ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Б. А. Будак, Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС

с решениями и указаниями

ЕГЭ

ОЛИМПИАДЫ

ЭКЗАМЕНЫ В ВУЗ

ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
БИНОМ

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Б. А. Будак, Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

ГЕОМЕТРИЯ

УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС
с решениями и указаниями

Учебно-методическое пособие

3-е издание
(электронное)

Под редакцией
М. В. Федотова

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2015

УДК 514
ББК 22.151.0я721.9
Б90

Будак Б. А.

Б90 Геометрия. Углубленный курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Б. А. Будак, Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов ; под ред. М. В. Федотова. — 3-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 613 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — (ВМК МГУ — школе). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2894-9

Настоящее пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ и задач единого государственного экзамена. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения задач.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 514
ББК 22.151.0я721.9

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Геометрия. Углубленный курс с решениями и указаниями : учебно-методическое пособие / Б. А. Будак, Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов ; под ред. М. В. Федотова. — 2-е изд., испр. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 608 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе). — ISBN 978-5-9963-1847-6.

ISBN 978-5-9963-2894-9

Оглавление

От редактора

Уважаемый читатель, Вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ – школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. Сначала были созданы пособия для очных подготовительных курсов, затем были разработаны электронные версии учебников, используемые при дистанционном обучении. На основе этого опыта подготовлена серия книг для старшеклассников, одной из которых и является настоящее пособие.

Сейчас изданы или готовятся к изданию пособия по алгебре, геометрии и физике. В дальнейшем предполагается продолжить эту серию силами преподавателей информатики подготовительных курсов факультета ВМК МГУ и выпустить аналогичные пособия по информатике.

По каждому предмету должны выйти два пособия: базовый курс и курс, содержащий сложные задачи части С единого государственного экзамена и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М. В. Ломоносова). Базовый курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач ЕГЭ частей А, В и некоторых задач части С, а также первой половины задач вариантов вступительных экзаменов в вузы. Второе пособие содержит задачи, научившись решать которые, Вы сможете решать все задачи ЕГЭ и все или почти все задачи олимпиад и вступительных экзаменов в вузы (за отведённое время можно просто физически не успеть решить все задачи).

Отличительной особенностью наших пособий является то, что наряду с традиционными составляющими (теоретический раздел, примеры с решениями, задачи для самостоятельного решения) мы предлагаем **решения** всех предложенных задач **с идеями** и последовательными **подсказками**, помогающими решить задачу оптимальным способом без посторонней помощи. Это позволит ученику самостоятельно продвигаться в решении задачи так, как если бы за его спиной стоял учитель и направлял ход его мысли при решении трудных задач. Конечно, мы понимаем, что настоящего учителя не может заменить никакая книга, но если учителя рядом нет, то, как показал опыт наших дистанционных подготовительных курсов, наличие грамотных подсказок помогает учащимся самостоятельно научиться решать задачи. С помощью нашего пособия приобретение такого опыта учениками будет значительно облегчено. С другой стороны, наши пособия помогут молодым учителям вести занятия. Мы знаем на собственном опыте, что не всегда легко направлять ученика так, чтобы он сам догадался, как решить задачу. **Второй особенностью** наших пособий является **спиралевидная схема подачи материала**, когда каждая тема повторяется несколько раз, причём каждый раз на более сложном уровне, чем в предыдущий. Это позволяет не забывать пройденный материал и постепенно подходить к сложным задачам.

Директор учебного центра
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики
М. В. Федотов

Предисловие

Предлагаемый «Углублённый курс» является естественным продолжением «Базового курса» по геометрии и предполагает свободное владение методами и приёмами из «Базового курса».

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения. Задачи в разделах расположены по принципу «*от простого – к сложному*». Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров. Если самостоятельное решение задачи вызывает трудности, рекомендуется воспользоваться системой указаний (подсказок). В случае, если Вам не удалось получить правильный ответ или у Вас возникли сомнения в правильности Вашего решения, рекомендуется изучить решение, предложенное авторами.

Необходимо отметить, что в формулировках задач параллельно с математически более корректной терминологией типа «длина отрезка AB равна 5» и записью $|AB| = 5$ используется школьная терминология типа «отрезок AB равен 5» и запись $AB = 5$.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I. Теория и задачи

1. Треугольники

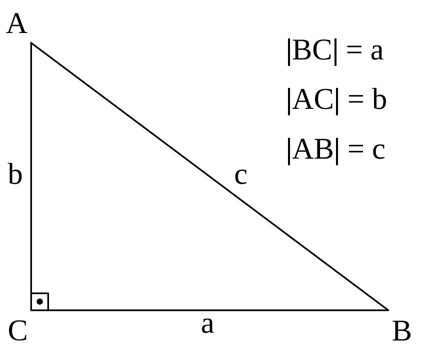
1.1. Прямоугольные треугольники

Теоретический материал

Этот раздел всецело посвящен прямоугольным треугольникам. Для успешного решения задач, относящихся к этой теме, необходимо знать и уметь обосновывать **все** факты, перечисленные ниже по тексту.

1. Соотношения между длинами сторон и величинами углов в прямоугольном треугольнике

Рассмотрим **прямоугольный треугольник** ABC, будем считать, что его угол C прямой (то есть его величина равна $\pi/2$), длины отрезков AB, AC и BC (которые везде в пособии будут обозначены как $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$) равны c, b и a соответственно. Тогда



$$a = b \cdot \operatorname{tg} \widehat{A} = b \cdot \operatorname{ctg} \widehat{B} = c \cdot \sin \widehat{A} = c \cdot \cos \widehat{B},$$

$$b = a \cdot \operatorname{tg} \widehat{B} = a \cdot \operatorname{ctg} \widehat{A} = c \cdot \sin \widehat{B} = c \cdot \cos \widehat{A},$$

$$c = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{a}{\cos \widehat{B}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{b}{\cos \widehat{A}}.$$

З а м е ч а н и е. Полезно знать, что эти формулы на самом деле есть не что иное, как переписанные утверждения, вытекающие из определений тригонометрических функций величин острых углов, а именно:

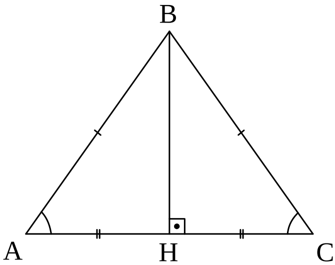
Синус величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **противолежащего** этому углу, к длине гипотенузы;

Косинус величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **прилежащего** к этому углу, к длине гипотенузы;

Тангенс величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **противолежащего** этому углу, к длине катета, **прилежащего** к этому углу;

Котангенс величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **прилежащего** к этому углу, к длине катета, **противолежащего** этому углу.

2. Соотношения между длинами сторон и величинами углов в равнобедренном треугольнике



Пользуясь вышеизложенными фактами, получим непосредственно вытекающие из них важные соотношения между длинами сторон, длиной высоты, проведенной к основанию, и величинами углов в равнобедренном треугольнике. Как показывает практика, при решении задач очень часто возникают различные конфигурации, в которые входят равнобедренные треугольники, и, как следствие, возникает необходимость применять нижеприведённые формулы. Рассмотрим **равнобедренный треугольник** ABC, в котором $|AB| = |BC|$, BH — высота, проведенная к основанию AC. Справедливы следующие утверждения:

I. *Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна частному длины его основания и удвоенного косинуса величины угла при основании этого треугольника*:

$$|AB| = |BC| = \frac{|AC|}{2\cos\widehat{BAC}}, \quad |AC| = 2\cdot|AB|\cdot\cos\widehat{BAC}.$$

II. *Длина высоты равнобедренного треугольника, проведенной к его основанию, равна частному длины этого основания и удвоенного котангенса величины угла при основании этого треугольника*:

$$|BH| = \frac{|AC|}{2\operatorname{ctg}\widehat{BAC}}, \quad |AC| = 2\cdot|BH|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{BAC}.$$

Доказательство этих фактов несложно: ясно, что прямоугольные треугольники ABH и CBH равны по гипотенузе и катету. Из этого равенства вытекает, что $|AH| = |HC|$, а, с другой стороны, из прямоугольного треугольника ABH следует, что $|AH| = |AB|\cdot\cos\widehat{BAC}$, $|AH| = |BH|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{BAC}$. Поэтому

$$|AC| = 2\cdot|AH| = 2\cdot|AB|\cdot\cos\widehat{BAC} \quad\Longleftrightarrow\quad |AB| = |BC| = \frac{|AC|}{2\cos\widehat{BAC}};$$

$$|AC| = 2\cdot|AH| = 2\cdot|BH|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{BAC} \quad\Longleftrightarrow\quad |BH| = \frac{|AC|}{2\operatorname{ctg}\widehat{BAC}}.$$

Утверждение доказано.

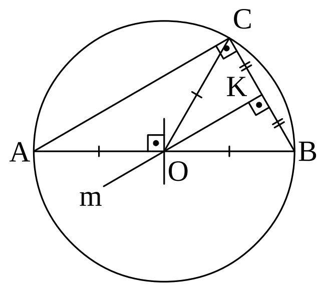
3. Формула площади прямоугольного треугольника

Площадь прямоугольного треугольника может быть вычислена как половина произведения длин его катетов $\left(S = \dfrac{ab}{2}\right)$.

Доказательство этого факта практически очевидно – ясно, что если в прямоугольнике, длины сторон которого равны a и b, провести диагональ, то он будет разделён на два равных прямоугольных треугольника, длины катетов которых равны a и b. Осталось лишь вспомнить, что площадь прямоугольника равна произведению длин двух его смежных сторон, то есть ab.

4. Окружность, описанная около прямоугольного треугольника

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, находится на середине его гипотенузы; длина радиуса этой окружности равна половине длины гипотенузы $\left(R = \dfrac{c}{2}\right)$.



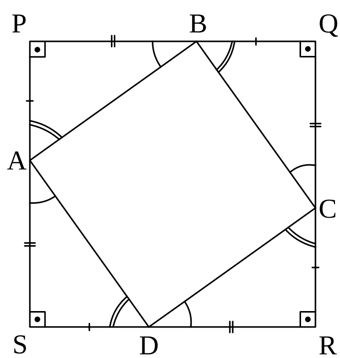
Для доказательства этого утверждения воспользуемся тем, что центр окружности, описанной около **произвольного** треугольника, лежит на пересечении **серединных перпендикуляров** к его сторонам. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой), обозначим буквой K середину его стороны BC, проведем через точку K прямую m, перпендикулярную BC (она как раз и будет серединным перпендикуляром к отрезку BC) и обозначим буквой O точку пересечения m и AB.

Рассматривая прямоугольные треугольники ABC и OBK, имеем $\cos\widehat{B} = |BK| : |OB| = |BC| : |AB|$, из чего следует $|OB| : |AB| = |BK| : |BC|$. Но поскольку $|BK| : |BC| = 1 : 2$, то точка O – **середина** отрезка AB. Наконец, в силу того, что серединный перпендикуляр к AB тоже проходит через точку O, то точка O есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC, то есть она является центром окружности, описанной около треугольника ABC. Длина радиуса этой окружности, очевидно, равна длине отрезка OA, то есть половине длины гипотенузы AB.

З а м е ч а н и е. Верно и обратное утверждение: если у некоторого треугольника центр описанной около него окружности находится на середине одной из его сторон (что эквивалентно тому, что длина радиуса этой окружности равна половине длины одной из его сторон), то этот треугольник прямоугольный.

5. Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы ($a^2 + b^2 = c^2$).



Приведем доказательство этого факта. Рассмотрим четыре **равных** между собой прямоугольных треугольника ABP, BCQ, CDR и DAS, будем считать, что

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = c,$$

$$|AP| = |BQ| = |CR| = |DS| = a,$$

$$|BP| = |CQ| = |DR| = |AS| = b$$

и расположим их так, как показано на рисунке. Заметим, что $|PQ| = |QR| = |RS| = |SP| = a + b$, углы P, Q, R и S – прямые, поэтому $PQRS$ – квадрат. С другой стороны, из теоремы о сумме величин углов треугольника вытекает, что сумма величин острых углов прямоугольного треугольника равна $\pi/2$. Но тогда величины углов ABC, BCD, CDA и DAB тоже равны $\pi/2$. Это следует из того, что, например, $\widehat{ABC} + \widehat{ABP} + \widehat{CBQ} = \pi$, $\widehat{ABP} + \widehat{CBQ} = \pi/2$. Пользуясь этим фактом и равенством длин отрезков AB, BC, CD и DA, мы получаем, что $ABCD$ тоже является квадратом.

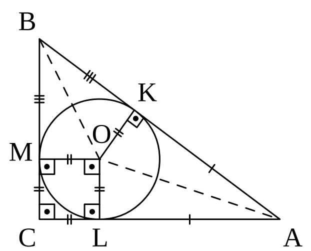
Наконец, очевидно, что площадь квадрата $PQRS$ равна сумме площади квадрата $ABCD$ и учетверённой площади треугольника ABP. Пользуясь формулами площади квадрата и прямоугольного треугольника, находим

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \iff a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \iff a^2 + b^2 = c^2.$$

З а м е ч а н и е. Верна и обратная теорема: если в некотором треугольнике сумма квадратов длин двух его сторон равна квадрату длины его третьей стороны, то он прямоугольный.

6. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник

Длина радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равна полуразности суммы длин его катетов и длины его гипотенузы $\left(r = \dfrac{a+b-c}{2}\right)$.



Доказательство этого факта чуть более сложно, чем предыдущие доказательства. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой), обозначим центр вписанной в него окружности буквой O, точки её касания со сторонами AB, BC и AC – буквами K, M и L соответственно, а длину её радиуса – буквой r.

Ясно, что $OK \perp AB$, $OM \perp BC$ и $OL \perp AC$. Из этого следует, что $OLCM$ – квадрат (у четырёхугольника $OLCM$ три прямых угла, поэтому он прямоугольник, и равны длины смежных сторон OL и OM, поэтому он квадрат), стало быть, $|CM| = |CL| = |OL| = r$. Также заметим, что равны пары прямоугольных треугольников AOL и AOK, BOM и BOK (по гипотенузе и катету), из чего вытекает, что $|AL| = |AK|$, $|BM| = |BK|$. Наконец, запишем цепочку соотношений

$$|AB| = |AK| + |BK| = |AL| + |BM| =$$
$$= (|AC| - |CL|) + (|BC| - |CM|) = |AC| + |BC| - 2r,$$

откуда и следует требуемая формула.

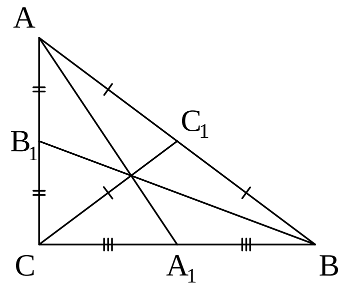
З а м е ч а н и е. Обратное утверждение опять-таки верно: если длина радиуса окружности, вписанной в некоторый треугольник, может быть вычислена как полуразность суммы длин двух его сторон и длины его третьей стороны, то этот треугольник – прямоугольный.

7. Медианы прямоугольного треугольника

Длина медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равна половине длины гипотенузы, длина медианы, проведённой к катету, равна корню из суммы четверти квадрата длины этого катета и квадрата длины другого катета:

$$m_c = \frac{c}{2},\ m_a = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}},\ m_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

Доказательство этого факта тривиально. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой), его медианы обозначим как AA_1, BB_1 и CC_1. Поскольку C_1 – середина гипотенузы, то C_1 – центр окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому



$$|AC_1| = |BC_1| = |CC_1| = \frac{|AB|}{2}.$$

Для нахождения длин отрезков AA_1 и BB_1 надо всего лишь применить теорему Пифагора для треугольников AA_1C и BB_1C.

Следствие. *Сумма квадратов длин медиан прямоугольного треугольника, проведённых к катетам, в пять раз больше, чем квадрат длины его медианы, проведённой к гипотенузе* ($5m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$).

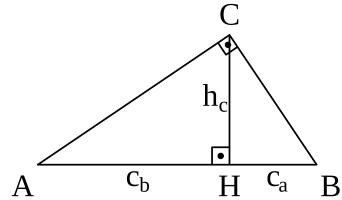
Замечание. Опять-таки верны обратные утверждения: если в некотором треугольнике длина медианы, проведённой к одной из его сторон, равна половине длины этой стороны или выполнено соотношение $5m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$, то этот треугольник – прямоугольный.

8. Высоты прямоугольного треугольника

I. *Длина высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равна частному произведения длин катетов и длины гипотенузы* $\left(h_c = \dfrac{ab}{c}\right)$.

II. *Квадрат длины высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению длин отрезков гипотенузы, на которые её делит основание этой высоты* ($h_c^2 = c_a \cdot c_b$).

Доказать эти утверждения несложно: возьмем прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой), проведём его высоту CH и с помощью соотношений между длинами сторон и величинами углов в прямоугольном треугольнике выразим двумя способами синус величины угла A (рассмотрев треугольники ABC и ACH):



$$\sin\widehat{A} = \frac{|BC|}{|AB|},\ \sin\widehat{A} = \frac{|CH|}{|AC|} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|CH|}{|AC|} \quad \Longleftrightarrow \quad |CH| = \frac{|AC| \cdot |BC|}{|AB|}.$$

С другой стороны, из прямоугольных треугольников ACH и BCH имеем

$$\operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{|CH|}{|AH|},\ \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{|CH|}{|BH|} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\widehat{A} \cdot \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{|CH|^2}{|AH| \cdot |BH|},$$

из чего, пользуясь тем, что $\operatorname{tg}\widehat{A} \cdot \operatorname{tg}\widehat{B} = \dfrac{|BC|}{|AC|} \cdot \dfrac{|AC|}{|BC|} = 1$, мы получаем требуемое соотношение: $|CH|^2 = |AH| \cdot |BH|$.

З а м е ч а н и е 1. Верны и обратные утверждения:

I. Если в некотором треугольнике длина высоты, проведённой к одной из его сторон, равна отношению произведения длин двух других его сторон и длины стороны, к которой проведена высота, то этот треугольник – прямоугольный;

II. Если в некотором треугольнике квадрат длины высоты, проведённой к одной из его сторон, равен произведению длин отрезков, на которые её основание делит эту сторону, то этот треугольник – прямоугольный.

З а м е ч а н и е 2. Ясно, что высота прямоугольного треугольника, проведённая к одному из его катетов, совпадает с другим его катетом. То есть $h_a = b$, $h_b = a$.

Отметим, что все приведённые обратные утверждения даны без доказательств. Это сделано по причине того, что их доказательства требуют применения различных фактов, связанных с произвольными треугольниками и впрямую не относящихся к теме этого параграфа, или же решения различных тригонометрических уравнений. Тем не менее, попробуйте их доказать.

Наконец, перечислим некоторые факты, относящиеся к произвольным треугольникам, которые также необходимо знать и уметь использовать при решении задач, в которых встречаются прямоугольные треугольники.

В нижеприведённых формулах a, b, c – длины сторон произвольного треугольника, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ – величины соответствующих противолежащих им углов треугольника, h_a, h_b, h_c – длины высот, проведённых к сторонам, длины которых равны a, b и c соответственно, p – полупериметр треугольника, r – длина радиуса вписанной в треугольник окружности, R – длина радиуса описанной около треугольника окружности.

Теорема о сумме величин внутренних углов треугольника

Сумма величин внутренних углов треугольника равна π. (Сумма градусных мер внутренних углов треугольников равна $180°$.)

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R.$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}.$$

Различные формулы площади произвольного треугольника:

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\widehat{A},$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$S = p\cdot r, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = 2R^2\cdot\sin\widehat{A}\cdot\sin\widehat{B}\cdot\sin\widehat{C}.$$

Теоремы о медианах и высотах треугольника

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой на отрезки, длины которых относятся как 2:1, считая от вершины.

Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке. Если треугольник остроугольный, то эта точка лежит внутри треугольника. Если он тупоугольный, то эта точка лежит вне него.

Теоремы об описанной и вписанной окружностях

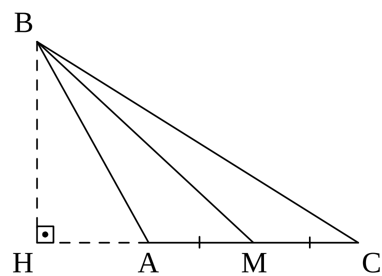
Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведённых к сторонам треугольника. Причем этот центр лежит внутри треугольника, если он остроугольный; вне треугольника, если он тупоугольный; на середине гипотенузы, если он прямоугольный.

Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения биссектрис всех трёх внутренних углов треугольника, причем всегда внутри треугольника.

Примеры решения задач

Пример 1. В треугольнике ABC из вершины B к стороне AC проведены медиана BM и высота BH. Известно, что $|AB| = \sqrt{5}$, $|BM| = 2\sqrt{2}$, $|BH| = 2$. Найдите длину стороны BC, если $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} < \pi/2$.

Решение. При решении этой задачи главное – выяснить, где находится основание высоты BH. Для этого рассмотрим данное нам про величины углов треугольника соотношение и используем теорему о сумме величин углов треугольника:



$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} < \frac{\pi}{2},$$

$$\widehat{BAC} = \pi - \left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) \implies$$

$$\implies \quad \widehat{BAC} > \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, угол BAC – тупой. Из этого вытекает, что точка H лежит **на продолжении** стороны AC за точку A, поэтому $|AH|+|AM| = |HM|$. Применяя теорему Пифагора для треугольников BAH и BMH, получаем

$$|BH|^2 + |AH|^2 = |BA|^2 \implies 2^2 + |AH|^2 = (\sqrt{5})^2 \implies |AH| = 1,$$

$$|BH|^2 + |MH|^2 = |BM|^2 \implies 2^2 + |MH|^2 = (2\sqrt{2})^2 \implies |MH| = 2.$$

Отсюда вытекает, что $|AM| = |MH|-|AH| = 1$. Далее, M – середина AC, значит, $|AC| = 2 \cdot |AM| = 2$, а $|CH| = |AH| + |AC| = 3$.

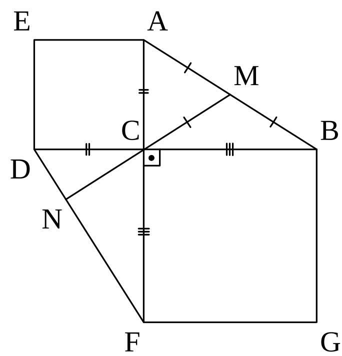
Наконец, записываем теорему Пифагора для треугольника BHC:

$$|BH|^2 + |HC|^2 = |BC|^2 \implies |BC|^2 = 2^2 + 3^2 = 13.$$

Ответ. $|BC| = \sqrt{13}$.

Пример 2. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите длину отрезка CN, если известно, что $|AC| = 1, |BC| = 4$.

Решение. CM – медиана треугольника ABC, проведённая к его гипотенузе, значит, $|AM| = |BM| = |CM|$ и треугольники ACM и BCM – равнобедренные.



С учётом этого, и того, что углы FCN и MCA – вертикальные, получаем

$$\widehat{FCN} = \widehat{MCA} = \widehat{MAC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{MBC}.$$

А из равенства прямоугольных треугольников FCD и BCA (по двум катетам) вытекает равенство углов CFN и MBC. Отсюда следует, что

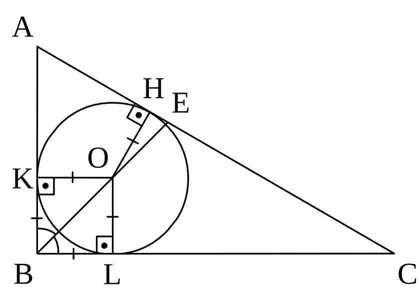
$$\widehat{FCN} + \widehat{CFN} = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{CNF} = \frac{\pi}{2}.$$

То есть CN – высота треугольника FCD. Её длину можно легко вычислить с помощью формулы длины высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе:

$$|DF| = \sqrt{|CF|^2 + |CD|^2} = \sqrt{17};\ |CN| = \frac{|CD| \cdot |CF|}{|DF|} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

О т в е т. $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

П р и м е р 3. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, считая от вершины B. Найдите величины острых углов треугольника ABC.



Р е ш е н и е. Проведём из центра вписанной окружности радиусы OH, OK и OL в точки касания её с гипотенузой и катетами, положим $|OH| = |OK| = |OL| = r$.

Поскольку углы OKB, OLB, ABC – прямые, а $|OK| = |OL|$, то $OKBL$ – квадрат. Поэтому $|BO| = r\sqrt{2}$. Теперь выразим длину отрезка OE. Так как BE – биссектриса угла ABC, то величина угла ABE равна $\pi/4$. Обозначим величину угла A за α, тогда, так как сумма величин углов треугольника ABE равна π, величина угла AEB равна $3\pi/4 - \alpha$. С учётом этого из прямоугольного треугольника OHE получаем

$$|OE| = \frac{|OH|}{\sin \widehat{OEH}} = \frac{r}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \alpha)}.$$

Подставляя выраженные нами длины отрезков BO и OE в соотношение из условия задачи и учитывая тот факт, что, поскольку угол A – острый, то $0 < \alpha < \pi/2$ и величина $3\pi/4 - \alpha$ может принимать только значения из интервала $(\pi/4, 3\pi/4)$, имеем

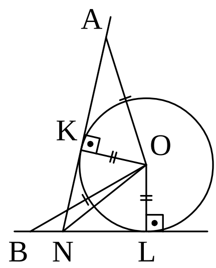
$$\frac{r\sqrt{2}}{\dfrac{r}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3\pi}{4} - \alpha = \frac{\pi}{3}, \\ \frac{3\pi}{4} - \alpha = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{5\pi}{12}, \\ \alpha = \frac{\pi}{12}. \end{array}\right.$$

Мы получили два варианта для величины угла α, в сумме они дают $\pi/2$. Это и есть величины острых углов треугольника, поскольку, если мы выберем в качестве α одно из двух полученных значений, величина другого острого угла будет равна как раз второму из этих значений.

Ответ. $\dfrac{5\pi}{12}$ и $\dfrac{\pi}{12}$.

Пример 4. Через точку N проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром O. На одной из этих прямых взята точка A, а на другой взята точка B так, что $|OA| = |OB|$, $|OA| > |ON|$, $|NA| \neq |NB|$. Известно, что $|NA| = a, |NB| = b, |OA| = c$. Найдите длину отрезка ON.

Решение. Обозначим точки касания прямых и окружности из условия задачи буквами K и L, без ограничения общности будем считать, что точка A лежит на прямой NK, а точка B – на прямой NL.



Заметим, что $\triangle NOK = \triangle NOL$ и $\triangle AOK = \triangle BOL$ (по гипотенузе и катету), откуда следует, что $|NK| = |NL|$ и $|AK| = |BL|$. Также отметим, что из данных в условии задачи неравенств $|OA| > |ON|$, $|OB| > |ON|$ и теоремы Пифагора вытекает, что $|AK| > |KN|$ и $|BL| > |LN|$. После этого мы можем сделать вывод о расположении точек A и B. Если предположить, что точка A лежит на луче $[NK)$, а точка B – на луче $[NL)$, то необходимо получается, что точка K лежит на отрезке NA, а точка L – на отрезке NB, то есть

$$|NA| = |NK| + |AK|; \ |NB| = |NL| + |BL| \quad \Longrightarrow \quad |NA| = |NB|.$$

Это противоречит условию задачи. Аналогично доказывается, что невозможен случай, когда точка A лежит на луче, дополнительном к $[NK)$, а точка B – на луче, дополнительном к $[NL)$. Будем полагать, что A лежит на луче $[NK)$, а B – на луче, дополнительном к $[NL)$. Тогда $|NA| = |NK| + |AK|$, $|NB| = |BL| - |NL|$, и в силу того, что $|NK| = |NL|$, $|AK| = |BL|$, мы находим

$$|NA| + |NB| = |AK| + |BL| \quad \Longrightarrow \quad |AK| = |BL| = \frac{a+b}{2}; \ |NK| = |NL| = \frac{a-b}{2}.$$

Теперь запишем теорему Пифагора для треугольников AOK и NOK:

$$\begin{cases} |OK|^2 = |OA|^2 - |AK|^2; \\ |OK|^2 = |ON|^2 - |NK|^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad |OA|^2 - |AK|^2 = |ON|^2 - |NK|^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |ON|^2 = |OA|^2 + |NK|^2 - |AK|^2 = c^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = c^2 - ab.$$

Случай, когда A лежит на луче, дополнительном к $[NK)$, а B – на луче $[NL)$, рассматривается аналогично.

Ответ. $|ON| = \sqrt{c^2 - ab}$.

Задачи

1. В треугольнике ABC угол BAC прямой, $|AB| = 1$, $|BC| = 3$. Точка K делит сторону AC в отношении 7:1, считая от точки A. Что больше, $|AC|$ или $|BK|$?

2. В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $|CD| = |CE| = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE. Площадь треугольника BOD больше площади треугольника AOE на $0,5$. Известно, что $|AD| = \sqrt{10}$. Найдите длину гипотенузы AB.

3. В равнобедренном треугольнике длины высот, опущенных на основание и на боковую сторону, равны соответственно m и n. Найдите длины сторон этого треугольника.

4. В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна c, а величина одного из его острых углов равна α. Найдите длину биссектрисы прямого угла этого треугольника.

5. В треугольнике ABC угол A – прямой, $|AB| = 1$, $|BC| = 2$. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке L. G – точка пересечения медиан треугольника ABC. Что больше, $|BL|$ или $|BG|$?

6. В треугольнике ABC $|AB| = c$, $|BC| = a$, а медианы AD и CE взаимно перпендикулярны. Найдите длину стороны AC.

7. В треугольнике ABC угол A – прямой, величина угла B равна $\pi/6$. В треугольник вписана окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до точки касания этой окружности с катетом AB.

8. В треугольнике ABC величина угла BAC равна $\pi/3$, длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, равна $\sqrt{3}$, а длина радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, равна 5. Найдите длины сторон треугольника ABC.

9. В прямоугольном треугольнике отношение длины радиуса вписанной окружности к длине радиуса описанной окружности равно $2/5$. Найдите величины острых углов треугольника.

10. В треугольнике ABC угол B – тупой, продолжения высот AM и CN пересекаются в точке O, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \gamma$, $|AC| = b$. Найдите расстояние от точки O до прямой AC.

11. В треугольнике, величина одного из углов которого равна разности величин двух других его углов, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найдите длину большей стороны треугольника.

12. В прямоугольном треугольнике KLM проведён отрезок MD, соединяющий вершину прямого угла KML с точкой D, лежащей на гипотенузе KL таким образом, что $|DL| = 1$, $|DM| = \sqrt{2}$, $|DK| = 2$. Найдите величину угла KMD.

13. В треугольнике ABC угол C прямой, катет BC разделён точками D и E на три равные части. Найдите сумму величин углов AEC, ADC и ABC, если известно, что $|BC| = 3|AC|$.

14. В прямоугольном треугольнике ABC расстояние от середины гипотенузы AB до катета BC равно 5, а расстояние от середины этого катета до гипотенузы равно 4. Найдите площадь треугольника ABC.

15. В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках P, Q и R. Найдите площадь треугольника PQR, если длины катетов треугольника ABC равны 3 и 4.

16. В треугольнике ABC угол C прямой, CD – высота. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, если длины радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 6 и 8 соответственно.

17. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, до его вершин A и B равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$ соответственно. Найдите длины катетов треугольника ABC.

18. В треугольнике ABC точка M расположена на стороне AC таким образом, что $|AM| : |MC| = 1 : 3\sqrt{3}$. Величина угла ABM равна $\pi/6$, $|BM| = 6$, угол B прямой. Найдите величину угла BAC.

19. Дан треугольник KLM. Через точки K и L проведена окружность, центр которой лежит на высоте LF, опущенной на сторону KM. Известно, что точка F лежит на стороне KM. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью, если $|KL| = 1$, $|KM| = \sqrt{3}/2$, $|FM| = \sqrt{3}/6$.

20. В прямоугольнике $ABCD$ длины отрезков AB и BD равны 3 и 6 соответственно. На продолжении биссектрисы BL треугольника ABD за точку L взята точка N такая, что отношение $|BL| : |LN|$ равно $10 : 3$. Что больше: длина отрезка BN или длина отрезка CL?

21. В прямоугольном треугольнике ABC угол B – прямой, AM – медиана, BH – высота. Найдите величину угла BAM, если известно, что величина угла между прямыми AM и BH равна φ. При каких φ задача имеет решение?

22. В треугольнике ABC угол C – прямой, отношение длины медианы CM к длине биссектрисы CL равно $\sqrt{6} : 1$, длина высоты CH равна 2. Найдите площадь треугольника ABC.

23. В прямоугольном треугольнике ABC ED – отрезок, соединяющий середины сторон AB и BC. Точка F лежит на стороне BC, отрезки AF и ED пересекаются в точке M. Известно, что отношение площадей четырёхугольника $AMDC$ и треугольника ABC равно $7/10$, а длины катетов BC и AC равны a и b соответственно. Найдите длину отрезка AM.

24. В треугольнике ABC проведены высота BH и медиана BM. Найдите $|BM|$, если известно, что $|BH| = h$, $\widehat{ABH} = \widehat{CBM}$, $\widehat{HBM} = 2 \cdot \widehat{CBM}$.

25. В треугольник ABC вписана окружность, длина радиуса которой равна 2. D – точка касания этой окружности со стороной AC, $|AD| = 2$, $|DC| = 4$. Найдите длину биссектрисы треугольника ABC, проведённой из вершины B.

26. В прямоугольном треугольнике ABC угол B – прямой, AL – биссектриса. Известно, что $|AC| = 5$, $|AL| = 5/\sqrt{3}$. Найдите $|LC|$.

27. Треугольники ABC и ABD имеют общую сторону AB и не имеют общих внутренних точек, углы BAC и ADB прямые. Найдите $|CD|$, если $|AD| = 3$, $|BC| = 13$, $|AC| + |BD| = 16$.

28. В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3, а высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$. Также известно, что основание D высоты CD лежит на стороне AB и $|AD| = |BC|$. Найдите длину стороны AC.

29. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 4, а длина катета AC равна 3. Точка D делит гипотенузу пополам. Найдите расстояние между центром окружности, вписанной в треугольник ACD, и центром окружности, вписанной в треугольник ABD.

30. В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 20, а длина диаметра описанной около него окружности равна 25. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в этот треугольник.

31. Из середины D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведён луч, перпендикулярный гипотенузе и пересекающий один из его катетов. На этом луче отложен отрезок DE, длина которого равна половине длины отрезка AB. Длина отрезка CE равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC.

32. Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке D, а катет BC – в точке E, причем длина отрезка DE равна 2, а длина отрезка BE равна 1. На гипотенузе взята точка F так, что $|BF| = 1$. Известно также, что величина угла FCB равна α. Найдите площадь треугольника ABC.

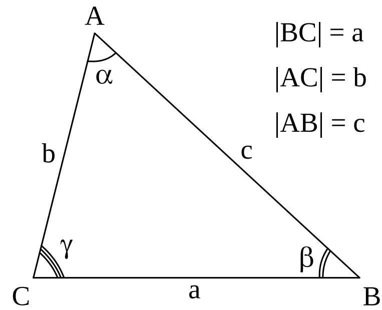
33. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности, длина радиуса которой равна 10. Вершина C лежит на диаметре этой окружности, параллельном гипотенузе. Градусная мера угла CAB равна 75°. Найдите площадь треугольника ABC.

34. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найдите расстояние от центра окружности, вписанной в этот треугольник, до его высоты, проведённой к гипотенузе.

35. Середины высот треугольника лежат на одной прямой. Какое максимальное значение может принимать его площадь, если длина его наибольшей стороны равна 10?

1.2. Теоремы синусов и косинусов

Теоретический материал



Во всех материалах этого параграфа будут использоваться следующие обозначения: a, b, c – длины стороны произвольного треугольника, α, β, γ – величины соответствующих противоположных им углов, p – полупериметр треугольника, R – длина радиуса описанной около треугольника окружности, r – длина радиуса вписанной в треугольник окружности, h_a, h_b, h_c – длины высот, проведённых к сторонам, длины которых равны a, b и c соответственно.

Приведем некоторые базовые факты, касающиеся общих треугольников. Часть из них приводится без доказательства, поскольку их подробное обоснование можно найти в любом школьном учебнике геометрии.

1. Различные формулы площади произвольного треугольника

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c, \quad S = p \cdot r, \quad S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R},$$

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \text{ (формула Герона).}$$

2. Теорема синусов

Отношение длины любой стороны треугольника к синусу величины внутреннего угла треугольника, противолежащего этой стороне, равно удвоенной длине радиуса окружности, описанной около этого треугольника:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Отметим, что теорема синусов является одним из наиболее часто используемых средств для решения задач на треугольники. Однако для нахождения величины угла треугольника лучше пользоваться теоремой косинусов. Это соображение можно пояснить так: с помощью теоремы синусов можно найти лишь синус величины угла треугольника, а вот однозначно найти эту величину нельзя, так как уравнение $\sin\alpha = a \ \ (0 < a < 1)$ имеет два решения, лежащих в интервале $(0, \pi)$. То есть некоторому значению синуса величины угла треугольника соответствуют два угла, острый и тупой, сумма величин которых равна π.

3. Теорема косинусов

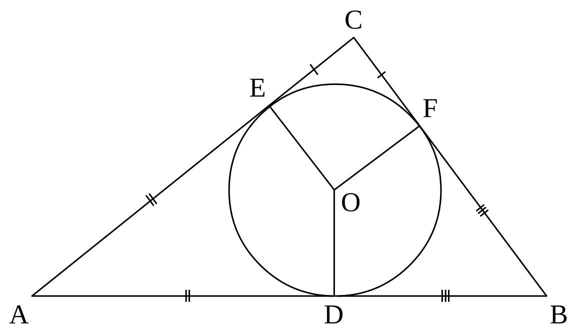
Квадрат длины любой стороны треугольника равен разности суммы квадратов длин двух других его сторон и удвоенного произведения длин этих сторон и косинуса величины внутреннего угла треугольника, заключенного между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

4. Окружность, вписанная в треугольник

В произвольный треугольник можно вписать окружность, причем только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов треугольника, причем всегда расположен внутри треугольника.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC, буквой O обозначим центр вписанной в него окружности, буквами D, E и F обозначим точки, в которых она соответственно касается его сторон AB, AC и BC. Сформулируем и докажем важное утверждение, связывающее длины сторон треугольника ABC и длины отрезков, на которые они разбиты точками D, E и F.



Теорема. *Длина любого из отрезков, на которые стороны треугольника разбиваются точками их касания с вписанной в этот треугольник окружностью, может быть вычислена как разность полупериметра треугольника и длины стороны треугольника, не содержащей ни один из концов этого отрезка*:

$$|AD| = |AE| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2} = p_{\triangle ABC} - |BC|;$$

$$|BD| = |BF| = \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2} = p_{\triangle ABC} - |AC|;$$

$$|CE| = |CF| = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} = p_{\triangle ABC} - |AB|.$$

Доказательство. Равенство длин пар отрезков AD и AE, BD и BF, CE и CF следует из равенства по гипотенузе и катету пар прямоугольных треугольников AOD и AOE, BOD и BOF, COE и COF соответственно. С учётом этого положим $|AD| = |AE| = x$, $|BD| = |BF| = y$, $|CE| = |CF| = z$ и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} |AB| = |AD| + |BD|, \\ |AC| = |AE| + |CE|, \\ |BC| = |BF| + |CF|; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |AB| = x + y, \\ |AC| = x + z, \\ |BC| = y + z; \end{cases} \Longrightarrow$$

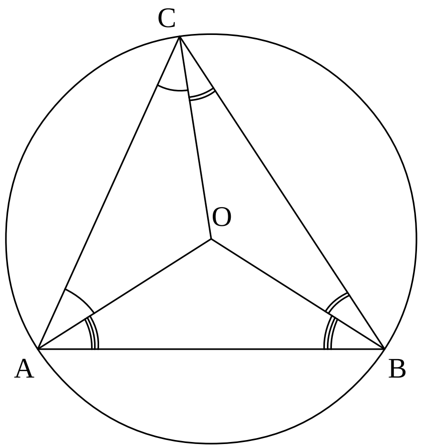
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{|AB| + |AC| - |BC|}{2}, \\ y = \dfrac{|AB| + |BC| - |AC|}{2}, \\ z = \dfrac{|AC| + |BC| - |AB|}{2}; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{|AB| + |AC| + |BC|}{2} - |BC|, \\ y = \dfrac{|AB| + |BC| + |AC|}{2} - |AC|, \\ z = \dfrac{|AC| + |BC| + |AB|}{2} - |AB|. \end{cases}$$

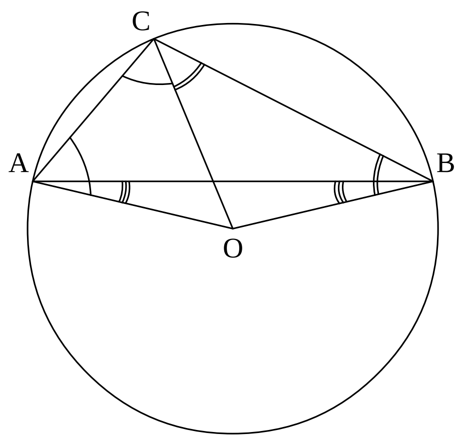
Теорема доказана.

5. Окружность, описанная около треугольника

Около произвольного треугольника можно описать окружность, причем только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, причем расположен вне треугольника, если треугольник тупоугольный, и внутри треугольника, если треугольник остроугольный.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC, буквой O обозначим центр описанной около него окружности.





Теорема. *Величина угла, образованного стороной треугольника и радиусом описанной около этого треугольника окружности, проведённым в один из концов этой стороны, может быть вычислена как модуль разности числа $\pi/2$ и величины угла, противолежащего этой стороне*:

$$\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{ABC}\right|;\ \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{BAC}\right|;$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \left|\frac{\pi}{2} - \widehat{ACB}\right|.$$

Доказательство. Поскольку OA, OB и OC – радиусы окружности, описанной около треугольника ABC, то $|OA| = |OB| = |OC|$, поэтому треугольники AOB, AOC и BOC равнобедренные. Из этого факта вытекает, что $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$, $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$, $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$. Введем обозначения $\widehat{OAC} = \varphi$, $\widehat{OBC} = \psi$, $\widehat{OAB} = \theta$ и рассмотрим два варианта.

Если треугольник ABC остроугольный, то точка O лежит внутри него, поэтому

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{OAB} + \widehat{OAC} = \widehat{BAC}, \\ \widehat{OBA} + \widehat{OBC} = \widehat{ABC}, \\ \widehat{OCA} + \widehat{OCB} = \widehat{ACB} \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} \theta + \varphi = \widehat{BAC}, \\ \theta + \psi = \widehat{ABC}, \\ \psi + \varphi = \widehat{ACB} \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} \varphi = \frac{\widehat{BAC}+\widehat{ACB}-\widehat{ABC}}{2}, \\ \psi = \frac{\widehat{ABC}+\widehat{ACB}-\widehat{BAC}}{2}, \\ \theta = \frac{\widehat{ABC}+\widehat{BAC}-\widehat{ACB}}{2}. \end{array}\right.$$

Наконец, с учётом того, что $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}+\widehat{BAC}=\pi$, и того, что $\widehat{ABC}<\pi/2$, $\widehat{BAC}<\pi/2$, $\widehat{ACB}<\pi/2$, мы получаем

$$\begin{cases} \widehat{OAC}=\varphi=\dfrac{(\pi-\widehat{ABC})-\widehat{ABC}}{2}=\pi/2-\widehat{ABC}=|\pi/2-\widehat{ABC}|, \\ \widehat{OBC}=\psi=\dfrac{(\pi-\widehat{BAC})-\widehat{BAC}}{2}=\pi/2-\widehat{BAC}=|\pi/2-\widehat{BAC}|, \\ \widehat{OAB}=\theta=\dfrac{(\pi-\widehat{ACB})-\widehat{ACB}}{2}=\pi/2-\widehat{ACB}=|\pi/2-\widehat{ACB}|. \end{cases}$$

Если же треугольник ABC тупоугольный (будем считать, что угол C – тупой), то точка O лежит вне треугольника, поэтому

$$\begin{cases} \widehat{OAC}-\widehat{OAB}=\widehat{BAC}, \\ \widehat{OBC}-\widehat{OBA}=\widehat{ABC}, \\ \widehat{OCA}+\widehat{OCB}=\widehat{ACB} \end{cases} \implies \begin{cases} \widehat{OAC}=\pi/2-\widehat{ABC}=|\pi/2-\widehat{ABC}|, \\ \widehat{OBC}=\pi/2-\widehat{BAC}=|\pi/2-\widehat{BAC}|, \\ \widehat{OAB}=\widehat{ACB}-\pi/2=|\pi/2-\widehat{ACB}|. \end{cases}$$

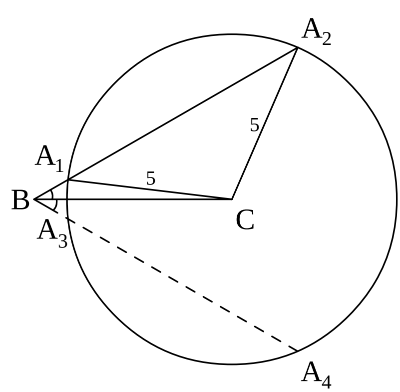
Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Эту теорему можно доказать и более простым способом, используя соотношения между величинами центральных и вписанных углов. Попробуйте сделать это самостоятельно.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. В треугольнике ABC дано $|BC|=6$, $|AC|=5$, $\widehat{ABC}=\pi/6$. Найдите площадь треугольника ABC, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше $1/\sqrt{2}$.

Р е ш е н и е. В этой задаче данным из условия задачи соответствует **два** различных треугольника ABC.



В самом деле, можно построить отрезок BC длины 6, отложить из точки B два симметричных относительно прямой BC луча, составляющих с лучом $[BC)$ угол величины $\pi/6$, и построить окружность с центром в точке C, длина радиуса которой равна 5. Точка A – одна из точек пересечения лучей и этой окружности. Таких точек будет, вообще говоря, четыре, но поскольку лучи симметричны, то и треугольники получатся тоже попарно симметричными. Так что **различных** треугольников будет всетаки два.

Для того чтобы найти площадь треугольника ABC, нам необходимо найти либо длину стороны AB, либо синус угла ACB. $|AB|$ найти попроще, для этого достаточно написать теорему косинусов:

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC} \quad\implies$$

$$\Longrightarrow \quad 25 = |AB|^2 + 36 - 12 \cdot |AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad |AB|_{1,2} = 3\sqrt{3} \pm 4.$$

Как и ожидалось, мы получили два различных варианта длины стороны AB. Меньшей из этих длин на чертеже соответствует точка $A_1(A_3)$, большей – $A_2(A_4)$.

Осталось проверить условие, что расстояние от вершины A до прямой BC меньше $1/\sqrt{2}$. Это расстояние есть длина перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BC. Ясно, что оно может быть вычислено как произведение длины отрезка AB на синус угла ABC:

$$|AB| = 3\sqrt{3} + 4 \quad \Longrightarrow \quad \rho(A, (BC)) = \frac{3\sqrt{3}+4}{2} > 2 > \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$|AB| = 3\sqrt{3} - 4 \quad \Longrightarrow \quad \rho(A, (BC)) = \frac{3\sqrt{3}-4}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

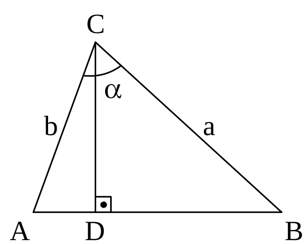
Значит, $|AB| = 3\sqrt{3} - 4$. Наконец, найдём искомую площадь

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{3} - 4) \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(3\sqrt{3} - 4).$$

Ответ. $\frac{3}{2}(3\sqrt{3} - 4)$.

Пример 2. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $|BC| = a$, $|AC| = b$, $\widehat{ACB} = \alpha$. Найдите длину высоты CD и величину угла ABC.

Решение. Длину высоты CD можно посчитать как с помощью формулы площади, так и через синус угла ABC. В любом случае нам понадобится длина стороны AB, найдем её с помощью теоремы косинусов:



$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ACB} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |AB| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.$$

Теперь запишем формулу площади треугольника ABC:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad ab\sin\alpha = |CD| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \quad \Longrightarrow \quad |CD| = \frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}.$$

Самым простым способом определения величины угла ABC здесь является, конечно, выражение его синуса из прямоугольного треугольника CDB и использование того факта, что треугольник ABC – остроугольный. Однако лучше сразу привыкать к тому, что для нахождения величины угла треугольника следует искать его **косинус**, поскольку по косинусу угол треугольника определяется **однозначно**. Так и поступим:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ABC} \quad \Longrightarrow$$

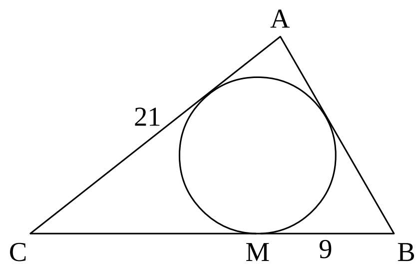
$$\Longrightarrow \quad b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + a^2 - 2a\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\cdot\cos\widehat{ABC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\widehat{ABC} = \frac{a - b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}.$$

Ответ. $|CD| = \dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$, $\widehat{ABC} = \arccos\left(\dfrac{a-b\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}\right)$.

Пример 3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его стороны BC в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если $|AC| = 21$, $|BM| = 9$, а градусная мера угла ABC равна $60°$.

Решение. Воспользуемся теоремой о длинах отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, делит точками касания его стороны:



$$|BM| = p_{\triangle ABC} - |AC| \Longrightarrow 9 = p_{\triangle ABC} - 21 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p_{\triangle ABC} = 30, P_{\triangle ABC} = 60.$$

Теперь обозначим длины сторон AB и BC за x и y соответственно, запишем теорему косинусов для треугольника ABC и заметим, что поскольку

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}xy,$$

то нам надо найти не сами x и y, а лишь значение произведения xy.

$$\begin{cases} |AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC}, \\ |AB| + |BC| + |AC| = P_{\triangle ABC} \end{cases} \Longrightarrow$$

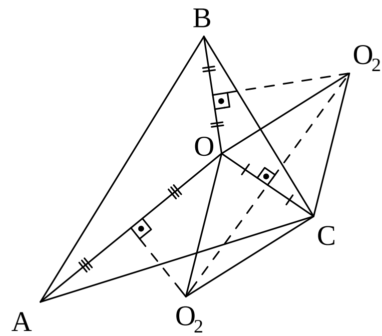
$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 21^2 = x^2 + y^2 - xy, \\ x + y + 21 = 60 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} 21^2 = (x+y)^2 - 3xy, \\ x + y = 39 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 3xy = 39^2 - 21^2 = (39-21)(39+21) = 18\cdot 60 \quad \Longrightarrow \quad xy = 360.$$

Наконец, площадь треугольника ABC равна $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 360$, то есть $90\sqrt{3}$.

Ответ. $90\sqrt{3}$.

Пример 4. Внутри треугольника ABC выбрана точка O таким образом, что $\sin\widehat{BOC} = 1/4$, $\sin\widehat{AOC} = 1/3$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOC и BOC, если известно, что $|BO| = 2$, $|BC| = 3$, $|AC| = 4$.



Р е ш е н и е. Обозначим центры окружностей, описанных около треугольников BOC и AOC, буквами O_1 и O_2 соответственно и заметим, что точки O_1 и O_2 обе лежат на прямой, проходящей через середину отрезка OC перпендикулярно ему (поскольку центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам).

Далее по теореме синусов

$$|O_1O| = |O_1C| = R_{\triangle BOC} = \frac{|BC|}{2\sin\widehat{BOC}} = \frac{3}{1/2} = 6;$$

$$|O_2O| = |O_2C| = R_{\triangle AOC} = \frac{|AC|}{2\sin\widehat{AOC}} = \frac{4}{2/3} = 6.$$

Таким образом, $\triangle O_1OC = \triangle O_2OC$ (по трем сторонам). Если точки O_1 и O_2 лежат в одной полуплоскости относительно прямой OC, то они совпадают, из чего вытекает, что все четыре точки A, B, C и O лежат на одной окружности, что невозможно. Поэтому точки O_1 и O_2 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой OC, то есть O_1OO_2C – ромб. Мы знаем длину его стороны, просят же нас найти длину его диагонали O_1O_2. Очевидно, что для её нахождения необходимо вычислить длину второй его диагонали, OC. Её легко найти из треугольника BOC по теореме косинусов, если знать $\cos\widehat{BOC}$.

Для начала попробуем выяснить, острый или тупой угол BOC. Ясно, что

$$\widehat{BOC} + \widehat{AOC} + \widehat{AOB} = 2\pi;\ \widehat{AOB} < \pi \quad\Longrightarrow\quad \widehat{BOC} + \widehat{AOC} > \pi.$$

Если угол BOC – острый, то есть его величина равна $\arcsin 1/4$, то даже если угол AOC тупой, то есть $\widehat{AOC} = \pi - \arcsin 1/3$, будем иметь:

$$\widehat{BOC} + \widehat{AOC} = \pi - \arcsin 1/3 + \arcsin 1/4 < \pi.$$

Значит, угол BOC – тупой, поэтому $\cos\widehat{BOC} = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Теперь запишем теорему косинусов для треугольника BOC:

$$|BC|^2 = |BO|^2 + |OC|^2 - 2\cdot|BO|\cdot|OC|\cdot\cos\widehat{BOC} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad 9 = 4 + |OC|^2 + \sqrt{15}|OC| \quad\Longrightarrow\quad \{|OC|>0\} \quad\Longrightarrow\quad |OC| = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{2}.$$

Наконец, воспользуемся тем, что в ромбе диагонали перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Из этого следует, что

$$|O_1O_2| = 2\sqrt{|O_1C|^2 - \frac{1}{4}|OC|^2} = \sqrt{144 - \frac{50-10\sqrt{21}}{4}} = \sqrt{\frac{526+10\sqrt{21}}{4}} = \frac{5\sqrt{21}+1}{2}.$$

О т в е т. $\dfrac{5\sqrt{21}+1}{2}$.

Задачи

1. Длина стороны AC треугольника ABC равна 3, синусы величин его углов A и B равны $\sqrt{3}/2$ и $\sqrt{2}/2$ соответственно. Найдите длину стороны AB.

2. В треугольнике ABC известно, что $|AB| = c$, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$. Найдите площадь треугольника ABC.

3. Внутри треугольника ABC взята точка K так, что треугольник ABK – равносторонний. Известно, что расстояние от точки K до центра окружности, описанной около треугольника ABC, равно 6, а величина угла ACB равна $\arcsin(5\sqrt{13}/26)$. Найдите длину стороны AB.

4. В треугольнике ABC $|AC| = 3$, $\widehat{BAC} = \pi/6$, длина радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, равна 2. Докажите, что площадь треугольника ABC меньше 3.

5. В треугольнике ABC найдите величину угла CAB, если произведение квадрата длины стороны BC на сумму длин сторон AC и AB равно сумме кубов длин сторон AC и AB.

6. В треугольнике ABC длины сторон AB и AC равны 3 и 2 соответственно. На стороне AB выбрана точка M, а на стороне AC – точка N так, что $|AM| = 2$, $|AN| = 1.5$. Найдите площадь треугольника AMN, если длина стороны BC больше длины отрезка MN в $6/\sqrt{17}$ раз.

7. В треугольнике ABC $|AB| = 4, |BC| = 5$. Из вершины B проведен отрезок BM $(M \in AC)$, причём $\widehat{ABM} = \pi/4, \widehat{MBC} = \pi/6$.

   а) В каком отношении точка M делит сторону AC?

   б) Вычислите длины отрезков AM и MC.

8. В треугольнике ABC $|BC| = 4$, $|AB| + |AC| = 6$. Найдите площадь треугольника ABC, если $\cos\widehat{ACB} = 5/12$.

9. В треугольнике ABC градусная мера угла ACB равна 75°, а длина высоты, опущенной из вершины этого угла, равна 1. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, если его периметр равен $4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

10. Внутри треугольника ABC взята точка K таким образом, что $|AK| = 1$, $|KC| = \sqrt{3}$, $\widehat{AKC} = 120^\circ$, $\widehat{ABK} = 15^\circ$, $\widehat{KBC} = 15^\circ$. Найдите длину отрезка BK.

11. Величины углов тупоугольного треугольника ABC удовлетворяют соотношению $\sin\left(\widehat{A} - \widehat{B}\right) = \sin^2 \widehat{A} - \sin^2 \widehat{B}$. Найдите периметр этого треугольника, если длина радиуса описанной около него окружности равна R, а величина одного из его углов равна $\pi/8$.

12. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. Площадь треугольника AOB относится к площади треугольника BOC как $\sqrt{3} : 2$, $\widehat{ACB} = \pi/3$, $|AC| = 2$. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

13. В треугольнике ABC известно, что $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, $|BC| = a$. На стороне AB взята точка P так, что $|AP| : |PB| = 1 : 2$. Через точку P проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке D, причём AD – высота треугольника ABC. Найдите длину радиуса этой окружности.

14. Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую MN параллельно основанию AB (M лежит на BC, N лежит на AC). Известно, что $|AB| = 5, |MN| = 3$. Найдите периметр четырёхугольника $ABMN$.

15. В треугольнике ABC даны длины сторон $|AB| = \sqrt{2}, |BC| = \sqrt{5}$ и $|AC| = 3$. Сравните градусную меру угла BOC и $112{,}5°$, если O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.

16. В треугольнике ABC известно, что $|BC| - |AB| = 0{,}15|AC|$. Чему равно произведение $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\widehat{BAC}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\widehat{ACB}\right)$?

17. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AC, AB и BC в точках K, M и N соответственно. Известно, что $|AK| = |KC|$, $\widehat{KMN} = 75°$, а произведение длин всех сторон треугольника KMN равно $9 + 6\sqrt{3}$. Найдите длины сторон треугольника ABC.

18. Точка O лежит на отрезке AB так, что $|AO| = 13, |OB| = 7$. С центром в O проведена окружность, длина радиуса которой равна 5. Из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M, причём точки касания лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника AMB.

19. Периметр треугольника ABC равен $40/3$, косинусы углов ABC и ACB равны $0{,}6$ и $0{,}28$ соответственно. Найдите площадь треугольника ABC.

20. Известно, что для величин углов треугольника ABC выполнено соотношение $\cos^2 \widehat{A} + \cos^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{C} = 1$. Найдите площадь этого треугольника, если длины радиусов вписанной в него и описанной около него окружностей равны $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$ соответственно.

21. Площадь треугольника равна $6\sqrt{6}$, периметр его равен 18, расстояние от центра вписанной в него окружности до одной из его вершин равно $\sqrt{56/3}$. Найдите длину наименьшей стороны этого треугольника.

22. В треугольнике ABC $|AB| = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}, |BC| = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$. Точка M лежит на стороне AB, точка O лежит на стороне BC, причём $|BM| = \dfrac{3}{2}|AM|$, а прямые MO и AC параллельны. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MO в точке P, лежащей между точками M и O, причём длина радиуса окружности, описанной около треугольника AMP, равна $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Найдите длину стороны AC.

23. В треугольнике ABC величина угла при вершине B равна $\pi/3$, а длины отрезков, соединяющих центр вписанной окружности с вершинами A и C, равны 4 и 6 соответственно. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC.

24. Известно, что длина радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, равна 1. Эта окружность касается его сторон AB, BC и AC в точках K, M и N соответственно, $\widehat{MKN} = \widehat{ABC} = 45^\circ$. Найдите длины сторон треугольника ABC.

25. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. $|BC| = \sqrt[4]{2}$, периметр треугольника AMN равен $3\sqrt[4]{2}$, а длина отрезка AO втрое больше длины радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите площадь треугольника ABC.

26. В треугольник KLM вписана окружность, которая касается его стороны KM в точке A. Известно, что $|AK| = 10$, $|AM| = 4$, $\widehat{KLM} = \pi/3$. Найдите длину отрезка AL.

27. В равностороннем треугольнике ABC проведена окружность с центром в точке O, проходящая через точку пересечения медиан треугольника ABC и касающаяся его стороны BC в её середине D. Из точки A проведена прямая, касающаяся этой окружности в точке E так, что градусная мера угла BAE меньше 30°. Найдите отношение площадей треугольника ABE и четырёхугольника $BEOD$.

28. В треугольнике длина стороны AB равна $2\sqrt{2}$, а длина радиуса окружности, описанной около него, равна 2. Отношение длин сторон AC и BC равно $\sqrt{8}$, длина стороны BC больше 1. Найдите площадь треугольника ABC.

29. В треугольнике ABC даны длины сторон: $|AB| = |BC| = 13$, $|AC| = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанной в него и описанной около него.

30. В равнобедренном треугольнике ABC $(|AB| = |BC|)$ отношение расстояний от центра вписанной в этот треугольник окружности до вершин углов B и C соответственно равно k. Найдите величины углов треугольника ABC. При каких значениях k задача имеет решение?

31. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Вычислите длину отрезка AD, если $|CE| = 2$.

32. В треугольнике ABC $|AB| = 4$, $|AC| = 3$, угол C – острый. Известно, что $\sin\left(\widehat{ACB} - \widehat{ABC}\right) = 7/25$. Найдите площадь треугольника ABC.

33. В треугольник ABC, в котором длина стороны BC равна 9, вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Известно, что $|AD| = |DC|$, $\cos\widehat{BCA} = 2/3$. Найдите длину стороны AC.

34. Треугольник ABC со стороной AB, длина которой равна 4 и углом A, градусная мера которого равна 60°, вписан в окружность с длиной радиуса $2\sqrt{3}$. Найдите длину средней линии этого треугольника, параллельной AC, и расстояние между точками, в которых её продолжение пересекает окружность.

35. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. В треугольники ADC и ADB вписаны окружности, длины радиусов которых равны 3 и 8 соответственно, касающиеся отрезка AD в точках M и N. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $|ND| = 4$.

36. В треугольнике KLM отношение длин радиусов описанной около него и вписанной в него окружностей равно k. Окружность, вписанная в треугольник KLM, касается его сторон в точках A, B и C. Найдите отношение площадей треугольников ABC и KLM.

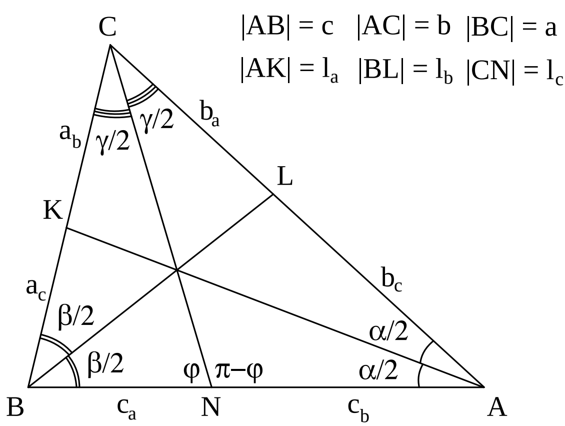
1.3. Биссектриса, медиана, высота

Теоретический материал

1. Биссектриса треугольника

Определение. *Биссектрисой треугольника* называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника, заключённый между его вершиной и противолежащей ей стороной треугольника.

Рассмотрим треугольник ABC, проведём его биссектрисы AK, BL и CN. Длины сторон AB, AC и BC обозначим за c, b и a соответственно, длины биссектрис AK, BL и CN обозначим за l_a, l_b и l_c соответственно, точку их пересечения обозначим буквой O. Также введём обозначения для длин отрезков, на которые биссектрисы разбивают стороны: $|BK| = a_c$, $|CK| = a_b$, $|BN| = c_a$, $|AN| = c_b$, $|AL| = b_c$, $|CL| = b_a$.



Приведём несколько важных фактов, связанных с биссектрисами треугольника.

Основное свойство биссектрисы треугольника. *Отношение длин двух сторон треугольника равно отношению длин прилежащих к ним отрезков, на которые биссектриса треугольника разбивает третью его сторону*:

$$\frac{a}{b} = \frac{c_a}{c_b}; \quad \frac{b}{c} = \frac{a_b}{a_c}; \quad \frac{c}{a} = \frac{b_c}{b_a}.$$

Первая формула длины биссектрисы треугольника. *Длина биссектрисы треугольника, проведённой к некоторой его стороне, равна частному удвоенного* *произведения длин двух других сторон треугольника на косинус половины величины угла между ними и суммы длин этих сторон*:

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}; \quad l_b = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}; \quad l_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Вторая формула длины биссектрисы треугольника. *Квадрат длины биссектрисы треугольника, проведённой к некоторой его стороне, равен разности произведения длин двух других его сторон и произведения длин отрезков, на которые она делит сторону треугольника*:

$$l_a^2 = bc - a_b a_c; \quad l_b^2 = ac - b_a b_c; \quad l_c^2 = ab - c_a c_b.$$

Точка пересечения биссектрис. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, эта точка является центром окружности, вписанной в этот треугольник. Эта точка делит каждую биссектрису на отрезки, отношение длин которых, считая от вершины треугольника, равно частному суммы длин сторон, образующих угол, из вершины которого она проведена, и длины стороны, к которой она проведена.*

Докажем все эти факты, начнем с основного свойства биссектрисы треугольника. Для этого запишем теорему синусов для треугольников ACN и BCN, предварительно обозначив величины смежных углов BNC и ANC за φ и $\pi - \varphi$ соответственно:

$$\frac{|AN|}{\sin\widehat{ACN}} = \frac{|AC|}{\sin\widehat{ANC}} \implies \frac{c_b}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{\sin(\pi-\varphi)} \iff \frac{c_b}{b} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\pi-\varphi)};$$

$$\frac{|BN|}{\sin\widehat{BCN}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BNC}} \implies \frac{c_a}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{\sin\varphi} \iff \frac{c_a}{a} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\varphi}.$$

Воспользовавшись тем, что $\sin(\pi-\varphi) = \sin\varphi$, получим

$$\frac{c_a}{a} = \frac{c_b}{b} \iff \frac{a}{b} = \frac{c_a}{c_b}.$$

Оставшиеся два соотношения доказываются абсолютно аналогично.

Для доказательства первой формулы длины биссектрисы выпишем формулы площади для треугольников ABC, ANC и BNC и воспользуемся тем, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ACN и BCN:

$$\begin{cases} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ACB} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \\ S_{\triangle ANC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|CN|\cdot\sin\widehat{ACN} = \frac{1}{2}al_c\sin\frac{\gamma}{2}, \\ S_{\triangle BNC} = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|CN|\cdot\sin\widehat{BCN} = \frac{1}{2}bl_c\sin\frac{\gamma}{2}, \end{cases} \implies$$

$$\implies \quad ab\sin\gamma = al_c\sin\frac{\gamma}{2} + bl_c\sin\frac{\gamma}{2} \iff 2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = (a+b)l_c\sin\frac{\gamma}{2} \implies$$

$$\implies \quad l_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Формулы для длины l_a и l_b доказываются таким же образом.

Для доказательства второй формулы длины биссектрисы запишем теорему косинусов для треугольников ANC и BNC:

$$\begin{cases} |AC|^2 = |AN|^2 + |CN|^2 - 2\cdot|AN|\cdot|CN|\cdot\cos\widehat{ANC}, \\ |BC|^2 = |BN|^2 + |CN|^2 - 2\cdot|BN|\cdot|CN|\cdot\cos\widehat{BNC} \end{cases} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} b^2 = c_b^2 + l_c^2 - 2c_b l_c \cos(\pi-\varphi), \\ a^2 = c_a^2 + l_c^2 - 2c_a l_c \cos\varphi. \end{cases}$$

Домножим первое из этих соотношений на c_a, второе на c_b и сложим их. Пользуясь тем, что $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$, получим

$$a^2 c_b + b^2 c_a = c_a^2 c_b + l_c^2 c_b + c_b^2 c_a + l_c^2 c_b.$$

Из доказанного выше основного свойства биссектрисы вытекает, что $ac_b = bc_a$. С помощью этого факта преобразуем левую часть последнего равенства:

$$abc_a + bac_b = c_a^2 c_b + l_c^2 c_b + c_b^2 c_a + l_c^2 c_b \quad\Longrightarrow\quad ab(c_a+c_b) = c_a c_b(c_a+c_b) + l_c^2(c_a+c_b) \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad ab = c_a c_b + l_c^2 \quad\Longrightarrow\quad l_c^2 = ab - c_a c_b.$$

Формулы для l_a и l_b доказываются аналогично.

Наконец, для обоснования последнего утверждения предварительно выразим величины a_b, a_c, b_a, b_c, c_a, c_b через длины сторон треугольника ABC. Воспользуемся основным свойством биссектрисы:

$$\begin{cases} |AB| = |AN| + |BN|, \\ \dfrac{|AN|}{|AC|} = \dfrac{|BN|}{|BC|} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} c = c_b + c_a, \\ \dfrac{c_b}{b} = \dfrac{c_a}{a} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} c_a = \dfrac{ac}{a+b}, \\ c_b = \dfrac{bc}{a+b}. \end{cases}$$

Абсолютно аналогично получаем, что

$$b_a = \frac{ab}{a+c},\ b_c = \frac{bc}{a+c},\ a_b = \frac{ab}{b+c},\ a_c = \frac{ac}{b+c}.$$

Теперь рассмотрим треугольник ANC. AO – его биссектриса, поэтому

$$\frac{|CO|}{|ON|} = \frac{|AC|}{|AN|} = \frac{b}{c_b} = \frac{b}{\dfrac{bc}{a+b}} = \frac{a+b}{c}.$$

Рассуждая таким же образом, находим

$$\frac{|AO|}{|OK|} = \frac{b+c}{a}, \qquad \frac{|BO|}{|OL|} = \frac{a+c}{b}.$$

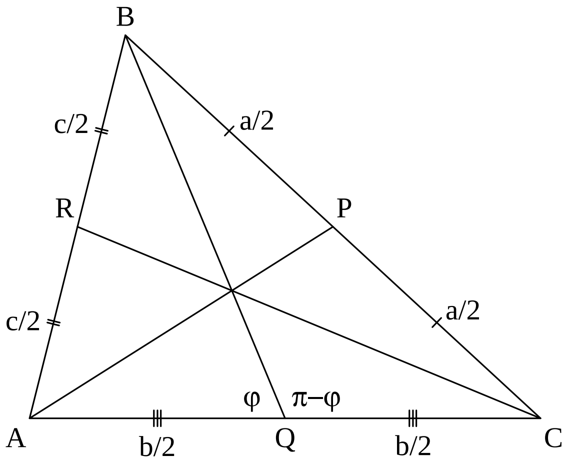
З а м е ч а н и е. С учётом полученных выражений для a_b, a_c, b_a, b_c, c_a, c_b вторая формула длины биссектрисы может быть записана в виде:

$$l_a^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right), \quad l_b^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right), \quad l_c^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right).$$

2. Медиана треугольника

Определение. *Медианой треугольника* называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей этой вершине стороны.

Рассмотрим треугольник ABC, проведём его медианы AP, BQ и CR. Длины сторон AB, AC и BC обозначим за c, b и a соответственно, длины медиан AP, BQ и CR обозначим за m_a, m_b и m_c соответственно.



Точка пересечения медиан. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке, эта точка является его центром тяжести. Она делит каждую медиану на отрезки, отношение длин которых, считая от вершин треугольника, равно* $2:1$.

Формула длины медианы треугольника. *Учетверённый квадрат длины медианы треугольника, проведённой к некоторой его стороне, равен разности удвоенной суммы квадратов длин двух других сторон треугольника и квадрата длины стороны, к которой проведена медиана*:

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2; \quad 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2; \quad 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Для доказательства этого утверждения запишем теорему косинусов для треугольников ABQ и CBQ, предварительно обозначив величины смежных углов AQB и CQB за φ и $\pi - \varphi$ соответственно:

$$\begin{cases} |AB|^2 = |AQ|^2 + |BQ|^2 - 2 \cdot |AQ| \cdot |BQ| \cdot \cos\widehat{AQB}, \\ |BC|^2 = |CQ|^2 + |BQ|^2 - 2 \cdot |CQ| \cdot |BQ| \cdot \cos\widehat{CQB} \end{cases} \implies$$

$$\implies \quad \begin{cases} c^2 = \dfrac{b^2}{4} + m_b^2 - bm_b\cos\varphi; \\ a^2 = \dfrac{b^2}{4} + m_b^2 - bm_b\cos(\pi - \varphi). \end{cases}$$

Сложив эти равенства и учитывая то, что $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, получим

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \quad \implies \quad 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2.$$

Для двух других медиан треугольника ABC доказательство проводится так же.

З а м е ч а н и е. Доказанные соотношения можно переписать в таком виде:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}, \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

3. Теорема о наибольшем угле треугольника

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против меньшей – меньший.

Без ограничения общности будем считать, что длины сторон треугольника связаны соотношением $a \leqslant b \leqslant c$.

Тогда по теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha \leqslant \sin\beta \leqslant \sin\gamma.$$

А поскольку величины углов треугольника находятся в интервале $(0,\pi)$, то из этого следует $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. В самом деле, если предположить, что $\alpha > \beta$, то, пользуясь свойствами синуса, мы получаем, что либо α и β – тупые, что невозможно, либо α – тупой, β – острый, но тогда $\alpha+\beta > \pi$, что тоже невозможно. Поэтому $\alpha \leqslant \beta$. Аналогично доказывается, что $\beta \leqslant \gamma$.

4. Критерий остроугольности (тупоугольности) треугольника

Рассмотрим произвольный треугольник, будем считать, что длины его сторон равны a, b и c, причем $c \geqslant a$, $c \geqslant b$.

Для того, чтобы треугольник являлся тупоугольным (остроугольным) [прямоугольным], необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$c^2 > a^2+b^2 \text{ или } m_c < \frac{c}{2} \quad \left(c^2 < a^2+b^2 \text{ или } m_c > \frac{c}{2}\right)$$

$$\left[c^2 = a^2+b^2 \text{ или } m_c = \frac{c}{2}\right].$$

Для обоснования этого факта заметим, что тупоугольность или остроугольность треугольника зависит только от того, является ли тупым или острым наибольший из его углов, напротив которого лежит наибольшая сторона треугольника. Ответ на этот вопрос проще всего получить с помощью косинуса этого угла – если он отрицательный, то угол тупой, если же он положительный, то угол острый. Воспользуемся этим фактом и теоремой косинусов:

$$\gamma \text{ – тупой} \iff \cos\gamma < 0 \iff a^2+b^2-2ab\cos\gamma > a^2+b^2 \iff c^2 > a^2+b^2,$$

$$\gamma \text{ – острый} \iff \cos\gamma > 0 \iff a^2+b^2-2ab\cos\gamma < a^2+b^2 \iff c^2 < a^2+b^2,$$

$$\gamma \text{ – прямой} \iff \cos\gamma = 0 \iff a^2+b^2-2ab\cos\gamma = a^2+b^2 \iff c^2 = a^2+b^2.$$

Теперь задействуем формулу длины медианы, предварительно переписав ее в виде $4m_c^2+c^2 = 2(a^2+b^2)$:

$$c^2 > a^2+b^2 \iff c^2 > \frac{4m_c^2+c^2}{2} \iff c^2 > 4m_c^2 \iff m_c < \frac{c}{2},$$

$$c^2 < a^2 + b^2 \iff c^2 < \frac{4m_c^2 + c^2}{2} \iff c^2 < 4m_c^2 \iff m_c > \frac{c}{2},$$
$$c^2 = a^2 + b^2 \iff c^2 = \frac{4m_c^2 + c^2}{2} \iff c^2 = 4m_c^2 \iff m_c = \frac{c}{2}.$$

Утверждение доказано.

Замечание. В основном эта теорема, конечно же, применяется, когда надо по длинам сторон треугольника понять, является ли он тупоугольным или остроугольным. Действовать надо просто – взять квадрат длины наибольшей стороны треугольника и сравнить его с суммой квадратов длин двух остальных его сторон. Однако в ряде задач применима и вторая часть этой теоремы.

5. Высота треугольника

Определение. *Высотой треугольника* называется отрезок, соединяющий его вершину и прямую, содержащую противолежащую ей сторону треугольника, перпендикулярный этой прямой.

Точка пересечения высот. *Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке, эта точка называется ортоцентром треугольника.*

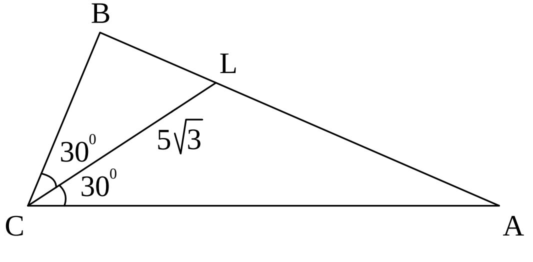
Отметим, что в остроугольном треугольнике все высоты попадают на его стороны и лежат внутри треугольника, поэтому его ортоцентр является точкой пересечения высот. В тупоугольном треугольнике высоты, проведённые из вершин двух его острых углов, попадают на продолжения сторон и лежат вне треугольника. Поэтому его ортоцентр есть точка пересечения прямых, содержащих высоты.

Для вычисления длин высот треугольника используется либо формула площади, либо соотношения между длинами сторон и величинами углов различных прямоугольных треугольников, сторонами которых являются эти высоты.

Примеры решения задач

Пример 1. В треугольнике ABC градусная мера угла C равна 60°, длина биссектрисы, проведённой из вершины C, равна $5\sqrt{3}$, $|AC| : |BC| = 5 : 2$. Найдите тангенс величины угла A и длину стороны BC.

Решение. По условию задачи $|AC| : |BC| = 5 : 2$, поэтому если обозначить длину отрезка BC за $2x$, то длина отрезка AC равна $5x$. Обозначим буквой L точку пересечения биссектрисы угла C со стороной AB и воспользуемся первой формулой длины биссектрисы треугольника:



$$|CL| = \frac{2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\widehat{C}\right)}{|AC| + |BC|} \implies 5\sqrt{3} = \frac{2 \cdot 5x \cdot 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{5x + 2x} \implies x = \frac{7}{2}.$$

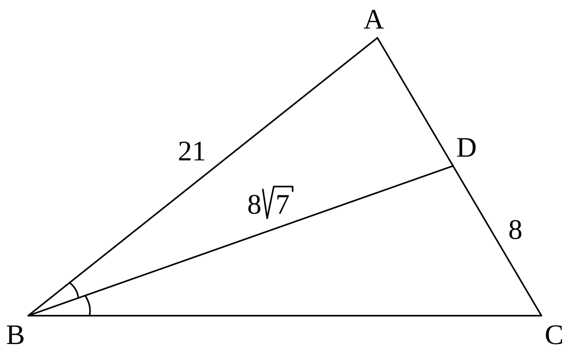
Значит, $|BC| = 7$. Теперь если величину угла A обозначить за α, то, по теореме о сумме градусных мер углов треугольника, $\widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 120^\circ - \alpha$. Запишем теорему синусов для треугольника ABC:

$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{B}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{A}} \quad\Longrightarrow\quad 5\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

О т в е т. $\operatorname{tg}\widehat{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $|BC| = 7$.

