ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

с решениями и указаниями

5–7 классы

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Лаборатория знаний

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ 5–7 классы

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

с решениями и указаниями

5–7

классы

Москва
Лаборатория знаний

УДК 373.167.1:511
ББК 22.130я721.6
З-80

Золотарёва Н. Д.

З-80 Олимпиадная математика. Арифметические задачи с решениями и указаниями. 5–7 классы / Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов. — М. : Лаборатория знаний, 2020. — 252 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе).

ISBN 978-5-00101-209-2

Настоящее пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова на основе олимпиадных задач по математике. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения.

Рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

УДК 373.167.1:511
ББК 22.130я721.6

Учебное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Золотарёва Наталья Дмитриевна
Федотов Михаил Валентинович

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА.
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ.
5–7 КЛАССЫ

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художник *В. А. Прокудин*
Технический редактор *Т. Ю. Федорова*. Корректор *И. Н. Панкова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано в печать 07.03.19. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 20,80. Заказ 2284.

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

Отпечатано в ОАО «Можайский полиграфический комбинат»
143200, Россия, г. Можайск, ул. Мира, 93.
www.oaompk.ru, тел.: (495) 745-84-28, (49638) 20-685

ISBN 978-5-00101-209-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРОВ

Уважаемые читатели, вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ — школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем пятнадцатилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии, информатике и физике для старшеклассников для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам и вступительным экзаменам в вузы. Недавно вышли пособия по математике для подготовки к ГИА для девятиклассников.

Но мы не хотим останавливаться только на стандартных задачах, необходимых для сдачи ГИА и ЕГЭ и экзаменов в вузы. Мы хотим, чтобы школьники с младших классов и до окончания школы могли решать задачи повышенной сложности — олимпиадные задачи, на которые у учителя обычно не остаётся времени на обычном уроке математики. Большинство книг по этой тематике выходят без разбивки по классам либо без разбивки по темам. Многие хорошие книги с олимпиадными задачами вышли давно и с тех пор не переиздавались. Мы собрали много задач из различных старых и не очень старых сборников олимпиадных задач и предлагаем их вам.

Настоящее пособие рассчитано на 5–7 классы и является первым в серии пособий по олимпиадным задачам. Будет ещё несколько книг для 5–7 классов. Параллельно мы уже ведём работу над сборником задач для 8–9 классов. Завершит серию, конечно же, пособие для 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте. Дорогу осилит идущий.

Заместитель декана по учебной работе
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М.В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики
М. В. Федотов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения. Задачи в разделах в основном расположены по принципу *«от простого — к сложному»*. Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

После номера задачи приведены номера классов, для которых эта задача была предложена на олимпиаде. Однако это разделение на классы довольно условно. Понятно, что если задачу давали в 5 классе, то её можно давать и в 6–7 классах, и часто, наоборот, задача, которую давали на олимпиаде для 6–7 классов, вполне по силам пятиклассникам. Поэтому, придерживаясь рекомендаций о принадлежности задачи тому или иному классу, относитесь к этим рекомендациям творчески. Кстати, распределение задач по разделам тоже не всегда однозначно. Одну и ту же задачу можно было отнести к разным разделам.

В принципе по этому пособию можно заниматься три года: в 5 классе пройти по всем разделам, выбирая задачи для 5 класса, в 6 классе снова пройти по всем разделам, выбирая задачи для 6 класса и т. д. А можно пройти и за более короткий срок: за два года, если вы начали заниматься в 6 классе, или за один год, если вы уже в 7 классе.

Пособие рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

Желаем удачи!

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\{a\}$ — множество, состоящее из одного элемента a;
$\cup$ — объединение;
$\cap$ — пересечение;
$\varnothing$ — пустое множество;
$\in$ — знак принадлежности;
$\subset$ — знак включения подмножества;
$\forall$ — для любого;
$A \setminus B$ — разность множеств A и B;
$\Longrightarrow$ — следовательно;
$\Longleftrightarrow$ — тогда и только тогда;
$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;
ОДЗ — область допустимых значений;
$\left\{\begin{array}{l}\ldots\\ \ldots\end{array}\right.$ — знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;
$\left[\begin{array}{l}\ldots\\ \ldots\end{array}\right.$ — знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Необходимо отметить, что в формулировках задач параллельно с математически более корректной терминологией типа «длина отрезка AB равна 5» и записью $|AB| = 5$ используется школьная терминология типа «отрезок AB равен 5» и запись $AB = 5$.

Часть I. ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

Арифметические задачи обычно встречаются на олимпиадах первых уровней (школьной, районной). На олимпиадах более высокого уровня их обычно не дают, но мы рекомендуем вам тем не менее прорешать задачи этого раздела, поскольку на них хорошо отрабатывать внимательность и умение аккуратно выполнять непростые последовательности действий. Эти задачи также хороши для первичного развития логического мышления.

1. Задачи на вычисление

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, связанные с вычислением. В начале раздела идут задачи, в которых надо просто уметь раскрывать скобки, группировать слагаемые, выносить за скобки равные величины, приводить подобные, взаимно сокращать равные величины с разными знаками, использовать формулы сокращённого умножения:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \tag{1}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \tag{2}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \tag{3}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \tag{4}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \tag{5}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \tag{6}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \tag{7}$$

причём все формулы нужно узнавать не только «слева направо», но и «справа налево».

Применение формул сокращённого умножения является одним из самых простых способов разложения алгебраического выражения на множители. Все формулы справедливы при любых вещественных a и b, которые сами могут являться числами, функциями или другими выражениями.

Помимо основных формул сокращённого умножения полезно знать и формулы для большего числа слагаемых, например:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

В общем случае квадрат суммы нескольких чисел есть сумма квадратов этих чисел плюс сумма всевозможных удвоенных попарных произведений с точностью до перестановки множителей.

Полезно знать также две следующие формулы, верные $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

Во второй части этого раздела приведены текстовые задачи на вычисления. Во всех этих задачах ответ получается простыми вычислениями, нигде не нужно составлять уравнения, даже если вы умеете решать уравнения. Даже, наоборот, без составления уравнений решение получается проще и элегантнее.

В заключительной части данного раздела приведены задачи с дробями. Умение работать с дробями — очень важное умение. Не бойтесь этих задач и ни в коем случае их не пропускайте. Не переходите к следующему разделу, пока не разберётесь с дробями.

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить

$$\frac{5^4x^4 - 0{,}99x - 0{,}0199}{1000x^3 - 1}$$

при а) $x = -0{,}02$, б) $x = 0{,}1$.

Решение. а) Заметим, что если $x = -0{,}02$, то $5x = -0{,}1$ и $5^4x^4 = (5x)^4 = 0{,}0001$. Поэтому

$$5^4x^4 - 0{,}99x - 0{,}0199 = 0{,}0001 + 0{,}0198 - 0{,}0199 = 0.$$

Так как знаменатель дроби $1000x^3 - 1 = (10x)^3 - 1 = (-0{,}2)^3 - 1$ в нуль не обращается, то дробь равна нулю.

б) Так как знаменатель дроби $1000x^3 - 1 = (10x)^3 - 1 = 1^3 - 1$ обращается в нуль, то при $x = 0{,}1$ выражение теряет смысл, поскольку деление на нуль невозможно.

Ответ. а) 0; б) при $x = 0{,}1$ выражение теряет смысл, так как деление на нуль невозможно.

Пример 2. Что больше и на сколько: утроенная разность квадратов чисел a и x или удвоенная разность квадратов тех же чисел, если a равно наибольшему двузначному отрицательному числу, а x равно наименьшему двузначному отрицательному числу?

Решение. Наибольшее двузначное отрицательное число $a = -10$. Наименьшее двузначное отрицательное число $x = -99$.

Разность квадратов чисел a и x — это $A = a^2 - x^2$. Поэтому, чтобы сравнить утроенную разность квадратов чисел a и x и удвоенную разность квадратов тех же чисел, достаточно сравнить $3A$ и $2A$, т. е. надо просто сравнить A с нулём.

$$A = a^2 - x^2 = (-10)^2 - (-99)^2 = 10^2 - 99^2 = 100 - (100 - 1)^2 =$$
$$= 100 - (100^2 - 2 \cdot 100 + 1^2) = -10\,000 + 300 - 1 = -9701 < 0.$$

Следовательно, удвоенная разность квадратов чисел a и x больше утроенной разности квадратов этих же чисел на 9701.
Ответ. При $a = -10$ и $x = -99$ удвоенная разность квадратов чисел a и x больше утроенной разности квадратов этих же чисел на 9701.

Пример 3. Какое число больше:

$$\underbrace{666\ldots66}_{25\text{ цифр}} \cdot \underbrace{222\ldots22}_{57\text{ цифр}} \quad \text{или} \quad \underbrace{333\ldots33}_{25\text{ цифр}} \cdot \underbrace{444\ldots45}_{57\text{ цифр}}$$

и на сколько?

Решение. Положим $A = \underbrace{333\ldots33}_{25\text{ цифр}}$, $B = \underbrace{222\ldots22}_{57\text{ цифр}}$.

Тогда первое число равно $2AB$, а второе число равно $A(2B + 1) = 2AB + A$. Поэтому второе число больше первого на A.
Ответ. Второе число больше на $\underbrace{333\ldots33}_{25\text{ цифр}}$.

Пример 4. Два карандаша и ластик стоят столько же, сколько один карандаш и четыре ластика. Во сколько раз карандаш дороже ластика?

Решение. Сравним два набора:
1) два карандаша и ластик;
2) один карандаш и четыре ластика.

В обоих наборах есть по одному карандашу и одному ластику, но в первом наборе есть один дополнительный карандаш, а во втором — три дополнительных ластика. Значит, один карандаш стоит столько же, сколько стоят три ластика.
Ответ. В 3 раза.

Замечание. Такой метод решения иногда называют «Метод Прокруста»[1].

[1]Прокруст — персонаж мифов Древней Греции, разбойник, подстерегавший путников на дороге между Мегарой и Афинами. Он обманом заманивал в свой дом путников. Потом он укладывал их на своё ложе и тем, кому оно было коротко, обрубал ноги, а кому было велико, ноги вытягивал — по длине этого ложа. Пришлось на это ложе лечь и самому Прокрусту: герой древнегреческих мифов Тесей, победив Прокруста, поступил с ним так же, как тот поступал со своими пленниками.

Пример 5. Мальчик собрал в коробку жуков и пауков — всего 9 штук. Если всего в коробке 60 ног, сколько там пауков? (У жука 6 ног, у паука 8 ног.)

Решение. Шестью девять — пятьдесят четыре, т. е. если бы у каждого насекомого в коробке было по 6 ног, то всего у 9 насекомых было бы 54 ноги. Значит оставшиеся 6 ($60 - 54 = 6$) ног принадлежат паукам. Так как у паука на 2 ноги больше, чем у жука ($8 - 6 = 2$), то пауков в коробке 3 ($6 : 2 = 3$).
Ответ. 3 паука.

Замечание. Ещё раз напоминаем, что все задачи этого разделов (да и многих следующих разделов этой главы) решаются без составления уравнений.

Пример 6. От бревна длиной 5 м каждую минуту отпиливают по полметра. За сколько минут будет распилено всё бревно?

Решение. После того как распилят всё бревно, получится 10 полуметровых чурбаков, но будет ошибкой считать, что и распилов потребуется 10. Нет, распилов надо сделать всего 9, так как при последнем, девятом распиле образуется не один, а два чурбака, тогда как при всех предыдущих распилах получался только один чурбак. Значит, бревно будет распилено за 9 минут.
Ответ. За 9 минут.

Замечание. Это опять же классическая задача. Иногда такие задачи называют «задачами о столбах и пролётах между ними». Столбов всегда на один больше, чем пролётов между ними.

Пример 7. В сражении участвовали армии Синих и Зелёных по 500 человек в каждой. Сначала каждый Синий солдат выстрелил в одного из Зелёных; затем каждый уцелевший Зелёный солдат выстрелил в одного из Синих. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.

Доказательство. Пусть после залпа Синих уцелело n Зелёных солдат. Тогда после их залпа будет убито не более n Синих солдат. Значит, у Синих осталось не менее $500 - n$ солдат, а общее число оставшихся солдат не меньше чем

$$n + 500 - n = 500.$$

Пример 8. Быстро вычислить

$$10\,101 \cdot \left(\frac{5}{111\,111} + \frac{5}{222\,222} - \frac{4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}\right).$$

Решение. Разложим сначала на простые множители 10 101, 111 111 и 222 222:

$$10\,101 = 111 \cdot 91 = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 13;$$
$$111\,111 = 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11;$$
$$222\,222 = 2 \cdot 111\,111 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11.$$

Значит, исходное выражение равно

$$3\cdot37\cdot7\cdot13\cdot\left(\frac{5}{3\cdot37\cdot11\cdot7\cdot13}+\frac{5}{2\cdot3\cdot37\cdot11\cdot7\cdot13}-\frac{4}{3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37}\right)=$$
$$=\frac{5}{11}+\frac{5}{2\cdot11}-\frac{4}{11}=\frac{10+5-8}{22}=\frac{7}{22}.$$

Ответ. $\frac{7}{22}$.

Пример 9. Быстро вычислить: $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{1\cdot2}=\frac{1}{1\cdot2};\qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{2\cdot3}=\frac{1}{2\cdot3};\quad \ldots$$
$$\ldots,\quad \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Поэтому получаем

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{1}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$

Ответ. $\frac{4}{5}$.

Замечание. Напоминаем ещё раз: не переходите к следующим разделам, пока не разберётесь с дробями.

Задачи

Просто вычисления

1. $\boxed{5}$ Выполните действия:
   а) $(257\,368+2573)+(42\,632-1573)$;
   б) $354\cdot73+23\cdot25+354\cdot27+17\cdot25$;
   в) $26\cdot25-25\cdot24+24\cdot23-23\cdot22+22\cdot21-21\cdot20+20\cdot19-19\cdot18+18\cdot17-17\cdot16+16\cdot15-15\cdot14$.
2. $\boxed{7}$ а) Докажите, что выражение $(a+b)x+(a-b)x-2ax$ тождественно равно нулю.
   б) Докажите, что при любых значениях a, x и y верно равенство
   $$(x-y)(x+y)-(a-x+y)(a-x-y)-a(2x-a)=0.$$
3. $\boxed{7}$ Среди перечисленных выражений указать такие, которые:
   а) тождественно равны a^2: $(-a)^2$; $-(-a)^2$; $-a^2$;
   б) тождественно равны a^3: $(-a)^3$; $-(-a)^3$; $-a^3$.
4. $\boxed{6\text{-}7}$ Найдите быстро результат:
   а) $\dfrac{m^2(m+n^2)(m^3-n^6)(m^2-n)}{m^2+n^2}$, где $m=4$, $n=16$;
   б) $a^2(a+b^2)(a^4-b^{10})(a^2-b)$, где $a=5$, $b=25$.

5. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Показать, что пятая степень удвоенной разности чисел x и y на 6 меньше 5, если $x = 0{,}5$; $y = 1$.

   б) Что больше и на сколько: 2 или девятая часть утроенной суммы чисел a и b, если $a = -2$ и $b = 1$?

6. $\boxed{7}$ а) Найти значение выражения

$$81a^7b^5c^3 + 36a^5b^6c^4 - 135a^6b^4c^5$$

   при $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{3}$.

   $\boxed{6\text{-}7}$ б) Вычислить $0{,}001a^3b^2 - 500a^2b^3$, если a равно наибольшему двузначному отрицательному числу, b равно наименьшему целому числу, заключённому между $-2{,}5$ и $-5{,}3$.

7. $\boxed{6\text{-}7}$ 1) Вычислить $\frac{9a^2 - 3a + 1}{27a^3 + 1}$: а) если a равно наибольшему целому отрицательному числу, б) при $a = -\frac{1}{3}$.

   2) Вычислить $\frac{5^3a^5 - 1000a^3 - 8{,}9896}{a^4 - 3a^2 - 4}$ при а) $a = -0{,}2$, б) $a = -2$.

   3) Вычислить $\frac{8x^3 + 62}{4x^2 - 4x + 1}$: а) если x равно наибольшему отрицательному двузначному числу, б) при $x = 0{,}5$.

8. $\boxed{6\text{-}7}$ Написать: 1) полусумму четвёртых степеней чисел a и b и 2) квадрат полусуммы квадратов тех же чисел.
   Установить, числовое значение какого из двух выражений больше, при

   а) $a = -1$, $b = 0{,}5$; б) $a = 0{,}2$, $b = -3$; в) $a = 3$, $b = 0$.

Разложение на множители

9. $\boxed{5}$ Найдите ошибку в следующих рассуждениях. Имеем верное числовое равенство: $4 : 4 = 5 : 5$. Вынесем за скобки в каждой части общий множитель. Получим: $4(1 : 1) = 5(1 : 1)$. Числа в скобках равны, поэтому $4 = 5$, или $2 \cdot 2 = 5$.

10. $\boxed{5}$ Запишите число, состоящее из суммы 11 тысяч, 11 сотен и 11 единиц.

11. $\boxed{7}$ а) При сложении четырёх чисел из-за их нечёткой записи в первом числе в разряде сотен цифра 2 была принята за 5, во втором числе в разряде тысяч цифра 3 была принята за 8, в третьем числе в разряде единиц цифра 9 была принята за 2 и в четвёртом числе в разряде десятков цифра 7 была принята за 4. В результате сложения получили 28 975. Найдите ошибку результата и верную сумму.

    б) При сложении нескольких чисел ученик из-за небрежности допустил ошибки: цифру единиц 9 он принял за 3, цифру сотен 7 он принял за 1, а цифру тысяч 6 он принял за 5. У ученика получилось в сумме 72 438. Найдите верную сумму.

12. $\boxed{5}$ Вычислите $101\,101 \cdot 999 - 101 \cdot 999\,999$.

13. $\boxed{7}$ а) Какое число больше:

$$\underbrace{888\ldots88}_{19\text{ цифр}} \cdot \underbrace{333\ldots33}_{68\text{ цифр}} \quad \text{или} \quad \underbrace{444\ldots44}_{19\text{ цифр}} \cdot \underbrace{666\ldots67}_{68\text{ цифр}}$$

и на сколько?

б) Какое из чисел больше:

$$\underbrace{1000\ldots001}_{1965\text{ нулей}} : \underbrace{1000\ldots001}_{1966\text{ нулей}} \quad \text{или} \quad \underbrace{1000\ldots001}_{1966\text{ нулей}} : \underbrace{1000\ldots001}_{1967\text{ нулей}}\ ?$$

14. $\boxed{7}$ Вычислите $\left(4 \cdot 10^{2011} - 1\right) : (4 \cdot \underbrace{333\ldots33}_{2011\text{ цифр}} + 1)$.

15. $\boxed{7}$ Двоим друзьям потребовалось вычислить $4^2 - 3^2$. Они заметили, что результат — число 7 — равен сумме оснований квадратов чисел 4 и 3. Проверив своё открытие на числах 11 и 10, друзья установили, что оно подтверждается: $11^2 - 10^2 = 21 = 11 + 10$. После этого друзья нашли все пары $(a; b)$ натуральных чисел $a > b$, для которых разность $a^2 - b^2$ равна сумме $a + b$. Как друзьям удалось найти все такие числа $(a; b)$?

16. $\boxed{7}$ Разложите на множители $81a^{20}x^{16} - 16b^8y^{20}$.

17. $\boxed{6\text{-}7}$ Написать частное от деления разности четвёртых степеней чисел x и y на произведение суммы их первых степеней на сумму их квадратов. Вычислить, подставляя числа:
а) $x = -1$; $y = 2$; б) $x = 0$; $y = -0{,}5$; в) $x = -5$; $y = -6$.

18. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Вычислить $8\frac{16}{23}x^2y^3 - 0{,}02x^3y^2$, если x равен наибольшему целому числу, заключённому между числами $-9{,}3$ и $-15{,}1$, а y — наименьшему простому числу в третьем десятке натуральных чисел.

б) Найти число, обратное частному от деления разности квадратов чисел x и y на сумму кубов тех же чисел, если $x = -11$; $y = -1$.

в) Что больше и на сколько: полусумма кубов чисел a и x или куб полусуммы тех же чисел, если a — наименьшее чётное число, заключённое между $-19{,}5$ и $-13{,}5$, а x — наибольшее нечётное отрицательное двузначное число?

19. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Доказать, что числовое значение выражения

$$(x^2 - ax + b)^2 + 2(x^2 - ax + b)(ax - b) + (ax - b)^2$$

не зависит от a и b.

б) Доказать, что числовое значение многочлена

$$(x^3+ax-b)^3-3(x^3+ax-b)^2(ax-b)+3(x^3+ax-b)(ax-b)^2-$$
$$-(ax-b)^3-(x^6+5x^3+25)(x^3-5)$$

постоянно.

Текстовые задачи на вычисления

20. $\boxed{5}$ а) Масса бидона с молоком 32 кг, без молока — 2 кг. Какова масса бидона, заполненного молоком наполовину?

б) У поросят Ниф-Нифа и Нуф-Нуфа было соответственно 4 и 8 одинаковых пирогов. К ним пришёл Наф-Наф и попросил угостить его пирогами. Пироги были разделены поровну. После того как все пироги были съедены, Наф-Наф поблагодарил поросят и дал им 6 рублей. Как разделить эти деньги между Ниф-Нифом и Нуф-Нуфом справедливо?

21. $\boxed{5}$ а) Чашка и блюдце вместе стоят 25 рублей, а 4 чашки и 3 блюдца стоят 88 рублей. Найдите цену чашки и цену блюдца.

$\boxed{7}$ б)★ На свои деньги Петя мог бы купить 8 бубликов и 7 пирожных либо 5 бубликов и 8 пирожных. Сколько он смог бы купить одних бубликов?

22. $\boxed{5}$ а) У щенят и утят вместе 44 ноги и 17 голов. Сколько щенят и сколько утят?

б) На скотном дворе гуляли гуси и поросята. Мальчик сосчитал количество голов, их оказалось 30; затем он сосчитал количество ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на скотном дворе?

23. $\boxed{5}$ а) Было 9 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на три части. Всего стало 15 листов. Сколько листов бумаги разрезали?

б) На озере расцвела 1 лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на 10-й день всё озеро покрылось цветами. На какой день покрылась цветами половина озера?

24. $\boxed{5}$ а) Средний возраст 11 игроков футбольной команды 22 года. Во время матча один из игроков за грубое нарушение правил был удалён с поля до конца игры. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21. Сколько лет футболисту, удалённому с поля?

б) На координатном луче отмечено несколько точек, координаты которых являются натуральными числами. Известно также, что сумма этих чисел равна 75. Если мы каждую точку переместим на три единичных отрезка, то сумма координат новых точек будет равняться 99. Сколько точек было отмечено на координатном луче?

25. $\boxed{5}$ а) На прямой линии посажено 10 кустов так, что расстояние между любыми соседними кустами одно и то же. Найдите это расстояние, если расстояние между крайними кустами равно 90 дм.

б) Победителей олимпиады выстроили в ряд на сцене. Директор школы, поздравляя их, заметил, что пятым справа стоял Коля, выступивший лучше всех. Учитель же математики обратил внимание на то, что Коля стоял девятым слева. Сколько всего учеников стояло на сцене?

в) Во сколько раз лестница с первого этажа на шестнадцатый длиннее лестницы с первого на четвёртый этаж дома?

26. $\boxed{5}$ Гусеница ползёт по стволу яблони. За первый час она поднялась на 10 см, за второй час опустилась на 4 см, за третий час вновь поднялась на 10 см, а за четвёртый опустилась на 4 см. Так она продолжала подниматься и опускаться в течение нескольких часов. На сколько сантиметров поднимется гусеница за 11 ч?

27. $\boxed{5}$ По прямой дороге от деревни А до города М расположены последовательно четыре села: Б, В, Г, Д. Расстояние от А до В равно 15 км, от А до Д — 50 км, от Г до Б — 20 км, от Г до М — 30 км, а от В до Г — на 5 км меньше, чем от Д до Г. Найдите расстояние между каждой парой соседних населённых пунктов и расстояние от деревни А до города М.

28. $\boxed{6}$ а) У фермера было несколько одинакового веса поросят и несколько ягнят также одинакового веса. Мальчик спросил фермера, сколько весит один поросёнок и один ягнёнок. Фермер ответил, что 3 поросёнка и 2 ягнёнка весят 22 кг, а 2 поросёнка и 3 ягнёнка весят 23 кг. Как узнать, сколько весит один поросёнок и сколько весит один ягнёнок?

б) На прокорм 6 лошадей и 40 коров ежедневно отпускают 472 кг сена, а на прокорм 12 лошадей и 37 коров ежедневно отпускают 514 кг сена. Сколько потребуется сена при такой же ежедневной норме на прокорм 30 лошадей и 90 коров с 15 октября по 25 марта включительно? (Год не високосный.)

29. $\boxed{7}$ На пальме сидело много мартышек. Двадцать из них получили по пинку. Пнутая мартышка срывает с пальмы три финика и раздаёт подружкам. Мартышка, получившая два финика, съедает их и пинает другую мартышку. После того как произошло 30 новых пинков, мартышки успокоились. Сколько фиников осталось у мартышек?

30. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Пять участников олимпиады стали её победителями, набрав по 15, 14 и 13 баллов и заняв соответственно первое, второе и третье места. Сколько участников заняли каждое призовое место, если вместе они набрали 69 баллов?

$\boxed{7}$ б) В классе 25 учеников, а сумма их возрастов составляет 270 лет. Найдутся ли в классе 20 учащихся, сумма возрастов которых больше 260?

31. $\boxed{6}$ а) Пятизначное число A записывается только двойками и тройками, а пятизначное число B — только тройками и четвёрками. Может ли произведение AB записываться одними двойками? Не забудьте обосновать свой ответ.

б)★ Пятизначное число A записывается только двойками и единицами, а пятизначное число B — только тройками и двойками. Может ли произведение AB записываться одними шестёрками? Не забудьте обосновать свой ответ.

32. $\boxed{7}$ На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый Толстый солдат выстрелил в одного из Тонких; затем каждый уцелевший Тонкий солдат выстрелил в одного из Толстых. После этого каждый уцелевший Толстый ещё раз выстрелил в одного из Тонких. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.

33. $\boxed{7}$ а) Гриб называют плохим, если в нём больше 11 червяков. Червяка называют тощим, если он съел не более $\frac{1}{5}$ гриба, в котором живёт. Четверть всех грибов в лесу — плохие. Докажите, что не менее трети всех червяков — тощие.

б) Гриб называют плохим, если в нём больше 15 червяков. Червяка называют тощим, если он съел не более $\frac{1}{7}$ гриба, в котором живёт. Одна пятая часть всех грибов в лесу — плохие. Докажите, что не менее четверти всех червяков — тощие.

Задачи с дробями

34. $\boxed{7}$ а) Сократите дробь $\dfrac{5^{21}+5^{21}+5^{21}+5^{21}+5^{21}}{5^{24}}$.

б) Вычислите $\dfrac{4^6\cdot 9^5+6^9\cdot 120}{8^4\cdot 3^{12}-6^{11}}$.

в) Вычислите значение выражения: $\dfrac{27^3\cdot 4^5}{6^8}-\dfrac{5^5\cdot 2^4}{10^4}-\dfrac{2^6\cdot 3^4}{6^4}$.

35. $\boxed{7}$ Дана пропорция $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

а) Докажите, что верна пропорция $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$.

б) Верно ли, что также верна и пропорция $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$?

36. $\boxed{6}$ Делимое разделили на удвоенный делитель и получили 13,375. Когда же делимое разделили на удвоенное частное, то получили 4. Найти делимое и делитель.

37. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Вычислить $\frac{5}{6}+6\frac{5}{6}\cdot\left(11\frac{94}{1591}-6\frac{38}{1517}\right):8\frac{11}{43}$.

б) Вычислить $1\frac{1}{6}+6\frac{5}{6}\cdot\left(10\frac{133}{2173}-5\frac{23}{1643}\right):41\frac{12}{31}$.

в) Вычислить

$$\left(2\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(1\frac{3}{4}+\frac{17:3125}{8:6250}\right)\right):\left(\left(2\frac{31}{42}+1\frac{5}{16}\right)\cdot6\frac{3}{43}+5\frac{40}{43}\right).$$

38. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Вычислить

$$15\frac{120}{187}-5\frac{120}{143}-\frac{200}{2431}+\left(37\frac{11}{29}-37\frac{11}{29}\right):2\frac{13}{47}\cdot100+50:21\frac{152}{163}.$$

б) Вычислить

$$2\frac{16}{143}-1\frac{131}{132}+2\frac{11}{13}:2\frac{2}{5}+18\frac{13}{17}\cdot\left(15\frac{3}{37}-15\frac{3}{37}\right):14\frac{15}{31}+8\frac{298}{429}.$$

в) Вычислить $\left(17\frac{3535}{88\,375}-16\frac{1001}{1365}\right)\cdot3\frac{6}{23}+3\frac{6}{23}:\left(5-1\frac{187}{253}\right)$.

г) Вычислить $\left(13\frac{6105}{11\,211}-12\frac{9919}{18\,382}\right):1\frac{5}{1010}-2\frac{6}{17}\cdot\left(8-7\frac{2323}{4040}\right)$.

39. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Быстро вычислить $\dfrac{254\cdot399-145}{254+399\cdot253}$.

б) Быстро вычислить $\dfrac{5932\cdot6001-69}{5932+6001\cdot5931}$.

в) Быстро вычислить $\dfrac{423\,134\cdot846\,267-423\,133}{423\,133\cdot846\,267+423\,134}$.

40. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Быстро вычислить $333\cdot\left(\frac{71}{111\,111}+\frac{573}{222\,222}-\frac{2}{3\cdot7\cdot37}\right)$.

б) Вычислите

$$\frac{666\,666\cdot666\,666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}-\frac{777\,777\cdot777\,777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}.$$

41. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Быстро вычислить

$$182\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}{2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}}:\frac{4-\frac{4}{7}+\frac{4}{49}-\frac{4}{343}}{1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-\frac{1}{343}}\right)\cdot\frac{80\,808\,080}{91\,919\,191}.$$

б) Быстро вычислить

$$158\cdot\left(\frac{12-\frac{12}{7}-\frac{12}{289}-\frac{12}{85}}{4-\frac{4}{7}-\frac{4}{289}-\frac{4}{85}}:\frac{5+\frac{5}{13}+\frac{5}{169}+\frac{5}{91}}{6+\frac{6}{13}+\frac{6}{169}+\frac{6}{91}}\right)\cdot\frac{505\,505\,505}{711\,711\,711}.$$

42. $\boxed{6\text{-}7}$ Выполните действия: $15{,}81:(24-23{,}66)-18:37{,}5$.

43. $\boxed{6\text{-}7}$ Найдите наиболее рациональным способом значение выражения:

а) $25-\frac{3}{7}\cdot7+\left(12\frac{23}{25}-4\frac{2}{5}\right)\cdot25+125\cdot357\cdot0{,}008$;

б) $25\frac{3}{7}\cdot7+\left(12\frac{23}{25}-4\frac{2}{5}\right)\cdot25+125\cdot357\cdot0{,}008$;

в) $16{,}4 \cdot 25 - \frac{5}{8} \cdot \left(-9\frac{3}{5}\right) - (-2{,}5) \cdot 15{,}6 - 9{,}6 \cdot \frac{5}{8}$;

г) $32 \cdot 0{,}99 \cdot 25 \cdot 1{,}25 + 57 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25 \cdot \frac{4}{19}$.

44. $\boxed{6\text{-}7}$ Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{810}{162} + \frac{675}{225}\right) \cdot \left(\frac{810}{162} - \frac{675}{225}\right)$;

б) $\left(\frac{1648}{1751} + \frac{131\,313}{686\,868}\right) \cdot \left(\frac{131\,313}{686\,868} - \frac{1648}{1751}\right)$;

в) $\left(\frac{1284}{1391} + \frac{212\,121}{656\,565}\right) \cdot \left(\frac{212\,121}{656\,565} - \frac{1284}{1391}\right)$.

45. $\boxed{6\text{-}7}$ Вычислить:

а) $\left(27^{10} - 5 \cdot 81^4 \cdot 3^{12} + 4 \cdot 9^8 \cdot 3^8\right) : \left(41 \cdot 3^{24}\right)$;

б) $\left(10^{12} + 5^{11} \cdot 2^9 - 5^{13} \cdot 2^8\right) : \left(4 \cdot 5^5 \cdot 10^6\right)$;

в) $\left(12 \cdot 5^{2n+1} - 8 \cdot 5^{2n} + 4 \cdot 5^{2n-1}\right) : \left(4 \cdot 5^{2n-2}\right)$;

г) $\left(36 \cdot 18^n - 8 \cdot 2^{n-1} \cdot 9^n - 3^{n+1} \cdot 6^{n+1}\right) : 18^{n-1}$.

46. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Быстро вычислить

$$\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 15} + \\ + \frac{1}{15 \cdot 16} + \frac{1}{16 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 18} + \frac{1}{18 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 20}.$$

б) Быстро вычислить $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132}$.

в) Быстро вычислить $\frac{4}{5 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 11} + \frac{4}{11 \cdot 13} + \ldots + \frac{4}{59 \cdot 61}$.

г)★ Быстро вычислить $\frac{7^2}{2 \cdot 9} + \frac{7^2}{9 \cdot 16} + \frac{7^2}{16 \cdot 23} + \ldots + \frac{7^2}{65 \cdot 72}$.

2. Метрическая система мер

Теоретический материал

Для успешного решения задач на площади и объёмы необходимо вспомнить соотношения между метрическими величинами:

1 км = 1000 м; 1 м = 10 дм = 100 см = 1000 мм;

1 дм = 10 см; 1 см = 10 мм;

1 га = 10 000 м^2; 1 м^3 = 1000 л; 1 л = 1 дм^3 = 1000 см^3.

Также пригодятся следующие формулы.

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину.

Периметр прямоугольника равен сумме всех его сторон или удвоенной сумме его длины и ширины.

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению его ширины на длину и на высоту.

Для решения задач на календари необходимо помнить, сколько дней в каждом месяце года:

31 день — в январе, марте, мае, июле, августе, октябре и декабре;

30 дней — в апреле, июне, сентябре и ноябре;

в феврале 28 дней в не високосные годы и 29 дней в високосные годы.

В не високосном году 365 дней; в високосном году 366 дней.

Для решения задач с часами необходимо помнить, что в сутках 24 часа, в часе 60 минут, а в минуте 60 секунд.

Примеры решения задач

Пример 1. Длина ребра прямоугольного параллелепипеда 1 м, ширина — полметра, высота — 40 см. Его разрезали на кубики, длина ребра каждого из которых равна 2 мм. Кубики затем уложили в один сплошной ряд. Чему равна его длина?

Решение. По длине параллелепипеда уложится 500 таких кубиков, по ширине — 250, а по высоте — 200. Значит, всего получится $500 \cdot 250 \cdot 200 = 25\,000\,000$ кубиков. Если их выложить в один сплошной ряд, то получится ряд длиной $2 \cdot 25\,000\,000 = 50\,000\,000$ мм, что равно 50 000 метров, т. е. 50 км.
Ответ. 50 км.

Пример 2. За июль выпало 75 мм осадков. Сколько стоила бы искусственная поливка таким количеством воды поля в 800 га, если стоимость 1 л при искусственной поливке равна 0,001 коп.?

Решение. Посчитаем объём выпавших осадков:

$$V = 800\,\text{га} \cdot 75\,\text{мм} = 800 \cdot 10\,000 \cdot 75 \cdot 10^{-3}\text{м}^3 = 600\,000\,\text{м}^3.$$

Так как в одном кубометре содержится 1000 литров, то стоимость искусственной поливки 1 м^3 равна 1 коп. Значит, всего потребовалось бы 6 тыс. руб.
Ответ. 6 тыс. руб.

Пример 3. В июне три субботы пришлись на нечётные числа. Какой день недели был 17 числа этого месяца?

Решение. Поскольку в неделе 7 дней, то если на какой-то неделе суббота пришлась на нечётное число, то на следующей неделе суббота обязательно попадёт на чётное число, и наоборот.

Так как в июне 30 дней и от первой до пятой субботы 29 дней (включая первую и пятую субботу), то суббот в одном месяце не может быть более пяти (заметим, кстати, что менее четырёх суббот в месяце тоже быть не может).

Поэтому первая суббота в июне пришлась на нечётное число, причём это число 1-е, тогда третья нечётная суббота (она же пятая суббота месяца) попадает на 29-е число, а значит, первая суббота не может приходиться на 3 июня (иначе пятая суббота пришлась бы на 31 июня, которого нет).

Таким образом, 1 июня — суббота. Значит, 17 июня — понедельник.

Ответ. Понедельник.

Пример 4. Электронные часы показывают время от 00:00:00 до 23:59:59. Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно пять цифр 5?

Решение. Если на табло горят цифры ab:cd:mn, то $a \neq 5$, так как $a \leqslant 2$. Поэтому $b = c = d = m = n = 5$. Но тогда $a = 0$ или $a = 1$. Всего получается 2 подходящих набора цифр, каждый набор горит ровно 1 секунду.

Ответ. 2 секунды.

Пример 5. Найдите угол между часовой и минутной стрелками в 8 ч 42 мин.

Решение. За 1 час минутная стрелка проходит полный круг (360°), а часовая за это время проходит в 12 раз меньше — 30°. Значит, в 8 ч 00 мин минутная стрелка будет отставать от часовой на 240°. За 42 минуты минутная стрелка повернётся на угол $\frac{42}{60} \cdot 360^\circ = 252^\circ$, а часовая — на угол в 12 раз меньше, т. е. на 21°. Тогда в 8 ч 42 мин угол между ними будет $240^\circ + 21^\circ - 252^\circ = 9^\circ$.

Ответ. 9°.

Задачи

Периметр, площадь, объём

1. $\boxed{5}$ а) У Ивана имеется деревянный параллелепипед с измерениями 6, 12 и 18 см. Он распиливает его на кубики с ребром 1 см и ставит их один на другой. Сможет ли Иван достроить вышку из этих кубиков, если он даже заберётся на трёхметровую лестницу?

   б) Космические корабли-спутники летают на высоте до 300 км. Хватит ли кубиков объёмом 1 куб. мм, содержащихся в 1 куб. м, чтобы сложить из них башню такой высоты?

2. $\boxed{6}$ а) Длина ребра куба полметра. Этот куб разрезали на кубики, длина ребра каждого из которых равна 2 мм. Кубики затем уложили в один сплошной ряд. Чему равна его длина?

   б) Ребро куба равно 2 дм. Этот куб разрезали на кубические миллиметры, а затем выложили их в один сплошной ряд. Какой длины получился этот ряд?

3. $\boxed{5}$ Найдите площадь прямоугольника, если его длина на 5 см больше ширины, а половина периметра равна 19 см.

4. $\boxed{5}$ Из трёх одинаковых кубов с ребром 8 см составили прямоугольный параллелепипед. Найдите его объём и площадь поверхности.

5. $\boxed{5}$ Сколько сантиметров проволоки потребуется для изготовления каркаса куба с ребром 6 см?

6. $\boxed{6}$ Когда Гулливер попал в Лилипутию, то обнаружил, что там всё ровно в 12 раз короче, чем на его родине. Сможете ли вы сказать, сколько лилипутских спичечных коробков помещается в спичечной коробке Гулливера?

7. $\boxed{6}$ а) Медный кубик, ребро которого 0,5 см, весит 1,1 г. Сколько весит медный куб, ребро которого равно 800 мм? (Ответ округлить до 0,1 т.)

   б) Из соснового дерева сделан кубик весом 8 г. Ребро кубика равно 2,5 см. Какой объём занимают 4,8 т соснового дерева? (Ответ округлить до 0,1 куб. м.)

8. $\boxed{6}$ В летний дождь выпало 5 мм осадков. Сколько стоила бы искусственная поливка таким количеством воды поля в 725 га, если стоимость 1 л при искусственной поливке равна 0,0005 коп.?

9. $\boxed{6}$ Тюк прессованного сена имеет длину 86 см, ширину 4 дм и высоту 35 см. Какая часть грузоподъёмности 50-тонного железнодорожного вагона используется при погрузке сена, если в него вмещается 650 тюков и если 1 куб. м прессованного сена весит 3,5 ц? (Ответ дать с точностью до 0,01.)

10. $\boxed{6}$ Посчитано, что 1 кв. м овсяного поля в течение лета испаряет около 240 л воды. Сколько это составляет кубических метров на 1 га? Сколько времени могла бы течь эта вода по 1 л в секунду?

11. $\boxed{6}$ Средний вес дождевой капли $\frac{1}{12}$ г. Определить число капель дождя, упавших на 1 кв. м земли, если дождь дал слой воды толщиной 2,2 мм.

Календарь

12. $\boxed{5}$ Парусник отправляется в плавание в понедельник в полдень. Плавание будет продолжаться 100 часов. Назовите день и час его возвращения в порт.

13. $\boxed{5}$ Петя сказал друзьям: «Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году исполнится 13». Мог ли Петя не соврать?

14. $\boxed{5}$ В феврале 2000 года 2 февраля было средой. Сколько вторников было в феврале 2000 года?

15. $\boxed{5\text{-}7}$ а) В некотором месяце три воскресенья пришлись на чётные числа. Каким днём недели было 20-е число этого месяца?

[7] б) В некотором месяце три четверга пришлись на чётные числа. Каким днём недели было 26-е число этого месяца?

16. [6] В некотором месяце понедельников больше, чем вторников, а воскресений больше, чем суббот. Какой день недели был 5-го числа этого месяца? Мог ли этот месяц быть декабрём?

17. [6] Известно, что в Московской области землетрясения происходят через равные промежутки времени (не обязательно через целое количество дней). Может ли быть так, что первое землетрясение в этом тысячелетии произошло в понедельник, второе — во вторник, а четвёртое — в воскресенье?

18. [7] В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идёт число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана?

Часы

19. [6] Когда магазин открыт, над его входом включено табло, которое показывает время в часах, минутах и секундах (от 11:00:00 до 18:59:59, перерыва на обед нет). Какого времени больше за день — такого, когда число часов на табло больше, чем число секунд, или такого, когда число секунд больше, чем число часов? Не забудьте обосновать ответ.

20. [6] а) Электронные часы показывают время от 00:00:00 до 23:59:59. Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно три цифры 7?

[7] б) Электронные часы показывают время от 00:00:00 до 23:59:59. Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно четыре цифры 3?

21. [6] а) Определите, чему равен угол между часовой и минутной стрелками часов в 23 ч 45 мин.

[7] б) Найдите угол между часовой и минутной стрелками в 7 ч 38 мин.

22. [6-7] а) Часы показывают час дня. Найти ближайший момент времени, когда часовая и минутная стрелки совпадут.

б) Найти ближайший после 12 часов момент времени, при котором стрелки часов взаимно перпендикулярны.

23. [6-7] Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки а) совпадают; б) составляют развёрнутый угол; в) составляют прямой угол?

24. [7] Сколько раз в сутки совпадают все три стрелки на часах, включая секундную?

3. Задачи на части

Теоретический материал

При решении задач этого раздела вам пригодится умение работать с дробями и понимание того, что такое целое и часть целого.

Хотя большинство задач данного раздела можно решить с помощью уравнений или систем уравнений, настоятельно рекомендуем решать задачи без их применения. Внимательно разберите примеры.

Примеры решения задач

Пример 1. Сыну столько месяцев, сколько лет папе. Вместе им 39 лет. Сколько лет папе и сколько лет сыну?

Решение. Так как в году 12 месяцев, то папа в 12 раз старше сына. Значит, возраст сына составляет $\frac{1}{13}$ часть их суммарного возраста, т. е. сыну 3 года, а папе 36 лет.
Ответ. 36 и 3.

Пример 2. Возвращаясь домой из Москвы на поезде, пассажир по рассеянности проехал свою станцию, а когда сошёл на следующей, то рассчитал, что поезду осталось пройти $\frac{13}{24}$ всего своего маршрута, а ему придётся проехать обратно до своей станции 14 км. Какова длина всего маршрута, если станция, на которой жил пассажир, удалена от Москвы на расстояние $\frac{1}{3}$ всего маршрута?

Решение. С одной стороны, между станцией, на которой должен был сойти пассажир, и следующей станцией 14 км. С другой стороны, это расстояние составляет

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{13}{24} = \frac{1}{8}$$

часть всего маршрута поезда. Значит, весь маршрут составляет $14 \cdot 8 = 112$ км.
Ответ. 112 км.

Пример 3. Сумма двух чисел равна 280, частное от деления большего числа на меньшее равно 6. Найти эти числа.

Решение. Примем меньшее число за одну часть, тогда большее составит 6 частей. Значит, сумма этих чисел составит 7 частей, которые равны 280. Поэтому меньшее число равно 40, а большее — 240.
Ответ. 40 и 240.

Пример 4. Одно число больше другого на 14. Найти эти числа, если $\frac{5}{16}$ одного числа равны $\frac{3}{8}$ другого.

Решение. Поскольку $\frac{5}{16}$ первого числа равны $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ второго, то первое число в $\frac{6}{16} : \frac{5}{16} = \frac{6}{5}$ раз больше второго числа. Обозначим второе число за единицу. Тогда $\frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$ часть второго числа равна 14, т. е. второе число равно $14 \cdot 5 = 70$. Значит, первое число равно $70 + 14 = 84$.
Ответ. 84 и 70.

Задачи

Сюжетные задачи

1. $\boxed{6}$ а) В лесу, состоящем из дубов и ёлок, компания «Пень-Инвест» вырубила одну треть всех дубов и одну шестую всех ёлок. Докажите, что отчёт экологической организации, утверждающей, что была вырублена половина всех деревьев, содержит неверные данные.

   б) В лесу, состоящем из берёз и тополей, компания «Пень-Инвест» вырубила $\frac{1}{12}$ всех берёз и $\frac{1}{4}$ всех тополей. Докажите, что отчёт экологической организации, утверждающей, что была вырублена треть всех деревьев, содержит неверные данные.
2. $\boxed{5}$ Попрыгунья Стрекоза половину времени каждых суток красного лета спала, третью часть времени каждых суток танцевала, шестую часть — пела. Сколько часов в сутки Стрекоза готовилась к зиме?
3. $\boxed{5}$ Когда велосипедист проехал $\frac{2}{3}$ пути, лопнула шина. На остальной путь пешком он затратил вдвое больше времени, чем на велосипедную езду. Во сколько раз велосипедист ехал быстрее, чем шёл?
4. $\boxed{5}$ Внучке столько месяцев, сколько лет дедушке. Вместе им 91 год. Сколько лет дедушке и сколько лет внучке?
5. $\boxed{5}$ Старший брат идёт от школы до дома 30 минут, а младший — 40 минут. Через какое время старший брат догонит младшего, если тот вышел из школы на 5 минут раньше?
6. $\boxed{5}$ Винни-Пуху подарили на день рождения бочонок с мёдом массой 7 кг. Когда Винни-Пух съел половину мёда, бочонок с оставшимся мёдом стал иметь массу 4 кг. Сколько килограммов мёда было первоначально в бочонке?
7. $\boxed{5}$ Говорил дед внукам: «Вот вам 130 орехов, разделите их на 2 части так, чтобы меньшая часть, увеличенная в 4 ра-

за, равнялась бы большей части, уменьшенной в 3 раза». Как разделить орехи?

8. [5-6] В классе число отсутствующих учеников составляет $\frac{1}{6}$ часть от числа присутствующих. После того как из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно $\frac{1}{5}$ числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

9. [5-7] Четверо товарищей купили вместе лодку. Первый внёс половину суммы, вносимой остальными, второй — треть суммы, вносимой остальными, третий — четверть суммы, вносимой остальными, а четвёртый внёс 130 рублей. Сколько стоит лодка и сколько внёс каждый?

10. [5-7] Как от куска материи в $\frac{2}{3}$ метра отрезать полметра, не имея под руками метра?

11. [6] Один купец прошёл через три города, и взыскали с него в первом городе пошлины половину и треть имущества и во втором городе — половину и треть (с того, что осталось), и в третьем городе снова взыскали половину и треть (с того, что у него было). Когда он прибыл домой, у него осталось имущества на 1000 денежных единиц. Какова была стоимость имущества у купца вначале?

12. [6] *Древнегреческая задача.* — Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы? — Вот сколько, — ответил Пифагор, — половина изучает математику, четверть — природу, седьмая часть проводит время в размышлении, и, кроме того, есть ещё три женщины.
Сколько всего учеников посещают школу Пифагора?

13. [6] Разделите семь яблок поровну на 12 человек, не разрезая яблоки более чем на 4 части.

14. [6] а) Проехав половину всего пути, пассажир лёг спать и спал до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, который он проспал. Какую часть всего пути пассажир проехал бодрствующим?

б) Велосипедист проехал $\frac{5}{7}$ пути и ещё 40 км, и ему осталось 0,75 пути без 118 км. Как велик его путь?

15. [6] 12 человек несут 12 буханок хлеба. Каждый мужчина несёт по 2 буханки хлеба, женщина — по $\frac{1}{2}$ буханки, а ребёнок — по $\frac{1}{4}$ буханки. Сколько было мужчин, женщин и детей?

16. [5-7] Отцу столько лет, сколько сыну и дочери вместе; сын вдвое старше сестры и на 20 лет моложе отца. Сколько лет каждому?

17. $\boxed{7}$ За весну пёс Аргус потерял $\frac{1}{4}$ своего веса. Затем за лето прибавил в весе $\frac{1}{5}$ часть. За осень похудел на $\frac{1}{10}$ веса, а за зиму прибавил $\frac{1}{5}$ веса. Похудел или поправился Аргус за прошедший год?

18. $\boxed{7}$ Вася в течение суток тратит $\frac{1}{3}$ часть своего времени на сон, $\frac{1}{4}$ на занятия в школе, $\frac{1}{5}$ на встречи с друзьями, $\frac{1}{6}$ своего времени слушает музыку, $\frac{1}{7}$ играет на компьютере. Можно ли так жить, занимаясь каждым из перечисленных дел отдельно?

19. $\boxed{7}$ Двум братьям вместе 35 лет. Сколько лет каждому, если половина лет одного равна трети лет другого?

20. $\boxed{7}$ Молодой рыбак положил в уху мало соли. Если бы он положил в уху соли вдвое больше, то досаливать пришлось бы вдвое меньше. Какую долю от нужного количества соли положил в уху рыбак?

21. $\boxed{7}$ Школа-интернат купила 675 метров красного, синего и чёрного полотна для пошива пальто. Когда на пошив детских пальто израсходовали $\frac{1}{2}$ количества красного полотна, $\frac{2}{3}$ синего и $\frac{3}{4}$ чёрного, то осталось полотна каждого цвета поровну. Сколько метров полотна каждого цвета было куплено?

Найти числа

22. $\boxed{5\text{-}7}$ а) Сумма двух чисел равна 180, частное от деления большего числа на меньшее равно 5. Найти эти числа.

б) Сумма двух чисел равна 495. Одно из чисел оканчивается нулём. Если этот нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найти эти числа.

23. $\boxed{6}$ а) Среднее арифметическое двух чисел равно 10,01. Найти каждое из них, если одно в 5,5 раза меньше другого.

б) Сумма двух чисел равна 0,25. Частное тех же чисел также равно 0,25. Найти эти числа.

в) Найти два числа, если их сумма равна 10,5 и частное от деления одного из них на другое равно 10,5.

24. $\boxed{6}$ а) Разность двух чисел равна 0,6. Частное от деления меньшего на большее также равно 0,6. Найти эти числа.

б) Найти два положительных числа по таким данным: их разность равна 0,125 и частное при делении меньшего числа на большее равно 0,125.

25. [6-7] Найти частное двух чисел, если оно в два раза меньше одного из них и в шесть раз больше другого.

26. [7] Число 56 разложите на два слагаемых так, чтобы $\frac{1}{3}$ первого слагаемого была равна $\frac{1}{4}$ второго.

27. [6] а) Разность двух чисел равна 0,7. Если большее из них увеличить в 5 раз, а меньшее оставить без изменений, то разность будет 75,1. Найти эти числа.

б) Разность двух чисел равна $44\frac{1}{2}$. Если меньшее из них увеличить в 7 раз, то разность будет $10\frac{3}{14}$. Найти эти числа.

28. [6-7] а) Одно число больше другого на 16. Найти эти числа, если $\frac{5}{32}$ одного числа равны $\frac{3}{16}$ другого.

б) Найти два числа, если известно, что $\frac{5}{8}$ одного равны $\frac{3}{4}$ другого, и если одно больше другого на 12.

в) Найти два числа, если $\frac{9}{11}$ одного равны $\frac{6}{7}$ другого и если их сумма равна 172.

29. [6-7] а) Сумма трёх чисел равна 136,5. Если первое число умножить на 8, второе — на 4, третье — на 6, то полученные произведения окажутся равными. Найти эти числа.

б) Самое большое из трёх чисел больше самого малого на 2,4. Если одно из них умножить на 12, другое — на 15 и третье — на 10, то полученные произведения окажутся равными. Найти эти числа.

30. [6-7] а) Сумма трёх чисел равна 254,772. Если в одном из чисел перенести запятую на две цифры вправо, то получится большее из чисел, а если перенести в том же числе запятую влево на одну цифру, то получится меньшее из чисел. Найти эти числа.

б) Сумма трёх чисел равна 3898,32. Если в одном из чисел перенести запятую вправо на одну цифру, то получится большее из чисел, а если перенести в том же числе запятую влево на одну цифру, то получится меньшее из чисел. Найти эти числа.

31. [6] Сумма двух чисел равна 37,75. Если первое слагаемое увеличить в 5 раз, а второе — в 3 раза, то новая сумма окажется равной 154,25. Найти эти числа.

32. [6] а) Сумма числителя и знаменателя дроби равна 4140. После сокращения получилось $\frac{7}{13}$. Какова была дробь до сокращения?

б) Знаменатель дроби на 3521 больше числителя. После сокращения дроби получилось $\frac{4}{11}$. Какова была дробь до сокращения?

33. $\boxed{6}$ а) Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\frac{52\,367}{47\,633}$ и прибавить к знаменателю этой дроби, чтобы после сокращения получить $\frac{17}{83}$?

$\boxed{6}$ б) Дана дробь $\frac{14\,157}{117\,843}$. Какое число нужно вычесть из знаменателя дроби и прибавить к числителю этой дроби, чтобы после сокращения получить $1\frac{1}{5}$?

$\boxed{5\text{-}7}$ в) Найти два таких числа, что их сумма втрое больше их разности и вдвое меньше их произведения.

4. Задачи на работу

Теоретический материал

В задачах на работу, по сути, необходимо знать и уметь применять только одну формулу:

$$\text{работа} = \text{производительность} \cdot \text{время},$$

или в буквенном виде

$$A = p \cdot t,$$

и два следствия из неё:

$$t = \frac{A}{p} \quad \text{и} \quad p = \frac{A}{t}.$$

При совместной работе производительности работающих складываются.

Продолжаем бороться с задачами без составления уравнений.

Примеры решения задач

Пример 1. Одна труба наполняет бассейн за 3 ч, а другая — за 5 ч. За какое время наполнят бассейн обе трубы?

Решение. Производительность первой трубы $\frac{1}{3}$ бассейна в час, а второй — $\frac{1}{5}$ бассейна в час. Тогда производительность обеих труб равна $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$. Поэтому обе трубы наполнят бассейн за $1 : \frac{8}{15} = 1\frac{7}{8}$ часа.

Ответ. $1\frac{7}{8}$ часа.

Пример 2. 8 малых грузовиков могут перевезти некоторый груз за 12 дней, а 5 больших могли бы перевезти тот же груз за 8 дней. За какое время 12 малых и 4 больших грузовика, работая одновременно, могли бы перевезти другой груз, который в четыре с половиной раза больше первого?

Решение. Обозначим буквой V весь груз. Тогда производительность малого грузовика равна $\frac{V}{8 \cdot 12} = \frac{V}{96}$, а большого — $\frac{V}{5 \cdot 8} = \frac{V}{40}$. Значит, производительность 12 малых и 4 больших грузовиков равна

$$12 \cdot \frac{V}{96} + 4 \cdot \frac{V}{40} = \frac{V}{8} + \frac{V}{10} = \frac{9V}{40}\ .$$

Следовательно, груз, который в четыре с половиной раза больше первого, они перевезут за $4{,}5V : \frac{9V}{40} = 20$ дней.

Ответ. За 20 дней.

Задачи

1. [5] Для того чтобы разрезать металлическую балку на две части, нужно уплатить за работу 5 рублей. Сколько будет стоить работа, если балку нужно разрезать на 10 частей?
2. [5-7] Трактористы вспахали поле за три дня. В первый день они вспахали $\frac{3}{7}$ всего поля, во второй день — 40% поля, а в третий день — остальные 72 га. Найдите площадь поля.
3. [5] Король нанял 2 рабочих для рытья подземного хода из своего дворца. Один рабочий за 1 ч может прокопать вдвое больше, чем другой, а платит им король каждому одинаково за каждый час работы. Что обойдётся дешевле — совместная работа землекопов с 2 сторон до встречи или поочерёдное рытьё половины подземного хода каждым из землекопов?
4. [5] Малыш может съесть 600 г варенья за 6 мин, а Карлсон — в 2 раза быстрее. За какое время они съедят это варенье вместе?
5. [5-7] Один фонтан наполняет бассейн за 2,5 ч, а другой — за 3,75 ч. За какое время наполнят бассейн оба фонтана?
6. [6] Лошадь может съесть воз сена за 1 месяц, коза — за 2 месяца, а овца — за 3 месяца. За какое время лошадь, коза и овца вместе съедят такой же воз сена?
7. [6] Один рабочий может выполнить работу за 4 ч, а другой — за 6 ч. Сколько времени должен работать третий рабочий, если его производительность равна средней производительности первых двух?

8. $\boxed{6\text{-}7}$ Одна машинистка может перепечатать некоторую рукопись за 5 ч 20 мин, а другая — за 4 ч 40 мин. Однажды, работая вместе, они напечатали 90 страниц. Сколько страниц напечатала каждая машинистка?

9. $\boxed{6}$ Для наполнения водного бассейна устроено два водопроводных крана, из которых первый, действуя один, мог бы наполнить бассейн за 4 ч 30 мин, а второй — за 6 ч 45 мин. Сначала был открыт только первый кран на то время, в течение которого оба крана могли бы наполнить бассейн. После этого, не закрывая первый кран, открыли второй кран. Через сколько времени после открытия второго крана наполнился бассейн?

10. $\boxed{6}$ Чтобы выкачать из цистерны нефть, поставили два насоса различной мощности. Если бы действовали оба насоса, то цистерна оказалась бы пустой через 12 мин. Оба действовали вместе в течение 4 мин, после чего работал только второй насос, который через 24 мин выкачал всю оставшуюся нефть. За сколько минут каждый насос, действуя отдельно, мог бы выкачать всю нефть из цистерны?

11. $\boxed{6}$ Плавательный бассейн наполняется двумя трубами за 48 мин, если открыть сразу две трубы. Через одну трубу бассейн может наполниться за 2 ч. Найти объём бассейна, если известно, что за 1 мин через вторую трубу поступает воды на 50 куб. м больше, чем через первую.

12. $\boxed{6}$ Работа была поручена двум рабочим. Первый рабочий может выполнить эту работу за $\frac{2}{5}$ ч. Сначала работал первый рабочий, а через 8 мин 40 с приступил к работе второй; после этого через $\frac{11}{90}$ ч работа была выполнена. За сколько минут один второй рабочий может выполнить эту работу?

13. $\boxed{6}$ Чтобы наполнить ванну вместимостью 166 л за 22 мин, сначала открыли кран с горячей водой, через который в 1 мин вливается 6,75 л. Затем этот кран закрыли и открыли кран с холодной водой, через который в 1 мин вливается 8,5 л. Сколько времени был открыт каждый кран?

14. $\boxed{6\text{-}7}$ Один рабочий может выполнить заказ за 6 дней, а другой — за 15 дней. Сначала работал первый рабочий, а затем второй закончил работу. Заказ был выполнен за 9 дней. Сколько деталей было изготовлено, если первый сделал на 150 деталей больше, чем второй?

15. $\boxed{6\text{-}7}$ 15 рабочих первой бригады могут построить деревянный дом за 18 дней, 20 рабочих второй бригады — за 12 дней, 30 рабочих третьей бригады могли бы построить тот же дом за столько дней, за сколько дней его построили бы 3 рабочих первой и 24 рабочих второй бригад, работая вместе. Для по-

стройки были приглашены 12 рабочих первой бригады, 16 рабочих второй бригады и 15 рабочих третьей бригады, которые работали вместе до окончания работы. За работу они получили 2970 руб. Сколько дней продолжалась постройка дома и сколько денег получил каждый рабочий?

16. $\boxed{6\text{-}7}$ 7 лёгких тракторов могут вспахать некоторое поле за 10 дней, а 4 гусеничных могли бы вспахать то же поле за 7 дней. За какое время 8 лёгких и 5 гусеничных тракторов, работая одновременно, могли бы вспахать другое поле, площадь которого относится к площади первого как 41 : 12?

17. $\boxed{6\text{-}7}$ Два насоса при одновременной совместной работе могут выкачать воду из котлована за 12 ч. Производительность одного насоса в полтора раза меньше производительности другого. За сколько часов была бы выкачана вода из этого котлована, если бы сначала половину всей воды выкачал первый насос, а затем второй — остальную воду?

5. Задачи на движение

Теоретический материал

В задачах на движение, по сути, необходимо знать и уметь применять только одну формулу:

$$\text{расстояние} = \text{скорость} \cdot \text{время},$$

или в буквенном виде

$$S = v \cdot t,$$

и два следствия из неё: $t = \dfrac{S}{v}$ и $v = \dfrac{S}{t}$.

При движении навстречу скорость сближения равна сумме скоростей сближающихся объектов. Если одно движущееся средство догоняет другое, то скорость сближения равна разности скоростей.

При движении по реке лодки (катера и т. п.) её скорость равна собственной скорости, сложенной со скоростью течения реки, а при движении против течения реки скорость течения вычитается из собственной скорости. В задачах считается, что плот плывёт по реке со скоростью течения реки.

Средняя скорость движения на всём пути *не* равна среднему арифметическому скоростей на отдельных участках этого пути. Она рассчитывается по основной формуле, т. е.

$$\text{средняя скорость на всём пути} = \frac{\text{весь путь}}{\text{всё время в пути}}.$$

Напоминаем, что при решении задач этого раздела не надо составлять уравнения. Попытайтесь решать задачи без составления уравнений, хотя это иногда и сложнее, чем решить те же задачи с помощью уравнений. Но не всегда.

Примеры решения задач

Пример 1. Два поезда одновременно вышли из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 6 ч езды между ними оказалось расстояние 140 км. Найти расстояние между A и B, если всё расстояние один может проехать за 10 ч, а другой — за 8 ч.

Решение. Примем за единицу всё расстояние между A и B. Тогда первый поезд за 1 час проходит $\frac{1}{10}$ всего пути, а второй — $\frac{1}{8}$. Поэтому за 6 часов оба поезда проехали

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{8}\right)\cdot 6=\frac{(4+5)\cdot 6}{40}=\frac{27}{20}$$

всего пути. Значит, $\frac{27}{20}-1=\frac{7}{20}$ всего пути составляют 140 км. Тогда весь путь от A до B равен $140:\frac{7}{20}=400$ км.

Ответ. 400 км.

Пример 2. Первую половину пути поезд прошёл со скоростью 50 км/ч, а вторую — со скоростью 60 км/ч. Найти среднюю скорость движения поезда на всём пути. (Ответ дать с точностью до 0,1 км/ч.)

Решение. Примем за единицу весь путь. Тогда время, затраченное поездом на первую половину пути, равно $\frac{1}{2}:50=\frac{1}{100}$, а на вторую — $\frac{1}{2}:60=\frac{1}{120}$. Значит, средняя скорость движения поезда на всём пути равна $1:\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{120}\right)=\frac{600}{6+5}\approx 54{,}5$ км/ч.

Замечание. Можно было весь путь обозначить через S. Тогда среднюю скорость движения поезда на всём пути можно было найти так:

$$S:\left(\frac{S}{2}:50+\frac{S}{2}:60\right)=S:\left(\frac{S}{100}+\frac{S}{120}\right)=\frac{600\cdot S}{11\cdot S}\approx 54{,}5 \text{ км/ч}.$$

Мы видим, что S сокращается в конце.

Ответ. Примерно 54,5 км/ч.

Пример 3. Из города в одном и том же направлении выехали два велосипедиста, первый в 8 ч, а второй в 8 ч 30 мин утра. То расстояние, которое первый велосипедист проезжает за 5 ч 15 мин, второй проезжает за 4 ч 40 мин. Через 3 часа пути каждый велосипедист останавливался отдохнуть на 45 мин. В котором часу второй велосипедист догнал первого?

Решение. Обозначим через S км то расстояние, которое первый велосипедист проезжает за 5 ч 15 мин, а второй проезжает за 4 ч 40 мин. Тогда скорость первого велосипедиста равна $S:5\frac{1}{4}=\frac{4S}{21}$ км/ч, а второго — $S:4\frac{2}{3}=\frac{3S}{14}$ км/ч.

С 8 ч до 8 ч 30 мин первый велосипедист ехал один, поэтому к моменту выезда второго он проехал $\frac{1}{2} \cdot \frac{4S}{21} = \frac{2S}{21}$ км. Поскольку скорость сближения велосипедистов равна $\frac{3S}{14} - \frac{4S}{21} = \frac{S}{42}$ км/ч, второй велосипедист догонит первого через $\frac{2S}{21} : \frac{S}{42} = 4$ часа. Значит, это произойдёт (с учётом отдыха) в 13 ч 15 мин.

Ответ. В 13 ч 15 мин.

Пример 4. Катер проходит по реке от пристани A до пристани B за 3 часа, а обратно за 4 часа. За какое время проплывёт от пристани A до пристани B плот?

Решение. Обозначим через S расстояние от пристани A до пристани B. Тогда скорость катера при движении от пристани A до B равна $\frac{S}{3}$, а обратно — $\frac{S}{4}$.

Поскольку при движении по течению скорость течения реки прибавляется к собственной скорости катера, а при движении против течения — вычитается, то скорость по течению больше скорости против течения на удвоенную скорость течения реки. Поэтому скорость течения реки равна $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{S}{3} - \frac{S}{4}\right) = \frac{S}{24}$. Значит, плот проплывёт от пристани A до пристани B за 24 часа.

Ответ. За 24 ч.

Задачи

Движение навстречу

1. $\boxed{6}$ Два автомобиля, находящиеся на расстоянии S км друг от друга, движутся навстречу друг другу. Скорость первого автомобиля v_1 км/ч, второго — v_2 км/ч. Через какое время они снова окажутся на расстоянии S км друг от друга?

2. $\boxed{6}$ а) Петя и Коля, живущие друг от друга на расстоянии 840 м, в 9 утра вышли навстречу друг другу. После встречи каждый из них продолжил движение в том же направлении. Петя, дойдя до дома Коли, тотчас повернул обратно, а Коля дойдя до дома Пети, тоже повернул обратно. В котором часу произошла первая встреча мальчиков и в котором вторая, если Петя шёл всё время со скоростью 50 м/мин, а Коля — 70 м/мин?

   б) Зина и Валя, живущие на расстоянии 1200 м, сговорились выйти навстречу друг другу в 9 ч. Зина вышла в 9 ч, а Валя задержалась на 5 мин. После того как они встретились, каждая из них продолжала движение и, дойдя до дома подруги, повернула обратно. В котором часу произошла первая встреча и в котором — вторая, если скорость Зины 40 м/мин, а скорость Вали 60 м/мин?

