл; $\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 R) \approx 8{,}3\cdot 10^8$ В.

16.10. $A \approx 1{,}2\cdot 10^{-6}$ Дж.

Решение. $A = q_1(\varphi_2 - \varphi_1)$, где $\varphi_1 = q_2/(4\pi\varepsilon_0 r_1)$, $\varphi_2 = q_2/(4\pi\varepsilon_0 r_2)$.

16.11. См. рис. 201, *а*, *б*, *в*.

Указание. Воспользоваться принципом суперпозиции полей, построив сначала графики $E(x)$ и $\varphi(x)$ полей каждого из зарядов и затем сложив их.

16.12. $-a/r$.

Указание. Если заряд 1-го шара после его первого заземления равен q_1, то $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{r} + \dfrac{q}{a}\right) = 0$ (потенциал шара равен нулю). Отсюда $q_1 =$

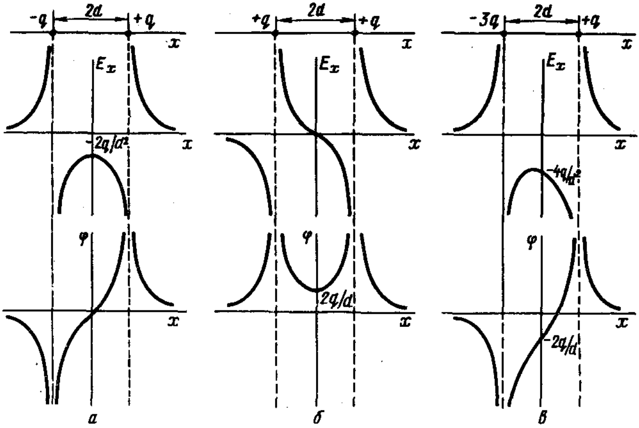


Рис. 201

$= -q\dfrac{r}{a}$. Аналогично найдем, что после заземления 2-го шара на нем будет заряд q_2 такой, что $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_2}{r}+\dfrac{q_1}{a}\right)=0$, т. е. $q_2=-q_1\dfrac{r}{a}=$ $=q\,(r/a)^2$, и т. д. После n операций на 1-м шарике будет заряд $q\,(r/a)^{2n-1}$, а на 2-м – заряд $-q\,(r/a)^{2n}$. Их отношение равно $-a/r$.

16.13. 1. $r\approx 7{,}1$ см, $t\approx 2{,}8\cdot 10^{-8}$ с. 2. $W\approx 0{,}11$.

16.14. $8{,}4\cdot 10^6$ м/с.

16.15. а) Не изменится; б) уменьшится в ε раз.

Указание. $E=U/d$, а увеличение зарядов на обкладках конденсатора компенсирует уменьшение поля, вызванное поляризацией диэлектрика.

16.16. $\Delta q\approx 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

Указание. Условие равновесия пылинки $mg=qE$, где $E=U/d$ – напряженность поля внутри конденсатора и q – заряд пылинки.

16.17. Через время $t=0{,}45$ с.

Решение. Капелька будет падать с ускорением, которое мы найдем по второму закону Ньютона: $ma=mg-qE$, откуда $a=$ $=g-\dfrac{q}{m}\dfrac{U_2}{d}$. Из условия равновесия капельки (см. предыдущую задачу) находим, что $q/m=gd/U_1$. Тогда $a=g\left(1-\dfrac{U_2}{U_1}\right)$, а время падения $t=\sqrt{d/a}$.

16.18. $Q=\varepsilon_0 mgS\,\mathrm{tg}\,\alpha/q\approx 3{,}3\cdot 10^{-8}$ Кл.

Указание. Равнодействующая силы натяжения нити и веса шарика равна $mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Эта сила уравновешивается силой, действующей на заряд шарика со стороны электрического поля, равной qE, где

E – напряженность поля ($E = U/d$, $U = Q/C$; Q – искомый заряд, а $C = \varepsilon_0 S/d$ – емкость плоского конденсатора). Поэтому $mg \operatorname{tg} \alpha = qQ/\varepsilon_0 S$, откуда

$$Q = \varepsilon_0 mg \operatorname{tg} \alpha \cdot S/q.$$

16.19. $q \approx 1{,}73 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Указание. См. решение предыдущей задачи.

16.20. $v \approx 2{,}53 \cdot 10^6$ м/с.

16.21. $\varphi_1 = -\dfrac{mv^2}{2e} + \varphi \approx 190{,}5$ В.

Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии.

16.22. Параболу – траекторию тела, движущегося в постоянном и однородном поле. Приблизится на расстояние $x = d\left(1 - \dfrac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2eU}\right)$ к верхней пластине. Если $eU < mv_0^2 \sin^2 \alpha/2$, то попадет на верхнюю пластину.

16.23. Увеличится на 50 эВ $= 8 \cdot 10^{-18}$ Дж. Энергия конденсатора при этом не изменяется. Изменение кинетической энергии электрона происходит за счет его дополнительной потенциальной энергии, которую электрон получил, влетая в конденсатор. Эта потенциальная энергия была, в свою очередь, приобретена за счет начальной кинетической энергии электрона.

16.24. В два раза.

16.25. $U = 150$ В.

Решение. Разложим начальную скорость электрона на две составляющие: v_{0x} – вдоль пластин и v_{0y} – перпендикулярно пластинам (рис. 202). Очевидно, v_x при движении электрона внутри конденсатора изменяться не будет (в этом направлении силы не действуют); v_y будет изменяться и может стать равной нулю (при соответствующем значении напряженности поля между пластинками) за время полета электрона в конденсаторе. Тогда электрон по выходе из конденсатора будет двигаться со скоростью $v = v_x = v_{0x}$, т. е. параллельно пластинам:

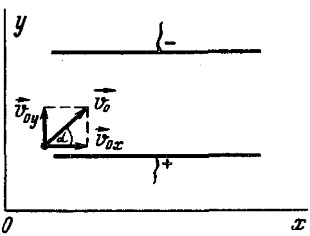


Рис. 202

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha; \; v_{0x} = v_0 \cos \alpha; \; v_y = v_{0y} - at; \; v_x = v_{0x};$$

v_y станет равна нулю при

$$a = v_{0y}/t = v_0 \sin \alpha / t, \qquad (1)$$

где t – время движения электрона между пластинами;

$$t = l/v_x = l/(v_0 \cos \alpha). \qquad (2)$$

С другой стороны, по второму закону Ньютона

$$a = F/m = eE/m = eU/md, \qquad (3)$$

где E – напряженность поля; e – заряд электрона; U – разность потенциалов между пластинами. Приравняв выражение (1) к (3) и предварительно подставив в равенство (1) значение t из равенства (2), получим

$$eU/(md) = v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha/l, \qquad (4)$$

откуда $U = mv_0^2 \sin 2\alpha \cdot d/(2el)$. Подставив значение $mv_0^2/2 = W$ в формулу (4), найдем, что $U = Wd\sin 2\alpha/(el)$.

Расчет ведем, взяв за единицу энергии 1 эВ, тогда заряд электрона равен 1 э; $U = \dfrac{1500 \text{ эВ} \cdot 0{,}5 \text{ см}}{1 \text{ э} \cdot 5 \text{ см}} = 150$ В.

Как видно из решения задачи, значения e и m не понадобились.

16.26. $v = 1{,}33 \cdot 10^7$ м/с; $\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}88$; α – угол между направлениями вектора скорости электрона и плоскостью пластин.

Указание. См. решение предыдущей задачи.

16.27. $U_2 = 2d^2U_1/l^2 = 400$ В.

Указание. См. решение задачи 16.25. Наименьшее значение напряжения – это то, при котором электрон, двигаясь по параболической траектории (подобно телу, брошенному горизонтально, в поле силы тяжести), будет попадать в край пластины.

16.28. $v_1 - v_0 \approx (eE)^2l^2/(2m^2v_0^3) = 2{,}5 \cdot 10^7$ см/с.

Указание. Задачу можно решить, воспользовавшись результатами задачи 16.25.

Другой способ решения основан на законе сохранения энергии $\dfrac{mv_0^2}{2} + e\varphi_0 = \dfrac{mv_1^2}{2} + e\varphi_1$, где φ_0 и φ_1 – потенциалы соответствующих точек конденсатора, причем $\varphi_0 - \varphi_1 = Ex$. Электрон движется в конденсаторе с ускорением $a = eE/m$, время $t = l/v_0$. Поэтому $x = \dfrac{eE}{2m}\dfrac{l^2}{v_0^2}$. Подставляя, получим $v_1^2 - v_0^2 \approx \dfrac{(eE)^2l^2}{m^2v_0^2}$. Принимая, что $v_1 + v_0 \approx 2v_0$, получим $v_1 - v_0 = (eE)^2l^2/(2m^2v_0^3)$.

16.29. $v = \sqrt{2\left[gh - \dfrac{q^2}{mh}(1 - \operatorname{tg}\alpha)\right]}$.

Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии. Потенциальная энергия создается полем тяготения Земли и электрическим полем заряда.

16.30. В первом случае шар поднимается на большую высоту:

$$H_1 = H + \frac{q^2}{mg}\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{H}\right) > H.$$

Во втором случае $H_2 = H$.

Указание. Учесть, что в первом случае во время удара заряды нейтрализуются.

16.31. $r = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ см.

Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии:

$$\frac{2mv_0^2}{2} = e\,\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

16.32. Решение. Новое в сравнении с предыдущей задачей то, что общий импульс электронов не равен нулю. Поэтому задачу лучше решать в системе отсчета, которая имеет скорость $v/2$ в направлении движущегося электрона.

В этой системе отсчета, называемой системой центра инерции, оба электрона движутся навстречу друг другу со скоростью $v/2$, сумма их количеств движения равна нулю. Применяя закон сохранения энергии, можно записать:

$$2\frac{m(v/2)^2}{2} = e\varphi = e\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}, \text{ откуда } r = e^2/(\pi\varepsilon_0 m v^2).$$

16.33. $5q^2/(12\pi\varepsilon_0 r)$.

Указание. Работа будет равна разности потенциальных энергий систем. Потенциальная энергия каждой системы находится как сумма работ поочередного перемещения каждого из зарядов из бесконечности для составления соответствующей конфигурации.

16.34. а) $E_1 = 0$; $\varphi_1 = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$; б) $E_2 = qa/(4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(r^2 + a^2)^3})$; $\varphi_2 = q/(4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + a^2})$.

Указание. Условно разобьем кольцо на малые элементы. Суммируя потенциалы, создаваемые отдельными элементами, находим: $\varphi_1 = \sum \Delta q/r = q/r$; $\varphi_2 = \sum \Delta q/R = q/\sqrt{r^2 + a^2}$. Напряженности складываются векторно. Поэтому $E_1 = 0$, а $E_2 = \sum \frac{\Delta q}{R^2}\cos\alpha = \frac{qa}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$ и направлена вдоль оси (составляющие напряженности поля от элементов, расположенных диаметрально противоположно, в плоскости, перпендикулярной оси, взаимно компенсируют друг друга).

16.35. $v_0 = \sqrt{\gamma e/\varepsilon_0 m}$.

Решение. Из закона сохранения энергии сумма кинетической и потенциальной энергии электрона постоянна.

На бесконечности энергия электрона равна нулю. В центре кольца $\frac{mv_0^2}{2} - \frac{qe}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0$, где $q = 2\pi\gamma r$ (см. задачу 16.32). Поэтому $v_0 = \sqrt{\gamma e/\varepsilon_0 m}$.

16.36. Да, несмотря на то что на различных участках поверхности шара B будут находиться разноименные заряды.

16.37. Напряженность поля равна нулю, а потенциал равен потенциалу на поверхности.

Указание. Условие статического распределения зарядов требует, чтобы внутри проводника напряженность поля равнялась нулю, а у поверхности была направлена по нормали к ней. Из этого же условия следует, что потенциал внутри проводника в любой точке одинаков и равен потенциалу на поверхности.

16.38. 1. На внутренней и внешней поверхностях сферы возникнут индуцированные заряды, равные соответственно $-Q$ и $+Q$.

Плотность зарядов на внутренней поверхности сферы не одинакова — она наибольшая в точках, находящихся ближе к заряженному шарику.

На внешней поверхности сферы заряды оказываются свободными и поэтому распределены равномерно с плотностью $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ (R – радиус внешней поверхности сферы).

2. См. рис. 203. Силовые линии поля перпендикулярны поверхности сферы, так как сфера представляет собой эквипотенциальную поверхность. Число же силовых линий вне и внутри сферы должно быть одинаковым. При перемещении шарика поле вне сферы изменяться не будет.

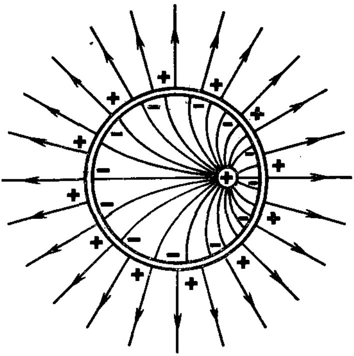


Рис. 203

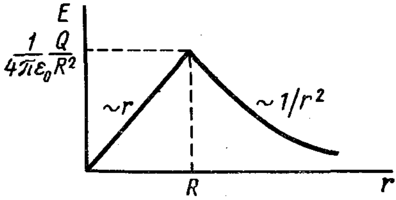


Рис. 204

3. Будет с силой, с которой действовал бы шарик с зарядом $+Q$, помещенный в центре сферы.

4. Заряды на внешней поверхности сферы исчезнут, поле вне сферы отсутствует. Внутри сферы поле останется прежним.

16.39. $E = Qr/(4\pi\varepsilon_0 R^3)$ при $r < R$; $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ при $r > R$ (рис. 204).

Указание. Электрическое поле на расстоянии r от центра сферы создается только зарядами, находящимися внутри сферы радиусом r, так как заряженный внешний сферический слой внутри себя поле не создает (см. задачу 16.37). Заряд шара радиусом r будет $q = Qr^3/R^3$. На своей поверхности он создает поле $E = Qr/(4\pi\varepsilon_0 R^3)$. При $r > R$ электрическое поле создается всем зарядом шара и $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$.

16.40. См. рис. 205. Отрезок, проведенный из точки a – парабола.

16.41. См. рис. 206, *а* и *б*. Величина напряженности поля в зазоре между шаром и слоем, а также вне слоя изменяется $\sim 1/r^2$, внутри металлического слоя равна нулю, внутри слоя диэлектрика $\sim 1/(\varepsilon r^2)$. Потенциал поля внутри металла постоянен, внутри зазора и вне слоя изменяется $\sim 1/r$; внутри слоя диэлектрика $\sim 1/(\varepsilon r)$.

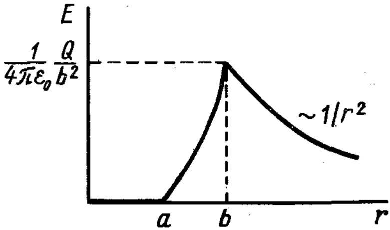


Рис. 205

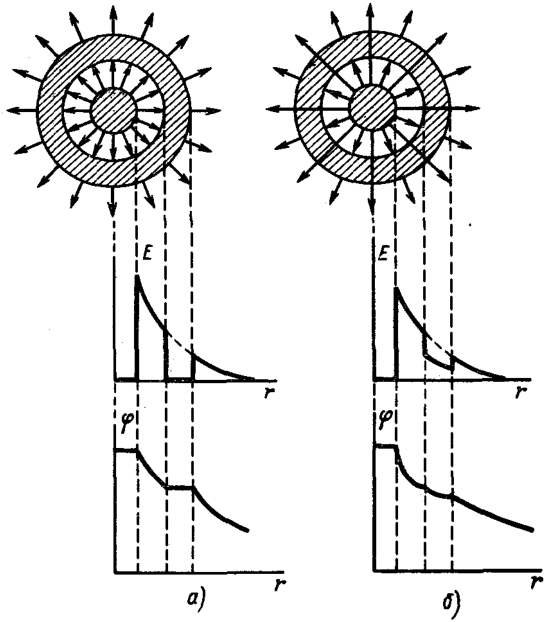


Рис. 206

16.42. Внешней $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{R}$; внутренней $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R}+\frac{q}{r}\right)$.

16.43. $E_1 = 0$, $\varphi_1 = 2400$ В; $E_2 = 7{,}5\cdot 10^4$ В/м, $\varphi_2 = -600$ В; $E_3 = -1{,}67\cdot 10^4$ В/м, $\varphi_3 = -1000$ В.

Указание. См. задачу 16.37.

16.44. Изменится на величину $\Delta\varphi = \varphi\left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right)$.

Указание. Заряд $q = 4\pi\varepsilon_0\varphi R_1$ перетечет с шара на поверхность оболочки. Потенциал внутри заряженной сферы равен $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \varphi\frac{R_1}{R_2}$.

16.45. $\varphi' = \varphi\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$.

Указание. На внешней сфере индуцируется заряд $-4\pi\varepsilon_0\varphi R_1$. Воспользовавшись результатами задачи 16.42, получаем $\varphi' = \varphi + \left(-\frac{\varphi R_1}{R_2}\right)$.

16.46. $\Delta q = Q\frac{r_1 r_2}{(r_1+r_2)(3r_1+2r_2)}$.

Решение. Вначале заряд распределится между шарами пропорционально их радиусам: $q_1 = Qr_1/(r_1+r_2)$; $q_2 = Qr_2/(r_1+r_2)$. После помещения шара радиусом r_1 внутрь заземленной металлической сферы потенциал на его поверхности станет равен (см. задачу 16.45) $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'_1}{r_1} - \frac{q'_1}{R}\right) = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{q'_1}{r_1}$. Заряды же перераспределяются до выравнивания потенциалов: $q'_1 : q'_2 = 3r_1/2 : r_2 = 3r_1 : 2r_2$, а сумма зарядов остается прежней: $q'_1 + q'_2 = Q$, откуда найдем, что $q'_1 = Q \cdot 3r_1/(3r_1 + 2r_2)$. По соединительному проводу пройдет заряд $\Delta q = q'_1 - q_1 = \frac{Q \cdot 3r_1}{(3r_1 + 2r_2)} - \frac{Qr_1}{r_1 + r_2} = Q\frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)(3r_1 + 2r_2)}$.

16.47. $\varphi = Q(R - r)/(4\pi\varepsilon_0 R^2) = 225$ В.

Решение. Заряд Q на внешней сфере создает внутри ее потенциал $\varphi_1 = Q/(4\pi\varepsilon_0 R)$. На заземленном внутреннем шаре наводится заряд q противоположного знака (благодаря неоднородности поля в месте введения проводника). При этом на внутренней поверхности сферы радиусом R будет находиться часть заряда Q, численно равная q. Потенциал внутренней сферы $\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} - \frac{q}{r}\right)$. Так как сфера заземлена, то $\varphi_0 = 0$ и отсюда $q = Qr/R$. На расстоянии r_1 от центра сферы ($r < r_1 < R$) потенциал $\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} - \frac{q}{r_1}\right)$; на поверхности большой сферы $\varphi = Q - q/(4\pi\varepsilon_0 R) = Q(R - r)/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$.

16.48. $E = 0$ при $r < r_1$ и $r > r_3$; $E = k\frac{q}{r^2}\frac{r_1}{r_2}\frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1}$ при $r_1 < r < r_2$; $E = k\frac{q}{r^2}\frac{r_3}{r^2}\frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}$ при $r_2 < r < r_3$; $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.

Решение. На внутренней и внешней сферах по индукции наводятся заряды q_1 и q_3, противоположные по знаку заряду q на средней сфере (см. предыдущую задачу). Из условия равенства нулю потенциалов внутренней и внешней сфер имеем систему уравнений для определения зарядов q_1 и q_3:

$$-\frac{q_3}{r_3} + \frac{q}{r_2} - \frac{q_1}{r_1} = 0; \quad -\frac{q_1}{r_3} + \frac{q}{r_3} - \frac{q_3}{r_3} = 0.$$

Решая систему уравнений, находим $q_1 = q\frac{r_1}{r_2}\frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1}$; $q_3 = q\frac{r_3}{r_2} \times \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}$. Учитывая, что заряженная сфера внутри себя электрического поля не создает, а вне – такое же, как у точечного заряда, равного заряду сферы и помещенного в ее центре, находим напряженность электрического поля на расстоянии r от центра сфер:

$$0 < r < r_1, \; E = 0;$$

$$r_1 < r < r_2, \; E = k\frac{q_1}{r_2} = k\frac{q}{r^2}\frac{r_1}{r_2}\frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1};$$

$$r_2 < r < r_3,\ E = k\frac{q - q_1}{r^2} = k\frac{q}{r^2}\frac{r_3}{r_2}\frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1};$$

$$r > r_3,\ E = 0;\ k = 1/(4\pi\varepsilon_0).$$

16.49. $A \approx 1{,}13\cdot 10^{-4}$ Дж.
16.50. $Q \approx 3{,}3\cdot 10^{-6}$ Кл.

16.51. $v = \sqrt{v_0^2 - \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{mR}}$.

Указание. Из закона сохранения энергии имеем:

$$\Delta T = -\Pi,\ \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -q(\varphi_{\text{внутр}} - \varphi_\infty);\ \varphi_\infty = 0,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R}.$$

16.52. $T = ne^2t/C$.
Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии: $T = e\varphi$, где φ – запирающая разность потенциалов, равная q/C.
16.53. См. рис. 207.
Указание. См. задачу 16.37.

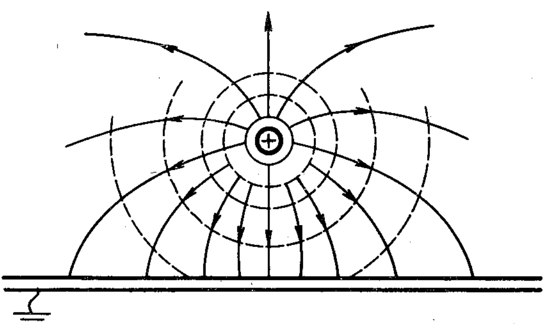


Рис. 207

16.54. $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4a^2} = 2{,}5\cdot 10^{-4}$ Н.

Указание. Действие проводящей плоскости с ее индуцированными зарядами можно заменить действием точечного заряда, являющегося зеркальным отображением данного заряда в проводящей плоскости. Действительно, плоскость, проходящая посередине между двумя точечными зарядами $+q$ и $-q$ перпендикулярно к линии, соединяющей эти заряды, является эквипотенциальной. Потенциал ее равен нулю $\left[\text{потенциал каждой из точек равен } \varphi = \frac{q}{r} + \left(-\frac{q}{r}\right) = 0\right]$. Если в этой плоскости будет находиться неограниченная или же заземленная проводящая поверхность, то поле между зарядами не изменится (рис. 208). Сила же, действующая на заряды, определяется полем.

16.55. $\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$.

Указание. Весь объем шара является эквипотенциальной областью, потенциал которой равен потенциалу, создаваемому данным точечным зарядом на расстоянии, равном расстоянию от него до центра шара. Потенциал же, создаваемый индуцированными зарядами, находящимися на поверхности шара, равен нулю, так как сумма индуцированных зарядов равна нулю (это легко показать для центра шара).

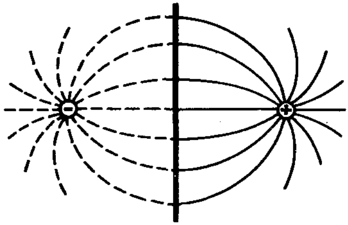


Рис. 208

17. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ

17.1. Решение. При соединении двух заряженных шаров проволокой будет происходить перемещение зарядов от шара с большим потенциалом к шару с меньшим потенциалом. Перемещение зарядов прекратится, когда потенциалы шаров выравняются. Обозначим заряды шаров q_1 и q_2. Тогда потенциал шаров $\varphi = (q_1 + q_2)/(4\pi\varepsilon_0 (R_1 + R_2))$. Заряды на шарах после соединения их будут: $q'_1 = C_1\varphi = 4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi$, $q'_2 = C_2\varphi = 4\pi\varepsilon_0 R_2\varphi$ (шары достаточно удалены друг от друга).

Плотности зарядов на шарах: $\sigma'_1 = q'_1/S_1 = \varepsilon_0 R_1\varphi/R_1^2$, $\sigma'_2 = q'_2/S_2 = \varepsilon_0 R_2\varphi/R_2^2$, откуда $\sigma'_1/\sigma'_2 = R_2/R_1$ или $\sigma'_1 R_1 = \sigma'_2 R_2$. Плотности зарядов на шарах обратно пропорциональны их радиусам.

17.2. $q = (q_1 d_2 - q_2 d_1)/(d_1 + d_2) = 9{,}5\cdot 10^{-10}$ Кл.

Указание. Заряды q'_1 и q'_2 шаров после соединения их проволокой легко находятся из условия равенства их потенциалов:

$$q'_1 = \frac{q_1 + q_2}{d_1 + d_2} d_1; \quad q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{d_1 + d_2} d_2.$$

По проволоке от первого шара ко второму протечет заряд

$$q = q_1 - q'_1 = (q_1 d_2 - q_2 d_1)/(d_1 + d_2).$$

17.3. $r = R\left(\dfrac{\varphi}{\varphi_1} - 1\right) \approx 46{,}6$ см.

17.4. $\varphi = n^{2/3}\varphi_0$.

Решение. Общий заряд сохраняется: $Q = nq$, где Q — заряд образовавшейся капли; q — заряд маленькой капли.

Емкость образовавшейся капли пропорциональна ее радиусу, который определяется из соотношения $R^3 = nr^3$. Следовательно, потенциал $\varphi = Q/4\pi\varepsilon_0 R = nq/(4\pi\varepsilon_0 r\sqrt[3]{n}) = \sqrt[3]{n^2}\varphi_0$, где $q/4\pi\varepsilon_0 r = \varphi_0$ — потенциал капель до слияния.

17.5. $\varphi = 75$ В; $E = 25$ В/см. Емкость конденсатора не изменится.

Решение. Заряды на пластинах конденсатора индуцируют на сторонах незаряженной пластины заряды, противоположные по знаку и равные друг другу и зарядам на пластинах (рис. 209). Поэтому напряженность поля внутри конденсатора не изменится. Обозначив искомый потенциал через φ, имеем $E = U/d = (U - \varphi)/(d - l) = \varphi/l$, откуда $\varphi = 75$ В, а напряженность поля $E = U/d = (U - \varphi)/(d - l) = 25$ В/м. Заметим, что введение незаряженной тонкой металлической пластины в конденсатор не меняет распределения потенциала и поля

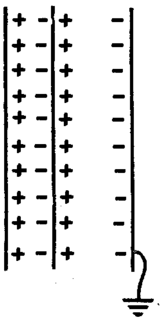


Рис. 209

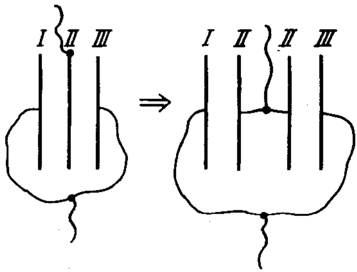


Рис. 210

в конденсаторе. Емкость конденсатора не изменится. Образовавшуюся систему можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора.

17.6. $E = 50$ В/см; $\varphi = 50$ В. Заряд увеличится в два раза.

Решение. Пластины имеют одинаковый потенциал и ввиду их симметричного расположения он равен 50 В, напряженность поля между ними равна нулю. Напряженность поля в зазорах $E = U/(d/2) = 50$ В/см. Заряд на пластинах конденсатора ввиду увеличения напряженности поля также увеличится в два раза (конденсатор подключен к источнику). Этот же результат следует из того, что емкость полученного конденсатора возросла вдвое.

17.7. $C \approx 7{,}4 \cdot 10^{-10}$ Ф $= 740$ пФ.

Указание. Следует рассматривать систему как два параллельно соединенных конденсатора (рис. 210).

17.8. а) $C = \dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon S}{d(\varepsilon + 1)} = \dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1}C_0$, б) $C = 2\varepsilon_0 S/d = 2C_0$.

17.9. $q_1 = 10^{-5}$ Кл; $q_2 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл; $q_3 = 6 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Решение. Конденсаторы C_2 и C_3 (см. рис. 63) соединены параллельно. Разности потенциалов между их обкладками равны между собой (обкладки присоединены к одним и тем же точкам): $U_2 = U_3 = U'$. Заряд каждого конденсатора пропорционален его емкости:

$$q_2 = C_2U',\ q_3 = C_3U'.$$

Полный заряд этих двух конденсаторов $q' = q_2 + q_3 = (C_2 + C_3)\,U'$, откуда $U' = (q_2 + q_3)/(C_2 + C_3)$.

Конденсатор C_1 присоединен последовательно к конденсаторам C_2 и C_3. Благодаря явлению индукции на соединенных между собой обкладках конденсатора C_1 и конденсаторов C_2 и C_3 заряды равны и противоположны по знаку: $q_1 = q'_1 = q_2 + q_3$.

Разность потенциалов между обкладками конденсатора $U_1 = q_1/C_1$. Сумма разностей потенциалов U_1 и U', очевидно, равна э.д.с. источника $\mathscr{E}$.

Подставляя значения U_1 и U', найдем $\dfrac{q_1}{C_1} + \dfrac{q_2+q_3}{C_2+C_3} = q_1 \times$ $\times \left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2+C_3}\right) = \mathscr{E}$, откуда

$$q_1 = \frac{\mathscr{E}}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2+C_3}} = \frac{\mathscr{E}C_1(C_2+C_3)}{C_1+C_2+C_3};$$

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1},\ U_1 = 10\ \text{В},\ U' = \mathscr{E} - U_1,\ U' = 2\ \text{В};$$

$$q_2 = U'C_2;\ q_3 = U'C_3.$$

17.10. Конденсаторы C_2 и C_3, соединенные параллельно, подключаются к C_1 последовательно. Наибольшее напряжение 1200 В, при этом емкость батареи $C = 5/6$ мкФ.

17.11. $U_1 = U\dfrac{C_2}{C_1+C_2} = 80$ В, $U_2 = U\dfrac{C_1}{C_1+C_2} = 40$ В.

Указание. Использовать равенство зарядов на конденсаторах.

17.12. $U_1 = {}^2/_3 U = 100$ В.