П р и м е р 2. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 21, длина биссектрисы BD равна $8\sqrt{7}$, а длина отрезка DC равна 8. Найдите периметр треугольника ABC.

Р е ш е н и е. Для ответа на вопрос задачи нам надо найти длины отрезков AD и BC. Обозначим их длины за x и y соответственно, после чего, воспользовавшись основным свойством биссектрисы треугольника и второй формулой её длины, мы получим два уравнения для введённых неизвестных:



$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|} \quad\Longrightarrow\quad \frac{21}{y} = \frac{x}{8};$$

$$|BD|^2 = |AB|\cdot|BC| - |AD|\cdot|DC| \quad\Longrightarrow\quad 448 = 21y - 8x.$$

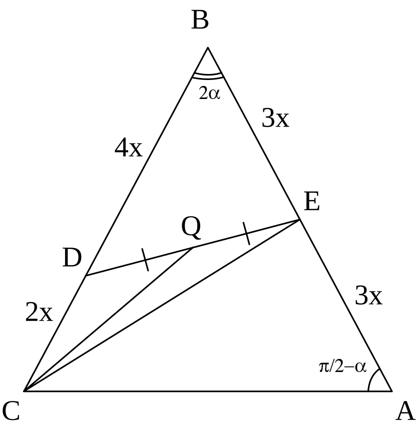
Теперь решим полученную систему уравнений, учитывая, что x и y положительные:

$$\begin{cases} xy = 168, \\ 21y = 8x + 448 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(8x + 448) = 168\cdot 21, \\ 21y = 8x + 448 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ y = 24. \end{cases}$$

Наконец, периметр треугольника ABC равен сумме длин отрезков AB, AD, DC и BC, то есть 60.

О т в е т. 60.

П р и м е р 3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении 2:1, считая от вершины B, а точка E – середина стороны AB. Известно, что длина медианы CQ треугольника CED равна $\dfrac{\sqrt{23}}{2}$ и $|DE| = \dfrac{\sqrt{23}}{2}$. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.



Р е ш е н и е. В этой задаче нам придётся немедленно вводить какие-то неизвестные величины, поскольку по данным в условии задачи длинам ничего явно вычислить нельзя. Обозначим $|AB| = |BC| = 6x$, $\widehat{ABC} = 2\alpha$. Тогда $0 < \alpha < \pi/2$,

$$|CD| = 2x,\ |DB| = 4x,\ |AE| = |EB| = 3x,$$

$$\widehat{CAB} = \pi/2 - \alpha, \quad |AC| = 12x\sin\alpha.$$

Для того чтобы составить два уравнения с введёнными неизвестными, поступим следующим образом. Сначала рассмотрим треугольник DBE и запишем для него теорему косинусов:

$$|DE|^2 = |DB|^2 + |EB|^2 - 2\cdot|DB|\cdot|EB|\cdot\cos\widehat{B} \implies \frac{23}{4} = 16x^2 + 9x^2 - 24x^2\cos 2\alpha \implies$$

$$\implies 100x^2 - 96x^2\cos 2\alpha = 23 \implies 4x^2 + 192x^2\sin^2\alpha = 23.$$

После этого воспользуемся формулой длины медианы в треугольнике CDE и применим теорему косинусов к треугольнику ACE:

$$\begin{cases} |CQ|^2 = \dfrac{2|CE|^2 + 2|CD|^2 - |DE|^2}{4}; \\ |CE|^2 = |AC|^2 + |AE|^2 - 2\cdot|AC|\cdot|AE|\cdot\cos\widehat{A} \end{cases} \implies$$

$$\implies 2|AC|^2 + 2|AE|^2 - 4\cdot|AC|\cdot|AE|\cdot\cos\widehat{A} + 2|CD|^2 - |DE|^2 = 4|CQ|^2 \implies$$

$$\implies 288x^2\sin^2\alpha + 18x^2 - 144x^2\sin^2\alpha + 8x^2 - \frac{23}{4} = 23 \implies 144x^2\sin^2\alpha + 26x^2 = \frac{5}{4}\cdot 23.$$

Решая полученную систему уравнений, получаем

$$\begin{cases} 4x^2 + 192x^2\sin^2\alpha = 23; \\ 144x^2\sin^2\alpha + 26x^2 = \dfrac{5}{4}\cdot 23 \end{cases} \implies$$

$$\implies 5x^2 + 240x^2\sin^2\alpha = 144x^2\sin^2\alpha + 26x^2 \implies 96x^2\sin^2\alpha = 21x^2 \implies$$

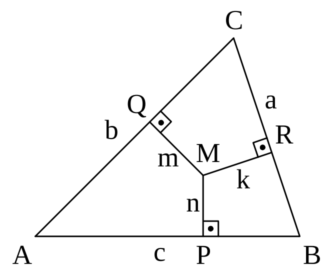
$$\implies \sin^2\alpha = \frac{7}{32} \implies \begin{cases} \cos^2\alpha = \dfrac{25}{32}; \\ 4x^2 + 192x^2\cdot\dfrac{7}{32} = 23 \end{cases} \implies \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{5}{4\sqrt{2}}; \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Наконец, запишем теорему синусов в треугольнике ABC:

$$2R_{\triangle ABC} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{CAB}} \implies R_{\triangle ABC} = \frac{3x}{\sin(\pi/2-\alpha)} = \frac{3x}{\cos\alpha} = \frac{\dfrac{3}{\sqrt{2}}}{\dfrac{5}{4\sqrt{2}}} = \frac{12}{5}.$$

О т в е т. $\dfrac{12}{5}$.

П р и м е р 4. Из точки M, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры на его стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k, b и m, c и n. Вычислите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания этих перпендикуляров.



Р е ш е н и е. Обозначим основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны треугольника ABC как P, Q и R, без ограничения общности будем считать, что $|AB| = c, |MP| = n$; $|AC| = b, |MQ| = m$; $|BC| = a, |MR| = k$.

Наметим путь решения. С площадью треугольника ABC всё понятно, её можно вычислить, например, по формуле Герона. В треугольнике же PQR нам не даны ни длины сторон, ни величины углов. Поэтому представим его площадь как сумму площадей треугольников MPQ, MPR и MQR, после чего найдём связь между величинами углов PMQ, PMR, QMR и величинами углов треугольника ABC.

$$S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{2} \cdot |MP| \cdot |MQ| \cdot \sin \widehat{PMQ} = \frac{1}{2} mn \sin \widehat{PMQ};$$

$$S_{\triangle MPR} = \frac{1}{2} \cdot |MP| \cdot |MR| \cdot \sin \widehat{PMR} = \frac{1}{2} nk \sin \widehat{PMR};$$

$$S_{\triangle MQR} = \frac{1}{2} \cdot |MQ| \cdot |MR| \cdot \sin \widehat{QMR} = \frac{1}{2} km \sin \widehat{QMR} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} \left(mn \sin \widehat{PMQ} + nk \sin \widehat{PMR} + km \sin \widehat{QMR} \right). \qquad (*)$$

Теперь заметим, что, поскольку сумма величин углов четырёхугольника равна 2π, а в каждом из четырёхугольников $PMQA, PMRB$ и $QMRC$ есть по два прямых угла, то

$$\widehat{PMQ} = \pi - \widehat{A}, \quad \widehat{PMR} = \pi - \widehat{B}, \quad \widehat{QMR} = \pi - \widehat{C} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sin \widehat{PMQ} = \sin \widehat{A}, \quad \sin \widehat{PMR} = \sin \widehat{B}, \quad \sin \widehat{QMR} = \sin \widehat{C}.$$

В задаче нас просят найти не сами площади треугольников ABC и PQR, а их отношение. Поэтому поступим таким образом: выразим синусы величин углов A, B и C через площадь треугольника ABC.

$$\sin \widehat{A} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|AB| \cdot |AC|}; \quad \sin \widehat{B} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|AB| \cdot |BC|}; \quad \sin \widehat{C} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|AC| \cdot |BC|} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sin \widehat{A} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{bc}; \quad \sin \widehat{B} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{ac}; \quad \sin \widehat{C} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{ab}.$$

Подставив полученные соотношения в $(*)$, получаем

$$S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} \left(mn \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{bc} + kn \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{ac} + mk \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{ab} \right) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad S_{\triangle PQR} = S_{\triangle ABC}\left(\frac{mn}{bc}+\frac{kn}{ac}+\frac{mk}{ab}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PQR}} = \frac{1}{\frac{mn}{bc}+\frac{kn}{ac}+\frac{mk}{ab}} = \frac{abc}{amn+bkn+cmk}.$$

Ответ. $\dfrac{abc}{amn+bkn+cmk}$.

Задачи

1. В остроугольном треугольнике площади S известны величины α и β углов A и B. Найдите длину высоты, опущенной на сторону, прилежащую к углам A и B.

2. В треугольнике KMN, в котором $\sin\widehat{KNM} = \sqrt{3}/2$, $\cos\widehat{KMN} = 1/3$, проведены высоты NP и MQ. Найдите значение отношения $|NP| : |MQ|$.

3. Длины сторон AB, BC и AC треугольника ABC образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии, если известно, что отношение длины высоты треугольника ABC, проведённой из вершины A, к длине радиуса вписанной в этот треугольник окружности равно 3.

4. В равнобедренном треугольнике ABC $|AB| = |BC|$, AD – биссектриса, $|BD| = b$, $|DC| = c$. Найдите длину биссектрисы AD.

5. Известно, что длины высот треугольника равны h_1, h_2 и h_3. Найдите его площадь.

6. Точка M лежит внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC на расстоянии 6 от его боковых сторон и на расстоянии $\sqrt{3}$ от его основания. Найдите длину этого основания, если $\widehat{B} = 2\pi/3$.

7. В треугольнике BCE известно, что $|CE| : |BC| = 3$, а величина угла BCE равна $\pi/3$. Отрезок CK – биссектриса треугольника. Найдите $|KE|$, если длина радиуса окружности, описанной около треугольника BCE, равна $8\sqrt{3}$.

8. В треугольнике ABC градусная мера угла B равна 30°, $|AB| = 4$, $|BC| = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Найдите площадь треугольника ABD.

9. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD, при этом величины углов ADC и CDB относятся как $7:5$. Найдите длину отрезка AD, если известно, что $|BC| = 1$, $\widehat{BAC} = \pi/6$.

10. В треугольнике ABC биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O, $|AB| = 14$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$. Найдите длину отрезка OD.

11. В тупоугольном треугольнике ABC на стороне AB длины 14 выбрана точка L, равноудаленная от сторон AC и BC, а на отрезке AL – точка K, равноудаленная от вершин A и B. Найдите синус величины угла ACB, если $|KL| = 1, \widehat{CAB} = \pi/4$.

12. Величины углов A, B и C треугольника ABC составляют арифметическую прогрессию с разностью $\pi/7$. Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке D. Точки A', B' и C' находятся на продолжениях отрезков DA, DB, DC за точки A, B, C соответственно на одинаковом расстоянии от точки D. Доказать, что величины углов A', B', C' треугольника $A'B'C'$ также образуют арифметическую прогрессию. Найдите её разность.

13. В треугольнике ABC биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке K. Известно, что $|BC| = 2$, $|KC| = 1$, $|BK| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Найдите площадь треугольника ABC.

14. Треугольник ABC вписан в окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{3} - 1$. Градусная мера угла BAC равна $60°$, а длина радиуса окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, равна 1. Найдите градусные меры углов ABC и ACB.

15. Величина одного из углов треугольника равна $2\pi/3$, длина противолежащей ему стороны равна 6, а длина одного из отрезков, на которые она разделена проведённой к ней биссектрисой этого треугольника, равна 2. Найдите величины двух других углов треугольника.

16. Среди треугольников KLM, у которых длина радиуса описанной окружности равна 10, длина стороны KL равна 16, а длина высоты MH равна $3{,}9$, выбирается тот, у которого длина медианы MN наименьшая. Найдите величину его угла KML.

17. В треугольнике ABC проведена медиана AD, $|AD| = m, |AB| = c, |AC| = b$. Найдите $\widehat{BAC}$.

18. Найдите величину угла A треугольника ABC, если известно, что $|AB| = 2$, $|AC| = 4$, а длина медианы AM равна $\sqrt{7}$.

19. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $|AB| = |BC| = 2|AC|$, $|AM| = 4$.

20. Найдите величины углов, образованных медианой BB_1 треугольника ABC со сторонами AB и BC, если $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $|BB_1| = 5$.

21. В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Известно, что $|AB| = 3$, $|AC| = \sqrt{5}$, длина медианы, проведённой из вершины A к стороне BC, равна $\sqrt{6}$, а длины отрезков AP, PQ и QC равны между собой. Найдите длину отрезка PQ.

22. В треугольнике ABC проведены биссектриса BK и медиана BM. Найдите длину отрезка KM, если $\widehat{ABM} = \pi/4$, $\widehat{CBM} = \pi/6$, $|AK| = 6$.

23. В треугольнике ABC проведены биссектриса BD и медиана AE. Известно, что $|AB| = 8$, $|BC| = |BD| = 6$. Найдите длину медианы AE.

24. В треугольнике ABC проведены биссектриса AL и медиана AM. Известно, что $|AL| = 6$, $|AM| = 8$, $|AC| = 2 \cdot |AB|$. Найдите длину стороны BC.

25. В треугольнике KMN проведены высота NA, биссектриса NB и медиана NC, которые делят угол KNM на четыре равные части. Найдите длины высоты NA, биссектрисы NB и медианы NC, если длина радиуса описанной около треугольника KMN окружности равна R.

26. В треугольнике ABC проведены высоты CH и AK. Найдите длину стороны AC, если $|AB| = c$, $|CH| = h$, $|AK| = k$.

27. В треугольнике ABC проведена высота BH, при этом оказалось, что длины отрезков CH и AH относятся как $10 : 3$. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $|BH| = h$, $\widehat{ABC} = \pi/6$.

28. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, длина которой равна l. Найдите длины сторон треугольника ABC, если известно, что расстояния от точек A и C до прямой BL равны p и q соответственно.

29. Вычислите величину угла A треугольника ABC, если величина угла B равна $\pi/5$ и известно, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из этой вершины.

30. На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку B расположена точка E так, что биссектрисы углов AEC и ABC пересекаются в точке K, лежащей на стороне AC. Длина отрезка BE равна 1, длина отрезка BC равна 2, градусная мера угла EKB равна $30°$. Найдите длину стороны AB.

31. В треугольнике ABC известно, что $|AC| = |BC| = 12$, $|AB| = 6$, AD – биссектриса. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ADC и сравните эту длину с числом $13/2$.

32. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно, причем $|BM| = |BN|$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная BC, а через точку N – прямая, перпендикулярная AB. Эти прямые пересекаются в точке O. Продолжение отрезка BO пересекает сторону AC в точке P, $|AP| = 5, |PC| = 4$. Найдите длину отрезка BP, если известно, что $|BC| = 6$.

33. Вокруг треугольника MKH описана окружность с центром в точке O, длина её радиуса равна r. Длина стороны HM равна a. Известно, что справедливо равенство $|HK|^2 - |HM|^2 = |HM|^2 - |MK|^2$. Найдите площадь треугольника OLK, где L – точка пересечения медиан треугольника MKH.

34. В треугольнике KLM проведены биссектрисы KA и MB, которые пересекаются в точке O. Диагонали четырехугольника $AOBL$ пересекаются в точке C. Найдите численные значения отношений $|BC| : |CA|$ и $|LC| : |CO|$, если известно, что $|KL| = m$, $|KM| = l$, $|LM| = k$.

35. Отрезки AM и BP являются медианами треугольника ABC. Известно, что угол APB равен углу BMA, $|BP| = 1$, косинус величины угла ACB равен $4/5$. Найдите площадь треугольника ABC.

36. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C взята точка O таким образом, что $|OA| = |OB| = b$. CD – высота треугольника ABC, точка E – середина отрезка OC, $|DE| = a$. Найдите $|CE|$.

1.4. Подобие треугольников

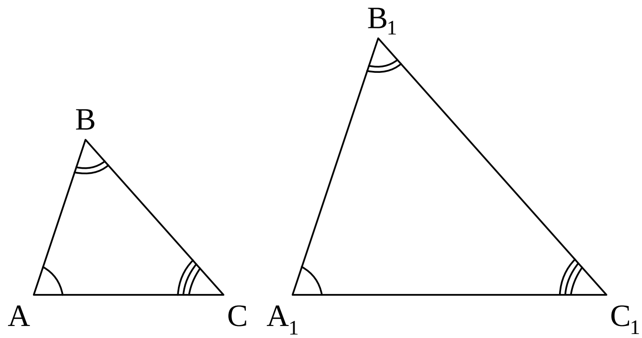
Теоретический материал

В этом параграфе рассматриваются задачи, при решении которых ключевую роль играет подобие треугольников.

Определение. *Два треугольника называются* **подобными**, *если у них попарно равны все углы, а длины соответствующих сторон пропорциональны.* То есть

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ если } \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|}.$$



Численное значение отношения длин соответствующих сторон называется *коэффициентом подобия* треугольников. Имеется в виду следующее: если нам дано, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $k = |AB| : |A_1B_1|$.

Замечание. У подобных треугольников пропорциональны не только стороны, но и все соответствующие линейные элементы (например, длины радиусов описанных около них окружностей или длины биссектрис, проведённых к соответственным сторонам). Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента их подобия.

Сформулируем три признака подобия треугольников:

1. *Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны.*

2. *Если некоторый угол первого треугольника равен некоторому углу второго треугольника, а длины прилежащих к этим углам сторон треугольников пропорциональны, то эти треугольники подобны.*

3. *Если длины трех сторон одного треугольника пропорциональны длинам трех сторон другого треугольника, то эти треугольники подобны.*

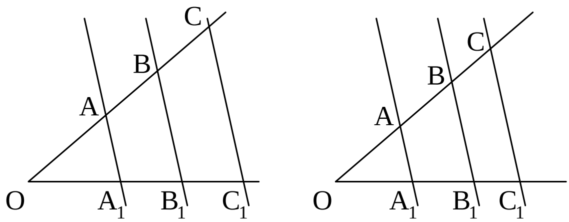
Замечание. Подобие треугольников необходимо записывать правильно, то есть порядки появления соответственных вершин треугольников в записи их подобия должны совпадать. Если, например, про треугольники ABC и MKN известно, что $\widehat{A} = \widehat{K}$ и $\widehat{C} = \widehat{M}$, то правильной записью их подобия будет $\triangle ACB \sim \triangle KMN$. После этого, глядя на эту запись, можно легко выписать пропорцию

$$\frac{|AC|}{|KM|} = \frac{|AB|}{|KN|} = \frac{|CB|}{|MN|}.$$

Теорема Фалеса. Если при пересечении сторон угла параллельными прямыми на одной стороне угла отсекаются равные между собой отрезки, то и на другой стороне угла отсекаются также равные между собой отрезки (левый рисунок).

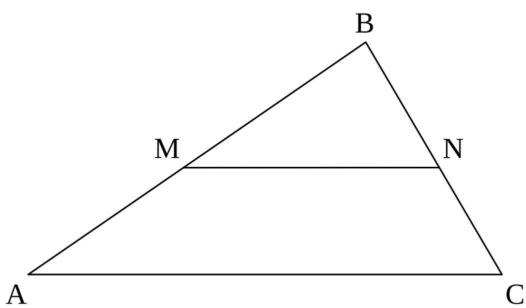
Обобщенная теорема Фалеса. При пересечении сторон угла параллельными прямыми на сторонах угла отсекаются пропорциональные отрезки (правый рисунок).

$$\frac{|AO|}{|A_1O|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|}.$$



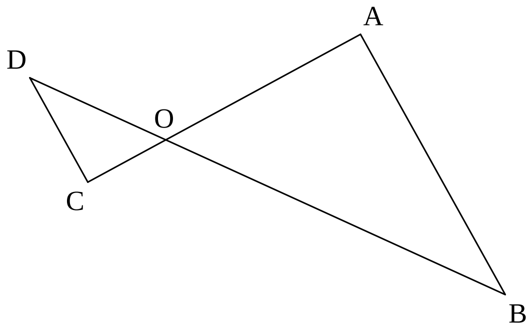
Теперь рассмотрим несколько классических ситуаций, в которых возникает подобие треугольников.

Утверждение 1. *Пусть на сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N ($M \in [AB], N \in [AC]$) таким образом, что $MN||AC$. Тогда треугольники ABC и MBN подобны.*



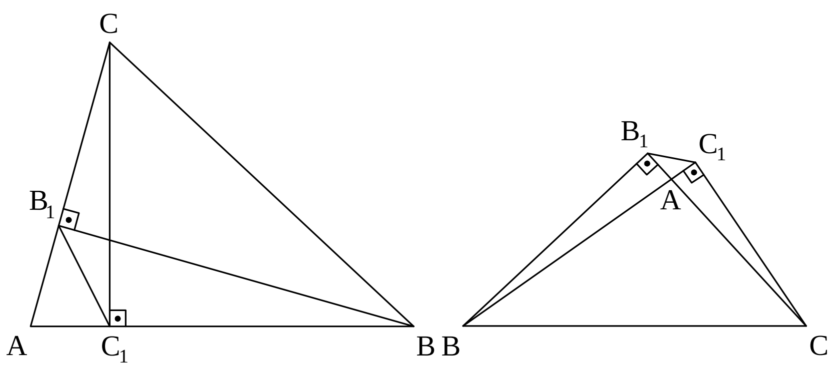
Доказательство. Углы BAC и BMN являются парой соответственных углов при параллельных прямых AC и MN. Поэтому $\angle BAC = \angle BMN$. Аналогично получаем, что $\angle BCA = \angle BNM$. Значит, треугольники ABC и MBN подобны по первому признаку подобия треугольников.

Утверждение 2. *Пусть отрезки AC и BD пересекаются в точке O, причём $AB||CD$. Тогда треугольники AOB и COD подобны.*



Доказательство. Углы OAB и OCD образуют пару внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых AB и CD и секущей AC. Поэтому $\angle OAB = \angle OCD$. С другой стороны, углы AOB и COD – вертикальные, значит, $\angle AOB = \angle COD$. Таким образом, треугольники AOB и COD подобны по первому признаку подобия треугольников.

Утверждение 3. *Пусть в треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Тогда треугольники AB_1C_1 и ABC подобны с коэффициентом подобия $|\cos\widehat{BAC}|$, а также подобны треугольники ABB_1 и ACC_1.*



Доказательство. При доказательстве этого утверждения необходимо рассмотреть два различных случая. Если угол A – острый, то точки B_1 и C_1 попадают либо на стороны AC и AB, либо на их продолжения за точки C и B. Независимо от этого, из прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1 вытекает, что

$$\frac{|AB_1|}{|AB|} = \cos\widehat{BAC}, \quad \frac{|AC_1|}{|AC|} = \cos\widehat{BAC}.$$

Пользуясь этим фактом и тем, что угол A – общий угол треугольников AB_1C_1 и ABC, мы получаем, что $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ по второму признаку подобия треугольников, причём коэффициент их подобия равен отношению длин их соответствующих сторон, то есть косинусу угла BAC. Подобие треугольников ABB_1 и ACC_1 вытекает из того, что углы AB_1B и AC_1C – прямые, а угол A – их общий угол. Стало быть, они подобны по первому признаку подобия треугольников.

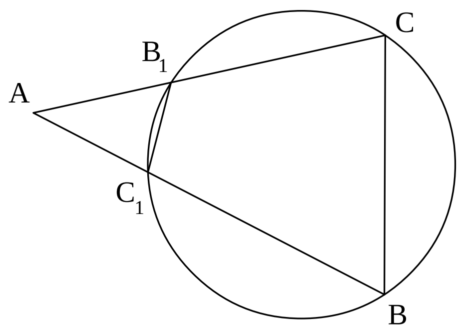
Если же угол A – тупой, то точки B_1 и C_1 попадают на продолжения сторон AC и AB за точку A. Тогда из прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1 получаем

$$\frac{|AC_1|}{|AC|} = \cos\widehat{CAC_1} = -\cos\widehat{BAC}, \quad \frac{|AB_1|}{|AB|} = \cos\widehat{BAB_1} = -\cos\widehat{BAC}.$$

Так же как и в предыдущем случае, с учётом того, что углы B_1AC_1 и BAC равны как вертикальные, мы заключаем, что $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ по второму признаку подобия треугольников, причём коэффициент их подобия равен $-\cos\widehat{BAC}$. Таким образом, в любом случае треугольники AB_1C_1 и ABC подобны с коэффициентом подобия $|\cos\widehat{BAC}|$.

Подобие треугольников ABB_1 и ACC_1 вытекает их того, что углы AB_1B и AC_1C – прямые, а углы B_1AB и C_1AC – вертикальные.

Утверждение 4. *Пусть окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Тогда треугольники AB_1C_1 и ABC подобны.*



Доказательство. Для доказательства этого утверждения воспользуемся тем фактом, что сумма величин противоположных углов четырёхугольника, вписанного в окружность, равна π. Применяя её к четырёхугольнику BC_1B_1C, получаем, что

$$\widehat{C_1BC} = \pi - \widehat{CB_1C_1}; \quad \widehat{B_1CB} = \pi - \widehat{BC_1B_1}.$$

С другой стороны, по свойству смежных углов

$$\widehat{AB_1C_1} = \pi - \widehat{CB_1C_1}; \quad \widehat{AC_1B_1} = \pi - \widehat{BC_1B_1}.$$

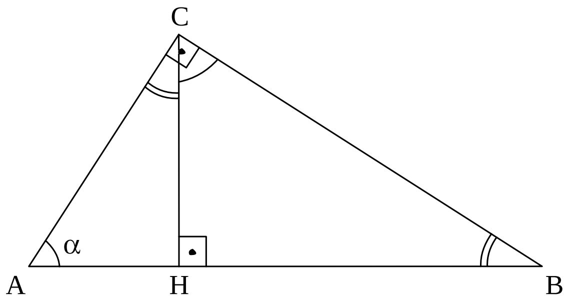
Их этих двух пар соотношений следует, что

$$\widehat{C_1BC} = \widehat{AB_1C_1}, \quad \widehat{B_1CB} = \widehat{AC_1B_1}.$$

Таким образом, треугольники AB_1C_1 и ABC подобны по первому признаку подобия треугольников.

З а м е ч а н и е. Утверждение 3 является частным случаем утверждения 4. В самом деле, если BC – диаметр окружности, а угол A – острый, то точки B_1 и C_1 лежат на сторонах AC и AB соответственно, углы BC_1C и CB_1B опираются на диаметр, поэтому они прямые. То есть отрезки BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC. Однако, в отличие от утверждения 3, утверждение 4 не дает никакой информации о коэффициенте подобия треугольников AB_1C_1 и ABC.

Утверждение 5. *Пусть CH – высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины его прямого угла C. Тогда треугольники ACH, CBH и ABC попарно подобны.*



Доказательство. Если обозначить величину угла BAC за α, то из прямоугольных треугольников ACH, ABC и CBH вытекает, что

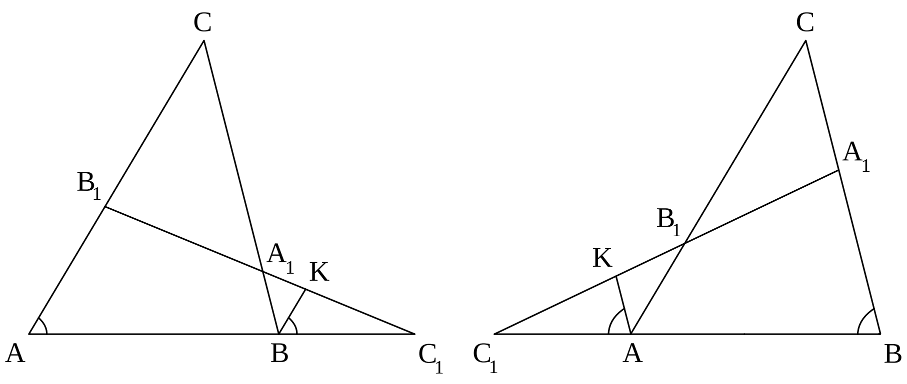
$$\widehat{ACH} = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \widehat{BCH} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha.$$

Поэтому любая пара перечисленных в формулировке утверждения треугольников подобна по первому признаку подобия треугольников.

Приведём еще две важные теоремы, которые часто используются для решения задач. Их доказательство проводится с использованием подобия треугольников.

Теорема Менелая. *Пусть прямая пересекает произвольный треугольник ABC, причём B_1 – точка её пересечения со стороной AC, A_1 – точка её пересечения со стороной BC и C_1 – точка её пересечения с продолжением стороны AB. Тогда*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Доказательство. Может возникнуть две различных ситуации: либо точка C_1 лежит на продолжении стороны AB за вершину B (левый рисунок), либо же она лежит на продолжении стороны AB за вершину A (правый рисунок).

Рассмотрим первый из этих случаев. Проведем отрезок BK (K лежит на прямой A_1C_1), параллельный стороне AC. Тогда по утверждению 1

$$\triangle BKC_1 \sim \triangle AB_1C_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AB_1|}{|BK|} = \frac{|AC_1|}{|BC_1|} \quad \Longleftrightarrow \quad |BK| = \frac{|AB_1| \cdot |BC_1|}{|AC_1|},$$

а по утверждению 2

$$\triangle A_1BK \sim \triangle A_1CB_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|BA_1|}{|CA_1|} = \frac{|BK|}{|CB_1|} \quad \Longleftrightarrow \quad |BK| = \frac{|BA_1| \cdot |CB_1|}{|CA_1|}.$$

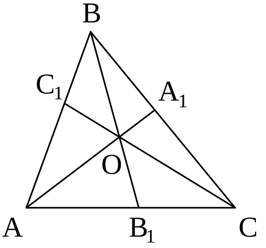
Из двух полученных соотношений вытекает, что

$$\frac{|AB_1| \cdot |BC_1|}{|AC_1|} = \frac{|BA_1| \cdot |CB_1|}{|CA_1|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Второй случай рассматривается абсолютно аналогично.

Теорема Чевы. *Пусть в треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах BC, AC и AB соответственно, причём отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Тогда*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Доказательство. Обозначим точку пересечения отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 буквой O и применим теорему Менелая для треугольников ABB_1 и CBB_1:

$$\frac{|B_1O|}{|OB|} \cdot \frac{|BC_1|}{|C_1A|} \cdot \frac{|AC|}{|CB_1|} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|C_1A| \cdot |CB_1|}{|BC_1|} = \frac{|B_1O| \cdot |AC|}{|OB|};$$

$$\frac{|B_1O|}{|OB|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CA|}{|AB_1|} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|AB_1| \cdot |A_1C|}{|BA_1|} = \frac{|B_1O| \cdot |AC|}{|OB|}.$$

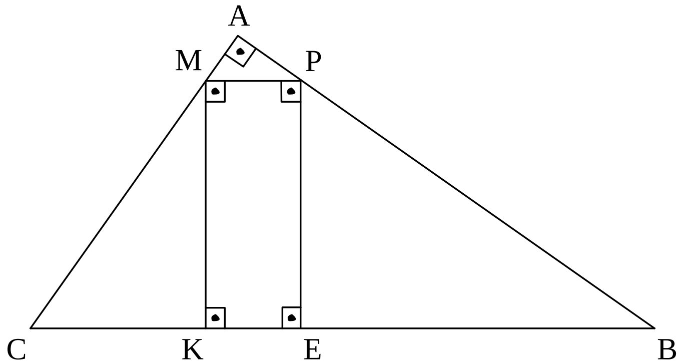
Приравняем левые части полученных соотношений:

$$\frac{|C_1A| \cdot |CB_1|}{|BC_1|} = \frac{|AB_1| \cdot |A_1C|}{|BA_1|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Теорема Чевы доказана.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. В прямоугольном треугольнике ABC, длины катетов AB и AC которого равны 4 и 3, расположен прямоугольник $EKMP$ так, что сторона EK лежит на гипотенузе BC, а вершины M и P – на катетах AC и AB соответственно. Найдите длины сторон прямоугольника $EKMP$, если его площадь равна $5/3$, а периметр меньше 9.



Р е ш е н и е. Обозначим длины сторон EP и MK прямоугольника $EKMP$ за x. Треугольники MKC и BAC подобны по первому признаку подобия, поскольку углы MKC и BAC – прямые, а угол C является их общим углом. Значит,

$$\frac{|MK|}{|AB|} = \frac{|KC|}{|AC|} \quad \Longrightarrow \quad |KC| = \frac{|MK| \cdot |AC|}{|AB|} = \frac{3x}{4}.$$

Аналогично получаем, что $\triangle PEB \sim \triangle CAB$, что даёт нам

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|EP|}{|AC|} \quad \Longrightarrow \quad |BE| = \frac{|EP| \cdot |AB|}{|AC|} = \frac{4x}{3}.$$

Далее заметим, что по теореме Пифагора $|BC| = 5$. Поскольку точки E и K лежат на стороне BC, то

$$|EK| = |BC| - |BE| - |KC| = 5 - \frac{3x}{4} - \frac{4x}{3} = \frac{60 - 25x}{12} = |MP|.$$

Теперь можно воспользоваться условием задачи про площадь и периметр прямоугольника $EKMP$.

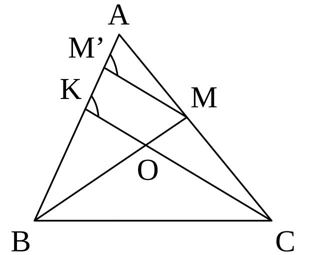
$$\begin{cases} S_{EKMP} = |EK| \cdot |EP|; \\ P_{EKMP} = |EK| + |EP| + |MP| + |MK|, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{5}{3} = x \cdot \dfrac{60 - 25x}{12}; \\ 2x + \dfrac{60 - 25x}{6} < 9, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 5x^2 - 12x + 4 = 0; \\ 60 - 13x < 54, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 2.$$

Таким образом, $|EP| = |MK| = 2, |EK| = |MP| = \dfrac{60 - 25 \cdot 2}{12} = \dfrac{5}{6}$.

О т в е т. $|EP| = |MK| = 2, |EK| = |MP| = \dfrac{5}{6}$.

П р и м е р 2. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки K и M соответственно. Найдите отношение, в котором точка пересечения прямых KC и BM делит отрезок BM, если $|AK|:|KB| = 2:3$, $|AM|:|MC| = 4:5$.



Р е ш е н и е. В такого сорта задачах, то есть в задачах, где даны какие-либо отношения длин отрезков, традиционно вводят по одной неизвестной на каждое отношение. Обозначим точку пересечения прямых KC и BM буквой O и положим $|AK| = 2x$, $|KB| = 3x$, $|AM| = 4y$, $|MC| = 5y$, тогда $|AB| = 5x$, $|AC| = 9y$.

Первый способ решения заключается в следующем: применим теорему Менелая к треугольнику ABM и секущей KO.

$$\frac{|AK|}{|KB|}\cdot\frac{|BO|}{|OM|}\cdot\frac{|MC|}{|CA|} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{|BO|}{|OM|} = \frac{9y}{5y}\cdot\frac{3x}{2x} = \frac{27}{10}.$$

Минусом этого способа решения является то, что теорема Менелая не входит в школьную программу и при использовании её в решении задач на экзаменах придется привести её доказательство.

Однако можно предложить другой способ решения, который использует идею, с помощью которой доказывается теорема Менелая. Раз мы ищем численное значение отношения $|BO|:|OM|$, то проведём из точки M отрезок MM', параллельный KC $(M' \in AB)$. Тогда по утверждению 1 треугольник $AM'M$ подобен треугольнику AKC, а треугольник BKO подобен треугольнику $BM'M$. Из этих подобий мы находим

$$\frac{|AM'|}{|AK|} = \frac{|AM|}{|AC|} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|AM'|}{2x} = \frac{4y}{9y} \quad\Longrightarrow\quad |AM'| = \frac{8x}{9};$$

$$\frac{|BM|}{|BO|} = \frac{|BM'|}{|BK|} = \frac{|AB|-|AM'|}{|BK|} = \frac{5x-\dfrac{8x}{9}}{3x} = \frac{37}{27}.$$

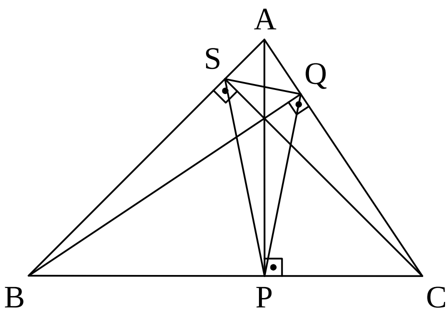
Теперь получить нужное нам отношение совсем просто:

$$\frac{|BM|}{|BO|} = \frac{37}{27} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|BO|}{|OM|} = \frac{|BO|}{|BM|-|BO|} = \frac{1}{\dfrac{|BM|}{|BO|}-1} = \frac{1}{\dfrac{37}{27}-1} = \frac{27}{10}.$$

О т в е т. $\dfrac{27}{10}$.

П р и м е р 3. Длины отрезков, соединяющих основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найдите площадь треугольника.

Р е ш е н и е. Обозначим вершины треугольника буквами A, B и C и проведём его высоты AP, BQ и CS. Без ограничения общности будем считать, что $|SP| = 13$, $|PQ| = 12$, $|QS| = 5$.



Пользуясь утверждением 3, мы находим три пары подобных треугольников: $\triangle CPQ \sim \triangle CAB$, $\triangle BSP \sim \triangle BCA$ и $\triangle AQS \sim \triangle ABC$, причём коэффициенты этих подобий в силу остроугольности треугольника ABC равны $\cos\widehat{ACB}$, $\cos\widehat{ABC}$ и $\cos\widehat{CAB}$ соответственно. Так что если нам удастся найти величины этих углов, то задача фактически будет решена, поскольку

$$\frac{|PQ|}{|AB|} = \cos\widehat{ACB}, \quad \frac{|SP|}{|AC|} = \cos\widehat{ABC}, \quad \frac{|QS|}{|BC|} = \cos\widehat{CAB},$$

то есть мы сможем найти длины сторон треугольника ABC. Заметим, что, помимо этого, эти подобия дают нам следующие соотношения на величины углов:

$$\widehat{CPQ} = \widehat{CAB}, \quad \widehat{CQP} = \widehat{CBA}, \quad \widehat{BSP} = \widehat{BCA}, \quad \widehat{BPS} = \widehat{BAC},$$
$$\widehat{AQS} = \widehat{ABC}, \quad \widehat{ASQ} = \widehat{ACB}.$$

Теперь мы легко получаем связь между величинами углов треугольника ABC и величинами углов треугольника PQS:

$$\widehat{QPS} = \pi - \widehat{CPQ} - \widehat{BPS} = \pi - 2\widehat{BAC} \iff \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{QPS}}{2};$$

$$\widehat{PSQ} = \pi - \widehat{BSP} - \widehat{ASQ} = \pi - 2\widehat{ACB} \iff \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{PSQ}}{2};$$

$$\widehat{SQP} = \pi - \widehat{AQS} - \widehat{CQP} = \pi - 2\widehat{ABC} \iff \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{SQP}}{2}.$$

Осталось посчитать необходимые нам косинусы. Заметим, что треугольник PQS прямоугольный (поскольку $13^2 = 12^2 + 5^2$). Тогда

$$\cos\widehat{QPS} = \frac{|PQ|}{|SP|} = \frac{12}{13}, \quad \cos\widehat{PSQ} = \frac{|QS|}{|SP|} = \frac{5}{13}, \quad \widehat{SQP} = \frac{\pi}{2} \implies \widehat{ABC} = \frac{\pi}{4};$$

$$\cos\widehat{BAC} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{QPS}}{2}\right) = \sin\frac{\widehat{QPS}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\widehat{QPS}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}};$$

$$\cos\widehat{ACB} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{PSQ}}{2}\right) = \sin\frac{\widehat{PSQ}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\widehat{PSQ}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

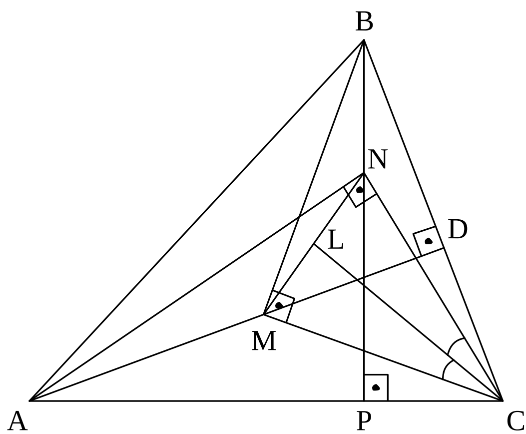
Таким образом мы вычислили все коэффициенты подобия. Осталось найти длины нужных нам сторон треугольника ABC:

$$|AB| = \frac{|PQ|}{\cos\widehat{ACB}} = 6\sqrt{13}, \quad |BC| = \frac{|QS|}{\cos\widehat{BAC}} = 5\sqrt{26};$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{13}\cdot 5\sqrt{26}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 195.$$

О т в е т. 195.

П р и м е р 4. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP – точка N так, что углы BMC и ANC – прямые. Известно, что $\widehat{MCN} = 30^\circ$, $|MN| = 4+2\sqrt{3}$. Найдите длину биссектрисы CL треугольника MCN.



Р е ш е н и е. В условии этой задачи даны лишь два элемента треугольника MCN. Это означает, что нам надо каким-то образом из условий про расположение точек N и M получить ещё одно соотношение на элементы треугольника MCN. Заметим, что по утверждению 5 треугольник NCP подобен треугольнику ACN, треугольник CMD подобен треугольнику CBM, и воспользуемся этими подобиями:

$$\frac{|CN|}{|AC|} = \frac{|CP|}{|CN|} \Longrightarrow |CN|^2 = |AC|\cdot|CP|;$$

$$\frac{|CM|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|CM|} \Longrightarrow |CM|^2 = |BC|\cdot|CD|.$$

С другой стороны, из утверждения 3 вытекает, что треугольники ADC и BPC также подобны, поэтому

$$\frac{|CD|}{|CP|} = \frac{|AC|}{|BC|} \quad \Longrightarrow \quad |AC|\cdot|CP| = |BC|\cdot|CD|.$$

Таким образом, $|CM|^2 = |CN|^2$, то есть $|CM| = |CN|$. Следовательно, треугольник MCN равнобедренный, CL – его биссектриса, медиана и высота. С учётом этого находим

$$|CL| = \frac{1}{2}\cdot|MN|\cdot \operatorname{ctg} 15^\circ = (2+\sqrt{3})\cdot\frac{1+\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 7+4\sqrt{3}.$$

О т в е т. $7+4\sqrt{3}$.

Задачи

1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B опущена высота BD на гипотенузу AC. Известно, что $|AB| = 13$, $|BD| = 12$. Найдите площадь треугольника ABC.

2. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 11.2, а длина высоты AE равна 12. Точка E лежит на стороне BC, причём $|BE| : |EC| = 5 : 9$. Найдите длину стороны AC.

3. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 8, величина угла ACB равна $\pi/3$. Прямая, параллельная стороне AB, пересекает сторону AC в точке D, а сторону BC в точке E. Известно, что $|BC| = |DC|$, $|DE| = 3$. Найдите $|BC|$.

4. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе прямоугольного треугольника, касается его катетов. Найдите длину радиуса этой окружности, если длины катетов треугольника равны 3 и 4.

5. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC в точках E и D соответственно. Найдите величину угла ABC, если $|AE| = 1$, $|BD| = 3$.

6. В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AB равна 6, а длина высоты, проведённой к основанию AD, равна 3. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $|MC| = 4$. N – точка пересечения отрезков AM и BD. Вычислите площадь треугольника BNM.

7. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, длина радиуса которой равна 3. Прямая p касается этой окружности и параллельна прямой AC, но не совпадает с ней. Расстояние от точки B до прямой p равно 3. Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC.

8. В ромбе $ABCD$ проведены высоты BP и BQ. Они пересекают диагональ AC в точках M и N соответственно (M между A и N). Известно, что $|AM| = p$, $|MN| = q$. Найдите $|PQ|$.

9. На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OB взята точка M на расстоянии $3 \cdot |OA|$ от прямой OA, а на луче OA – точка N на расстоянии $3 \cdot |OB|$ от прямой OB. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника AOB, равна 3. Найдите $|MN|$.

10. В треугольнике ABC угол C – тупой, D – точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведённая из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $|AM| = a$, $|MB| = b$. Найдите $|AC|$.

11. На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR – точка L, причем $|NQ| = |LR|$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении $m : n$, считая от точки Q. Найдите значение отношения $|PN| : |PR|$.

12. В треугольнике ABC на стороне AC взяты точки P и Q таким образом, что $|AP| > |AQ|$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $|PQ| = 3$. Найдите длину стороны AC.

13. В треугольнике ABC взяты точка K на стороне AB и точка M на стороне AC так, что $|AK| : |KB| = 3 : 2$, $|AM| : |MC| = 4 : 5$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC, делит отрезок BM.

14. В треугольнике ABC взяты точка N на стороне AB и точка M на стороне AC. Отрезки CN и BM пересекаются в точке O. Вычислите $|CO| : |ON|$, если известно, что $|AN| : |NB| = 2 : 3$, $|BO| : |OM| = 5 : 2$.

15. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB пополам, а точка E лежит на стороне BC, причем $|BC| = 3|BE|$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O, $|AE| = 5$, $|OC| = 4$, $\widehat{AOC} = 120^\circ$. Найдите длину стороны AB.

16. В треугольнике ABC точки D, E и F расположены на сторонах AB, BC и AC соответственно. Известно, что $|AD| : |DB| = 1 : 2$, $|BE| : |EC| = 2 : 3$, $|AF| : |FC| = 1 : 1$. Отрезки DE и BF пересекаются в точке K. Вычислите отношение $|BK| : |KF|$.

17. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 6, длина медианы CE равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1. Найдите длину стороны AB.

18. В треугольнике ABC из вершин A и B проведены отрезки AD и BE, причём точки D и E лежат на сторонах BC и AC соответственно. Отрезки AD и BE пересекаются в точке Q таким образом, что $|AQ| : |QD| = x$, $|BQ| : |QE| = y$. Найдите значения отношений $|AE| : |EC|$ и $|BD| : |DC|$.

19. В треугольнике PQR точка T лежит на стороне PR так, что $\widehat{QTR} = \widehat{PQR}$. Известно, что $|PT| = 8$, $|TR| = 1$. Найдите:

    а) длину стороны QR;

    б) величину угла QRP, если длина радиуса описанной около треугольника PQT окружности равна $3\sqrt{3}$.

20. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, длина радиуса которой равна $2\sqrt{5}$, отсекающая от прямой BC отрезок длины $4\sqrt{5}$ и касающаяся прямой AC в точке A. Из точки B проведён перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите площадь треугольника ABC, если $|BF| = 2$.

21. Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки O, M, E, C лежат на одной окружности, $|BE| = |AM| = 3$. Найдите $|AB|$.

22. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки D, E и F соответственно. Отрезки AE и DF проходят через центр вписанной в треугольник ABC окружности, а прямые DF и BC параллельны. Найдите длину отрезка BE и периметр треугольника ABC, если известно, что $|BC| = 15$, $|BD| = 6$, $|CF| = 4$.

23. Прямая, параллельная медиане AD прямоугольного треугольника ABC, пересекает его гипотенузу BC в точке F, катет AB в точке E и прямую AC в точке H. Известно, что $|EF| = 1$, $|EH| = 3$. Найдите длину гипотенузы BC.

24. На сторонах AB и AD прямоугольника $ABCD$ выбраны точки P и Q $(P \in AB)$ так, что $\angle CQD = \angle AQP = \angle BPC$. Вычислите длину отрезка AP, если $|AB| = b$, $|AD| = d$ $(b > d)$.

25. Прямые, содержащие высоты треугольника ABC, пересекаются в точке H. Известно, что $|BH| = 6$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Найдите длину стороны AC.

26. В треугольнике ABC расположен прямоугольник $PQRS$ так, что сторона PQ лежит на отрезке AC, а вершины R и S – на отрезках BC и AB соответственно. Найдите длину отрезка PS, если известно, что $|AP| = 1$, $|PQ| = 5$, $|QC| = 2$, а периметр треугольника BRS равен 15.

27. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята точка D таким образом, что $\widehat{BDC} = \widehat{BAL} = \pi/3$, $|AD| = 10$. Найдите площадь треугольника ABC.

28. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BD, а на гипотенузе BC взята точка H так, что $DH \perp BD$. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $|CH| = 1$, $|CD| = 2$.

29. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle AMD = \angle ADB$ и $\angle ACM = \angle ABC$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $|CD| = 20$. Найдите длину радиуса вписанной в треугольник ACD окружности.

30. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно таким образом, что $\widehat{BAC} = \widehat{BNM} = \pi/6$. Также известно, что $|AM| = |CN|$. Найдите отношение периметра треугольника ABC к сумме длин его медиан.

31. Найдите пару подобных треугольников, длины всех сторон которых выражаются целыми числами, если известно, что длины двух сторон первого треугольника равны длинам двух сторон второго треугольника, а длины их третьих сторон отличаются на 61.

1.5. Площадь треугольника

Теоретический материал

В этом разделе рассматриваются различные факты, связанные с площадями треугольников. Для успешного решения задач, относящихся к этой теме, необходимо знать и уметь обосновывать все леммы, приведённые ниже.

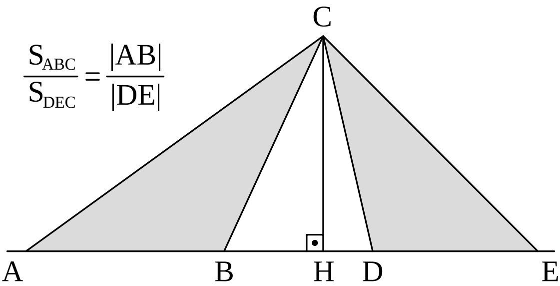
Сначала сформулируем два утверждения, которые следует воспринимать как аксиомы.

Утверждение 1. *Равные фигуры имеют одинаковые площади.*

Утверждение 2. *Если фигура F состоит из двух непересекающихся фигур F_1 и F_2, то площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_1 и F_2.*

Теперь докажем пять лемм, с помощью которых решается большинство задач, связанных с площадями треугольников и многоугольников.

Лемма 1. *Если два треугольника имеют общую вершину, а их стороны, противолежащие этой вершине, лежат на одной прямой, то отношение площадей этих треугольников равно отношению длин указанных сторон.*

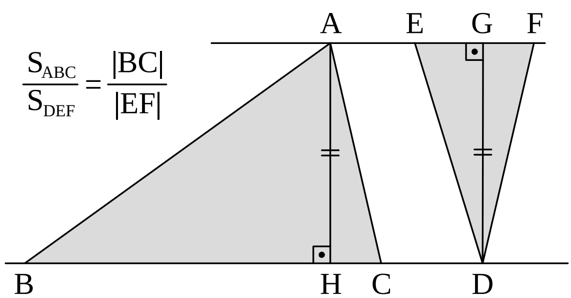


Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и DEC, стороны AB и DE которых лежат на одной прямой. Опустим из точки C перпендикуляр CH на эту прямую, тогда, очевидно, отрезок CH будет являться как высотой треугольника ABC, так и высотой треугольника DEC. Наконец, воспользуемся формулой площади треугольника, в которую входят длина его стороны и длина его высоты:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH|, \quad S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |CH| \quad \Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{|AB|}{|DE|}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если некоторая вершина и противолежащая ей сторона одного треугольника и некоторая вершина и противолежащая ей сторона другого треугольника лежат на двух параллельных прямых, то отношение площадей этих треугольников равно отношению длин указанных сторон.*

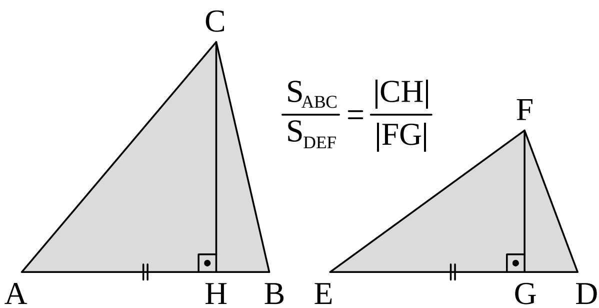


Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и DEF, будем считать, что сторона BC и точка D лежат на одной прямой, а сторона EF и точка A лежат на другой прямой, причём эти прямые параллельны. Проведём высоты AH и DG этих треугольников, тогда длины отрезков AH и DG будут равны, поскольку каждый из них перпендикулярен обеим прямым. После этого воспользуемся формулой площади треугольника, в которую входят длина его стороны и длина его высоты:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AH|, \quad S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot |DG| \quad \Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{|BC|}{|EF|}.$$

Случай, когда вершины A и D лежат на одной прямой, а стороны BC и EF лежат на другой прямой, рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если длина некоторой стороны одного треугольника равна длине некоторой стороны другого треугольника, то отношение площадей этих треугольников равно отношению длин их высот, проведённых к указанным сторонам.*



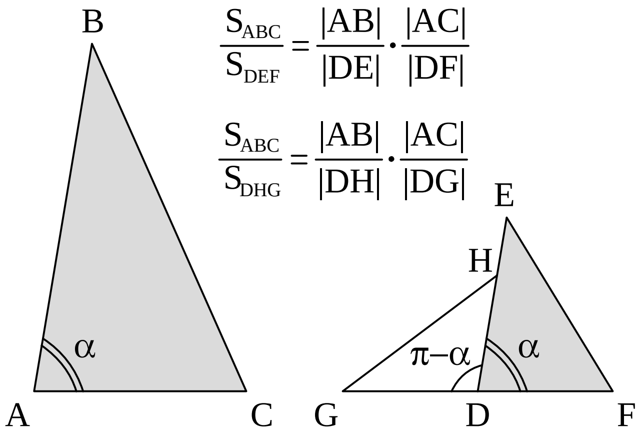
Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и DEF, длины сторон AB и DE которых равны. Проведём высоты CH и FG этих треугольников, и воспользуемся формулой площади треугольника, в которую входят длина его стороны и длина его высоты:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH|, \quad S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |FG| \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH|}{\frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |FG|} = \frac{|CH|}{|FG|}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если некоторый угол одного треугольника равен некоторому углу другого треугольника или углу, смежному с ним, то отношение площадей этих треугольников равно отношению произведений длин их сторон, образующих указанные углы.*



Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и DEF, будем считать, что углы BAC и EDF равны, а величины этих углов равны α. Применим формулу площади треугольника, в которую входят длины его сторон и синус величины угла между ними:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \widehat{BAC}, \quad S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \sin \widehat{EDF} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |DF| \cdot \sin \alpha} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DE| \cdot |DF|}.$$

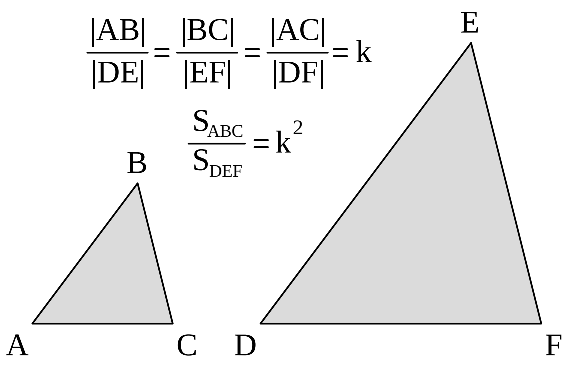
Теперь рассмотрим треугольники ABC и DGH, ясно, что угол BAC равен углу, смежному с углом GDH. Поскольку сумма величин смежных углов равна π, то $\widehat{GDH} = \pi - \widehat{EDF} = \pi - \alpha$. Тогда с учётом того, что $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, получаем

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \widehat{BAC}, \quad S_{\triangle DGH} = \frac{1}{2} \cdot |DG| \cdot |DH| \cdot \sin \widehat{GDH} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DGH}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot |DG| \cdot |DH| \cdot \sin(\pi - \alpha)} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DG| \cdot |DH|}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если два треугольника подобны с коэффициентом подобия k, то отношение их площадей равно k^2.*



Доказательство. Рассмотрим подобные треугольники ABC и DEF, пусть

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k.$$

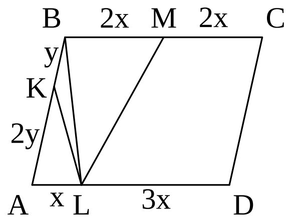
Поскольку соответственные углы подобных треугольников равны, то применима лемма 4, что дает нам

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DE| \cdot |DF|} = \frac{|AB|}{|DE|} \cdot \frac{|AC|}{|DF|} = k \cdot k = k^2.$$

Лемма доказана.

Примеры решения задач

Пример 1. На сторонах AB, BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, M и L соответственно. Найдите отношение площадей треугольников KBL и BML, если $|AK|:|KB| = 2:1$, $|BM|:|MC| = 1:1$, $|AL|:|LD| = 1:3$.



Решение. Обозначим длину отрезка AL за x, а длину отрезка KB обозначим за y. Тогда, в соответствии с условием задачи, $|LD| = 3x$, $|AD| = 4x$, $|AK| = 2y$, $|AB| = 3y$. Поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то, во-первых, $BC||AD$ и, во-вторых, $|BC| = |AD| = 4x$, из чего вытекает, что $|BM| = |MC| = \dfrac{1}{2}|BC| = 2x$.

Замечание. Если в задаче требуется найти отношение площадей треугольников, то удобно меньшую площадь обозначить за S и выразить через неё большую площадь, возможно, используя промежуточные треугольники. Всегда полезно сначала составить план, а только потом проводить вычисления.

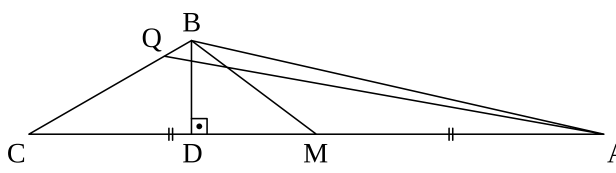
Итак, обозначим площадь треугольника KBL за S и выразим через неё последовательно площади треугольников $S_{\Delta KBL} \longrightarrow S_{\Delta ABL} \longrightarrow S_{BML}$. Теперь, пользуясь леммами 1 и 2, получаем

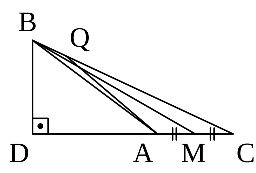
$$\frac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle KBL}} = \frac{|AB|}{|KB|} = 3 \Longrightarrow S_{\Delta ABL} = 3S; \;\; \frac{S_{\triangle BML}}{S_{\triangle ABL}} = \frac{|BM|}{|AL|} = 2 \Longrightarrow S_{\Delta BML} = 6S.$$

Следовательно, $\dfrac{S_{\triangle KBL}}{S_{\triangle BML}} = \dfrac{S}{6S} = \dfrac{1}{6}$.

Ответ. $1:6$.

Пример 2. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 3, длина медианы BM равна 5. На стороне BC взята точка Q так, что $|BQ| = 1$, $|QC| = 5$. Найдите площадь треугольника AQC, если известно, что она больше трёх.





Решение. Сначала получим соотношение, связывающее площади треугольников ABC и AQC. Применяя к ним лемму 1, находим

$$\frac{S_{\triangle AQC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|QC|}{|BC|} = \frac{5}{6} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle AQC} = \frac{5}{6} \cdot S_{\triangle ABC}.$$

Для вычисления площади треугольника ABC нам необходимо вычислить длину его основания AC, поскольку длина его высоты BD нам уже известна. Поступим следующим образом: сначала запишем теорему Пифагора для треугольников BDM и BDC:

$$|DM|^2 = |BM|^2 - |BD|^2 = 25 - 9 = 16 \quad \Longrightarrow \quad |DM| = 4,$$
$$|DC|^2 = |BC|^2 - |BD|^2 = 36 - 9 = 27 \quad \Longrightarrow \quad |DC| = 3\sqrt{3}.$$

Далее заметим, что возможно две различных конфигурации. Если точка M лежит между точками D и C (правый чертёж), то

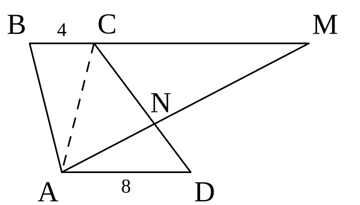
$$|CM| = |DC| - |DM| = 3\sqrt{3} - 4, \quad |AC| = 2|CM| = 2\cdot(3\sqrt{3}-4),$$
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD| = 3\cdot(3\sqrt{3}-4), \quad S_{\triangle AQC} = \frac{5}{2}\cdot(3\sqrt{3}-4) < 3.$$

Таким образом, эта конфигурация нам не подходит. Если же точка D лежит между точками M и C (левый чертёж), то

$$|CM| = |DC| + |DM| = 3\sqrt{3} + 4, \quad |AC| = 2|CM| = 2\cdot(3\sqrt{3}+4),$$
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD| = 3\cdot(3\sqrt{3}+4), \quad S_{\triangle AQC} = \frac{5}{2}\cdot(3\sqrt{3}+4) > 3.$$

О т в е т. $\dfrac{15\sqrt{3}+20}{2}$.

П р и м е р 3. В трапеции $ABCD$ на продолжении основания BC взята точка M таким образом, что прямая AM отсекает от трапеции $ABCD$ треугольник, площадь которого в 4 раза меньше площади трапеции $ABCD$. Найдите длину отрезка CM, если $|AD| = 8$, $|BC| = 4$.



Р е ш е н и е. Обозначим точку пересечения отрезков AM и CD буквой N. Так как треугольники AND и MNC подобны, то для ответа на вопрос задачи нам не хватает отношения $|DN| : |NC|$, которое легко получить, используя отношение площадей из условия задачи. Для того чтобы эффективно воспользоваться леммами о площадях треугольников, проведём диагональ AC. Тогда с учётом того, что $AD||BC$, по лемме 2 мы находим, что отношение площадей треугольников ACD и ABC будет равно отношению длин отрезков AD и BC, то есть 2. Таким образом, площадь треугольника ACD равна двум третям площади трапеции $ABCD$ и, по лемме 1,

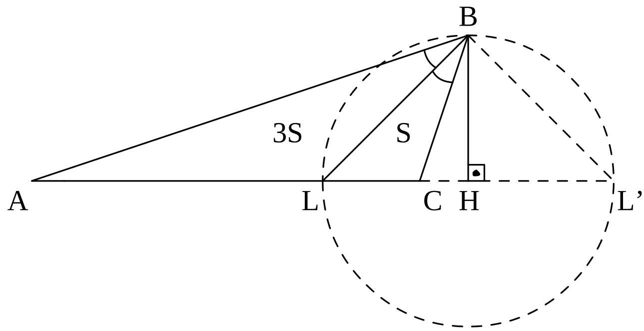
$$\frac{S_{\triangle AND}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{|DN|}{|CD|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\frac{1}{4}S_{ABCD}}{\frac{2}{3}S_{ABCD}} = \frac{|DN|}{|CD|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|DN|}{|CD|} = \frac{3}{8} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|DN|}{|NC|} = \frac{3}{5}.$$

Наконец, из подобия треугольников AND и MNC получаем

$$\frac{|AD|}{|CM|} = \frac{|DN|}{|NC|} = \frac{3}{5} \quad \Longrightarrow \quad |CM| = \frac{5}{3}\cdot|AD| = \frac{40}{3}.$$

О т в е т. $\dfrac{40}{3}$.

П р и м е р 4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $|AC| = 8$, а площади треугольников ABL и BLC относятся как 3:1. Найдите длину биссектрисы BL, при которой длина высоты, опущенной из вершины B на основание AC, будет наибольшей.



Р е ш е н и е. По лемме 1 и по основному свойству биссектрисы мы получаем, что $3 = \dfrac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle BLC}} = \dfrac{|AL|}{|LC|} = \dfrac{|AB|}{|BC|}$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Обозначим $|BC| = x$, тогда $|AB| = 3x$, $p_{\triangle ABC} = 2x + 4$, и применим формулу Герона:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{(2x+4)(2x+4-8)(2x+4-3x)(2x+4-x)} = \sqrt{(4x^2-16)(16-x^2)}.$$

Используя свойства квадратичной функции, мы получаем, что максимум правой части достигается при $x^2 = 10$, то есть $|BC| = \sqrt{10}$, $|AB| = 3\sqrt{10}$. Теперь осталось лишь воспользоваться формулой длины биссектрисы:

$$|BL|^2 = |AB| \cdot |BC| - |AL| \cdot |LC| = 30 - 12 = 18 \quad \Longrightarrow \quad |BL| = \sqrt{18}.$$

Второй способ. Докажем, что геометрическое место точек B, удовлетворяющих условию $|AB| : |BC| = 3$, есть окружность, диаметром которой является отрезок LL', где L' – точка пересечения биссектрисы угла, смежного с углом ABC, и прямой AC. В самом деле точки L и L' принадлежат этому геометрическому месту, так как по основному свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $|AL| : |LC| = 3$, а по свойству биссектрисы внешнего угла треугольника (которое доказывается точно так же, как и свойство биссектрисы внутреннего угла, – надо дважды применить теорему синусов) $|AL'| : |L'C| = 3$. При этом расположение точек L и L' никак не зависит от расположения точки B. Наконец, заметим, что угол LBL' прямой, так как он является углом между биссектрисами смежных углов. Отсюда и следует наше утверждение.

После этого из свойств биссектрис внутреннего и внешнего угла мы получаем $|CL| = 2$, $|CL'| = 4$, $|LL|' = 6$, то есть длина радиуса окружности, на которой лежит точка B, равна 3. Отметим, что так как

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BH| \cdot |AC| = 4|BH|,$$

то площадь треугольника ABC будет максимальна тогда, когда максимальна длина высоты BH. Из геометрических соображений понятно, что наибольшая возможная длина высоты BH равна 3, причём точка H является центром нашей окружности, то есть $|LH| = 3$. Наконец, применяя теорему Пифагора в треугольнике BLH, мы находим нужную нам величину: $|BL| = \sqrt{|BH|^2 + |LH|^2} = \sqrt{18}$.

Ответ. $\sqrt{18}$.

Задачи

1. На стороне KM треугольника KLM, площадь которого равна 4, взята точка N таким образом, что $|KM| = 4|MN|$. Найдите длину отрезка LN, если длина стороны KL равна $2\sqrt{3}$, а $\widehat{KLN} = \pi/3$.

2. Центр O окружности, длина радиуса которой равна 3, лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Его катеты касаются этой окружности. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $|OC| = 5$.

3. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол ABC – прямой) взята точка D таким образом, что площади треугольников ABD и BCD соответственно в три и в четыре раза меньше площади треугольника ABC. Найдите длину отрезка BD, если $|AD| = a$, $|DC| = c$.

4. В трапеции $ABCD$ $|CD| = 12$, боковая сторона AD перпендикулярна основаниям, а её длина равна 9. Длина отрезка AO, где O – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$, равна 6. Найдите площадь треугольника BOC.

5. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр делит на части 5 м и 7 м. Найдите площадь треугольника.

6. В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AC равна 2, величина угла ACB равна $\pi/6$. Из вершины A к боковой стороне BC проведены медиана AD и биссектриса AE. Найдите площадь треугольника ADE.

7. В треугольнике FGH угол G – прямой, $|FG| = 8$, $|GH| = 2$. Точка D лежит на стороне FH, A и B – точки пересечения медиан треугольников FGD и DGH соответственно. Найдите площадь треугольника GAB.

8. Дан треугольник ABC, площадь которого равна 2. На его медианах AK, BL и CN взяты соответственно точки P, Q и R так, что $|AP| = |PK|$, $|QL| = 2|BQ|$, $|CR| : |RN| = 5 : 4$. Найдите площадь треугольника PQR.

9. Точка N лежит на гипотенузе AC прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точка M расположена на катете AB таким образом, что угол MNC прямой. Известно, что площадь треугольника MNC составляет три восьмых площади треугольника ABC. Вычислите отношение $|AN| : |NC|$.

10. Прямоугольные треугольники ABC и ABD имеют общую гипотенузу AB, длина которой равна 5. Точки C и D расположены по разные стороны от прямой AB, $|BC| = |BD| = 3$. Точка E лежит на стороне AC, $|EC| = 1$. Точка F лежит на стороне AD, $|FD| = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ECBDF$.

11. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника DEF равна 5.

12. В ромбе $ABCD$ перпендикуляр к стороне AD, восстановленный из её середины, пересекает диагональ AC в точке M, а перпендикуляр к стороне CD, восстановленный из её середины, пересекает диагональ AC в точке N. Найдите отношение площадей треугольника MND и ромба $ABCD$, если $\widehat{BAD} = \pi/3$.

13. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что $|AC| = a$, $|BC| = b$.

14. На сторонах KL и LM треугольника KLM взяты точки A и B соответственно. Отрезки KB и MA пересекаются в точке C. Найдите площадь треугольника ALC, если известно, что площади треугольников KAC, MBC и KCM равны соответственно 12, 50 и 45.

15. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E, а на стороне AD взята точка F, причём $|AC| = 3|AE|$, $|AD| = 4|AF|$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырёхугольника $ABGE$, где G – точка пересечения прямой FE и отрезка BC, равна 8.

16. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K, а на стороне BC взята точка L так, что $|AK| : |BK| = 1 : 2$, $|CL| : |BL| = 2 : 1$. Пусть Q – точка пересечения прямых AL и CK. Найдите площадь треугольника ABC, если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.

17. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M. Через точку M проведён перпендикуляр ML к стороне AC треугольника ABC (точка L – основание этого перпендикуляра). Найдите величину угла BCA, если известно, что площадь треугольника ABC равна 1, а площадь четырёхугольника $LMBC$ равна S.

18. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в 7 раз меньше площади четырёхугольника $ABDE$. Найдите $|DE|$ и длину радиуса окружности, если $|AB| = 4$, $\widehat{C} = 45^\circ$.

19. На стороне AB треугольника ABC взята точка E, а на стороне BC – точка D так, что $|AE| = 2$, $|CD| = 1$. Прямые AD и CE пересекаются в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $BDOE$, если $|AB| = |BC| = 8$, $|AC| = 6$.

20. На плоскости лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого катеты имеют длину a. Поворотом в этой плоскости данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на угол 45° получается другой равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите площадь четырёхугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.

21. Длина радиуса вписанной в равнобедренный треугольник ABC окружности равна 4, $|AC| = |BC|$. На прямой AB взята точка D, удалённая от прямых AC и BC на расстояния 11 и 3 соответственно. Найдите $\cos\widehat{DBC}$.

22. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P – середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2|CD| = 3|RD|$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника APQ, если известно, что $|AD| = 2|BC|$.

23. В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны, причём $|CD| = 2|AB|$. На сторонах AD и BC выбраны соответственно точки P и Q таким образом, что $|DP| : |PA| = 2 : 1$, $|BQ| : |QC| = 3 : 4$. Найдите отношение площадей четырёхугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

24. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC таким образом, что $|BP| : |PQ| : |QC| = 1 : 2 : 3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника таким образом, что $|AR| : |RC| = 1 : 2$. Чему равно отношение площади четырёхугольника $PQST$ к площади треугольника ABC, если S и T – точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?

25. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, проведены биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $ADOE$, если $|BC| = a$, $|AC| = b$.

26. Длина высоты трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $|AO| : |OC| = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника OEC.

27. В прямоугольном треугольнике величина меньшего из углов равна α. Прямая, перпендикулярная гипотенузе, делит этот треугольник на две части, равные по площади. Найдите, в каком отношении она делит гипотенузу.

28. Через вершину A и середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $OMCD$.

29. В треугольнике ABC градусная мера угла A равна 45°, а угол C – острый. Из середины стороны BC на сторону AC опущен перпендикуляр MN. Найдите градусные меры углов треугольника ABC, если площади треугольников MNC и ABC относятся как $1 : 8$.

30. Точка O является центром окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. Известно, что отношение площадей треугольников AOC и ABC равно $k : k+1$. Найдите величины острых углов треугольника ABC. При каких k задача имеет решение?

31. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, $|AD| = 2|DC|$. На стороне BC взята точка E таким образом, что площадь треугольника AED равна 1. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников ABO и OED, если площадь треугольника ABD равна 3.

32. На отрезке AB лежат точки C и D, причём точка C – между точками A и D. Точка M взята так, что перпендикулярны прямые AM и MD, а также перпендикулярны прямые CM и MB. Найдите площадь треугольника CMD, если известно, что $\widehat{CMD} = \alpha$, а площади треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.

33. Точка F лежит на продолжении за точку C стороны BC параллелограмма $ABCD$. Отрезок AF пересекает диагональ BD в точке E и сторону CD в точке G. Известно, что $|GF| = 3$, $|AE| = |EG| + 1$. Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника AED?

34. Отрезок BL является биссектрисой треугольника ABC. На продолжении его стороны AC за точку C взята точка M таким образом, что угол LBM прямой. Найдите площадь треугольника CBL, если известно, что площади треугольников ABL и CBM равны 10 и 15 соответственно.

35. Точки D и E являются соответственно серединами сторон AC и BC равностороннего треугольника ABC. Точка F лежит на отрезке CD, отрезки BF и DE пересекаются в точке M. Найдите длину отрезка MF, если известно, что площадь четырёхугольника $ABMD$ составляет пять восьмых площади треугольника ABC, а $|AB| = a$.

36. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки K и L таким образом, что $|BL| = |LC|$, $|BK| = |KL|$. Точки D и F лежат соответственно на продолжениях отрезков AL и AK за точки L и K так, что $|KF| = 2|AL|$, $|LD| = |AK|$. Вычислите отношение площадей четырёхугольника $KLDF$ и треугольника ABC, если известно, что $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{ACB} = \gamma$.

2. Окружности

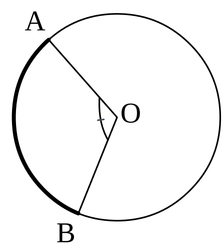
2.1. Углы в окружностях

Теоретический материал

1. Центральные углы

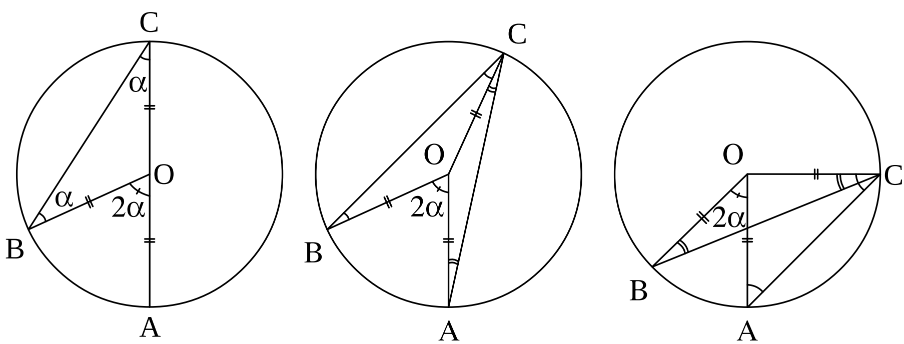
Центральный угол измеряется *дугой окружности, на которую он опирается:* $\widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$.

Этот факт вытекает из определения радианной меры угла. В самом деле, если взять окружность единичного радиуса, то радианная мера центрального угла будет в точности равна длине отсекаемой им дуги. Если же длина радиуса окружности не равна единице, то радианная мера центрального угла будет равна отношению длины дуги, отсекаемой этим углом, и радиуса окружности. Видно, что в любом случае есть взаимно однозначное соответствие между радианной мерой угла и длиной дуги окружности, поэтому в дальнейшем под словами **"мера дуги"** мы будем понимать отношение её длины и длины радиуса окружности.



2. Вписанные углы

Вписанный угол, т.е. угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, равен по величине половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности (измеряется *половиной дуги окружности, на которую он опирается):* $\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} = \dfrac{1}{2}\,\overset{\frown}{AB}$.



Для доказательства этого утверждения обозначим величину центрального угла AOB за 2α и рассмотрим три случая: центр окружности может лежать внутри вписанного угла, вне его, или на одной из его сторон.

Если центр окружности попадает на сторону угла ACB (левый чертёж), то из того, что углы AOB и BOC смежные, вытекает, что $\widehat{BOC} = \pi - 2\alpha$, а из того, что треугольник BOC равнобедренный, имеем $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{BOC}) = \alpha$.

Если центр окружности попадает внутрь угла ACB (центральный чертёж), то в этом случае $\widehat{ACB} = \widehat{BCO} + \widehat{ACO}$. Треугольники BOC и AOC равнобедренные, поэтому

$$\widehat{BCO} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{BOC}),\ \widehat{ACO} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{AOC}) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{BCO} + \widehat{ACO} = \pi - \frac{1}{2}(\widehat{BOC} + \widehat{AOC}) = \pi - \frac{1}{2}(2\pi - \widehat{AOB}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \alpha.$$

Наконец, если центр окружности лежит вне угла ACB (правый чертёж), то тогда $\widehat{ACB} = \widehat{ACO} - \widehat{BCO}$. Треугольники BOC и AOC равнобедренные, значит,

$$\widehat{BCO} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{BOC}),\ \widehat{ACO} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{AOC}) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{ACO} - \widehat{BCO} = \frac{1}{2}(\widehat{BOC} - \widehat{AOC}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \alpha.$$

Утверждение доказано.

Отметим важные следствия этого факта:

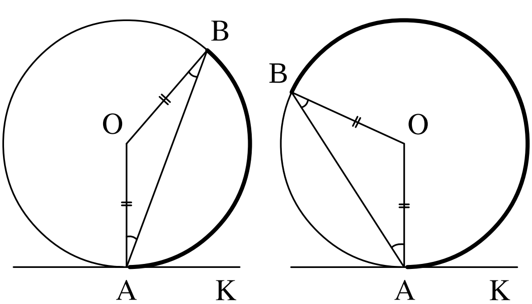
- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу (или на равные по величине дуги), равны.
- Если вписанные углы равны, то равны и дуги, на которые они опираются.
- Если две параллельные прямые пересекают окружность, то заключенные между ними дуги равны.
- Если две прямые пересекают окружность и заключенные между ними дуги равны, то прямые параллельны.