3. $\boxed{7}$ а) Из двух посёлков, находящихся на расстоянии 36 км друг от друга, навстречу друг другу вышли два товарища. Первый шёл со скоростью 5 км/ч, а второй шёл со скоростью 4 км/ч. Одновременно с первым из того же посёлка навстречу второму выехал мальчик-велосипедист. Он ехал со скоростью, равной сумме скоростей двух товарищей. Когда он встретил второго товарища, то поприветствовал его и немедленно повернул обратно. Встретив первого, он поприветствовал его и немедленно повернул обратно. И так он ездил между первым и вторым товарищами, пока они не встретились. Сколько километров за это время проехал велосипедист?

$\boxed{6}$ б) Дима с собакой пошёл встречать папу. Когда собака увидела папу, она побежала к нему со скоростью 5 м/с. Добежав до него, она сразу же побежала к Диме. Добежав до Димы, собака снова побежала к папе и т. д. Какое расстояние пробежала собака, если Дима и папа двигались со скоростями 1,5 м/с, а первоначальное расстояние между ними было равно 300 м?

$\boxed{7}$ в)★ Расстояние AB равно 100 км. Из A и B одновременно выезжают навстречу друг другу велосипедисты со скоростями 20 и 30 км/ч соответственно. Вместе с первым из A вылетает муха со скоростью 50 км/ч, она летит до встречи с велосипедистом, выехавшим из B, после чего разворачивается и летит обратно до встречи с велосипедистом, выехавшим из A, после чего разворачивается и т. д. Сколько километров пролетит муха в направлении от A к B до момента встречи велосипедистов?

4. $\boxed{6}$ а) Длина шоссейной дороги между двумя сёлами 44 км. В 6 часов утра из первого села выехал почтальон на велосипеде. В 7 часов 8 минут навстречу ему из второго села выехал на лошади фермер. В 9 часов утра они встретились. Скорость фермера меньше скорости почтальона на 2,5 км. Найти скорость каждого.

б) $\frac{7}{12}$ расстояния между городами A и B составляют 75,25 км. В 5 ч 36 мин утра из A в B выехал велосипедист. В 7 ч 15 мин утра из B в A выехал другой велосипедист, который проезжал в час на 0,75 км более первого. Найти скорость каждого, если они встретились в полдень.

в) Расстояние между пунктами A и $Б$ 114 км. В 6 ч из пункта A по направлению в $Б$ выехала грузовая машина, а в 6 ч 45 мин из пункта $Б$ навстречу ей выехал автобус со скоростью на 8 км/ч большей, чем скорость грузовой машины. Встреча произошла в 7 ч 30 мин. Найти скорости грузовой машины и автобуса.

5. $\boxed{6}$ Из A и B, расстояние между которыми 43,8 км, выехали навстречу друг другу два автобуса. До места встречи первый автобус, следовавший из A, проехал на 11,4 км больше второго автобуса, шедшего из B. Какова скорость каждого автобуса, если первый шёл до встречи 0,75 ч, а второй вышел на 25 мин позже, чем первый?

6. $\boxed{6}$ По круговому замкнутому шоссе одновременно и из одной точки начинают ехать четыре автомобиля: A, B, C и D. Первые два едут по часовой стрелке, другие два — против, причём все автомобили едут с постоянными (возможно, различными) скоростями. Известно, что A и C встречаются впервые в тот же момент, что и B и D. Докажите, что A и B поравняются впервые в тот же момент, что и C и D.

7. $\boxed{6}$ а) Поезд за четверть минуты проходит мимо телеграфного столба, а за 50 с — мост длиной 0,7 км. Вычислить среднюю скорость поезда и его длину.

   б) Поезд проходит мост длиной в 450 м за 45 секунд и 15 секунд идёт мимо телеграфного столба. Вычислить длину поезда и его скорость.

8. $\boxed{6}$ а) Я еду в поезде, который идёт со скоростью 40 км/ч, и вижу, как в течение 3 с мимо моего окна в противоположном направлении проходит скорый поезд, имеющий длину 75 м. С какой скоростью шёл встречный поезд?

   $\boxed{6\text{-}7}$ б)★ По двум параллельным железнодорожным путям едут навстречу друг другу два поезда, каждый равномерно, но с различными скоростями. Длина первого поезда 130,75 м, длина второго поезда 117,75 м. Промежуток времени, в течение которого оба поезда шли при встрече один мимо другого, равен $3\frac{7}{45}$ с. Если бы поезда шли в одну сторону и если бы первый поезд нагнал второй, то они шли бы один возле другого 28,4 с. Какова скорость каждого поезда?

9. $\boxed{6}$ а) Из городов A и B выехали навстречу друг другу две автомашины: из A — «Волга» в 7 ч 20 мин утра и из B — «Москвич» в 7 ч утра. В котором часу произошла встреча машин, если известно, что «Волга» весь путь от A до B проходит за 2 ч 42 мин, а «Москвич» — за 3 ч 36 мин?

   б) Два автобуса одновременно вышли из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 7 ч езды между ними оказалось расстояние 136 км. Найти расстояние между A и B, если всё расстояние один может проехать за 12 ч, а другой — за 10 ч.

   в) Из города A в город B вышла грузовая машина. В то же время из города B в город A вышел автобус. Встреча произошла на расстоянии 150 км от города A. Найти расстояние от A до B, если известно, что грузовая машина может пройти весь путь от A до B за 8 ч 30 мин, а автобус — за 7 ч 30 мин.

г) Из двух городов вышли одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Первый за 2,4 ч прошёл $\frac{9}{70}$ всего расстояния между городами, а второй за 2 ч прошёл $\frac{13}{140}$ этого расстояния. С какой скоростью шёл каждый автомобиль, если до места встречи второй прошёл 351 км?

10. $\boxed{6\text{-}7}$ а) В 6 ч утра из A в B вышел пешеход. В 10 ч того же дня из B в A выехал велосипедист и встретил пешехода в 1 ч дня. Расстояние AB равно 62 км. Найти скорость каждого, если отношение этих скоростей равно 0,28.

б) Расстояние между двумя портами 301 км. Из первого порта в 0 ч 45 мин вышел пароход во второй порт. В 3 ч 5 мин из второго порта вышел другой пароход, который проходил в час на 6 км больше, чем первый. Пароходы встретились в то же утро в 7 ч 25 мин. По сколько километров в час проходил каждый пароход и где находилось место их встречи?

в) Два автомобиля, выходя одновременно навстречу друг другу из двух городов, могут встретиться через 6 ч. Скорость одного из них в $1\frac{1}{3}$ раза больше скорости другого. На сколько часов позже по сравнению с другим автомобилем должен выехать первый автомобиль, чтобы встретиться на середине пути между городами?

$\boxed{6}$ г) В 9 ч 25 мин утра пешеход отправился из A в $Б$. Идя с одинаковой скоростью, он прибыл в $Б$ в 13 ч 15 мин. На следующий день в 11 утра он отправился из $Б$ в A, идя равномерно, но несколько скорее, чем он шёл накануне, и прибыл в A в 14 ч 40 мин. Зная, что расстояние между пунктами 12 км, определить, на каком расстоянии от A находится то место, через которое он проходил в один и тот же час в каждый из этих дней.

Движение в одном направлении

11. $\boxed{7}$ Собака, находясь в пункте A, погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 м от собаки в пункте B. Скачок собаки равен 2 м, скачок лисицы равен 1 м. Собака делает 2 скачка, в то время как лисица делает 3 скачка. На каком расстоянии от пункта A собака догонит лисицу?

12. $\boxed{6}$ а) Первую треть пути автомобиль прошёл со скоростью 54 км/ч, вторую — со скоростью 45 км/ч и третью — со скоростью 60 км/ч. Найти среднюю скорость движения автомобиля на всём пути. (Ответ дать с точностью до 0,1 км/ч.)

б) Первую четверть пути велосипедист ехал со скоростью 20 км/ч, вторую и третью четверти всего пути — со скоростью 24 км/ч и последнюю четверть — со скоростью только 12 км/ч.

Найти среднюю скорость движения велосипедиста на всём пути. (Ответ дать с точностью до 0,1 км/ч.)

в) Автомобиль из A в B ехал со средней скоростью 50 км/ч, а возвращался со скоростью 30 км/ч. Какова его средняя скорость на всём пути?

$\boxed{6\text{-}7}$ г) Первую половину пути от A до $Б$ грузовая машина проходит со скоростью 32 км/ч. На вторую половину пути машина затрачивает времени на 20% меньше, чем на первую. Найти среднюю скорость движения машины на всём пути от A до $Б$. (Ответ дать с точностью до 1 км/ч.)

13. $\boxed{6}$ а) Два самолёта одновременно вылетели из Москвы в одном и том же направлении: один — со скоростью 350 км/ч, а другой — со скоростью 280 км/ч. Через два часа первый уменьшил скорость до 230 км/ч. На каком расстоянии от Москвы второй самолёт догонит первый?

б) Пешеход и велосипедист отправляются одновременно и по одной дороге из города A в город B, лежащий в 70 км от A. Пешеход идёт со скоростью 3,75 км/ч, велосипедист едет со скоростью 15 км/ч. Через сколько времени между ними будет расстояние, равное 30 км, и какое расстояние до B останется тогда проехать велосипедисту и пройти пешеходу?

в) Один мотоциклист выехал из A в B, делая в час по 60,9 км; через 2 часа из A в B выехал другой мотоциклист со скоростью 40,6 км/ч. За какое время первый мотоциклист совершит путь из A в B, если второй приехал в B на 7 ч позднее первого?

г) В 9 часов утра со станции A отправился пассажирский поезд, а вслед за ним в 11 ч с той же станции отправился скорый поезд. На каком расстоянии от станции A пассажирскому поезду надо будет пропустить скорый, если скорость пассажирского поезда 54 км/ч, а скорого — 72 км/ч?

14. $\boxed{6}$ а) Фермер выехал из деревни в 4 ч 30 мин утра и приехал в город, когда было без десяти минут 8 ч утра; если бы он проезжал в час на 1,2 км меньше, то ехал бы до города $3\frac{3}{4}$ ч. Сколько километров от деревни до города?

б) Чтобы доставить донесение за 2 ч 40 мин из A в B, расстояние между которыми 70,5 км, нарочный ехал сначала на велосипеде со скоростью 12,75 км/ч, а затем на мотоцикле со скоростью 67,5 км/ч. Сколько времени ехал нарочный на велосипеде и сколько — на мотоцикле?

в) Поезд должен был пройти расстояние между пунктами A и B за 11 ч 15 мин. Выйдя из A, поезд сначала двигался с меньшей скоростью и прошёл 0,4 всего пути за 5 ч. Но затем увеличил скорость на 10,8 км/ч и пришёл в B точно по расписанию. Найти расстояние между A и B.

15. $\boxed{6}$ а) Моторная лодка должна выйти из A и прибыть в B к определённому моменту. Если она будет ехать со скоростью 35 км/ч, то опоздает на 2 ч, если же она будет делать по 50 км/ч, то придёт на 1 ч раньше срока. Каково расстояние между A и B? Сколько часов лодка должна была затратить на прохождение пути?

$\boxed{6}$ б) Мотоциклист выехал в 8 ч утра из города к аэродрому. Если он будет двигаться со скоростью 40 км/ч, то опоздает к прибытию самолёта на 30 мин, а если скорость его будет 50 км/ч, то он приедет к аэродрому за 2 ч до прибытия самолёта. Найти расстояние между городом и аэродромом и время прибытия самолёта на аэродром.

$\boxed{6\text{-}7}$ в) Если бы дачник, отправляясь на железнодорожную станцию, шёл со скоростью 3,5 км/ч, то он пришёл бы на станцию через $\frac{1}{2}$ ч после отхода поезда. Если же он будет проходить по 4,2 км/ч, то придёт за 20 мин до отхода поезда. Какое расстояние должен пройти дачник до станции?

16. $\boxed{6}$ а) В 8 ч утра из пункта A вышел автобус, а в 9 ч из того же пункта A по той же дороге вышла легковая машина. Автобус, идя без остановки, прибыл в пункт B в 2 ч дня, а легковая машина — в 1 ч 30 мин дня. На каком расстоянии от пункта A легковая машина догнала автобус, если известно, что её скорость на 20 км/ч больше скорости автобуса?

б) В 8 ч 20 мин утра из Москвы в Санкт-Петербург вышла легковая машина, а в 9 ч 30 мин из Твери в Санкт-Петербург вышел автобус со скоростью, меньшей скорости легковой машины на 36 км/ч. Легковая машина догнала автобус в 10 ч 50 мин. Найти скорости легковой машины и автобуса, если между Москвой и Тверью 160 км.

в) Почтовый поезд отправился со станции в 7 ч 25 мин утра и шёл со скоростью 40,5 км/ч. В 8 ч 7 мин в том же направлении отправился с этой станции скорый поезд. С какой скоростью должен идти скорый поезд, чтобы догнать почтовый на расстоянии 210,6 км от станции?

17. $\boxed{6}$ а) На прохождение пути между двумя пристанями пароходу необходимо на 40 мин больше, чем катеру. Скорость катера 40 км/ч, а парохода 30 км/ч. Найти расстояние между пристанями.

б) Если турист проедет между городами A и B на велосипеде, то он затратит на этот путь на 2 ч 20 мин меньше, чем если бы шёл пешком. Скорость его движения на велосипеде 12 км/ч, а пешком 3,6 км/ч. Найти расстояние между городами A и B.

в) Из двух поездов один затрачивает на прохождение пути между двумя городами 2 ч 48 мин, другой — 4 ч 40 мин. Скорость первого поезда больше скорости второго на 26 км/ч. Определить расстояние между городами.

г) Поезд проходит данное расстояние за 10 ч. Но если бы он проходил в час на 10 км больше, то ехал бы всего 8 ч. Определить данное расстояние и скорость поезда.

18. $\boxed{6}$ а) Из города A в город B приехали два товарища. Один из них 4 ч ехал на велосипеде со скоростью 15 км/ч и 6 ч на автомобиле. Второй 3 ч ехал на поезде и 2 ч на автомобиле (скорости автомобилей одинаковы). Скорость автомобиля в 2 раза меньше скорости поезда. Чему равно расстояние от A до B?

б) В 8 ч 30 мин утра из двух пунктов выходят два автомобиля по одному направлению. Автомобиль, идущий позади, проходит всё расстояние между двумя пунктами отправления за $2\frac{1}{5}$ ч, передний же автомобиль движется в $2\frac{16}{17}$ раза медленнее заднего. Когда второй автомобиль догонит первый?

19. $\boxed{6}$ Расстояние между пунктами A и B автомобиль должен был проехать за 10 ч. Сначала он ехал со скоростью 40 км/ч. Когда до половины пути осталось 100 км, то, чтобы прийти вовремя, автомобиль увеличил скорость на 20 км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля.

20. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Водитель автобуса должен был проехать от пункта A до пункта B за определённое время. Пройдя первую треть пути с намеченной скоростью, водитель на остальной части пути увеличил скорость на 20%, а потому прибыл в пункт B на 20 мин раньше срока. Сколько времени затратил водитель на весь путь от A до B?

$\boxed{6\text{-}7}$ б) Пройдя половину пути, пароход увеличил скорость на 25%, благодаря чему прибыл в конечный пункт на полчаса раньше срока. Сколько времени затратил пароход на весь путь?

21. $\boxed{6}$ а) Два спортсмена состязались в беге на одно и то же расстояние. Стартовали они в один и тот же момент из одного пункта. Один пробежал всю дистанцию за 1 мин 15 с, а другой за 1 мин 20 с. Сколько метров в минуту в среднем пробегал каждый спортсмен, если через 48 с после старта между ними было 20 м?

б) Поезд должен был пройти 720 км за 14 ч 24 мин. Пройдя 0,75 этого пути, он задержался из-за ремонта на 16 мин. С какой скоростью поезд должен продолжать путь, чтобы прийти к месту назначения в срок?

22. $\boxed{6}$ а) Расстояние между пристанями на реке 43,2 км. Моторная лодка, идя по течению реки, затрачивает на этот путь 2 ч 24 мин. Сколько времени затрачивает эта лодка на

этот же путь, идя против течения, если скорость течения 1,8 км/ч?

б) Пароход, идя против течения реки, прошёл расстояние между пристанями за 9 ч. Сколько времени понадобится пароходу на обратный путь, если расстояние между пристанями равно 113,4 км, а скорость течения реки 1,9 км/ч? (Ответ дать с точностью до 1 ч.)

23. [6-7] а) Пароход прошёл расстояние между двумя пристанями по течению реки за 10 ч, а в обратном направлении — за 15 ч, делая в час на 8 км меньше. Сколько километров между пристанями?

[6] б) Пароход прошёл расстояние между двумя пристанями, двигаясь по течению реки, за 4,5 ч. На обратный путь пароход затратил 6,3 ч. Скорость течения реки составляет 40 м/мин. Найти расстояние между пристанями.

24. [6-7] а) Пароход идёт от Нижнего Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно — 7 суток. Сколько времени плывут плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

б) Пароход, идя вверх по течению реки, проходит расстояние между городами A и B за 4 ч 30 мин, а обратно — за 3 ч. За сколько времени при тех же условиях проплывает то же расстояние бочонок, брошенный по течению реки в месте A?

[6] в) Моторная лодка, идя по течению реки, затрачивает на путь от пристани A до пристани B 32 ч, а на обратный путь 48 ч. За какое время проплывёт плот от пристани A до пристани B?

25. [6-7] а) Моторная лодка может проплыть 28 км за час по течению и только 20 км за час против течения. Какое расстояние прошла лодка по течению, если она отправилась в 10 ч 30 мин утра, а возвратилась, нигде не останавливаясь, в 4 ч 30 мин того же дня?

б) Один велосипедист выехал в 6 ч 5 мин утра из A в B, а вернулся по той же дороге в 11 ч 26 мин того же утра. Зная, что из A в B он ехал со скоростью 18 км/ч, а обратно со скоростью 16 км/ч и что в B он задержался на $\frac{1}{4}$ ч, определить расстояние между A и B.

Разные задачи на движение

26. [5] Муравей направился в гости в соседний муравейник. Туда он шёл пешком, а обратно ехал: первую половину пути на гусенице — со скоростью, в 2 раза меньшей, чем пешком; а другую половину на кузнечике — со скоростью, в 5 раз большей, чем пешком. На какой путь муравей затратил времени меньше: в гости или обратно и почему?

27. $\boxed{5}$ Малыш проехал на самокате некоторое расстояние за 15 минут. За какое время он проедет на велосипеде расстояние в 3 раза большее? Скорость малыша на велосипеде в 5 раз больше, чем на самокате.

28. $\boxed{5}$ Петя и Ваня ехали вниз по эскалатору. На середине эскалатора хулиган Витя сорвал с Пети шапку и бросил её на встречный эскалатор. Пострадавший Петя побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься вниз по встречному эскалатору и вернуть шапку. Хитрый Ваня побежал по эскалатору вниз, чтобы затем подняться вверх и успеть раньше Пети. Кто успел первый, если скорости ребят относительно эскалатора постоянны и не зависят от направления движения?

29. $\boxed{5}$ Если Серёжа поедет в школу автобусом, а обратно пойдёт пешком, то он затратит на весь путь 1 ч 30 мин. Если же в оба конца он поедет автобусом, то затратит всего 30 мин. Сколько времени потратит Серёжа на дорогу, если он пойдёт пешком и в школу, и обратно?

30. $\boxed{6\text{-}7}$ Два грузовика одновременно вышли из A в B. Первый грузовик половину времени, затраченного им на весь путь, шёл со скоростью 50 км/ч, а остальную часть времени шёл со скоростью 40 км/ч. Второй грузовик первую половину пути шёл со скоростью 40 км/ч, а вторую — со скоростью 50 км/ч. Какой из этих грузовиков раньше прибыл в B?

31. $\boxed{6\text{-}7}$ Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 22,4 км, одновременно выезжают два мотоциклиста. Если они поедут навстречу друг другу, то встретятся через полчаса после выезда. Если же поедут в одном направлении, то второй догонит первого через 3,5 ч после выезда. Найти скорость каждого мотоциклиста.

32. $\boxed{7}$ а) Петя ехал в трамвае, смотрел в окно и заметил своего друга Васю, который поравнялся с трамваем, следуя вдоль трамвайной линии в противоположном направлении. Через минуту Петя вышел из трамвая и побежал вдогонку за Васей вдвое быстрее него, но в четыре раза медленнее трамвая. Через какое время Петя догонит друга?

б) Ваня опаздывал в школу и, поднимаясь бегом по эскалатору, не сразу заметил, что в момент, когда он ступил на эскалатор, из его сумки выпал учебник. Обнаружив пропажу, Ваня побежал вниз с удвоенной скоростью и через 20 секунд поднял книжку, оказавшись в этот момент ровно посередине эскалатора. От бега Ваня устал и остаток пути провёл стоя. Сколько времени провёл Ваня на эскалаторе?

в) Из-за пробки на выезде из города междугородный автобус прошёл первую треть пути в полтора раза медленнее расчётного времени. Сможет ли автобус без опоздания прибыть в пункт назначения, если на оставшейся части пути увеличит скорость на треть по сравнению с расчётной?

33. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Велосипедист ехал с дачи в город со скоростью $8\frac{1}{3}$ км/ч и должен был прибыть в город в 9 ч 40 мин утра. Не доезжая 15 км до города, он встретил знакомого, ехавшего той же дорогой из города, и, чтобы поговорить с ним, поехал обратно со скоростью этого знакомого. Проехав так вместе 3,75 км, он оставил знакомого, повернул опять к городу и, двигаясь с прежней скоростью ($8\frac{1}{3}$ км/ч), прибыл в город в 10 ч 37 мин утра. В котором часу знакомый велосипедиста выехал из города?

б) Из одного и того же города в одном направлении выехали два велосипедиста с разной скоростью: то расстояние, которое первый велосипедист проезжал за $5\frac{1}{4}$ ч, второй велосипедист проезжал за $4\frac{2}{3}$ ч. Второй велосипедист выехал через $1\frac{1}{2}$ ч после первого. Через сколько часов после выезда второй велосипедист догонит первого?

в) Поезд должен пройти расстояние между двумя городами за определённый промежуток времени. Через $7\frac{5}{16}$ ч после выхода его с места отправления, когда до конечного пункта оставалось ещё 259,2 км, машинист рассчитал, что если поезд будет двигаться с прежней скоростью, то придёт в конечный пункт с опозданием на 1,8 ч, а для того чтобы прийти без опоздания, он должен на остающемся участке пути двигаться в $1\frac{2}{7}$ раза быстрее, чем раньше. Определить расстояние между этими городами.

г) Из города A в город B выехал всадник со скоростью 10 км/ч. Через $\frac{5}{6}$ ч после выезда всадника вслед за ним выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч. В город B велосипедист приехал на 5 мин позже всадника. Определить расстояние между городами.

34. $\boxed{7}$ Пешеход идёт по шоссе со скоростью 5 км/ч. По этому шоссе в обе стороны с одинаковой скоростью ходят автобусы, встречаясь каждые 5 мин. В 12 часов пешеход заметил, что автобусы встретились около него, и, продолжая идти, стал считать встречные и обгоняющие автобусы. В 14 часов около него вновь встретились автобусы. Оказалось, что за это время пешеходу встретилось на четыре автобуса больше, чем обогнало его. Найдите скорость автобуса.

35. $\boxed{7}$ Из пункта A в пункт B одновременно направились три человека, имеющие один двухместный мотоцикл. Как они должны действовать, чтобы время, за которое последний из

них доберётся до B, было наименьшим? Определите это время, если скорость пешехода 5 км/ч, мотоцикла 45 км/ч, а расстояние от A до B равно 60 км.

36. $\boxed{7}$ Миша и Саша выехали в полдень на велосипедах из города A в город B. Одновременно из B в A выехал Ваня. Все трое едут с постоянными, но различными скоростями. В час дня Саша был ровно посередине между Мишей и Ваней, а в половине второго Ваня был посередине между Мишей и Сашей. Когда Миша будет посередине между Сашей и Ваней?

6. Задачи на проценты

Теоретический материал

В задачах на проценты удобно проценты переводить в коэффициенты. Например, если что-то увеличилось на 10%, т. е. было 100%, а стало 110%, то удобнее использовать коэффициент изменения 1,1. А если что-то уменьшилось на 10%, то коэффициент 0,9. Кстати, используя коэффициенты, легко видеть, что увеличение цены S на 10% с последующим снижением на 10% приводит к тому же результату, что и первоначальное снижение цены на 10% с последующим увеличением на 10%: $1{,}1 \cdot S \cdot 0{,}9 = 0{,}9 \cdot S \cdot 1{,}1 = 0{,}99 \cdot S$.

В задачах на смеси и сплавы надо помнить, что

$$\text{концентрация вещества} = \frac{\text{масса вещества}}{\text{полная масса раствора (сплава)}} \cdot 100\%\,.$$

Примеры решения задач

Пример 1. В два магазина по одинаковой цене поступил товар. Через неделю в первом магазине цена на этот товар была снижена на 15%, а ещё через неделю — повышена на 20%. Во втором магазине через две недели цена на этот товар была увеличена на 5%. В каком магазине через две недели после поступления товара цена ниже?

Решение. После снижения цены S на 15% товар стал стоить $0{,}85S$, а после повышения на 20% он стал стоить $1{,}2 \cdot 0{,}85S = 1{,}02S$, т. е. цена товара в первом магазине через две недели увеличилась на 2% по сравнению с первоначальной, а во втором — на 5%. Значит, в первом магазине цена стала ниже, чем во втором.

Ответ. В первом ниже.

Пример 2. На сколько процентов увеличится объём куба, если каждое ребро увеличить на 30%?

Решение. Если первоначальный объём куба был равен V, то после увеличения всех рёбер на 30% его объём станет равен $V \cdot 1{,}3^3 = 2{,}197V$. Значит, объём увеличится на $\frac{2{,}197V - V}{V} \cdot 100\% =$ $= 119{,}7\%$.
Ответ. 119,7%.

Пример 3. Свежие грибы содержат 92% воды, а сухие 8%. Сколько получится сухих грибов из 46 кг свежих?

Решение. В задачах на сушку грибов, фруктов, травы, выплавку стали и т. п. надо следить за тем, что не исчезает, т. е. за полезной субстанцией, а не за водой и примесями, хотя задачи обычно формулируются так, что в них приводится процентное содержание именно примесей.

Итак, в свежих грибах 8% полезной субстанции, а в сухих — 92%. Поэтому в 46 кг свежих грибов содержится $0{,}08 \cdot 46$ кг полезной субстанции, что составляет 92% сухих грибов. Поэтому сухих грибов получим $0{,}08 \cdot 46 : 0{,}92 = 4$ кг.
Ответ. 4 кг.

Пример 4. 20 литров 10%-го раствора кислоты смешали с 30 литрами 80%-го раствора кислоты. Какова концентрация нового раствора?

Решение. В 20 литрах 10%-го раствора кислоты содержится $0{,}1 \cdot 20 = 2$ литра чистой кислоты, а в 30 литрах 80%-го — $0{,}8 \cdot 30 = 24$ литра. Поэтому концентрация нового раствора равна $\frac{2+24}{20+30} \cdot 100\% = 52\%$.
Ответ. 52%.

Задачи

1. $\boxed{6}$ Некоторый товар стоил 500 рублей. Сначала цену на него увеличили на 10%, а затем уменьшили на 10%. Какой стала цена в итоге?

2. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Рыночная цена картофеля в связи с ненастной погодой повысилась на 20%. Через некоторое время цена картофеля на рынке понизилась на 20%. Когда картофель был дешевле: до повышения или после снижения цены и на сколько процентов?

   б) В два коммерческих киоска по одинаковой цене поступил товар. Через неделю в первом киоске все цены были снижены на 10%, а ещё через неделю — повышены на 20%. Во втором киоске через две недели цены были увеличены на 10%. В каком киоске через две недели после поступления товара цены ниже?

3. 6 Рационализация процесса производства дала возможность увеличить выпуск изделий цеха в октябре на 20% по сравнению с сентябрём, в ноябре на 5% по сравнению с октябрём и в декабре на 10% по сравнению с ноябрём. В результате в декабре цех выпустил 11 088 изделий. Сколько изделий выпустил цех в сентябре?

4. 7 После обработки сада средством от гусениц садовод заметил, что с 12 кустов смородины стал получаться такой же урожай, как прежде с 15 кустов. На сколько процентов повысилась урожайность смородины в саду?

5. 6-7 На утреннем концерте 40% всех посетителей были школьники, 36% — женщины и остальные посетители — мужчины. На вечерний концерт пришло мужчин на 75% больше, чем на утренний, женщин на 37,5% больше, а школьников на 75% меньше, чем на утренний концерт. Как и на сколько процентов число посетителей на вечернем концерте изменилось по сравнению с числом посетителей на утреннем концерте?

6. 6-7 Один рабочий обтачивает за неделю 960 деталей и расходует на это 12 резцов, другой рабочий на обточку 640 таких же деталей израсходовал 10 резцов. Кто экономнее расходовал резцы и на сколько процентов?

7. 6-7 а) По дороге идут два туриста. Один из них делает шаги на 10% короче и в то же время на 10% чаще, чем другой. Кто из туристов идёт медленнее и почему?

б) Двое учащихся — высокий и низкий — вышли одновременно из одного и того же дома в одну школу. У низкого шаг был на 20% короче, чем у высокого, но зато он успевал за то же время делать на 20% больше шагов, чем высокий. Кто из них раньше пришёл в школу?

8. 6-7 а) Число коров на одной молочной ферме на 12,5% меньше, чем на другой, но средний удой каждой коровы на 8% выше. На какой ферме получают молока меньше и на сколько процентов?

б) Общий сбор пшеницы в фермерском хозяйстве «Звезда» больше, чем в фермерском хозяйстве «Луч», на 26%, хотя площадь под пшеницей больше только на 5%. На сколько процентов урожай пшеницы с 1 га в фермерском хозяйстве «Звезда» больше, чем в фермерском хозяйстве «Луч»?

в) В связи с введением рационализаторского предложения время, необходимое для изготовления некоторой детали машины, уменьшилось на 20%. На сколько процентов увеличилась производительность труда?

г) В бассейн проведена труба. Вследствие её засорения приток воды уменьшился на 60%. На сколько процентов вследствие этого увеличится время, необходимое для заполнения бассейна?

9. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Цену на прошлогодние автомобили сначала снизили на 25%, а затем ещё на 10%. Только после этого все автомобили удалось продать, причём прибыль от продажи составила 8%. Сколько процентов прибыли было заложено в исходную цену автомобилей?

   б) На какое наименьшее число процентов следует увеличить цену товара, чтобы, продавая его затем с 20%-й скидкой от новой цены, не остаться в убытке, т. е. чтобы цена товара со скидкой была не меньше первоначальной?

   в) Объём строительных работ увеличивается на 80%. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих, если производительность труда будет увеличена на 20%?

   г) Заработок рабочего повысился на 20%, а цены на продукты и другие товары снизились на 15%. На сколько процентов рабочий теперь на свой заработок может купить больше продуктов и товаров, чем прежде? (Ответ дать с точностью до 1%.)

10. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Каждую сторону квадрата увеличили на 20%. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?

    б) На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если его длину увеличить на 20%, а ширину — на 10%?

    в) Две противоположные стороны прямоугольника удлинили на 10%, а две другие укоротили на 10%. Как изменилась площадь прямоугольника?

11. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Ширину прямоугольника увеличили на 3,6 см, а длину уменьшили на 16%. В результате площадь нового прямоугольника оказалась больше прежней на 5%. Найти ширину нового прямоугольника.

    б) Длину прямоугольника уменьшили на 2,4 см, а ширину увеличили на 30%. В результате площадь нового прямоугольника оказалась больше прежней на 4%. Найти длину нового прямоугольника.

12. $\boxed{6\text{-}7}$ а) На сколько процентов увеличится полная поверхность куба, если каждое его ребро увеличить на 20%?

    б) На сколько процентов увеличится объём куба, если каждое ребро увеличить на 10%?

13. $\boxed{6\text{-}7}$ а) При обработке деревянного бруса его длина уменьшилась на 2,5%, ширина на 7,2% и толщина на 2,8%. Сколько процентов от первоначального объёма бруса составили отходы при обработке? (Ответ дать с точностью до 0,1%.)

    б) Изготовлены два куба — один из меди, другой из стали. Ребро медного куба на 20% больше ребра стального куба.

На сколько процентов медный куб тяжелее стального, если удельный вес меди на 10% больше удельного веса стали? (Ответ дать с точностью до 0,1%.)

в) Из дуба и стали изготовлены две треугольные пластинки одинаковой толщины, но основание первого треугольника (из дуба) на 20% больше основания второго, а высота первого треугольника на 50% больше высоты второго. На сколько процентов вес стальной пластины больше веса дубовой, если удельный вес дуба в 10 раз меньше удельного веса стали? (Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.)

14. 6-7 а) Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

б) Влажность свежескошенной травы 60%, а сена 15%. Сколько сена получится из одной тонны свежескошенной травы?

в) При проверке влажности зерна она оказалась равной 16%. 200 кг зерна просушили, после чего зерно стало легче на 20 кг. Найти влажность зерна после просушки (с точностью до 0,1%).

г) Сколько граммов 8%-й серной кислоты можно получить из 200 г жидкости, содержащей 62% серной кислоты?

15. 6-7 а) Сколько воды надо добавить к 600 г жидкости, содержащей 40% соли, чтобы получился 12%-й раствор этой соли?

б) Морская вода содержит 5% соли (по весу). Сколько килограммов пресной воды надо прибавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в смеси составляло 2%?

в) До какого веса надо выпарить 800 г 10%-го раствора соли, чтобы довести её содержание до 16%?

г) Сколько граммов воды надо прибавить к 50 г 35%-й соляной кислоты, чтобы получить 10%-ю кислоту?

16. 6-7 а) Древесина только что срубленного дерева содержит 64% воды. Через неделю количество воды стало уже 48% от веса дерева. На сколько уменьшился при этом вес дерева, если, только что срубленное, оно весило 7,5 ц? (Ответ дать с точностью до 0,1 ц.)

б) Только что добытый каменный уголь содержит 2% воды. После некоторого времени он впитывает в себя ещё какое-то количество воды и содержит уже 15% её. На сколько увеличивается при этом вес 25,75 т только что добытого каменного угля? (Ответ дать с точностью до 0,1 т.)

17. 6-7 а) Слиток сплава серебра с цинком весом в 3,5 кг содержал 76% серебра. Его сплавили с другим слитком и получили слиток весом в 10,5 кг, содержание серебра в котором стало 84%. Сколько процентов серебра содержалось во втором слитке?

б) 5 л сливок с содержанием жира 35% смешали с 4 л 20%-х сливок и к смеси добавили 1 л чистой воды. Какой жирности получилась смесь?

в) К 200 куб. см 15%-го раствора соли добавили 300 куб. см 40%-го раствора той же соли и 250 куб. см чистой воды. Каково процентное содержание соли в полученном растворе?

18. $\boxed{6\text{-}7}$ Нержавеющая сталь представляет собой сплав железа с хромом и никелем. Сколько хрома и сколько никеля надо сплавить с 67,6 кг железа, если хрома в сплаве должно быть 15%, а никеля в 30 раз меньше, чем хрома?

19. $\boxed{6\text{-}7}$ Когда 40 рабочих цеха перешли на эффективную технологию производства, продукция цеха увеличилась на 20%; когда же 60% всех рабочих цеха стали работать по-новому, продукция цеха увеличилась в 2,5 раза. Сколько рабочих в цехе и во сколько раз увеличится продукция цеха, когда все рабочие перейдут на новую технологию?

20. $\boxed{6\text{-}7}$ Молоко одной коровы содержит 5% жира; молоко же другой — 3,5%, но удой её на 30% выше первой. Сколько надо взять молока от первой коровы, чтобы получить жира на 5,4 кг больше, чем жира от молока второй коровы за то же время?

21. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Цена за вход на стадион 1 руб. 50 коп. с человека. Когда цену понизили, количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько копеек понижена цена?

б) Цена входного билета на стадион составляла 20 коп. После снижения входной платы число зрителей увеличилось на 25%, а выручка возросла на 12,5%. Сколько стал стоить входной билет после снижения цены?

22. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Старшеклассник, собирая деньги на радиоприёмник, обратился за помощью к отцу и двум его братьям; они помогли ему. Выяснилось, что первый дядя дал 25% того, что было собрано без него, включая накопления мальчика. Второй дядя и отец дали соответственно $33\frac{1}{3}\%$ и 50% того, что было собрано без них, включая накопления мальчика. Сколько стоил радиоприёмник, если у старшеклассника было 10,4 рубля?

б) Два брата купили за 80 руб. радиоприёмник и за 200 руб. телевизор. На покупку радиоприёмника старший брат отдал 20% своих денег, а младший брат — $22\frac{2}{9}\%$ своих денег. На телевизор старший брат дал 60% своих денег, а младший — $44\frac{4}{9}\%$ своих денег. Сколько денег было у каждого брата?

23. $\boxed{6\text{-}7}$ Найти возраст брата и возраст сестры, если 62,5% возраста брата больше 75% возраста сестры на 2 года, а 50% возраста брата больше 37,5% возраста сестры на 7 лет.

24. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Одно из слагаемых составило $\frac{5}{12}$ другого. Сколько процентов от суммы составляет меньшее слагаемое? (Ответ дать с точностью до 0,1%.)

б) Вычитаемое составляет $\frac{7}{13}$ уменьшаемого. Сколько процентов вычитаемого составляет разность? (Ответ дать с точностью до 0,1%.)

25. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Три бригады начали одновременную пахоту. Установленная планом ежедневная норма первой бригады так относится к норме второй бригады как 5 : 4, а норма второй к норме третьей как 2 : 1,5. Первая бригада увеличила ежедневную норму на 10%, вторая бригада — на 20%, а третья, как и первая, на 10%. В результате к одному сроку первая бригада вспахала на 14 га больше второй бригады. Сколько гектаров вспахала каждая к этому сроку?

б) За I квартал завод выполнил 26% годового плана, а количество продукции, произведённое за II, III и IV кварталы, пропорционально числам 6,5 : 7,8 : 9,1. Определить, на сколько процентов перевыполнил завод план, если во II квартале завод дал продукции в $1\frac{1}{4}$ раза больше, чем в первом.

7. Обратный ход

Теоретический материал

Чтобы решить задачи этого раздела, надо взять конечный результат и проделать с ним обратные преобразования.

Пока просьба обходиться без составления уравнений.

Примеры решения задач

Пример 1. Я задумал число. Если его увеличить в 3 раза, к результату прибавить 15 и полученную сумму разделить на 2, то получится 15. Какое число я задумал?

Решение. Берём число 15 и делаем обратные преобразования:
1) 15 умножаем на 2 — получаем 30;
2) из 30 вычитаем 15 — получаем 15;
3) 15 делим на 3 и получаем 5. Значит, задумано число 5.

Ответ. 5.

Пример 2. Писатель написал книгу за 3 месяца. В первый месяц он написал 0,3 всей книги и ещё 10 страниц, во второй месяц 0,4 остатка и ещё 20 страниц. В третий — 0,7 нового остатка и последние 30 страниц. Сколько страниц в книге?

Решение. Действуем снова от обратного.

Последние 30 страниц составляют 0,3 того, что было написано в третий месяц. Поэтому в третий месяц было написано $30 : 0{,}3 = 100$ страниц.

$100 + 20 = 120$ страниц составляют 0,6 остатка книги к началу второго месяца. Значит, за второй и третий месяц писателю надо было написать $120 : 0{,}6 = 200$ страниц.

$200 + 10 = 210$ страниц составляют 0,7 всей книги. Следовательно, вся книга состоит из $210 : 0{,}7 = 300$ страниц.

Ответ. 300 страниц.

Задачи

1. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Сумма цифр двузначного числа равна наибольшему из однозначных чисел, а число десятков на 2 меньше этой суммы. Какое это число?

   б) Сумма цифр двузначного числа равна наименьшему из двухзначных чисел, а цифра десятков в четыре раза меньше цифры единиц. Найти число.

2. $\boxed{5}$ Малыш и Карлсон сидели на крыше и наблюдали за голубями. На крыше сидело несколько голубей. Когда на крышу село ещё 15 голубей, а улетело 18 голубей, то на крыше осталось 16 голубей. Сколько голубей первоначально наблюдали Малыш и Карлсон?

3. $\boxed{7}$ Из корзины яиц взяли половину всего количества яиц, потом половину остатка, затем половину нового остатка и, наконец, половину следующего остатка. После этого в корзине осталось 10 яиц. Сколько яиц было в корзине первоначально?

4. $\boxed{5}$ а) Ваня задумал число, прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 9, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил 2. Какое число задумал Ваня?

   б) Алёша задумал число. Он прибавил к нему 5, потом разделил сумму на три, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число задумал Алёша?

5. $\boxed{6}$ а) Я задумал число. Если его увеличить в 2,5 раза, к результату прибавить 1,75 и полученную сумму разделить на 0,8, то получится 37,5. Какое число я задумал?

   б) Я задумал число, вычел из него 1,05, разность умножил на 0,8, к произведению прибавил 2,84, полученную сумму разделил на 0,01 и получил 700. Какое число я задумал?

6. $\boxed{6}$ Юра задумал натуральное число, умножил его на 13, зачеркнул последнюю цифру результата, полученное число умножил на 7, опять зачеркнул последнюю цифру результата и получил число 21. Какое число задумал Юра?

7. $\boxed{5\text{-}6}$ В двух пачках всего 30 тетрадей. Если бы из первой пачки переложили во вторую 2 тетради, то в первой пачке стало бы вдвое больше тетрадей, чем во второй. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

8. $\boxed{5\text{-}6}$ Тане не хватало 7 коп., а Гале — 2 коп., чтобы купить по коробке цветных карандашей. Когда они сложили свои деньги, их не хватило даже на покупку одной коробки. Сколько стоит коробка карандашей?

9. $\boxed{5\text{-}7}$ Мать положила на стол сливы и сказала трём сыновьям, чтобы они, вернувшись из школы, разделили их поровну. Первым пришёл Миша, он взял треть слив и ушёл гулять. Потом вернулся из школы Петя, взял треть от лежавших на столе слив и тоже ушёл. Затем пришёл Коля и тоже взял треть от числа слив, которые он увидел. Сколько слив оставила мать, если Коля взял 4 сливы?

10. $\boxed{5}$ а) Крестьянин попросил у царя разрешение взять 1 яблоко из его сада. Царь разрешил. Пошёл крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором, причём каждый забор имеет одни ворота, вход в которые охраняет сторож. Подошёл крестьянин к первому сторожу и говорит: «Царь разрешил мне взять одно яблоко из сада». На что сторож ему сказал: «Возьми, но при выходе отдашь мне половину принесённых яблок и ещё одно». Эти же слова повторили крестьянину второй и третий сторожа, охранявшие другие ворота. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы, после того как он отдаст положенную часть сторожам, у него осталось одно яблоко?

    $\boxed{5}$ б) Мать поручила детям — брату и сестре — разложить пакет конфет так, чтобы на завтра к обеду для гостей было оставлено половина конфет и ещё 3 штуки, к завтраку для всей своей семьи — половина оставшихся конфет и ещё 3 штуки и к вечернему чаю — половина оставшихся конфет и ещё 3 штуки. Дети разложили конфеты в 3 вазы так, как велела мать, и у них осталось ещё 4 конфеты, которые им разрешили съесть самим. Сколько всего конфет было в пакете?

    $\boxed{5\text{-}7}$ в) Старушка принесла на рынок для продажи корзину яблок. Первому покупателю она продала половину всех своих яблок и ещё пол-яблока, второму — половину остатка и ещё пол-яблока и т. д. Последнему — шестому покупателю — она также продала половину оставшихся яблок и ещё пол-яблока, причём оказалось, что она продала все свои яблоки. Сколько яблок принесла для продажи старушка?

11. $\boxed{6}$ а) Школьник прочитал книгу за 3 дня. В первый день он прочитал 0,2 всей книги и ещё 16 страниц, во второй день 0,3 остатка и ещё 20 страниц. В третий — 0,75 нового остатка и последние 30 страниц. Сколько страниц в книге?

б) Фермер продал картофель трём покупателям: первому — $\frac{1}{4}$ часть его и ещё 10 кг, второму — $\frac{5}{11}$ остатка и ещё 10 кг, а третьему — последние 50 кг. Сколько картофеля продал фермер?

в) Туристы совершили переход на велосипедах в три дня. В первый день они прошли $\frac{1}{3}$ всего пути без 2 км. Во второй день — половину оставшегося пути без 3 км и в третий — $\frac{8}{9}$ оставшегося пути и последние 6 км. Сколько километров проехали туристы за три дня?

12. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Натуральное число можно умножать на два и произвольным образом переставлять в нём цифры (запрещается лишь ставить нуль на первое место). Докажите, что превратить число 1 в число 74 с помощью таких операций невозможно.

б) Натуральное число можно умножать на два и произвольным образом переставлять в нём цифры (запрещается лишь ставить нуль на первое место). Докажите, что превратить число 1 в число 811 с помощью таких операций невозможно.

в) Натуральное число можно умножать на два и произвольным образом переставлять в нём цифры (запрещается лишь ставить нуль на первое место). Докажите, что превратить число 1 в число 411 с помощью таких операций невозможно.

13. $\boxed{7}$ Ныряльщики добыли несколько жемчужин в количестве, не большем 1000. Делёж жемчуга происходит у них следующим образом: они по очереди подходят к куче жемчуга, и каждый ныряльщик берёт либо ровно половину, либо ровно треть от числа оставшихся в куче жемчужин. После того как все ныряльщики взяли свою долю, остаток жемчуга был пожертвован морскому богу. Какое наибольшее число ныряльщиков могло участвовать в добыче жемчуга?

8. Уравнения и неравенства

Теоретический материал

В некоторых уравнениях и неравенствах нам встретится *модуль* (абсолютная величина) вещественного числа x. Определим модуль следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Линейные уравнения решаются просто: надо выразить неизвестную величину, делая арифметические преобразования (это похоже на задачи на обратный ход).

Если в уравнение кроме неизвестной величины входит ещё неизвестное число a (параметр), то при выполнении арифметических действий надо следить за их корректностью. Например, обе части уравнения можно делить на любое число, кроме нуля. Поэтому случай, в котором параметр равен нулю, надо рассматривать отдельно.

Если вдруг вам придётся решать неравенство, то надо помнить, что при делении неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный. Поэтому если при решении неравенства надо делить на параметр, то необходимо рассмотреть три случая: параметр больше нуля, меньше нуля и равен нулю.

Системы линейных уравнений можно решать двумя способами. Решая систему первым способом, выражают из первого уравнения первую переменную через остальные переменные и подставляют её во второе уравнение. Затем из второго уравнения выражают вторую переменную через остальные переменные (первая переменная во второе уравнение уже не входит) и подставляют первую и вторую переменные в третье уравнение, из которого выражают третью переменную, и т. д., пока не дойдём до последнего уравнения, в котором останется только одна переменная — последняя, её находят и, двигаясь назад, поочерёдно находят все переменные.

Второй способ — метод Гаусса, или метод приведения системы к треугольному виду. Он более эффективен, чем первый способ, особенно для систем, состоящих из трёх и более линейных уравнений. Оба способа будут рассмотрены ниже на конкретном примере.

Примеры решения задач

Пример 1. Решить уравнение $|x-5| = 1$.

Р е ш е н и е. При решении таких уравнений можно раскрывать модуль по определению, а можно воспользоваться геометрическим

смыслом модуля. Покажем оба способа.
1-й способ (*по определению*)
1) Если $x-5 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 5$, то $x-5=1 \Leftrightarrow x=6$. Поскольку $6>5$, это решение подходит.
2) Если $x-5<0$, т. е. $x<5$, то $-(x-5)=1 \Leftrightarrow x=4$. Поскольку $4<5$, это решение тоже подходит.

2-й способ (*используя геометрический смысл модуля*)
Поскольку по геометрическому смыслу модуля равенство $|x-5|=1$ означает, что x находится от 5 на расстоянии 1, получаем $x-5=1$ или $x-5=-1$, т. е. $x=6$ или $x=4$.
Ответ. $x=4$ или $x=6$.

Пример 2. Найти все целые числа, удовлетворяющие неравенству $|x+1|>3$.

Решение.
1-й способ (*по определению*)
1) Если $x+1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant -1$, то $x+1>3 \Leftrightarrow x>2$. Поскольку $2>-1$, это решение подходит.
2) Если $x+1<0$, т. е. $x<-1$, то $-(x+1)>3 \Leftrightarrow -x>4 \Leftrightarrow x<-4$. Поскольку $-4<-1$, это решение тоже подходит.

2-й способ (*используя геометрический смысл модуля*)
Поскольку по геометрическому смыслу модуля неравенство $|x+1|>3$ означает, что $x+1$ находится от нуля на расстоянии большем чем 3, то $x+1>3$ или $x+1<-3$, т. е. $x>2$ или $x<-4$.
Ответ. $x>2$ и $x<-4$.

Пример 3. Решить уравнение

$$[(2-x):1{,}5+17{,}4:29]:(25\cdot 0{,}16)-0{,}005=0{,}4\,.$$

Решение. Выполняем арифметические операции слева и делаем обратные преобразования, чтобы найти x:

$$[(2-x):1{,}5+17{,}4:29]:(25\cdot 0{,}16)-0{,}005=0{,}4 \iff$$
$$\iff [(2-x):1{,}5+0{,}6]:4=0{,}405 \iff$$
$$\iff (2-x):1{,}5+0{,}6=1{,}62 \iff$$
$$\iff (2-x):1{,}5=1{,}02 \iff$$
$$\iff 2-x=1{,}53 \iff$$
$$\iff x=0{,}47.$$

Ответ. 0,47.

Пример 4. Найти x, y и z, если

$$\begin{cases} x+2y+3z=14\,, \\ 2x-3y+4z=8\,, \\ 3x+4y-2z=5\,. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решим систему двумя способами.

Первый способ (*выразить — подставить*)
Выразим из первого уравнения x: $x = 14 - 2y - 3z$ и подставим во второе уравнение, из которого выразим вторую переменную:

$$2(14-2y-3z)-3y+4z = 8 \iff -7y-2z = -20 \iff z = 10-3{,}5y.$$

Удобнее оказалось выразить z, а не y, иначе пришлось бы возиться с дробями. Теперь подставим x и z в третье уравнение и найдём из него y:

$$3(14 - 2y - 3z) + 4y - 2z = 5 \iff -2y - 11z = -37 \iff$$
$$\iff 2y + 11(10 - 3{,}5y) = 37 \iff -36{,}5y = -73 \iff y = 2.$$

Теперь, зная y, найдём сначала z, а затем и x:

$$z = 10 - 3{,}5 \cdot 2 = 3 \implies x = 14 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1.$$

Второй способ (*метод Гаусса или приведение системы к треугольному виду*)
Суть метода очень проста. Надо сделать так, чтобы в первом уравнении были все переменные, во втором уравнении были все переменные, кроме первой, в третьем уравнении — все, кроме первой и второй и т. д., в последнем уравнении должна остаться только последняя переменная. Причём добиться этого надо вычитанием и сложением уравнений.

Удобно, когда в первом уравнении первая переменная входит с коэффициентом 1. В нашем примере это уже так. Если это не так, но есть уравнение, стоящее не на первой строке, в которое первая переменная входит с коэффициентом 1, то это уравнение ставим на первую строчку. Иначе надо одно из уравнений поделить на коэффициент, стоящий при первой переменной. При этом уравнение желательно выбрать так, чтобы получить не очень страшные дроби.

После этого из каждого уравнения, начиная со второго, вычитают первое уравнение, умноженное на коэффициент, стоящий перед первой переменной в данном уравнении. Это делается для того, чтобы во все уравнения, кроме первого, не входила первая переменная.

Затем среди уравнений, начиная со второго, выбирают то, в которое вторая переменная входит с коэффициентом 1, и ставят его на вторую строку системы. Иначе надо одно из уравнений поделить на коэффициент, стоящий при второй переменной.

После этого из каждого уравнения, начиная с третьего, вычитают второе уравнение, умноженное на коэффициент, стоящий перед второй переменной в данном уравнении, и т. д. В результате получаем систему, приведённую к треугольному виду.

Несмотря на довольно длинное описание метода, на практике он проще первого способа.

$$\begin{cases} x+2y+3z=14\,, \\ 2x-3y+4z=8\,, \\ 3x+4y-2z=5\,; \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+3z=14\,, \\ -7y-2z=-20\,, \\ -2y-11z=-37\,; \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+3z=14\,, \\ y+5{,}5z=18{,}5\,, \\ 7y+2z=20\,; \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2y+3z=14\,, \\ y+5{,}5z=18{,}5\,, \\ -36{,}5z=-109{,}5\,; \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+3z=14\,, \\ y+5{,}5z=18{,}5\,, \\ z=3\,; \end{cases} \iff \begin{cases} x=1\,, \\ y=2\,, \\ z=3\,. \end{cases}$$

Ответ. $x=1$; $y=2$; $z=3$.

Замечание. Ответ можно записать так, как записано выше, либо в таком виде: (1; 2; 3).

Задачи

1. $\boxed{5}$ а) Угадайте корень уравнения $y \cdot y + 5 = 21$ и выполните проверку.
   б) Угадайте два корня уравнения $12 : x = 7 - x$.
2. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Решить уравнение $|5x| \cdot |-1{,}5| = 12$.
   б) Решить уравнение $|2x| \cdot |-3{,}5| = |-28|$.
   в) Найти два корня уравнения $|-0{,}63| : |x| = |-0{,}9|$.
3. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Найти наименьший целый корень уравнения
   $$(|x|-1)(x+2{,}5)=0\,.$$
   б) Решить уравнение $(2x-5)\cdot\left(\frac{3}{2}x+9\right)\cdot(0{,}3x-12)=0$.
4. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Решить уравнение $2 + 180 : (x-11) = 22$.
   б) Решить уравнение $\frac{5}{x} - \frac{3}{x} + \frac{6}{x} = \frac{4}{11}$.
   в) Решить уравнение $-\frac{7}{9} : 3{,}1 = x : 9{,}3$.
5. $\boxed{5\text{-}6}$ Найти все натуральные значения x, при которых верно неравенство
   $$1 < \frac{x}{7} + \frac{2x}{7} < \frac{23}{7}\,.$$
6. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Решить уравнение $|x-3| = 7$.
   б) Решить уравнение $|x-4| = 3$.
   в) Решить уравнение $|7-x| = 9{,}3$.
   г) Решить уравнение $|4x-1| = -5$.
7. $\boxed{6\text{-}7}$ Найти все целые числа, удовлетворяющие неравенству:
   а) $|x-3{,}5| < 2$; б) $|x-8| \leqslant 0$;
   в) $|x-4| > 5$; г) $|2x| - 3{,}4 > 0$;
   д) $3 < |x| < 7$; е) $|3x-1| < -5$;
   ж) $|7x+1| + 6 > 0$.

8. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Решить уравнение $|x-2|+2x=2$.
   б) Решить уравнение $|x-8|+x=5$.
   в) Решить уравнение $|x-3|-x=7$.
   г) Решить уравнение $|5x-2|+x=10$.
9. $\boxed{7}$ а) Решить уравнение $|x+4|+|x-1|=6$.
   б) Решить уравнение $|x-3|+|x+2|=2$.
   в) Решить уравнение $|x-4|-|2x+3|=2$.
   г) Решить уравнение $|x+4|+|x-1|=5$.
10. $\boxed{5}$ Выразите x из формулы $a=(x+8):9$.
11. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Решите уравнение $2(3-2x)=3x-4(1+3x)$.
    б) Решите уравнение $5(x+2{,}6)=3(2x+5{,}2)$.
    в) Решите уравнение $0{,}5\cdot(x+3)=\frac{4}{6}\cdot(11-x)$.
12. $\boxed{6}$ Найдите x из выражения
$$4520:\left(225-4\,209\,520:\frac{1\,000\,795+(250+x)\cdot 50}{27}\right)=40.$$
13. $\boxed{6\text{-}7}$ а) При каком значении x многочлен
$$7{,}4x-8-(-5{,}6x+(-2{,}4x+7)-11{,}92)$$
равен 0?
    б) При каком значении x многочлен
$$4{,}3+(-3{,}4x-(8x+6)-2{,}3)-(2{,}6x-1{,}2)$$
равен нулю?
14. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Решить уравнение $[(7+0{,}004x):0{,}9]:24{,}7-12{,}3=77{,}7$.
    б) Решить уравнение $[(0{,}001x+2):0{,}3]\cdot 0{,}01-11{,}2=22{,}2$.
    в) Решить уравнение $2\cdot[0{,}2-0{,}02:(0{,}002+0{,}0002\cdot x)]=0{,}3$.
    г) Решить уравнение
$$50{,}32-21{,}32:[(20+9{,}744:x)\cdot 0{,}5-1{,}63]=48{,}27.$$
15. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Решить уравнение
$$1-\left[\left(3\frac{5}{14}-\frac{1\frac{11}{49}}{x\cdot\frac{25}{38}-47\frac{3}{7}}\right)\cdot\frac{12}{55}+1\frac{3}{85}\right]:5\frac{14}{17}=\frac{5}{7}.$$
    б) Решить уравнение
$$12\frac{3}{5}:\left[5\frac{2}{15}+\left(5\frac{5}{9}-\frac{8\frac{3}{4}}{\frac{8}{21}\cdot x-1\frac{2}{5}}\right)\cdot 5\frac{68}{125}\right]-\frac{2}{11}=\frac{4}{5}.$$
16. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Решить уравнение
$$0{,}9+\left\{\left[3{,}25-\left(6\frac{9}{16}-0{,}025x\right)\cdot 0{,}6\right]:0{,}75\right\}:6\frac{2}{3}=1{,}2.$$

б) Решить уравнение

$$2\frac{2}{3} : \left\{\left[(3{,}72 - 0{,}02 \cdot x) \cdot \frac{10}{37}\right] : \frac{5}{6} + 2{,}8\right\} - \frac{7}{15} = 0{,}2\,.$$

в) Решить уравнение $\left[\left(6\frac{3}{7} - \frac{0{,}75x - 2}{0{,}35}\right) \cdot 2{,}8 + 1{,}75\right] : 0{,}05 = 235\,.$

г) Решить уравнение $\left(3{,}25 - \frac{(6{,}5625 - 2{,}5x) \cdot 0{,}53}{0{,}75}\right) : 6\frac{2}{3} = \frac{4}{15}\,.$

17. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Решить уравнение

$$(0{,}66 - 0{,}012 : 0{,}2) : \left(1 - 1\frac{4}{7} \cdot 0{,}4\right) = 2\frac{9}{13}\,x : \left(3{,}125 - 5{,}6 : 2\frac{2}{3}\right).$$

б) Решить уравнение

$$\left[\left(\frac{30{,}01 - x : 9}{7} + 97{,}785\right) \cdot 8 - 488{,}84\right] : 7 = 45{,}6\,.$$

в) Решить уравнение

$$4{,}98 - 120{,}12 : \left[8{,}008 \cdot \left(4{,}0025 - \frac{1{,}12211 - 2 \cdot x}{4{,}444}\right)\right] + 0{,}03 = 1{,}01\,.$$

г) Решить уравнение

$$\left[0{,}72 - \left(10 - \frac{9{,}99999}{1{,}1 - x}\right) \cdot 0{,}625\right] : 0{,}225 = 0{,}7\,.$$

д) Решить уравнение

$$(1 - 0{,}021 : 0{,}05) : 0{,}13x = \left[2\frac{1}{3} - \left(2\frac{3}{16} - \frac{2}{3}\right)\right] : \frac{3}{8}\,.$$

18. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Найти x:

$$\left(\frac{1}{25 \cdot 26} + \frac{1}{26 \cdot 27} + \frac{1}{27 \cdot 28} + \frac{1}{28 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 30}\right) \cdot 150 + 1{,}03 : [10{,}3 \cdot (x - 1)] = 11.$$

б) Найти x:

$$\left(\frac{2}{11 \cdot 13} + \frac{2}{13 \cdot 15} + \frac{2}{15 \cdot 17} + \frac{2}{17 \cdot 19} + \frac{2}{19 \cdot 21}\right) \cdot 462 - 2{,}04 : (x + 1{,}05) : 0{,}12 = 19.$$

19. $\boxed{6\text{-}7}$ При каких значениях c уравнение $cx = 9$:

а) имеет корень, равный $-9; 0; \frac{1}{5}$;

б) не имеет корней;

в) имеет положительный корень?

20. $\boxed{7}$ Найти x и y, если:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ 3x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 13x + 15y = 58, \\ 18x - 5y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 27x + 35y = 151, \\ 5x - 7y = 1. \end{cases}$

9. Задачи на составление уравнений

Теоретический материал

Любители решать текстовые задачи с помощью составления уравнений могут радоваться.

Примеры решения задач

Пример 1. Некоторое число уменьшили на 4, потом уменьшили в 5 раз и получили число, которое на 36 меньше исходного. Найти исходное число.

Решение. Обозначим исходное число буквой x и составим уравнение:

$$(x-4):5=x-36.$$

Решим это уравнение и найдём исходное число:

$$(x-4):5=x-36 \iff x-4=5x-180 \iff$$
$$\iff 4x=176 \iff x=44.$$

Ответ. 44.

Пример 2. На двух складах было 76 т цемента. На первый склад доставили ещё 20 т цемента. После этого количество цемента на втором складе составило 0,6 того, что стало на первом складе. Сколько цемента было первоначально на каждом складе?

Решение. Обозначим количество цемента на первом складе через x т, тогда на втором складе будет $(76-x)$ т. Составим уравнение:

$$76-x=0{,}6(x+20)$$

и решим его: $1{,}6x=64 \iff x=40$.
Ответ. 40 т и 36 т.

Пример 3. Из двух городов, расстояние между которыми 560 км, вышли два автомобиля навстречу друг другу и встретились через 4 ч. Если скорость первого автомобиля уменьшить на 15%, а скорость второго увеличить на 20%, то встреча произойдёт тоже через 4 часа. Найти скорость каждого автомобиля.

Решение. Обозначим скорость первого автомобиля через x км/ч, а скорость второго через y км/ч. Составим два уравнения с этими неизвестными.

Расстояние 560 км они проходят, двигаясь навстречу друг другу, за 4 ч:

$$(x+y)\cdot 4=560.$$

Если скорость первого автомобиля уменьшить на 15%, а скорость второго увеличить на 20%, то встреча произойдёт тоже через 4 ч:

$$(0{,}85x + 1{,}2y) \cdot 4 = 560.$$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases}(x + y) \cdot 4 = 560,\\ (0{,}85x + 1{,}2y) \cdot 4 = 560;\end{cases} \iff \begin{cases}x + y = 140,\\ 0{,}85x + 1{,}2y = 140.\end{cases}$$

Выразив y из первого уравнения и подставив полученное выражение во второе уравнение, получим

$$0{,}85x + 1{,}2(140 - x) = 140 \iff 0{,}85x + 168 - 1{,}2x = 140 \iff 28 = 0{,}35x,$$

откуда $x = 28 : 0{,}35 = 80$ км/ч и $y = 140 - 80 = 60$ км/ч.

Ответ. 80 км/ч и 60 км/ч.

Задачи

1. $\boxed{5}$ Сколько раз к наибольшему однозначному числу надо прибавить наибольшее двузначное число, чтобы получить наибольшее трёхзначное?

2. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Некоторое число уменьшили на 7, потом уменьшили в 10 раз и получили число, которое на 34 меньше исходного. Найти исходное число.

   $\boxed{5\text{-}6}$ б) Найти такое число, что если его умножить на 52, затем произведение уменьшить в 5 раз, то получим число, которое на 1974 больше искомого.

   $\boxed{6}$ в) Если к задуманному числу прибавить 0,43 его, а затем от полученного результата отнять 0,58 задуманного числа и ещё 4,04, то получим 30,3. Найти задуманное число.

   $\boxed{6}$ г) Если от задуманного числа отнять 0,3 его, к полученному результату прибавить 0,4 задуманного числа, а затем ещё 2,78, то получится 25. Найти задуманное число.

3. $\boxed{6}$ а) От города A до города B 590 км. Часть этого пути идёт в гору, часть — горизонтально и часть — под гору. Путь под гору в 4 раза меньше горизонтального и на 110 км меньше, чем путь в гору. Найти длину пути в гору, горизонтально и под гору.

   б) Группа туристов проехала на пароходе, на автобусе и прошла пешком — всего 475 км. На пароходе туристы проехали на 160 км больше, чем прошли пешком, а на автобусе — в 5 раз больше, чем прошли пешком. Сколько километров проехали туристы на пароходе, сколько — на автобусе и сколько прошли пешком?

   в) В двух ящиках было 155 кг муки. Когда из первого пересыпали во второй 20 кг, то в первом осталось $\frac{12}{19}$ того, что стало во втором. Сколько муки было первоначально в каждом ящике?

г) В двух мешках находится 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй $\frac{1}{8}$ муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках будет поровну. Сколько килограммов муки в каждом мешке?

4. $\boxed{5\text{-}7}$ а) В переплётной мастерской было 92 листа белой бумаги и 135 листов цветной бумаги. На переплёт каждой книги уходило по листу белой и по листу цветной бумаги. После переплёта нескольких книг белой бумаги оказалось вдвое меньше, чем цветной. Сколько книг было переплетено?

б) К новогоднему празднику школа покупает каждому ученику по шоколадке. Известно, что если покупать шоколад в упаковках по 20 шоколадок в каждой, то понадобится на 5 упаковок больше, чем упаковок по 24 шоколадки. Сколько учеников в школе?

в) На одной чашке весов лежит 6 одинаковых пачек чая и гиря в 50 г, а на другой чашке весов лежит одна такая пачка чая, гиря в 100 г и гиря в 200 г. Весы находятся в равновесии. Сколько граммов весит одна пачка чая?

г) Если школьник купит 11 тетрадей, то у него останется 5 рублей. А на 15 тетрадей у него не хватает 7 рублей. Сколько денег у школьника?

д) Для экскурсии надо собрать деньги. Если каждый экскурсант внесёт по 75 коп., то на расходы не хватит 4,4 руб. Если каждый внесёт по 80 коп., то останется 4,4 руб. Сколько человек принимает участие в экскурсии?

е) Фермер предполагал уложить виноград в ящики, по 9,375 кг в каждый, но, взяв ящики большего размера, положил в каждый ящик по 12,5 кг. Ящиков для этого потребовалось на 40 меньше, чем предполагали. Сколько килограммов винограда собирался отправить фермер?

ж) В двух сосудах находится по 540 л воды. Из первого сосуда вытекает 25 л в минуту, а из второго 15 л в минуту. Через сколько минут во втором сосуде останется воды в 6 раз больше, чем в первом?

з) В двух корзинах было поровну яблок. После того как из одной корзины продали 150 яблок, а из другой — 194, в первой корзине осталось яблок в три раза больше, чем во второй. Сколько яблок было в каждой корзине?

и) Из села в город, до которого 48 км, отправились одновременно фермер на лошади со скоростью 7 км/ч и мальчик на велосипеде со скоростью 13 км/ч. Через сколько часов остаток пути для мальчика будет в 3 раза меньше, чем остаток пути для фермера?

к) В одном баке 400 л бензина, в другом 900 л. Каждый час из первого бака выливают 20 л, а из второго — 10 л. Через сколько часов в первом баке останется бензина в 4 раза меньше, чем во втором?