Решение. Начальные заряды на обкладках конденсаторов одинаковы: $Q = CU$, где C – емкость конденсатора. Конечные заряды соответственно равны: $Q_1 = 2CU_1$ и $Q_2 = CU_1$. Так как конденсаторы были отключены, то суммарный заряд не должен измениться: $2CU = 2CU_1 + CU_1$, откуда $U_1 = {}^2/_3 U$.

17.13. $E_1 = 3{,}75\cdot 10^4$ В/м, $U_1 = 375$ В; $E_2 = 13{,}125\cdot 10^4$ В/м, $U_2 = 2625$ В.

Решение. В каждом диэлектрике поле будет однородным, а напряженности полей в них будут обратно пропорциональны их диэлектрическим проницаемостям:

$$E_1/E_2 = \varepsilon_2/\varepsilon_1. \qquad (1)$$

Из связи между разностью потенциалов и напряженностью следует, что

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U \qquad (2)$$

[левая часть уравнения (2) представляет собой работу по перенесению единичного заряда через оба диэлектрика, которая, по определению, равна разности потенциалов].

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем: $E_1 = U/\left(d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2\right)$, $E_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1$, $U_2 = E_2 d_2$.

17.14. 150 В; 50 В.

17.15. а) $C_1 = 4$ мкФ; б) $C_1 = 36$ мкФ.

Решение. Суммарный заряд на соединенных обкладках не изменился, а емкость после соединения конденсаторов равна сумме их емкостей.

Поэтому: а) $C_1 U_1 + C_2 U_2 = (C_1 + C_2) U$, откуда $C_1 = C_2 \times \times \frac{U - U_2}{U_1 - U}$; б) $C_1 U_1 - C_2 U_2 = (C_1 + C_2) U$, откуда $C_1 = C_2 \frac{U + U_2}{U_1 - U}$

17.16. $2\varepsilon/(1 + \varepsilon) = {}^4/_3$.

Указание. Так как заряды последовательно соединенных конденсаторов одинаковы, то разности потенциалов на их обкладках относятся как обратные величины емкостей.

17.17. 45 В.

Указание. Электрическое поле внутри пластинки, а следовательно, и разность потенциалов, приходящаяся на ее толщину, уменьшается в ε раз.

17.18. В $2/(1 + \varepsilon)$ раз.

Решение. Так как на последовательно соединенных конденсаторах всегда находятся одинаковые заряды, то поле E в конденсаторе с диэлектриком (а следовательно, и разность потенциалов между его обкладками) будет в ε раз меньше, чем у воздушного конденсатора. Общее напряжение на конденсаторах не меняется: $U_к + \varepsilon U_к = 2U_н$, где $U_н$ и $U_к$ – напряжения на конденсаторе до и после заполнения диэлектриком. Искомое отношение $E_к/E_н = U_к/U_н = 2/(1 + \varepsilon) < < 1$.

17.19. $U = 5040$ В.

Решение. Напряжение, приложенное к батарее последовательно соединенных конденсаторов, равно сумме напряжений на конденсаторах: $U = U_1 + U_2$. При этом напряжения распределяются обратно пропорционально емкостям, так как $C_1 U_1 = C_2 U_2 = q$, где q – заряд одной из обкладок. Отсюда $U_1/U_2 = C_2/C_1$, а $U_2 = U_1 \frac{C_1}{C_2}$.

При одинаковой изолирующей прокладке между обкладками конденсатора бо́льшая напряженность поля будет в конденсаторе с меньшей емкостью и он будет пробит вначале.

Пробой произойдет при $U_1 = Ed = 1800$ В/мм$\cdot$2 мм $= 3600$ В. Тогда искомое значение $U = U_1 + \frac{C_1}{C_2} U_1 = U_1 \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)$.

17.20. $d_1/d_2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2$; $C = \varepsilon_0 S/\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$.

17.21. $U = U_1\left(1 + \dfrac{C_1}{C_2}\right)$, если $U_1C_1 \leqslant U_2C_2$;

$$U = U_2\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right), \text{ если } U_1C_1 \geqslant U_2C_2.$$

17.22. Увеличатся в $(C_1 + C_2 + C_3)/(C_1 + C_2)$ раз.

17.23. $\varphi_A - \varphi_B = \mathscr{E}\left(\dfrac{C_4}{C_3 + C_4} - \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}\right) = \mathscr{E}\dfrac{C_1C_4 - C_2C_3}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}$.

Решение. Сумма падений напряжений на конденсаторах каждой из ветвей цепи равна приложенной э.д.с., а заряды одинаковы:

$$U_1 + U_2 = \mathscr{E},\ C_1U_1 = C_2U_2;\ U_3 + U_4 = \mathscr{E},\ C_3U_3 = C_4U_4.$$

Решая каждую пару этих уравнений, найдем

$$U_1 = \frac{\mathscr{E}}{1 + \dfrac{C_1}{C_2}} = \frac{\mathscr{E}C_2}{C_1 + C_2} \text{ и } U_3 = \frac{\mathscr{E}}{1 + \dfrac{C_3}{C_4}} = \frac{\mathscr{E}C_4}{C_3 + C_4}.$$

Очевидно, что разность потенциалов между точками A и B равна

$$U_4 - U_2 = U_1 - U_3 = \mathscr{E}\frac{C_1C_4 - C_2C_3}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}.$$

17.24. $\varphi_B - \varphi_A = \dfrac{\mathscr{E}_1C_1 - \mathscr{E}_2C_2}{C_1 + C_2}$.

Решение. За нулевой потенциал примем потенциал точки O; так же как в предыдущей задаче, $U_1 + U_2 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$; $C_1U_1 = C_2U_2$, откуда $U_1 = (\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)C_2/(C_1 + C_2)$. Разность потенциалов между точками B и A равна $\mathscr{E}_1 - U_1 = (\mathscr{E}_1C_1 - \mathscr{E}_2C_2)/(C_1 + C_2)$.

17.25. $C_{общ} = C$.

Указание. Конденсатор C_0 подсоединен к точкам, разность потенциалов между которыми равна нулю.

17.26. Увеличится в $(\varepsilon + 1)/\varepsilon = 1{,}5$ раза.

Указание. Рассмотреть как систему трех плоских конденсаторов, соединенных по схеме, показанной на рис. 211.

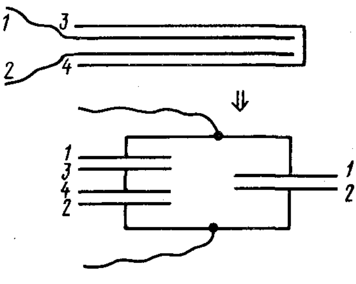


Рис. 211

17.27. $Cn/2$.

Решение. Нарисуем сначала схему для случая четырех точек (рис. 212, *а*). Определим емкость между точками *1*, *2*. В силу симметрии точки *3* и *4*, очевидно, имеют одинаковый потенциал. Такой же потенциал имеет и любая другая точка. Поэтому заряженными будут только те конденсаторы, которые подключены одним из выводов к точке *1* или *2*. Поэтому цепь с n точками эквивалентна цепочке, изображенной на рис. 212, *б*. Емкость такой цепи равна: $\dfrac{C}{2}(n - 2) + C = \dfrac{Cn}{2}$.

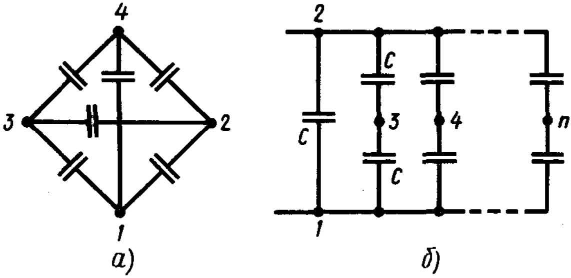


Рис. 212

17.28. $U_1 = 2$ кВ; $U_2 = 3$ кВ; $U_3 = 6$ кВ.

17.29. $q_1 = q_4 = UC/3$; $q_2 = q_3 = q_5 = q_6 = q_4/2 = UC/6$.

Указание. Емкость батареи $2C$; $U_4 = U_1 = 2U_2 = 2U_3 = 2U_5 = 2U_6$.

17.30. 2 В.

Указание. Напряжение U_1 между точками f и b (рис. 213), очевидно, равно половине напряжения между точками d и b:

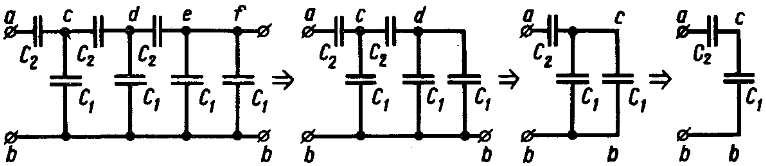


Рис. 213

$U_1 = {}^1/_2 U_{db}$. Действительно, между точками f и b включена емкость $2C_1 = 10$ мкФ в два раза больше емкости между точками d и b. Половина напряжения падает между точками d и f, а половина – между точками f и b. Преобразовав схему так, как показано на рисунке, увидим, что $U_{db} = {}^1/_2 U_{cb}$, а $U_{cb} = {}^1/_2 U_{ab}$. Поэтому $U_{fb} = \frac{1}{2^3} U_{ab} = 2$ В.

17.31. $F = CU^2/(2d)$.

Решение. Каждая из пластин конденсатора находится в однородном электрическом поле E', создаваемом другой пластиной и равном половине поля E внутри конденсатора.

Поэтому искомая сила $F = QE' = Q\frac{E}{2} = Q\frac{U}{2d} = \frac{CU^2}{2d}$, где Q – заряд на пластине.

17.32. $3qd/(2\varepsilon_0 S)$.

Решение. Известно, что электрическое поле внутри плоского конденсатора $E = U/d = q/(Cd) = q/(\varepsilon_0 S)$, где U – разность потенциалов между пластинами; C – емкость конденсатора. Это поле создается обеими заряженными пластинами, напряженности которых внутри конденсатора направлены в одну сторону и, следовательно, равны $E/2$. Поэтому напряженность поля, создаваемого пластиной с зарядом q и площадью S, будет $E'_1 = q/(2\varepsilon_0 S)$. В нашем случае в пространстве между пластинами напряженности направлены в противоположные стороны. Суммарная напряженность поля $E' = \frac{4q}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{3q}{2\varepsilon_0 S}$. Искомая разность потенциалов $U' = E'd = 3qd/(2\varepsilon_0 S)$.

17.33. $A = \frac{Q^2}{2}\frac{C_1 - C_2}{C_1 C_2}$.

Решение. *1-й способ.* Сила взаимодействия между пластинами $F = Q^2/(2Cd)$, где C – емкость конденсатора; d – расстояние между пластинами (см. задачу 17.31). При раздвижении пластин изолированного конденсатора ($Q = \text{const}$) F не меняется, так как C обратно пропорционально d, поэтому $A = \frac{Q^2}{2C_1 d}(d_2 - d_1)$. Используя, что $C_1/C_2 = d_2/d_1$, получим $A = \frac{Q^2}{2C}\left(\frac{C_1}{C_2} - 1\right) = \frac{Q^2}{2C_1 C_2}(C_1 - C_2)$.

2-й способ. Работа, совершаемая при раздвижении пластин конденсатора, увеличивает энергию электрического поля между пластинами, т. е. энергию конденсатора. Поэтому произведенная работа равна разности энергий конденсатора:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{Q^2}{2}\frac{C_1 - C_2}{C_1 C_2}.$$

17.34. а) Заряд не меняется, $U = q/C$ уменьшается, $E = U/d$ уменьшается, $W = q^2/(2C)$ уменьшается; б) разность потенциалов U' не меняется, $q = U'C$ увеличивается, $E = U'/d$ не меняется, $W = C(U')^2/2$ увеличивается.

17.35. $N = CU^2\eta/(2\tau)$.

Указание. Воспользоваться формулой для энергии заряженного конденсатора $W = CU^2/2$.

17.36. Работа затрачивается на перемещение зарядов против э.д.с. Аккумулятор заряжается за счет этой работы и энергии конденсатора, которая при раздвижении пластин уменьшается.

17.37. $\Delta W = -\frac{R_1 R_2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2(R_1 + R_2)}$.

17.38. $CU^2/4$. После соединения конденсаторов разность потенциалов между их обкладками будет равна $U/2$. Из закона сохранения энергии следует $\frac{CU^2}{2} = 2\,\frac{C(U/2)^2}{2} + W$, где W – теплота, выделившаяся в проводах, и энергия излучения электромагнитных волн, откуда $W = CU^2/4$, как мы видим, не зависит от величины сопротивления проводов.

При изменении сопротивления проводников меняется время, через которое в системе устанавливается равновесие, следовательно, меняется часть энергии, излучаемая в виде электромагнитных волн.

17.39. В первом случае $Q = {}^1/_3 C\mathscr{E}^2$, во втором — $Q = 2C\mathscr{E}^2$.

Указание. Так как энергия конденсаторов остается без изменения, то тепло Q, выделившееся в цепях, равно работе источника э.д.с., т. е. произведению заряда, прошедшего через источник, на его э.д.с.

17.40. $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}{1 + \dfrac{r}{R}(\varepsilon - 1)}$.

Решение. *1-й способ.* Емкость определяется отношением заряда, сообщенного проводнику, к изменению его потенциала: $C = q/\varphi$. Потенциал на поверхности шара с зарядом q, окруженного диэлектрическим слоем, будет численно равняться сумме работ по перенесению единичного заряда из бесконечности до поверхности диэлектрика и с поверхности диэлектрика до поверхности шарового проводника: $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{q}{R} + \left(\dfrac{q}{\varepsilon r} - \dfrac{q}{\varepsilon R}\right)\right]$, откуда

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\varepsilon r} - \dfrac{1}{\varepsilon R}} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}{1 + \dfrac{r}{R}(\varepsilon - 1)}.$$

Примечание. Потенциал на внешней поверхности диэлектрического слоя равен $q/4\pi\varepsilon_0 R$ (потенциал не испытывает скачка на границе диэлектриков). Разность же потенциалов между эквипотенциальными наружной и внутренней поверхностями диэлектрического слоя равна $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\dfrac{q}{r} - \dfrac{q}{R}\right)$.

2-й способ. Потенциал в любой точке вне диэлектрика $\varphi \sim q/x$, внутри диэлектрика $\varphi_1 \sim \dfrac{q}{\varepsilon x} + C$ (коэффициент пропорциональности равен $1/(4\pi\varepsilon_0)$, на границе диэлектрика, когда $x = R$, $\varphi = \varphi_1$; $\dfrac{q}{R} = \dfrac{q}{\varepsilon R} + C$, откуда $C = \dfrac{q}{R} \cdot \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$. Отсюда потенциал в диэлектрике в любой точке равен $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{\varepsilon x} + \dfrac{q}{R}\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)$, а на поверхности $(x = r)$ $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{q}{R} + \left(\dfrac{q}{\varepsilon r} - \dfrac{q}{\varepsilon R}\right)\right]$. Разделив q на φ, найдем C.

18. СИЛА ТОКА. ЗАКОН ОМА ДЛЯ УЧАСТКА ЦЕПИ

18.1. $q = (C_1 - C_2)\mathscr{E} = \dfrac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}(\varepsilon - 1)}{d} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-10}$ Кл.

18.2. $I \approx 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ А.

Решение. За время $t = a/v$ в цепи протекает заряд $Q = \mathscr{E}(C_2 - C_1) = \mathscr{E}\,\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)a^2}{d}$. Поэтому сила тока равна $I = \frac{Q}{t} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)a\mathscr{E}v}{d} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ А.

18.3. $E = 4\pi^2 n^2 mr/e$; $\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_R = m\omega^2 d^2/(8e) \approx 2{,}8 \cdot 10^{-11}$ В.

Решение. На расстоянии r от оси цилиндра поле E должно быть таким, чтобы сила eE, действующая на электрон, сообщала ему центростремительное ускорение. Отсюда $E = m\omega^2/e$ и направлено радиально.

Графически эта зависимость изображена на рис. 214. Искомая разность потенциалов равна работе, которую нужно совершить при переносе единичного заряда от периферии к оси цилиндра, т. е. равна заштрихованной площади $\Delta\varphi = \frac{m\omega^2 D^2}{8e} = \frac{\pi^2 n^2 D^2}{2}\frac{m}{e}$.

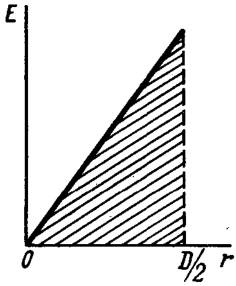


Рис. 214

18.4. $R = \rho d/S = \rho\varepsilon_0\varepsilon/C$.

Указание. Отношение d/S находим из формулы емкости $C = \varepsilon_0\varepsilon S/d$.

18.5. $v \approx 8{,}2 \cdot 10^{-4}$ м/с.

Указание. Плотность тока $j = nev$, где $n = \rho N_A/A$ – плотность электронов в меди.

18.6. а) Удвоится; б) станет вдвое меньше; в) не изменится.

Решение. Электроны в проводнике находятся в поле с напряженностью $E = U/l$. Поэтому на каждый из них действует сила $F = Ee = eU/l$, сообщая ускорение $a = F/m = eU/(ml)$. Если время свободного пробега (т. е. пробега между неупругими столкновениями с колеблющимися ионами решетки) электрона обозначить τ, то максимальная скорость электрона $v_{\text{макс}} = a\tau = eU/(ml)$. Средняя скорость электрона поэтому равна $v_{\text{ср}} = eU\tau/(2ml)$. Из этой формулы сразу же следуют ответы на задачу.

18.7. $R \approx 57{,}3$ Ом.

18.8. $U = j\rho\pi dn \approx 6{,}4$ В.

Решение. Плотность тока $j = I/S$, где I – сила тока в проводнике; S – площадь его поперечного сечения;

$$U = IR = I\rho\pi dn/S = j\rho\pi dn.$$

18.9. $t_2 = t_1 + \dfrac{\dfrac{U_2}{I_2} - \dfrac{U_1}{I_1}}{(U_1/I_1)\alpha} \approx 2650$ °C.

18.10. $l_1/l_2 = 1/44$.

Указание. Общее сопротивление стержней R_t при температуре t определяется формулой $R_t = R_{01}(1 + \alpha_1 t) + R_{02}(1 + \alpha_2 t) = (R_{01} + R_{02}) + (R_{02}\alpha_2 + R_{01}\alpha_1)t$, где $R_{01} = \rho_1 l_1/S$ и $R_{02} = \rho_2 l_2/S$ – сопротивления стержней при 0 °C. Сопротивление цепи не зависит от температуры, если $R_{02}\alpha_2 + R_{01}\alpha_1 = 0$, откуда получаем

$$l_1/l_2 = -\alpha_2\rho_2/\alpha_1\rho_1 = 1/44.$$

18.11. $R \approx 20{,}16$ Ом; $\Delta R/R = I\Big/\left(\dfrac{Ir}{U} - 1\right) \approx 0{,}008.$

Указание. Ток, идущий через сопротивление,

$$I_R = I - I_B = I - \frac{U}{r}.$$

18.12. По I схеме $r_x = U\Big/\left(I - \dfrac{U}{r_V}\right)$. Эта схема выгодна для измерения малых сопротивлений.

По II схеме $r_x = U/I - r_A$. Эта схема выгодна для измерения больших сопротивлений.

18.13. Решение. Достаточно сделать два измерения (рис. 215). Первое позволяет измерить внутреннее сопротивление вольтметра $R_в = U_1/I_1$, а второе – величину неизвестного сопротивления $R_x = U_2\Big/\left(I_2 - \dfrac{U_2}{R_в}\right)$.

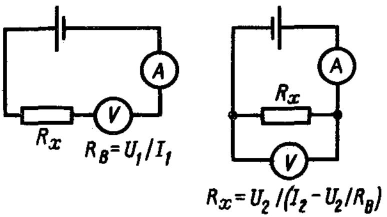


Рис. 215

19. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЯ ПРОВОДНИКОВ

19.1. $U_1 = 48$ В; $U_2 = 24$ В; $U_3 = 16$ В; $U_4 = 12$ В.

Указание. Падение напряжения распределяется прямо пропорционально сопротивлениям и, следовательно, обратно пропорционально их сечениям: $U_1 : U_2 : U_3 : U_4 = 1/S_1 : 1/S_2 : 1/S_3 : 1/S_4$.

19.2. 10 Ом; 30 Ом.

19.3. В 4 раза.

Указание. Воспользовавшись формулами для сопротивлений последовательно и параллельно соединенных проводников с сопротивлениями R и r, получить уравнение для их отношения $x = R/r$.

19.4. В n^2 раз.

19.5. На $\sqrt{n}$ частей.

19.6. К точкам, делящим кольцо в отношении $(5 - \sqrt{15})/(5 + \sqrt{5})$.

Указание. «Проволочные дуги», на которые делится кольцо, соединены параллельно.

19.7. $4r$; $r/4$; $^4/_3r$; $2{,}5r$; $^3/_5r$; $^3/_4r$; $^2/_5r$; r; $^5/_3r$. Возможные схемы, имеющие различные эквивалентные сопротивления, изображены на рис. 216.

19.8. Четыре сопротивления, которые следует включить по схеме, изображенной на рис. 217.

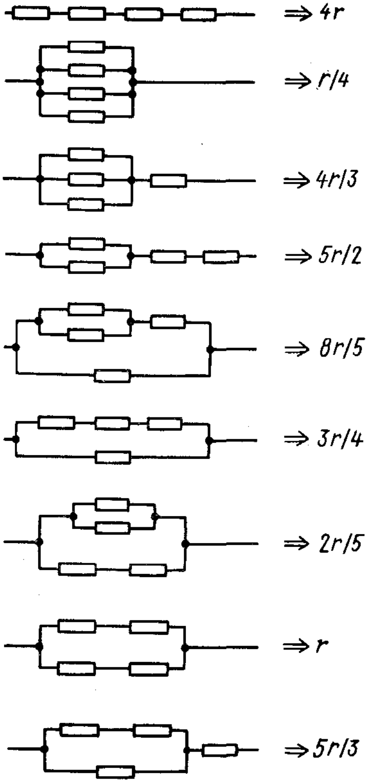


Рис. 216

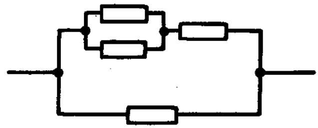


Рис. 217

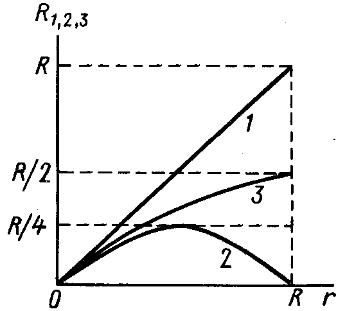


Рис. 218

19.9. $R_1 = r$; $R_2 = \dfrac{r(R-r)}{R} = r\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$; $R_3 = \dfrac{rR}{r+R} = \dfrac{R}{1 + R/r}$ (рис. 218).

19.10. $R_1 = 20$ Ом; $R_2 = 60$ Ом; $R_3 = 40$ Ом.

Решение. В первом случае падение напряжения на сопротивлении R_2 равно $U_2 = U_1 - U_3 = 60$ В. Это означает, что $R_2 = U_2/I_2 = 60$ Ом. Так как через сопротивление R_3 в первом случае идет тот же ток, что и через сопротивление R_2, то $R_3 = U_3/I_2 = 40$ Ом.

Если на выход цепи подано напряжение U'_3, то падение напряжения на сопротивлении R_2 $U'_2 = U'_3 - U'_1 = 45$ В. При этом $U'_2/U'_1 = R_2/R_1$. Отсюда $R_1 = R_2 U'_1/U'_2 = 20$ Ом.

19.11. Установить движок реостата R_1 посередине, затем установить ток в цепи по реостату R_2 и подправить его реостатом R_1. Эта схема удобна тем, что изменение величины сопротивления реостата R_1 мало влияет на сопротивление цепи и поэтому мало влияет на ток в цепи. Это-то и позволяет установить его более точно.

19.12. $r_1 = R_2R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$; $r_2 = R_1R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$; $r_3 = R_2R_1/(R_1 + R_2 + R_3)$.

Решение. В схеме «звезды» сопротивление между точками *1* и *2* равно $r_1 + r_2$, а в схеме «треугольника» — $R_3(R_1 + R_2)/(R_1 + R_2 + R_3)$. Эти сопротивления должны быть одинаковыми: $r_1 + r_2 = R_3(R_1 + R_2)/(R_1 + R_2 + R_3)$.

Приравнивая аналогично сопротивления между точками *2* и *3*, *1* и *3*, получим уравнения

$$r_2 + r_3 = R_1(R_2 + R_3)/(R_1 + R_2 + R_3),$$
$$r_1 + r_3 = R_2(R_1 + R_3)/(R_1 + R_2 + R_3).$$

Складывая эти уравнения, получим $r_1 + r_2 + r_3 = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$.

Вычитая из последнего уравнения последовательно одно из трех предыдущих, найдем r_3, r_1 и r_2.

19.13. а) $R = \dfrac{(a+b)d}{a+b+2d}r_0$; б) $R = \dfrac{a(a+b)(b+d)+abd}{(a+b)(a+b+2d)}r_0$, где $d = \sqrt{a^2+b^2}$

19.14. Сила тока $I/2$, $I/4$, $I/8$, $I/16$, ..., $I/2^n$.

Указание. Сопротивление между точкой A и любой другой точкой равно r.

19.15. 1) $^3/_2 r$; 2) $^5/_{11} r$; 3) $r/2$; 4) (а) $0{,}8r$, (б) r; 5) $^5/_6 r$, $^7/_{12} r$; $^3/_4 r$.

Указание. Точки, имеющие одинаковые потенциалы, можно соединять или разделять, не меняя токов в участках цепи, т. е. не меняя сопротивления всей цепи. Так как точки, одинаково обозначенные на рис. 219, имеют одинаковые потенциалы, то левые и правые схемы имеют одинаковые сопротивления.

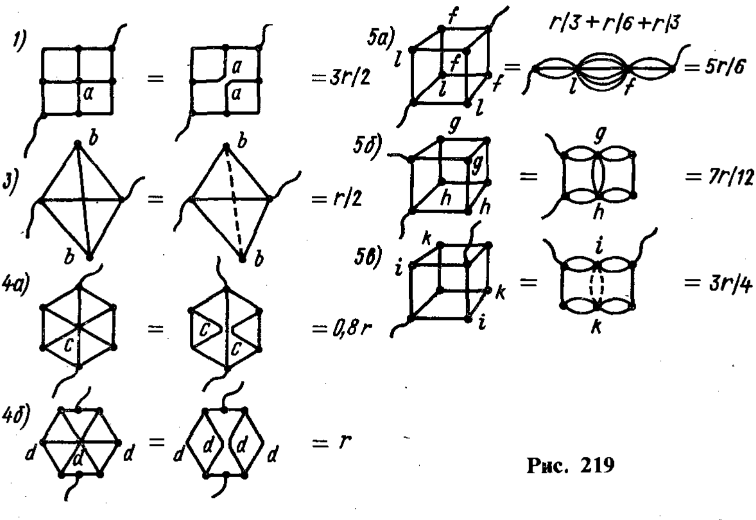


Рис. 219

19.16. $13r/7$.

Указание. См. решение задачи 19.15 и рис. 220.

19.17. Уменьшилось в 9 раз.

Указание. Получилась цепь из трех параллельно соединенных проводников.

19.18. $2r/n$.

Решение. На рис. 221, *а* изображена цепь для случая $n = 4$. Точки *3* и *4*, очевидно, имеют одинаковые потенциалы. Такой же потенциал имеет и любая другая точка, подключенная ко всем остальным. Поэтому ток будет проходить только через сопротивления, подключенные к точкам *1* и *2*. Данная цепь эквивалентна цепи, изображенной на рис. 221, *б*, в которой одна ветвь имеет сопротивление r и $n - 2$ ветви – сопротивления $2r$.

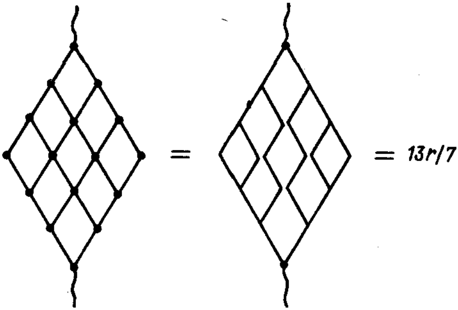


Рис. 220

Сопротивление такой цепи равно $2r/n$.

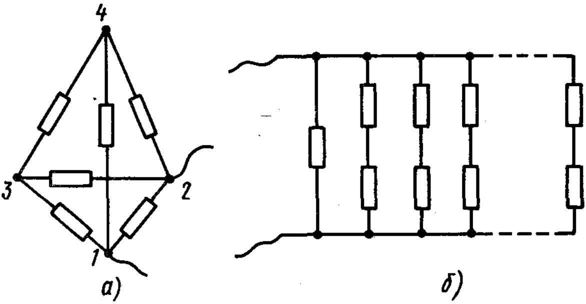


Рис. 221

19.19. $R = r(1 + \sqrt{3})$.

Решение. Отделив первое звено, мы получим ту же цепь, сопротивление которой обозначим через R. Поэтому $R = 2r + \dfrac{Rr}{R + r}$, откуда $R = r(1 + \sqrt{3})$.

19.20. $^3/_4$ А.

Указание. Так как сопротивление амперметра пренебрежимо мало, то сопротивление цепи равно 7,5 Ом (нарисуйте схему, накоротко замкнув амперметр) и через источник идет ток $I_0 = 1$ А. Через сопротивление R_2 идет половина этого тока ($I_2 = {}^1/_2$ А), а через сопротивление R_4 – половина тока I_2 ($I_4 = {}^1/_4$ А). Очевидно, что $I_а + I_4 = I_0$. Отсюда $I_а = I_0 - I_4 = {}^3/_4$ А.

19.21. а) $\mathscr{E}/(4r)$; б) $\mathscr{E}/(7r)$.

Указание. а) Сопротивление цепи равно $^4/_3 r$. Поэтому ток в неразветвленной части цепи $I = 3\mathscr{E}/(4r)$. Потенциалы точек, к которым подключен амперметр, равны (сопротивлением его пренебрегаем). Поэтому ток I распределяется между сопротивлениями r и $2r$ обратно пропорционально их величинам. Легко видеть, что в данной схеме токи, проходящие через одинаковые сопротивления, равны. Разность величин этих токов и есть ток, идущий через амперметр.