Первые два утверждения просто следуют из доказанного выше утверждения, а для доказательства двух последних достаточно вспомнить свойства и признаки параллельных прямых.

3. Углы между хордой и касательной

Угол между хордой и касательной равен по величине половине меры заключённой внутри него дуги окружности:

$$\widehat{BAK} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$



Для обоснования этого факта разберём два случая. Если угол BAK острый, то

$$\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BAK},$$

$$\widehat{AOB} = \pi - 2\cdot\widehat{OAB} = 2\cdot\widehat{BAK}.$$

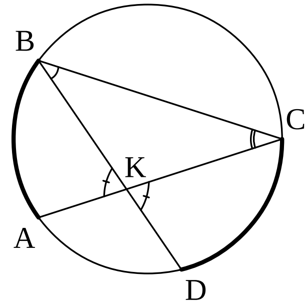
Поскольку $\widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$ (по свойству центрального угла), то $\widehat{BAK} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AB}$.

Если угол BAK тупой, то $\widehat{OAB} = \widehat{BAK} - \frac{\pi}{2}$, $\widehat{AOB} = \pi - 2\cdot\widehat{OAB} = 2\pi - 2\cdot\widehat{BAK}$. Но $\overset{\frown}{AB} = 2\pi - \widehat{AOB}$. Таким образом, $\widehat{BAK} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$. Третий случай, когда угол BAK – прямой, очевиден. Утверждение доказано.

4. Углы между пересекающимися хордами

Угол между пересекающимися хордами равен по величине полусумме мер дуг окружности, которые отсекают на окружности эти хорды:

$$\widehat{AKB} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}) = \widehat{ACB} + \widehat{CBD}.$$



Доказательство этого утверждения очевидно. Угол AKB является внешним углом треугольника CKB, поэтому его величина равна сумме величин углов ACB и CBD. Но, по свойству вписанных углов,

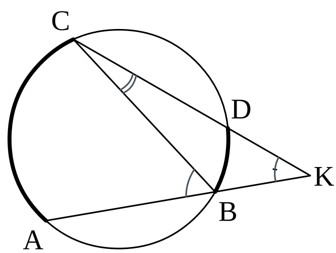
$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB},\ \widehat{CBD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}.$$

Утверждение доказано.

5. Углы между секущими

Угол между секущими, выходящими из одной точки, равен полуразности мер дуг окружности, заключенных между ними:

$$\widehat{AKC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}) = \widehat{ABC} - \widehat{BCD}.$$



Доказательство этого утверждения также весьма просто. Угол ABC является внешним углом треугольника CKB, поэтому его величина равна сумме величин углов BKC и BCK. Применяя свойство вписанных углов, получаем

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC},\ \widehat{BCK} = \widehat{BCD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}.$$

Отсюда и вытекает нужное нам соотношение.

Приведём некоторые важные следствия рассмотренных утверждений:

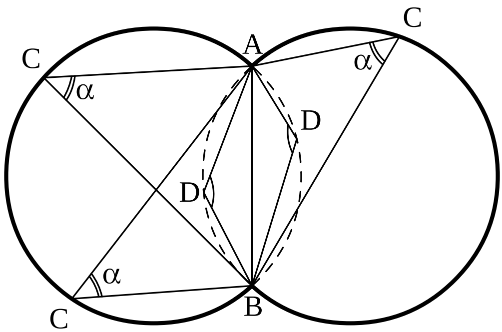
- Синусы вписанных углов, опирающихся на одну и ту же хорду (или на равные хорды), равны.
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым.
- Если вписанный угол является прямым, то он опирается на диаметр окружности.
- Сумма величин противоположных углов выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность, равна π.
- Равные хорды отсекают равные дуги.

6. Теорема о четырёх точках

Укажем ещё один важный факт.

Геометрическим местом точек, из которых данный отрезок AB виден под углом заданной величины α, являются две дуги окружностей радиуса длины $\frac{|AB|}{2\sin\alpha}$, проходящих через точки A и B.

На чертеже эти дуги обозначены толстыми сплошными линиями, а произвольные точки этих дуг обозначены буквами C. Нетрудно догадаться, что *геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под углом величины $\pi - \alpha$, есть оставшиеся дуги этих окружностей*, на рисунке они обозначены пунктирными линиями, а произвольные точки этих дуг обозначены буквами D. Обоснование этого факта можно легко провести с помощью теоремы синусов и свойств вписанных углов.

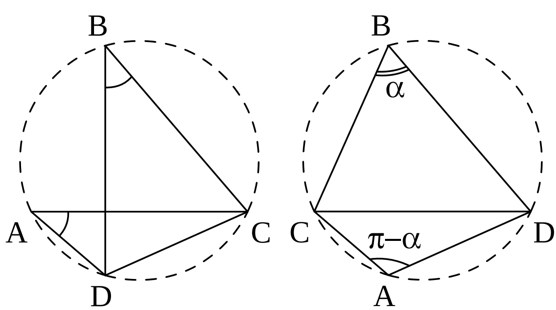


Из этого утверждения непосредственно вытекает крайне важная для решения задач

Теорема о четырёх точках. Для того, чтобы точки A, B, C и D лежали на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух утверждений:

1. Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой CD и при этом $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.

2. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CD и выполнено $\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = \pi$.



Наконец, рассмотрим ещё одну полезную теорему. Конфигурация, ею описываемая, встречается в случае, когда биссектриса внутреннего угла произвольного треугольника продолжается до пересечения с описанной около него окружностью.

Теорема. *Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, K – точка пересечения его диагоналей. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1. *AC – биссектриса угла BAD.*

2. $|BC| = |DC|$.

3. *Касательная, проведённая к окружности в точке* C, *параллельна прямой* BD.

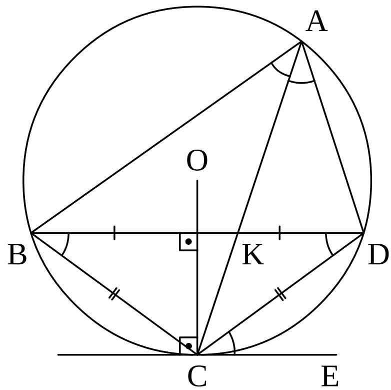
4. *Треугольники* KDC *и* DAC *подобны (подобны и треугольники* KBC *и* BAC*).*

5. *Отрезок* OC *перпендикулярен отрезку* BD *(делит его пополам).*

Доказательство. Сначала докажем, что из утверждения 1 вытекают все остальные.

По свойствам вписанных углов,

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \widehat{BDC},\ \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} = \widehat{DBC}.$$



Поскольку величины углов BAC и DAC равны, то равны и величины углов BDC и DBC. Стало быть, треугольник BDC равнобедренный, $|BC| = |DC|$, утверждение 2 вытекает из утверждения 1.

Далее, по свойству угла между касательной и хордой,

$$\widehat{DCE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} = \widehat{DBC} \overset{2.}{=} \widehat{BDC}.$$

Так как углы BDC и DCE – внутренние накрест лежащие при прямых CE и BD, а их величины равны, то, по признаку параллельных прямых, $CE||BD$, то есть утверждение 3 следует из утверждения 1.

Справедливость утверждения 4 получается почти автоматически: мы уже доказали, что равны величины углов BAC, BDC, DAC и DBC, поэтому нужные нам пары треугольников подобны по двум углам.

Наконец, поскольку $CE||BD$, а $OC \perp CE$, то $OC \perp BD$. Треугольник OBD, очевидно, равнобедренный, поэтому из того, что $OC \perp BD$ вытекает, что точка пересечения отрезков OC и BD делит отрезок BD пополам.

Теперь докажем, что из каждого из утверждений 2. – 5. следует утверждение 1. Это завершит доказательство теоремы.

Если $|BC| = |DC|$, то треугольник BDC равнобедренный, $\widehat{BDC} = \widehat{DBC}$, но, по свойствам вписанных углов, $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$, $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$. Таким образом, $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$, т.е. утверждение 1 следует из утверждения 2.

Далее, если $CE||BD$, то углы DCE и CDB равны как внутренние накрест лежащие, а углы DCE и DBC равны в силу свойств вписанных углов и углов между касательной и хордой. Таким образом, треугольник BDC – равнобедренный, $|BD| = |DC|$. То есть утверждение 2 (и, по доказанному выше, утверждение 1) вытекает из утверждения 3.

Тот факт, что утверждение 1 следует из утверждения 4, практически очевиден: из подобия треугольников KDC и DAC вытекает равенство углов KDC и DAC, но, с другой стороны, углы KDC и KAB равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC.

Наконец, если $OC \perp BD$, то в силу того, что $OC \perp CE$, мы получаем $BD||CE$. Итак, из утверждения 5 вытекает утверждение 3, из которого, в свою очередь, вытекает и утверждение 1. Теорема доказана.

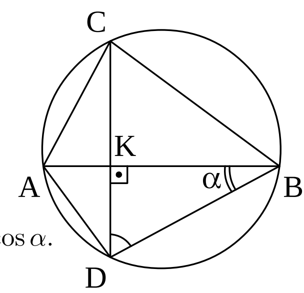
Примеры решения задач

П р и м е р 1. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. Найдите длину диаметра этой окружности, если $AB \perp CD$, $|AD| = m$, $|BC| = n$.

Р е ш е н и е. Обозначим точку пересечения хорд AB и CD буквой K.

Первый способ

Обозначим величину угла ABD за α. Поскольку угол BKD – прямой, то величина угла BDC равна $\pi/2 - \alpha$. Треугольники ABD и BCD оба вписаны в данную окружность, поэтому $R_{\triangle BCD} = R_{\triangle ABD} = R_0$. Запишем для этих треугольников теорему синусов:



$$2R_{\triangle ABD} = \frac{|AD|}{\sin \widehat{ABD}} \quad \Longrightarrow \quad |AD| = 2R_0 \cdot \sin\alpha;$$

$$2R_{\triangle BCD} = \frac{|BC|}{\sin \widehat{BDC}} \Longrightarrow |BC| = 2R_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R_0 \cdot \cos\alpha.$$

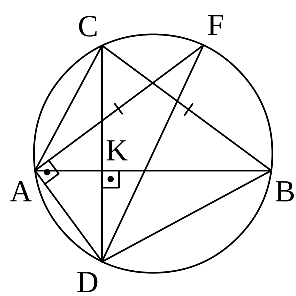
Наконец, возведём эти соотношения в квадрат и сложим:

$$|AD|^2 + |BC|^2 = 4R_0^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = D_0^2.$$

Значит, искомая длина диаметра окружности равна $\sqrt{m^2+n^2}$.

Второй способ

Применим свойство угла между пересекающимися хордами:

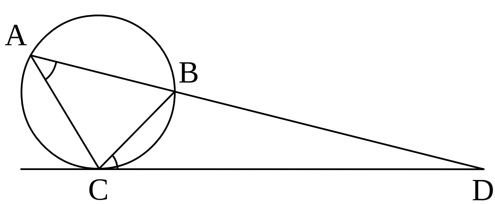


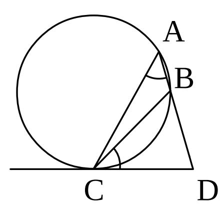
$$\frac{\pi}{2} = \widehat{AKD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} \quad \Longrightarrow \quad \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = \pi.$$

Отложим на окружности дугу AF, равную дуге BC (точка F берется так, чтобы точка A лежала между точками D и F). Тогда $|AF| = |BC|$, поскольку равные хорды стягивают равные дуги и наоборот, а, с другой стороны, $D\overset{\frown}{A}F = \pi$, значит, FD – диаметр. Отсюда получаем, что угол FAD – прямой. Наконец, из треугольника ADF по теореме Пифагора получаем, что $|FD| = \sqrt{m^2+n^2}$.

О т в е т. $\sqrt{m^2+n^2}$.

П р и м е р 2. Касательная, проведённая через вершину C вписанного в окружность γ треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB за вершину B в точке D. Известно, что длина радиуса окружности γ равна 2, $|AC| = \sqrt{12}$ и $\widehat{ADC} + \widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{BAC}$. Найдите длину секущей AD.





Решение. Обозначим $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$. Тогда $\widehat{ACB} = \pi - \alpha - \beta$ и, по свойству угла между касательной и хордой, $\widehat{BCD} = \alpha$. Далее заметим, что углы ABC и CBD – смежные, поэтому $\widehat{CBD} = \pi - \beta$, и из треугольника BCD находим $\widehat{ADC} = \pi - \widehat{CBD} - \widehat{BCD} = \beta - \alpha$. Теперь воспользуемся условием задачи:

$$\widehat{ADC} + \widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{BAC} \quad \Longrightarrow \quad \beta - \alpha + \pi - \alpha - \beta = 2\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

После этого применим к треугольнику ABC теорему синусов:

$$\frac{|AC|}{\sin \widehat{ABC}} = 2R_{\triangle ABC} \quad \Longrightarrow \quad \sin \widehat{ABC} = \frac{|AC|}{2R_{\triangle ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, возможны два случая (оба они представлены на чертеже):

$$1.\ \widehat{ABC} = \beta = \frac{\pi}{3},\ \widehat{BAC} = \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{ADC} = \frac{\pi}{12},\ \widehat{ACD} = \frac{2\pi}{3};$$

$$2.\ \widehat{ABC} = \beta = \frac{2\pi}{3},\ \widehat{BAC} = \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{ADC} = \frac{5\pi}{12},\ \widehat{ACD} = \frac{\pi}{3}.$$

Из треугольника ADC по теореме синусов получаем

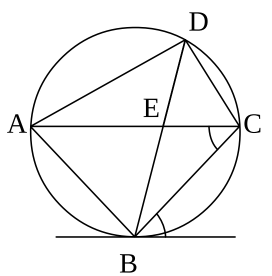
$$\frac{|AD|}{\sin \widehat{ACD}} = \frac{|AC|}{\sin \widehat{ADC}} \quad \Longrightarrow \quad |AD| = \frac{|AC| \sin \widehat{ACD}}{\sin \widehat{ADC}}.$$

Подставляя в эту формулу известную нам длину отрезка AC и найденные значения величин углов ACD и ADC, находим, что $|AD| = \dfrac{3}{\dfrac{\sqrt{6} \mp \sqrt{2}}{4}} = 3(\sqrt{6} \pm \sqrt{2})$.

Ответ. $3(\sqrt{6} \pm \sqrt{2})$.

Пример 3. В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причем касательная к окружности, проходящая через точку B, параллельна AC. Известно, что площадь треугольника DCB равна 16, $|EA| : |DA| = 3 : 4$. Найдите площадь треугольника BCE.

Решение. Поскольку отрезок AC параллелен касательной, проведённой через точку B, то, во-первых, углы BCA и BDC равны, а треугольники BCE и BDC подобны, и, во-вторых, DB – биссектриса угла ADC, а DE – биссектриса треугольника ACD. Пользуясь основным свойством биссектрисы треугольника и полученным подобием, имеем



$$\frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|EA|}{|DA|} = \frac{3}{4},\ \frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BDC}} = \left(\frac{|CE|}{|CD|}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

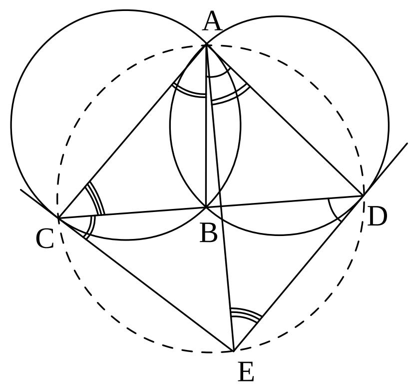
Наконец, $S_{\triangle BCE} = \left(\dfrac{9}{16}\right)^2 \cdot S_{\triangle BDC} = \dfrac{9}{16} \cdot 16 = 9$.

Ответ. 9.

П р и м е р 4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям, проведённые в точках C и D, пересекаются в точке E. Найдите длину отрезка AE, если $|AB| = 10$, $|AC| = 16$, $|AD| = 15$.

Р е ш е н и е. По свойству угла между касательной и хордой

$$\widehat{BDE} = \widehat{DAB}, \quad \widehat{BCE} = \widehat{CAB}.$$



После этого заметим, что

$$\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{DAB}, \quad \widehat{CED} = \pi - \widehat{BCE} - \widehat{BDE},$$

стало быть, $\widehat{CAD} + \widehat{CED} = \pi$. Но поскольку сумма величин внутренних углов четырёхугольника равна 2π, то $\widehat{ACE} + \widehat{ADE} = \pi$. С учётом того, что точки C и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB, они попадают и в разные полуплоскости относительно прямой AE. Таким образом, выполнены все условия теоремы о четырёх точках и вокруг четырёхугольника $ACED$ можно описать окружность.

Теперь, воспользовавшись свойствами вписанных углов, мы находим, что $\widehat{AED} = \widehat{ACD}$, $\widehat{DCE} = \widehat{DAE}$. Из этого вытекает подобие треугольников AED и ACB, что даёт нам

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|} \iff |AE| = \frac{|AC| \cdot |AD|}{|AB|} = 24.$$

О т в е т. 24.

Задачи

1. В треугольнике ABC известно, что $|AB| = 6$, $|AB| = |BC|$. На стороне AB, как на диаметре, построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D так, что $|BD| : |DC| = 2 : 1$. Найдите длину стороны AC.

2. Найдите длину радиуса окружности, если вписанный в неё угол со сторонами, длины которых равны 1 и 2, опирается на дугу меры $2\pi/3$.

3. Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы CK треугольника ABC пересекает эту окружность в точке L, причём CL – диаметр данной окружности. Найдите отношение длин отрезков BL и AC, если известно, что $\sin \widehat{BAC} = 1/4$.

4. Диаметр AB окружности γ продолжили за точку B и на этом продолжении отметили точку C. Из точки C провели секущую, пересекающую окружность в точках D и E, считая от точки C. Известно, что $|DC| = 3$, градусные меры углов DAC и ACD равны $30°$ и $7°$ соответственно. Найдите длину диаметра окружности γ.

5. На катете AC прямоугольного треугольника ABC, как на диаметре, построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите площадь треугольника CKB, если $|AC| = b$, $\widehat{ABC} = \beta$.

6. В окружность, длина радиуса которой равна 7, вписан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Длины сторон AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD как 2:1, а $\widehat{ADC} = 120°$. Найдите длины всех сторон четырёхугольника $ABCD$.

7. В треугольнике ABC $|AB| = 3$, $|AC| = 3\sqrt{7}$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Биссектриса угла ABC пересекается в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC. Найдите длину отрезка BD.

8. Диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около него. Вычислите длину диагонали AC, если $|BD| = 2$, $|AB| = 1$, $\widehat{ABD} : \widehat{DBC} = 4 : 3$.

9. В треугольнике ABC AN и CM – медианы, $\widehat{ABC} = 2\pi/3$. Окружность, проходящая через точки A, M и N, проходит также и через точку C. Длина радиуса этой окружности равна 7. Найдите площадь треугольника ABC.

10. На окружности γ расположено четыре точки A, B, C, D. Продолжение хорды AB за точку B и продолжение хорды CD за точку C пересекаются в точке E, причём $\widehat{AED} = \pi/3$. Величина угла ABD в три раза больше величины угла BAC. Докажите, что AD – диаметр окружности γ.

11. Вершины B, C и D четырёхугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O, которая пересекает сторону AB в точке F, а сторону AD – в точке E. Известно, что угол BAD прямой, длина хорды EF равна длине хорды FB, а также равны длины хорд BC, CD и ED. Найдите величину угла ABO.

12. На стороне AB треугольника ABC, как на диаметре, построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол величины $\pi/12$. Найдите величины углов треугольника ABC.

13. На сторонах острого угла с вершиной B взяты точки A и C. Одна окружность касается прямой AB в точке B и проходит через точку C. Вторая окружность касается прямой BC в точке B и проходит через точку A. Точка D – вторая общая точка этих окружностей. Известно, что $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CD| = d$. Найдите $|AD|$.

14. В окружность γ с центром в точке O вписан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Известно, что величина угла AOB в три раза больше величины угла COD. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью γ, если $|CD| = 10$.

15. Биссектрисы углов треугольника ABC, площадь которого равна 2, продолжены до точек пересечения с описанной около треугольника ABC окружностью, отличных от точек A, B, C. Эти точки образуют новый треугольник.

Найдите его площадь, если величины углов треугольника ABC равны $\pi/6$, $\pi/3$ и $\pi/2$.

16. В окружность, длина радиуса которой равна $2\sqrt{7}$, вписана трапеция $ABCD$, причём её основание AD является диаметром, а $\widehat{BAD} = \pi/3$. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P, такой, что $|AP| : |PD| = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника BPE.

17. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Проведена окружность с центром в точке D, проходящая через точку A и пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислите длину стороны AC, если известно, что $|AB| = c$, $|AM| = n$, $|AN| = m$.

18. Через точку C проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B. На большей из дуг AB взята точка D так, что $\sin\widehat{ACD}\cdot\sin\widehat{BCD} = 1/3$. Найдите расстояние от точки D до хорды AB, если известно, что $|CD| = 2$.

19. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, точка L лежит на отрезке AB и $|AL| = |LB|$. Описанная около треугольника ALO окружность пересекает прямую AC в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $\widehat{AOL} = \pi/4$, $|LK| = 8$, $|AK| = 7$.

20. В окружности проведены диаметр MN и параллельная ему хорда AB. Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q. Известно, что $|MP| = p$, $|MQ| = q$. Найдите длину диаметра MN.

21. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Найдите длину отрезка BC, если длины отрезков AC и DC равны 1.

22. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите длину отрезка KC, если известно, что $|AK| = 6$, $|BC| = 4$.

23. Длина стороны AB треугольника ABC равна 3, E – точка пересечения продолжения биссектрисы CD треугольника ABC с описанной около него окружностью, $|BC| = 2\cdot|AC|$, $|DE| = 1$. Найдите длину стороны AC.

24. В треугольнике ABC $\widehat{BAC} = 5\pi/12$, $|AB| = c$, $|AC| = b$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\widehat{BAM} = \pi/6$. Продолжение прямой AM пересекает окружность, описанную вокруг треугольника, в точке N. Найдите длину отрезка AN.

25. Окружность с центром в точке O, лежащей на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC, касается его катетов AB и BC. Найдите длину AC, если известно, что $|AM| = 20/9$, $|AN| : |MN| = 6 : 1$, где M – точка касания AB с окружностью, а N – точка пересечения окружности с AC, расположенная между точками A и O.

26. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Радиус OA перпендикулярен радиусу OB, а радиус OC перпендикулярен радиусу OD. Длина перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD, равна 9, $|AD| = 2|BC|$. Найдите площадь треугольника AOB.

27. В треугольнике ABC $|AB| = 3$, $\widehat{ACB} = \arcsin\frac{3}{5}$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что $\widehat{ABC} = \widehat{CML}$, площадь четырёхугольника $ABLM$ равна 2, $|LM| = 1$. Найдите длину высоты треугольника KNC, опущенной из вершины C, и площадь этого треугольника.

28. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC, прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O. Известно, что точки C, D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC, величина угла DAC в три раза больше величины угла DAB, $|AC| : |AB| = 3 : 2$. Найдите косинус величины угла ACB.

29. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность, проведенная через точки M, N и C, касается стороны AB, а длина её радиуса равна $\sqrt{2}$. Найдите $\sin\widehat{ACB}$, если $|AC| = 2$.

30. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 4, а длина стороны AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проведённой через середины сторон треугольника ABC, лежит на биссектрисе угла C. Найдите длину стороны AC.

31. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, CA – биссектриса угла C, $|AB| = |AD|$, $\widehat{BAD} = 7\pi/9$, $\widehat{BEA} = 11\pi/18$. Найдите величину угла CDB.

32. В треугольнике ABC биссектриса AD угла A и биссектриса BL угла B пересекаются в точке F. При этом оказалось, что $\widehat{LFA} = \pi/3$.

    1. Найдите величину угла ACB.

    2. Зная, что $|AB| = 2$, $\widehat{CLD} = \pi/4$, найдите площадь треугольника ABC.

33. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. При этом оказалось, что $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, а площадь круга, описанного около треугольника BCD, равна $25\pi/4$.

    1. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

    2. Зная, что $|BC| = 3$, $|AC| = 4$, $\widehat{BAD} = \pi/2$, найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

34. В трапеции $KLMN$ $LM||KN$, $\widehat{KLM} = \pi/2$. Окружность проходит через точки M и N и касается прямой KL в точке A. Найдите площадь треугольника AMN, если известно, что $|LM| = l$, $|KN| = k$, $|MN| = a$.

35. Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной

окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. $|BK| = 1$, $|CK| = 4$, а тангенс величины угла CAB равен $1/\sqrt{15}$. Найдите площадь треугольника ABC.

36. В треугольнике ABC величина угла B равна $\pi/6$. Через точки A и B проведена окружность, длина радиуса которой равна 2, касающаяся прямой AC в точке A. Через точки B и C проведена окружность, длина радиуса которой равна 3, касающаяся прямой AC в точке C. Найдите $|AC|$.

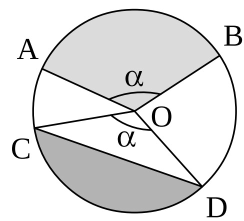
37. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке B, а вторую – в точке C. Касательная к первой окружности, проходящая через точку B, пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $|AB| = 5$ и $|AC| = 4$. Найдите длину отрезка CE и расстояние от точки A до центра окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.

2.2. Касательные, хорды, секущие

Теоретический материал

1. Площадь круга, сектора, сегмента

Приведём формулы площади круга, сектора и сегмента:

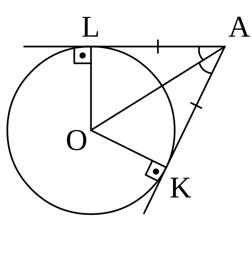


- *Площадь круга с длиной радиуса r равна πr^2.*
- *Площадь сектора величины α круга с длиной радиуса r (AOB) равна $\dfrac{r^2\alpha}{2}$.*
- *Площадь сегмента величины α круга с длиной радиуса r (CD) равна $\dfrac{r^2(\alpha - \sin\alpha)}{2}$.*

Отметим, что формулу для площади круга стоит принять за аксиому, из которой уже можно вывести формулы площади сектора и сегмента.

2. Касательные, проведённые из одной точки

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, имеют равную длину и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности: $|AL| = |AK|$, $\widehat{OAL} = \widehat{OAK}$.

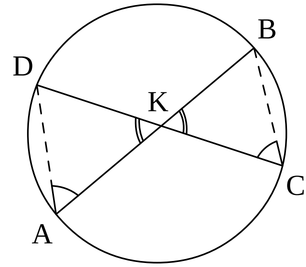


Доказательство этого утверждения тривиально: в силу того, что AO – общая сторона треугольников OAK и OAL, углы OKA и OLA – прямые, а длины отрезков OK и OL равны (они оба являются радиусами окружности), прямоугольные треугольники OAK и OAL равны по гипотенузе и катету. Из этого следует, что $|AL| = |AK|$, $\widehat{OAL} = \widehat{OAK}$. Отметим, что фактически мы обосновали и такое утверждение: *центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе.*

3. Свойство пересекающихся хорд

Произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны:

$$|AK| \cdot |KB| = |CK| \cdot |KD|.$$

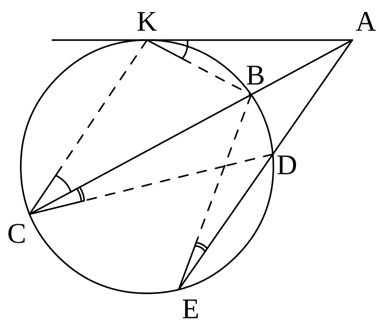


Для обоснования этого факта заметим, что углы BAD и BCD являются вписанными углами, опирающимися на одну дугу. Значит, они равны, поэтому, с учётом того, что углы AKD и BKC равны как вертикальные, мы получаем, что треугольники AKD и CKB подобны (по двум углам). Из этого подобия вытекает $\dfrac{|AK|}{|CK|} = \dfrac{|KD|}{|KB|} \iff |AK| \cdot |KB| = |CK| \cdot |KD|$, что и требовалось доказать.

4. Свойство секущих

Произведение длины отрезка секущей на длину её внешней части для всех секущих, проведённых из одной точки, есть величина постоянная. Эта величина равна квадрату длины отрезка касательной, проведённой из этой же точки:

$$|AB| \cdot |AC| = |AD| \cdot |AE| = |AK|^2.$$



Рассмотрим произвольную секущую AC. Угол AKB является углом между касательной и хордой, поэтому он измеряется половиной дуги KB и равен углу KCB. Отсюда вытекает подобие треугольников AKB и ACK, что даёт нам

$$\frac{|AK|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AK|} \quad \iff \quad |AB| \cdot |AC| = |AK|^2.$$

Ясно, что для другой секущей AE, проведённой из точки A, можно повторить такие же рассуждения и получить тот же результат. Или можно действовать так: заметим, что углы BCD и BED равны в силу свойств вписанных углов, поэтому треугольники ACD и AEB подобны. Из этого подобия вытекает

$$\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|AB|} \quad \iff \quad |AB| \cdot |AC| = |AD| \cdot |AE|.$$

Утверждение доказано.

5. Свойство описанного около окружности четырёхугольника

В любом описанном около окружности четырёхугольнике суммы длин противоположных сторон равны, а центр этой окружности лежит на пересечении его биссектрис.

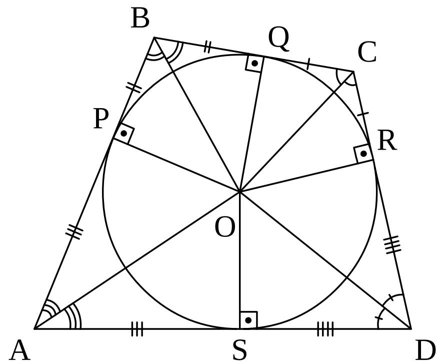
Для доказательства этого факта воспользуемся теоремой о равенстве длин отрезков касательных. Она даёт нам следующие соотношения:

$$|AP| = |AS|, \quad |BP| = |BQ|,$$

$$|CQ| = |CR|, \quad |DR| = |DS|,$$

$$\angle OAS = \angle OAP, \quad \angle OBP = \angle OBQ,$$

$$\angle OCQ = \angle OCR, \quad \angle ODR = \angle ODS.$$



Отсюда сразу вытекает, что центр вписанной в четырёхугольник окружности лежит на пересечении его биссектрис. Получить равенство сумм длин противоположных сторон тоже совсем нетрудно:

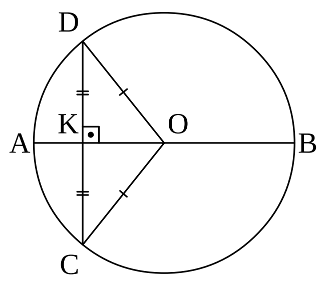
$$|AB| + |CD| = |AP| + |BP| + |CR| + |DR| =$$

$$= |AS| + |DS| + |BQ| + |CQ| = |AD| + |BC|.$$

6. Свойство хорды, перпендикулярной диаметру

Если диаметр окружности проходит через середину некоторой хорды этой окружности, то он перпендикулярен этой хорде. Верно и обратное утверждение: если диаметр окружности перпендикулярен пересекающейся с ним хорде этой окружности, то он делит её пополам.

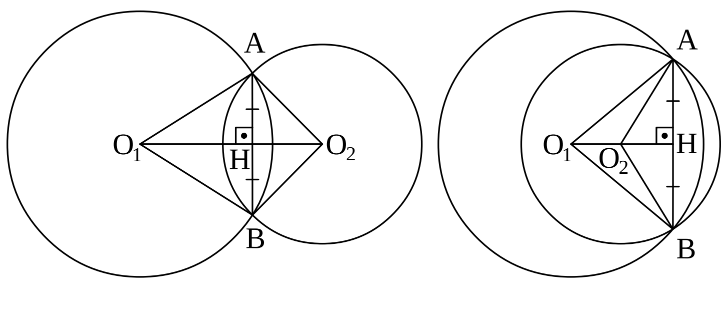
Доказать эти утверждения совсем нетрудно: если известно, что некоторая хорда делится диаметром окружности пополам, то есть $|CK| = |DK|$, то треугольники COK и DOK равны по трем сторонам, из чего вытекает равенство углов CKO и DKO. Но эти углы смежные, поэтому они оба прямые, стало быть, $AB \perp CD$.



Если же известно, что некоторая хорда перпендикулярна диаметру, то есть $AB \perp CD$, то прямоугольные треугольники COK и DOK равны по гипотенузе и катету, из чего следует равенство длин отрезков CK и DK.

7. Свойство общей хорды двух пересекающихся окружностей

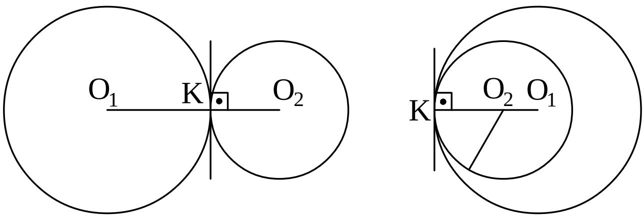
Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна прямой, содержащей их центры, и делится этой прямой пополам.



Обосновать этот факт просто: поскольку $|AO_1| = |BO_1|$, а $|AO_2| = |BO_2|$, то обе точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB, поэтому $O_1O_2 \perp AB$, $|AH| = |BH|$.

8. Свойства касающихся окружностей

Если две окружности касаются (внутренним или внешним образом), то их центры и точка касания лежат на одной прямой.

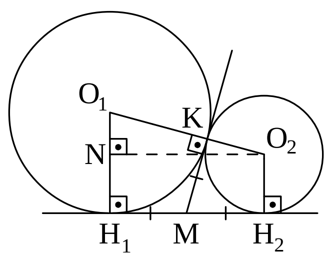


Справедливость этого утверждения вытекает из того, что радиус окружности, соединяющий её центр с точкой её касания с некоторой прямой, перпендикулярен этой прямой.

Если две окружности касаются внешним образом, то длина отрезка их общей внешней касательной, заключённого между точками касания, равна удвоенному корню из произведения длин их радиусов, а их общая внутренняя касательная делит его пополам:

$$|H_1H_2| = 2\sqrt{|O_1H_1| \cdot |O_2H_2|}, \quad |H_1M| = |H_2M|.$$

Докажем это утверждение. Положим $|O_1H_1| = R$, $|O_2H_2| = r$, будем считать, что $R \geqslant r$. Проведём отрезок O_2N, параллельный H_1H_2. Тогда $NH_1H_2O_2$ – прямоугольник,



$$|H_1H_2| = |NO_2|, \ |NH_1| = |O_2H_2| = r,$$

стало быть, $|O_1N| = |O_1H_1| - |NH_1| = R - r$. Также заметим, что в силу того, что точки O_1, O_2 и K лежат на одной прямой,

$$|O_1O_2| = |O_1K| + |O_2K| = R + r.$$

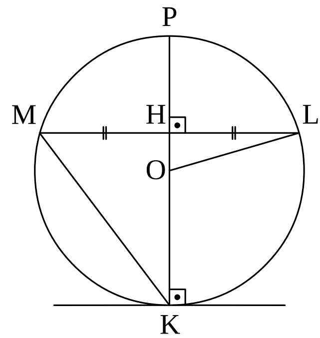
Записывая теорему Пифагора для треугольника O_1O_2N, получаем

$$|H_1H_2| = |NO_2| = \sqrt{|O_1O_2|^2 - |O_1N|^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

После этого заметим, что в силу свойства касательных, проведённых из одной точки к окружности, $|KM| = |H_1M|$, $|KM| = |H_2M|$, поэтому $|H_1M| = |H_2M|$. Утверждение доказано.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. Касательная к окружности (K – точка касания) параллельна её хорде LM. Известно, что $|LM| = 6$, $|KM| = 5$. Найдите длину радиуса этой окружности.



Решение. Проведём диаметр этой окружности, проходящий через точку K. Поскольку K – точка касания, то он будет перпендикулярен касательной из условия задачи, а поскольку хорда LM ей параллельна, то он будет перпендикулярен и этой хорде. Обозначим точку пересечения хорды LM с этим диаметром буквой H, центр окружности обозначим буквой O, а второй конец этого диаметра обозначим буквой P.

Так как $|LM| = 6$, а хорда, перпендикулярная диаметру, делится им пополам, то $|LH| = |HM| = 3$. Из прямоугольного треугольника MKH находим

$$|KH|^2 = |KM|^2 - |HM|^2 = 16 \quad \Longrightarrow \quad |KH| = 4.$$

Теперь обозначим длину радиуса окружности буквой R, тогда

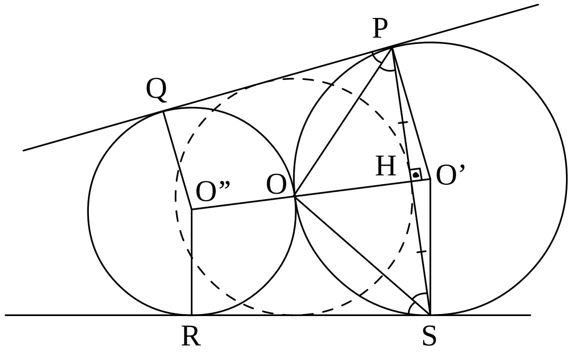
$$|KP| = 2R, \quad |HP| = |KP| - |KH| = 2R - 4.$$

Применяя теорему о произведении длин отрезков пересекающихся хорд, получаем

$$|LH| \cdot |HM| = |KH| \cdot |HP| \quad \Longrightarrow \quad 9 = 4 \cdot (2R - 4) \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{25}{8}.$$

Ответ. $\dfrac{25}{8}$.

Пример 2. Две окружности, длины радиусов которых равны 4 и 3, касаются друг друга внешним образом. К этим окружностям проведены общие касательные PQ и RS таким образом, что точки P и S принадлежат большей окружности, а точки Q и R принадлежат меньшей окружности. Найдите длину радиуса окружности, касающейся отрезков RS, SP и PQ.



Решение. Центр окружности, касающейся отрезков RS, SP и PQ, лежит на пересечении биссектрис углов RSP и SPQ. Этот факт и будет отправной точкой решения.

Обозначим центры окружностей из условия задачи буквами O' и O'' (O' – центр окружности большего радиуса). Рассмотрим прямоугольную трапецию $O'PQO''$. Поскольку окружности касаются друг друга, то $O'O'' = 7$,

$$\cos \widehat{PO'O''} = \frac{|O'P| - |O''Q|}{|O'O''|} = \frac{1}{7}, \ \sin \widehat{PO'O''} = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Теперь строго обоснуем некоторые утверждения, которые почти очевидны из-за симметрии. Пусть L – точка пересечения прямых PQ и RS. Тогда обе окружности вписаны в угол PLS, поэтому точки O' и O'' лежат на биссектрисе этого угла, $|LP| = |LS|$. Значит, треугольник PLS равнобедренный, его биссектриса, проведённая из вершины L, является также его медианой и высотой. Это означает, что прямая $O'O''$ перпендикулярна отрезку PS и проходит через его середину (обозначим её буквой H).

С другой стороны, углы RSP и SPQ равны. Значит, если обозначить буквой O точку пересечения их биссектрис, то углы OSP и OPS также равны. Это означает, что $|OP| = |OS|$, так что точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку PS, то есть на прямой $O'O''$, и, кроме того, точка H есть точка касания отрезка PS и окружности, длину радиуса которой мы ищем. Это легко доказать от противного. Пусть эта точка касания не есть точка H, тогда обозначим её K. Треугольники OKP и OKS равны (по гипотенузе и катету), значит $|KP| = |KS|$. Противоречие с тем, что K – не середина PS.

Теперь осталось немного посчитать и найти искомую величину – $|OH|$.

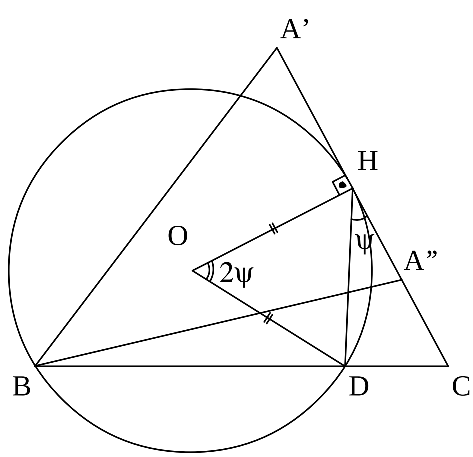
$$\operatorname{tg}\widehat{OPH} = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{O'PH}\right)\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\widehat{PO'H} = \frac{\sin\widehat{PO'H}}{1+\cos\widehat{PO'H}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$|PH| = |PO'|\cdot\sin\widehat{P'OH} = \frac{16\sqrt{3}}{7},\ |OH| = |PH|\cdot\operatorname{tg}\widehat{OPH} = \frac{16\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{24}{7}.$$

Ответ. $\dfrac{24}{7}$.

Пример 3. В треугольнике ABC дано $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \beta$, $|AC| = b$. На стороне BC взята точка D так, что $|BD| = 3|DC|$. Через точки B и D проведена окружность, касающаяся стороны AC или её продолжения за точку A. Найдите длину радиуса этой окружности.

Решение. Для наглядности на чертеже отображены оба случая: точка касания прямой AC с окружностью (обозначим её буквой H) может как попадать на отрезок AC, так и не попадать. Видно, что в этой задаче сразу даны базовые элементы треугольника ABC, просят же найти достаточно экзотическую величину. Искать её будем из равнобедренного треугольника DHO. Надо найти величину угла DOH и длину отрезка DH. Будем действовать последовательно и сначала определим длины сторон треугольника ABC, записав для него теорему синусов:



$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{|AB|}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BAC}} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{b}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{|AB|}{\sin\beta} = \frac{|BC|}{\sin\alpha} \quad \Longrightarrow \quad |AB| = \frac{b\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad |BC| = \frac{b\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Для сокращения записи полученную нами длину стороны BC обозначим буквой Q. Далее, поскольку $|BD| = 3|DC|$, то $|DC| = \frac{1}{4}Q$. Применяя теорему о произведении длины секущей на длину её внешней части, получаем

$$|CH|^2 = |CD|\cdot|BC| \quad \Longrightarrow \quad |CH|^2 = \frac{Q}{4}\cdot Q \quad \Longrightarrow \quad |CH| = \frac{Q}{2}.$$

Теперь из треугольника CDH, используя теорему косинусов, найдём длину стороны DH и величину угла CHD:

$$|DH|^2 = |CD|^2 + |CH|^2 - 2\cdot|CD|\cdot|CH|\cdot\cos\widehat{DCH} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |DH|^2 = \frac{Q^2}{16} + \frac{Q^2}{4} - \frac{Q^2\cos\beta}{4} \quad \Longrightarrow \quad |DH| = \frac{Q}{4}\cdot\sqrt{5-4\cos\beta};$$

$$|CD|^2 = |CH|^2 + |DH|^2 - 2\cdot|CH|\cdot|DH|\cdot\cos\widehat{CHD} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{Q^2}{16} = \frac{Q^2}{4} + \frac{Q^2}{16} + \frac{Q^2}{4} - \frac{Q^2\cos\beta}{4} - \frac{Q^2\cdot\sqrt{5-4\cos\beta}}{4}\cos\widehat{CHD} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\widehat{CHD} = \frac{2-\cos\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}} \quad \Longrightarrow \quad \sin\widehat{CHD} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\beta}{5-4\cos\beta}} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}}.$$

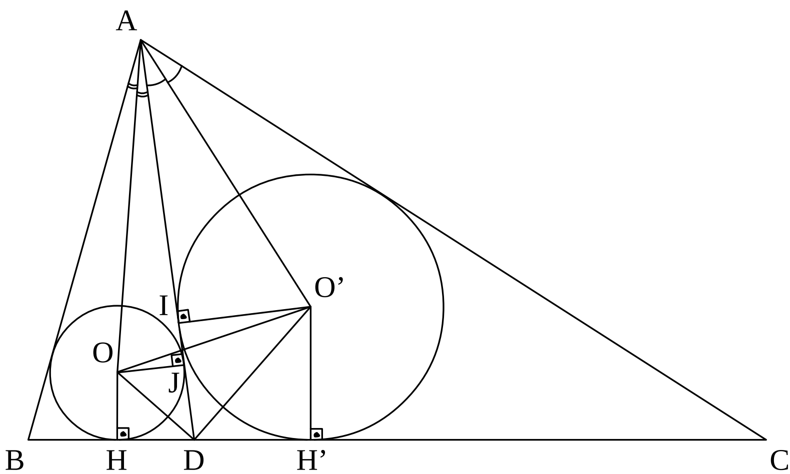
Наконец, пользуясь свойством угла, образованного касательной и хордой, имеем $\widehat{DOH} = 2\widehat{CHD}$, где O – центр окружности. С учётом этого из равнобедренного треугольника DOH находим длину радиуса окружности:

$$R = \frac{\frac{1}{2}|DH|}{\sin\frac{1}{2}\widehat{DOH}} = \frac{|DH|}{2\sin\widehat{CHD}} = \frac{\frac{Q}{4}\cdot\sqrt{5-4\cos\beta}}{2\frac{\sin\beta}{\sqrt{5-4\cos\beta}}} = \frac{Q(5-4\cos\beta)}{8\sin\beta}.$$

Подставляя в эту формулу полученное ранее выражение для Q, получаем ответ. Из решения видно, что ответ не зависит от того, где находится точка A.

Ответ. $\dfrac{b\sin\alpha(5-4\cos\beta)}{8\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$.

Пример 4. На стороне BC треугольника ABC взята точка D такая, что $\widehat{CAD} = 2\cdot\widehat{BAD}$. Длины радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACD и ABD, равны соответственно 8 и 4, расстояние между точками касания этих окружностей с прямой BC равно $\sqrt{129}$. Найдите $|AD|$.



Р е ш е н и е. Обозначим центр окружности, длина радиуса которой равна 4, буквой O, центр второй окружности обозначим буквой O'. Точки их касания с отрезком BC обозначим как H и H' соответственно, а точки их касания с отрезком AD обозначим буквами J и I. Выразим длину отрезка IJ двумя способами.

Рассмотрим прямоугольные треугольники AOJ и $AO'I$. Обозначим величину угла BAD за 2α, тогда, по условию, величина угла CAD равна 4α. Точки O и O' – центры вписанных в треугольники ABD и ACD окружностей, поэтому AO и AO' – биссектрисы углов BAD и CAD, стало быть, $\widehat{OAD} = \alpha$, $\widehat{O'AD} = 2\alpha$ и

$$|AJ| = |OJ| \operatorname{ctg} \widehat{OAJ} = 4 \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$|AI| = |O'I| \operatorname{ctg} \widehat{O'AI} = 8 \operatorname{ctg} 2\alpha = 8 \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = 4 \operatorname{ctg} \alpha - \frac{4}{\operatorname{ctg} \alpha} < 4 \operatorname{ctg} \alpha = |AJ|.$$

Значит, $|DI| > |DJ|$. Теперь заметим, что DO – биссектриса угла ADB, а DO' – биссектриса угла ADC. Известно, что угол между биссектрисами смежных углов прямой, то есть $\widehat{ODO'} = \pi/2$. Поэтому $\widehat{ODJ} = \widehat{DO'I}$. Следовательно, треугольники ODJ и $DO'I$ подобны, из чего вытекает

$$\frac{|OJ|}{|DJ|} = \frac{|DI|}{|O'I|} \implies |DJ| \cdot |DI| = 32.$$

С другой стороны, $|DH| = |DJ|$ и $|DH'| = |DI|$ по теореме об отрезках касательных, проведённых из одной точки к окружности. С учётом этого мы имеем $|DJ| + |DI| = |DH| + |DH'| = |HH|' = \sqrt{129}$. Решая полученную систему уравнений, находим

$$|DJ| = \frac{\sqrt{129} - 1}{2}, \quad |DI| = \frac{\sqrt{129} + 1}{2}.$$

Поэтому $|IJ| = |DI| - |DJ| = 1$. С другой стороны, $|IJ| = |AJ| - |AI|$ и получаем

$$4 \operatorname{ctg} \alpha - 8 \operatorname{ctg} 2\alpha = 1 \quad \implies \quad \frac{8 - 8 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{2 \operatorname{ctg} \alpha} + 4 \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad \implies \quad \operatorname{ctg} \alpha = 4.$$

Таким образом,

$$|DJ| = \frac{\sqrt{129}-1}{2}, \quad |AJ| = 4\operatorname{ctg}\alpha = 16, \quad |AD| = |AJ| + |DJ| = \frac{31+\sqrt{129}}{2}.$$

О т в е т. $\dfrac{31+\sqrt{129}}{2}$.

Задачи

1. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D. Найдите расстояние от её центра до точки A, если $|AD| = \sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 2\pi/3$.

2. В треугольнике ABC $|AB| = 4$, градусные меры углов BAC и ABC равны 30° и 130° соответственно. На стороне AB как на диаметре построен круг. Найдите площадь части этого круга, лежащей внутри треугольника ABC.

3. Из точки M на окружности проведены три хорды MN, MP и MQ таким образом, что $|MN| = 1$, $|MP| = 6$, $|MQ| = 2$. При этом величины углов NMP и PMQ равны. Найдите длину радиуса этой окружности.

4. В треугольнике ABC с периметром $2p$ длина стороны AC равна a и величина острого угла ABC равна α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK.

5. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается его сторон AB, BC и AC в точках M, D и N соответственно. Вычислите длину отрезка MD, если известно, что $|NA| = 2$, $|NC| = 3$, $\widehat{BCA} = \pi/3$.

6. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E. Найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A, если $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, а точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

7. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Их общая касательная касается первой окружности в точке B, а второй – в точке C. Прямая, проходящая через точки A и B, пересекает вторую окружность в точке D. Известно, что $|AB| = 5$, $|AD| = 4$. Найдите $|CD|$.

8. В окружности, длина радиуса которой равна 4, проведены хорда AB и диаметр AK, причём $\widehat{BAK} = \pi/8$. В точке B проведена касательная к этой окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C. Найдите длину медианы AM треугольника ABC.

9. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке M и сторону BC в точке N. Известно, что длина отрезка AB равна 3, длина отрезка AC равна 2, $|AM| : |MB| = 2 : 3$. Найдите длину отрезка AN.

10. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E. Найдите величину угла CDB, если $|AD| = 5$, $|AC| = 2\sqrt{7}$, $|BE| = 4$, $|BD| : |CE| = 3 : 2$.

11. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, длина радиуса которой равна 2. Угол DAB прямой, $|AB| = 5$, $|BC| = 6$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

12. Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, касается стороны BC в точке M и пересекает стороны AC и AB в точках L и K соответственно. Найдите отношение $|AC| : |AB|$, если известно, что длина отрезка CL в два раза больше длины отрезка BK, $|CM| : |BM| = 3 : 2$.

13. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причём величина угла ADC равна $2\pi/3$. Найдите длину радиуса окружности, касающейся отрезков AD, DC и дуги AC, если $|OC| = 2, |OD| = \sqrt{3}$.

14. Две окружности с радиусами разной длины касаются в точке A одной и той же прямой и расположены по разные стороны от неё. Отрезок AB – диаметр окружности меньшего радиуса. Из точки B проведены две прямые, касающиеся окружности большего радиуса в точках M и N. Прямая, проходящая через точки M и A, пересекает меньшую окружность в точке K. Известно, что $|MK| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\widehat{BMA} = \pi/12$. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных BM, BN и той дугой MN большей окружности, которая не содержит точку A.

15. Две окружности, длины радиусов которых относятся как $(9-4\sqrt{3}) : 1$, касаются друг друга внутренним образом. Проведены две равные по длине хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найдите величину угла между этими хордами.

16. Две окружности, длины радиусов которых равны 6 и 8, пересекаются в точках A и B. Через центры O_1 и O_2 этих окружностей проведена прямая; C_1 и C_2 – две из четырёх точек пересечения этой прямой с окружностями, причём точка C_1 лежит на окружности с центром O_1, а длина отрезка C_1C_2 больше 20. Найдите расстояние между точками O_1 и O_2, если произведение площадей треугольников C_1O_1A и C_2O_2B равно 336.

17. В круге, длина радиуса которого равна 1, проведены хорды AB и BC. Найдите площадь части этого круга, лежащей внутри угла ABC, если угол BAC острый, $|AB| = \sqrt{2}$ и $|BC| = 10/7$.

18. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника KLM, равна R. Через вершину L проведена прямая, перпендикулярная стороне KM. Эту прямую пересекают в точках A и B серединные перпендикуляры к сторонам KL и LM. Известно, что $|AL| = a$. Найдите $|BL|$.

19. В окружности, длина радиуса которой равна R, проведены хорда AB и диаметр AC. Хорда PQ, перпендикулярная диаметру AC, пересекает хорду AB в точке M. Известно, что $|AB| = a$, $|PM| : |MQ| = 1 : 3$. Найдите длину отрезка AM.

20. Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E таким образом, что $|CE| = |DE|$. Через точки B и C проведены две касательные к этой окружности, которые пересекаются в точке K. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника CKM, если $|AB| = 10$, $|AE| = 1$.

21. Дана окружность с центром в точке O, длина радиуса которой равна 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности. Величина угла OAK равна $\pi/3$. Найдите длину радиуса окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

22. Площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$, а длина радиуса вписанной в него окружности равна $\sqrt{15}/3$. Окружность, длина радиуса которой равна $5\sqrt{15}/9$, касается лучей, образующих угол ACB, и вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите $\operatorname{tg}\widehat{ABC}$, если наибольшей из сторон треугольника ABC является сторона AC.

23. В треугольник ABC вписана окружность γ. Касательная к этой окружности, параллельная стороне BC, пересекает сторону AB в точке D и сторону AC в точке E. Периметры треугольников ABC и ADE равны соответственно 40 и 30, $\widehat{ABC} = 2\beta$. Найдите длину радиуса окружности γ.

24. В угол с вершиной A, величина которого равна $\pi/3$, вписана окружность с центром в точке O. К этой окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C. Отрезок BC пересекается с отрезком AO в точке M. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, если $|AM| : |MO| = 2 : 3$, $|BC| = 7$.

25. Две окружности, длины радиусов которых равны R и r, пересекаются в точках A и B и касаются некоторой прямой в точках C и D; N – точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите:

    1) длину радиуса окружности, описанной около треугольника ACD;

    2) отношение длин высот треугольников NAC и NAD, опущенных из вершины N.

26. В треугольнике ABC $\widehat{BAC} = \alpha$, $|AC| = b$. Вписанная в него окружность касается сторон AB и BC в точках M и N, биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке K. Найдите расстояние от точки K до прямой AC.

27. В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найдите сумму длин второй и третьей окружностей, если длина радиуса первой равна 1, а площадь круга, ограниченного четвёртой окружностью, равна 64π.

28. На стороне OK острого угла KOM взята точка L (L между O и K). Окружность проходит через точки K и L и касается луча OM в точке M. На дуге этой окружности LM, не содержащей точку K, взята точка N. Расстояния от точки N до прямых OM, OK и KM равны m, k и l соответственно. Найдите расстояние от точки N до прямой LM.

29. На прямой взяты три точки L, M и N (M между L и N, $|LM| \neq |MN|$). На отрезках LM, MN и LN, как на диаметрах, построены полуокружности, серединами которых являются точки A, B и C соответственно. Точка C лежит по одну сторону, а точки A и B – по другую сторону от прямой LN. Найдите отношение площади фигуры, ограниченной этими тремя полуокружностями, к площади треугольника ABC.

30. В окружности γ проведены хорды KL, MN, PS. Хорды KL и PS пересекаются в точке C, хорды KL и MN пересекаются в точке A, а хорды MN и PS пересекаются в точке B, причём $|AL| = |CK|$, $|AM| = |BN|$, $|BS| = 5$, $|BC| = 4$. Найдите длину радиуса окружности γ, если величина угла BAC равна $\pi/4$.

31. Дана окружность, длина диаметра MN которой равна 16. На касательной к этой окружности в точке M отложен отрезок MP, длина которого больше 15. Из точки P проведена вторая касательная к окружности, пересекающая прямую MN в точке Q. Найдите площадь треугольника MPQ, если его периметр равен 72.

32. На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$), как на диаметре, построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, H – точка пересечения высот треугольника ABC, $|AD| = a$, $|MD| = b$. Найдите $|AH|$.

33. Три круга с центрами в точках P, Q и R попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Известно, что $\widehat{PQR} = 2\arcsin(1/3)$, а сумма длин радиусов всех трёх кругов равна $12\sqrt{2}$. Какую наибольшую длину может иметь окружность, проходящая через точки A, B, C?

34. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его основания AC в точке D и боковой стороны AB в точке E. Точка F – середина стороны AB, а точка G – точка пересечения окружности и отрезка FD, отличная от D. Касательная к окружности, проходящая через точку G, пересекает сторону AB в точке H. Найдите величину угла BCA, если известно, что $|FH| : |HE| = 2 : 3$.

35. Из точки A проведены к окружности две касательные (M и N – точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN – в точке P. Известно, что $|AB| : |BC| = 2 : 3$. Найдите $|AP| : |PC|$.

36. Две окружности с центрами A и B и длинами радиусов соответственно 2 и 1 касаются друг друга. Точка C лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей, и находится на расстоянии $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ от середины отрезка AB. Найдите площадь S треугольника ABC, если известно, что $S > 2$.

3. Четырёхугольники и многоугольники

3.1. Параллелограммы

Теоретический материал

Ломаной $A_1A_2A_3...A_n$ называется фигура, состоящая из точек A_1, A_2, ... , A_n (*вершин ломаной*) и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, ... , $A_{n-1}A_n$ (*звеньев ломаной*).

Простым многоугольником называется замкнутая ломаная без самопересечений, соседние звенья которой не лежат на одной прямой.

Поскольку в элементарной геометрии рассматриваются только простые многоугольники, в дальнейшем по умолчанию под многоугольником будет подразумеваться простой многоугольник. Случаи, когда имеется в виду многоугольник с самопересечениями, будут оговариваться отдельно.

Определение. *Параллелограммом* называется четырёхугольник, противоположные стороны которого **попарно параллельны**.

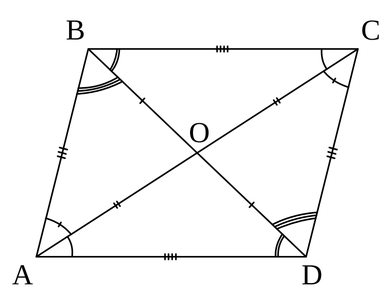
Заметим, что параллелограмм является *выпуклым* четырёхугольником (то есть лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону), его диагонали пересекаются и (как диагонали любого выпуклого многоугольника) лежат внутри него.

1. Свойства параллелограмма

Если четырёхугольник является параллелограммом, то

1. *Величины его противоположных углов равны.*
2. *Длины его противоположных сторон равны.*
3. *Его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*
4. *Треугольники, на которые он разбит диагоналями, имеют равные площади.*
5. *Сумма квадратов длин его диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон.*

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, точку пересечения его диагоналей обозначим буквой O. Поскольку $AB||CD$ и $AD||BC$, то в силу свойств внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых



$$\widehat{ACB} = \widehat{CAD}, \ \widehat{ACD} = \widehat{CAB},$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{BDC}, \ \widehat{CBD} = \widehat{ADB}.$$

Из этого вытекает, что, во-первых,

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{CBD} = \widehat{CDB} + \widehat{ADB} = \widehat{ADC},$$

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = \widehat{ACD} + \widehat{ACB} = \widehat{BCD}$$

и, во-вторых, треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников. Значит, $|AB| = |CD|$ и $|BC| = |AD|$. Но тогда треугольники AOB и COD также равны по второму признаку равенства треугольников, поэтому $|AO| = |OC|$ и $|BO| = |OD|$. Из этих равенств с учётом того, что синусы величин углов AOB, BOC, COD и AOD равны (т.к. эти углы смежные/вертикальные), мы получаем и равенство площадей всех треугольников, на которые параллелограмм разбит своими диагоналями.

Последнее свойство проще всего доказать так: углы ABC и BAD являются внутренними односторонними при параллельных прямых BC, AD и секущей AB, поэтому сумма их величин равна π, а косинусы их величин противоположны по знаку. Записывая теорему косинусов для треугольников ABC и BAD, учитывая, что $|AD| = |BC|$, $|AB| = |CD|$, и складывая полученные соотношения, получаем

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos\widehat{BAD} =$$

$$= |CD|^2 + |AD|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ABC},$$

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ABC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2.$$

Свойства параллелограмма доказаны.

2. Признаки параллелограмма

Если для четырёхугольника выполнено хотя бы одно из утверждений:

1. *Величины его противоположных углов равны.*
2. *Длины его противоположных сторон равны.*
3. *Две его противоположные стороны параллельны и равны по длине.*
4. *Его диагонали делятся пополам точкой их пересечения,*

то он является параллелограммом.

В дополнение к этим четырём основным признакам параллелограмма докажем ещё два вспомогательных признака.

Если для выпуклого четырёхугольника выполнено хотя бы одно из утверждений:

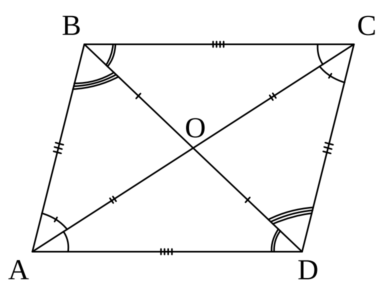
а) *Треугольники, на которые он разбит диагоналями, имеют равные площади.*

б) *Сумма квадратов длин его диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон,*

то он является параллелограммом.

Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$.

а) Пусть площади треугольников AOB, BOC, COD и DOA равны. Запишем формулы площади для треугольников AOB и BOC:



$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |OB| \cdot \sin\widehat{AOB},$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |OC| \cdot \sin\widehat{BOC}.$$

Теперь заметим, что синусы смежных углов AOB и BOC равны, и почленно поделим друг на друга полученные соотношения. Получим $|AO| = |OC|$. Аналогично доказывается, что $|BO| = |OD|$, значит, в силу доказанного ранее, $ABCD$ – параллелограмм.

б) Доказательство последнего признака посложнее, чем предыдущие. Введем обозначения $|AO| = a$, $|BO| = b$, $|CO| = c$, $|DO| = d$, $\widehat{AOB} = \alpha$. Тогда

$$\widehat{COD} = \alpha, \quad \widehat{BOC} = \widehat{AOD} = \pi - \alpha, \quad |AC| = a + c, \quad |BD| = b + d.$$

Запишем теорему косинусов для треугольников AOB, BOC, COD и DOA:

$$|AB|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \quad |BC|^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha,$$

$$|CD|^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha, \quad |AD|^2 = a^2 + d^2 + 2ad\cos\alpha.$$

После этого, сложив полученные соотношения и воспользовавшись тем, что

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2,$$

мы получаем

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(ad + bc - ab - cd)\cos\alpha = (a + c)^2 + (b + d)^2 \iff$$

$$\iff (a - c)^2 + (b - d)^2 - 2(a - c)(b - d)\cos\alpha = 0.$$

Если $b = d$, то из полученного уравнения вытекает, что $a = c$, то есть диагонали четырёхугольника $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам и по доказанному выше он является параллелограммом. Если $b \neq d$, то, деля обе части уравнения на $(b - d)^2$, находим

$$\left(\frac{a - c}{b - d}\right)^2 - 2\cos\alpha \cdot \frac{a - c}{b - d} + 1 = 0, \quad \frac{D}{4} = \cos^2\alpha - 1 \geqslant 0 \implies \alpha = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Но величина угла AOB лежит в интервале $(0, \pi)$, поэтому в случае $b \neq d$ уравнение решений не имеет. Признаки параллелограмма доказаны.

3. Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма $ABCD$ может быть вычислена по формулам

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin\widehat{BAD}, \quad S = |AD| \cdot h_1 = |AB| \cdot h_2, \quad S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\alpha,$$

где h_1 и h_2 – длины высот параллелограмма $ABCD$, проведенных к его сторонам AD и AB соответственно, а α – величина угла между его диагоналями.

4. Вписанная и описанная окружности

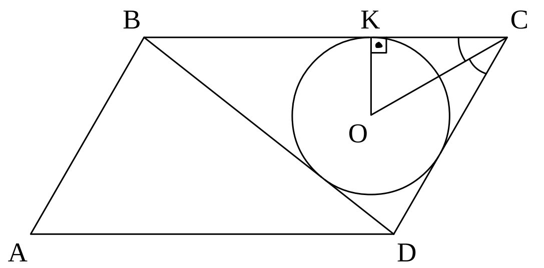
В параллелограмм можно *вписать окружность* тогда и только тогда, когда он является ромбом.

Около параллелограмма можно *описать окружность* тогда и только тогда, когда он является прямоугольником.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26, величина угла ABC равна $2\pi/3$, а длина радиуса окружности, вписанной в треугольник BCD, равна $\sqrt{3}$. Найдите длины сторон параллелограмма $ABCD$, если известно, что длина стороны AD больше длины стороны AB.

Р е ш е н и е. Поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то $|AB| = |CD|$, $|AD| = |BC|$. С учётом этого из того, что периметр $ABCD$ равен 26, вытекает, что $|BC| + |CD| = 13$. Поэтому, если обозначить длины отрезков AD и BC за y, то длины отрезков AB и CD равны $13-y$. По условию задачи $|AD| > |AB|$, то есть $y > 13 - y \iff y > 13/2$.



Далее, поскольку прямые AB и CD параллельны, то, по свойствам внутренних односторонних углов, $\widehat{BCD} = \pi - \widehat{ABC} = \pi/3$. Записав для треугольника BCD теорему косинусов, имеем

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2\cdot|BC|\cdot|CD|\cdot\cos\widehat{BCD} \quad\Longrightarrow\quad |BD| = \sqrt{3y^2-39y+169}.$$

Теперь обозначим центр окружности, вписанной в треугольник BCD, буквой O, а точку её касания со стороной BC обозначим буквой K. Тогда CO – биссектриса угла BCD, то есть $\widehat{OCK} = \pi/6$ и, по свойствам отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, делит его стороны, $|CK| = p_{\triangle BCD} - |BD|$. Наконец, из прямоугольного треугольника OCK имеем

$$|OK| = |CK|\cdot\operatorname{tg}\widehat{OCK} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{3} = \frac{13-\sqrt{3y^2-39y+169}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \sqrt{3y^2-39y+169} = 7.$$

Возводя в квадрат полученное уравнение, находим

$$3y^2-39y+169 = 49 \quad\Longrightarrow\quad y^2-13y+40=0 \quad\Longrightarrow\quad y=8 \text{ или } y=5.$$

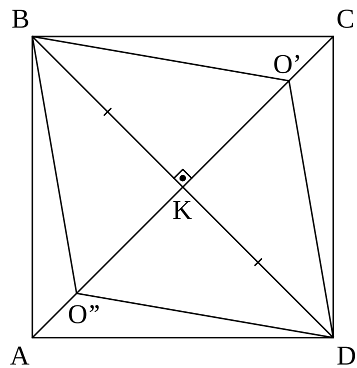
Ну а поскольку $y > 13/2$, то

$$|AD| = |BC| = y = 8, \quad |AB| = |CD| = 13 - y = 5.$$

О т в е т. $|AD| = |BC| = 8$, $|AB| = |CD| = 5$.

П р и м е р 2. В плоскости даны квадрат $ABCD$ и точка O. Известно, что площадь квадрата $ABCD$ больше 225, $|OB| = |OD| = 13$, $|OC| = 5\sqrt{2}$. Найдите длину стороны AB и выясните, где расположена точка O – вне или внутри квадрата $ABCD$.

Р е ш е н и е. Обозначим середину диагонали BD буквой K и заметим, что точка O по условию задачи равноудалена от точек B и D. Это означает, что она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BD, то есть на прямой, проходящей через точку K и перпендикулярной BD. С другой стороны, $ABCD$ – квадрат, поэтому его диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке K. Из этих двух фактов следует, что точка O лежит на прямой AC.



Далее, поскольку площадь квадрата равна квадрату длины его стороны, то из условия задачи вытекает, что $|AB| = |BC| > 15$. Теперь учтем, что AB, BC и OB – наклонные, опущенные из вершины B на прямую AC, $|AB| = |BC| > |OB|$, из чего вытекает, что $|AK| = |CK| > |OK|$, стало быть, точка O лежит внутри квадрата $ABCD$.

Вообще говоря, точка O может лежать как на отрезке KC (этот вариант обозначим за O'), так и на отрезке AK (этот вариант обозначим за O''). Положим $|BK| = x > 0$, тогда $|KC| = x$,

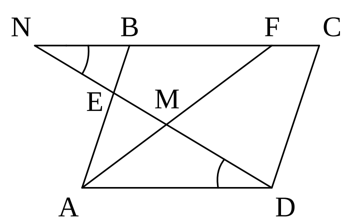
$$|AB| = \sqrt{|BK|^2 + |KC|^2} = x\sqrt{2},$$

$$|O'K| = |O''K| = \sqrt{|OB|^2 - |BK|^2} = \sqrt{169 - x^2}.$$

Рассмотрим оба варианта расположения точки O. Для варианта O' в силу равенства $|KC| = |O'K| + |O'C|$ получаем уравнение $x = \sqrt{169 - x^2} + 5\sqrt{2}$, из которого нетрудно получить $x = 17/\sqrt{2}$. Тогда $|AB| = 17$, что удовлетворяет условию задачи. В другом варианте $|KC| = |O''C| - |O''K|$, что дает нам уравнение $x = \sqrt{169 - x^2} - 5\sqrt{2}$. Решением этого уравнения является $x = 7/\sqrt{2}$, но тогда $|AB| = 7$, что противоречит условию задачи.

О т в е т. 17, точка O лежит внутри квадрата.

П р и м е р 3. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F лежат соответственно на сторонах AB и BC таким образом, что $|AE| = 2|BE|$, $|BF| = 3|CF|$. M – точка пересечения прямых AF и DE. Найдите численное значение отношения $|AM| : |MF|$.



Р е ш е н и е. Конфигурация, описанная в этой задаче, является довольно стандартной: даны какие-то отношения длин отрезков и отношение же просят найти. В таких случаях, как правило, применяют подобие или теорему Менелая. Однако, если мы ограничимся тем, что изобразим параллелограмм $ABCD$ и построим отрезки AF и DE, то на чертеже не найдется ни подобных треугольников, ни конструкции, к которой можно будет применить теорему Менелая. Поэтому придется делать дополнительное построение, а именно продолжим прямую DE до пересечения с прямой BC в точке N.

Введём обозначения $|BE| = x$, $|CF| = y$, тогда, по условию задачи, $|AE| = 2x$, $|BF| = 3y$, $|BC| = 4y$ и, по свойствам параллелограмма, $|AD| = 4y$. Треугольники ADE и BNE подобны, что даёт нам

$$\frac{|BN|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|AE|} \implies |BN| = \frac{|AD| \cdot |BE|}{|AE|} = \frac{4y \cdot x}{2x} = 2y, \quad |FN| = |BN| + |BF| = 5y.$$

Треугольники ADM и FNM подобны, что даёт нам

$$\frac{|AM|}{|MF|}=\frac{|AD|}{|FN|}\implies\frac{|AM|}{|MF|}=\frac{4y}{5y}=\frac{4}{5}.$$

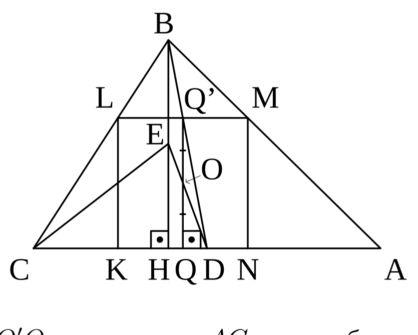
Ответ. $4:5$.

Пример 4. В треугольник ABC вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC, одна на стороне AB и одна на стороне BC. Через середину D стороны AC и центр этого квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой BH треугольника ABC в точке E. Найдите площадь треугольника DEC, если $|AB|=6$, $|BC|=5$ и $|AC|=7$.

Решение. При первом взгляде на условие этой задачи может показаться, что она чисто счётная. В самом деле, даны все длины сторон треугольника ABC, поэтому рано или поздно, так или иначе, можно вычислить все величины, присутствующие в этой задаче. Однако такой лобовой путь приведет к весьма большому объёму работы. Поэтому будем рассуждать так: запишем формулы площади треугольников ABC и DEC и вычислим их отношение:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BH|,\quad S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}\cdot|DC|\cdot|EH|\quad\implies$$

$$\implies\quad\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{|EH|}{|BH|}\cdot\frac{|DC|}{|AC|}=\frac{|EH|}{2|BH|}.$$



Итак, фактически нам надо лишь найти, в каком отношении точка E делит высоту BH. Обозначим вершины квадрата буквами K, L, M и N таким образом, что точка L лежит на стороне BC, точка M лежит на стороне AB, а его центр обозначим буквой O. Проведем отрезок BD, точку его пересечения с отрезком LM обозначим буквой Q'. Так как $LM||AC$, то треугольник BLM подобен треугольнику BCA, и поскольку BD – медиана треугольника BCA, то BQ' – медиана треугольника BLM, то есть Q' – середина LM. Из этого следует, что если мы опустим перпендикуляр $Q'Q$ на сторону AC, то он будет содержать точку O, причем $|Q'O|=|OQ|$.

Далее, так как $QQ'||BH$, то треугольник DQQ' подобен треугольнику DHB, и поскольку DO – медиана треугольника DQQ', то DE – медиана треугольника DHB, то есть E – середина BH, т.е. $|EH|:|BH|=1:2$. Осталось получить ответ:

$$p_{\triangle ABC}=\frac{5+6+7}{2}=9,\ \ S_{\triangle ABC}=\sqrt{9\cdot2\cdot3\cdot4}=6\sqrt{6},\ \ S_{\triangle DEC}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

Задачи

1. Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями длины 10 и 12.

2. В квадрат, площадь которого равна 18, вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон этого прямоугольника относятся, как 1:2. Найдите площадь прямоугольника.

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M таким образом, что $|DM| : |MC| = 2$. Найдите величину угла BAD, если известно, что $\widehat{CAM} = \alpha$.

4. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB втрое длиннее стороны BC. Внутри него лежит точка N, причём $|AN| = \sqrt{2}$, $|BN| = 4\sqrt{2}$, $|DN| = 2$. Найдите косинус величины угла BAN и площадь прямоугольника $ABCD$.

5. В ромбе $ABCD$ величина угла при вершине A равна $\pi/3$. Точка N делит сторону AB в отношении $2:1$, считая от точки A. Найдите $\operatorname{tg}\widehat{DNC}$.

6. В ромбе $ABCD$, длина стороны которого равна 6, на стороне BC взята точка E таким образом, что $|CE| = 2$. Найдите расстояние от точки E до центра ромба, если $\widehat{BAD} = \pi/3$.

7. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а длина его диагонали равна 10. На плоскости, в которой расположен прямоугольник $ABCD$, выбрана точка O так, что $|OB| = |OD| = 13$. Найдите расстояние от точки O до наиболее удалённой от нее вершины прямоугольника $ABCD$.

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки E, F, H и G являются соответственно серединами отрезков AB, BC, CD и AD; O – точка пересечения отрезков EH и FG. Известно, что $|EH| = a$, $|FG| = b$, $\widehat{FOH} = \alpha$. Найдите длины диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

9. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O. Найдите его периметр, если известно, что $|AO| = |OC| = 1$, $|BO| = |OD| = 2$.

10. В ромб, одна из диагоналей которого имеет длину 10, вписан круг площади 9π. Вычислите площадь части ромба, расположенной вне круга.

11. В параллелограмме $ABCD$ длины диагоналей AC и BD равны d_1 и d_2 ($d_1 \neq d_2$). Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $\widehat{ABC} = \alpha$.

12. Через вершину A и середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $OMCD$.

13. В параллелограмме $ABCD$ $|AB| = |BD| = 1$, а длины его диагоналей относятся как $1 : \sqrt{3}$. Найдите площадь той части круга, описанного около треугольника BDC, которая не принадлежит кругу, описанному около треугольника ADC.

14. В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла при вершине P, градусная мера которого равна 80°, пересекает сторону RS в точке L. Найдите длину радиуса окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL, если известно, что $|PQ| = 7$.

15. В параллелограмме $ABCD$ величина угла BCD равна $5\pi/6$, а длина основания AD равна 8. Найдите длину радиуса окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A, а также пересекающей основание AD на расстоянии 2 от точки D.

16. Окружность, длина диаметра которой равна $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведённой из точки C к этой окружности, равна 3, а $|AB| = 1$. Найдите все возможные значения, которые может принимать длина стороны BC.

17. В прямоугольнике $ABCD$, в котором $|AD| = 3 + 3\sqrt{2}/2$, а $|AB| = 6$, расположены две окружности. Окружность с центром в точке K, длина радиуса которой равна 2, касается сторон AB и AD. Окружность с центром в точке L, длина радиуса которой равна 1, касается стороны CD и первой окружности. Найдите площадь треугольника CLM, если M – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L.

18. Окружность, проходящая через вершины B, C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите длину отрезка AE, если $|AD| = 4$ и $|CE| = 5$.

19. В параллелограмме проведены биссектрисы всех внутренних углов. Четырёхугольник, образованный точками пересечения этих биссектрис, имеет площадь, равную двум третям площади исходного параллелограмма. Найдите отношение длин большей и меньшей сторон исходного параллелограмма.

20. Через вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E таким образом, что $|BE| = 9$. Найдите $|BD|$, если $|AB| = 3$, $|BC| = 5$.

21. Стороны ромба $EFGH$ являются гипотенузами прямоугольных равнобедренных треугольников EAF, FDG, GCH и HBE, причём все эти треугольники имеют общие внутренние точки с ромбом $EFGH$. Сумма площадей четырёхугольника $ABCD$ и ромба $EFGH$ равна 12. Найдите $|GH|$.

22. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся трех его сторон и другой окружности каждая. Длина радиуса одной из них равна 1. Также известно, что длина одного из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания с одной из окружностей равна $\sqrt{3}$. Найдите площадь параллелограмма.

23. В ромб $ABCD$, у которого $|AB| = l$ и $\widehat{BAD} = 2\alpha$, вписана окружность. Касательная к этой окружности пересекает сторону AB в точке M, а сторону AD – в точке N. Известно, что $|MN| = 2a$. Найдите длины отрезков MB и ND, если известно, что $|MB| \leqslant |ND|$.