5. $\boxed{5\text{-}7}$ а) От города A до города B поезд шёл 16 ч. Обратный путь этот поезд прошёл со скоростью на 20 км в час большей и поэтому прошёл весь путь на 4 ч быстрее. С какой скоростью шёл поезд от A до B и чему равно расстояние от A до B?

б) Из пункта A в пункт B вышли два человека. Первый шёл по шоссе со скоростью 5 км/ч, а второй — по тропинке со скоростью 4 км/ч. Первый из них пришёл в пункт B на час позже и прошёл на 6 км больше. Найдите расстояние от A до B по шоссе.

6. $\boxed{5\text{-}6}$ У мальчика столько же сестёр, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестёр, чем братьев. Сколько в этой семье братьев и сколько сестёр?

7. $\boxed{6}$ Килограмм говядины с костями стоит 78 рублей, килограмм говядины без костей — 90 рублей, а килограмм костей — 15 рублей. Сколько граммов костей в килограмме говядины?

8. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Число a составляет 80% числа b, а число c составляет 140% числа b. Найдите числа a, b, c, если известно, что c больше a на 72.

б) Сумма 0,4 первого числа и 0,4 второго числа равна 0,75. Чему равна сумма 0,15 первого числа и 0,15 второго числа?

в) Разность между $\frac{5}{12}$ первого числа и $\frac{5}{12}$ второго числа равна $\frac{3}{8}$. Чему равна разность $\frac{4}{7}$ первого числа и $\frac{4}{7}$ второго числа?

9. $\boxed{6}$ а) Матери было 28 лет, когда у неё родился сын. Сколько лет матери и сколько лет будет сыну в 1972 году, если в 1966 году сын был моложе матери в 4,5 раза?

б) Сестра моложе брата на 9 лет. Сколько лет будет сестре и сколько брату в 1978 году, если в 1970 году брат был в 2,5 раза старше сестры?

10. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Участок под клубнику прямоугольной формы, длина которого в 3 раза больше ширины, окружён оградой, отстоящей от сторон участка на 2 м. Площадь, ограниченная оградой, на 128 м^2 больше площади самого участка. Определите длину участка.

б) Периметр прямоугольника равен 18 см. Если его длину уменьшить на 20%, а ширину увеличить на 25%, то периметр не изменится. Найти площадь прямоугольника.

11. $\boxed{5}$ а) Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько страниц в книге?

$\boxed{6}$ б) В строку друг за другом записаны все натуральные числа от 1 до n. Для какого n написанное число является 1998-значным?

$\boxed{6}$ в) Страницы справочника по математике пронумерованы, на последней странице стоит число 710. Сколько потребовалось цифр для нумерации всех страниц? (Предполагается, что все без исключения страницы занумерованы, начиная с первой.)

$\boxed{6}$ г) Ученик пронумеровал страницы своей тетради. Для этого он решил писать номера страниц только с одной стороны, ставя нечётные номера: 1, 3, 5 и т. д. Всего он написал 104 цифры. Сколько всего страниц в тетради и сколько раз ученик написал цифру 7?

12. $\boxed{6\text{-}7}$ Из двух сплавов с 60%-м и 80%-м содержанием меди требуется получить сплав в 40 кг с 75%-м содержанием меди. Сколько килограммов каждого сплава следует взять для этого?

13. $\boxed{6\text{-}7}$ а) В двух ящиках было 43,25 кг сахара. После того как из первого ящика переложили во второй 4,75 кг, в первом осталось 0,73 того, что стало во втором. Сколько сахара было первоначально в каждом ящике?

б) На двух складах было 60 т угля. На первый склад ещё доставили 7,5 т угля. После этого количество угля на втором складе составило 0,875 того, что стало на первом складе. Сколько угля было первоначально на каждом складе?

в) Школьники собрали за два дня 630 кг макулатуры. Сколько макулатуры собрано в каждый день, если 0,45 того, что собрано в первый день, равны 0,36 того, что собрано во второй?

г) За две книги уплатили 1 руб. 35 коп. Сколько стоит каждая книга, если 0,35 цены первой книги равны 0,28 цены второй книги?

д) Два мальчика имели вместе 43 коп. Когда первый израсходовал 5 коп., а второй — 13 коп., то оставшиеся деньги первого составили $\frac{2}{3}$ оставшихся денег второго. Сколько денег у каждого было первоначально?

е) Площадь двух участков земли равна 24,25 га. Если от первого отрезать 3,5 га и присоединить их ко второму, то в первом всё-таки окажется больше на 0,6 га, чем станет во втором. Как велик каждый участок?

ж) В двух бутылях 12 л чернил. Если из первой бутыли отлить 4 л, а во вторую долить 2,5 л, то во второй станет на

1,25 л больше, чем в первой. Сколько чернил было в каждой бутыли?

з) В двух корзинах 140 яблок. Сколько яблок в каждой корзине, если 0,3 количества яблок в первой корзине в три раза меньше, чем 0,36 количества яблок во второй корзине?

14. 6-7 а) При сложении двух целых чисел ученик по ошибке поставил во втором слагаемом лишний нуль на конце и получил в сумме 6641 вместо 2411. Определить слагаемые.

б) На соревнованиях по фигурному катанию все 9 судей поставили за технику исполнения и артистизм спортсмена только оценки 5,6 и 5,7. Сумма всех оценок оказалась равной 101,9. Сколько оценок 5,7 получил спортсмен?

в) На школьной викторине было предложено 30 вопросов каждому участнику. За каждый правильный ответ на вопрос участнику турнира засчитывалось 7 очков, а за неправильный ответ с него списывалось 12 очков. Сколько верных ответов дал один из участников, если при окончательном подсчёте оказалось, что он набрал 77 очков?

г) Произведение двух чисел равно 23 664. Если второй сомножитель уменьшить на 4, то произведение станет равным 22 032. Каковы эти числа?

д) Частное двух чисел равно 165. Если делимое уменьшить на 143, то частное станет равным 154. Каковы эти числа?

15. 6-7 а) За 8 альбомов, 3 линейки и 4 циркуля заплатили 2,7 руб. Альбом в 4 раза дороже линейки, а 5 линеек стоят столько же, сколько 2 циркуля. Найти цену альбома, линейки и циркуля.

б) Тремя тракторами вспахано 116 га. При этом 0,75 площади, вспаханной первым, равны $\frac{2}{3}$ площади, вспаханной вторым; третьим вспахано в полтора раза больше, чем первым. Сколько гектаров вспахано каждым трактором?

в) На 19,8 руб. купили 9 кг яблок, 8 кг груш и 5 кг слив. Цена яблок в 1,5 раза меньше цены груш, а 3 кг яблок стоят столько же, сколько 4 кг слив. Найти цену 1 кг яблок, груш и слив.

16. 6-7 а) В два сосуда A и B одинакового веса налита вода, причём вес сосуда A с водой составляет $\frac{4}{5}$ веса сосуда B с водой. Если содержимое сосуда B перелить в A, то вес последнего вместе с водой превысит вес сосуда B в 8 раз. Найти вес каждого сосуда и вес воды в каждом из них, зная, что в B первоначально было на 50 г больше воды, нежели в A.

б) Два мальчика решили купить конструктор. Количество денег второго составляло $\frac{5}{6}$ количества денег первого. У первого недоставало $\frac{3}{8}$ суммы денег, которую надо было заплатить за конструктор, а у обоих вместе было на 1,4 руб. больше, чем стоил конструктор. Сколько стоил конструктор?

17. $\boxed{6\text{-}7}$ Продано некоторое количество муки двух сортов, причём средняя продажная цена оказалась 34 коп. за 1 кг. Количество проданной муки первого сорта составило $\frac{5}{12}$ количества муки второго сорта. Мука первого сорта продавалась по 46 коп. за 1 кг. Найти цену муки второго сорта.

18. $\boxed{6\text{-}7}$ Некоторую работу могут выполнить трое рабочих. Второй и третий могут вместе выполнить её в два раза быстрее первого; первый и третий могут вместе выполнить её в три раза быстрее второго. Во сколько раз первый и второй могут выполнить эту работу быстрее, чем третий?

19. $\boxed{6\text{-}7}$ а) За первый день бригада скосила 15 га, а за второй день — 20% оставшейся площади. Всего за 2 дня было скошено 36% всех лугов. Найдите площадь всех лугов.

б) Магазин продал кусок ткани в течение четырёх дней. В первый день было продано $\frac{1}{6}$ всего куска и ещё 5 м, во второй — 20% остатка и ещё 10 м, в третий день — 25% нового остатка и ещё 9 м, в четвёртый день — $\frac{1}{3}$ того, что осталось после продажи в третий день, и последние 13 м. Сколько метров было в куске?

в) База отпустила четырём столовым картофель. Первой столовой отпущено 12,5% всего картофеля и ещё 10 кг, второй — $\frac{10}{31}$ остатка и ещё 40 кг, третьей — 40% нового остатка, четвёртой столовой — 75% третьего остатка и остальные 57 кг. Сколько картофеля отпущено всем четырём столовым?

20. $\boxed{6\text{-}7}$ Два мотоцикла выехали из города в одном направлении: первый — в 8 ч утра, второй — в 10 ч 50 мин. После того как второй мотоцикл догнал первый, они ещё продолжали путь в течение 2,5 ч. В момент остановки оказалось, что второй мотоцикл обогнал первый на 3 км. В котором часу второй мотоцикл догнал первый и какое расстояние прошли мотоциклы до этого, если скорость первого мотоцикла равна 0,6 скорости второго?

21. $\boxed{7}$ Из города *A* в город *B* одновременно выехали два мотоциклиста Петров и Иванов, и в тот же момент из города *B* навстречу им выехали мотоциклисты Ивановский и Петровский. Иванов едет в два раза быстрее Петрова, а Ивановский в три раза быстрее Петровского. Иванов встретил Петровского в тот же момент, когда Петров встретил Ивановского. Чья

встреча произошла ближе к городу A: Иванова с Ивановским или Петрова с Петровским?

22. $\boxed{7}$ Ученик купил портфель, авторучку и книгу. Если бы портфель стоил в пять раз дешевле, авторучка в два раза дешевле, а книга в 2,5 раза дешевле, то вся покупка стоила бы 2 руб. Если бы портфель стоил в два раза дешевле, авторучка в четыре раза дешевле, а книга в три раза дешевле, то вся покупка стоила бы 3 руб. Сколько же она стоит на самом деле? Что дороже: портфель или авторучка?

23. $\boxed{7}$ Передние покрышки у автомобиля стираются через 25 000 км пути, а задние — через 15 000 км пути. Когда нужно поменять покрышки местами, чтобы они стёрлись одновременно?

24. $\boxed{6}$ а) Винни-Пух, Пятачок, Кролик и ослик Иа-Иа пошли гулять к Шести Соснам, растущим вдоль прямой дорожки (в порядке возрастания номеров). Винни-Пух нашёл, что от первой сосны до четвёртой расстояние такое же, как от третьей до шестой. Кролик сказал, что третья сосна в три раза дальше от первой, чем вторая. Пятачок заметил, что от пятой сосны до четвёртой вдвое дальше, чем до шестой. А Иа-Иа заявил, что расстояние от первой сосны до второй больше, чем от пятой до шестой, на половину длины его хвоста. Докажите, что кто-то из них ошибся.

    б) Удав, Мартышка, Слонёнок и Попугай пошли гулять к Шести Пальмам, растущим вдоль прямой дорожки (в порядке возрастания номеров). Удав обнаружил, что от первой пальмы до четвёртой расстояние такое же, как от третьей до шестой. Мартышка сказала, что третья пальма в четыре раза дальше от первой, чем вторая. Слонёнок заметил, что от пятой пальмы до шестой втрое ближе, чем до четвёртой. А Попугай заявил, что расстояния от второй пальмы до третьей и от четвёртой до пятой отличаются на одно попугайское крылышко. Докажите, что кто-то из них ошибся.

10. Манипуляции с числами

Теоретический материал

По сути, это первый раздел, в котором приведены собственно олимпиадные задачи.

Задачи, где надо вставить знаки арифметических действий между цифрами и скобки, решаются подбором и часто имеют много решений. Обычно достаточно найти какое-то одно решение.

Примеры решения задач

Пример 1. Расставьте знаки действий и скобки между цифрами так, чтобы получить верное равенство:

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\quad 9 = 100.$$

Решение. Такие задачи решаются подбором. Это можно сделать, например, так:

$$(1+2+3+4+5)\cdot 6-7+8+9=100$$

или так:

$$(1+2\cdot 3\cdot 4)\cdot(5-(6-7)\cdot(8-9)).$$

Конечно, это не все возможные решения, но обычно достаточно привести одно решение.

Ответ. $(1+2+3+4+5)\cdot 6-7+8+9=100$
или $(1+2\cdot 3\cdot 4)\cdot(5-(6-7)\cdot(8-9))$.

Пример 2. Запишите число 2013, используя 13 единиц, скобки и арифметические операции.

Решение. Это можно сделать, например, так:

$$(1111-111)\cdot(1+1)+11+1+1=2013.$$

Ответ. $(1111-111)\cdot(1+1)+11+1+1=2013$.

Пример 3. При переписывании четырёхзначного кода домофона своего приятеля Петя пропустил одну цифру и записал трёхзначный номер. Сколько раз придётся Пете набирать четырёхзначный номер на устройстве домофона, чтобы гарантированно набрать верный номер?

Решение. Посчитаем, сколько различных четырёхзначных номеров можно получить из произвольного трёхзначного номера.

Поскольку номер домофона может начинаться с любой цифры, то перед первой цифрой могут стоять цифры от 0 до 9, т. е. 10 различных номеров.

Между первой и второй цифрой трёхзначного номера можно поставить любую цифру от 0 до 9, но среди получающихся при этом номеров один совпадёт с номером из предыдущей серии, а именно тот у которого первая и вторая цифра одинаковые. Понятно, что более одного совпадения в первой и второй серии быть не может, потому что в первой серии первые цифры все разные, а во второй — одинаковые. Значит, во второй серии мы получили 9 новых четырёхзначных номеров.

Аналогично доказывается, что, вставляя цифры между второй и третьей цифрой трёхзначного номера, мы получим девять новых четырёхзначных номеров. Девять же новых номеров получим, вставляя цифру в конце.

Значит, всего существует 37 четырёхзначных комбинаций, в которые входят данные три цифры в заданном порядке.

Ответ. 37.

Задачи

1. $\boxed{5\text{-}7}$ Сколько имеется двузначных чисел, у которых:

   а) среди цифр есть хоть одна пятёрка?

   б) цифра десятков меньше цифры единиц?

   в) цифра десятков больше цифры единиц?

2. $\boxed{5\text{-}7}$ Подряд выписаны все целые числа от 1 до 100. Сколько раз в этой записи встречаются цифры:

   а) нуль; б) единица; в) три?

3. $\boxed{5\text{-}6}$ Возраст старика Хоттабыча записывается числом с различными цифрами. Об этом числе известно следующее:

   1) если первую и последнюю цифры зачеркнуть, то получится двузначное число, которое при сумме цифр, равной 13, является наибольшим;

   2) первая цифра больше последней в 4 раза.

   Сколько лет старику Хоттабычу?

4. $\boxed{6\text{-}7}$ Переложите одну из семи спичек, изображающих число $\frac{7}{10}$, записанное римскими цифрами $\left(\frac{\text{VII}}{\text{X}}\right)$, так, чтобы получившаяся дробь равнялась $\frac{2}{3}$.

5. $\boxed{6\text{-}7}$ Найдите все дроби со знаменателем 15, которые больше $\frac{8}{9}$ и меньше 1.

6. $\boxed{5\text{-}7}$ а) Расставьте скобки в левой части выражения $2:3:4:5:6=5$ так, чтобы получилось верное равенство.

   $\boxed{5\text{-}6}$ б) Расставьте скобки в выражении $7-6-5-4-3-2-1=0$ так, чтобы получилось верное равенство.

   $\boxed{5\text{-}6}$ в) В записи $1*2*3*4*5$ замените звёздочку знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 100.

   $\boxed{5\text{-}7}$ г) Записать с помощью четырёх двоек, знаков арифметических действий и, быть может, скобок, числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

7. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Поставьте в выражении скобки так, чтобы получилось верное равенство: $270+120+390:3\cdot5=1120$.

   б) Расставьте скобки в записи $7\cdot9+12:3-2$ так, чтобы значение полученного выражения было равно: 23; 75.

   в) Катя и Юра купили лотерейные билеты с номерами 625 517 и 322 324 и обнаружили, что в каждом из номеров можно расставить знаки арифметических действий и скобки так, что в каждом случае результат будет равняться 100. Как это можно сделать?

8. $\boxed{5\text{-}7}$ а) В выражении $1:2:3:4:5:6:7:8:9$ расставить скобки так, чтобы результат был: минимальным; максимальным.

б) Расставьте в записи $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$ скобки так, чтобы получилось: число 50; наименьшее возможное число; наибольшее возможное число.

9. $\boxed{6}$ На листе бумаги написаны двадцать чисел 1,1 и двадцать чисел 1,11. Зачеркните несколько чисел так, чтобы сумма оставшихся была равна 19,93.

10. $\boxed{6}$ а) Найдите десять натуральных чисел, сумма и произведение которых равны двадцати.

б) Найдите 100 натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.

11. $\boxed{7}$ Девятизначное число, в записи которого есть все цифры, кроме нуля, после некоторой перестановки цифр уменьшилось в восемь раз. Найдите все такие числа.

12. $\boxed{6\text{-}7}$ Существует ли натуральное число n такое, что десятичная запись числа n^2 начинается с цифр 123 456 789?

13. $\boxed{5\text{-}7}$ Расставьте знаки действий и скобки так, чтобы получить верное равенство:

а) $1 \quad 9 \quad 9 \quad 9 = 0$, б) $1 \quad 9 \quad 9 \quad 9 = 1$,
в) $1 \quad 9 \quad 9 \quad 9 = 3$, г) $1 \quad 9 \quad 9 \quad 9 = 9$,
д) $1 \quad 9 \quad 9 \quad 9 = 10$.

14. $\boxed{5\text{-}7}$ Запишите число 100 с помощью:

а) пяти единиц и знаков действий;
б) пяти пятёрок и знаков действий;
в) пяти троек и знаков действий.

15. $\boxed{5\text{-}6}$ Запишите число 1 000 000, используя только цифру 3, знаки арифметических действий и скобки, если они необходимы. Можно ли в этой записи обойтись без действия деления?

16. $\boxed{6}$ а) Запишите число 1997 с помощью 10 двоек и арифметических операций.

б) Запишите число 1997 с помощью 10 троек и арифметических операций.

в) Запишите число 2000, используя 9 единиц, скобки и арифметические операции.

г) Запишите число 2000, используя 8 девяток, скобки и арифметические операции.

д) В ряд выписаны 12 девяток: 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9. Поставьте между некоторыми цифрами знаки арифметических действий и скобки так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 2000.

17. $\boxed{5\text{-}7}$ а) В записи 8 8 8 8 8 8 8 8 поставьте между некоторыми цифрами знак сложения так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 1000.

[5-7] б) Записаны подряд двадцать пятёрок: 5 5 5 ... 5 5 5. Поставьте между некоторыми цифрами знак сложения так, чтобы сумма равнялась 1000.

[5-7] в) Выразить число 16 с помощью четырёх пятёрок, соединяя их знаками действий.

[7] г) Выразить число 10 пятью девятками. Укажите как можно больше способов.

18. [5-7] а) Написать число 9 с помощью десяти различных цифр, знаков арифметических действий и скобок.

[6] б) Запиши число 100 девятью различными цифрами, соединёнными знаками арифметических действий.

[6] в) Между некоторыми цифрами 1 2 3 4 5 6 7 8 9, написанными в указанном порядке, поставить знаки сложения и вычитания так, чтобы получилось число, равное 100.

[6-7] г) Написать число 100 с помощью арифметических операций и шести одинаковых цифр.

19. [6] Кузнечик прыгает вдоль прямой вперёд на 80 см или назад на 50 см. Может ли он менее чем за 7 прыжков удалиться от начальной точки ровно на 1 м 70 см?

20. [5-6] В кабинете математики для консультации собрались трое учеников: Аня, Боря и Света. Для ответа на вопросы Ани требуется 5 минут, Бори — 2 минуты, а Светы — 7 минут. Ученик, получивший ответы на свои вопросы, уходит. Как учителю правильнее построить проведение консультации, чтобы суммарное время нахождения учеников в кабинете было как можно меньше?

21. [6] Дан шестизначный телефонный номер. Сколько существует различных семизначных номеров, из которых при зачёркивании одной цифры получается данный шестизначный номер (телефонный номер не может начинаться с нуля)?

22. [6] Сколько билетов подряд надо приобрести в автобусной кассе, чтобы наверняка попался счастливый билет? Билет называется счастливым, если сумма первых трёх его цифр равна сумме трёх последних. Номера билетов идут по порядку от 000 001 до 999 999. Количество билетов в кассе не ограничено.

23. [5-7] Дядька Черномор и 33 богатыря охраняют остров Буян. Наряд из 6 богатырей дежурит в течение суток. Каким образом дядька Черномор может организовать дежурство в течение 11 суток так, чтобы каждый богатырь отдежурил 2 суток?

11. Ребусы

Теоретический материал

В ребусах во всех задачах одинаковыми буквами обозначаются одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры. Ребусы решаются перебором вариантов с анализом. Начинать удобно либо с первых цифр чисел ребуса, либо с последних.

При решении этих задач надо очень хорошо помнить таблицу сложения и таблицу умножения.

Примеры решения задач

Пример 1. Решите числовой ребус: ОДИН + ОДИН = МНОГО.

Решение. Числовые ребусы решают перебором с анализом.

Сумма двух одинаковых четырёхзначных чисел равна пятизначному. Поэтому первая цифра четырёхзначного числа не меньше 5, а первая цифра пятизначного числа равна 1. Поскольку последняя цифра пятизначного числа получается из суммы двух одинаковых чисел, то она обязательно чётная. Значит, О может быть только цифрой 6 или 8.

1-й случай. О = 6: 6ДИН + 6ДИН = 1Н6Г6.

Тогда Н может равняться 3 или 8. Но $6 + 6 = 12$, поэтому Н может равняться 2 или 3. Значит, Н = 3: 6ДИ3 + 6ДИ3 = 136Г6. Поскольку Д уже не может равняться 3, получаем Д = 8: 68И3 + 68И3 = 136Г6. Так как цифры $1, 3, 6$ и 8 заняты, то И = 2, Г = 4. Следовательно, $6823 + 6823 = 13\,646$.

2-й случай. О = 8: 8ДИН + 8ДИН = 1Н8Г8.

Поскольку $8 + 8 = 16$, Н может равняться 6 или 7. Но если сложить последние цифры, то $6 + 6 = 12$ и $7 + 7 = 14$. Ни один из этих вариантов не может дать в сумме на конце 8. Значит, в этом случае нет решений.

Ответ. $6823 + 6823 = 13\,646$.

Пример 2. В записи умножения в столбик

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} **\\ ** \end{array}\\ \hline **7\\ **\\ \hline 2** \end{array}$$

большинство цифр заменено знаком $*$. Восстановите эти цифры (найдите все возможные варианты).

Р е ш е н и е. Первые цифры третьей и четвёртой строчек не могут быть нулями. В пятой строчке стоит 2, значит, эти цифры равны 1:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} **\\ ** \end{array} \\ \hline 1*7 \\ 1* \\ \hline 2*7 \end{array}$$

Четвёртая строчка ребуса является произведением первой цифры второго множителя на двузначное число (первый множитель), значит, первые цифры первой и второй строчек равны 1:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 1*\\ 1* \end{array} \\ \hline 1*7 \\ 1* \\ \hline 2*7 \end{array}$$

Произведение двух множителей вида $1*$ оканчивается на 7, значит, они равны либо 11 и 17, либо 13 и 19. Вариант 11 и 17 не годится, поскольку $11 \cdot 17 = 187$, где первая цифра 1, а не 2. Значит, искомые множители равны 13 и 19. Так как вторая строчка ребуса — трёхзначное число, а третья — двузначное, то второй множитель больше первого, т. е. 13 — первый множитель, а 19 — второй.

О т в е т. $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 13\\ 19 \end{array} \\ \hline 117 \\ 13 \\ \hline 247 \end{array}$$

Задачи

1. $\boxed{6}$ а) Поставьте вместо звёздочек цифры:

$$59{,}27 + **{,}45 + 78{,}*3 = 182{,}1* .$$

$\boxed{5}$ б) Поставьте вместо звёздочек цифры:

$$*5*8 + 5*3* = *0\,209.$$

2. $\boxed{6\text{-}7}$ Восстановить цифры $(*)$ и знаки действий (?):
   а) $3*5{,}67* \ ?\ 20*{,}**9 = *96{,}889;$
   б) $123{,}*7* \ ?\ 348{,}2*4 \ ?\ 2*9{,}748 = *3*{,}497.$

3. $\boxed{6}$ Восстановить пропущенные цифры: $977{,}6 : 3{,}*5 = 3**{,}8.$

4. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Расшифруйте пример: $A + BB + A = CCC.$
   б) Решите числовой ребус: $AAA - AA - A = BB.$
   в) Решите ребус: $ABBA + A + B = CDDA.$

5. [5-6] Замените A на цифру, звёздочки — на арифметические действия (необязательно одинаковые) и расставьте скобки так, чтобы было верным равенство: $AAA * A * A = 1998$.

6. [5-6] Решите числовой ребус: $AAAA - BBB + CC - D = 1234$.

7. [6-7] а) Расшифруйте запись: КОКА + КОЛА = ВОДА.
б) Расшифруйте запись: УДАР + УДАР = ДРАМА.

8. [6-7] Дробь $\dfrac{\text{В}\cdot\text{А}\cdot\text{Р}\cdot\text{Е}\cdot\text{Н}\cdot\text{Ь}\cdot\text{Е}}{\text{К}\cdot\text{А}\cdot\text{Р}\cdot\text{Л}\cdot\text{С}\cdot\text{О}\cdot\text{Н}}$ равна целому числу, разные буквы обозначают разные цифры, а между ними стоит знак умножения. Чему равна дробь?

9. [6-7] В приведённых ниже примерах указаны действия с однозначными числами, обозначенными буквами. Найдите эти числа и запишите, как вы при этом рассуждали.

$$\text{А}\cdot\text{А} = \text{Б},\quad \text{В}\cdot\text{И} = \text{Г},\quad \text{Е}\cdot\text{А} = \text{А}.$$

10. [5-6] Найдите пропущенные цифры, обозначенные звёздочками, и объясните, как вы рассуждали:

а) $$\begin{array}{r} 63\\ \times\ **\\ \hline **\\ **\\ \hline *** \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} 785\\ \times\ ***\\ \hline ***\\ 1***\\ ***\\ \hline ***** \end{array}$$

в) $$\begin{array}{r} 8*\\ \times\ ***\\ \hline **\\ **\\ **\\ \hline ***8 \end{array}$$

11. [5-6] Расшифруйте два ребуса, в которых одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным буквам — разные цифры в обоих примерах.

$$\begin{array}{r} \text{АБВ}\\ +\ \text{ВВ}\\ \hline \text{ААБ} \end{array}\qquad \begin{array}{r} \text{АБВ}\\ \times\ \text{ВВ}\\ \hline \text{АБВ}\\ \text{АБВ}\phantom{\text{В}}\\ \hline \text{АГАВ} \end{array}$$

12. [6-7] Расшифруйте запись. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным буквам — разные цифры.

$$\begin{array}{r} \text{МИНУС}\\ \times\ \text{МИНУС}\\ \hline ****\text{С}\\ *****\text{У}\\ ****\text{Н}\\ ****\text{И}\\ \text{МИНУС}\\ \hline ********** \end{array}$$

13. [5-7] Решите числовые ребусы:

а) $$\begin{array}{r} *76\\ \times\ **\\ \hline 18**\\ ****\\ \hline **920 \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} 2*9\\ \times\ **\\ \hline *5*\\ ****\\ \hline ***06 \end{array}$$

в) $$\begin{array}{r} *2*3\\ \times\ **\\ \hline ***87\\ *****\\ \hline 2*004* \end{array}$$

г) $$\begin{array}{r} **5\\ \times\ 4*\\ \hline 3**\\ *2**\\ \hline 1**** \end{array}$$

д) $$\begin{array}{r} ***\\ \times\ *8\\ \hline ***\\ ***5\\ \hline ****0 \end{array}$$

е) $$\begin{array}{r} ****\\ \times\ *2\\ \hline 18*48\\ 7499*\\ \hline ***66* \end{array}$$

ж) $$\begin{array}{r} ***\\ \times\ 2**\\ \hline 2**5\\ **0\\ \hline 83*** \end{array}$$

з) $$\begin{array}{r} **,*\\ \times\ 2,*7\\ \hline ****\\ ***\\ \hline **,835 \end{array}$$

14. [6-7] Решите числовые ребусы:

а) $$\begin{array}{r} **4\\ \times\ 23*\\ \hline **24\\ 1***\\ 1***\\ \hline *1**** \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} *****\\ \times\ 34*\\ \hline *****\\ ******\\ 235038\\ \hline *******6 \end{array}$$

в) $$\begin{array}{r} *7***\\ \times\ 743\\ \hline *****5\\ ******\\ ******\\ \hline 42***87* \end{array}$$

г) $$\begin{array}{r} **8\\ \times\ ***\\ \hline 7**4\\ 7**4\\ 7**4\\ \hline **8*** \end{array}$$

д) $$\begin{array}{r} **6\\ \times\ 3**\\ \hline 2**6\\ 2**2\\ **8*\\ \hline 14**** \end{array}$$

е) $$\begin{array}{r} 23**85\\ \times\ ***5\\ \hline *****2*\\ *347**\\ **9570\\ *04***\\ \hline 7******** \end{array}$$

ж) $$\begin{array}{r} **8*\\ \times\ *7*\\ \hline 3***0\\ **0*2\\ ***3*\\ \hline ***9*** \end{array}$$

з) $$\begin{array}{r} *,3*\\ \times\ **,4\\ \hline ***\\ ***0\\ \hline ***,**4 \end{array}$$

15. [6-7] Восстановить пропущенные цифры: $237 \cdot *1*** = 7***065$.

16. [6-7] Расшифруйте ребус (разные буквы обозначают разные цифры) и найдите значение выражения в нижней строке:

$$\begin{array}{ccccc} Л & \times & О & = & М\\ + & & : & & +\\ О & \times & Н & = & О\\ \| & & \| & & \|\\ С & - & О & + & В = ? \end{array}$$

17. $\boxed{7}$ Найти делимое, делитель и частное в примере

```
******|***
****  |---
----  |***
  *** |
  *** |
  --- |
  ****
  ****
  ----
     0
```

Достаточно привести один вариант ответа.

18. $\boxed{7}$ Заменяя знаки $*$ только цифрами 2, 4, 5, 7 и 9, восстановите запись деления в столбик:

```
***|**
** |--
-- |**
 **
 **
 --
  0
```

12. Разные задачи

Теоретический материал

В этом разделе приведены задачи различных типов. Кроме того, приведены текстовые задачи, при решении которых построение графиков помогает легко решить задачу. Вообще говоря, эти задачи решаются и без применения графиков, но решение с использованием графиков иногда бывает нагляднее и проще.

Примеры решения задач

Пример 1. Два велосипедиста совершили прогулку. Первый выехал в 9 ч 10 мин из пункта A и прибыл в 13 ч 10 мин в пункт B. Второй выехал в 10 ч 30 мин из B и прибыл в A в 16 ч 30 мин. В какое время они встретились?

Решение. Эту задачу можно решить как стандартным способом, так и графически.

Арифметический способ. Обозначим расстояние между пунктами A и B через S км. Поскольку первый велосипедист проехал расстояние от A до B за 4 часа, а второй — за 6 часов, то скорость первого велосипедиста равна $\frac{S}{4}$ км/ч, а второго — $\frac{S}{6}$ км/ч.

К моменту выезда второго велосипедиста первый был в пути 1 час 20 мин и проехал $\frac{S}{4} \cdot \frac{8}{6} = \frac{S}{3}$ км. Значит, к моменту выезда второго велосипедиста между ними было расстояние $S - \frac{S}{3} = \frac{2}{3} S$ км.

Теперь найдём, через какое время велосипедисты встретятся, считая от момента выезда второго велосипедиста:

$$t = \frac{\frac{2}{3}S}{\frac{S}{4}+\frac{S}{6}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3+2}{12}} = \frac{96}{60}.$$

Следовательно, они встретятся через 1 ч 36 мин после выезда второго велосипедиста, т. е. в 12 ч 6 мин.

Графический способ. Рассмотрим координатную плоскость, где на оси абсцисс отмечается время в часах, а на оси ординат — расстояние от пункта A.

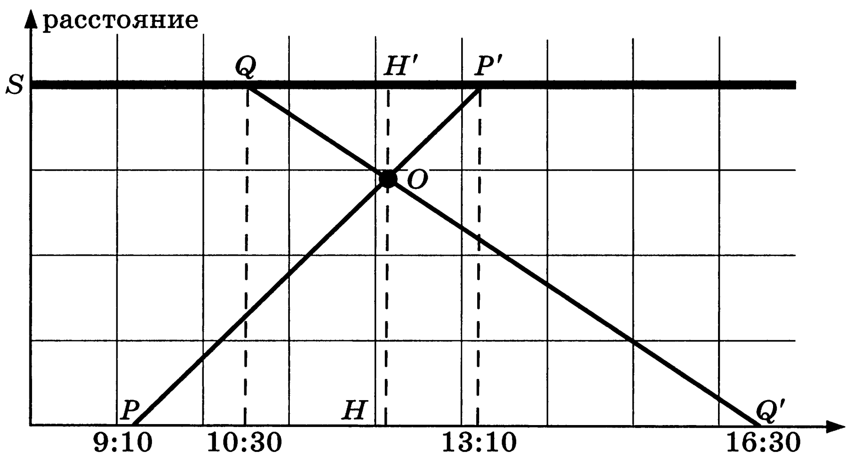
Первый велосипедист выехал в 9 ч 10 мин из пункта A и прибыл в 13 ч 10 мин в пункт B. Так как он движется с постоянной скоростью, то графиком является отрезок прямой линии PP'.

Второй велосипедист выехал в 10 ч 30 мин из B и прибыл в A в 16 ч 30 мин. Графиком его движения является отрезок QQ'.

Нам надо найти абсциссу общей точки графиков — точки O.

Заметим, что треугольники $PQ'O$ и $P'QO$ подобны с коэффициентом подобия, равным

$$k = \frac{PQ'}{P'Q} = \frac{16\frac{1}{2}-9\frac{1}{6}}{13\frac{1}{6}-10\frac{1}{2}} = \frac{7\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}} = \frac{11}{4}.$$



Следовательно, $PQ' = \frac{11}{4}P'Q$, $OH = \frac{11}{4}H'O$ и $PH = \frac{11}{4}P'H'$. Получаем, что, с одной стороны,

$$PH + P'H' = 13\frac{1}{6} - 9\frac{1}{6} = 4,$$

с другой стороны,

$$PH + P'H' = PH + \frac{4}{11}PH = \frac{15}{11}PH.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{15}{11}PH = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad PH = \frac{44}{15} = 2\,\frac{14}{15}$$

и абсцисса точки H равна

$$9\,\frac{1}{6} + 2\,\frac{14}{15} = 12\,\frac{6}{60}\,.$$

Ответ. В 12 ч 6 мин.

Задачи

1. $\boxed{6}$ а) Найти четыре последовательных чётных числа, сумма которых равна 4052.

   б) Сумма шести последовательных чисел равна 1275. Найти эти числа.

   в) Сумма пяти последовательных чисел равна 875. Найти эти числа.

   г) Найти такие шесть чисел, из которых каждое следующее больше предыдущего на 0,4. Их среднее арифметическое равно 3.

   д) Найти такие семь чисел, из которых каждое следующее меньше предыдущего на 0,2. Их среднее арифметическое равно 6,6.

2. $\boxed{6}$ а) Увеличится или уменьшится неправильная дробь, если к её числителю и её знаменателю прибавить одно и то же натуральное число? Почему?

   б) Увеличится или уменьшится правильная дробь, если к её числителю и её знаменателю прибавить одно и то же натуральное число? Почему?

   в) Как изменится частное, если к делимому прибавить его половину, а из делителя вычесть 0,4 его?

3. $\boxed{6\text{-}7}$ а) К делимому прибавили 10, а делитель умножили на 10, частное, однако, не изменилось. Найти первоначальное делимое. Чему может быть равен делитель?

   б) Найти дробь, равную $\frac{5}{7}$, чтобы сумма её числителя и знаменателя равнялась 72.

4. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Найти такое смешанное число, чтобы от деления его целой части на $\frac{7}{30}$ получилось в частном 150, а от деления его дроби на $\frac{7}{30}$ получилось в частном 2.

   б) Найти такое смешанное число, чтобы от деления его целой части на $\frac{11}{200}$ получилось в частном 200, а от деления его дроби на $\frac{11}{200}$ получилось в частном 5.

в) Найти смешанное число такое, что от деления его целой части на $\frac{8}{225}$ получается 900, а от деления дробной части на $\frac{8}{225}$ получается 15.

5. $\boxed{6\text{-}7}$ Быстро установить, что дроби $\frac{23}{99}$, $\frac{2323}{9999}$, $\frac{232\,323}{999\,999}$ равны между собой.

6. $\boxed{7}$ Найти все значения x и y, для которых $x \cdot y + 1 = x + y$.

7. $\boxed{6\text{-}7}$ Выяснить быстро, что больше: A или B?

$$A = 4 + \frac{5}{8} + \frac{6}{8^2} + \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}; \qquad B = 4 + \frac{5}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{7}{8^3} + \frac{6}{8^4}.$$

8. $\boxed{6\text{-}7}$ Если x может принимать любые числовые значения — отрицательные, нуль, положительные, то при каких x выполняется неравенство $x^2 > x^3$?

9. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Какое из выражений больше и на сколько:

$$16 \cdot 0{,}25^{3n-2} : \left(-0{,}5 \cdot 0{,}25^{3n-4}\right) \quad \text{или} \quad 81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12-4n} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{4n-7}?$$

Каким натуральным числом может быть здесь n?

б) Какое из выражений больше:

$$-4 \cdot 0{,}5^{2n-7} \cdot 12 \cdot 0{,}5^{10-2n} \quad \text{или} \quad 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} : \left[0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5x-3}\right]?$$

Какими натуральными числами могут быть выражены n и x?

10. $\boxed{6\text{-}7}$ а) В кошельке десять двухкопеечных и трёхкопеечных монет. Сколько тех и других монет в отдельности, если всего было 26 коп.?

б) В класс принесли партию учебников и задачников, всего на 14 руб. 64 коп. Стоимость одного учебника 42 коп., а задачника 24 коп. Сколько принесли учебников и сколько задачников, если всего принесли 46 книг?

в) В магазине было два куска ткани. Цена ткани первого куска 6 руб. 50 коп. за метр, а второго — 5 руб. 50 коп. за метр. Сколько метров ткани было в каждом куске, если вместе в них было 70 м и стоили они 425 руб.?

г) Имеются два куска ткани различного сорта. Первый кусок, ценой 3 руб. за метр, на 7 руб. 50 коп. дешевле второго. Второй кусок материи, стоимостью 4 руб. 50 коп. за метр, короче первого на 1,5 м. Найти стоимость каждого куска.

11. $\boxed{6\text{-}7}$ а) В трёх районах города 12 000 жителей. Сколько жителей в каждом районе, если известно, что $\frac{2}{3}$ числа жителей первого района равны 0,5 числа жителей второго района и $\frac{2}{5}$ числа жителей третьего района?

б) Трём братьям вместе 58 лет. Сколько лет каждому, если $\frac{3}{4}$ количества лет младшего равны $\frac{2}{3}$ количества лет среднего и равны $\frac{1}{2}$ количества лет старшего?

в) Два ученика купили себе по книге. Первый израсходовал на это $\frac{5}{9}$ своих денег, второй — $\frac{2}{3}$ своих денег. До покупки книг у первого было на 12 коп. меньше, чем у второго, а после покупки стало поровну. Сколько денег было у каждого до покупки?

12. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Если сестра отдаст брату 1,6 руб., то у обоих станет денег поровну. Если же брат даст сестре 0,5 руб., то у сестры станет денег в 2,5 раза больше, чем у брата. Сколько денег у брата и сколько у сестры?

б) Когда Колю и Петю спросили, сколько денег каждый из них накопил на покупку книг, Коля ответил: «Если я дам Пете из своих денег 25 коп., то у нас будет денег поровну. Если же мне Петя даст из своих денег 1 руб. 40 коп., то у меня будет денег в 2,5 раза больше, чем у него». Сколько денег накопил каждый мальчик?

в) В одном бидоне молока в 3 раза больше, чем в другом. Когда в больший бидон долили 6 л, а в другой 7 л, то в первом оказалось молока в 2 раза больше, чем в другом. Сколько молока было первоначально в каждом бидоне?

г) Если из первой корзины переложить 20 апельсинов во вторую, то в обеих корзинах апельсинов окажется поровну. Если же из второй корзины переложить 20 апельсинов в первую, то в первой станет в 3 раза больше, чем во второй. Сколько апельсинов было в каждой корзине?

д) Если из второго вагона 5 пассажиров перейдут в первый, то в вагонах пассажиров станет поровну. Если же из первого вагона 8 пассажиров перейдут во второй, то во втором вагоне станет в 2 раза больше пассажиров, чем в первом. Сколько пассажиров в каждом вагоне?

13. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Брат и сестра измерили шагами длину и ширину огорода прямоугольной формы. Когда брат шёл по длинной стороне, а сестра — по короткой стороне прямоугольника, они сделали вместе 270 шагов. Потом брат шёл по короткой стороне, а сестра — по длинной стороне огорода, и тогда они сделали вместе 290 шагов. Длина шага брата равна 0,8 м, а длина шага сестры равна 0,6 м. Найти площадь огорода.

б) Две машинистки напечатали рукопись. Одна машинистка в час печатала в среднем 12 страниц, а другая — 10 страниц. Сколько страниц в рукописи, если известно, что первая машинистка начала работу на 4 ч раньше, чем вторая, и что они закончили работу одновременно, причём первая машинистка напечатала вдвое больше страниц, чем вторая?

в) Две машинистки получили за работу всего 25 руб., причём одна перепечатала текст, а другая таблицы. Страниц текста было в 2,5 раза больше, чем страниц таблиц, но страница таблиц была оплачена на $66\frac{2}{3}$ % дороже страницы текста. Сколько денег должна получить каждая?

г) Куплено библиотекой на равные суммы несколько одинаковых книг по физике и несколько одинаковых книг по математике, причём книг по физике куплено на 20 экземпляров меньше, чем по математике. Сколько куплено книг по физике и по математике, если книга по физике стоила 63 коп., а по математике 35 коп.?

14. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Две бригады получили задание убрать картофель с двух одинаковых по площади участков. Первая бригада убирала ежедневно по 3,2 га, но через несколько дней ей ещё оставалось убрать картофель с 4 га. Вторая бригада работала на 2 дня больше первой, но ей всё же осталось ещё убрать 0,4 га, так как она убирала только по 2,8 га в день. Чему равна площадь участка, который должна убрать каждая бригада?

б) Два класса обязались собрать по одинаковому количеству макулатуры. Первому классу, который собирал в среднем по 24 кг в день, через несколько дней оставалось собрать ещё 30 кг. Второй класс собирал ежедневно по 28 кг и к тому же он работал на 2 дня дольше первого, поэтому он перевыполнил своё обязательство на 46 кг. Сколько макулатуры обязался собрать каждый класс?

15. $\boxed{6\text{-}7}$ Пешеход и велосипедист отправляются одновременно и по одной дороге из города A в город B, лежащий в 70 км от A. Пешеход идёт со скоростью 3,75 км/ч, велосипедист едет со скоростью 15 км/ч. Через сколько времени между ними будет расстояние, равное 30 км, и какое расстояние до B останется тогда проехать велосипедисту и пройти пешеходу?

16. $\boxed{6\text{-}7}$ Чтобы доставить донесение за 2 ч 40 мин из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 70,5 км, нарочный ехал сначала на велосипеде со скоростью 12,75 км/ч, а затем на мотоцикле со скоростью 67,5 км/ч. Сколько времени ехал нарочный на велосипеде и сколько — на мотоцикле?

17. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Туристический отряд должен прибыть из города A в город B через 8 дней. Спустя два дня после выхода его из города A в город B вышел второй отряд, который должен прибыть в B через 5 дней. Через сколько дней второй отряд догонит первый?

б) Два приятеля, живущие один в пункте A, другой в пункте B, совершили в один и тот же день прогулку. Первый вышел в 10 ч 36 мин из пункта A и пришёл в 16 ч 21 мин в пункт B. Второй вышел в 10 ч 30 мин из B и пришёл в A в 15 ч 6 мин. В какое время они встретились?

в) В 9 ч 25 мин утра пешеход отправился из пункта A в пункт $Б$. Идя с одинаковой скоростью, он прибыл в $Б$ в 13 ч 15 мин. На следующий день в 11 утра он отправился из $Б$ в A, идя равномерно, но несколько скорее, чем он шёл накануне, и прибыл в A в 14 ч 40 мин. Зная, что расстояние между пунктами 12 км, определить, на каком расстоянии от A находится то место, через которое он проходил в один и тот же час в каждый из этих дней?

18. $\boxed{6\text{-}7}$ Из Цветочного города в Солнечный ведёт шоссе длиной 12 км. На втором километре этого шоссе расположен железнодорожный переезд, который три минуты закрыт и три минуты открыт и т. д., а на четвёртом и на шестом километрах расположены светофоры, которые две минуты горят красным светом и три минуты — зелёным и т. д. Незнайка выезжает из Цветочного города в Солнечный в тот момент, когда переезд только что закрылся, а оба светофора только что переключились на красный. За какое наименьшее время (в минутах) он сможет доехать до Солнечного города, не нарушая правил и двигаясь с постоянной скоростью?

Часть II. **УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ**

1. Задачи на вычисление

Задача 1

$\boxed{5}$ Выполните действия: а) $(257\,368 + 2573) + (42\,632 - 1573)$.

Идея. Раскрыть скобки и сгруппировать слагаемые удобным для вычисления способом.
Указание. Первое слагаемое сгруппировать с третьим, а второе — с четвёртым.

Решение. Если сначала выполнить действия в скобках, то вычисления будут громоздкими, поэтому раскроем скобки и перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$(257\,368+2573)+(42\,632-1573)=257\,368+2573+42\,632-1573=$$
$$=257\,368+42\,632+2573-1573=(257\,368+42\,632)+(2573-1573)=$$
$$=300\,000+1000=301\,000.$$

Ответ. 301 000.

Задача 2

$\boxed{7}$ а) Докажите, что выражение $(a+b)x+(a-b)x-2ax$ тождественно равно нулю.

Идея. Сгруппировать слагаемые и привести подобные.
Указание. Вынести общий множитель за скобку.

Решение. Заметим, что во всех трёх слагаемых есть множитель x, вынесем его за скобку и приведём подобные:

$$(a + b)x + (a - b)x - 2ax = x(a + b + a - b - 2a) = x \cdot 0 = 0.$$

> ***Замечание.*** Можно сначала раскрыть скобки, а потом привести подобные. Результат будет такой же.

Задача 3

$\boxed{7}$ а) Среди перечисленных выражений указать такие, которые тождественно равны a^2: $(-a)^2$; $-(-a)^2$; $-a^2$.

Идея. Упростить выражения с помощью алгебраических преобразований.

Решение. Упростим данные выражения и сравним с a^2:

$$(-a)^2 = a^2; \quad -(-a)^2 = -a^2 \neq a^2; \quad -a^2 \neq a^2.$$

Подходит только первое выражение.
Ответ. $(-a)^2$.

Задача 4

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Найдите быстро результат: $\dfrac{m^2(m+n^2)(m^3-n^6)(m^2-n)}{m^2+n^2}$, где $m=4$, $n=16$.

Идея. Подставить заданные значения m и n в выражение и проанализировать каждый из множителей числителя.
Указание. Проанализировать множитель (m^2-n).

Решение. При заданных значениях m и n знаменатель не обращается в нуль, значит, выражение имеет смысл. Заметим, что при $m=4$ и $n=16$ множитель (m^2-n) равен $4^2-16=0$, следовательно, и всё выражение равно нулю.
Ответ. 0.

Задача 5

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Показать, что пятая степень удвоенной разности чисел x и y на 6 меньше 5, если $x=0{,}5$; $y=1$.

Идея. Составить соответствующее равенство для x и y и подставить в него заданные значения.

Решение. Пятая степень удвоенной разности чисел x и y — это $(2(x-y))^5$. Из того, что она на 6 меньше 5, следует, что

$$(2(x-y))^5+6=5.$$

Покажем, что равенство верно при $x=0{,}5$; $y=1$:

$$(2(x-y))^5+6=5 \iff (2(0{,}5-1))^5+6=5 \iff$$
$$\iff (2(-0{,}5))^5+6=5 \iff (-1)^5+6=5 \iff$$
$$\iff -1+6=5 \iff 5=5.$$

Утверждение задачи доказано.

Задача 6

$\boxed{7}$ а) Найти значение выражения $81a^7b^5c^3+36a^5b^6c^4-135a^6b^4c^5$ при $a=-2$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{3}$.

Идея. Разложить числовые коэффициенты на простые множители и произвести сокращения в каждом из одночленов.

Указание. Воспользоваться тем, что при заданных значениях $ab = 1$.
Указание. Воспользоваться тем, что при заданных значениях $3c = -1$.

Решение. Сначала в исходном выражении разложим числовые коэффициенты на простые множители и воспользуемся тем, что $ab = 1$:

$$\begin{aligned}&81a^7b^5c^3 + 36a^5b^6c^4 - 135a^6b^4c^5 =\\&= 3^4(ab)^5a^2c^3 + 2^23^2(ab)^5bc^4 - 3^35(ab)^4a^2c^5 =\\&= 3^4a^2c^3 + 2^23^2bc^4 - 3^35a^2c^5.\end{aligned}$$

В каждом из слагаемых выделим множитель $3c$ и воспользуемся тем, что $3c = -1$:

$$3a^2(3c)^3 + 2^2b(3c)^2c^2 - (3c)^35a^2c^2 = -3a^2 + 2^2bc^2 + 5a^2c^2.$$

Теперь подставим заданные значения $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{3}$:

$$-3\cdot 2^2 - 2^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2} + 5\cdot 2^2\cdot\frac{1}{3^2} = -12 - \frac{2}{9} + \frac{20}{9} = -12 + \frac{18}{9} = -12 + 2 = -10.$$

Ответ. -10.

Задача 7

6-7 1) Вычислить $\dfrac{9a^2 - 3a + 1}{27a^3 + 1}$: а) если a равно наибольшему целому отрицательному числу, б) при $a = -\frac{1}{3}$.

Идея. Упростить выражение с помощью формул сокращённого умножения.
Указание. Воспользоваться формулой суммы кубов.

Решение. Разложим знаменатель дроби на множители с помощью формулы суммы кубов и сократим дробь:

$$\frac{9a^2 - 3a + 1}{(3a)^3 + 1} = \frac{9a^2 - 3a + 1}{(3a + 1)(9a^2 - 3a + 1)} = \frac{1}{3a + 1}.$$

Заметим, что выражение $9a^2 - 3a + 1$ не обращается в нуль, поэтому область допустимых значений a после сокращения на это выражение не изменилась.

Теперь вычислим значение полученной дроби при заданных значениях a.

а) Наибольшим целым отрицательным числом является -1. В этом случае

$$\frac{1}{3a + 1} = \frac{1}{-3 + 1} = -\frac{1}{2}.$$

б) Если $a = -\frac{1}{3}$, то знаменатель дроби $\frac{1}{3a+1}$ обращается в нуль и выражение смысла не имеет.

Ответ. а) $-\frac{1}{2}$; б) при $a = -\frac{1}{3}$ выражение теряет смысл, так как деление на нуль невозможно.

Задача 8

$\boxed{6\text{-}7}$ Написать: 1) полусумму четвёртых степеней чисел a и b и 2) квадрат полусуммы квадратов тех же чисел.

Установить, числовое значение какого из двух выражений больше, при а) $a = -1$, $b = 0{,}5$.

Идея. Составить формальное неравенство для двух данных выражений и с помощью равносильных преобразований свести его к очевидному неравенству.

Указание. Сравнить выражения $\frac{a^4+b^4}{2}$ и $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$.

Решение. Для того чтобы сравнить полусумму четвёртых степеней чисел a и b и квадрат полусуммы квадратов чисел a и b, составим формальное неравенство

$$\frac{a^4+b^4}{2} \vee \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2,$$

где знак «$\vee$» — это либо знак «$>$», либо «$<$», либо «$\geqslant$», либо «$\leqslant$», либо «$=$». Преобразуем второе выражение в этом неравенстве:

$$\frac{a^4+b^4}{2} \vee \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4}.$$

Теперь домножим обе части неравенства на 4 (знак неравенства от этого не изменится) и приведём подобные:

$$\begin{aligned} 2a^4+2b^4 &\vee a^4+2a^2b^2+b^4 \\ a^4-2a^2b^2+b^4 &\vee 0 \\ (a^2-b^2)^2 &\vee 0. \end{aligned}$$

Так как квадрат любого выражения больше либо равен нулю, то знак «$\vee$» — это знак «$\geqslant$», причём равенство достигается только в случае $a^2 = b^2$. Следовательно,

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \quad \text{при любых } a \text{ и } b,$$

а в нашем случае ($a^2 \neq b^2$) неравенство является строгим.

Ответ. $\frac{a^4+b^4}{2} > \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$.

Задача 9

$\boxed{5}$ Найдите ошибку в следующих рассуждениях. Имеем верное числовое равенство: $4 : 4 = 5 : 5$. Вынесем за скобки в каждой части общий множитель. Получим: $4(1 : 1) = 5(1 : 1)$. Числа в скобках равны, поэтому $4 = 5$, или $2 \cdot 2 = 5$.

Идея. Вспомнить правила вынесения общего множителя за скобки.

Решение. Переход от равенства $4:4=5:5$ к равенству $4(1:1)= =5(1:1)$ не является верным потому, что общий множитель можно вынести за скобку только у суммы и разности двух чисел.

Задача 10

$\boxed{5}$ Запишите число, состоящее из суммы 11 тысяч, 11 сотен и 11 единиц.

Идея. Сумма одиннадцати одинаковых чисел равна произведению числа 11 и заданного числа.

Решение. Число, состоящее из суммы 11 тысяч, 11 сотен и 11 единиц, равно

$$11 \cdot 1000 + 11 \cdot 100 + 11 \cdot 1 = 11(1000 + 100 + 1) = 11 \cdot 1101 = 12\,111.$$

Ответ. 12 111.

Задача 11

$\boxed{7}$ а) При сложении четырёх чисел из-за их нечёткой записи в первом числе в разряде сотен цифра 2 была принята за 5, во втором числе в разряде тысяч цифра 3 была принята за 8, в третьем числе в разряде единиц цифра 9 была принята за 2 и в четвёртом числе в разряде десятков цифра 7 была принята за 4. В результате сложения получили 28 975. Найдите ошибку результата и верную сумму.

Идея. Подсчитать, на сколько в результате неправильной записи цифр изменился окончательный результат.
Указание. Увеличение цифры в разряде сотен на n приводит к увеличению числа на $n \cdot 100$.

Решение. В первом числе в разряде сотен цифра 2 была принята за 5, следовательно, первое число увеличилось на 300.

Во втором числе в разряде тысяч цифра 3 была принята за 8, следовательно, второе число увеличилось на 5000.

В третьем числе в разряде единиц цифра 9 была принята за 2, следовательно, третье число уменьшилось на 7.

В четвёртом числе в разряде десятков цифра 7 была принята за 4, следовательно, четвёртое число уменьшилось на 30.

Пусть A — верная сумма четырёх данных чисел, тогда

$$A + 300 + 5000 - 7 - 30 = 28\,975 \iff$$
$$\iff A + 5263 = 28\,975 \iff$$
$$\iff A = 23\,712.$$

Ответ. Сумма получилась больше истинного результата на 5263. Истинное значение суммы равно 23 712.

Задача 12

$\boxed{5}$ Вычислите $101\,101 \cdot 999 - 101 \cdot 999\,999$.

Идея. Преобразовать выражение, вынеся общие множители за скобку.

Указание. Разложить на множители оба шестизначных числа.

Решение. Заметим, что $101\,101 = 101 \cdot 1001$, а $999\,999 = 999 \cdot 1001$. Значит, искомое выражение равно

$$101 \cdot 1001 \cdot 999 - 101 \cdot 999 \cdot 1001 = 101 \cdot (1001 \cdot 999 - 999 \cdot 1001) = 0.$$

Ответ. 0.

Задача 13

$\boxed{7}$ а) Какое число больше:

$$\underbrace{888\ldots88}_{19\text{ цифр}} \cdot \underbrace{333\ldots33}_{68\text{ цифр}} \quad \text{или} \quad \underbrace{444\ldots44}_{19\text{ цифр}} \cdot \underbrace{666\ldots67}_{68\text{ цифр}}$$

и на сколько?

Идея. Из данных четырёх чисел выразить два числа через другие два.

Указание. Составить формальное неравенство с помощью чисел

$$A = \underbrace{333\ldots33}_{68\text{ цифр}} \quad \text{и} \quad B = \underbrace{444\ldots44}_{19\text{ цифр}}.$$

Решение. Составим формальное неравенство

$$\underbrace{888\ldots88}_{19\text{ цифр}} \cdot \underbrace{333\ldots33}_{68\text{ цифр}} \vee \underbrace{444\ldots44}_{19\text{ цифр}} \cdot \underbrace{666\ldots67}_{68\text{ цифр}}$$

и запишем его в виде

$$2B \cdot A \vee B \cdot (2A + 1), \quad \text{где} \quad A = \underbrace{333\ldots33}_{68\text{ цифр}} \quad \text{и} \quad B = \underbrace{444\ldots44}_{19\text{ цифр}}.$$

Раскрыв скобки, получим $2BA \vee 2AB + B \iff 0 \vee B$, следовательно, второе число больше первого на B.

Ответ. Правое число больше на $\underbrace{444\ldots44}_{19\text{ цифр}}$.

Задача 14

$\boxed{7}$ Вычислите $\left(4\cdot 10^{2011}-1\right):(4\cdot \underbrace{333\ldots 33}_{2011\text{ цифр}}+1)$.

Идея. Выразить делитель и делимое через число $\underbrace{333\ldots 33}_{2011\text{ цифр}}$ и сократить полученное выражение.
Указание. Представить делимое в виде произведения числа 3 и выражения, зависящего от $\underbrace{333\ldots 33}_{2011\text{ цифр}}$.

Решение. Положим $A=\underbrace{333\ldots 33}_{2011\text{ цифр}}$ и выразим через A делитель:

$$4\cdot \underbrace{333\ldots 333}_{2011\text{ цифр}}+1=4A+1.$$

Теперь преобразуем делимое:

$$4\cdot 10^{2011}-1=4\cdot(\underbrace{999\ldots 999}_{2011\text{ цифр}}+1)-1=4\cdot(3A+1)-1=4\cdot 3\cdot A+3=3\cdot(4A+1).$$

В результате исходное выражение преобразуется к виду

$$3\cdot(4A+1):(4A+1)=3.$$

Ответ. 3.

Задача 15

$\boxed{7}$ Двоим друзьям потребовалось вычислить 4^2-3^2. Они заметили, что результат — число 7 — равен сумме оснований квадратов чисел 4 и 3. Проверив своё открытие на числах 11 и 10, друзья установили, что оно подтверждается: $11^2-10^2=21=11+10$. После этого друзья нашли все пары $(a;b)$ натуральных чисел $a>b$, для которых разность a^2-b^2 равна сумме $a+b$. Как друзьям удалось найти все такие числа $(a;b)$?

Идея. Использовать формулу разности квадратов.
Указание. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Решение. Найдём натуральные числа a и b, для которых $a^2-b^2=a+b$. Преобразуем это равенство с помощью формулы разности квадратов:

$$a^2-b^2=a+b \iff (a-b)(a+b)=a+b$$

и сократим на положительную величину $a+b$, получим $a-b=1$. Значит, все пары $(a;b)$ натуральных чисел $a>b$, для которых разность a^2-b^2 равна сумме $a+b$, удовлетворяют условию $a=b+1$.
Ответ. $a=b+1$.

Задача 16

$\boxed{7}$ Разложите на множители $81a^{20}x^{16} - 16b^8y^{20}$.

Идея. Разложить числовые коэффициенты на множители и воспользоваться формулами сокращённого умножения.
Указание. Применить формулу разности квадратов.

Решение. Заметим, что $81 = 3^4$, $16 = 2^4$ и представим выражение в виде разности квадратов:

$$3^4a^{20}x^{16} - 2^4b^8y^{20} = (3^2a^{10}x^8)^2 - (2^2b^4y^{10})^2 =$$
$$= (3^2a^{10}x^8 - 2^2b^4y^{10})(3^2a^{10}x^8 + 2^2b^4y^{10}).$$

Первую скобку можно также разложить на множители как разность квадратов:

$$(3a^5x^4 - 2b^2y^5)(3a^5x^4 + 2b^2y^5)(3^2a^{10}x^8 + 2^2b^4y^{10}).$$

Ответ. $(3a^5x^4 - 2b^2y^5)(3a^5x^4 + 2b^2y^5)(3^2a^{10}x^8 + 2^2b^4y^{10})$.

Задача 17

$\boxed{6\text{-}7}$ Написать частное от деления разности четвёртых степеней чисел x и y на произведение суммы их первых степеней на сумму их квадратов. Вычислить, подставляя числа: а) $x = -1$; $y = 2$.

Идея. Составить заданное выражение и упростить его с помощью формул сокращённого умножения.
Указание. Применить формулу разности квадратов.

Решение. Частное от деления разности четвёртых степеней чисел x и y на произведение суммы их первых степеней на сумму их квадратов — это

$$\frac{x^4 - y^4}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = x - y.$$

В нашем случае $x - y = -1 - 2 = -3$.
Ответ. -3.

Задача 18

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Вычислить $8\frac{16}{23}x^2y^3 - 0{,}02x^3y^2$, если x равен наибольшему целому числу, заключённому между числами $-9{,}3$ и $-15{,}1$, а y — наименьшему простому числу в третьем десятке натуральных чисел.

Идея. Вынести общий множитель за скобку и подставить найденные значения x и y в полученное выражение.

Указание. Наибольшим целым числом, заключённым между числами $-9{,}3$ и $-15{,}1$, является -10, а наименьшим простым числом в третьем десятке натуральных чисел является 23.

Решение. Вынесем за скобку общий множитель:

$$8\frac{16}{23}x^2y^3 - 0{,}02x^3y^2 = 2x^2y^2\left(4\frac{8}{23}y - 0{,}01x\right).$$

Так как наибольшим целым числом, заключённым между числами $-9{,}3$ и $-15{,}1$, является -10, а наименьшим простым числом в третьем десятке натуральных чисел является 23, то $x = -10$ и $y = 23$. Подставим эти значения в наше выражение:

$$2\cdot(-10)^2\cdot 23^2\cdot\left(\left(4+\frac{8}{23}\right)\cdot 23 - 0{,}01\cdot(-10)\right) =$$
$$= 2\cdot 100\cdot 529\cdot(4\cdot 23 + 8 + 0{,}1) = 2\cdot 100\cdot 529\cdot(92+8+0{,}1) =$$
$$= 2\cdot 529\cdot 100\cdot 100{,}1 = 1058\cdot 10\,010 = 10\,590\,580.$$

Ответ. 10 590 580 при $x = -10$ и $y = 23$.

Задача 19

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Доказать, что числовое значение выражения

$$(x^2 - ax + b)^2 + 2(x^2 - ax + b)(ax - b) + (ax - b)^2$$

не зависит от a и b.

Идея. Преобразовать выражение с помощью формул сокращённого умножения.

Указание. Применить формулу квадрата суммы.

Решение. Так как $p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2$ для любых p и q, то

$$(x^2 - ax + b)^2 + 2(x^2 - ax + b)(ax - b) + (ax - b)^2 =$$
$$= ((x^2 - ax + b) + (ax - b))^2 =$$
$$= (x^2 - ax + b + ax - b)^2 = (x^2)^2 = x^4.$$

Это выражение не зависит от a и b, что и требовалось доказать.

Задача 20

$\boxed{5}$ а) Масса бидона с молоком 32 кг, без молока — 2 кг. Какова масса бидона, заполненного молоком наполовину?

Идея. Найти массу молока, помещающегося в бидон.

Решение. Так как масса бидона с молоком 32 кг, а без молока — 2 кг, то масса молока в полном бидоне равна $32 - 2 = 30$ кг. Если бидон заполнен наполовину, то в нём $\frac{30}{2} = 15$ кг молока. В результате масса бидона, заполненного молоком наполовину, равна $2 + 15 = 17$ кг.

Ответ. 17 кг.

Задача 21

$\boxed{5}$ а) Чашка и блюдце вместе стоят 25 рублей, а 4 чашки и 3 блюдца стоят 88 рублей. Найдите цену чашки и цену блюдца.

Идея. Сначала вычислить, сколько стоят 3 чашки и 3 блюдца.
Указание. Найти цену одной чашки.

Решение. Чашка и блюдце стоят 25 рублей, значит, 3 чашки и 3 блюдца стоят $3 \cdot 25 = 75$ рублей. А так как 4 чашки и 3 блюдца стоят 88 рублей, то одна чашка стоит $88 - 75 = 13$ рублей.

Теперь можно найти стоимость одного блюдца: $25 - 13 = 12$ рублей.
Ответ. 13 руб. и 12 руб.

$\boxed{7}$ б)★ На свои деньги Петя мог бы купить 8 бубликов и 7 пирожных либо 5 бубликов и 8 пирожных. Сколько он смог бы купить одних бубликов?

Идея. Определить, сколько бубликов можно купить вместо одного пирожного.
Указание. Если Петя купит на одно пирожное больше, то бубликов придётся купить на 3 меньше.

Решение. Петя мог бы купить 8 бубликов и 7 пирожных. Если он купит на одно пирожное больше, то бубликов придётся купить на 3 меньше, следовательно, одно пирожное стоит столько, сколько стоят три бублика.

Теперь выразим всю покупку в бубликах: 8 бубликов и 7 пирожных стоят столько, сколько 8 бубликов и $7 \cdot 3$ бублика, т. е. $8 + 21 = 29$ бубликов.
Ответ. 29.

Задача 22

$\boxed{5}$ а) У щенят и утят вместе 44 ноги и 17 голов. Сколько щенят и сколько утят?

Идея. У каждого щенка на две ноги больше, чем у утёнка. Подсчитать количество этих дополнительных ног и найти число щенят.

Решение. Если бы все животные были утятами, то у них было бы $17 \cdot 2 = 34$ ноги. Значит, оставшиеся $44 - 34 = 10$ ног принадлежат щенятам. Так как у щенка на две ноги больше, чем у утёнка, то щенков $10 : 2 = 5$. Следовательно, число утят равно $17 - 5 = 12$.
Ответ. 5 щенят и 12 утят.

Задача 23

$\boxed{5}$ а) Было 9 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на три части. Всего стало 15 листов. Сколько листов бумаги разрезали?

Идея. Проследить, на сколько листов увеличивается общее количество листов бумаги при разрезании одного из них на три части.
Указание. Общее количество листов бумаги при разрезании одного из них на три части увеличивается на два.