б) Сопротивление цепи $^7/_6 r$; ток в неразветвленной части цепи $I = 6\mathscr{E}/(7r)$. В ветвях первого разветвления токи будут одинаковы и равны $3\mathscr{E}/(7r)$. В ветвях второго – соответственно $2\mathscr{E}/(7r)$ и $4\mathscr{E}/(7r)$. Через амперметр пойдет ток, равный $\mathscr{E}/(7r)$.

19.22. 9; 49; 249 и 499 кОм.

Указание. $I_{\text{ном}} = U_i/(r_{\text{в}} + R_i)$, где U_i – соответствующий предел измерения напряжения.

19.23. Возрастет в 4 раза.

Указание. Показание вольтметра $U = \mathscr{E} r_{\text{в}}/(R + r_{\text{б}} + r_{\text{в}})$, где $r_{\text{б}}$ – внутреннее сопротивление батареи; $r_{\text{в}}$ – сопротивление вольтметра; R – переменное сопротивление и $\mathscr{E}$ – э. д. с. батареи.

19.24. $R = 261$ Ом.

Указание. Включение шунта уменьшает ток через гальванометр в 10 раз. Поэтому, если полный ток в цепи i, то через гальванометр будет течь ток $\dfrac{i}{10}$, а через шунт – ток $\dfrac{9}{10}i$. Падение напряжения на шунте и на гальванометре одинаковы: $\dfrac{i}{10}r = \dfrac{9}{10} i r_{\text{ш}}$, откуда $r_{\text{ш}} = 32{,}2$ Ом. После этого легко найти искомое сопротивление: $R = 261$ Ом.

19.25. $U_1 = \dfrac{U}{1 + \dfrac{R_2}{R_1}\dfrac{R + 2R_1}{R + 2R_2}} = 99$ В; $U_2 = 81$ В.

19.26. $R' = \dfrac{10R(R_{\text{ш}} + R_{\text{г}}) + 9R_{\text{ш}}R_{\text{г}}}{R_{\text{ш}} + R_{\text{г}}}$.

Решение. Общее сопротивление системы $R + \dfrac{R_{\text{ш}}R_{\text{г}}}{R_{\text{ш}} + R_{\text{г}}}$. Чтобы отклонение стрелки гальванометра не изменилось при увеличении напряжения в n раз (иначе: чтобы увеличить цену деления в n раз), нужно ввести дополнительное сопротивление $R_{\text{доп}}$, в $(n - 1)$ раз большее сопротивление системы. По условию задачи, $n = 10$, тогда $R_{\text{доп}} = 9\left(R + \dfrac{R_{\text{ш}}R_{\text{г}}}{R_{\text{ш}} + R_{\text{г}}}\right)$, а измененное сопротивление R' будет равно:

$$R' = R_{\text{доп}} + R; \quad R' = 10R + \frac{9R_{\text{ш}}R_{\text{г}}}{R_{\text{ш}} + R_{\text{г}}} = \frac{10R(R_{\text{ш}} + R_{\text{г}}) + 9R_{\text{ш}}R_{\text{г}}}{R_{\text{ш}} + R_{\text{г}}}.$$

19.27. 105,5 Ом.

Указание. Определив сопротивление амперметра (см. решение задачи 19.24), можно найти искомое добавочное сопротивление из условия, чтобы общий ток в цепи не превышал 2 А.

19.28. $R_{доп} = 10^6$ Ом (для вольтметра), $R_ш = 0,1$ Ом (для амперметра).

19.29. $R \approx 0,11$ Ом.

19.30. На $^1/_7\,\mathscr{E}$.

Указание. Показание вольтметра $U = \mathscr{E} - IR$. Ток $I = \mathscr{E}/R_{общ}$, где $R_{общ}$ – общее сопротивление цепи.

19.31. 4 кОм.

19.32. 15 В.

19.33. $U_1 \approx 68,6$ В; $U_2 \approx 51,4$ В; $U_{макс} = 175$ В.

Указание. Общее напряжение делится между вольтметрами пропорционально их сопротивлениям. Падение напряжения на вольтметре с большим сопротивлением не должно превышать 100 В.

19.34. $U = I_3 \dfrac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2}$; $I_1 = I_3 \dfrac{R_2 + R_3}{R_2}$; $I_2 = \dfrac{I_3R_3}{R_2}$.

19.35. $1 - \dfrac{U_1}{U_0 - U_1}\dfrac{1}{n} = \dfrac{5}{8}$.

Р е ш е н и е. Обозначим через r_1 и r_2 сопротивления частей потенциометра (рис. 222) ($r_1/r_2 = n = {}^4/_6$). Вольтметр показывает падение напряжения на сопротивлении r_1. Поэтому $U_1 = I_1r_1$, где I_1 – ток, идущий через сопротивление r_1. Так как падение напряжения на сопротивлении r_2 равно $U_2 = U_0 - U_1$, то через это сопротивление идет ток $I_2 = U_2/r_2 = (U_0 - U_1)/r_2$. Через вольтметр же, очевидно, идет ток $I_в = I_2 - I_1$:

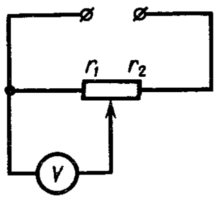


Рис. 222

$$\frac{I_в}{I_2} = \frac{I_2 - I_1}{I_2} = 1 - \frac{I_1}{I_2} = 1 - \frac{U_1/r_1}{(U_0 - U_1)/r_2} = 1 - \frac{r_2}{r_1}\frac{U_1}{U_0 - U_1}.$$

19.36. Больше 1500 кОм.

Указание. Так как $r \ll R_1$ и $r \ll R_2$, то сопротивлением источника можно вообще при расчетах пренебречь. Если сопротивление вольтметра равно R, то при подключении его к сопротивлению R_1 он покажет напряжение $U'_1 = \dfrac{\dfrac{R_1R}{R_1 + R}}{\dfrac{R_1R}{R_1 + R} + R_2}\mathscr{E}$. В то же время без вольтметра падение напряжения на сопротивлении R_1 равно $U_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\mathscr{E}$. По условию $\dfrac{U_1 - U'_1}{U_1} \leqslant 0,05$, т. е. $U'_1 > 0,95U_1$. Подставив сюда U_1 и U'_1, получим неравенство $\dfrac{R_1R}{R_1R + R_2R + R_1R_2} \geqslant 0,05\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$, или $\dfrac{R}{R_1R + R_2R + R_1R_2} \geqslant 0,95\dfrac{1}{R_1 + R_2}$. Подставив в это неравенство величины сопротивлений R_1 и R_2, найдем, что $R \geqslant 1500$ кОм.

Аналогичное выражение для R мы получим и для случая, когда измеряется падение напряжения на сопротивлении R_2 (для этого в нашем неравенстве нужно R_1 заменить на R_2, а R_2 – на R_1).

19.37. 50 В.

Решение. *1-й способ.* Напряжение между точками B и C будет тем напряжением, которое покажет вольтметр (рис. 223).

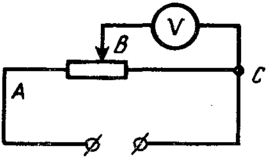


Рис. 223

Между точками B и C включены параллельно половина сопротивления потенциометра и сопротивление вольтметра:

$$R_{BC} = \frac{\frac{R}{2} R_{\text{в}}}{\frac{R}{2} + R_{\text{в}}} = \frac{RR_{\text{в}}}{R + 2R_{\text{в}}}.$$

Общее сопротивление цепи $R_{AC} = R_{AB} + R_{BC} = \frac{R}{2} + \frac{RR_{\text{в}}}{R + 2R_{\text{в}}} = \frac{R(R + 4R_{\text{в}})}{2(R + 2R_{\text{в}})}$.

Ток, протекающий через потенциометр, $I = \frac{U}{R_{AC}} = \frac{2U(R + 2R_{\text{в}})}{R(R + 4R_{\text{в}})}$.

Напряжение между точками B и C:

$$U_{BC} = IR_{BC} = \frac{2U(R + 2R_{\text{в}})RR_{\text{в}}}{R(R + 4R_{\text{в}})(R + 2R_{\text{в}})} = \frac{2UR_{\text{в}}}{R + 4R_{\text{в}}}.$$

2-й способ. Ток в неразветвленной части цепи равен сумме токов, идущих через вольтметр и участок потенциометра, к которому он подключен: $\left(\frac{U_{\text{в}}}{R_{\text{в}}} + \frac{U_{\text{в}}}{R/2}\right)$ и $U = U_{\text{в}} + \left(\frac{U_{\text{в}}}{R_{\text{в}}} + \frac{U_{\text{в}}}{R/2}\right)\frac{R}{2}$.

19.38. $U_1 = 20$ В.

Указание. См. задачу 17.30 и рис. 224: $U_{fb} = {}^1/_2 U_{db} = {}^1/_4 U_{cb} = {}^1/_8 U_{ab}$.

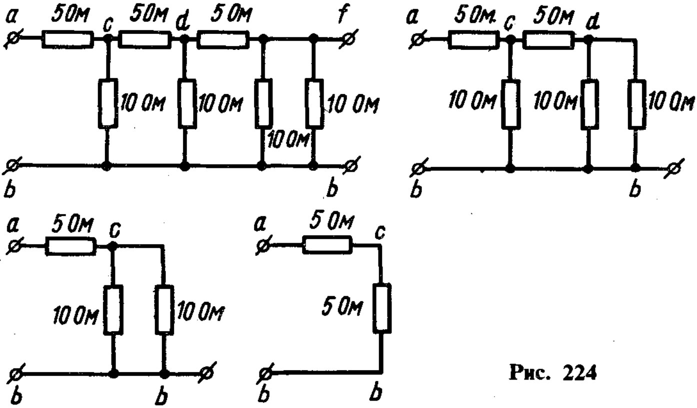


Рис. 224

19.39. а) $n_{посл} = (n_1 n_2 - 1)/(n_1 + n_2 - 2$; б) $n_{парал} = n_1 + n_2 - 1$.

Решение. При включении шунта с сопротивлением R, увеличивающего цену деления амперметра с сопротивлением $R_а$ в n раз, через амперметр идет ток $I_а$, составляющий $1/n$ часть полного тока I_0 цепи. При этом через шунт идет ток $I = I_0 - \frac{1}{n}I_0 = \frac{n-1}{n}I_0$. Так как падения напряжения на амперметре и шунте одинаковы, то $I_а R_а = IR$ или $\frac{1}{n}I_0 R_а = \frac{n-1}{n}I_0 R$. Отсюда $R = \frac{1}{n-1}R_а$.

Из этой формулы следует, что сопротивление первого шунта $R_1 = \frac{1}{n_1 - 1}R_а$, а второго – $R_2 = \frac{1}{n_2 - 1}R_а$. При последовательном соединении сопротивлений R_1 и R_2 сопротивление шунта $R_{посл} = R_1 + R_2 = \left(\frac{1}{n_1 - 1} + \frac{1}{n_2 - 1}\right)R_а = \frac{n_2 + n_1 - 2}{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}R_а$. Так как $R_{посл} = \frac{1}{n_{посл} - 1}R_а$, где $n_{посл}$ – увеличение цены деления амперметра, то $n_{посл} = (R_а + R_{посл})/R_{посл} = (n_1 n_2 - 1)/(n_1 + n_2 - 2)$.

При параллельном соединении сопротивлений R_1 и R_2 сопротивление $R_{парал} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}R_а$. Поэтому при таком включении сопротивлений цена деления амперметра возрастает в $n_{парал} = \frac{R_а + R_{парал}}{R_{парал}} = (n_1 + n_2 - 1)$ раз.

19.40. а) $n_{посл} = n_1 + n_2 - 1$; б) $n_{парал} = \frac{n_1 n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2}$.

Указание. См. задачу 19.38.

19.41. Яркость уменьшается вследствие увеличения падения напряжения на подводящих проводах. Увеличение сопротивления прибора при нагревании уменьшает этот эффект. В момент включения лампового реостата яркость горящих лампочек изменится незначительно, а затем уменьшится.

19.42. Потребляемая первой лампочкой мощность уменьшится на 1,4 Вт; второй – на 2,1 Вт.

Указание. После включения электроплитки увеличится падение напряжения на подводящих проводах, и на каждой из лампочек уменьшится напряжение на $\Delta U_1 = I \cdot 2r$ и $\Delta U_2 = I \cdot 3r$ (рис. 225). При этом уменьшится и потребляемая лампочками мощность; изменение

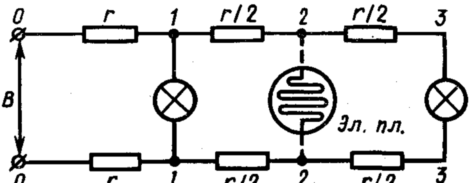


Рис. 225

ее равно $\Delta N = \dfrac{U^2 - (U - \Delta U)^2}{r_л} \approx \dfrac{2U\,\Delta U}{r_л}$. Сопротивления $r_л$ и r находим по формулам: $r_л = U^2/N$ и $r = \rho l/2S$.

Примечание. Падением напряжения на проводах до включения плитки можно пренебречь.

20. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ВСЕЙ ЦЕПИ. СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ В БАТАРЕИ

20.1. $I = n\mathscr{E}/(rn + 2R)$.

Указание. См. решения задачи 19.18.

20.2. 2 А.

Решение. Из закона Ома для всей цепи определяем сопротивление амперметра R_A: $R_A = (\mathscr{E} - Ir)/I$. После присоединения шунта к амперметру сопротивление внешней цепи станет равным (рис. 226) $R = R_A R_ш/(R_A + R_ш)$. Ток в неразветвленной части цепи равен $I_0 =$

$$= \frac{\mathscr{E}}{R + r} = \frac{\mathscr{E}(R_A + R_ш)}{R_A R_ш + R_A r + R_ш r}.$$

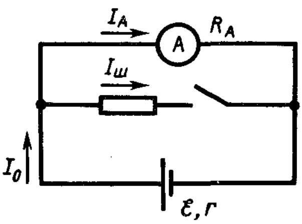


Рис. 226

Далее, очевидно, что $R_A I_A = R_ш I_ш$ и $I_0 = I_A + I_ш$, где I_A – ток в амперметре; $I_ш$ – ток в шунте. Из этих равенств имеем $I_A = R_ш I_0/(R_A + R_ш)$.

Подставляя сюда значение тока I_0 и сопротивления R_A, получим

$$I_A = R_ш\,\mathscr{E}/(R_A R_ш + R_A r + R_ш r).$$

20.3. $\mathscr{E} = 1{,}42$ **В.**

Решение. Э. д. с. элемента по закону Ома для всей цепи равна сумме падений напряжения во всей цепи. При измерении напряжения вольтметром ток в цепи $I_1 = U_1/R_1$. Поэтому $\mathscr{E} = \dfrac{U_1}{R_1}(I + R_1)$, где r – внутреннее сопротивление элемента. При замыкании элемента на сопротивление R_2 $\mathscr{E} = I_2(r + R_2)$. Исключая из этих уравнений r, находим $\mathscr{E} = I_2(R_2 - R_1)\Big/\left(1 - \dfrac{I_2 R_1}{U_1}\right)$.

20.4. $\mathscr{E} = U_1 U_2 (n - 1)/(U_1 n - U_2)$.

Указание. Если сопротивление нагрузки R, а внутреннее сопротивление батареи r, то $U_1 = I_1 R = \dfrac{\mathscr{E}}{R + r} R$ и $U_2 = I_2 nR = \dfrac{\mathscr{E}}{nR + r} nR$.

Исключая из этих уравнений r, найдем $\mathscr{E}$.

20.5. $I_{к.з} = 0{,}47$ А.

Решение. Ток короткого замыкания равен $I_{к.з} = \mathscr{E}/r$, где $\mathscr{E}$ – э. д. с. элемента и r – его внутреннее сопротивление.

По закону Ома для всей цепи $I_1 = \mathscr{E}/(r + R_1)$ и $I_2 = \mathscr{E}/(r + R_2)$. Решая эти уравнения совместно относительно r и $\mathscr{E}$, найдем $\mathscr{E} =$

$= \dfrac{I_1 I_2 (R_2 - R_1)}{I_1 - I_2}$ и $r \approx \dfrac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2}$. Поэтому $I_{к.з} = \dfrac{I_1 I_2 (R_2 - R_1)}{I_2 R_2 - I_1 R_1}$.

20.6. $r = \dfrac{(U_2 - U_1) R_1 R_2}{U_1 R_2 - U_2 R_1} = 0{,}5$ Ом.

Указание. См. решение предыдущей задачи.

20.7. $R = r(2U_2 - U_1)/(U_1 - U_2) = 2$ Ом.

20.8. Правильно, если вольтметр электростатический. Вольтметры, через которые идет ток, показывают напряжение на себе самом $U = IR_в$. Если сопротивление вольтметра много больше внутреннего сопротивления источника, то показание вольтметра практически равно э. д. с. источника.

20.9. 1. $U_1 = 7{,}2$ В; $U_2 = 4{,}8$ В.

Решение. Обозначим сопротивление вольтметра через r, э. д. с. батареи – через $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E} - \frac{\mathscr{E} r_2}{r_2 + \dfrac{r r_1}{r + r_1}} = 6 \text{ В}; \quad \mathscr{E} - \frac{\mathscr{E} r_1}{r_1 + \dfrac{r r_2}{r + r_2}} = 4 \text{ В};$$

Так как $\mathscr{E} = 12$ В, получаем $r_1/r_2 = {}^3/_2$, так что $U_1 = 3\,\mathscr{E}/(2 + 3) = 7{,}2$ В; $U_2 = 2\,\mathscr{E}/(2 + 3) = 4{,}8$ В.

2. $\mathscr{E} = U_1' U_2/(U_1' - U_1)$.

Решение. По закону Ома при измерении напряжения двумя вольтметрами $\mathscr{E} = U_1 + U_2 + Ir$, где $I = U_1/R_1$ – ток в цепи; R_1 и r – внутренние сопротивления первого вольтметра и источника соответственно. При измерении напряжения одним вольтметром $\mathscr{E} = U_1' + I'r$, где $I' = U_1'/R_1$, получим систему уравнений

$$U_1\left(1 + \frac{r}{R_1}\right) + U_2 = \mathscr{E},$$

$$U_1'\left(1 + \frac{r}{R_1}\right) = \mathscr{E};$$

исключая $\left(1 + \dfrac{r}{R_1}\right)$, найдем $\mathscr{E} = U_1' U_2/(U_1' - U_1)$.

20.10. Показание первого вольтметра будет увеличиваться, а второго – уменьшаться.

20.11. 1) $U = 2{,}93$ В; 2) $U = 2{,}4$ В.

20.12. $I = \dfrac{\mathscr{E} R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \dfrac{5}{11}$ А. Показание амперметра останется тем же. В ответе мы просто должны поменять местами R_1 и R_3.

Указание. Полное сопротивление цепи равно $R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$.

Поэтому через сопротивление R_1 идет ток $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$.

Этот ток делится между ветвями с сопротивлениями R_2 и R_3 обратно пропорционально величинам сопротивлений R_2 и R_3.

20.13. $R_в = R^2/r$.

20.14. 20 А; 120 В.

20.15. $I_1 \approx 24{,}2$ А; $I = I_2 \approx 21{,}6$ А; $I_3 \approx 2{,}6$ А; $U \approx 109{,}1$ В.

Указание. Эквивалентная схема изображена на рис. 227.

20.16. $U = 2{,}1$ В; $q = 4{,}2 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Решение. К конденсатору будет приложено напряжение, установившееся на сопротивлении R_2 (см. рис. 86).

В самом деле, источник э. д. с. заряжает конденсатор до определенного напряжения U, после чего ток в ветви $C - R_3$ прекращается и продолжает идти лишь по цепи $R_1 - R_2$. Когда ток в цепи конденсатора прекратится, падения напряжения на сопротивлении R_3 не будет и напряжение конденсатора равно напряжению участка, на котором находится сопротивление R_2.

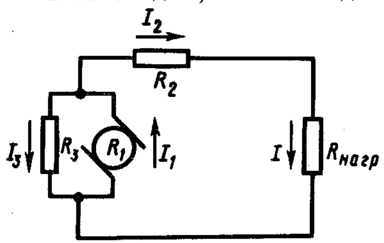


Рис. 227

По закону Ома для всей цепи $I = \mathscr{E}/(r + R_1 + R_2)$. Падение напряжения на сопротивлении R_2 будет $U = IR_2 = \dfrac{\mathscr{E}R_2}{r + R_1 + R_2}$. Такое же напряжение будет на обкладках конденсатора. Заряд же на обкладках определится из формулы $q = CU = R_2C\,\mathscr{E}/(r + R_1 + R_2)$.

20.17. $q = CU_0 \dfrac{R_2}{R_2 + R_3} \approx 1{,}43 \cdot 10^{-3}$ Кл.

Решение. Примем потенциал точки b за нуль: $\varphi_b = 0$ (см. рис. 87). Тогда потенциал U_0 точки c равен $\mathscr{E} - I_0r$, где $I_0 = \dfrac{\mathscr{E}}{r + \dfrac{(R_2 + R_3)R_4}{R_2 + R_3 + R_4}}$. По участку, образованному сопротивлениями R_3, R_2 и источником, идет ток $I = U_0/(R_2 + R_3)$. Поэтому потенциал точки a равен $\varphi_a = U_0 - IR_3 = U_0 \dfrac{R_2}{R_2 + R_3}$. Так как через сопротивление R_1 ток не идет, потенциал точки d равен потенциалу точки b, т. е. нулю, и разность потенциалов пластин конденсатора $U = \varphi_a - \varphi_b = U_0 \dfrac{R_2}{R_2 + R_3}$. Заряд конденсатора $q = CU = CU_0 \dfrac{R_2}{R_2 + R_3} \approx 1{,}43 \cdot 10^{-3}$ Кл.

20.18. $\Delta q = 3{,}43 \cdot 10^{-3}$ Кл.

Указание. См. задачу 20.17 и рис. 87. После размыкания ключа заряд конденсатора будет $q' = C \dfrac{\mathscr{E}R_3}{r + R_2 + R_3}$. Это означает, что через сопротивление R_1 пройдет заряд $\Delta q = |q| + |q'|$, так как знаки зарядов на обкладках конденсатора изменились.

20.19. $q_2 = \dfrac{(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2) R_3 C_2}{R_1 + R_3 + R_4}$; $q_1 = \dfrac{(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)(R_1 + R_3) C_1}{R_1 + R_3 + R_4}$.

Указание. См. задачи 20.17 и 20.18. По сопротивлению R_3 идет ток $I = \dfrac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R_1 + R_3 + R_4}$, падение напряжения на нем $U_3 = IR_3 = \dfrac{(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2) R_3}{R_1 + R_3 + R_4}$; это же и будет разностью потенциалов на C_2.

Разность потенциалов пластин конденсатора C_1 равна

$$U_0 = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 - IR_4 = \frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_3 + R_4}(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2).$$

20.20. $\mathscr{E} = 110$ В.

Решение. Напряжения на конденсаторе и на параллельно соединенных сопротивлениях одинаковы: $\dfrac{q}{C} = I\dfrac{r}{2}$, откуда ток в цепи $I = \dfrac{2q}{Cr}$. По закону Ома $\mathscr{E} = I\left(R + \dfrac{r}{2}\right) = \dfrac{q(r + 2R)}{Cr}$.

20.21. $\varphi_A - \varphi_B = \mathscr{E}\dfrac{C_2R_2 - C_1R_1}{(C_1 + C_2)(R_1 + R_2)}$.

Решение. Примем потенциал точки O за нуль (см. рис. 89). Тогда потенциал точки A будет равен (см. решение задачи 17.23) $\varphi_A = \dfrac{\mathscr{E}C_2}{C_1 + C_2}$, а $\varphi_B = \dfrac{\mathscr{E}R_1}{R_1 + R_2}$. Искомая разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = \mathscr{E}\dfrac{C_2R_2 - C_1R_1}{(C_1 + C_2)(R_1 + R_2)}$.

20.22. $^1/_8 C\mathscr{E}$.

Указание. Сумма зарядов в точке соединения конденсаторов остается постоянной и равной нулю; $2C(\mathscr{E} - \varphi_C) - 3C\varphi_C - (\varphi_C - \varphi_R)C = 0$, где $\varphi_R = \mathscr{E}/4$ (см. рис. 90). Решая относительно φ_C, найдем $\varphi_C = {^3/_8}\,\mathscr{E}$. Разность потенциалов на обкладках конденсатора C равна $\varphi_C - \varphi_R = {^3/_8}\,\mathscr{E} - {^1/_4}\,\mathscr{E} = {^1/_8}\,\mathscr{E}$.

20.23. $\Delta q = \dfrac{U(C_1R_1 - C_2R_2)}{R_1 + R_2}$.

Решение. До замыкания ключа заряды пластин конденсаторов C_1 и C_2, подключенных к точке A, одинаковы по величине, противоположны по знаку, так что их общий заряд равен нулю. После замыкания ключа потенциал точки A станет равным потенциалу точки B, а разности потенциалов на пластинах конденсаторов будут равны: $U_1 = \dfrac{UR_1}{R_1 + R_2}$ и $U_2 = \dfrac{UR_2}{R_1 + R_2}$ (см. задачу 20.21). Соответственно заряды конденсаторов станут равными: $q_1 = \dfrac{C_1UR_1}{R_1 + R_2}$ и $q_2 = \dfrac{C_2UR_2}{R_1 + R_2}$. Суммарный заряд пластин, подключенных к точке A, станет равным $q_1 - q_2 = \Delta q = \dfrac{U(C_1R_1 - C_2R_2)}{R_1 + R_2}$. Этот заряд и прошел через ключ.

20.24. Амперметр A_1 уменьшит, а A_2 увеличит свои показания (см. рис. 92).

Указание. При размыкании ключа сопротивление цепи возрастает, ток уменьшается, падение напряжения на сопротивлении r_1 уменьшается, а на сопротивлении r_2 увеличивается; r_1 и r_2 — сопротивления амперметров.

20.25. $R = r_0$.

Решение. По закону Ома для всей цепи $I = \dfrac{n\mathscr{E}}{R + r_0 n} = \dfrac{\mathscr{E}}{R + \dfrac{r_0}{n}}$, откуда $R = r_0$.

20.26. $U = 9{,}7$ В.

20.27. $n = 200$; $m = 2$.

Решение. Э. д. с. батареи равна $n\mathscr{E}$, ее внутреннее сопротивление $\dfrac{r}{m}n$. Поэтому (по закону Ома) ток в цепи $I = \dfrac{n\mathscr{E}}{n\dfrac{r}{m} + R} = \dfrac{nm\mathscr{E}}{nr + mR}$. Это выражение максимально, когда обратное выражение $\dfrac{nr + mR}{nm} = \dfrac{r}{m} + \dfrac{R}{n}$ минимально. Но среднее арифметическое двух чисел больше или равно среднему геометрическому: $\dfrac{r}{m} + \dfrac{R}{n} \geqslant 2\sqrt{\dfrac{r}{m}\dfrac{R}{n}}$, а mn равно числу элементов и $\sqrt{rR/(mn)}$ постоянно. Поэтому последнее выражение минимально при $\dfrac{r}{m} = \dfrac{R}{n}$, т. е. при $rn = Rm$.

20.28. $R_{\text{доб}} = \dfrac{U - \mathscr{E}n}{I} - rn = 1{,}35$ Ом.

Указание. Приложенное напряжение должно равняться сумме э. д. с. батареи (которая в данном случае является противо-э. д. с.) и падения напряжения на сопротивлении всей цепи $U = \mathscr{E}n + I(rn + R_{\text{доп}})$.

20.29. $\mathscr{E} = 4{,}1$ В; $r = 0{,}05$ Ом.

Решение. Так же как и в предыдущей задаче, $U_2 = \mathscr{E} + I_2 r$. При разрядке по закону Ома для всей цепи $U_1 = \mathscr{E} - Ir$. Решая эти уравнения совместно, найдем: $r = \dfrac{U_2 - U_1}{I_1 + I_2}$; $\mathscr{E} = \dfrac{U_1 I_2 + U_2 I_1}{I_1 + I_2}$.

20.30. $I_1 \approx 5{,}24$ А; $I_2 \approx 1{,}59$ А; $I_3 \approx 3{,}65$ А.

Решение. Напряжения на зажимах динамомашины, аккумулятора и лампочки равны между собой; $\mathscr{E}_1 - I_1 r_1 = \mathscr{E}_2 + I_2 r_2 = I_3 r_3$ (см. задачу 20.28), где I_1, I_2, I_3 — токи в динамомашине, аккумуляторе и лампочке соответственно. Кроме того, $I_1 = I_2 + I_3$. Получили полную систему уравнений для токов, из которых находим I_1, I_2, I_3.

20.31. $\mathscr{E}_1 \approx 5{,}2$ В; $\mathscr{E}_2 = 7{,}6$ В; $r_1 \approx 1{,}2$ Ом; $r_2 \approx 1{,}8$ Ом.

20.32. При $R = r_1 - r_2$; на элементе с внутренним сопротивлением r_1; r_1 должно быть больше r_2.

20.33. $\dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2} < \dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1 + R}$.

Указание. Условие выполняется, если $\dfrac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{r_1 + r_2 + R} < \dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1 + R}$.

20.34. 1. Будет равна нулю.

Решение. По закону Ома, ток в цепи $I = \dfrac{n\mathscr{E}}{nr} = \dfrac{\mathscr{E}}{r}$. Если участок между выбранными точками содержит m элементов, то искомое напряжение $U = m\mathscr{E} - mrI = m\mathscr{E} - m\mathscr{E} = 0$.

2. Разность потенциалов между проводами через нечетное число элементов равна э.д.с. одного элемента, через четное – нулю.

20.35. Если в цепи имеется еще одна батарея с большей э.д.с., включенная навстречу первой.

20.36. $I = 0{,}75$ А; $U = 0$; $U_1 = 0{,}75$ В; $U_2 = -0{,}75$ В.

Указание. См. задачу 20.34.

20.37. $U = \dfrac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2}{2}$.