24. На стороне AB треугольника ABC взята точка D таким образом, что $|CD| = \sqrt{13}$ и $\sin\widehat{ACD} : \sin\widehat{BCD} = 4 : 3$. Через середину отрезка CD проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $\widehat{ACB} = 2\pi/3$, площадь треугольника MCN равна $3\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до прямой AB в два раза больше расстояния от точки N до этой же прямой. Найдите площадь треугольника ABC.

25. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 16. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника AOB, равна 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

26. В параллелограмме $ABCD$ величина угла между диагоналями AC и BD равна $\pi/6$. Известно, что $|AC| : |BD| = 2 : \sqrt{3}$. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AC, а точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите отношение площадей треугольника AB_1C_1 и параллелограмма $ABCD$.

27. Дан параллелограмм $ABCD$, $|AB| = 3$, $|AD| = \sqrt{3}+1$, $\widehat{BAD} = \pi/3$. На стороне AB взята точка K таким образом, что $|AK| : |KB| = 2 : 1$. Через точку K параллельно AD проведена прямая. На этой прямой внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка L, а на стороне AD выбрана точка M так, что $|AM| = |KL|$. Прямые BM и CL пересекаются в точке N. Найдите величину угла BKN.

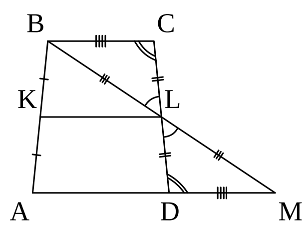
3.2. Трапеции

Теоретический материал

Определение. *Трапецией* называется четырёхугольник, две противоположные стороны которого **параллельны**. Эти стороны называются *основаниями* трапеции, а две другие его стороны называются *боковыми сторонами* трапеции.

Отметим, что трапеция является выпуклым четырёхугольником и, согласно этому определению, параллелограмм является частным случаем трапеции.

Замечание. В некоторых учебных пособиях под трапецией подразумевается четырёхугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие не параллельны.



1. Средняя линия трапеции

Средняя линия трапеции параллельна её основаниям, а её длина равна полусумме длин оснований трапеции.

Для доказательства этого факта рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, K – середина AB, L – середина CD. Продолжим отрезок BL за точку L до пересечения с прямой AD в точке M. Тогда углы BLC и DLM равны как вертикальные, а углы BCL и LDM равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей CD. Учитывая тот факт, что

$|CL| = |DL|$, мы получаем, что треугольники BCL и MDL равны по второму признаку равенства треугольников, что даёт нам $|BC| = |DM|$, $|BL| = |LM|$.

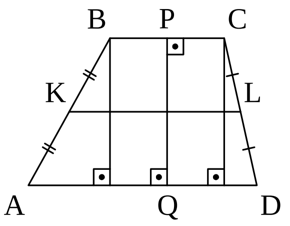
Стало быть, отрезок KL является средней линией треугольника ABM, поэтому, во-первых, $KL||AD$ (из чего сразу следует, что $KL||BC$) и, во-вторых, $|KL| = \frac{1}{2}|AM| = \frac{1}{2}(|AD| + |DM|) = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|)$. Утверждение доказано.

2. Высота трапеции

Длины боковых сторон трапеции можно вычислить с помощью деления длины высоты трапеции на синус величины соответствующего угла при основании трапеции:

$$|AB| = \frac{|PQ|}{\sin \widehat{BAD}}; \ |CD| = \frac{|PQ|}{\sin \widehat{CDA}}.$$

Площадь трапеции равна произведению полусуммы длин её оснований и длины её высоты:



$$S_{ABCD} = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot |PQ| = |KL| \cdot |PQ|.$$

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, K – середина AB, L – середина CD, PQ – её высота. Для доказательства первого из приведенных утверждений достаточно опустить перпендикуляры из точек B и C на основание AD и рассмотреть соответствующие прямоугольные треугольники, учитывая, что длины проведённых перпендикуляров равны длине высоты PQ. Второе утверждение легко обосновывается с помощью рассмотрения треугольников ABD и BCD, площади которых равны $\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |PQ|$ и $\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |PQ|$ соответственно. Ну а сумма их площадей как раз равна площади трапеции $ABCD$.

3. Диагонали трапеции

Теорема. Диагонали трапеции делят её на четыре треугольника, два из которых подобны ($\triangle AOD \sim \triangle COB$), а два других равновелики ($S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$). При этом справедливы следующие соотношения:

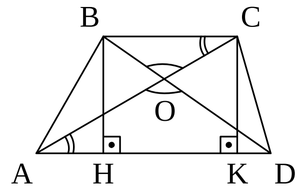
$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COB}} = \left(\frac{|AD|}{|BC|}\right)^2; \quad \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{|AD|}{|BC|}.$$

Доказательство. Поскольку прямые AD и BC параллельны, а AC – секущая, то углы CAD и ACB равны как внутренние накрест лежащие.

С другой стороны, углы AOD и COB равны как вертикальные, поэтому треугольники AOD и COB подобны по двум углам. Это дает нам следующее соотношение:

$$k = \frac{|AO|}{|OC|} = \frac{|DO|}{|OB|} = \frac{|AD|}{|BC|},$$

где k – коэффициент подобия этих треугольников. Первое из соотношений теоремы немедленно вытекает из того, что площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента их подобия.



Теперь опустим из точек B и C на прямую AD перпендикуляры BH и CK. Длины этих отрезков равны (каждая из этих длин фактически есть расстояние между параллельными прямыми AD и BC). С учётом этого, записывая формулы площади треугольников ABD и ACD, получаем

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|BH|; \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|CK| \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}.$$

Осталось заметить, что

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD}; \quad S_{\triangle COD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD},$$

поэтому $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$. Наконец, воспользуемся тем, что углы AOD и AOB смежные, поэтому сумма их величин равна π, а их синусы равны. Значит,

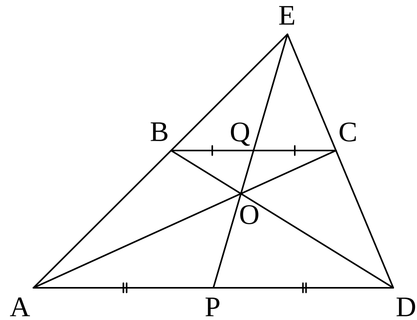
$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|DO|\cdot\sin\widehat{AOD}}{\frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|OB|\cdot\sin\widehat{AOB}} = \frac{|DO|}{|OB|} = \frac{|AD|}{|BC|}.$$

Теорема доказана.

4. Свойства точки пересечения диагоналей и точки пересечения боковых сторон трапеции

Теорема. Пусть в трапеции $ABCD$ $AD||BC$, E – точка пересечения прямых AB и CD, P и Q – середины оснований AD и BC соответственно, O – точка пересечения диагоналей. Тогда точки P, Q, O и E лежат на одной прямой.

Доказательство. Докажем, что прямая, проходящая через точки E и O, проходит также и через середины оснований трапеции.



Изначально будем считать, что точки P и Q являются всего лишь точками пересечения этой прямой с основаниями трапеции.

Поскольку прямые AD и BC параллельны, то треугольник AEP подобен треугольнику BEQ, а треугольник DEP подобен треугольнику CEQ. Из этих подобий находим

$$\frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{|EP|}{|EQ|}, \frac{|DP|}{|CQ|} = \frac{|EP|}{|EQ|} \Longrightarrow \frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{|DP|}{|CQ|}.$$

С другой стороны, треугольник AOP подобен треугольнику COQ, а треугольник DOP подобен треугольнику BOQ. Из этих подобий вытекает

$$\frac{|AP|}{|CQ|} = \frac{|OP|}{|OQ|}, \quad \frac{|DP|}{|BQ|} = \frac{|OP|}{|OQ|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AP|}{|CQ|} = \frac{|DP|}{|BQ|}.$$

Почленно разделив друг на друга полученные соотношения, получаем

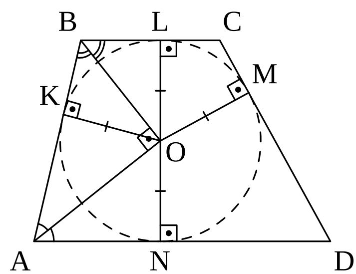
$$\frac{|CQ|}{|BQ|} = \frac{|BQ|}{|CQ|} \quad \Longrightarrow \quad |BQ| = |CQ| \quad \Longrightarrow \quad |AP| = |DP|,$$

то есть P и Q – середины оснований AD и BC соответственно. Теорема доказана.

5. Вписанная в трапецию окружность

В трапецию *можно вписать* окружность тогда и только тогда, когда сумма длин оснований трапеции равняется сумме длин её боковых сторон.

Теорема. Если в трапецию $ABCD$ $(AD||BC)$ можно вписать окружность с центром в точке O, точка O является точкой пересечения биссектрис всех внутренних углов трапеции, длина высоты трапеции $ABCD$ равна удвоенной длине радиуса этой окружности, углы AOB и COD – прямые.



Доказательство. Точки касания окружности, вписанной в $ABCD$, со сторонами AB, BC, CD и AD обозначим буквами K, L, M и N соответственно.

Тогда $|OK| = |OL| = |OM| = |ON|$, то есть точка O равноудалена от отрезков AB, BC, CD и AD, из чего следует, что точка O лежит на биссектрисе каждого из углов ABC, BCD, CDA и DAB.

Помимо этого, отметим, что $OL \perp BC$ и $ON \perp AD$. Из этого с учётом параллельности прямых AD и BC вытекает параллельность прямых OL и ON. Но у этих прямых есть общая точка O, поэтому они совпадают, то есть точки L, O и N лежат на одной прямой, перпендикулярной основаниям трапеции. Стало быть, LN – высота трапеции $ABCD$ и $|LN| = |OL| + |ON| = 2r$, где r – длина радиуса окружности, вписанной в $ABCD$.

Наконец, углы ABC и DAB являются внутренними односторонними при параллельных прямых AD и BC и секущей AB, поэтому $\widehat{ABC} + \widehat{DAB} = \pi$. AO и BO – биссектрисы углов DAB и ABC, значит,

$$\widehat{OAB} + \widehat{OBA} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{DAB} + \frac{1}{2} \cdot \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}; \quad \widehat{AOB} = \pi - (\widehat{OAB} + \widehat{OBA}) = \frac{\pi}{2}.$$

То, что угол COD тоже прямой, доказывается абсолютно аналогично. Теорема доказана.

6. Равнобедренная трапеция

Определение. *Равнобедренной трапецией* называется трапеция, боковые стороны которой равны по длине и непараллельны.

Отметим, что, давая такое определение, мы не берём в рассмотрение параллелограммы. Для всех параллелограммов, за исключением прямоугольников, приведённые ниже свойства не будут выполняться. Тем не менее, для единообразия прямоугольники мы тоже исключим из рассмотрения.

Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ $(AD||BC)$, будем считать, что $|AD| > |BC|$. Пусть BH и CK – её высоты.

Теорема. Следующие утверждения эквивалентны:

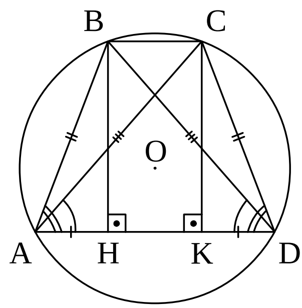
1. *Трапеция $ABCD$ – равнобедренная.*
2. *Величины углов при каком-либо из оснований трапеции $ABCD$ равны.*

3. *Длины диагоналей трапеции $ABCD$ равны.*

4. *Величины углов CAD и ADB (или CBD и ACB) равны.*

5. *Длины отрезков AH и KD равны (полуразности длин оснований AD и BC).*

6. *Около трапеции $ABCD$ можно описать окружность.*



Доказательство. Сначала докажем все свойства равнобедренной трапеции, то есть тот факт, что из утверждения 1 вытекают все остальные.

Поскольку $|AB| = |CD|$, $|BH| = |CK|$, то прямоугольные треугольники ABH и DCK равны по гипотенузе и катету, что дает нам равенство длин отрезков AH и KD. Заметим, что $BHKC$ – прямоугольник, поэтому $|HK| = |BC|$. Отсюда с учётом того, что $|AH|+|HK|+|KD| = |AD|$, немедленно вытекает $|AH| = |KD| = \frac{1}{2}(|AD|-|BC|)$. Таким образом, 1. $\Rightarrow$ 5.

Далее из равенства треугольников ABH и DCK вытекает и равенство углов BAD и ADC. Ну а поскольку сумма величин углов BAD и ABC равна π и сумма величин углов ADC и BCD равна π (по свойствам односторонних углов), то равны и углы ABC и BCD, стало быть, 1. $\Rightarrow$ 2.

Раз равны углы BAD и ADC, то равны и треугольники ABD и DCA (по двум сторонам и углу между ними). Поэтому $|AC| = |BD|$ и $\angle ADB = \angle CAD$. Но угол ADB равен углу CBD, а угол CAD равен углу ACB (по свойствам внутренних накрест лежащих углов), значит, равны и углы ACB и CBD. Итак, 1. $\Rightarrow$ 3. и 1. $\Rightarrow$ 4.

Наконец, заметим, что прямая, соединяющая середины оснований трапеции $ABCD$, им перпендикулярна. Это вытекает из того, что она проходит через точку пересечения прямых AB и CD, и равнобедренности треугольника, образованного этой точкой и точками A и D. Точка O пересечения этой прямой и серединного перпендикуляра к стороне AB и будет центром окружности, описанной около трапеции $ABCD$, так как O по построению равноудалена от всех вершин трапеции. Свойства равнобедренной трапеции доказаны.

Теперь докажем признаки равнобедренной трапеции. Пусть величины углов при каком-либо из оснований трапеции $ABCD$ равны. Тогда неминуемо равны углы BAD и ADC, что даёт нам равенство прямоугольных треугольников ABH и DCK по катету и острому углу. Отметим, что равенство этих треугольников вытекает и из того факта, что $|AH| = |KD|$. Ну а раз треугольники равны, то и $|AB| = |CD|$. Значит, 2. $\Rightarrow$ 1. и 5. $\Rightarrow$ 1.

Если равны длины отрезков AC и BD, то треугольники ACK и DBH равны по гипотенузе и катету, а если $\angle CAD = \angle ADB \iff \angle ACB = \angle CBD$, то они равны по катету и острому углу. Поэтому в любом случае $|AK| = |HD|$, но поскольку $|AK| = |AH| + |HK|$ и $|HD| = |HK| + |KD|$, то $|AH| = |KD|$. Таким образом, 3. $\Rightarrow$ 5. $\Rightarrow$ 1. и 2. $\Rightarrow$ 5. $\Rightarrow$ 1.

Наконец, если около трапеции $ABCD$ можно описать окружность, то, по свойствам вписанных углов, $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi$ и, по свойствам односторонних углов, $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} = \pi$. Значит, углы ADC и BAD равны, то есть 6. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 1. Теорема доказана.

Приведём также два свойства, касающиеся *произвольных* четырёхугольников, которые будут полезны при решении задач этого раздела.

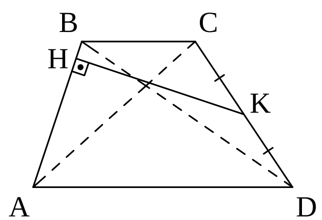
I. *Площадь произвольного выпуклого четырёхугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус величины угла между ними.*

II. *Если диагонали выпуклого четырёхугольника перпендикулярны, то суммы квадратов длин его противоположных сторон равны между собой.*

Примеры решения задач

Пример 1. В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, $|AB| = c$ и расстояние от середины отрезка CD до прямой AB равно d. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Решение. Обозначим середину отрезка CD буквой K, а основание перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую AB обозначим буквой H. Приведём три способа решения этой задачи: первый способ основан на леммах о площадях, два других используют дополнительные построения.



Первый способ

Из того, что дано в условии, можно легко найти площадь треугольника ABK:

$$S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |KH| = \frac{cd}{2}$$

Попробуем выразить площадь трапеции через площадь треугольника ABK. Из того, что $|CK| = |KD|$, следует, что $S_{\Delta AKD} = \frac{1}{2} \cdot S_{\Delta ACD}$ и $S_{\Delta BCK} = \frac{1}{2} \cdot S_{\Delta BCD}$. Поэтому

$$S_{\Delta AKD} + S_{\Delta BCK} = \frac{1}{2} \cdot (S_{\Delta ACD} + S_{\Delta BCD}) =$$

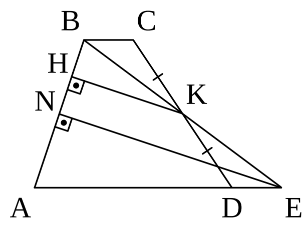
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}|AD| \cdot h + \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD},$$

где h – высота трапеции. Поэтому и $S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABK} = cd.$$

Второй способ

Проведем через точки B и K прямую до пересечения с прямой AD в точке E. Поскольку прямые AD и BC параллельны, то углы KDE и KCB равны как внутренние накрест лежащие. Углы BKC и DKE равны как вертикальные. Тогда в силу того, что $|CK| = |KD|$, получаем равенство треугольников KCB и KDE (по стороне и двум прилежащим углам). Поэтому, во-первых, $|BK| = |KE|$ и, во-вторых,



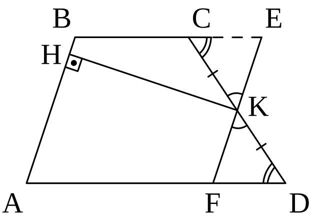
$$S_{\Delta KCB} = S_{\Delta KDE} \quad \Longrightarrow \quad S_{ABCD} = S_{\Delta ABE}.$$

Найдём высоту треугольника ABE. Обозначим основание высоты, проведенной из точки E на сторону AB, буквой N. Тогда, очевидно, $\Delta BKH \sim \Delta BEN \implies$

$$\frac{|EN|}{|KH|} = \frac{|BE|}{|BK|} = 2 \implies |EN| = 2d \implies S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |EN| = cd.$$

Третий способ

Проведём через точку K прямую, параллельную прямой AB, и обозначим буквами E и F точки пересечения этой прямой с прямыми BC и AD соответственно. Заметим, что $ABEF$ – параллелограмм. Поскольку прямые AD и BC параллельны, то углы KCE и KDF равны как внутренние накрест лежащие. Углы CKE и DKF равны как вертикальные. Тогда в силу того, что $|CK| = |KD|$, получаем равенство треугольников CKE и DKF (по стороне и двум прилежащим углам). Поэтому

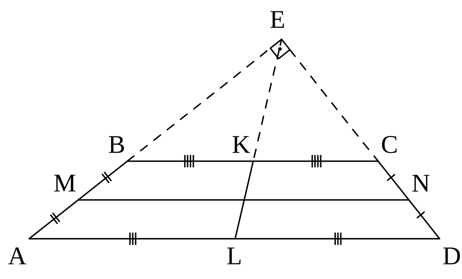


$$S_{\Delta CKE} = S_{\Delta DKF} \implies S_{ABCD} = S_{ABEF} = |AB| \cdot |KH| = cd.$$

О т в е т. cd.

П р и м е р 2. В трапеции длина средней линии равна 4, градусные меры углов при одном из оснований равны 40° и 50°. Найдите длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего их середины, равна 1.

Р е ш е н и е. Обозначим вершины трапеции буквами A, B, C и D, середины сторон AB, BC, CD и AD обозначим буквами M, K, N и L соответственно. Будем считать, что $AD||BC$, $\widehat{BAD} = 40^\circ$ и $\widehat{ADC} = 50^\circ$, тогда по условию задачи $|MN| = 4$, $|KL| = 1$. Если обозначить буквой E точку пересечения прямых AB и CD, то



$$\widehat{AED} = 180^\circ - \widehat{EAD} - \widehat{EDA} = 90^\circ,$$

то есть треугольники BEC и AED – прямоугольные. Далее заметим, что EK и EL – медианы прямоугольных треугольников BEC и AED, проведённые к их гипотенузам, значит,

$$|EK| = |BK| = |KC| = \frac{|BC|}{2}, \quad |EL| = |AL| = |LD| = \frac{|AD|}{2}.$$

Наконец, точки E, K и L лежат на одной прямой, поэтому

$$|KL| = |EL| - |EK| = \frac{|AD| - |BC|}{2} \implies |AD| - |BC| = 2.$$

Второе уравнение пишется совсем просто: воспользуемся тем, что длина средней линии трапеции равна полусумме длин её оснований:

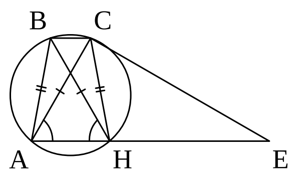
$$|MN| = \frac{|AD| + |BC|}{2} \quad \Longrightarrow \quad |AD| + |BC| = 8.$$

Наконец, из полученных уравнений находим $|AD| = 5$, $|BC| = 3$.

Ответ. 3 и 5.

Пример 3. В трапеции $ABCE$ длина основания AE равна 16, а длина боковой стороны CE равна $8\sqrt{3}$. Окружность, проходящая через точки A, B, C, пересекает прямую AE в точке H. Величина угла AHB равна $\pi/3$. Найдите длину отрезка BH.

Решение. Поскольку $ABCE$ – трапеция, а CE – её боковая сторона, то прямые AE и BC параллельны, значит и $AH||BC$. По условию задачи точки A, B, C и H лежат на одной окружности, стало быть $ABCH$ – трапеция, вписанная в окружность. Из этого вытекает, что она равнобедренная, что, в свою очередь, даёт нам следующие соотношения:



$$|AC| = |BH|, \quad \angle AHB = \angle CAH.$$

Таким образом, нам достаточно найти длину отрезка AC, что легко делается путём применения теоремы косинусов к треугольнику ACE:

$$|CE|^2 = |AC|^2 + |AE|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AE| \cdot \cos\widehat{CAE} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 192 = |AC|^2 + 256 - 2 \cdot |AC| \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad |AC| = 8.$$

Ответ. 8.

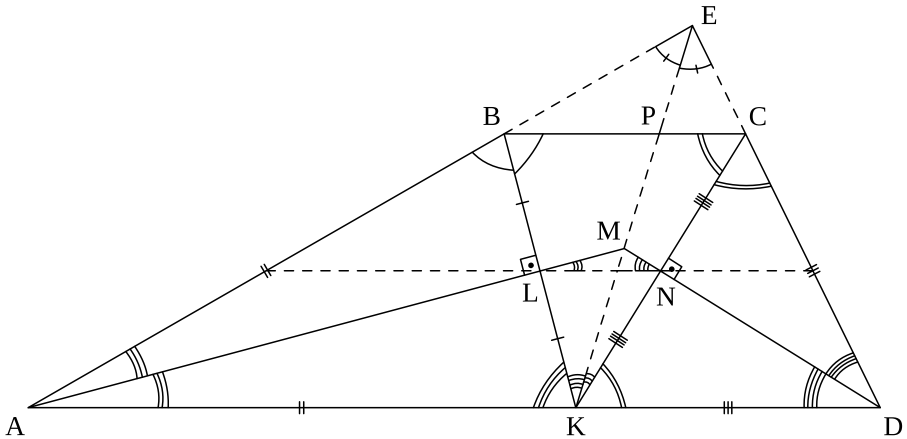
Пример 4. В трапеции $ABCD$ $AD||BC$, $|AB| = 9$, $|CD| = 5$, биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка K лежит на основании AD.

а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK сторону BC?

б) Найдите отношение $|MN| : |KL|$, если $|LM| : |KN| = 3 : 7$.

Решение. Обозначим величины углов ABC и BCD за 2α и 2β соответственно. Тогда $\widehat{BAD} = \pi - 2\alpha$ и $\widehat{ADC} = \pi - 2\beta$ (по свойству односторонних углов при параллельных прямых). Поскольку AL и BK – биссектрисы углов BAD и ABC, то $\widehat{BAL} = \pi/2 - \alpha$, $\widehat{ABK} = \alpha$, поэтому $\widehat{ALB} = \pi - \alpha - (\pi/2 - \alpha) = \pi/2$. Таким образом, AL – высота и биссектриса треугольника ABK, стало быть, во-первых, треугольник ABK — равнобедренный, $|AB| = |AK| = 9$, и, во-вторых, L – середина отрезка BK. Абсолютно аналогично доказывается, что DN – высота и биссектриса треугольника CDK, $|CD| = |KD| = 5$ и N – середина отрезка CK.

Теперь заметим, что LN – отрезок, соединяющий середины сторон BK и CK треугольника BCK, поэтому LN – его средняя линяя, из чего следует параллельность прямых LN, BC и AD. В таком случае прямая LN проходит и через середину стороны AB. Действительно, отрезок, концами которого являются точка L и точка пересечения прямых LN и AB, во-первых, параллелен прямой AB и, во-вторых, одним из его концов является середина отрезка BK. Значит, он является средней линией треугольника ABK, поэтому второй его конец – середина отрезка AB. Итак, прямая LN делит сторону AB в отношении $1:1$.



Для ответа на вторую часть первого вопроса задачи заметим, что поскольку $|AB| \neq |CD|$, то $ABCD$ – не параллелограмм, из чего вытекает, что прямые AB и CD пересекаются в точке E. Теперь докажем, что точки M и K лежат на биссектрисе угла AED.

С одной стороны, точка M лежит на биссектрисе угла EAD, поэтому она равноудалена от сторон этого угла, т.е. от прямых AE и AD. С другой стороны, точка M лежит на биссектрисе угла ADE, поэтому она равноудалена от сторон этого угла, т.е. от прямых DE и AD. Значит, точка M равноудалена от прямых AE и DE, т.е. лежит на биссектрисе угла AED. Аналогично доказывается, что точка K тоже лежит на биссектрисе угла AED.

Обозначим буквой P точку пересечения прямой EK и отрезка BC. Тогда EP – биссектриса треугольника BEC, а EK – биссектриса треугольника AED. Следовательно, по свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|BE|}{|CE|}, \quad \frac{|AK|}{|KD|} = \frac{|AE|}{|DE|}.$$

Но так как треугольники ADE и BCE подобны, то

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|DE|}{|CE|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|BE|}{|CE|}$$

и мы имеем $$\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|AK|}{|KD|} = \frac{9}{5}.$$

Для ответа на второй вопрос задачи рассмотрим четырёхугольник $MNKL$. Так как из приведенных выше рассуждений следует, что углы MLK и MNK

прямые, то их сумма равна π и, значит, вокруг четырёхугольника $MNKL$ можно описать окружность. Тогда, по свойству вписанных углов, углы MNL и MKL равны, а углы MNL и NDK равны в силу параллельности прямых LN и AD. Следовательно, равны углы MKL и NDK. Поэтому прямоугольные треугольники MKL и KDN подобны. Отсюда получаем

$$\frac{|ML|}{|KN|} = \frac{|MK|}{|KD|}.$$

Аналогично показывается подобие треугольников KNM и ALK. Тогда

$$\frac{|MN|}{|KL|} = \frac{|MK|}{|AK|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|MN|}{|KL|} = \frac{|MK|}{|KD|} \cdot \frac{|KD|}{|AK|} = \frac{|ML|}{|KN|} \cdot \frac{|KD|}{|AK|} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{21}.$$

Ответ. а) $1:1$; $5:9$; б) $5:21$.

Задачи

1. В трапеции $KLMN$ отрезки KN и LM являются основаниями, а также известно, что $|KL| = 36$, $|MN| = 34$, $|LM| = 10$. Найдите длину диагонали LN, если косинус величины угла KLM равен $-1/3$.

2. В трапецию вписана окружность. Точка касания делит одну из боковых сторон этой трапеции на отрезки длиной 12 и 3, длина её меньшего основания равна 9. Найдите площадь трапеции.

3. В трапеции $ABCD$ отрезки AB и CD являются основаниями. Диагонали трапеции пересекаются в точке E. Известно, что $|AB| = 30$, $|CD| = 24$, $|AD| = 3$, $\widehat{DAB} = \pi/3$. Найдите площадь треугольника BEC.

4. В трапеции $ABCD$ даны длины оснований $|AD| = 4$, $|BC| = 1$ и углы BAD и ADC, величины которых равны соответственно $\operatorname{arctg} 2$ и $\operatorname{arctg} 3$. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник BEC, где E – точка пересечения диагоналей трапеции.

5. В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $|AD| = 39$ и $|BC| = 26$, а также известны длины боковых сторон $|AB| = 5$ и $|CD| = 12$. Найдите длины её диагоналей.

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E. В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке H, $|MH| = 1$. Найдите величину угла BAD.

7. В трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана окружность с центром O. Найдите площадь трапеции, если угол DAB прямой, $|OC| = 2$, $|OD| = 4$.

8. В выпуклом четырёхугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L – прямые, а тангенс величины угла при вершине M равен $2/3$. Найдите длину диагонали NQ, если известно, что длина стороны LQ вдвое меньше длины стороны MN и на 2 больше длины стороны LN.

9. В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна стороне CD. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, причём треугольник BOC является равносторонним. Найдите длину стороны BC, если $|AB| = 5$, $|CD| = 3$.

10. В трапеции $KLMN$ $KN||LM$, LA – биссектриса угла KLM, точка A – середина отрезка MN. Длина средней линии трапеции $KLMN$ равна $\sqrt{5}$, $|AK| = 4$. Найдите $|AL|$.

11. В трапеции $ABCD$ $AD||BC$, биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M. Найдите длину отрезка AM, если известно, что треугольники ACM и ADM имеют одинаковую площадь, $|BM| = 8$, $|BC| + |AD| = 17$.

12. Непараллельные стороны трапеции перпендикулярны друг другу. Длина одной из них равна 3, а градусная мера угла, образованного ею и одной из диагоналей, равна 40°. Другая из них образует с одним из оснований такой же угол. Найдите длину средней линии этой трапеции.

13. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB||CD$, $\widehat{CAB} = 2\widehat{DBA}$, $|AC| = 5$, $|BD| = 7$.

14. Длины боковых сторон описанной около окружности трапеции равны 3 и 5. Известно, что средняя линия этой трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $5/11$. Найдите длины оснований трапеции.

15. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке E. Около треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведённая в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D, F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $|AF| = a$, $|AD| = b$. Найдите длину отрезка EF.

16. В трапеции $ABCD$ длина основания AD больше длины основания BC. Известно, что $|AD| = |CD| = 14/3$, $\widehat{BAD} = \pi/2$, $\widehat{BCD} = 5\pi/6$. На основании AD построен треугольник AED так, что точки B и E лежат по одну сторону от прямой AD, причём $|AE| = |DE|$. Длина высоты этого треугольника, проведенной из вершины E, равна $7/5$. Найдите площадь общей части трапеции $ABCD$ и треугольника AED.

17. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 4, длина основания BC равна 3, длины сторон AB и CD равны. Точки M и N лежат на диагонали BD, причём точка M расположена между точками B и N, а отрезки AM и CN перпендикулярны диагонали BD. Найдите длину отрезка CN, если $|BM| : |DN| = 2 : 3$.

18. Около окружности, длина радиуса которой равна R, описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции, параллельна основаниям трапеции. Длина этой хорды равна b. Найдите площадь трапеции.

19. В трапеции $BCDE$ $(CD||BE)$ проведена средняя линяя LN (точка L лежит на стороне BC). Прямая, проходящая через точку B и перпендикулярная к стороне DE, пересекает отрезок LN в точке M, $|LM| : |MN| = 2 : 1$. Также известно, что $|BE| = 14$, $|CD| = 10$, $BC \perp BE$. Найдите площадь трапеции $BCDE$.

20. В трапеции $ABCD$ $(AD||BC)$ $|AD| = 8, |BC| = 6$, а величина угла между прямыми AB и CD равна $\operatorname{arctg} 0{,}25$. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что её диагонали перпендикулярны.

21. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана в окружность. На дуге CD взята точка E и соединена со всеми вершинами трапеции. Известно, что величина угла CED равна $2\pi/3$, $\widehat{ABE} - \widehat{BAE} = \delta$. Найдите отношение периметра треугольника ABE к длине радиуса вписанной в него окружности.

22. Точка M лежит на боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Найдите длину отрезка BM, если известно, что $\widehat{BCD} = \widehat{CBD} = \widehat{ABM} = \arccos(5/6)$, $|AB| = 9$.

23. В трапеции $ABCD$ $BC||AD$, $|BC| < |AD|$, длина диагонали BD в $4/3$ раза больше длины радиуса окружности, описанной около $ABCD$. Найдите отношение длин CD и радиуса этой окружности, если отношение площадей треугольников ABD и BCD равно 5.

24. Дана трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение длины высоты этой трапеции к длине радиуса описанной около неё окружности равно $\sqrt{2/3}$. Найдите величины углов трапеции.

25. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD, $|AB| = 5$, $|DC| = 1$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Точка K лежит на отрезке AB таким образом, что $|AK| = 2$. Прямая CK пересекает окружность в точке F, отличной от точки C. Найдите площадь треугольника OFC.

26. На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка AD, если $|BC| = 2$, $|GO| = 7$, а $|GF| = 18$.

27. Известно, что трапеция $ABCD$ – равнобедренная, $AD||BC$ и $|BC| > |AD|$. Трапеция $ECDA$ также равнобедренная, причём $AE||CD$ и $|AE| > |CD|$. Найдите $|BE|$, если известно, что $|DE| = 7$, а $\widehat{CDE} + \widehat{BDA} = \arccos(1/3)$.

28. В равнобедренной трапеции, длины оснований которой равны 1 и 4, расположены две окружности, каждая из которых касается двух боковых сторон трапеции, другой окружности и одного из оснований трапеции. Найдите площадь этой трапеции.

29. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, а величины углов AED и BCD равны. Окружность, длина радиуса которой равна 17, проходит через точки C, D и E, пересекает основание AD в точке F и касается прямой BF. Найдите длины оснований и высоты трапеции $ABCD$, если $|CD| = 30$.

30. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята точка M таким образом, что $|AM| : |BM| = 2 : 3$. На противоположной стороне CD взята такая точка N, что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найдите отношение $|CN| : |ND|$, если известно, что $|BC| : |AD| = 1 : 2$.

31. В трапеции $ABCD$ $BC||AD$, $\widehat{ABC} = \pi/2$. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD – в точке N. Известно, что расстояние от точки D до прямой MC равно c, $|MC| = a$, $|BN| = b$. Найдите расстояние от точки A до прямой BN.

32. В окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{7}$, вписана трапеция. Длина её меньшего основания равна 4. Через точку этой окружности, касательная в которой параллельна одной из боковых сторон трапеции, проведена хорда, параллельная основаниям трапеции. Длина этой хорды равна 5. Найдите площадь трапеции и длину её диагоналей.

33. В окружность вписана трапеция $ABCD$, $AD||BC$, $|AD| > |BC|$. На дуге AD, не содержащей вершин B и C, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки S на прямые AD, BC, AB и CD соответственно. Известно, что $|SP| = a$, $|SQ| = b$, $|SN| = c$. Найдите отношение площадей треугольников MQS и NQS.

34. Дана трапеция $ABCD$, сторона AB которой перпендикулярна основаниям AD и BC. На стороне AB, как на диаметре, построена окружность, касающаяся стороны CD. Длина радиуса этой окружности равна $\sqrt{6}$. Другая окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{2}$, касается сторон AD и CD и пересекает первую окружность так, что длина их общей хорды равна $\sqrt{6}$, а центры окружностей расположены по разные стороны от этой хорды. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

3.3. Общие четырёхугольники и многоугольники

Теоретический материал

Сначала приведём некоторые факты и утверждения, относящиеся к четырёхугольникам.

1. Сумма величин углов четырёхугольника

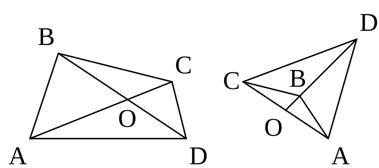
Сумма величин внутренних углов четырехугольника равна 2π.

Для доказательства этого факта достаточно сложить суммы величин внутренних углов двух треугольников, на которые разбивается четырёхугольник одной из своих диагоналей. Для выпуклого четырёхугольника можно рассмотреть любую из его диагоналей, для невыпуклого – надо рассмотреть ту диагональ, которая содержится внутри него.

2. Формула площади четырёхугольника

Площадь четырёхугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус величины угла между ними.

Для доказательства этого факта рассмотрим два случая. Если четырёхугольник $ABCD$ – выпуклый (левый рисунок), то точка O пересечения его диагоналей



лежит внутри него и его площадь может быть представлена как сумма площадей треугольников AOB, BOC, COD и AOD.

Заметим, что синусы величин всех четырех углов AOB, BOC, COD и AOD равны, так как эти углы являются либо смежными, либо вертикальными друг с другом. Обозначая величину любого из этих углов за α и пользуясь формулой площади треугольника, мы получаем

$$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|BO|\cdot\sin\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot|BO|\cdot|CO|\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot|CO|\cdot|DO|\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|DO|\cdot\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(|AO|+|CO|)\cdot(|BO|+|DO|)\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\alpha.$$

Если же четырёхугольник $ABCD$ – невыпуклый (правый рисунок), то точка O (точка пересечения прямых, содержащих его диагонали) лежит вне него. Будем считать, что она попадает на продолжение диагонали BD за точку B. Тогда площадь четырёхугольника $ABCD$ равна разности площадей треугольников ACD и ABC, каждая из которых может быть представлена как сумма площадей соответствующих треугольников. Углы AOB и COB – смежные, поэтому синусы их величин равны. Обозначая величину любого из них за α и рассуждая аналогично предыдущему случаю, мы получаем

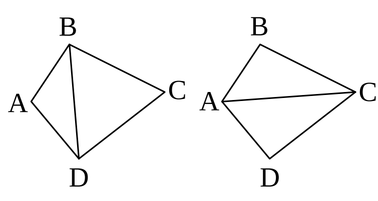
$$S_{ABCD} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle COD} - S_{\triangle AOB} - S_{\triangle COB} = \frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|DO|\cdot\sin\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot|CO|\cdot|DO|\cdot\sin\alpha-\frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|BO|\cdot\sin\alpha-\frac{1}{2}\cdot|CO|\cdot|BO|\cdot\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(|AO|+|CO|)\cdot(|DO|-|BO|)\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\alpha.$$

Формула площади четырёхугольника доказана.

Если использование доказанной формулы по каким-либо причинам затруднительно, то, если четырёхугольник выпуклый, можно поступать следующим образом: провести какую-либо из его диагоналей и посчитать по отдельности площади полученных треугольников.



Такой подход дает нам еще две формулы:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AD|\cdot\sin\widehat{BAD}+\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|CD|\cdot\sin\widehat{BCD},$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ABC}+\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|CD|\cdot\sin\widehat{ADC}.$$

Если четырёхугольник оказался невыпуклым, то можно поступить аналогично и провести ту его диагональ, которая лежит внутри него.

Отметим, что в силу того, что синус величины угла не превосходит 1, из этих формул вытекает следующее утверждение:

Площадь четырёхугольника не превосходит полусуммы произведений длин двух пар его смежных сторон и равна этой полусумме тогда и только тогда, когда углы, образованные этими парами, – прямые.

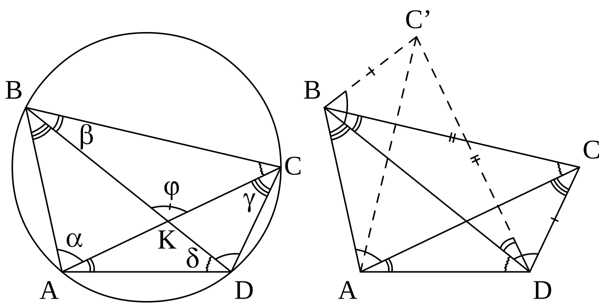
3. Окружность, описанная около четырёхугольника

Если около четырёхугольника можно описать окружность, то суммы величин его противоположных углов равны π. Верно и обратное утверждение: *если сумма величин двух противоположных углов четырёхугольника равна* π, *то около него можно описать окружность.*

Доказательство этих утверждений легко проводится с помощью свойств вписанных углов и теоремы о четырёх точках. Отметим также, что возможность описать окружность около четырехугольника эквивалентна тому факту, что серединные перпендикуляры к его сторонам пересекаются в одной точке.

Докажем ещё одно красивое свойство вписанного четырёхугольника, а именно теорему Птолемея.

Теорема. Произведение длин диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника равно сумме произведений длин его противоположных сторон.



Доказательство. Рассмотрим вписанный в окружность четырёхугольник $ABCD$, обозначим буквой K точку пересечения его диагоналей.

Сначала заметим, что, по свойствам вписанных углов,

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBD}, \quad \widehat{ABD} = \widehat{ACD}, \quad \widehat{BCA} = \widehat{BDA}, \quad \widehat{CDB} = \widehat{CAB}$$

и, по свойству угла между пересекающимися хордами,

$$\widehat{AKB} = \widehat{CKD} = \widehat{ADB} + \widehat{CAD}, \quad \widehat{BKC} = \widehat{AKD} = \widehat{BAC} + \widehat{ACD}.$$

Вводя обозначения $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{CBD} = \beta$, $\widehat{ACD} = \gamma$, $\widehat{ADB} = \delta$, $\widehat{BKC} = \varphi$, с учётом вышесказанного имеем $\varphi = \alpha + \gamma$, $\pi - \varphi = \beta + \delta$.

Теперь рассмотрим четырёхугольник $ABC'D$, получающийся из четырёхугольника $ABCD$ переворотом треугольника BCD, то есть $|BC'| = |CD|$, $|C'D| = |BC|$. Ясно, что треугольники $BC'D$ и BCD равны по трем сторонам, поэтому, во-первых, $\widehat{C'BD} = \widehat{CDB} = \alpha$, $\widehat{C'DB} = \widehat{CBD} = \beta$ и, во-вторых, площади четырёхугольников $ABCD$ и $ABC'D$ равны.

Наконец, заметим, что

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi,$$

$$S_{ABC'D} = S_{\triangle ABC'} + S_{\triangle ADC'} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC'|\cdot\sin\widehat{ABC'} + \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|DC'|\cdot\sin\widehat{ADC'} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CD|\cdot\sin(\alpha+\gamma) + \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|BC|\cdot\sin(\beta+\delta) = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CD|\cdot\sin\varphi +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|BC|\cdot\sin(\pi-\varphi) = \frac{1}{2}\cdot(|AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC|)\cdot\sin\varphi.$$

Приравнивая друг другу правые части этих соотношений, получаем

$$|AC|\cdot|BD| = |AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC|.$$

Теорема Птолемея доказана.

4. Окружность, вписанная в четырёхугольник

Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то он выпуклый и суммы длин его противоположных сторон равны. Верно и такое утверждение: *если суммы длин противоположных сторон* **выпуклого** *четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.*

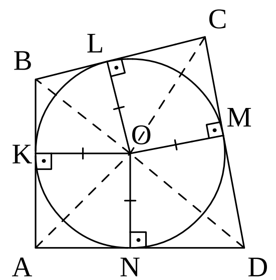
Доказательство первого из этих утверждений легко вытекает из теоремы о равенстве длин отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности. Второе утверждение доказывается по следующей схеме: обосновывается тот факт, что все четыре биссектрисы внутренних углов рассматриваемого четырёхугольника пересекаются в одной точке, которая лежит во внутренней области четырёхугольника. Эта точка и будет центром вписанной в четырёхугольник окружности. Отметим, что возможность вписать окружность в четырёхугольник эквивалентна тому факту, что все биссектрисы его внутренних углов пересекаются в одной точке.

Докажем ещё одно свойство описанного четырёхугольника, а именно теорему о его площади.

Теорема. Площадь описанного около окружности четырёхугольника равна произведению длины радиуса этой окружности на его полупериметр.

Доказательство. Рассмотрим описанный около окружности четырёхугольник $ABCD$, обозначим буквой O её центр, длину её радиуса обозначим за r, а буквами K, L, M и N обозначим точки её касания со сторонами AB, BC, CD и AD соответственно.

Тогда $|OK| = |OL| = |OM| = |ON| = r$ и, кроме того, $OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp CD$, $ON \perp AD$. Поскольку четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, то его площадь равна сумме площадей треугольников OAB, OBC, OCD и OAD. Записывая формулы площадей этих треугольников, получаем



$$S_{ABCD} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OAD} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|OK| + \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|OL| +$$

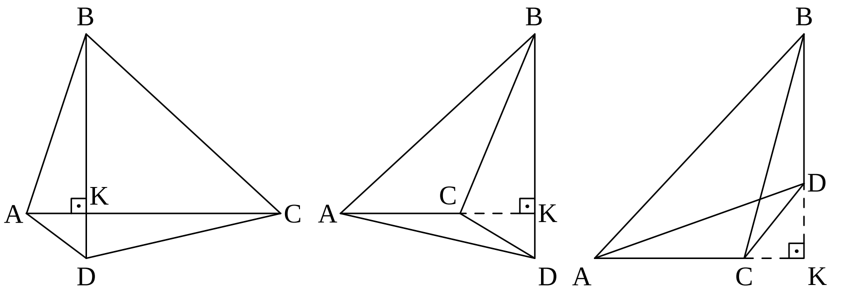
$$+\frac{1}{2}\cdot|CD|\cdot|OM| + \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|ON| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |BC| + |CD| + |AD|) \cdot r = p_{ABCD} \cdot r,$$

что и требовалось доказать.

5. Диагонали четырёхугольника

Если прямые, содержащие диагонали четырёхугольника, перпендикулярны, то суммы квадратов длин его противоположных сторон равны.



Доказательство этого факта практически очевидно. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, точку пересечения прямых, содержащих его диагонали, обозначим буквой K. На чертеже изображены все возможные случаи: выпуклый четырёхугольник, невыпуклый четырёхугольник с непересекающимися сторонами и невыпуклый четырёхугольник с пересекающимися сторонами. Записывая теорему Пифагора для треугольников ABK, BCK, CDK и ADK, получаем

$$|AB|^2 = |AK|^2 + |BK|^2, \ |CD|^2 = |CK|^2 + |DK|^2,$$

$$|BC|^2 = |BK|^2 + |CK|^2, \ |AD|^2 = |AK|^2 + |DK|^2.$$

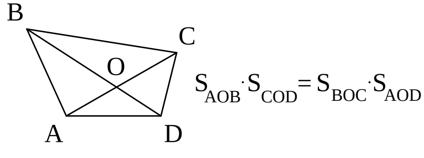
Наконец, складывая попарно эти соотношения, получаем

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 = |AK|^2 + |BK|^2 + |CK|^2 + |DK|^2.$$

Утверждение доказано.

Диагонали выпуклого четырёхугольника разбивают его на четыре треугольника таким образом, что произведения площадей противоположных треугольников равны.

Справедливость этого утверждения вытекает из следующих соображений: заметим, что синусы величин углов AOB, BOC, COD и AOD равны в силу того, что эти углы либо смежные, либо вертикальные друг с другом. Обозначая любую из этих величин за α и пользуясь формулой площади треугольника, получаем



$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |BO| \cdot \sin\alpha, \quad S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \cdot |CO| \cdot |DO| \cdot \sin\alpha;$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot |BO| \cdot |CO| \cdot \sin\alpha, \quad S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |DO| \cdot \sin\alpha.$$

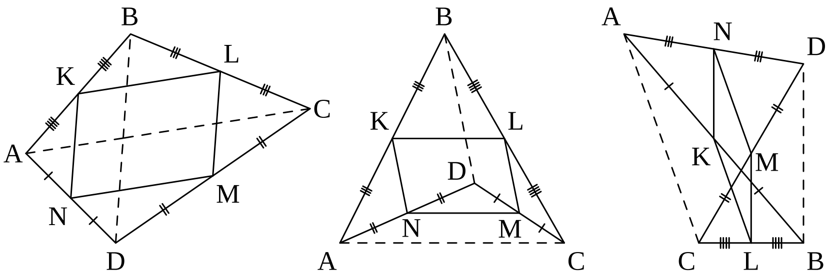
Перемножив попарно эти соотношения, получаем

$$S_{\triangle AOB} \cdot S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOC} \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{1}{4} \cdot |AO| \cdot |BO| \cdot |CO| \cdot |DO| \cdot \sin^2 \alpha,$$

что и требовалось доказать.

6. Теорема Вариньона

Четырёхугольник, вершины которого являются серединами сторон произвольного четырёхугольника, есть параллелограмм.



Рассмотрим произвольный четырёхугольник $ABCD$, буквами K, L, M и N обозначим середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно. На чертеже изображены все возможные случаи: выпуклый четырёхугольник, невыпуклый четырёхугольник с непересекающимися сторонами и невыпуклый четырёхугольник с пересекающимися сторонами. Заметим, что отрезок KL является средней линией треугольника ABC, поэтому $KL||AC$, $|KL| = \frac{1}{2}|AC|$. Отрезок же MN является средней линией треугольника ADC, поэтому $MN||AC$, $|MN| = \frac{1}{2}|AC|$. Из вышесказанного следует, что отрезки KL и MN, во-первых, параллельны и, во-вторых, равны по длине. Значит, четырёхугольник $KLMN$ является параллелограммом. Также отметим, что, рассуждая абсолютно аналогично, мы получим $|LM| = |KN| = \frac{1}{2}|BD|$. Теорема Вариньона доказана.

З а м е ч а н и е. Если стороны четырёхугольника $ABCD$ пересекаются, то не исключен случай совпадения середин сторон AB и CD. Тогда четырёхугольник $KLMN$ выродится в отрезок.

Теперь приведем некоторые формулы и факты, относящиеся к произвольным многоугольникам.

7. Сумма величин углов произвольного многоугольника

Сумма величин всех внутренних углов произвольного выпуклого n-угольника равна $(n-2)\pi$.

Это утверждение доказывается точно так же, как и утверждение о сумме величин внутренних углов четырёхугольника. Отметим, что приведенный факт будет справедлив и для произвольного невыпуклого многоугольника.

8. Свойства правильных многоугольников

Определение. Многоугольник, у которого равны между собой длины всех сторон и равны между собой величины всех его внутренних углов, называется *правильным*.

Отметим, что, в отличие от треугольников, в этом определении приходится требовать и равенство длин сторон, и равенство величин углов. Например, не любой ромб (так же как и не любой прямоугольник) является правильным четырехугольником. Правильным будет четырёхугольник, который одновременно является и ромбом, и прямоугольником, то есть – квадрат.

Докажем несколько соотношений, устанавливающих зависимость между величинами стандартных элементов правильных многоугольников.

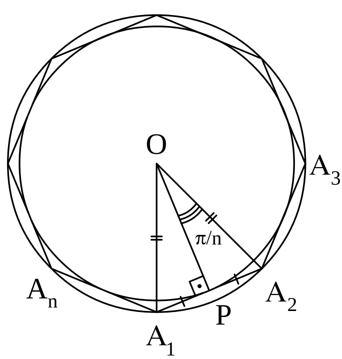
1. *Величины всех внутренних углов правильного n-угольника равны* $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$.

2. *Около правильного n-угольника можно описать окружность. Если длина его стороны равна a, то длина радиуса описанной около него окружности равна* $\dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$.

3. *В правильный n-угольник можно вписать окружность. Если длина его стороны равна a, то длина радиуса вписанной в него окружности равна* $\dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$.

4. *Площадь правильного n-угольника, длина стороны которого равна a, равна* $\dfrac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$.

Доказать все эти утверждения достаточно просто. Рассмотрим правильный n-угольник $A_1A_2\dots A_n$. Ясно, что у него n внутренних углов, их величины равны между собой, сумма этих величин равна $(n-2)\pi$, стало быть, величина каждого из его внутренних углов равна $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$.



Далее проведём биссектрисы углов $A_nA_1A_2$ и $A_1A_2A_3$, точку их пересечения обозначим буквой O. Поскольку эти углы равны, то равны и углы OA_1A_2 и OA_2A_1, то есть треугольник OA_1A_2 – равнобедренный. Теперь проведём биссектрису угла $A_2A_3A_4$. Пусть R – точка, в которой она пересекается с биссектрисой угла $A_1A_2A_3$. Рассуждая аналогично, мы получим, что треугольник RA_2A_3 тоже равнобедренный. Но поскольку углы OA_2A_1 и RA_2A_3 равны, то равны и треугольники OA_1A_2 и RA_2A_3. Из этого равенства вытекает, что $|OA_2| = |RA_2|$. А так как точки O и R обе лежат на биссектрисе угла $A_1A_2A_3$, то они совпадают. Продолжая эти рассуждения, мы, очевидно, получим, что все биссектрисы внутренних углов рассматриваемого многоугольника проходят через точку O, эта точка равноудалена от всех его сторон, стало быть, в $A_1A_2\dots A_n$ можно вписать окружность и O – её центр. Отметим также, что попутно мы установили равенство длин всех отрезков OA_1, OA_2, $\dots$, OA_n. Но это означает, что точка O равноудалена от всех вершин рассматриваемого многоугольника и является центром описанной около него окружности.

Наконец, рассмотрим треугольник OA_1A_2, проведём его высоту OP, которая является также и его биссектрисой и медианой. Ясно, что отрезок OA_2 является радиусом описанной около $A_1A_2\dots A_n$ окружности, а отрезок OP есть радиус вписанной в него окружности.

Поскольку все треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, $\dots$, OA_nA_1 равны между собой, то равны и углы A_1OA_2, A_2OA_3, $\dots$, A_nOA_1. Этих углов n штук, сумма их величин равна 2π, стало быть, величина каждого из них равна $2\pi/n$. После этого из прямоугольного треугольника OA_2P мы находим

$$|OA_2| = \frac{|PA_2|}{\sin\widehat{A_2OP}} = \frac{\frac{1}{2}|A_1A_2|}{\sin\left(\frac{\widehat{A_1OA_2}}{2}\right)} = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$|OP| = |PA_2|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{A_2OP} = \frac{1}{2}|A_1A_2|\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\widehat{A_1OA_2}}{2}\right) = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Наконец,

$$S_{\triangle A_nOA_1} = \ldots = S_{\triangle A_2OA_3} = S_{\triangle A_1OA_2} = \frac{1}{2}\cdot|A_1A_2|\cdot|OP| = \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},$$

$$S_{A_1A_2\ldots A_n} = S_{\triangle A_1OA_2} + S_{\triangle A_2OA_3} + \ldots + S_{\triangle A_nOA_1} = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Свойства правильных многоугольников доказаны.

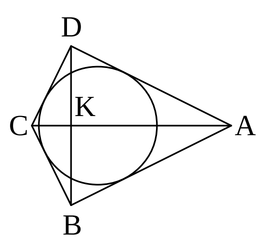
9. Многоугольник, описанный около окружности

Площадь описанного около окружности многоугольника равна произведению длины радиуса этой окружности на его полупериметр.

Доказательство этой формулы абсолютно аналогично доказательству формулы площади четырехугольника, описанного около окружности.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, K – точка пересечения его диагоналей. Известно, что $|AB| > |BC| > |KC|$, $|BK| = 4+\sqrt{2}$, а периметр и площадь треугольника BKC равны соответственно 14 и 7. Найдите длину стороны CD.



Р е ш е н и е. В этой задаче достаточно трудно найти путь решения. Тем не менее, ясно, что в треугольнике BKC нам известно три элемента, поэтому мы можем вычислить величины его углов и длины его сторон. Обозначим $|BC| = x$, $|KC| = y$, причём, по условию задачи, $x > y$. Пользуясь данным нам значением периметра треугольника BKC и формулой Герона, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 4 + \sqrt{2} = 14, \\ \sqrt{7\cdot(7-x)\cdot(7-y)\cdot(7-(4+\sqrt{2}))} = 7, \\ x > y, \end{cases}$$

решая которую, находим $|BC| = x = 6$, $|KC| = y = 4-\sqrt{2}$.

На первый взгляд кажется, что мы не сильно приблизились к отысканию искомой величины. Однако (и это главный шаг в решении) заметим, что в силу того, что

$$|BC|^2 = 36 = (4+\sqrt{2})^2 + (4-\sqrt{2})^2 = |BK|^2 + |KC|^2,$$

угол BKC – прямой. Запишем свойства четырёухгольника с взаимно перпендикулярными диагоналями и четырёхугольника, описанного около окружности:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|, \quad |AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2.$$

Возводя в квадрат первое из этих равенств и вычитая его из второго, предварительно умноженного на 2, получаем

$$(|AB| - |CD|)^2 = (|AD| - |BC|)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad ||AB| - |CD|| = ||AD| - |BC||.$$

Раскрывая модули и пользуясь тем, что $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$, имеем

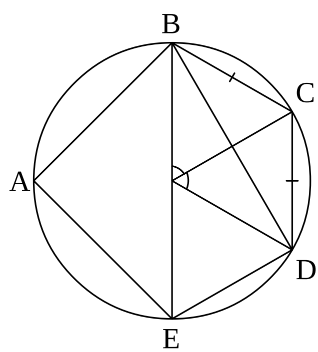
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |AB| - |CD| = |AD| - |BC|, \\ |AB| + |CD| = |AD| + |BC|; \end{cases} \\ \begin{cases} |AB| - |CD| = |BC| - |AD|, \\ |AB| + |CD| = |AD| + |BC| \end{cases} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |AB| = |AD|, \\ |CD| = |BC|; \end{cases} \\ \begin{cases} |AB| = |BC|, \\ |CD| = |AD|. \end{cases} \end{array}\right.$$

Итак, мы доказали, что описанный около окружности четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями обязательно является **дельтоидом**, то есть четырёхугольником, у которого смежные стороны попарно равны по длине. В нашей же задаче по условию $|AB| > |BC|$, поэтому нам подходит только вариант $|AB| = |AD|$, $|CD| = |BC| = 6$.

О т в е т. 6.

П р и м е р 2. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность, длина радиуса которой равна 1. Известно, что $|AB| = \sqrt{2}$, $\widehat{ABE} = \pi/4$, $\widehat{EBD} = \pi/6$, а $|BC| = |CD|$. Чему равна площадь пятиугольника $ABCDE$?

Р е ш е н и е. Для вычисления площадей многоугольников, как правило, используется следующий подход: многоугольник делится на несколько треугольников или простых четырёхугольников, площади которых считаются по отдельности и затем суммируются.



Сначала заметим, что треугольник ABE также вписан в окружность из условия задачи. Применяя к нему теорему синусов, получаем

$$\sin\widehat{AEB} = \frac{|AB|}{2R} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и величина угла AEB равна либо $\pi/4$, либо $3\pi/4$. Второй из этих вариантов невозможен в силу того, что сумма величин углов ABE и AEB должна быть меньше, чем π. Итак, $\widehat{AEB} = \pi/4$, поэтому треугольник BAE прямоугольный и равнобедренный, $|AB| = |BE| = \sqrt{2}$, площадь этого треугольника равна 1, а BE – диаметр окружности.

Далее отметим, что угол BDE прямой, поскольку он опирается на диаметр, поэтому величина угла BED равна $\pi/3$, величина угла BCD равна $2\pi/3$ в силу свойств вписанного в окружность четырехугольника $BCDE$, а величины углов CBD и CDB равны $\pi/6$ (поскольку треугольник BCD равнобедренный по условию задачи). Пользуясь формулой площади треугольника через длину радиуса описанной около него окружности и синусы величин его углов, находим

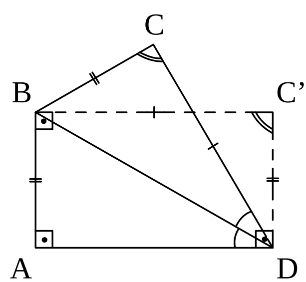
$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |BD| \cdot \sin \widehat{DBE} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |BC| \cdot \sin \widehat{CBD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Наконец, $S_{ABCDE} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ABE} = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Ответ. $1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Пример 3. Известно, что площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равна среднему арифметическому произведений $|AB| \cdot |CD|$ и $|AD| \cdot |BC|$, $|BC| = 4$, $\widehat{ADC} = \pi/3$, $\widehat{BAD} = \pi/2$. Найдите длину стороны CD.



Решение. Условие про площадь четырёхугольника $ABCD$, данное в условии задачи, напоминает условие из разобранного в теоретических материалах факта о том, что площадь выпуклого четырёхугольника не превосходит полусуммы произведений его смежных сторон. Будем рассуждать следующим образом: возьмём в той же полуплоскости относительно прямой BD, где находится точка C, точку C' таким образом, что $|BC| = |C'D|$, $|CD| = |BC'|$. Тогда треугольники BCD и $DC'B$ равны по трем сторонам, поэтому равны и их площади, а, стало быть, равны и площади четырёхугольников $ABCD$ и $ABC'D$. Значит,

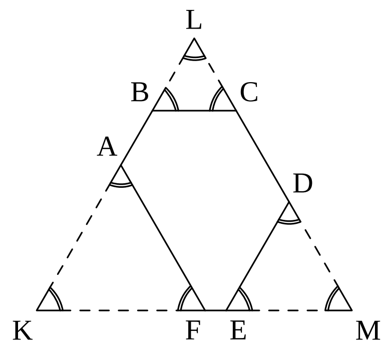
$$S_{ABC'D} = \frac{|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|}{2} = \frac{|AB| \cdot |BC'| + |AD| \cdot |C'D|}{2},$$

из чего следует, что углы ABC' и ADC' – прямые.

Далее все достаточно просто. Поскольку угол BAD тоже прямой, то четырёхугольник $ABC'D$ является прямоугольником, поэтому $\widehat{BCD} = \widehat{BC'D} = \pi/2$, $|AB| = |C'D|$. Но тогда прямоугольные треугольники ABD и CBD равны по гипотенузе и катету, значит, равны и углы ADB и CDB. Сумма же их величин равна величине угла ADC, то есть $\pi/3$. Итак, $\widehat{CDB} = \pi/6$, и из прямоугольного треугольника CDB мы находим $|CD| = |BC| \cdot \operatorname{ctg} \widehat{BDC} = 4\sqrt{3}$.

Ответ. $4\sqrt{3}$.

Пример 4. Величины всех внутренних углов шестиугольника $ABCDEF$ равны. Известно, что $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CD| = 5$, $|EF| = 1$. Найдите длины сторон DE и AF.



Решение. Сразу вычислим величины всех внутренних углов нашего шестиугольника. Сумма этих величин равна $\pi \cdot (6-2) = 4\pi$, поэтому величина каждого из этих углов равна $2\pi/3$. Опираясь на этот факт, можно заметить, что любой треугольник, до которого достраивается шестиугольник $ABCDEF$, будет равносторонним. Действительно, если обозначить буквой K точку пересечения прямых AB и EF, буквой L – точку пересечения прямых AB и CD, а буквой M – точку пересечения прямых CD и EF, то в силу того, что $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 2\pi/3$, мы получаем, что $\widehat{LBC} = \widehat{LCB} = \pi/3$, поэтому $\widehat{L} = \pi/3$ и треугольник BLC – равносторонний. Рассуждая аналогично, мы заключаем, что треугольники AKF и DEM тоже равносторонние, $\widehat{K} = \widehat{M} = \pi/3$. Стало быть, треугольник KLM также равносторонний.

Теперь обозначим $|AF| = x$, $|DE| = y$. Тогда из вышесказанного вытекает

$$|AK| = |KF| = x, \quad |DM| = |ME| = y, \quad |BC| = |BL| = |LC| = 4.$$

Наконец, выписывая длины сторон треугольника KLM и приравнивая их друг к другу, получаем

$$|KL| = x + 3 + 4, \quad |LM| = 4 + 5 + y, \quad |KM| = x + 1 + y \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x + 7 = x + y + 1, \\ 9 + y = x + y + 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = 6, \quad x = 8.$$

Ответ. $|DE| = 6$, $|AF| = 8$.

Задачи

1. В окружность, длина радиуса которой равна 17, вписан четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и находятся на расстоянии 8 и 9 от центра окружности. Найдите длины сторон этого четырёхугольника.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка E – точка пересечения диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь четырёхугольника $ABCD$ не превосходит 4, $|AD| = 3$. Найдите длину стороны BC.

3. В выпуклом четырёхугольнике длины диагоналей равны 1 и 2. Найдите его площадь, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найдите величину угла между прямыми AB и CD.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ величина угла, под которым пересекаются отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равна $\pi/3$, а длины этих отрезков относятся как 1:3. Чему равна длина меньшей диагонали четырёхугольника $ABCD$, если длина большей равна $\sqrt{39}$?

6. В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC. Известно, что $|MN| = a$, $|BD| = b$. Найдите величину угла ABC.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина стороны AD равна 4, длина стороны CD равна 7, косинус величины угла ADC равен $1/2$, синус величины угла BCA равен $1/3$. Найдите длину стороны BC, если известно, что окружность, описанная около треугольника ABC, проходит также и через точку D.

8. Четырёхугольник $PQRS$ вписан в окружность. Его диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $|PS| = 13$, $|QM| = 10$, $|QR| = 26$. Найдите площадь четырёхугольника $PQRS$.

9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD и AOD равны соответственно 20, 40 и 60. Найдите градусную меру угла BAO, если известно, что $|AB| = 15$, $|AO| = 8$, а градусная мера угла BOA больше 31°.

10. Диагонали четырёхугольника $PQRS$, вписанного в окружность, пересекаются в точке D. На прямой PR взята точка A, $\widehat{SAD} = 50^\circ$, $\widehat{PQS} = 70^\circ$, $\widehat{RQS} = 60^\circ$. Где расположена точка A: на диагонали PR или на её продолжении? Ответ обосновать.

11. В трапецию, длины оснований которой равны 3 и 5, можно вписать окружность и около неё можно описать другую окружность. Вычислите площадь пятиугольника, образованного радиусами вписанной окружности, перпендикулярными боковым сторонам трапеции, её меньшим основанием и соответствующими отрезками боковых сторон.

12. Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности, длина радиуса которой равна $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM, если известно, что $LM||KN$, $KM||NP$, $MN||LP$, а $\widehat{LOM} = \pi/4$, где O – точка пересечения хорд LN и MP.

13. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к прямой AB, пересекает сторону CD в точке M. Докажите, что EM – медиана треугольника CED, и найдите её длину, если $|AD| = 8$, $|AB| = 4$ и $\widehat{CDB} = \alpha$.

14. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Точки L и M являются соответственно серединами сторон BC и AD. Отрезок LM содержит точку K. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность. Найдите длину радиуса этой окружности, если $|AB| = 3$, $|AC| = \sqrt{13}$ и $|LK| : |KM| = 1 : 3$.

15. В трапеции $BCDE$ $CD||BE$, $|BE| = 13$, $|CD| = 3$, $|CE| = 10$. На описанной около $BCDE$ окружности взята отличная от E точка A так, что $|AC| = 10$. Найти длину отрезка AB и площадь пятиугольника $ABCDE$.

16. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке P. Точка M является серединой отрезка AD, длина отрезка CM равна $5/4$. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $1/2$, $|AP| = 1$. Найдите длину отрезка AD, если известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

17. Параллелограммы $ABCD$ и $A'BCD'$ имеют общую сторону BC и расположены симметрично относительно прямой BC (точка A' симметрична точке A, точка D' симметрична точке D). Диагональ BD первого параллелограмма и сторона BA' второго параллелограмма лежат на одной прямой. Величина угла между диагоналями AC и $A'C$ двух параллелограммов равна $\pi/4$, площадь пятиугольника $ADCD'A'$ равна $15\sqrt{2}$. Найдите длины сторон параллелограмма $ABCD$.

18. Точки K, L и M расположены на сторонах AB, BC и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно, причём выполнены соотношения $|AK| : |BK| = |CL| : |BL| = |CM| : |DM| = 1 : 2$. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника KLM, равна $5/2$, $|KL| = 4$, $|LM| = 3$. Чему равна площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $|KM| < |KL|$?

19. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок CM, соединяющий вершину C с точкой M, расположенной на стороне AD, пересекает диагональ BD в точке K. Известно, что $|CK| : |KM| = 2 : 1$, $|CD| : |DK| = 5 : 3$, $\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = \pi$. Найдите отношение длин стороны AB и диагонали AC.

20. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, P – точка пересечения его диагоналей, $|AB| = |CD| = 5$, $|AD| > |BC|$. Длина высоты, опущенной из точки B на сторону AD, равна 3, а площадь треугольника ADP равна $25/2$. Найдите длины сторон AD и BC, а также длину радиуса окружности.

21. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что угол DAB острый, угол ADC тупой, $\sin\widehat{DAB} = 3/5$, $\cos\widehat{ABC} = -63/65$. Окружность с центром в точке O касается сторон BC, CD и AD. Найдите длину отрезка OC, если $|AB| = 25/64$, $|BC| = 793/64$, $|CD| = 25/4$.

22. В окружность, длина радиуса которой равна 2, вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K, лежащей на продолжении стороны AF таким образом, что $|KA| < |KF|$ и $|KA| = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH, пересекающая окружность в точках N и H, причём точка N лежит между точками K и H. Известно, что $|KN| = 2$, а угол NFH – тупой. Найдите величину угла HKF.

23. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами внутренних углов при вершинах B и C соответственно, $\widehat{A} = 35^\circ$, $\widehat{D} = 145^\circ$, а площадь треугольника BCE равна 11. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

24. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD – в точке O. Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD. Найдите отношение площадей

треугольника AOD и четырёхугольника $ABCD$, если $|OA| = 12$, $|OD| = 8$, $|CD| = 2$.

25. В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E, лежащей на стороне CD. Известно, что отношение длины отрезка CD к длине отрезка BC равно m. Найдите:

    1) отношение расстояний от точки E до прямых AD и BC,

    2) отношение площадей треугольников ADE и BCE.

26. Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, причём $|AD| \cdot |CE| = |DC| \cdot |AE|$, $|BD| = 6$, $\widehat{ADB} = \pi/8$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

27. На одной стороне угла O взяты точки K, L и M, а на другой его стороне – точки P, Q и R таким образом, что $KQ \perp PR$, $PL \perp KM$, $LR \perp PQ$, $QM \perp KL$. Известно, что отношение расстояния от точки O до центра вписанной в четырёхугольник $KPRM$ окружности к длине отрезка KP равно $17 : 6$. Найдите величину угла O.

4. Задачи на доказательство

Задачи, приведённые в этом разделе, очень редко можно встретить на письменном экзамене. Однако такие задачи позволяют узнать много интересных и полезных для решения задач письменных экзаменов фактов. Они также позволяют научиться видеть и доказывать полезные соотношения в треугольниках, многоугольниках и окружностях.

4.1. Треугольники

Теоретический материал

Напомним основные формулы и теоремы, связанные с треугольниками.

- *Условие существования треугольника:* если даны три отрезка с длинами a, b, c, то для того, чтобы существовал треугольник со сторонами a, b, c, необходимо и достаточно выполнение следующих условий

  $$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

  Здесь и ниже a, b, c – стороны треугольника, α, β, γ – соответствующие противоположные им углы.

- *Монотонно-возрастающая зависимость сторон от углов:* если даны стороны треугольника a, b, c, то для того, чтобы они удовлетворяли неравенствам $a \geq b \geq c$, необходимо и достаточно выполнение неравенств $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

- *Теорема о сумме углов треугольника:* для углов треугольника α, β, γ справедливо равенство $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

- *Теорема о биссектрисах:* все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка есть центр вписанной окружности.

- *Теорема о медианах:* все медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в соотношении $2 : 1$, считая от вершины.

- *Теорема о высотах:* все высоты треугольника пересекаются в одной точке.

- *Теорема о серединных перпендикулярах:* все серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка есть центр описанной окружности.

- *Теорема косинусов:* для сторон и углов треугольника имеет место равенство

  $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$

- *Теорема синусов:* для сторон и углов треугольника имеют место равенства

  $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

  где R – радиус описанной вокруг треугольника окружности.

- *Теорема о биссектрисе:* биссектриса угла α треугольника делит противолежащую сторону a на прилежащие к сторонам b и c отрезки a_b и a_c, которые пропорциональны b и c:
$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}.$$

- *Теорема Фалеса:* если при пересечении сторон угла параллельными прямыми на одной стороне угла отсекаются равные между собой отрезки, то и на другой стороне угла отсекаются также равные между собой отрезки.

- *Обобщенная теорема Фалеса:* при пересечении сторон угла параллельными прямыми на сторонах угла отсекаются пропорциональные отрезки.

- *Формулы длины биссектрисы:*
$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}, \quad l_a^2 = bc - a_b \cdot a_c,$$
здесь a_b, a_c – отрезки из теоремы о биссектрисе.

- *Формула длины медианы:*
$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}.$$

- *Признаки подобия треугольников:* два треугольника подобны по двум углам, по двум сторонам и углу между ними, по трём сторонам.

  Напомним, что в подобных треугольниках отношение длин соответствующих сторон, биссектрис, медиан, высот равно k – коэффициенту подобия. Отношение площадей подобных треугольников равно k^2.

Примеры решения задач

Пример 1. Дан треугольник ABC. Доказать, что
$$\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \le \frac{3}{2}.$$

Решение. Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma = \pi - \alpha - \beta$, тогда
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 =$$
$$= -2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 \le \frac{3}{2},$$
что и требовалось доказать.

П р и м е р 2. Существует ли треугольник с углами

$$\operatorname{arctg} 2,\ \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right),\ \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)?$$

Р е ш е н и е. Для того чтобы существовал такой треугольник, надо, чтобы

$$\operatorname{arctg} 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) = \pi.$$

Для того чтобы доказать равенство

$$\operatorname{arctg} 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \pi - \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right),$$

достаточно показать, что косинус левой части равен косинусу правой и обе части лежат в пределах от нуля до π. Для левой части равенства справедливо

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) < \frac{2\pi}{3},$$

поскольку

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) < \frac{\pi}{6}.$$

Для правой части равенства справедливо

$$0 < \pi - \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) < \frac{\pi}{2}, \quad \text{так как} \quad \frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) < \pi.$$

Теперь вычислим значение косинуса от левой и правой частей равенства, получим

$$\cos\left(\operatorname{arctg} 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \frac{1}{5\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \cos\left(\pi - \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Следовательно, такой треугольник существует.

О т в е т. Существует.

П р и м е р 3. В прямоугольном треугольнике длины сторон – натуральные взаимно простые числа. Доказать, что длина гипотенузы – нечётное число, а длины катетов имеют разную чётность.

Р е ш е н и е. Пусть m и k длины катетов прямоугольного треугольника, n – длина гипотенузы, m, n, k – взаимно простые числа и $n^2 = m^2 + k^2$.

Пусть n – чётное число, то есть $n = 2l$. Из равенства $m^2 + k^2 = 4l^2$ следует, что m и k имеют одинаковую чётность. Причём чётными они быть не могут, так как по условию являются взаимно простыми.

Значит, $m = 2l_1 + 1,\ k = 2l_2 + 1$ и

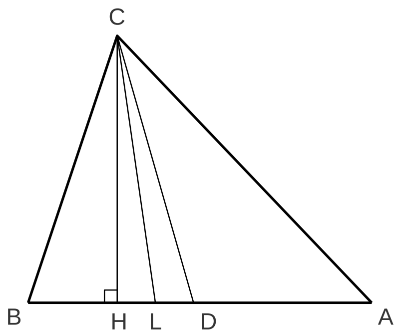
$$4l^2 = (2l_1+1)^2 + (2l_2+1)^2 \iff 4l^2 = 4l_1^2 + 4l_2^2 + 4l_1 + 4l_2 + 2.$$

Это невозможно, так как левая часть уравнения делится на 4, а правая нет.

Следовательно, $n = 2l + 1$, но тогда числа m и k должны иметь разную чётность.

П р и м е р 4. Доказать, что если в треугольнике из одной вершины проведены медиана, биссектриса и высота, то биссектриса лежит между медианой и высотой.

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник ABC, где высота CH, биссектриса CL и медиана CD проведены к стороне AB. Если $BC = AC$, то CH, CL и CD совпадают. Пусть для определенности $AC > BC$.



По свойству биссектрисы

$$\frac{BL}{AL} = \frac{BC}{AC} < 1 \quad \Longrightarrow \quad BL < AL,$$

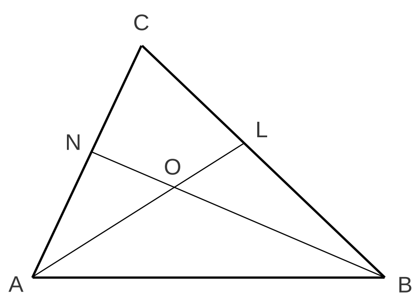
следовательно, точка L лежит между точками B и D, так как $BD = AD$. Поскольку

$$AC > BC \quad \Longrightarrow \quad \angle CBA > \angle CAB,$$

то $\angle BCH < \angle ACH$, следовательно, $\angle BCH < \angle BCL$ и точка H лежит между точками B и L, так как $\angle BCL = \angle ACL$.

П р и м е р 5. Докажите, что площадь треугольника меньше единицы, если длины всех биссектрис меньше единицы.

Р е ш е н и е. Поскольку высота в треугольнике всегда меньше соответствующей биссектрисы, то



$$h_a < l_a < 1, \quad h_b < l_b < 1, \quad h_c < l_c < 1.$$

Докажем, что все стороны треугольника меньше двух. Пусть биссектрисы AL и BN треугольника ABC пересекаются в точке O.

Из неравенства треугольника для $\triangle ABO$ следует, что

$$AB < AO + BO < AL + BN < 2.$$

Аналогично получаем, что $BC < 2$ и $AC < 2$. Оценим площадь ΔABC

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a < \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1,$$

то есть $S_{ABC} < 1$.

Задачи

1. Какого вида треугольник, у которого высоты $3, 4, 5$?

2. Доказать, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный.

3. Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Доказать, что этот треугольник равнобедренный.

4. Доказать, что если у треугольника равны две медианы, то он равнобедренный.

5. Пусть длины сторон прямоугольного треугольника – натуральные числа. Доказать, что длина одного из катетов кратна трём.

6. Доказать, что все прямоугольные треугольники, стороны которых образуют арифметическую прогрессию, подобны "египетскому" треугольнику (длины его сторон равны 3, 4, 5).

7. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника. Доказать, что
$$2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) > a^4 + b^4 + c^4.$$

8. Доказать, что если медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят его угол на три равные части, то треугольник – прямоугольный.

9. Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

10. Две биссектрисы у треугольника равны. Доказать, что он равнобедренный.

11. Доказать, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон равна боковой высоте.

12. В треугольнике ABC угол A – прямой. Из вершины A проведены медиана AM, высота AH и биссектриса AL. Доказать, что AL – биссектриса в треугольнике AMH.

13. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом, противолежащим основанию, равнобедренный треугольник имеет наибольшую площадь.

14. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом, противолежащим основанию, равнобедренный треугольник имеет наибольший периметр.