Решение. При разрезании одного листа на три части общее количество листов увеличивается на два. У нас из 9 листов получилось 15, т. е. их количество увеличилось на 6. Следовательно, было разрезано $6 : 2 = 3$ листа.
Ответ. 3.

Задача 24

$\boxed{5}$ а) Средний возраст 11 игроков футбольной команды 22 года. Во время матча один из игроков за грубое нарушение правил был удалён с поля до конца игры. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21. Сколько лет футболисту, удалённому с поля?

Идея. Найти суммарный возраст игроков до удаления и после удаления одного игрока.
Указание. Возраст удалённого игрока есть разность между суммарным возрастом игроков до удаления и после.

Решение. Средний возраст 11 игроков равен 22 года, значит, суммарный возраст 11 игроков равен $11 \cdot 22 = 242$ года.

Средний возраст 10 игроков равен 21 год, значит, суммарный возраст 10 игроков равен $10 \cdot 21 = 210$ лет.

Разность этих двух чисел и есть возраст удалённого игрока: $242 - 210 = 32$ года.
Ответ. 32 года.

Замечание. *Второй способ.* Удалённый игрок добавлял каждому оставшемуся игроку по 1 году до среднего возраста. Значит, ему было $22 + 10 = 32$ года.

Задача 25

$\boxed{5}$ а) На прямой линии посажено 10 кустов так, что расстояние между любыми соседними кустами одно и то же. Найдите это расстояние, если расстояние между крайними кустами равно 90 дм.

Идея. Использовать идею задачи о столбах и пролётах между ними.
Указание. Предметов всегда на один больше, чем промежутков между ними.

Решение. Если на прямой линии посажено 10 кустов, то промежутков между ними получается 9. Так как промежутки равные, то каждый из них будет равен $90 : 9 = 10$ дм.
Ответ. 10 дм.

Задача 26

$\boxed{5}$ а) Гусеница ползёт по стволу яблони. За первый час она поднялась на 10 см, за второй час опустилась на 4 см, за третий час вновь поднялась на 10 см, а за четвёртый опустилась на 4 см. Так она продолжала подниматься и опускаться в течение нескольких часов. На сколько сантиметров поднимется гусеница за 11 ч?

Идея. Вычислить длину пути, пройденного гусеницей за каждые два часа.
Указание. Посчитать отдельно длину пути, пройденного за первые 10 ч, и длину пути, пройденного за последний час.

Решение. За каждые два часа гусеница поднимается на 10 см и опускается на 4 см. Это значит, что за два часа она оказывается на $10-4=6$ см выше, чем до этого. Следовательно, за 10 часов гусеница поднимется на $6 \cdot (10 : 2) = 6 \cdot 5 = 30$ см, и за последний час она поднимется ещё на 10 см. Итого, за 11 ч гусеница поднимется на $30+10=40$ см.
Ответ. 40 см.

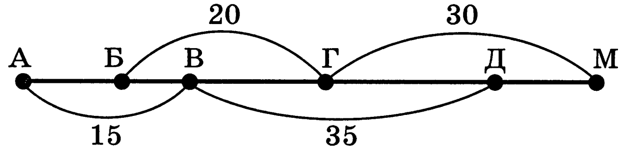
Задача 27

$\boxed{5}$ По прямой дороге от деревни А до города М расположены последовательно четыре села: Б, В, Г, Д. Расстояние от А до В равно 15 км, от А до Д — 50 км, от Г до Б — 20 км, от Г до М — 30 км, а от В до Г — на 5 км меньше, чем от Д до Г. Найдите расстояние между каждой парой соседних населённых пунктов и расстояние от деревни А до города М.

Идея. Найти расстояние между какой-либо одной парой соседних населённых пунктов, и тогда все остальные расстояния между соседними населёнными пунктами можно будет последовательно вычислить.
Указание. Вычислить длину отрезка ВД и его частей: ВГ и ГД.

Решение. Так как $|АВ| = 15$, а $|АД| = 50$, то

$$|ВД| = |АД| - |АВ| = 50 - 15 = 35.$$



Найдём длины отрезков ВГ и ГД. Их сумма равна 35, а по условию задачи отрезок ВГ на 5 км короче отрезка ГД, следовательно, $|ВГ| = 15$, $|ГД| = 20$.

Далее последовательно вычислим длины остальных отрезков:

$$|БВ| = |БГ| - |ВГ| = 20 - 15 = 5,$$
$$|ДМ| = |ГМ| - |ГД| = 30 - 20 = 10,$$
$$|АБ| = |АВ| - |БВ| = 15 - 5 = 10.$$

Суммарное расстояние от деревни А до города М равно

$$|АМ| = 10 + 5 + 15 + 20 + 10 = 60.$$

Ответ. $|АБ| = 10$, $|БВ| = 5$, $|ВГ| = 15$, $|ГД| = 20$, $|ДМ| = 10$, $|АМ| = 60$.

Задача 28

6 а) У фермера было несколько одинакового веса поросят и несколько ягнят также одинакового веса. Мальчик спросил фермера, сколько весит один поросёнок и один ягнёнок. Фермер ответил, что 3 поросёнка и 2 ягнёнка весят 22 кг, а 2 поросёнка и 3 ягнёнка весят 23 кг. Как узнать, сколько весит один поросёнок и сколько весит один ягнёнок?

Идея. Определить вес одного поросёнка вместе с одним ягнёнком.
Указание. Найти, сколько весят вместе 5 поросят и 5 ягнят.

Решение. Так как 3 поросёнка и 2 ягнёнка весят 22 кг, а 2 поросёнка и 3 ягнёнка весят 23 кг, то 5 поросят $(3+2)$ и 5 ягнят $(2+3)$ весят 45 кг $(22+23)$. Значит, один поросёнок вместе с одним ягнёнком весят 9 кг $(45 : 5)$.

Теперь определим вес одного поросёнка. Два поросёнка и два ягнёнка весят 18 кг $(9 \cdot 2)$. Так как 3 поросёнка и 2 ягнёнка весят 22 кг, то один поросёнок весит 4 кг $(22 - 18)$.

Вес одного ягнёнка равен $9 - 4 = 5$ кг.
Ответ. 4 кг и 5 кг.

Задача 29

7 На пальме сидело много мартышек. Двадцать из них получили по пинку. Пнутая мартышка срывает с пальмы три финика и раздаёт подружкам. Мартышка, получившая два финика, съедает их и пинает другую мартышку. После того как произошло 30 новых пинков, мартышки успокоились. Сколько фиников осталось у мартышек?

Идея. Проследить за тем, как меняется количество фиников с самого начала.
Указание. Посчитать, сколько фиников было сорвано и сколько съедено.

Решение. Пнутая мартышка срывает три финика, значит, после первых 20 пинков было сорвано $3 \cdot 20 = 60$ фиников. Мартышка, получившая два финика, съедает их и пинает другую мартышку. Новых пинков было 30, значит, было съедено $30 \cdot 2 = 60$ фиников.

Пнутая мартышка срывает три финика и раздаёт их. Новых пинков было 30, значит, новых фиников было сорвано $3 \cdot 30 = 90$. Итого осталось $60 + 90 - 60 = 90$ фиников.
Ответ. 90 фиников.

Задача 30

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Пять участников олимпиады стали её победителями, набрав по 15, 14 и 13 баллов и заняв соответственно первое, второе и третье места. Сколько участников заняли каждое призовое место, если вместе они набрали 69 баллов?

Идея. Действовать перебором.

Указание. Как минимум по одному человеку заняли первое, второе и третье места.

Решение. Общая сумма баллов равна 69. Как минимум по одному человеку заняли первое, второе и третье места, т. е. уже понятно, как распределились $15 + 14 + 13 = 42$ балла.

Осталось понять, как распределились оставшиеся $69 - 42 = 27$ баллов. Так как 27 можно представить только в виде суммы чисел 14 и 13, то получается, что первое место было одно, вторых мест было два, третьих мест было два.
Ответ. 1-е место — 1, 2-е место — 2, 3-е место — 2.

Задача 31

$\boxed{6}$ а) Пятизначное число A записывается только двойками и тройками, а пятизначное число B — только тройками и четвёрками. Может ли произведение AB записываться одними двойками? Не забудьте обосновать свой ответ.

Идея. Оценить числа A, B и их произведение.

Указание. Проверить, попадает ли какое-нибудь число, записанное одними двойками, в промежуток, полученный для AB.

Решение. Если пятизначное число A записывается только двойками и тройками, то $2 \cdot 10^4 < A < 4 \cdot 10^4$. Пятизначное число B записывается только тройками и четвёрками, значит, $3 \cdot 10^4 < B < 5 \cdot 10^4$. Следовательно,

$$6 \cdot 10^8 < AB < 20 \cdot 10^8.$$

Теперь посмотрим, попадает ли в этот промежуток какое-нибудь число, записанное одними двойками. Сначала рассмотрим число, состоящее из 9 двоек:

$$2 \cdot 10^8 < \underbrace{222\ldots22}_{9\text{ цифр}} < 3 \cdot 10^8.$$

Но $3 \cdot 10^8 < 6 \cdot 10^8$, значит, число, состоящее из 9 двоек, мало. Рассмотрим число, состоящее из 10 двоек:

$$2 \cdot 10^9 < \underbrace{222\ldots22}_{10\text{ цифр}} < 3 \cdot 10^9.$$

Получаем, что $AB < 2 \cdot 10^9 < \underbrace{222\ldots22}_{10\text{ цифр}}$, значит, число, состоящее из 10-ти двоек, велико. Следовательно, произведение AB записываться одними двойками не может.

Ответ. Нет.

б)★ Пятизначное число A записывается только двойками и единицами, а пятизначное число B — только тройками и двойками. Может ли произведение AB записываться одними шестёрками? Не забудьте обосновать свой ответ.

Идея. Оценить числа A, B и их произведение.

Указание. Найти число, записанное одними шестёрками, попадающее в полученный для AB промежуток.

Указание. Действовать перебором, рассматривая возможные значения первых цифр чисел A и B.

Решение. Если пятизначное число A записывается только двойками и единицами, то $10^4 < A < 3 \cdot 10^4$. Пятизначное число B записывается только тройками и двойками, значит, $2 \cdot 10^4 < B < 4 \cdot 10^4$. Следовательно,

$$2 \cdot 10^8 < AB < 12 \cdot 10^8.$$

В этот промежуток попадает только одно число, записанное одними шестёрками: $C = \underbrace{666\ldots66}_{9\text{ цифр}}$. Попробуем отыскать A и B такие, что $AB = C$.

Действовать будем перебором, рассматривая возможные значения первых цифр чисел A и B.

1) Если число A начинается с 1, а число B — с 2, то

$$1{,}1 \cdot 10^4 < A < 1{,}3 \cdot 10^4 \quad \text{и} \quad 2{,}2 \cdot 10^4 < B < 2{,}4 \cdot 10^4,$$

откуда $AB < 1{,}3 \cdot 10^4 \cdot 2{,}4 \cdot 10^4 = 3{,}12 \cdot 10^8 < C$.

2) Если числа A и B начинаются с 2, то

$$2{,}1 \cdot 10^4 < A < 2{,}3 \cdot 10^4 \quad \text{и} \quad 2{,}2 \cdot 10^4 < B < 2{,}4 \cdot 10^4,$$

откуда $AB < 2{,}3 \cdot 10^4 \cdot 2{,}4 \cdot 10^4 = 5{,}52 \cdot 10^8 < C$.

3) Если число A начинается с 1, а число B — с 3, то

$$1{,}1 \cdot 10^4 < A < 1{,}3 \cdot 10^4 \quad \text{и} \quad 3{,}2 \cdot 10^4 < B < 3{,}4 \cdot 10^4,$$

откуда $AB < 1{,}3 \cdot 10^4 \cdot 3{,}4 \cdot 10^4 = 4{,}42 \cdot 10^8 < C$.

4) Если число A начинается с 2, а число B — с 3, то

$$2{,}1 \cdot 10^4 < A < 2{,}3 \cdot 10^4 \quad \text{и} \quad 3{,}2 \cdot 10^4 < B < 3{,}4 \cdot 10^4,$$

откуда $AB > 2{,}1 \cdot 10^4 \cdot 3{,}2 \cdot 10^4 = 6{,}72 \cdot 10^8 > C$.

Следовательно, произведение AB записываться одними шестёрками не может.

Ответ. Нет.

Задача 32

7 На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый Толстый солдат выстрелил в одного из Тонких; затем каждый уцелевший Тонкий солдат выстрелил в одного из Толстых. После этого каждый уцелевший Толстый ещё раз выстрелил в одного из Тонких. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.

Идея. Выяснить, во сколько раз может уменьшиться число солдат после одного залпа и после двух последовательных залпов.

Указание. Показать, что после одного залпа не менее половины солдат уцелеет. А если изначально армии имеют равные численности, то и после двух последовательных залпов уцелеет не менее половины солдат.

Указание. Обозначить через n количество солдат, убитых Толстыми, и выразить через n минимальное количество солдат, оставшихся в живых после того, как выстрелили Тонкие.

Решение. Сначала покажем, что за один залп не может быть убито более половины солдат. Рассмотрим три варианта. Если армии имеют равные численности, то за один залп можно убить максимум половину всех солдат. Если стреляющих меньше половины всех солдат, то и убито может быть меньше половины всех солдат. Если же стреляющих больше половины всех солдат, то тех, в кого стреляют, меньше половины и, следовательно, убито может быть меньше половины всех солдат. Таким образом, мы показали, что в любом случае после одного залпа в живых останется не менее половины всех солдат.

Теперь посмотрим, как может уменьшиться численность при двух последовательных залпах в армиях, имеющих изначально равные численности N.

Сначала каждый солдат первой армии выстрелил в одного из солдат второй армии. Пусть было убито n солдат, а $N - n$ солдат уцелело. Потом выстрелил каждый уцелевший солдат, при этом могло быть убито максимум $N - n$ солдат. В результате убито могло быть максимум $n + (N - n) = N$ солдат, значит, в живых осталось минимум $2N - N = N$ солдат.

Изначально солдат было 2000 по 1000 человек в каждой армии, получается, что после двух последовательных выстрелов их количество может уменьшиться максимум в два раза, т. е. 1000 человек точно уцелеет.

Теперь найдём наименьшее количество солдат, которое могло уцелеть после третьего залпа. Как было показано выше, после одного залпа в живых останется как минимум половина всех солдат. Значит, после третьего залпа в живых останется как минимум $1000 : 2 = 500$ человек.

Заметим, что пока мы привели только оценку числа уцелевших солдат. Для того, чтобы это число можно было назвать минимальным числом уцелевших солдат, надо привести пример, на котором эта оценка достигается.

Пример. На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый Толстый выстрелил в одного из Тонких и было убито 500 Тонких. Затем каждый уцелевший Тонкий выстрелил в одного из Толстых и было убито 500 Толстых. В результате этих двух залпов в армиях осталось по 500 солдат. Если после этого каждый уцелевший из 500 Толстых застрелит одного из 500 Тонких, то в живых останется ровно 500 Толстых.

Задача 33

$\boxed{7}$ а) Гриб называют плохим, если в нём больше 11 червяков. Червяка называют тощим, если он съел не более $\frac{1}{5}$ гриба, в котором живёт. Четверть всех грибов в лесу — плохие. Докажите, что не менее трети всех червяков — тощие.

Идея. Определить, какое максимальное количество толстых червяков и минимальное количество тощих может быть в этих грибах.

Указание. Рассмотреть четыре гриба: один плохой и три хороших.

Решение. Четверть всех грибов в лесу — плохие, значит, все грибы можно разбить на четвёрки, в которых один гриб плохой и три хороших.

Найдём минимально возможную долю тощих червяков в этих грибах, т. е. рассмотрим ситуацию, когда тощих червяков как можно меньше, а толстых — как можно больше.

Сначала найдём максимальное количество толстых червяков, которое может находится в этих четырёх грибах. Если червяк съел не более $\frac{1}{5}$ гриба, то он тощий, значит, 5 толстых червяков не могут жить в одном грибе и максимум их 4. Получается, что в наших четырёх грибах могут жить не более 16 толстых червяков.

Теперь найдём минимальное количество тощих червяков, которое может находится в этих четырёх грибах. В плохом грибе больше 11 червяков, из которых максимум 4 толстые, поэтому должно быть как минимум 8 тощих. В хороших грибах может вообще не быть червяков, значит, в наших четырёх грибах как минимум 8 тощих червяков.

Таким образом, минимальная доля тощих червяков реализуется в ситуации, когда в каждом грибе живёт максимальное количество толстых червяков и минимальное — тощих, т. е. всего $4 \cdot 4 = 16$ толстых и 8 тощих. В этом случае доля тощих равна $\frac{8}{8+16} = \frac{1}{3}$. В любом другом случае доля тощих червяков в каждой четвёрке грибов (а, следовательно, и во всех грибах) будет больше $\frac{1}{3}$.

Задача 34

$\boxed{7}$ а) Сократите дробь $\dfrac{5^{21}+5^{21}+5^{21}+5^{21}+5^{21}}{5^{24}}$.

Идея. Привести подобные в числителе дроби и произвести сокращение.

Решение. $\dfrac{5^{21}+5^{21}+5^{21}+5^{21}+5^{21}}{5^{24}} = \dfrac{5\cdot 5^{21}}{5^{24}} = \dfrac{5^{22}}{5^{24}} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$.

Ответ. $\frac{1}{25}$.

б) Вычислите $\dfrac{4^6\cdot 9^5+6^9\cdot 120}{8^4\cdot 3^{12}-6^{11}}$.

Идея. Вынести общие множители в числителе и знаменателе и произвести сокращение.

Указание. Представить все слагаемые в виде произведения степеней двойки и тройки.

Решение. Разложим основания степеней на простые множители и преобразуем сами степени:

$$\frac{4^6\cdot 9^5+6^9\cdot 120}{8^4\cdot 3^{12}-6^{11}} = \frac{2^{2\cdot 6}\cdot 3^{2\cdot 5}+2^9\cdot 3^9\cdot 2^3\cdot 3\cdot 5}{2^{3\cdot 4}\cdot 3^{12}-2^{11}\cdot 3^{11}} = \frac{2^{12}\cdot 3^{10}+2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5}{2^{12}\cdot 3^{12}-2^{11}\cdot 3^{11}}.$$

Теперь вынесем общие множители за скобки и произведём сокращение:

$$\frac{2^{12}\cdot 3^{10}\cdot(1+5)}{2^{11}\cdot 3^{11}\cdot(2\cdot 3-1)} = \frac{2\cdot 6}{3\cdot(6-1)} = \frac{4}{5}.$$

Ответ. $\frac{4}{5}$.

Задача 35

$\boxed{7}$ а) Дана пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Докажите, что верна пропорция $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$.

Идея. Воспользоваться основным свойством пропорции.

Указание. Произведение крайних равно произведению средних.

Решение. По условию задачи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, следовательно, $ad=bc$.

Рассмотрим вторую пропорцию:

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d} \iff a(b+d)=b(a+c) \iff ab+ad=ba+bc \iff ad=bc.$$

Следовательно, если первая пропорция верна, то и вторая тоже верна.

Задача 36

$\boxed{6}$ Делимое разделили на удвоенный делитель и получили 13,375. Когда же делимое разделили на удвоенное частное, то получили 4. Найти делимое и делитель.

Идея. Сначала найти частное, после этого найти делимое, а потом делитель.

Указание. Выписать равенства, которым удовлетворяют делимое, делитель и частное.

Решение. Пусть a — делимое, b — делитель, c — частное, т. е. $\frac{a}{b}=c$. По условию задачи делимое разделили на удвоенный делитель и получили 13,375, следовательно,

$$\frac{a}{2b}=13{,}375 \iff \frac{a}{b}=2\cdot 13{,}375 \iff c=26{,}75.$$

Когда же делимое разделили на удвоенное частное, то получили 4, следовательно,

$$\frac{a}{2c}=4 \iff a=8c \iff a=214 \quad \text{и} \quad \frac{a}{c}=8, \quad \text{т. е.} \quad b=8.$$

Ответ. 214 и 8.

Задача 37

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Вычислить $\frac{5}{6}+6\,\frac{5}{6}\cdot\left(11\,\frac{94}{1591}-6\,\frac{38}{1517}\right):8\,\frac{11}{43}$.

Идея. При умножении и делении смешанных дробей приводить их к неправильным дробям, при сложении и вычитании смешанных дробей работать отдельно с целыми частями, отдельно — с дробными.

Указание. Разложить знаменатели дробей в скобках на простые множители.

Решение. Сначала упростим выражение в скобках:

$$11\,\frac{94}{1591}-6\,\frac{38}{1517}=11-6+\frac{94}{1591}-\frac{38}{1517}=5+\frac{94}{37\cdot 43}-\frac{38}{37\cdot 41}=$$

$$=5+\frac{94\cdot 41-38\cdot 43}{37\cdot 41\cdot 43}=5+\frac{3854-1634}{37\cdot 41\cdot 43}=5+\frac{2220}{37\cdot 41\cdot 43}=$$

$$=5+\frac{60\cdot 37}{37\cdot 41\cdot 43}=5+\frac{60}{41\cdot 43}=5\cdot\left(1+\frac{12}{1763}\right)=5\cdot\frac{1775}{1763}=5\cdot\frac{25\cdot 71}{41\cdot 43}.$$

Подставим это в исходное выражение и переведём смешанные дроби в неправильные дроби:

$$\frac{5}{6}+6\,\frac{5}{6}\cdot 5\cdot\frac{25\cdot 71}{41\cdot 43}:8\,\frac{11}{43}=\frac{5}{6}+\frac{41}{6}\cdot 5\cdot\frac{25\cdot 71}{41\cdot 43}:\frac{355}{43}=$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{41\cdot 5\cdot 25\cdot 71\cdot 43}{6\cdot 41\cdot 43\cdot 71\cdot 5}=\frac{5}{6}+\frac{25}{6}=\frac{30}{6}=5.$$

Ответ. 5.

Задача 38

[6-7] а) Вычислить

$$15\,\frac{120}{187}-5\,\frac{120}{143}-\frac{200}{2431}+\left(37\,\frac{11}{29}-37\,\frac{11}{29}\right):2\,\frac{13}{47}\cdot 100+50:21\,\frac{152}{163}\ .$$

Идея. При умножении и делении смешанных дробей приводить их к неправильным дробям, при сложении и вычитании смешанных дробей работать отдельно с целыми частями, отдельно — с дробными.

Указание. Сначала вычислить значение выражения, стоящего в скобках.

Решение. Заметим, что разность в скобках равна нулю, значит,

$$\left(37\,\frac{11}{29}-37\,\frac{11}{29}\right):2\,\frac{13}{47}\cdot 100=0$$

и исходное выражение значительно упрощается:

$$15\,\frac{120}{187}-5\,\frac{120}{143}-\frac{200}{2431}+50:21\,\frac{152}{163}\ .$$

Теперь преобразуем дроби в полученном выражении:

$$15+\frac{120}{11\cdot 17}-5-\frac{120}{11\cdot 13}-\frac{200}{11\cdot 13\cdot 17}+50:\frac{3575}{163}=$$
$$=10+\frac{120\cdot 13}{11\cdot 13\cdot 17}-\frac{120\cdot 17}{11\cdot 13\cdot 17}-\frac{200}{11\cdot 13\cdot 17}+50\cdot\frac{163}{3575}=$$
$$=10+\frac{40}{11\cdot 13\cdot 17}(3\cdot 13-3\cdot 17-5)+2\cdot\frac{163}{143}=$$
$$=10+\frac{40}{11\cdot 13\cdot 17}(-17)+2\cdot\left(1+\frac{20}{143}\right)=$$
$$=10-\frac{40}{11\cdot 13}+2+\frac{40}{143}=12.$$

Ответ. 12.

Задача 39

[6-7] а) Быстро вычислить $\dfrac{254\cdot 399-145}{254+399\cdot 253}$.

Идея. Заметить, что $399=254+145$.

Указание. Заменить в числителе 254 на $253+1$.

Решение. Преобразуем исходное выражение следующим образом:

$$\frac{254\cdot 399-145}{254+399\cdot 253}=\frac{(253+1)\cdot 399-145}{254+399\cdot 253}=$$
$$=\frac{253\cdot 399+399-145}{254+399\cdot 253}=\frac{253\cdot 399+254}{254+399\cdot 253}=1.$$

Ответ. 1.

Задача 40

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Быстро вычислить $\quad 333\cdot\left(\frac{71}{111\,111}+\frac{573}{222\,222}-\frac{2}{3\cdot 7\cdot 37}\right)$.

Идея. Вынести везде, где можно, множитель 111.
Указание. Использовать то, что $111\,111=111\cdot 1001$.

Решение. Заметим, что каждый из трёх знаменателей содержит множитель 111. Представим множитель 333 в виде $3\cdot 111$ и произведём сокращение на 111:

$$3\cdot 111\cdot\left(\frac{71}{111\cdot 1001}+\frac{573}{2\cdot 111\cdot 1001}-\frac{2}{7\cdot 111}\right)=3\cdot\left(\frac{71}{1001}+\frac{573}{2\cdot 1001}-\frac{2}{7}\right).$$

Теперь приведём первые две дроби к общему знаменателю и сократим получившуюся дробь:

$$3\cdot\left(\frac{2\cdot 71+573}{2\cdot 1001}-\frac{2}{7}\right)=3\cdot\left(\frac{715}{2\cdot 1001}-\frac{2}{7}\right)=$$
$$=3\cdot\left(\frac{5\cdot 11\cdot 13}{2\cdot 11\cdot 13\cdot 7}-\frac{2}{7}\right)=3\cdot\left(\frac{5}{2\cdot 7}-\frac{2}{7}\right).$$

Осталось привести оставшиеся две дроби к общему знаменателю и получить ответ:

$$3\cdot\left(\frac{5}{2\cdot 7}-\frac{2\cdot 2}{2\cdot 7}\right)=3\cdot\frac{1}{14}=\frac{3}{14}.$$

Ответ. $\frac{3}{14}$.

Задача 41

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Быстро вычислить

$$182\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}{2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}}:\frac{4-\frac{4}{7}+\frac{4}{49}-\frac{4}{343}}{1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-\frac{1}{343}}\right)\cdot\frac{80\,808\,080}{91\,919\,191}.$$

Идея. Сократить дроби.
Указание. Вынести общий множитель за скобку.

Решение. Будем последовательно упрощать выражение, раскладывая на множители и сокращая дроби:

$$182\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}{2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)}:\frac{4\left(1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-\frac{1}{343}\right)}{1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-\frac{1}{343}}\right)\cdot\frac{80\,808\,080}{91\,919\,191}=$$

$$=182\cdot\left(\frac{1}{2}:\frac{4}{1}\right)\cdot\frac{80\,808\,080}{91\,919\,191}=182\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{80\cdot 1\,010\,101}{91\cdot 1\,010\,101}=$$

$$=91\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{80}{91}=\frac{80}{4}=20.$$

Ответ. 20.

Задача 42

[6-7] Выполните действия: $15{,}81:(24-23{,}66)-18:37{,}5$.

Идея. Перевести, где это удобно, десятичные дроби в обыкновенные.

Указание. Свести операцию деления десятичных дробей к делению целых чисел.

Решение. Будем последовательно упрощать выражение, переходя к работе с обыкновенными дробями:

$$15{,}81:(24-23{,}66)-18:37{,}5=15{,}81:0{,}34-18:37{,}5=\frac{1581}{34}-\frac{180}{375}=$$

$$=\frac{3\cdot 17\cdot 31}{2\cdot 17}-\frac{4\cdot 3\cdot 15}{25\cdot 15}=\frac{3\cdot 31}{2}-\frac{4\cdot 3}{25}=46{,}5-0{,}48=46{,}02.$$

Ответ. 46,02.

Задача 43

[6-7] а) Найдите наиболее рациональным способом значение выражения:

$$25-\frac{3}{7}\cdot 7+\left(12\frac{23}{25}-4\frac{2}{5}\right)\cdot 25+125\cdot 357\cdot 0{,}008.$$

Идея. При вычитании смешанных дробей отдельно работать с целыми частями, отдельно — с дробными. В последнем слагаемом переставить множители удобным образом.

Указание. $125\cdot 0{,}008=1$.

Решение. Преобразуем исходное выражение следующим образом:

$$25-3+\left(12-4+\frac{23}{25}-\frac{2}{5}\right)\cdot 25+(125\cdot 0{,}008)\cdot 357=$$

$$=22+\left(8+\frac{23}{25}-\frac{10}{25}\right)\cdot 25+357=22+8\cdot 25+23-10+357=$$

$$=22+200+13+357=222+370=592.$$

Ответ. 592.

Задача 44

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Найдите значение выражения: $\left(\frac{810}{162}+\frac{675}{225}\right)\cdot\left(\frac{810}{162}-\frac{675}{225}\right)$.

Идея. Упростить выражение с помощью арифметических преобразований в каждой из скобок.
Указание. Произвести сокращение дробей.

Решение. Разложим числители и знаменатели дробей на множители, получим

$$\frac{810}{162}=\frac{81\cdot 10}{81\cdot 2}=\frac{10}{2}=5;\qquad \frac{675}{225}=\frac{225\cdot 3}{225}=3.$$

Следовательно, исходное выражение равно

$$(5+3)(5-3)=8\cdot 2=16.$$

Ответ. 16.

Задача 45

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Вычислить: $(27^{10}-5\cdot 81^4\cdot 3^{12}+4\cdot 9^8\cdot 3^8):(41\cdot 3^{24})$.

Идея. Записать выражение в виде дроби, разложить числитель на множители и сократить дробь.
Указание. Вынести в качестве общего множителя максимальную степень числа 3.

Решение. Заметим, что числа 27, 81 и 9 являются степенями числа 3, поэтому исходное выражение равно

$$\frac{(3^3)^{10}-5\cdot(3^4)^4\cdot 3^{12}+4\cdot(3^2)^8\cdot 3^8}{41\cdot 3^{24}}=\frac{3^{30}-5\cdot 3^{16}\cdot 3^{12}+4\cdot 3^{16}\cdot 3^8}{41\cdot 3^{24}}=$$

$$=\frac{3^{30}-5\cdot 3^{28}+4\cdot 3^{24}}{41\cdot 3^{24}}=\frac{3^{24}(3^6-5\cdot 3^4+4)}{41\cdot 3^{24}}=\frac{3^6-5\cdot 3^4+4}{41}=\frac{3^4(3^2-5)+4}{41}=$$

$$=\frac{3^4\cdot 4+4}{41}=\frac{4(3^4+1)}{41}=\frac{4\cdot 82}{41}=\frac{4\cdot 2\cdot 41}{41}=4\cdot 2=8.$$

Ответ. 8.

Задача 46

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Быстро вычислить

$$\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 15}+$$
$$+\frac{1}{15\cdot 16}+\frac{1}{16\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 18}+\frac{1}{18\cdot 19}+\frac{1}{19\cdot 20}.$$

Идея. Представить каждую из данных дробей в виде разности двух дробей со знаменателями, отличающимися на 1.

Указание. Воспользоваться тем, что

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Решение. Перепишем исходное выражение в виде

$$\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right).$$

Раскрыв скобки, получим, что все дроби, кроме первой и последней, взаимно уничтожатся и останется только

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{20}.$$

Ответ. $\frac{1}{20}$.

г)★ Быстро вычислить $\frac{7^2}{2\cdot 9}+\frac{7^2}{9\cdot 16}+\frac{7^2}{16\cdot 23}+\ldots+\frac{7^2}{65\cdot 72}$.

Идея. Представить каждую из данных дробей в виде разности двух дробей со знаменателями, отличающимися на 7.

Указание.

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+7}=\frac{n+7-n}{n\cdot(n+7)}=\frac{7}{n\cdot(n+7)}.$$

Решение. Перепишем исходное выражение в виде

$$\left(\frac{7}{2}-\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{7}{9}-\frac{7}{16}\right)+\left(\frac{7}{16}-\frac{7}{23}\right)+\ldots+\left(\frac{7}{58}-\frac{7}{65}\right)+\left(\frac{7}{65}-\frac{7}{72}\right).$$

Раскрыв скобки, получим, что все дроби, кроме первой и последней, взаимно уничтожатся и останется только

$$\frac{7}{2}-\frac{7}{72}=3+\frac{1}{2}-\frac{7}{72}=3+\frac{36-7}{72}=3\,\frac{29}{72}.$$

Ответ. $3\frac{29}{72}$.

2. Метрическая система мер

Задача 1

[5] а) У Ивана имеется деревянный параллелепипед с измерениями 6, 12 и 18 см. Он распиливает его на кубики с ребром 1 см и ставит их один на другой. Сможет ли Иван достроить вышку из этих кубиков, если он даже заберётся на трёхметровую лестницу?

Идея. Подсчитать, сколько кубиков уложится по ширине параллелепипеда, сколько по длине и сколько по высоте.

Указание. Перемножить эти числа.

Решение. По ширине параллелепипеда уложится 6 таких кубиков, по длине — 12, а по высоте — 18. Значит, всего получится $6\cdot 12\cdot 18 = 1296$ кубиков. Если их поставить один на другой, то получится вышка высотой 1296 см, что равно 12 м 96 см.

Ответ. Нет. Высота вышки будет 12 м 96 см.

Задача 2

$\boxed{6}$ а) Длина ребра куба полметра. Этот куб разрезали на кубики, длина ребра каждого из которых равна 2 мм. Кубики затем уложили в один сплошной ряд. Чему равна его длина?

Идея. Подсчитать, сколько кубиков уложится вдоль одного ребра куба.
Указание. В одном метре содержится 100 см, в одном сантиметре содержится 10 мм.

Решение. Длина ребра куба равна $50 \text{ см} = 50 \cdot 10 \text{ мм} = 500 \text{ мм}$. Значит, вдоль одного ребра уложится $500 : 2 = 250$ кубиков, а всего получится $250 \cdot 250 \cdot 250 = 15\,625\,000$ кубиков. Если их уложить в один сплошной ряд, то его длина будет равна $15\,625\,000 \cdot 2$ мм, что равно $31\,250\,000 \text{ мм} = 31 \text{ км } 250 \text{ м}$.
Ответ. 31 км 250 м.

Задача 3

$\boxed{5}$ Найдите площадь прямоугольника, если его длина на 5 см больше ширины, а половина периметра равна 19 см.

Идея. Найти длину и ширину прямоугольника. Вычислить их произведение.
Указание. Площадь прямоугольника равна произведению длины и ширины.

Решение. Сумма длины и ширины равна 19 см. Так как длина на 5 см больше ширины, то две ширины в сумме дадут $19 - 5 = 14$ см. Следовательно, одна ширина равна $14 : 2 = 7$ см, а длина равна $7 + 5 = 12$ см.

Площадь прямоугольника равна произведению длины и ширины, т. е. равна $12 \cdot 7 = 84$ кв. см.
Ответ. 84 кв. см.

Задача 4

$\boxed{5}$ Из трёх одинаковых кубов с ребром 8 см составили прямоугольный параллелепипед. Найдите его объём и площадь поверхности.

Идея. Проанализировать то, как связаны объёмы и площади поверхностей кубов и составленного из них параллелепипеда.
Указание. Объём полученного из трёх кубов параллелепипеда равен сумме объёмов кубов, площадь поверхности равна сумме площадей минус площади тех граней, которыми кубы состыкуются друг с другом.

Решение. Объём одного куба равен $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ куб. см. Объём параллелепипеда, составленного из трёх таких кубов, равен $512 \cdot 3 = 1536$ куб. см.

Площадь поверхности одного куба S равна сумме площадей поверхности его граней S_1, т. е. $S = 6S_1$. Если из трёх кубов составить параллелепипед, то из суммарной площади трёх кубов надо вычесть площади четырёх граней, по которым кубы примыкают друг к другу. Таким образом, площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, составленного из трёх кубов, будет равна

$$3S - 4S_1 = 3 \cdot 6S_1 - 4S_1 = 18S_1 - 4S_1 = 14S_1 = 14 \cdot 64 = 896.$$

Ответ. 1536 куб. см; 896 кв. см.

Задача 5

$\boxed{5}$ Сколько сантиметров проволоки потребуется для изготовления каркаса куба с ребром 6 см?

Идея. Найти сумму длин рёбер куба.
Указание. Подсчитать количество рёбер.

Решение. Нижним и верхним основаниями куба являются квадраты, каждый из которых состоит из четырёх рёбер. Также проволока потребуется на 4 вертикальных ребра, соединяющих верхнее основание с нижним. Итого рёбер будет

$$4 + 4 + 4 = 12.$$

На каждое ребро надо 6 см проволоки, т. е. на весь каркас уйдёт $12 \cdot 6 = 72$ см.
Ответ. 72 см.

Задача 6

$\boxed{6}$ Когда Гулливер попал в Лилипутию, то обнаружил, что там всё ровно в 12 раз короче, чем на его родине. Сможете ли вы сказать, сколько лилипутских спичечных коробков помещается в спичечной коробке Гулливера?

Идея. Подсчитать, сколько маленьких коробков уложится по ширине большого, сколько — по длине и сколько — по высоте.

Решение. По длине большой спичечной коробки уложится 12 маленьких коробков, по длине — 12 и по ширине — тоже 12. В результате получим $12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$ маленьких коробков.
Ответ. 1728.

Задача 7

$\boxed{6}$ а) Медный кубик, ребро которого 0,5 см, весит 1,1 г. Сколько весит медный куб, ребро которого равно 800 мм? (Ответ округлить до 0,1 т.)

Идея. Подсчитать, сколько кубиков с ребром 0,5 см поместится в куб с ребром 800 мм.
Указание. Длину измерять в мм, а вес — в тоннах.

Решение. Ребро большого куба больше ребра маленького в 800 мм : 5 мм = 160 раз. Значит, в большой куб поместится $160 \cdot 160 \cdot 160 = 4\,096\,000$ маленьких кубиков. Следовательно, вес большого куба будет равен

$$4\,096\,000 \cdot 1{,}1 \text{ г} = 4\,505\,600 \text{ г} = 4 \text{ т } 505 \text{ кг } 600 \text{ г} \approx 4{,}5 \text{ т}.$$

Ответ. Около 4,5 т.

Задача 8

$\boxed{6}$ В летний дождь выпало 5 мм осадков. Сколько стоила бы искусственная поливка таким количеством воды поля в 725 га, если стоимость 1 л при искусственной поливке равна 0,0005 коп.?

Идея. Стоимость поливки равна произведению объёма осадков на стоимость единицы объёма.
Указание. Объём измерять в м^3.

Решение. Посчитаем объём выпавших осадков:

$$V = 725 \text{ га} \cdot 5 \text{ мм} = 725 \cdot 10\,000 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 36\,250 \text{ м}^3.$$

Так как в одном кубометре содержится 1000 литров, то стоимость искусственной поливки 1 м^3 равна 0,5 коп. Значит, всего потребовалось бы

$$36\,250 \cdot 0{,}5 \text{ коп.} = 18\,125 \text{ коп.} = 181{,}25 \text{ руб.}$$

Ответ. 181,25 руб.

Задача 9

$\boxed{6}$ Тюк прессованного сена имеет длину 86 см, ширину 4 дм и высоту 35 см. Какая часть грузоподъёмности 50-тонного железнодорожного вагона используется при погрузке сена, если в него вмещается 650 тюков и если 1 куб. м прессованного сена весит 3,5 ц? (Ответ дать с точностью до 0,01.)

Идея. Найти отношение веса 650 тюков к 50 т.
Указание. Сначала вычислить объём одного тюка, потом вес всех тюков. Длины измерять в метрах, вес — в тоннах.

Решение. Вычислим объём одного тюка:

$$V_1 = 86 \text{ см} \cdot 4 \text{ дм} \cdot 35 \text{ см} = 0{,}86 \text{ м} \cdot 0{,}4 \text{ м} \cdot 0{,}35 \text{ м} = 0{,}1204 \text{ м}^3.$$

Теперь найдём вес 650 тюков. Так как 1 куб. м прессованного сена весит 3,5 ц, то общий вес тюков равен

$$P = 650 \cdot 0{,}1204 \text{ м}^3 \cdot 3{,}5 \text{ ц} = 78{,}26 \text{ м}^3 \cdot 0{,}35 \text{ т} = 27{,}391 \text{ т}.$$

Для того чтобы определить, какая часть грузоподъёмности 50-тонного железнодорожного вагона используется при погрузке сена, если в него вмещается 650 тюков, надо найти следующее отношение:

$$\frac{P}{50} = \frac{27{,}391}{50} = 0{,}54782 \approx 0{,}55.$$

Ответ. Около 0,55.

Задача 10

$\boxed{6}$ Посчитано, что 1 кв. м овсяного поля в течение лета испаряет около 240 л воды. Сколько это составляет кубических метров на 1 га? Сколько времени могла бы течь эта вода по 1 л в секунду?

Идея. Общий объём испаряемой воды равен произведению объёма воды, испаряемой с 1 кв. м, и площади поля.
Указание. Перевести полученные секунды в часы.

Решение. Так как 1 га — это 10 000 кв. м, то объём испаряемой воды равен

$$10\,000 \cdot 240 \text{ л} = 2\,400\,000 \text{ л}.$$

Если такое количество воды будет испаряться со скоростью 1 л в секунду, то потребуется

$$2\,400\,000 \text{ с} = \frac{2\,400\,000}{60} \text{ мин} = 40\,000 \text{ мин} = \frac{40\,000}{60} \text{ ч} = 666{,}666\ldots \text{ ч} \approx 667 \text{ ч}.$$

Ответ. 2400 куб. м; около 667 ч.

Задача 11

$\boxed{6}$ Средний вес дождевой капли $\frac{1}{12}$ г. Определить число капель дождя, упавших на 1 кв. м земли, если дождь дал слой воды толщиной 2,2 мм.

Идея. Число капель равно отношению веса всей воды к весу одной капли.
Указание. Перевести мм в м и вычислить объём воды.
Указание. 1 м^3 = 1000 л, 1 л воды весит 1 кг.

Решение. Сначала найдём объём воды:

$$V = 1\text{ кв. м} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-3}\text{ м} = 2{,}2 \cdot 10^{-3}\text{ куб. м} = 2{,}2\text{ л}.$$

Так как 1 л воды весит 1 кг, то общий вес воды равен 2,2 кг. Для того чтобы найти число капель, поделим общий вес воды на вес одной капли:

$$\frac{2{,}2\text{ кг}}{\frac{1}{12}\text{ г}} = \frac{2\,200\text{ г}}{\frac{1}{12}\text{ г}} = 2\,200 \cdot 12 = 26\,400.$$

Ответ. 26 400.

Задача 12

$\boxed{5}$ Парусник отправляется в плавание в понедельник в полдень. Плавание будет продолжаться 100 часов. Назовите день и час его возвращения в порт.

Идея. Перевести 100 часов в сутки и часы.
Указание. В сутках 24 часа.

Решение. Заметим, что $100 = 24 \cdot 4 + 4$, значит, 100 часов — это 4 суток и 4 часа. Следовательно, если парусник отправляется в плавание в понедельник в полдень, то вернётся он через 4 дня и 4 часа, т. е. в пятницу в 16 часов.
Ответ. В пятницу в 16 часов.

Задача 13

$\boxed{5}$ Петя сказал друзьям: «Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году исполнится 13». Мог ли Петя не соврать?

Идея. Проанализировать случай, когда «позавчера» и «13-й день рождения» находятся максимально далеко друг от друга.

Решение. Если Пете позавчера было 10 лет, то сегодня ему максимум может быть 11 лет, а ровно через год — 12 лет. Для того чтобы в течение будущего года ему исполнилось 13, день рождения должен быть ближе к концу года, а день, когда Петя разговаривал с друзьями, — ближе к началу года.

Рассмотрим крайний случай: день рождения 31 декабря, день разговора — 1 января. Тогда действительно позавчера Пете было 10 лет, а в самом конце будущего года исполнится 13 лет. Других вариантов нет.
Ответ. Да, если это было сказано 1 января, а день рождения у Пети 31 декабря.

Задача 14

[5] В феврале 2000 года 2 февраля было средой. Сколько вторников было в феврале 2000 года?

Идея. Определить дату первого вторника февраля и всех последующих вторников.
Указание. 2000 год был високосным.

Решение. Если 2 февраля было средой, то 1 февраля было вторником. Прибавляя по 7 дней, получим даты всех следующих вторников: 8-е, 15-е, 22-е и 29-е февраля. Здесь мы учли, что 2000-й год был високосным и в феврале было 29 дней. Получается, что вторников было пять.
Ответ. 5.

Задача 15

[5-7] а) В некотором месяце три воскресенья пришлись на чётные числа. Каким днём недели было 20-е число этого месяца?

Идея. Определить, на какое число пришлось первое воскресенье, и высчитать день недели, на который пришлось 20-е число.
Указание. Максимальное число воскресений в одном месяце — пять, причём если на какой-то неделе воскресенье пришлось на чётное число, то на следующей неделе воскресенье попадёт на нечётное число.

Решение. Так как в месяце не более 31 дня, то одноимённых дней недели в месяце не более пяти. Так как в неделе 7 дней, то если на какой-то неделе воскресенье пришлось на чётное число, то на следующей неделе воскресенье попадёт на нечётное число. Следовательно, если в некотором месяце три воскресенья пришлись на чётные числа, то два должны прийтись на нечётные числа. В этом случае первое воскресенье должно прийтись на чётное число.

Первое чётное число в месяце — это 2. Если первое воскресенье было 2-го числа, то последнее — 30-го. Если же первое воскресенье пришлось на 4-е число, то последнее — на 32-е, чего не может быть.

Таким образом, 2-е число — воскресенье. Значит, 20-е число — четверг.
Ответ. Четверг.

Задача 16

[6] В некотором месяце понедельников больше, чем вторников, а воскресений больше, чем суббот. Какой день недели был 5-го числа этого месяца? Мог ли этот месяц быть декабрём?

Идея. Перебрать возможные варианты с учётом того, что максимальное число одноимённых дней недели в месяце — пять, минимальное — четыре.
Указание. Понедельников и воскресений было по 5, вторников и суббот — по 4.

Решение. Так как одноимённых дней недели в месяце четыре или пять, то из условия получаем, что понедельников и воскресений — по пять, вторников и суббот — по четыре.

Если в месяце 5 одноимённых дней недели, то возможен только один из следующих вариантов:
- первый из этих дней недели попал на 1-е число, последний — на 29-е;
- первый — на 2-е, последний — на 30-е;
- первый — на 3-е, последний — на 31-е.

Проверим, какой из этих вариантов подходит для воскресенья.

Пусть первое воскресенье попало на 1-е число, тогда первый понедельник попал на второе, а первый вторник — на третье. Для того чтобы понедельников было пять, а вторников — четыре, в месяце должно быть 30 дней. В этом случае суббот получается 4 и этот вариант нам подходит.

Если первое воскресенье попало на 2-е или 3-е число, то первая суббота попала на 1-е или 2-е число. В этих случаях количество суббот в месяце получается не меньше количества воскресений. Это нам не подходит, так как из условия задачи следует, что воскресений пять, а суббот четыре.

Таким образом, мы получили единственно возможный вариант: первое воскресенье попало на 1-е число месяца, в котором 30 дней. Значит, пятое число придётся на четверг этого месяца, и месяц не мог быть декабрём, так как в декабре 31 день.
Ответ. Четверг. Не мог.

Задача 17

6 Известно, что в Московской области землетрясения происходят через равные промежутки времени (не обязательно через целое количество дней). Может ли быть так, что первое землетрясение в этом тысячелетии произошло в понедельник, второе — во вторник, а четвёртое — в воскресенье?

Идея. Рассмотреть частный случай, когда все четыре землетрясения происходят в течение одной недели, и обобщить полученный результат.
Указание. Определить максимально возможное значение промежутка времени между двумя соседними землетрясениями.

Решение. Пусть первое землетрясение произошло в понедельник, а второе — во вторник этой же недели. В этом случае промежуток между ними менее двух суток. Так как землетрясения происходят через равные промежутки времени, то промежуток между вторым и третьим также менее двух суток, а между вторым и четвёртым — менее четырёх суток. Получаем, что четвёртое землетрясение не может произойти позже чем через 4 суток после второго, т. е. в воскресенье.

Если же первое и второе землетрясения произошли не на одной неделе, то промежуток между ними равен n недель и s суток, где n — натуральное число и $0 < s < 2$. Тогда промежуток между вторым и четвёртым землетрясением равен $2n$ недель и менее четырёх суток. Заметим, что число полных недель на день недели четвёртого землетрясения не влияет. В итоге получается, что четвёртое землетрясение не может произойти позже чем через 4 суток и некоторое количество полных недель после второго, т. е. в воскресенье.

Ответ. Нет.

Задача 18

7 В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идёт число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана?

Идея. Номер дня можно спутать с номером месяца только если номер дня записывается числом от 1 до 12.

Указание. Рассмотреть отдельно случаи, когда дата читается однозначно и в США, и в Европе.

Решение. Так как номер месяца изменяется от 1 до 12, то дату нельзя прочитать однозначно только в том случае, если номер дня тоже записывается числом в пределах от 1 до 12. Подсчитаем количество таких вариантов: на первом месте стоит 1, на втором число от 1 до 12 — всего 12 вариантов; на первом месте стоит 2, на втором — число от 1 до 12 — тоже 12 вариантов и так далее. Всего будет $12 \cdot 12 = 144$ варианта.

Мы получили, что в 144 случаях нельзя понять однозначно, какое число соответствует номеру месяца, а какое — номеру дня.

Заметим, что в некоторых случаях дата определяется однозначно даже когда не ясно, что записано сначала: номер месяца или номер дня. Это происходит в том случае, когда оба числа совпадают. Например, в записи 01:01 не важно, что является номером месяца, а что номером дня, так как такая запись в любом случае является записью даты первое января. И таких вариантов 12.

Исключив из 144 вариантов (в которых нельзя понять однозначно, какое число соответствует номеру месяца, а какое — номеру дня) 12 вариантов (когда дата определяется однозначно даже если не ясно, что записано сначала: номер месяца или номер

дня), получим $144 - 12 = 132$ варианта, когда дату нельзя прочитать однозначно.
Ответ. 132.

Задача 19

$\boxed{6}$ Когда магазин открыт, над его входом включено табло, которое показывает время в часах, минутах и секундах (от 11:00:00 до 18:59:59, перерыва на обед нет). Какого времени больше за день — такого, когда число часов на табло больше, чем число секунд, или такого, когда число секунд больше, чем число часов? Не забудьте обосновать ответ.

Идея. Рассмотреть последний час работы магазина и обобщить полученный результат.
Указание. Сначала рассмотреть последнюю минуту работы магазина.

Решение. Рассмотрим промежуток времени с 18:59:00 до 18:59:59. В этом случае число часов равно 18, а число секунд изменяется от 0 до 59. Так как чисел от 0 до 17 меньше, чем чисел от 19 до 59, то число секунд больше, чем число часов.

Заметим, что число минут не повлияло на наши подсчёты, следовательно, в течение всего последнего часа число секунд больше, чем число часов.

Если же рассмотреть меньшее число часов (с 11 до 17), то количество случаев, когда число секунд больше, чем число часов, только увеличится. Получается, что в период времени от 11:00:00 до 18:59:59 число секунд больше, чем число часов.
Ответ. Больше такого времени, когда число секунд превосходит число часов.

Задача 20

$\boxed{6}$ а) Электронные часы показывают время от 00:00:00 до 23:59:59. Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно три цифры 7?

Идея. Определить точное местоположение трёх цифр 7 и подсчитать число таких вариантов.
Указание. Число 7 в каждой паре цифр не может находиться на первом месте.

Решение. Часы показывают время от 00:00:00 до 23:59:59. Значит, в записи $ab{:}cd{:}mn$ цифры $a, c, m < 7$ и, следовательно, $b = d = n = 7$.

Подсчитаем число возможных вариантов. Цифра a может принимать значения 0 или 1 (2 варианта), цифра c может принимать значения от 0 до 5 (6 вариантов), цифра m также от 0 до 5 (6 вариантов).

Всего возможных вариантов получается $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$.

Ответ. 72 с.

Задача 21

$\boxed{6}$ а) Определите, чему равен угол между часовой и минутной стрелками часов в 23 часа 45 минут.

Идея. Определить точное расположение часовой стрелки.
Указание. За один час часовая стрелка перемещается на угол $30°$.

Решение. В 23 часа 45 минут минутная стрелка отстоит от вертикального положения (0 часов 0 минут) на угол $90°$. Найдём угол между вертикальным положением и часовой стрелкой. До 0 часов 0 минут не хватает 15 минут. Это значит, что часовая стрелка не дошла до вертикального положения одну четвёртую от $30°$ (так как 15 минут — это одна четвёртая часть часа, а одному часу соответствует перемещение часовой стрелки на угол $30°$).

Получаем, что угол между часовой и минутной стрелками часов в 23 часа 45 минут равен

$$90° - \frac{1}{4} \cdot 30° = 90° - 7{,}5° = 82{,}5°.$$

Ответ. $82{,}5°$.

Задача 22

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Часы показывают час дня. Найти ближайший момент времени, когда часовая и минутная стрелки совпадут.

Идея. Обозначить через x число градусов, на которое переместится часовая стрелка до места встречи с минутной, и составить уравнение с этой неизвестной.
Указание. Использовать то, что скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой.

Решение. Обозначим через x число градусов, на которое переместится часовая стрелка до места встречи с минутной. Тогда число градусов, на которое переместится минутная стрелка, равно $x + 30$. Так как скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой, то и путь, пройденный минутной стрелкой, будет в 12 раз больше, следовательно,

$$30 + x = 12x \quad \Longleftrightarrow \quad 30 = 11x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{30}{11}.$$

Получается, что минутная стрелка сначала пройдёт $30°$ (до отметки 1 час), а потом ещё $\frac{30}{11}^{\circ}$. Найдём, какому количеству минут соответствует $\frac{30}{11}^{\circ}$ у минутной стрелки.

Пяти минутам соответствует $30°$, значит, $1°$ соответствует

$$\frac{5}{30}\text{ мин} = \frac{1}{6}\text{ мин} = 10\text{ с.}$$

Следовательно, $\frac{30}{11}^{\circ}$ соответствует

$$\frac{30}{11} \cdot 10\text{ с} = \frac{300}{11}\text{ с} = 27\frac{3}{11}\text{ с.}$$

В итоге перемещению минутной стрелки на $30°$ и $\frac{30}{11}^{\circ}$ соответствует 5 минут $27\frac{3}{11}$ секунды.

Ответ. 13 часов 5 минут $27\frac{3}{11}$ секунды.

Задача 23

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки совпадают?

Идея. Разбить сутки на часы и проследить за совпадением стрелок в течение каждого из часов.
Указание. Момент времени 24 ч 0 мин относится уже к следующим суткам.

Решение. Посчитаем, сколько раз минутная стрелка совпадёт с часовой, начиная с 0 ч 0 мин. В течение первого часа суток они совпадут только один раз (в начальный момент). В период с 1 ч 0 мин до 2 ч 0 мин они совпадут также один раз, поскольку минутная стрелка сделает один полный круг и один раз обгонит часовую стрелку и так далее. В течение последнего часа стрелки также совпадут один раз, но это случится в момент времени 24 ч 0 мин, который относится уже к следующим суткам. В итоге часовая и минутная стрелки совпадут 23 раза в течение суток.
Ответ. 23 раза.

Задача 24

$\boxed{7}$ Сколько раз в сутки совпадают все три стрелки на часах, включая секундную?

Идея. Если две стрелки, стартуя из одного положения, встретились снова, то пути этих стрелок отличаются на целое число оборотов.

Указание. Составить уравнения со следующими неизвестными: время движения от одной встречи трёх стрелок до другой; число оборотов, составляющее разницу в пройденном пути часовой и минутной стрелками; число оборотов, составляющее разницу в пройденном пути секундной и минутной стрелками.

Решение. Положим $v = 30°/ч$ — скорость движения часовой стрелки, тогда $12v$ — скорость движения минутной стрелки, а $12 \cdot 60v$ — скорость движения секундной стрелки.

Началом движения будем считать время 0 ч 0 мин 0 с, когда все три стрелки находятся в одном положении. Пусть часовая стрелка встретилась с минутной через t часов. Это значит, что путь, пройденный минутной стрелкой, отличается от пути, пройденного часовой стрелкой за это время, на целое число оборотов, т. е. на $360° \cdot n$, где n — натуральное число. Получаем уравнение

$$12vt - vt = 360n \iff 11vt = 360n.$$

Пусть секундная стрелка встретилась с минутной также через t часов. Это значит, что путь, пройденный секундной стрелкой, отличается от пути, пройденного минутной стрелкой, на целое число оборотов, т. е. на $360° \cdot k$, где k — натуральное число. Получаем уравнение

$$12 \cdot 60vt - 12vt = 360k \iff 12 \cdot 59vt = 360k.$$

Поделив почленно второе уравнение на первое, получим

$$\frac{12 \cdot 59}{11} = \frac{k}{n} \iff 12 \cdot 59 \cdot n = 11k.$$

Правая часть последнего равенства делится на 11, следовательно, число n делится на 11. Минимальное натуральное число, делящееся на 11, это 11. Из первого уравнения при $n = 11$ получаем $vt = 360$, значит, минимальный путь, который проделает часовая стрелка до места встречи всех трёх стрелок, — это 360°.

Так как началом движения мы считали время 0 ч 0 мин 0 с, когда все три стрелки находились в одном положении, то ближайшее время, когда они снова совпадут, будет 12 ч 0 мин 0 с, а следующее время совпадения придётся на 24 ч 0 мин 0 с, что будет относиться уже к следующим суткам.

Ответ. Два раза.

3. Задачи на части

Задача 1

$\boxed{6}$ а) В лесу, состоящем из дубов и ёлок, компания «Пень-Инвест» вырубила одну треть всех дубов и одну шестую всех ёлок. Докажите, что отчёт экологической организации, утверждающей, что была вырублена половина всех деревьев, содержит неверные данные.

Идея. Сравнить одну треть с половиной и одну шестую с половиной.
Указание. Одна треть меньше половины и одна шестая меньше половины.

Решение. Была вырублена одна треть дубов, что меньше половины всех дубов, и одна шестая ёлок, что меньше половины всех ёлок. Получается, что было вырублено менее половины всех деревьев.

Задача 2

$\boxed{5}$ Попрыгунья Стрекоза половину времени каждых суток красного лета спала, третью часть времени каждых суток танцевала, шестую часть — пела. Сколько часов в сутки Стрекоза готовилась к зиме?

Идея. Определить, какая часть времени суток осталась у стрекозы на подготовку к зиме.
Указание. Вычесть из единицы ту часть суток, которую Стрекоза спала, потом ту часть, которую танцевала, и ту, которую пела.

Решение. Для того чтобы найти, какую часть времени стрекоза готовилась к зиме, надо из единицы вычесть половину, одну третью и одну шестую:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{3+2+1}{6} = 1 - 1 = 0.$$

Получается, что стрекоза вообще не готовилась к зиме.
Ответ. 0.

Задача 3

$\boxed{5}$ Когда велосипедист проехал $\frac{2}{3}$ пути, лопнула шина. На остальной путь пешком он затратил вдвое больше времени, чем на велосипедную езду. Во сколько раз велосипедист ехал быстрее, чем шёл?

Идея. Определить, во сколько раз тот путь, который велосипедист прошёл пешком, меньше пути, который он проехал на велосипеде.

Решение. Велосипедист проехал $\frac{2}{3}$ пути, значит, осталась $\frac{1}{3}$, т. е. в два раза меньше. Получается, что на расстояние, кото-

рое в два раза меньше, он затратил времени в два раза больше. Следовательно, его скорость уменьшилась в $2 \cdot 2 = 4$ раза.
Ответ. В 4 раза.

Задача 4

$\boxed{5}$ Внучке столько месяцев, сколько лет дедушке. Вместе им 91 год. Сколько лет дедушке и сколько лет внучке?

Идея. Определить, какую долю составляет возраст внучки от суммы возрастов.
Указание. Определить, во сколько раз дедушка старше внучки.

Решение. Так как внучке столько месяцев, сколько лет дедушке, то дедушка старше внучки в 12 раз. Следовательно, 91 год состоит из 13 возрастов внучки. Значит, возраст внучки равен $91 : 13 = 7$ лет, а возраст дедушки $12 \cdot 7 = 84$.
Ответ. 84 и 7.

Задача 5

$\boxed{5}$ Старший брат идёт от школы до дома 30 минут, а младший — 40 минут. Через какое время старший брат догонит младшего, если тот вышел из школы на 5 минут раньше?

Идея. Определить, какую часть пути должны пройти братья, чтобы разница во времени движения составляла 5 минут.
Указание. Разница во времени движения от дома до школы равна $40 - 30 = 10$ минут.

Решение. На весь путь от дома до школы у младшего брата уходит на 10 минут больше времени, чем у старшего. Для того чтобы разница была в два раза меньше (5 минут), пройденный путь должен быть в два раза меньше. На весь путь у старшего уходит 30 минут, значит, на половину пути уйдёт 15 минут.
Ответ. Через 15 минут.

Задача 6

$\boxed{5}$ Винни-Пуху подарили на день рождения бочонок с мёдом массой 7 кг. Когда Винни-Пух съел половину мёда, бочонок с оставшимся мёдом стал иметь массу 4 кг. Сколько килограммов мёда было первоначально в бочонке?

Идея. Вычислить вес половины мёда.
Указание. Найти разницу между первоначальным весом бочонка с мёдом и весом бочонка после еды.

Решение. Бочонок с мёдом весил 7 кг. Когда Винни-Пух съел половину мёда, бочонок стал весить 4 кг. Значит, Винни-Пух съел $7 - 4 = 3$ кг мёда. Так как он съел половину мёда, то 3 кг являются половиной всего мёда, а $3 \cdot 2 = 6$ кг — изначальной массой подаренного мёда.
Ответ. 6 кг.

Задача 7

5 Говорил дед внукам: «Вот вам 130 орехов, разделите их на 2 части так, чтобы меньшая часть, увеличенная в 4 раза, равнялась бы большей части, уменьшенной в 3 раза». Как разделить орехи?

Идея. Определить, какую часть составляет меньшая кучка орехов от большей.
Указание. Определить, во сколько раз меньшая кучка орехов меньше большей.

Решение. Если меньшая часть, увеличенная в 4 раза, равняется большей части, уменьшенной в 3 раза, то большая часть больше меньшей в $4 \cdot 3 = 12$ раз. Следовательно, общее число орехов в 13 раз превышает число орехов в меньшей части. Значит, в меньшей части содержится $130 : 13 = 10$ орехов, а в большей $130 - 10 = 120$ орехов.
Ответ. 120 и 10.

Задача 8

5-6 В классе число отсутствующих учеников составляет $\frac{1}{6}$ часть от числа присутствующих. После того как из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно $\frac{1}{5}$ числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

Идея. Определить, какую часть от общего числа учеников в классе составляет один ученик.
Указание. Определить, какую часть от общего числа учеников в классе составляют отсутствующие ученики до выхода одного ученика и после его выхода.

Решение. Так как число отсутствующих учеников составляет $\frac{1}{6}$ часть от числа присутствующих, то присутствующих в 6 раз больше, чем отсутствующих, значит, отсутствующие составляют $\frac{1}{7}$ от общего числа учеников.

После того как из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно $\frac{1}{5}$ числа присутствующих, т. е. присутствующих стало в 5 раз больше, чем отсутствующих, значит, отсутствующие стали составлять $\frac{1}{6}$ от общего числа учеников.

Получается, что один ученик составляет

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$$

часть от общего числа учеников в классе, следовательно, в классе 42 ученика.
Ответ. 42 ученика.

Задача 9

$\boxed{5\text{-}7}$ Четверо товарищей купили вместе лодку. Первый внёс половину суммы, вносимой остальными, второй — треть суммы, вносимой остальными, третий — четверть суммы, вносимой остальными, а четвёртый внёс 130 рублей. Сколько стоит лодка и сколько внёс каждый?

Идея. Определить, какую часть от общей суммы внёс четвёртый товарищ.
Указание. Вычесть из единицы те части от общей суммы, которые внесли первые три товарища.

Решение. Первый внёс половину суммы, вносимой остальными, значит, он внёс одну третью часть общей суммы.

Второй внёс треть суммы, вносимой остальными, значит, он внёс одну четвёртую часть общей суммы.

Третий внёс четверть суммы, вносимой остальными, значит, он внёс одну пятую общей суммы.

Подсчитаем, какую часть общей суммы внёс четвёртый товарищ:

$$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=1-\frac{20+15+12}{60}=1-\frac{47}{60}=\frac{13}{60}.$$

По условию задачи эти $\frac{13}{60}$ от общей суммы равны 130 руб., значит, сама общая сумма равна

$$130:\frac{13}{60}=130\cdot\frac{60}{13}=600\text{ руб.}$$

Осталось посчитать сумму взносов первых трёх товарищей:

$$\frac{1}{3}\cdot 600\text{ руб.}=200\text{ руб.},\quad \frac{1}{4}\cdot 600\text{ руб.}=150\text{ руб.},\quad \frac{1}{5}\cdot 600\text{ руб.}=120\text{ руб.}$$

Ответ. Лодка стоит 600 руб., товарищи внесли 200 руб., 150 руб., 120 руб., 130 руб.

Задача 10

5-7 Как от куска материи в $\frac{2}{3}$ метра отрезать полметра, не имея под руками метра?

Идея. Выразить $\frac{1}{2}$ через $\frac{2}{3}$ с помощью арифметических действий.

Указание. $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$.

Решение. Выразим $\frac{1}{2}$ через $\frac{2}{3}$ следующим образом:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} : 4.$$

Таким образом, от общего куска материи в $\frac{2}{3}$ метра надо отрезать кусок в $\frac{1}{6}$ метра, который можно получить, если сложить исходный кусок пополам и ещё раз пополам.
Ответ. Сложим кусок пополам и ещё раз пополам, получим кусок длиной $\frac{1}{6}$ метра, который и надо отрезать, чтобы остаток равнялся $\frac{1}{2}$ метра.

Задача 11

6 Один купец прошёл через три города, и взыскали с него в первом городе пошлины половину и треть имущества и во втором городе — половину и треть (с того, что осталось), и в третьем городе снова взыскали половину и треть (с того, что у него было). Когда он прибыл домой, у него осталось имущества на 1000 денежных единиц. Какова была стоимость имущества у купца вначале?

Идея. Подсчитать, во сколько раз уменьшалось имущество в каждом городе.
Указание. В каждом городе взыскивали $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Решение. Подсчитаем, какая часть имущества оставалась у купца после посещения одного города:

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6},$$

т. е. стоимость имущества уменьшалась в шесть раз. После посещения трёх городов стоимость уменьшилась в $6^3 = 216$ раз и стала равна 1000 денежных единиц. Значит, изначальная стоимость была в 216 раз больше и равнялась 216 000 денежных единиц.
Ответ. 216 000.

Задача 12

$\boxed{6}$ *Древнегреческая задача.* — Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы? — Вот сколько, — ответил Пифагор, — половина изучает математику, четверть — природу, седьмая часть проводит время в размышлении, и, кроме того, есть ещё три женщины.

Сколько всего учеников посещают школу Пифагора?

Идея. Определить долю тех, кто ничего не изучает и не размышляет.
Указание. В школе Пифагора женщины ничего не изучают и не размышляют.

Решение. Для того чтобы определить, какую часть составляют три женщины в школе Пифагора, надо из общего числа учеников вычесть число тех, кто что-то изучает и о чём-то размышляет. В долях это будет выглядеть так:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{7} = 1 - \frac{14+7+4}{28} = 1 - \frac{25}{28} = \frac{3}{28}.$$

Получается, что три женщины составляют $\frac{3}{28}$ числа всех учеников, следовательно, учеников всего 28.
Ответ. 28.