Указание. Если положить $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$, то напряжение на зажимах элементов $U = \mathscr{E}_1 - Ir = \mathscr{E}_2 + Ir$.

20.38. $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{2}{3}$.

Решение. Рассмотрим участки цепи $A\mathscr{E}_1B$ или $A\mathscr{E}_2B$ (рис. 228). Если внутри участка цепи включен источник с э.д.с., равной $\mathscr{E}$, то сила тока на этом участке определяется совместным действием э.д.с. и разности потенциалов, приложенной к концам участка. Обозначим ток в цепи через I. По условию $\mathscr{E}_2 > \mathscr{E}_1$, тогда на участке $A\mathscr{E}_1B$ ток идет в направлении, противоположном действию $\mathscr{E}_1$. Закон Ома для участка $A\mathscr{E}_1B$ запишется так:

$$Ir_1 = U - \mathscr{E}_1. \qquad (1)$$

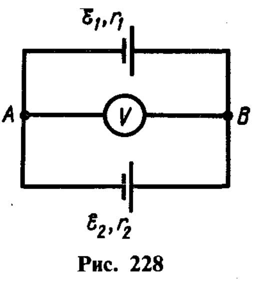


Рис. 228

На участке $A\mathscr{E}_2B$ ток идет в направлении э.д.с., и падение напряжения на внутреннем сопротивлении будет равно разности э.д.с. и напряжения:

$$Ir_2 = \mathscr{E}_2 - U. \qquad (2)$$

Разделив выражение (1) на равенство (2), получим $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{U - \mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2 - U}$; $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{2}{3}$.

20.39. $U = 1{,}5$ В; $I = 2$ А.

Указание. 1-й способ. См. решение задач 20.37 и 20.38.

2-й способ. Общая э.д.с., действующая в цепи, равна $\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1$, сопротивление цепи $r_1 + r_2$. Поэтому, по закону Ома, ток в цепи $I = \dfrac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{r_1 + r_2}$, а напряжение на зажимах батареи $U = \mathscr{E}_2 - Ir_2 = \dfrac{\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}$.

20.40. $I_2 = \dfrac{I_1 r_1}{r_2} = 0{,}5$ А; $I_R = I_1 + I_2 = 1{,}5$ А; $R = \dfrac{\mathscr{E} - I_1 r_1}{I_R} = \dfrac{2}{3}$ Ом.

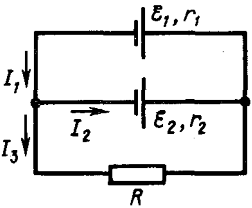


Рис. 229

20.41. $I_1 \approx 1{,}05$ А; $I_2 = 0{,}87$ А; $U = 1{,}8$ В.

Указание. $U = \mathscr{E}_1 - I_1 r_1$; $U = \mathscr{E}_2 + I_2 r_2$; $U = I_3 R$; $I_1 = I_2 + I_3$ (рис. 229), где U – напряжение на внешней цепи или разность потенциалов на зажимах элементов.

20.42. 0,9 %.

20.43. 2,7 %.

21. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА. ТЕПЛОВОЕ ДЕЙСТВИЕ ТОКА

21.1. $\left(\dfrac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{l}\right)^2 \dfrac{a^2}{d^2 (d-a)^2} v^2 R$.

Р е ш е н и е. Пусть металлическая пластина вдвинута на расстоянии x внутрь конденсатора. Тогда, разбивая конденсатор на два конденсатора с емкостями $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d-a}\dfrac{x}{l}$ и $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}\dfrac{l-x}{l}$ (l – длина пластины), соединенных параллельно (рис. 230), мы найдем, что емкость этого сложного конденсатора равна $C = C_1 + C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{l}\left(\dfrac{x}{d-a} + \dfrac{l-x}{d}\right)$. Заряд конденсатора при этом равен $q = \mathscr{E}C = \dfrac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{l}\left(\dfrac{x}{d-a} + \dfrac{l-x}{d}\right)$.

За время Δt металлическая пластина пройдет расстояние $\Delta x = v\Delta t$ и заряд конденсатора станет равным $q' = \mathscr{E}C' = \dfrac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{l}\left(\dfrac{x + \Delta x}{d-a} + \dfrac{l - x - \Delta x}{d}\right)$, изменившись на величину $\Delta q = \dfrac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{l}\left(\dfrac{\Delta x}{d-a} - \dfrac{\Delta x}{d}\right) = \dfrac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{l}\dfrac{a}{d(d-a)} v\Delta t$. Поэтому при движении пластины по цепи идет ток $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{l} \frac{a}{d(d-a)} v$ и на сопротивлении R выделяется мощность $P = I^2 R = \left(\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{l}\right)^2 \frac{a^2}{d^2(d-a)^2} v^2 R$.

21.2. Нет. Они тождественны. Надо рассмотреть, как изменяются остальные величины в этих выражениях для мощности при изменении R.

21.3. В 1,5 раза бóльшую мощность потребляет лампочка с меньшим сопротивлением.

Указание. При расчете тепловой мощности в ветвях параллельной цепи удобнее пользоваться формулой $P = U^2/R$.

21.4. В первый момент после включения: $U_1 = U_2 = 40$ В; $U_3 = 80$ В (рис. 231).

С нагреванием U_3 возрастает, соответственно $U_1 = U_2$ – уменьшается. Бóльшая мощность выделяется в третьей лампочке (больше, чем в четыре раза. Объясните!).

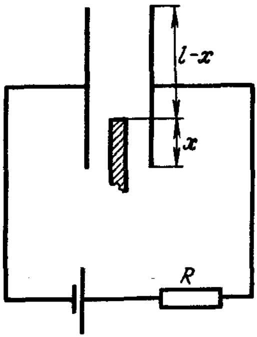


Рис. 230

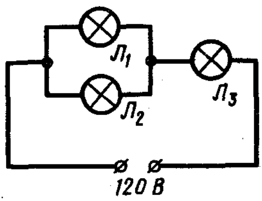


Рис. 231

21.5. В 25-ваттной.

Указание. Сопротивление 100-ваттной лампочки меньше. Через обе лампочки течет одинаковый ток, поэтому на 25-ваттной выделится больше тепла.

21.6. а) Можно, так как напряжение распределится поровну; б) нельзя, так как на менее мощной лампочке напряжение будет бóльше 110 В.

21.7. Другая часть раскалится еще больше.

21.8. Угольная.

Указание. При уменьшении мощности в цепи, а следовательно, уменьшении температуры сопротивление угольной нити увеличится, а металлической – уменьшится.

21.9. Нагревательная спираль делится на две равные части – секции. Секции соединяются между собой параллельно.

21.10. $I_1 = I_2 = \frac{5}{11}$ А; $I_3 = \frac{10}{11}$ А (схема соединения изображена на рис. 232).

21.11. Лампочки одинаковой мощности включить параллельно и затем получившиеся цепочки соединить последовательно.

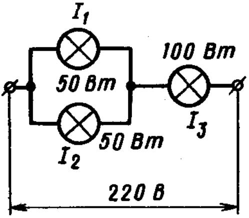


Рис. 232

21.12. $r = \dfrac{U_1 - U_2}{U_2} \dfrac{U_0^2}{P} \approx 5$ Ом.

Указание. Изменение напряжения на розетке обусловлено падением напряжения на подводящих проводах

$$U_1 - U_2 = Ir,$$

где $I = U_2 P/U_0^2$.

21.13. $P = 8$ Вт.

21.14. 1,5 А; 0,5 А.

Указание. Мощность, выделяемая во внешней цепи, равна разности мощностей, выделяемых во всей цепи и во внутренней ее части: $P = \mathscr{E}I - I^2 r$, где I – ток в цепи. Двум значениям тока соответствуют два различных сопротивления внешней цепи.

21.15. $I_0 \approx 62$ А.

В соответствии с условием задачи напишем два уравнения (см. задачу 21.14): $P_1 = \mathscr{E}I_1 - I_1^2 r$; $P_2 = \mathscr{E}I_2 - I_2^2 r$, где r – внутреннее сопротивление батареи.

Нам необходимо определить ток короткого замыкания: $I_0 = \mathscr{E}/r$. Разделив почленно правую и левую части каждого уравнения на r, получим: $\dfrac{P_1}{r} = \dfrac{\mathscr{E}}{r} I_1 - I_1^2$, $\dfrac{P_2}{r} = \dfrac{\mathscr{E}}{r} I_2 - I_2^2$. Решая эти уравнения относительно $\dfrac{\mathscr{E}}{r}$, находим $I_0 = \dfrac{\mathscr{E}}{r} = \dfrac{I_2^2 P_1 - I_1^2 P_2}{I_2 P_1 - I_1 P_2}$.

21.16. $U \approx 117$ В; $P_1 \approx 636$ Вт; $P_2 \approx 768$ Вт.

Указание. Два источника с одинаковыми э.д.с., соединенные параллельно, можно заменить источником с той же э.д.с., но с внутренним сопротивлением $r = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$.

21.17. $P = \mathscr{E}I - I^2 r$; мощность максимальна при токе $I_1 = \mathscr{E}/2r$ (рис. 233).

Указание. График зависимости P от I – парабола с максимумом при $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{2r}$ (см. задачу 21.14). К.п.д. в цепи $\eta = \dfrac{\mathscr{E}I - I^2 r}{\mathscr{E}I} = 1 - \dfrac{Ir}{\mathscr{E}}$. График η есть прямая линия (рис. 233).

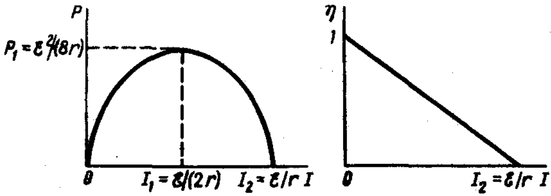


Рис. 233

Из графика видно, что каждому заданному значению мощности (кроме максимального) соответствуют два значения тока. При $I_1 = \mathscr{E}/2r$ мощность максимальна, а $\eta = 50\%$.

21.18. См. рис. 234.

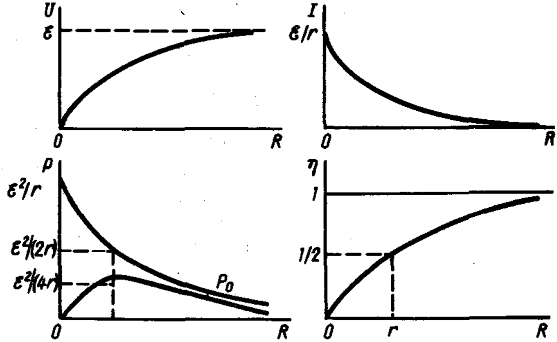


Рис. 234

Указание. Соответствующие зависимости даются формулами:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R+r};\ U = \frac{\mathscr{E}R}{R+r};\ P = \left(\frac{\mathscr{E}}{R+r}\right)^2 R;\ P_0 = \frac{\mathscr{E}^2}{R+r};\ \eta = \frac{R}{R+r}.$$

Максимум мощности P достигается при $I = \dfrac{\mathscr{E}}{2r}$ (см. задачу 21.17), т. е. при $R = r$, к. п. д. при этом равен 50%.

21.19. $I = \dfrac{\mathscr{E}(1 \pm \sqrt{1-\alpha})}{2r}$; $\quad U = \dfrac{\mathscr{E}}{2}(1 \pm \sqrt{1-\alpha})$; $R = r\dfrac{2-\alpha \pm 2\sqrt{1-\alpha}}{\alpha}$, где $\alpha = \dfrac{4rP}{\mathscr{E}^2}$.

Задача имеет решение, если $\alpha \leqslant 1$, т. е. если $P \leqslant \mathscr{E}^2/(4r)$.

Указание. См. задачу 21.17, $\mathscr{E}^2/4r$ – максимальная мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении.

21.20. $\mathscr{E} = 6$ В; $r = 1$ Ом.

21.21. В первом случае.

21.22. а) Уменьшится в 9/4 раза; б) уменьшится в 9/4 раза.

21.23. $r = 6$ Ом.

Решение. Условие задачи можно записать следующим образом: $Q_1 = Q_2$; $I_1^2 R_1 t = I_2^2 R_2 t$, откуда

$$I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2. \tag{1}$$

С другой стороны, на основании закона Ома для всей цепи

$$\mathscr{E} = I_1(r + R_1) = I_2(r + R_2). \tag{2}$$

Из равенства (1) следует

$$I_1/I_2 = \sqrt{R_2/R_1}, \tag{3}$$

из равенства (2)

$$I_1/I_2 = r + R_2/(r + R_1). \tag{4}$$

Решая совместно уравнения (3) и (4), найдем $r = \dfrac{R_2 - R_1\sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}}}{\sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}} - 1} =$
$= \sqrt{R_1 R_2}$.

21.24. $R_x = R_0/\sqrt{2}$.

21.25. $I_{к.з} \approx 1{,}63$ А.

Указание. Ток короткого замыкания $I_{к.з} = U/r$, где U – напряжение в сети; r – сопротивление подводящих проводов; U и r можно найти из условия, что на двух сопротивлениях R_1 и R_2 выделяется одинаковая мощность: $\left(\dfrac{U}{R_1 + r}\right)^2 R_1 = P$; $\left(\dfrac{U}{R_2 + r}\right)^2 R_2 = P$.

21.26. $P_1 = \dfrac{2P_н}{\left(2\sqrt{\dfrac{P_н}{P}} - 1\right)^2} = 420$ Вт.

Указание. Предварительно найти сопротивление подводящих проводов r из уравнения $\left(\dfrac{U}{R + r}\right)^2 R = P$.

Сопротивление плитки R находится по ее номинальной мощности $P_{ном}$.

21.27. $P_2 \approx 11{,}04$ Вт.

Указание. Воспользоваться формулой $P = \mathscr{E}I - I^2 r$.

21.28. $P_1 \approx 267$ Вт.

21.29. 300 В.

21.30. $I_1 = 2\dfrac{2}{3}$ А, $I_2 = 2$ А; $P_{макс} = 8\dfrac{1}{6}$ Вт.

Указание. См. задачи 21.14, 21.17.

21.31. 1. $r/R = 1{,}5$.

Указание. Если мощность, выделяющаяся во внешней цепи при двух различных ее сопротивлениях R_1 и R_2, одинакова, то выполняется такое соотношение: $r^2 = R_1 R_2$, где r – внутреннее сопротивление источника (см. задачу 21.23).

2. $\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{R}{r(n-1)} + 1$.

Указание. Закорачивая элемент, мы исключаем его из цепи. Поэтому согласно условию $\left[\dfrac{\mathscr{E}n}{R + r(n-1) + r_1}\right]^2 R = \left[\dfrac{\mathscr{E}(n-1)}{R + r(n-1)}\right]^2 R$.

21.32. 2,2 кВт; $\approx 91\,\%$.

21.33. $P_{\text{мех}} = 96$ Вт.

Решение. Вся мощность тока, идущего по обмотке работающего мотора, будет равна сумме мощности, превращаемой в механическую работу, и мощности, превращаемой в теплоту: $P = P_{\text{мех}} + P_{\text{тепл}}$, но $P = UI$, а $P_{\text{тепл}} = I^2R$, откуда

$$P_{\text{мех}} = P - P_{\text{тепл}} = UI - I^2R = I(U - IR). \qquad (1)$$

Чтобы определить значение $P_{\text{мех}}$, нужно найти сопротивление цепи электромотора. Это можно сделать исходя из условия, что при полном затормаживании ротора напряжение, приложенное к мотору, равно произведению тока на сопротивление (в этом случае не возникает противо-э.д.с. индукции): $U = I_0R$, откуда $R = U/I_0$.

Подставляем полученные значения в формулу (1):

$$P_{\text{мех}} = I\left(U - I\frac{U}{I_0}\right) = UI\left(1 - \frac{I}{I_0}\right).$$

21.34. $R_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$.

Указание. См. задачу 21.23.

21.35. 8 или 2 Ом.

Указание. См. задачу 21.17.

21.36. $S \approx \frac{2\rho l P}{U^2 n} = 8{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2 = 8{,}5\ \text{мм}^2$.

21.37. 4250 В.

Указание. Передаваемая мощность равна $P = UI = UjS$ (S – площадь сечения проводов), а потери в линии

$$P_{\text{п}} = I^2R_{\text{пров}} = j^2S^2\rho\frac{2l}{S} = 2j^2\rho l S.$$

21.38. В $\frac{100 + n}{10(1 + n)}$ раз.

Решение. Искомое отношение напряжений равно

$$\frac{U_2 + I_2 r}{U_1 + I_1 r}, \qquad (1)$$

где U_2, U_1, I_2, I_1 – соответственно напряжения и токи на нагрузке; r – сопротивление линии. По условию задачи

$$\frac{I_2^2 r}{I_1^2 r} = \frac{1}{100}, \text{ откуда } I_2 = \frac{I_1}{10}, \qquad (2)$$

$$I_1 r = \Delta U = nU_1,$$

$$I_1 U_1 = I_2 U_2$$

(условие равенства мощностей на нагрузке).

Подставляя в выражение (1) значения U_2, I_2 и I_1 (выраженные через U_1) из соотношений (2), (3) и (4), получим ответ.

21.39. а) $m_1 \approx 28 \cdot 10^3$ кг; б) $m_2 \approx 3{,}11 \cdot 10^3$ кг.

Решение. Значение сопротивления проводов, необходимое для определения сечения их, находится из условия, что потери на нагревание составляют 3% передаваемой мощности: $I^2 r = 0{,}03P$, мощность же $P = UI$, откуда $r = \dfrac{0{,}03U^2}{P}$.

Сначала находим S, а затем и массу $m = 2DlS = \dfrac{4D\rho l^2 P}{0{,}03U^2}$.

21.40. $r \approx 1{,}02$ Ом.

Решение. Разность потенциалов на клеммах мотора равна разности э.д.с. батареи и падения напряжения на подводящих проводах $U = \mathscr{E} - Ir$.

Примечание. Эта разность потенциалов, в свою очередь, равна сумме э.д.с. индукции, возникающей при вращении якоря мотора (так называемая противо-э.д.с.), и потери напряжения на сопротивлении обмотки якоря. Противо-э.д.с. при нагрузке мотора меньше, чем при холостом ходе вследствие уменьшения числа оборотов. Таким образом,

$$U_н = \mathscr{E} - I_н r, \ U_х = \mathscr{E} - I_х r,$$

по условию $U_н I_н = 10U_х I_х$, $U_н = 0{,}8U_х$, $I_н = 5$А, где $U_н$, $U_х$, $I_н$, $I_х$ – соответственно разности потенциалов и токи при нагрузке и при работе вхолостую. Решая эти уравнения, легко найти r.

21.41. $v_1 \approx 10$ м/с; $v_2 \approx 5$ м/с.

Указание. В первом случае $UI_1\eta = kmgv_1$. Во втором – $UI_2\eta = mgv_2(\sin\alpha + k\cos\alpha)$, где $\sin\alpha = 0{,}03$ (уклон).

21.42. $I = \dfrac{m}{l}\sqrt{\dfrac{c\Delta t}{\rho D\tau}} \approx 30$ А.

Указание. Воспользоваться очевидными соотношениями

$$I^2 Rr = cm\Delta t, \ R = \rho\frac{l}{S} \text{ и } m = DlS.$$

21.43. $n = \dfrac{U^2 d^2 \eta\tau}{4\rho D C_в m\Delta t} = 133.$

21.44. $\tau = \dfrac{\pi^2 Dc\Delta l d^4}{16\alpha\rho l I^2} \approx 16$ с.

21.45. $\Delta t = \dfrac{j^2\rho t}{CD} \approx 0{,}20$ °С.

21.46. $\dfrac{m}{t} = \dfrac{240\rho I^2 l}{\pi c(D^2 - d^2)(t_2 - t_1)} \approx 2{,}4$ кг/мин.

21.47. а) 2 Дж; 2 Дж; б) 2 Дж; 0,7 Дж; в) –2 Дж; 0,6 Дж.

Решение. Полная работа электрических сил $A = UIt$, где U – в общем случае разность потенциалов. Количество же выделяемой теплоты $Q = I^2Rt$.

Случай а) очевидный.

Случай б): $A = UIt = 2$ Дж. Чтобы найти Q, определим R (R — внутреннее сопротивление аккумулятора). По закону Ома, написанному для данного случая, $I_1 R = U_1 - \mathscr{E}_1$ (ток идет против э.д.с.), откуда $Q = I_1(U_1 - \mathscr{E}_1)t = 0{,}7$ Дж.

Случай в): работу совершает э.д.с. аккумулятора. Работа же электрических сил на внутренней части цепи отрицательная: $A = -U_2 I_2 t = -2$ Дж (ток идет от меньшего потенциала к большему).

Количество теплоты $Q = I_2^2 R t$, где $R = \dfrac{\mathscr{E}_2 - U_2}{I_2}$. Таким образом, $Q = I_2(\mathscr{E}_2 - U_2)t = 0{,}6$ Дж.

21.48. 1:2:4 (рис. 235).

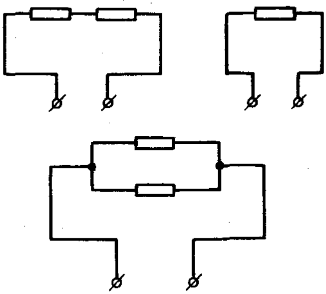


Рис. 235

21.49. 1) 45 мин; 2) 10 мин.

Решение. Обозначив через r_1 и r_2 сопротивления обмоток, а через U — напряжение сети, можно согласно условию написать два тройных равенства:

$$\frac{U^2}{r1}t_1 = \frac{U^2}{r2}t_2 = \frac{U^2}{r_1 + r_2}t_{\text{посл}};$$

$$\frac{U^2}{r_1}t_1 = \frac{U^2}{r_2}t_2 = \frac{U^2}{\dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}t_{\text{парал}}.$$

Из этих равенств непосредственно следует $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$, и воспользовавшись производными пропорциями, легко получить, что $t_{\text{посл}} = t_1 + t_2$, $t_{\text{парал}} = \dfrac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$.

21.50. $r = 121$ Ом.

Решение. Сопротивление R нагревателей чайников определяется из соотношения $R = U^2/P$.

Если на сопротивлениях $2R$ (при последовательном соединении чайников) и $R/2$ (при параллельном их включении) выделяется одна и та же тепловая мощность, то $r^2 = 2R\dfrac{R}{2} = R^2$ (см. задачу 21.23).

21.51. 256 °C.

Решение. Обозначим через Q_1 и Q_2 соответственно тепловые мощности, выделяемые в электрической плитке в двух случаях, указанных в задаче, можно согласно условию записать:

$$Q_1 = k\Delta t_1, \tag{1}$$

$$Q_2 = k\Delta t_2. \tag{2}$$

Подставив значения Q_1 и Q_2, равные $Q_1 = \dfrac{U_2}{R}$ и $Q_2 = \left(\dfrac{U}{R + r}\right)^2 R$, и составив отношение равенств (1) и (2), получим $\frac{(R+r)^2}{R^2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$, откуда $\Delta t_2 = \Delta t_1 \left(\frac{R}{R+r} \right)^2$.

21.52. $^1/_8$.

Решение. Так как проводники включены последовательно, то через них идет одинаковый ток. Но площадь сечения одного из проводников в 4 раза больше площади сечения другого, поэтому сопротивление единицы длины этого проводника в четыре раза меньше, чем у второго проводника и в нем выделяется в 4 раза меньшее количество теплоты, чем во втором проводнике: $Q_1/Q_2 = {}^1/_4$.

С другой стороны, так как при тепловом равновесии количество теплоты, выделяющееся в проводнике, должно быть равно количеству теплоты, отдаваемому окружающей среде, то $Q_1 = \alpha (t_1 - t_0) S_1$ и $Q_2 = \alpha (t_2 - t_0) S_2$, где t_1 и t_2 – температуры проводников; t_0 – температура воздуха; α – коэффициент пропорциональности; S_1 и S_2 – площади поверхности единицы длины проводников. Поэтому $\frac{(t_1 - t_0) S_1}{(t_2 - t_0) S_2} = \frac{1}{4}$.

Учитывая, что $\frac{S_1}{S_2} = 2$, получим $\frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} = \frac{1}{8}$. Так как $t_0 = 0\,°C$, то $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{8}$.

21.53. $\Delta t_2 \approx 66{,}7\,°C$.

Указание. $\Delta t_2 = \Delta t_1 \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}$ (см. решение задачи 21.51).

21.54. $\Delta U = -U_н + \sqrt{U_н^2 + \frac{PAU}{U_а e I_н}} \approx 0{,}05$ В.

Решение. При установившемся режиме на нити будет расходоваться дополнительная энергия, необходимая на совершение работы выхода эмиттированных электронов (для упрощения задачи величину кинетической энергии, уносимой электронами при их вылете, не учитываем, хотя она составляет примерно 2 %). Если I – эмиссионный ток, то за секунду вылетает I/e электронов, а потому дополнительная энергия, которая должна подводиться к нити в секунду, должна равняться IA/e, где A – работа выхода.

Таким образом, можно написать

$$\frac{(U_н - \Delta U)^2}{R} = \frac{U^2}{R} + \frac{I}{e} A;$$

I можно найти из соотношения $P = IU_а$, а сопротивление R – из начального условия $R = \frac{U_н}{I_н}$. Подставляя I и R в уравнение, записанное выше, и сделав соответствующие преобразования, получим $\Delta U^2 + 2U_н\Delta U -$

$$- \frac{PAU_н}{U_a e I_н} = 0, \text{ откуда } \Delta U = -U_н + \sqrt{U_н^2 + \frac{PAU_н}{U_a e I_н}}.$$

22. ТОК В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

22.1. $m_н = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Решение. Масса водородного иона – масса атома водорода равна $\frac{1 \cdot 10^{-3}}{N_A} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.

Объединенная формула законов электролиза $m = \frac{A}{Z}\frac{q}{F}$ (A – атомная масса, Z – валентность данного вещества, q – протекший заряд и $F = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль – постоянная Фарадея). Число F равно количеству электричества, которое нужно пропустить через электролит, чтобы выделить на электроде 1 моль; 1 моль любого вещества содержит N_A/Z атомов, следовательно, N_A/Z ионов переносит заряд, численно равный F. На долю каждого одновалентного иона приходится заряд $F/N_A = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

22.2. $m \approx 4{,}3$ мг.

22.3. $h = \frac{A}{Z}\frac{It}{F}\frac{1}{SD} = 1{,}55 \cdot 10^{-5} = 15{,}5$ мкм.

22.4. 177 А; 1867 см^3.

Указание. См. задачу 22.1. Объем можно определить, воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева.

22.5. $A \approx 37$ кВт·ч.

Решение. Электрическая энергия, расходуемая при электролизе на получение 1 кг алюминия, будет равна

$$A = qU\frac{1}{\eta}, \qquad (1)$$

где q – количество электричества, при пропускании которого через электролит выделяется 1 кг алюминия; U – напряжение, при котором ведется электролиз; η – к. п. д. установки.

Количество электричества q может быть найдено из объединенной формулы первого и второго законов Фарадея

$$m = \frac{A}{Z}\frac{q}{F}. \qquad (2)$$

Найдя q из уравнения (2) и подставив его в уравнение (1), получим

$$A = \frac{FmZU}{A\eta}.$$

22.6. 1277 °С.

Указание. Воспользоваться формулой объединенного закона электролиза и уравнением Клапейрона – Менделеева.

22.7. $v = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}} = 1{,}92 \cdot 10^6$ м/с.

22.8. $U = \frac{W_и d}{el}$.

Решение. Если разность потенциалов между электродами U, то напряженность поля в пространстве между ними $E = U/d$. На электрон в этом поле действует сила $F = Ee = Ue/d$. Так как электрон между столкновениями движется равноускоренно, полностью теряя скорость при столкновении, то работа силы F на пути l $A = Fl = Uel/d$ идет на увеличение кинетической энергии электрона. Эту энергию электрон передает атому неона при столкновении. Поэтому $Uel/d = W_и$. Отсюда $U = \frac{W_и d}{el}$.

22.9. Раскаленный угольный стержень испускает электроны. Электроны идут в течение одного полупериода с угля на металл.

22.10. Острие к отрицательному полюсу батареи, диск – к положительному.

22.11. $E = \frac{2d\varphi}{l\left(L + \frac{l}{2}\right)}$.

Указание. См. решение задачи 16.25.

23. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

23.1. Прикоснуться концом одного стержня к середине другого (расположив их в виде буквы T).

23.2. Будет, так как движение положительных ионов решетки создаст такое же магнитное поле, как и движение электронов в покоящейся проволоке.

23.3. Вектор индукции направлен под углом 45° к плоскостям обручей. Направления токов в обмотках определяют, в каком квадранте расположен вектор индукции.

Указание. Вектор индукции магнитного поля, создаваемого в центре кругового тока, направлен перпендикулярно плоскости тока в сторону, определяемую правилом буравчика.

23.4. *Указание.* Индукция магнитного поля, создаваемого током, пропорциональна произведению силы тока на длину участка проводника.

23.5. *Указание.* См. указание к предыдущей задаче.

23.6. а) Горизонтально к востоку, так как магнитное поле имеет вертикальную составляющую, направленную вниз;

б) вверх и на север.

23.7. При таком расположении на виток с током действуют растягивающие силы (магнитное поле тока совпадает с внешним) и равновесие будет устойчивым.

23.8. Уменьшится.

Указание. Поле сосредоточится в сердечнике.

23.9. Благодаря притяжению колец пружины она сожмется, размыкая цепь, затем распрямится, опять сожмется и т. д., т. е. будет совершать колебания.

23.10. $I \approx 9{,}8$ А.

23.11. $B \approx 6{,}6 \cdot 10^{-2}$ Тл.

23.12. *Указание.* Заменим проволоку другой, состоящей из ряда ступенек, рис. 236. Сила, действующая на участок Δl проволоки в магнитном поле, равна ΔlIB. Складывая силы, действующие на все участки, параллельные OO', найдем, что на «ступенчатую» проволоку действует сила $F = IBl$ перпендикулярно OO'.

Силы, действующие на участки, перпендикулярные OO', компенсируют друг друга.