15. Доказать, что сумма медиан треугольника
а) меньше P,
б) больше $\dfrac{3}{4}P$, где P – периметр треугольника.

16. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри (или на стороне) треугольника, до трех его сторон заключена между наибольшей и наименьшей его высотами. Найти точку в треугольнике, сумма расстояний от которой до сторон наибольшая.

17. Какого вида треугольник, у которого медианы 3, 4 и 5?

18. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Доказать, что
$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

19. Доказать, что для любого треугольника справедливо неравенство $h_a \leq \sqrt{p \cdot (p-a)}$.

20. Доказать, что для любого треугольника справедливо неравенство

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

4.2. Многоугольники

Теоретический материал

Напомним основные формулы и теоремы.

У параллелограмма

- противоположные стороны равны;
- противоположные углы равны;
- диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
- сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон.

У трапеции

- средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме;
- сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна π.

У прямоугольника

- диагонали равны.

У ромба

- диагонали перпендикулярны и являются биссектрисами соответствующих углов.

У произвольного выпуклого n-угольника

- сумма углов равна $\pi(n-2)$.

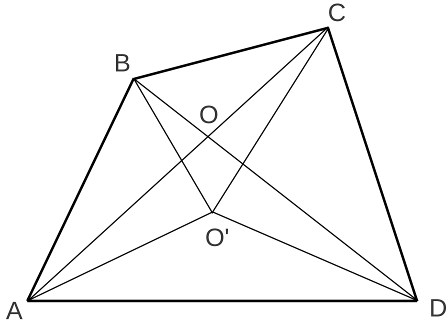
Признаки параллелограмма. Четырехугольник является параллелограммом, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- противоположные стороны попарно равны;
- противоположные углы попарно равны;
- диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
- две противоположные стороны равны и параллельны.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. Внутри выпуклого четырехугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин четырехугольника минимальна.

Р е ш е н и е. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O.



Расстояние от точки O до вершин четырехугольника равно

$$AO + BO + CO + DO = AC + BD.$$

Рассмотрим произвольную точку O_1, лежащую внутри четырехугольника. Имеем

$$AO_1 + O_1C \geq AC, \quad BO_1 + O_1D \geq BD,$$

следовательно,

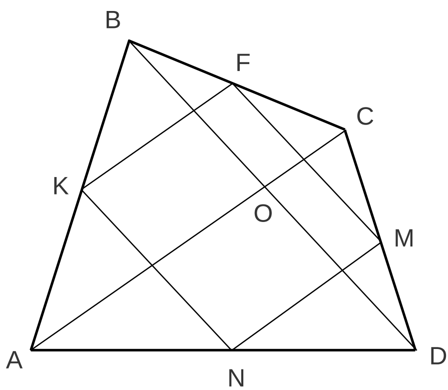
$$AO_1 + O_1C + BO_1 + O_1D \geq AC + BD,$$

то есть точка пересечения диагоналей четырехугольника есть та точка, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

О т в е т. Точка пересечения диагоналей.

П р и м е р 2. Доказать, что если соединить середины сторон выпуклого четырехугольника, то получится параллелограмм. Когда этот параллелограмм будет ромбом? Квадратом?

Р е ш е н и е. Пусть точки K, F, M и N середины соответственно сторон AB, BC, CD и AD четырехугольника $ABCD$.



Отрезок KF средняя линия треугольника ABC, отрезок MN средняя линия треугольника ADC, значит,

$$KF \parallel AC, \quad KF = \frac{1}{2}AC, \quad MN \parallel AC, \quad MN = \frac{1}{2}AC,$$

следовательно,

$$KF \parallel MN, \quad KF = MN$$

и четырехугольник $KFMN$ параллелограмм.

Если диагонали четырехугольника равны $(AC = BD)$, то параллелограмм $KFMN$ будет ромбом. Если диагонали еще и взаимно перпендикулярны, то ромб $KFMN$ будет квадратом.

Задачи

1. Доказать, что если каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника делит его на равновеликие треугольники, то этот четырехугольник – параллелограмм.

2. В равнобедренной трапеции диагональ имеет длину 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, а другое равно 5?

3. Доказать, что из всех прямоугольников с данной диагональю наибольшую площадь имеет квадрат.

4. Какой четырехугольник с диагоналями d_1 и d_2 имеет максимальную площадь?

5. Доказать, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник – трапеция.

6. Доказать, что биссектрисы углов, прилежащих к одной из непараллельных сторон трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции (или её продолжении).

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с диагоналями AC и BD на стороны CD и AB опущены соответственно высоты AE и DF. Известно, что $AE \geq BD$, $DF \geq AC$, $AD = 2 \cdot AB$. Найти меры углов четырехугольника $ABCD$.

8. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ с диагоналями LN и KM на стороны MN и KL опущены соответственно высоты KP и NQ. Известно, что $KP \geq LN$, $NQ \geq KM$, $KL = 3$, $KN = 5$. Найти KM.

9. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого $AB + BD \leq AC + CD$. Сравните длины отрезков AB и AC.

4.3. Окружности

Теоретический материал

Напомним основные утверждения об углах в окружностях:

- *центральный угол* равен по величине мере дуги окружности, на которую он опирается;
- *вписанный угол* равен по величине половине меры дуги окружности, на которую он опирается;
- *угол, составленный секущими к окружности,* равен полуразности мер дуг, на которые он опирается;
- *угол, составленный пересекающимися хордами,* равен полусумме мер дуг, на которые он опирается;
- *угол, составленный касательной и хордой,* измеряется половиной меры дуги, стягиваемой этой хордой.

Полезные следствия:

- вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны;
- вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду (или на равные хорды), равны или в сумме равны π;
- вписанный угол является прямым тогда и только тогда, когда он опирается на диаметр.

Теоремы о касательных, хордах и секущих:

- отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности;
- произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны;
- квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину её внешней части.

Теоремы о вписанных и описанных окружностях:

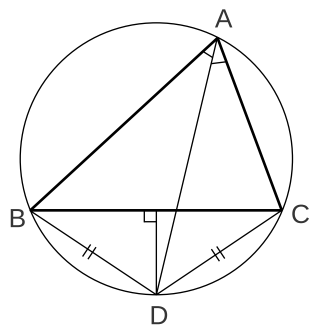
- вокруг произвольного треугольника можно описать окружность, центром этой окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;
- в произвольный треугольник можно вписать окружность, центром этой окружности является точка пересечения биссектрис треугольника;
- для того, чтобы вокруг четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных углов были равны π;

- для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин противоположных сторон были равны;

- для того, чтобы вокруг трапеции можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы эта трапеция была равнобедренной.

Примеры решения задач

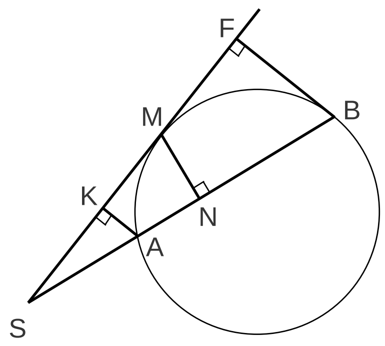
Пример 1. Доказать, что если из вершины A неравнобедренного треугольника ABC проведена биссектриса, а из середины BC восстановлен перпендикуляр, то точка их пересечения лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.



Решение. Пусть D – точка пересечения биссектрисы угла BAC треугольника ABC с описанной окружностью. Из равенства углов BAD и CAD следует, что $BD = CD$ и треугольник BDC равнобедренный. Следовательно, перпендикуляр, опущенный из точки D на отрезок BC, делит его пополам.

Пример 2. Доказать, что расстояние от точки окружности до хорды круга есть среднее пропорциональное между расстояниями от концов хорды до касательной к окружности в этой точке.

Решение. Если хорда AB параллельна касательной, проведенной в точке M, то все три расстояния равны и утверждение задачи справедливо. Рассмотрим случай, когда продолжение хорды AB и касательной в точке M пересекаются. Обозначим точку пересечения S; MN – расстояние от точки M до хорды AB; AK и BF – расстояния от концов хорды до касательной. Требуется доказать, что $MN = \sqrt{BF \cdot AK}$.



Треугольник SKA подобен треугольнику SFB, тогда $\dfrac{AS}{SB} = \dfrac{AK}{BF}$. Треугольник SAK подобен треугольнику SMN, следовательно, $\dfrac{AS}{SM} = \dfrac{AK}{MN}$ и $MN = \dfrac{SM}{AS}AK$.

По свойству касательной и секущей

$$SM = \sqrt{SA \cdot SB}.$$

Откуда получаем, что

$$MN = \frac{SM}{AS} AK = \sqrt{\frac{SB}{AS}} AK = \sqrt{\frac{BF}{AK}} AK = \sqrt{BF \cdot AK}.$$

Пример 3. Доказать, что, если четырехугольник вписан в окружность, то произведение его диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон (теорема Птолемея).

Решение. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Введём обозначения:

$$AB = b,\ AD = a,\ BC = c,\ CD = d,\ AC = d_1,\ BD = d_2.$$

Надо доказать, что $d_1 d_2 = ac + bd$. Проведём отрезок AA_1, параллельный BD, тогда четырехугольник AA_1DB – трапеция и $A_1D = AB = b$, $A_1B = AD = a$. Треугольник DA_1B равен треугольнику DAB по трём сторонам. Тогда

$$S_{DA_1B} = S_{DAB},$$

$$S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{BAD}, \quad S_{A_1BCD} = S_{BCD} + S_{BA_1D},$$

то есть $S_{ABCD} = S_{A_1BCD}$. Пусть $\angle DOA = \varphi$, тогда, с одной стороны,

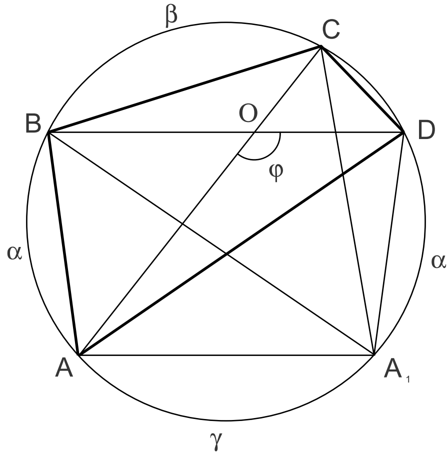
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$$

и, с другой стороны,

$$S_{ABCD} = S_{A_1BCD} = S_{A_1BC} + S_{A_1CD} =$$

$$= \frac{1}{2} A_1B \cdot BC \cdot \sin\angle A_1BC + \frac{1}{2} A_1D \cdot CD \cdot \sin\angle A_1DC =$$

$$= \frac{1}{2} ac \cdot \sin\angle A_1BC + \frac{1}{2} bd \cdot \sin\angle A_1DC.$$



Для того чтобы доказать равенство $d_1 d_2 = ac + bd$, нам достаточно показать, что $\angle A_1DC = \varphi$. Обозначим

$$\smile AB = \smile A_1D = \alpha, \quad \smile BC = \beta, \quad \smile AA_1 = \gamma,$$

тогда по свойству вписанных углов

$$\angle A_1DC = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2},$$

а по свойству углов между пересекающимися хордами получаем

$$\angle AOD = \varphi = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

Значит, $\angle A_1DC = \varphi$. Тогда $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(ac + bd) \cdot \sin\varphi$, откуда следует, что $d_1 d_2 = ac + bd$.

Задачи

1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.

2. В круг вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций равны.

3. Может ли у треугольника со сторонами меньше 1 радиус описанной окружности быть больше 100?

4. Доказать, что касательные к двум пересекающимся окружностям, проведенные из любой точки продолжения их общей хорды, равны между собой.

5. В окружности проведены равные пересекающиеся хорды. Доказать, что соответствующие части этих хорд, на которые они делятся точкой пересечения, равны.

6. Через точки пересечения двух окружностей P и P' проводятся произвольные прямые, пересекающие окружности. Через точки пересечения этих прямых с окружностями проводятся прямые m и m'. Доказать, что m параллельна m'.

7. К двум непересекающимся окружностям проведены две общие внешние касательные и внутренняя. Точки M и N – точки касания внешней касательной с окружностями, а P и Q – точки пересечения внутренней касательной с внешними. Доказать, что $MN = PQ$.

8. К двум окружностям с центрами O_1 и O_2, касающимся внешним образом в точке A, проведена общая касательная BC (B и C – точки касания). Доказать, что угол BAC – прямой.

4.4. Площади

Теоретический материал

Напомним основные формулы.

- Площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a, \quad S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\gamma, \quad S = p \cdot r, \quad S = \frac{abc}{4R},$$

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$$

  где a, b, c – стороны треугольника, α, β, γ – соответствующие противоположные им углы, h_a, h_b, h_c – высоты, проведенные к сторонам, p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной в треугольник окружности, R – радиус описанной около треугольника окружности.

- Площадь параллелограмма:

$$S = a \cdot h_a, \quad S = a \cdot b \cdot \sin\gamma,$$

  где a и b – стороны параллелограмма, γ – угол, образованный сторонами a и b, h_a – высота, проведенная к стороне a.

- Площадь трапеции:

$$S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h,$$

  где a, b – длины оснований трапеции, а h – её высота.

- Площадь произвольного четырехугольника:

$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi,$$

  где d_1, d_2 – длины диагоналей четырехугольника, а φ – угол между ними.

Примеры решения задач

Пример 1. Существует ли треугольник, у которого две высоты больше 100, а площадь меньше 1?

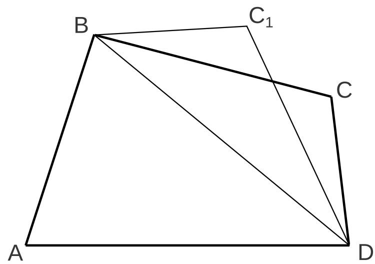
Решение. Пусть $h_a > 100$ и $h_b > 100$. Так как $a > h_b$, то $a > 100$ и

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a > \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 5000.$$

Ответ. Не существует.

П р и м е р 2. Пусть a, b, c, d – последовательные стороны произвольного выпуклого четырехугольника. Доказать, что его площадь $S \leq \dfrac{ac+bd}{2}$.

Р е ш е н и е. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$.



Построим треугольник BDC_1 такой, что $BC_1 = CD = c$, $DC_1 = BC = b$. Площадь четырехугольника ABC_1D равна площади четырехугольника $ABCD$. Пусть $\angle ABC_1 = \alpha$, $\angle ADC_1 = \gamma$, тогда

$$S_{ABCD} = S_{ABC_1D} = S_{ABC_1} + S_{ADC_1} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC_1 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC_1 \cdot \sin\gamma =$$

$$= \frac{ac \cdot \sin\alpha + bd \cdot \sin\gamma}{2} \leq \frac{ac+bd}{2}.$$

Задачи

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что для его площади S имеет место неравенство $S \leq \dfrac{1}{2}(ab+cd)$. В каких случаях это неравенство обращается в равенство?

2. Все стороны выпуклого четырехугольника меньше 7. Доказать, что его площадь строго меньше 50.

3. В треугольнике ABC заданы длины двух его сторон a и b. Доказать, что для его площади S справедливо неравенство $S \leq \dfrac{a^2+b^2}{4}$. В каком случае это неравенство обращается в равенство?

4. Может ли уменьшиться площадь треугольника при увеличении всех его сторон?

5. Задачи на построение

Задачи на построение нельзя встретить на письменном экзамене. Однако такие задачи позволяют узнать много интересных и полезных для решения задач письменных экзаменов фактов. Они также позволяют научиться видеть и доказывать полезные соотношения в треугольниках, многоугольниках и окружностях.

5.1. Алгебраический метод

Теоретический материал

Решение задачи на построение состоит в описании последовательности операций, которые надо проделать циркулем и линейкой, чтобы получить нужную фигуру.

С помощью циркуля можно

- провести окружность с центром в любой точке плоскости радиусом, равным длине заданного отрезка;
- найти точки пересечения проведённой окружности с любым заданным объектом плоскости (прямой, окружностью и т.п.).

С помощью линейки можно

- провести прямую через две заданные точки;
- найти пересечение проведённой прямой с любым заданным объектом плоскости.

Общая схема решения задач на построение такова.

- Анализ — считаем, что искомая фигура построена, рисуем её, исследуем геометрические свойства, которые могут подсказать способ её построения.
- Построение — указывается последовательность действий, дающих искомую фигуру.
- Доказательство — приводится обоснование того, что построено именно то, что требовалось (в большинстве случаев это следует из самого построения).
- Исследование — определяются условия, при которых существует решение задачи, анализируется число различных решений.

Приведём список элементарных построений, которые будут использоваться при решении задач:

1) поделить отрезок на n равных частей;
2) поделить угол пополам;
3) провести через данную точку перпендикуляр к данной прямой;
4) провести через данную точку прямую, параллельную данной прямой;
5) построить треугольник по трём сторонам;
6) построить треугольник по двум сторонам и углу между ними;
7) построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

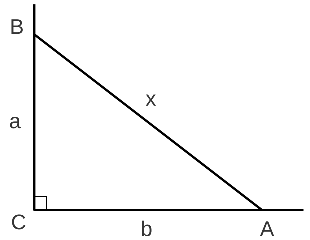
Если какое-либо из элементарных построений вызывает у вас трудности, повторите соответствующий материал в школьном учебнике.

Алгебраический метод решения задач на построение заключается в построении искомых элементов по формулам, выражающим их зависимость от заданных элементов.

Большинство задач этого вида решается с помощью комбинирования основных четырёх формул, приведённых ниже.

Примеры решения задач

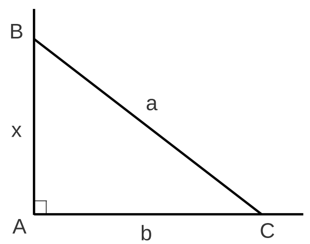
Пример 1. Построение отрезка $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, где a и b – заданные отрезки.



Решение. Построим прямой угол и на его сторонах отложим катеты a и b. Соединив полученные точки A и B, по теореме Пифагора получим

$$x = AB = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Пример 2. Построение отрезка $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, где a и b – заданные отрезки.

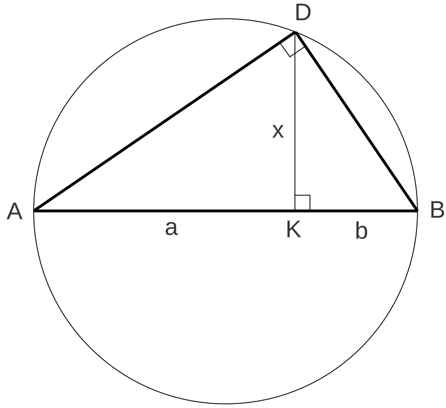


Решение. Построим прямой угол и на одной из его сторон отложим катет b. Из полученной точки C раствором циркуля, равным a, сделаем засечку на другой стороне угла. Второй катет построенного треугольника по теореме Пифагора равен

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Пример 3. Построение отрезка $x = \sqrt{ab}$, где a и b – заданные отрезки.

Решение. Отложим на прямой отрезки $AK = a$, $KB = b$ (точки A и B находятся по разные стороны от точки K) и построим окружность на отрезке AB, как на диаметре.

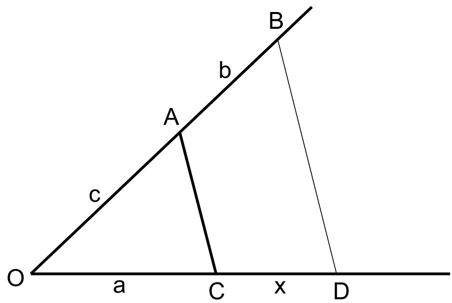


Из точки K восстановим перпендикуляр до пересечения с окружностью в точке D. В прямоугольном треугольнике ADB отрезок DK будет высотой, проведённой из прямого угла к гипотенузе. Следовательно, $DK = \sqrt{AK \cdot BK} = \sqrt{ab}$.

П р и м е р 4. Построение отрезка $x = \dfrac{ab}{c}$, где a, b и c – заданные отрезки.

Р е ш е н и е. На сторонах произвольного угла с вершиной O отложим отрезки $OA = c$, $AB = b$, $OC = a$. Через точку B проведём прямую, параллельную AC, которая пересечёт другую сторону угла в точке D.

По теореме Фалеса имеем $\dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{x}$, откуда $x = \dfrac{ab}{c}$.



П р и м е р 5. Найти геометрическое место точек, расстояния от которых до двух данных точек A и B находятся в заданном отношении $m : n \neq 1$.

Р е ш е н и е. В следующем параграфе будет предложено геометрическое решение этой задачи. Сейчас решим её с помощью алгебраического метода.

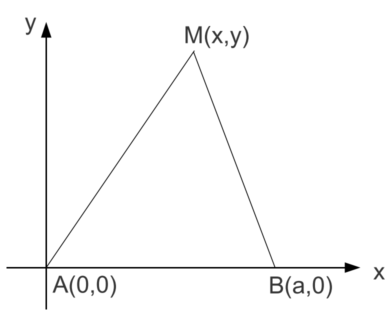
Обозначим длину отрезка AB через a, отношение $m : n$ через k. Примем точку A за начало координат и прямую AB за ось x.

Точка M с координатами (x, y) принадлежит искомому ГМТ $\iff$

$$\iff \quad \frac{AM}{MB} = k \quad \iff \quad \frac{x^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = k^2.$$

Домножим равенство на знаменатель и сгруппируем слагаемые по степеням x. Поделив полученное уравнение на коэффициент перед x^2, получим

$$x^2 - \frac{2ak^2}{k^2-1} \cdot x + y^2 + \frac{a^2k^2}{k^2-1} = 0 \quad \iff \quad \left(x - \frac{ak^2}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}.$$



Мы получили уравнение окружности радиуса $\dfrac{ak}{|k^2-1|}$ с центром на прямой AB на расстоянии $\dfrac{ak^2}{|k^2-1|}$ от точки A справа, если $k>1$, и слева, если $k<1$. Полученная окружность называется *окружностью Аполлония.*

Пример 6. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, выходящей из общей вершины данных сторон.

Решение. Пусть даны a, b, m_c, тогда

$$m_c{}^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}, \quad \text{откуда} \quad c = \sqrt{2a^2+2b^2-4m_c^2}.$$

Для того чтобы построить отрезок длины c, сначала построим отрезки $x=\sqrt{2}a$, $y=\sqrt{2}b$, потом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и, наконец, $c=\sqrt{z^2-(2m_c)^2}$. В результате, осталось построить треугольник по трём сторонам.

Замечание. Геометрическое решение этой задачи будет приведено в одном из следующих параграфов.

Задачи

1. Дан отрезок a. Построить отрезок $x=a\cdot\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$.
2. Даны отрезки a, b, c. Построить отрезок $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
3. Дан отрезок a. Построить отрезок $x=a\cdot\sqrt[4]{2}$.
4. Даны отрезки a, b. Построить отрезок $x=\dfrac{a^{1995}}{b^{1994}}$.
5. Даны два отрезка: длины 1 и длины a. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длины $x=\sqrt[4]{a^3-4a^2+3a}$.
6. Даны отрезки a, b. Построить отрезок $x=\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$.
7. Построить треугольник ABC, если известна биссектриса BD и отрезки AD и DC, на которые она делит противоположную сторону.
8. Построить треугольник по основанию a, h_a и $\sqrt{b^2-c^2}$.
9. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.
10. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и сумме катетов s.
11. Дан угол в 19°, построить угол в 1°.
12. Дан отрезок длины a и угол, равный α. Построить отрезки длины $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$, $\dfrac{a}{\cos\alpha}$, $\dfrac{a}{\sin\alpha}$, $a\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $a\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

13. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Через вершину A с помощью циркуля и линейки провести такую прямую, что сумма расстояний от точек B и C до этой прямой равна $\sqrt{2}$.

14. Дан ΔABC. Построить отрезок DE с концами на сторонах AB и BC так, что $DE \parallel AC$ и DE виден из середины AC под прямым углом.

15. Построить угол, равный трём градусам.

16. С помощью циркуля и линейки разделите угол 54° на три равные части.

17. Провести прямую, параллельную диагонали и пересекающую две смежные стороны данного прямоугольника так, чтобы его площадь разделилась в отношении $1:3$.

5.2. Метод геометрических мест точек

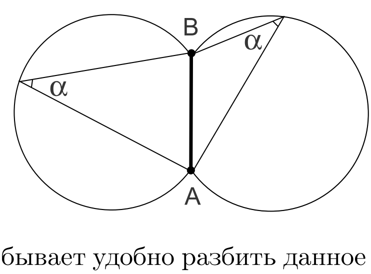
Теоретический материал

Геометрическим местом точек плоскости (пространства) с данным свойством называется множество всех точек плоскости (пространства), обладающих этим свойством.

При решении задач на геометрические места точек (сокращённо ГМТ) должно быть предъявлено множество и доказано, что каждая точка этого множества обладает заданным свойством, а любая другая точка не обладает.

В дальнейшем под ГМТ в данном пособии будет подразумеваться ГМТ плоскости. Простейшими примерами ГМТ являются следующие:

- ГМТ, удалённых на расстояние R от данной точки O, – это окружность радиуса R с центром в точке O;
- ГМТ, равноудалённых от точек A и B, – это серединный перпендикуляр к отрезку AB;
- ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α, – это объединение двух дуг окружностей радиуса $R = \frac{AB}{2\sin\alpha}$ с центрами на серединном перпендикуляре к отрезку AB, лежащими на расстоянии $R\cos\alpha$ от прямой AB.



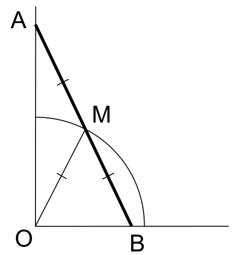
При построении ГМТ бывает удобно разбить данное свойство на более простые и найти соответствующие более простые ГМТ. Пересечением этих множеств будет множество точек, для которых одновременно выполняются все свойства, то есть искомое ГМТ.

Помимо задач на нахождение ГМТ в этом параграфе будут рассмотрены задачи на построение циркулем и линейкой, решаемые методом ГМТ.

Примеры решения задач

Пример 1. По сторонам прямого угла скользит отрезок заданной длины a. Какую кривую при этом описывает середина этого отрезка?

Решение. Пусть M – середина отрезка $AB = a$, скользящего по сторонам прямого угла.



Так как медиана в прямоугольном треугольнике равна половине гипотенузы, то $OM = AB/2 = a/2$. То есть точка M удалена от точки O на расстояние $a/2$ и, следовательно, принадлежит четверти дуги окружности радиуса $a/2$ с центром в точке O.

Теперь покажем, что произвольная точка этой дуги является серединой гипотенузы длины a некоторого прямоугольного треугольника.

Для этого из произвольной точки M данной дуги сделаем засечку радиусом $a/2$ на стороне прямого угла. Получим точку A. Обозначим через B точку пересечения прямой AM со второй стороной прямого угла. Покажем, что $AB = a$. Пусть $\angle OAB = \alpha$, тогда $\angle AOM = \alpha$ и $\angle MOB = 90° - \alpha = \angle ABO$. Следовательно, ΔOMB равнобедренный и $MB = OM = a/2$. То есть ΔABO имеет гипотенузу длины a, что и требовалось доказать.

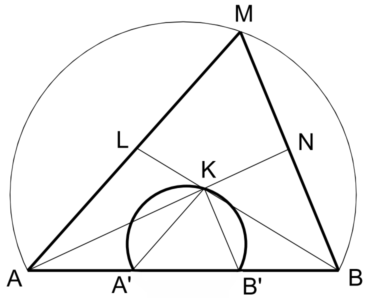
Пример 2. По данной дуге окружности "бегает" точка M. Хорда AB – фиксирована. Какие кривые при этом пробегает в треугольнике AMB точка пересечения медиан треугольника?

Решение. Пусть дуга AB вмещает углы, равные α. Обозначим через K точку пересечения медиан треугольника AMB и проведём через неё прямые, параллельные сторонам угла AMB. Получим $\angle A'KB' = \angle AMB = \alpha$.

Так как медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, то по теореме Фалеса

$$AA' = \frac{1}{3}AB \text{ и } BB' = \frac{1}{3}AB,$$

следовательно, $A'B' = AB/3$. Таким образом, точка пересечения медиан лежит на дуге $A'B'$, вмещающей углы, равные α.

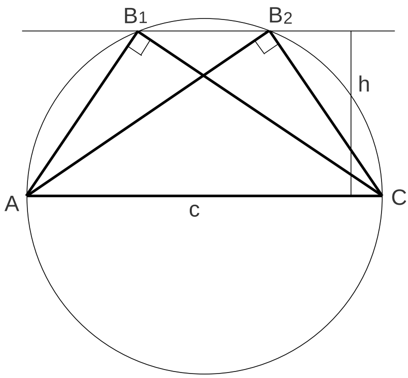


Верно и обратное. Если взять произвольную точку на дуге $A'B'$ и рассмотреть два соответствующих подобных треугольника, то эта точка будет точкой пересечения медиан большего из них.

Следовательно, дуга $A'B'$ есть геометрическое место точек пересечения медиан треугольника AMB.

Пример 3. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу.

Решение. Построим окружность с диаметром, равным гипотенузе, и проведём прямую параллельно диаметру на расстоянии, равном высоте. Точка пересечения этой прямой с окружностью даст вершину B_1 треугольника AB_1C, причём угол AB_1C будет прямым, так как опирается на диаметр.



При $h = \dfrac{c}{2}$ получим единственную точку B_1.

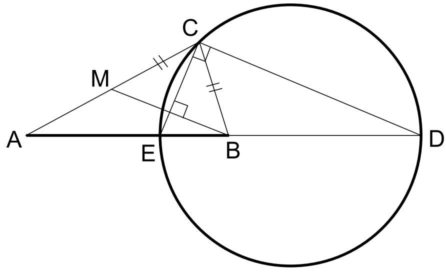
При $0 < h < \dfrac{c}{2}$ получим две точки и, следовательно, два равных симметричных треугольника AB_1C и AB_2C.

Если $h > \dfrac{c}{2}$, то задача не имеет решения.

Пример 4. Найти геометрическое место точек, расстояния от которых до двух данных точек A и B находятся в заданном отношении $m : n$.

Решение. В предыдущем параграфе было приведено решение этой задачи, полученное алгебраическим методом. Сейчас решим задачу геометрически.

Пусть $m > n$ (при $m = n$ искомое ГМТ является серединным перпендикуляром к отрезку AB).



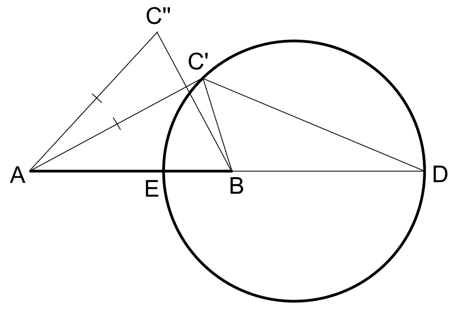
Рассмотрим точки $E \in AB$ и $C \notin AB$ такие, что $AE : EB = AC : CB = m : n$.

Отрезок CE является биссектрисой ΔABC, так как делит противолежащую сторону в отношении прилежащих сторон. Проведём $CD \perp CE$ и $BM \parallel CD$. Треугольник ΔBMC равнобедренный, так как его биссектриса CE будет одновременно и высотой. Следовательно, $CB = CM$ и

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CM} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n},$$

то есть положение точки D на прямой AB не зависит от выбранной нами точки C. Важно только, что $AC : CB = m : n$. Поскольку $\angle ECD = 90^\circ$, то точка C лежит на окружности с диаметром ED. Значит, если $AC : CB = m : n$, то точка C лежит на окружности, построенной на ED, как на диаметре.

Теперь возьмём произвольную точку C' на этой окружности и покажем, что $AC' : C'B = m : n$.



Обозначим длину отрезка AC' через d и рассмотрим треугольник $\Delta AC''B$, у которого

$$AC'' = d \quad \text{и} \quad BC'' = d \cdot \frac{n}{m}.$$

Так как $AC'' : C''B = m : n$, то точка C'' лежит на построенной окружности. Но в верхней полуплоскости существует только одна точка на окружности с диаметром ED, находящаяся на расстоянии d от точки A. Следовательно, точки C'' и C' совпадают, что и требовалось доказать.

Таким образом, искомое ГМТ – окружность, построенная на отрезке ED, как на диаметре.

З а м е ч а н и е. Полученную окружность называют *окружностью Аполлония*, а точки A, E, B и D, лежащие на одной прямой и удовлетворяющие равенству

$$AE : EB = AD : DB,$$

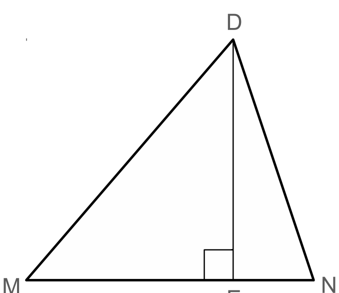
называют *гармоническими точками.*

П р и м е р 5. Доказать, что геометрическим местом точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек M и N есть величина постоянная, является прямая, перпендикулярная отрезку MN.

Р е ш е н и е. Пусть точка D такова, что

$$MD^2 - ND^2 = a^2$$

(где a^2 есть заданная в условии постоянная величина) и E – её проекция на отрезок MN.



Из прямоугольных треугольников MDE и NDE получим

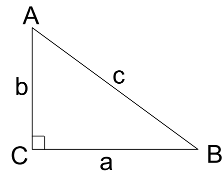
$$ME^2 = MD^2 - DE^2, \; NE^2 = ND^2 - DE^2$$

и, следовательно,

$$ME^2 - NE^2 = MD^2 - ND^2 = a^2.$$

Таким образом, мы нашли на отрезке MN точку E такую, что $ME^2 - EN^2 = a^2$. Так как D – произвольная точка из искомого ГМТ, то все точки ГМТ лежат на перпендикуляре к отрезку MN, восстановленному из точки E.

Аналогично (с помощью теоремы Пифагора) показывается, что любая точка на перпендикуляре обладает требуемым свойством.

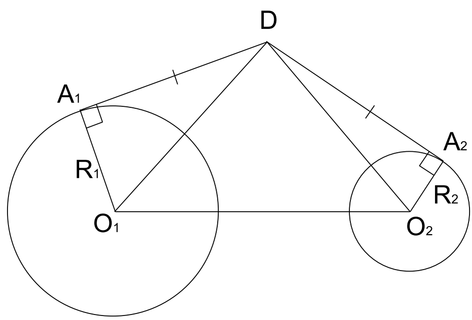


З а м е ч а н и е. Для того чтобы получить точку E (основание перпендикуляра), построим вспомогательный прямоугольный треугольник ABC с катетом a. Гипотенузу и второй катет выберем такими, чтобы выполнялось условие $c+b>MN$.

По теореме Пифагора $a^2 = c^2 - b^2$. Сделаем засечки радиусами b и c из точек N и M. Обозначим точку пересечения этих дуг через D и опустим перпендикуляр из D на MN. Основанием этого перпендикуляра будет искомая точка E.

П р и м е р 6. Доказать, что геометрическим местом точек, касательные из которых к двум данным окружностям равны, является прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей (эта прямая называется *радикальной осью* двух окружностей).

Р е ш е н и е. Рассмотрим окружности с центрами O_1 и O_2 радиусов R_1 и R_2. Пусть DA_1 и DA_2 – равные касательные, проведённые к окружностям из точки D.



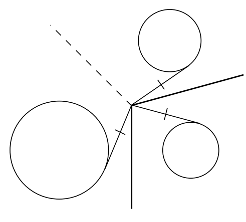
Из прямоугольных треугольников ΔO_1A_1D и ΔO_2A_2D получим

$$A_1D^2 = O_1D^2 - R_1^2, \quad A_2D^2 = O_2D^2 - R_2^2, \quad \text{откуда}$$

$$O_1D^2 - O_2D^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Следовательно, точка D такова, что разность квадратов расстояний от неё до O_1 и O_2 есть величина постоянная.

Согласно предыдущей задаче, множество всех таких точек есть прямая, перпендикулярная отрезку O_1O_2.

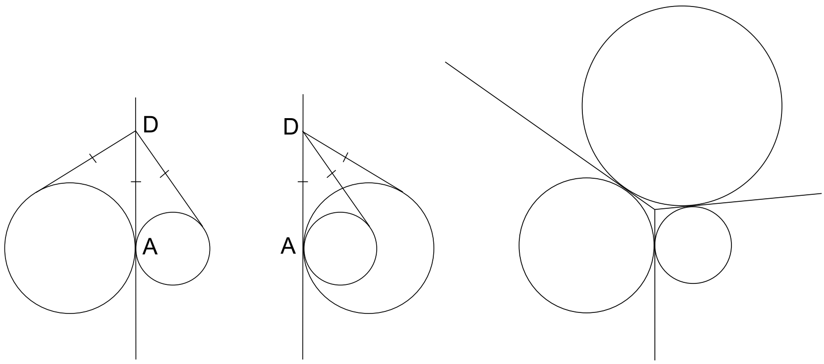


З а м е ч а н и е. Три радикальные оси любых трёх попарно взятых окружностей пересекаются в одной точке, называемой *радикальным центром.*

Для объяснения этого факта достаточно рассмотреть точку пересечения двух радикальных осей. Поскольку она принадлежит двум радикальным осям, касательные из неё ко всем трём окружностям равны. Следовательно, она принадлежит и третьей радикальной оси.

Рассмотрим способы построения радикальной оси в зависимости от взаимного расположения окружностей.

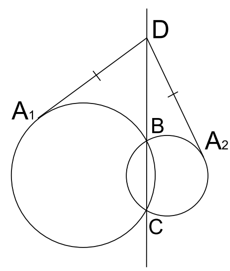
1) Если окружности касаются друг друга, то радикальная ось проходит через точку касания, так как в этом случае касательные, проведённые из точки D, равны отрезку общей касательной DA.



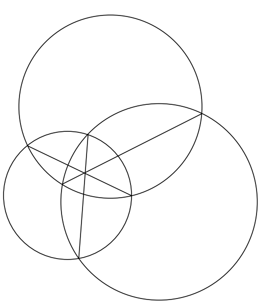
Следствие. Три общие касательные трёх попарно касающихся окружностей пересекаются в одной точке.

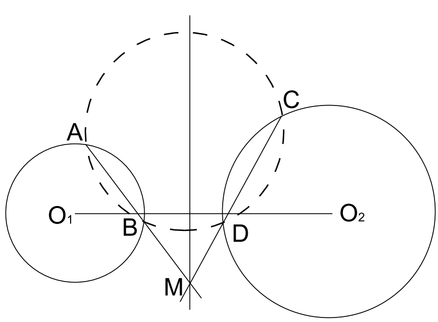
2) У пересекающихся окружностей радикальная ось проходит через точки пересечения. В этом случае касательные, проведённые из точки D, равны в силу того, что квадрат касательной равен произведению длин секущих, то есть

$$DA_1^2 = DB \cdot DC = DA_2^2.$$



Следствие. Три общие хорды трёх попарно пересекающихся окружностей пересекаются в одной точке.





3) Если окружности не пересекаются, то для построения радикальной оси будем использовать вспомогательную окружность, пересекающую две данные. Пусть M – точка пересечения прямых, содержащих общие хорды AB и CD. Это есть радикальный центр трёх окружностей. Следовательно, точка M принадлежит

радикальной оси двух данных окружностей. Найдя таким же образом ещё одну точку или опустив перпендикуляр на линию центров O_1O_2, найдём искомую радикальную ось.

Задачи

1. По данной дуге окружности "бегает" точка M. Хорда AB фиксирована. Какую кривую при этом пробегает в треугольнике AMB точка пересечения высот?

2. Построить треугольник по заданной стороне, противолежащему ей углу и проведённой к ней высоте.

3. По сторонам прямого угла скользит гипотенуза прямоугольного треугольника. Найти геометрическое место вершин прямого угла этого треугольника.

4. Построить треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из этих сторон.

5. Построить треугольник по α, a, r.

6. Построить треугольник по α, r, R.

7. Построить треугольник по a, r, R.

8. Построить треугольник по α, β, r.

9. Построить треугольник по заданной стороне a, противолежащему ей углу α и проведенной к ней медиане m_a.

10. Построить параллелограмм по углу и диагоналям.

11. Построить треугольник по стороне, высоте, опущенной на эту сторону, и медиане другой стороны.

12. Дана окружность и точка A, лежащая вне круга, ограниченного окружностью. Построить касательные к окружности, проходящие через эту точку.

13. Построить треугольник по заданным α, h_a, l_a.

14. Построить треугольник по заданным $\alpha, a, b : c$.

15. Провести общую внешнюю касательную к двум данным окружностям (то есть даны их центры и радиусы).

16. На сторонах угла даны два отрезка AB и CD и точка M внутри угла. Найти геометрическое место точек N таких, что $S_{ABN} + S_{CDN} = S_{ABM} + S_{CDM}$.

17. По окружности "бегает" дуга данной длины CD, хорда AB задана, $CD < AB$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых AC и BD.

18. Через точку A внутри окружности проводятся всевозможные хорды. Найти геометрическое место середин этих хорд.

19. Найти на стороне угла точку, из которой данный отрезок AB, лежащий на другой стороне угла, виден под наибольшим углом.

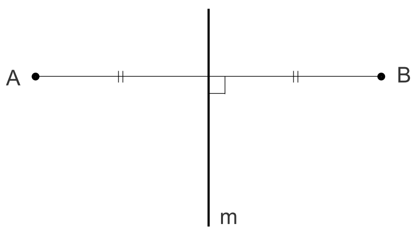
5.3. Метод симметрии и спрямления

Теоретический материал

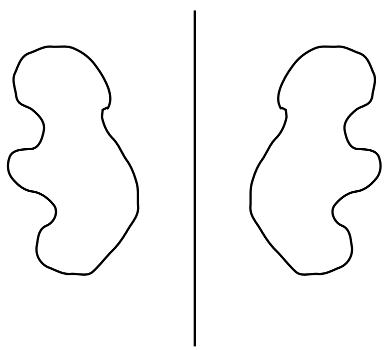
В случаях, когда нужную фигуру сразу построить затруднительно, бывает удобно преобразовать её в другую фигуру, которую построить легче.

В этом параграфе будут рассмотрены задачи, решаемые с помощью преобразования фигур методом симметрии и спрямления.

Точки A и B называются *симметричными относительно прямой* m, если отрезок $AB \perp m$ и делится этой прямой пополам. Прямую m называют *осью симметрии*. Точку B называют *отражением точки* A и наоборот.



Фигуры, все точки которых являются симметричными относительно прямой m, называются *симметричными относительно этой прямой*.



Метод симметрии заключается в следующем. Считаем, что нужная фигура построена, и отражаем часть фигуры (точку, прямую, окружность) относительно некоторой оси. Изменённую фигуру подчиняем тем же условиям, которым должна удовлетворять исходная фигура, и решаем новую задачу уже известными способами.

В ряде задач метод симметрии приводит к спрямлению ломаных линий в прямые. Метод спрямления состоит в следующем. Считаем задачу решённой и в полученном чертеже некоторую ломаную линию заменяем прямой. Таким образом исходная задача заменяется новой – более простой. После построения новой фигуры определяется, в какой точке надо согнуть выпрямленную линию, чтобы вернуться к исходной задаче.

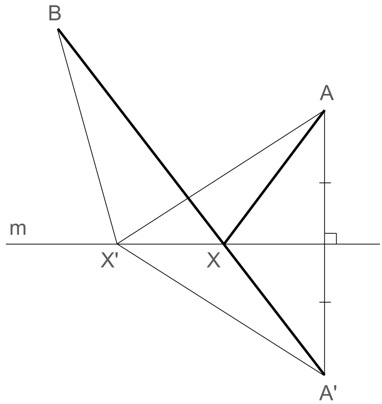
Метод спрямления особенно часто применим в задачах, где дана сумма или разность частей некоторой ломаной линии.

Примеры решения задач

Пример 1. Дана прямая m и две точки A и B по одну сторону от неё. Найти на прямой m точку X такую, что сумма расстояний AX и BX минимальна.

Решение. Рассмотрим точку A', симметричную точке A относительно прямой m. Обозначим через X точку пересечения отрезка $A'B$ с прямой m. Имеем

$$AX + XB = A'X + XB = A'B.$$



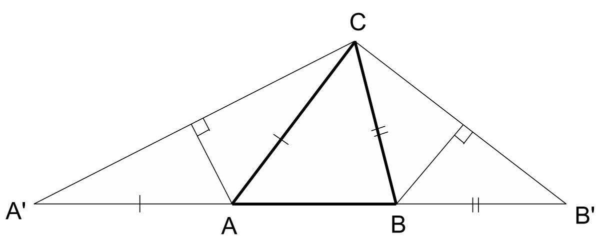
Для любой другой точки $X' \in m$ будет выполняться

$$AX' + X'B = A'X' + X'B > A'B.$$

Следовательно, искомая точка X – это точка пересечения отрезка $A'B$ с прямой m.

Пример 2. Построить треугольник по периметру P и двум углам α и β.

Решение. Пусть треугольник ABC с данными $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, $P_{ABC} = P$ уже построен. На прямой AB отложим отрезки $AA' = AC$ и $BB' = BC$.



Треугольники $AA'C$ и $BB'C$ равнобедренные с углами при основании соответственно $\dfrac{\alpha}{2}$ и $\dfrac{\beta}{2}$. Следовательно, у треугольника $A'B'C$ сторона $A'B' = P$ и $\angle A' = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle B' = \dfrac{\beta}{2}$.

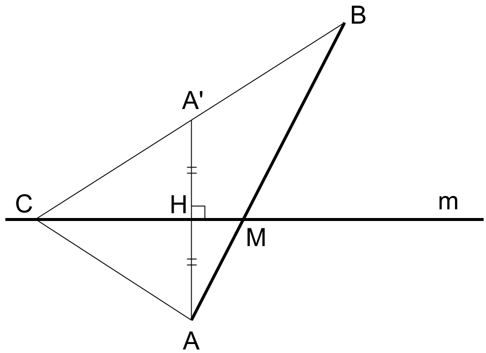
Таким образом, для того чтобы построить ΔABC, сначала нам надо построить $\Delta A'B'C$ по стороне и двум прилежащим углам, потом провести к сторонам $A'C$

и $B'C$ серединные перпендикуляры, которые пересекут $A'B'$ соответственно в точках A и B.

Построенный треугольник ABC будет удовлетворять заданным условиям, то есть $P_{ABC} = P$ и $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$.

Пример 3. Даны отрезок AB и прямая, пересекающая его. Построить треугольник ABC, биссектриса которого принадлежит данной прямой.

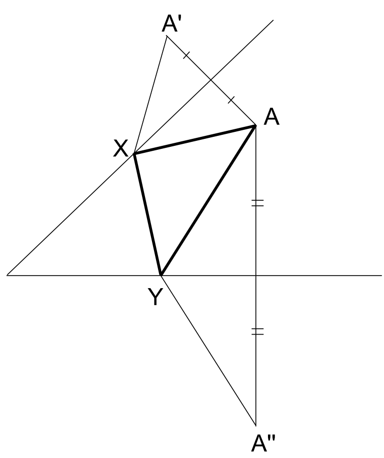
Решение. Построим отражение точки A относительно прямой m. Проведём через B и полученную точку A' прямую, которая пересечёт исходную прямую m в точке C.



Пусть H – точка пересечения отрезка AA' с прямой m. Прямоугольные треугольники ΔACH и $\Delta A'CH$ равны друг другу и, следовательно, $\angle ACM = \angle BCM$.

Пример 4. Внутри угла дана точка A. Найти такое положение точек X и Y на сторонах угла, чтобы периметр треугольника AXY был минимальным.

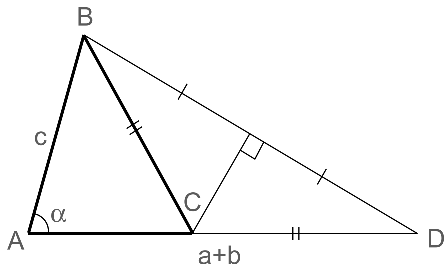
Решение. Пусть A' и A'' – отражения точки A относительно сторон угла. Длина ломаной $A'XYA''$ равна периметру ΔAXY.



Так как ломаная имеет минимальную длину в случае, когда является отрезком, то искомые точки X, Y – это точки пересечения отрезка $A'A''$ со сторонами угла.

Пример 5. Построить треугольник, зная α, c и $a+b$.

Решение. От отрезка $AD = a+b$ отложим под углом α отрезок $AB = c$. В качестве вершины C возьмём точку пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BD с отрезком AD.



Так как отрезки BC и DC равны между собой, то построенный треугольник ΔABC удовлетворяет всем данным в условии задачи требованиям.

Задачи

1. Построить треугольник, зная P, α и h_a.

2. Даны две окружности и между ними прямая. Начертить равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины были на окружностях, а одна из высот лежала на данной прямой.

3. Дана прямая m и две точки A и B по одну сторону от неё. Найти на m такую точку X, чтобы AX составлял с m угол, вдвое больший, чем BX.

4. Внутри угла даны точки A и B. Построить равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной стороне угла, вершина – на другой, а боковые стороны проходят через точки A и B.

5. Дана прямая AB и две окружности, лежащие по одну сторону от прямой. Найти на прямой AB точку, касательные из которой составляют с этой прямой равные углы.

6. Точки A и B расположены между параллельными прямыми m и n. Постройте точки $M \in m$, $N \in n$ так, чтобы длина ломаной $AMNB$ была наименьшей.

7. В данную окружность вписать прямоугольник, зная разность основания и высоты.

8. Построить треугольник по стороне, прилежащему углу и разности остальных сторон.

9. Построить четырёхугольник $ABCD$, зная его стороны, если диагональ AC делит угол A пополам.

10. Найти сумму перпендикуляров, опущенных на стороны равнобедренного треугольника из точки, взятой на основании.

11. Найти сумму перпендикуляров, опущенных из точки, взятой внутри равностороннего треугольника, на его стороны.
12. На окружности даны точки A и B. Отыскать на ней точку X такую, что $AX + BX = a$, где a заданный отрезок.
13. На окружности даны точки A и B. Отыскать на ней точку X такую, что $AX - BX = a$, где a заданный отрезок.
14. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных пересекающихся прямых равна заданному отрезку.
15. На данной прямой найти такую точку, что разность расстояний от неё до сторон данного угла равна данному отрезку.
16. Провести окружность, касающуюся двух данных окружностей, так, чтобы радиусы, проведённые из центра искомой окружности к точкам касания, образовывали данный угол.
17. Построить равнобедренный треугольник, зная его боковую сторону a и сумму высоты с основанием s.
18. Построить треугольник по a, $m_b + b$ и $\angle(m_b, b)$.
19. Построить треугольник по b, c и $\beta - \gamma$.

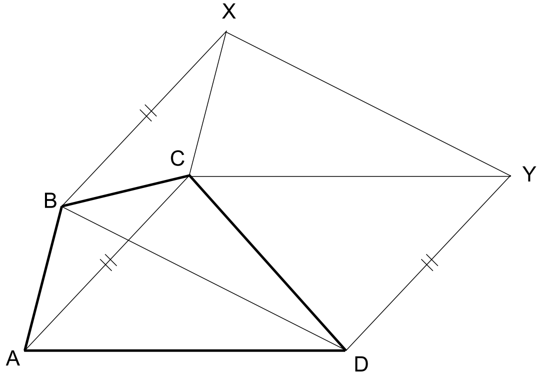
5.4. Метод параллельного переноса

Теоретический материал

В этом параграфе будут рассмотрены задачи, решаемые с помощью параллельного переноса. В таких задачах часть фигуры переносят параллельно самой себе так, чтобы новую фигуру было легче построить, чем искомую.

После построения новой фигуры надо сделать обратный параллельный перенос, чтобы вернуться к исходной задаче.

Многие задачи на построение четырёхугольников можно решить с помощью построения вспомогательного параллелограмма, стороны которого параллельны и равны диагоналям искомого четырёхугольника. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Перенесем диагональ AC параллельно самой себе в отрезки BX и DY. Полученный параллелограмм $BXYD$ будет обладать следующими свойствами.



1) Стороны и угол параллелограмма $BXYD$ равны диагоналям и углу между ними в исходном четырёхугольнике.

2) Расстояния от точки C до вершин параллелограмма $BXYD$ равны сторонам исходного четырёхугольника.

3) Углы между отрезками, соединяющими точку C с вершинами параллелограмма $BXYD$, равны углам исходного четырёхугольника.

4) Площадь параллелограмма вдвое больше площади четырёхугольника.

5) Диагонали параллелограмма вдвое больше отрезков, соединяющих середины сторон AB и CD, BC и AD; угол между диагоналями равен углу между этими отрезками.

6) Углы $\angle XCD$ и $\angle BCY$ дополняют углы между противоположными сторонами AB и CD, BC и AD до $180°$.

Докажем эти свойства.

1) Стороны параллелограмма параллельны и равны диагоналям четырёхугольника, следовательно, угол параллелограмма равен углу между этими диагоналями.

2) Отрезки BC и CD являются сторонами четырёхугольника. Отрезки CX и CY параллельны и равны сторонам AB и AD, поскольку $ABXC$ и $ACYD$ – параллелограммы.

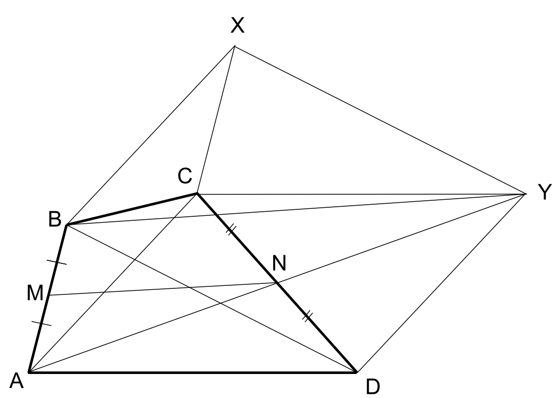
3) Углы $\angle BCX = \angle ABC$ и $\angle DCY = \angle CDA$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых. Углы $\angle XCY = \angle BAD$ как углы с параллельными сторонами.

4) Обозначим диагонали $ABCD$ через d_1, d_2 и угол между ними через α. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha, \quad S_{BXYD} = d_1 d_2 \sin\alpha,$$

откуда $S_{BXYD} = 2S_{ABCD}$.

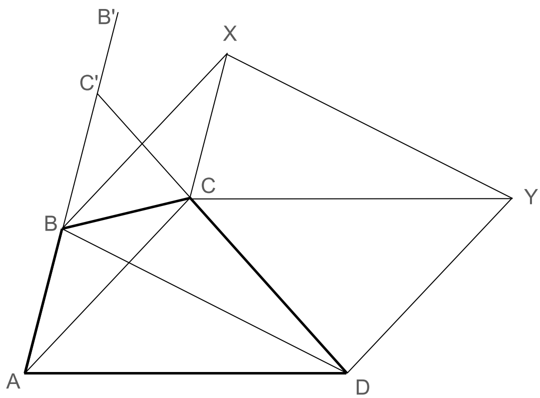
5) Пусть отрезок MN соединяет середины сторон AB и CD.



Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то N есть точка пересечения диагоналей параллелограмма $ACYD$, а отрезок MN есть средняя линия ΔABY.

Следовательно, $MN = BY/2$, что и требовалось доказать.

6) Пусть C' есть точка пересечения продолжений сторон AB и CD, а B' взята на продолжении BC' за точку C'. Равенство углов $\angle XCD = \angle CC'B'$ следует из параллельности прямых AB' и CX.



Замечание. В случае, когда стороны BC и AD параллельны (то есть $ABCD$ трапеция), ломаная BCY выпрямляется.

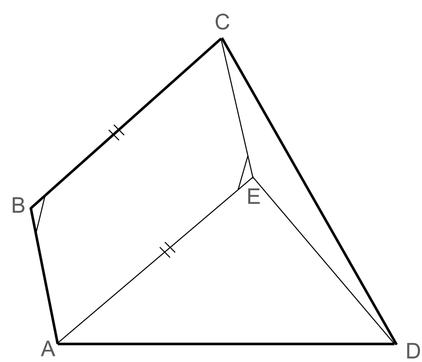
Примеры решения задач

Пример 1. Построить четырёхугольник, зная его углы и две противоположные стороны.

Решение. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ даны углы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и стороны BC и AD. Перенесём BC параллельно самой себе в AE.

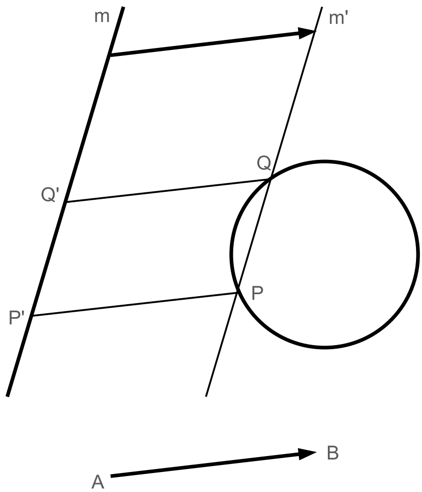
В ΔAED стороны AE и AD известны, а угол $\angle EAD = \alpha - \angle BAE = \alpha - (\pi - \beta)$. Следовательно, этот треугольник мы построить можем.

Точку C можно получить как точку пересечения луча, отложенного от прямой AD под углом δ, и луча, отложенного от прямой AE под углом β. Затем, переместив отрезок AE вдоль EC, получим точку B.



П р и м е р 2. Построить отрезок, равный и параллельный данному так, чтобы один конец лежал на данной прямой, другой – на данной окружности.

Р е ш е н и е. Пусть даны прямая m, отрезок AB и окружность.



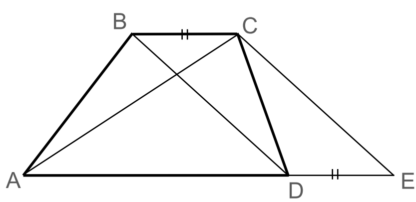
Сдвинем прямую m на вектор AB, получим прямую $m' \parallel m$.

Через точки пересечения m' с окружностью проведём прямые, параллельные AB. Четырёхугольник $PQQ'P'$ – параллелограмм, причём $PP' \parallel QQ' \parallel AB$ и $PP' = QQ' = AB$. Следовательно, PP' и QQ' искомые отрезки.

Задача может иметь одно решение, два решения или не иметь решений вообще.

П р и м е р 3. Построить трапецию по двум диагоналям и двум основаниям.

Р е ш е н и е. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Перенесём диагональ BD вдоль основания BC. Получим параллелограмм $BCED$.



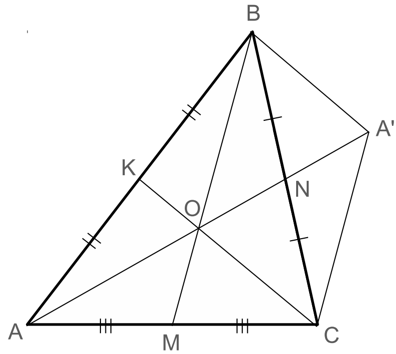
В треугольнике ΔACE стороны AC и CE равны диагоналям, основание AE равно сумме оснований трапеции. Следовательно, ΔACE можно построить по трём сторонам. После этого отложим отрезок ED (равный BC) и найдём вершину D. Потом, достроив ΔCDE до параллелограмма, получим вершину B.

П р и м е р 4. Построить треугольник по трём его медианам.

Р е ш е н и е. Пусть медианы $BM = m_b$, $AN = m_a$ и $CK = m_c$ треугольника ABC пересекаются в точке O. Перенесём отрезок BO параллельно самому себе в отрезок $A'C$.

Так как медианы в треугольнике точкой пересечения делятся в отношении 2 к 1, то в параллелограмме $OBA'C$ стороны

$$OB = \frac{2}{3}m_b, \quad BA' = OC = \frac{2}{3}m_c.$$



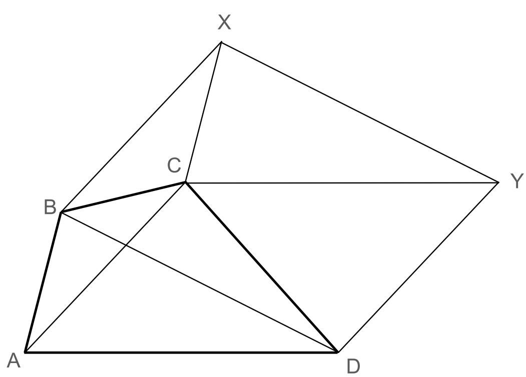
Кроме того, поскольку в параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам,

$$OA' = 2ON = \frac{2}{3}m_a.$$

Таким образом, треугольник OBA' мы можем построить по трём сторонам. Затем, достроив его до параллелограмма $OBA'C$, получим вершину C. Далее, отложив отрезок $AO = OA'$, получим вершину A.

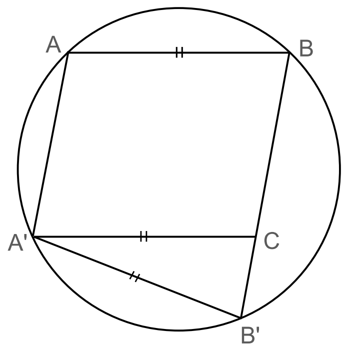
Пример 5. Построить четырёхугольник, зная две диагонали, угол между ними и две противолежащие стороны.

Решение. Зная две диагонали и угол между ними, мы можем построить вспомогательный параллелограмм $BXYD$. Согласно свойству 2 (сформулированному в теоретической части) отрезки BC и CY равны противолежащим сторонам четырёхугольника и точку C мы можем найти как точку пересечения дуг соответствующих радиусов. Достроив ΔCYD до параллелограмма, получим вершину A.



Пример 6. Через две точки, данные на окружности, провести две параллельные хорды, разность которых равна данной величине.

Решение. Пусть A и B заданные на окружности точки, а $AA' \parallel BB'$ хорды, с заданной разностью. Трапеция $ABB'A'$ является равнобокой, так как она вписана в окружность. Перенесём AA' параллельно в отрезок BC. Получим параллелограмм $ABCA'$. В итоге получаем $AB = A'C = A'B'$.



Треугольник, равный треугольнику $\Delta A'B'C$, можно построить по трём сторонам. После этого надо отложить от AB угол, равный углу $\angle A'CB'$. Так мы найдем точку B'. Точку A' можно получить как точку пересечения прямой, параллельной BB', с окружностью.

Замечание. Если в условии задачи дана сумма (разность) отрезков или углов, надо так преобразовать исходную фигуру, чтобы эта величина входила в преобразованную фигуру.

Задачи

1. Построить трапецию по четырём сторонам.

2. Между двумя окружностями[1] провести отрезок, делящийся пополам в данной точке A.

3. Построить треугольник, зная $m_a, m_c, \angle(m_b, a)$.

4. Через точку A внутри угла провести прямую так, чтобы отрезок, заключённый между сторонами, делился точкой A пополам.

5. Построить трапецию, зная диагонали, угол между ними и одну из боковых сторон.

6. Построить четырёхугольник, зная две диагонали, две противолежащие стороны и угол между ними.

7. Через данную точку M провести прямую так, чтобы разность расстояний до неё от двух данных точек A и B была равна данной длине.

[1] Имеется в виду, что один конец отрезка лежит на одной окружности, второй – на другой.

8. В данный остроугольный треугольник вписать прямоугольник с наименьшей диагональю (одна сторона прямоугольника лежит на основании треугольника).

9. Даны три параллельные прямые. Провести через данную точку секущую так, чтобы разность отрезков между параллелями была равна заданной величине.

10. Построить трапецию $ABCD$, зная боковую сторону CD, угол между диагоналями, расстояние между параллельными сторонами и отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

11. Построить треугольник по b, c и m_a.

12. Построить четырёхугольник, зная его стороны и отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон.

13. Построить четырёхугольник, зная четыре его стороны и угол между двумя противоположными сторонами.

14. Построить биссектрису угла, вершина которого недоступна.

15. Даны две точки A и B и между ними две параллели m и n. Провести между этими параллелями в известном направлении отрезок CD так, чтобы сумма $AC + CD + BD$ была минимальной.

16. На окружности даны две точки A и B. В данном направлении провести хорду XY так, чтобы сумма хорд AX и BY была равна заданной величине.

17. Построить прямоугольник с данной стороной так, чтобы стороны его проходили через четыре заданные точки.

18. Даны две окружности и прямая. Провести секущую параллельно этой прямой, отсекающую в окружностях хорды, сумма которых равна заданному отрезку длины s.

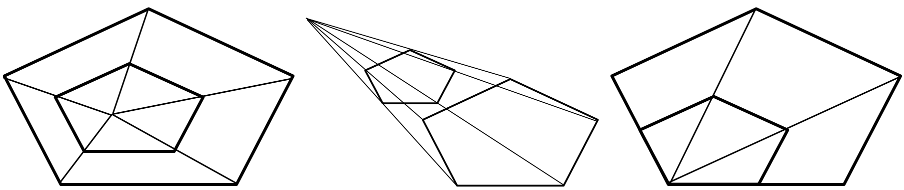
5.5. Метод подобия

Теоретический материал

Два многоугольника называются *подобными*, если равны их соответствующие углы, а соответствующие стороны пропорциональны.

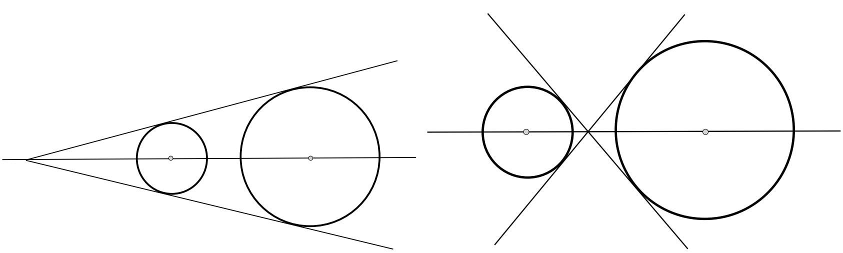
Если два подобных многоугольника расположены так, что их соответствующие стороны параллельны, то прямые, соединяющие вершины равных углов, пересекаются в одной точке. Эта точка называется *центром гомотетии* или *центром подобия*, а многоугольники называются *гомотетическими*. Отношение расстояний от центра подобия до соответствующих вершин гомотетических многоугольников равно коэффициенту их подобия.

Центр подобия может лежать внутри многоугольников, может – вне, может совпадать с одной из вершин или принадлежать одной из сторон.

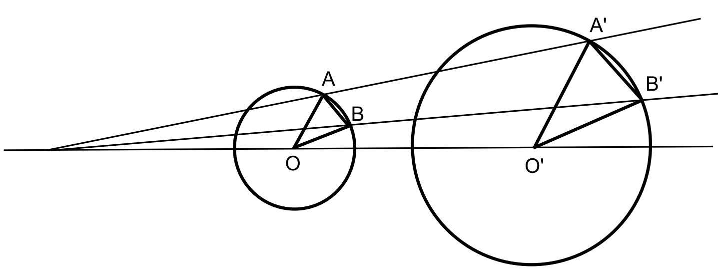


Центром подобия двух окружностей называется точка пересечения их общих внешних касательных. Центр подобия лежит на линии центров окружностей. Отношение расстояний от центра подобия до центров окружностей равно отношению радиусов.

Точка пересечения внутренних касательных к двум окружностям называется *обратным центром подобия*, который обладает аналогичными свойствами.



Любые две секущие, проведённые через центр подобия окружностей, пересекают окружности таким образом, что треугольники ΔABO и $\Delta A'B'O'$ будут гомотетическими (соответствующие радиусы и хорды параллельны).

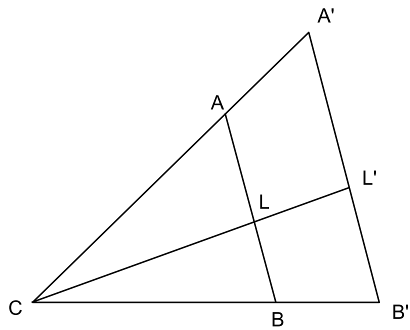


Метод подобия заключается в том, что сначала мы строим фигуру, ещё не удовлетворяющую всем условия задачи, но подобную искомой фигуре. Потом, используя остальные условия, преобразуем построенную фигуру в искомую.

Примеры решения задач

Пример 1. Построить треугольник по двум углам и биссектрисе третьего угла.

Решение. Пусть даны углы α, β и отрезок l_c. Построим произвольный треугольник $\Delta A'B'C$ с двумя данными углами.

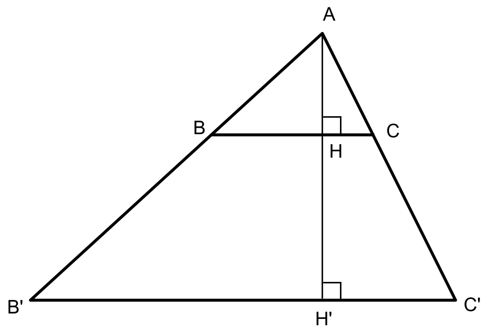


Проведём в нём биссектрису CL' и отложим на ней отрезок $CL = l_c$. Через точку L проведём прямую, параллельную $A'B'$. Углы и биссектриса полученного треугольника ΔABC равны заданным.

Пример 2. Построить треугольник по α, β и $a + h_a$.

Решение. Построим треугольник $AB'C'$ по двум углам α, β и высоте $h_{a'} = a + h_a$, проведённой к стороне $B'C' = a'$. Искомый треугольник ABC подобен треугольнику $AB'C'$ и

$$\frac{h_a}{h_{a'}} = \frac{a + h_a}{a' + h_{a'}}.$$

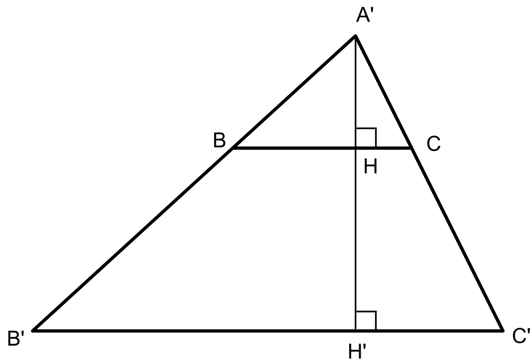


Следовательно, $h_a = \dfrac{h_{a'}^2}{a' + h_{a'}}$. Построим точку H на прямой AH' на расстоянии h_a от точки A и через точку H проведём прямую, параллельную прямой $B'C'$. Построенный треугольник ABC удовлетворяет заданным условиям.

П р и м е р 3. Построить треугольник по трём высотам h_a, h_b, h_c.

Р е ш е н и е. Возьмём произвольный отрезок p и построим $\Delta A'B'C'$ со сторонами $a' = \dfrac{p^2}{h_a}$, $b' = \dfrac{p^2}{h_b}$ и $c' = \dfrac{p^2}{h_c}$.

Пусть S – площадь искомого треугольника, тогда его стороны $a = \dfrac{2S}{h_a}$, $b = \dfrac{2S}{h_b}$, $c = \dfrac{2S}{h_c}$. Следовательно, искомый треугольник и $\Delta A'B'C'$ подобны.

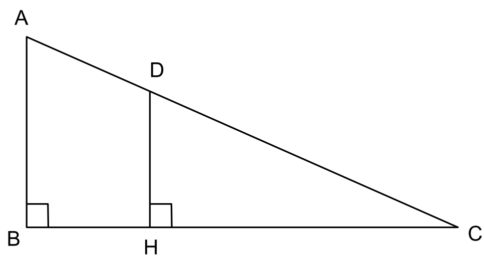


Для того чтобы построить искомый треугольник $A'BC$ с высотами h_a, h_b, h_c, достаточно в треугольнике $A'B'C'$ на прямой $A'H'$ отложить отрезок $A'H = h_a$ и через точку H провести прямую BC, параллельную $B'C'$.

Задача имеет решение, если существует треугольник, построенный из отрезков $\dfrac{1}{h_a}, \dfrac{1}{h_b}, \dfrac{1}{h_c}$.

П р и м е р 4. Дан отрезок длины $\sqrt{5}$. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длины 2.

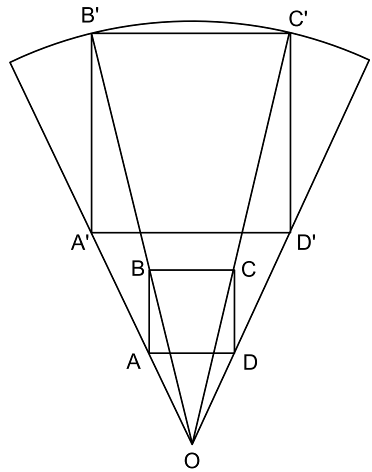
Р е ш е н и е. Построим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = a$, $BC = 2a$, где a – произвольный отрезок. Тогда гипотенуза $AC = a\sqrt{5}$.



На гипотенузе AC отложим отрезок CD, равный $\sqrt{5}$, и из точки D опустим перпендикуляр DH. Из подобия треугольников DHC и ABC получаем $\dfrac{CH}{BC} = \dfrac{DC}{AC}$, следовательно, $CH = 2$.

Пример 5. В круговой сектор вписать квадрат.

Решение. Пусть точка O – центр заданного сектора. Построим вспомогательный квадрат $ABCD$, две вершины которого (A и D) лежат на радиусах сектора на равном расстоянии от точки O. Проведём прямые OB и OC, они пересекут дугу сектора в точках B' и C'. Далее проведём $B'A' \perp B'C'$ и $C'D' \perp B'C'$. Четырёхугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ подобны (один получается из другого с помощью гомотетии с центром в точке O), следовательно, $A'B'C'D'$ также является квадратом, причём квадратом, вписанным в данный сектор.



Задачи

1. Построить треугольник по двум углам и высоте, проведенной из третьего угла.

2. Построить окружность, касающуюся сторон данного угла и проходящую через заданную внутри него точку.

3. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 5,\ BC = 6,\ AC = 7$. Построить точку $S \in BC$, точку $Q \in AC$ и точку $P \in AB$ так, чтобы треугольник SQP был равносторонним.

4. В данный треугольник вписать квадрат.

5. Построить треугольник по α, β, r.

6. Через данную точку провести прямую, отсекающую от двух данных окружностей хорды, пропорциональные их радиусам.

7. Дан угол ABC и точка M внутри него. Найти на стороне BC точку X, равноудалённую от AB и точки M.

8. Даны три точки $A,\ B$ и C, не лежащие на одной прямой. Провести прямую, пересекающую отрезок AC в точке X, а отрезок BC – в точке Y таким образом, что $AX = XY = YB$.

9. Даны две окружности и на них по точке. Провести две равные окружности, касающиеся в данных точках данных окружностей и между собой.

10. Через данную точку A провести к двум данным окружностям секущую, отсекающую в окружностях
    а) равные хорды;
    б) хорды, длины которых находятся в заданном соотношении.

11. Построить треугольник, зная β, l_b и $AD : DC$, где BD – высота.

12. Даны три концентрические окружности. Провести секущую ABC так, чтобы точки A, B и C лежали на разных окружностях и $AB = BC$.

13. Через две точки, лежащие вне данной окружности, провести окружность, касающуюся заданной окружности.

14. Даны две окружности с центрами в точках O и O'. Через центр их подобия S проведены касательная и секущая. Касательная касается окружностей в точках C и C' соответственно, секущая отсекает от окружностей хорды AB и $A'B'$. Доказать, что $CS \cdot C'S = AS \cdot B'S = BS \cdot A'S$.

15. Через данную точку A провести окружность, касающуюся двух данных окружностей.

5.6. Метод поворота и смешанные задачи

Теоретический материал

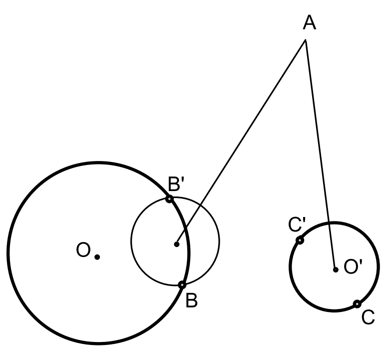
В этом параграфе рассматриваются задачи, решаемые с помощью поворота фигуры (или её части) относительно некоторой неподвижной точки плоскости (центра поворота).

Также приводятся задачи, не попадающие однозначно ни под один из предложенных ранее типов задач, и задачи, решение которых требует комбинирования нескольких методов.

Примеры решения задач

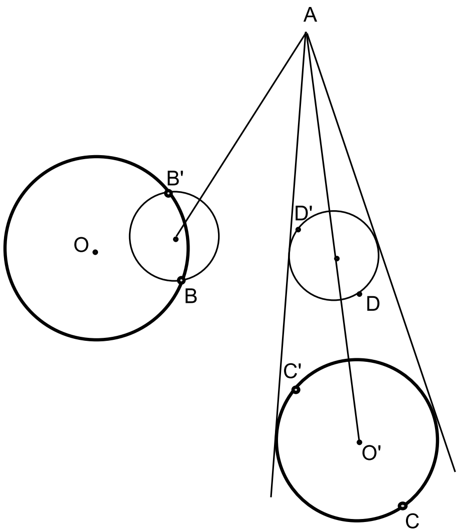
Пример 1. Даны две окружности и точка A. Построить равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) с данным углом при вершине A так, чтобы вершины B и C лежали на окружностях.

Решение. Пусть O,O' – центры данных окружностей и α – данный угол. Повернём окружность в центром O' относительно точки A на угол α. Обозначим через B и B' точки пересечения новой окружности с окружностью с центром в O и совершим обратный поворот новой окружности в окружность с центром в O'. Точки B и B' перейдут при этом в некоторые точки C и C'. Таким образом, мы получили два треугольника ΔABC и $\Delta AB'C'$, удовлетворяющих условиям задачи.



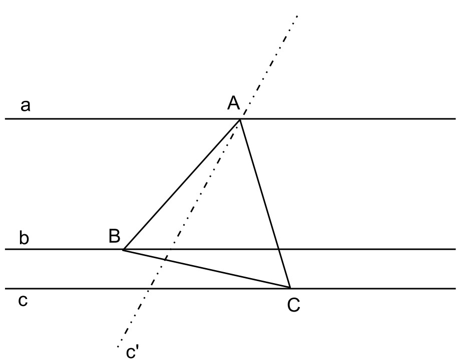
З а м е ч а н и е. Если точки B и B' совпадают, то задача имеет одно решение. Если построенная окружность не пересекает окружность с центром в точке O, то решений нет.

П р и м е р 2. Даны две окружности, треугольник и точка A. Построить треугольник ABC, подобный данному так, чтобы вершины B и C лежали на окружностях.