Задача 13

$\boxed{6}$ Разделите семь яблок поровну на 12 человек, не разрезая яблоки более чем на 4 части.

Идея. Определить, какая доля яблока должна достаться одному человеку, и постараться собрать её из двух частей яблока.
Указание. $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Решение. Если 7 яблок разделить поровну на 12 человек, то каждому достанется $\frac{7}{12}$ яблока. Заметим, что

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

Для того чтобы получить 12 кусочков по $\frac{1}{3}$ яблока, надо разрезать 4 яблока на 3 части каждое. А для того чтобы получить 12 кусочков по $\frac{1}{4}$ яблока, надо разрезать 3 яблока на 4 части каждое.
Ответ. 4 яблока разрезать на 3 части каждое, 3 яблока разрезать на 4 части каждое и выдать всем по $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ яблока.

Задача 14

$\boxed{6}$ а) Проехав половину всего пути, пассажир лёг спать и спал до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, который он проспал. Какую часть всего пути пассажир проехал бодрствующим?

Идея. Посчитать, какую часть составляет последний участок пути.
Указание. Путь, который пассажир проехал во время своего второго бодрствования, является половиной того пути, который он проспал.

Решение. Пассажир не спал всю первую половину пути. Во время второй половины пути одну часть он бодрствовал и 2 части спал, значит, он бодрствовал

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ часть пути.}$$

Итого пассажир бодрствовал

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \text{ части всего пути.}$$

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Задача 15

$\boxed{6}$ 12 человек несут 12 буханок хлеба. Каждый мужчина несёт по 2 буханки хлеба, женщина — по $\frac{1}{2}$ буханки, а ребёнок — по $\frac{1}{4}$ буханки. Сколько было мужчин, женщин и детей?

Идея. Сначала определить максимально возможное число мужчин и далее действовать перебором.
Указание. Показать, что мужчин не может быть больше пяти.

Решение. Так как каждый мужчина несёт по 2 буханки хлеба, а буханок всего 12, то мужчин не может быть больше шести. Если мужчин 6, то группа людей получается слишком малочисленная, поскольку эти 6 мужчин унесут весь хлеб.

Если в группе 5 мужчин, то они унесут 10 буханок, а оставшиеся 2 буханки понесут женщины и дети (7 человек). Так как женщина несёт по $\frac{1}{2}$ буханки, а ребёнок — по $\frac{1}{4}$ буханки, то число детей должно быть чётным. Две буханки может унести 8 детей. Это не подходит, поскольку их должны нести 7 человек. Если детей 6 человек, то они унесут полторы буханки и последнюю половину буханки понесёт женщина. Этот вариант нам подходит.

Если в группе 4 мужчины, то они унесут 8 буханок, а оставшиеся 4 буханки понесут женщины и дети (8 человек). Так как женщина несёт по $\frac{1}{2}$ буханки, то 8 женщин могут унести как раз 4 буханки. По условию задачи в группе должны быть дети, но если кого-то из женщин заменить на ребёнка, то группа станет более слабой и не сможет унести 12 буханок.

Покажем, что других вариантов нет. Рассмотрим группу из 4 мужчин и 8 женщин. Они могут унести 12 буханок, но если кого-то из 4 мужчин заменить женщиной или ребёнком, а кого-то из 8 женщин заменить ребёнком, то группа станет более слабой и не сможет унести 12 буханок.

Ответ. 5 мужчин, 1 женщина и 6 детей.

Задача 16

$\boxed{5\text{-}7}$ Отцу столько лет, сколько сыну и дочери вместе; сын вдвое старше сестры и на 20 лет моложе отца. Сколько лет каждому?

Идея. Вычислить возраст дочери, потом сына и отца.
Указание. Отец старше сына на возраст дочери.

Решение. Так как отцу столько лет, сколько сыну и дочери вместе, то отец старше сына на возраст дочери. А так как по условию задачи отец на 20 лет старше сына, то дочери 20 лет.

Сын вдвое старше дочери, значит, ему $2 \cdot 20 = 40$ лет, а отцу $40 + 20 = 60$ лет.

Ответ. 60, 40 и 20.

Задача 17

$\boxed{7}$ За весну пёс Аргус потерял $\frac{1}{4}$ своего веса. Затем за лето прибавил в весе $\frac{1}{5}$ часть. За осень похудел на $\frac{1}{10}$ веса, а за зиму прибавил $\frac{1}{5}$ веса. Похудел или поправился Аргус за прошедший год?

Идея. Проследить, во сколько раз уменьшался или увеличивался вес Аргуса за каждый сезон.
Указание. Если вес стал меньше на $\frac{1}{4}$, то это составляет $\frac{3}{4}$ от исходного веса.

Решение. За весну пёс Аргус потерял $\frac{1}{4}$ своего веса, значит, его вес стал составлять $\frac{3}{4}$ прежнего веса. Затем за лето прибавил в весе $\frac{1}{5}$ часть, значит, вес увеличился в $\frac{6}{5}$ раз. За осень похудел на $\frac{1}{10}$ веса, значит, вес стал составлять $\frac{9}{10}$ прежнего веса. За зиму Аргус прибавил $\frac{1}{5}$ веса, значит, вес увеличился в $\frac{6}{5}$ раз.

В итоге изначальный вес умножился на

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3\cdot6\cdot9\cdot6}{4\cdot5\cdot10\cdot5}=\frac{3\cdot3\cdot9\cdot3}{5\cdot10\cdot5}=\frac{243}{250}<1,$$

следовательно, вес уменьшился и Аргус похудел.
Ответ. Похудел.

Задача 18

$\boxed{7}$ Вася в течение суток тратит $\frac{1}{3}$ часть своего времени на сон, $\frac{1}{4}$ на занятия в школе, $\frac{1}{5}$ на встречи с друзьями, $\frac{1}{6}$ своего времени слушает музыку, $\frac{1}{7}$ играет на компьютере. Можно ли так жить, занимаясь каждым из перечисленных дел отдельно?

Идея. Определить, какую часть времени Вася тратит на все перечисленные выше дела, занимаясь каждым из перечисленных дел отдельно.
Указание. Найти сумму дробей и сравнить её с единицей.

Решение. Если бы Вася занимался всеми делами отдельно, то на них он бы потратил

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{140+105+84+70+60}{420}=\frac{459}{420}$$

часть своего времени. Так как $\frac{459}{420}>1$, а часть не может быть больше целого, то Вася не сможет заниматься всеми этими делами отдельно.
Ответ. Нельзя.

Задача 19

$\boxed{7}$ Двум братьям вместе 35 лет. Сколько лет каждому, если половина лет одного равна трети лет другого?

Идея. Определить, как относятся возрасты братьев, и разделить 35 лет в этом отношении.

Решение. Если половина лет одного брата равна трети лет другого, то их возрасты относятся как $2:3$, т. е. возраст первого состоит из двух одинаковых частей, а возраст второго — из трёх. Следовательно, 35 надо разделить на 5 равных частей, две из которых составят возраст одного брата и три — другого. В результате получим, что одна часть — это $35:5=7$, возраст одного брата $2\cdot7=14$, возраст второго брата $3\cdot7=21$.
Ответ. 14 и 21.

Задача 20

$\boxed{7}$ Молодой рыбак положил в уху мало соли. Если бы он положил в уху соли вдвое больше, то досаливать пришлось бы вдвое меньше. Какую долю от нужного количества соли положил в уху рыбак?

Идея. Определить, как соотносятся количества соли, положенной в первом случае, положенной во втором случае и недостающей.

Решение. Если бы рыбак положил в уху соли вдвое больше (т. е. ещё столько же, сколько он уже положил), то досаливать пришлось бы вдвое меньше. То есть он положил бы ровно половину недостающей соли (осталось положить столько же). Значит, изначально он положил $\frac{1}{3}$ часть требуемого количества соли.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задача 21

$\boxed{7}$ Школа-интернат купила 675 метров красного, синего и чёрного полотна для пошива пальто. Когда на пошив детских пальто израсходовали $\frac{1}{2}$ количества красного полотна, $\frac{2}{3}$ синего и $\frac{3}{4}$ чёрного, то осталось полотна каждого цвета поровну. Сколько метров полотна каждого цвета было куплено?

Идея. Определить, какую долю чёрное полотно и синее полотно составляют от красного.
Указание. Использовать то, что остатки всех полотен оказались равными.

Решение. На пошив пальто израсходовали $\frac{1}{2}$ количества красного полотна, $\frac{2}{3}$ синего и $\frac{3}{4}$ чёрного, значит, осталось $\frac{1}{2}$ красного, $\frac{1}{3}$ синего и $\frac{1}{4}$ чёрного полотна.

Так как по условию осталось полотна каждого цвета поровну, то $\frac{1}{2}$ красного полотна равна $\frac{1}{3}$ синего и равна $\frac{1}{4}$ чёрного полотна. Следовательно, синего полотна купили в 1,5 раза больше, а чёрного — в 2 раза больше, чем красного.

Пусть красного полотна купили 2 части, тогда синего — 3 части, а чёрного — 4 части. Всего было куплено 675 м полотна, что составляет 9 частей, значит, одна часть — это $675 : 9 = 75$ м. Получаем, что красного полотна было куплено $2 \cdot 75 = 150$ м, синего куплено $3 \cdot 75 = 225$ м, чёрного куплено $4 \cdot 75 = 300$ м.
Ответ. 150 м красного, 225 м синего и 300 м чёрного.

Задача 22

5-7 а) Сумма двух чисел равна 180, частное от деления большего числа на меньшее равно 5. Найти эти числа.

Идея. Определить, во сколько раз меньшее число меньше суммы этих двух чисел.
Указание. Использовать то, что меньшее число в 5 раз меньше большего.

Решение. Частное двух чисел равно 5, значит, большее число в 5 раз больше меньшего и их сумма состоит из шести меньших чисел. Следовательно, меньшее число в шесть раз меньше суммы и равно $180 : 6 = 30$. Тогда большее число равно $180 - 30 = 150$.
Ответ. 30 и 150.

Задача 23

6 а) Среднее арифметическое двух чисел равно 10,01. Найти каждое из них, если одно в 5,5 раза меньше другого.

Идея. Определить, во сколько раз меньшее число меньше суммы этих двух чисел.
Указание. Использовать то, что меньшее число в 5,5 раз меньше большего.
Указание. Найти сумму заданных чисел с помощью значения среднего арифметического.

Решение. Среднее арифметическое двух чисел равно их полусумме, значит, сама сумма равна удвоенному значению среднего арифметического, а именно $2 \cdot 10{,}01 = 20{,}02$.

По условию меньшее число меньше большего в 5,5 раза, следовательно, сумма чисел состоит из 6,5 меньших чисел, а само меньшее число равно $20{,}02 : 6{,}5 = 3{,}08$.

Большее число можно найти как разность суммы чисел и меньшего числа: $20{,}02 - 3{,}08 = 16{,}94$.
Ответ. 3,08 и 16,94.

Задача 24

6-7 а) Разность двух чисел равна 0,6. Частное от деления меньшего на большее также равно 0,6. Найти эти числа.

Идея. Определить, какую долю составляет разность двух чисел от большего из них.
Указание. Выразить меньшее число через большее.

Решение. Частное от деления меньшего на большее равно 0,6, значит, меньшее число составляет 0,6 от большего, следовательно,

разность этих чисел составляет 0,4 от большего числа. Так как разность равна 0,6, то само большее число равно $0{,}6 : 0{,}4 = 1{,}5$, а меньшее равно $1{,}5 - 0{,}6 = 0{,}9$.
Ответ. 1,5 и 0,9.

Задача 25

6-7 Найти частное двух чисел, если оно в два раза меньше одного из них и в шесть раз больше другого.

Идея. Определить, во сколько раз первое число больше второго.
Указание. Использовать то, что половина первого числа в 6 раз больше второго числа.

Решение. Даны два числа. Если какое-то число в два раза меньше первого из них и в шесть раз больше второго из них, то половина первого числа в шесть раз больше второго. Следовательно, первое число в 12 раз больше второго числа и частное этих чисел равно 12 или $\frac{1}{12}$.

Ответ. 12 или $\frac{1}{12}$.

Задача 26

7 Число 56 разложите на два слагаемых так, чтобы $\frac{1}{3}$ первого слагаемого была равна $\frac{1}{4}$ второго.

Идея. Разделить 56 на равные части таким образом, чтобы каждое слагаемое состояло из нескольких таких частей.
Указание. Определить, во сколько раз первое число больше второго.

Решение. Если $\frac{1}{3}$ первого числа равна $\frac{1}{4}$ второго, то всё первое число составляет $\frac{3}{4}$ второго. Пусть второе число состоит из четырёх равных частей, тогда первое число состоит из трёх таких частей. Так как частей всего получается 7, то одна часть равна $56 : 7 = 8$, первое слагаемое равно $3 \cdot 8 = 24$, второе слагаемое равно $4 \cdot 8 = 32$.
Ответ. 24 и 32.

Задача 27

6 а) Разность двух чисел равна 0,7. Если большее из них увеличить в 5 раз, а меньшее оставить без изменений, то разность будет 75,1. Найти эти числа.

Идея. Определить, как связано изменение разности с исходными числами.
Указание. Изменение разности будет связано только с тем числом, которое изменилось.

Решение. Если большее из чисел увеличить в 5 раз, а меньшее оставить без изменений, то их разность увеличится на 4 больших числа. Следовательно, 4 больших числа в сумме дают $75{,}1 - 0{,}7 = 74{,}4$ и одно большее число равно $74{,}4 : 4 = 18{,}6$. Так как разность большего и меньшего чисел равна 0,7, то меньшее число равно $18{,}6 - 0{,}7 = 17{,}9$.
Ответ. 18,6 и 17,9.

Задача 28

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Одно число больше другого на 16. Найти эти числа, если $\frac{5}{32}$ одного числа равны $\frac{3}{16}$ другого.

Идея. Выразить разность чисел через одно из чисел.
Указание. Выразить большее число через меньшее.

Решение. Так как $\frac{5}{32}$ одного числа равны $\frac{3}{16} = \frac{6}{32}$ другого, то большее число относится к меньшему как $\frac{6}{32} : \frac{5}{32} = \frac{6}{5}$. Следовательно, разность этих чисел составляет $\frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$ часть меньшего числа. Откуда получаем, что меньшее число равно $5 \cdot 16 = 80$, а большее число равно $80 + 16 = 96$.
Ответ. 96 и 80.

Задача 29

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Сумма трёх чисел равна 136,5. Если первое число умножить на 8, второе — на 4, третье — на 6, то полученные произведения окажутся равными. Найти эти числа.

Идея. Определить, во сколько раз сумма всех трёх чисел больше первого числа.
Указание. Выразить второе и третье числа через первое.

Решение. Если первое число умножить на 8, а второе — на 4, то полученные произведения окажутся равными. Следовательно, второе число в $8 : 4 = 2$ раза больше первого.

Если первое число умножить на 8, а третье — на 6, то полученные произведения окажутся равными. Следовательно, третье число в $8 : 6 = \frac{4}{3}$ раза больше первого.

Сумма трёх чисел равна 136,5, значит, она больше первого числа в

$$1+2+\frac{4}{3}=\frac{13}{3} \text{ раз,}$$

откуда первое число равно $136{,}5 : \frac{13}{3} = 31{,}5$, второе равно $2\cdot 31{,}5=63$, а третье равно $\frac{4}{3}\cdot 31{,}5=42$.

Ответ. 31,5; 63 и 42.

Задача 30

6-7 а) Сумма трёх чисел равна 254,772. Если в одном из чисел перенести запятую на две цифры вправо, то получится большее из чисел, а если перенести в том же числе запятую влево на одну цифру, то получится меньшее из чисел. Найти эти числа.

Идея. Выразить сумму всех трёх чисел через самое маленькое число.
Указание. Перенос запятой на две цифры вправо соответствует умножению числа на 100.
Указание. Перенос запятой на одну цифру влево соответствует делению числа на 10.

Решение. Согласно условию задачи большее число получается из среднего переносом запятой на две цифры вправо, значит, большее число получается из среднего домножением на 100. Меньшее число получается из среднего переносом запятой влево на одну цифру, т. е. делением на 10.

Следовательно, среднее число равно 10 маленьким, большее число — 1000 маленьким, а сумма всех трёх чисел равна $1+10+1000=1011$ маленьким числам. В итоге самое маленькое число равно $254{,}772 : 1011 = 0{,}252$, среднее равно $10\cdot 0{,}252=2{,}52$, а самое большое равно $1000\cdot 0{,}252=252$.
Ответ. 0,252; 2,52 и 252.

Задача 31

6 Сумма двух чисел равна 37,75. Если первое слагаемое увеличить в 5 раз, а второе — в 3 раза, то новая сумма окажется равной 154,25. Найти эти числа.

Идея. Выразить сумму через одно из слагаемых.
Указание. Проанализировать то, как отличается вторая сумма от первой, увеличенной в 5 раз.

Решение. Если первую сумму двух чисел увеличить в 5 раз и вычесть новую сумму (первое слагаемое увеличено в 5 раз, второе — в 3), то получится удвоенное второе слагаемое. Следовательно, второе слагаемое равно

$$(5 \cdot 37{,}75 - 154{,}25) : 2 = (188{,}75 - 154{,}25) : 2 = 34{,}5 : 2 = 17{,}25,$$

а первое слагаемое равно $37{,}75 - 17{,}25 = 20{,}5$.
Ответ. 20,5 и 17,25.

Задача 32

$\boxed{6}$ а) Сумма числителя и знаменателя дроби равна 4140. После сокращения получилось $\frac{7}{13}$. Какова была дробь до сокращения?

Идея. Представить число 4140 в виде суммы двух чисел, которые относятся друг к другу как $7 : 13$.
Указание. Сумма числителя и знаменателя состоит из $7 + 13 = 20$ равных частей, 7 из которых составляют числитель, а 13 — знаменатель.

Решение. После сокращения исходная дробь оказалась равной $\frac{7}{13}$, значит, числитель дроби состоит из 7 равных частей, а знаменатель — из 13 таких же частей. Сумма числителя и знаменателя дроби равна 4140, следовательно, число 4140 состоит из двадцати равных частей и одна часть равна $4140 : 20 = 207$.

В результате получаем, что числитель равен $7 \cdot 207 = 1449$, а знаменатель равен $13 \cdot 207 = 2691$.
Ответ. $\frac{1449}{2691}$.

Задача 33

$\boxed{6}$ а) Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\frac{52\,367}{47\,633}$ и прибавить к знаменателю этой дроби, чтобы после сокращения получить $\frac{17}{83}$?

Идея. Использовать то, что после прибавления к знаменателю некоторого числа и вычитания этого же числа из числителя сумма числителя и знаменателя останется той же.
Указание. Сумма числителя и знаменателя преобразованной дроби должна состоять из $17 + 83 = 100$ равных частей, 17 из которых составляют числитель, а 83 — знаменатель.

Решение. Сумма числителя и знаменателя исходной дроби равна

$$52\,367 + 47\,633 = 100\,000.$$

После прибавления к знаменателю некоторого числа и вычитания этого же числа из числителя сумма числителя и знаменателя останется той же, т. е. 100 000.

Преобразованная дробь должна быть равна $\frac{17}{83}$, следовательно, сумма числителя и знаменателя преобразованной дроби должна состоять из $17 + 83 = 100$ равных частей, 17 из которых составляют числитель, а 83 — знаменатель. Поскольку сумма числителя и знаменателя равна 100 000, одна часть равна $100\,000 : 100 = 1000$, числитель преобразованной дроби равен $17 \cdot 1000 = 17\,000$, а знаменатель равен $83 \cdot 1000 = 83\,000$.

Для того чтобы получить из исходной дроби $\frac{52\,367}{47\,633}$ преобразованную дробь $\frac{17\,000}{83\,000}$, надо из числителя исходной дроби вычесть число $52\,367 - 17\,000 = 35\,367$ и к знаменателю прибавить это же число.

Ответ. 35 367.

4. Задачи на работу

Задача 1

$\boxed{5}$ Для того чтобы разрезать металлическую балку на две части, нужно уплатить за работу 5 рублей. Сколько будет стоить работа, если балку нужно разрезать на 10 частей?

Идея. Определить количество распилов.

Указание. Один распил увеличивает количество частей балки на 1.

Решение. Один распил стоит 5 рублей. Для того чтобы разрезать балку на 10 частей, надо сделать 9 распилов и заплатить $9 \cdot 5 = 45$ рублей.

Ответ. 45 руб.

Задача 2

$\boxed{5\text{-}7}$ Трактористы вспахали поле за три дня. В первый день они вспахали $\frac{3}{7}$ всего поля, во второй день — 40% поля, а в третий день — остальные 72 га. Найдите площадь поля.

Идея. Определить, какую часть поля составляют 72 га.

Указание. Вычислить, какая часть поля останется невспаханной после того, как вспахали $\frac{3}{7}$ поля и 40% поля.

Решение. После того как вспахали $\frac{3}{7}$ поля и 40% поля, невспаханной осталась

$$1 - \frac{3}{7} - \frac{40}{100} = \frac{4}{7} - \frac{2}{5} = \frac{20 - 14}{35} = \frac{6}{35}$$

часть поля. Значит, 72 га составляют $\frac{6}{35}$ всего поля. Следовательно, площадь всего поля равна

$$72 : \frac{6}{35} = 72 \cdot \frac{35}{6} = 12 \cdot 35 = 420 \text{ га.}$$

Ответ. 420 га.

Задача 3

$\boxed{5}$ Король нанял 2 рабочих для рытья подземного хода из своего дворца. Один рабочий за 1 час может прокопать вдвое больше, чем другой, а платит им король каждому одинаково за каждый час работы. Что обойдётся дешевле — совместная работа землекопов с 2 сторон до встречи или поочерёдное рытьё половины подземного хода каждым из землекопов?

Идея. Дольше должен работать более выгодный землекоп.
Указание. Сравнить время работы землекопов в обоих случаях.

Решение. Первый рабочий за 1 час может прокопать больше, чем второй, за ту же плату. Если рабочие будут копать поочерёдно по половине подземного хода, то первый землекоп проработает меньше за счёт большей производительности. Если землекопы будут копать с двух сторон до встречи, то они проработают одинаково. Но, чем дольше работает более выгодный землекоп, тем выгоднее королю. Значит, дешевле обойдётся совместная работа землекопов с двух сторон.
Ответ. Дешевле обойдётся совместная работа землекопов с двух сторон.

Задача 4

$\boxed{5}$ Малыш может съесть 600 г варенья за 6 мин, а Карлсон — в 2 раза быстрее. За какое время они съедят это варенье вместе?

Идея. Найти скорость совместного поедания варенья — вес варенья, съеденного вместе Малышом и Карлсоном за 1 минуту.
Указание. Определить вес варенья, съеденного Малышом за 1 минуту, и вес варенья, съеденного Карлсоном за 1 минуту.

Решение. Малыш съедает 600 г варенья за 6 мин, значит, за 1 минуту он съедает $600 : 6 = 100$ г. Карлсон ест в 2 раза быстрее, значит, он съедает $2 \cdot 100 = 200$ г варенья за минуту. Так как вместе за минуту они съедают $100 + 200 = 300$ г варенья, то 600 г они съедят за 2 минуты.
Ответ. 2 мин.

Задача 5

$\boxed{5\text{-}7}$ Один фонтан наполняет бассейн за 2,5 ч, а другой — за 3,75 ч. За какое время наполнят бассейн оба фонтана?

Идея. Найти скорость совместного наполнения бассейна — долю бассейна, которую наполнят оба фонтана за 1 час, работая вместе. Указание. Определить, какую долю бассейна наполняют первый и второй фонтаны за 1 час, работая по отдельности.

Решение. Так как первый фонтан наполняет бассейн за 2,5 ч, то за 1 ч он наполняет 1 : 2,5 часть бассейна. Второй фонтан наполняет бассейн за 3,75 ч, значит, за 1 ч он наполняет 1 : 3,75 часть бассейна. Получаем, что оба фонтана, работая вместе, за час наполняют

$$1 : 2{,}5 + 1 : 3{,}75 = 1 : \frac{5}{2} + 1 : \frac{15}{4} = \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

бассейна, значит, на наполнение всего бассейна им понадобится

$$1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ ч.}$$

Ответ. 1,5 ч.

Задача 6

$\boxed{6}$ Лошадь может съесть воз сена за 1 месяц, коза — за 2 месяца, а овца — за 3 месяца. За какое время лошадь, коза и овца вместе съедят такой же воз сена?

Идея. Найти скорость совместного поедания сена — количество возов, съеденных за 1 месяц.
Указание. Если 1 воз сена съедается за 2 месяца, то за месяц съедается половина воза.

Решение. Так как лошадь съедает воз сена за 1 месяц, коза — за 2 месяца, а овца — за 3 месяца, то за 1 месяц они съедают вместе

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6} \text{ возов сена.}$$

Значит, одного воза сена им хватит на

$$1 : \frac{11}{6} = \frac{6}{11} \text{ месяца.}$$

Ответ. За $\frac{6}{11}$ месяца.

Задача 7

$\boxed{6}$ Один рабочий может выполнить работу за 4 ч, а другой — за 6 ч. Сколько времени должен работать третий рабочий, если его производительность равна средней производительности первых двух?

Идея. Если производительность измерять в долях работы, выполненной за единицу времени, то время выполнения работы равно единице, делённой на производительность.
Указание. Найти производительность всех рабочих — долю работы, выполненную за 1 час.

Решение. Первый рабочий может выполнить работу за 4 ч, второй — за 6 ч, значит, их производительности равны $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$ соответственно.

Производительность третьего рабочего равна средней производительности первых двух рабочих, т. е.

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right):2=\frac{3+2}{12}:2=\frac{5}{24}.$$

Получается, что третий рабочий за 1 час делает $\frac{5}{24}$ всей работы, следовательно, всю работу он выполнит за $1:\frac{5}{24}=\frac{24}{5}=4{,}8$ ч.

Ответ. 4,8 ч.

Задача 8

$\boxed{6\text{-}7}$ Одна машинистка может перепечатать некоторую рукопись за 5 ч 20 мин, а другая — за 4 ч 40 мин. Однажды, работая вместе, они напечатали 90 страниц. Сколько страниц напечатала каждая машинистка?

Идея. Определить, во сколько раз вторая машинистка напечатает больше страниц, чем первая.
Указание. Найти отношение производительностей машинисток.

Решение. На перепечатывание некоторой рукописи у первой машинистки уходит 5 ч 20 мин, у второй — 4 ч 40 мин. Следовательно, производительность второй машинистки больше в

$$5\frac{1}{3}:4\frac{2}{3}=\frac{16}{3}:\frac{14}{3}=\frac{16}{3}\cdot\frac{3}{14}=\frac{8}{7}\text{ раз.}$$

Это значит, что вторая машинистка делает 8 частей работы в то время, когда первая делает 7 частей. Если 90 страниц разделить на $8+7=15$ частей, то одна часть будет состоять из $90:15=6$ страниц. Тогда первая машинистка напечатает $7\cdot 6=42$ страницы, а вторая — $8\cdot 6=48$ страниц.
Ответ. 42 и 48.

Задача 9

$\boxed{6}$ Для наполнения водного бассейна устроено два водопроводных крана, из которых первый, действуя один, мог бы наполнить бассейн за 4 ч 30 мин, а второй — за 6 ч 45 мин. Сначала был открыт только первый кран на то время, в течение которого оба крана могли бы наполнить бассейн. После этого, не закрывая первый кран, открыли второй кран. Через сколько времени после открытия второго крана наполнился бассейн?

Идея. Определить долю бассейна, наполненную первым краном, и время, затраченное на это.
Указание. Найти производительности кранов.
Указание. Определить время, за которое оба крана могут наполнить бассейн.
Указание. Вычислить долю бассейна, наполненную первым краном.
Указание. Найти время наполнения оставшейся части бассейна двумя кранами вместе.

Решение. Первый кран мог бы наполнить бассейн за 4 ч 30 мин, а второй — за 6 ч 45 мин, значит, их производительности равны соответственно

$$1 : 4\frac{1}{2} = 1 : \frac{9}{2} = \frac{2}{9} \quad \text{и} \quad 1 : 6\frac{3}{4} = 1 : \frac{27}{4} = \frac{4}{27}.$$

Следовательно, их совместная производительность равна

$$\frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{6+4}{27} = \frac{10}{27}$$

и вместе они наполнят бассейн за время, равное

$$1 : \frac{10}{27} = \frac{27}{10} \text{ ч}.$$

За это время первый кран успеет наполнить долю бассейна, равную

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{27}{10} = \frac{3}{5}.$$

Оставшиеся $\frac{2}{5}$ бассейна оба крана могут наполнить за

$$\frac{2}{5} : \frac{10}{27} = \frac{2}{5} \cdot \frac{27}{10} = \frac{27}{25} = 1{,}08 \text{ ч}.$$

Ответ. 1,08 ч.

Задача 10

$\boxed{6}$ Чтобы выкачать из цистерны нефть, поставили два насоса различной мощности. Если бы действовали оба насоса, то цистерна оказалась бы пустой через 12 мин. Оба действовали вместе в течение 4 мин, после чего работал только второй насос, который через 24 мин выкачал всю оставшуюся нефть. За сколько минут каждый насос, действуя отдельно, мог бы выкачать всю нефть из цистерны?

Идея. Найти производительности насосов.
Указание. Сначала найти совместную производительность насосов, потом часть цистерны, выкаченную насосами при совместной работе.
Указание. Вычислить производительность второго насоса, который выкачал оставшуюся часть цистерны за 24 мин.

Решение. Два насоса выкачивают цистерну за 12 мин, значит, их совместная производительность равна $\frac{1}{12}$.

Сначала насосы работали 4 мин и выкачали $4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ часть цистерны. Оставшиеся $\frac{2}{3}$ цистерны второй насос выкачал за 24 мин, значит, его производительность равна $\frac{2}{3} : 24 = \frac{1}{36}$, а всю цистерну он может выкачать за 36 мин. Тогда производительность первого насоса равна $\frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$ и всю цистерну он может выкачать за 18 мин.
Ответ. 18 мин и 36 мин.

Задача 11

$\boxed{6}$ Плавательный бассейн наполняется двумя трубами за 48 мин, если открыть сразу две трубы. Через одну трубу бассейн может наполниться за 2 ч. Найти объём бассейна, если известно, что за 1 мин через вторую трубу поступает воды на 50 куб. м больше, чем через первую.

Идея. Вычислить производительности труб.
Указание. Время измерять в часах.

Решение. Двумя трубами бассейн наполняется за 48 мин, значит, их совместная производительность равна

$$1 : \frac{48}{60} = \frac{60}{48} = \frac{5}{4}.$$

Через первую трубу бассейн может наполниться за 2 ч, значит, её производительность равна $\frac{1}{2}$, производительность второй трубы равна

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5-2}{4} = \frac{3}{4}.$$

За 1 мин через вторую трубу поступает воды на 50 куб. м больше, чем через первую, значит, за 1 час больше на $50 \cdot 60 = 3000$ куб. м, что составляет

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$$

часть бассейна. Получается, что объём всего бассейна равен $4 \cdot 3000 = 12\,000$ куб. м.
Ответ. 12 000 куб. м.

Задача 12

$\boxed{6}$ Работа была поручена двум рабочим. Первый рабочий может выполнить эту работу за $\frac{2}{5}$ ч. Сначала работал первый рабочий, а через 8 мин 40 с приступил к работе второй; после этого через $\frac{11}{90}$ ч работа была выполнена. За сколько минут один второй рабочий может выполнить эту работу?

Идея. Вычислить производительности рабочих.
Указание. Время измерять в минутах.

Решение. Первый рабочий может выполнить всю работу за $\frac{2}{5}$ ч $= 24$ мин, значит, его производительность равна $\frac{1}{24}$. За 8 мин 40 с он успел выполнить часть работы, равную

$$\frac{1}{24}\cdot 8\frac{2}{3}=\frac{1}{24}\cdot\frac{26}{3}=\frac{13}{36}.$$

Оставшиеся $\frac{23}{36}$ работы выполнили уже оба рабочих за

$$\frac{11}{90}\text{ ч}=\frac{11}{90}\cdot 60\text{ мин}=\frac{22}{3}\text{ мин},$$

следовательно, совместная производительность равна

$$\frac{23}{36}:\frac{22}{3}=\frac{23}{36}\cdot\frac{3}{22}=\frac{23}{12\cdot 22}.$$

Получается, что производительность второго рабочего равна

$$\frac{23}{12\cdot 22}-\frac{1}{24}=\frac{23-11}{12\cdot 22}=\frac{12}{12\cdot 22}=\frac{1}{22}$$

и всю работу один второй рабочий может выполнить за 22 мин.
Ответ. 22 мин.

Задача 13

$\boxed{6}$ Чтобы наполнить ванну вместимостью 166 л за 22 мин, сначала открыли кран с горячей водой, через который в 1 мин вливается 6,75 л. Затем этот кран закрыли и открыли кран с холодной водой, через который в 1 мин вливается 8,5 л. Сколько времени был открыт каждый кран?

Идея. Проанализировать отличие от ситуации, когда все 22 мин открыт кран только с горячей водой.
Указание. Рассмотреть разницу наполненных объёмов и разницу в скоростях наполнения кранами с горячей и холодной водой.

Решение. Если бы все 22 мин был открыт кран только с горячей водой, то в ванну налилось бы

$$6{,}75\cdot 22=148{,}5\text{ л}.$$

То есть в ванну не долили бы $166 - 148{,}5 = 17{,}5$ л воды за счёт того, что горячей воды наливается на $8{,}5 - 6{,}75 = 1{,}75$ л в минуту меньше. Получается, что кран с холодной водой работал $17{,}5 : 1{,}75 = 10$ минут. Следовательно, кран с горячей водой работал $22 - 10 = 12$ минут.

Ответ. 12 мин был открыт кран с горячей водой и 10 мин — с холодной.

Задача 14

6-7 Один рабочий может выполнить заказ за 6 дней, а другой — за 15 дней. Сначала работал первый рабочий, а затем второй закончил работу. Заказ был выполнен за 9 дней. Сколько деталей было изготовлено, если первый сделал на 150 деталей больше, чем второй?

Идея. Проанализировать отличие от ситуации, когда все 9 дней работал бы только второй рабочий.

Указание. Рассмотреть разницу в долях выполненной работы и разницу в производительностях.

Решение. Если бы все 9 дней работал только второй рабочий, то было бы сделано

$$9 \cdot \frac{1}{15} = \frac{3}{5}$$

всей работы. То есть не доделали бы $\frac{2}{5}$ заказа за счёт того, что производительность первого рабочего на

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{15-6}{90} = \frac{1}{10}$$

больше. Следовательно, время работы первого рабочего равно $\frac{2}{5} : \frac{1}{10} = 4$ дня. За это время он выполнил $\frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$ заказа. Значит, второй рабочий выполнил $\frac{1}{3}$ заказа. Так как первый рабочий сделал на 150 деталей больше, чем второй, то эти 150 деталей составляют $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ заказа, а весь заказ составляет $150 \cdot 3 = 450$ деталей.

Ответ. 450 деталей.

Задача 15

6-7 15 рабочих первой бригады могут построить деревянный дом за 18 дней, 20 рабочих второй бригады — за 12 дней, 30 рабочих третьей бригады могли бы построить тот же дом за столько дней, за сколько дней его построили бы 3 рабочих первой и 24 рабочих второй бригад, работая вместе. Для постройки были приглашены 12 рабочих первой бригады, 16 рабочих второй бригады и 15 рабочих третьей бригады, которые работали вместе до окончания работы. За работу они получили 2970 руб. Сколько дней продолжалась постройка дома и сколько денег получил каждый рабочий?

Идея. Определить, какую долю всей работы выполнил каждый рабочий, и разделить пропорционально этому полученные деньги.
Указание. Вычислить производительность одного рабочего каждой из трёх бригад.

Решение. Так как 15 рабочих первой бригады могут построить дом за 18 дней, 20 рабочих второй бригады — за 12 дней, то производительности одного рабочего первой бригады и одного рабочего второй бригады равны соответственно

$$\frac{1}{15 \cdot 18} \quad \text{и} \quad \frac{1}{20 \cdot 12}.$$

Теперь найдём, за сколько дней дом построили бы 3 рабочих первой и 24 рабочих второй бригад. Так как совместная производительность этих рабочих равна

$$3 \cdot \frac{1}{15 \cdot 18} + 24 \cdot \frac{1}{20 \cdot 12} = \frac{1}{90} + \frac{1}{10} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9},$$

то эта команда построила бы дом за 9 дней. По условию задачи 30 рабочих третьей бригады построили бы этот дом за это же время, значит, производительность одного рабочего третьей бригады равна

$$\frac{1}{9} : 30 = \frac{1}{9 \cdot 30}.$$

Для постройки дома были приглашены 12 рабочих первой бригады, 16 рабочих второй бригады и 15 рабочих третьей бригады, которые работали вместе с производительностью

$$\frac{12}{15 \cdot 18} + \frac{16}{20 \cdot 12} + \frac{15}{9 \cdot 30} = \frac{2}{15 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3} + \frac{1}{9 \cdot 2} = \frac{4+6+5}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

Значит, дом строился 6 дней. Осталось распределить между рабочими полученные за всю работу 2970 руб. Каждый рабочий первой бригады за 6 дней выполнил определённую долю всей работы и должен получить эту же долю от всей суммы, а именно:

$$2970 \cdot \frac{1}{15 \cdot 18} \cdot 6 = 66 \text{ руб.}$$

Из аналогичных соображений каждый рабочий второй бригады должен получить

$$2970 \cdot \frac{1}{20 \cdot 12} \cdot 6 = 74{,}25 \text{ руб.},$$

а каждый рабочий третьей бригады должен получить

$$2970 \cdot \frac{1}{9 \cdot 30} \cdot 6 = 66 \text{ руб.}$$

Ответ. 6 дней; 66 руб., 74,25 руб. и 66 руб. соответственно.

Задача 16

$\boxed{6\text{-}7}$ 7 лёгких тракторов могут вспахать некоторое поле за 10 дней, а 4 гусеничных могли бы вспахать то же поле за 7 дней. За какое время 8 лёгких и 5 гусеничных тракторов, работая одновременно, могли бы вспахать другое поле, площадь которого относится к площади первого как 41 : 12?

Идея. Найти совместную производительность 8 лёгких и 5 гусеничных тракторов, работающих вместе.
Указание. Вычислить производительность одного лёгкого трактора и производительность одного гусеничного трактора.

Решение. Так как 7 лёгких тракторов могут вспахать поле за 10 дней, то 1 лёгкий трактор вспашет это поле за 70 дней и его производительность равна $\frac{1}{70}$.

Это же поле 4 гусеничных трактора могут вспахать за 7 дней, значит, производительность одного такого трактора равна $\frac{1}{7} : 4 = \frac{1}{28}$.

Совместная производительность 8 лёгких и 5 гусеничных тракторов, работающих одновременно, будет равна

$$8 \cdot \frac{1}{70} + 5 \cdot \frac{1}{28} = \frac{16}{140} + \frac{25}{140} = \frac{41}{140},$$

следовательно, старое поле они вспашут за $\frac{140}{41}$ дня, а поле, которое в $\frac{41}{12}$ раза больше, за

$$\frac{41}{12} \cdot \frac{140}{41} = \frac{140}{12} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3} \text{ дня.}$$

Ответ. $11\frac{2}{3}$ дня.

Задача 17

$\boxed{6\text{-}7}$ Два насоса при одновременной совместной работе могут выкачать воду из котлована за 12 ч. Производительность одного насоса в полтора раза меньше производительности другого. За сколько часов была бы выкачана вода из этого котлована, если бы сначала половину всей воды выкачал первый насос, а затем второй — остальную воду?

Идея. Определить производительность каждого из насосов.
Указание. Найти совместную производительность двух насосов и использовать то, что производительность одного насоса в полтора раза меньше производительности другого.

Решение. Так как два насоса при одновременной совместной работе могут выкачать воду из котлована за 12 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{12}$. Производительность второго насоса в полтора раза больше производительности первого, значит, $\frac{1}{12}$ надо представить в виде суммы двух чисел, относящихся друг к другу как 1 : 1,5. Получается, что производительности первого и второго насосов равны соответственно

$$\frac{1}{12} : (1 + 1{,}5) = \frac{1}{30} \quad \text{и} \quad \frac{1}{30} \cdot 1{,}5 = \frac{1}{20},$$

а время, за которое они по очереди выкачают по половине котлована, равно

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{30} + \frac{1}{2} : \frac{1}{20} = 15 + 10 = 25\,\text{ч}.$$

Ответ. 25 ч.

5. Задачи на движение

Задача 1

$\boxed{6}$ Два автомобиля, находящиеся на расстоянии S км друг от друга, движутся навстречу друг другу. Скорость первого автомобиля v_1 км/ч, второго — v_2 км/ч. Через какое время они снова окажутся на расстоянии S км друг от друга?

Идея. Время движения есть отношение пройденного пути к скорости.

Указание. При движении в противоположных направлениях скорости складываются.

Указание. Пройденный путь равен удвоенному S.

Решение. Сначала автомобили должны пройти расстояние S, сближаясь друг с другом, а потом ещё одно расстояние S, удаляясь друг от друга. Так как при движении в противоположных направлениях скорости складываются, то искомое время равно $\frac{2S}{v_1 + v_2}$ ч.

Ответ. $\frac{2S}{v_1 + v_2}$ ч.

Задача 2

$\boxed{6}$ а) Петя и Коля, живущие друг от друга на расстоянии 840 м, в 9 утра вышли навстречу друг другу. После встречи каждый из них продолжил движение в том же направлении. Петя, дойдя до дома Коли, тотчас повернул обратно, а Коля, дойдя до дома Пети, тоже повернул обратно. В котором часу произошла первая встреча мальчиков и в котором вторая, если Петя шёл все время со скоростью 50 м/мин, а Коля — 70 м/мин?

Идея. Определить расстояния, пройденные вместе Петей и Колей, до первой встречи и до второй встречи.
Указание. При движении в разных направлениях скорости складываются.

Решение. Время движения до первой встречи равно суммарному расстоянию, делённому на суммарную скорость:

$$\frac{840}{50+70} = \frac{840}{120} = 7.$$

Значит, первая встреча произошла в 9 ч 7 мин.

До места второй встречи каждый прошёл по одному целому расстоянию и некоторой части этого целого расстояния, причём в сумме эти две части дают целое расстояние. Получается, что до момента второй встречи мальчики на двоих прошли $3 \cdot 840$ м, следовательно, с начала движения время до второй встречи в три раза больше, чем до первой встречи, т. е. 21 мин, значит, вторая встреча произошла в 9 ч 21 мин.
Ответ. 9 ч 7 мин и 9 ч 21 мин.

Задача 3

$\boxed{7}$ а) Из двух посёлков, находящихся на расстоянии 36 км друг от друга, навстречу друг другу вышли два товарища. Первый шёл со скоростью 5 км/ч, а второй шёл со скоростью 4 км/ч. Одновременно с первым из того же посёлка навстречу второму выехал мальчик-велосипедист. Он ехал со скоростью, равной сумме скоростей двух товарищей. Когда он встретил второго товарища, то поприветствовал его и немедленно повернул обратно. Встретив первого, он поприветствовал его и немедленно повернул обратно. И так он ездил между первым и вторым товарищами, пока они не встретились. Сколько километров за это время проехал велосипедист?

Идея. Пройденный путь равен произведению скорости и времени движения.
Указание. При движении навстречу скорости складываются.

Решение. Так как велосипедист ехал со скоростью, равной сумме скоростей двух товарищей, а время движения у всех троих одинаковое, то путь велосипедиста равен суммарному пути двух товарищей, т. е. 36 км.
Ответ. 36 км.
$\boxed{7}$ в)★ Расстояние AB равно 100 км. Из A и B одновременно выезжают навстречу друг другу велосипедисты со скоростями 20 и 30 км/ч соответственно. Вместе с первым из A вылетает муха со скоростью 50 км/ч, она летит до встречи с велосипедистом, выехавшим из B, после чего разворачивается и летит обратно до

встречи с велосипедистом, выехавшим из A, после чего разворачивается и т. д. Сколько километров пролетит муха в направлении от A к B до момента встречи велосипедистов?

Идея. Вычислить суммарный путь мухи и определить, на сколько отличается путь в направлении от A к B от пути в направлении от B к A.
Указание. Найти место, в котором произойдёт встреча.

Решение. Так как муха летит со скоростью, равной сумме скоростей двух велосипедистов, а время движения у всех троих одинаковое, то путь мухи равен суммарному пути велосипедистов, т. е. 100 км.

Для того чтобы определить, какую часть этого пути муха пролетела в направлении от A к B, надо вычислить расстояние от A до места встречи велосипедистов и мухи. Время движения равно расстоянию, делённому на сумму скоростей велосипедистов, т. е. $\frac{100}{20+30} = \frac{100}{50} = 2$ часа. Расстояние от A до места встречи равно расстоянию, пройденному велосипедистом, который выехал из пункта A, т. е. $2 \cdot 20 = 40$ км.

Получается, что муха пролетела в направлении от A к B на 40 км больше, чем от B к A, причём сумма этих расстояний равна 100 км. Следовательно, в направлении от A к B она пролетела 70 км, а от B к A — 30 км.
Ответ. 70 км.

Задача 4

$\boxed{6}$ а) Длина шоссейной дороги между двумя сёлами 44 км. В 6 часов утра из первого села выехал почтальон на велосипеде. В 7 часов 8 минут навстречу ему из второго села выехал на лошади фермер. В 9 часов утра они встретились. Скорость фермера меньше скорости почтальона на 2,5 км/ч. Найти скорость каждого.

Идея. Определить расстояние, которое они прошли бы за это время, двигаясь оба со скоростью фермера.
Указание. Использовать то, что скорость фермера меньше скорости почтальона на 2,5 км/ч.

Решение. Почтальон провёл в пути $9 - 6 = 3$ часа. За это время он проехал на $3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ км больше, чем если бы он двигался со скоростью фермера. Значит, если бы они оба двигались навстречу друг другу со скоростью фермера, то вместе они бы прошли $44 - 7{,}5 = 36{,}5$ км. Имеется в виду, что один из них, как и раньше, идёт до встречи $9 - 6 = 3$ часа, второй идёт 9 ч – 7 ч 8 мин = 1 ч 52 мин, только оба они двигаются со скоростью фермера.

Одному фермеру на прохождение этого пути понадобилось бы

$$3 + 1\,\frac{52}{60} = 4\,\frac{13}{15}\ \text{ч.}$$

Для того чтобы найти скорость фермера, поделим расстояние на время:

$$36{,}5 : 4\,\frac{13}{15} = \frac{73}{2} : \frac{73}{15} = \frac{15}{2} = 7{,}5\ \text{км/ч.}$$

Скорость почтальона равна $7{,}5 + 2{,}5 = 10$ км/ч.

Ответ. 7,5 км/ч и 10 км/ч.

Задача 5

$\boxed{6}$ Из A и B, расстояние между которыми 43,8 км, выехали навстречу друг другу два автобуса. До места встречи первый автобус, следовавший из A, проехал на 11,4 км больше второго автобуса, шедшего из B. Какова скорость каждого автобуса, если первый шёл до встречи 0,75 ч, а второй вышел на 25 мин позже, чем первый?

Идея. Скорость равна отношению пройденного пути ко времени движения.

Указание. Определить путь, пройденный каждым из автобусов.

Решение. Так как первый автобус проехал на 11,4 км больше второго автобуса, а вместе они проехали 43,8 км, то $43{,}8 - 11{,}4 = 32{,}4$ км есть удвоенный путь второго автобуса. Значит, второй автобус проехал $32{,}4 : 2 = 16{,}2$ км, а первый — $16{,}2 + 11{,}4 = 27{,}6$ км.

Теперь вычислим скорости автобусов. Так как скорость равна отношению пройденного пути ко времени движения, то скорость первого автобуса равна

$$27{,}6 : 0{,}75 = 27{,}6 : \frac{3}{4} = 27{,}6 \cdot \frac{4}{3} = 9{,}2 \cdot 4 = 36{,}8\ \text{км/ч.}$$

Скорость второго автобуса равна

$$16{,}2 : \left(0{,}75 - \frac{25}{60}\right) = 16{,}2 : \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{12}\right) = 16{,}2 : \frac{4}{12} = 16{,}2 \cdot 3 = 48{,}6\ \text{км/ч.}$$

Ответ. 36,8 км/ч и 48,6 км/ч.

Задача 6

$\boxed{6}$ По круговому замкнутому шоссе одновременно и из одной точки начинают ехать четыре автомобиля: A, B, C и D. Первые два едут по часовой стрелке, другие два — против, причём все автомобили едут с постоянными (возможно, различными) скоростями. Известно, что A и C встречаются впервые в тот же момент, что и B и D. Докажите, что A и B поравняются впервые в тот же момент, что и C и D.

Идея. Время до встречи автомобилей, едущих в противоположные стороны, равно отношению длины замкнутого шоссе к сумме скоростей, а время до встречи автомобилей, едущих в одну сторону, — к разности скоростей.
Указание. Выразить время встречи автомобилей через длину замкнутого шоссе, сумму и разность соответствующих скоростей.

Решение. Пусть v_A, v_B, v_C, v_D — скорости автомобилей A, B, C, D соответственно, а S — длина замкнутого шоссе.

По условию задачи A и C встречаются впервые в тот момент, что и B и D, значит, равны следующие времена:

$$t_{AC} = \frac{S}{v_A + v_C} \quad \text{и} \quad t_{BD} = \frac{S}{v_B + v_D}.$$

Из равенства этих выражений получаем, что

$$v_A + v_C = v_B + v_D \iff v_A - v_B = v_D - v_C.$$

Пусть для определённости $v_A - v_B > 0$. Тогда время до встречи A и B равно $t_{AB} = \dfrac{S}{v_A - v_B}$ и, в силу равенства $v_A - v_B = v_D - v_C$, это время равно времени до встречи C и D, а именно $t_{DC} = \dfrac{S}{v_D - v_C}$. Что и требовалось доказать.

Задача 7

$\boxed{6}$ а) Поезд за четверть минуты проходит мимо телеграфного столба, а за 50 с — мост длиной 0,7 км. Вычислить среднюю скорость поезда и его длину.

Идея. Определить время прохождения моста начальной точкой поезда.
Указание. Время измерять в часах.

Решение. Поезд проходит мост длиной 0,7 км за 50 с, из них 15 с он проходит мимо конечной точки моста, значит, начальная точка поезда проходит мост за $50 - 15 = 35$ с. Следовательно, средняя скорость поезда равна

$$0{,}7 : \frac{35}{3600} = 70 \cdot \frac{36}{35} = 72 \text{ км/ч}.$$

Мимо столба поезд проходит за 15 секунд, значит, его длина равна

$$72 \cdot \frac{15}{3600} = \frac{15}{50} = 0{,}3 \text{ км} = 300 \text{ м}.$$

Ответ. 72 км/ч; 300 м.

Задача 8

6 а) Я еду в поезде, который идёт со скоростью 40 км/ч, и вижу, как в течение 3 с мимо моего окна в противоположном направлении проходит скорый поезд, имеющий длину 75 м. С какой скоростью шёл встречный поезд?

Идея. Скорость второго поезда относительно первого поезда равна сумме скоростей поездов.

Указание. Скорость равна отношению пройденного пути ко времени движения.

Указание. Расстояние измерять в километрах, время — в часах.

Решение. Поезд, имеющий длину 75 м, проходит мимо первого поезда за 3 с, следовательно, скорость второго поезда относительно первого поезда равна

$$\frac{75\text{ м}}{3\text{ с}} = \frac{\frac{75\text{ км}}{1000}}{\frac{3\text{ ч}}{3600}} = 25\text{ км/ч}\cdot\frac{3600}{1000} = 90\text{ км/ч}.$$

Так как скорость второго поезда относительно первого поезда равна сумме скоростей поездов, то скорость встречного поезда равна $90 - 40 = 50$ км/ч.

Ответ. 50 км/ч.

6-7 б)★ По двум параллельным железнодорожным путям едут навстречу друг другу два поезда, каждый равномерно, но с различными скоростями. Длина первого поезда 130,75 м, длина второго поезда 117,75 м. Промежуток времени, в течение которого оба поезда шли при встрече один мимо другого, равен $3\frac{7}{45}$ с. Если бы поезда шли в одну сторону и если бы первый поезд нагнал второй, то они шли бы один возле другого 28,4 с. Какова скорость каждого поезда?

Идея. Найти сумму скоростей и разность.

Указание. Суммарная длина поездов, делённая на время встречного движения (один мимо другого), равна сумме скоростей.

Указание. Суммарная длина поездов, делённая на время обгона (один возле другого), равна разности скоростей.

Решение. Сумма скоростей поездов равна суммарной длине поездов, делённой на время встречного движения (один мимо другого):

$$v_1 + v_2 = (130{,}75 + 117{,}75) : 3\frac{7}{45} = 248{,}5 \cdot \frac{45}{142} = 78{,}75.$$

Разность скоростей поездов равна суммарной длине поездов, делённой на время обгона (один возле другого):

$$v_1 - v_2 = (130{,}75 + 117{,}75) : 28{,}4 = 248{,}5 : 28{,}4 = 8{,}75.$$

Следовательно, удвоенная скорость первого поезда равна

$$2v_1 = 78{,}75 + 8{,}75 = 87{,}5,$$

откуда $v_1 = 87{,}5 : 2 = 43{,}75$, а $v_2 = v_1 - 8{,}75 = 43{,}75 - 8{,}75 = 35$.
Ответ. 43,75 м/с и 35 м/с.

Задача 9

$\boxed{6}$ а) Из городов A и B выехали навстречу друг другу две автомашины: из A — «Волга» в 7 ч 20 мин утра и из B — «Москвич» в 7 ч утра. В котором часу произошла встреча машин, если известно, что «Волга» весь путь от A до B проходит за 2 ч 42 мин, а «Москвич» — за 3 ч 36 мин?

Идея. Рассмотреть движение машин с момента выезда второй машины.
Указание. Выразить через исходное расстояние скорости обеих машин и путь, который им надо пройти вместе с момента выезда второй машины.

Решение. Пусть расстояние между городами A и B равно S. Тогда скорость «Волги» равна

$$v_{\text{В}} = S : 2\,\frac{42}{60} = S : 2\,\frac{7}{10} = S : \frac{27}{10} = \frac{10S}{27},$$

а скорость «Москвича» равна

$$v_{\text{М}} = S : 3\,\frac{36}{60} = S : 3\,\frac{3}{5} = S : \frac{18}{5} = \frac{5S}{18}.$$

Расстояние, которое прошёл «Москвич» до выезда «Волги», равно

$$v_{\text{М}} \cdot \frac{20}{60} = \frac{5S}{18} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5S}{54}.$$

Получается, что в 7 ч 20 мин машины стали двигаться навстречу друг другу, когда расстояние между ними было

$$S - \frac{5S}{54} = \frac{49S}{54}.$$

Для того чтобы найти время встречи, поделим это расстояние на сумму скоростей машин:

$$\frac{\frac{49S}{54}}{v_{\text{В}} + v_{\text{М}}} = \frac{\frac{49S}{54}}{\frac{10S}{27} + \frac{5S}{18}} = \frac{\frac{49S}{54}}{\frac{20S}{54} + \frac{15S}{54}} = \frac{49}{35} = \frac{7}{5}.$$

В результате время встречи равно 7 ч 20 мин + 1 ч 24 мин = = 8 ч 44 мин.
Ответ. 8 ч 44 мин.

Задача 10

6-7 а) В 6 ч утра из A в B вышел пешеход. В 10 ч того же дня из B в A выехал велосипедист и встретил пешехода в 1 ч дня. Расстояние AB равно 62 км. Найти скорость каждого, если их отношение этих скоростей равно 0,28.

Идея. Выразить пройденный путь через одну из скоростей.
Указание. Пройденный путь равен произведению скорости и времени движения.

Решение. Обозначим через v скорость велосипедиста, тогда скорость пешехода равна $0{,}28v$. Велосипедист был в пути $13 - 10 = 3$ часа, а пешеход $13 - 6 = 7$ часов, следовательно, путь велосипедиста составляет $3v$, а путь пешехода составляет $7 \cdot 0{,}28v = 1{,}96v$. Вместе они прошли 62 км, значит,

$$3v + 1{,}96v = 62 \iff 4{,}96v = 62 \iff v = 62 : 4{,}96 = 12{,}5.$$

Скорость пешехода равна $0{,}28v = 0{,}28 \cdot 12{,}5 = 3{,}5$ км/ч.
Ответ. 3,5 и 12,5 км/ч.

Задача 11

7 Собака, находясь в пункте A, погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 м от собаки в пункте B. Скачок собаки равен 2 м, скачок лисицы равен 1 м. Собака делает 2 скачка, в то время как лисица делает 3 скачка. На каком расстоянии от пункта A собака догонит лисицу?

Идея. Подсчитать, сколько скачков успеет сделать лисица до того времени, как её догонит собака.
Указание. Определить, на сколько метров сокращается расстояние между лисицей и собакой за то время, когда лисица делает 3 скачка.

Решение. За 3 скачка лисица перемещается на 3 метра. За это же время собака делает 2 скачка по 2 метра, т. е. перемещается на 4 метра. Следовательно, за три скачка лисицы расстояние сокращается на 1 метр.

В самом начале расстояние между лисицей и собакой равно 30 м, значит, лисица успеет сделать $30 \cdot 3 = 90$ скачков до того времени, как её догонит собака. Каждый скачок лисицы равен 1 м, т. е. лисица успеет пробежать 90 м и расстояние от пункта A будет равно $30 + 90 = 120$ м.
Ответ. 120 м.

Задача 12

$\boxed{6}$ а) Первую треть пути автомобиль прошёл со скоростью 54 км/ч, вторую — со скоростью 45 км/ч и третью — со скоростью 60 км/ч. Найти среднюю скорость движения автомобиля на всём пути. (Ответ дать с точностью до 0,1 км/ч.)

Идея. Средняя скорость равна отношению всего расстояния ко всему времени движения.
Указание. Выразить время движения на каждом из участков через расстояние.
Указание. Время движения равно отношению пройденного расстояния к скорости движения.

Решение. Пусть S км — длина всего пути. Первую треть пути автомобиль прошёл со скоростью 54 км/ч, значит, он потратил на это

$$\frac{S}{3} : 54 = \frac{S}{3 \cdot 54} \text{ ч.}$$

Вторую треть пути автомобиль шёл со скоростью 45 км/ч, третью — со скоростью 60 км/ч, значит, он потратил на это

$$\frac{S}{3 \cdot 45} \text{ ч} \quad \text{и} \quad \frac{S}{3 \cdot 60} \text{ ч.}$$

Средняя скорость равна отношению всего расстояния ко всему времени движения:

$$S : \left(\frac{S}{3 \cdot 54} + \frac{S}{3 \cdot 45} + \frac{S}{3 \cdot 60}\right) = S : \left(\frac{S}{9} \cdot \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}\right)\right) =$$

$$= S : \left(\frac{S}{9} \cdot \left(\frac{10}{180} + \frac{12}{180} + \frac{9}{180}\right)\right) = S : \left(\frac{31S}{9 \cdot 180}\right) = \frac{9 \cdot 180}{31} \approx 52{,}3.$$

Ответ. 52,3 км/ч.

Задача 13

$\boxed{6}$ а) Два самолёта одновременно вылетели из Москвы в одном и том же направлении: один — со скоростью 350 км/ч, а другой — со скоростью 280 км/ч. Через два часа первый уменьшил скорость до 230 км/ч. На каком расстоянии от Москвы второй самолёт догонит первый?

Идея. Искомое расстояние равно произведению скорости второго самолёта и времени, за которое он догонит первый самолёт.
Указание. Сначала вычислить расстояние между самолётами через два часа, затем время, за которое второй самолёт догонит первый.

Решение. Первые два часа самолёты отдалялись друг от друга со скоростью $350 - 280 = 70$ км/ч. За эти два часа расстояние между ними увеличилось до $70 \cdot 2 = 140$ км. Потом самолёты сближались со скоростью $280 - 230 = 50$ км/ч, значит, их встреча произойдёт через $140 : 50 = 2{,}8$ ч после уменьшения скорости первым самолётом.

Расстояние до момента встречи равно произведению скорости второго самолёта (которая оставалась неизменной) на суммарное время до встречи самолётов:

$$280 \cdot (2 + 2{,}8) = 280 \cdot 4{,}8 = 1344.$$

Ответ. 1344 км.

Задача 14

$\boxed{6}$ а) Фермер выехал из деревни в 4 ч 30 мин утра и приехал в город, когда было без десяти минут 8 ч утра; если бы он проезжал в час на 1,2 км меньше, то ехал бы до города $3\frac{3}{4}$ ч. Сколько километров от деревни до города?

Идея. Уменьшенная скорость равна отношению расстояния, которое фермер, двигаясь намеченное время, не доедет из-за уменьшенной скорости, к дополнительному времени.

Указание. Вычислить расстояние, которое фермер, двигаясь намеченное время, не доедет из-за уменьшенной скорости.

Указание. Вычислить дополнительное время, которое понадобится фермеру, если он уменьшит скорость.

Указание. Искомое расстояние равно произведению уменьшенной скорости и времени движения с этой скоростью.

Решение. Фермер выехал в 4 ч 30 мин утра и приехал без 10 мин 8 ч утра, значит, он был в пути

$$7\frac{50}{60} - 4\frac{30}{60} = 3\frac{1}{3} \text{ ч.}$$

Двигаясь с уменьшенной на 1,2 км скоростью, за намеченные $3\frac{1}{3}$ ч он не доехал бы до города

$$3\frac{1}{3} \cdot 1{,}2 = \frac{10}{3} \cdot 1{,}2 = 4 \text{ км.}$$

Это значит, что эти 4 км он бы проехал за время, равное

$$3\frac{3}{4} - 3\frac{1}{3} = \frac{5}{12} \text{ ч.}$$

Следовательно, его уменьшенная скорость равна

$$4 : \frac{5}{12} = 4 \cdot \frac{12}{5} = 9{,}6 \text{ км/ч}$$

и расстояние равно

$$9{,}6 \cdot 3\frac{3}{4} = 9{,}6 \cdot \frac{15}{4} = 2{,}4 \cdot 15 = 36 \text{ км.}$$

Ответ. 36 км.

Задача 15

$\boxed{6}$ а) Моторная лодка должна выйти из пункта A и прибыть в пункт B к определённому моменту. Если она будет ехать со скоростью 35 км/ч, то опоздает на 2 ч, если же она будет делать по 50 км/ч, то придёт на 1 ч раньше срока. Каково расстояние между A и B? Сколько часов лодка должна была затратить на прохождение пути?

Идея. Проанализировать, как изменится расстояние, пройденное за намеченное время, из-за изменения скорости.
Указание. Определить, сколько километров лодка не доедет до пункта B, двигаясь намеченное время с меньшей скоростью, и сколько километров проедет лишних, двигаясь с большей скоростью.

Решение. Если лодка будет ехать со скоростью 35 км/ч, то за намеченное время до пункта B она не доедет $35 \cdot 2 = 70$ км. Если лодка будет делать по 50 км/ч, то за намеченное время она проедет лишние 50 км.

Получается, что из-за разности скоростей в $50 - 35 = 15$ км/ч разница в расстояниях, пройденных за намеченное время, составляет $70 + 50 = 120$ км, значит, намеченное время равно $120 : 15 = 8$ ч.

Расстояние между пунктами A и B равно $50 \cdot (8 - 1) = 50 \cdot 7 = 350$ км.
Ответ. 350 км; 8 ч.

Задача 16

$\boxed{6}$ а) В 8 ч утра из пункта A вышел автобус, а в 9 ч из того же пункта A по той же дороге вышла легковая машина. Автобус, идя без остановки, прибыл в пункт B в 2 ч дня, а легковая машина — в 1 ч 30 мин дня. На каком расстоянии от пункта A легковая машина догнала автобус, если известно, что её скорость на 20 км/ч больше скорости автобуса?

Идея. Вычислить скорости автобуса и машины.
Указание. Найти сначала расстояние, которое останется пройти до пункта B машине, если бы она двигалась то же время, но со скоростью автобуса, потом — скорость автобуса.

Решение. Автобус прошёл путь AB за $14 - 8 = 6$ ч. Машина прошла путь AB за $13\frac{1}{2} - 9 = 4\frac{1}{2}$ ч.

Если бы машина двигалась со скоростью автобуса (т. е. на 20 км/ч меньше), то она не доехала бы до B расстояние, равное $20 \cdot 4\frac{1}{2} = 90$ км.

Если бы автобус ехал со своей скоростью столько времени, сколько ехала машина, то он не доехал бы до B те же 90 км. Следовательно, скорость автобуса равна

$$90 : \left(6 - 4\frac{1}{2}\right) = 90 : \frac{3}{2} = 60 \text{ км/ч},$$

а скорость машины $60 + 20 = 80$ км/ч.

Теперь найдём расстояние, пройденное машиной до встречи с автобусом.

Автобус выехал в 8 ч утра, значит, в 9 ч он был на расстоянии 60 км от пункта A. Время, через которое произошла встреча, равно отношению расстояния к разности скоростей, т. е.

$$60 : 20 = 3 \text{ ч}.$$

За это время машина успела отъехать от пункта A на $3 \cdot 80 = 240$ км.

Ответ. 240 км.

Задача 17

$\boxed{6}$ а) На прохождение пути между двумя пристанями пароходу необходимо на 40 мин больше, чем катеру. Скорость катера 40 км/ч, а парохода 30 км/ч. Найти расстояние между пристанями.

Идея. Найти время, за которое катер прошёл весь путь.
Указание. Найти расстояние, на которое пароход отстал от катера.

Решение. Когда катер прибыл на вторую пристань, пароходу ещё надо было проплыть 40 мин. За 40 мин пароход прошёл 20 км, т. е. пароход отстал от катера на 20 км.

Так как разность скоростей равна 10 км/ч, то катер прошёл весь путь за 2 часа. Значит, расстояние равно $2 \cdot 40 = 80$ км.

Ответ. 80 км.

Задача 18

$\boxed{6}$ а) Из города A в город B приехали два товарища. Один из них 4 ч ехал на велосипеде со скоростью 15 км/ч и 6 ч на автомобиле. Второй 3 ч ехал на поезде и 2 ч на автомобиле (скорости автомобилей одинаковы). Скорость автомобиля в 2 раза меньше скорости поезда. Чему равно расстояние от A до B?

Идея. Вычислить скорость автомобиля.
Указание. Определить, во сколько раз скорость автомобиля больше скорости велосипеда.

Решение. Второй товарищ 2 ч ехал на автомобиле и 3 ч на поезде. Так как скорость автомобиля в 2 раза меньше скорости поезда, то на автомобиле он бы проехал всё расстояние AB за

$$2 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8 \text{ ч}.$$

Первый товарищ ехал 4 ч ехал на велосипеде со скоростью 15 км/ч и 6 ч на автомобиле. Если бы он ехал только на автомобиле, то добирался бы 8 ч, значит, за 4 ч велосипед проходит столько, сколько автомобиль за 2 ч. Следовательно, скорость автомобиля в 2 раза больше скорости велосипеда, т. е. скорость автомобиля равна $2 \cdot 15 = 30$ км/ч.

Расстояние AB автомобиль проходит за 8 ч, значит, оно равно $8 \cdot 30 = 240$ км.

Ответ. 240 км.