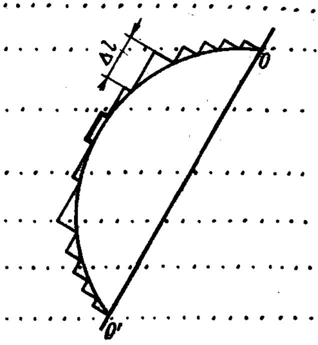


Рис. 236

23.13. $P = IBd/(2S) = 10^5$ Па.

Указание. Мысленно разрежем кольцо на два полукольца. Тогда согласно указанию к задаче 23.12 на каждое из полуколец будет действовать сила F, растягивающая или сводящая их друг к другу (в зависимости от направления тока), равная $F = IBd$, а напряжение $P = F/(2S)$;

$$P = IBd/(2S) = 10^5 \text{ Па.}$$

23.14. $\operatorname{tg} \alpha = BIl/(mg) \approx 1, \ \alpha \approx 45^\circ$.

23.15. В проводниках объемный электрический заряд равен нулю, поэтому проявляются только магнитные силы — силы взаимодействия между движущимися зарядами. В катодных пучках преобладают силы отталкивания между одноименными зарядами.

23.16. По окружности. Величина скорости не меняется.

Указание. Сила, действующая на электрон, перпендикулярна его скорости и не совершает работы.

23.17. $R = mv \sin \alpha/(eB)$.

Указание. Сила Лоренца, действующая на движущийся в магнитном поле электрон, перпендикулярна скорости электрона и сообщает ему центростремительное ускорение. Поэтому $ev_1B = \dfrac{mv_1^2}{R}$, откуда $R = \dfrac{mv_1}{eB}$ ($v_1 = v \sin \alpha$ — составляющая скорости, перпендикулярная вектору $\boldsymbol{B}$).

Совершаемая работа равна нулю, так как сила все время перпендикулярна перемещению электрона.

Электрон движется по винтовой траектории.

23.18. К востоку, $a \approx 6{,}1 \cdot 10^{14}$ м/с^2; $y = \dfrac{Bl^2}{2\sqrt{\dfrac{2U}{e/m}}} \approx 3$ мм.

Указание. На электрон в магнитном поле с индукцией B действует сила Лоренца $F = evB \sin \alpha$, где α – угол между векторами B и v, v – скорость электрона, e – его заряд.

23.19. Электрон будет двигаться по винтовой линии с увеличивающимся шагом (расстояние между витками). Ось спирали параллельна направлениям B и E.

Указание. Электрическое поле сообщает электрону ускорение, параллельное направлению поля E, а магнитное – изменяет направление скорости в плоскости, перпендикулярной E и B.

23.20. Нет. Сила взаимодействия с наведенными в кольце токами по закону Лоренца тормозит падение магнита.

23.21. Магнит будет падать так, как если бы он двигался в вязкой жидкости. При движении магнита в трубе возникает э. д. с. индукции тем большая, чем больше скорость магнита. При этом возникает магнитное поле, противодействующее движению магнита (закон Ленца).

23.22. Например, вращать вокруг оси, не направленной вдоль силовых линий поля.

23.23. Нет.

23.24. Изменение потока индукции магнитного поля через кольцо приводит к появлению вихревого электрического поля. В диэлектрическом кольце оно приводит к поляризации диэлектрика. В кольце же из сверхпроводника индуцируется ток, магнитный поток которого в сумме с потоком индукции от магнита через кольцо равен нулю.

23.25. В кольце возникает индукционный ток, величина и направление которого таковы, что магнитный поток через кольцо не изменится. Поэтому $\Phi = \pi R^2 B$.

23.26. Увеличивается вчетверо.

Указание. Магнитный поток, охватываемый сверхпроводящим кольцом, не может измениться благодаря тому, что его сопротивление равно нулю.

23.27. 1. $q \approx 1{,}95 \cdot 10^{-7}$ Кл. 2. $P \approx 2{,}8 \cdot 10^{-5}$ Вт.

Решение. 1. Заряд конденсатора равен $q = C\mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ – э. д. с. индукции, возникающей в катушке: $|\mathscr{E}| = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} n = \dfrac{\Delta BSn}{\Delta t}$; S – площадь сечения катушки, равная $\dfrac{\pi D^2}{4}$. Окончательно получаем

$$q = C \frac{\Delta B}{\Delta t} \frac{\pi D^2}{4} n.$$

2. Тепловая мощность, выделяемая в катушке,

$$P = \frac{\mathscr{E}^2}{R}. \text{ Здесь } \mathscr{E} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \frac{\pi D^2}{4} n, \text{ а } R = \rho \frac{l}{S} n.$$

Подставив $\mathscr{E}$ и R в выражение для P, получим

$$P = \left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2 \frac{\pi D^3 nS}{16\rho}.$$

23.28. $\dfrac{\Delta B}{\Delta t} = \dfrac{16\rho I}{\pi D d^2} \approx 1{,}12$ Тл/с.

23.29. а) Одинаковое; б) в первом случае больше.

Решение. Индуцируемое количество электричества Q определяется изменением магнитного потока $\Delta\Phi$ через катушку: $Q = It = \dfrac{\mathscr{E}_{\text{инд}}}{R}t = \dfrac{\Delta\Phi}{R}$, где R – сопротивление катушки; $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ – э. д. с. индукции. В обоих случаях Q одинаково.

Совершаемая работа равна $Q\mathscr{E}_{\text{инд}}$. При быстром вдвигании $\mathscr{E}_{\text{инд}}$, а следовательно, и работа будет большей.

23.30. 1. Такое, что магнитное поле этого тока направлено вдоль поля магнита.

2. Требуется.

3. Оно пропорционально скорости вытаскивания контура.

Примечание. Индукционный ток будет возникать в контуре, когда он будет перемещаться в той части межполюсного пространства, где магнитное поле неоднородно.

23.31. Катушка нагревается за счет работы аккумулятора.

23.32. Способ основан на законе Ленца: индукционный ток противодействует движению, его вызвавшему.

23.33. В момент вхождения в зазор движение монеты затормозится, ускорение будет меньше g; то же будет при выходе из магнитного поля. Внутри зазора в однородном магнитном поле индукционный ток не будет возникать и ускорение падения будет равно g.

23.34. По кольцу идет постоянный ток. Разность потенциалов равна нулю.

Указание. В любом участке кольца индуцируется э. д. с., прямо пропорциональная длине участка или, при однородном проводнике, его сопротивлению. Следовательно, $\varphi_A - \varphi_B = \mathscr{E}_{AB} - Ir = \dfrac{\mathscr{E}}{R}r - \dfrac{\mathscr{E}}{R}r = 0$ (см. задачу 20.34).

23.35. Показание вольтметра $U = B_{\text{в}}av = 10^{-3}$ В и одинаково во всех случаях.

23.36. $\varphi \approx 0{,}55$ В. Нельзя.

Решение. Искомая разность потенциалов $\varphi = B_{\text{в}}lv \approx 0{,}55$ В. Если замкнуть концы крыльев на вольтметр, то получим контур, в котором при поступательном движении самолета магнитный поток остается неизменным и э. д. с. индукции равна нулю. Наличие э. д. с. можно обнаружить только при поворотах самолета (изменении угла между контуром и магнитным полем).

23.37. Невозможно, не применяя проводников, неподвижных относительно Земли.

23.38. $4 \cdot 10^{-3}$ Тл.

23.39. Э. д. с. индукции равномерно распределена по всему контуру. На любом участке э. д. с. индукции равна по величине и противоположна по знаку падению напряжения на сопротивлении участка, так что разность потенциалов на концах участка равна нулю. Сравните с решением задачи 20.34.

23.40. $\mathscr{E}_{\text{инд}} = 23$ мВ.

Р е ш е н и е. Величина э. д. с. индукции, возникающей в контуре, пропорциональна скорости изменения магнитного потока:

$$|\mathscr{E}_{\text{инд}}| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

В СИ э. д. с. выражается в вольтах, поток индукции – в веберах, время – в секундах. Изменение магнитного потока в данном случае равно начальному значению его, так как конечное значение равно нулю (магнитное поле выключается): $\Delta\Phi = \Phi_0$.

Значение Φ_0 можно найти из формулы $\Phi_0 = BS\cos\alpha$, где B – индукция магнитного поля; S – площадь витка; α – угол между направлением вектора $\boldsymbol{B}$ и нормалью к плоскости витка. Искомая величина э. д. с. индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}} = \dfrac{BS\cos\alpha}{\Delta t}$.

23.41. $\Delta\Phi = \mathscr{E}_{\text{инд}}t/n = 10^{-3}$ Вб.

Указание. Э. д. с. индукции, возникающие в отдельных витках, складываются.

23.42. $Q = 5\cdot 10^{-6}$ Кл.

23.43. Не пробьет.

Возможны два случая (рис. 237).

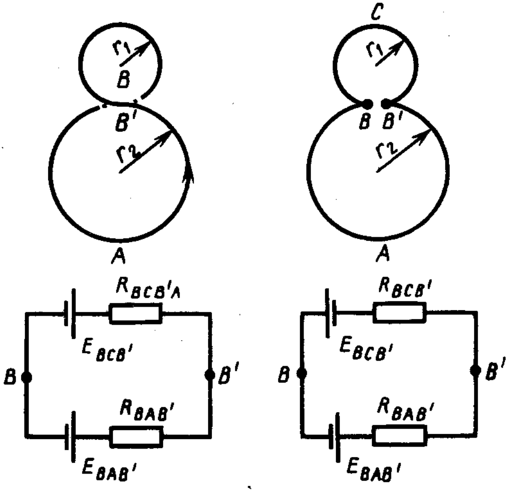


Рис. 237

I. Напряжение между точками B и B' равно э. д. с. индукции в контуре BAB' минус падение напряжения на сопротивлении участка BAB':

$$U^{\text{I}}_{BB'} = \mathscr{E}_{BAB'} - IR_{BAB'};$$

$$\mathscr{E}_{BAB'} = \pi r_2^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}; \quad I = \frac{\mathscr{E}_{BAB'} - \mathscr{E}_{BCB'}}{R_{BAB'} + R_{BCB'}};$$

$$U^{\mathrm{I}}_{BB'} = \pi r_2^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} - \pi \frac{\Delta B}{\Delta t}(r_2^2 - r_1^2) \frac{r_2}{r_1 + r_2} = \pi r_1 r_2 \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

II. $U^{\mathrm{II}}_{BB'} = \pi r_1 r_2 \dfrac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \dfrac{\Delta B}{\Delta t}$.

Напряжение $U^{\mathrm{II}}_{BB'}$ всегда меньше, чем $U^{\mathrm{I}}_{BB'}$. Поэтому изоляция провода должна быть рассчитана на первый случай. Подставляя данные задачи, получаем ≈ 1 В. Таким образом, изоляцию не пробьет.

23.44. 1) $6{,}75 \cdot 10^{-3}$ Кл; 2) $1{,}82 \cdot 10^{-2}$ Кл; 3) $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ Кл.

Указание. Индуцируемое количество электричества определяется изменением магнитного потока через рамку: $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = I = \dfrac{\mathscr{E}_{\text{инд}}}{R} = \dfrac{\Delta \Phi}{R\,\Delta t}$ (R — сопротивление рамки), а $\Delta\Phi = BS(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$.

23.45. $\varphi = 120°$.

Указание. Протекшее количество электричества $q = \dfrac{\Delta\Phi}{R}$. При повороте в пределах 180° ток течет в одном направлении, хотя проходит через нуль.

23.46. См. рис. 238. Площадь фигуры, ограниченной графиком и осью времени, численно равна заряду, прошедшему по цепи (за время Δt по цепи проходит заряд $I\,\Delta t$). По графику можно определить изменение магнитного потока через катушку. Именно оно пропорционально заряду, прошедшему по цепи (см. задачи 23.44 и 23.45).

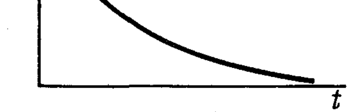


Рис. 238

23.47. *Указание.* Индукция магнитного поля внутри катушки пропорциональна числу витков. Поток магнитной индукции, сцепленной со всеми витками, пропорционален магнитной индукции, а также числу витков и, следовательно, индуктивность пропорциональна квадрату числа витков.

23.48. $I = \dfrac{B\omega l^2}{4R}$.

Решение. Подвижный стержень делит кольцо на два контура. При вращении стержня изменяется магнитный поток через оба контура, причем если в одном уменьшается, то в другом увеличивается с одинаковой по абсолютной величине скоростью. В обоих контурах наводятся э.д.с. индукции, равные по абсолютной величине и имеющие разные знаки по отношению к заданному направлению обхода:

$$|\mathscr{E}_1| = |\mathscr{E}_2| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\,\Delta S}{\Delta t},$$

но $\Delta S = {}^1/_2 l^2\ \Delta\varphi$, откуда

$$|\mathscr{E}_1| = |\mathscr{E}_2| = \frac{1}{2} B\omega l^2 \quad \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega\right).$$

Для определения тока I, идущего по стержням, представим себе эквивалентную схему двух источников э. д. с., соединенных параллельно и замыкаемых сопротивлением $2R$:

$$I = \frac{\mathscr{E}_1}{2R} = \frac{\mathscr{E}_2}{2R}; \quad I = \frac{B\omega l^2}{4R}.$$

23.49. $P = \dfrac{B^2\omega^2 r^4}{4R} = \dfrac{B^2 4\pi^2 n^2 r^4}{4R} \approx 1{,}96$ Вт.

Указание. $\mathscr{E}_{\text{инд}} = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B\pi r^2 n = \dfrac{B\omega r^2}{2}$, где $B\pi r^2$ – магнитный поток сквозь диск; n – число оборотов в секунду.

Примечание. Поток магнитной индукции через контур остается постоянным. Казалось бы, что индукционный ток должен отсутствовать. На самом деле надо принять во внимание смещение в каждый момент того радиуса диска, который замыкает цепь контура. При повороте диска на малый угол $\Delta\varphi$ радиус диска описывает площадь $\Delta S = {}^1/_2 r^2\ \Delta\varphi$ и изменение потока равно ${}^1/_2 Br^2\ \Delta\varphi$, а $\mathscr{E}_{\text{инд}} =$

$$= \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2} B\omega r^2.$$

23.50. $F = \dfrac{B^2 l^2 v}{R}$.

Решение. При движении подвижного проводника со скоростью v в контуре возникает э. д. с. индукции

$$\mathscr{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\,\Delta S}{\Delta t} = Bvl.$$

При этом в контуре идет ток $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R} = \dfrac{Bvl}{R}$. На подвижный проводник с током в магнитном поле действует сила $F = BIl = B^2 l^2 v/R$. Так как проводник движется равномерно, то именно такой величины силу и нужно приложить к проводнику.

23.51. $v_{\text{макс}} = \dfrac{Dg\rho}{B^2} = 0{,}96$ м/с; не изменится; $v'_{\text{макс}} = \dfrac{Dg\rho}{B^2 \sin\alpha} =$ $= 1{,}92$ м/с.

Решение. При движении перемычки вниз в контуре, образованном конструкцией и перемычкой, вследствие изменения потока индукции возникает э. д. с.

$$|\mathscr{E}| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Bvl.$$

При этом по перемычке идет ток $I = \mathscr{E}/R = Bvl/R$. На перемычку со стороны поля будет действовать механическая (амперова) сила, которая (по закону Ленца) направлена вверх:

$$F = BIl = B^2vl^2/R.$$

Скорость движения перемычки вниз достигнет максимального значения, когда сила F станет равной весу перемычки mg (дальнейшее движение будет равномерным): $B^2l^2v_{\text{макс}}/R = mg$.

Подставляя в полученное равенство значения $m = lSD$ и $R = \rho l/S$, где S – площадь сечения перемычки, получим окончательно $v_{\text{макс}} = Dg\rho/B^2$.

Покажите подстановкой размерностей справедливость полученной формулы.

При наклонных рельсах $v'_{\text{макс}} = \dfrac{Dg\rho}{B^2 \sin\alpha}$.

23.52. $R = \dfrac{B^2l^2v}{mg} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ Ом.

Указание. См. задачу 23.51. В этом случае сила F равна силе тяжести mg.

23.53. $U = \dfrac{1}{2}B\omega l^2 + R\,\dfrac{mg}{Bl}\cos\omega t$.

Решение. Радиальный проводник будет вращаться равномерно с заданной угловой скоростью ω, если в каждый момент времени сумма моментов сил, действующих на проводник, равна нулю.

Момент силы тяжести $M_1 = mg\cos\alpha\,\dfrac{l}{2} = mg\cos\omega t\,\dfrac{l}{2}$, где угол α отсчитывается от горизонтали или, что то же, время отсчитывается от момента прохождения радиального проводника через горизонталь.

Момент электромагнитной силы $M_2 = Bil\,\dfrac{l}{2}$, где i – ток через проводник.

Приравнивая моменты, получим выражение, определяющее ток i:

$$i = \frac{mg}{Bl}\cos\omega t.$$

Но при равномерном вращении проводника на нем появляется постоянная э.д.с. индукции, равная (см. задачу 23.48) $\mathscr{E}_{\text{инд}} = {}^1/_2Bl^2\omega$, ток которой препятствует вращению.

Таким образом, искомое напряжение должно быть равно сумме постоянной составляющей, равной и противоположной по знаку возникающей э.д.с. индукции и переменной, создающей ток i:

$$U = \frac{1}{2}B\omega l^2 + R\,\frac{mg}{Bl}\cos\omega t.$$

23.54. При удалении верхней части сердечника индуктивности первичной и вторичной катушек уменьшаются. Это приведет к уменьшению противо-э.д.с. индукции (э.д.с. самоиндукции) в первичной обмотке, а следовательно, к увеличению тока в ней. Во вторичной же обмотке это приведет к уменьшению э.д.с. индукции и тока.

23.55. Если трансформатор замкнуть накоротко, то он может перегореть. При коротком замыкании по виткам идет ток $I = \frac{n\mathscr{E}}{nR} = \frac{\mathscr{E}}{R}$, где $\mathscr{E}$ – э. д. с. индукции в одном витке и R – сопротивление витка. При коротком замыкании одного витка через него идет ток $I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R}$, равный как раз I. Виток сгорит.

23.56. Первичная – 200 витков. Вторичная – 6600 витков.

Указание. Вольтметр с проводом образует контур, который пронизывается тем же магнитным потоком, что и обмотки трансформатора.

23.57. Работающий мотор нагревается быстрее, так как его якорь вращается с меньшим числом оборотов, и, следовательно, противо-э. д. с. индукции в этом якоре будет меньшей, а сила тока – большей.

23.58. $N_{\text{макс}} = \frac{U^2}{4R} = 180$ Вт; $I = 3$ А.

Указание. Электромотор, включенный в сеть с напряжением U, развивает мощность $P = UI - I^2R = I(U - IR) = I\mathscr{E}$, где I – ток в моторе; R – его сопротивление и $\mathscr{E}$ – противо-э. д. с. индукции. Максимальная мощность достигается при токе $I = \frac{U}{2R}$ и равна $\frac{U^2}{4R}$ (см. рис. 233 и решение задачи 21.18).

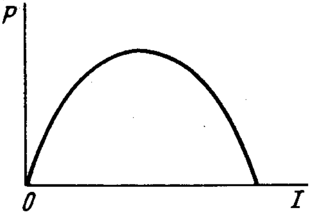


Рис. 239

23.59. 80 и 40 В.

Указание. См. задачу 23.58. Данная мощность развивается мотором при двух значениях тока в нем (рис. 239). Эти значения тока соответствуют э. д. с. индукции $\mathscr{E}_i = U - I_iR$, возникающей при двух различных скоростях вращения якоря.

24. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

24.1. $\mathscr{E}_{\text{макс}} = 100$ В; $\nu = 400$ Гц; $T = 1/400$ с; $\varphi = 800\ \pi t$.

Указание. Сопоставить с уравнением $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{макс}} \sin 2\pi\nu t$.

24.2. $\Phi = BS\cos\frac{2\pi}{T}t$; $\mathscr{E} = BS\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t$.

Указание. Э. д. с. индукции, возбуждаемую в любой момент времени в рамке, вращающейся с угловой скоростью ω в магнитном поле с индукцией B, можно найти как сумму э. д. с., возникающих в проводниках AB и CD (рис. 240); $\mathscr{E} = 2Blv \sin\varphi$, где $v = \omega r$, φ – угол между векторами скорости проводника в данный момент и индукции, равный углу поворота рамки, т. е. $\varphi = \omega t$. Угловая скорость $\omega = 2\pi/T$.

Подставляя значения v и φ в выражение выше, получим $\mathscr{E} = 2Bl\omega r \sin\omega t$, но $2lr$ равно площади рамки S; окончательно получаем $\mathscr{E} = BS\omega \sin\omega t$.

24.3. В два раза уменьшится период колебаний и во столько же раз увеличится амплитудное значение э. д. с.

Указание. Так как скорость изменения магнитного потока увеличится в два раза, то мгновенное и амплитудное значения э. д. с. возрастают тоже в два раза (см. задачу 24.2).

24.4. 2,5 В.

24.5. $T \approx 0{,}04$ с.

24.6. $\mathscr{E} = 5{,}04$ В.

Решение. Из формулы амплитудного значения э. д. с. $\mathscr{E}_0 = BS\omega n$ (см. задачу 24.2) найдем угловую скорость вращения рамки. Через $t = 0{,}01$ с после прохождения нейтрального положения э. д. с. будет равна

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t = \mathscr{E}_0 \sin \frac{\mathscr{E}_0}{BSn} t.$$

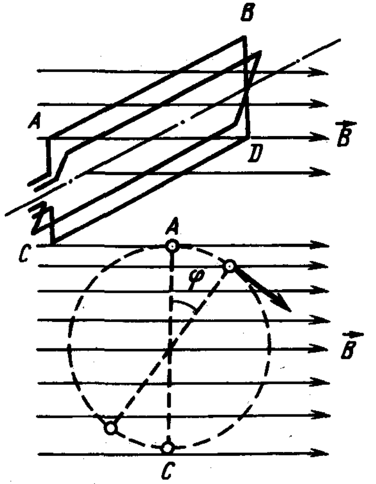


Рис. 240

24.7. $\Delta t = \dfrac{B^2 S \pi^2 n^2 t}{8\rho D c} \approx 3{,}24$ °C.

Указание. Максимальная э. д. с., возникающая в рамке, определяется по формуле $\mathscr{E}_{\text{макс}} = BS\omega N$ (см. задачу 24.2), где N – число витков обмотки. Количество теплоты Q, выделяющееся в обмотке за время t: $Q = t\,\dfrac{\mathscr{E}_{\text{д}}^2}{R}$, где $\mathscr{E}_{\text{д}} = \dfrac{\mathscr{E}_{\text{макс}}}{\sqrt{2}}$ и $R = \rho \dfrac{l}{s}$, $l = 4\sqrt{S}N$.

Изменение температуры $\Delta t = \dfrac{Q}{mc}$, где $m = lsD = 4\sqrt{S}\,NsD$. После соответствующих подстановок получим $\Delta t = \dfrac{B^2 S \pi^2 n^2 t}{8\rho D c}$.

Полезно проверить справедливость полученного выражения методом размерностей:

$$[\Delta t] = \frac{\text{Тл}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{с}}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}} = \frac{\left(\dfrac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}\right)^2 \cdot \text{с}}{\text{Ом} \cdot \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}} = \frac{\left(\dfrac{\text{Вб}}{\text{с}}\right)^2 \cdot \text{с}}{\text{Ом} \cdot \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}} =$$

$$= \frac{\text{В}^2 \cdot \text{с}}{\text{Ом} \cdot \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}} = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}} = \text{К}.$$

24.8. 1. 310 В. 2. $\Delta t \approx 1/150$ с.

Решение. 2. График зависимости напряжения переменного тока от времени представляет собой синусоиду (рис. 241). Период переменного тока $T = 0{,}02$ с. Рассмотрим один полупериод.

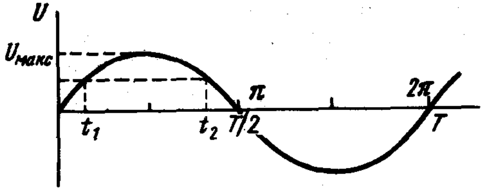


Рис. 241

Неоновая лампа будет гореть в течение того времени каждого полупериода, когда $U \geqslant 84$ В (фактически напряжение зажигания несколько больше напряжения гашения, но для упрощения задачи в условии принято, что они равны).

Этот промежуток времени, очевидно, равен $\Delta t = t_2 - t_1$, где t_2 и t_1 могут быть найдены из уравнения переменного тока:

$$U = U_{\text{макс}} \sin \omega t = U_{\text{макс}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \tag{1}$$

Максимальное напряжение связано с действующим следующей формулой:

$$U_{\text{макс}} = U_{\text{д}} \sqrt{2}. \tag{2}$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1), получим $U = U_{\text{д}} \sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$, откуда $\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = \frac{U}{U_{\text{д}}\sqrt{2}}$. Подставляя числовые значения $U = U_{\text{заж}} = U_{\text{гаш}}$ и $U_{\text{д}}$, найдем $\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = \frac{1}{2}$, откуда в пределах одного полупериода:

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi}{T} t_1 = \dfrac{\pi}{6}, \quad t_1 = \dfrac{T}{12}; \\ \dfrac{2\pi}{T} t_2 = \dfrac{5}{6}\pi, \quad t_2 = \dfrac{5}{12} T. \end{cases}$$

Следовательно, искомое значение $\Delta t = t_2 - t_1 = T/3$.

24.9. Э. д. с. самоиндукции, возникающая в первичной цепи, почти равна приложенному напряжению.

24.10. Согласно закону Ленца с увеличением индукционного тока, протекающего во вторичной обмотке, ослабляется переменный магнитный поток в сердечнике трансформатора, соответственно уменьшается противо-э. д. с. самоиндукции в первичной цепи трансформатора.

24.11. а) $I_{\text{д}} = U_0 \sqrt{C/2L} = 44$ мА; б) $\Phi_{\text{макс}} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-8}$ **Вб**.

Указание. Из равенств $\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$ и $I_{\text{д}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ находим $I_{\text{д}}$; из равенства $\Phi n = LI_0$ находим Φ.

24.12. $P \approx 10^{-3}$ Вт.

Указание. Мощность, потребляемая контуром, должна компенсировать тепловую мощность, выделяемую в сопротивлении: $P = I_д^2 R$, где $I_д = U_0 \sqrt{C/2L}$ (см. предыдущую задачу).

24.13. $2\pi c C \dfrac{m}{n}$.

24.14. Раздвигать.

24.15. $\lambda = 113{,}1$ м.

Указание. Длина волны связана с периодом колебаний следующим соотношением: $\lambda = cT$, где c — скорость распространения электромагнитных волн, равная $3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Период колебаний T контура определяется по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

В СИ L измеряется в генри, C — в фарадах и T — в секундах.

24.16. $C \approx 112{,}6$ пФ.

24.17. От 2,25 до 71,2 МГц (от 133 до 4,21 м).

Указание. См. задачу 24.15.

24.18. От 8 до 2,86 мкГ.

Указание. См. задачу 24.15.

24.19. 1600 колебаний.

Указание. Число колебаний $N = \nu t$, где $\nu = C/\lambda$ — частота, соответствующая электромагнитной волне с длиной $\lambda = 375$ м, а время t равно периоду звуковых колебаний: $t = T = 1/\nu_{зв} = 0{,}002$ с.

24.20. На $0{,}05T$ или $0{,}1\pi$ рад.

24.21. Плотность потока энергии (мощности) обратно пропорциональна квадрату расстояний. В случае радиолокации увеличение дальности в два раза равносильно распространению энергии на расстояние, в четыре раза большее (приемник принимает отраженный сигнал).

IV. ОПТИКА

25. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА

25.1. Под углом 66 или 24° к поверхности стола (рис. 242, *а* и *б*).

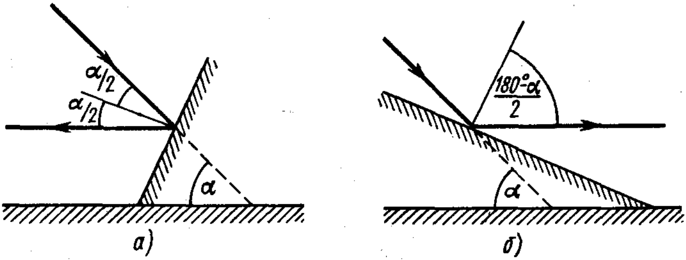


Рис. 242

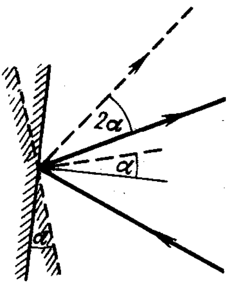


Рис. 243

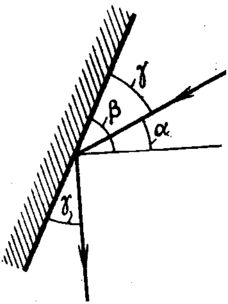


Рис. 244

25.2. На 2α (рис. 243).

25.3. $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$.

Указание. Из рис. 244 видно, что $\gamma + \alpha + \frac{\pi}{2} + \gamma = \pi$, причем $\beta = \gamma + \alpha$.

25.4. $d = 2l \sin \varphi$.

Указание. Изображение монеты повернется на угол 2φ вокруг ребра двугранного угла, оставаясь от него на расстоянии l.

25.5. Половине роста человека (рис. 245).

25.6. $\alpha = 7°$.

Указание. Легко показать, что угол поворота зеркальца равен половине угла поворота луча (см. задачу 25.2).

25.7. Три изображения: изображение A_1 точки A в зеркале I, изображение A_2 в зеркале II и совпадающие изображения A_1 в зеркале II и A_2 в зеркале I — A_3.

На рис. 246 показан ход лучей при рассматривании изображения A_3.

Если плоскости зеркал образуют между собой произвольный угол α, при котором $m = 360°/\alpha$ есть целое число, то число изображений равно $m - 1$.

25.8. $x = 2r \sin \alpha = 10$ с.

Указание. $\angle A_2OM = \angle MOA$ и $\angle A_1ON = \angle NOA$ (рис. 247), поэтому $\angle A_2OA_1 = 2\alpha$; $OK \perp A_1A_2$, и так как $\triangle A_2OA_1$ равнобедренный, то $A_2K = KA_1$ и $\angle A_2OK = \alpha$.

25.9. На 2α.