Р е ш е н и е. Пусть O,O' – центры данных окружностей и пусть дан треугольник с углом α и прилежащими сторонами b и c. Сначала для окружности с центром в O' построим гомотетичную окружность с центром гомотетии в точке A и коэффициентом гомотетии $k = c/b$. Эту окружность повернём относительно точки A на угол α и, как и в предыдущем примере, получим точки B и B'. Совершив обратный поворот, получим точки D и D', а совершив обратную гомотетию, найдём искомые C и C'.

П р и м е р 3. Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежат на трёх данных параллельных прямых.



Решение. Пусть a, b, c – три данные параллельные прямые.

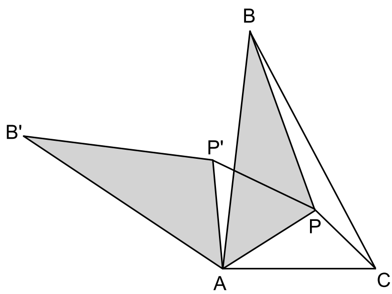
Рассмотрим произвольную точку $B \in b$ и повернём относительно неё прямую c на 60°, получим прямую c' и точку $A \in a$. При обратном повороте A перейдёт в $C \in c$. Треугольник ΔABC равносторонний, так как по построению $BA = BC$ и $\angle B = 60^\circ$.

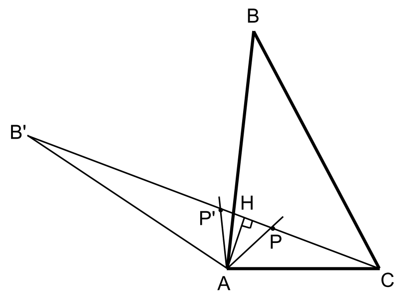
Пример 4. В треугольнике найти точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

Решение. Рассмотрим произвольную точку P внутри треугольника ABC. Повернем ΔABP относительно точки A на 60°, получим $\Delta AB'P'$. При этом $B'P' = BP$ и $PP' = AP$ (так как $\Delta APP'$ равносторонний), следовательно,

$$BP + AP + CP = B'P' + P'P + PC,$$

то есть сумма расстояний от точки P до вершин треугольника равна длине ломаной $B'P'PC \geq B'C$. Минимальное значение длины ломаной равно $B'C$ при $P, P' \in B'C$.



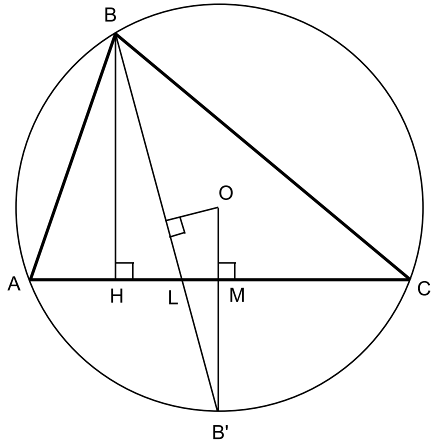


Следовательно, для построения искомой точки P надо сначала построить точку B' (повернуть отрезок AB относительно A на 60°). Точки P и P' должны быть расположены на отрезке $B'C$ таким образом, чтобы треугольник $\Delta APP'$ был равносторонним, поэтому должны лежать на лучах, отложенных от перпендикуляра AH под углом 30°.

Замечание. Если один из углов исходного треугольника больше 120°, то луч, отложенный от AH под углом 30°, пересекает отрезок $B'C$ в точке, не лежащей внутри треугольника. В этом случае искомая точка P совпадает с вершиной тупого угла.

Пример 5. Построить треугольник по заданным отрезкам медианы, биссектрисы и высоты, проведённым из одной вершины.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC с данными высотой BH, биссектрисой BL и медианой BM. Продолжим биссектрису BL до пересечения с описанной окружностью в точке B' (так как $\angle ABB' = \angle CBB'$, то B' – середина дуги AC). Теперь через точку M проведём перпендикуляр к хорде AC. Точка B' (середина дуги) и точка O (центр описанной окружности) принадлежат этому серединному перпендикуляру.



Таким образом, для того чтобы построить ΔABC, сначала надо построить треугольник BHM (по заданным гипотенузе BM и катету BH), потом на отрезке MH отметить точку L (биссектриса всегда лежит между медианой и высотой) и найти точку B' как точку пересечения перпендикуляра к прямой HM в точке M и прямой BL.

Центр окружности O есть точка пересечения прямой MB' и серединного перпендикуляра к хорде BB'. Вершины A и C есть точки пересечения этой окружности с прямой HM.

Задачи

1. Даны три параллельные прямые. Построить квадрат, три вершины которого лежат на этих прямых.

2. Даны прямая и окружность. Построить окружность, касающуюся данной окружности и прямой в данной точке.

3. Даны две окружности. Провести к ним через заданную точку две секущие, пересекающиеся под заданным углом и отсекающие
а) равные хорды;
б) хорды, длины которых находятся в заданном отношении.

4. В данный параллелограмм $ABCD$ вписать равнобедренный треугольник APQ $(AP = AQ)$ с данным углом при вершине A.

5. Построить четырёхугольник, вписываемый в окружность, зная его стороны a, b, c и d.

6. Провести через заданную точку прямую, отсекающую от данной окружности хорду заданной длины.

7. При помощи циркуля и линейки построить окружность, проходящую через две данные точки и отсекающую от данной окружности хорду данной длины.

8. Провести через точку B пересечения двух окружностей прямую, высекающую из окружностей равные хорды.

9. Через точку A внутри угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник минимального периметра.

10. Даны три точки. Построить окружности, попарно касающиеся в этих точках.

11. Построить треугольник, зная a, h_a и $\angle(m_b, c)$.

12. Через вершину выпуклого четырёхугольника провести прямую, которая делит его площадь пополам.

6. Стереометрия

6.1. Введение

Приведём основные стереометрические определения, связанные с взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве.

Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

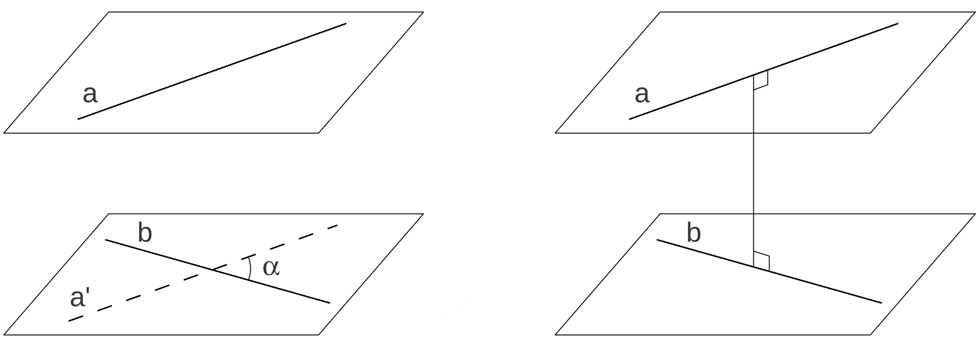
Скрещивающиеся прямые

Прямые, которые не лежат в одной плоскости и не пересекаются называются *скрещивающимися.*

Угол между скрещивающимися прямыми определяется как угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку.

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, концы которого лежат на этих прямых, перпендикулярный к ним (такой отрезок существует и притом только один).

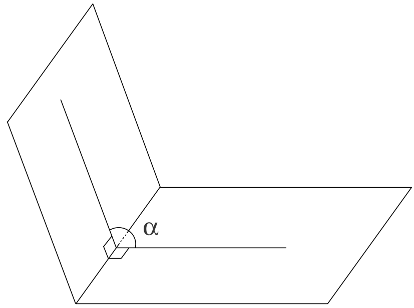
Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра (оно же является и расстоянием между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые).



Двугранный угол

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями (*гранями*) с общей ограничивающей их прямой (*ребром двугранного угла*).

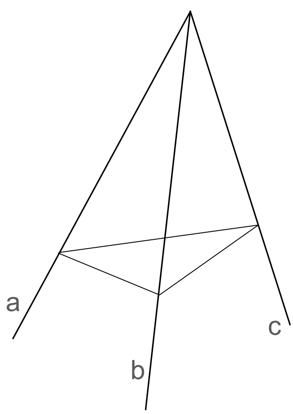
Двугранный угол измеряется своим *линейным углом*, то есть углом между перпендикулярами к ребру, восстановленными в обеих плоскостях из одной точки.

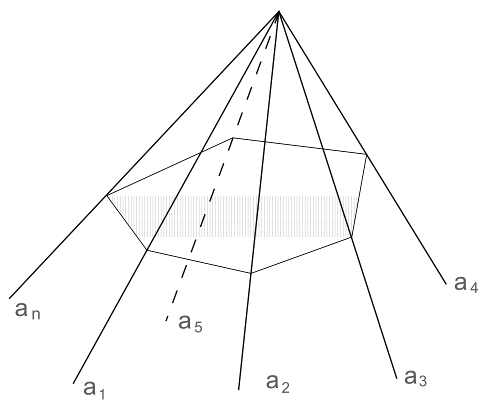


Многогранный угол

Трехгранным углом (abc) называется фигура, составленная из трех плоских углов (ab), (bc) и (ac), не лежащих в одной плоскости. Эти углы называются *гранями трехгранного угла*, а их стороны – *ребрами*. Общая вершина плоских углов называется *вершиной трехгранного угла*. Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называются *двугранными углами трехгранного угла*.

Аналогичным образом определяется понятие n*-гранного угла* $(a_1a_2...a_n)$ – как фигуры, составленной из n плоских углов (a_1a_2), (a_3a_3),...,(a_na_1).





Многогранный угол называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону каждой из ограничивающих его плоскостей.

З а м е ч а н и е 1. Каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.

З а м е ч а н и е 2. Сечением выпуклого n-гранного угла плоскостью, не проходящей через вершину, является выпуклый n-угольник.

З а м е ч а н и е 3. В выпуклом многогранном угле сумма плоских углов не превосходит 360°.

Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве

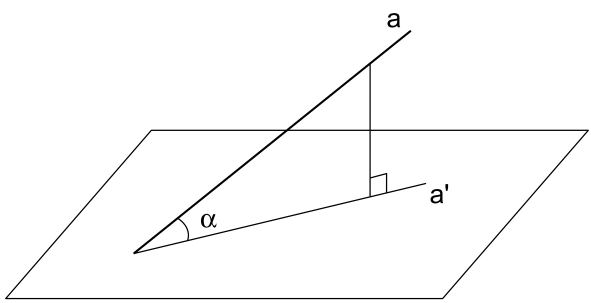
Прямая *перпендикулярна* плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости.

Две плоскости *перпендикулярны*, если соответствующий двугранный угол является прямым.

Наклонная

Наклонной, проведенной к данной плоскости, называется прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная ей. Точка пересечения наклонной и плоскости называется *основанием наклонной.*

Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.



Проекцией наклонной на плоскость называется прямая, состоящая из проекций всех точек наклонной на данную плоскость.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и её проекцией.

Теоремы о параллельности прямых и плоскостей

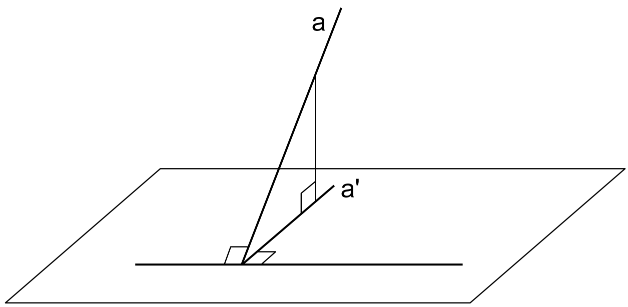
- Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны друг другу (*транзитивность параллельности прямых*).
- Ели прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости (*признак параллельности прямой и плоскости*).
- Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (*признак параллельности плоскостей*).
- Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны (*теорема о параллельных плоскостях*).
- Если плоскость содержит прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту другую плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна первой прямой.

Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей

- Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*).

- Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны (*признак перпендикулярности плоскостей*).

- Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость тогда и только тогда, когда эта прямая перпендикулярна самой наклонной (*теорема о трех перпендикулярах*).



- Два различных перпендикуляра к одной и той же плоскости параллельны.

- Две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

- Перпендикуляр к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящий через линию пересечения этих плоскостей, целиком лежит во второй плоскости.

З а м е ч а н и е. Последняя теорема имеет важное следствие: если каждая из двух непараллельных плоскостей перпендикулярна третьей плоскости, то прямая пересечения этих двух плоскостей также перпендикулярна этой третьей плоскости.

6.2. Многогранники

Теоретический материал

Многогранником называется тело, ограниченное в пространстве конечным числом плоскостей.

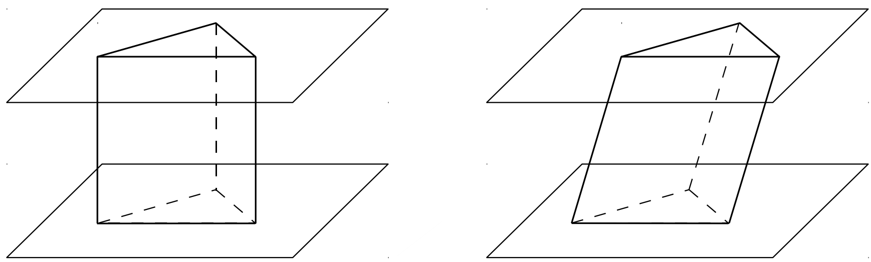
Многогранник называется *выпуклым*[2], если он лежит по одну сторону от каждой из ограничивающих его плоскостей.

Общая часть поверхности многогранника и ограничивающей его плоскости называется *гранью многогранника*[3], стороны граней – *ребрами многогранника*, а вершины – *вершинами многогранника.*

Основные определения, связанные с призмами

N-угольной призмой называется многогранник, две грани которого – равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях (*основания призмы*), а остальные грани – параллелограммы (*боковые грани*).

Призма называется *прямой*, если её боковые ребра перпендикулярны основаниям; в противном случае призма называется *наклонной.*



Прямая призма называется *правильной*, если её основаниями являются правильные многоугольники.

Призма, основанием которой является параллелограмм, называется *параллелепипедом.*

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом.*

Прямоугольный параллелепипед с равными ребрами называется *кубом.*

Высотой призмы называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

Основные утверждения, связанные с призмами

Объем произвольной призмы: $V = SH$, где S – площадь основания, H – высота призмы.

[2]В дальнейшем мы будем рассматривать только выпуклые многогранники.

[3]Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

Объем прямоугольного параллелепипеда: $V = abc$, где a, b, c – длины трех ребер, выходящих из одной вершины.

Объем куба: $V = a^3$, где a – длина ребра куба.

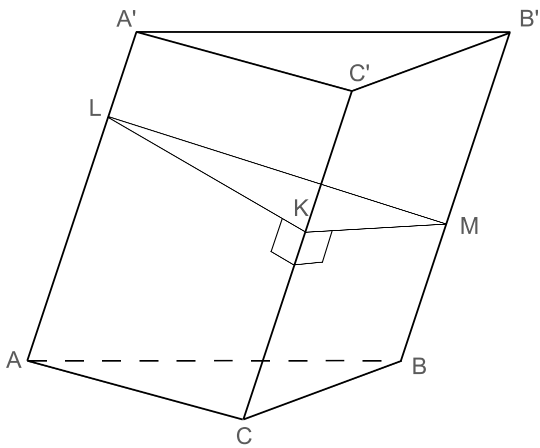
Свойства параллелепипеда:

- противолежащие грани попарно равны и параллельны;
- все четыре диагонали пересекаются в одной точке (центре симметрии параллелепипеда) и делятся этой точкой пополам.

В отличие от прямой призмы, ребра наклонной призмы не перпендикулярны основаниям, поэтому иногда бывает удобно провести сечение призмы плоскостью, перпендикулярной ребрам. В этом случае справедливы следующие формулы.

Объем наклонной призмы: $V = S_{\text{п}} L$, где $S_{\text{п}}$ – площадь перпендикулярного сечения, L – боковое ребро призмы.

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = P_{\text{п}} L$, где $P_{\text{п}}$ – периметр перпендикулярного сечения.



З а м е ч а н и е. Приведенные формулы справедливы и для прямой призмы, причем в качестве перпендикулярного сечения можно использовать основание призмы.

Основные определения, связанные с пирамидами

N-угольной пирамидой называется многогранник, одной гранью которого является n-угольник (*основание пирамиды*), остальными – треугольники (*боковые грани*), у которых только одна общая вершина (*вершина пирамиды*).

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания пирамиды.

Пирамида называется *правильной*, если её основание – правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.

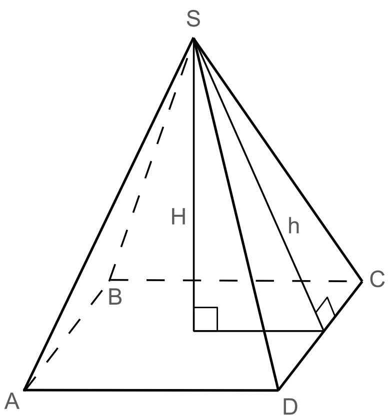
Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из её вершины, называется *апофемой.*

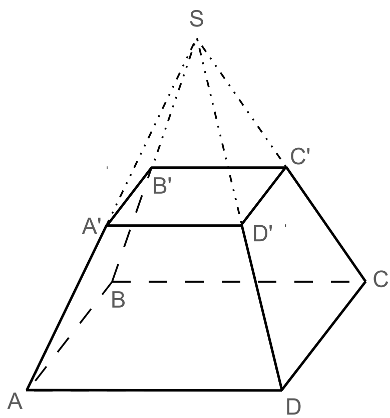
Усеченной пирамидой называется многогранник, отсекаемый от пирамиды плоскостью, параллельной основанию, и расположенный между плоскостью сечения и плоскостью основания исходной пирамиды.

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она является частью правильной пирамиды.

Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

Апофемой правильной усеченной пирамиды называется высота боковой грани (трапеции).





Основные утверждения, связанные с пирамидами

Объем произвольной пирамиды: $V = \dfrac{1}{3}SH,$
где S – площадь основания, H – высота пирамиды.

Объем произвольной усеченной пирамиды: $V = \dfrac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right),$
где S_1 и S_2 – площади оснований, H – высота пирамиды.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды: $S_{\text{бок}} = \dfrac{1}{2}Pl,$
где P – периметр основания, l – апофема.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды:
$S_{\text{бок}} = \dfrac{1}{2}(P_1 + P_2)\,l,$ где P_1 и P_2 – периметры оснований, l – апофема.

Основные сведения о тетраэдрах

Тетраэдром называется треугольная пирамида.

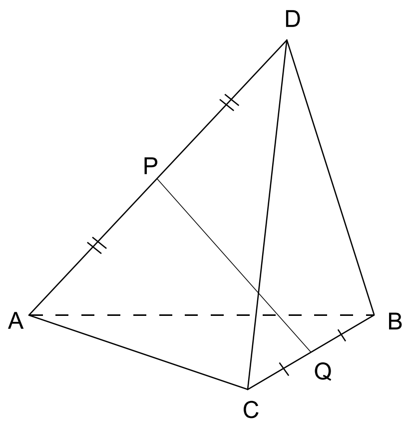
Тетраэдр называется *правильным*, если все его ребра равны.

Тетраэдр называется *прямоугольным*, если все три его плоских угла при какой-либо его вершине прямые.

Два ребра, имеющие в качестве одного из своих концов общую вершину, называются *смежными*. Два не смежных ребра называются противоположными (или *скрещивающимися*).

Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, называемой *центроидом*, и делятся этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершины.

Бимедианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий середины противоположных ребер. Бимедианы пересекаются в одной точке (центроиде тетраэдра) и делятся этой точкой пополам.



Высотой тетраэдра называется перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположную грань. Если высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке, то тетраэдр называется *ортоцентрическим*.

Приведём также некоторые полезные сведения относительно расположения основания высоты тетраэдра.

- Основание высоты тетраэдра является центром окружности, описанной около основания тогда и только тогда, когда длины всех боковых ребер равны между собой (или все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом).

- Основание высоты тетраэдра является центром окружности, вписанной в основание тогда и только тогда, когда все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом.

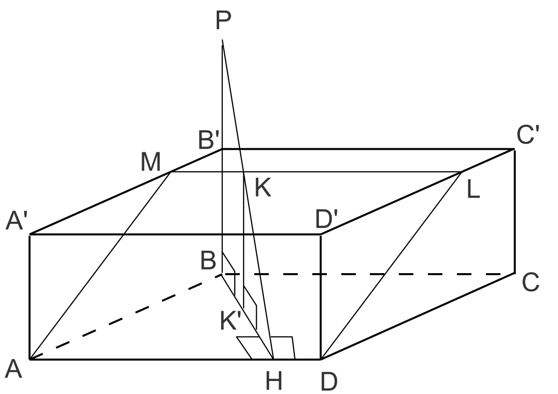
З а м е ч а н и е. Приведённые утверждения справедливы и для произвольной пирамиды.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. Высота прямой призмы 1м, её основанием служит ромб со стороной 2м и острым углом 30°. Через сторону основания проведена секущая призму плоскость, наклоненная к плоскости основания под углом 60°. Найти площадь сечения.

Р е ш е н и е. Рассмотрим прямую призму $ABCDA'B'C'D'$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ с углом $\angle BAD = 30^\circ$ и стороной, равной 2м. Высота ромба $BH = AB \cdot \sin 30^\circ = 1$. Отложим на прямой BB' отрезок $BP = \sqrt{3}$, тогда в прямоугольном треугольнике ΔBHP угол $\angle BHP = 60^\circ$.

Заметим, что отрезок BH является проекцией наклонной HP и $BH \perp AD$, следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах $HP \perp AD$. Это значит, что плоскость, проходящая через прямые AD и HP, наклонена к плоскости основания под углом 60°. Построим сечение призмы этой плоскостью.



Так как секущая плоскость должна пересекать две параллельные плоскости по параллельным прямым, то искомая плоскость пересекает верхнее основание призмы по отрезку $ML \parallel AD \parallel A'D'$.

Из параллельности противолежащих сторон четырёхугольника $A'D'LM$ следует, что он является параллелограммом и $ML = A'D' = 2$. А из параллельности и равенства отрезков ML и AD следует, что искомое сечение $ADLM$ также является параллелограммом.

Для того чтобы найти его площадь, нам необходимо вычислить длину высоты KH, где K есть точка пересечения отрезков ML и HP. Опустим из точки K перпендикуляр на отрезок BH и рассмотрим точку K' – основание этого перпендикуляра. Из прямоугольного треугольника $K'KH$ получим:

$$\frac{K'K}{KH} = \sin 60^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{KH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad KH = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

В результате искомая площадь равна

$$S_{ADLM} = AD \cdot KH = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

О т в е т. $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Задачи

1. В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d, образует с боковыми гранями углы β и γ. Найти объём параллелепипеда.

2. Объём правильной треугольной призмы равен V. Угол между диагоналями двух боковых граней, проведёнными из одной вершины, равен α. Определить сторону основания призмы.

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$ и $AA' = 2$. Найдите угол между прямой AC' и прямой, проходящей через середины ребер AA' и $B'C'$.

4. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, в нём через вершину B' проведена диагональ. Найти отношение площади сечения этого куба плоскостью, перпендикулярной указанной диагонали и проходящей через её середину, к площади его полной поверхности.

5. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Найти высоту пирамиды.

6. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды?

7. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD. На отрезке SD взята точка K так, что $SK : KD = 1 : 2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\dfrac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$. Найти объём пирамиды.

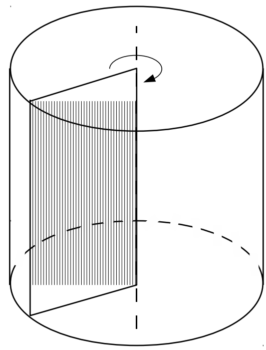
8. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

6.3. Тела вращения

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на вычисление элементов цилиндра, конуса, шара и задачи, связанные с описанными и вписанными цилиндрами, конусами, шарами. Приведём основные определения и теоремы.

Основные определения, связанные с цилиндром



Цилиндром (точнее, прямым круговым цилиндром) называется фигура, полученная вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Поверхность цилиндра состоит из *оснований цилиндра* – двух равных кругов, лежащих в параллельных плоскостях, и *боковой поверхности*.

Отрезок, с одним концом на окружности одного основания, с другим концом – на окружности другого основания, перпендикулярный плоскостям оснований, называется *образующей цилиндра*.

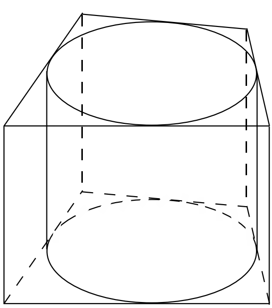
Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований.

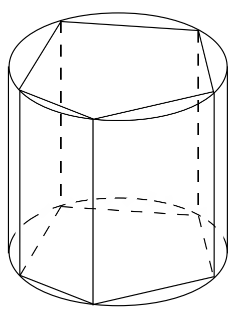
Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось, называется *осевым сечением*.

Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проходящему через эту образующую, называется *касательной плоскостью цилиндра*.

Цилиндр называется *вписанным в призму*, если его основания вписаны в основания призмы, и грани призмы касаются его боковой поверхности. В этом случае призма называется *описанной около цилиндра* (левый рисунок).

Цилиндр называется *описанным около призмы*, если его основания описаны около оснований призмы и ребра призмы являются его образующими. В этом случае призма называется *вписанной в цилиндр* (правый рисунок).





Основные утверждения, связанные с цилиндром

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$.

Объем цилиндра: $V = \pi R^2 H$.

Здесь R – радиус основания цилиндра, H – высота цилиндра.

Напомним также, что

- сечением цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, является прямоугольник;
- плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

Основные определения, связанные с конусом

Конусом (точнее, прямым круговым конусом) называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.

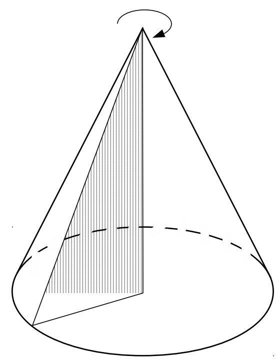
Поверхность конуса состоит из *основания конуса* (круга) и *боковой поверхности* (кругового сектора).

Отрезок с одним концом в вершине конуса, с другим концом – на окружности основания называется *образующей конуса.*

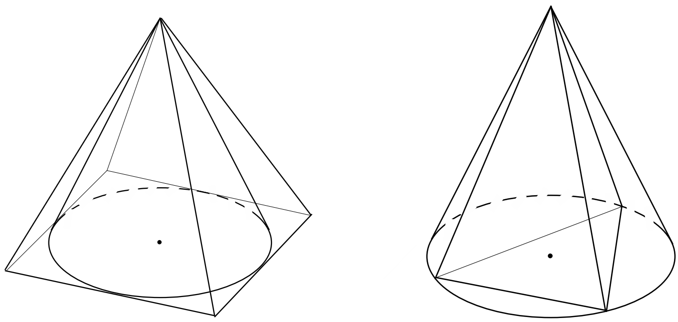
Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания. Основание высоты прямого кругового конуса совпадает с центром основания.

Осью конуса называется прямая, проходящая через вершину конуса и центр основания. Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось, называется *осевым сечением.*

Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная осевому сечению, проходящему через эту образующую, называется *касательной плоскостью конуса.*



Конус называется *вписанным в пирамиду*, если его основание вписано в основание пирамиды и грани пирамиды касаются его боковой поверхности. В этом случае пирамида называется *описанной около конуса* (левый рисунок).



Конус называется *описанным около пирамиды*, если его основание описано около основания пирамиды и боковые ребра пирамиды являются его образующими. В этом случае пирамида называется *вписанной в конус* (правый рисунок).

Плоскость, перпендикулярная оси конуса, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется *усеченным конусом.*

Основные утверждения, связанные с конусом

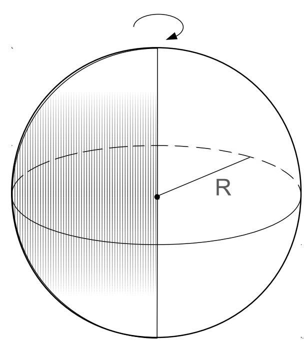
Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = \pi RL.$
Объем конуса: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H.$
Здесь R – радиус основания, L – образующая, H – высота конуса.

Напомним также, что

- сечением конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, является равнобедренный треугольник;
- плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает его боковую поверхность по окружности.

Основные определения, связанные с шаром

Шаром называется тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся от данной точки (*центр шара*) на расстоянии, не большем данного (*радиус шара*).



З а м е ч а н и е. Шар, так же как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра.

Граница шара называется *шаровой поверхностью* или *сферой.*

Плоскость, проходящая через точку, лежащую на сфере, и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной плоскостью.*

Прямая, проходящая через точку сферы перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной прямой* или просто *касательной.*

Многогранник называется *вписанным в шар*, если все его вершины лежат на поверхности шара. В этом случае шар называется *описанным около многогранника.*

Многогранник называется *описанным около шара*, если все его грани касаются шара. В этом случае шар называется *вписанным в многогранник.*

Основные теоремы, связанные с шаром

Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку касания. Через любую точку сферы проходит бесконечное число касательных, причем все они лежат в касательной плоскости шара.

Любая диаметральная плоскость (плоскость, проходящая через диаметр) является плоскостью симметрии шара. Центр шара является его центром симметрии.

Площадь поверхности сферы: $S = 4\pi R^2$, где R – радиус сферы.

Объем шара: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Центром шара, вписанного в многогранник, является точка пересечения плоскостей, делящих двугранные углы многогранника пополам.

Если многогранник вписан в шар, то вокруг каждой из его граней можно описать окружность. Центр описанного шара есть точка пересечения перпендикуляров к граням, проведенных через центры этих окружностей.

Для каждого тетраэдра существует вписанный и описанный шар, причем

$$V = \frac{1}{3}Sr,$$

где V – объем тетраэдра, S – площадь его полной поверхности, r – радиус вписанного шара.

Вокруг любой правильной пирамиды можно описать шар, причем центр описанного шара будет лежать на высоте пирамиды.

В любую правильную пирамиду можно вписать шар. Причем центр вписанного шара будет лежать на высоте пирамиды, а точки касания шара с боковыми гранями – на соответствующих апофемах.

Вокруг любой правильной призмы можно описать шар, причем центром этого шара будет середина высоты, проведенной через центры оснований призмы.

Сечением шара плоскостью является круг. Его центр есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Линия пересечения двух сфер есть окружность.

Части шара

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

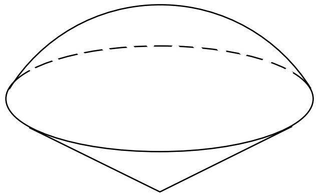
Шаровым слоем называется часть шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар.

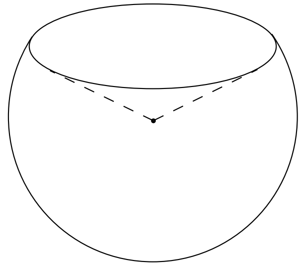
Шаровым сектором называется тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, который имеет общее основание с сегментом и вершину в центре шара.

З а м е ч а н и е. Шаровой сектор получается из шарового сегмента и конуса следующим образом. Если шаровой сегмент меньше полушара, то он дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основанием является основание сегмента. Если же сегмент больше полушара, то конус из него удаляется.

Основные формулы для шарового сегмента:

- площадь боковой поверхности: $S = 2\pi RH$;





- объем: $V = \pi H^2 \left(R - \dfrac{H}{3}\right)$,
  где R – радиус шара, H – высота сегмента.

Основные формулы для шарового слоя:

- площадь боковой поверхности: $S = 2\pi RH$;
- объем: $V = \dfrac{\pi H}{6}\left(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2\right)$,
  где R – радиус шара, R_1 и R_2 – радиусы оснований, H – высота слоя.

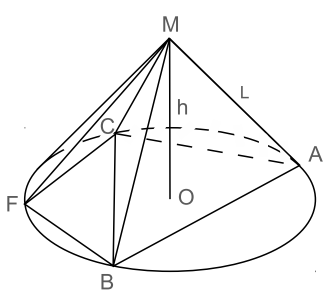
Основные формулы для шарового сектора:

- площадь боковой поверхности: $S = 2\pi RH$;
- объем: $V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 H$,
  где R – радиус шара, H – высота сектора.

Примеры решения задач

Пример 1. Дан конус с вершиной M, радиус основания которого равен 6. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы BMA, AMC, CMB равны 90° каждый. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, так, что объём пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости MAB.

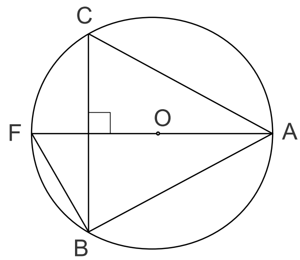
Решение. Рассмотрим конус с радиусом основания $R = 6$, высотой h и наклонной l. Пирамида $ABCM$ вписана в конус, следовательно, её боковые рёбра равны l.



Так как по условию задачи углы при вершине M равны 90° каждый, то боковые грани являются равными равнобедренными прямоугольными треугольниками. Следовательно, рёбра основания пирамиды $ABCM$ равны между собой и треугольник ABC – равносторонний.

Определим положение точки F на окружности основания конуса из условия максимальности объёма пирамиды $MABFC$:

$$V_{MABFC} = \frac{h}{3} \cdot S_{ABFC} = \frac{h}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AF \cdot \sin\angle(BC, AF) \leq \frac{h}{6} \cdot BC \cdot 2R.$$



Максимум достигается в случае, когда AF является диаметром и угол между диагоналями четырёхугольника $ABFC$ – прямой.

Для того чтобы найти искомое расстояние от точки F до плоскости MAB, подсчитаем объём тетраэдра $ABFM$ двумя способами. С одной стороны,

$$V_{ABFM} = \frac{h}{3} \cdot S_{\Delta ABF} = \frac{\sqrt{l^2 - R^2}}{3} \cdot \frac{BF \cdot AB}{2},$$

где отрезки $BF = R$, $AB = \sqrt{3}R$ (как катеты прямоугольного треугольника ABF с острым углом $\angle AFB = 60^\circ$ и гипотенузой $AF = 2R$), а образующая конуса $l = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = R\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Следовательно,

$$V_{ABFM} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}R^2 - R^2}}{3} \cdot \frac{R \cdot \sqrt{3}R}{2} = \frac{R^3}{2\sqrt{6}} = 18\sqrt{6}.$$

С другой стороны,

$$V_{ABFM} = \frac{x}{3} \cdot S_{\Delta MAB},$$

где $S_{\Delta MAB} = \dfrac{l^2}{2} = \dfrac{3R^2}{4} = 27$, а x – искомое расстояние от точки F до плоскости MAB, следовательно,

$$V_{ABFM} = \frac{x}{3} \cdot 27 = 18\sqrt{6} \quad \Longrightarrow \quad x = 2\sqrt{6}.$$

О т в е т. $2\sqrt{6}$.

Задачи

1. Плоское сечение SAB, проходящее через вершину S прямого кругового конуса, имеет площадь $60\,\text{см}^2$. Точки A и B, лежащие на окружности основания конуса, делят её длину в отношении $1:5$. Найти объём конуса, если угол $\angle SAB$ равен $\arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)$.

2. Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной 6. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 4. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

3. Угол в осевом сечении прямого кругового конуса равен α. Через его вершину под углом β к оси конуса ($\beta < \dfrac{\alpha}{2}$) проведена плоскость. Найти угол x между двумя образующими конуса, по которым проведенная плоскость пересекает его поверхность.

4. Ребро куба равно a. Найти объем прямого кругового цилиндра, вписанного в куб так, что осью его является диагональ l куба, а окружности оснований касаются тех диагоналей граней куба, которые не имеют общих точек с диагональю l куба.

5. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

6. В треугольной пирамиде длины двух непересекающихся рёбер равны 12 и 4, а остальные рёбра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Найти расстояние от центра сферы до ребра длины 12.

7. Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы радиуса 4 с центром в точке O. Найти угол BAC, если известно, что площадь треугольника OBC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

6.4. Комбинации тел

Задачи

1. В сферу радиуса R вписан прямой круговой цилиндр. Найти наибольшее значение площади боковой поверхности цилиндра и отношение его высоты к радиусу сферы в этом случае.

2. В прямой круговой конус вписан шар. Отношение объёма конуса и шара равно двум. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

3. В правильную треугольную пирамиду помещены три шара так, что первый шар касается всех боковых граней пирамиды и второго шара, второй шар касается боковых граней пирамиды и третьего шара, а третий шар касается боковых граней, основания пирамиды и второго шара. Какую долю объёма пирамиды занимают три шара, если её боковые грани наклонены к основанию под углом α?

4. Сфера радиуса 2 касается плоскости в точке A. В той же плоскости лежит основание конуса. Прямая, проходящая через центр основания конуса (точку C) и точку сферы, диаметрально противоположную точке A, проходит через точку M. Точка M является точкой касания сферы и конуса (их единственная общая точка). Найдите высоту конуса, если $AC = 1$.

5. Основанием правильной пирамиды является равносторонний треугольник со стороной a, а высота, опущенная на это основание, равна H, причём все шесть рёбер пирамиды касаются некоторой сферы. Найти радиус этой сферы.

6. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD. Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB. Площадь боковой поверхности конуса равна $9\pi\sqrt{3}$. Найдите длину ребра тетраэдра.

7. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $DC = 9$, ребро $DB = AD$, а ребро AC перпендикулярно к грани ABD. Сфера радиуса 2 касается грани ABC, ребра DC, а также грани ABD в точке пересечения её медиан. Найти объём пирамиды.

8. Отрезок PN – диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN, если T – середина ребра ML.

Часть II. Указания и решения

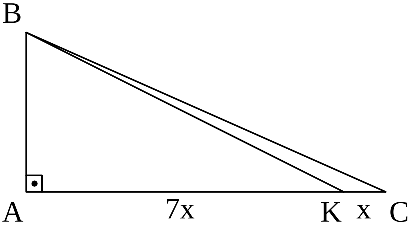
1. Треугольники

1.1. Прямоугольные треугольники

Задача 1.

В треугольнике ABC угол BAC прямой, $|AB| = 1, |BC| = 3$. Точка K делит сторону AC в отношении 7:1, считая от точки A. Что больше, $|AC|$ или $|BK|$?

Идея. Воспользоваться теоремой Пифагора.
Указание. Вычислить длину катета AC, затем найти длины отрезков AK и BK.



Решение. Сначала с помощью теоремы Пифагора определим длину катета AC:

$$|AC|^2 + |AB|^2 = |BC|^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |AC|^2 + 1 = 9 \quad \Longrightarrow \quad |AC| = 2\sqrt{2}.$$

Теперь вычислим длины отрезков AK и BK:

$$|AK| = \frac{7}{8} \cdot |AC| = \frac{7\sqrt{2}}{4}; \quad |BK| = \sqrt{|AK|^2 + |AB|^2} = \sqrt{\frac{49}{8} + 1} = \sqrt{\frac{57}{8}}.$$

Наконец, сравним найденные длины:

$$\begin{array}{rcl} |AC| & \vee & |BK| \\ 2\sqrt{2} & \vee & \sqrt{\dfrac{57}{8}} \\ 8 & \vee & \dfrac{57}{8} \\ 64 & \vee & 57. \end{array}$$

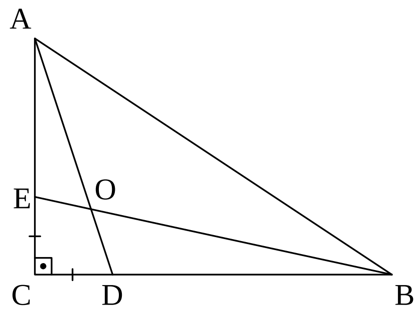
Так как $64 > 57$, то $|AC| > |BK|$.

Ответ. $|AC| > |BK|$.

Задача 2.

В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $|CD| = |CE| = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE. Площадь треугольника BOD больше площади треугольника AOE на $0,5$. Известно, что $|AD| = \sqrt{10}$. Найдите длину гипотенузы AB.

Идея. Сравнить площади треугольников ACD и BCE.



Указание. Применить теорему Пифагора для вычисления длины отрезка AC, затем, рассмотрев треугольники ACD и BCE, получить условие, связывающее их площади.

Указание. Воспользоваться тем, что площадь треугольника ACD равна сумме площадей треугольника AOE и четырёхугольника $CDOE$, а площадь треугольника BCE равна сумме площадей треугольника BOD и четырёхугольника $CDOE$. Применить формулу площади прямоугольного треугольника.

Решение. Сначала найдём длину катета AC:

$$|AC|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 \quad\Longrightarrow\quad |AC|^2 + 1 = 10 \quad\Longrightarrow\quad |AC| = 3.$$

Заметим, что в условии задачи дано соотношение на площади треугольников BOD и AOE, которым достаточно трудно воспользоваться напрямую из-за того, что в этих треугольниках нам известно слишком мало элементов. Тем не менее, с его помощью мы можем получить условие, связывающее площади удобных для нас треугольников ACD и BCE.

$$S_{\triangle AOE} = S_{\triangle BOD} - \frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad S_{\triangle AOE} + S_{CDOE} = S_{\triangle BOD} + S_{CDOE} - \frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCE} - \frac{1}{2}.$$

Записывая формулы для площадей треугольников ACD и BCE, получаем

$$\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|CD| = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|CE| - \frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\cdot|BC| - \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad |BC| = 4.$$

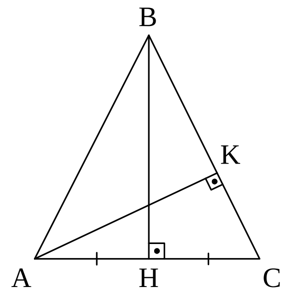
Наконец, воспользуемся теоремой Пифагора в треугольнике ABC:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 \quad\Longrightarrow\quad 9 + 16 = |AB|^2 \quad\Longrightarrow\quad |AB| = 5.$$

Ответ. $|AB| = 5$.

Задача 3.

В равнобедренном треугольнике длины высот, опущенных на основание и на боковую сторону, равны соответственно m и n. Найдите длины сторон этого треугольника.



Идея. Воспользоваться формулой площади треугольника.

Указание. Применить в исходном треугольнике формулу площади треугольника через высоту и основание, записать теорему Пифагора для одного из треугольников, на которые исходный треугольник разделен высотой, проведённой к основанию.

Решение. Обозначим вершины треугольника из условия задачи буквами A, B и C, будем полагать, что AB и BC – его боковые стороны. Их длины обозначим за x, а длину основания AC за $2y$. Основания высот, опущенных на стороны AC и BC, обозначим буквами H и K соответственно. Известно, что высота BH, проведённая к основанию, является также и медианой треугольника ABC, поэтому $|AH| = |HC| = y$.

Сначала записываем теорему Пифагора для треугольника BHC:

$$|BH|^2 + |HC|^2 = |BC|^2 \quad \Longrightarrow \quad y^2 + m^2 = x^2.$$

Далее два раза выразим площадь треугольника ABC:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BH| = \frac{1}{2} \cdot |AK| \cdot |BC| \quad \Longrightarrow \quad 2my = nx.$$

Решаем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + m^2 = x^2, \\ 2my = nx \end{cases} \iff \begin{cases} m^2 = \dfrac{4m^2}{n^2}y^2 - y^2, \\ x = \dfrac{2m}{n} \cdot y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}, \\ x = \dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}. \end{cases}$$

Осталось не забыть, что длина основания равна $2y$ и выписать ответ.

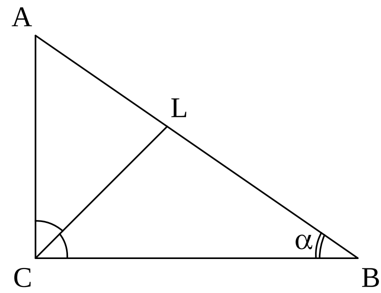
Ответ. Длины боковых сторон равны $\dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$, длина основания равна $\dfrac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$.

Задача 4.

В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна c, а величина одного из его острых углов равна α. Найдите длину биссектрисы прямого угла этого треугольника.

Идея. Рассмотреть один из двух треугольников, на которые биссектриса делит исходный.

Указание. Выразить длины катетов исходного треугольника, воспользоваться теоремой синусов.



Решение. Обозначим вершины исходного треугольника буквами A, B и C, биссектрису прямого угла обозначим как CL, будем считать, что $\widehat{ABC} = \alpha$. Тогда ясно, что

$$|BC| = c\cos\alpha,\ \widehat{ACL} = \widehat{BCL} = \frac{\pi}{4},$$

$$\widehat{CLB} = \pi - \widehat{LBC} - \widehat{BCL} = \frac{3\pi}{4} - \alpha.$$

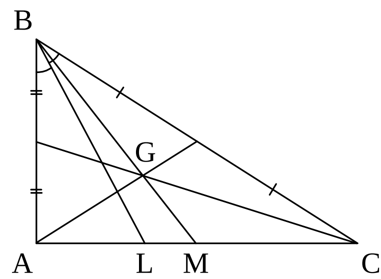
Наконец, воспользуемся теоремой синусов в треугольнике BCL:

$$\frac{|CL|}{\sin\widehat{LBC}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BLC}} \quad \Longrightarrow \quad |CL| = \frac{c\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{c\sin 2\alpha}{\sqrt{2}\,(\sin\alpha + \cos\alpha)}.$$

Ответ. $\dfrac{c\sin 2\alpha}{\sqrt{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)}$.

Задача 5.

В треугольнике ABC угол A — прямой, $|AB| = 1$, $|BC| = 2$. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке L. G – точка пересечения медиан треугольника ABC. Что больше, $|BL|$ или $|BG|$?



Идея. Рассмотреть треугольники ABL и ABM.

Указание. Вычислить косинусы величин углов ABC и ABL, найти длины отрезков BL и BM. Воспользоваться тем, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершин.

Решение. Эта задача является чисто счётной. Сначала, рассматривая треугольники ABC и ABL, найдём длину биссектрисы BL:

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{ABC} = \frac{\pi}{3} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{ABL} = \frac{\pi}{6};\ |BL| = \frac{|AB|}{\cos\widehat{ABL}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Теперь вычислим длину медианы BM и длину отрезка BG. Применяя теорему Пифагора к треугольникам ABC и ABM, а также пользуясь тем, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершин, получаем

$$|AC| = \sqrt{|BC|^2 - |AB|^2} = \sqrt{3},\ |AM| = \frac{|AC|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

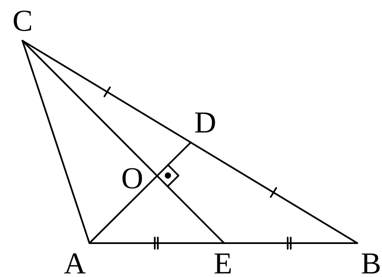
$$|BM| = \sqrt{|AM|^2 + |AB|^2} = \frac{\sqrt{7}}{2},\ |BG| = \frac{2}{3}\cdot|BM| = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Наконец, ясно, что $|BG| < 1, |BL| > 1$, поэтому $|BL| > |BG|$.

Ответ. $|BL| > |BG|$.

Задача 6.

В треугольнике ABC $|AB| = c$, $|BC| = a$, а медианы AD и CE взаимно перпендикулярны. Найдите длину стороны AC.



Идея. Рассмотреть прямоугольные треугольники, образованные точкой пересечения медиан, основаниями медиан и вершинами исходного треугольника.

Указание. Обозначить длины медиан AD и CE как $3x$ и $3y$ соответственно. Воспользоваться тем, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершин, применить теорему Пифагора.

Решение. В этой задаче из-за перпендикулярности медиан AD и CE возникает несколько прямоугольных треугольников. Их мы и будем рассматривать, заметив, что через длины этих медиан можно выразить длины всех сторон треугольника ABC.

Обозначим длины медиан AD и CE как $3x$ и $3y$ соответственно, а точку их пересечения обозначим буквой O. Поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершин, то

$$|AO| = 2x, |OD| = x, |CO| = 2y, |OE| = y.$$

После этого, записывая теорему Пифагора для треугольников AOE, COD и AOC, находим

$$\begin{cases} |AO|^2 + |OE|^2 = |AE|^2, \\ |CO|^2 + |OD|^2 = |CD|^2, \\ |AO|^2 + |CO|^2 = |AC|^2 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x^2 + y^2 = \dfrac{c^2}{4}, \\ 4y^2 + x^2 = \dfrac{a^2}{4}, \\ 4x^2 + 4y^2 = |AC|^2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{c^2}{4}, \\ 4x^2 + 4y^2 = |AC|^2 \end{cases} \implies |AC|^2 = \frac{4}{5}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}\right) = \frac{a^2 + c^2}{5}.$$

Замечание. Вообще говоря, во всех задачах после введения неизвестных сначала имеет смысл выразить с их помощью искомую величину. Зачастую получается так, что значения самих переменных находить не надо, а достаточно найти лишь значение некоторой их комбинации. Видно, что в только что рассмотренной задаче значения самих переменных x и y нам не понадобились.

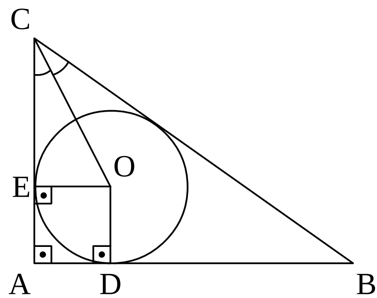
Ответ. $|AC| = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2}{5}}$.

Задача 7.

В треугольнике ABC угол A – прямой, величина угла B равна $\pi/6$. В треугольник вписана окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до точки касания этой окружности с катетом AB.

Идея. Провести радиусы из центра вписанной окружности в точки её касания с катетами треугольника ABC, воспользоваться тем, что центр вписанной в треугольник окружности находится в точке пересечения биссектрис треугольника.

Указание. Рассмотреть прямоугольный треугольник, образованный точкой C, центром вписанной в треугольник ABC окружности и точкой её касания с катетом AC.



Решение. Так как величина угла B равна $\pi/6$, то величина угла BCA равна $\pi/3$. Центр окружности, вписанной в треугольник ABC, обозначим буквой O, точки её касания с катетами AB и AC обозначим буквами D и E соответственно. Из того, что центр окружности, вписанной в произвольный треугольник, лежит на пересечении его биссектрис, вытекает, что OC – биссектриса угла BCA, поэтому величина угла OCE равна $\pi/6$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник OCE. В нем нам известны величины катета OE и угла OCE – с их помощью выражаем длину отрезка CE:

$$|CE| = |OE| \cdot \operatorname{ctg} \widehat{OCE} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

Поскольку $OEAD$ – квадрат, то $|AE| = |OE| = |AD| = \sqrt{3}$. Точка E лежит на катете AC, следовательно $|AC| = |AE| + |CE| = 3 + \sqrt{3}$.

Наконец, применим теорему Пифагора для треугольника CAD:

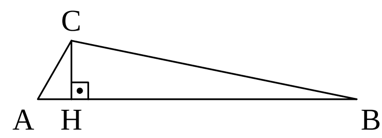
$$|AC|^2 + |AD|^2 = |CD|^2 \quad \Longrightarrow \quad |CD|^2 = (3+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 15 + 6\sqrt{3}.$$

Ответ. $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$.

Задача 8.

В треугольнике ABC величина угла BAC равна $\pi/3$, длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, равна $\sqrt{3}$, а длина радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, равна 5. Найдите длины сторон треугольника ABC.

Идея. Применить теоремы синусов и косинусов.



Указание. Рассмотрев прямоугольный треугольник, образованный вершинами A, C и основанием высоты, опущенной из C на AB, вычислить $|AC|$.
Указание. Применить теоремы синусов и косинусов в треугольнике ABC.

Решение. Обозначим основание высоты, опущенной из C на AB, буквой H. Вообще говоря, точка H может находиться как на стороне AC, так и на её продолжении за точку B. Куда именно она попадет, станет понятно только после вычисления длин сторон треугольника ABC. Тем не менее, вне зависимости от расположения точки H из прямоугольного треугольника ACH находим

$$|AC| = \frac{|CH|}{\sin \widehat{HAC}} = \frac{|CH|}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2.$$

Далее, записывая теорему синусов для треугольника ABC, получаем

$$\frac{|BC|}{\sin \widehat{BAC}} = 2R_{\triangle BAC} \quad \Longrightarrow \quad |BC| = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Наконец, для определения длины стороны AB воспользуемся теоремой косинусов:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos \widehat{BAC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 75 = |AB|^2 + 4 - 2|AB| \quad \Longrightarrow \quad |AB|^2 - 2|AB| + 71 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет 2 корня: $1 + 6\sqrt{2}$ и $1 - 6\sqrt{2}$. Второй из них меньше нуля и нам не подходит.
Замечание. В большинстве задач, где в условии дана длина радиуса окружности, описанной около треугольника, так или иначе задействуется теорема синусов.

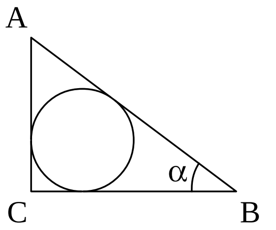
Ответ. $|AB| = 1 + 6\sqrt{2}$, $|BC| = 5\sqrt{3}$, $|AC| = 2$.

Задача 9.

В прямоугольном треугольнике отношение длины радиуса вписанной окружности к длине радиуса описанной окружности равно $2/5$. Найдите величины острых углов треугольника.

Идея. Выразить длины радиусов вписанной и описанной окружностей через длину гипотенузы и величину одного из острых углов треугольника.
Указание. Обозначить длину гипотенузы как $2R$, где R – длина радиуса описанной окружности, один из острых углов за α.
Указание. Воспользоваться формулой для длины радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник.

Р е ш е н и е. Длина гипотенузы нашего треугольника равна $2R$, где R – длина радиуса окружности, описанной около него. Величину одного из его острых углов обозначим за α, при этом $0 < \alpha < \pi/2$. Тогда длины катетов равны $2R\sin\alpha$ и $2R\cos\alpha$, а длина радиуса вписанной окружности равна полуразности суммы длин катетов и длины гипотенузы, то есть



$$\frac{2R\sin\alpha + 2R\cos\alpha - 2R}{2} = R(\sin\alpha + \cos\alpha - 1).$$

Подставляя это выражение в данное нам по условию соотношение, получаем

$$\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = \frac{2}{5} \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}.$$

Возводя это уравнение в квадрат, получаем

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{49}{25} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + \sin 2\alpha = \frac{49}{25} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin 2\alpha = \frac{24}{25} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \{0 < 2\alpha < \pi\} \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2\alpha = \arcsin\dfrac{24}{25}, \\ 2\alpha = \pi - \arcsin\dfrac{24}{25} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{24}{25}, \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{24}{25}. \end{array}\right.$$

Мы получили два варианта для величины угла α, в сумме они дают $\pi/2$. Это и есть величины острых углов треугольника, поскольку, если мы выберем в качестве α одно из двух полученных значений, величина другого острого угла будет равна как раз второму из этих значений.

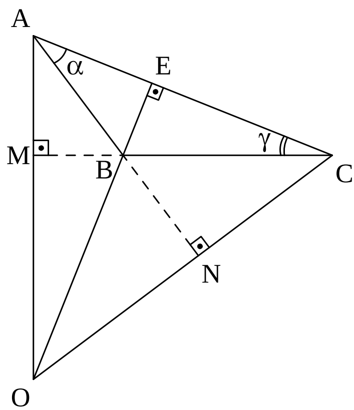
О т в е т. $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{24}{25}$ и $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{24}{25}$. Возможны и другие формы записи этого ответа, например $\arccos\dfrac{3}{5}$ и $\arccos\dfrac{4}{5}$.

Задача 10.

В треугольнике ABC угол B – тупой, продолжения высот AM и CN пересекаются в точке O, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \gamma$, $|AC| = b$. Найдите расстояние от точки O до прямой AC.

И д е я. Рассмотреть треугольник AOC. Воспользоваться тем, что расстояние от точки O до прямой AC есть длина его высоты, опущенной из точки O на сторону AC.

У к а з а н и е. В прямоугольном треугольнике сумма величин острых углов равна $\dfrac{\pi}{2}$, отношение длин катетов равно котангенсу величины соответствующего острого угла.



Решение. Искомое расстояние есть длина перпендикуляра, опущенного из точки O на сторону AC. Общим подходом к решению такого сорта задач является нахождение некоторого треугольника, в котором бы этот перпендикуляр оказался высотой, и последующее вычисление его длины. В этой задаче мы будем рассматривать треугольник AOC, соответственно нам необходимо вычислить длину его высоты OE. Можно заметить, кстати, что поскольку отрезки AN и CM также являются его высотами и пересекаются в точке B, то и отрезок OE также проходит через эту точку.

Поскольку угол B – тупой, то точка E попадает на отрезок AC, то есть

$$|AC| = |AE| + |CE|.$$

Далее, рассматривая прямоугольные треугольники ACM и ACN, можно вычислить величины углов CAM и ACN:

$$\widehat{CAM} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ACM} = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad \widehat{ACN} = \frac{\pi}{2} - \widehat{CAN} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

После этого обозначим длину отрезка OE за h и рассмотрим прямоугольные треугольники AOE и COE. Из них мы находим

$$|CE| = |OE| \cdot \operatorname{ctg} \widehat{ECO} = h \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = h \operatorname{tg} \alpha,$$

$$|AE| = |OE| \cdot \operatorname{ctg} \widehat{EAO} = h \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = h \operatorname{tg} \gamma.$$

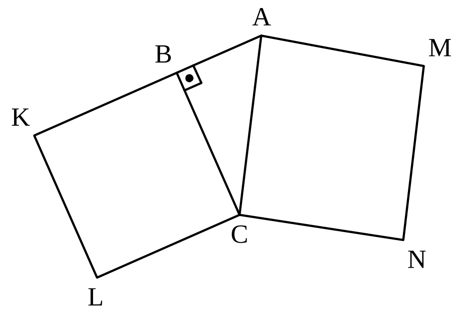
Подставляя полученные выражения в соотношение, связывающее длины отрезков AC, AE и CE, имеем $b = h \operatorname{tg}\alpha + h \operatorname{tg}\gamma \Longrightarrow h = \dfrac{b}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma}$.

Ответ. $\dfrac{b}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma}$.

Задача 11.

В треугольнике, величина одного из углов которого равна разности величин двух других его углов, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найдите длину большей стороны треугольника.

Идея. Доказать, что треугольник, данный в условии задачи, – прямоугольный.
Указание. Использовать тот факт, что сумма величин углов треугольника равна π, и условие задачи, связывающее величины углов треугольника.



Указание. Воспользоваться тем, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине его гипотенузы.

Решение. Прежде всего необходимо разобраться, что даёт нам условие задачи, связывающее величины углов треугольника.

Обозначим вершины треугольника как A, B и C, без ограничения общности будем считать, что $1 = |AB| < |BC| < |AC|$. Поскольку в любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол, то $\widehat{ACB} < \widehat{BAC} < \widehat{ABC}$.

Рассмотрим данное нам про величины углов треугольника соотношение, используем теорему о сумме величин углов треугольника и сложим полученные соотношения:

$$\begin{cases} \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = \widehat{ACB}, \\ \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = \pi \end{cases} \implies 2 \cdot \widehat{ABC} = \pi \implies \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, треугольник ABC – прямоугольный. Обозначим длину отрезка AC за x, тогда, по теореме Пифагора,

$$|BC| = \sqrt{|AC|^2 - |AB|^2} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Далее ясно, что площади квадратов $BCLK$ и $ACNM$ равны $x^2 - 1$ и x^2 соответственно. Также учтём тот факт, что длина радиуса круга, описанного около треугольника ABC, равна половине длины гипотенузы AC, следовательно, площадь этого круга равна $\pi x^2/4$. С учётом всего этого, пользуясь условием задачи, получаем

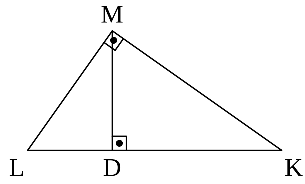
$$2x^2 - 1 = 2 \cdot \frac{\pi x^2}{4} \implies x = \sqrt{\frac{2}{4 - \pi}}.$$

Ответ. Длина большей стороны треугольника равна $\sqrt{\dfrac{2}{4-\pi}}$.

Задача 12.

В прямоугольном треугольнике KLM проведён отрезок MD, соединяющий вершину прямого угла KML с точкой D, лежащей на гипотенузе KL таким образом, что $|DL| = 1$, $|DM| = \sqrt{2}$, $|DK| = 2$. Найдите величину угла KMD.

Идея. Доказать, что MD – высота треугольника KLM.
Указание. Применить теорему косинусов для треугольников KMD и LMD.



Р е ш е н и е. В теоретических материалах к этому параграфу было приведено следующее свойство высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе: она делит гипотенузу на части, произведение длин которых равно квадрату длины этой высоты. Заметим, что $|MD|^2 = |DK| \cdot |DL|$ и докажем, что в этой задаче отрезок MD действительно будет высотой треугольника KLM. Это можно сделать, например, так: обозначим величины углов KDM и LDM за α и $\pi - \alpha$ и запишем теорему косинусов для треугольников KMD и LMD:

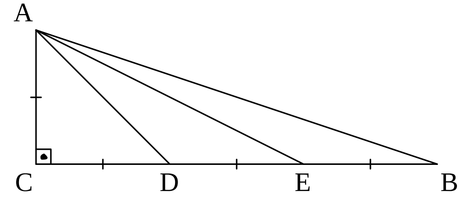
$$\begin{cases} |KM|^2 = 6 - 4\sqrt{2}\cos\alpha, \\ |LM|^2 = 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow |KM|^2 + |LM|^2 = 9 - 2\sqrt{2}\cos\alpha.$$

С другой стороны, $|KM|^2 + |LM|^2 = |KL|^2 = 9$, поэтому $\cos\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$. Тогда из прямоугольного треугольника KMD получаем $\operatorname{tg}\widehat{KMD} = |DK| : |DM| = \sqrt{2}$.
З а м е ч а н и е. Справедливо следующее утверждение: если точка D лежит на гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC и $|AD|^2 = |BD| \cdot |CD|$, то либо AD – высота треугольника ABC, либо AD – медиана треугольника ABC. Попробуйте доказать его сами.

О т в е т. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Задача 13.

В треугольнике ABC угол C прямой, катет BC разделен точками D и E на три равные части. Найдите сумму величин углов AEC, ADC и ABC, если известно, что $|BC| = 3|AC|$.



И д е я. Выразить величины углов AEC, ADC и ABC.
У к а з а н и е. Рассмотреть прямоугольные треугольники ABC, ADC и AEC.
У к а з а н и е. Найти тангенс суммы величин углов AEC и ABC.

Р е ш е н и е. Если положить $|AC| = x$, $|BC| = 3x$, то $|CD| = |DE| = |EB| = x$. Ясно, что $\operatorname{tg}\widehat{ADC} = 1$, $\operatorname{tg}\widehat{AEC} = 1/2$, $\operatorname{tg}\widehat{ABC} = 1/3$. Тогда

$$\widehat{ADC} = \frac{\pi}{4}; \quad \operatorname{tg}\left(\widehat{AEC} + \widehat{ABC}\right) = \frac{\operatorname{tg}\widehat{AEC} + \operatorname{tg}\widehat{ABC}}{1 - \operatorname{tg}\widehat{AEC} \cdot \operatorname{tg}\widehat{ABC}} = 1 \quad \Longrightarrow$$

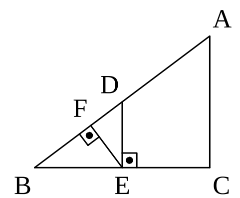
$$\Longrightarrow \quad \widehat{AEC} + \widehat{ABC} = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{AEC} + \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}.$$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 14.

В прямоугольном треугольнике ABC расстояние от середины гипотенузы AB до катета BC равно 5, а расстояние от середины этого катета до гипотенузы равно 4. Найдите площадь треугольника ABC.

Идея. Вычислить величины углов треугольника ABC.
Указание. Расстояние от середины гипотенузы AB до катета BC есть длина одной из средних линий треугольника ABC.



Решение. Обозначим буквой D середину гипотенузы AB и возьмем на катете BC точку E так, что $DE \perp BC$. Тогда $|DE| = 5$ по условию задачи и, кроме того, $DE||AC$, так как $DE \perp BC$ и $AC \perp BC$. Поэтому DE – средняя линяя треугольника ABC и $|AC| = 10$. Теперь возьмем точку F на гипотенузе AB таким образом, что $EF \perp AB$. Тогда, по условию задачи, $|EF| = 4$. Далее, $\sin\widehat{EDF} = |EF| : |ED| = 4/5$, $\cos\widehat{EDF} = 3/5$, $\operatorname{tg}\widehat{EDF} = 4/3$. Наконец, ясно, что $\widehat{DBE} = \pi/2 - \widehat{EDF}$, поэтому

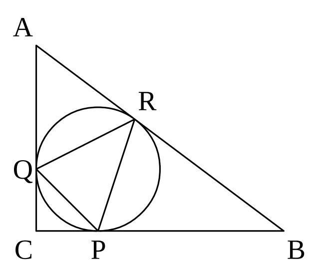
$$|BC| = |AC| \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{EDF}\right) = \frac{40}{3}; \quad S_{\triangle ABC} = \frac{|AC| \cdot |BC|}{2} = \frac{200}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{200}{3}$.

Задача 15.

В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках P, Q и R. Найдите площадь треугольника PQR, если длины катетов треугольника ABC равны 3 и 4.

Идея. Вычислить длины отрезков, на которые точки P, Q и R разбивают стороны треугольника ABC.
Указание. Найти длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, вычислить площади треугольников, дополняющих треугольник PQR до треугольника ABC.



Решение. Будем считать, что $P \in [BC]$, $Q \in [AC]$, $R \in [AB]$, $|AC| = 3$, $|BC| = 4$. Путем элементарных вычислений находим, что

$$S_{\triangle ABC} = 6,\ |AB| = 5,\ \sin\widehat{BAC} = \frac{4}{5},\ \sin\widehat{ABC} = \frac{3}{5},$$

$$r_{\triangle ABC} = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} = 1,\ |CQ| = |CP| = r_{\triangle ABC} = 1,$$

$$|AR| = |AQ| = |AC| - |CQ| = 2,\ |BR| = |BP| = |BC| - |CP| = 3.$$

Наконец, пользуясь формулой площади треугольника через длины двух его сторон и синус величины угла между ними, получаем

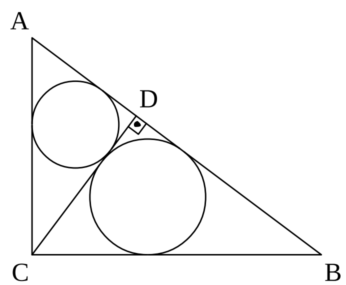
$$S_{\triangle CQP} = \frac{1}{2},\ S_{\triangle AQR} = \frac{8}{5},\ S_{\triangle BPR} = \frac{27}{10} \quad\Longrightarrow\quad S_{\triangle PQR} = 6 - \frac{1}{2} - \frac{8}{5} - \frac{27}{10} = \frac{6}{5}.$$

О т в е т. $\dfrac{6}{5}$.

Задача 16.

В треугольнике ABC угол C прямой, CD – высота. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, если длины радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 6 и 8 соответственно.

И д е я. Выразить длины отрезков AD, AC, BD и BC через длину высоты CD и величину одного из острых углов треугольника ABC.
У к а з а н и е. Воспользоваться формулой длины радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник.



Р е ш е н и е. Обозначим $|CD| = h$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Тогда $\widehat{ABC} = \pi/2 - \alpha$, $\widehat{BCD} = \alpha$ и

$$|AD| = h\operatorname{ctg}\alpha,\ |AC| = \frac{h}{\sin\alpha},$$

$$|BD| = h\operatorname{tg}\alpha,\ |BC| = \frac{h}{\cos\alpha}.$$

Записывая формулу длины радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, применительно к треугольникам ADC и BDC, получаем

$$\begin{cases} h + h\operatorname{ctg}\alpha - h/\sin\alpha = 12; \\ h + h\operatorname{tg}\alpha - h/\cos\alpha = 16 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} h(\sin\alpha + \cos\alpha - 1) = 12\sin\alpha; \\ h(\sin\alpha + \cos\alpha - 1) = 16\cos\alpha. \end{cases}$$

Поделив первое из полученных уравнений на второе, мы легко находим $\operatorname{tg}\alpha = 4/3$, $\sin\alpha = 4/5$, $\cos\alpha = 3/5$, $h = 24$. Наконец,

$$|AC| = 30,\ |BC| = 40,\ |AB| = 50,\ r_{\triangle ABC} = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} = 10.$$

З а м е ч а н и е. Если использовать подобие, то эту задачу можно решить значительно проще, но подобие мы пока "не знаем".

О т в е т. 10.

Задача 17.

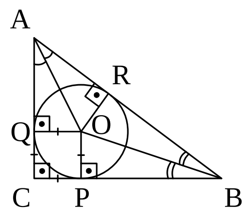
Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, до его вершин A и B равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$ соответственно. Найдите длины катетов треугольника ABC.

Идея. Воспользоваться тем, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.

Указание. Рассмотреть прямоугольные треугольники, образованные вершинами острых углов, центром окружности, вписанной в треугольник ABC, и точками её касания с катетами.

Решение. В этой задаче необходимо рассмотреть два случая: вершины A и B могут оказаться вершинами острых углов, а могут оказаться вершинами прямого и острого углов. Сначала рассмотрим первый случай.

Пусть $\widehat{BAC} = 2\alpha$. В силу того, что $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} = \pi/2$, а AO и BO – биссектрисы углов BAC и ABC соответственно, имеем $\widehat{OAQ} = \alpha$, $\widehat{OBP} = \pi/4 - \alpha$. Заметим, что $OQCP$ – квадрат, поэтому $|OQ| = |QC| = |CP| = |OP|$. Наконец, из прямоугольных треугольников AOQ и BOP получаем

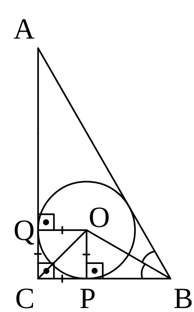


$$|OQ| = |AO| \sin \widehat{OAQ}, \; |OP| = |BO| \sin \widehat{OBP} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2} \sin(\pi/4 - \alpha) = \sin \alpha.$$

Решая это уравнение, находим $\operatorname{tg} \alpha = 1/2$, $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$, $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$, после чего получаем $|OQ| = |QC| = |CP| = |OP| = 1$, $|AQ| = 2$, $|BP| = 3$, $|AC| = 3$, $|BC| = 4$.

Рассмотрим второй случай. Если $|OC| = \sqrt{10}$, то, так как $OQCP$ – квадрат, имеем $|OQ| = |OP| = \sqrt{5} = |OA|(|OB|)$, что невозможно, поскольку длина перпендикуляра меньше длины наклонной.



Если же $|OC| = \sqrt{5}$, $|OB| = \sqrt{10}$, то

$$|OQ| = |OP| = \sqrt{\frac{5}{2}}, \; |BP| = \sqrt{\frac{15}{2}}, \; |BC| = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}};$$

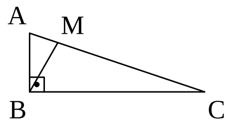
$$\operatorname{tg} \widehat{OBP} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \; \operatorname{tg} \widehat{ABC} = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \widehat{OBP}\right) = \sqrt{3};$$

$$|AC| = |BC| \cdot \operatorname{tg} \widehat{ABC} = \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{\frac{45}{2}}.$$

Ответ. 3 и 4 или $\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}}$ и $\sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{\frac{45}{2}}$.

Задача 18.

В треугольнике ABC точка M расположена на стороне AC таким образом, что $|AM| : |MC| = 1 : 3\sqrt{3}$. Величина угла ABM равна $\pi/6$, $|BM| = 6$, угол B прямой. Найдите величину угла BAC.



Идея. Найти соотношение между длинами отрезков AM и MC и величиной угла BAC.
Указание. Применить теорему синусов для треугольников ABM и CBM.

Решение. Ясно, что $\widehat{CBM} = \pi/3$. Пусть $\widehat{BAC} = \alpha$, тогда $\widehat{ACB} = \pi/2 - \alpha$. Запишем теорему синусов для треугольников ABM и CBM:

$$\frac{|AM|}{\sin\widehat{ABM}} = \frac{|BM|}{\sin\widehat{BAM}} \quad\Longrightarrow\quad \sin\alpha = \frac{|BM|}{2|AM|};$$

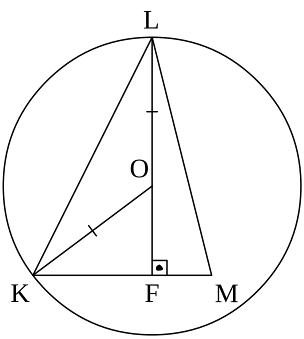
$$\frac{|MC|}{\sin\widehat{CBM}} = \frac{|BM|}{\sin\widehat{BCM}} \quad\Longrightarrow\quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}|BM|}{2|MC|}.$$

Почленно поделив полученные соотношения друг на друга, находим $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Ответ. $\operatorname{arctg} 3$.

Задача 19.

Дан треугольник KLM. Через точки K и L проведена окружность, центр которой лежит на высоте LF, опущенной на сторону KM. Известно, что точка F лежит на стороне KM. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью, если $|KL| = 1$, $|KM| = \sqrt{3}/2$, $|FM| = \sqrt{3}/6$.



Идея. Воспользоваться тем, что треугольник KOL равнобедренный (O – центр окружности).
Указание. Рассмотреть прямоугольные треугольники KLF и KOF, где O – центр окружности.

Решение. Точка F лежит на стороне KM, стало быть, $|KF| = |KM| - |FM| = \sqrt{3}/3$. Далее, применяя теорему Пифагора к треугольнику KLF, находим $|LF| = \sqrt{2/3}$. Введём обозначение $|OK| = |OL| = R$, тогда $|OF| = \sqrt{2/3} - R$ и запишем теорему Пифагора для треугольника KOF:

$$R^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - R\right)^2 + \frac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \;\; S_{\text{круга}} = \pi R^2 = \frac{3\pi}{8}.$$

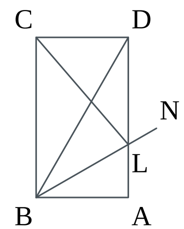
Ответ. $\dfrac{3\pi}{8}$.

Задача 20.

В прямоугольнике $ABCD$ длины отрезков AB и BD равны 3 и 6 соответственно. На продолжении биссектрисы BL треугольника ABD за точку L взята точка N такая, что отношение $|BL| : |LN|$ равно $10 : 3$. Что больше: длина отрезка BN или длина отрезка CL?

Идея. Найти величину угла LBA и длину отрезка LD.

Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора и соотношениями между длинами сторон и величинами углов в прямоугольном треугольнике.



Решение. Приведём различные величины, легко вычисляемые в этой задаче:

$$\widehat{ABD} = \frac{\pi}{3},\ \ \widehat{ABL} = \frac{\pi}{6},\ \ |BL| = 2\sqrt{3},\ \ |BN| = \frac{13\sqrt{3}}{5};$$

$$|AD| = 3\sqrt{3},\ \ |AL| = \sqrt{3},\ \ |LD| = 2\sqrt{3},\ \ |CL| = \sqrt{21}.$$

Ответ. $|BN| < |CL|$.

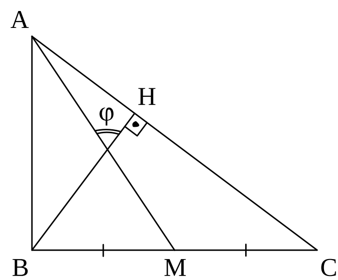
Задача 21.

В прямоугольном треугольнике ABC угол B – прямой, AM – медиана, BH – высота. Найдите величину угла BAM, если известно, что величина угла между прямыми AM и BH равна φ. При каких φ задача имеет решение?

Идея. Найти условие, связывающее величины данного в условии и искомого углов.

Указание. Рассмотреть треугольники BAM и ABC.

Указание. Положить $|BM| = x$, выразить двумя способами длину отрезка AB.



Решение. Углом между прямыми называется *меньший* из углов, ими образованных. Поэтому величина угла MAC равна $\pi/2 - \varphi$. Обозначим величину угла BAM за α, тогда величина угла BAC равна $\pi/2 - (\varphi - \alpha)$. Рассматривая прямоугольные треугольники BAM и ABC и вводя обозначения $|BM| = x$, $|BC| = 2x$, имеем

$$|AB| = x \operatorname{ctg} \alpha = 2x \operatorname{ctg}(\pi/2 - (\varphi - \alpha)) \quad \Longrightarrow \quad 2 \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) \operatorname{tg} \alpha = 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \varphi \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi - 8}}{4}.$$

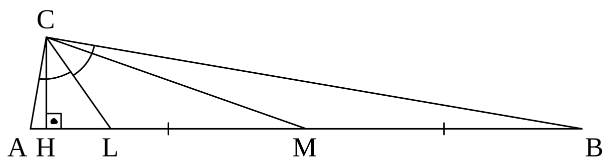
Ответ. $\operatorname{arctg} \left(\dfrac{\operatorname{tg} \varphi \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi - 8}}{4} \right)$, $\varphi \in [\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}; \pi/2)$.

Задача 22.

В треугольнике ABC угол C – прямой, отношение длины медианы CM к длине биссектрисы CL равно $\sqrt{6}:1$, длина высоты CH равна 2. Найдите площадь треугольника ABC.

И д е я. Выразить все элементы треугольника ABC через длину биссектрисы CL и величину одного из его острых углов.

У к а з а н и е. Применить теорему синусов в треугольнике ALC.