Задача 19

$\boxed{6}$ Расстояние между пунктами A и B автомобиль должен был проехать за 10 ч. Сначала он ехал со скоростью 40 км/ч. Когда до половины пути осталось 100 км, то, чтобы прийти вовремя, автомобиль увеличил скорость на 20 км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля.

Идея. Рассмотреть движение по пути, который получится, если исключить из рассмотрения 100 км до середины AB и 100 км после середины AB.

Указание. Зная отношение скоростей при движении по равным участкам дороги, найти отношение соответствующих времён.

Решение. Автомобиль проехал 100 км до середины AB и 100 км после середины AB со скоростью 60 км/ч. На это он потратил $200 : 60 = \frac{10}{3}$ часа.

Задача свелась к следующей: автомобиль проехал два равных участка дороги со скоростями 40 км/ч и 60 км/ч на каждом за время $10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$ часа. Найти длину каждого из участков дороги.

Так как скорости относятся как $2 : 3$, то соответствующие времена относятся как $3 : 2$. Разделив $\frac{20}{3}$ ч на 5 равных частей и взяв 3 такие части, получим, что

$$\frac{20}{3} : 5 \cdot 3 = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4 \text{ ч}$$

понадобилось автомобилю на прохождение первого участка дороги со скоростью 40 км/ч. Значит, длина этого участка равна $4 \cdot 40 = 160$ км.

Теперь вернёмся к исходной задаче. Средняя скорость равна отношению всего пройденного пути ко всему времени движения:

$$(160 + 100 + 100 + 160) : 10 = 520 : 10 = 52 \text{ км/ч}.$$

Ответ. 52 км/ч.

Задача 20

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Водитель автобуса должен был проехать от пункта A до пункта B за определённое время. Пройдя первую треть пути с намеченной скоростью, водитель на остальной части пути увеличил скорость на 20%, а потому прибыл в пункт B на 20 мин раньше срока. Сколько времени затратил водитель на весь путь от A до B?

Идея. Определить, какую часть от намеченного на прохождение $\frac{2}{3}$ пути времени составляет 20 мин.

Указание. Увеличение скорости в 1,2 раза приводит к уменьшению времени в 1,2 раза.

Решение. За счёт того что водитель увеличил скорость на $\frac{2}{3}$ пути, он потратил на эти $\frac{2}{3}$ пути на 20 мин меньше. Увеличение скорости на 20% соответствует увеличению скорости в 1,2 раза, а, следовательно, уменьшению времени в 1,2 раза, т. е. уменьшенное время составляет $\frac{5}{6}$ от старого времени. Получается, что время уменьшилось на $\frac{1}{6}$. По условию задачи время уменьшилось на 20 мин, значит, $\frac{1}{6}$ времени равна 20 мин, а всё время, намеченное на прохождение $\frac{2}{3}$ пути, равно $20 \cdot 6 = 120$ мин $= 2$ ч. Тогда время, намеченное на прохождение всего пути AB, равно 3 ч. Так как автобус прибыл на 20 мин раньше срока, то в пути он провёл 2 ч 40 мин.
Ответ. 2 ч 40 мин.

Задача 21

$\boxed{6}$ а) Два спортсмена состязались в беге на одно и то же расстояние. Стартовали они в один и тот же момент из одного пункта. Один пробежал всю дистанцию за 1 мин 15 с, а другой за 1 мин 20 с. Сколько метров в минуту в среднем пробегал каждый спортсмен, если через 48 с после старта между ними было 20 м?

Идея. Найти отношение скоростей и их разность.
Указание. Отношение скоростей найти из отношения соответствующих времён.
Указание. Используя то, что через 48 с после старта между ними было 20 м, найти разность скоростей.

Решение. Так как времена пробегов спортсменов относятся как

$$1\frac{1}{4} : 1\frac{1}{3} = \frac{5}{4} : \frac{4}{3} = \frac{15}{16},$$

то их скорости относятся как $\frac{16}{15}$. Получается, что скорость первого состоит из 16 равных частей, скорость второго из 15 таких же частей, а разность скоростей — из одной такой части.

Через 48 с после старта между спортсменами было 20 м, значит, через минуту расстояние было равным

$$20 : 48 \cdot 60 = 20 \cdot \frac{5}{4} = 25 \text{ м}$$

и, следовательно, разность их скоростей равна 25 м/мин.

Если одна часть скорости первого спортсмена равна 25 м/мин, а его скорость состоит из 16 таких частей, то она равна $25 \cdot 16 = 400$ м/мин. Скорость второго спортсмена на одну часть меньше, т. е. равна $400 - 25 = 375$ м/мин.

Ответ. 400 м/мин и 375 м/мин.

Задача 22

$\boxed{6}$ а) Расстояние между пристанями на реке 43,2 км. Моторная лодка, идя по течению реки, затрачивает на этот путь 2 ч 24 мин. Сколько времени затрачивает эта лодка на этот же путь, идя против течения, если скорость течения 1,8 км/ч?

Идея. Вычислить скорость лодки при движении против течения.
Указание. При движении по течению к собственной скорости лодки прибавляется скорость течения, при движении против течения вычитается.

Решение. Скорость движения по течению равна

$$43{,}2 : 2\frac{24}{60} = 43{,}2 : 2{,}4 = 432 : 24 = 18 \text{ км/ч},$$

значит, собственная скорость лодки равна $(18 - 1{,}8)$ км/ч, а скорость лодки, идущей против течения, равна $18 - 2 \cdot 1{,}8 = 18 - 3{,}6 = 14{,}4$ км/ч. Следовательно, на путь против течения лодка затратит

$$43{,}2 : 14{,}4 = 3 \text{ ч}.$$

Ответ. 3 ч.

Задача 23

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Пароход прошёл расстояние между двумя пристанями по течению реки за 10 ч, а в обратном направлении — за 15 ч, делая в час на 8 км меньше. Сколько километров между пристанями?

Идея. Измерять скорости в долях расстояния, пройденного за 1 час.
Указание. При движении по течению к собственной скорости лодки прибавляется скорость течения, при движении против течения вычитается.

Решение. Расстояние между пристанями по течению пароход проходит за 10 ч, значит, за 1 ч пароход проходит $\frac{1}{10}$ пути. То же расстояние, но против течения, пароход проходит за 15 ч, значит, за 1 ч он проходит $\frac{1}{15}$ пути.

По условию задачи разница расстояний, пройденных по течению и против течения за 1 час, равна 8 км, следовательно,

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30}$$

часть расстояния равна 8 км, а всё расстояние равно $30 \cdot 8 = 240$ км.
Ответ. 240 км.

Задача 24

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Пароход идёт от Нижнего Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно — 7 суток. Сколько времени плывут плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

Идея. Измерять скорости в долях расстояния, пройденного за 1 сутки.
Указание. Разность скоростей при движении по течению и против равна удвоенной скорости течения.

Решение. Из условия задачи следует, что за сутки по течению пароход проходит $\frac{1}{5}$ часть всего пути, а против течения — $\frac{1}{7}$ часть пути.

Разность скоростей (по течению и против) равна удвоенной скорости течения, значит, скорость течения составляет

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) : 2 = \frac{2}{35} : 2 = \frac{1}{35}$$

часть пути за сутки. Получается, что плот будет плыть от Нижнего Новгорода до Астрахани 35 суток.
Ответ. 35 сут.

Задача 25

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Моторная лодка может проплыть 28 км за час по течению и только 20 км за час против течения. Какое расстояние прошла лодка по течению, если она отправилась в 10 ч 30 мин утра, а возвратилась, нигде не останавливаясь, в 4 ч 30 мин того же дня?

Идея. Определить, сколько времени требуется лодке для прохождения 1 км пути туда и обратно.

Указание. Если скорость равна 28 км/ч, то на 1 км нужно потратить $\frac{1}{28}$ часа.

Решение. Моторная лодка проплывает по течению 28 км за час, а против течения 20 км за час, значит, 1 км по течению она проплывает за $\frac{1}{28}$ часа, а против течения за $\frac{1}{20}$ часа. Получается, что на прохождение 1 км пути туда и обратно лодка тратит

$$\frac{1}{28}+\frac{1}{20}=\frac{5+7}{140}=\frac{12}{140}=\frac{3}{35} \text{ часа.}$$

На прохождение всего пути туда и обратно лодка тратит 6 часов, следовательно, расстояние равно

$$6:\frac{3}{35}=70 \text{ км.}$$

Ответ. 70 км.

Задача 26

$\boxed{5}$ Муравей направился в гости в соседний муравейник. Туда он шёл пешком, а обратно ехал: первую половину пути на гусенице — со скоростью, в 2 раза меньшей, чем пешком; а другую половину на кузнечике — со скоростью, в 5 раз большей, чем пешком. На какой путь муравей затратил времени меньше: в гости или обратно и почему?

Идея. Сравнить время, затраченное на дорогу в гости, со временем поездки на гусенице.
Указание. Если путь уменьшится в два раза и скорость уменьшится в два раза, то время движения останется тем же.

Решение. Первую половину обратного пути муравей ехал на гусенице со скоростью в 2 раза меньшей, чем шёл весь путь в гости пешком. Если путь уменьшится в два раза и скорость уменьшится в два раза, то время движения останется тем же. Получается, что поездка на гусенице заняла столько же времени, сколько весь путь в гости, значит, времени на путь в гости он затратил меньше, чем на обратный путь.
Ответ. В гости.

Задача 27

$\boxed{5}$ Малыш проехал на самокате некоторое расстояние за 15 минут. За какое время он проедет на велосипеде расстояние в 3 раза большее? Скорость малыша на велосипеде в 5 раз больше, чем на самокате.

Идея. Проследить за тем, как меняется время движения при изменении скорости и расстояния.
Указание. При увеличении скорости в несколько раз время движения уменьшается в это же количество раз.

Решение. Если скорость увеличить в 5 раз, то расстояние, которое малыш проезжал за 15 минут, он проедет в 5 раз быстрее, т. е. за $15 : 5 = 3$ минуты. Следовательно, в 3 раза большее расстояние малыш проедет за $3 \cdot 3 = 9$ минут.
Ответ. 9 мин.

Задача 28

5 Петя и Ваня ехали вниз по эскалатору. На середине эскалатора хулиган Витя сорвал с Пети шапку и бросил её на встречный эскалатор. Пострадавший Петя побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься вниз по встречному эскалатору и вернуть шапку. Хитрый Ваня побежал по эскалатору вниз, чтобы затем подняться вверх и успеть раньше Пети. Кто успел первый, если скорости ребят относительно эскалатора постоянны и не зависят от направления движения?

Идея. Представить оба эскалатора вместе в виде вытянутого кольца: левая половина кольца — первый эскалатор, правая половина кольца — второй.
Указание. Рассмотреть отдельно случай, когда шапка доедет до верха быстрее ребят.

Решение. Сначала рассмотрим случай, когда эскалатор не движется. В этом случае оба эскалатора вместе можно представить в виде неподвижного вытянутого кольца: левая половина кольца — эскалатор, на середине которого находятся Петя и Ваня, правая половина кольца — эскалатор, на середину которого Витя бросил шапку. При этом путь Пети будет составлять верхнюю половину кольца, а путь Вани — нижнюю. Так как скорости ребят одинаковы, то они прибегут к шапке одновременно.

Если эскалатор движется, то ребята будут бежать по подвижному кольцу, но так как скорости ребят не зависят от направления движения, то они так же прибегут к шапке одновременно. Это всё верно, если ребята догонят шапку на эскалаторе, потому что шапка сама не сможет переместиться на другую половину кольца.

Рассмотрим случай, когда Петя приедет наверх одновременно с шапкой. В этом случае скорость движения Пети против движения эскалатора равна скорости эскалатора, т. е. скорость Пети вдвое больше скорости эскалатора.

Если же скорость Пети меньше удвоенной скорости эскалатора, то шапка будет ждать Петю наверху (она не сможет пересесть

на другой эскалатор и двигаться вниз навстречу Пете). В этом случае до неё доберётся первым Ваня.
Ответ. Если скорость ребят не менее чем вдвое превосходит скорость эскалатора, то Петя и Ваня к шапке прибегут одновременно, иначе первым прибежит Ваня.

Задача 29

$\boxed{5}$ Если Серёжа поедет в школу автобусом, а обратно пойдёт пешком, то он затратит на весь путь 1 ч 30 мин. Если же в оба конца он поедет автобусом, то затратит всего 30 мин. Сколько времени потратит Серёжа на дорогу, если он пойдёт пешком и в школу, и обратно?

Идея. Определить, сколько времени занимают два пути автобусом и два пути пешком вместе.

Решение. Два пути автобусом занимают 30 мин. Один путь автобусом и один путь пешком занимают 1 ч 30 мин, значит, два пути автобусом и два пути пешком занимают 3 ч. Следовательно, два пути пешком занимают

$$3\text{ ч} - 30\text{ мин} = 2\text{ ч }30\text{ мин}.$$

Ответ. 2 ч 30 мин.

Задача 30

$\boxed{6\text{-}7}$ Два грузовика одновременно вышли из A в B. Первый грузовик половину времени, затраченного им на весь путь, шёл со скоростью 50 км/ч, а остальную часть времени шёл со скоростью 40 км/ч. Второй грузовик первую половину пути шёл со скоростью 40 км/ч, а вторую — со скоростью 50 км/ч. Какой из этих грузовиков раньше прибыл в B?

Идея. Раньше прибыл тот грузовик, который дольше шёл с большей скоростью.
Указание. Определить, с какой скоростью дольше шёл второй грузовик: с большой или с маленькой.

Решение. Так как первую половину пути второй грузовик шёл с меньшей скоростью, чем вторую половину пути, то времени на прохождение первой половины пути он затратил больше, чем на прохождение второй половины пути. Следовательно, со скоростью 40 км/ч он шёл дольше, чем со скоростью 50 км/ч. Первый грузовик шёл равные промежутки времени с этими скоростями, значит, он дольше шёл с большей скоростью, чем второй, и пришёл раньше.
Ответ. Первый.

Задача 31

6-7 Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 22,4 км, одновременно выезжают два мотоциклиста. Если они поедут навстречу друг другу, то встретятся через полчаса после выезда. Если же поедут в одном направлении, то второй догонит первого через 3,5 ч после выезда. Найти скорость каждого мотоциклиста.

Идея. При движении навстречу скорости складываются, а при движении в одном направлении — вычитаются.
Указание. Отношение расстояния ко времени движения навстречу равно сумме скоростей.
Указание. Отношение расстояния ко времени движения в одном направлении равно разности скоростей.

Решение. Расстояние 22,4 км при движении навстречу друг другу мотоциклисты проходят за полчаса после выезда, значит, сумма их скоростей равна

$$22{,}4 : \frac{1}{2} = 22{,}4 \cdot 2 = 44{,}8 \text{ км/ч}.$$

Если же поедут в одном направлении, то второй догонит первого через 3,5 ч, значит, разность их скоростей равна

$$22{,}4 : 3{,}5 = 22{,}4 \cdot \frac{2}{7} = 6{,}4 \text{ км/ч}.$$

Так как сумма этих величин равна удвоенной скорости одного, а разность — удвоенной скорости второго, то скорости мотоциклистов равны соответственно

$$(44{,}8 + 6{,}4) : 2 = 51{,}2 : 2 = 25{,}6 \quad \text{и} \quad (44{,}8 - 6{,}4) : 2 = 38{,}4 : 2 = 19{,}2.$$

Ответ. 19,2 и 25,6 км/ч.

Задача 32

7 а) Петя ехал в трамвае, смотрел в окно и заметил своего друга Васю, который поравнялся с трамваем, следуя вдоль трамвайной линии в противоположном направлении. Через минуту Петя вышел из трамвая и побежал вдогонку за Васей вдвое быстрее него, но в четыре раза медленнее трамвая. Через какое время Петя догонит друга?

Идея. Выразить максимальное расстояние между Петей и Васей через расстояние, которое успел пройти Вася за одну минуту.
Указание. Выразить скорость Пети и скорость трамвая через скорость Васи.

Решение. Так как скорость Пети вдвое больше скорости Васи и в 4 раза меньше скорости трамвая, то скорость трамвая в 8 раз больше скорости Васи. Петя вышел из трамвая через минуту и побежал вдогонку за Васей, значит, через минуту расстояние между

Петей и Васей было в 9 раз больше расстояния, которое прошёл Вася за 1 минуту.

Скорость Пети вдвое больше скорости Васи, значит, разность их скоростей равна скорости Васи. Следовательно, время, через которое Петя догонит Васю, равно 9 минутам.
Ответ. Через 9 мин.

Задача 33

6-7 а) Велосипедист ехал с дачи в город со скоростью $8\frac{1}{3}$ км/ч и должен был прибыть в город в 9 ч 40 мин утра. Не доезжая 15 км до города, он встретил знакомого, ехавшего той же дорогой из города, и, чтобы поговорить с ним, поехал обратно со скоростью этого знакомого. Проехав так вместе 3,75 км, он оставил знакомого, повернул опять к городу и, двигаясь с прежней скоростью ($8\frac{1}{3}$ км/ч), прибыл в город в 10 ч 37 мин утра. В котором часу знакомый велосипедиста выехал из города?

Идея. Вычислить время встречи велосипедиста со знакомым и время движение знакомого до встречи.
Указание. Определить время совместного движения и скорость знакомого.

Решение. Велосипедист должен был прибыть в город в 9 ч 40 мин утра, а прибыл в 10 ч 37 мин, значит, он задержался на

$$10\frac{37}{60} - 9\frac{40}{60} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20} \text{ ч.}$$

Из них на путь в 3,75 км в направлении города со своей прежней скоростью $8\frac{1}{3}$ км/ч он потратил

$$3{,}75 : 8\frac{1}{3} = 3\frac{3}{4} : \frac{25}{3} = \frac{15}{4} \cdot \frac{3}{25} = \frac{9}{20} \text{ ч,}$$

следовательно, на совместное движение со знакомым ушло

$$\frac{19}{20} - \frac{9}{20} = \frac{1}{2} \text{ ч.}$$

Со знакомым велосипедист проехал 3,75 км со скоростью знакомого, значит, скорость знакомого равна $3{,}75 : \frac{1}{2} = 7{,}5$ км/ч и он выехал из города за $15 : 7{,}5 = 2$ ч до момента встречи.

Для того чтобы определить, во сколько произошла встреча, надо из планируемого времени прибытия велосипедиста вычесть время, за которое он должен был пройти оставшиеся 15 км. В результате получим, что встреча произошла в

$$9\frac{40}{60} - 15 : 8\frac{1}{3} = 9\frac{2}{3} - 15 \cdot \frac{3}{25} = 9\frac{2}{3} - \frac{9}{5} = 7\frac{13}{15} \text{ ч.}$$

Так как до встречи знакомый провёл в пути 2 ч, то выйти из дома он должен был в

$$7\frac{13}{15} - 2 = 5\frac{13}{15} = 5 \text{ ч } 52 \text{ мин.}$$

Ответ. В 5 ч 52 мин утра.

Задача 34

$\boxed{7}$ Пешеход идёт по шоссе со скоростью 5 км/ч. По этому шоссе в обе стороны с одинаковой скоростью ходят автобусы, встречаясь каждые 5 мин. В 12 часов пешеход заметил, что автобусы встретились около него, и, продолжая идти, стал считать встречные и обгоняющие автобусы. В 14 часов около него вновь встретились автобусы. Оказалось, что за это время пешеходу встретилось на четыре автобуса больше, чем обогнало его. Найдите скорость автобуса.

Идея. Соотнести число мест встречи автобусов, пройденных пешеходом за 2 часа, и число мест встреч автобусов, пройденных одним автобусом за 1 час.
Указание. Определить число встречных автобусов, встреченных каждым автобусом за 1 час.

Решение. Так как пешеходу встретилось на четыре автобуса больше, чем обогнало его, то за 2 часа он прошёл 4 пункта встречи автобусов. Получается, что пешеход за 2 часа прошёл 10 км, на которых расположены 4 пункта встречи автобусов.

За 1 час каждый автобус встретит 12 встречных автобусов, т. е. проедет 12 пунктов встречи. Места встречи располагаются равномерно, и если 4 пункта встреч располагаются на 10 км, то 12 пунктов встречи — на 30 км. Следовательно, за 1 час автобус проходит 30 км.
Ответ. 30 км/ч.

Задача 35

$\boxed{7}$ Из пункта A в пункт B одновременно направились три человека, имеющие один двухместный мотоцикл. Как они должны действовать, чтобы время, за которое последний из них доберётся до B, было наименьшим? Определите это время, если скорость пешехода 5 км/ч, мотоцикла 45 км/ч, а расстояние от A до B равно 60 км.

Идея. Для того чтобы время было наименьшим, надо чтобы все трое добрались до B одновременно.
Указание. Обозначить буквой s расстояние, пройденное пешком первым пешеходом, и выразить через s расстояние, пройденное вместе первым пешеходом и мотоциклистом до момента их встречи.

Решение. Время будет минимальным в том случае, если никто не будет простаивать, т. е. все три человека доберутся до пункта B одновременно.

Пусть мотоциклом управляет всегда один и тот же человек, тогда оставшиеся два должны пройти равные расстояния пешком (чтобы добраться до B одновременно). Пусть первый пешеход сначала пройдёт s км, а потом его повезёт мотоциклист. Второй пешеход сначала должен поехать на мотоцикле с мотоциклистом, а потом пройти s км пешком. Получается, что до момента встречи первого пешехода с мотоциклистом они вместе пройдут расстояние, равное $(2 \cdot 60 - 2s)$ км.

Если бы скорость пешехода была в 3 раза больше, то пешеход за то же время прошёл $3s$ (а не s), и на двоих с мотоциклистом они бы прошли $2 \cdot 60$ км (а не $(2 \cdot 60 - 2s)$ км). Время, затраченное пешеходом, осталось бы тем же и было бы равно

$$2 \cdot 60 : (3 \cdot 5 + 45) = 120 : 60 = 2 \text{ ч}.$$

Следовательно, $s = 2 \text{ ч} \cdot 5 \text{ км/ч} = 10$ км.

Итак, первый пешеход сначала пройдёт 10 км со скоростью 5 км/ч, потом проедет на мотоцикле оставшиеся 50 км со скоростью 45 км/ч. Следовательно, на весь путь он затратит

$$\left(2 + \frac{50}{45}\right) \text{ ч} = \left(2 + \frac{10}{9}\right) \text{ ч} = 3\,\frac{1}{9} \text{ ч} = 3 \text{ ч } \frac{60}{9} \text{ мин} = 3 \text{ ч } 6\,\frac{2}{3} \text{ мин} = 3 \text{ ч } 6 \text{ мин } 40 \text{ с}.$$

Ответ. 3 ч 6 мин 40 с.

Задача 36

$\boxed{7}$ Миша и Саша выехали в полдень на велосипедах из города A в город B. Одновременно из B в A выехал Ваня. Все трое едут с постоянными, но различными скоростями. В час дня Саша был ровно посередине между Мишей и Ваней, а в половине второго Ваня был посередине между Мишей и Сашей. Когда Миша будет посередине между Сашей и Ваней?

Идея. Всё движение рассматривать относительно Миши. Выразить расстояние AB и скорость Вани (относительно Миши) через скорость Саши (относительно Миши).

Указание. Выразить расстояния между ребятами в час дня через скорость Саши (относительно Миши).

Указание. Выразить расстояния между ребятами в час тридцать через скорость Саши.

Указание. Выразить скорость Вани и расстояние AB через скорость Саши.

Указание. Выразить расстояния между ребятами в полдень через скорость Саши.

Указание. Найти время, прошедшее с полудня до того момента, когда Миша будет посередине между Сашей и Ваней.

Решение. Будем рассматривать всё движение относительно Миши. В этом случае его собственная скорость будет равна нулю (относительно себя самого). Пусть скорость Саши (относительно Миши) равна v. Тогда через час после начала движения расстояние между Мишей и Сашей и расстояние между Сашей и Ваней были равны v.

Через полтора часа после выезда расстояние между Мишей и Сашей было равно $1{,}5v$. А так как Ваня был посередине между Мишей и Сашей, то расстояние от Вани до каждого из них было $1{,}5v : 2 = 0{,}75v$.

Получается, что за полчаса расстояние между Ваней и Мишей уменьшилось с $2v$ до $0{,}75v$, значит, скорость Вани (относительно Миши) равна

$$(2v - 0{,}75v) : \frac{1}{2} = 1{,}25v \cdot 2 = 2{,}5v.$$

В час дня расстояние между Мишей и Ваней было равно $2v$, значит, в полдень между ними было $2v + 2{,}5v = 4{,}5v$.

Теперь задача свелась к следующей. В полдень расстояние между Мишей и Ваней было равно $4{,}5v$. Саша двигается от Миши к Ване со скоростью v, а Ваня — со скоростью $2{,}5v$. Через сколько часов Миша будет посередине между Сашей и Ваней?

Так как Ваня должен пройти на $4{,}5v$ больше Саши, двигаясь со скоростью на $2{,}5v - v = 1{,}5v$ большей, то время движения равно

$$4{,}5v : 1{,}5v = 3 \text{ ч}.$$

Интересующее нас событие произойдёт через 3 ч после выезда, т. е. в 3 часа дня.

Ответ. В 3 часа дня.

6. Задачи на проценты

Задача 1

$\boxed{6}$ Некоторый товар стоил 500 рублей. Сначала цену на него увеличили на 10%, а затем уменьшили на 10%. Какой стала цена в итоге?

Идея. Перевести проценты в коэффициенты.

Указание. При увеличении на 10% исходное число домножается на коэффициент 1,1.

Указание. При уменьшении на 10% исходное число домножается на коэффициент 0,9.

Решение. Сначала увеличим 500 рублей на 10%: было 100%, стало 110%, значит, 500 надо домножить на коэффициент 1,1.

Теперь уменьшим полученное число на 10%: было 100%, стало 90%, значит, надо домножить на коэффициент 0,9.

В результате получим

$$500 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}9 = 550 \cdot 0{,}9 = 495 \text{ рублей.}$$

Ответ. 495 рублей.

Задача 2

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Рыночная цена картофеля в связи с ненастной погодой повысилась на 20%. Через некоторое время цена картофеля на рынке понизилась на 20%. Когда картофель был дешевле: до повышения или после снижения цены и на сколько процентов?

Идея. Перевести проценты в коэффициенты.
Указание. Увеличению на 20% соответствует коэффициент 1,2.
Указание. Уменьшению на 20% соответствует коэффициент 0,8.

Решение. Пусть S — начальная цена картофеля. После увеличения на 20% картофель стал стоить $1{,}2S$. После последующего снижения на 20% цена стала равной $0{,}8 \cdot 1{,}2S = 0{,}96S$. Получается, что цена уменьшилась на 4%.
Ответ. После снижения цены картофель стал на 4% дешевле.

Задача 3

$\boxed{6}$ Рационализация процесса производства дала возможность увеличить выпуск изделий цеха в октябре на 20% по сравнению с сентябрём, в ноябре на 5% по сравнению с октябрём и в декабре на 10% по сравнению с ноябрём. В результате в декабре цех выпустил 11 088 изделий. Сколько изделий выпустил цех в сентябре?

Идея. Определить, во сколько раз больше изделий выпущено в декабре, чем в сентябре.
Указание. Перевести проценты в коэффициенты.

Решение. Пусть S изделий завод выпустил в сентябре, тогда в октябре завод выпустил $S \cdot 1{,}2$ изделий, в ноябре $S \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}05$ изделий, а в декабре

$$S \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}1 = 11\,088 \text{ изделий.}$$

Следовательно, в декабре было выпущено изделий больше, чем в сентябре, в

$$1{,}2 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}1 = \frac{12 \cdot 105 \cdot 11}{10\,000} = \frac{6 \cdot 21 \cdot 11}{1000} \text{ раз.}$$

Значит, в сентябре было выпущено

$$11\,088 : \frac{6 \cdot 21 \cdot 11}{1000} = 11\,088 \cdot \frac{1000}{6 \cdot 21 \cdot 11} = 8000 \text{ изделий.}$$

Ответ. 8000 изделий.

Задача 4

$\boxed{7}$ После обработки сада средством от гусениц садовод заметил, что с 12 кустов смородины стал получаться такой же урожай, как прежде с 15 кустов. На сколько процентов повысилась урожайность смородины в саду?

Идея. Определить, во сколько раз увеличился урожай.
Указание. Перевести коэффициенты в проценты.

Решение. Так как с 12 кустов смородины стал получаться такой же урожай, как прежде с 15 кустов, то урожайность увеличилась в $\frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ раз, значит, урожайность повысилась на 25%.
Ответ. На 25%.

Задача 5

$\boxed{6\text{-}7}$ На утреннем концерте 40% всех посетителей были школьники, 36% — женщины и остальные посетители — мужчины. На вечерний концерт пришло мужчин на 75% больше, чем на утренний, женщин на 37,5% больше, а школьников на 75% меньше, чем на утренний концерт. Как и на сколько процентов число посетителей на вечернем концерте изменилось по сравнению с числом посетителей на утреннем концерте?

Идея. Определить, во сколько раз было больше посетителей на вечернем концерте, чем на утреннем.
Указание. Выразить число посетителей каждой из категорий через общее число посетителей.
Указание. Перевести проценты в коэффициенты.

Решение. Пусть на утреннем концерте было N человек, тогда школьников было $0{,}4N$. На вечернем концерте школьников было на 75% меньше, чем на утреннем, т. е. их было $0{,}25 \cdot 0{,}4N = 0{,}1N$.

Аналогичным образом получаем, что женщин на вечернем концерте было $1{,}375 \cdot 0{,}36N = 0{,}495N$, а мужчин было $1{,}75 \cdot 0{,}24N = 0{,}42N$.

Теперь найдём, во сколько раз было больше посетителей на вечернем концерте, чем на утреннем:

$$\frac{0{,}1N + 0{,}495N + 0{,}42N}{N} = 1{,}015.$$

Следовательно, число посетителей увеличилось на 1,5%.
Ответ. Увеличилось на 1,5%.

Задача 6

6-7 Один рабочий обтачивает за неделю 960 деталей и расходует на это 12 резцов, другой рабочий на обточку 640 таких же деталей израсходовал 10 резцов. Кто экономнее расходовал резцы и на сколько процентов?

Идея. Сравнить количество резцов, израсходованных каждым из рабочих на изготовление одной детали.

Решение. У первого рабочего на 960 деталей уходит 12 резцов, значит, на одну деталь уходит $\frac{12}{960} = \frac{1}{80}$ резца. У второго рабочего на одну деталь уходит $\frac{10}{640} = \frac{1}{64}$ резца. Следовательно, расход первого составляет

$$\frac{1}{80} : \frac{1}{64} = \frac{64}{80} = 0{,}8 = 80\%$$

от расхода второго, значит, первый рабочий расходовал резцы на 20% экономнее, чем второй.

Ответ. Первый рабочий расходовал резцы на 20% экономнее, чем второй.

Задача 7

6-7 а) По дороге идут два туриста. Один из них делает шаги на 10% короче и в то же время на 10% чаще, чем другой. Кто из туристов идёт медленнее и почему?

Идея. Сравнить расстояния, пройденные туристами за то время, пока второй делает 10 шагов.

Указание. Перевести проценты в коэффициенты.

Решение. Пусть a — длина шага второго туриста, тогда за 10 шагов он пройдёт расстояние $10a$. За это же время первый турист сделает 11 шагов и пройдёт расстояние $11a \cdot 0{,}9 = 9{,}9a$, т. е. меньше чем $10a$.

Ответ. Медленнее идёт тот турист, кто делает шаги короче и чаще.

Задача 8

6-7 а) Число коров на одной молочной ферме на 12,5% меньше, чем на другой, но средний удой каждой коровы на 8% выше. На какой ферме получают молока меньше и на сколько процентов?

Идея. Определить, во сколько раз меньше получают молока на одной ферме, чем на другой.

Указание. Выразить количество коров и удой на первой ферме через количество коров и удой на второй ферме.

Решение. Пусть на второй ферме n коров дают по a л молока. Тогда на первой ферме $0{,}875n$ коров дают по $1{,}08a$ л молока. Следовательно, на первой ферме получают

$$0{,}875n \cdot 1{,}08a = 0{,}945na$$

литров молока, что составляет 94,5% от na литров, полученных на второй ферме.
Ответ. На первой ферме получают молока меньше на 5,5%.

Задача 9

6-7 а) Цену на прошлогодние автомобили сначала снизили на 25%, а затем ещё на 10%. Только после этого все автомобили удалось продать, причём прибыль от продажи составила 8%. Сколько процентов прибыли было заложено в исходную цену автомобилей?

Идея. Определить, во сколько раз цена автомобиля оказалась больше себестоимости.
Указание. Перевести проценты в коэффициенты.

Решение. Пусть a — себестоимость автомобиля, а ka — стоимость с заложенной прибылью. Тогда автомобиль продали за $0{,}75 \cdot 0{,}9 \cdot ka$, что оказалось равным $1{,}08a$. Следовательно,

$$ka = \frac{1{,}08a}{0{,}75 \cdot 0{,}9} = 1{,}6a,$$

значит, в исходную цену автомобилей было заложено 60% прибыли.
Ответ. 60%.

Задача 10

6-7 а) Каждую сторону квадрата увеличили на 20%. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?

Идея. Выразить старую и новую площади квадрата через сторону квадрата.
Указание. Площадь квадрата равна квадрату стороны.
Указание. Перевести проценты в коэффициенты.

Решение. Пусть a — сторона квадрата, тогда площадь квадрата равна a^2.

Если каждую сторону квадрата увеличить на 20%, то площадь будет равна $(1{,}2a)^2$. В этом случае она увеличится на

$$\frac{(1{,}2a)^2 - a^2}{a^2} \cdot 100\% = \frac{1{,}44a^2 - a^2}{a^2} \cdot 100\% = 0{,}44 \cdot 100\% = 44\%.$$

Ответ. На 44%.

Задача 11

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Ширину прямоугольника увеличили на 3,6 см, а длину уменьшили на 16%. В результате площадь нового прямоугольника оказалась больше прежней на 5%. Найти ширину нового прямоугольника.

Идея. Найти коэффициент увеличения ширины прямоугольника.
Указание. Площадь прямоугольника равна произведению длины и ширины.

Решение. Пусть S — площадь исходного прямоугольника, а k — коэффициент увеличения ширины. Тогда площадь нового прямоугольника равна

$$S \cdot k \cdot 0{,}84 = 1{,}05S \quad \Longrightarrow \quad k = 1{,}25.$$

Значит, увеличение ширины на 3,6 см увеличивает её на 25%, т. е. 3,6 см — это 25% от исходной ширины. Поэтому исходная ширина равна $3{,}6 \cdot 4 = 14{,}4$ см, а ширина нового прямоугольника равна $14{,}4 + 3{,}6 = 18$ см.
Ответ. 18 см.

Задача 12

$\boxed{6\text{-}7}$ а) На сколько процентов увеличится полная поверхность куба, если каждое его ребро увеличить на 20%?

Идея. Выразить площадь полной поверхности нового куба через площадь полной поверхности старого.
Указание. Площадь поверхности равна сумме площадей граней.

Решение. Пусть a — ребро исходного куба, тогда площадь полной поверхности равна $6a^2$.

Площадь полной поверхности нового куба равна $6(1{,}2a)^2 = 1{,}44 \cdot 6a^2$, значит, площадь увеличилась на 44%.
Ответ. На 44%.

Задача 13

$\boxed{6\text{-}7}$ а) При обработке деревянного бруса его длина уменьшилась на 2,5%, ширина на 7,2% и толщина на 2,8%. Сколько процентов от первоначального объёма бруса составили отходы при обработке? (Ответ дать с точностью до 0,1%.)

Идея. Выразить объём нового бруса через объём старого.
Указание. Объём равен произведению длины, ширины и толщины.

Решение. После обработки бруса его объём уменьшился в

$$0{,}975 \cdot 0{,}928 \cdot 0{,}972 \approx 0{,}879 \text{ раз},$$

т. е. примерно на 12,1%.
Ответ. Примерно 12,1%.

Задача 14

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Из 40 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

Идея. Вес чистого металла остаётся неизменным.
Указание. Найти вес чистого металла в 20 т стали, содержащей 6% примесей.

Решение. В 20 т стали, содержащей 6% примесей, содержится

$$20 \cdot 0{,}94 = 18{,}8 \text{ т}$$

чистого металла. Это же количество чистого металла содержится и в 40 т железной руды. Значит, в руде содержится

$$\frac{18{,}8}{40} \cdot 100\% = 47\%$$

чистого металла и 53% примесей.
Ответ. 53%.

Задача 15

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Сколько воды надо добавить к 600 г жидкости, содержащей 40% соли, чтобы получился 12%-й раствор этой соли?

Идея. Вес соли остаётся неизменным.
Указание. Найти вес соли в 600 г жидкости, содержащей 40% соли.

Решение. В 600 г жидкости, содержащей 40% соли, вес соли будет составлять $600 \cdot 0{,}4 = 240$ г. Это же количество соли будет составлять 12% в новом растворе. Значит, вес нового раствора равен

$$240 : 0{,}12 = 240 \cdot \frac{100}{12} = 20 \cdot 100 = 2000 \text{ г}.$$

Получается, что воды надо долить $2000 - 600 = 1400$ г.
Ответ. 1400 г.

Задача 16

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Древесина только что срубленного дерева содержит 64% воды. Через неделю количество воды стало уже 48% от веса дерева. На сколько уменьшился при этом вес дерева, если, только что срубленное, оно весило 7,5 ц? (Ответ дать с точностью до 0,1 ц.)

Идея. Вес сухого вещества при усушке остаётся неизменным.
Указание. Найти вес сухого вещества в 7,5 ц только что срубленного дерева.

Решение. В 7,5 ц только что срубленного дерева содержится 64% воды, значит, сухого вещества в нём $0{,}36 \cdot 7{,}5 = 2{,}7$ ц.

В подсушенном дереве сухое вещество составляет $100 - 48 = 52\%$, значит, вес подсушенного дерева равен

$$2{,}7 : 0{,}52 = \frac{27}{52} \approx 5{,}2 \text{ ц}.$$

Получается, что вес дерева уменьшился примерно на $7{,}5 - 5{,}2 = 2{,}3$ ц.
Ответ. Примерно на 2,3 ц.

Задача 17

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Слиток сплава серебра с цинком весом в 3,5 кг содержал 76% серебра. Его сплавили с другим слитком и получили слиток весом в 10,5 кг, содержание серебра в котором стало 84%. Сколько процентов серебра содержалось во втором слитке?

Идея. Найти вес серебра во втором слитке.
Указание. Вычислить вес серебра в сплаве из двух слитков и вес серебра в первом сплаве.

Решение. В первом сплаве содержится $0{,}76 \cdot 3{,}5 = 2{,}66$ кг серебра, а в сплаве из двух слитков $0{,}84 \cdot 10{,}5 = 8{,}82$ кг серебра, значит, во втором сплаве было $8{,}82 - 2{,}66 = 6{,}16$ кг серебра. Так как вес второго сплава равен $10{,}5 - 3{,}5 = 7$ кг, то доля серебра в нём составляет

$$\frac{6{,}16}{7} = 0{,}88.$$

Ответ. 88%.

Задача 18

$\boxed{6\text{-}7}$ Нержавеющая сталь представляет собой сплав железа с хромом и никелем. Сколько хрома и сколько никеля надо сплавить с 67,6 кг железа, если хрома в сплаве должно быть 15%, а никеля в 30 раз меньше, чем хрома?

Идея. Определить массу нового сплава.
Указание. Определить процентное содержание железа в новом сплаве.

Решение. В новом сплаве должно быть 15% хрома, а никеля в 30 раз меньше, значит, никеля 0,5%. Следовательно, железо должно составлять

$$100\% - 15\% - 0{,}5\% = 84{,}5\%.$$

Масса железа равна 67,6 кг, значит, общая масса нового сплава равна

$$67{,}6 : 0{,}845 = 80 \text{ кг.}$$

Получается, что хрома надо $0{,}15 \cdot 80 = 12$ кг, а никеля $0{,}005 \cdot 80 = 0{,}4$ кг.

Ответ. 12 кг и 0,4 кг.

Задача 19

$\boxed{6\text{-}7}$ Когда 40 рабочих цеха перешли на эффективную технологию производства, продукция цеха увеличилась на 20%; когда же 60% всех рабочих цеха стали работать по-новому, продукция цеха увеличилась в 2,5 раза. Сколько рабочих в цехе и во сколько раз увеличится продукция цеха, когда все рабочие перейдут на новую технологию?

Идея. Определить количество рабочих, перешедших на новую технологию, необходимое для увеличения продукции на 1%.
Указание. Использовать то, что 40 рабочих увеличивают продукцию на 20%.

Решение. 40 рабочих, перейдя на новую технологию, увеличили продукцию цеха на 20%, значит, на 1% продукцию увеличивают двое рабочих, а на 150% — 300 рабочих. По условию задачи 60% всех рабочих цеха увеличили продукцию в 2,5 раза, т. е. на 150%, значит, 60% составляют 300 человек. Получается, что всего рабочих

$$300 : 0{,}6 = 500 \text{ человек.}$$

Если двое рабочих увеличивают продукцию на 1%, то 500 рабочих увеличат продукцию на 250%, т. е. в 3,5 раза.
Ответ. 500 рабочих; в 3,5 раза.

Задача 20

$\boxed{6\text{-}7}$ Молоко одной коровы содержит 5% жира; молоко же другой — 3,5%, но удой её на 30% выше первой. Сколько надо взять молока от первой коровы, чтобы получить жира на 5,4 кг больше, чем жира от молока второй коровы за то же время?

Идея. Рассмотреть порцию молока первой коровы в 100 кг.
Указание. Определить разницу масс жира, полученного от коров за это время.

Решение. В 100 кг молока первой коровы содержится 5 кг жира. В 130 кг молока второй коровы, надоенных за то же время, содержится $130 \cdot 0{,}035 = 4{,}55$ кг жира, т. е. на 0,45 кг меньше.

Для того чтобы разница была 5,4 кг, порция должна быть в $5{,}4 : 0{,}45 = 12$ раз больше, т. е. 1200 кг.
Ответ. 1200 кг.

Задача 21

[6-7] а) Цена за вход на стадион 1 руб. 50 коп. с человека. Когда цену понизили, количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько копеек понижена цена?

Идея. Рассмотреть группу из двух человек.
Указание. Определить, сколько человек пройдёт теперь вместо двух и сколько будут стоить эти билеты.

Решение. После снижения цены количество посетителей увеличилось на 50%, т. е. вместо двух человек пришло три. При этом сбор увеличился на 25%, т. е. вместо $2 \cdot 1{,}50 = 3$ руб. за двоих было получено $3 \cdot 1{,}25 = 3{,}75$ руб. за троих. Следовательно, один билет стал стоить $3{,}75 : 3 = 1{,}25$ руб. Так как раньше билет стоил 1 руб. 50 коп. с человека, то цена снизилась на 25 коп.
Ответ. На 25 коп.

Задача 22

[6-7] а) Старшеклассник, собирая деньги на радиоприёмник, обратился за помощью к отцу и двум его братьям; они помогли ему. Выяснилось, что первый дядя дал 25% того, что было собрано без него, включая накопления мальчика. Второй дядя и отец дали соответственно $33\frac{1}{3}\%$ и 50% того, что было собрано без них, включая накопления мальчика. Сколько стоил радиоприёмник, если у старшеклассника было 10,4 рубля?

Идея. Выяснить, какую часть всей суммы составляют деньги, которые накопил сам старшеклассник.
Указание. Перевести проценты в доли.

Решение. Первый дядя дал $\frac{1}{4}$ того, что дали остальные, значит, 4 части дали остальные и одну — он, т. е. он дал $\frac{1}{5}$ часть всей суммы.

Второй дядя дал $\frac{1}{3}$ того, что дали остальные, значит, 3 части дали остальные и одну — он, т. е. он дал $\frac{1}{4}$ часть всей суммы.

Отец дал $\frac{1}{2}$ того, что дали остальные, значит, он дал $\frac{1}{3}$ часть всей суммы.

Получается, что деньги, накопленные старшеклассником, составляют от общей суммы

$$1-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=1-\frac{47}{60}=\frac{13}{60}.$$

Значит, радиоприёмник стоил

$$10{,}4:\frac{13}{60}=48 \text{ руб.}$$

Ответ. 48 рублей.

Задача 23

[6-7] Найти возраст брата и возраст сестры, если 62,5% возраста брата больше 75% возраста сестры на 2 года, а 50% возраста брата больше 37,5% возраста сестры на 7 лет.

Идея. Выразить какое-либо количество процентов возраста брата в годах.
Указание. Использовать то, что 100% возраста брата больше 75% возраста сестры на 14 лет.

Решение. Так как 50% возраста брата больше 37,5% возраста сестры на 7 лет, то 100% возраста брата больше 75% возраста сестры на 14 лет.

Также известно, что 62,5% возраста брата больше 75% возраста сестры на 2 года, значит, $100\%-62{,}5\%=37{,}5\%$ возраста брата составляют $14-2=12$ лет. Следовательно, возраст брата равен $12:0{,}375=32$ года.

Тогда 75% возраста сестры составляют $32-14=18$ лет и возраст сестры равен $18:0{,}75=24$ года.
Ответ. 32 года брату и 24 года сестре.

Задача 24

[6-7] а) Одно из слагаемых составило $\frac{5}{12}$ другого. Сколько процентов от суммы составляет меньшее слагаемое? (Ответ дать с точностью до 0,1%.)

Идея. Найти отношение меньшего слагаемого и суммы.
Указание. Выразить меньшее слагаемое через большее.

Решение. Пусть a — одно из слагаемых, тогда второе слагаемое равно $\frac{5}{12}a$ и составляет от суммы

$$\frac{5}{12}a:\left(a+\frac{5}{12}a\right)=\frac{5}{12}a:\frac{17}{12}a=\frac{5}{17}\approx 0{,}294.$$

Ответ. Примерно 29,4%.

Задача 25

6-7 а) Три бригады начали одновременную пахоту. Установленная планом ежедневная норма первой бригады так относится к норме второй бригады как 5 : 4, а норма второй к норме третьей как 2 : 1,5. Первая бригада увеличила ежедневную норму на 10%, вторая бригада — на 20%, а третья, как и первая, на 10%. В результате к одному сроку первая бригада вспахала на 14 га больше второй бригады. Сколько гектаров вспахала каждая бригада к этому сроку?

Идея. Определить, как стали относиться ежедневные нормы после увеличения.
Указание. Перевести проценты в коэффициенты.

Решение. Норма первой бригады так относится к норме второй бригады как 5 : 4, а норма второй к норме третьей как 2 : 1,5, или, что то же самое, как 4 : 3. Получается, что нормы трёх бригад относятся как 5 : 4 : 3, т. е. первая бригада должна выполнить 5 определённых частей работы, вторая — 4 части, а третья — 3 части.

После того как первая бригада увеличила ежедневную норму на 10%, вторая бригада — на 20%, третья — на 10%, получилось, что новые нормы стали относиться как $(5 \cdot 1{,}1) : (4 \cdot 1{,}2) : (3 \cdot 1{,}1)$, или, что то же самое, как 55 : 48 : 33.

Так как первая бригада вспахала на 14 га больше второй бригады, то эти 14 га составляют $55 - 48 = 7$ частей. Значит, одна часть составляет 2 га и бригады вспахали по $55 \cdot 2 = 110$ га, $48 \cdot 2 = 96$ га, $33 \cdot 2 = 66$ га соответственно.
Ответ. 110 га, 96 га и 66 га.

7. Обратный ход

Задача 1

5-6 а) Сумма цифр двузначного числа равна наибольшему из однозначных чисел, а число десятков на 2 меньше этой суммы. Какое это число?

Идея. Вычислить последовательно: сумму цифр, число десятков, число единиц.
Указание. Наибольшее из однозначных чисел равно 9.

Решение. Так как наибольшим однозначным числом является 9, то сумма цифр равна 9, число десятков равно $9 - 2 = 7$, а число единиц равно 2. Значит, искомым числом является число 72.
Ответ. 72.

Задача 2

$\boxed{5}$ Малыш и Карлсон сидели на крыше и наблюдали за голубями. На крыше сидело несколько голубей. Когда на крышу село ещё 15 голубей, а улетело 18 голубей, то на крыше осталось 16 голубей. Сколько голубей первоначально наблюдали Малыш и Карлсон?

Идея. Взять конечный результат и проделать с ним обратные преобразования.
Указание. Обратной операцией к сложению является вычитание, и наоборот.

Решение. Берём число 16 и делаем обратные преобразования:
1) к 16 прибавляем 18 — получаем 34;
2) из 34 вычитаем 15 — получаем 19.

Ответ. 19.

Задача 3

$\boxed{7}$ Из корзины яиц взяли половину всего количества яиц, потом половину остатка, затем половину нового остатка и, наконец, половину следующего остатка. После этого в корзине осталось 10 яиц. Сколько яиц было в корзине первоначально?

Идея. Взять конечный результат и проделать с ним обратные преобразования.
Указание. Обратным преобразованием к уменьшению на половину является увеличение в два раза.

Решение. Каждый раз в корзине оставалась половина яиц, значит, до этого их было в 2 раза больше. Получается, что в самом начале было

$$10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10 \cdot 16 = 160 \text{ яиц.}$$

Ответ. 160.

Задача 4

$\boxed{5}$ а) Ваня задумал число, прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 9, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил 2. Какое число задумал Ваня?

Идея. Взять конечный результат и проделать с ним обратные преобразования.

Решение. Берём получившееся число и делаем обратные преобразования:

$$(2 \cdot 7 + 6) : 4 \cdot 9 - 5 = 20 : 4 \cdot 9 - 5 = 45 - 5 = 40.$$

Ответ. 40.

Задача 5

$\boxed{6}$ а) Я задумал число. Если его увеличить в 2,5 раза, к результату прибавить 1,75 и полученную сумму разделить на 0,8, то получится 37,5. Какое число я задумал?

Идея. Взять конечный результат и проделать с ним обратные преобразования.

Решение. Берём получившееся число и делаем обратные преобразования:

$$(37{,}5 \cdot 0{,}8 - 1{,}75) : 2{,}5 = (30 - 1{,}75) : 2{,}5 = 28{,}25 : 2{,}5 = 11{,}3.$$

Ответ. 11,3.

Задача 6

$\boxed{6}$ Юра задумал натуральное число, умножил его на 13, зачеркнул последнюю цифру результата, полученное число умножил на 7, опять зачеркнул последнюю цифру результата и получил число 21. Какое число задумал Юра?

Идея. Взять конечный результат и проделать с ним обратные преобразования.
Указание. При вычёркивании последней цифры перебрать возможные варианты с учётом делимости.

Решение. Для того чтобы восстановить задуманное Юрой число, надо:

1) приписать к 21 ещё одну цифру справа,
2) поделить полученное число на 7,
3) приписать справа одну цифру и
4) поделить на 13.

Проделаем эти преобразования:

1) приписав к 21 цифру справа, получим число в диапазоне от 210 до 219, а так как после деления на 7 должно получиться целое число, то это либо 210, либо 217,
2) после деления на 7 получим либо 30, либо 31,
3) приписав цифру справа, получим число в диапазоне от 300 до 319, а так как после деления на 13 должно получиться целое число, то это 312,
4) поделив на 13, получим 24.

Ответ. 24.

Задача 7

5-6 В двух пачках всего 30 тетрадей. Если бы из первой пачки переложили во вторую 2 тетради, то в первой пачке стало бы вдвое больше тетрадей, чем во второй. Сколько тетрадей было в каждой пачке?

Идея. Проделать действия с тетрадями в обратном порядке.
Указание. Сначала разложить тетради на пачки так, чтобы в первой было вдвое больше тетрадей, чем во второй, а потом переложить две тетради.

Решение. После перекладывания из первой пачки во вторую двух тетрадей в первой пачке станет вдвое больше тетрадей, чем во второй. Так как всего 30 тетрадей, то в первой станет 20, а во второй — 10. Значит, до перекладывания в первой было 22, а во второй — 8 тетрадей.
Ответ. 22 и 8.

Задача 8

5-6 Тане не хватало 7 коп., а Гале — 2 коп., чтобы купить по коробке цветных карандашей. Когда они сложили свои деньги, их не хватило даже на покупку одной коробки. Сколько стоит коробка карандашей?

Идея. Определить, сколько денег было у Тани.
Указание. Проанализировать количество недостающих денег у Гали до и после объединения с деньгами Тани.

Решение. Если Гале сначала не хватало 2 коп., а после того как добавились деньги Тани, ей всё равно не хватило денег, то добавилась только 1 коп. Значит, у Тани была 1 коп., а не хватало ей 7 коп., следовательно, коробка карандашей стоит 8 коп.
Ответ. 8 коп.

Задача 9

5-7 Мать положила на стол сливы и сказала трём сыновьям, чтобы они, вернувшись из школы, разделили их поровну. Первым пришёл Миша, он взял треть слив и ушёл гулять. Потом вернулся из школы Петя, взял треть от лежавших на столе слив и тоже ушёл. Затем пришёл Коля и тоже взял треть от числа слив, которые он увидел. Сколько слив оставила мать, если Коля взял 4 сливы?

Идея. Последовательно вычислить, сколько слив увидел третий вернувшийся сын, второй вернувшийся сын и первый вернувшийся сын.

Указание. Каждый мальчик взял одну третью часть тех слив, которые он увидел.

Решение. Коля взял 4 сливы. Это одна треть того, что он увидел, значит, Петя оставил 12 слив. Эти 12 слив составляют $\frac{2}{3}$ того, что увидел Петя, значит, Миша оставил $12 : \frac{2}{3} = 18$ слив. Эти 18 слив составляют $\frac{2}{3}$ того, что увидел Миша, значит, он увидел $18 : \frac{2}{3} = 27$ слив.

Ответ. 27.

Задача 10

$\boxed{5}$ а) Крестьянин попросил у царя разрешение взять 1 яблоко из его сада. Царь разрешил. Пошёл крестьянин к саду и видит: весь сад огорожен тройным забором, причём каждый забор имеет одни ворота, вход в которые охраняет сторож. Подошёл крестьянин к первому сторожу и говорит: «Царь разрешил мне взять одно яблоко из сада». На что сторож ему сказал: «Возьми, но при выходе отдашь мне половину принесённых яблок и ещё одно». Эти же слова повторили крестьянину второй и третий сторожа, охранявшие другие ворота. Сколько яблок должен взять крестьянин, чтобы, после того как он отдаст положенную часть сторожам, у него осталось одно яблоко?

Идея. Последовательно вычислить, сколько яблок надо принести к третьим воротам, ко вторым воротам и к первым.
Указание. Трижды проделать действия, обратные к следующим: разделить пополам и отнять 1 яблоко.

Решение. Обратными действиями к «разделить пополам и отнять 1 яблоко» будут «добавить 1 яблоко и умножить на 2».

Так как у крестьянина осталось 1 яблоко, то к последним воротам он принёс: $(1 + 1) \cdot 2 = 4$ яблока.

Ко вторым воротам он должен был принести $(4 + 1) \cdot 2 = 10$ яблок, а к первым $(10 + 1) \cdot 2 = 22$ яблока.
Ответ. 22.

Задача 11

$\boxed{6}$ а) Школьник прочитал книгу за 3 дня. В первый день он прочитал 0,2 всей книги и ещё 16 страниц, во второй день 0,3 остатка и ещё 20 страниц. В третий — 0,75 нового остатка и последние 30 страниц. Сколько страниц в книге?

Идея. Последовательно вычислить число страниц, прочитанных в третий день, второй и первый.

Решение. Действуем от обратного.

Последние 30 страниц составляют 0,25 того, что было прочитано в третий день, значит, в третий день было прочитано $30 : 0{,}25 = 120$ страниц.

$120 + 20 = 140$ страниц составляют 0,7 остатка книги к началу второго дня. Следовательно, за второй и третий день было прочитано $140 : 0{,}7 = 200$ страниц.

$200 + 16 = 216$ страниц составляют 0,8 всей книги, значит, вся книга состоит из $216 : 0{,}8 = 270$ страниц.

Ответ. 270.

Задача 12

6-7 а) Натуральное число можно умножать на два и произвольным образом переставлять в нём цифры (запрещается лишь ставить нуль на первое место). Докажите, что превратить число 1 в число 74 с помощью таких операций невозможно.

Идея. Проделать с числом 74 обратные преобразования.

Указание. Обратным преобразованием к умножению на два является деление на два.

Решение. Пусть число 74 было получено из 1 с помощью операций домножения на 2 и, возможно, перестановки цифр. Заметим, что все полученные в результате таких операций числа будут натуральными. Попробуем обратными преобразованиями из 74 получить 1.

Число 74 могло получиться из предыдущего числа домножением на 2 и, быть может, последующей перестановкой цифр, т. е. возможно два варианта.

1) Если перестановки не было, то 74 получилось из числа 37. Но число 37 не может быть получено домножением на два даже с перестановкой цифр, поскольку и 37, и 73 являются нечётными числами.

2) Пусть число 74 было получено из предыдущего числа домножением на 2 и последующей перестановкой цифр. Следовательно, предыдущим числом было $47 : 2$, которое не является натуральным, значит, такой вариант тоже невозможен.

Задача 13

7 Ныряльщики добыли несколько жемчужин в количестве, не большем 1000. Делёж жемчуга происходит у них следующим образом: они по очереди подходят к куче жемчуга, и каждый ныряльщик берёт либо ровно половину, либо ровно треть от числа оставшихся в куче жемчужин. После того как все ныряльщики взяли свою долю, остаток жемчуга был пожертвован морскому

богу. Какое наибольшее число ныряльщиков могло участвовать в добыче жемчуга?

Идея. Проделать с остатком жемчужин для морского бога обратные преобразования.

Указание. Обратным преобразованием к изъятию $\frac{1}{3}$ части является домножение на $\frac{3}{2}$. Обратным преобразованием к изъятию $\frac{1}{2}$ части является домножение на 2.

Решение. Рассмотрим случай, когда в дележе жемчуга принимало максимальное количество человек. Пусть при этом n жемчужин отдали морскому богу. Заметим, что n нечётно и не делится на 3, поскольку иначе можно было бы привлечь ещё одного человека, который забрал бы себе половину или треть жемчужин.

После того как ныряльщик забирает себе треть или половину жемчужин, число жемчужин домножается на $\frac{2}{3}$ или $\frac{1}{2}$. Получается, что перед последним ныряльщиком было $n \cdot \frac{3}{2}$ или $n \cdot 2$ жемчужин. Но n нечётно, значит, жемчужин было $2n$.

Так как мы хотим, чтобы жемчуга хватило на максимальное количество людей, то по возможности они должны брать как можно меньшее количество жемчуга, т. е. не по половине оставшихся жемчужин, а по $\frac{1}{3}$. Если предпоследний ныряльщик возьмёт $\frac{1}{3}$, значит, перед ним было

$$n \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 3n \text{ жемчужин.}$$

Получается, что после того как последняя пара ныряльщиков взяла свои доли, стало n жемчужин, а до того было $3n$ жемчужин.

Аналогичная ситуация возникает и с предпоследней парой ныряльщиков, поскольку число $3n$ нечётно. То есть число жемчужин, до того как они взяли свои доли, будет в 3 раза больше числа оставшихся жемчужин. Значит до того, как предпоследняя пара взяла свои доли, было

$$3n \cdot 3 = 3^2 n \text{ жемчужин.}$$

Рассуждая подобным образом и далее, получаем, что перед шестой с конца парой ныряльщиков было $3^6 n$ жемчужин, а перед седьмой — $3^7 n$. Но

$$3^7 n = 2187n > 1000$$

при любом натуральном n, значит, семи пар ныряльщиков быть не может.

Для того чтобы перед шестой с конца парой ныряльщиков число жемчужин не превосходило 1000, должно выполняться условие

$$3^6 n \leqslant 1000 \quad \Longleftrightarrow \quad 729n \leqslant 1000,$$

которое справедливо при $n = 1$. Значит, если морскому богу пожертвовать одну жемчужину, то жемчуга может хватить на 6 пар ныряльщиков, причём перед 12-м с конца ныряльщиком будет лежать 729 жемчужин.

Заметим, что 13 ныряльщиков быть не может, так как иначе перед 13-м с конца ныряльщиком должно было лежать либо $729 \cdot 2$, либо $729 \cdot \frac{3}{2}$ жемчужин, но оба числа больше 1000, а второе ещё и не является целым.

Ответ. 12.

8. Уравнения и неравенства

Задача 1

$\boxed{5}$ а) Угадайте корень уравнения $y \cdot y + 5 = 21$ и выполните проверку.

Идея. Определить, чему равно $y \cdot y$.

Решение. Так как $y \cdot y + 5 = 21$, то $y \cdot y = 21 - 5 = 16$. Подходит $y = 4$, поскольку

$$4 \cdot 4 + 5 = 16 + 5 = 21.$$

Ответ. 4.

Задача 2

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Решить уравнение $|5x| \cdot |-1{,}5| = 12$.

Идея. Значение модуля числа вычислить, модуль с переменной раскрыть через геометрический смысл.

Решение. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$|5x| \cdot |-1{,}5| = 12 \iff |5x| \cdot 1{,}5 = 12 \iff |5x| = 12 : 1{,}5 \iff$$
$$\iff |5x| = 8 \iff 5x = \pm 8 \iff x = \pm 1{,}6.$$

Ответ. $\pm 1{,}6$.

Задача 3

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Найти наименьший целый корень уравнения

$$(|x| - 1)(x + 2{,}5) = 0.$$

Идея. Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них обращается в нуль.

Указание. Модуль раскрывать через геометрический смысл.

Решение. Первый множитель равен нулю при $x = \pm 1$, второй — при $x = -2{,}5$. Наименьшим из целых корней является $x = -1$.
Ответ. -1.

Задача 4

$\boxed{5\text{-}6}$ а) Решите уравнение $2 + 180 : (x - 11) = 22$.

Идея. Последовательно выразить x из уравнения.

Решение. Выполняем обратные преобразования, чтобы найти x:

$$2 + 180 : (x - 11) = 22 \Longleftrightarrow 180 : (x - 11) = 20 \Longleftrightarrow x - 11 = 180 : 20 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x - 11 = 9 \Longleftrightarrow x = 11 + 9 = 20.$$

Ответ. 20.

Задача 5

$\boxed{5\text{-}6}$ Найдите все натуральные значения x, при которых верно неравенство

$$1 < \frac{x}{7} + \frac{2x}{7} < \frac{23}{7}\,.$$

Идея. Получить промежуток для x с помощью равносильных преобразований.
Указание. Домножить все части неравенства на 7 и привести подобные.

Решение. Домножив исходное неравенство на 7, получим:

$$7 < x + 2x < 23 \quad \Longleftrightarrow \quad 7 < 3x < 23.$$

Решением полученного двойного неравенства являются числа 3; 4; 5; 6; 7. При $x \leqslant 2$ не будет выполняться условие $7 < 3x$, а при $x \geqslant 8$ не будет выполняться условие $3x < 23$.
Ответ. 3; 4; 5; 6; 7.

Задача 6

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Решить уравнение $|x - 3| = 7$.

Идея. Раскрыть модуль через геометрический смысл.

Решение. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$|x - 3| = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 3 = \pm 7 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3 \pm 7,$$

откуда $x = -4$ и $x = 10$.
Ответ. $-4; 10$.

Задача 7

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Найти все целые числа, удовлетворяющие неравенству $|x - 3{,}5| < 2$.

Идея. Раскрыть модуль через геометрический смысл.

Решение. Согласно геометрическому смыслу модуля число $x - 3{,}5$ располагается от нуля на расстоянии, меньшем чем 2, т. е. между числами -2 и 2. Следовательно,

$$-2 < x - 3{,}5 < 2 \iff -2 + 3{,}5 < x < 2 + 3{,}5 \iff 1{,}5 < x < 5{,}5.$$

Ответ. 2; 3; 4; 5.

Задача 8

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Решить уравнение $|x - 2| + 2x = 2$.

Идея. Раскрыть модуль по определению.
Указание. Рассмотреть по отдельности два промежутка, на которые разбивается числовая прямая нулём подмодульного выражения.

Решение. При $x \leqslant 2$ подмодульное выражение отрицательно и уравнение принимает вид

$$-x + 2 + 2x = 2 \iff x = 0.$$

Этот корень подходит, так как $0 \leqslant 2$.

При $x > 2$ подмодульное выражение положительно:

$$x - 2 + 2x = 2 \iff 3x = 4 \iff x = \frac{4}{3}.$$

Этот корень не подходит, так как $\frac{4}{3} < 2$.

Ответ. 0.

Задача 9

$\boxed{7}$ а) Решить уравнение $|x + 4| + |x - 1| = 6$.

Идея. Раскрыть модули по определению.
Указание. Рассмотреть по отдельности три промежутка, на которые разбивается числовая прямая нулями подмодульных выражений.

Решение. При $x \leqslant -4$ оба подмодульных выражения отрицательны и уравнение принимает вид

$$-x - 4 - x + 1 = 6 \iff -2x = 9 \iff x = -4{,}5.$$

Этот корень подходит, так как $-4{,}5 \leqslant -4$.

При $x \in (-4; 1)$ первое подмодульное выражение положительно, второе отрицательно:

$$x + 4 - x + 1 = 6 \iff 5 = 6 \text{ — решений нет.}$$

При $x \geqslant 1$ оба подмодульных выражения положительны:

$$x + 4 + x - 1 = 6 \iff 2x = 3 \iff x = 1{,}5.$$

Этот корень подходит, так как $1{,}5 \geqslant 1$.
Ответ. $-4{,}5$ или $1{,}5$.

Задача 10

$\boxed{5}$ Выразите x из формулы $a = (x + 8) : 9$.

Идея. Выражать x последовательно с помощью обратных преобразований.

Решение. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$a = (x + 8) : 9 \iff x + 8 = a \cdot 9 \iff x = 9a - 8.$$

Ответ. $x = 9a - 8$.

Задача 11

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Решите уравнение $2(3 - 2x) = 3x - 4(1 + 3x)$.

Идея. Раскрыть скобки и привести подобные.
Указание. Слагаемые с переменной x перенести в одну сторону, без x — в другую.

Решение. Сначала раскроем скобки и приведём подобные:

$$2(3-2x) = 3x-4(1+3x) \iff 6-4x = 3x-4-12x \iff 6-4x = -9x-4.$$

Теперь перенесём слагаемые с x влево, а без x — вправо и выразим x:

$$9x - 4x = -6 - 4 \iff 5x = -10 \iff x = -10 : 5 = -2.$$

Ответ. -2.

Задача 12

$\boxed{6}$ Найдите x из выражения

$$4520 : \left(225 - 4\,209\,520 : \frac{1\,000\,795 + (250 + x) \cdot 50}{27}\right) = 40.$$

Идея. Выражать x последовательно с помощью обратных преобразований.

Решение. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$4520 : \left(225 - 4\,209\,520 : \frac{1\,000\,795 + (250 + x) \cdot 50}{27}\right) = 40 \iff$$

$$\iff 225 - 4\,209\,520 : \frac{1\,000\,795 + (250 + x) \cdot 50}{27} = 4520 : 40 \equiv 113 \iff$$

$$\iff 4\,209\,520 : \frac{1\,000\,795 + (250 + x) \cdot 50}{27} = 225 - 113 \equiv 112 \iff$$

$$\iff \frac{1\,000\,795 + (250 + x) \cdot 50}{27} = 4\,209\,520 : 112 \equiv 37585 \iff$$

$$\iff 1\,000\,795 + (250 + x) \cdot 50 = 37\,585 \cdot 27 \equiv 1\,014\,795 \iff$$

$$\iff (250 + x) \cdot 50 = 1\,014\,795 - 1\,000\,795 \equiv 14\,000 \iff$$

$$\iff 250 + x = 14\,000 : 50 \equiv 280 \iff x = 280 - 250 = 30.$$

Ответ. 30.