Решение. Угол поворота отраженного луча относительно падающего обозначим φ (рис. 248).

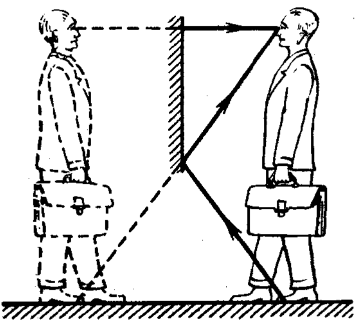


Рис. 245

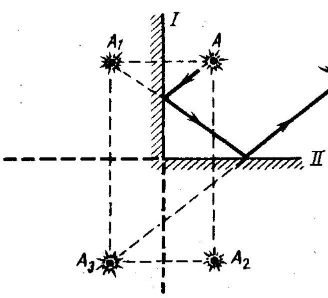


Рис. 246

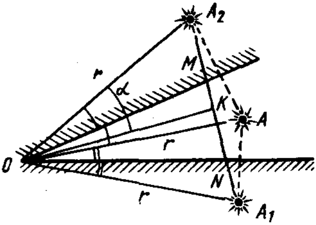


Рис. 247

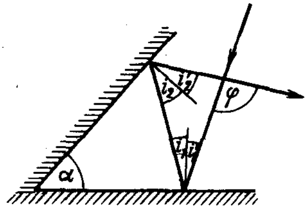


Рис. 248

Из законов отражения $i_1 = i'_1$; $i_2 = i'_2$. Из геометрических соображений видно, что $\alpha = i_1 + i_2$. Угол φ – внешний угол треугольника, причем $\varphi = 2i_1 + 2i_2 = 2(i_1 + i_2)$. Следовательно, $\varphi = 2\alpha$ и не зависит от угла падения первичного луча.

25.10. Направление на изображение не изменится. Само изображение может незначительно перемещаться в поле зрения перпендикулярно отраженному лучу.

Указание. См. предыдущую задачу.

25.11. $I_{кон} = 0{,}02$ кд.

Указание. Будем, начиная от той из сторон угла AOR (рис. 249), образуемого зеркалами, на которую падает первоначальный луч, откладывать угол α до тех пор, пока эти углы не заполнят полу-

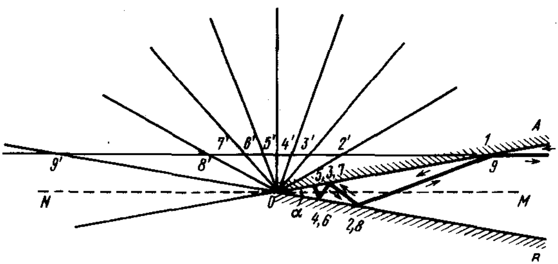


Рис. 249

пространство выше линии MN – биссектрисы угла AOR.

После этого продолжим первоначальный луч. Проведенная линия, очевидно, представляет собой развертку хода луча в пространстве между зеркалами (докажите!). Отсюда следует, что вышедший из двугранного угла луч будет параллелен первоначальному лучу и луч отразится от зеркал столько раз, сколько целых углов α содержится в $180°$.

Задачу можно решить также, проследив непосредственно за ходом отраженных лучей.

25.12. Зеркала должны двигаться навстречу друг другу со скоростями 1,25 м/с.

Указание. Расстояние между первыми мнимыми изображениями источника всегда равно удвоенному расстоянию между зеркалами, а значит, относительная скорость сближения зеркал в два раза меньше скорости сближения этих изображений.

25.13. $H = \dfrac{(d + l_2 - l_1)h}{l_2 - l_1}$.

Решение. Обозначив расстояния от колышка до столба в первом случае x, можно из подобия $\triangle OAB$ и $\triangle CDB$ (рис. 250) написать:

$$\frac{H}{h} = \frac{x + l_1}{l_1},$$

а из подобия $\triangle OAB_1$ и $\triangle C_1D_1B_1$ –

$$\frac{H}{h} = \frac{x + d + l_2}{l_2}.$$

Исключая из этих уравнений x, найдем $H = \dfrac{(d + l_2 - l_1)h}{l_2 - l_1}$.

25.14. $l_1 = h_1 \operatorname{ctg} \alpha = 1{,}73$ м; $l_2 = h_1 \operatorname{ctg} \alpha + h_2 \operatorname{tg} \beta = 3{,}44$ м (рис. 251), причем $\sin \beta = \dfrac{1}{n} \sin (90^\circ - \alpha)$.

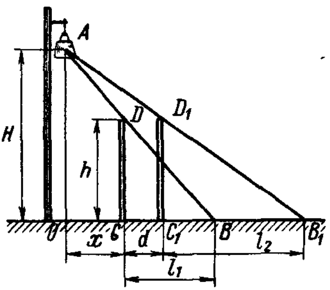


Рис. 250

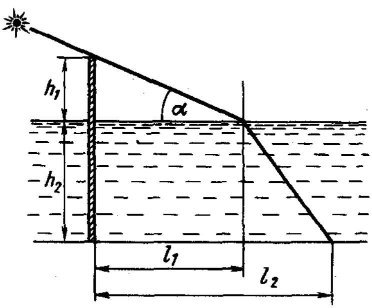


Рис. 251

25.15. $\alpha_{пр} = \arcsin\ n_{отн} = \arcsin (n_1/n_2) \approx 61^\circ$.

Решение. По определению относительного показателя преломления $n_{отн} = \dfrac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, где α – угол падения; β – угол, образуемый прошедшим лучом с нормалью к границе раздела.

В случае полного внутреннего отражения $\beta = 90^\circ$, а значит, $\sin \alpha = n_{отн} = (n_1/n_2)$ (n_1 и n_2 – показатели преломления воды и стекла по отношению к воздуху, равные соответственно 1,33 и 1,52).

25.16. $h = 7{,}3$ м.

Решение. Расстояние ED равно расстоянию от водолаза до ближайших к нему предметов, которые он видит отраженными от поверхности воды (рис. 252): $ED = s = 15$ м; AE – рост водолаза; $AE = a = 1{,}5$ м.

Предельный угол φ определяется из условия полного внутреннего отражения:

$$\sin \varphi_{пр} = 1/n. \tag{1}$$

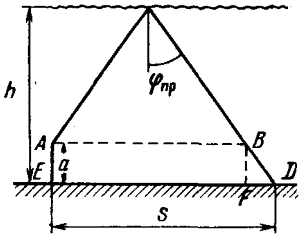


Рис. 252

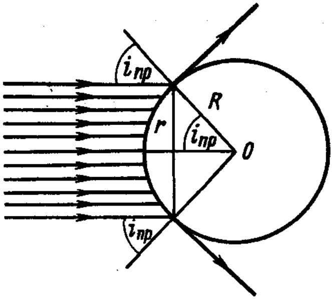


Рис. 253

Как видно из рис. 252,

$$\frac{s - FD}{2} = (h - a)\operatorname{tg}\varphi_{\text{пр}}, \tag{2}$$

$$FD = a\operatorname{tg}\varphi_{\text{пр}}. \tag{3}$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), находим искомую глубину:

$$h = \frac{a}{2} + \frac{s}{2}\,\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_{\text{пр}}}, \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{\text{пр}} = \frac{\sin\varphi_{\text{пр}}}{\cos\varphi_{\text{пр}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Подставляя значение $\operatorname{tg}\varphi_{\text{пр}}$ в уравнение (4), находим $h = \frac{a}{2} + \frac{s}{2}\sqrt{n^2 - 1}$.

25.17. $r = 2{,}6$ см.

Решение. По условию задачи параллельные лучи света падают на сферическую полость в стекле ($n_{\text{ст}} = 1{,}52$) (рис. 253), заполненную водой ($n_{\text{в}} = 1{,}33$).

Предельный угол $i_{\text{пр}}$, при котором падающие лучи уже не будут попадать в полость, определяется из условия, что угол преломления при этом равен 90°:

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{n_{\text{в}}}{n_{\text{ст}}}.$$

Угол падения параллельных лучей на сферическую поверхность изменяется от 0 до 90°. Следовательно, на каком-то расстоянии угол падения станет равным предельному, определенному из условия выше, и лучи света не будут проникать в полость. Расстояние r, очевидно, является радиусом светового пучка, проникающего в полость. Из чертежа видно, что $r = R\sin i_{\text{пр}} = R\,\frac{n_{\text{в}}}{n_{\text{ст}}}$.

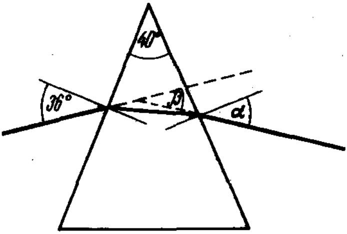


Рис. 254

25.18. $\alpha = \operatorname{arctg} n$.

Решение. По определению, $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. В нашем случае $\beta = 180° - 90° - \alpha$, т. е.

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin(90° - \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha,$$

откуда $\alpha = \operatorname{arctg} n$.

25.19. $\alpha = 27{,}4°$, $\beta = 23{,}4°$. Ход луча через призму изображен на рис. 254.

25.20. 1. Лучи будут параллельными. 2. Нет. Тоже испытывает полное внутреннее отражение.

Решение. 1. Так как показатель преломления одной среды относительно другой равен отношению скоростей света в этих средах, то $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{\text{в. ст}} = \dfrac{v_{\text{в}}}{v_{\text{ст}}}$ и $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta'} = n_{\text{ст. воз}} = \dfrac{v_{\text{ст}}}{v_{\text{воз}}}$.

Умножая одно равенство на другое, найдем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta'} = \frac{v_{\text{в}}}{v_{\text{воз}}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

откуда следует, что $\beta' = \beta$. Закон преломления света при переходе из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 можно записать в форме

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2.$$

Запишем это соотношение для условия нашей задачи:

$$n_{\text{в}} \sin\alpha = n_0 \sin\beta,$$

$$n_{\text{в}} \sin\alpha = n_{\text{с}} \sin\gamma = n_0 \sin\beta' \text{ (рис. 255).}$$

Из сопоставления этих равенств видно, что $\beta' = \beta$, т. е. лучи выйдут параллельными.

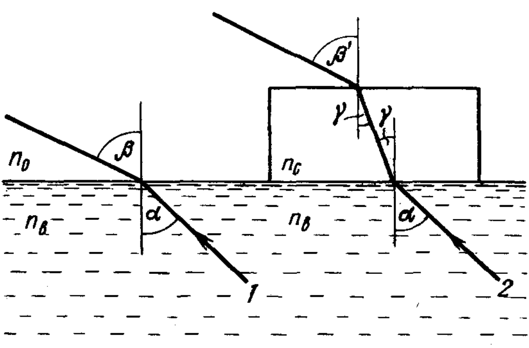


Рис. 255

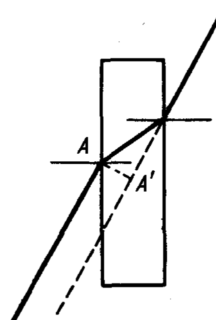


Рис. 256

2. Если $\beta = 90°$, то и $\beta' = 90°$, т. е. оба луча испытывают полное внутреннее отражение одновременно.

25.21. 39 мм.

Указание. Ход луча изображен на рис. 256. Смещение луча равно отрезку AA'.

25.22. 2 см.

25.23. См. рис. 257.

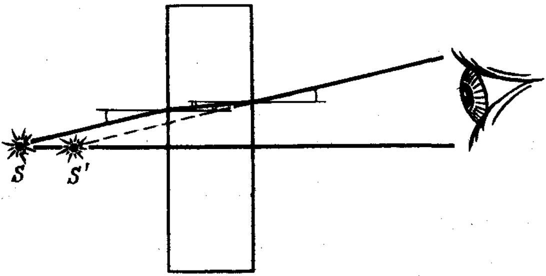


Рис. 257

25.24. $x = 18$ см.

Решение. См. рис. 258. $BC = BK + KC$. Но $KC = AE = ES \operatorname{tg} i = l \operatorname{tg} i$ (i – угол, под которым идет луч из точки S), а $BK = AK \operatorname{tg} r = d \operatorname{tg} r$. Поэтому $BC = l \operatorname{tg} i + d \operatorname{tg} r$. Теперь из треугольника BCS' найдем

$$CS' = \frac{BC}{\operatorname{tg} i} = l + d\,\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i}.$$

Так как угол i мал, а следовательно, мал и угол r, то $\operatorname{tg} i \approx \sin i$ и $\operatorname{tg} r \approx \sin r$.

Поэтому $\dfrac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} = \dfrac{\sin r}{\sin i} = \dfrac{1}{n}$ и $CS' = l + \dfrac{d}{n}$.

25.25. Нет. Луч выйдет из шара несколько ослабленным.

Указание. Ход лучей изображен на рис. 259. По определению,

$$n = \sin\alpha/\sin\beta = \sin\alpha'/\sin\beta',$$

так как $\beta = \beta'$, то $\alpha = \alpha'$.

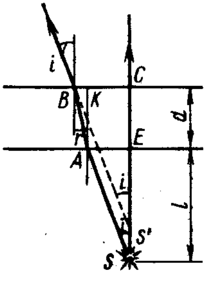


Рис. 258

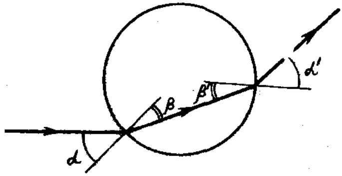


Рис. 259

25.26. $n \geqslant 1{,}41$.

25.27. *Указание.* Наименьший угол падения на боковую грань равен $90° - \alpha_{\text{пр}}$. Предельный угол для границы стекло – воздух равен 42°, для поверхности стекло – вода он увеличивается до 63,5°.

25.28. $n = 2$ (рис. 260).

25.29. На $5\frac{1}{3}$ см позади передней стороны пластинки (рис. 261).

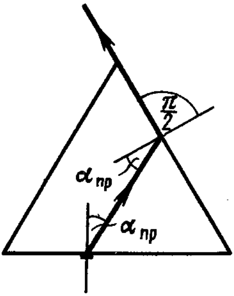


Рис. 260

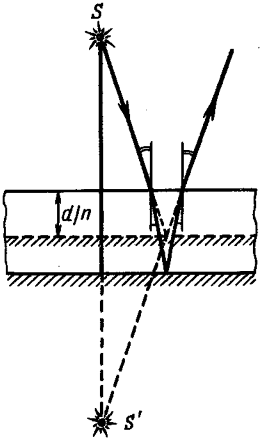


Рис. 261

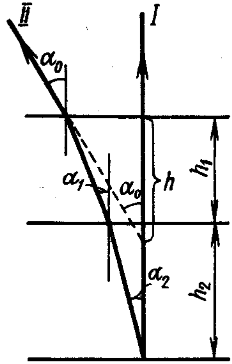


Рис. 262

Указание. Изображение получается как бы в зеркале, находящемся на расстоянии d/n от передней поверхности (рис. 261).

25.30. $h = \dfrac{h_1}{n_1} + \dfrac{h_2}{n_2} \approx 5{,}63$ см.

Указание. Из рис. 262 видно, что $h_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + h_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = h \operatorname{tg} \alpha_0$. Выбирая луч *II* так, чтобы углы α_1 и α_2 были малы ($\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$), и используя законы преломления, находим ответ.

25.31. На 32 см.

Указание. См. задачу 25.29.

26. СФЕРИЧЕСКИЕ ЗЕРКАЛА И ЛИНЗЫ. ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В задачах этого раздела приняты следующие обозначения: d – расстояние от предмета до зеркала (линзы), f – расстояние от изображения до зеркала (линзы), F – фокусное расстояние зеркала (линзы).

В условиях задач значения d, f, F заданы по абсолютной величине. Знаки перед ними в формуле зеркала (линзы) ставятся по правилу: если предмет (источник), изображение, фокус являются действительными – знак плюс, если мнимыми, то минус. Источник считается действительным, если на зеркало (линзу) падает расходящийся пучок, имеющий вершину (или продолжения лучей по эту же сторону от зеркала (линзы) сходятся в одной точке). Источник является мнимым, если на зеркало (линзу) падает сходящийся пучок. Расстояние от линзы до точки пересечения продолжений лучей и является расстоянием до мнимого источника.

Действительное изображение точки образовано лучами, действительно пересекающимися после отражения или преломления. Мнимое изображение образовано продолжениями отраженных или преломленных лучей по другую сторону зеркала (линзы). Собирательные зеркала (линзы) имеют фокус действительный, рассеивающие – мнимый.

26.1. Продолжение луча пройдет через точку пересечения побочной оптической оси, параллельной лучу с фокальной плоскостью линзы (задней, если линза собирательная, и передней, если линза рассеивающая; рис. 263).

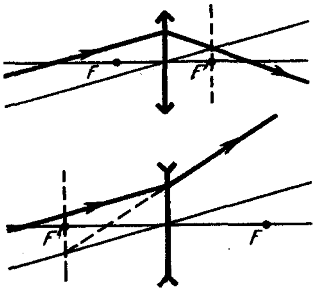


Рис. 263

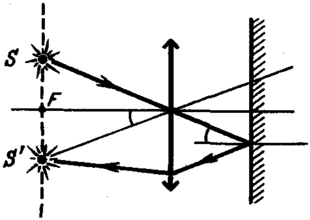


Рис. 264

Найдите другие способы построения дальнейшего хода луча.

26.2. В той же фокальной плоскости линзы. Построение изображено на рис. 264. Постройте самостоятельно ход лучей в системе для случая, когда расстояние между линзой и зеркалом больше фокусного.

26.3. *Указание.* Воспользоваться тем, что луч, параллельный побочной оптической оси линзы, пройдет через точку пересечения этой оси с фокальной плоскостью линзы (рис. 265).

26.4. Можно, если она находится в средах с соответствующими показателями преломления. Объясните подробнее.

26.5. а) Так, чтобы задняя фокальная плоскость одной линзы совпадала с передней фокальной плоскостью другой (рис. 266, *а*); б) чтобы совпадали задние фокальные плоскости линз, если лучи попадают вначале на собирательную линзу (рис. 266, *б*), и чтобы совпадали передние фокальные

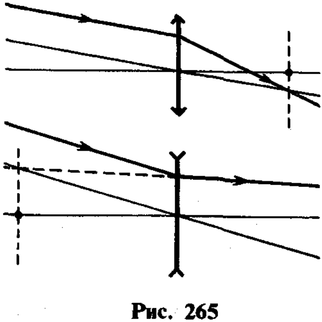


Рис. 265

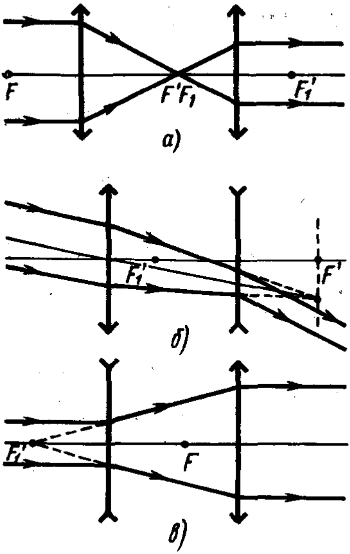


Рис. 266

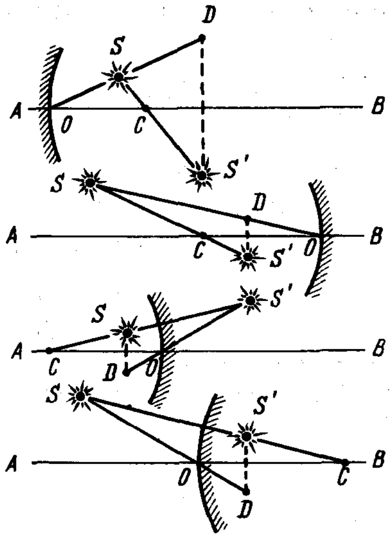


Рис. 267

плоскости линз, если первой стоит рассеивающая линза (рис. 266, *в*).

26.6. Положение центра кривизны зеркала найдем (рис. 267), воспользовавшись тем, что луч, идущий по радиусу кривизны зеркала, отражается по тому же направлению. Поэтому проведем через точки S и S' прямую до пересечения с главной оптической осью AB; C – центр кривизны.

Луч, отразившись от зеркала, в его вершине составляет с главной оптической осью такой же угол, как и падающий луч. Соединим точку D, симметричную точке S' относительно оси AB, с точкой S. Точка O пересечения этой линии или ее продолжения с оптической осью, очевидно, и является вершиной зеркала. О типе зеркала можно судить по расположению точек C, O и S.

В первом случае зеркало может быть только вогнутым, так как выпуклое зеркало дает всегда прямое изображение предмета. Изображение действительное.

Во втором случае зеркало может быть как выпуклым (если точка S находится дальше от оси, чем точка S'), так и вогнутым (точка S ближе к оптической оси, чем точка S'). Изображение в обоих случаях мнимое. Расположение точек C, O и S определяет вид зеркала.

26.7. 1. С приближением источника от центра к фокусу зеркала действительное изображение с возрастающей скоростью удаляется от зеркала. С приближением источника от фокуса к зеркалу мнимое изображение с уменьшающейся скоростью приближается к нему.

Точка $d = F$ – особая точка. Для нее $f = \pm\infty$, т. е. функция претерпевает разрыв.

2. $\dfrac{v'}{v} = \dfrac{F^2}{(d_2 - F)(d_1 - F)} = 20.$

3. Вблизи фокуса.

26.8. 30 см.

Указание. Пластинка помещена на середине линии, соединяющей глаз и изображение в выпуклом зеркале.

26.9. $F = 10$ см.

Решение. Из подобных треугольников AOB и $A'OB'$ (рис. 268) имеем:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{d}{f_1} = 3, \quad d = 3f_1,$$

где $d = OA$ – расстояние от зеркала до предмета; $f_1 = OA'$ – расстояние от зеркала до изображения; $F = OF$ – фокусное расстояние зеркала.

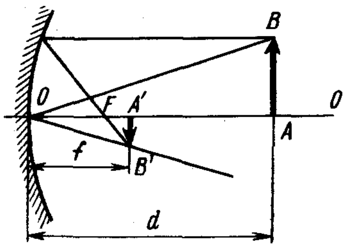


Рис. 268

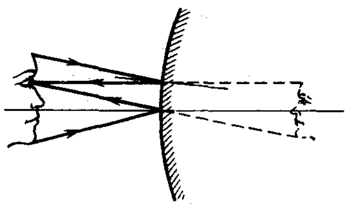


Рис. 269

Пользуясь формулой для вогнутого зеркала $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f}$, получим $F = \dfrac{df}{d+f}$. Но $d = 3f_1$, следовательно,

$$F = d/4; \; d = 4F. \qquad (1)$$

Передвинув предмет на расстояние $l = 15$ см, как указано в условии задачи, получим (аналогично предыдущему рассуждению):

$$(d - l)/f_2 = 1{,}5; \; F = (d - l)/2{,}5. \qquad (2)$$

Для нахождения фокусного расстояния решаем совместно уравнения (1) и (2).

26.10. $F = -0{,}32$ м.

26.11. $d_1 = 30$ см; $d_2 = 10$ см.

Указание. Для построения используйте то, что отношение расстояний от объекта до зеркала и от изображения до зеркала равно отношению высоты объекта к высоте изображения.

26.12. 1. 20 см (рис. 269). 2. $F = \dfrac{9}{8}a = 27$ см.

Решение 2. Запишем формулу зеркала. Так как изображение глаза прямое, то оно является мнимым. Поэтому

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f}.$$

Отсюда найдем, что изображение глаза будет находиться на расстоянии $f = \frac{aF}{F-a}$ от зеркала. Величина этого изображения $x_1 = x\frac{f}{a}$ (x – размер глаза), а угловой размер равен $\frac{x_1}{a+f}$. В плоском зеркале размер изображения равен размеру глаза, а угловой размер $x_2 = \frac{x}{2a}$.

Поэтому $1{,}8\frac{x}{2a} = \frac{x_1}{a+f}$ или $0{,}9\frac{x}{a} = \frac{x\frac{f}{a}}{a+f}$. Отсюда $\frac{f}{a+f} = 0{,}9$ или $f = \frac{aF}{F-a} = 9F$, поэтому $F = \frac{9}{8}a$.

26.13. В той же точке.

26.14. В фокусах зеркал два изображения и два на расстояниях $^3/_2F$ от каждого зеркала.

26.15. 6 см (рис. 270).

Решение. Обозначим через F фокусное расстояние вогнутого зеркала (см. рис. 270). На рисунке $F = R/2$, $F_1 = OF_1$ – фокусное расстояние вогнутого зеркала с водой; $\angle\,\alpha$ – угол падения луча из воды в воздух; $\angle\,\beta$ – угол преломления луча в воздухе.

Пренебрегая размером OE по сравнению с F и F_1 (слой налитой воды, по условию задачи тонкий), можно записать

$$F\,\mathrm{tg}\,\alpha = F_1\,\mathrm{tg}\,\beta = DE.$$

Отсюда $\frac{F}{F_1} = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n.$

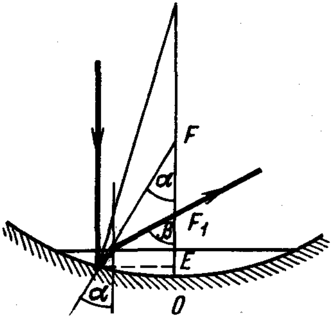


Рис. 270

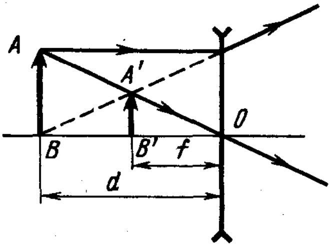


Рис. 271

При малых углах $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta \approx \sin\beta$. Находим фокусное расстояние

$$F_1 = F/n = R/(2n).$$

26.16. $F' = F/2$.

Указание. 1-й способ. Изображение, даваемое одним элементом оптической системы, является источником для следующего элемента.

2-й способ. Оптическая сила системы контактирующих тонких линз и зеркал равна сумме оптических сил элементов системы (см. решение задачи 26.39).

26.17. $F' = \dfrac{FR}{2(F+R)}$.

Указание. См. задачу 26.16.

26.18. 8 см.

Решение. Из рис. 271 и условия следует, что

$$BB' = d - f = 4 \text{ см}, \tag{1}$$

где d — расстояние от предмета до линзы; f — расстояние от изображения до линзы.

Используем формулу линзы (так как линза рассеивающая, то фокусное расстояние имеет отрицательное значение)

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}. \tag{2}$$

Из подобных треугольников AOB и $A'OB'$ находим $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{d}{f}$.

Так как $AB = 10$ см, $A'B' = 5$ см, получаем $d = 2f$. Используя уравнение (1), имеем $d = 8$ см, $f = 4$ см.

Определяем фокусное расстояние, подставляя значения d и f в уравнение (2): $F = 8$ см. См. указание к задаче 26.21.

26.19. На расстоянии $F/2$ (рис. 272).

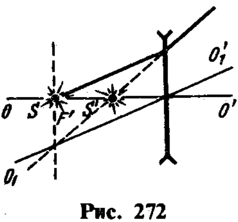


Рис. 272

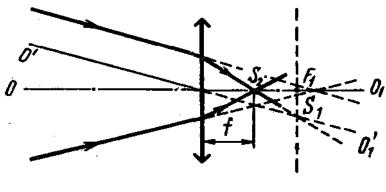


Рис. 273

26.20. $F = 10$ см; $D = 1/F = 10$ дптр.

26.21. $d = \dfrac{3F}{2} = 90$ см.

Указание. Построение удобно начать с проведения двух прямых, параллельных главной оптической оси и отстоящих от нее на расстояниях, отношение которых равно увеличению k.

26.22. $d = \frac{k+1}{k}\frac{1}{D}$; $d_1 = 0{,}3$ м (действительное изображение, $k = 5$); $d_2 = 0{,}2$ м (мнимое изображение, $k = -5$).

Указание. См. предыдущую задачу.

26.23. $f = 13{,}6$ см.

Указание. Точка S_1 играет роль мнимого источника, а точка S_2 пересечения лучей после преломления в линзе – изображения. Для построения хода лучей через линзу полезно провести побочную оптическую ось, параллельную одной из образующих светового конуса (рис. 273).

26.24. а) 80 и 19 см; б) 67,3 и 23,7 см.

Указание. Обозначим через x расстояние от линзы до источника. Тогда, применяя формулу линзы, найдем, что расстояние от линзы до изображения $f = \frac{xF}{x - F}$. Диаметр пятна на экране $d = \frac{D(f - L + x)}{f}$ (рис. 274, *а*) – экран левее изображения; $d = \frac{D(L - x - f)}{f}$ (рис. 274, *б*) – экран правее изображения.

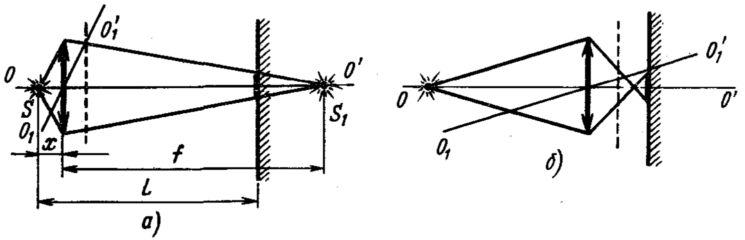


Рис. 274

26.25. 20 см.

Указание. Если x – расстояние от переднего фокуса до предмета, а x' – от заднего фокуса до изображения, то имеет место соотношение $xx' = F^2$ (формула Ньютона). Докажите справедливость этой формулы.

26.26. $2F$.

Решение. *1-й способ.* Воспользовавшись формулой линзы $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$, найдем $f = \frac{Fd}{d - f}$,

$$f + d = d + \frac{Fd}{d - F} = \frac{d^2}{d - F}. \quad (1)$$

В нашем случае $d > F$, так как изображение действительное.

Выражение, стоящее в правой части уравнения (1), преобразуем следующим образом:

$$f + d = \frac{d^2}{d - F} = \frac{[(d - F) + F]^2}{d - F} =$$

$$= \frac{[(d-F)-F]^2 + 4F(d-F)}{d-F} = \frac{(d-2F)^2}{d-F} + 4F. \qquad (2)$$

Выражение, стоящее в правой части уравнения (2), а значит, и расстояние между предметом и его изображением минимально при $d = 2F$.