Р е ш е н и е. Введём обозначения $|CL| = x$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Тогда, с учётом условия задачи и того факта, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна половине её длины, $|CM| = |AM| = |BM| = \sqrt{6}x$. Далее, пользуясь соотношениями между длинами сторон прямоугольного треугольника и тем, что биссектриса треугольника делит угол пополам, находим

$$|AB| = 2\sqrt{6}x,\ |AC| = 2\sqrt{6}x\cos\alpha,\ |BC| = 2\sqrt{6}x\sin\alpha,\ \widehat{ALC} = 3\pi/4 - \alpha.$$

Теперь, записывая теорему синусов для треугольника ALC, получаем

$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{ALC}} = \frac{|CL|}{\sin\widehat{CAL}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{2\sqrt{6}x\cos\alpha}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{x}{\sin\alpha} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = 2\sqrt{6}\sin\alpha\cos\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \sin\alpha + \cos\alpha = 4\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Полученное тригонометрическое уравнение надо возвести в квадрат, после чего мы легко получаем $\sin 2\alpha = 1/3$. Наконец, воспользуемся формулой для длины высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе:

$$|CH| = \frac{|AC|\cdot|BC|}{|AB|} \Longrightarrow 2\sqrt{6}x\sin\alpha\cos\alpha = 2 \Longrightarrow x\sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}} \Longrightarrow x = \sqrt{6};$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CH| = 2\sqrt{6}x = 12.$$

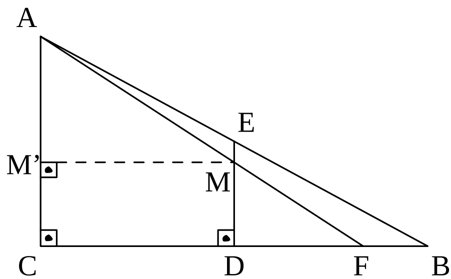
О т в е т. 12.

Задача 23.

В прямоугольном треугольнике ABC ED – отрезок, соединяющий середины сторон AB и BC. Точка F лежит на стороне BC, отрезки AF и ED пересекаются в точке M. Известно, что отношение площадей четырёхугольника $AMDC$ и треугольника ABC равно $7/10$, а длины катетов BC и AC равны a и b соответственно. Найдите длину отрезка AM.

Идея. Рассмотреть треугольники ABF и MDF, записать для них формулы площади.
Указание. Ввести неизвестные $|BF| = x$, $|MD| = y$. Рассмотреть прямоугольный треугольник ACF.

Решение. Очевидно, что ED – средняя линяя треугольника ABC, поэтому $ED||AC$, из чего следует, что $ED \perp BC$. Положим $|BF| = x$, $|MD| = y$, тогда ясно, что $|FD| = a/2 - x$. Из условия задачи следует, что сумма площадей треугольников ABF и MDF составляет $3/10$ площади треугольника ABC, поэтому



$$\frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}(a/2 - x)y = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2}ab.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \widehat{AFC} = \frac{|MD|}{|DF|} = \frac{|AC|}{|CF|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y}{a/2 - x} = \frac{b}{a - x} \quad \Longrightarrow \quad y = b \cdot \frac{a/2 - x}{a - x}.$$

Подставляя это выражение в первое уравнение, находим $x = a/6$, $y = 2b/5$. После этого для нахождения длины AM проведём отрезок $MM'||BC$. Понятно, что $MM'CD$ – прямоугольник, $|CM'| = 2b/5$, $|AM'| = 3b/5$, $|MM'| = a/2$. Наконец,

$$|AM| = \sqrt{|MM'|^2 + |AM'|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9b^2}{25}} = \frac{\sqrt{25a^2 + 36b^2}}{10}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{25a^2 + 36b^2}}{10}$.

Задача 24.

В треугольнике ABC проведены высота BH и медиана BM. Найдите $|BM|$, если известно, что $|BH| = h$, $\widehat{ABH} = \widehat{CBM}$, $\widehat{HBM} = 2 \cdot \widehat{CBM}$.

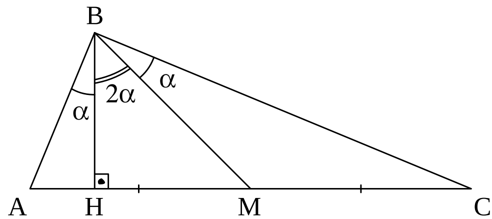
Идея. Найти величину угла ABC.
Указание. Записать теорему синусов для треугольников ABM и CBM, найти величины углов треугольника ABC.

Решение. Найдём величину угла ABC. Положим

$$|AM| = |MC| = x, \ |BM| = m, \ \widehat{ABH} = \widehat{CBM} = \alpha, \ \widehat{HBM} = 2\alpha.$$

Если предположить, что точка H лежит на продолжении стороны AC за точку A (нетрудно убедиться, что на продолжение за точку C она вообще попасть не может), то из условия задачи будет вытекать, что $\widehat{ABM} = \widehat{CBM} = \alpha$, то есть медиана AM является также и биссектрисой треугольника ABC. Но тогда треугольник ABC равнобедренный, точки H и M совпадают. Противоречие.

Если же точка H лежит на стороне AC, то она попадает на отрезок AM, $\widehat{BAH} = \pi/2 - \alpha$, $\widehat{BCH} = \pi/2 - 3\alpha$. Также заметим, что, поскольку угол CBH острый, $0 < \alpha < \pi/6$. Запишем теорему синусов для треугольников BAM и BCM:



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{m}{\sin(\pi/2-\alpha)} = \dfrac{x}{\sin 3\alpha},\\ \dfrac{m}{\sin(\pi/2-3\alpha)} = \dfrac{x}{\sin\alpha}\end{array}\right. \Longrightarrow \frac{m}{x} = \frac{\cos\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha} \Longrightarrow \sin 2\alpha = \sin 6\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}.$$

Стало быть, $\widehat{ABC} = 4\alpha = \pi/2$. Тогда из прямоугольного треугольника BMH находим

$$|BM| = \frac{|BH|}{\cos 2\alpha} = h\sqrt{2}.$$

З а м е ч а н и е. Отметим, что из условия $\widehat{ABH} = \widehat{CBM}$ и того, что точка H лежит на стороне AC, вытекает, что треугольник ABC либо прямоугольный (угол B прямой), либо равнобедренный ($|AB| = |BC|$). Имеет смысл попробовать доказать этот факт отдельно. Схема доказательства точно такая же, как и в решении задачи, надо два раза записать теорему синусов, полагая $\widehat{HBM} = \beta$.

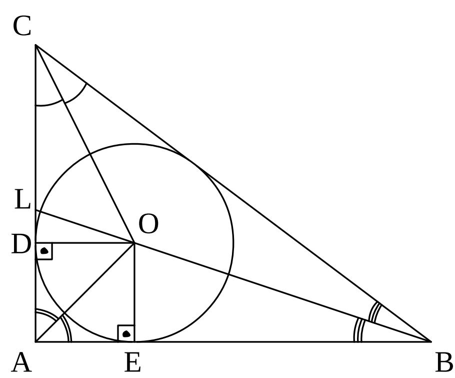
О т в е т. $h\sqrt{2}$.

Задача 25.

В треугольник ABC вписана окружность, длина радиуса которой равна 2. D – точка касания этой окружности со стороной AC, $|AD| = 2$, $|DC| = 4$. Найдите длину биссектрисы треугольника ABC, проведённой из вершины B.

И д е я. Воспользоваться тем фактом, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.

У к а з а н и е. Рассмотреть прямоугольные треугольники AOD и COD, найти величины углов треугольника ABC.



Р е ш е н и е. Обозначим центр окружности, вписанной в треугольник ABC, буквой O и воспользуемся тем фактом, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис. Сначала, рассмотрев прямоугольный треугольник AOD, находим

$$\operatorname{tg}\widehat{OAD} = \frac{|OD|}{|AD|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{OAD} = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}.$$

Затем из прямоугольного треугольника COD получаем

$$\operatorname{tg}\widehat{OCD} = \frac{|OD|}{|OC|} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\widehat{ACB} = \frac{2\operatorname{tg}\widehat{OCD}}{1-\operatorname{tg}^2\widehat{OCD}} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Теперь найдём стороны и третий угол треугольника ABC:

$$|AB| = |AC|\cdot\operatorname{tg}\widehat{ACB} = 8,\ |BC| = 10,\ \cos\widehat{ABC} = \frac{4}{5}.$$

Наконец, обозначим биссектрису треугольника ABC, проведённую из вершины B, как BL. Найдём величину угла ABL и, рассматривая прямоугольный треугольник ABL, найдём BL:

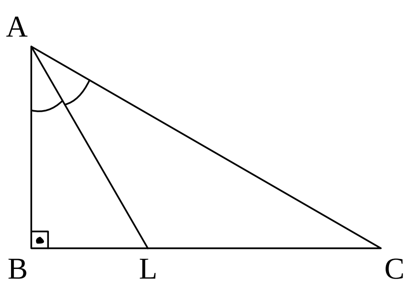
$$\cos\widehat{ABL} = \sqrt{\frac{1+\cos\widehat{ABC}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad |BL| = \frac{|AB|}{\cos\widehat{ABL}} = \frac{8\sqrt{10}}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{8\sqrt{10}}{3}$.

Задача 26.

В прямоугольном треугольнике ABC угол B – прямой, AL – биссектриса. Известно, что $|AC| = 5$, $|AL| = 5/\sqrt{3}$. Найдите $|LC|$.

Идея. Найти величину угла CAL.
Указание. Рассмотрев треугольники ABL и ABC, двумя способами выразить длину отрезка AB.



Решение. Обозначим величины углов BAL и CAL за α. Тогда $\widehat{BAC} = 2\alpha$. Пользуясь соотношениями между длинами сторон и величинами углов в прямоугольных треугольниках ABL и ABC, получаем

$$|AB| = |AL|\cdot\cos\widehat{BAL} = |AC|\cdot\cos\widehat{BAC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{5\cos\alpha}{\sqrt{3}} = 5\cos 2\alpha \quad \Longrightarrow \quad 2\sqrt{3}\cos^2\alpha - \cos\alpha - \sqrt{3} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \sqrt{3}/2, \\ \cos\alpha = -1/\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Поскольку углы BAL и CAL острые, нам подходит только положительный косинус. Значит, $\alpha = \pi/6$. Наконец, заметим, что $\widehat{ACB} = \pi/2 - 2\alpha = \pi/6$, поэтому треугольник ALC равнобедренный, $|AL| = |LC| = 5/\sqrt{3}$.

Ответ. $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

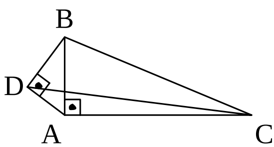
Задача 27.

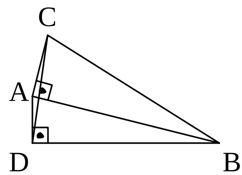
Треугольники ABC и ABD имеют общую сторону AB и не имеют общих внутренних точек, углы BAC и ADB прямые. Найдите $|CD|$, если $|AD| = 3$, $|BC| = 13$, $|AC| + |BD| = 16$.

Идея. Найти длину отрезка AC и косинус величины угла CAD.
Указание. Применить теорему Пифагора для треугольников ABC и ABD.

Решение. Положим $|AC| = x$, тогда $|BD| = 16 - x$. Записывая теорему Пифагора для треугольников ABC и ABD, имеем

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |BC|^2 - |AC^2|, \\ |AB|^2 &= |AD|^2 + |BD|^2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow$$





$$\Longrightarrow \quad 169 - x^2 = 9 + (16 - x)^2.$$

Решая это уравнение, получаем два варианта.

1. $|AC| = x = 12$ (левый чертёж). Тогда ясно, что

$$|BD| = 4, \ |AB| = 5, \ \cos\widehat{CAD} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \widehat{BAD}\right) = -\sin\widehat{BAD} = -\frac{4}{5}.$$

Применяя теорему косинусов для треугольника ACD, находим

$$|CD|^2 = 144 + 9 + 2 \cdot 12 \cdot 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1053}{5} \quad \Longrightarrow \quad |CD| = \frac{9\sqrt{65}}{5}.$$

2. $|AC| = x = 4$ (правый чертёж). В этом случае, рассуждая абсолютно аналогично, имеем

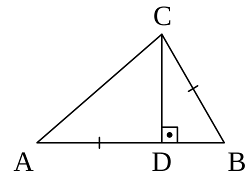
$$|BD| = 12, \ |AB| = 3\sqrt{17}, \ \cos\widehat{CAD} = -\frac{4}{\sqrt{17}}; \ |CD| = \sqrt{25 + \frac{96}{\sqrt{17}}}.$$

Ответ. $\dfrac{9\sqrt{65}}{5}$ или $\sqrt{25 + \dfrac{96}{\sqrt{17}}}$.

Задача 28.

В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3, а высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$. Также известно, что основание D высоты CD лежит на стороне AB и $|AD| = |BC|$. Найдите длину стороны AC.

Идея. Выразить длины отрезков BD и BC через длину отрезка AD.
Указание. Применить теорему Пифагора для треугольника BCD.



Решение. Точка D лежит на отрезке AB, стало быть, $|AD| + |BD| = |AB|$. Обозначим длину отрезка AD за x, тогда длина отрезка BD равна $3-x$, длина отрезка BC по условию также равна x. Записывая теорему Пифагора для треугольника BCD, получаем

$$|BD|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 \Longrightarrow (\sqrt{3})^2 + (3-x)^2 = x^2 \Longleftrightarrow x = 2.$$

Наконец, записываем теорему Пифагора для треугольника ACD:

$$|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2 \quad \Longrightarrow \quad |AC|^2 = 4 + 3 = 7 \quad \Longrightarrow \quad |AC| = \sqrt{7}.$$

Ответ. $|AC| = \sqrt{7}$.

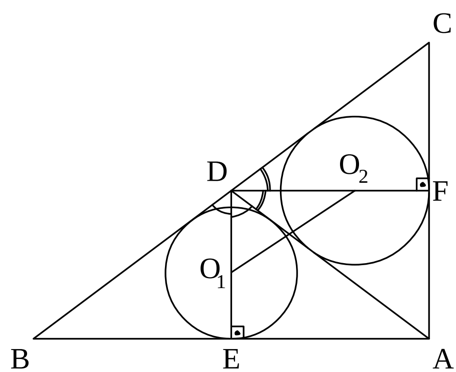
Задача 29.

В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 4, а длина катета AC равна 3. Точка D делит гипотенузу пополам. Найдите расстояние между центром окружности, вписанной в треугольник ACD, и центром окружности, вписанной в треугольник ABD.

Идея. Рассмотреть треугольник, вершинами которого являются точка D и центры окружностей, фигурирующих в условии.

Указание. Воспользоваться тем, что центр окружности, вписанной в произвольный треугольник, лежит на пересечении его биссектрис, а также тем, что угол между биссектрисами двух смежных углов – прямой.

Указание. Вычислить длины радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACD и ABD.



Решение. Обозначим центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, буквами O_1 и O_2 соответственно. Сначала докажем, что угол O_1DO_2 прямой. Поскольку DO_1 и DO_2 – биссектрисы углов ADB и ADC, то величина угла ADO_1 равна половине величины угла ADB, а величина угла ADO_2 равна половине величины угла ADC. Следовательно,

$$\widehat{O_1DO_2} = \widehat{ADO_1} + \widehat{ADO_2} = \frac{1}{2}\widehat{ADB} + \frac{1}{2}\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\left(\widehat{ADB} + \widehat{ADC}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Так как D – середина гипотенузы, то $|AD| = |BD| = |CD|$, треугольники ABD и ACD – равнобедренные. Отрезки DE и DF являются их биссектрисами, поэтому они являются также их высотами и медианами, из чего вытекает $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, $|AE| = |BE|$, $|AF| = |CF|$. Таким образом, DE и DF – средние линии треугольника ABC, значит, $|DE| = 3/2, |DF| = 2$ и, кроме того, отрезки O_1E и O_2F являются радиусами соответствующих вписанных окружностей. (Если мы предположим, что окружность, вписанная в треугольник ABD, касается его стороны AB не в точке E, а в некоторой отличной от неё точке K, то $O_1K \perp AB$ и $O_1E \perp AB$. А это противоречит тому, что из точки на прямую, не содержащую эту точку, можно опустить единственный перпендикуляр.)

Теперь посчитаем длины радиусов окружностей. Имеем

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |DE| = 3, \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |DF| = 3;$$

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2 \quad \Longrightarrow \quad |BC| = 5, \quad |AD| = |BD| = |CD| = \frac{5}{2};$$

$$p_{\triangle ABD} = \frac{9}{2}, \ p_{\triangle ACD} = 4; \ r_{\triangle ABD} = |O_1E| = \frac{2}{3}, \ r_{\triangle ACD} = |O_2F| = \frac{3}{4}.$$

После этого вычисляем длины отрезков DO_1 и DO_2:

$$|DO_1| = |DE| - |O_1E| = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}, \ |DO_2| = |DF| - |O_2F| = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Наконец, применяем теорему Пифагора для треугольника O_1DO_2:

$$|DO_1|^2 + |DO_2|^2 = |O_1O_2|^2 \quad \Longrightarrow \quad |O_1O_2|^2 = \frac{25}{36} + \frac{25}{16} = \frac{325}{144}.$$

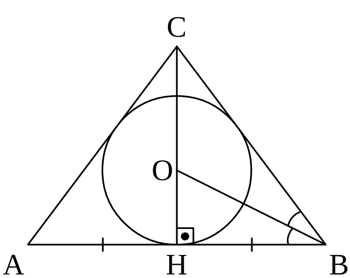
О т в е т. $\dfrac{5\sqrt{13}}{12}$.

Задача 30.

В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 20, а длина диаметра описанной около него окружности равна 25. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в этот треугольник.

И д е я. Высота в равнобедренном треугольнике, проведённая к основанию, является также медианой и биссектрисой. Центр вписанной окружности лежит на этой высоте.

У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой синусов, затем рассмотреть треугольник, образованный одной из вершин основания исходного треугольника, центром вписанной в него окружности и серединой основания.



Р е ш е н и е. Обозначим вершины треугольника из условия задачи буквами A, B и C, будем считать, что $|AC| = |BC|$, проведём его высоту CH. Заметим, что она является медианой и биссектрисой треугольника ABC, поэтому центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на пересечении CH

и биссектрисы угла B. Обозначим его буквой O. Так как $OH \perp AB$, то OH – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Теперь найдём длину отрезка BH. Запишем теорему синусов для треугольника ABC:

$$2R_{\triangle ABC} = \frac{|AC|}{\sin\widehat{ABC}} \quad\Longrightarrow\quad \sin\widehat{ABC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Поскольку угол ABC – острый, то

$$\cos\widehat{ABC} = \sqrt{1-\sin^2\widehat{ABC}} = \frac{3}{5}, \quad |BH| = |BC|\cdot\cos\widehat{ABC} = 12.$$

После этого найдём тангенс величины угла HBO и $|OH|$:

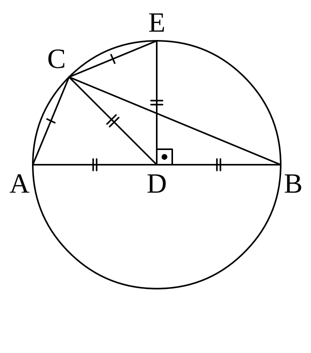
$$\widehat{HBO} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} \quad\Longrightarrow\quad \frac{3}{5} = \cos\widehat{ABC} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\widehat{HBO}}{1+\operatorname{tg}^2\widehat{HBO}} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \operatorname{tg}^2\widehat{HBO} = \frac{1}{4} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}\widehat{HBO} = \frac{1}{2};\ |OH| = |BH|\cdot\operatorname{tg}\widehat{HBO} = 6.$$

Ответ. 6.

Задача 31.

Из середины D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведён луч, перпендикулярный гипотенузе и пересекающий один из его катетов. На этом луче отложен отрезок DE, длина которого равна половине длины отрезка AB. Длина отрезка CE равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC.



Идея. Построить окружность, описанную около треугольника ABC, и провести радиусы из её центра к точкам C и E.

Указание. Найти величину одного из острых углов треугольника ABC путем рассмотрения треугольников DCA, DCB и DCE.

Решение. Заметим, что точка D является центром окружности, описанной около треугольника ABC. Поскольку $|DE| = |DA|$ по условию задачи, то точка E также лежит на указанной окружности, причём, поскольку луч DE пересекает один из катетов, располагается на той же из полуокружностей AB, что и точка C.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $|CE| = |AC| = 1$. Тогда получаем, что $\triangle ADC = \triangle CDE$ (по трём сторонам), из чего вытекает равенство углов ADC и CDE. А поскольку угол ADE прямой, то

$$\widehat{ADC} = \widehat{CDE} = \frac{\pi}{4},\ \widehat{CDB} = \frac{3\pi}{4},\ \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Теперь посчитать площадь треугольника ABC совсем просто.

$$|BC| = |AC| \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos\dfrac{\pi}{4}}{\sin\dfrac{\pi}{4}} = 1 + \sqrt{2}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

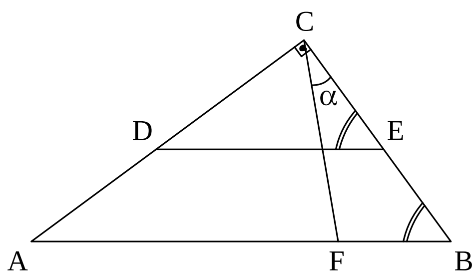
2) Пусть $|CE| = |BC| = 1$. Тогда получаем, что $\triangle BDC = \triangle CDE$ (по трём сторонам), т.е. они совпадают. Это противоречит тому, что $DE \perp AB$.

Ответ. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Задача 32.

Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке D, а катет BC – в точке E, причём длина отрезка DE равна 2, а длина отрезка BE равна 1. На гипотенузе взята точка F так, что $|BF| = 1$. Известно также, что величина угла FCB равна α. Найдите площадь треугольника ABC.

Идея. Обозначить за неизвестную величину β величину угла ABC.
Указание. Выразить из треугольника CDE длину отрезка CE, затем применить теорему синусов в треугольнике FCB.



Решение. Поскольку $DE || AB$, то $\widehat{DEC} = \widehat{ABC}$. Обозначим величины этих углов буквой β, тогда величина угла CFB равна $\pi - \alpha - \beta$. Из прямоугольного треугольника DEC вытекает, что

$$|CE| = |DE| \cdot \cos \widehat{DEC} = 2\cos\beta \quad \Longrightarrow \quad |BC| = |BE| + |CE| = 2\cos\beta + 1.$$

Теперь запишем теорему синусов для треугольника FCB:

$$\frac{|BF|}{\sin \widehat{FCB}} = \frac{|BC|}{\sin \widehat{CFB}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{2\cos\beta + 1}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha.$$

Раскрывая скобки в левой части полученного уравнения, получаем

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta = \sin\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\beta - \alpha) = \sin\alpha.$$

Так как α и β – острые углы, то $\beta - \alpha = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = 2\alpha$. Поэтому

$$|BC| = 2\cos 2\alpha + 1, \; |AC| = |BC| \cdot \operatorname{tg} \widehat{ABC} = (2\cos 2\alpha + 1)\operatorname{tg} 2\alpha.$$

Наконец, считаем площадь треугольника ABC:

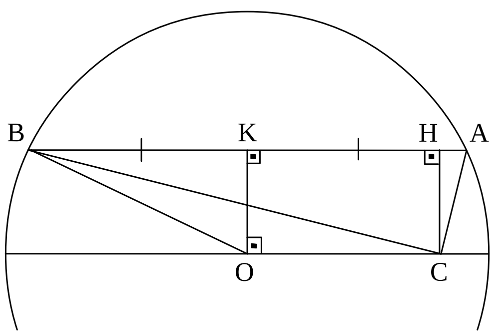
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha (2\cos 2\alpha + 1)^2.$$

Ответ. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha (2\cos 2\alpha + 1)^2$.

Задача 33.

Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности, длина радиуса которой равна 10. Вершина C лежит на диаметре этой окружности, параллельном гипотенузе. Градусная мера угла CAB равна 75°. Найдите площадь треугольника ABC.

Идея. Обозначить длину гипотенузы за $2x$, расстояние между диаметром и хордой за h. Составить два уравнения с этими неизвестными.



Указание. Рассмотреть треугольник, образованный центром окружности, точкой B и серединой гипотенузы, выразить длину высоты исходного прямоугольного треугольника через длину его гипотенузы и величину одного из острых углов.

Решение. Проведём высоту CH треугольника ABC и проведём отрезок OK, перпендикулярный AB ($K \in AB$). Тогда очевидно, что $|OK| = |CH|$. Далее, поскольку треугольник OAB – равнобедренный, то OK является его медианой, биссектрисой и высотой, значит, $|AK| = |BK|$.

Обозначим $|BK|$ за x, $|OK|$ за h, тогда $|AB| = 2x, |CH| = h$. Применим теорему Пифагора для треугольника OBK:

$$|OK|^2 + |BK|^2 = |OB|^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + h^2 = 100.$$

Далее,

$$|AC| = |AB| \cdot \cos\widehat{CAB}, \ |CH| = |AC| \cdot \sin\widehat{CAB} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad h = |CH| = |AB| \cdot \sin\widehat{CAB} \cdot \cos\widehat{CAB} = 2x \cdot \sin 75^\circ \cos 75^\circ = \frac{x}{2}.$$

Решая систему из двух полученных уравнений, находим, что $x = 4\sqrt{5}$, $h = 2\sqrt{5}$. Наконец,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH| = xh = 40.$$

Ответ. $S_{\triangle ABC} = 40$.

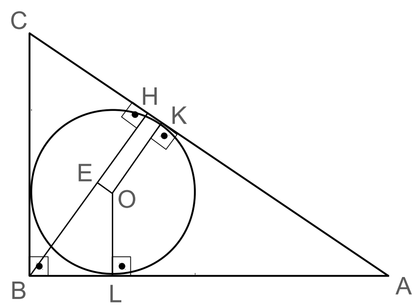
Задача 34.

Длины катетов прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найдите расстояние от центра окружности, вписанной в этот треугольник, до его высоты, проведённой к гипотенузе.

Идея. Воспользоваться параллельностью высоты, опущенной на гипотенузу, и радиуса вписанной окружности, проведённого в точку её касания с гипотенузой.
Указание. Рассмотреть прямоугольник, вершинами которого являются центр вписанной окружности, точка её касания с гипотенузой, основание высоты, опущенной на гипотенузу, и основание перпендикуляра, опущенного из центра вписанной окружности на высоту.

Решение. Без ограничения общности будем считать, что $|AB| = 48, |BC| = 36$.

Поскольку $BH \perp AC$ и $OK \perp AC$, а также $OE \perp BH$, то $OEHK$ – прямоугольник. Таким образом, для нахождения длины отрезка OE достаточно найти длину отрезка KH. Обе точки K и H лежат на гипотенузе, поэтому длина отрезка KH равна **модулю** разности длин отрезков AK и AH, поскольку, вообще говоря, мы заранее не знаем, который из отрезков AK и AH длиннее, то есть лежит ли точка H между точками A и K или, наоборот, точка K лежит между точками A и H. Именно поэтому берётся модуль.



Теперь немного посчитаем. По теореме Пифагора находим $|AC| = 60$. По известной формуле через катеты и гипотенузу прямоугольного треугольника находим длину радиуса окружности, вписанной в него, $|OK| = 12$.

Длину отрезка AH найдём из прямоугольного треугольника ABH:

$$\cos\widehat{BAH} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{4}{5}, \quad |AH| = |AB| \cdot \cos\widehat{BAH} = 48 \cdot \frac{4}{5} = \frac{192}{5}.$$

Для нахождения длины AK удобно использовать равенство длин касательных, проведённых к окружности из одной точки:

$$|AK| = |AL| = |AB| - |BL| = 48 - 12 = 36 \quad \Longrightarrow \quad |KH| = ||AK| - |AH|| = \frac{12}{5}.$$

Ответ. $\dfrac{12}{5}$.

Задача 35.

Середины высот треугольника лежат на одной прямой. Какое максимальное значение может принимать его площадь, если длина его наибольшей стороны равна 10?

Идея. Доказать, что треугольник из условия задачи – прямоугольный.
Указание. Воспользоваться тем фактом, что середины высот треугольника лежат на прямых, содержащих его средние линии и аксиомой Паша.

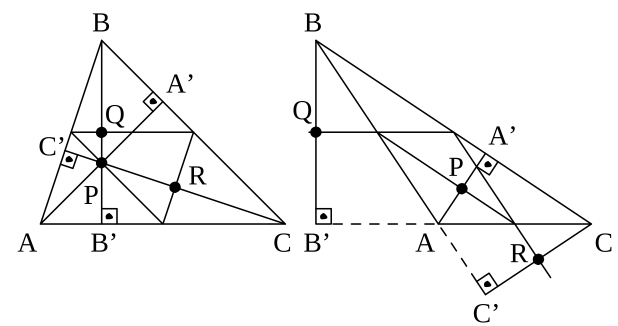
Решение. Докажем, что треугольник из условия задачи прямоугольный. Для этого нам потребуется такой факт:

Аксиома Паша.

Если прямая, лежащая в одной плоскости с треугольником, проходит через внутреннюю точку одной из его сторон, то она имеет общие точки хотя бы с одной из двух других его сторон.

Следствие.

Если прямая, лежащая в одной плоскости с треугольником, проходит через внутренние точки двух его сторон, то она не имеет общих точек с третьей его стороной.



Рассуждаем так: если треугольник ABC остроугольный, то середины P, Q, R его высот AA', BB', CC' есть внутренние точки его средних линий, поэтому они не могут лежать на одной прямой в силу следствия из аксиомы Паша. Если же треугольник ABC тупоугольный (угол A тупой), то середина P его высоты AA' есть внутренняя точка его средней линии, параллельной BC, а середины Q и R высот BB' и CC' лежат на продолжениях двух других средних линий. Но прямая PQ по аксиоме Паша должна проходить через точку, лежащую на средней линии, параллельной AB, то есть она не может содержать точку R. Для прямоугольного же треугольника, как нетрудно убедиться, условие задачи выполнено.

Далее всё просто. Если угол A – прямой, то BC – наибольшая сторона. Положим $|AB| = x$, тогда $|AC| = \sqrt{100 - x^2}$,

$$S^2_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}x^2(100 - x^2) \leqslant 625,$$

равенство достигается при $x^2 = 50$.

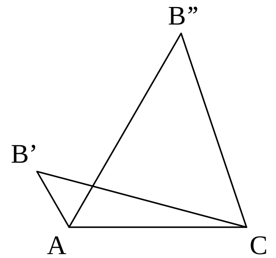
Ответ. 25.

1.2. Теоремы синусов и косинусов

Задача 1.

Длина стороны AC треугольника ABC равна 3, синусы величин его углов A и B равны $\sqrt{3}/2$ и $\sqrt{2}/2$ соответственно. Найдите длину стороны AB.

Идея. Воспользоваться теоремой синусов.
Указание. Найти величины углов треугольника ABC, рассмотреть все случаи.



Решение. Исходя из данных задачи, величина угла A может быть равной либо $\pi/3$, либо $2\pi/3$, а величина угла B может быть равна только $\pi/4$. (Если она равна $3\pi/4$, то сумма величин углов A и B будет в любом случае больше π.) Значит, величина угла C равна либо $\pi/12$, либо $5\pi/12$. Применяя теорему синусов, находим (можно отдельно вычислить $\sin\pi/12$ и $\sin 5\pi/12$)

$$|AB| = |AC| \cdot \frac{\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{B}} = 3 \cdot \frac{\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3(\sqrt{3}\pm 1)}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{3(\sqrt{3}\pm 1)}{2}$.

Задача 2.

В треугольнике ABC известно, что $|AB| = c$, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$. Найдите площадь треугольника ABC.

Идея. Найти длину стороны AC или BC.
Указание. Воспользоваться теоремой синусов.

Решение. Поскольку нам известны величины двух углов треугольника ABC, уместно применить теорему синусов. Сумма величин углов треугольника равна π, стало быть, $\widehat{C} = \pi - \alpha - \beta$. Записывая теорему синусов, находим

$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{C}} = \frac{|AC|}{\sin\widehat{B}} \quad\Longrightarrow\quad |AC| = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

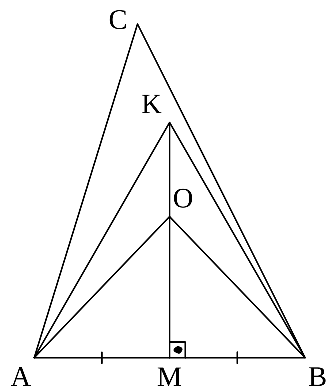
Наконец, воспользуемся формулой площади треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|AB|\cdot\sin\widehat{A} = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

Ответ. $\dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

Задача 3.

Внутри треугольника ABC взята точка K так, что треугольник ABK – равносторонний. Известно, что расстояние от точки K до центра окружности, описанной около треугольника ABC, равно 6, а величина угла ACB равна $\arcsin(5\sqrt{13}/26)$. Найдите длину стороны AB.



И д е я. Воспользоваться тем фактом, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, и точка K лежат на серединном перпендикуляре к стороне BK, причём обе внутри треугольника.
У к а з а н и е. Оценив величины углов треугольника ABC, показать, что он остроугольный. Выразить расстояние, данное в условии задачи, через искомую длину.

Р е ш е н и е. Сначала докажем, что точка O (центр окружности, описанной около треугольника ABC) лежит внутри него. Для этого достаточно доказать, что он остроугольный. В самом деле, из того, что точка K лежит внутри треугольника ABC, а величины углов BAK и ABK равны $\pi/3$, вытекает, что величины углов BAC и ABC больше, чем $\pi/3$. С другой стороны, из свойств функции арксинус вытекает, что величина угла ACB лежит в пределах от $\pi/6$ и $\pi/3$. Объединяя эти рассуждения, получаем, что треугольник ABC – остроугольный.

Далее все просто. Обозначим длину стороны AB за $2x$. Тогда по теореме синусов мы находим

$$|AO| = |BO| = \frac{|AB|}{2\sin\widehat{ACB}} = \frac{2x\sqrt{13}}{5}.$$

Затем из прямоугольных треугольников AKM и AOM получаем

$$|KM| = x\sqrt{3},\ |OM| = \frac{3\sqrt{3}}{5}x.$$

Наконец, в силу того, что точки O и K лежат внутри треугольника ABC, мы имеем

$$6 = |OK| = ||KM| - |OM|| = \frac{2\sqrt{3}}{5}x \quad\Longrightarrow\quad x = 5\sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad |AB| = 10\sqrt{3}.$$

О т в е т. $10\sqrt{3}$.

Задача 4.

В треугольнике ABC $|AC| = 3$, $\widehat{BAC} = \pi/6$, длина радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, равна 2. Докажите, что площадь треугольника ABC меньше 3.

Идея. Найти длину стороны BC.

Указание. Воспользоваться теоремой синусов, применить формулу площади треугольника через длины двух его сторон и синус величины угла между ними.

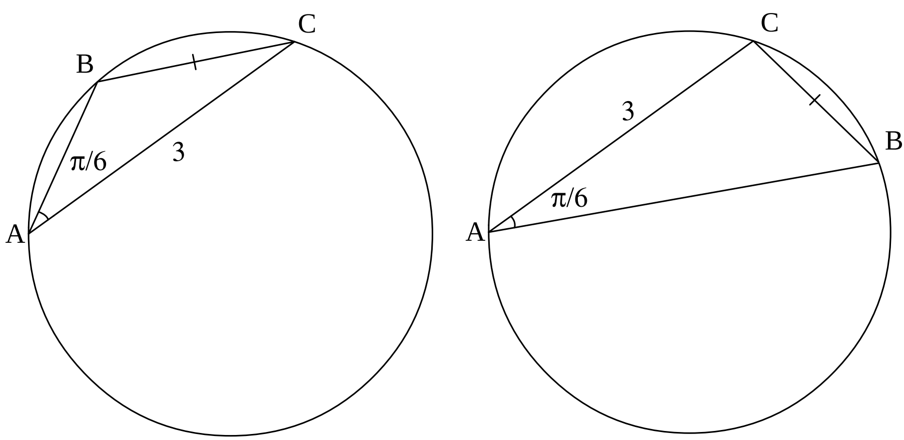
Решение. Обратим внимание на то, что в этой задаче не просят вычислить точное значение площади треугольника ABC, а всего лишь просят доказать, что она меньше трёх. Этим и займемся. Поскольку нам дана длина радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, применим теорему синусов:

$$\frac{|BC|}{\sin\widehat{BAC}} = 2R_{\triangle ABC} \quad\Longrightarrow\quad |BC| = 2.$$

Теперь воспользуемся формулой площади треугольника через две стороны и синус угла между ними:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ACB} = 3\sin\widehat{ACB} \leqslant 3,\ \text{т. к. } \sin\widehat{ACB} \leqslant 1.$$

Осталось доказать, что площадь треугольника ABC не может равняться 3. Если бы это было так, то синус величины угла ACB обязан бы был равняться 1, то есть угол ACB был бы прямым. Но в таком случае тангенс величины угла BAC равнялся бы отношению длин отрезков BC и AC, то есть $2/3$. Однако по условию $\widehat{BAC} = \pi/6$, а значит, $\operatorname{tg}\widehat{BAC} = 1/\sqrt{3}$. Противоречие. Итак, площадь треугольника ABC меньше 3.



Замечание. На самом деле данным из условия задачи соответствует **два** различных треугольника ABC. Геометрически это объясняется так: сначала можно построить окружность радиуса 2, потом провести её хорду длины 3. Это будет отрезок AC. Точка B обязана, с одной стороны, лежать на окружности, с другой стороны, лежать на луче, образующем с AC угол величины $\pi/6$. Но такой луч можно построить двумя способами, что и отражено на чертеже.

Задача 5.

В треугольнике ABC найдите величину угла CAB, если произведение квадрата длины стороны BC на сумму длин сторон AC и AB равно сумме кубов длин сторон AC и AB.

Идея. Проанализировать соотношение, данное в условии.
Указание. Преобразовать условие, данное в условии задачи. Воспользоваться теоремой косинусов.

Решение. Выпишем и преобразуем соотношение, данное в условии:

$$|BC|^2 \cdot (|AC| + |AB|) = |AC|^3 + |AB|^3 \quad \Longleftrightarrow \quad |BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - |AC| \cdot |AB|.$$

Так как по теореме косинусов

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos \widehat{A},$$

то получаем

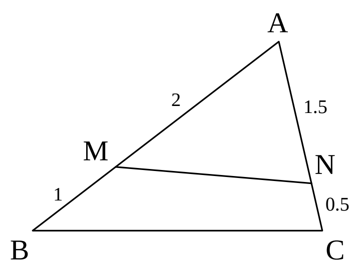
$$2 \cos \widehat{A} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{A} = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{3}$.

Задача 6.

В треугольнике ABC длины сторон AB и AC равны 3 и 2 соответственно. На стороне AB выбрана точка M, а на стороне AC точка N так, что $|AM| = 2$, $|AN| = 1.5$. Найдите площадь треугольника AMN, если длина стороны BC больше длины отрезка MN в $6/\sqrt{17}$ раз.

Идея. Найти величину угла BAC.
Указание. Положить $\widehat{BAC} = \alpha$, записать теорему косинусов для треугольников ABC и AMN.



Решение. Понятно, что для нахождения площади треугольника AMN нам не хватает только значения синуса величины угла BAC. Обозначим величину угла BAC за α, длину отрезка MN за x, тогда длина отрезка BC равна $6x/\sqrt{17}$, и запишем теорему косинусов для треугольников ABC и AMN:

$$\begin{cases} |BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos \widehat{BAC}, \\ |MN|^2 = |AM|^2 + |AN|^2 - 2 \cdot |AM| \cdot |AN| \cdot \cos \widehat{MAN} \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{36x^2}{17} = 9 + 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos \alpha, \\ x^2 = 4 + 2,25 - 2 \cdot 2 \cdot 1,5 \cos \alpha \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 13 - \dfrac{36x^2}{17} = 12 \cos \alpha, \\ 6,25 - x^2 = 6 \cos \alpha \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 13 - \frac{36x^2}{17} = 12,5 - 2x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{17}{4} \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{3}.$$

Теперь осталось найти синус величины угла BAC и записать формулу площади для треугольника ABC:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}\cdot|AM|\cdot|AN|\cdot\sin\alpha = \sqrt{2}.$$

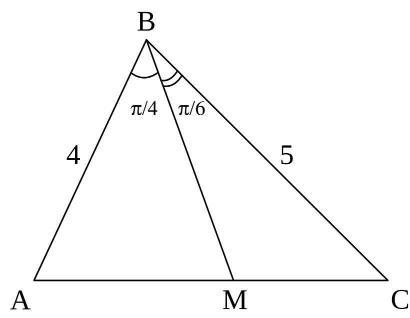
Ответ. $\sqrt{2}$.

Задача 7.

В треугольнике ABC $|AB| = 4, |BC| = 5$. Из вершины B проведен отрезок BM $(M \in AC)$, причём $\widehat{ABM} = \pi/4, \widehat{MBC} = \pi/6$.

а) В каком отношении точка M делит сторону AC?

б) Вычислите длины отрезков AM и MC.



Идея. Записать теорему синусов для треугольников AMB и CMB, воспользоваться тем, что синусы величин смежных углов равны.

Указание. Поделив полученные соотношения, вычислить отношение $|AM| : |MC|$.

Указание. С помощью теоремы косинусов найти длину стороны AC.

Решение. Для получения ответа на первый вопрос задачи используется та же схема, что и при доказательстве свойства биссектрисы, а именно, запишем теорему синусов для треугольников AMB и CMB:

$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{AMB}} = \frac{|AM|}{\sin\widehat{ABM}} \quad \Longrightarrow \quad \sin\widehat{AMB} = \frac{|AB|\cdot\sin\widehat{ABM}}{|AM|};$$

$$\frac{|BC|}{\sin\widehat{CMB}} = \frac{|MC|}{\sin\widehat{MBC}} \quad \Longrightarrow \quad \sin\widehat{CMB} = \frac{|BC|\cdot\sin\widehat{MBC}}{|MC|}.$$

Поскольку углы AMB и CMB – смежные, то синусы их величин равны. Отсюда следует, что

$$\frac{|AB|\cdot\sin\widehat{ABM}}{|AM|} = \frac{|BC|\cdot\sin\widehat{MBC}}{|MC|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|\cdot\sin\widehat{ABM}}{|BC|\cdot\sin\widehat{MBC}} = \frac{4\sqrt{2}}{5}.$$

Теперь, когда мы знаем отношение длин отрезков AM и MC, для получения ответа на второй вопрос задачи достаточно вычислить длину отрезка AC. Это легко делается с помощью теоремы косинусов.

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |AC|^2 = 16 + 25 - 40\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = 41 - 10(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Таким образом, $|AC| = \sqrt{41 - 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$. Наконец, найдём длины отрезков AM и MC:

$$\begin{cases} |AM| + |MC| = |AC|, \\ \dfrac{|AM|}{|MC|} = \dfrac{4\sqrt{2}}{5} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{4\sqrt{2}}{5}|MC| + |MC| = |AC|, \\ |AM| = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}|MC|, \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |MC| = \dfrac{|AC|}{1 + \dfrac{4\sqrt{2}}{5}}, \\ |AM| = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}|MC|, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |MC| = \dfrac{5\sqrt{41 - 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})}}{5 + 4\sqrt{2}}, \\ |AM| = \dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{41 - 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})}}{5 + 4\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Ответ. а) $\dfrac{|AM|}{|MC|} = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$;

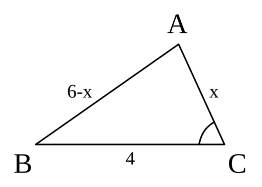
б) $|AM| = \dfrac{4\sqrt{2}}{5 + 4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{41 - 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$, $\quad |MC| = \dfrac{5}{5 + 4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{41 - 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$.

Задача 8.

В треугольнике ABC $|BC| = 4, |AB| + |AC| = 6$. Найдите площадь треугольника ABC, если $\cos\widehat{ACB} = 5/12$.

Идея. Вычислить длину стороны AC.

Указание. Положить $|AC| = x$, записать теорему косинусов для треугольника ABC.



Решение. Обозначим длину стороны AC за x. Тогда $|AB| = 6 - x$. Теперь можно записать теорему косинусов для треугольника ABC:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ACB} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (6 - x)^2 = x^2 + 16 - 8x \cdot \frac{5}{12} \quad \Longrightarrow \quad 20 = \frac{26x}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{30}{13}.$$

После этого нам осталось только вычислить синус величины угла ACB и записать формулу площади треугольника ABC:

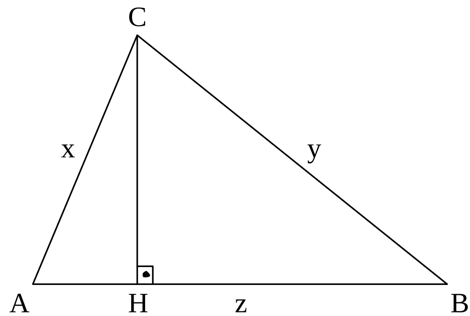
$$\sin\widehat{ACB} = \sqrt{1 - \cos^2\widehat{ACB}} = \frac{\sqrt{119}}{12},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{13} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{119}}{12} = \frac{5}{13}\sqrt{119}.$$

Ответ. $\dfrac{5}{13}\sqrt{119}$.

Задача 9.

В треугольнике ABC градусная мера угла ACB равна 75°, а длина высоты, опущенной из вершины этого угла, равна 1. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, если его периметр равен $4+\sqrt{6}-\sqrt{2}$.



Идея. Вычислить длину стороны AB треугольника ABC.

Указание. Обозначить длины отрезков AC, BC и AB за x, y и z, воспользоваться теоремой косинусов и формулой площади треугольника.

Решение. Сначала посчитаем синус и косинус 75°:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

В этой задаче по данным из условия невозможно непосредственно найти значения каких-либо других величин. Поэтому возникает необходимость введения неизвестных. Обозначим длины отрезков AC, BC и AB за x, y и z соответственно. Поскольку мы знаем синус угла ACB, то для нахождения длины радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, нам достаточно найти длину отрезка AB, то есть z. Воспользуемся теоремой косинусов, формулами площади (для того, чтобы задействовать данную нам длину высоты) и определением периметра треугольника ABC:

$$\begin{cases} |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|AC|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ACB}, \\ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CH| = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ACB}, \\ P_{\triangle ABC} = |AB| + |BC| + |AC| \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \\ \frac{1}{2}\cdot z\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot xy\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \\ 4+\sqrt{6}-\sqrt{2} = x+y+z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z^2 = (x+y)^2 - 2xy\cdot\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \\ xy = \frac{4z}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = z\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2}), \\ x+y = 4+\sqrt{6}-\sqrt{2}-z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad z^2 = (4+\sqrt{6}-\sqrt{2}-z)^2 - 2\cdot z\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Для того чтобы быстрее решить это уравнение, обозначим $P = 4+\sqrt{6}-\sqrt{2}$. Получаем

$$z^2 = (P-z)^2 - 2z(P-4)\cdot\frac{P}{4} \quad\Longleftrightarrow\quad z^2 = P^2 - 2Pz + z^2 - \frac{1}{2}Pz(P-4) \quad\Longleftrightarrow$$

$$\iff \quad 0 = P - 2z - \frac{1}{2}z(P-4) \quad \iff \quad 0 = 2P - 4z - Pz + 4z \quad \iff \quad z = 2.$$

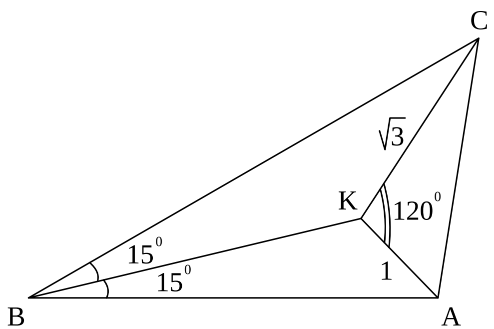
Осталось воспользоваться теоремой синусов:

$$2R_{\triangle ABC} = \frac{|AB|}{\sin \widehat{ACB}} \quad \Longrightarrow \quad R_{\triangle ABC} = \frac{2}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

О т в е т. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Задача 10.

Внутри треугольника ABC взята точка K таким образом, что $|AK| = 1$, $|KC| = \sqrt{3}$, $\widehat{AKC} = 120^\circ$, $\widehat{ABK} = 15^\circ$, $\widehat{KBC} = 15^\circ$. Найдите длину отрезка BK.



И д е я. Вычислить сумму градусных мер углов BAK и BCK, воспользоваться теоремой синусов.

У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой о сумме градусных мер углов треугольника.

У к а з а н и е. Записать теорему синусов для треугольников ABK и CBK.

Р е ш е н и е. Идея решения заключается в следующем: для нахождения длины отрезка BK нам необходимо найти градусную меру одного из двух углов – BAK или BCK. Мы можем написать три уравнения: две теоремы синусов (для треугольников ABK и CBK) и одно соотношение, связывающее градусные меры углов BAK и BCK.

Сначала запишем теорему о сумме градусных мер углов треугольника для треугольников ABK и CBK:

$$\widehat{BAK} + \widehat{ABK} + \widehat{AKB} = 180^\circ, \; \widehat{BCK} + \widehat{KBC} + \widehat{BKC} = 180^\circ \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{BAK} + 15^\circ + \widehat{AKB} + \widehat{BCK} + 15^\circ + \widehat{BKC} = 360^\circ.$$

Теперь заметим, что

$$\widehat{AKC} + \widehat{BKC} + \widehat{AKB} = 360^\circ \quad \Longrightarrow \quad \widehat{BKC} + \widehat{AKB} = 240^\circ.$$

Стало быть,

$$\widehat{BAK} + \widehat{BCK} = 90^\circ.$$

Обозначим градусную меру угла BAK за α, тогда $\widehat{BCK} = 90^\circ - \alpha$. После чего запишем теоремы синусов для треугольников ABK и CBK:

$$\frac{|BK|}{\sin \widehat{BAK}} = \frac{|AK|}{\sin \widehat{ABK}} \quad \Longrightarrow \quad |BK| \sin 15^\circ = \sin \alpha;$$

$$\frac{|BK|}{\sin\widehat{BCK}} = \frac{|CK|}{\sin\widehat{KBC}} \quad\Longrightarrow\quad |BK|\sin 15^\circ = \sqrt{3}\sin(90^\circ-\alpha).$$

Из эти двух соотношений вытекает, что $\sin\alpha = \sqrt{3}\sin(90^\circ-\alpha) \iff \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, то есть $\alpha = 60^\circ$. Наконец,

$$|BK| = \frac{\sin\alpha}{\sin 15^\circ} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}.$$

О т в е т. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$.

Задача 11.

Величины углов тупоугольного треугольника ABC удовлетворяют соотношению $\sin\left(\widehat{A}-\widehat{B}\right) = \sin^2\widehat{A} - \sin^2\widehat{B}$. Найдите периметр этого треугольника, если длина радиуса описанной около него окружности равна R, а величина одного из его углов равна $\pi/8$.

И д е я. Понять, что скрывается за соотношением $\sin\left(\widehat{A}-\widehat{B}\right) = \sin^2\widehat{A} - \sin^2\widehat{B}$.
У к а з а н и е. Преобразовать данное в условии задачи соотношение, воспользоваться теоремой синусов.

Р е ш е н и е. Преобразуем правую часть данного нам соотношения:

$$\sin^2\widehat{A} - \sin^2\widehat{B} = \left(\sin\widehat{A} - \sin\widehat{B}\right)\cdot\left(\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\cdot 2\sin\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2} =$$

$$= \left(2\sin\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)\cdot\left(2\sin\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right) = \sin\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)\cdot\sin\left(\widehat{A}-\widehat{B}\right).$$

С учётом этих преобразований из условия задачи и того факта, что величины углов A и B лежат в интервале $(0,\pi)$, мы получаем

$$\sin\left(\widehat{A}-\widehat{B}\right) = \sin\left(\widehat{A}-\widehat{B}\right)\sin\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right) \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin\left(\widehat{A}-\widehat{B}\right) = 0, \\ \sin\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right) = 1; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{B}, \\ \widehat{A}+\widehat{B} = \dfrac{\pi}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{B}, \\ \widehat{C} = \dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Поскольку по условию задачи треугольник ABC тупоугольный, то нам подходит только вариант $\widehat{A} = \widehat{B}$, то есть треугольник ABC равнобедренный, угол C – тупой, а углы A и B – острые. Их величины равны $\pi/8$, стало быть, величина угла C равна $3\pi/4$.

Осталось всего лишь записать теорему синусов:

$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{B}} = \frac{|AB|}{\sin\widehat{C}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{A}} = 2R_{\triangle ABC} \quad\Longrightarrow\quad |AB| = 2R\sin\frac{3\pi}{4} = R\sqrt{2};$$

$$|AC| = |BC| = 2R\sin\frac{\pi}{8} = 2R\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad P_{\triangle ABC} = R\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

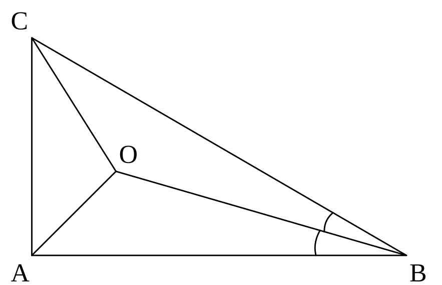
Ответ. $R\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$.

Задача 12.

В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. Площадь треугольника AOB относится к площади треугольника BOC как $\sqrt{3}:2$, $\widehat{ACB} = \pi/3$, $|AC| = 2$. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

Идея. Вычислить отношение длин сторон AB и BC.

Указание. Воспользоваться формулами площади, затем теоремами синусов и косинусов.



Решение. Поскольку центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис, то углы ABO и CBO равны. Записывая формулы площади для треугольников AOB и BOC, получаем

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|OB|\cdot\sin\widehat{ABO}}{\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|OB|\cdot\sin\widehat{CBO}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

После этого обозначим $|BC| = 2x$, $|AB| = \sqrt{3}x$ и применим теорему косинусов:

$$3x^2 = 4x^2 + 4 - 2\cdot 2x\cdot 2\cdot\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad x = 2,\ |AB| = 2\sqrt{3}.$$

Наконец, длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC найдём по теореме синусов:

$$R_{\triangle ABC} = \frac{|AB|}{2\sin\widehat{ACB}} = 2.$$

Ответ. 2.

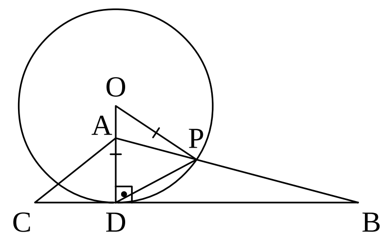
Задача 13.

В треугольнике ABC известно, что $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, $|BC| = a$. На стороне AB взята точка P так, что $|AP| : |PB| = 1 : 2$. Через точку P проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке D, причём AD – высота треугольника ABC. Найдите длину радиуса этой окружности.

Идея. Рассмотреть равнобедренный треугольник ODP, где O – центр окружности из условия задачи.

Указание. Найти длины отрезков BP и BD.

Указание. Воспользоваться теоремами синусов и косинусов в треугольниках ABC и BPD.



Решение. Идея решения заключается в следующем: если провести отрезок DP, затем обозначить центр окружности из условия задачи буквой O и соединить его с точками P и D, то треугольник OPD будет равнобедренным, поскольку $|OP| = |OD|$, а точка A будет лежать на прямой OD в силу того, что $OD \perp BC$ и $AD \perp BC$. С учётом этих рассуждений становится ясно, что нам достаточно найти длину отрезка DP и величину угла ADP, после чего из треугольника OPD мы найдём и длину радиуса нашей окружности.

Запишем теорему синусов для треугольника ABC:

$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{|AB|}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BAC}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|AB|}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Значит,

$$|AC| = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}, \ |AB| = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha};$$

$$\begin{cases} |AB| = |AP| + |PB|, \\ |PB| = 2|AP| \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |AP| = \dfrac{1}{3}|AB| = \dfrac{a\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\alpha}, \\ |PB| = \dfrac{2}{3}|AB| = \dfrac{2a\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\alpha}. \end{cases}$$

Также из прямоугольного треугольника ABD вытекает, что

$$|BD| = |AB| \cdot \cos\widehat{ABD} = \frac{a\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Для сокращения записи введём обозначение $c = \dfrac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$ и запишем теорему косинусов для треугольника BPD:

$$|DP|^2 = |BD|^2 + |PB|^2 - 2\cdot|BD|\cdot|DP|\cdot\cos\widehat{DBP} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |DP|^2 = c^2\cos^2\beta + \frac{4}{9}c^2 - \frac{4}{3}c^2\cos^2\beta \quad \Longrightarrow \quad |DP| = \frac{c}{3}\sqrt{4-3\cos^2\beta}.$$

Теперь запишем для него же теорему синусов:

$$\frac{|DP|}{\sin\widehat{DBP}} = \frac{|PB|}{\sin\widehat{BDP}} \quad\Longrightarrow\quad \sin\widehat{BDP} = \frac{|PB|\sin\widehat{DBP}}{|DP|} = \frac{2\sin\beta}{\sqrt{4-3\cos^2\beta}}.$$

Последний шаг: из треугольника OPD с учётом того, что $\widehat{ODP} = \pi/2 - \widehat{BDP}$, получаем

$$|OD| = \frac{|DP|}{2\cos\widehat{ODP}} = \frac{|DP|}{2\sin\widehat{BDP}} = \frac{\dfrac{c}{3}\sqrt{4-3\cos^2\beta}}{2\cdot\dfrac{2\sin\beta}{\sqrt{4-3\cos^2\beta}}} = \frac{c(4-3\cos^2\beta)}{12\sin\beta}.$$

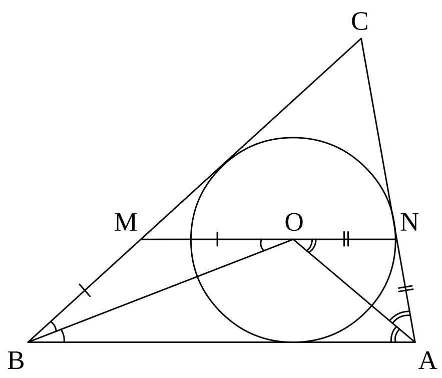
Осталось подставить выражение для c и получить ответ.

О т в е т. $\dfrac{a\sin(\alpha+\beta)(4-3\cos^2\beta)}{12\sin\alpha\sin\beta}$.

Задача 14.

Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую MN параллельно основанию AB (M лежит на BC, N лежит на AC). Известно, что $|AB| = 5, |MN| = 3$. Найдите периметр четырёхугольника $ABMN$.

И д е я. Доказать, что длина отрезка MN равна сумме длин отрезков BM и AN.
У к а з а н и е. Рассмотреть треугольники AON и BOM, где O – центр окружности из условия задачи.
У к а з а н и е. Воспользоваться определением биссектрисы и свойством внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых.



Р е ш е н и е. Обозначим центр окружности, вписанной в треугольник ABC, буквой O. Тогда OB и OA — биссектрисы углов ABC и BAC соответственно, значит,

$$\widehat{ABO} = \widehat{MBO}, \quad \widehat{BAO} = \widehat{NAO}.$$

С другой стороны, поскольку прямые AB и MN параллельны, то по теореме о равенстве внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых получаем, что

$$\widehat{ABO} = \widehat{BOM}, \quad \widehat{BAO} = \widehat{AON}.$$

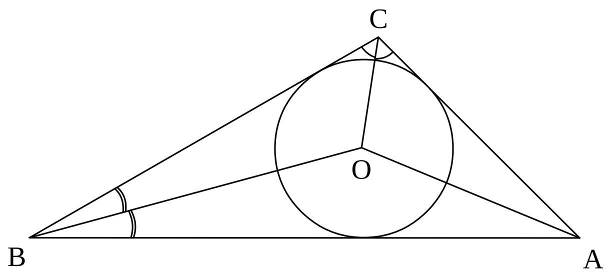
Стало быть, $\widehat{BOM} = \widehat{MBO}$, $\widehat{AON} = \widehat{NAO}$, поэтому треугольники AON и BOM равнобедренные, причём $|BM| = |MO|$, $|AN| = |NO|$. Сложив эти равенства, мы имеем $|BM| + |AN| = |MO| + |NO| = |MN|$. Теперь можно посчитать периметр четырёхугольника $ABMN$:

$$P_{ABMN} = |AB| + |MN| + |BM| + |AN| = |AB| + |MN| + |MN| = 11.$$

О т в е т. 11.

Задача 15.

В треугольнике ABC даны длины сторон $|AB| = \sqrt{2}, |BC| = \sqrt{5}$ и $|AC| = 3$. Сравните градусную меру угла BOC и $112,5^\circ$, если O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.



Идея. Воспользоваться тем, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.

Указание. Выразить градусную меру угла BOC через градусные меры углов треугольника ABC, воспользовавшись теоремой о сумме градусных мер углов треугольника.

Решение. Поскольку O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, то OB и OC – биссектрисы углов ABC и ACB соответственно. Поэтому

$$\widehat{BOC} = 180^\circ - \left(\widehat{OBC} + \widehat{OCB}\right) = 180^\circ - \left(\frac{1}{2}\widehat{ABC} + \frac{1}{2}\widehat{ACB}\right) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{BAC}\right) = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

Величину угла BAC можно легко найти по теореме косинусов:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\widehat{BAC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 5 = 9 + 2 - 6\sqrt{2}\cos\widehat{BAC} \quad \Longrightarrow \quad \cos\widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{BAC} = 45^\circ.$$

Таким образом,

$$\widehat{BOC} = 90^\circ + \frac{45^\circ}{2} = 112,5^\circ.$$

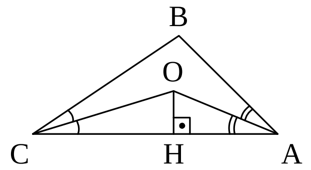
Ответ. $\widehat{BOC} = 112,5^\circ$.

Задача 16.

В треугольнике ABC известно, что $|BC| - |AB| = 0,15|AC|$. Чему равно произведение $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\widehat{BAC}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\widehat{ACB}\right)$?

Идея. Воспользоваться тем, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.

Указание. Воспользоваться теоремой о длинах отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, делит точками касания его стороны.



Решение. Пусть O – центр вписанной в треугольник ABC окружности, H – точка её касания со стороной AC. Заметим, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\widehat{BAC}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\widehat{ACB}\right)=\frac{|OH|}{|AH|}\cdot\frac{|CH|}{|OH|}=\frac{|CH|}{|AH|}.$$

По теореме о длинах отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, делит его стороны, находим

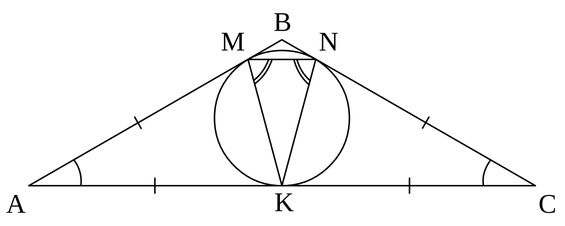
$$\frac{|CH|}{|AH|}=\frac{\dfrac{|AC|+|BC|-|AB|}{2}}{\dfrac{|AC|+|AB|-|BC|}{2}}=\frac{|AC|+0,15|AC|}{|AC|-0,15|AC|}=\frac{23}{17}.$$

Ответ. $\dfrac{23}{17}$.

Задача 17.

Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AC, AB и BC в точках K, M и N соответственно. Известно, что $|AK|=|KC|$, $\widehat{KMN}=75^\circ$, а произведение длин всех сторон треугольника KMN равно $9+6\sqrt{3}$. Найдите длины сторон треугольника ABC.

Идея. Доказать, что треугольники ABC и KMN – равнобедренные, найти градусные меры всевозможных углов.
Указание. Воспользоваться теоремой о длинах отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, делит точками касания его стороны, а также теоремой синусов.



Решение. По теореме о длинах отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, делит точками касания его стороны, имеем

$$|AK|=|AM|=p_{\triangle ABC}-|BC|,\ |KC|=|NC|=p_{\triangle ABC}-|AB| \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad p_{\triangle ABC}-|BC|=p_{\triangle ABC}-|AB|\quad\Longrightarrow\quad |AB|=|BC|.$$

Таким образом, треугольник ABC равнобедренный, $\widehat{BAC}=\widehat{ACB}$, треугольники AMK и CNK равнобедренные и равны (по двум сторонам и углу между ними), из чего вытекает, что $|KM|=|KN|$, $\widehat{AKM}=\widehat{CKN}=\widehat{AMK}=\widehat{CNK}$. Значит, треугольник KMN тоже равнобедренный, причём

$$\widehat{KNM}=\widehat{KMN}=75^\circ,\ \widehat{MKN}=180^\circ-\widehat{KNM}-\widehat{KMN}=30^\circ.$$

Теперь найдём длины сторон треугольника KMN. Обозначим длины отрезков KM и KN за x, тогда $|MN| = 2x\cdot\cos 75^\circ$. Подставляя эти величины в соотношение из условия задачи, находим

$$2x^3\cdot\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4} = 9+6\sqrt3 \quad\Longrightarrow\quad x^3 = \frac{18+12\sqrt3}{\sqrt6-\sqrt2} = \frac{(18+12\sqrt3)(\sqrt6+\sqrt2)}{4} =$$

$$= \frac{30\sqrt6+54\sqrt2}{4} = \frac{3\sqrt3}{2\sqrt2}\cdot(10+6\sqrt3) = \left(\frac{\sqrt3}{\sqrt2}\right)^3\cdot(\sqrt3+1)^3 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{3+\sqrt3}{\sqrt2}.$$

Наконец, вычислим длины сторон треугольника ABC, пользуясь соотношениями между длинами сторон и величинами углов в равнобедренном треугольнике.

$$\widehat{AMK} = \widehat{AKM} = \widehat{CKN} = \frac{180^\circ - \widehat{MKN}}{2} = 75^\circ,\ \widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{AMK} - \widehat{AKM} = 30^\circ,$$

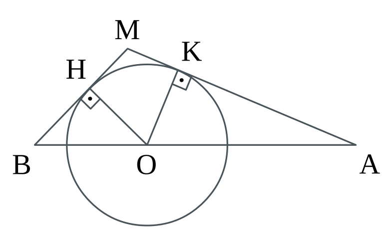
$$|AK| = \frac{|KM|}{2\cos\widehat{AKM}} = \frac{\dfrac{3+\sqrt3}{\sqrt2}}{\dfrac{\sqrt6-\sqrt2}{2}} = \frac{3+\sqrt3}{\sqrt3-1} = 3+2\sqrt3,$$

$$|AC| = 2\cdot|AK| = 6+4\sqrt3,\ |AB| = |BC| = \frac{|AC|}{2\cos\widehat{BAC}} = 4+2\sqrt3.$$

Ответ. $|AB| = |BC| = 4+2\sqrt3$, $|AC| = 6+4\sqrt3$.

Задача 18.

Точка O лежит на отрезке AB так, что $|AO| = 13$, $|OB| = 7$. С центром в O проведена окружность, длина радиуса которой равна 5. Из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M, причём точки касания лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника AMB.



Идея. Вычислить синус величины угла AMB.
Указание. Провести радиусы OH и OK, рассмотрев прямоугольные треугольники BOH и AOK, найти величины углов A и B, затем воспользоваться теоремой синусов.

Решение. Ясно, что $|AB| = |AO| + |OB| = 20$. Теперь для нахождения длины радиуса окружности, описанной около треугольника AMB, нам достаточно найти синус угла AMB. Проведём радиусы OH и OK, после чего, рассмотрев прямоугольные треугольники BOH и AOK, можно вычислить синусы и косинусы величин острых углов MAB и MBA:

$$\sin\widehat{MAB} = \frac{|OK|}{|AO|} = \frac{5}{13} \quad\Longrightarrow\quad \cos\widehat{MAB} = \frac{12}{13},$$

$$\sin\widehat{MBA} = \frac{|OH|}{|OB|} = \frac{5}{7} \quad\Longrightarrow\quad \cos\widehat{MBA} = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

Далее, поскольку $\widehat{AMB} = \pi - \widehat{MAB} - \widehat{MBA}$, то

$$\sin\widehat{AMB} = \sin\left(\widehat{MAB} + \widehat{MBA}\right) = \frac{10\sqrt{6}+60}{91}.$$

Наконец, по теореме синусов

$$2R_{\triangle AMB} = \frac{AB}{\sin\widehat{AMB}} = \frac{20\cdot 91}{10\sqrt{6}+60} \quad\Longrightarrow\quad R_{\triangle AMB} = \frac{91(6-\sqrt{6})}{30}.$$

Ответ. $\dfrac{91(6-\sqrt{6})}{30}$.

Задача 19.

Периметр треугольника ABC равен $40/3$, косинусы углов ABC и ACB равны $0,6$ и $0,28$ соответственно. Найдите площадь треугольника ABC.

Идея. Найти синусы величин всех углов треугольника ABC.
Указание. Вывести формулу площади треугольника через его периметр и синусы величин его углов.

Решение. Для начала найдём синусы величин всех углов треугольника ABC:

$$\sin\widehat{ABC} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{ABC}} = \frac{4}{5};\quad \sin\widehat{ACB} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{ACB}} = \frac{24}{25};$$

$$\sin\widehat{BAC} = \sin\left(\widehat{ACB} + \widehat{ABC}\right) = 0,8\cdot 0,28 + 0,6\cdot 0,96 = 0,8 = \frac{4}{5}.$$

Теперь выведем ещё одну формулу для площади треугольника, в которую входят его периметр и синусы величин его углов, полагая, что длины его сторон и величины противоположных им углов равны a и α, b и β, c и γ соответственно.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},\ a+b+c=P \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{P\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma},$$

$$b = \frac{P\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma},\quad c = \frac{P\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}.$$

Подставляя эти выражения в стандартную формулу площади, имеем

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{P^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2}.$$

Осталось лишь подставить сюда данные из нашей задачи.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1600\cdot 4\cdot 4\cdot 24}{2\cdot 9\cdot 5\cdot 5\cdot 25\cdot \dfrac{64^2}{25^2}} = \frac{25}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{25}{3}$.

Задача 20.

Известно, что для величин углов треугольника ABC выполнено соотношение $\cos^2\widehat{A}+\cos^2\widehat{B}+\cos^2\widehat{C}=1$. Найдите площадь этого треугольника, если длины радиусов вписанной в него и описанной около него окружностей равны $\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$ соответственно.

Идея. Проанализировать данное в условии соотношение.
Указание. Преобразовать данное в условии соотношение.
Указание. Воспользоваться формулами для длин радиусов окружностей, вписанной в прямоугольный треугольник и описанной около него.

Решение. Преобразуем данное нам в условии соотношение, пользуясь тем, что $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$:

$$\cos^2\widehat{A}+\cos^2\widehat{B}+\cos^2\widehat{C}=1 \iff \frac{1+\cos 2\widehat{A}}{2}+\frac{1+\cos 2\widehat{B}}{2}=1-\cos^2\widehat{C} \iff$$

$$\iff \cos 2\widehat{A}+\cos 2\widehat{B}=-2\cos^2\widehat{C} \iff \cos(\widehat{A}+\widehat{B})\cos(\widehat{A}-\widehat{B})=-\cos^2\widehat{C} \iff$$

$$\iff \cos\widehat{C}\left(\cos\widehat{C}-\cos(\widehat{A}-\widehat{B})\right)=0 \iff 2\cos\widehat{C}\sin\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}+\widehat{C}}{2}\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}-\widehat{C}}{2}\right)=0 \iff \cos\widehat{C}\cos\widehat{B}\cos\widehat{A}=0.$$

Очевидно, что один их косинусов обязан равняться нулю, поэтому наш треугольник – прямоугольный. Укажем формулу для вычисления его площади через длины радиусов вписанной в него (r) и описанной около него (R) окружностей. Пусть a и b – длины его катетов, c – длина гипотенузы. Тогда $c=2R$, $a+b=2R+2r$, $p=2R+r$, $S=pr=r^2+2Rr$. Подставляя сюда данные из условия задачи, получаем $S=3+6\sqrt{6}$.

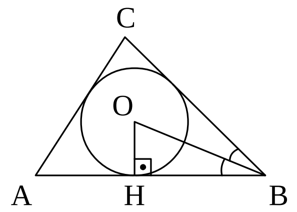
Ответ. $3+6\sqrt{6}$.

Задача 21.

Площадь треугольника равна $6\sqrt{6}$, периметр его равен 18, расстояние от центра вписанной в него окружности до одной из его вершин равно $\sqrt{56/3}$. Найдите длину наименьшей стороны этого треугольника.

Идея. Найти длину радиуса окружности, вписанной в треугольник, и величину одного из его углов.
Указание. Воспользоваться формулой площади треугольника через его площадь и полупериметр и формулой длин отрезков, на которые вписанная в треугольник окружность делит его стороны.
Указание. Применить теорему косинусов.

Решение. Обозначим вершины треугольника буквами A, B и C, центр вписанной в него окружности обозначим буквой O, а точку её касания со стороной AB обозначим буквой H. Без ограничения общности будем считать, что $|BO| = \sqrt{56/3}$. Поскольку нам известны площадь и периметр треугольника ABC, то, воспользовавшись формулой площади треугольника, мы можем найти длину радиуса вписанной в него окружности, то есть длину отрезка OH. После этого из треугольника BOH можно найти $|BH|$ и величину угла OBH:



$$|OH| = \frac{S_{\triangle ABC}}{p_{\triangle ABC}} = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3},\ |BH| = \sqrt{\frac{56}{3} - \frac{24}{9}} = 4,\ \cos\widehat{OBH} = 2\sqrt{\frac{3}{14}}.$$

После этого, применив формулу для длин отрезков, на которые вписанная в треугольник окружность делит его стороны, находим $|AC| = p_{\triangle ABC} - |BH| = 5$. Также заметим, что величина угла ABC в два раза больше величины угла OBH, поэтому $\cos\widehat{ABC} = 2\cos^2\widehat{OBH} - 1 = 5/7$, $\sin\widehat{ABC} = 2\sqrt{6}/7$. Наконец, обозначив $|AB| = x$, $|BC| = y$ и воспользовавшись формулой площади треугольника ABC, составляем систему уравнений $x+y+5 = 18$; $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{7}xy = 6\sqrt{6}$, решением которой являются пары $(6,7)$ и $(7,6)$.

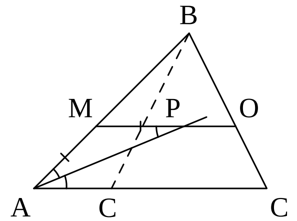
Ответ. 5.

Задача 22.

В треугольнике ABC $|AB| = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}, |BC| = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$. Точка M лежит на стороне AB, точка O лежит на стороне BC, причём $|BM| = \dfrac{3}{2}|AM|$, а прямые MO и AC параллельны. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MO в точке P, лежащей между точками M и O, причём длина радиуса окружности, описанной около треугольника AMP, равна $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Найдите длину стороны AC.

Идея. Рассмотреть треугольник AMP, доказать, что он – равнобедренный.

Указание. Из треугольника AMP найти величину угла BAC, воспользоваться теоремой косинусов в треугольнике ABC, проверить, лежит ли точка P на отрезке MO.



Решение. Ясно, что, поскольку нам дана длина радиуса окружности, описанной около треугольника AMP, то необходимо искать ещё какие-то элементы этого треугольника. Достаточно просто находится длина отрезка AM:

$$\begin{cases} |AB| = |AM| + |BM|, \\ |BM| = \dfrac{3}{2}|AM| \end{cases} \implies \begin{cases} |BM| = \dfrac{3}{5}|AB|, \\ |AM| = \dfrac{2}{5}|AB| \end{cases} \implies \begin{cases} |BM| = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}, \\ |AM| = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Далее заметим, что из параллельности прямых AC и MO вытекает равенство углов PAC и APM, а из того, что AP – биссектриса, следует равенство углов PAM и PAC. Значит, углы APM и PAM равны, то есть треугольник AMP – равнобедренный.

Обозначим величину углов PAM и APM за α, тогда величина угла BAC равна 2α. Запишем теорему синусов для треугольника AMP:

$$\frac{|AM|}{\sin\widehat{APM}} = 2R_{\triangle AMP} \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{|AM|}{2R_{\triangle AMP}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Значит,

$$\cos\widehat{BAC} = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}.$$

Теперь задача сведена к более-менее стандартной. Для нахождения $|AC|$ воспользуемся теоремой косинусов для треугольника ABC:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\cos\widehat{BAC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{125}{16} = \frac{25}{2} + |AC|^2 - 5|AC| \quad \Longrightarrow \quad |AC|^2 - 5|AC| + \frac{75}{16} = 0.$$

У этого уравнения два положительных корня: $|AC| = \frac{5}{4}$, $|AC| = \frac{15}{4}$ (на чертеже изображены оба варианта). При решении задачи может показаться, что они оба подходят под условие задачи. Однако это не так. Мы не проверили, что точка P лежит между точками M и O, что эквивалентно тому, что длина отрезка MP (которая равна длине отрезка AM, то есть $\sqrt{2}$) меньше длины отрезка MO.

Воспользуемся тем, что $|MO| = \frac{3}{5}|AC|$ (для обоснования этого факта можно использовать подобие треугольников или теорему Фалеса). Если $|AC| = \frac{5}{4}$, то $|MO| = \frac{3}{4} < \sqrt{2}$, а если $|AC| = \frac{15}{4}$, то $|MO| = \frac{9}{4} > \sqrt{2}$. Поэтому нам подходит только второй вариант.

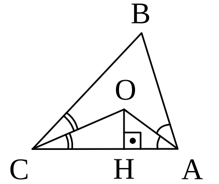
Ответ. $\frac{15}{4}$.

Задача 23.

В треугольнике ABC величина угла при вершине B равна $\pi/3$, а длины отрезков, соединяющих центр вписанной окружности с вершинами A и C, равны 4 и 6 соответственно. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC.

Идея. Вычислить величину угла AOC, воспользоваться теоремой косинусов.

Указание. Воспользоваться тем, что центр O окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис. Применить теорему о сумме величин углов треугольника.
Указание. Заметить, что искомая длина есть длина перпендикуляра, опущенного из точки O на AC.



Решение. Пусть O – центр вписанной в треугольник ABC окружности, H – точка её касания со стороной AC. Заметим, что

$$\widehat{AOC} = \pi - \widehat{OAC} - \widehat{OCA} = \pi - \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{ACB}}{2} = \pi - \frac{1}{2} \cdot \left(\pi - \widehat{ABC}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

После этого запишем теорему косинусов для треугольника AOC и воспользуемся формулами площади:

$$|AC|^2 = 36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 76 \quad \Longrightarrow \quad |AC| = 2\sqrt{19};$$

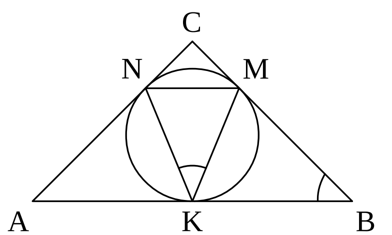
$$|OH| = \frac{|OA| \cdot |OC| \cdot \sin \widehat{AOC}}{|AC|} = 6\sqrt{\frac{3}{19}}.$$

Ответ. $6\sqrt{\dfrac{3}{19}}$.