Замечание. Здесь и далее в преобразованиях используется знак тождественного равенства «$\equiv$» для того, чтобы не возникало путаницы со знаком равенства в уравнении.

Задача 13

$\boxed{6\text{-}7}$ а) При каком значении x многочлен

$$7{,}4x - 8 - (-5{,}6x + (-2{,}4x + 7) - 11{,}92)$$

равен 0?

Идея. Решить соответствующее уравнение.

Указание. Раскрыть скобки и привести подобные.

Указание. Слагаемые с переменной x перенести в одну сторону, без x — в другую.

Решение. Раскрыв скобки и приведя подобные в уравнении

$$7{,}4x - 8 - (-5{,}6x + (-2{,}4x + 7) - 11{,}92) = 0,$$

получим

$$7{,}4x - 8 - (-8x - 4{,}92) = 0 \iff 7{,}4x - 8 + 8x + 4{,}92 = 0 \iff 15{,}4x - 3{,}08 = 0$$

$$\iff 15{,}4x = 3{,}08 \iff x = 3{,}08 : 15{,}4 = 0{,}2.$$

Ответ. 0,2.

Задача 14

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Решить уравнение $[(7 + 0{,}004x) : 0{,}9] : 24{,}7 - 12{,}3 = 77{,}7$.

Идея. Выражать x последовательно с помощью обратных преобразований.

Решение. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$[(7 + 0{,}004x) : 0{,}9] : 24{,}7 - 12{,}3 = 77{,}7 \iff$$

$$\iff [(7 + 0{,}004x) : 0{,}9] : 24{,}7 = 77{,}7 + 12{,}3 \equiv 90 \iff$$

$$\Longleftrightarrow\quad (7+0{,}004x):0{,}9=90\cdot 24{,}7\equiv 2223\quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad 7+0{,}004x=2223\cdot 0{,}9\equiv 2000{,}7\quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad 0{,}004x=2000{,}7-7\equiv 1993{,}7\quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad x=1993{,}7:0{,}004=498\,425.$$

Ответ. 498 425.

Задача 15

[6-7] а) Решить уравнение

$$1-\left[\left(3\,\frac{5}{14}-\frac{1\,\frac{11}{49}}{x\cdot\frac{25}{38}-47\,\frac{3}{7}}\right)\cdot\frac{12}{55}+1\,\frac{3}{85}\right]:5\,\frac{14}{17}=\frac{5}{7}\,.$$

Идея. Выражать x последовательно с помощью обратных преобразований.

Решение. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$1-\left[\left(3\,\frac{5}{14}-\frac{1\,\frac{11}{49}}{x\cdot\frac{25}{38}-47\,\frac{3}{7}}\right)\cdot\frac{12}{55}+1\,\frac{3}{85}\right]:5\,\frac{14}{17}=\frac{5}{7}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left[\left(3\,\frac{5}{14}-\frac{1\,\frac{11}{49}}{x\cdot\frac{25}{38}-47\,\frac{3}{7}}\right)\cdot\frac{12}{55}+1\,\frac{3}{85}\right]:5\,\frac{14}{17}=1-\frac{5}{7}\equiv\frac{2}{7}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left(3\,\frac{5}{14}-\frac{1\,\frac{11}{49}}{x\cdot\frac{25}{38}-47\,\frac{3}{7}}\right)\cdot\frac{12}{55}+1\,\frac{3}{85}=\frac{2}{7}\cdot 5\,\frac{14}{17}\equiv\frac{2}{7}\cdot\frac{99}{17}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left(3\,\frac{5}{14}-\frac{1\,\frac{11}{49}}{x\cdot\frac{25}{38}-47\,\frac{3}{7}}\right)\cdot\frac{12}{55}=\frac{2\cdot 9\cdot 11}{7\cdot 17}-\frac{8\cdot 11}{5\cdot 17}\equiv$$
$$\equiv\frac{2\cdot 11}{17}\left(\frac{9}{7}-\frac{4}{5}\right)\equiv\frac{22}{17}\cdot\frac{17}{35}\equiv\frac{22}{35}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad 3\,\frac{5}{14}-\frac{1\,\frac{11}{49}}{x\cdot\frac{25}{38}-47\,\frac{3}{7}}=\frac{22}{35}:\frac{12}{55}\equiv\frac{22}{35}\cdot\frac{55}{12}\equiv\frac{121}{42}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{1\,\frac{11}{49}}{x\cdot\frac{25}{38}-47\,\frac{3}{7}}=3\,\frac{5}{14}-\frac{121}{42}\equiv\frac{141}{42}-\frac{121}{42}\equiv\frac{20}{42}\equiv\frac{10}{21}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad x\cdot\frac{25}{38}-47\,\frac{3}{7}=1\,\frac{11}{49}:\frac{10}{21}\equiv\frac{60}{49}\cdot\frac{21}{10}\equiv\frac{18}{7}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x\cdot\frac{25}{38}=\frac{18}{7}+47\,\frac{3}{7}\equiv 2\,\frac{4}{7}+47\,\frac{3}{7}\equiv 50 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x=50:\frac{25}{38}=76.$$

Ответ. 76.

Задача 16

[6-7] а) Решить уравнение

$$0{,}9+\left\{\left[3{,}25-\left(6\,\frac{9}{16}-0{,}025x\right)\cdot 0{,}6\right]:0{,}75\right\}:6\,\frac{2}{3}=1{,}2\,.$$

Идея. Выражать x последовательно с помощью обратных преобразований.

Решение. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$0{,}9+\left\{\left[3{,}25-\left(6\,\frac{9}{16}-0{,}025x\right)\cdot 0{,}6\right]:0{,}75\right\}:6\,\frac{2}{3}=1{,}2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\left[3{,}25-\left(6\,\frac{9}{16}-0{,}025x\right)\cdot 0{,}6\right]:0{,}75\right\}:6\,\frac{2}{3}=0{,}3 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[3{,}25-\left(6\,\frac{9}{16}-0{,}025x\right)\cdot 0{,}6\right]:0{,}75=0{,}3\cdot 6\,\frac{2}{3}\equiv\frac{3}{10}\cdot\frac{20}{3}\equiv 2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3{,}25-\left(6\,\frac{9}{16}-0{,}025x\right)\cdot 0{,}6=2\cdot 0{,}75\equiv 1{,}5 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(6\,\frac{9}{16}-0{,}025x\right)\cdot 0{,}6=3{,}25-1{,}5\equiv 1{,}75 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 6\,\frac{9}{16}-0{,}025x=1{,}75:0{,}6\equiv\frac{7}{4}\cdot\frac{5}{3}\equiv\frac{35}{12} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0{,}025x=6\,\frac{9}{16}-\frac{35}{12}\equiv\frac{105}{16}-\frac{35}{12} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x=\left(\frac{105}{16}-\frac{35}{12}\right):0{,}025=\left(\frac{105}{16}-\frac{35}{12}\right)\cdot 40=\frac{1050}{4}-\frac{350}{3}=$$

$$=350\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=350\cdot\frac{5}{12}=\frac{175\cdot 5}{6}=\frac{875}{6}=145\,\frac{5}{6}\,.$$

Ответ. $145\,\frac{5}{6}$.

Задача 17

[6-7] а) Решить уравнение

$$(0{,}66-0{,}012:0{,}2):\left(1-1\,\frac{4}{7}\cdot 0{,}4\right)=2\,\frac{9}{13}\,x:\left(3{,}125-5{,}6:2\,\frac{2}{3}\right).$$

Идея. Максимально упростить уравнение, потом выразить x с помощью обратных преобразований.

Указание. Сначала произвести вычисления в скобках.

Решение. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$(0{,}66-0{,}012:0{,}2):\left(1-1\frac{4}{7}\cdot 0{,}4\right)=2\frac{9}{13}x:\left(3{,}125-5{,}6:2\frac{2}{3}\right)\iff$$

$$\iff\quad (0{,}66-0{,}06):\left(1-\frac{11}{7}\cdot\frac{2}{5}\right)=\frac{35}{13}x:\left(3{,}125-5{,}6:\frac{8}{3}\right)\iff$$

$$\iff\quad 0{,}6:\left(1-\frac{22}{35}\right)=\frac{35}{13}x:\left(3{,}125-5{,}6\cdot\frac{3}{8}\right)\iff$$

$$\iff\quad 0{,}6:\frac{13}{35}=\frac{35}{13}x:(3{,}125-0{,}7\cdot 3)\iff$$

$$\iff\quad 0{,}6\cdot\frac{35}{13}=\frac{35}{13}x:1{,}025\iff$$

$$\iff\quad x=0{,}6\cdot 1{,}025=0{,}615.$$

Ответ. 0,615.

Задача 18

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Найти x:

$$\left(\frac{1}{25\cdot 26}+\frac{1}{26\cdot 27}+\frac{1}{27\cdot 28}+\frac{1}{28\cdot 29}+\frac{1}{29\cdot 30}\right)\cdot 150+1{,}03:[10{,}3\cdot(x-1)]=11.$$

Идея. Максимально упростить уравнение, потом выразить x с помощью обратных преобразований.
Указание. Сначала произвести вычисления в скобках.

Решение. Вычислим выражение в скобках:

$$\frac{1}{25\cdot 26}+\frac{1}{26\cdot 27}+\frac{1}{27\cdot 28}+\frac{1}{28\cdot 29}+\frac{1}{29\cdot 30}=$$
$$=\frac{1}{25}-\frac{1}{26}+\frac{1}{26}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{29}-\frac{1}{30}=\frac{1}{25}-\frac{1}{30}=\frac{1}{150}.$$

Следовательно, исходное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{1}{150}\cdot 150+1{,}03:[10{,}3\cdot(x-1)]=11\iff$$
$$\iff\quad 1{,}03:[10{,}3\cdot(x-1)]=10\iff$$
$$\iff\quad \frac{1{,}03}{10{,}3\cdot(x-1)}=10\iff$$
$$\iff\quad \frac{1}{10\cdot(x-1)}=10\iff$$
$$\iff\quad x-1=0{,}01\iff$$
$$\iff\quad x=1{,}01.$$

Ответ. 1,01.

Задача 19

$\boxed{6\text{-}7}$ При каких значениях c уравнение $cx = 9$:

а) имеет корень, равный -9; 0; $\frac{1}{5}$;

б) не имеет корней;

в) имеет положительный корень?

Идея. Решить соответствующее уравнение для c.
Указание. Подставить x и найти c.

Решение. а) Подставив в уравнение $x = -9$, получим $c \cdot (-9) = 9$, откуда $c = -1$.

При $x = 0$ получим уравнение $c \cdot 0 = 9$, которое не имеет решений.

Если $x = \frac{1}{5}$, то $c \cdot \frac{1}{5} = 9$, откуда $c = 45$.

б) В случае ненулевого значения c уравнение имеет корень $x = 9 : c$. При $c = 0$ решений нет.

в) Так как произведение cx положительно, то положительный корень уравнение будет иметь при положительном c.

Ответ. а) $c = -1$; ни при каких c; $c = 45$; б) $c = 0$; в) $c > 0$.

Задача 20

$\boxed{7}$ а) Найти x и y, если $\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

Идея. Решать систему подстановкой.
Указание. Выразить y из второго уравнения и подставить в первое.

Решение. Из второго уравнения следует, что $y = 3x - 2$. Подставив это выражение в первое уравнение, получим:

$$2x+3(3x-2)=16 \iff 2x+9x-6=16 \iff 11x=22 \iff x=2.$$

Следовательно, $y = 3 \cdot 2 - 2 = 4$.
Ответ. $x = 2$, $y = 4$.

9. Задачи на составление уравнений

Задача 1

$\boxed{5}$ Сколько раз к наибольшему однозначному числу надо прибавить наибольшее двузначное число, чтобы получить наибольшее трёхзначное?

Идея. Составить уравнение с искомой неизвестной.
Указание. Наибольшее однозначное, двузначное и трёхзначное числа равны соответственно 9, 99 и 999.

Решение. Пусть x раз надо добавить 99 к 9, чтобы получить 999. Тогда

$$9+99x=999 \iff 99x=990 \iff x=10.$$

Ответ. 10 раз.

Задача 2

$\boxed{5\text{-}6}$ а) Некоторое число уменьшили на 7, потом уменьшили в 10 раз и получили число, которое на 34 меньше исходного. Найти исходное число.

Идея. Обозначить через x искомое число и составить соответствующее уравнение.

Решение. Согласно условию задачи искомое число x удовлетворяет уравнению

$$(x-7):10=x-34 \iff x-7=10x-340 \iff 9x=333 \iff x=37.$$

Ответ. 37.

Задача 3

$\boxed{6}$ а) От города A до города B 590 км. Часть этого пути идёт в гору, часть — горизонтально и часть — под гору. Путь под гору в 4 раза меньше горизонтального и на 110 км меньше, чем путь в гору. Найти длину пути в гору, горизонтально и под гору.

Идея. Обозначить через x часть пути, идущую под гору, и составить соответствующее уравнение.
Указание. Выразить длины остальных двух участков через x.
Указание. Приравнять сумму всех длин 590 км.

Решение. Если x км — часть пути, идущая под гору, то горизонтальный участок составляет $4x$ км, а в гору — $(x+110)$ км. Весь путь равен 590 км, значит,

$$x+4x+(x+110)=590 \iff 6x=480 \iff x=80.$$

Следовательно, длина горизонтального участка равна $4 \cdot 80 = 320$ км, а участка, идущего в гору, $80 + 110 = 190$ км.
Ответ. 190 км, 320 км и 80 км.

Задача 4

$\boxed{5\text{-}7}$ а) В переплётной мастерской было 92 листа белой бумаги и 135 листов цветной бумаги. На переплёт каждой книги уходило по листу белой и по листу цветной бумаги. После переплёта нескольких книг белой бумаги оказалось вдвое меньше, чем цветной. Сколько книг было переплетено?

Идея. Обозначить через x число переплетённых книг и составить соответствующее уравнение.
Указание. Выразить через x количество оставшихся листов белой бумаги и цветной бумаги.

Решение. Если было переплетено x книг, то осталось $92 - x$ листов белой бумаги и $135-x$ листов цветной бумаги. Так как белой бумаги оказалось вдвое меньше, чем цветной, то

$$135-x = 2\cdot(92-x) \iff 135-x = 184-2x \iff x = 184-135 = 49.$$

Ответ. 49.

Задача 5

$\boxed{5\text{-}7}$ а) От города A до города B поезд шёл 16 ч. Обратный путь этот поезд прошёл со скоростью, на 20 км в час большей, и поэтому прошёл весь путь на 4 часа быстрее. С какой скоростью шёл поезд от A до B и чему равно расстояние от A до B?

Идея. Принять за неизвестную величину скорость поезда при движении от A до B и составить уравнение с этой неизвестной.
Указание. Выразить расстояние через скорость и время.

Решение. Пусть x км/ч — скорость поезда при движении от A до B, тогда расстояние AB равно $16x$. На обратный путь, двигаясь со скоростью $(x + 20)$ км/ч, поезд затратил $16 - 4 = 12$ ч. Так как пройденные расстояния равны, то

$$16x = 12(x + 20) \iff 4x = 3(x + 20) \iff x = 60,$$

а расстояние от A до B равно $16 \cdot 60 = 960$ км.
Ответ. 60 км/ч и 960 км.

Задача 6

$\boxed{5\text{-}6}$ У мальчика столько же сестёр, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестёр, чем братьев. Сколько в этой семье братьев и сколько сестёр?

Идея. Обозначить через x число девочек в семье и составить соответствующее уравнение.

Решение. Пусть у мальчика x сестёр, тогда в этой семье x девочек и $x+1$ мальчик. У его сестры вдвое меньше сестёр (их $x-1$), чем братьев, следовательно,

$$2\cdot(x-1)=x+1 \iff 2x-2=x+1 \iff x=3.$$

Значит, в семье 3 девочки и 4 мальчика.
Ответ. 4 брата и 3 сестры.

Задача 7

$\boxed{6}$ Килограмм говядины с костями стоит 78 рублей, килограмм говядины без костей — 90 рублей, а килограмм костей — 15 рублей. Сколько граммов костей в килограмме говядины?

Идея. Обозначить через x кг вес костей и составить соответствующее уравнение.
Указание. Выразить через x вес мяса в килограмме говядины.
Указание. Выразить через x стоимость костей и стоимость мяса в килограмме говядины.

Решение. Пусть в килограмме говядины x кг весят кости, тогда мясо весит $1-x$ кг. Сложив стоимость костей со стоимостью мяса, получим 78 рублей, значит

$$x\cdot 15+(1-x)\cdot 90=78 \iff$$
$$\iff 90-75x=78 \iff$$
$$\iff 75x=12 \iff$$
$$\iff x=0{,}16.$$

Следовательно, в килограмме говядины костей 0,16 кг $=$ 160 г.
Ответ. 160 граммов.

Задача 8

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Число a составляет 80% числа b, а число c составляет 140% числа b. Найдите числа a, b, c, если известно, что c больше a на 72.

Идея. Выразить a и c через b и составить соответствующее уравнение.
Указание. $a=0{,}8b$, $c=1{,}4b$.

Решение. Так как c больше a на 72, где $a=0{,}8b$ и $c=1{,}4b$, то

$$1{,}4b-0{,}8b=72 \iff 0{,}6b=72 \iff b=72:0{,}6=120.$$

Отсюда $a=120\cdot 0{,}8=96$ и $c=120\cdot 1{,}4=168$.
Ответ. 96; 120; 168.

Задача 9

$\boxed{6}$ а) Матери было 28 лет, когда у неё родился сын. Сколько лет матери и сколько лет будет сыну в 1972 году, если в 1966 году сын был моложе матери в 4,5 раза?

Идея. Выразить возраст матери через возраст сына в 1966 году и составить соответствующее уравнение.
Указание. Разница возрастов составляет 28 лет.

Решение. Пусть в 1966 году сыну было x лет, тогда матери было $4{,}5x$ лет. Мать родила сына в 28 лет, значит,

$$4{,}5x - x = 28 \quad \Longleftrightarrow \quad 3{,}5x = 28 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 8.$$

Если сыну в 1966 году было 8 лет, то в 1972 году ему было $8 + 6 = 14$, а матери было $14 + 28 = 42$ года.
Ответ. 42 и 14.

Задача 10

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Участок под клубнику прямоугольной формы, длина которого в 3 раза больше ширины, окружён оградой, отстоящей от сторон участка на 2 м. Площадь, ограниченная оградой, на 128 м^2 больше площади самого участка. Определите длину участка.

Идея. Принять за x ширину участка, выразить через x площадь участка и площадь, ограниченную оградой, и составить соответствующее уравнение.
Указание. После установки ограды длина и ширина участка увеличились на 4 м.

Решение. Пусть x м — ширина неогороженного участка, тогда $3x$ — его длина. Так как ограда отстоит от сторон участка на 2 м, то ширина и длина огороженного участка равны $x + 4$ и $3x + 4$ м соответственно. Площадь, ограниченная оградой, на 128 м^2 больше площади самого участка, следовательно,

$$(x+4)(3x+4) - x \cdot 3x = 128 \Longleftrightarrow 16x + 16 = 128 \Longleftrightarrow 16x = 112 \Longleftrightarrow x = 7.$$

Длина участка равна $3x = 3 \cdot 7 = 21$ м.
Ответ. 21 м.

Задача 11

$\boxed{5}$ а) Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько страниц в книге?

Идея. Принять за x число трёхзначных номеров страниц и составить соответствующее уравнение.

Указание. Найти число однозначных и двузначных номеров страниц.

Решение. Номеров страниц, состоящих из одной цифры, 9 штук (это $1, 2, \ldots, 9$). Номеров страниц, состоящих из двух цифр, 90 штук (это $10, 11, \ldots, 99$). Пусть x — количество трёхзначных номеров страниц.

На запись однозначного номера страницы уходит одна цифра, двухзначного — 2, трёхзначного — 3 цифры. Так как для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры, то

$$1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot x = 1392 \iff 3x = 1392 - 189 = 1203 \iff x = 401.$$

Получается, что в книге $9 + 90 + 401 = 500$ страниц.
Ответ. 500.

Задача 12

$\boxed{6\text{-}7}$ Из двух сплавов с 60%-м и 80%-м содержанием меди требуется получить сплав в 40 кг с 75%-м содержанием меди. Сколько килограммов каждого сплава следует взять для этого?

Идея. Суммарная масса меди в двух сплавах равна массе меди в новом сплаве.
Указание. Выразить вес меди в каждом из сплавов через вес первого сплава.

Решение. Новый сплав будет содержать $0{,}75 \cdot 40 = 30$ кг меди. Пусть x — масса первого сплава, тогда $40 - x$ — масса второго. Так как суммарно в обоих сплавах должно содержаться 30 кг меди, то

$$0{,}6x + 0{,}8(40 - x) = 30 \iff x = 10.$$

Значит, первого сплава следует взять 10 кг, а второго $40 - 10 = 30$ кг.
Ответ. 10 кг и 30 кг.

Задача 13

$\boxed{6\text{-}7}$ а) В двух ящиках было 43,25 кг сахара. После того как из первого ящика переложили во второй 4,75 кг, в первом осталось 0,73 того, что стало во втором. Сколько сахара было первоначально в каждом ящике?

Идея. Взять искомые величины в качестве неизвестных и составить систему уравнений с этими неизвестными.

Решение. Пусть x кг сахара было в первом ящике и y кг — во втором. Согласно условию задачи

$$\begin{cases} x + y = 43{,}25, \\ x - 4{,}75 = 0{,}73(y + 4{,}75) \end{cases} \iff \begin{cases} y = 43{,}25 - x, \\ x - 4{,}75 = 0{,}73(48 - x) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 23, \\ y = 20{,}25. \end{cases}$$

Ответ. 23 и 20,25 кг.

Задача 14

$\boxed{6\text{-}7}$ а) При сложении двух целых чисел ученик по ошибке поставил во втором слагаемом лишний нуль на конце и получил в сумме 6641 вместо 2411. Определить слагаемые.

Идея. Обозначить слагаемые через x и y и составить два уравнения с этими неизвестными.
Указание. Приписывание нуля соответствует домножению числа на 10.

Решение. Пусть слагаемые равны x и y. Тогда из условия задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + 10y = 6641, \\ x + y = 2411. \end{cases}$$

После вычитания уравнений найдём y:

$$9y = 6641 - 2411 \iff 9y = 4230 \iff y = 470.$$

Теперь вычислим первое слагаемое: $x = 2411 - 470 = 1941$.
Ответ. 1941 и 470.

Задача 15

$\boxed{6\text{-}7}$ а) За 8 альбомов, 3 линейки и 4 циркуля заплатили 2,7 руб. Альбом в 4 раза дороже линейки, а 5 линеек стоят столько же, сколько 2 циркуля. Найти цену альбома, линейки и циркуля.

Идея. В качестве неизвестных взять стоимости одного альбома, одной линейки и одного циркуля и составить систему с этими неизвестными.
Указание. Систему решать подстановкой.

Решение. Пусть x руб. стоит один альбом, y руб. — одна линейка, z руб. — один циркуль, тогда согласно условию задачи

$$\begin{cases} 8x + 3y + 4z = 2{,}7, \\ x = 4y, \\ 5y = 2z. \end{cases}$$

Эту систему удобнее всего решать подстановкой. Выразим x и z через y из второго и третьего уравнений и подставим в первое, получим:

$$8 \cdot 4y + 3y + 4 \cdot \frac{5y}{2} = 2{,}7 \iff 45y = 2{,}7 \iff y = 0{,}06.$$

Следовательно, $x = 4 \cdot 0{,}06 = 0{,}24$ и $z = 2{,}5 \cdot 0{,}06 = 0{,}15$.
Ответ. 24 коп., 6 коп. и 15 коп.

Задача 16

6-7 а) В два сосуда A и B одинакового веса налита вода, причём вес сосуда A с водой составляет $\frac{4}{5}$ веса сосуда B с водой. Если содержимое сосуда B перелить в A, то вес последнего вместе с водой превысит вес сосуда B в 8 раз. Найти вес каждого сосуда и вес воды в каждом из них, зная, что в B первоначально было на 50 г больше воды, нежели в A.

Идея. В качестве неизвестных взять вес сосуда, вес воды в первом сосуде и вес воды во втором сосуде и составить систему с этими неизвестными.

Решение. Пусть вес каждого из сосудов равен x г, в первом сосуде y г воды, во втором — z г, тогда согласно условию задачи

$$\begin{cases} x+y=\frac{4}{5}(x+z), \\ x+y+z=8x, \\ z=y+50 \end{cases} \iff \begin{cases} 5(x+y)=4(x+z), \\ -7x+y+z=0, \\ z=y+50. \end{cases}$$

Подставив $z=y+50$ в первые два уравнения, получим систему для y и x:

$$\begin{cases} 5(x+y)=4(x+y+50), \\ -7x+y+y+50=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x+y=200, \\ 7x-2y=50 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y=200-x, \\ 7x-2(200-x)=50 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y=200-x, \\ x=50 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y=150, \\ x=50. \end{cases}$$

Следовательно, $z=y+50=200$.

Ответ. 50 г весит каждый сосуд, 150 г воды в сосуде A, 200 г воды в сосуде B.

Задача 17

6-7 Продано некоторое количество муки двух сортов, причём средняя продажная цена оказалась 34 коп. за 1 кг. Количество проданной муки первого сорта составило $\frac{5}{12}$ количества муки второго сорта. Мука первого сорта продавалась по 46 коп. за 1 кг. Найти цену муки второго сорта.

Идея. Взять в качестве неизвестных вес муки первого сорта, вес муки второго сорта, цену одного килограмма муки второго сорта и составить систему уравнений с этими неизвестными.
Указание. Приравнять общую стоимость муки, выраженную через среднюю продажную цену, сумме стоимостей муки первого и второго сортов.

Решение. Пусть было продано x кг муки первого сорта и y кг второго, причём $x = \frac{5}{12}y$. Через z коп. обозначим цену одного килограмма муки второго сорта.

Так как общая стоимость муки, с одной стороны, равна произведению средней продажной цены на общий вес муки, а с другой стороны — сумме стоимостей муки первого и второго сортов, то

$$34(x+y) = 46x + yz \iff 34y = 12x + yz.$$

Получаем систему из двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{12}y, \\ 34y = 12x + yz. \end{cases}$$

Заметим, что найти все неизвестные мы не сможем, но нам это и не надо, нам нужна только z. Подставив выражение для x из первого уравнения во второе, получим

$$34y = 12 \cdot \frac{5}{12}y + yz \iff 29y = yz \implies z = 29.$$

Ответ. 29 коп.

Задача 18

[6-7] Некоторую работу могут выполнить трое рабочих. Второй и третий могут вместе выполнить её в два раза быстрее первого; первый и третий могут вместе выполнить её в три раза быстрее второго. Во сколько раз первый и второй могут выполнить эту работу быстрее, чем третий?

Идея. В качестве неизвестных взять производительности рабочих и составить систему с этими неизвестными.
Указание. Время выполнения работы обратно пропорционально производительности.
Указание. Систему решать подстановкой.

Решение. Пусть x, y и z — производительности первого, второго и третьего рабочих соответственно. Запишем в систему то, что у нас есть согласно условию задачи, и то, что нам надо найти:

$$\begin{cases} y + z = 2x, \\ x + z = 3y, \\ \frac{x+y}{z} - ? \end{cases}$$

Выразив y из первого уравнения и подставив во второе уравнение и искомое выражение, получим систему уже с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x+z=3(2x-z), \\ \dfrac{x+(2x-z)}{z}\ -? \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{4}{5}z, \\ \dfrac{3\cdot\frac{4}{5}z-z}{z}\ -? \end{cases} \implies \frac{x+y}{z}=\frac{3\cdot\frac{4}{5}z-z}{z}=\frac{7}{5}.$$

Ответ. В $\frac{7}{5}$ раза.

Задача 19

6-7 а) За первый день бригада скосила 15 га, а за второй день — 20% оставшейся площади. Всего за 2 дня было скошено 36% всех лугов. Найдите площадь всех лугов.

Идея. Обозначить через x площадь всех лугов и составить соответствующее уравнение.
Указание. Выразить через x площадь, скошенную во второй день.

Решение. Пусть x га — площадь всех лугов, тогда за второй день было скошено $(x-15)\cdot 0{,}2$ га. Так как за 2 дня было скошено 36% всех лугов, то

$$15+(x-15)\cdot 0{,}2=0{,}36x \iff 15\cdot 0{,}8=0{,}16x \iff x=75.$$

Ответ. 75 га.

Задача 20

6-7 Два мотоцикла выехали из города в одном направлении: первый — в 8 ч утра, второй — в 10 ч 50 мин. После того как второй мотоцикл догнал первый, они ещё продолжали путь в течение 2,5 ч. В момент остановки оказалось, что второй мотоцикл обогнал первый на 30 км. В котором часу второй мотоцикл догнал первый и какое расстояние прошли мотоциклы до этого, если скорость первого мотоцикла равна 0,6 скорости второго?

Идея. Принять за неизвестную величину x скорость второго мотоцикла, выразить через x скорость первого мотоцикла и составить уравнение, описывающие движение мотоциклов с момента их встречи в течение 2,5 ч.
Указание. После определения скоростей мотоциклистов найти расстояние, пройденное первым до выхода второго, и время, за которое второй догнал первого мотоциклиста.

Решение. Пусть x км/ч — скорость второго мотоцикла, тогда $0{,}6x$ — скорость первого. С момента встречи мотоциклов они ещё продолжали путь в течение 2,5 ч, и оказалось, что второй мотоцикл обогнал первый на 30 км. Значит,

$$(x - 0{,}6x) \cdot 2{,}5 = 30 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 30 \text{ км/ч}.$$

Тогда скорость первого мотоцикла равна $0{,}6 \cdot 30 = 18$ км/ч, а расстояние, пройденное им до выхода второго мотоцикла, равно

$$18 \cdot \left(10\,\frac{5}{6} - 8\right) = 18 \cdot 2\,\frac{5}{6} = 51 \text{ км}.$$

Время, за которое второй догнал первого мотоциклиста, равно

$$51 : (30 - 18) = 51 : 12 = 4{,}25 \text{ ч},$$

значит, сама встреча произошла в 10 ч 50 мин + 4 ч 15 мин = = 15 ч 5 мин.

Расстояние, пройденное до момента встречи, равно $30 \cdot 4{,}25 =$ $= 127{,}5$ км.

Ответ. 15 ч 5 мин; 127,5 км.

Задача 21

$\boxed{7}$ Из города A в город B одновременно выехали два мотоциклиста Петров и Иванов, и в тот же момент из города B навстречу им выехали мотоциклисты Ивановский и Петровский. Иванов едет в два раза быстрее Петрова, а Ивановский в три раза быстрее Петровского. Иванов встретил Петровского в тот же момент, когда Петров встретил Ивановского. Чья встреча произошла ближе к городу A: Иванова с Ивановским или Петрова с Петровским?

Идея. Обозначить через x скорость Петрова, через y скорость Петровского и составить уравнение, описывающее одновременную встречу Иванова с Петровским и Петрова с Ивановским.

Указание. Время до момента встречи равно отношению расстояния к сумме скоростей.

Решение. Пусть x км/ч — скорость Петрова, y км/ч — скорость Петровского, тогда $2x$ — скорость Иванова, $3y$ — скорость Ивановского.

Иванов встретил Петровского в тот же момент, когда Петров встретил Ивановского, значит,

$$\frac{AB}{x + 3y} = \frac{AB}{y + 2x} \quad \Longleftrightarrow \quad x + 3y = y + 2x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2y.$$

Так как скорость Иванова $4y$, а скорость Ивановского $3y$, то их встреча произойдёт на расстоянии $\frac{4}{7}AB$ от города A.

Скорость Петрова $2y$, скорость Петровского y, значит, их встреча произойдёт на расстоянии $\frac{2}{3}AB$ от города A.

Поскольку $\frac{4}{7}AB < \frac{2}{3}AB$, ближе к городу A произойдёт встреча Иванова с Ивановским.
Ответ. Иванова с Ивановским.

Задача 22

$\boxed{7}$ Ученик купил портфель, авторучку и книгу. Если бы портфель стоил в пять раз дешевле, авторучка в два раза дешевле, а книга в 2,5 раза дешевле, то вся покупка стоила бы 2 руб. Если бы портфель стоил в два раза дешевле, авторучка в четыре раза дешевле, а книга в три раза дешевле, то вся покупка стоила бы 3 руб. Сколько же она стоит на самом деле? Что дороже: портфель или авторучка?

Идея. Принять за неизвестные величины стоимости портфеля, авторучки и книги и составить уравнения с этими неизвестными.
Указание. Выразить из получившейся системы сумму неизвестных.

Решение. Пусть x, y и z — стоимости портфеля, авторучки и книги соответственно, тогда согласно условию задачи

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2,5} = 2, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 3. \end{cases}$$

Мы получили два линейных уравнения с тремя неизвестными. Найти значения неизвестных из этой системы мы не сможем, так как не хватает данных, но сами неизвестные нам и не нужны, нам нужна их сумма. Попробуем выразить сумму $x+y+z$ из этой системы. Сначала избавимся от знаменателей. Домножим первое уравнение на 10, а второе — на 12:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 20, \\ 6x + 3y + 4z = 36. \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим

$$8x + 8y + 8z = 56 \quad \Longleftrightarrow \quad x + y + z = 7,$$

значит, покупка стоит 7 руб. Теперь нам надо сравнить x и y. Вычтем из второго уравнения системы первое уравнение, получим

$$4x - 2y = 16 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = y + 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x - y = 8 - x.$$

Так как заведомо $x < 7$, то $8 - x > 0$, а, следовательно, и $x - y > 0$, т. е. $x > y$.
Ответ. 7 руб; портфель дороже.

Задача 23

$\boxed{7}$ Передние покрышки у автомобиля стираются через 25 000 км пути, а задние — через 15 000 км пути. Когда нужно поменять покрышки местами, чтобы они стёрлись одновременно?

Идея. Найти расстояние, при прохождении которого полностью сотрутся две пары передних и две пары задних покрышек.
Указание. Найти минимальное расстояние, при прохождении которого полностью сотрутся целое число пар передних и целое число пар задних покрышек.
Указание. На прохождение 75 000 км уйдёт 3 пары передних покрышек и 5 пар задних покрышек.

Решение.

Первый способ. Через 75 000 км сотрутся 3 пары передних и 5 пар задних покрышек, значит, на 75 000 км требуется 8 пар покрышек. Следовательно, на двух парах покрышек можно проехать $75\,000 : 4 = 18\,750$ км, а для того, чтобы они стёрлись одновременно, их надо поменять местами на середине этого пути, т. е. через $18\,750 : 2 = 9\,375$ км.

Второй способ. Скорость старения задних покрышек в $\frac{25\,000}{15\,000} = \frac{5}{3}$ раза выше, чем у передних. Значит, если передние стёрлись на часть, равную x, то задние стёрлись на $\frac{5}{3}x$.

Для того чтобы после перестановки покрышек они стёрлись одновременно, должно выполняться соотношение

$$\frac{1-x}{1-\frac{5}{3}x} = \frac{5}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{3}{8}.$$

Получается, что покрышки надо менять местами, когда передние стёрлись на $\frac{3}{8}$, т. е. пройдено $25\,000 \cdot \frac{3}{8} = 9375$ км.

Ответ. Через 9375 км пути.

Задача 24

$\boxed{6}$ а) Винни-Пух, Пятачок, Кролик и ослик Иа-Иа пошли гулять к Шести Соснам, растущим вдоль прямой дорожки (в порядке возрастания номеров). Винни-Пух нашёл, что от первой сосны до четвёртой расстояние такое же, как от третьей до шестой. Кролик сказал, что третья сосна в три раза дальше от первой, чем вторая. Пятачок заметил, что от пятой сосны до четвёртой вдвое дальше, чем до шестой. А Иа-Иа заявил, что расстояние от первой сосны до второй больше, чем от пятой до шестой, на половину длины его хвоста. Докажите, что кто-то из них ошибся.

Идея. Сравнить расстояние от первой сосны до второй с расстоянием от пятой сосны до шестой.
Указание. Показать, что расстояние между первой и третьей соснами равно расстоянию между четвёртой и шестой.

Решение. Пронумеруем сосны: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. По словам Винни-Пуха, равны расстояния C_1C_4 и C_3C_6. Следовательно,

$$C_1C_4 = C_3C_6 \iff C_1C_3 + C_3C_4 = C_3C_4 + C_4C_6 \iff C_1C_3 = C_4C_6.$$

Кролик сказал, что третья сосна в три раза дальше от первой, чем вторая. Следовательно,

$$C_1C_2 = \frac{1}{3}C_1C_3.$$

Пятачок заметил, что от пятой сосны до четвёртой вдвое дальше, чем до шестой, следовательно,

$$C_5C_6 = \frac{1}{3}C_4C_6 = \frac{1}{3}C_1C_3 = C_1C_2.$$

А по словам Иа-Иа, расстояния C_5C_6 и C_1C_2 различны, значит, кто-то из них ошибся.

10. Манипуляции с числами

Задача 1

5-7 а) Сколько имеется двузначных чисел, у которых среди цифр есть хоть одна пятёрка?

Идея. Подсчитать количество тех двухзначных чисел, у которых пятёрка стоит первой цифрой и тех, у которых — второй.
Указание. Число не может начинаться с нуля.
Указание. Отдельно рассмотреть случай, когда цифра 5 стоит и на первом месте, и на втором.

Решение. Если двузначное число начинается с 5, то второй цифрой может быть любая из 10 цифр, т. е. таких чисел 10.

Если цифра 5 стоит на втором месте, то на первом может стоять любая цифра, кроме нуля. Таких чисел 9.

Заметим, что число 55 мы посчитали и в первом случае, и во втором, значит, различных чисел будет $10 + 9 - 1 = 18$.
Ответ. 18.

Задача 2

5-7 а) Подряд выписаны все целые числа от 1 до 100. Сколько раз в этой записи встречается цифра нуль?

Идея. Подсчитать по отдельности количество нулей у однозначных, двухзначных и трёхзначных чисел.
Указание. Число не может начинаться с нуля.

Решение. У однозначных чисел нулей в записи нет. Трёхзначное число у нас одно и в его записи 2 нуля.

Двузначное число начинаться с нуля не может, но нуль может стоять после каждой из оставшихся 9 цифр, т. е. всего 9 нулей.

Таким образом, во всей записи $2 + 9 = 11$ нулей.
Ответ. 11.

Задача 3

5-6 Возраст старика Хоттабыча записывается числом с различными цифрами. Об этом числе известно следующее:

1) если первую и последнюю цифры зачеркнуть, то получится двузначное число, которое при сумме цифр, равной 13, является наибольшим;

2) первая цифра больше последней в 4 раза.

Сколько лет старику Хоттабычу?

Идея. Сначала найти две средние цифры, потом две крайние.
Указание. Самым большим числом с заданной суммой цифр будет число с наибольшей первой цифрой.

Решение. Наибольшим двузначным числом с суммой цифр, равной 13, является число 94.

Так как первая цифра больше последней в 4 раза, то первая цифра делится на 4, значит, это либо 4, либо 8. Но возраст Хоттабыча записывается числом с различными цифрами, значит, 4 не подходит и первая цифра равна 8. Последняя цифра в 4 раза меньше, т. е. 2.
Ответ. 8942.

Задача 4

6-7 Переложите одну из семи спичек, изображающих число $\frac{7}{10}$, записанное римскими цифрами $\left(\frac{\text{VII}}{\text{X}}\right)$, так, чтобы получившаяся дробь равнялась $\frac{2}{3}$.

Идея. Проанализировать возможные значения знаменателя.
Указание. Знаменатель должен быть кратным трём.

Решение. Для того чтобы полученная дробь равнялась $\frac{2}{3}$, знаменатель должен получиться кратным трём.

Сейчас в знаменателе 2 спички. После перекладывания одной спички там может остаться 1, 2 или 3 спички. Из одной или двух спичек число, кратное трём, сделать не удастся, значит, спичек в знаменателе должно стать три. Получается, что надо взять одну спичку из числителя и переложить в знаменатель. Таким образом мы можем получить в знаменателе только IX или XI. Из этих чисел только IX делится на 3, значит, в знаменателе должно быть IX, а в числителе VI.

Ответ. $\frac{\mathrm{VI}}{\mathrm{IX}}$.

Задача 5

[6-7] Найдите все дроби со знаменателем 15, которые больше $\frac{8}{9}$ и меньше 1.

Идея. Обозначить числитель искомой дроби через x и составить соответствующее двойное неравенство.

Решение. Пусть x — числитель искомой дроби. Найдём x из двойного неравенства:

$$\frac{8}{9} < \frac{x}{15} < 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \frac{40}{3} < x, \\ x < 15 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad 13\frac{1}{3} < x < 15.$$

В этом промежутке лежит только одно целое число — 14.

Ответ. $\frac{14}{15}$.

Задача 6

[5-7] а) Расставьте скобки в левой части выражения

$$2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5$$

так, чтобы получилось верное равенство.

Идея. Представить левую часть равенства в виде дроби и проанализировать, какие числа должны оказаться в числителе, а какие в знаменателе.

Указание. Определить местоположение чисел 2, 3 и 5.

Решение. Как бы мы ни расставили скобки, число 2 будет в числителе дроби, а число 3 — в знаменателе. Для того чтобы число 3 в результате сократилось, надо, чтобы число 6 оказалась в числителе. Число 5 так же должно быть в числителе, поскольку после сокращения дроби должно получиться 5. То есть исходное равенство можно записать в виде

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 6}{3} * 4 = 5,$$

где * означает знак умножения или деления. Заметим, что равенство будет верным только если это знак деления, поскольку

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 4} = 5.$$

Осталось расставить скобки в исходном выражении так, чтобы оно преобразовалось к указанному виду: $(2:3):((4:5):6)=5$.
Ответ. $(2:3):((4:5):6)=5$.

Задача 7

$\boxed{5\text{-}6}$ а) Поставьте в выражении скобки так, чтобы получилось верное равенство: $270+120+390:3\cdot 5=1120$.

Идея. Перебирать варианты, чтобы уменьшить или увеличить значение левой части равенства.
Указание. Вычислить значение левой части равенства без проставления скобок и далее действовать перебором.

Решение. Без проставления скобок левая часть равенства равна

$$270+120+390:3\cdot 5=390+130\cdot 5=390+650=1040.$$

Это меньше, чем 1120, на 5 надо домножать не только $390:3$, но и ещё что-то. Если 5 умножить на всё, то будет много:

$$(270+120+390:3)\cdot 5>1120;$$

если не умножать первое число, то тоже много:

$$270+(120+390:3)\cdot 5>1120;$$

если не умножать и второе число, то это наш первый вариант и уже мало.

Для того чтобы уменьшить левую часть последнего выражения, переместим правую скобку на одну позицию влево, тогда получим то, что надо:

$$270+(120+390):3\cdot 5=1120.$$

Ответ. $270+(120+390):3\cdot 5=1120$.

Задача 8

$\boxed{5\text{-}7}$ а) В выражении $1:2:3:4:5:6:7:8:9$ расставить скобки так, чтобы результат был: минимальным; максимальным.

Идея. Представить выражение в виде дроби и проанализировать, какие числа должны оказаться в числителе, а какие — в знаменателе.
Указание. Для того чтобы дробь принимала минимальное значение, в знаменателе должно оказаться максимальное количество чисел.
Указание. Для того чтобы дробь принимала максимальное значение, в знаменателе должно оказаться минимальное количество чисел.
Указание. Определить местоположение чисел 1 и 2.

Решение. Как бы мы ни расставили скобки, число 1 будет в числителе дроби, а число 2 — в знаменателе. Для того чтобы дробь принимала минимальное значение, все остальные числа должны оказаться в знаменателе, т. е. минимальной будет дробь

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9},$$

её можно получить, оставив выражение вообще без скобок:

$$1:2:3:4:5:6:7:8:9.$$

Для того чтобы дробь принимала максимальное значение, все числа, начиная с третьего, должны оказаться в числителе, т. е. максимальной будет дробь

$$\frac{1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{2},$$

её можно получить, расставив скобки так:

$$1:(2:3:4:5:6:7:8:9).$$

Ответ. $1:2:3:4:5:6:7:8:9$; $1:(2:3:4:5:6:7:8:9)$.

Задача 9

$\boxed{6}$ На листе бумаги написаны двадцать чисел 1,1 и двадцать чисел 1,11. Зачеркните несколько чисел так, чтобы сумма оставшихся была равна 19,93.

Идея. Составить уравнение с двумя неизвестными. Решать перебором.
Указание. Определить возможные значения количества чисел 1,11 с учётом последней цифры суммы оставшихся чисел.

Решение. Пусть чисел 1,1 осталось x штук, а чисел 1,11 — y штук. Тогда

$$1{,}1x+1{,}11y=19{,}93.$$

Так как в числе 19,93 количество сотых равно 3, то последняя цифра числа y должна быть 3. Поскольку $0\leqslant y\leqslant 20$, для y есть только два варианта: 3 и 13.

Если $y=3$, то $1{,}1x=16{,}6$ и x не целое число. Если $y=13$, то

$$1{,}1x+1{,}11\cdot13=19{,}93 \iff 1{,}1x=5{,}5 \iff x=5.$$

Так как вначале чисел было по 20, получается, что зачеркнуть надо 15 чисел 1,1 и 7 чисел 1,11.
Ответ. Нужно зачеркнуть 15 чисел 1,1 и 7 чисел 1,11.

Задача 10

$\boxed{6}$ а) Найдите десять натуральных чисел, сумма и произведение которых равны двадцати.

Идея. Использовать то, что при домножении на 1 число не меняется.
Указание. Представить число 20 в виде произведения двух множителей с суммой 12, а остальные 8 взять равными 1.

Решение. $20 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10$.
Ответ. 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 10.

Задача 11

$\boxed{7}$ Девятизначное число, в записи которого есть все цифры, кроме нуля, после некоторой перестановки цифр уменьшилось в восемь раз. Найдите все такие числа.

Идея. Сузить диапазон возможных значений чисел заданного вида с учётом того, что одно из них в 8 раз больше другого, а далее действовать перебором.
Указание. Рассмотреть частное максимального девятизначного числа, записанного всеми цифрами без нуля, и числа 8.

Решение. Нам надо найти два числа a и b, в записи которых есть все цифры, кроме нуля, такие, что $8a = b$.

Заметим, что $123\,456\,789 \leqslant a < b \leqslant 987\,654\,321$. Следовательно,

$$a = b : 8 \leqslant 987\,654\,321 : 8 = 123\,456\,790\,\frac{1}{8}.$$

Минимально возможное значение (123 456 789) удовлетворяет этому условию, а следующее (123 456 798) уже нет. Значит, возможен только один вариант:

$$a = 123\,456\,789, \quad b = 8a = 987\,654\,312.$$

Ответ. 987 654 312.

Задача 12

$\boxed{6\text{-}7}$ Существует ли натуральное число n такое, что десятичная запись числа n^2 начинается с цифр 123 456 789?

Идея. Рассмотреть числа, состоящие из одних единиц.

Решение. Заметим следующую закономерность:

$$11^2 = 121, \quad 111^2 = 12\,321, \quad 1111^2 = 1\,234\,321 \text{ и т. д.}$$

При возведении в квадрат числа, состоящего из девяти единиц, получится число, начинающееся с первых девяти цифр.
Ответ. Да, например, $n = 111\,111\,111$.

Задача 13

$\boxed{5\text{-}7}$ а) Расставьте знаки действий и скобки так, чтобы получить верное равенство: 1 9 9 9 = 0.

Идея. Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю.

Решение. Представим левую часть в виде произведения трёх множителей, один из которых равен нулю:

$$1 \cdot (9 - 9) \cdot 9 = 0.$$

Ответ. $1 \cdot (9 - 9) \cdot 9 = 0$.

Задача 14

$\boxed{5\text{-}7}$ а) Запишите число 100 с помощью пяти единиц и знаков действий.

Идея. Представить число 100 с помощью двух чисел, записанных единицами, и одного арифметического действия.
Указание. В качестве арифметического действия взять вычитание.

Решение. Так как число 100 оканчивается нулём, то из двух чисел, записанных единицами, его можно получить только с помощью вычитания: $100 = 111 - 11$.
Ответ. $100 = 111 - 11$.

Задача 15

$\boxed{5\text{-}6}$ Запишите число 1 000 000, используя только цифру 3, знаки арифметических действий и скобки, если они необходимы. Можно ли в этой записи обойтись без действия деления?

Идея. Записать с помощью цифры 3 число 3 000 000, а потом поделить на 3.

Решение. $3\,000\,000 = (3\,333\,333 - 333\,333) : 3$. Без деления обойтись нельзя, так как при умножении, вычитании и сложении будут получаться числа, делящиеся на 3, а 1 000 000 на 3 не делится.
Ответ. $(3\,333\,333 - 333\,333) : 3$. Нет.

Задача 16

$\boxed{6}$ а) Запишите число 1997 с помощью 10 двоек и арифметических операций.

Идея. Использовать то, что $1997 = 2000 - 3$.
Указание. Представить с помощью двоек числа 2000 и 3.

Решение. Так как $2000 = 2222 - 222$, а $3 = 2 + 2 : 2$, то

$$1997 = 2222 - 222 - 2 - 2 : 2.$$

Ответ. $2222 - 222 - 2 - 2 : 2$.

Задача 17

5-7 а) В записи 8 8 8 8 8 8 8 8 поставьте между некоторыми цифрами знак сложения так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 1000.

Идея. Упростить задачу, поделив слагаемые и сумму на 8, и действовать перебором с анализом.
Указание. Определить слагаемое с максимальным количеством цифр и свести задачу к более простой.

Решение. Заметим, что как бы мы ни расставили знаки сложения, каждое слагаемое всё равно будет делиться на 8. Поделив слагаемые и сумму на 8, получим более простую задачу: в записи 1 1 1 1 1 1 1 1 поставить между некоторыми цифрами знак сложения так, чтобы в сумме получилось 125.

Максимальным слагаемым может быть только 111, поскольку число 1111 уже больше 125, причём два таких числа в сумме находиться уже не могут. Значит, остальные числа являются двузначными и однозначными. Заметим, что трёхзначные слагаемые совсем отсутствовать не могут, так как иначе максимальной суммой будет $11 + 11 + 11 + 11 = 44$, что меньше 125. Значит, слагаемое 111 будет ровно одно.

Теперь задача свелась к следующей: в записи 1 1 1 1 1 поставить между некоторыми цифрами знак сложения так, чтобы в сумме получилось 14.

Максимальным слагаемым может быть только 11, причём два таких числа в сумме находиться уже не могут. Заметим, что двузначные слагаемые совсем отсутствовать не могут, так как иначе максимальная сумма будет равна $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$, а не 14. Значит, слагаемое 11 одно, а остальные слагаемые равны 1, т. е. разложение $11 + 1 + 1 + 1 = 14$ является единственно возможным.

Возвращаясь к исходной задаче, получим:

$$111 + 11 + 1 + 1 + 1 = 125 \quad \text{и} \quad 888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000.$$

Ответ. $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$.

Задача 18

5-7 а) Написать число 9 с помощью десяти различных цифр, знаков арифметических действий и скобок.

Указание. Использовать то, что любое число и ноль в произведении дают ноль.

Решение. Число 9 можно представить с помощью десяти различных цифр и знаков арифметических действий, например, так

$$9 = 0 \cdot 12345678 + 9.$$

Ответ. $9 = 0 \cdot 12\,345\,678 + 9$ или $9 = 9 + (8 + 1) - (7 + 2) + (6 + 3) - (5 + 4) + 0$ или $9 = 97\,524 : 10\,836$.

Задача 19

$\boxed{6}$ Кузнечик прыгает вдоль прямой вперёд на 80 см или назад на 50 см. Может ли он менее чем за 7 прыжков удалиться от начальной точки ровно на 1 м 70 см?

Идея. Принять в качестве неизвестных количество прыжков вперёд и количество прыжков назад и составить соответствующее уравнение.
Указание. Действовать перебором, используя ограничение по общему количеству прыжков.

Решение. Пусть кузнечик сделал x прыжков вперёд и y назад. Нам надо найти x и y такие, что

$$|80x - 50y| = 170 \iff 8x - 5y = \pm 17 \iff 8x = 5y \pm 17.$$

Заметим, что x является целым числом, лежащим в диапазоне от 1 до 6. Переберём возможные значения.

При $x = 1$ получим уравнение $8 = 5y \pm 17$, которое имеет решение $y = 5$. Так как $x + y = 1 + 5 = 6 < 7$, то этот случай нам подходит.
Ответ. Может.

Задача 20

$\boxed{5\text{-}6}$ В кабинете математики для консультации собрались трое учеников: Аня, Боря и Света. Для ответа на вопросы Ани требуется 5 минут, Бори — 2 минуты, а Светы — 7 минут. Ученик, получивший ответы на свои вопросы, уходит. Как учителю правильнее построить проведение консультации, чтобы суммарное время нахождения учеников в кабинете было как можно меньше?

Идея. Показать, что сначала надо отпустить тех, кто пришёл с короткими вопросами.
Указание. Общее время консультации равно произведению продолжительности консультации на количество учеников, находящихся в классе.

Решение. Заметим, что во время консультации первого ученика все три ученика будут находиться в классе, значит, это займёт

общего времени в три раза больше, чем длилась консультация. Во время консультации второго ученика в классе будут находиться уже два ученика, и это займёт общего времени в два раза больше, чем длилась консультация. И только последняя консультация займёт общего времени ровно столько, сколько длилась эта консультация. Получается, что первым надо запустить самого быстрого, а последним — самого медленного.
Ответ. Консультировать их в следующем порядке: Боря, Аня, Света.

Задача 21

6 Дан шестизначный телефонный номер. Сколько существует различных семизначных номеров, из которых при зачёркивании одной цифры получается данный шестизначный номер (телефонный номер не может начинаться с нуля)?

Идея. Подсчитать количество различных семизначных номеров, которые можно получить из произвольного шестизначного номера приписыванием одной цифры.
Указание. Рассмотреть по очереди случаи, когда новая цифра приписывается перед первой цифрой шестизначного номера, перед второй и так далее.
Указание. Учесть случаи совпадения номеров.

Решение. Номер не может начинаться с нуля, значит, перед первой цифрой могут стоять цифры от 1 до 9, т. е. 9 различных номеров.

Между первой и второй цифрой шестизначного номера можно поставить любую цифру от 0 до 9, но среди получающихся при этом номеров один совпадёт с номером из предыдущей серии, а именно тот, у которого первая и вторая цифры одинаковые. Заметим, что более одного совпадения в первой и второй серии быть не может, потому что в первой серии первые цифры все разные, а во второй — одинаковые. Значит, во второй серии мы получили 9 новых семизначных номеров.

Аналогичным образом, вставляя цифры между второй и третьей цифрой шестизначного номера, мы получим девять новых семизначных номеров и так далее.

Значит, всего существует $9 \cdot 7 = 63$ различных семизначных номеров, из которых при зачёркивании одной цифры получается данный шестизначный номер.
Ответ. 63.

Задача 22

6 Сколько билетов подряд надо приобрести в автобусной кассе, чтобы наверняка попался счастливый билет? Билет называет-

ся счастливым, если сумма первых трёх его цифр равна сумме трёх последних. Номера билетов идут по порядку от 000 001 до 999 999. Количество билетов в кассе не ограничено.

Идея. Рассмотреть билеты, у которых первые три цифры совпадают с тремя последними цифрами.
Указание. Определить номер первого счастливого билета.

Решение. Первые 999 билетов не будут счастливыми, потому что у них сумма первых трёх цифр равна нулю, а сумма последних трёх не равна. Следующий билет так же не будет счастливым. Первый счастливый билет имеет номер 001 001, значит, чтобы наверняка попался счастливый билет, надо купить не менее 1001 билета.

Теперь покажем, что среди каждых подряд идущих 1001 билета обязательно встретится хотя бы один счастливый билет.

Заметим, что если к номеру, у которого первые три цифры совпадают с тремя последними цифрами (т. е. вида $abc\,abc$, где a, b и c — цифры от 0 до 9) прибавить 1001, то у получившегося номера первые три цифры так же будут совпадать с последними тремя цифрами. Поскольку все билеты с такими номерами будут счастливыми, получается, что если купить 1001 билет, то среди них наверняка попадётся счастливый билет.
Ответ. 1001 билет.

Задача 23

(5-7) Дядька Черномор и 33 богатыря охраняют остров Буян. Наряд из 6 богатырей дежурит в течение суток. Каким образом дядька Черномор может организовать дежурство в течение 11 суток так, чтобы каждый богатырь отдежурил 2 суток?

Идея. Последовательно упрощать задачу, исключая отдежуривших богатырей.
Указание. Создать как можно больше бригад из шести богатырей, которые отдежурят сразу двое суток подряд.

Решение. Рассмотрим наряд из шести богатырей, которые будут дежурить первые сутки. Если на вторые сутки направить их же, то задача сведётся к следующей: организовать дежурство 27 богатырей в течение 9 суток.

Рассмотрим наряд из шести богатырей, которые будут дежурить первые сутки из оставшихся девяти. Если на вторые сутки направить их же, то задача сведётся к следующей: организовать дежурство 21 богатыря в течение 7 суток.

Действуя аналогичным образом, сведём задачу к организации дежурства сначала 15 богатырей в течение 5 суток, а затем к дежурству 9 богатырей в течение трёх суток.

Итак, 9 богатырей должны дежурить в течение трёх суток так, чтобы каждый из них отдежурил по двое суток.

Рассмотрим наряд из шести богатырей, которые будут дежурить первые сутки. Если на следующие сутки направить их же, то на последние сутки останется только три богатыря. Поэтому на следующие сутки отправим трёх уже дежуривших и трёх ещё не дежуривших богатырей. Тогда на последние сутки останется как раз 6 богатырей: трое из которых отдежурили первые сутки и трое — вторые.

Ответ. Например, первую пару дней дежурит первая шестёрка богатырей; вторую — вторая, третью — третья, четвёртую пару дней — четвёртая шестёрка богатырей. Девятый день дежурят 6 богатырей из оставшихся, десятый день — трое из них же и трое ещё не дежуривших, одиннадцатый день — трое дежуривших в 9-й день и трое дежуривших в 10-й день.

11. Ребусы

Задача 1

$\boxed{6}$ Поставьте вместо звёздочек цифры: $59{,}27 + {*}{*}{,}45 + 78{,}{*}3 = 182{,}1{*}$.

Идея. Определить сначала сотые, потом десятые, а затем целые части чисел.

Указание. Найти последнюю цифру суммы и свести задачу к более простой.

Решение. Во всех трёх слагаемых дана последняя цифра, значит, мы можем определить последнюю цифру суммы. Так как $7+5+3=15$, то сумма оканчивается на 5. Задача свелась к следующей:

$$59{,}27 + {*}{*}{,}45 + 78{,}{*}3 = 182{,}15,$$
$${*}{*}{,}45 + 78{,}{*}3 = 182{,}15 - 59{,}27,$$
$${*}{*}{,}45 + 78{,}{*}3 = 122{,}88.$$

Вычтем из слагаемых левой части равенства соответственно 0,5 и 0,3, а из правой части вычтем 0,8, получим:

$${*}{*}{,}4 + 78{,}{*} = 122{,}8.$$

Так как у первого слагаемого последняя цифра равна 4, а у суммы 8, то последней цифрой второго слагаемого может быть только 4. Следовательно,

$${*}{*}{,}4 + 78{,}4 = 122{,}8 \quad\Longleftrightarrow\quad {*}{*}{,}4 = 122{,}8 - 78{,}4 = 44{,}4.$$

Теперь все цифры в примере восстановлены.

Ответ. $59{,}27 + 44{,}45 + 78{,}43 = 182{,}15$.

Задача 2

6-7 а) Восстановить цифры (*) и знаки действий (?):

$$3{*}5{,}67{*}\ ?\ 20{*},{*}{*}9 = {*}96{,}889.$$

Идея. Определить, какие из знаков действий заведомо не годятся, а для оставшихся подбирать цифры в числах, начиная с конца.

Указание. В качестве возможных операций рассмотреть сложение и вычитание.

Указание. Найти последнюю цифру первого числа и свести задачу к более простой.

Решение. Так как целая часть каждого из чисел является трёхзначным числом, то умножение и деление в качестве знака действия заведомо не годятся.

Рассмотрим случай, когда знак действия сложение:

$$3{*}5{,}67{*} + 20{*},{*}{*}9 = {*}96{,}889.$$

Так как последняя цифра второго слагаемого и суммы равна 9, то последняя цифра первого слагаемого равна нулю, т. е.

$$3{*}5{,}670 + 20{*},{*}{*}9 = {*}96{,}889.$$

Вычтем 0,009 из обеих частей равенства и сведём задачу к более простой:

$$3{*}5{,}67 + 20{*},{*}{*} = {*}96{,}88.$$

Зная дробные части первого слагаемого и суммы, найдём дробную часть второго слагаемого: $0{,}88 - 0{,}67 = 0{,}21$. Теперь задача выглядит так:

$$3{*}5{,}67 + 20{*},21 = {*}96{,}88 \quad \Longleftrightarrow \quad 3{*}5 + 20{*} = {*}96,$$

откуда следует, что последняя цифра второго слагаемого равна 1, т. е.

$$3{*}5 + 201 = {*}96.$$

Из последнего равенства последние две неизвестные цифры определяются однозначно — это 9 и 5. В результате получаем ответ.

Теперь рассмотрим случай, когда знаком действия является минус:

$$3{*}5{,}67{*} - 20{*},{*}{*}9 = {*}96{,}889.$$

Заметим, что целая часть числа справа является трёхзначным числом, не меньшим 196. Однако целая часть уменьшаемого не больше 395, а целая часть вычитаемого не меньше 200. Значит, целая часть разности не больше 195. Поэтому в этом случае решений нет.

Ответ. $395{,}670 + 201{,}219 = 596{,}889.$

Задача 3

$\boxed{6}$ Восстановить пропущенные цифры: $977{,}6 : 3{,}{*}5 = 3{*}{*}{,}8$.

Идея. Свести задачу к умножению целых чисел.
Указание. Найти возможные значения второй цифры второго числа и действовать перебором.

Решение. Сведём задачу к умножению целых чисел:

$$977{,}6 : 3,*5 = 3{*}{*}{,}8 \iff$$
$$\iff 977{,}6 = 3{,}{*}5 \cdot 3{*}{*}{,}8 \iff$$
$$\iff 977\,600 = 3{*}5 \cdot 3{*}{*}8.$$

Число 977 600 делится на 25, а число $3{*}{*}8$ не делится, значит, на 25 должно делиться число $3{*}5$. Это возможно, только если вторая цифра равна 2 или 7.

Поделив 977 600 на 325, получим 3008. Это нам подходит, а поделив 977 600 на 375, получим не целое число.

Теперь все цифры в примере восстановлены.
Ответ. $977{,}6 : 3{,}25 = 300{,}8$.

Задача 4

$\boxed{5\text{-}6}$ а) Расшифруйте пример: $A + BB + A = CCC$.

Идея. Сначала определить значение самого большого числа, потом среднего, затем самого маленького.
Указание. Найти значение цифры C, определив максимальное значение левой части равенства.

Решение. Так как $A + BB + A \leqslant 8 + 99 + 8 = 115$, то $CCC \leqslant 115$, значит, $C = 1$. Если $B \leqslant 8$, то $A + BB + A \leqslant 111$, значит, $B = 9$. Оставшаяся цифра определяется однозначно: $A = 6$.
Ответ. $6 + 99 + 6 = 111$.

Задача 5

$\boxed{5\text{-}6}$ Замените A на цифру, звёздочки — на арифметические действия (необязательно одинаковые) и расставьте скобки так, чтобы было верным равенство: $AAA * A * A = 1998$.

Идея. Показать, что среди арифметических действий есть умножение.
Указание. Разложить число 1998 на множители.

Решение. Заметим, что если в качестве арифметических действий использовать только сложение, вычитание и деление, то значение выражения слева будет меньше 1998. Значит, хотя бы одно из действий — умножение.

Разложим число 1998 на множители следующим образом:

$$1998 = 999 \cdot 2 = 333 \cdot 3 \cdot 2 = 333 \cdot (3 + 3).$$

Ответ. $333 \cdot (3 + 3) = 1998$.

Задача 6

$\boxed{5\text{-}6}$ Решите числовой ребус: $AAAA - BBB + CC - D = 1234$.

Идея. Сначала определить значение самого большого числа, потом среднего, затем самого маленького.
Указание. Найти значение цифры A, используя положительность выражения $BBB - CC + D$.

Решение. Заметим, что $0 < BBB - CC + D < 1000$, значит, число

$$AAAA = 1234 + BBB - CC + D$$

лежит между 1234 и 2234, следовательно, $AAAA = 2222$. Подставив это значение в равенство, получим:

$$BBB = 2222 - 1234 + CC - D = 988 + CC - D.$$

Так как $0 < CC - D < 99$, то $988 < BBB < 1087$, следовательно, $BBB = 999$ и $CC - D = 11$.
Ответ. $2222 - 999 + 11 - 0 = 1234$.

Задача 7

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Расшифруйте запись: КОКА + КОЛА = ВОДА.

Идея. Определить значение цифр, которые встречаются наиболее часто.
Указание. Сначала найти значение последней цифры, потом второй, а затем первой цифры слагаемых.

Решение. Последняя цифра обоих слагаемых и суммы совпадают, значит, А = 0. Вторая цифра обоих слагаемых и суммы совпадают, но цифра 0 уже задействована. Остаётся только такой вариант: цифра О в слове ВОДА — это последняя цифра числа О + О + 1, где 1 перешла из более младших разрядов. В этом случае О = 9 и К + Л $\geqslant$ 11.

Теперь наш ребус выглядит так:

$$\text{К9К0} + \text{К9Л0} = \text{В9Д0}.$$

Так как два четырёхзначных числа дают в сумме четырёхзначное число, то первая цифра слагаемых не может быть больше 4. Если К = 4, то В = 9, но 9 уже была, значит, К $\leqslant$ 3. С учётом того что Л $\leqslant$ 8 и К + Л $\geqslant$ 11, получаем К = 3 и Л = 8. В результате получаем ответ.
Ответ. $3930 + 3980 = 7910$.

Задача 8

6-7 Дробь $\dfrac{В \cdot А \cdot Р \cdot Е \cdot Н \cdot Ь \cdot Е}{К \cdot А \cdot Р \cdot Л \cdot С \cdot О \cdot Н}$ равна целому числу, разные буквы обозначают разные цифры, а между ними стоит знак умножения. Чему равна дробь?

Идея. Подсчитать количество различных цифр в данном выражении.
Указание. Ноль может находиться только в числителе дроби.

Решение. Так как выражение содержит 10 различных букв, то в записи дроби участвуют все 10 цифр и ноль в том числе. Ноль не может находиться в знаменателе дроби, значит, он в числителе и дробь равна нулю.
Ответ. 0.

Задача 9

6-7 В приведённых ниже примерах указаны действия с однозначными числами, обозначенными буквами. Найдите эти числа и запишите, как вы при этом рассуждали.

$$А \cdot А = Б, \quad В \cdot И = Г, \quad Е \cdot А = А.$$

Идея. Проанализировать последнее равенство.
Указание. Найти цифру Е из последнего равенства, далее действовать перебором.