2-й способ. Обозначим расстояние между предметом и его действительным изображением через y, тогда $y = \frac{d^2}{d-F}$; откуда $d^2 - dy + Fy = 0$. Дискриминант D полученного трехчлена, равный $D = y(y - 4F)$, неотрицателен при $y \geqslant 4F$.

Минимальное значение y, при котором задача имеет решение (т. е. существует корень трехчлена), равно $4F$, т. е. $y_{\text{мин}} = 4F$, откуда $d = 2F$.

26.27. $F = \frac{L^2 - l^2}{4L} = 24$ см.

Указание. Из принципа обратимости следует, что при втором положении линзы расстояние от нее до экрана будет равно расстоянию от предмета до линзы при ее первом положении:

$$d_2 = f_1,$$
$$f_2 = d_1.$$

26.28. $h = \sqrt{h_1 h_2}$; $L > 4F$.

Решение. *1-й способ.* Имеем: $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$ и $\frac{f}{d} = \frac{h}{h_1}$, преобразуем эти выражения так:

$$\frac{fd}{f+d} = F \qquad (1)$$

и $\frac{f}{f+d} = \frac{h}{h_1 + h}$, или $\frac{d}{f+d} = \frac{h_1}{h + h_1}$. Из двух последних выражений найдем

$$fd = (f+d)^2 \frac{h_1 h}{(h_1 + h)^2}. \qquad (2)$$

После перемещения линзы

$$\frac{f_1 d_1}{f_1 + d_1} = F, \quad f_1 d_1 = (f_1 + d_1)^2 \frac{h h_2}{(h + h_2)^2}. \qquad (3)$$

Учитывая, что $f_1 + d_1 = f + d$, получим из уравнений (1) и (2)

$$f_1 d_1 = fd.$$

Подставляя сюда $f_1 d_1$ и fd из уравнений (2) и (3), придем к выражению

$$\frac{h h_1}{(h + h_1)^2} = \frac{h h_2}{(h + h_2)^2},$$

решая которое, найдем $h = \sqrt{h_1 h_2}$.

2-й способ. **В** силу симметричности формулы линзы по отношению d и f можно утверждать, что если перемещением линзы получаются два изображения при закрепленных предмете и экране, т. е. $d + f = \text{const}$, то $d_1 = f_2$ и $f_1 = d_2$. Тогда $\frac{h_1}{h} = \frac{f_1}{d_1}$ и $\frac{h_2}{h} = \frac{f_2}{d_2}$, поэтому $\frac{h_1 h_2}{h^2} = 1$, откуда $h = \sqrt{h_1 h_2}$.

26.29. $\frac{1}{3}$; 30 см.

Указание. $\frac{f_1}{d_1} = 3$ по условию; $\frac{f_2}{d_2} = \frac{d_1}{f_1} = \frac{1}{3}$ (см. задачу 26.27); $f_1 + d_1 = L$; $f_1 - d_1 = l$.

Найдите другой способ решения.

26.30. $F = {}^2/_9 L = 20$ см.

Указание. См. задачу 26.28, $f^2/d^2 = 4$.

26.31. 6 см (рис. 275).

Указание. Каждая из половинок линзы действует как целая линза, ось которой находится на расстоянии $\frac{s}{2} = 0{,}5$ см от оси линзы. Ход лучей изображен на рис. 275. Расстояние между изображениями

$$S_1' S_2'' = 2h + s.$$

26.32. График зависимости $f(d)$ изображен на рис. 276.

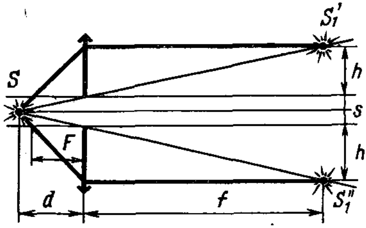


Рис. 275

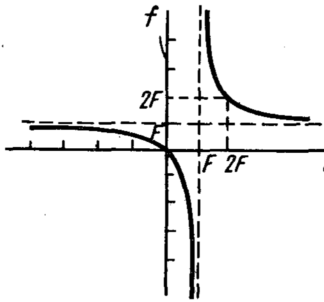


Рис. 276

Примечание. График позволяет очень просто решить задачу 26.26.

26.33. а) $k = \frac{F}{d - F}$; б) $|k| = \frac{F}{F - d}$. График зависимости $k(d)$ изображен на рис. 277.

Указание. Линейным (поперечным) увеличением k называют отношение $\frac{f}{d}$.

26.34. $k_{\text{прод}} = \dfrac{F^2}{(a-F)(b-F)} = 4.$

Указание. С помощью формулы линзы найти положение каждого из концов предмета (можно также воспользоваться формулой Ньютона $x_1x_2 = F^2$).

26.35. $l' = l/2$. Изображение мнимое, расположено вдоль оптической оси вплотную к линзе.

26.36. $\Delta d = 40$ см.

Указание. Роль источника после внесения пластинки будет играть точка S' (см. задачу 25.23) (рис. 278).

26.37. На 0,55 мм.

26.38. Увеличится.

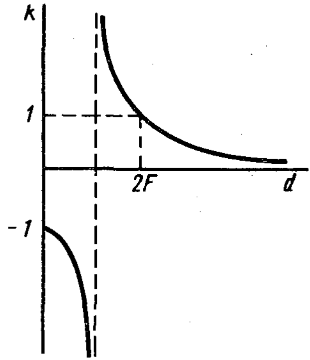


Рис. 277

Относительный показатель преломления на границе раздела при погружении линзы в воду уменьшается. Это приводит к уменьшению отклонения лучей, а значит, к увеличению фокусного расстояния линзы.

26.39. Решение. Изображение предмета, находящегося в фокальной плоскости одной из линз, будет лежать в фокальной плоскости другой линзы. Поэтому по формуле линзы для этой оптической системы $\dfrac{1}{F_1} + \dfrac{1}{F_2} = \dfrac{1}{F}$ (F — фокусное расстояние системы), $D = D_1 + D_2$, где D_1 и D_2 — оптические силы линз; D — оптическая сила системы. Найдите другой способ решения задачи.

26.40. $F = \dfrac{F_1F_2F_3}{F_1F_2 + F_2F_3 + F_1F_3} \approx 5{,}55$ см.

Указание. Оптическая сила системы, состоящей из вплотную сложенных линз, равна алгебраической сумме оптических сил отдельных линз (см. задачу 26.39).

26.41. 2,25 см.

Решение. Построение изображения приведено на рис. 279. Изображение S'_1, даваемое первой линзой, является как бы мнимым источником для второй линзы. Находим по формуле линзы положение этого изображения:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad f = \frac{dF}{d-F}; \quad f = 12 \text{ см}.$$

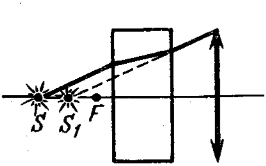


Рис. 278

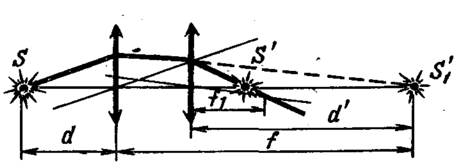


Рис. 279

Расстояние от мнимого источника до второй линзы $d = \Delta - f = F - f$; $d' = -9$ см. И снова по формуле линзы определяем $f' = \dfrac{d'F'}{d' - F'}$.

26.42. $f = 60$ см.

26.43. Мнимое изображение будет находиться там, где находится предмет. Увеличение системы $k = 5$.

26.44. На 10 см.

Указание. См. задачу 26.41.

26.45. 40 см.

Указание. Изображение источника в линзе будет служить источником для зеркала.

26.46. $f_2 = 30$ см; $h' = 6{,}75$ см.

Указание. Построить изображение предмета в первой линзе, а затем, считая это изображение предметом, построить его изображение во второй линзе.

26.47. 30,4 см (от центра рассеивающей линзы).

Указание. См. указание к предыдущей задаче.

26.48. На расстоянии 18,75 см от изображения.

26.49. Можно.

Указание. Если угловой размер Солнца α, то размер его изображения в фокальной плоскости системы $F\alpha$, где F – фокусное расстояние системы. Рассеивающая линза уменьшает оптическую силу системы и, следовательно, увеличивает ее фокусное расстояние.

26.50. 32,73 см.

Решение. Посеребренную линзу можно рассматривать как систему, состоящую из сложенных вместе: собирательной линзы с оптической силой $D_1 = \dfrac{1}{F}$, выпуклого зеркала, имеющего оптическую силу $D_2 = -\dfrac{2}{R}$, и еще одной собирательной линзы с оптической силой $D_1 = \dfrac{1}{F}$ (луч света, падающий на линзу, проходит через нее дважды!). Поэтому оптическая сила этой системы $D = D_1 + D_2 + D_1 = -2\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{F}\right)$ (см. задачу 26.39). Подставляя значение D в формулу линзы и полагая $f = d$, находим $f = \dfrac{2}{D} = \dfrac{RF}{R - F}$.

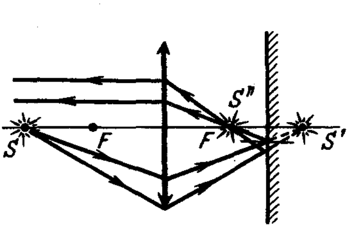


Рис. 280

26.51. $1{,}5F$.

Указание. Изображение S'' источника S' в зеркале должно лежать в фокальной плоскости линзы. Ход лучей в системе изображен на рис. 280.

26.52. В бесконечности. Система телескопическая.

26.53. $F_2 = \dfrac{aF_1}{a - F_1} - l = 20$ см.

Указание. Для того чтобы линейка была ясно видна в окуляре трубы, настроенной на бесконечность, ее изображение в собирательной линзе должно находиться в фокусе рассеивающей линзы (за ней). Только в этом случае лучи, идущие из каждой точки этого изображения, образуют параллельный пучок лучей после прохождения их через рассеивающую линзу.

26.54. $F = -\dfrac{F_1F_2}{l - F_1 - F_2} = 40$ см.

Указание. Если фокусное расстояние линзы равно F, а угловой размер Солнца α, то диаметр изображения Солнца будет равен $F\alpha$. Изображение, даваемое первой собирательной линзой объектива, является мнимым источником для рассеивающей линзы. Расстояние этого источника от рассеивающей линзы равно $d = l - F_1 = 5$ см. Изображение Солнца, даваемое объективом, будет расположено на расстоянии $f = \dfrac{F_2 d}{d - F_2}$ от рассеивающей линзы, а размер этого изображения будет равен $-F_1\alpha\dfrac{f}{d} = -F\alpha\dfrac{F_2}{l - F_1 - F_2}$.

27. ЗРЕНИЕ. ОПТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

27.1. Когда близорукий глаз видит предмет резко без напряжения, он рассматривает их под бóльшим углом зрения, чем глаз с нормальным зрением. В зрачок глаза попадает при этом бóльший световой поток от любого элемента рассматриваемой поверхности.

27.2. Увеличится на 4 дптр.

Решение. Когда человек смотрит на звезду (бесконечно удаленный предмет, $d = \infty$), изображение получается в фокусе хрусталика (линзы), аккомодированного на бесконечность. При этом $f = F$ — расстояние до сетчатки:

$$\frac{1}{d_\infty} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1}, \quad f_1 = F_1.$$

Когда человек переводит взгляд на книгу, d становится равным 0,25 м, расстояние же до изображения f_2 по-прежнему равно глубине глаза: $f_2 = f_1$ (изображение получается на сетчатке). Это возможно благодаря аккомодации, изменяющей оптическую силу хрусталика: $\dfrac{1}{0{,}25} + \dfrac{1}{F_1} = \dfrac{1}{F_2}$, откуда $\dfrac{1}{F_2} - \dfrac{1}{F_1} = \mathbf{4}$ дптр.

27.3. $-2{,}25$ дптр.

Решение. Расстояние наилучшего зрения у такого близорукого глаза равно 16 см. Для глаза с нормальным зрением соответствующее расстояние составляет 25 см.

Чтобы восполнить недостаток близорукого глаза, человек носит очки такой оптической силы, чтобы лучи, падающие от точек, удаленных на 25 см, фокусировались бы оптической системой очки — глаз на сетчатке, т. е. в том же месте, где фокусируются лучи, падающие от точек предмета, удаленного в данном случае на 16 см и рассматриваемого невооруженным глазом.

Напишем дважды формулу линзы:

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{d_0}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F}. \tag{2}$$

Формула (1) написана для невооруженного глаза, где $d_1 = l = 16$ см, а формула (2) – для вооруженного глаза, где $d_0 = 25$ см; $1/F_1$ – оптическая сила очков; f равна глубине глаза; $1/F$ – оптическая сила глаза. При решении мы делаем упрощение, считая, что оптическая сила системы очки – глаз равна сумме оптической силы очков и глаз.

Вычитая из уравнения (2) выражение (1) и измеряя d_0 и d_1 в метрах, найдем оптическую силу очков:

$$\frac{1}{F_1}=\frac{1}{d_0}-\frac{1}{d_1};\quad \frac{1}{F}= -2{,}25 \text{ дптр}.$$

27.4. 16,7 см.

Указание. Изображение текста, находящегося под стеклянной пластинкой толщиной d, будет находиться от верхней поверхности пластинки на расстоянии d/n (см. задачу 25.24).

Это расстояние d/n и должно быть расстоянием наилучшего зрения близорукого человека без очков.

Из решения задачи 27.3 можно записать $\frac{1}{d_0}-\frac{1}{d/n}=\frac{1}{F_1}=D$, где $d_0 = 0{,}25$ м, а $D = -5$ дптр. Отсюда находим $d=\frac{nd_0}{1-d_0D}$.

27.5. $F = 2{,}32$ м; $D \approx -0{,}4$ дптр.

Указание. См. решение задач 27.2 и 27.3.

27.6. 3 дптр.

Лучи, исходящие от точек, удаленных на расстояние $d = 20$ см, должны при том же фокусном расстоянии хрусталика (том же состоянии аккомодации глаза) давать изображение на сетчатке, как и точки, удаленные на расстояние $d_0 = 50$ см. Это возможно, если оптическая сила очков будет равна $D=\frac{1}{d}-\frac{1}{d_0}$ (см. решение задачи 27.2).

27.7. $\approx 11 \div 20$ см.

Указание. Глаз видит объект в том месте, где находится его изображение, даваемое очковой линзой. Если объект находится в фокусе линзы ($F = 20$ см), глаз аккомодирован на бесконечность. Расстояние наилучшего зрения 25 см до изображения будет тогда, когда объект находится на расстоянии ≈ 11 см от линзы.

27.8. Можно. Фотоаппарат заменяет глаз.

27.9. $l'=\frac{l}{1+Dl}=25$ см.

27.10. ≈ 4 дптр.

Указание. Линейное увеличение должно быть равно отношению $120/8 = 15$. Этому же равно f/d; f, по условию, равно 4 м; $F = df/(d+f)$.

27.11. 148,5 см.

Указание. Отношение $f/d = 1/10$.

27.12. $t = 0{,}001$ с.

Решение. Размер размытия изображения есть размер изображения расстояния, пройденного точкой за время экспозиции. Отношение этих величин есть увеличение объектива фотоаппарата.

Таким образом, $\dfrac{f}{d} = \dfrac{2\cdot 10^{-4}}{vt}$, d, по условию, равно 5 м, а f приближенно равно фокусному расстоянию F. Подставив значения f и d, получим $t = \dfrac{2\cdot 10^{-4} d}{fv}$.

27.13. Размер предмета $l > 8$ м; $\tau \approx 10^{-3}$ с.

Указание. За время экспозиции τ спутник поворачивается на угол $\alpha = 2\pi \dfrac{\tau}{T}$, где $T \approx 2\pi\sqrt{R/g}$ – период обращения спутника вокруг Земли (докажите!); R – радиус Земли. Вследствие этого изображение размывается на величину $\Delta l = \alpha F$, где F – фокусное расстояние объектива. Возможности пленки будут использованы полностью, если Δl не превышает ее разрешающей способности d. На фотографии можно будет рассмотреть размеры предметов много меньше, чем $\alpha R = \dfrac{d}{F} R$.

27.14. 50 м.

Указание. Увеличение f/d равно отношению 0,12/50.

27.15. а) $k = \dfrac{L}{F} + 1$; L – расстояние наилучшего зрения, б) $k = L/F$.

Решение. а) Увеличение равно отношению

$$f/d = L/d,$$

где d – расстояние от линзы до объекта, которое находим из формулы линзы $\dfrac{1}{f} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{F}$.

Подставив $-L$ вместо f (изображение мнимое), найдем $k = \dfrac{L}{d} = \dfrac{F+L}{F} = 1 + \dfrac{L}{F}$. Постройте изображение.

Указание. б) Если глаз адаптирован на бесконечность, то он рассматривает изображение предмета, расположенного в фокальной плоскости лупы.

27.16. Можно. Для этого достаточно выдвинуть окуляр так, чтобы изображение, даваемое объективом, оказалось дальше фокусного расстояния окуляра. Тогда при достаточной освещенности рассматриваемого в микроскоп объекта на экране получится действительное изображение.

27.17. $F_{об} = 0{,}25$ см.

Указание. Воспользоваться приближенной формулой увеличения микроскопа $k = 25l/(F_{об}F_{ок})$.

Примечание. Приближенной формулой можно пользоваться, если фокусные расстояния $F_{об}$ и $F_{ок}$ значительно меньше расстояния между объективом и окуляром (примерно равного длине тубуса) и расстояния наилучшего зрения L. Признаком является, как правило, большое увеличение микроскопа.

27.18. $k_{ок} \approx 8$.

Решение. Так как увеличение небольшое, то нельзя воспользоваться приближенной формулой, приведенной в задаче 27.17.

Рассматриваем микроскоп как оптическую систему, состоящую из двух линз. Ход лучей изображен на рис. 281.

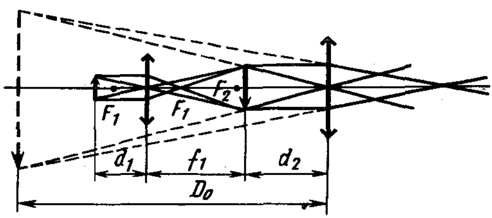


Рис. 281

Увеличение системы k равно произведению увеличений составляющих ее линз:

$$k = k_{об}k_{ок};\ k_{об} = \frac{f_1}{d_1};\ k_{ок} = \frac{L}{d_2},$$

где L — расстояние наилучшего зрения; f_1, d_1, d_2 и a связаны между собой следующими уравнениями:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{F_{об}};\ f_1 + d_2 = a.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем

$$k_{ок} = \frac{kF_{об} + L}{a - F_{об}}.$$

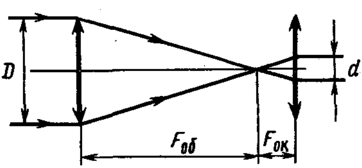


Рис. 282

27.19. $d_1 = 1{,}26$ мм; $k = 3120$.

Указание. См. задачи 27.17, 27.18.

27.20. $k = 20$.

Указание. Отношение D/d равно отношению $F_{об}/F_{ок}$ (рис. 282), а последнее отношение и есть увеличение телескопа.

27.21. 6.25°.

Указание. Увеличение угла зрения равно отношению $F_{об}/F_{ок}$.

27.22. $k = 564$.

Указание. См. задачу 27.20.

27.23. Обычно зрительную трубу настраивают так, чтобы из нее выходили параллельные лучи. Это возможно в том случае, если второй фокус объектива совпадает с первым фокусом окуляра (рис. 283, *а*).

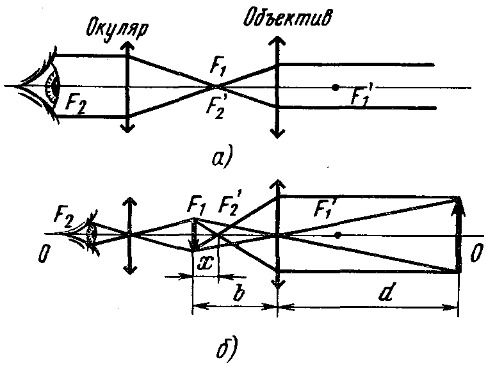


Рис. 283

Если предмет находится не в бесконечности, а на расстоянии d от объектива, то окуляр нужно установить так, чтобы изображение, даваемое объективом, также попало в первый фокус окуляра (рис. 283, *б*). При этом окуляр и объектив должны быть дополнительно раздвинуты на расстояние $x = F_1F'_2$.

По формуле линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, где $f = F + x$ – расстояние от объектива до изображения (f – фокусное расстояние объектива), находим $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{F + x}$, отсюда $x = \frac{F^2}{d - F}$, $x = 0{,}36$ см. Объектив и окуляр нужно раздвинуть на 3,6 мм.

27.24. $k = 12$.

Решение. В этом случае изображение, даваемое объективом, в его фокальной плоскости будет рассматриваться глазом с расстояния наилучшего зрения L (рис. 284).

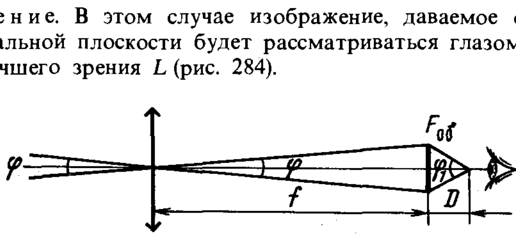


Рис. 284

Как видно из рисунка, угол зрения φ_1, под которым будет рассматриваться изображение, больше, нежели угол φ, под которым виден объект.

Благодаря увеличению угла зрения изображение объекта на сетчатке возрастет по сравнению с величиной изображения при непосредственном рассматривании удаленного предмета. Увеличение равно $k = \dfrac{\varphi_1}{\varphi}$.

При малых углах отношение углов может быть заменено отношением тангенсов их. Из чертежа видно, что $k = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi} = \dfrac{F_{\text{об}}}{L}$.

28. ФОТОМЕТРИЯ

28.1. $\tau = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$.

Указание. $\Phi = \Phi_0(1-\alpha)^2 + \Phi_0(1-\alpha)^2\alpha^2 + \Phi_0(1-\alpha)^2\alpha^4 + \ldots = \Phi_0(1-\alpha)^2(1+\alpha^2+\alpha^4+\ldots) = \Phi_0\dfrac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha^2} = \Phi_0\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$.

28.2. 1000 м.

Указание. Световой поток, попадающий в глаз, $\Phi = ES = \dfrac{I}{r^2}S$. Здесь E – освещенность зрачка; r – расстояние от глаза до источника света.

28.3. $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$.

Указание. $E = E_0\cos\alpha = \dfrac{I}{r^2}\cos\alpha$, где E_0 – освещенность площадки, перпендикулярной падающему пучку; α – угол между осью пучка и нормалью к поверхности.

28.4. $h = 1{,}8$ м.

Светоотдачей лампы L называют отношение полного светового потока Φ, излучаемого лампой, к ее электрической мощности:

$$L = \Phi/P. \qquad (1)$$

Рассматривая лампу как точечный источник света, можно написать, что

$$\Phi = 4\pi I, \qquad (2)$$

где I – сила света лампы.

Освещенность E определяется формулой

$$E = \frac{I}{h^2}\cos\alpha, \qquad (3)$$

где α – угол между лучом и нормалью к поверхности и равен углу наклона доски (как углы, составленные взаимно перпендикулярными сторонами).

Из формул (1), (2) и (3) находим $h = \sqrt{\dfrac{LP\cos\alpha}{4\pi E}}$.

28.5. Освещенность в каждой точке равна сумме освещенностей, создаваемых каждым из источников в отдельности.

$$\text{а) } E_1 = \frac{I}{h^2} + \frac{I}{(h^2 + l^2)} \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} \approx 10{,}2 \text{ лк};$$

$$\text{б) } E_2 = 2 \frac{Ih}{\left[h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = 10{,}9 \text{ лк}.$$

28.6. Увеличится приблизительно в 1,11 раза. $E_1 \approx 22{,}2$ лк; $E_2 \approx$ $\approx 24{,}6$ лк.

Указание. Установка зеркала равносильна появлению еще одного источника A_1, являющегося изображением источника A в зеркале. При отсутствии поглощения световой энергии световой поток, испускаемый в единичный телесный угол источником A_1 (т. е. сила света источника A_1), равен силе света источника A.

28.7. $r = 0{,}5$ м.

Указание. Световой поток, попадающий на малую площадку в центре конденсора, равен $\Phi = \frac{I}{r^2}(\Delta S_1)$.

На площадку ΔS_2 в центре экрана попадает часть этого потока, равная $\Phi(1 - k)$, поэтому освещенность в центре экрана

$$E_2 = \frac{\Phi(1-k)}{\Delta S_2} = \frac{I(1-k)}{r^2} \frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{1}{(50)^2} \frac{I(1-k)}{r^2}.$$

28.8. $E \approx 15{,}3$ лк.

28.9. Увеличится приблизительно в 1,12 раза.

Указание. См. задачу 28.6.

28.10. 25 лк.

Решение. Из рис. 285 видно, что освещенность в точке A, расположенной под источником, будет равна освещенности линзы в ее точке O, так как источник находится в фокусе линзы (поглощением света линзой пренебрегаем).

Оптическая сила линзы равна 1 дптр, что соответствует фокусному расстоянию линзы $F = 1$ м.

Освещенность в точке O будет равна:

$$E_0 = \frac{I}{F^2}, \; E_A = E_0.$$

28.11. а) $I = I_0 \left(\dfrac{R}{R + 2d}\right)^2$;

б) $I = I_0 \left(\dfrac{R}{R - 2d}\right)^2, \; d < \dfrac{R}{2}$.

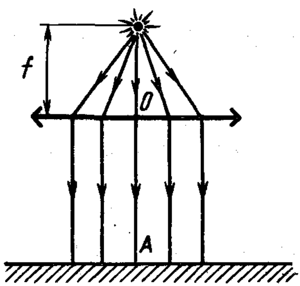


Рис. 285

Указание. Сила света равна отношению Φ/Ω. При отражении от выпуклого и вогнутого зеркал Ω меняется, причем $\Omega_{отр}/\Omega_{пад} = (f/d)^2$.

28.12. $\approx L^2/F^2 = 10^4$ раз.

Указание. Освещенность в центре светового потока равна освещенности в вершине зеркала, так как отраженный от зеркала свет идет параллельным пучком.

28.13. а) $I = I_0\left(\dfrac{F}{F-a}\right)^2$, $a < F$; б) $I = I_0\left(\dfrac{F}{F+a}\right)^2$.

Указание. См. задачу 28.11.

28.14. а) 2500 и 12 500 лк; б) ≈ 5000 и $\approx 15\,000$ лк.

Указание. Световой поток, падающий на линзу, попадает после прохождения линзы на площадь: а) в $\dfrac{(L-F)^2}{F^2} = 4$ раза большую, б) в $\dfrac{(L+F)^2}{F^2} \approx 2$ раза большую площади линзы (рис. 286).

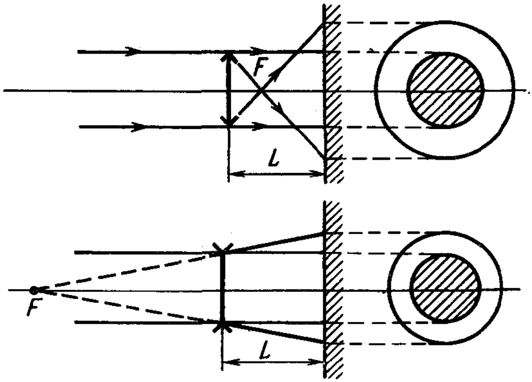


Рис. 286

Освещенность в светлом кольце равна сумме освещенностей, создаваемых световыми потоками, идущими от линзы и непосредственно падающими на экран от Солнца.

28.15. 4 лк.

Р е ш е н и е. Проекционный аппарат дает действительное обратное увеличенное изображение (рис. 287). Если диапозитив AB имеет площадь S, то его изображение будет иметь площадь S', увеличенную по сравнению с площадью S. Весь световой поток Φ, освещающий диапозитив площадью S, теперь распределится на площадь S'. Освещенность диапозитива равна $E = \Phi/S$.

Освещенность изображения $E' = \Phi/S'$. Но $S'/S = b^2/a^2$ (из подобия треугольников ABO и $A'B'O$ следует, что каждая сторона диапозитива увеличится в b/a раз, а вся площадь в b^2/a^2 раз). Отсюда $E' = \dfrac{\Phi}{\dfrac{b^2}{a^2}S} = \dfrac{\Phi}{S}\dfrac{a^2}{b^2}$. Освещенность выразится в люксах, если $a(d)$ и $b(f)$ будут выражены в метрах (СИ).

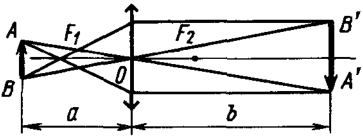


Рис. 287

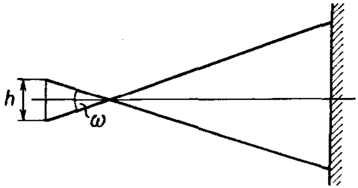


Рис. 288

Из формулы $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f}$ находим $f = \dfrac{dF}{d-F}$. Следовательно, $E' = \dfrac{\Phi}{S}\dfrac{(d-F)^2}{F^2}$.

28.16. $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{1}{4}$.

Решение. Световой поток, попадающий на изображение в отсутствие поглощения, $\Phi = I\omega$, где I – сила света, излучаемого предметом, и ω – телесный угол, под которым виден предмет из вершины линзы (рис. 288). Освещенность экрана $E = \dfrac{\Phi}{S} = \dfrac{I\omega}{S}$ (S – площадь изображения).

По определению, $\omega = \dfrac{S}{f^2} = \dfrac{\pi h^2}{4f^2}$ (S – площадь предмета).

С помощью формулы линзы $\dfrac{1}{f} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{F}$, учитывая, что увеличение, даваемое линзой, $k = \dfrac{d}{f}$, найдем $f = \dfrac{(k+1)}{k}F$. Итак, $E = \dfrac{\pi I h^2 k^2}{4S(k+1)^2F^2}$, т. е. $E_1 = \dfrac{\pi I h^2 k_1^2}{4S_1(k_1+1)^2F^2}$ и $E_2 = \dfrac{\pi I h^2 k_2^2}{4S_2(k_2+1)^2F^2}$.