Решение. Рассмотрим равенство $Е \cdot А = А$. Здесь либо $Е = 1$, либо $А = 0$, но из первого равенства следует, что $А \neq 0$, значит, $Е = 1$.

В равенстве $А \cdot А = Б$ квадрат однозначного числа равен однозначному числу, значит, А может принимать значения только 2 или 3.

Если $А = 2$, то в равенстве $В \cdot И = Г$ уже нельзя подобрать две цифры из оставшихся так, чтобы их произведение было числом, состоящим из одной цифры. Следовательно, $А = 3$. В этом случае $Б = 9$, одно из чисел В и И равно 2, другое 4, а их произведение $Г = 8$.
Ответ. $Е = 1$, $В = 2$, $А = 3$, $Б = 9$, $И = 4$, $Г = 8$.

Задача 10

5-6 а) Найдите пропущенные цифры, обозначенные звёздочками, и объясните, как вы рассуждали:

$$\begin{array}{r} \times\; 63 \\ ** \\ \hline ** \\ ** \\ \hline *** \end{array}$$

Идея. Определить, какой должна быть цифра, чтобы при домножении числа 63 на неё получалось двузначное число.

Решение. Рассмотрим вторую цифру второго множителя. При домножении числа 63 на неё получается двузначное число, значит, это цифра 1. При домножении числа 63 на первую цифру второго множителя также получается двузначное число, значит, это тоже цифра 1. В результате второй множитель равен 11.

Ответ.
$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}63\\11\end{array}\\ \hline 63\\ 63\\ \hline 693\end{array}$$

Задача 11

5-6 Расшифруйте два ребуса, в которых одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным буквам — разные цифры в обоих примерах.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{АБВ}\\\text{ВВ}\end{array}\\ \hline \text{ААБ}\end{array}\qquad\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}\text{АБВ}\\\text{ВВ}\end{array}\\ \hline \text{АБВ}\\ \text{АБВ}\\ \hline \text{АГАВ}\end{array}$$

Идея. Определить цифру В из второго ребуса.
Указание. Число не меняется после домножения на 1.

Решение. Из третьей строчки второго ребуса следует, что АБВ · В = АБВ, значит, В = 1 и ребусы теперь выглядят так:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{АБ}1\\11\end{array}\\ \hline \text{ААБ}\end{array}\qquad\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}\text{АБ}1\\11\end{array}\\ \hline \text{АБ}1\\ \text{АБ}1\\ \hline \text{АГА}1\end{array}$$

Из третьей строчки первого ребуса получаем Б = 2; подставив Б = 2, получаем, что А = 3. Подставив эти значения во второй ребус, находим Г = 5.

Ответ.
$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}321\\11\end{array}\\ \hline 332\end{array}\qquad\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}321\\11\end{array}\\ \hline 321\\ 321\\ \hline 3531\end{array}$$

Задача 12

[6-7] Расшифруйте запись. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным буквам — разные цифры.

$$\begin{array}{r}
\text{МИНУС}\\
\times\ \text{МИНУС}\\
\hline
\text{****С}\\
\text{*****У}\phantom{\text{*}}\\
\text{****Н}\phantom{\text{**}}\\
\text{****И}\phantom{\text{***}}\\
\text{МИНУС}\phantom{\text{****}}\\
\hline
\text{*********}
\end{array}$$

Идея. Сначала определить первую и последнюю цифры числа МИНУС.

Указание. Найти цифру М, используя информацию из предпоследней строчки ребуса.

Указание. Найти цифру С, используя то, что произведение двух таких цифр оканчивается на цифру С.

Указание. Определить чётность остальных цифр и действовать перебором.

Решение. Из предпоследней строчки ребуса следует, что

$$\text{МИНУС} \cdot \text{М} = \text{МИНУС} \quad \Longrightarrow \quad \text{М} = 1.$$

Из третьей строчки ребуса следует, что произведение двух цифр С оканчивается на цифру С, значит, С может принимать одно из следующих значений: 0, 1, 5, 6. Переберём эти варианты. Нулём С быть не может, поскольку тогда все последние цифры во всех строчках были бы нулями, а они разные. Единица уже занята. Если С $=5$, то последние цифры в строчках должны быть равны либо 5, либо 0, но там 4 разные цифры. Значит, С $=6$.

Так как С чётно, то последние цифры во всех строчках чётны, следовательно, цифры У, Н, И принимают значения 2, 4, 8. Осталось определить, какой букве какая из указанных цифр соответствует.

Рассмотрим четвёртую строчку ребуса. Она представляет собой произведение 1ИНУ6 $\cdot$ У, которое является шестизначным числом. Следовательно, У не может равняться 2 и 4, значит, У $=8$.

Если И $=2$ и Н $=4$, то в четвёртой строчке не получится шестизначного числа, значит, наоборот, И $=4$ и Н $=2$.

Объединив полученные результаты, получим ответ.

Ответ.

$$\begin{array}{r}
14286\\
\times\ 14286\\
\hline
85716\\
114288\\
28572\\
57144\\
14286\\
\hline
204089796
\end{array}$$

Задача 13

$\boxed{5\text{-}7}$ а) Решите числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \times\ *76 \\ ** \\ \hline 18** \\ **** \\ \hline **920 \end{array}$$

Идея. Сначала определить последнюю цифру второго множителя, потом первую, затем найти первый множитель.
Указание. Произведение последней цифры второго множителя и числа 6 оканчивается нулём.

Решение. Последняя цифра второго множителя равна 5, поскольку иначе произведение множителей не может оканчиваться нулём.

Так как произведение числа $*76$ и 5 оканчивается на цифры 80, то произведение равно 1880.

Поделив 1880 на 5, получим, что первый множитель равен 376. Теперь наш ребус выглядит так:

$$\begin{array}{r} \times\ 376 \\ *5 \\ \hline 1880 \\ **** \\ \hline **920 \end{array}$$

Проанализировав третью и пятую строчки, получаем последнюю и предпоследнюю цифры четвёртой строки: 4 и 0. Следовательно,

$$376 \cdot * = **04.$$

Для того чтобы последняя цифра произведения равнялась 4, второй множитель должен равняться 4 или 9.

Если множитель равен 4, то $376 \cdot 4 = 1504$. Этот вариант подходит. Если множитель равен 9, то $376 \cdot 9 = 3384$. Этот вариант не годится.

Объединив полученные результаты, получим ответ.

Ответ.

$$\begin{array}{r} \times\ 376 \\ 45 \\ \hline 1880 \\ 1504 \\ \hline 16920 \end{array}$$

Задача 14

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Решите числовые ребусы:

$$\begin{array}{r} \times\ **4 \\ 23* \\ \hline **24 \\ 1*** \\ 1*** \\ \hline *1**** \end{array}$$

Идея. Сначала определить последнюю цифру второго множителя, потом найти возможные значения первой и второй цифр первого множителя и действовать перебором.
Указание. Произведение последней цифры второго множителя и числа 4 оканчивается цифрой 4. Перебрать возможные варианты.

Решение. Третья строчка ребуса является произведением первого множителя на последнюю цифру второго множителя. Так как это произведение оканчивается на 4 и первый множитель оканчивается на 4, то последняя цифра второго множителя либо 1, либо 6. Если это 1, то произведение не может оказаться четырёхзначным числом, значит, это 6.

Произведение 4 и 6 равно 24, значит, произведение второй цифры первого множителя на 6 оканчивается нулём и эта цифра равна 0 либо 5.

Теперь найдём возможные значения первой цифры первого множителя. Из четвёртой строчки ребуса следует, что утроенный первый множитель является четырёхзначным число, начинающимся с 1. Следовательно, первая цифра не превосходит 6. Из пятой строчки ребуса следует, что удвоенный первый множитель является четырёхзначным числом, начинающимся с 1. Следовательно, первая цифра больше либо равна 5.

Итак, второй множитель равен 236, первая цифра первого множителя 5 либо 6, вторая 0 либо 5. Перебирая эти варианты, получаем, что первый множитель равен 504.

Ответ.
$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 504 \\ 236 \end{array} \\
\hline
3024 \\
1512 \\
1008 \\
\hline
118944
\end{array}
$$

Задача 15

[6-7] Восстановить пропущенные цифры:

$$237 \cdot {*}1{*}{*}{*} = 7{*}{*}{*}065.$$

Идея. Записать пример в виде умножения в столбик.
Указание. Сначала найти последнюю цифру второго слагаемого, затем предпоследнюю и т. д.

Решение. Так как произведение оканчивается на 5, то последняя цифра второго множителя равна 5. Запишем пример в виде умножения в столбик, заполнив третью и шестую строчку с учётом известных цифр второго множителя:

```
      237
×   *1**5
---------
     1185
     ***
    ***
   237
  ***
---------
  7***065
```

Цифра 6 в последней строчке получается при сложении числа 8 и последней цифры четвёртой строчки, значит, это цифра 8. Эта цифра получается при умножении 7 на предпоследнюю цифру второго множителя, значит, эта предпоследняя цифра равна 4. Теперь мы можем восстановить четвёртую строчку ребуса:

```
      237
×   *1*45
---------
     1185
     948
    ***
   237
  ***
---------
  7***065
```

Цифра 0 в последней строчке получается при прибавлении к последней цифре пятой строчки числа $1 + 4 + 1 = 6$, значит, это последняя цифра равна 4. Эта цифра получается при умножении 7 на третью цифру второго множителя, значит, эта третья цифра равна 2. Теперь мы можем восстановить пятую строчку ребуса и частично последнюю:

```
      237
×   *1245
---------
     1185
     948
    474
   237
  ***
---------
  7**5065
```

Осталось восстановить первую цифру второго множителя. Для того чтобы в последней строке первой цифрой получилась 7, подходит только 3. В результате второй множитель равен 31 245.
Ответ. $237 \cdot 31\,245 = 7\,405\,065$.

Задача 16

$\boxed{6\text{-}7}$ Расшифруйте ребус (разные буквы обозначают разные цифры) и найдите значение выражения в нижней строке:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Л} & \times & \text{О} & = & \text{М} \\
+ & & : & & + \\
\text{О} & \times & \text{Н} & = & \text{О} \\
\| & & \| & & \| \\
\text{С} & - & \text{О} & + & \text{В} \;=?
\end{array}$$

Идея. Перебрать варианты, при которых произведение двух цифр является цифрой.
Указание. Из второй строчки найти $\text{Н} = 1$.

Решение. Так как $\text{О} \neq 0$ (это видно из первой строчки), то из второй строчки находим $\text{Н} = 1$.

В первой строчке произведение двух цифр, отличных от нуля и единицы, равно цифре. Возможные варианты:

$$2 \cdot 3 = 6 \quad \text{и} \quad 2 \cdot 4 = 8.$$

Второй случай не подходит, так как тогда в последнем столбце будет $\text{М} + \text{О} > 9$, т. е. В не будет являться цифрой.

Остаётся случай, когда $\text{Л} = 2$, $\text{О} = 3$ или $\text{О} = 3$, $\text{Л} = 2$. Откуда

$$\begin{array}{ccccc}
2 & \times & 3 & = & 6 \\
+ & & : & & + \\
3 & \times & 1 & = & 3 \\
\| & & \| & & \| \\
5 & - & 3 & + & 9 = 11
\end{array}
\qquad \text{или} \qquad
\begin{array}{ccccc}
3 & \times & 2 & = & 6 \\
+ & & : & & + \\
2 & \times & 1 & = & 2 \\
\| & & \| & & \| \\
5 & - & 2 & + & 8 = 11,
\end{array}$$

т. е. ответ не зависит от варианта расшифровки ребуса.
Ответ. 11.

Задача 17

$\boxed{7}$ Найти делимое, делитель и частное в примере

```
******|***
****  |---
----  |***
  *** |
  *** |
  ---
  ****
  ****
  ----
     0
```

Достаточно привести один вариант ответа.

Идея. Перебирать значения делителя, начиная с наименьшего возможного значения.

Указание. Произведение первой цифры частного на делитель должно быть четырёхзначным числом. Произведение второй цифры частного на делитель должно быть трёхзначным числом. Произведение третьей цифры частного на делитель должно быть четырёхзначным числом.

Решение. Делитель является трёхзначным числом. Найдём его наименьшее возможное значение. Наименьшее значение первой цифры 1. Рассмотрим делитель вида $1{*}{*}$. Произведение первой цифры частного на $1{*}{*}$ должно быть четырёхзначным числом, что невозможно, даже если первая цифра частного равна 9, а делитель равен 111. Значит, наименьшее возможное значение делителя 112.

В этом случае произведение первой цифры частного на делитель будет четырёхзначным числом, только если первая цифра частного равна 9. С учётом того что произведение последней цифры частного на делитель тоже должно быть четырёхзначным числом, последняя цифра частного также равна 9. То есть частное имеет вид $9{*}9$.

Произведение второй цифры частного на число 112 является трёхзначным ненулевым числом. Здесь подойдёт первая же ненулевая цифра: 1.

Перемножив делитель и частное, получим делимое:

$$112 \cdot 919 = 102\,928,$$

а произведя деление в столбик, получим ответ.

Ответ.

$$\begin{array}{r|l}
102928 & 112 \\ \cline{2-2}
\underline{1008} & 919 \\
212 & \\
\underline{112} & \\
1008 & \\
\underline{1008} & \\
0 &
\end{array}$$

Задача 18

7 Заменяя знаки $*$ только цифрами 2, 4, 5, 7 и 9, восстановите запись деления в столбик:

$$\begin{array}{r|l}
{*}{*}{*} & {*}{*} \\ \cline{2-2}
\underline{{*}{*}} & {*}{*} \\
{*}{*} & \\
\underline{{*}{*}} & \\
0 &
\end{array}$$

Идея. Определить возможные значения первых цифр делителя и частного, далее действовать перебором с анализом.

Указание. Переписать пример в виде умножения и найти возможные значения первых цифр множителей с учётом того, что их произведение должно быть трёхзначным числом.

Указание. Произведение первой цифры частного на делитель должно быть двузначным числом. Произведение второй цифры частного на делитель должно быть двузначным числом.

Решение. Перепишем пример в виде

$$** \cdot ** = ***$$

и определим возможные значения первых цифр множителей.

Так как первая цифра первого множителя не меньше 2, а в произведении получается трёхзначное число, то первая цифра второго множителя меньше 5, т. е. либо 2, либо 4. Заметим, что если обе первые цифры равны 4, то в произведении будет уже четырёхзначное число. Следовательно,

$$2* \cdot 4* = *** \quad \text{или} \quad 2* \cdot 2* = ***.$$

Рассмотрим первый случай: $2* \cdot 4* = ***$.

Так как минимальное значение первого множителя 22, а произведение является трёхзначным числом, то вторая цифра второго множителя не превосходит 5. Но если она равна 5, то первый множитель может равняться только 22 и произведение будет оканчиваться нулём, что нам не подходит. Значит, вторая цифра второго множителя либо 2, либо 4. Если она равна 4, то первый множитель может равняться только 22 и произведение будет оканчиваться цифрой 8, что нам не подходит. Значит,

$$2* \cdot 42 = ***.$$

Так как произведение должно являться трёхзначным числом, то вторая цифра первого множителя может быть только двойкой, следовательно,

$$22 \cdot 42 = 924.$$

Теперь вернёмся к примеру с делением в столбик:

$$\begin{array}{r|l} 924 & 22 \\ \cline{2-2} \underline{88} & 42 \\ 44 & \\ \underline{44} & \\ 0 & \end{array}$$

При делении 924 в столбик на каждый из множителей в процессе деления появляется цифра 8, что нам не подходит. Значит, случай, когда один из множителей начинается с 2, а другой с 4, невозможен.

Рассмотрим второй случай: $2* \cdot 2* = ***$.

Запишем это в виде деления:

$$\begin{array}{r|l} *** & 2* \\ \cline{2-2} \underline{**} & 2* \\ ** & \\ \underline{**} & \\ 0 & \end{array}$$

Так как произведение второй цифры частного на делитель должно быть двузначным числом, то эта вторая цифра должна быть меньше 5, т. е. либо 4, либо 2. Если она равна 4, то произведение будет заканчиваться на недозволенную цифру при любых дозволенных значениях второй цифры делителя. Значит, вторая цифра делимого равна 2 и

$$\begin{array}{r|l} *** & 2* \\ \underline{**}\; & 22 \\ ** & \\ \underline{**} & \\ 0 & \end{array}$$

Теперь определим возможные значения второй цифры делителя. Произведение оканчивается на дозволенную цифру только при значениях 2 и 7. Значит, делитель может быть равен только 22 и 27. Но $22 \cdot 22 = 484$, что нам не подходит из-за цифры 8. Остаётся единственно возможный вариант: 27.

Ответ.
$$\begin{array}{r|l} 594 & 27 \\ \underline{54}\; & 22 \\ 54 & \\ \underline{54} & \\ 0 & \end{array}$$

12. Разные задачи

Задача 1

$\boxed{6}$ а) Найти четыре последовательных чётных числа, сумма которых равна 4052.

Идея. Выразить учетверённое первое число через сумму всех четырёх чисел.
Указание. Каждое следующее чётное число отличается от предыдущего на 2.

Решение. Второе чётное число больше первого на 2, третье — на 4, четвёртое — на 6. Значит, сумма четырёх последовательных чётных чисел больше учетверённого первого числа на $2+4+6 = 12$. Следовательно, первое число равно

$$(4052 - 12) : 4 = 4040 : 4 = 1010.$$

Исходя из этого, получаем ответ.
Ответ. 1010; 1012; 1014; 1016.

Задача 2

$\boxed{6}$ а) Увеличится или уменьшится неправильная дробь, если к её числителю и её знаменателю прибавить одно и то же натуральное число? Почему?

Идея. Сравнить полученную дробь с исходной с помощью формального неравенства.
Указание. Составить формальное неравенство и с помощью элементарных преобразований привести его к очевидному.
Указание. Учесть то, что у неправильной дроби числитель больше знаменателя.

Решение. Рассмотрим дробь $\frac{a}{b}$, где $a > b$. Прибавим к числителю и знаменателю натуральное число n и сравним полученную дробь с исходной дробью:

$$\frac{a+n}{b+n} \vee \frac{a}{b}$$
$$\frac{(a+n)\cdot b}{(b+n)\cdot b} \vee \frac{a\cdot(b+n)}{b\cdot(b+n)}$$
$$(a+n)\cdot b \vee a\cdot(b+n)$$
$$ab+nb \vee ab+an$$
$$nb \vee an$$
$$b \vee a$$

По условию задачи $b < a$, значит, знак $\vee$ является знаком $<$ и, следовательно, дробь уменьшится.
Ответ. Уменьшится.

Задача 3

6-7 а) К делимому прибавили 10, а делитель умножили на 10, частное, однако, не изменилось. Найти первоначальное делимое. Чему может быть равен делитель?

Идея. Принять за неизвестные величины делитель и делимое и составить соответствующее уравнение.
Указание. Учесть то, что на ноль делить нельзя.

Решение. Пусть $\frac{a}{b}$ — исходное выражение. Частное не изменилось после того, как к делимому прибавили 10, а делитель умножили на 10, значит,

$$\frac{a+10}{b\cdot 10}=\frac{a}{b} \iff \frac{a+10}{b\cdot 10}=\frac{a\cdot 10}{b\cdot 10} \iff a+10=10a \iff a=\frac{10}{9}.$$

Ответ. Делимое равно $\frac{10}{9}$, а делитель может быть любым, не равным 0.

Задача 4

6-7 а) Найти такое смешанное число, чтобы от деления его целой части на $\frac{7}{30}$ получилось в частном 150, а от деления его дроби на $\frac{7}{30}$ получилось в частном 2.

Идея. Выразить целую часть через числа $\frac{7}{30}$ и 150, а дробную часть числа — через числа $\frac{7}{30}$ и 2.

Решение. После деления целой части на $\frac{7}{30}$ в частном получилось 150, следовательно, целая часть числа равна

$$150 \cdot \frac{7}{30} = 35.$$

После деления дробной части на $\frac{7}{30}$ в частном получилось 2, значит, дробная часть числа равна

$$2 \cdot \frac{7}{30} = \frac{7}{15}.$$

Ответ. $35\frac{7}{15}$.

Задача 5

$\boxed{6\text{-}7}$ Быстро установить, что дроби $\frac{23}{99}$, $\frac{2323}{9999}$, $\frac{232\,323}{999\,999}$ равны между собой.

Идея. Сократить дроби.
Указание. Разложить числители и знаменатели дробей на множители.

Решение. Преобразуем дроби следующим образом:

$$\frac{2323}{9999} = \frac{23 \cdot 101}{99 \cdot 101} = \frac{23}{99}, \qquad \frac{232\,323}{999\,999} = \frac{23 \cdot 10\,101}{99 \cdot 10\,101} = \frac{23}{99}.$$

Задача 6

$\boxed{7}$ Найти все значения x и y, для которых $x \cdot y + 1 = x + y$.

Идея. Перенести всё в одну сторону и разложить на множители.
Указание. Сгруппировать вместе два слагаемых, содержащих x, и два слагаемых, не содержащих x.

Решение. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} &x \cdot y + 1 = x + y \iff \\ &\iff x \cdot y - x + 1 - y = 0 \iff \\ &\iff x(y-1) - (y-1) = 0 \iff \\ &\iff (y-1)(x-1) = 0. \end{aligned}$$

Равенство выполняется, если хотя бы один из множителей равен нулю, т. е. либо при $x = 1$, либо при $y = 1$.
Ответ. $x = 1$, y — любое число; либо $y = 1$, x — любое число.

Задача 7

$\boxed{6\text{-}7}$ Выяснить быстро, что больше: A или B?

$$A = 4 + \frac{5}{8} + \frac{6}{8^2} + \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}; \qquad B = 4 + \frac{5}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{7}{8^3} + \frac{6}{8^4}.$$

Идея. Составить формальное неравенство и с помощью элементарных преобразований привести его к очевидному.

Решение. Сравним числа A и B:

$$4 + \frac{5}{8} + \frac{6}{8^2} + \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4} \vee 4 + \frac{5}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{7}{8^3} + \frac{6}{8^4}$$

$$\frac{6}{8^2} + \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4} \vee \frac{5}{8^2} + \frac{7}{8^3} + \frac{6}{8^4}$$

$$\frac{6}{8^2} - \frac{5}{8^2} + \frac{7}{8^4} - \frac{6}{8^4} \vee \frac{7}{8^3} - \frac{3}{8^3}$$

$$\frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^4} \vee \frac{4}{8^3}$$

$$\frac{8}{8^3} + \frac{1}{8^4} \vee \frac{4}{8^3}.$$

Так как первое число больше второго, то $A > B$.
Ответ. $A > B$.

Задача 8

$\boxed{6\text{-}7}$ Если x может принимать любые числовые значения — отрицательные, нуль, положительные, то при каких x выполняется неравенство $x^2 > x^3$?

Идея. Сравнить разность этих выражений с нулём.
Указание. Перенести всё в одну сторону и разложить на множители.
Указание. Определить знаки множителей.

Решение. Преобразуем исходное неравенство следующим образом:

$$x^2 > x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x^3 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2(1 - x) > 0.$$

Заметим, что $x^2 \geqslant 0$, но равенство нулю нас не устраивает. Следовательно, мы будем рассматривать только $x \neq 0$. В этом случае первый множитель положителен, а, значит, и

$$1 - x > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 1.$$

С учётом того что $x \neq 0$, получим ответ.
Ответ. При $x < 0$ и при $0 < x < 1$.

Задача 9

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Какое из выражений больше и на сколько:

$$16\cdot 0{,}25^{3n-2}:\left(-0{,}5\cdot 0{,}25^{3n-4}\right)\quad\text{или}\quad 81\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{12-4n}\cdot 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{4n-7}?$$

Каким натуральным числом может быть здесь n?

Идея. Упростить выражения и найти их разность.
Указание. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются, при умножении — складываются.

Решение. Преобразуем первое выражение следующим образом:

$$16\cdot 0{,}25^{3n-2}:\left(-0{,}5\cdot 0{,}25^{3n-4}\right)=\frac{16\cdot 0{,}25^{3n-2}}{-\frac{1}{2}\cdot 0{,}25^{3n-4}}=$$

$$=-32\cdot 0{,}25^{(3n-2)-(3n-4)}=-32\cdot 0{,}25^{2}=-32\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=-2.$$

Теперь преобразуем второе выражение. Заметим, что минус в последнем множителе можно вынести вперёд, так как нечётная степень отрицательного числа будет отрицательным числом:

$$81\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{12-4n}\cdot 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{4n-7}=-81\cdot 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{12-4n}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4n-7}=$$

$$=-81\cdot 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{(12-4n)+(4n-7)}=-3^{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5}=-2^{5}=-32.$$

Следовательно, первое выражение больше второго на $-2-(-32)=$ $=30$.

Ответ. Первое больше второго на 30; n может быть любым натуральным числом.

Задача 10

$\boxed{6\text{-}7}$ а) В кошельке десять двухкопеечных и трёхкопеечных монет. Сколько тех и других монет в отдельности, если всего было 26 коп.?

Идея. Обозначить количество двухкопеечных монет через x и составить уравнение с этой неизвестной.
Указание. Выразить количество трёхкопеечных монет через x и приравнять общую сумму числу 26.

Решение. Пусть было x двухкопеечных монет, тогда трёхкопеечных монет было $10-x$. Так как всего было 26 коп., то

$$x\cdot 2+(10-x)\cdot 3=26\iff 2x+30-3x=26\iff x=4.$$

Получается, что двухкопеечных монет было 4 штуки, а трёхкопеечных монет было $10-4=6$ штук.

Ответ. 4 двухкопеечных и 6 трёхкопеечных.

Задача 11

$\boxed{6}$ а) В трёх районах города 12 000 жителей. Сколько жителей в каждом районе, если известно, что $\frac{2}{3}$ числа жителей первого района равны 0,5 числа жителей второго района и $\frac{2}{5}$ числа жителей третьего района?

Идея. Принять за неизвестные величины количества жителей районов и составить систему с этими неизвестными.
Указание. Систему решать подстановкой.

Решение. Пусть в районах по x, y и z жителей, тогда согласно условию задачи

$$\begin{cases} x+y+z=12\,000, \\ \frac{2}{3}\,x=0{,}5y, \\ \frac{2}{3}x=\frac{2}{5}\,z. \end{cases}$$

Эту систему удобнее всего решать подстановкой. Выразим y и z через x из второго и третьего уравнений и подставим в первое, получим:

$$x+\frac{4}{3}\,x+\frac{5}{3}\,x=12\,000 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x=12\,000 \quad \Longleftrightarrow \quad x=3\,000.$$

Следовательно, $y=4\,000$ и $z=5\,000$.
Ответ. 3 000, 4 000 и 5 000.

Задача 12

$\boxed{6}$ а) Если сестра отдаст брату 1,6 руб., то у обоих станет денег поровну. Если же брат даст сестре 0,5 руб., то у сестры станет денег в 2,5 раза больше, чем у брата. Сколько денег у брата и сколько у сестры?

Идея. Обозначить за неизвестные величины количество рублей у брата и у сестры и составить уравнения с этими неизвестными.
Указание. Систему решать подстановкой.

Решение. Пусть у брата x рублей, а у сестры y рублей. Если сестра отдаст брату 1,6 руб., то у обоих станет денег поровну, следовательно,

$$y-1{,}6=x+1{,}6.$$

Если брат даст сестре 0,5 руб., то у сестры станет денег в 2,5 раза больше, чем у брата, значит,

$$(x-0{,}5)\cdot 2{,}5=y+0{,}5.$$

Выразим y из первого уравнения и подставим во второе:

$$\begin{aligned}&(x-0{,}5)\cdot 2{,}5=(x+3{,}2)+0{,}5 \iff\\ \iff\quad & 2{,}5x-1{,}25=x+3{,}7 \iff\\ \iff\quad & 1{,}5x=4{,}95 \iff\\ \iff\quad & x=3{,}3.\end{aligned}$$

Теперь найдём вторую неизвестную: $y=3{,}3+3{,}2=6{,}5$.
Ответ. 3,3 руб. и 6,5 руб.

Задача 13

6-7 а) Брат и сестра измерили шагами длину и ширину огорода прямоугольной формы. Когда брат шёл по длинной стороне, а сестра — по короткой стороне прямоугольника, они сделали вместе 270 шагов. Потом брат шёл по короткой стороне, а сестра — по длинной стороне огорода, и тогда они сделали вместе 290 шагов. Длина шага брата равна 0,8 м, а длина шага сестры равна 0,6 м. Найти площадь огорода.

Идея. Принять за неизвестные величины длину и ширину огорода и составить уравнения с этими неизвестными.
Указание. Количество шагов равно отношению пройденного расстояния к длине шага.

Решение. Пусть длина огорода составляет a м, а ширина b м, тогда согласно условию задачи

$$\begin{cases}\dfrac{a}{0{,}8}+\dfrac{b}{0{,}6}=270,\\ \dfrac{a}{0{,}6}+\dfrac{b}{0{,}8}=290.\end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что

$$a=270\cdot 0{,}8-\frac{b}{0{,}6}\cdot 0{,}8=216-\frac{4b}{3}.$$

Подставив это выражение во второе уравнение, получим уравнение для b:

$$\begin{aligned}&\frac{216-\frac{4b}{3}}{0{,}6}+\frac{b}{0{,}8}=290 \iff\\ \iff\quad & 360-\frac{20}{9}b+\frac{5}{4}b=290 \iff\\ \iff\quad & 70=b\left(\frac{20}{9}-\frac{5}{4}\right) \iff\\ \iff\quad & 70=b\cdot\frac{35}{36} \iff\\ \iff\quad & b=72.\end{aligned}$$

Теперь найдём a:
$$a = 216 - \frac{4b}{3} = 216 - \frac{4 \cdot 72}{3} = 216 - 4 \cdot 24 = 216 - 96 = 120.$$
Площадь огорода равна $a \cdot b = 120 \cdot 72 = 8640$ м^2.
Ответ. 8640 м^2.

Задача 14

$\boxed{6}$ а) Две бригады получили задание убрать картофель с двух одинаковых по площади участков. Первая бригада убирала ежедневно по 3,2 га, но через несколько дней ей ещё оставалось убрать картофель с 4 га. Вторая бригада работала на 2 дня больше первой, но ей всё же осталось ещё убрать 0,4 га, так как она убирала только по 2,8 га в день. Чему равна площадь участка, который должна убрать каждая бригада?

Идея. Принять за неизвестные величины площадь участка и количество дней работы первой бригады и составить уравнения с этими неизвестными.
Указание. Полученную систему решать подстановкой.

Решение. Пусть первая бригада работала x дней, а площадь участка равна S га, тогда согласно условию задачи
$$\begin{cases} 3{,}2x + 4 = S, \\ 2{,}8(x+2) + 0{,}4 = S \end{cases} \implies \quad 3{,}2x + 4 = 2{,}8(x+2) + 0{,}4 \quad \iff \quad x = 5,$$
следовательно, $S = 3{,}2x + 4 = 20$ га.
Ответ. 20 га.

Задача 15

$\boxed{6}$ Пешеход и велосипедист отправляются одновременно и по одной дороге из города A в город B, лежащий в 70 км от A. Пешеход идёт со скоростью 3,75 км/ч, велосипедист едет со скоростью 15 км/ч. Через сколько времени между ними будет расстояние, равное 30 км, и какое расстояние до B останется тогда проехать велосипедисту и пройти пешеходу?

Идея. При движении в одном направлении время движения равно отношению расстояния к разности скоростей.

Решение. Пешеход идёт со скоростью 3,75 км/ч, а велосипедист едет со скоростью 15 км/ч в том же направлении, следовательно, расстояние между ними станет равным 30 км через
$$30 : (15 - 3{,}75) = 30 : \frac{45}{4} = 30 \cdot \frac{4}{45} = \frac{8}{3} \text{ ч}.$$
При этом до пункта B велосипедисту останется проехать
$$70 - 15 \cdot \frac{8}{3} = 70 - 40 = 30 \text{ км},$$

а пешеходу останется пройти

$$70 - 3{,}75 \cdot \frac{8}{3} = 70 - 10 = 60 \text{ км}.$$

Ответ. 2 ч 40 мин; 30 км и 60 км.

Задача 16

$\boxed{6}$ Чтобы доставить донесение за 2 ч 40 мин из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 70,5 км, нарочный ехал сначала на велосипеде со скоростью 12,75 км/ч, а затем на мотоцикле со скоростью 67,5 км/ч. Сколько времени ехал нарочный на велосипеде и сколько — на мотоцикле?

Идея. Принять время, которое нарочный ехал на велосипеде, за неизвестную величину и составить соответствующее уравнение.
Указание. Приравнять общее расстояние сумме расстояний, пройденных на велосипеде и на мотоцикле.

Решение. Пусть на велосипеде нарочный ехал x ч, тогда на мотоцикле он ехал $(2\frac{2}{3} - x)$ ч. Получается, что на велосипеде он проехал $12{,}75x$ км, а на мотоцикле $67{,}5(2\frac{2}{3} - x)$ км. Так как расстояние между A и B равно 70,5 км, то

$$\begin{aligned} &12{,}75x + 67{,}5\left(2\frac{2}{3} - x\right) = 70{,}5 \iff \\ &\iff 12{,}75x + 180 - 67{,}5x = 70{,}5 \iff \\ &\iff 109{,}5 = 54{,}75x \iff \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

То есть на велосипеде нарочный ехал 2 ч, а на мотоцикле 40 мин.
Ответ. 2 ч на велосипеде и 40 мин на мотоцикле.

Задача 17

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Туристический отряд должен прибыть из города A в город B через 8 дней. Спустя два дня после его выхода из города A в город B вышел второй отряд, который должен прибыть в B через 5 дней. Через сколько дней второй отряд догонит первый?

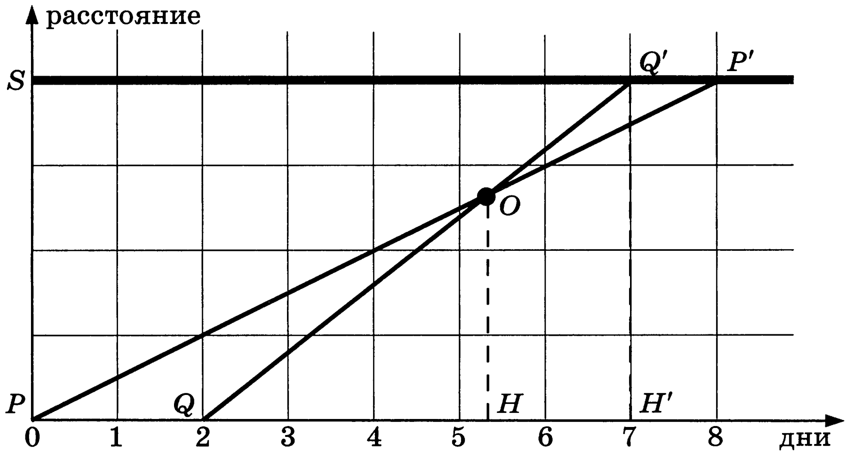
Идея. Решать задачу графически.
Указание. Построить графики движения отрядов в координатной плоскости, где на оси абсцисс отмечается время, а на оси ординат — расстояние. Найти точку их пересечения.

Решение. Рассмотрим координатную плоскость, где на оси абсцисс отмечается время в днях, а на оси ординат — расстояние от пункта A.

Первый отряд доходит от A до B за 8 дней. Так как отряд движется с постоянной скоростью, то графиком является отрезок PP'.

Второй отряд вышел спустя 2 дня и прибудет в B через 5 дней, т. е. через 7 дней после выхода первого отряда. Графиком его движения является отрезок QQ'.

Нам надо найти длину отрезка QH, где H — абсцисса точки O пересечения графиков.



Заметим, что треугольники PQO и $P'Q'O$ подобны с коэффициентом 2, поскольку $PQ = 2P'Q'$, значит, и $QO = 2Q'O$. Из того что отрезок QO в два раза больше отрезка $Q'O$, следует, что и его проекция на ось абсцисс в два раза больше, т. е. $QH = 2HH'$. Получаем, что

$$QH = \frac{2}{3}QH' = \frac{2}{3}\cdot 5 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

Ответ. Через $3\frac{1}{3}$ дня.

Задача 18

$\boxed{7}$ Из Цветочного города в Солнечный ведёт шоссе длиной 12 км. На втором километре этого шоссе расположен железнодорожный переезд, который три минуты закрыт и три минуты открыт и т. д., а на четвёртом и на шестом километрах расположены светофоры, которые две минуты горят красным светом и три минуты — зелёным и т. д. Незнайка выезжает из Цветочного города в Солнечный в тот момент, когда переезд только что закрылся, а оба светофора только что переключились на красный. За какое наименьшее время (в минутах) он сможет доехать до Солнечного города, не нарушая правил и двигаясь с постоянной скоростью?

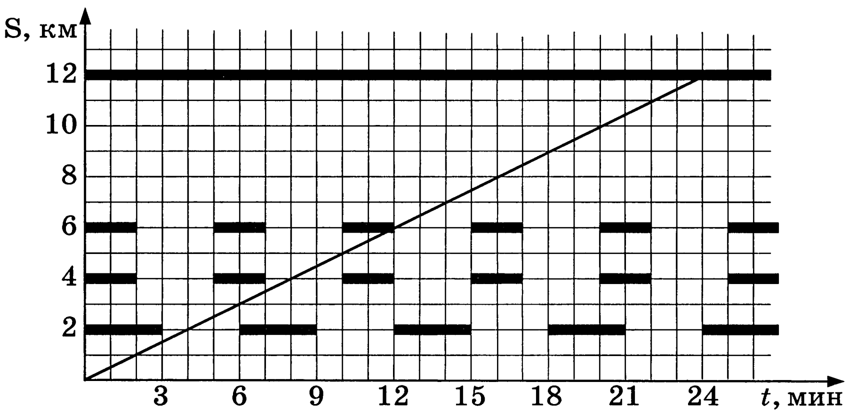
Идея. Решать задачу графически.

Указание. Построить график движения Незнайки в координатной плоскости, где на оси абсцисс отмечается время, а на оси ординат — расстояние. Отметить запрещённые участки соответствующими отрезками и провести прямую, не пересекающую эти отрезки.

Решение. Рассмотрим координатную плоскость, где на оси абсцисс отмечается время в минутах, а на оси ординат — расстояние в километрах.

На втором километре этого шоссе расположен железнодорожный переезд, который три минуты закрыт и три минуты открыт и т. д. Это значит, что график движения Незнайки не должен пересекать горизонтальные отрезки длиной 3 с ординатой 2, отстоящие друг от друга на 3 клетки.

На четвёртом и на шестом километрах расположены светофоры, которые две минуты горят красным светом и три минуты — зелёным и т. д. Рисуем горизонтальные отрезки длиной 2 с ординатами 4 и 6, отстоящие друг от друга на 3 клетки.



Так как Незнайка движется с постоянной скоростью, то графиком его движения будет отрезок, соединяющий начало координат с некоторой точкой прямой $S = 12$. Наименьшее время будет получаться в случае, предложенном на рисунке. Это 24 мин.

Ответ. 24 мин.

ОТВЕТЫ

1.

1. а) 301 000. б) 36 400. в) 240.
3. а) $(-a)^2$. б) $-(-a)^3$.
4. а) 0. б) 0.
5. б) 2 больше девятой части утроенной суммы чисел a и b на $2\frac{1}{3}$.
6. а) -10. б) 6 249 975 при $a=-10$; $b=-5$.
7. 1) а) $-\frac{1}{2}$; б) при $a=-\frac{1}{3}$ выражение теряет смысл, так как деление на нуль невозможно. 2) а) $\frac{1}{4}$; б) при $a=-2$ выражение теряет смысл, так как деление на нуль невозможно. 3) а) -18 при $x=-10$; б) при $x=0{,}5$ выражение теряет смысл, так как деление на нуль невозможно.
8. $\frac{a^4+b^4}{2} > \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$ во всех трёх случаях.
10. 12 111.
11. а) Сумма получилась больше истинного результата на 5263. Истинное значение суммы равно 23 712. б) 74 044.
12. 0.
13. а) Правое число больше на $\underbrace{444\ldots44}_{19\text{ цифр}}$. б) Первое число больше.
14. 3.
15. $a=b+1$.
16. а) $(3a^5x^4-2b^2y^5)(3a^5x^4+2b^2y^5)\cdot(3^2a^{10}x^8+2^2b^4y^{10})$.
17. а) -3. б) 0,5. в) 1.
18. а) 10 590 580 при $x=-10$ и $y=23$. б) $-11{,}1$. в) При $a=-18$, $x=-11$ второе больше на 532,875.
19. Выражение равно: а) x^4; б) 125.
20. а) 17 кг. б) Все деньги должны достаться Нуф-Нуфу.
21. а) 13 рублей и 12 рублей. б)★ 29.
22. а) 5 щенят и 12 утят. б) 12 поросят и 18 гусей.
23. а) 3. б) На 9-й.
24. а) 32 года. б) 8.
25. а) 10 дм. б) 13. в) В 5 раз.
26. 40 см.
27. $|АБ|=10$, $|БВ|=5$, $|ВГ|=15$, $|ГД|=20$, $|ДМ|=10$, $|АМ|=60$.
28. а) 4 кг и 5 кг. б) 204 120 кг.

29. 90 фиников.
30. а) 1-е место — 1, 2-е место — 2, 3-е место — 2. б) Нет.
31. а) Нет. б) Нет.
34. а) $\frac{1}{25}$. б) $\frac{4}{5}$. в) 3.
35. б) Нет.
36. 214 и 8.
37. а) 5. б) 2. в) 0.
38. а) 12. б) 10. в) 2. г) 0.
39. а) 1. б) 1. в) 1.
40. а) $\frac{3}{14}$. б) 0.
41. а) 20. б) 404.
42. 46,02.
43. а) 592. б) 748. в) 449. г) 1990.
44. а) 16. б) $-\frac{231}{272}$. в) $-\frac{243}{325}$.
45. а) 8. б) 57. в) 330. г) 252.
46. а) $\frac{1}{20}$. б) $\frac{1}{6}$. в) $\frac{112}{305}$. г)★ $3\frac{29}{72}$.

2.

1. а) Нет. Высота вышки будет 12 м 96 см. б) Да.
2. а) 31 км 250 м. б) 8 км.
3. 84 кв. см.
4. 1536 куб. см; 896 кв. см.
5. 72 см.
6. 1728.
7. а) Около 4,5 т. б) 9,4 куб. м.
8. 181,25 руб.
9. Около 0,55.
10. 2400 куб. м; около 667 ч.
11. 26 400.
12. В пятницу в 16 часов.
13. Да, если это было сказано 1 января, а день рождения у Пети 31 декабря.
14. 5.
15. а) Четверг. б) Воскресенье.
16. Четверг. Не мог.
17. Нет.
18. 132.
19. Больше такого времени, когда число секунд превосходит число часов.
20. а) 72 с. б) 105 с.
21. а) 82,5°. б) 1°.
22. а) 13 ч 5 мин $27\frac{3}{11}$ с. б) 12 ч 16 мин $21\frac{9}{11}$ с.
23. а) 23 раза; б) 22 раза; в) 44 раза.
24. Два раза.

3.

2. 0.
3. В 4 раза.
4. 84 и 7.
5. Через 15 мин.
6. 6 кг.
7. 120 и 10.
8. 42 ученика.
9. Лодка стоит 600 рублей, товарищи внесли 200 руб., 150 руб., 120 руб., 130 руб.
10. Сложим кусок пополам и ещё раз пополам, получим кусок длиной $\frac{1}{6}$ метра, который и надо отрезать, чтобы остаток равнялся $\frac{1}{2}$ метра.
11. 216 000.
12. 28.
13. 4 яблока разрезать на 3 части каждое, 3 яблока разрезать на 4 части каждое и выдать всем по $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ яблока.
14. а) $\frac{2}{3}$. б) 168 км.
15. 5 мужчин, 1 женщина и 6 детей.
16. 60, 40 и 20.
17. Похудел.
18. Нельзя.
19. 14 и 21.
20. $\frac{1}{3}$.
21. 150 м красного, 225 м синего и 300 м чёрного.
22. а) 30 и 150. б) 450 и 45.
23. а) 3,08 и 16,94. б) 0,05 и 0,2. в) $\frac{21}{23}$ и $\frac{441}{46}$.
24. а) 1,5 и 0,9. б) $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{56}$.
25. 12 или $\frac{1}{12}$.
26. 24 и 32.
27. а) 18,6 и 17,9. б) $50\frac{3}{14}$ и $5\frac{5}{7}$.
28. а) 96 и 80. б) 72 и 60. в) 88 и 84.
29. а) 31,5; 63 и 42. б) 6; 4,8 и 7,2.
30. а) 0,252; 2,52 и 252. б) 35,12; 351,2 и 3512.
31. 20,5 и 17,25.
32. а) $\frac{1449}{2691}$. б) $\frac{2012}{5533}$.
33. а) 35 367. б) 57 843. в) 3 и 6.

4.

1. 45 руб.
2. 420 га.
3. Дешевле обойдётся совместная работа землекопов с 2 сторон.

4. 2 мин.
5. 1,5 ч.
6. За $\frac{6}{11}$ месяца.
7. 4,8 ч.
8. 42 и 48.
9. 1,08 ч.
10. 18 мин и 36 мин.
11. 12 000 куб. м.
12. 22 мин.
13. 12 мин был открыт кран с горячей водой и 10 мин — с холодной.
14. 450 деталей.
15. 6 дней; 66 руб., 74,25 руб. и 66 руб. соответственно.
16. $11\frac{2}{3}$ дня.
17. 25 ч.

5.

1. $\frac{2S}{v_1 + v_2}$ ч.
2. а) 9 ч 7 мин и 9 ч 21 мин. б) 9 ч 15 мин и 9 ч 39 мин.
3. а) 36 км. б) 500 м. в)* 70 км.
4. а) 7,5 км/ч и 10 км/ч. б) 11,25 км/ч и 12 км/ч. в) 48 км/ч и 56 км/ч.
5. 36,8 км/ч и 48,6 км/ч.
6.
7. а) 72 км/ч; 300 м. б) 225 м; 54 км/ч.
8. а) 50 км/ч. б)* 43,75 м/с и 35 м/с.
9. а) 8 ч 44 мин. б) 480 км. в) 320 км. г) 40,5 км/ч и 35,1 км/ч.
10. 3,5 и 12,5 км/ч. б) 25 и 31 км/ч; $166\frac{2}{3}$ км от первого порта. в) На 1 ч 45 мин. г) 8,4 км от А.
11. 120 м.
12. а) 52,3 км/ч. б) 18,5 км/ч. в) 37,5 км/ч. г) Около 36 км/ч.
13. а) 1344 км. б) 2 ч 40 мин; 30 км и 60 км. в) 10 ч. г) 432 км.
14. а) 36 км. б) 2 ч на велосипеде и 40 мин на мотоцикле. в) 675 км.
15. а) 350 км; 8 ч. б) 500 км; в 8 ч вечера. в) 17,5 км.
16. а) 240 км. б) 96 и 60 км/ч. в) 46,8 км/ч.
17. а) 80 км. б) 12 км. в) 182 км. г) 400 км и 40 км/ч.
18. а) 240 км. б) В 11 ч 50 мин.
19. 52 км/ч.
20. а) 2 ч 40 мин. б) 4,5 ч.
21. а) 400 м/мин и 375 м/мин. б) 54 км/ч.
22. а) 3 ч. б) Примерно 7 ч.
23. а) 240 км. б) 75,6 км.
24. а) 35 сут. б) 18 ч. в) 192 ч.
25. а) 70 км. б) 43,2 км.
26. В гости.
27. 9 мин.

28. Если скорость ребят не менее чем вдвое превосходит скорость эскалатора, то Петя и Ваня к шапке прибегут одновременно, иначе первым прибежит Ваня.
29. 2 ч 30 мин.
30. Первый.
31. 19,2 и 25,6 км/ч.
32. а) Через 9 мин. б) 2 мин. в) Да.
33. а) В 5 ч 52 мин утра. б) Через 12 ч. в) 493,2 км. г) 45 км.
34. 30 км/ч.
35. 3 ч 6 мин 40 с.
36. В 3 часа дня.

6.

1. 495 руб.
2. а) После снижения цены картофель стал на 4% дешевле. б) В первом киоске.
3. 8000 изделий.
4. На 25%.
5. Увеличилось на 1,5%.
6. Первый рабочий расходовал резцы на 20% экономнее, чем второй.
7. а) Медленнее идёт тот турист, который делает шаги короче и чаще. б) Высокий.
8. а) На первой меньше на 5,5%. б) На 20%. в) На 25%. г) На 150%.
9. а) 60%. б) 25%. в) На 50%. г) Примерно на 41%.
10. а) На 44%. б) На 32%. в) Уменьшилась на 1%.
11. а) 18 см. б) 9,6 см.
12. а) На 44%. б) На 33,1%.
13. а) Примерно 12,1%. б) Примерно на 90,1%. в) Примерно на 456%.
14. а) 53%. б) $470\frac{10}{17}$ кг. в) 6,7%. г) 1550 г.
15. а) 1400 г. б) 60 кг. в) 500 г. г) 125 г.
16. а) Примерно на 2,3 ц. б) Примерно на 3,9 т.
17. а) 88%. б) 25,5%. в) 20%.
18. 12 кг и 0,4 кг.
19. 500 рабочих; в 3,5 раза.
20. 1200 кг.
21. а) На 25 коп. б) 18 коп.
22. а) 48 руб. б) 200 руб. было у старшего брата и 180 руб. было у младшего.
23. 32 года брату и 24 года сестре.
24. а) Примерно 29,4%. б) Примерно 85,7%.
25. а) 110 га, 96 га и 66 га. б) На 43%.

7.

1. а) 72. б) 28.
2. 19.
3. 160.
4. а) 40. б) 10.
5. а) 11,3. б) 6,25.
6. 24.
7. 22 и 8.
8. 8 коп.
9. 27.
10. а) 22. б) 74. в) 63.
11. а) 270. б) 160 кг. в) 150 км.
13. 12.

8.

1. а) 4. б) 3 или 4.
2. а) $\pm1{,}6$. б) ±4. в) $\pm0{,}7$.
3. а) -1. б) -6; 2,5; 40.
4. а) 20. б) 22. в) $-2\frac{1}{3}$.
5. 3; 4; 5; 6; 7.
6. а) -4; 10. б) 1; 7. в) $-2{,}3$; 16,3. г) Нет решений.
7. а) $1{,}5 < x < 5{,}5$; б) 8; в) $x < -1$ и $x > 9$; г) $x > 1{,}7$ и $x < -1{,}7$; д) $-7 < x < -3$ и $3 < x < 7$; е) нет решений; ж) x — любое число.
8. а) 0. б) Нет решений. в) -2. г) -2 и 2.
9. а) $-4{,}5$ или 1,5. б) Нет решений. в) -5 и $-\frac{1}{3}$. г) $-4 \leqslant x \leqslant 1$.
10. $x = 9a - 8$.
11. а) -2. б) $-2{,}6$. в) 5.
12. 30.
13. а) 0,2. б) $-0{,}2$.
14. а) 498 425. б) 1 000 000. в) 1990. г) 2,4.
15. а) 76. б) $9\frac{3}{16}$.
16. а) $145\frac{5}{6}$. б) 1. в) 4. г) $1\frac{19}{24}$.
17. а) 0,615. б) 67,23. в) 0. г) 0,0011. д) $2\frac{10}{169}$.
18. а) 1,01. б) 15,95.
19. а) $c = -1$; ни при каких c; $c = 45$. б) $c = 0$. в) $c > 0$.
20. а) $x = 2$, $y = 4$. б) $x = 1$, $y = 3$. в) $x = 3$, $y = 2$.

9.

1. 10 раз.
2. а) 37. б) 210. в) 40,4. г) 20,2.
3. а) 190 км, 320 км и 80 км. б) 205 км, 225 км и 45 км. в) 80 и 75 кг. г) 80 и 60 кг.
4. а) 49. б) 600. в) 50 г. г) 38 руб. д) 176. е) 1500 кг. ж) 20. з) 216. и) Через 3 ч. к) Через 10 ч.

5. а) 60 км/ч и 960 км. б) 10 км.
6. 4 брата и 3 сестры.
7. 160 г.
8. а) 96; 120; 168. б) 0,28125. в) $\frac{18}{35}$.
9. а) 42 и 14. б) 14 и 23.
10. а) 21 м. б) 20 кв. см.
11. а) 500. б) 702. в) 2022. г) 106 страниц; 15 раз.
12. 10 кг и 30 кг.
13. а) 23 и 20,25 кг. б) 28,5 т и 31,5 т. в) 280 и 350 кг. г) 60 и 75 коп. д) 15 и 28 коп. е) 15,925 и 8,325 га. ж) 8,625 и 3,375 л. з) 40 и 100.
14. а) 1941 и 470. б) 11. в) 23. г) 408 и 58. д) 2145 и 13.
15. а) 24 коп., 6 коп. и 15 коп. б) 32 га, 36 га и 48 га. в) 0,8 руб.; 1,2 руб.; 0,6 руб.
16. а) 50 г весит каждый сосуд, 150 г воды в сосуде A, 200 г воды в сосуде B. б) 9 руб. 60 коп.
17. 29 коп.
18. В $\frac{7}{5}$ раза.
19. а) 75 га. б) 78. в) 720 кг.
20. 15 ч 5 мин; 127,5 км.
21. Иванова с Ивановским.
22. 7 руб.; портфель дороже.
23. Через 9375 км пути.

10.

1. а) 18. б) 36. в) 45.
2. а) 11. б) 21. в) 20.
3. 8942.
4. $\frac{\mathrm{VI}}{\mathrm{IX}}$.
5. $\frac{14}{15}$.
6. а) $(2 : 3) : ((4 : 5) : 6) = 5$. б) $(7 - 6) - (5 - 4) - (3 - 2 - 1) = 0$. в) $1 \cdot (2 + 3) \cdot 4 \cdot 5 = 100$. г) Например, так: $0 = 2 + 2 - 2 - 2$, $1 = (2 + 2) : (2 + 2)$, $2 = 2 : 2 + 2 : 2$, $3 = (2 + 2 + 2) : 2$, $4 = 2 + 2 + 2 - 2$, $5 = 2 \cdot 2 + 2 : 2$, $6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2$, $8 = 2 + 2 + 2 + 2$, $9 = 22 : 2 - 2$, $10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2$.
7. а) $270 + (120 + 390) : 3 \cdot 5 = 1120$. б) $(7 \cdot 9 + 12) : 3 - 2 = 23$; $(7 \cdot 9 + 12) : (3 - 2) = 75$. в) $62 + 55 - 17$ и $(3 + 22) \cdot (3 - 2) \cdot 4$.
8. а) $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9$; $1 : (2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9)$. б) $4 \cdot 12 + 18 : (6 + 3) = 50$, $(4 \cdot 12 + 18) : (6 + 3) = \frac{22}{3}$, $4 \cdot (12 + 18 : 6 + 3) = 72$.
9. Нужно зачеркнуть 15 чисел 1,1 и 7 чисел 1,11.
10. 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 10. б) Например, 998 единиц, двойка и число 1000.
11. 987 654 312.
12. Да, например, $n = 111\,111\,111$.

13. а) $1 \cdot (9 - 9) \cdot 9 = 0$; б) $19 - 9 - 9 = 1$; в) $1 + (9 + 9) : 9 = 3$; г) $1 - 9 : 9 + 9 = 9$; д) $1 + 9 - 9 + 9 = 10$.
14. а) $100 = 111 - 11$; б) $100 = 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$; в) $100 = 33 \cdot 3 + 3 : 3$.
15. $(3\,333\,333 - 333\,333) : 3$. Нет.
16. а) $2222 - 222 - 2 - 2 : 2$. б) $3 \cdot 333 + 3 \cdot 333 - 3 : 3$. в) $(1111 - 111) \cdot (1 + 1)$. г) $(9 : 9 + 999) \cdot (9 + 9) : 9$. д) $(9999 : 9 - 999 : 9) \cdot ((9 + 9) : 9)$.
17. а) $888+88+8+8+8 = 1000$. б) $555+55+55+55+55+55+55+55+55+5$. в) $16 = 55 : 5 + 5$. г) $9 + 99 : 99$, $9 + 99^{9-9}$, $99 : 9 - 9 : 9$, $9\frac{9}{9} \cdot \frac{9}{9}$, $9 + \frac{9}{9} - 9 + 9$.
18. а) $9 = 0 \cdot 12\,345\,678 + 9$, или $9 = 9 + (8 + 1) - (7 + 2) + (6 + 3) - (5 + 4) + 0$, или $9 = 97\,524 : 10\,836$. б) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9$. в) $1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$; $12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$; $123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100$; $123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100$; $123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100$; $123 - 45 - 67 + 89 = 100$. г) $99 + 99 : 99$.
19. Может.
20. Консультировать их в следующем порядке: Боря, Аня, Света.
21. 63.
22. 1001 билет.
23. Например, первую пару дней дежурит первая шестёрка богатырей; вторую — вторая, третью — третья, четвёртую пару дней — четвёртая шестёрка богатырей. Девятый день дежурят 6 богатырей из оставшихся, десятый день — трое из них же и трое ещё не дежуривших, одиннадцатый день — трое, дежуривших в 9-й день, и трое, дежуривших в 10-й день.

11.

1. а) $59{,}27 + 44{,}45 + 78{,}43 = 182{,}15$. б) $4578 + 5631 = 10\,209$.
2. а) $395{,}670 + 201{,}219 = 596{,}889$; б) $123{,}475 + 348{,}274 + 259{,}748 = 731{,}497$.
3. $977{,}6 : 3{,}25 = 300{,}8$.
4. а) $6 + 99 + 6 = 111$. б) $111 - 11 - 1 = 99$. в) $1991 + 1 + 9 = 2001$.
5. $333 \cdot (3 + 3) = 1998$.
6. $2222 - 999 + 11 - 0 = 1234$.
7. а) $3930 + 3980 = 7910$. б) $8126 + 8126 = 16\,252$.
8. 0.
9. Е = 1, В = 2, А = 3, Б = 9, И = 4, Г = 8.
10. а)
$$\begin{array}{r} \times\; 63 \\ 11 \\ \hline 63 \\ 63 \\ \hline 693 \end{array}$$
б)
$$\begin{array}{r} \times\; 785 \\ 121 \\ \hline 785 \\ 1570 \\ 785 \\ \hline 94985 \end{array}$$
в)
$$\begin{array}{r} \times\; 88 \\ 111 \\ \hline 88 \\ 88 \\ 88 \\ \hline 9768 \end{array}$$
11.
$$\begin{array}{r} +\; 321 \\ 11 \\ \hline 332 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\; 321 \\ 11 \\ \hline 321 \\ 321 \\ \hline 3531 \end{array}$$

12. $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}14286\\14286\end{array}\\ \hline 85716\\ 114288\\ 28572\\ 57144\\ 14286\\ \hline 204089796 \end{array}$$

13. а) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}376\\45\end{array}\\ \hline 1880\\ 1504\\ \hline 16920 \end{array}$$ б) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}239\\54\end{array}\\ \hline 956\\ 1195\\ \hline 12906 \end{array}$$ в) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}7243\\29\end{array}\\ \hline 65187\\ 14486\\ \hline 210047 \end{array}$$ г) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}315\\41\end{array}\\ \hline 315\\ 1260\\ \hline 12915 \end{array}$$ д) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}115\\98\end{array}\\ \hline 920\\ 1035\\ \hline 11270 \end{array}$$

е) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}9374\\82\end{array}\\ \hline 18748\\ 74992\\ \hline 768668 \end{array}$$ ж) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}405\\205\end{array}\\ \hline 2025\\ 810\\ \hline 83025 \end{array}$$ $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}405\\207\end{array}\\ \hline 2835\\ 810\\ \hline 83835 \end{array}$$ з) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}40{,}5\\2{,}07\end{array}\\ \hline 2835\\ 810\\ \hline 83{,}835 \end{array}$$

14. а) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}504\\236\end{array}\\ \hline 3024\\ 1512\\ 1008\\ \hline 118944 \end{array}$$ б) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}78346\\341\end{array}\\ \hline 78346\\ 313384\\ 235038\\ \hline 26715986 \end{array}$$ в) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}57125\\743\end{array}\\ \hline 171375\\ 228500\\ 399875\\ \hline 42443875 \end{array}$$ г) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}888\\888\end{array}\\ \hline 7104\\ 7104\\ 7104\\ \hline 788544 \end{array}$$ $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}978\\888\end{array}\\ \hline 7824\\ 7824\\ 7824\\ \hline 868464 \end{array}$$

д) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}396\\376\end{array}\\ \hline 2376\\ 2772\\ 1188\\ \hline 148896 \end{array}$$ е) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}234785\\3215\end{array}\\ \hline 1173925\\ 234785\\ 469570\\ 704355\\ \hline 754833775 \end{array}$$ ж) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}7286\\575\end{array}\\ \hline 36430\\ 51002\\ 36430\\ \hline 4189450 \end{array}$$ з) $$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}2{,}36\\50{,}4\end{array}\\ \hline 944\\ 1180\\ \hline 118{,}944 \end{array}$$

15. $237 \cdot 31\,245 = 7\,405\,065$.

16. 11.

17. $$\begin{array}{l|l} 102928 & 112 \\ \cline{2-2} \underline{1008} & 919 \\ 212 & \\ \underline{112} & \\ 1008 & \\ \underline{1008} & \\ 0 & \end{array}$$

18. $$\begin{array}{l|l} 594 & 27 \\ \cline{2-2} \underline{54} & 22 \\ 54 & \\ \underline{54} & \\ 0 & \end{array}$$

12.

1. а) 1010; 1012; 1014; 1016. б) 210; 211; 212; 213; 214; 215. в) 173; 174; 175; 176; 177. г) 2; 2,4; 2,8; 3,2; 3,6; 4. д) 7,2; 7; 6,8; 6,6; 6,4; 6,2; 6.
2. а) Уменьшится. б) Увеличится. в) Увеличится в 2,5 раза.

3. а) Делимое равно $\frac{10}{9}$, а делитель может быть любым, не равным 0. б) $\frac{30}{42}$.
4. а) $35\frac{7}{15}$. б) $11\frac{11}{40}$. в) $32\frac{8}{15}$.
6. $x = 1$, y — любое число; либо $y = 1$, x — любое число.
7. $A > B$.
8. При $x < 0$ и при $0 < x < 1$.
9. а) Первое больше второго на 30; n может быть любым натуральным числом. б) Второе больше первого на 12; n и x могут быть любыми натуральными числами.
10. а) 4 двухкопеечных и 6 трёхкопеечных. б) 20 учебников и 26 задачников. в) 40 и 30 м. г) 28,5 и 36 руб.
11. а) 3000, 4000 и 5000. б) 16 лет; 18 лет и 24 года. в) 36 и 48 коп.
12. а) 3,3 руб. и 6,5 руб. б) 4,1 руб. и 3,6 руб. в) 24 и 8 л. г) 100 и 60. д) 34 и 44.
13. а) 8640 м^2. б) 180 страниц. в) 15 руб. за текст и 10 руб. за таблицы. г) 25 и 45.
14. а) 20 га. б) 150 кг.
15. 2 ч 40 мин; 30 км и 60 км.
16. 2 ч на велосипеде и 40 мин на мотоцикле.
17. а) Через $3\frac{1}{3}$ дня. б) В 13 ч 6 мин. в) 8,4 км от А.
18. 24 мин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агаханов Н. Х., Подлипский О. К.* Математические олимпиады Московской области. — М.: Изд-во МФТИ, 2003. — 224 с.
2. *Бабинская И. Л.* Задачи математических олимпиад. — М.: Наука, 1975. — 111 с.
3. *Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П.* Петербургские математические олимпиады. 3-е изд., стереотип. — СПб.: Лань, 2005. — 608 с.
4. *Горбачёв Н. В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004. — 560 с.
5. *Зубелевич Г. И.* Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями): пособие для учителей 5–8 классов: под ред. К. П. Сикорского, 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1971. — 304 с.
6. *Медников Л. Э., Мерзляков А. С.* Математические олимпиады. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 136 с.
7. *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Лучшие задачи на смекалку. — М.: НТЦ «Университетский»: АСТ-ПРЕСС, 1999. — 304 с.
8. *Петраков И. С.* Математические олимпиады школьников: пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1982. — 96 с.
9. *Спивак А. В.* Тысяча и одна задача по математике: кн. для учащихся 5–7 кл. — 4-е изд. — М.: Просвещение, 2012. — 207 с.
10. *Фарков А. В.* Готовимся к олимпиадам по математике: учебно-методическое пособие. 5-е изд., стереотип. — М.: Экзамен, 2010. — 158 с.
11. *Фарков А. В.* Математические олимпиады в школе. 5–11 класс. — 2-е изд., испр. — М.: Айрис-пресс, 2003. — 160 с.
12. *Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Политехника, 1994. — 309 с.
13. *Чирский В. Г., Шавгулидзе Е. Т.* Уравнения элементарной математики. Методы решения. — М.: Наука, 1992. — 176 с.
14. *Чубариков В. Н.* Элементы арифметики. — М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2007. — 96 с.
15. LXVII (67-я) Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. — М.: Изд-во МЦНМО, 2004. — 24 с.

Федотов Михаил Валентинович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики, заместитель декана по учебной работе факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Область научных интересов: математическая физика, дифференциальные уравнения, численные методы, математические модели нелинейной оптики. Автор более 100 научных и учебно-методических работ.

Организовал и долгое время возглавлял Учебный центр факультета (1998–2014), в состав которого входят подготовительные курсы.

Золотарёва Наталья Дмитриевна — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Преподаватель подготовительных курсов МГУ, член экзаменационной комиссии МГУ. Область научных интересов: адаптивно измельчаемые сетки для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, оценка погрешности численных методов для решения ОДУ.

Является сертифицированным экспертом ГИА-11 по математике. Автор более 50 научных и учебно-методических работ.

ВУЗОВСКАЯ И ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИМЕЕТСЯ В ПРОДАЖЕ:

Золотарёва Н. Д. ***Математика. Полный курс для девятиклассников с решениями и указаниями*** *: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. – 2017. – 704 с. : ил. – (ВМК МГУ – школе).*

Настоящее пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения задач. Пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

Рекомендуется школьникам при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ (базовый уровень и первая часть профильного уровня), учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

ВУЗОВСКАЯ И ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИМЕЕТСЯ В ПРОДАЖЕ:

***Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями** : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва [и др.] ; под ред. М. В. Федотова. – 4-е изд. – 2018. – 544 с. : ил. – (ВМК МГУ – школе).*

Настоящее пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ и задач Единого государственного экзамена. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения задач.

Рекомендуется абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, при подготовке к сдаче Единого государственного экзамена, а также учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ЛАБОРАТОРИЯ ЗНАНИЙ»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Серия книг **«ВМК МГУ–школе»** – результат многолетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. В серию входят пособия по алгебре, геометрии, физике и информатике. Все они предназначены для подготовки и успешной сдачи ГИА и ЕГЭ, а также поступления в престижные вузы страны.

Олимпиадная математика – новое направление серии «ВМК МГУ–школе». Его основная задача – научить школьников всех возрастов решать задачи повышенной сложности.

Настоящее пособие предназначено для учащихся 5–7 классов и является первым в серии пособий по олимпиадным математическим задачам. Будут выпущены ещё несколько книг для 5–7 классов – по другим разделам математики, а также сборники задач для 8–9 и 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте!

ISBN 978-5-00101-209-2

9 785001 012092