Разделив последние равенства друг на друга и учитывая, что

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h^2k_1^2}{h^2k_2^2} = \frac{k_1^2}{k_2^2}, \text{ получим } \frac{E_1}{E_2} = \frac{(k_2+1)^2}{(k_1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

28.17. Увеличится приблизительно в 750 раз.

Решение. Освещенность линзы равна освещенности E экрана в отсутствие линзы. Поэтому световой поток, падающий на линзу, равен $\Phi = ES\left(S = \dfrac{\pi d^2}{4} - \text{площадь линзы}\right)$. При отсутствии поглощения весь этот поток попадает на изображение, диаметр которого равен αF (α – угловые размеры Солнца и $F = 25$ см – фокусное расстояние линзы). Освещенность изображения $E_1 = \dfrac{\Phi}{S_1} = \dfrac{d^2}{\alpha^2 F^2} E$; $\dfrac{E_1}{E} \approx 750$.

28.18. 20 с.

Решение. В обоих случаях должно быть одинаковым количество световой энергии, попавшей на соответствующие участки пластинки. Если обозначить: E_1 – освещенность изображения какой-нибудь детали при фотографировании картины целиком и E_2 – освещенность изображения этой же детали при фотографировании участка картины с увеличением 1 : 1, то это условие можно записать так:

$$E_1 t_1 = E_2 t_2,$$

т. е. время экспозиции обратно пропорционально освещенности изображения.

На линзу от элемента поверхности объекта площадью $\Delta\sigma$ падает световой поток, величина которого пропорциональна телесному углу, под которым видна линза из элемента поверхности, и площади этого элемента: $\Phi \sim \omega\Delta\sigma \approx \dfrac{S}{d^2}\Delta\sigma$, где S – площадь линзы и d – расстояние от объекта до линзы.

Пройдя через линзу, этот световой поток попадает на площадку $\Delta\sigma_2$ и создает на ней освещенность E, пропорциональную величине светового потока и обратно пропорциональную площади изображения: $E \sim \dfrac{\Phi}{\Delta\sigma_2} \sim \dfrac{S}{d^2}\dfrac{\Delta\sigma_1}{\Delta\sigma_2}$.

Отношение же площадей объекта и его изображения равно отношению квадратов расстояний от предмета до линзы и от изображения до линзы $\dfrac{\Delta\sigma_1}{\Delta\sigma_2} = \dfrac{d^2}{f^2}$, а значит, $E \sim \dfrac{S}{f^2}$.

Освещенность изображения обратно пропорциональна квадрату расстояния от изображения до линзы.

При фотографировании картины целиком ее изображение получается в фокальной плоскости объектива, а при фотографировании деталей – на двойном фокусном расстоянии от линзы. Поэтому $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{(1/F)^2}{(1/(2F))^2} = 4$ и время экспозиции при фотографировании деталей должно быть равно $t_2 = \dfrac{E_1}{E_2} t_1 = 4t_1$.

28.19. Уменьшится в $1\frac{7}{9}$ раза.

Указание. См. решение предыдущей задачи. При съемке с уменьшением в два раза $\frac{f_1}{d_1} = \frac{1}{2}$.

Воспользовавшись уравнением линзы, найдем, что $f_1 = \frac{3}{2}F$.

При съемке же в натуральную величину $f_2 = 2F$.

28.20. Объектив придвинуть к фотопластинке, экспозицию уменьшить.

Указание. См. задачи 28.19, 28.18.

28.21. При окуляре с фокусным расстоянием $F_2' = 25$ мм освещенность изображения пластины будет в четыре раза меньше, чем при окуляре с фокусным расстоянием $F_2 = 50$ мм, а при окуляре с $F_2'' = 100$ мм такая же.

Решение. Планета рассматривается в телескоп глазом, аккомодированным на бесконечность. Такой глаз фокусирует на сетчатке параллельный пучок лучей.

Диаметр светового пучка, падающего на глаз, определяется по формуле $d = DF_2/F_1$ и в каждом из случаев равен: $d_1 = 5$ мм при фокусном расстоянии окуляра $F_2 = 50$ мм, $d_2 = 2{,}5$ мм при фокусном расстоянии окуляра $F_2' = 25$ мм, $d_3 = 10$ мм при фокусном расстоянии окуляра $F_2'' = 100$ мм.

Так как диаметр зрачка глаза d_0 равен примерно 5 мм, то в первом и во втором случаях на сетчатку глаза будет попадать весь световой поток, падающий на объектив, а в третьем случае — только $k = d_0^2/d_3^2 = 0{,}25$ – часть этого светового потока:

$$\Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3 = 1 : 1 : k. \qquad (1)$$

Угол зрения, т. е. угол, под которым рассматривается изображение планеты, даваемое объективом, обратно пропорционален фокусному расстоянию окуляра, поэтому площадь изображения пропорциональна F_2^2.

Отношение площадей изображений равно

$$S_1 : S_2 : S_3 = 4 : 16 : 1. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) найдем для отношения освещенностей изображения планеты на сетчатке:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\Phi_1/S_1}{\Phi_2/S_2} = 4 \text{ и } \frac{E_1}{E_2} = 1, \ E_2 = \frac{1}{4}E_1 \text{ и } E_3 = E_1.$$

28.22. В 10 раз.

Указание. При изменении диаметра объектива освещенность изображения неба не меняется (объясните!). Поток, идущий от звезды, пропорционален площади объектива, а размер изображения остается неизменным.

29. ВОЛНЫ. КВАНТЫ. ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ

29.1. Красный. Цвет, видимый глазом, определяется не длиной волны, а частотой.

29.2. Синие.

29.3. 1. Рассеяние света в воздухе пропорционально четвертой степени частоты света, поэтому синяя часть спектра рассеивается значительно больше света, имеющего меньшую частоту.

Синее стекло пропускает, а синяя бумага отражает в основном синюю часть спектра. 2. Красное.

29.4. 1. Нет, не изменит, так как сама интерференция есть следствие принципа суперпозиции, в силу которого фронты волн, проникающих одна в другую, взаимно не деформируются.

2. Имеет место только пространственное перераспределение энергии, не нарушающее закона ее сохранения.

3. Интерференционная картина обусловлена наложением волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей пластинки. Но с увеличением толщины пластинки увеличивается число и густота максимумов и минимумов, уменьшается угловой интервал между ними и картина будет неразличима, при немонохроматическом свете интерференционная картина вообще исчезает, так как перекрываются максимумы и минимумы разных длин волн.

29.5. *Указание.* Цвет пластинки обусловлен разностью хода лучей, отраженных от верхней и нижней границ пластинки (рис. 289). При уменьшении угла падения разность хода возрастает, а при увеличении угла – уменьшается.

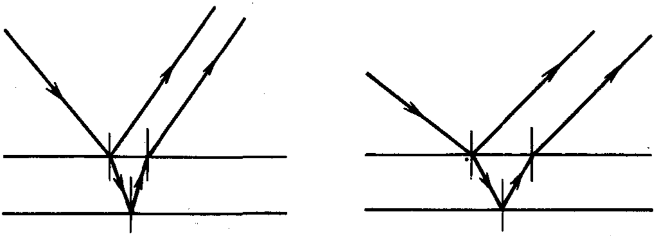


Рис. 289

29.6. $d = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{4n(\lambda_1 - \lambda_2)} \approx 300$ нм.

Указание. $2nd = \lambda_1 m$ и $2nd = \lambda_2 m + \dfrac{\lambda_2}{2}$.

29.7. а) 2,07 эВ, $3{,}68 \cdot 10^{-32}$ г; б) 12,4 кэВ, $2{,}21 \cdot 10^{-28}$ г; в) 1,24 МэВ, $2{,}21 \cdot 10^{-23}$ г.

Указание. Энергия фотона равна $E = h\nu$, $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ – частота волны и $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость распространения электромагнитной волны.

Масса фотона находится из соотношения

$$E = mc^2;\ m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

29.8. $\lambda = h/(m_0 c) = 0{,}00242$ нм.

Указание. См. задачу 29.6. Энергия покоя электрона $E_0 = m_0 c^2$ (m — масса электрона).

29.9. Примерно $5{,}04 \cdot 10^{11}$ и 10^6.

Указание. Энергия фотона, соответствующего длине волны λ, равна hc/λ. По условию, $E = hcn/\lambda$, где n — число испускаемых фотонов.

29.10. $n = \dfrac{\omega\lambda}{ch} \approx 2{,}3 \cdot 10^{19}$; $\dfrac{\Delta m}{t} = \dfrac{\omega \cdot 4\pi R^2}{60 \cdot c^2} \approx 4{,}4 \cdot 10^9$ кг/с; $1{,}4 \cdot 10^{12}$ лет.

29.11. $\lambda_{кр} = 550$ нм.

Решение. Пороговая частота, или красная граница, может быть определена из формулы Эйнштейна, если положить энергию испущенного фотоэлектрона равной нулю (1 э$B = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж):

$$h\nu = A_{вых} \text{ или } \frac{hc}{\lambda_{кр}} = A_{вых}, \text{ откуда } \lambda_{кр} = \frac{hc}{A_{вых}}.$$

29.12. $v \approx 2{,}72 \cdot 10^7$ см/с.

Указание. Воспользоваться формулой Эйнштейна.

29.13. 1,71 В.

Решение. Согласно формуле Эйнштейна, максимальная кинетическая энергия вылетевших фотоэлектронов $\dfrac{mv_{макс}^2}{2}$ равна разности энергии фотона и работы выхода: $\dfrac{mv_{макс}^2}{2} = h\nu - A$.

Вылет электронов прекратится, когда потенциальная энергия электрона в задерживающем поле станет равной его кинетической энергии:

$$\frac{mv_{макс}^2}{2} = e\varphi,\ e\varphi = h\nu - A,$$

откуда

$$\varphi = \frac{h\nu}{e} - \frac{A}{e}.$$

При подстановке энергии кванта переводим ее в электрон-вольты, тогда формула упрощается:

$$e\varphi = \frac{hc}{\lambda \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} A.$$

29.14. 4,36 эВ; 2,39 эВ; 2,15 эВ.

29.15. 3,8 В.

29.16. $6{,}6\cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Указание. Написав дважды формулу Эйнштейна, исключить работу выхода электрона из данного металла; кинетическую энергию электрона выразить через задерживающее напряжение $\frac{mv^2}{2} = eU_з$.

29.17. 0,51 МВ.

Указание. Кинетическая энергия, приобретенная электроном под действием сил электрического поля eU, равна разности $mc^2 - m_0c^2$.

29.18. Решение. Масса покоя ядра $m_я$ всегда меньше суммы масс покоя входящих в него частиц. Это обусловлено тем, что при объединении нуклонов в ядро выделяется энергия связи нуклонов друг с другом. Энергия связи ядра $E_{св}$ равна той работе, которую нужно совершить, чтобы разделить образующие ядро нуклоны (протоны и нейтроны) и удалить их друг от друга на такие расстояния, при которых они практически не взаимодействуют. Согласно закону взаимосвязи массы и энергии уменьшение энергии тела на ΔE должно сопровождаться эквивалентным уменьшением массы тела на $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$. Следовательно, энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{св} = c^2\{[Zm_p + (A - Z)m_n] - m_я\}.$$

Это соотношение практически не нарушится, если заменить массу протона m_p массой атома водорода m_H, а массу ядра $m_я$ — массой атома $m_а$. Указанная замена будет означать добавление к уменьшаемому и вычитаемому выражениям, стоящим в фигурных скобках, одинаковой величины, равной Zm_e. Тогда

$$E_{св} = c^2\{[Zm_H + (A - Z)m_n] - m_a\}. \qquad (1)$$

Это соотношение удобнее предыдущего, потому что в таблицах даются обычно массы атомов. Найдем энергию связи ядра ^4_2He, в состав которого входят два протона ($Z = 2$) и два нейтрона $(A - Z) = 2$. Масса атома ^4_2He равна 4,00260 а.е.м., 1 а.е.м. = $= 1/N_A = 1{,}66\cdot 10^{-24}$ г, что в единицах энергии (МэВ) соответствует

$$\frac{1{,}66\cdot 10^{-24}\cdot(3\cdot 10^{10})^2}{1{,}6\cdot 10^{-6}} = 931 \text{ МэВ}.$$

Масса атома водорода ^1_1H равна 1,00815 а.е.м. (938,7 МэВ), $m_n =$ $= 939{,}5$ МэВ. Подставляя эти величины в формулу (1), получим

$$E_{св} = [2\cdot 938{,}7 + 2\cdot 939{,}5] - 4{,}0026\cdot 931 = 28{,}4 \text{ МэВ}.$$

29.19. *Указание.* См. задачу 29.18. Выделяется

$$E_{св} = [m_{^2_1H} + m_{^3_1H} - (m_{^4_2He} + m_n)]\,c^2;\quad m_{а.е.м.}c^2 = 931 \text{ МэВ};$$

$$E_{св} = [2{,}01410 + 3{,}01605 - (4{,}00260 + 1{,}00866)]\cdot 931 = 17{,}6 \text{ МэВ}.$$

29.20. $2{,}3\cdot 10^4$ кВт·ч; 2,7 т.

Приложения

1. Значения тригонометрических функций

Угол, град	sin	tg	ctg	cos	
0	0,0000	0,0000	∞	1,0000	90
1	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	89
2	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	85
6	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	83
8	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	81
10	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	80
11	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	76
15	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	75
16	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	74
17	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	72
19	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	71
20	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	70
21	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	65
26	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	63
28	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	62
29	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	61
30	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	60
31	0,5150	0,6009	1,664	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,600	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,540	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1,483	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,428	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,376	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,327	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,280	0,7880	52
39	0,6293	0,8098	1,235	0,7771	51
40	0,6428	0,8391	1,192	0,7660	50
41	0,6561	0,8693	1,150	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,111	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,072	0,7314	47
44	0,6947	0,9657	1,036	0,7193	46
45	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	45
	cos	ctg	tg	sin	Угол, град

2. Единицы физических величин СИ, имеющие собственные наименования

Величина	Единица		Величина	Единица	
	наименование	обозначение		наименование	обозначение
Длина	метр	м	Поток электрического смещения	кулон	Кл
Масса	килограмм	кг	Потенциал электрического поля, электрическое напряжение	вольт	В
Время	секунда	с	Электрическая емкость	фарад	Ф
Плоский угол	радиан	рад	Электрическое сопротивление	ом	Ом
Телесный угол	стерадиан	ср	Электрическая проводимость	сименс	См
Сила, вес	ньютон	Н	Магнитная индукция	тесла	Тл
Давление	паскаль	Па	Магнитный поток	вебер	Вб
Напряжение (механическое)	паскаль	Па	Индуктивность	генри	Гн
Модуль упругости	паскаль	Па	Сила света	кандела	кд
Работа, энергия	джоуль	Дж	Световой поток	люмен	лм
Мощность	ватт	Вт	Освещенность	люкс	лк
Частота колебаний	герц	Гц	Поток излучения	ватт	Вт
Термодинамическая температура, разность температур	кельвин	К	Доза излучения (поглощенная доза излучения)	грей	Гр
Теплота (количество теплоты)	джоуль	Дж	Активность изотопа	беккерель	Бк
Количество вещества	моль	моль			
Электрический заряд	кулон	Кл			
Сила тока	ампер	А			

3. Внесистемные единицы, допущенные к применению наравне с единицами СИ

(в соответствии со стандартом СЭВ 1052—78 «Метрология. Единицы физических величин»)

Величина	Единица		
	наименование	обозначение	соотношение с единицей СИ
Масса	тонна	т	10^3 кг
	атомная единица массы	а. е. м.	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
Объем, вместимость	литр	л	10^{-3} м^3
Плоский угол	градус	...°	$1{,}74 \cdot 10^{-2}$ рад
	минута	...′	$2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад
	секунда	...″	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад
Работа, энергия	электрон-вольт	эВ	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Дж

Величина	Единица		
	наименование	обозначение	соотношение с единицей СИ
Относительная величина	единица (число 1)	—	1
	процент	%	10^{-2}
Логарифмическая величина	бел	Б	—
	децибел	дБ	—
Температура	градус Цельсия	°C	1 °C = 1 K

4. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	Приставка		Множитель	Приставка	
	наименование	обозначение		наименование	обозначение
10^{18}	экса	Э	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санти	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	милли	м
10^{9}	гига	Г	10^{-6}	микро	мк
10^{6}	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^{3}	кило	к	10^{-12}	пико	п
10^{2}	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10^{1}	дека	да	10^{-18}	атто	а

Примечание к таблице 4. Перечисленные в таблице множители и приставки используются для образования кратных и дольных единиц от единиц Международной системы и от внесистемных единиц, допущенных к применению.

Приставки гекто, дека, деци и санти допускается применять только в наименованиях кратных и дольных единиц, уже получивших широкое распространение (гектар, декалитр, дециметр, сантиметр и др.).

Приставки рекомендуется выбирать таким образом, чтобы числовые значения величин находились в пределах от 0,1 до 1000. Например, для выражения числа $7{,}5 \cdot 10^{-5}$ м следует выбрать приставку микро, а не приставку милли или нано. С приставкой микро получим $7{,}5 \cdot 10^{-5}$ м = = 75 мкм, т. е. число, находящееся от 0,1 до 1000.

С приставкой милли получим $7{,}5 \cdot 10^{-5}$ м = 0,075 мм, т. е. число, меньшее 0,1, а с приставкой нано — $7{,}5 \cdot 10^{-5}$ м = 75 000 нм, т. е. число, большее 1000.

Наименования и обозначения десятичных кратных и дольных единиц образуются присоединением приставок к наименованиям исходных единиц. Присоединение двух (и более) приставок подряд не допускается. Например, вместо единицы «микромикрофарад» следует применять единицу «пикофарад».

Обозначение приставки пишется слитно с обозначением единицы, к которой она присоединяется.

При сложном наименовании производной единицы СИ приставку присоединяют к наименованию первой единицы, входящей в произведение или числитель дроби. Например, кПа·с/м, но не Па·кс/м.

В виде исключения из этого правила временно в обоснованных случаях, т. е. в случаях, когда это нашло широкое распространение, допускается присоединение приставки к наименованию единицы, входящей в знаменатель дроби. Например, кВ/см, А/мм^2. Однако в интересах упрощения и унификации единиц следует постепенно переходить к правильно образованным кратным и дольным единицам (например, от ампера на квадратный миллиметр к мегаамперу на квадратный метр, от киловольта на сантиметр к мегавольту на метр и т. д.).

Кроме десятичных кратных и дольных единиц стандартом СЭВ «Единицы физических величин» допущены к использованию кратные и дольные единицы времени, плоского угла и относительных величин, не являющиеся десятичными. Например, единицы времени (минута, час, сутки); единицы плоского угла (градус, минута, секунда).

5. Астрономические величины

Средний радиус Земли	$6{,}37 \cdot 10^6$ м
Средняя плотность Земли	5500 кг/м^3
Масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}96 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг
Средняя плотность Солнца	1400 кг/м^3
Радиус Луны	$1{,}74 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7{,}3 \cdot 10^{22}$ кг
Период вращения Луны вокруг Земли	27 сут. 7 ч и 43 мин
Среднее расстояние между центрами Земли и Луны	$3{,}84 \cdot 10^8$ м
Среднее расстояние между центрами Солнца и Земли	$1{,}5 \cdot 10^{11}$ м

6. Плотность некоторых веществ, 10^3 кг/м^3

($p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па; $T = 273$ К)

Твердые тела

Алюминий	2,7	Медь	8,9
Дерево	0,8	Никель	8,8
Железо	7,8	Свинец	11,3
Кирпич	1,8	Серебро	10,5
Лед	0,9	Сталь	7,8

Жидкости

Вода:		Масло	0,9
морская	1,03	Ртуть	13,6
чистая	1	Спирт	0,8
Керосин	0,8		

Газы

Водород	$0{,}089 \cdot 10^{-3}$	Гелий	$0{,}18 \cdot 10^{-3}$
Воздух	$1{,}29 \cdot 10^{-3}$	Кислород	$1{,}43 \cdot 10^{-3}$

7. Модуль продольной упругости, 10^{11} Па

Алюминий	0,7	Медь	1,2
Железо	2,1	Свинец	0,17
Латунь	0,9	Сталь	2,2

8. Поверхностное натяжение жидкостей при комнатной температуре, 10^{-2} Н/м

Анилин	4,3	Мыльный раствор	4,0
Вода	7,4	Спирт	2,2
Керосин	3,6	Ртуть	47,1

9. Удельная теплоемкость, 10^3 Дж/(кг · К)

Азот	1,05	Латунь	0,38
Алюминий	0,88	Лед	2,10
Вода	4,19	Медь	0,38
Водород	14,20	Олово	0,23
Воздух	1,005	Свинец	0,13
Железо	0,46	Спирт	2,42
Кислород	0,92	Сталь	0,46
		Углекислый газ	0,83

10. Температура плавления твердых тел, К

Алюминий	933	Медь	1356
Железо	1803	Олово	505
Латунь	1173	Свинец	600
Лед	273	Серебро	1233

11. Удельная теплота плавления, 10^5 Дж/кг

Алюминий	3,90	Олово	0,58
Лед	3,35		
		Свинец	0,25
Медь	1,80	Серебро	1,01

12. Температура парообразования, К

Вода	373	Спирт	351
Ртуть	630	Эфир	308

13. Удельная теплота парообразования, 10^5 Дж/кг

Вода	22,60	Спирт	9,05
Ртуть	2,82	Эфир	3,68

14. Удельная теплота сгорания, 10^7 Дж/кг

Бензин	4,61	Керосин	4,61
Дерево	1,26	Нефть	4,61
Каменный уголь	2,93	Спирт	2,93

15. Коэффициент линейного расширения твердых тел, 10^{-5} К$^{-1}$

Алюминий	2,40	Медь	1,70
Железо	1,20	Свинец	2,90
Инвар	0,15	Сталь	1,10
Латунь	1,90	Стекло	0,90

16. Коэффициент объемного расширения жидкостей, 10^{-4} К$^{-1}$

Вода	1,8	Ртуть	1,8
Керосин	10,0	Серная кислота . . .	5,6
Нефть	10,0	Спирт	11,0

17. Плотность насыщающих водяных паров при различной температуре

T, К	ρ, 10^{-3} кг/м^3	T, К	ρ, 10^{-3} кг/м^3
263	2,14	283	9,40
264	2,33	284	10,00
265	2,54	285	10,70
266	2,76	286	11,40
267	2,99	287	12,10
268	3,24	288	12,80
269	3,51	289	13,60
270	3,81	290	14,50
271	4,13	291	15,40
272	4,47	292	16,30
273	4,84	293	17,30
274	5,20	294	18,30
275	5,60	295	19,40
276	6,00	296	20,60
277	6,40	297	21,80
278	6,80	298	23,00
279	7,30	299	24,40
280	7,80	300	25,80
281	8,30	301	27,20
282	8,80	302	28,70

18. Диэлектрическая проницаемость (относительная)

Вода	81,0	Слюда	7,0
Глицерин	39,1	Стекло	7,0
Керосин	2,0	Эбонит	3,0
Парафин	2,0		

19. Удельное сопротивление и термический коэффициент сопротивления проводников

Вещество	ρ, 10^{-7} Ом·м	β, 10^{-3} К$^{-1}$	Вещество	ρ, 10^{-7} Ом·м	β, 10^{-3} К$^{-1}$
Алюминий	0,26	3,6	Нихром	11,0	0,4
Вольфрам	0,55	5,2	Свинец	2,1	4,3
Железо	1,2	6,0	Серебро	0,16	3,6
Медь	0,17	4,2			

20. Коэффициент преломления

Алмаз	2,42	Лед	1,31
Вода	1,33	Скипидар	1,47

Воздух	1,00029	Спирт	1,36
Кварц	1,54	Стекло	1,50

21. Работа выхода электронов из металла, 10^{-19} Дж

Вольфрам	7,2	Платина	8,5
Калий	3,2	Цезий	3,2
Литий	3,8	Цинк	6,6

22. Основные характеристики некоторых элементарных частиц

Частица	Символ	Заряд, 10^{-9} Кл	Масса, 10^{-27} кг
α-Частица	${}^{4}_{2}\alpha$	3,2	6,6446
Нейтрон	${}^{1}_{0}n$	0	1,6748
Позитрон	${}^{0}_{1}e$	1,6	0,000911
Протон	${}^{1}_{0}p$	1,6	1,6724
Электрон	${}^{0}_{1}e$	–1,6	0,000911

23. Масса ядер некоторых легких изотопов, 10^{-27} кг

${}^{1}_{1}H$	1,6726	${}^{11}_{5}B$	18,2767
${}^{2}_{1}He$	3,3436	${}^{14}_{7}N$	23,2461
${}^{4}_{3}He$	6,6446	${}^{16}_{8}O$	26,5527
${}^{0}_{3}Li$	9,9855	${}^{17}_{8}O$	28,2202
${}^{7}_{3}Li$	11,6475	${}^{20}_{10}Ne$	33,1888

24. Молярная масса некоторых газов, 10^{-3} кг/моль

Азот N_2	28	Гелий He_2	4
Водород H_2	2	Кислород O_2	32
Водяной пар H_2O . . .	18	Углекислый газ CO_2 . .	44
Воздух	29		

25. Психометрическая таблица

Показания сухого термометра, К	Разность показаний сухого и влажного термометра, К											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	относительная влажность, %											
273	100	81	63	45	28	11						
274	100	83	65	48	32	16						
275	100	84	68	51	35	20						
276	100	85	69	54	39	24	10					
277	100	86	70	56	42	28	14					
278	100	86	72	58	45	32	19	6				
279	100	87	73	60	47	35	23	10				
280	100	87	74	66	49	37	26	14				
281	100	88	75	63	51	40	29	18	7			

Продолжение

Показания сухого термометра, К	Разность показаний сухого и влажного термометра, К											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	относительная влажность, %											
282	100	88	76	64	53	42	31	21	11			
283	100	88	76	65	54	44	34	24	14	5		
284	100	89	77	66	56	46	36	26	17	8		
285	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11		
286	100	89	79	69	59	49	40	31	23	14	6	
287	100	90	79	70	60	51	42	34	25	17	9	
288	100	90	80	71	61	52	44	36	27	20	12	5
289	100	90	81	71	62	54	46	37	30	22	15	8
290	100	91	81	72	64	55	47	39	32	24	17	10
291	100	91	82	73	65	56	49	41	34	27	20	13
292	100	91	82	74	65	58	50	43	35	29	22	15
293	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30	24	18
294	100	92	83	75	67	60	52	46	39	32	26	20
295	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34	30	22
296	100	92	84	76	69	61	55	48	42	36	31	24
297	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37	33	26
298	100	92	85	77	70	63	57	50	44	38	34	27
299	100	92	85	78	71	64	58	51	46	40	36	29
300	100	92	85	78	71	65	59	52	47	41	37	30
301	100	93	86	78	72	65	59	54	48	42	38	32
302	100	93	86	79	72	66	60	55	49	43	39	33
303	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44	39	34

26. Приближенные вычисления

При решении физических задач мы имеем дело с приближенными числовыми значениями. К ним относятся также многие константы, например $g = 9{,}81$ м/с^2 и другие.

В настоящее время в распоряжении учащихся имеются различные счетно-вычислительные машинки (калькуляторы, микрокалькуляторы), которые при вычислении дают большое число значащих цифр. Учащиеся должны понимать, сколько цифр после запятой следует оставить, а остальные отбросить. Ниже приводятся правила приближенных вычислений.

1. При сложении и вычитании результат округляется так, чтобы он не имел значащих цифр в разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одной из данных.

Пример: $3{,}351 + 2{,}45 + 1{,}2534 \approx 7{,}05$.

2. При умножении сомножители округляются так, чтобы каждый содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим их числом.

Пример: $2{,}51 \cdot 1{,}2 \cdot 5{,}245 \approx 2{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 5{,}2$.

В окончательном результате оставляют такое же число значащих цифр, как в сомножителях после округления.

3. При делении соблюдается такое же правило, как и при умножении.

П р и м е р: $6{,}24:2{,}124 \approx 6{,}24:2{,}12$.

4. При возведении в квадрат (или куб) в результате берется столько значащих цифр, сколько их имеет основание степени.

П р и м е р: $1{,}25^2 \approx 1{,}56$.

5. При извлечении квадратного корня (или кубического) в результате берется столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное выражение.

П р и м е р: $\sqrt{6{,}82} \approx 2{,}61$.

Эти же правила следует применять при вычислении сложных выражений.

(Приложения даны редакцией)

Основные физические константы

Масса Земли	$5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Земли	$6{,}37 \cdot 10^{6}$ м
Ускорение свободного падения	$9{,}80$ м/с^2
Скорость света, с	$3 \cdot 10^{8}$ м/с
	$3 \cdot 10^{10}$ см/с
Гравитационная постоянная γ	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2)
	$6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см^3/(г $\cdot$ с^2)
Постоянная Авогадро N_A . . .	$6{,}025 \cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$
	$6{,}025 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Лошмидта L . . .	$2{,}69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$
	$2{,}69 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$
Универсальная газовая постоянная R	$8{,}314$ Дж (моль $\cdot$ К)
Стандартный объем газа V_m	$22{,}42 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Элементарный заряд e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Удельный заряд электрона e/m	$1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Постоянная Фарадея F	$9{,}65 \cdot 10^{4}$ Кл/моль
Атомная единица массы а. е. м.	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
	$1{,}66 \cdot 10^{-24}$ г
	$931{,}4$ МэВ
Электрическая постоянная . .	$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ Ф/м $=$
	$= 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с

Содержание

Наум Ильич Гольдфарб

СБОРНИК ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Зав. редакцией Е. С. Гридасова. Редактор Л. С. Куликова. Младшие редакторы Н. П. Майкова, Н. Г. Закалюкина. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Р. С. Родичева. Корректор Р. К. Косинова.

ИБ № 4119

Изд. № ФМ-747. Сдано в набор 13.10.81. Подп. в печать 03.02.82. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бум. тип. № 2. Гарнитура таймс. Печать высокая. Объем 18,48 усл. печ. л. 18,48 усл. кр.-отт. 21,89 уч.-изд. л. Тираж 300 000 экз. Зак. № 132. Цена 85 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.