Задача 24.

Известно, что длина радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, равна 1. Эта окружность касается его сторон AB, BC и AC в точках K, M и N соответственно, $\widehat{MKN} = \widehat{ABC} = 45^\circ$. Найдите длины сторон треугольника ABC.

Идея. Вычислить градусные меры углов треугольника ABC, воспользоваться формулами площади.
Указание. Использовать тот факт, что треугольники AKN и BKM – равнобедренные.



Решение. Обозначим $\widehat{A} = 2\alpha$. Заметим, что треугольники AKN и BKM – равнобедренные, поэтому $\widehat{AKN} = 90^\circ - \alpha$, $\widehat{BKM} = 67,5^\circ$. Далее,

$$\widehat{BKM} + \widehat{MKN} + \widehat{AKN} = 180^\circ \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 22,5^\circ, \quad \widehat{A} = 45^\circ, \quad \widehat{C} = 90^\circ.$$

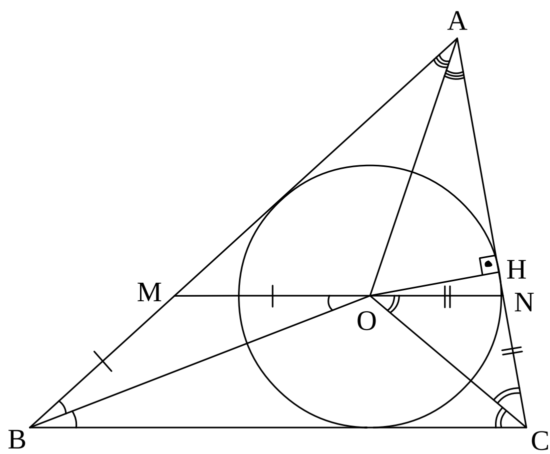
Значит, треугольник ABC является прямоугольным и равнобедренным. Положим $|AC| = |BC| = x$, тогда $|AB| = x\sqrt{2}$, и воспользуемся формулами площади треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{x^2}{2} = \frac{2x + x\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 + \sqrt{2}.$$

Ответ. $|AC| = |BC| = 2 + \sqrt{2}$, $|AB| = 2 + 2\sqrt{2}$.

Задача 25.

Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. $|BC| = \sqrt[4]{2}$, периметр треугольника AMN равен $3\sqrt[4]{2}$, а длина отрезка AO втрое больше длины радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите площадь треугольника ABC.



И д е я. Доказать, что периметр треугольника AMN равен сумме длин сторон AB и AC.

У к а з а н и е. Рассмотреть треугольники BMO и CNO, доказать, что они равнобедренные.

У к а з а н и е. Найти косинус угла BAC, воспользоваться теоремой косинусов.

Р е ш е н и е. Заметим, что равны углы MBO и OBC (так как OB – биссектриса), а также равны углы OBC и MOB (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых MN и BC). Из этого вытекает, что $\widehat{MBO} = \widehat{MOB}$, а значит, треугольник BMO – равнобедренный. Отсюда получаем, что $|BM| = |MO|$. Аналогично заключаем, что $|CN| = |ON|$. Но тогда мы можем легко доказать, что периметр треугольника AMN равен сумме длин сторон AB и AC:

$$P_{\triangle AMN} = |AM|+|AN|+|MO|+|ON| = |AM|+|BM|+|AN|+|CN| = |AB|+|AC|.$$

Далее из прямоугольного треугольника AOH имеем

$$\sin\widehat{OAH} = \frac{|OH|}{|AO|} = \frac{1}{3}.$$

С учётом того, что AO – биссектриса угла BAC, получаем

$$\cos\widehat{BAC} = 1 - 2\sin^2\widehat{OAH} = \frac{7}{9}; \quad \sin\widehat{BAC} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{BAC}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Раз мы нашли синус угла BAC, то площадь треугольника ABC логично искать с помощью формулы $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\widehat{BAC}$. Найдём $|AB|\cdot|AC|$, применяя теорему косинусов к треугольнику ABC:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\cos\widehat{BAC} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\iff \quad |BC|^2 = (|AB|+|AC|)^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AC| - \frac{14}{9}\cdot|AB|\cdot|AC| \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{2} = 9\sqrt{2} - \frac{32}{9}\cdot|AB|\cdot|AC| \quad \Longrightarrow \quad |AB|\cdot|AC| = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Значит,

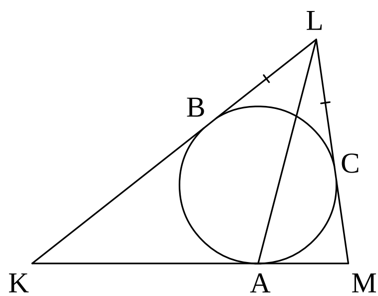
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9} = 1.$$

Ответ. 1.

Задача 26.

В треугольник KLM вписана окружность, которая касается его стороны KM в точке A. Известно, что $|AK| = 10$, $|AM| = 4$, $\widehat{KLM} = \pi/3$. Найдите длину отрезка AL.

Идея. Воспользоваться теоремой об отрезках, на которые вписанная окружность делит точками касания стороны треугольника.
Указание. Записать теорему косинусов для треугольников KLM и ALM.



Решение. Пользуясь теоремой о длинах отрезков, на которые вписанная окружность делит точками касания стороны треугольника, мы находим $|AK| = |BK| = 10$, $|AM| = |CM| = 4$. Введём обозначение $|LB| = |LC| = x$, тогда $|KL| = x+10$, $|LM| = x+4$. Записывая теорему косинусов для треугольника KLM, получаем:

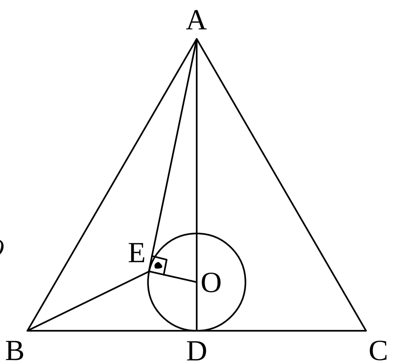
$$14^2 = (x+10)^2 + (x+4)^2 - 2(x+10)(x+4)\cdot\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = 6.$$

Далее, записывая ещё раз теорему косинусов для треугольника KLM, получаем $\cos\widehat{KML} = 1/7$, а из треугольника ALM с её же помощью находим $|AL| = 2\sqrt{183/7}$.

Ответ. $2\sqrt{\dfrac{183}{7}}$.

Задача 27.

В равностороннем треугольнике ABC проведена окружность с центром в точке O, проходящая через точку пересечения медиан треугольника ABC и касающаяся его стороны BC в её середине D. Из точки A проведена прямая, касающаяся этой окружности в точке E так, что градусная мера угла BAE меньше 30°. Найдите отношение площадей треугольника ABE и четырёхугольника $BEOD$.



Идея. Выразить все необходимые длины и величины углов через длину радиуса окружности из условия задачи.
Указание. Используя свойство точки пересечения медиан и соотношения в прямоугольном треугольнике, выразить отрезки AO, AD, AE и AB через длину радиуса окружности из условия задачи.
Указание. Площадь четырёхугольника $BEOD$ найти как разность площадей треугольников.

Решение. Отрезок AD является высотой и медианой треугольника ABC, поэтому центр окружности из условия задачи лежит на нём. Обозначим длину её радиуса за r, тогда, поскольку медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины, $|AD| = 6r$, $|AO| = 5r$. Из прямоугольного треугольника AOE находим

$$|OE| = r, \quad |AE| = 2\sqrt{6}r, \quad \sin\widehat{OAE} = \frac{1}{5}, \quad \cos\widehat{OAE} = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad S_{\triangle AOE} = \sqrt{6}r^2.$$

Затем из прямоугольного треугольника ABD получаем

$$|AB| = 4\sqrt{3}r, \quad |BD| = 2\sqrt{3}r, \quad S_{\triangle ABD} = 6\sqrt{3}r^2.$$

После этого найдём площадь треугольника ABE:

$$\sin\widehat{BAE} = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \widehat{OAE}\right) = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{3}}{10}, \quad S_{\triangle ABE} = \frac{24\sqrt{3} - 6\sqrt{6}}{5}r^2.$$

Наконец,

$$S_{BEOD} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle AOE} = \frac{6\sqrt{3} + \sqrt{6}}{5}r^2.$$

С учётом вышесказанного, искомое отношение равно $\dfrac{78 - 30\sqrt{2}}{17}$.

Ответ. $\dfrac{78 - 30\sqrt{2}}{17}$.

Задача 28.

В треугольнике длина стороны AB равна $2\sqrt{2}$, а длина радиуса окружности, описанной около него, равна 2. Отношение длин сторон AC и BC равно $\sqrt{8}$, длина стороны BC больше 1. Найдите площадь треугольника ABC.

Идея. Вычислить величину угла ACB, затем найти длины сторон AC и BC.
Указание. Воспользоваться теоремой синусов, затем теоремой косинусов.

Решение. По теореме синусов сразу находим

$$\sin\widehat{ACB} = |AB| : 2R_{\triangle ABC} = 1/\sqrt{2}.$$

Значит, величина угла ACB либо равна $\pi/4$, либо равна $3\pi/4$, а косинус этой величины равен либо $1/\sqrt{2}$, либо $-1/\sqrt{2}$.

Далее обозначим $|BC| = x$, тогда по условию задачи $x > 1$, $|AC| = \sqrt{8}x$. Выразим искомую величину через x:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ACB} = x^2,$$

после чего воспользуемся теоремой косинусов для нахождения x^2:

$$8 = x^2 + 8x^2 \pm 4x^2 \quad\Longrightarrow\quad x^2 = \frac{8}{5} \text{ или } x^2 = \frac{8}{13}.$$

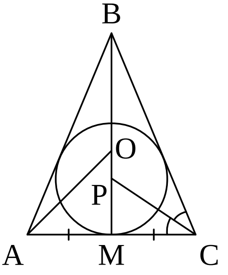
Под условие $x > 1$ подходит лишь вариант $x^2 = 8/5$.

Ответ. $\dfrac{8}{5}$.

Задача 29.

В треугольнике ABC даны длины сторон: $|AB| = |BC| = 13$, $|AC| = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанной в него и описанной около него.

Идея. Воспользоваться тем, что у равнобедренного треугольника центры вписанной в него и описанной около него окружностей лежат на высоте, опущенной на основание.
Указание. Воспользоваться нужными формулами для вычисления длин радиусов окружностей.



Решение. Поскольку отрезок BM является как биссектрисой треугольника ABC, так и серединным перпендикуляром к стороне AC, то центры окружностей лежат на нём. Найдём длины их радиусов:

$$p_{\triangle ABC} = 18; \quad S_{\triangle ABC} = \sqrt{18\cdot5\cdot5\cdot8} = 60;$$

$$|BO| = R_{\triangle ABC} = \frac{|AB|\cdot|AC|\cdot|BC|}{4S_{\triangle ABC}} = \frac{169}{24}; \quad |MP| = r_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{p_{\triangle ABC}} = \frac{10}{3}.$$

Наконец,

$$|BM| = \sqrt{|AB|^2 - |AM|^2} = 12; \quad |OP| = \big||BM| - |BO| - |MP|\big| = \frac{39}{24}.$$

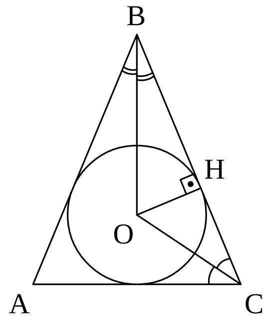
Ответ. $\dfrac{39}{24}$.

Задача 30.

В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB| = |BC|$) отношение расстояний от центра вписанной в этот треугольник окружности до вершин углов B и C соответственно равно k. Найдите величины углов треугольника ABC. При каких значениях k задача имеет решение?

Идея. Воспользоваться тем, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.

Указание. Опустить из центра вписанной в треугольник ABC окружности перпендикуляр на боковую сторону, рассмотреть получившиеся прямоугольные треугольники.



Решение. Пусть O – центр вписанной в треугольник ABC окружности, H – точка её касания со стороной BC. Обозначим $\widehat{ACB} = 2\alpha$, тогда $0 < \alpha < \pi/4$ (т.к. угол ACB острый), $\widehat{ABC} = \pi - 4\alpha$, $\widehat{OCH} = \alpha$, $\widehat{OBH} = \pi/2 - 2\alpha$. Из прямоугольных треугольников OBH и OCH получаем

$$|OB| = \frac{|OH|}{\sin\widehat{OBH}}, \quad |OC| = \frac{|OH|}{\sin\widehat{OCH}} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{|OB|}{|OC|} = \frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 2k\sin^2\alpha + \sin\alpha - k = 0.$$

Решая это уравнение, находим

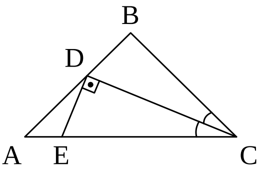
$$(\sin\alpha)_1 = \frac{-1-\sqrt{8k^2+1}}{4k}, \quad (\sin\alpha)_2 = \frac{-1+\sqrt{8k^2+1}}{4k}.$$

У нас $0 < \alpha < \pi/4$, поэтому $0 < \sin\alpha < 1/\sqrt{2}$. Очевидно, что k может быть только положительным числом, стало быть, первый из полученных корней всегда меньше нуля и нам не подходит. Легко проверить, что второй корень удовлетворяет нашим условиям при всех $k > 0$.

Ответ. $\widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 2\arcsin\dfrac{\sqrt{8k^2+1}-1}{4k}$, $\widehat{ABC} = \pi - 4\arcsin\dfrac{\sqrt{8k^2+1}-1}{4k}$, задача имеет решение при всех $k > 0$.

Задача 31.

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Вычислите длину отрезка AD, если $|CE| = 2$.



И д е я. Воспользоваться теоремой синусов и соотношениями в прямоугольном треугольнике.
У к а з а н и е. Рассмотреть треугольники ADC и EDC.

Р е ш е н и е. В этой задаче главное – понять, между какими геометрическими элементами есть зависимость. Если посмотреть, какие величины мы знаем и что нам нужно найти, то становится ясно, что нужно рассматривать треугольники ADC и EDC, поскольку, во-первых, их углы связаны друг с другом, а во-вторых, в них входят как отрезок AD, так и отрезок CE.

Обозначим величину угла ACD за α, тогда с учётом того, что CD – биссектриса, и того, что треугольник ABC равнобедренный, имеем $\widehat{DAC} = 2\alpha$. Запишем теорему синусов в треугольнике ADC:

$$\frac{|AD|}{\sin\widehat{ACD}} = \frac{|CD|}{\sin\widehat{DAC}} \quad \Longrightarrow \quad |AD| = |CD| \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{|CD|}{2\cos\alpha}.$$

С другой стороны, из прямоугольного треугольника EDC вытекает, что

$$|CD| = |CE| \cdot \cos\widehat{ACD} = 2\cos\alpha.$$

Таким образом,

$$|AD| = \frac{2\cos\alpha}{2\cos\alpha} = 1.$$

О т в е т. 1.

Задача 32.

В треугольнике ABC $|AB| = 4$, $|AC| = 3$, угол C – острый. Известно, что $\sin\left(\widehat{ACB} - \widehat{ABC}\right) = 7/25$. Найдите площадь треугольника ABC.

И д е я. Проанализировать соотношение на углы из условия.
У к а з а н и е. Используя теорему синусов и условие, получить два уравнения на углы ACB и ABC.

Р е ш е н и е. Обозначим $\gamma = \widehat{ACB}$, $\beta = \widehat{ABC}$. По теореме синусов получаем

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{AC}{\sin\beta} \quad \Longrightarrow \quad 4\sin\beta = 3\sin\gamma.$$

Так как угол ACB острый, то из условия $\sin(\gamma - \beta) = 7/25$ следует, что

$$\gamma - \beta = \arcsin\frac{7}{25} \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \beta + \arcsin\frac{7}{25}.$$

Подставим это выражение для γ в полученное выше соотношение:

$$4\sin\beta = 3\sin\left(\beta + \arcsin\frac{7}{25}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad 4\sin\beta = 3\sin\beta\cdot\frac{24}{25} + 3\cos\beta\cdot\frac{7}{25}.$$

Приводя подобные слагаемые, имеем $4\sin\beta = 3\cos\beta$. Учитывая соотношение $4\sin\beta = 3\sin\gamma$, получаем:

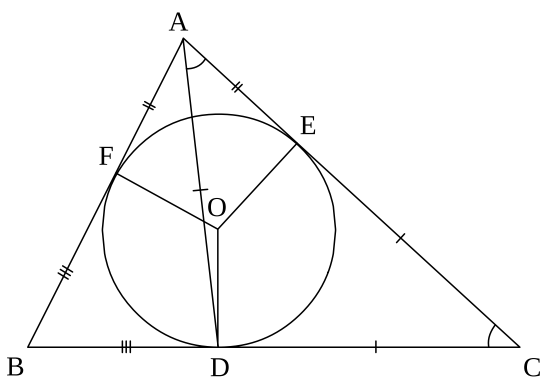
$$\cos\beta = \sin\gamma \iff \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\gamma \iff \frac{\pi}{2} - \beta = \gamma \iff \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$, то есть треугольник прямоугольный и его площадь равна 6.

Ответ. 6.

Задача 33.

В треугольник ABC, в котором длина стороны BC равна 9, вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Известно, что $|AD| = |DC|$, $\cos\widehat{BCA} = 2/3$. Найдите длину стороны AC.



Идея. Воспользоваться теоремой косинусов.

Указание. Обозначить длину отрезка AD за x, воспользоваться теоремой косинусов и тем, что D – точка касания стороны BC с окружностью, вписанной в треугольник ABC.

Решение. Обозначим длины отрезков AD и DC за x. Тогда $|BD| = 9 - x$, а из равнобедренного треугольника ADC мы получаем $|AC| = 2 \cdot |DC| \cdot \cos\widehat{ACD} = 4x/3$.

Поскольку D – точка, в которой окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC, то справедливо соотношение

$$|DC| = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} \implies |AB| = 9 - \frac{2x}{3}.$$

Теперь заметим, что

$$\widehat{ADB} = \pi - \widehat{ADC} = \pi - (\pi - 2 \cdot \widehat{ACD}) = 2 \cdot \widehat{ACD}.$$

Поэтому $\cos\widehat{ADB} = 2\cos^2\widehat{ACD} - 1 = -1/9$.

Наконец, запишем теорему косинусов для треугольника ABD:

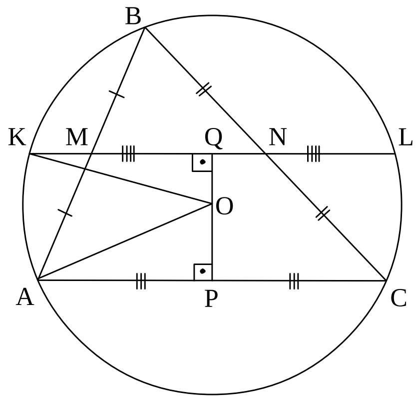
$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |BD| \cdot \cos\widehat{ADB} \implies$$

$$\implies \left(9 - \frac{2x}{3}\right)^2 = x^2 + (9-x)^2 + \frac{2x}{9} \cdot (9 - x) \implies x = 3, \quad |AC| = \frac{4x}{3} = 4.$$

Ответ. 4.

Задача 34.

Треугольник ABC со стороной AB, длина которой равна 4, и углом A, градусная мера которого равна 60°, вписан в окружность с длиной радиуса $2\sqrt{3}$. Найдите длину средней линии этого треугольника, параллельной AC, и расстояние между точками, в которых её продолжение пересекает окружность.



Идея. Рассмотреть треугольник, образованный центром окружности и точками, в которых продолжение средней линии треугольника ABC, параллельной AC, пересекает окружность.

Указание. Для ответа на первый вопрос воспользоваться теоремами синусов и косинусов для треугольника ABC.

Указание. Для ответа на второй вопрос найти расстояния от центра окружности до AC и средней линии треугольника ABC, параллельной AC.

Решение. Обозначим середины сторон AB и BC буквами M и N соответственно, тогда MN – средняя линяя, длину которой нам надо найти. Точки, в которых её продолжение пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, обозначим буквами K и L.

Длину MN найти достаточно просто: она равна половине длины AC. Нахождение $|AC|$ является в общем-то стандартной задачей, необходимо всего лишь записать теоремы синусов и косинусов для треугольника ABC:

$$\frac{|BC|}{\sin\widehat{A}} = 2R_{\triangle ABC} \quad \Longrightarrow \quad |BC| = 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6;$$

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\cos\widehat{A} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 36 = 16 + |AC|^2 - 2\cdot 4\cdot|AC|\cdot\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad |AC| = 2 + 2\sqrt{6}.$$

Таким образом, $|MN| = 1 + \sqrt{6}$.

Нахождение $|KL|$ является более сложной задачей, требующей довольно тонких рассуждений. Во-первых, заметим, что треугольник ABC остроугольный, поскольку AC – его наибольшая сторона и $|AC|^2 = 28 + 8\sqrt{6} < |AB|^2 + |BC|^2 = 52$. Из этого вытекает, что точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит внутри него.

Проведём через точку O отрезок QP ($Q \in KL, P \in AC$), перпендикулярный AC и KL. Тогда $\triangle OQK = \triangle OQL$ (поскольку $|OK| = |OL|$, QO — общая, углы OQL и OQK – прямые), из чего следует, что $|KQ| = \frac{1}{2}|KL|$. Аналогично можно получить, что $|AP| = \frac{1}{2}|AC|$. Тогда

$$|OP| = \sqrt{|AO|^2 - |AP|^2} = \sqrt{12 - (7 + 2\sqrt{6})} = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Теперь, с учётом того что точки O и Q лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, имеем

$$|QP| = |AM| \cdot \sin\widehat{A} = \sqrt{3}; \quad |QO| = |QP| - |OP| = \sqrt{2}.$$

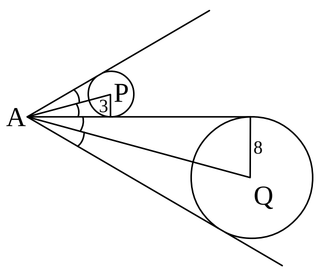
Наконец, $|KQ| = \sqrt{|OK|^2 - |QO|^2} = \sqrt{10} \quad \Longrightarrow \quad |KL| = 2\sqrt{10}.$

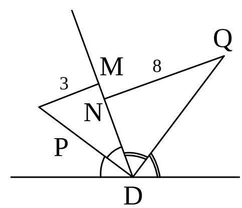
О т в е т. $1 + \sqrt{6}$, $2\sqrt{10}$.

Задача 35.

В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. В треугольники ADC и ADB вписаны окружности, длины радиусов которых равны 3 и 8 соответственно, касающиеся отрезка AD в точках M и N. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $|ND| = 4$.

И д е я. Выяснить, в каком порядке расположены точки A, M, N и D.





У к а з а н и е. Рассмотреть прямоугольные треугольники, каждый из которых образован точкой A, центром одной из окружностей из условия задачи и точкой её касания с отрезком AD.

У к а з а н и е. Рассмотреть треугольник, образованный точкой D и центрами окружностей из условия задачи, доказать, что он прямоугольный.

Р е ш е н и е. Будем считать, что P – центр окружности, вписанной в треугольник ADC, а Q – центр окружности, вписанной в треугольник ADB. При решении этой задачи особое внимание надо обратить на тот момент, что в условии не сказано, какая из точек M и N является точкой касания какой окружности с отрезком AD. Поэтому придется рассматривать два случая.

Первым этапом решения является рассмотрение конфигурации, образованной точками A, P, Q и точками M и N. Поскольку центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис, а AD – биссектриса угла A, то углы PAD и QAD равны. Поэтому точка касания отрезка AD и окружности, вписанной в треугольник ADC, лежит между точкой A и точкой касания отрезка AD и окружности, вписанной в треугольник ADB (для обоснования этого факта достаточно рассмотреть прямоугольные треугольники $APM(N)$ и $AQN(M)$).

Вторым этапом решения является рассмотрение конфигурации, образованной точками D, P, Q и точками M и N. Поскольку DP и DQ – биссектрисы смежных углов ADB и ADC, то угол PDQ – прямой, из чего (по формулам приведения) вытекает, что тангенс величины угла PDA равен котангенсу величины угла QDA. Далее, если считать, что точка M – точка касания отрезка AD и меньшей окружности (как изображено на чертеже), то мы получаем

$$\operatorname{tg}\widehat{QDA} = \frac{|QN|}{|DN|} = 2 = \operatorname{ctg}\widehat{PDA} = \frac{|DM|}{|PM|} \quad \Longrightarrow \quad |DM| = 6,$$

что соответствует полученному ранее результату, гласящему, что точка M лежит между точками A и N. Если же мы будем полагать, что точка M есть точка касания отрезка AD и большей окружности, то, рассуждая аналогично, мы находим

$$\operatorname{tg}\widehat{PDA} = \frac{|PN|}{|DN|} = \frac{3}{4} = \operatorname{ctg}\widehat{QDA} = \frac{|DM|}{|QM|} \quad \Longrightarrow \quad |DM| = 6,$$

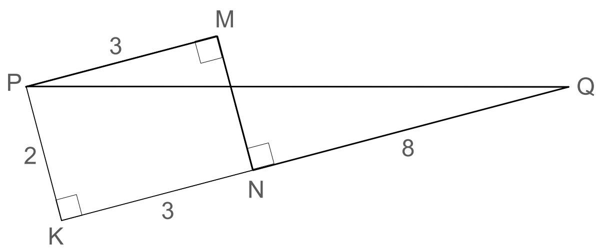
что, невозможно. Наконец, по теореме Пифагора мы находим

$$|DP| = \sqrt{3^2+6^2} = 3\sqrt{5},\ |DQ| = \sqrt{8^2+4^2} = 4\sqrt{5},$$

$$|PQ| = \sqrt{|DP|^2+|DQ|^2} = 5\sqrt{5}.$$

З а м е ч а н и е. Длину отрезка PQ можно было найти из прямоугольного треугольника PQK, где K – основание перпендикуляра, проведённого из точки P к прямой NQ:

$$PQ^2 = \sqrt{PK^2+QK^2} = \sqrt{2^2+11^2} = 5\sqrt{5}.$$



О т в е т. $5\sqrt{5}$.

Задача 36.

В треугольнике KLM отношение длин радиусов описанной около него и вписанной в него окружностей равно k. Окружность, вписанная в треугольник KLM, касается его сторон в точках A, B и C. Найдите отношение площадей треугольников ABC и KLM.

И д е я. Выразить площади треугольников ABC и KLM через синусы углов треугольника KLM и длины радиусов данных окружностей.

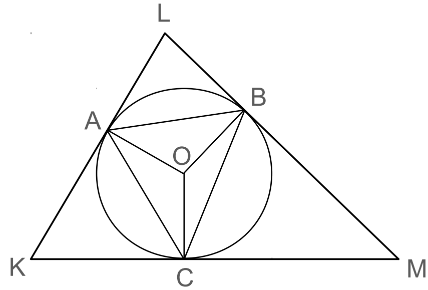
У к а з а н и е. Площадь треугольника ABC найти как сумму площадей треугольников AOB, AOC и BOC, где O – центр описанной около треугольника ABC окружности.

У к а з а н и е. Для вычисления площади треугольника KLM воспользоваться формулой $S = pr$, предварительно выразив стороны треугольника через радиус описанной окружности и синусы соответствующих углов углов.

Р е ш е н и е. Пусть $\widehat{KLM} = \alpha$, $\widehat{LKM} = \beta$, $\widehat{KML} = \gamma$, r – длина радиуса вписанной окружности, O – её центр, а R – длина радиуса описанной окружности.

Заметим, что

$\widehat{AOB} = \pi - \alpha, \quad \widehat{AOC} = \pi - \beta, \quad \widehat{BOC} = \pi - \gamma,$



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \\ = \frac{1}{2} r^2 (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

$S_{\triangle KLM} = rp_{\triangle KLM} = rR(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$

Следовательно,

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle KLM}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{R} = \frac{1}{2k}.$$

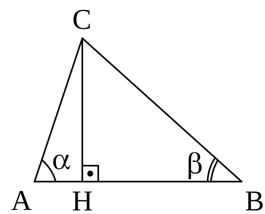
Ответ. $\dfrac{1}{2k}$.

1.3. Биссектриса, медиана, высота

Задача 1.

В остроугольном треугольнике площади S известны величины α и β углов A и B. Найдите длину высоты, опущенной на сторону, прилежащую к углам A и B.

Идея. Воспользоваться формулой площади треугольника через длины его стороны и проведённой к ней высоты.
Указание. Выразить длину стороны AB через длину высоты, проведённой к ней, и величины его углов.



Решение. Поскольку по условию треугольник ABC – остроугольный, то основание высоты, опущенной из вершины C на AB (обозначим его H), лежит на стороне AB. Поэтому $|AB| = |AH| + |HB|$.

Обозначим длину высоты CH за h. Из прямоугольных треугольников ACH и BCH вытекает

$$|AH| = |CH| \cdot \operatorname{ctg} \widehat{HAC} = h \operatorname{ctg}\alpha, \quad |HB| = |CH| \cdot \operatorname{ctg} \widehat{HBC} = h \operatorname{ctg}\beta.$$

Значит, $|AB| = h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$. Наконец, воспользуемся формулой площади треугольника через его основание и высоту:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH| \quad \Longrightarrow \quad S = \frac{1}{2} h^2 (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{\frac{2S}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}}.$$

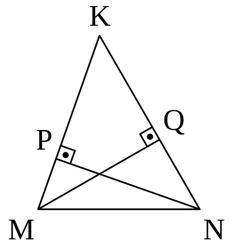
Замечание. Полученная выше формула $|AB| = h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$ очень полезна. Запомните её. Она Вам ещё не раз пригодится.

Ответ. $\sqrt{\dfrac{2S}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}}$.

Задача 2.

В треугольнике KMN, в котором $\sin\widehat{KNM}=\sqrt{3}/2$, $\cos\widehat{KMN}=1/3$, проведены высоты NP и MQ. Найдите значение отношения $|NP|:|MQ|$.

Идея. Найти величины углов треугольника KMN.
Указание. Выразить длины высот NP и MQ через длину стороны MN.



Решение. Поскольку синус величины угла KNM равен $\sqrt{3}/2$, то, вообще говоря, величина угла KNM может быть равна как $\pi/3$, так и $2\pi/3$. Однако, поскольку косинус величины угла KMN равен $1/3$, то величина угла KMN больше, чем $\pi/3$, но меньше, чем $\pi/2$ (это следует из свойств арккосинуса). Из этого вытекает, что величина угла KNM не может равняться $2\pi/3$, так как в таком случае сумма величин углов треугольника KMN окажется больше чем π. Значит, треугольник ABC остроугольный, точки P и Q лежат на сторонах KM и KN.

Из прямоугольных треугольников MNP и MNQ находим

$$\begin{cases} |NP|=|MN|\cdot\sin\widehat{NMP}, \\ |MQ|=|MN|\cdot\sin\widehat{MNQ} \end{cases} \implies \frac{|NP|}{|MQ|}=\frac{\sin\widehat{NMP}}{\sin\widehat{MNQ}}=\frac{\sin\widehat{KMN}}{\sin\widehat{KNM}};$$

$$\sin\widehat{KMN}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{KMN}}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3} \implies \frac{|NP|}{|MQ|}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$.

Задача 3.

Длины сторон AB, BC и AC треугольника ABC образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии, если известно, что отношение длины высоты треугольника ABC, проведённой из вершины A, к длине радиуса вписанной в этот треугольник окружности равно 3.

Идея. Воспользоваться различными формулами площади.
Указание. Обозначить $|AB|=c$, $|BC|=qc$, $|AC|=q^2c$.

Решение. Положим $|AB|=c$, $|BC|=qc$, $|AC|=q^2c$. Тогда, записывая двумя разными способами площадь треугольника ABC, получаем

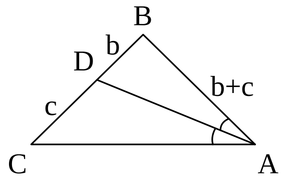
$$S_{\triangle ABC}=\frac{|AB|+|BC|+|AC|}{2}\cdot r_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot h_{AB} \implies$$

$$\implies (c+qc+q^2c)\cdot r_{\triangle ABC}=qc\cdot h_{AB} \implies 3=\frac{h_{AB}}{r_{\triangle ABC}}=\frac{1+q+q^2}{q} \iff q=1.$$

Ответ. 1.

Задача 4.

В равнобедренном треугольнике ABC $|AB| = |BC|$, AD – биссектриса, $|BD| = b$, $|DC| = c$. Найдите длину биссектрисы AD.



Идея. Воспользоваться основным свойством биссектрисы треугольника и второй формулой её длины.
Указание. Вычислить длину основания AC.

Решение. Так как $|AB| = |BC| = b + c$, то для вычисления длины основания AC воспользуемся основным свойством биссектрисы:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BD|} \quad \Longrightarrow \quad |AC| = \frac{|AB| \cdot |DC|}{|BD|} = \frac{c(b+c)}{b}.$$

Для нахождения $|AD|$ воспользуемся второй формулой длины биссектрисы треугольника:

$$|AD| = \sqrt{|AB| \cdot |AC| - |BD| \cdot |DC|} = \sqrt{\frac{c(b+c)^2}{b} - bc} = \sqrt{2c^2 + \frac{c^3}{b}}.$$

Ответ. $\sqrt{2c^2 + \dfrac{c^3}{b}}$.

Задача 5.

Известно, что длины высот треугольника равны h_1, h_2 и h_3. Найдите его площадь.

Идея. Выразить длины сторон треугольника через его площадь и длины его высот.
Указание. Воспользоваться формулой Герона.

Решение. Обозначим площадь треугольника за S. Тогда длины его сторон равны $2S/h_1$, $2S/h_2$ и $2S/h_3$. Записывая формулу Герона, получаем

$$S = \sqrt{\left(\frac{S}{h_1} + \frac{S}{h_2} + \frac{S}{h_3}\right)\left(\frac{S}{h_1} + \frac{S}{h_2} - \frac{S}{h_3}\right)\left(\frac{S}{h_1} - \frac{S}{h_2} + \frac{S}{h_3}\right)\left(\frac{S}{h_2} + \frac{S}{h_3} - \frac{S}{h_1}\right)} \quad \Longleftrightarrow$$

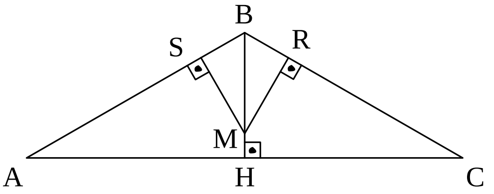
$$\Longleftrightarrow S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)}}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)}}$.

Задача 6.

Точка M лежит внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC на расстоянии 6 от его боковых сторон и на расстоянии $\sqrt{3}$ от его основания. Найдите длину этого основания, если $\widehat{B} = 2\pi/3$.

Идея. Воспользоваться тем, что точка M лежит на биссектрисе BH треугольника ABC.
Указание. Найти длину отрезка BM.



Решение. Поскольку точка M равноудалена от боковых сторон треугольника ABC и лежит внутри него, то она лежит на его биссектрисе BH, которая является также медианой и высотой этого треугольника.

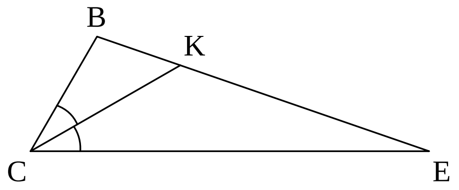
Поэтому $\widehat{ABH} = \widehat{CBH} = \pi/3$, а длина отрезка MH фактически и есть расстояние от точки M до основания AC. После этого из прямоугольного треугольника MBS мы находим $|MB| = |MS| : \sin\widehat{MBS} = 4\sqrt{3}$, стало быть, $|BH| = 5\sqrt{3}$. Наконец, $|AC| = 2|BH| \cdot \operatorname{tg}\widehat{ABH} = 30$.

Ответ. 30.

Задача 7.

В треугольнике BCE известно, что $|CE| : |BC| = 3$, а величина угла BCE равна $\pi/3$. Отрезок CK – биссектриса треугольника. Найдите $|KE|$, если длина радиуса окружности, описанной около треугольника BCE, равна $8\sqrt{3}$.

Идея. Воспользоваться основным свойством биссектрисы треугольника.
Указание. Применить теорему синусов и найти $|BE|$.



Решение. Сначала по теореме синусов находим $|BE|$:

$$2R_{\triangle ABC} = \frac{|BE|}{\sin\widehat{BCE}} \quad\Longrightarrow\quad |BE| = 16\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 24.$$

Затем, применяя основное свойство биссектрисы треугольника, находим $|KE|$:

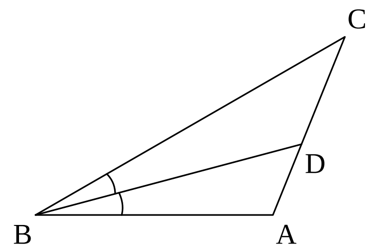
$$\frac{|KE|}{|BK|} = \frac{|CE|}{|BC|} = 3, \quad |KE| + |BK| = |BE| = 24 \quad\Longrightarrow\quad |KE| = 18.$$

Ответ. 18.

Задача 8.

В треугольнике ABC градусная мера угла B равна 30°, $|AB| = 4$, $|BC| = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Найдите площадь треугольника ABD.

Идея. Вычислить длину отрезка BD.
Указание. Воспользоваться первой формулой длины биссектрисы.



Решение. Идея решения проста – для нахождения искомой площади нам не хватает только длины отрезка BD, которую мы можем легко вычислить путем применения первой формулы длины биссектрисы:

$$|BD| = \frac{2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\widehat{ABC}\right)}{|AB| + |BC|} = \frac{24\cos 15^\circ}{5};$$

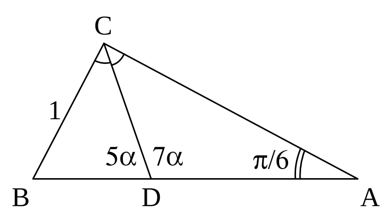
$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \sin\widehat{ABD} = \frac{48\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{5} = \frac{24\sin 30^\circ}{5} = \frac{12}{5}.$$

Ответ. $\dfrac{12}{5}$.

Задача 9.

В треугольнике ABC проведена биссектриса CD, при этом величины углов ADC и CDB относятся как $7 : 5$. Найдите длину отрезка AD, если известно, что $|BC| = 1$, $\widehat{BAC} = \pi/6$.

Идея. Найти длины сторон и величины углов треугольника ABC.
Указание. Воспользоваться теоремой о сумме величин углов треугольника, теоремой синусов и основным свойством биссектрисы.



Решение. Сначала вычислим величины всех углов треугольника ABC. Обозначим величины углов ADC и CDB за 7α и 5α соответственно. Эти углы являются смежными, поэтому сумма их величин равна π. Значит, $12\alpha = \pi$, $\alpha = \pi/12$, $\widehat{ADC} = 7\pi/12$. Далее, пользуясь теоремой о сумме величин углов треугольника, из треугольника ACD находим $\widehat{ACD} = \pi - \widehat{ADC} - \widehat{CAD} = \pi/4$.

Стало быть, $\widehat{ACB} = 2 \cdot \widehat{ACD} = \pi/2$, $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{ACB} - \widehat{BAC} = \pi/3$.

Дальнейшее просто: треугольник ABC оказался прямоугольным, поэтому

$$|AC| = |BC| \cdot \operatorname{tg} \widehat{ABC} = \sqrt{3}, \ |AB| = \frac{|BC|}{\cos \widehat{ABC}} = 2.$$

Осталось лишь применить формулу для вычисления длин отрезков, на которые биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена:

$$|AD| = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|AC| + |BC|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - 1).$$

О т в е т. $3 - \sqrt{3}$.

Задача 10.

В треугольнике ABC биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O, $|AB| = 14$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$. Найдите длину отрезка OD.

И д е я. Вычислить длину биссектрисы BD.
У к а з а н и е. Воспользоваться формулой для отношения длин отрезков, на которые биссектрисы делятся точкой пересечения.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой длины биссектрисы по трем сторонам:

$$|BD|^2 = |AB| \cdot |BC| \cdot \left(1 - \frac{|AC|^2}{(|AB| + |BC|)^2}\right) = 63 \quad \Longrightarrow \quad |BD| = 3\sqrt{7}.$$

С другой стороны,

$$\frac{|BO|}{|OD|} = \frac{|AB| + |BC|}{|AC|} = 2 \quad \Longrightarrow \quad |OD| = \frac{1}{3}|BD| = \sqrt{7}.$$

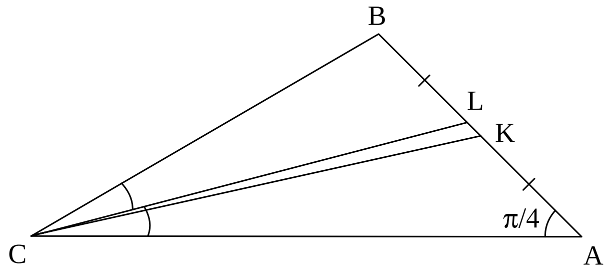
О т в е т. $\sqrt{7}$.

Задача 11.

В тупоугольном треугольнике ABC на стороне AB длины 14 выбрана точка L, равноудаленная от сторон AC и BC, а на отрезке AL – точка K, равноудаленная от вершин A и B. Найдите синус величины угла ACB, если $|KL| = 1, \widehat{CAB} = \pi/4$.

И д е я. Воспользоваться тем, что CL и CK – соответственно биссектриса и медиана треугольника ABC.
У к а з а н и е. Применить основное свойство биссектрисы и теорему синусов.

Решение. Поскольку точка L равноудалена от сторон AC и BC, то она лежит на биссектрисе угла ACB. Таким образом, CL – биссектриса треугольника ABC. А поскольку точка K равноудалена от вершин A и B, то CK – медиана треугольника ABC. Из этого вытекает, что



$$|AK| = |KB| = 7, \ |AL| = |AK| + |KL| = 8, \ |LB| = |AB| - |AL| = 6.$$

Теперь применим основное свойство биссектрисы треугольника и воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AL|}{|LB|} = \frac{4}{3}; \quad \frac{|AC|}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{CAB}} \implies \sin\widehat{ABC} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \sin\widehat{CAB} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Возможно два варианта: либо угол ABC – острый, тогда по условию задачи угол ACB обязан быть тупым, либо угол ABC – тупой. Однако выше мы получили, что $|AC| > |BC|$, а следовательно,

$$\widehat{ABC} > \widehat{BAC} = \frac{\pi}{4} \quad \implies \quad \widehat{ABC} + \widehat{BAC} > \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому угол ACB не может быть тупым. Значит, угол ABC – тупой. Вычислим синус угла ACB:

$$\widehat{ABC} > \frac{\pi}{2} \quad \implies \quad \cos\widehat{ABC} = -\sqrt{1 - \sin^2\widehat{ABC}} = -\frac{1}{3};$$

$$\sin\widehat{ACB} = \sin\left(\pi - \widehat{ABC} - \widehat{CAB}\right) = \sin\left(\widehat{ABC} + \widehat{CAB}\right) =$$

$$= \sin\widehat{ABC}\cos\widehat{CAB} + \cos\widehat{ABC}\sin\widehat{CAB} = \frac{4-\sqrt{2}}{6}.$$

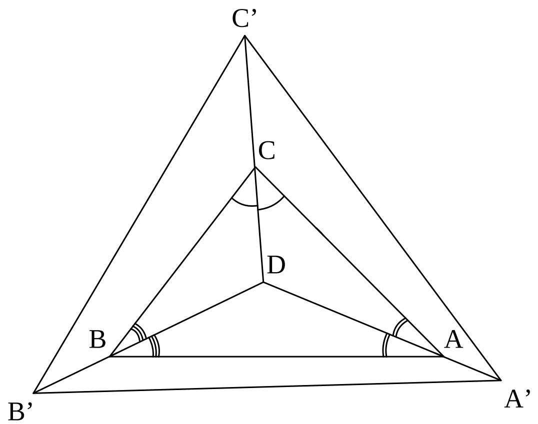
Ответ. $\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}$.

Задача 12.

Величины углов A, B и C треугольника ABC составляют арифметическую прогрессию с разностью $\pi/7$. Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке D. Точки A', B' и C' находятся на продолжениях отрезков DA, DB, DC за точки A, B, C соответственно на одинаковом расстоянии от точки D. Доказать, что величины углов A', B', C' треугольника $A'B'C'$ также образуют арифметическую прогрессию. Найдите её разность.

Идея. Найти величины углов A', B', C'.
Указание. Воспользоваться тем, что биссектриса треугольника делит его угол пополам, и теоремой о сумме величин углов треугольника.

Решение. Обозначим величины углов A, B и C как α, β и γ. Исходя из условия задачи и определения арифметической прогрессии будем считать, что $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\pi/7$.



Из треугольника ADC с учётом того, что AD и CD – биссектрисы, вытекает, что

$$\widehat{ADC}=\pi-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right).$$

А поскольку треугольник $A'DC'$ равнобедренный по условию задачи, то

$$\widehat{DA'C'}=\widehat{DC'A'}=\frac{1}{2}\left(\pi-\left(\pi-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\right)\right)=\frac{\alpha+\gamma}{4}.$$

Рассуждая абсолютно аналогично, можно легко получить, что

$$\widehat{DA'B'}=\widehat{DB'A'}=\frac{\alpha+\beta}{4},\quad \widehat{DB'C'}=\widehat{DC'B'}=\frac{\beta+\gamma}{4}.$$

Далее ясно, что $\widehat{B'A'C'}=\widehat{DA'B'}+\widehat{DA'C'}=\dfrac{2\alpha+\beta+\gamma}{4}=\dfrac{\pi+\alpha}{4}$. Таким же способом находим, что $\widehat{A'B'C'}=\dfrac{\pi+\beta}{4}$; $\widehat{A'C'B'}=\dfrac{\pi+\gamma}{4}$. Наконец, из равенств

$$\frac{\pi+\beta}{4}-\frac{\pi+\alpha}{4}=\frac{\beta-\alpha}{4}=\frac{\pi}{28};\qquad \frac{\pi+\gamma}{4}-\frac{\pi+\beta}{4}=\frac{\gamma-\beta}{4}=\frac{\pi}{28}$$

следует, что величины углов A', B', C' образуют арифметическую прогрессию с разностью $\dfrac{\pi}{28}$, что и требовалось доказать.

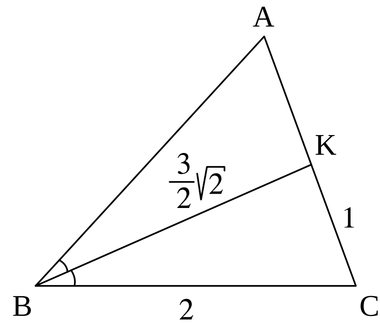
Задача 13.

В треугольнике ABC биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке K. Известно, что $|BC|=2$, $|KC|=1$, $|BK|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Найдите площадь треугольника ABC.

Идея. Воспользоваться основным свойством биссектрисы треугольника и второй формулой её длины.

Указание. Обозначить длины отрезков AB и AK за x и y, написать два уравнения, в которые входят эти величины.

Р е ш е н и е. Обозначим длины отрезков AB и AK за x и y, воспользуемся основным свойством биссектрисы треугольника и второй формулой её длины:



$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|KC|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{1} \quad \Longrightarrow \quad x = 2y;$$

$$|BK|^2 = |AB| \cdot |BC| - |AK| \cdot |KC| \Longrightarrow \frac{9}{2} = 2x - y.$$

Решая полученную систему уравнений, находим $x = |AB| = 3$, $y = |AK| = 3/2$, стало быть, длина отрезка AC равна $5/2$. Теперь, зная длины всех сторон треугольника ABC, мы можем посчитать его площадь по формуле Герона:

$$p_{\triangle ABC} = \frac{2 + 3 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{15}{4}, \quad S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{15}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}} = \frac{15}{16}\sqrt{7}.$$

О т в е т. $\frac{15}{16}\sqrt{7}$.

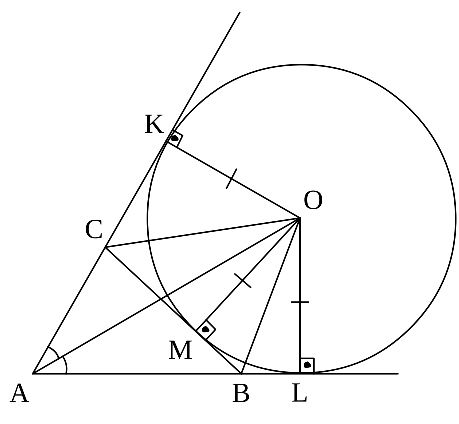
Задача 14.

Треугольник ABC вписан в окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{3} - 1$. Градусная мера угла BAC равна 60°, а длина радиуса окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, равна 1. Найдите градусные меры углов ABC и ACB.

И д е я. Воспользоваться тем, что центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе.

У к а з а н и е. Выразить длину стороны BC через длины радиусов окружностей из условия задачи.

У к а з а н и е. Рассмотреть прямоугольные треугольники, образованные центром окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, точкой её касания со стороной BC и вершинами B и C, применить теорему синусов.



Р е ш е н и е. Обозначим центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, буквой O, точки касания её со стороной BC и продолжениями сторон AB и AC обозначим буквами M, L и K соответственно, а градусную меру угла ABC обозначим $2\alpha^\circ$. Тогда

$$\widehat{ACB} = (120 - 2\alpha)^\circ, \; \widehat{KCB} = (60 + 2\alpha)^\circ, \; \widehat{CBL} = (180 - 2\alpha)^\circ.$$

Далее заметим, что CO – биссектриса угла KCB, а BO – биссектриса угла CBL, поэтому

$$\widehat{OCB} = (30+\alpha)^\circ,\ \widehat{OBC} = (90-\alpha)^\circ.$$

Из прямоугольных треугольников OBM и OCM вытекает, что (вспомните замечание к задаче 1)

$$|BM| = |OM| \cdot \operatorname{ctg}\widehat{OBM} = \operatorname{ctg}(90-\alpha)^\circ = \operatorname{tg}\alpha^\circ,$$

$$|CM| = |OM| \cdot \operatorname{ctg}\widehat{OCM} = \operatorname{ctg}(30+\alpha)^\circ;\ |BC| = |BM| + |CM| = \operatorname{tg}\alpha^\circ + \operatorname{ctg}(30+\alpha)^\circ.$$

С другой стороны, по теореме синусов для треугольника ABC:

$$\frac{|BC|}{\sin\widehat{BAC}} = 2R_{\triangle ABC} \quad\Longrightarrow\quad |BC| = 2(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3-\sqrt{3}.$$

Решим полученное уравнение:

$$\operatorname{tg}\alpha^\circ + \operatorname{ctg}(30+\alpha)^\circ = 3-\sqrt{3} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\sin\alpha^\circ}{\cos\alpha^\circ} + \frac{\cos(30+\alpha)^\circ}{\sin(30+\alpha)^\circ} = 3-\sqrt{3} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{\cos(30+\alpha-\alpha)^\circ}{\cos\alpha^\circ\sin(30+\alpha)^\circ} = 3-\sqrt{3} \quad\Longleftrightarrow\quad \cos\alpha^\circ\sin(30+\alpha)^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2(3-\sqrt{3})} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}(\sin(2\alpha+30)^\circ + \sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{2\cdot 6} \quad\Longleftrightarrow\quad \sin(2\alpha+30)^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Наконец, из этого простейшего уравнения мы получаем два варианта:

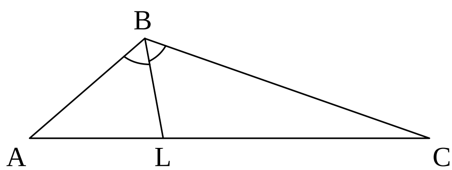
1) $(2\alpha+30)^\circ = 120^\circ \quad\Longrightarrow\quad 2\alpha^\circ = \widehat{ABC} = 90^\circ \quad\Longrightarrow\quad \widehat{ACB} = 30^\circ;$

2) $(2\alpha+30)^\circ = 60^\circ \quad\Longrightarrow\quad 2\alpha^\circ = \widehat{ABC} = 30^\circ \quad\Longrightarrow\quad \widehat{ACB} = 90^\circ.$

О т в е т. $30^\circ, 90^\circ$.

Задача 15.

Величина одного из углов треугольника равна $2\pi/3$, длина противолежащей ему стороны равна 6, а длина одного из отрезков, на которые она разделена проведённой к ней биссектрисой этого треугольника, равна 2. Найдите величины двух других углов треугольника.



И д е я. Вычислить значение отношения $|AB| : |BC|$, воспользоваться теоремой синусов.

У к а з а н и е. Воспользоваться основным свойством биссектрисы треугольника.

Р е ш е н и е. Будем считать, что $|AC| = 6$, $|AL| = 2$. Тогда $|LC| = 4$ и, по основному свойству биссектрисы треугольника,

$|AB| : |BC| = |AL| : |LC| = 1 : 2$. После этого обозначим $\widehat{BAC} = \alpha$, тогда $\widehat{ACB} = \pi/3 - \alpha$, и запишем теорему синусов для треугольника ABC:

$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BAC}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sin\widehat{ACB}}{\sin\widehat{BAC}} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

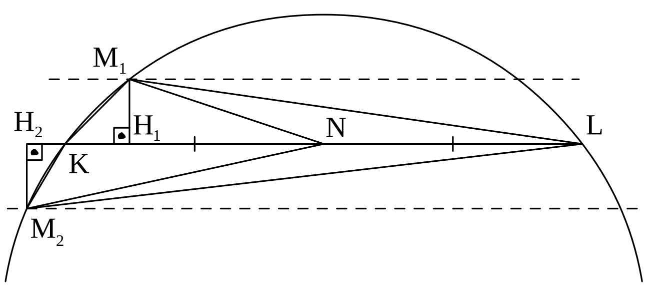
Значит, искомые величины равны $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\pi/3 - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

О т в е т. $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad \dfrac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 16.

Среди треугольников KLM, у которых длина радиуса описанной окружности равна 10, длина стороны KL равна 16, а длина высоты MH равна $3,9$, выбирается тот, у которого длина медианы MN наименьшая. Найдите величину его угла KML.

И д е я. Воспользоваться теоремой синусов.
У к а з а н и е. Найти синус величины угла KML, доказать, что этот угол тупой, используя схему доказательства критерия тупоугольности.



Р е ш е н и е. Запишем теорему синусов для треугольника KML:

$$\frac{|KL|}{\sin\widehat{KML}} = 2R_{\triangle KML} \quad \Longrightarrow \quad \sin\widehat{KML} = \frac{|KL|}{2R_{\triangle KML}} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

Возможно два варианта: угол KML может быть как острым, так и тупым. Однако если он острый, то, следуя схеме доказательства критерия тупоугольности, мы получим, что в этом случае длина медианы MN будет больше, чем половина длины стороны KL, то есть $|MN| > 8$. Если же он тупой, то, рассуждая аналогично, мы получим, что длина медианы MN будет меньше, чем половина длины стороны KL, то есть $|MN| < 8$.

Значит, треугольник KLM, удовлетворяющий условию задачи, – это тот, у которого угол KML тупой. Косинус его величины равен, очевидно, $-3/5$, а его величина равна $\arccos(-3/5)$.

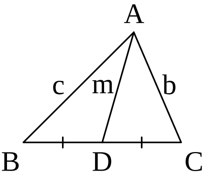
З а м е ч а н и е. Числовое значение длины высоты MH мы использовали только для определения количества треугольников, удовлетворяющих условию задачи. Так при $|MH| \in (0;4]$ существует два треугольника: остроугольный и тупоугольный, а при $|MH| \in (4;16]$ возможен только один вариант – остроугольный треугольник. В первом случае в ответ идёт тупой угол, во втором – острый.

О т в е т. $\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)$.

Задача 17.

В треугольнике ABC проведена медиана AD, $|AD| = m, |AB| = c, |AC| = b$. Найдите $\widehat{BAC}$.

И д е я. Воспользоваться формулой длины медианы треугольника.
У к а з а н и е. Найти длину стороны BC, применить теорему косинусов.



Р е ш е н и е. Применим формулу длины медианы треугольника:

$$4|AD|^2 = 2|AB|^2 + 2|AC|^2 - |BC|^2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad |BC|^2 = 2b^2 + 2c^2 - 4m^2.$$

Теперь воспользуемся теоремой косинусов:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\widehat{BAC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 2b^2 + 2c^2 - 4m^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{BAC} \quad \Longrightarrow \quad \cos\widehat{BAC} = \frac{4m^2 - b^2 - c^2}{2bc}.$$

Значит, величина угла BAC равна $\arccos\dfrac{4m^2 - b^2 - c^2}{2bc}$.

О т в е т. $\arccos\dfrac{4m^2 - b^2 - c^2}{2bc}$.

Задача 18.

Найдите величину угла A треугольника ABC, если известно, что $|AB| = 2$, $|AC| = 4$, а длина медианы AM равна $\sqrt{7}$.

И д е я. Вычислить длину стороны BC.
У к а з а н и е. Воспользоваться формулой длины медианы.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой длины медианы, мы получаем

$$4|AM|^2 = 2|AB|^2 + 2|AC|^2 - |BC|^2 \quad \Longrightarrow \quad |BC|^2 = 12.$$

Теперь заметим, что $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, поэтому треугольник ABC прямоугольный, угол B – прямой, стало быть,

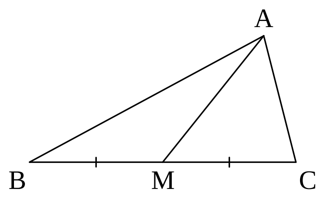
$$\cos\widehat{A} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{A} = \frac{\pi}{3}.$$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{3}$.

Задача 19.

В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $|AB| = |BC| = 2|AC|$, $|AM| = 4$.

И д е я. Воспользоваться формулой длины медианы.
У к а з а н и е. Положить $|AC| = x$.



Р е ш е н и е. Обозначим $|AC| = x$, $|AB| = |BC| = 2x$. Применяя формулу длины медианы, получаем

$$4|AM|^2 = 2|AB|^2 + 2|AC|^2 - |BC|^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 64 = 6x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{32}{3}.$$

После этого площадь треугольника ABC можно легко найти по формуле Герона:

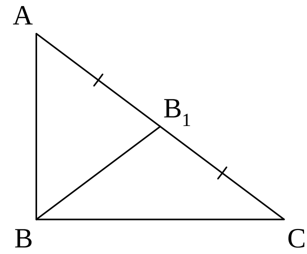
$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{5x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}} = \frac{x^2\sqrt{15}}{4} = \frac{8\sqrt{15}}{3}.$$

О т в е т. $\dfrac{8\sqrt{15}}{3}$.

Задача 20.

Найдите величины углов, образованных медианой BB_1 треугольника ABC со сторонами AB и BC, если $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $|BB_1| = 5$.

И д е я. Найти длину стороны AC.
У к а з а н и е. Использовать формулу длины медианы.



Р е ш е н и е. Записывая формулу длины медианы, находим

$$4|BB_1|^2 = 2|AB|^2 + 2|BC|^2 - |AC|^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 100 = 200 - |AC|^2 \quad \Longrightarrow \quad |AC| = 10.$$

Далее можно записать теорему косинусов для треугольников ABB_1 и CBB_1, но в нашем случае можно заметить, что треугольник ABC прямоугольный, угол ABC прямой, поэтому треугольники ABB_1 и CBB_1 равнобедренные:

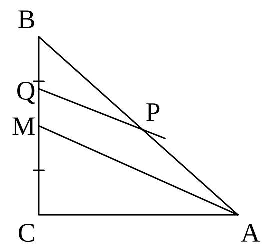
$$\widehat{ABB_1} = \widehat{BAB_1} = \arccos\frac{|AB|}{|AC|} = \arccos\frac{3}{5};$$

$$\widehat{CBB_1} = \widehat{BCB_1} = \arccos\frac{|BC|}{|AC|} = \arccos\frac{4}{5}.$$

О т в е т. $\arccos\frac{3}{5}, \arccos\frac{4}{5}$.

Задача 21.

В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Известно, что $|AB| = 3$, $|AC| = \sqrt{5}$, длина медианы, проведённой из вершины A к стороне BC, равна $\sqrt{6}$, а длины отрезков AP, PQ и QC равны между собой. Найдите длину отрезка PQ.



И д е я. Воспользоваться формулой длины медианы и теоремой косинусов.
У к а з а н и е. Вычислить $|BC|$, выразить длины всех сторон треугольника BPQ через искомую длину.

Р е ш е н и е. Записывая формулу длины медианы, находим

$$4|AM|^2 = 2|AB|^2 + 2|AC|^2 - |BC|^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 24 = 18 + 10 - |BC|^2 \quad \Longrightarrow \quad |BC| = 2.$$

После этого положим $|AP| = |PQ| = |QC| = x$, тогда $|BP| = 3 - x$, $|BQ| = 2 - x$, затем, вычислив косинус величины угла ABC с помощью рассмотрения треугольника ABC, мы можем записать теорему косинусов для треугольника BPQ:

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |BC|} = \frac{2}{3};$$

$$|PQ|^2 = |BP|^2 + |BQ|^2 - 2 \cdot |BP| \cdot |BQ| \cdot \cos\widehat{ABC} \quad \Longrightarrow$$

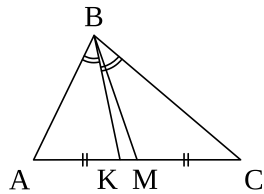
$$\Longrightarrow \quad x^2 = (3-x)^2 + (2-x)^2 - \frac{4}{3}(2-x)(3-x) \quad \Longrightarrow \quad x = 2\sqrt{10} - 5.$$

О т в е т. $2\sqrt{10} - 5$.

Задача 22.

В треугольнике ABC проведены биссектриса BK и медиана BM. Найдите длину отрезка KM, если $\widehat{ABM} = \pi/4$, $\widehat{CBM} = \pi/6$, $|AK| = 6$.

Идея. Вычислить значение отношения $|AK| : |KC|$.
Указание. Записать теорему синусов для треугольников ABM и CBM.



Решение. Дважды записывая теорему синусов, получаем

$$\frac{|AM|}{\sin\widehat{ABM}} = \frac{|AB|}{\sin\widehat{AMB}}; \quad \frac{|CM|}{\sin\widehat{CBM}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{CMB}}.$$

Поделив эти соотношения, с учётом свойства биссектрисы находим

$$\frac{\sin\widehat{CBM}}{\sin\widehat{ABM}} = \frac{|AB|}{|BC|} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, $|KC| = \sqrt{2}\cdot|AK| = 6\sqrt{2}$,

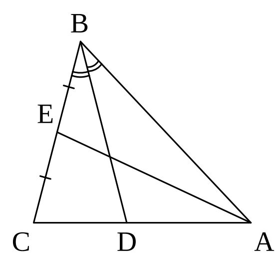
$$|AM| = \frac{|AK|+|KC|}{2} = 3+3\sqrt{2}, \quad |KM| = |AM| - |AK| = 3\sqrt{2}-3.$$

Ответ. $3(\sqrt{2}-1)$.

Задача 23.

В треугольнике ABC проведены биссектриса BD и медиана AE. Известно, что $|AB| = 8$, $|BC| = |BD| = 6$. Найдите длину медианы AE.

Идея. Вычислить длину стороны AC.
Указание. Воспользоваться второй формулой длины биссектрисы, затем формулой длины медианы.



Решение. Поскольку по основному свойству биссектрисы $|AD| : |DC| = |AB| : |BC| = 4 : 3$, то, обозначая $|AD| = 4x$, $|DC| = 3x$ и записывая формулу длины биссектрисы, мы получаем уравнение

$$6^2 = 6\cdot 8 - 4x\cdot 3x \quad\Longleftrightarrow\quad 12x^2 = 12 \quad\Longleftrightarrow\quad x = 1.$$

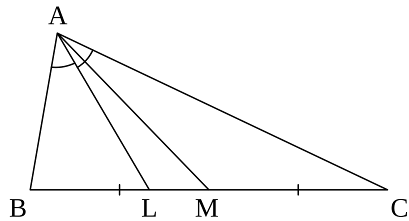
Значит, $|AC| = 7x = 7$, и по формуле длины медианы мы находим

$$|AE| = \frac{1}{2}\sqrt{2|AB|^2 + 2|AC|^2 - |BC|^2} = \frac{\sqrt{190}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{190}}{2}$.

Задача 24.

В треугольнике ABC проведены биссектриса AL и медиана AM. Известно, что $|AL| = 6$, $|AM| = 8$, $|AC| = 2 \cdot |AB|$. Найдите длину стороны BC.



Идея. Воспользоваться формулой длины медианы и второй формулой длины биссектрисы.
Указание. Ввести обозначения $|AB| = x$, $|AC| = 2x$, $|BC| = 3y$.

Решение. Положим $|AB| = x$, тогда $|AC| = 2x$ по условию задачи. Пользуясь основным свойством биссектрисы треугольника, имеем $|AB| : |AC| = |BL| : |CL| = 1 : 2$, с учётом этого обозначим $|BL| = y$, $|CL| = 2y$, тогда $|BC| = 3y$. После этого воспользуемся формулой длины медианы и второй формулой длины биссектрисы:

$$4|AM|^2 = 2|AB|^2 + 2|AC|^2 - |BC|^2 \quad \Longrightarrow \quad 10x^2 - 9y^2 = 256;$$

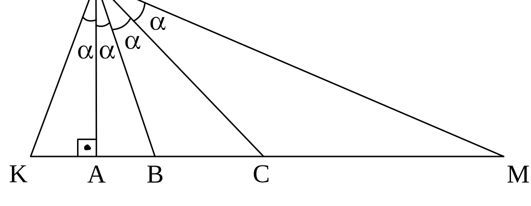
$$|AL|^2 = |AB| \cdot |AC| - |BL| \cdot |CL| \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 - 2y^2 = 36.$$

Решая полученную систему из двух уравнений с двумя неизвестными, находим $y = 2\sqrt{19}$, $x = \sqrt{94}$, стало быть, $|BC| = 6\sqrt{19}$.

Ответ. $6\sqrt{19}$.

Задача 25.

В треугольнике KMN проведены высота NA, биссектриса NB и медиана NC, которые делят угол KNM на четыре равные части. Найдите длины высоты NA, биссектрисы NB и медианы NC, если длина радиуса описанной около треугольника KMN окружности равна R.



Идея. Найти величину угла KNA.
Указание. Выразить длины отрезков KA, AC, CM через длину высоты NA и величину угла KNA и составить уравнение.

Решение. Поскольку биссектриса треугольника расположена между его медианой и высотой, проведёнными из той же вершины, то точка B лежит между точками A и C. Обозначим величины углов KNA, ANB, BNC и CNM за α, длину высоты NA обозначим за h. Из прямоугольных треугольников NAK, NAB, NAC и NAM вытекает, что

$$\widehat{NKM} = \frac{\pi}{2} - \alpha,\ \widehat{NMK} = \frac{\pi}{2} - 3\alpha,\ |KA| = |AB| = h \operatorname{tg} \alpha,$$

$$|AC| = h\operatorname{tg} 2\alpha, \ |AM| = h\operatorname{tg} 3\alpha.$$

Ясно, что $|KC| = |KA| + |AC|$, $|CM| = |AM| - |AC|$. А поскольку NC – медиана, то $|KC| = |CM|$. Подставляя сюда выраженные нами длины отрезков, получаем уравнение

$$h\operatorname{tg}\alpha + h\operatorname{tg} 2\alpha = h\operatorname{tg} 3\alpha - h\operatorname{tg} 2\alpha.$$

Оно решается достаточно просто:

$$h(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha) = h(\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg} 2\alpha \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha\cos 3\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\sin 2\alpha \neq 0\} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos 2\alpha = 2\cos\alpha\cos 3\alpha \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos 2\alpha = \cos 2\alpha + \cos 4\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \cos 4\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $\alpha = \pi/8$, угол KNM, величина которого равна 4α, – прямой, $\widehat{NKM} = 3\pi/8$, $\widehat{NMK} = \pi/8$. Длина медианы NC находится сразу: в прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы, стало быть, $|KC| = |MC| = |NC| = R$.

Далее из прямоугольного треугольника ANC найдём длину высоты NA, а затем из прямоугольного треугольника ANB найдём длину биссектрисы NB:

$$|NA| = |NC|\cdot\cos 2\alpha = \frac{R\sqrt{2}}{2}; \quad |NB| = \frac{|NA|}{\cos\alpha} = \frac{R\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

О т в е т. $|NA| = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, $|NB| = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $|NC| = R$.

Задача 26.

В треугольнике ABC проведены высоты CH и AK. Найдите длину стороны AC, если $|AB| = c$, $|CH| = h$, $|AK| = k$.

И д е я. Вычислить косинус величины угла ABC.
У к а з а н и е. Используя формулу площади, найти длину стороны BC. Рассмотреть треугольник ABK и вычислить синус величины угла ABC.
У к а з а н и е. Вычислить косинус величины угла ABC и применить теорему косинусов.

Р е ш е н и е. Сначала найдём длину стороны BC. Записывая двумя способами площадь треугольника ABC, находим

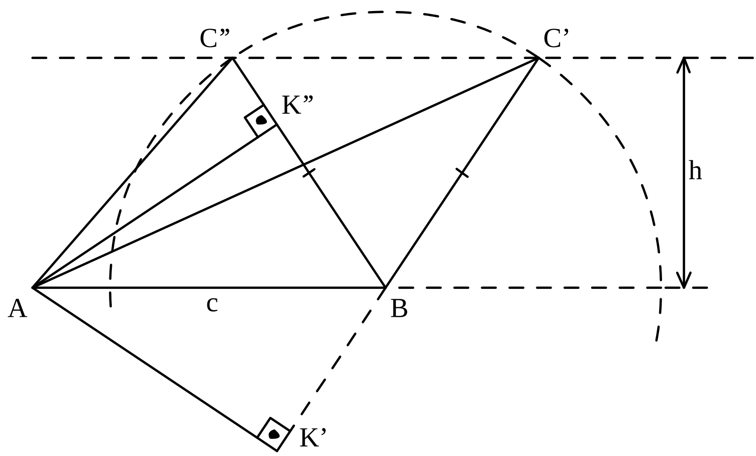
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CH| = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AK| \quad \Longrightarrow \quad |BC| = \frac{ch}{k}.$$

После этого, рассматривая прямоугольный треугольник ABK, мы получаем $\sin\widehat{ABK} = |AK| : |AB| = k/c$. Заметим, что, в зависимости от того, лежит ли точка K на отрезке BC или нет, угол ABC либо совпадает с углом ABK, либо является смежным с ним. Из этого вытекает, что синусы углов ABC и ABK в любом случае равны. Наконец, учитывая тот факт, что угол ABC может оказаться как острым, так и тупым, получаем

$$\cos\widehat{ABC} = \pm\sqrt{1-\sin^2\widehat{ABC}} = \pm\frac{\sqrt{c^2-k^2}}{c};$$

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2+|BC|^2-2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC}} =$$

$$= \sqrt{c^2+\frac{c^2h^2}{k^2}\pm\frac{2ch\sqrt{c^2-k^2}}{k}} = \frac{\sqrt{c^2k^2+c^2h^2\pm 2ckh\sqrt{c^2-k^2}}}{k}.$$



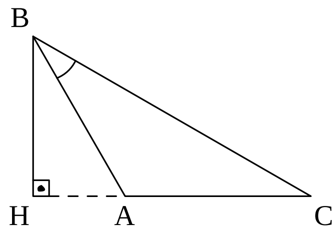
З а м е ч а н и е. Можно проиллюстрировать геометрически тот факт, что у этой задачи два различных ответа. После того, как мы нашли длину стороны BC, можно легко построить треугольники ABC' и ABC'', удовлетворяющие условиям задачи. Для этого надо построить отрезок AB, на расстоянии h от него провести параллельную ему прямую, после чего построить с центром в точке B окружность, длина радиуса которой равна найденной нами длине отрезка BC. Точки пересечения её и построенной ранее прямой и есть точки C' и C''.

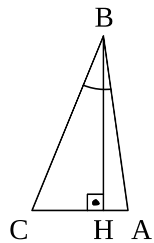
О т в е т. $\dfrac{\sqrt{c^2k^2+c^2h^2\pm 2ckh\sqrt{c^2-k^2}}}{k}$.

Задача 27.

В треугольнике ABC проведена высота BH, при этом оказалось, что длины отрезков CH и AH относятся как $10:3$. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $|BH| = h$, $\widehat{ABC} = \pi/6$.

И д е я. Рассмотреть прямоугольные треугольники ABH и CBH.
У к а з а н и е. Полагая $\widehat{ABH} = \alpha$, выразить длины отрезков AH и CH.





Решение. В этой задаче возможно два различных случая: точка H может лежать на продолжении стороны AC за точку A, а может лежать на стороне AC. Попасть на продолжение стороны AC за точку C она не может, так как тогда $|AH| > |CH|$, что противоречит условию задачи.

Если точка H лежит на продолжении стороны AC за точку A, то, обозначая $\widehat{ABH} = \alpha$ и рассматривая прямоугольные треугольники ABH и CBH, получаем

$$|AH| = h\operatorname{tg}\alpha,\ |CH| = h\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{10}{3} \quad\Longrightarrow\quad 3\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 10\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}}\right) \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 10\operatorname{tg}^2\alpha - 7\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ или } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Ясно, что единственным требованием на величину α является то, что она лежит в интервале $(0, \pi/3)$, то есть тангенс этой величины лежит в интервале $(0, \sqrt{3})$. Оба полученных ранее тангенса удовлетворяют этому условию. Теперь выразим искомую площадь и подставим в полученную формулу найденные тангенсы:

$$|AC| = |CH| - |AH| = \frac{10}{3}|AH| - |AH| = \frac{7}{3}|AH| = \frac{7h\operatorname{tg}\alpha}{3};$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BH| = \frac{7h^2\operatorname{tg}\alpha}{6} = \frac{7\sqrt{3}h^2}{12} \text{ или } \frac{7\sqrt{3}h^2}{30}.$$

Если же точка H лежит на стороне AC, то, опять-таки обозначая $\widehat{ABH} = \alpha$ и рассуждая аналогично, получаем

$$|AH| = h\operatorname{tg}\alpha,\ |CH| = h\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{10}{3} \quad\Longrightarrow\quad 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{tg}\alpha\right) = 10\operatorname{tg}\alpha\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}}\right) \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 10\operatorname{tg}^2\alpha + 13\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{-13\sqrt{3} \pm \sqrt{627}}{20}.$$

Их полученных тангенсов нам подходит лишь положительный. Наконец, считаем искомую площадь:

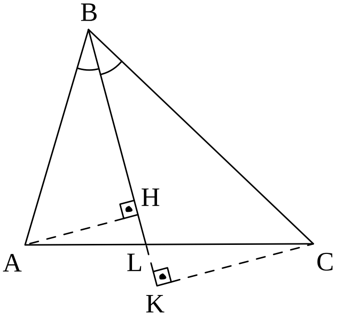
$$|AC| = |CH| + |AH| = \frac{10}{3}|AH| + |AH| = \frac{13}{3}|AH| = \frac{13h\operatorname{tg}\alpha}{3};$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BH| = \frac{13h^2\operatorname{tg}\alpha}{6} = \frac{(-13\sqrt{3} + \sqrt{627})h^2}{120}.$$

Ответ. $\dfrac{7\sqrt{3}h^2}{12}$, $\dfrac{7\sqrt{3}h^2}{30}$, $\dfrac{(-13\sqrt{3} + \sqrt{627})h^2}{120}$.

Задача 28.

В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, длина которой равна l. Найдите длины сторон треугольника ABC, если известно, что расстояния от точек A и C до прямой BL равны p и q соответственно.



Идея. Рассмотреть треугольники ABH и CBK (H и K – основания перпендикуляров, опущенных на прямую BL из точек A и C соответственно).
Указание. Воспользоваться первой формулой длины биссектрисы.

Решение. Обратим внимание на то, что во всех задачах, где фигурирует расстояние от точки до прямой, надо всего лишь опустить перпендикуляр из этой точки на эту прямую. Его длина и будет этим расстоянием. У нас расстояния от точек A и C до прямой BL будут не чем иным, как длинами перпендикуляров AH и CK. Далее обозначим $\widehat{ABC} = 2\beta$, рассмотрим прямоугольные треугольники ABH и CBK, после чего воспользуемся первой формулой длины биссектрисы:

$$|AB| = \frac{|AH|}{\sin\widehat{ABH}} = \frac{p}{\sin\beta}, \quad |BC| = \frac{|CK|}{\sin\widehat{CBK}} = \frac{q}{\sin\beta};$$

$$|BL| = \frac{2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\frac{1}{2}\widehat{ABC}}{|AB|+|BC|} \quad\Longrightarrow\quad l = \frac{2pq\operatorname{ctg}\beta}{p+q} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{l(p+q)}{2pq}.$$

Теперь, зная $\operatorname{ctg}\beta$, мы можем с помощью тригонометрических формул найти $\sin\beta$ и $\cos 2\beta$, после чего найти $|AB|$, $|BC|$ и $|AC|$:

$$\sin\beta = \frac{2pq}{\sqrt{l^2(p+q)^2+4p^2q^2}}, \quad \cos 2\beta = \frac{l^2(p+q)^2-4p^2q^2}{l^2(p+q)^2+4p^2q^2};$$

$$|AB| = \frac{\sqrt{l^2(p+q)^2+4p^2q^2}}{2q}, \quad |BC| = \frac{\sqrt{l^2(p+q)^2+4p^2q^2}}{2p}.$$

Наконец, применяя теорему косинусов, получаем

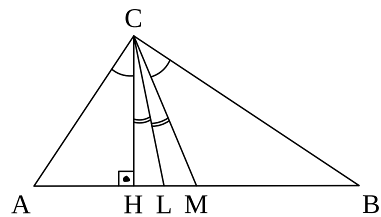
$$|AC| = \sqrt{|AB|^2+|BC|^2-2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC}} = \frac{\sqrt{l^2(p^2-q^2)^2+4p^2q^2(p+q)^2}}{2pq}.$$

Ответ. $|AB| = \dfrac{\sqrt{l^2(p+q)^2+4p^2q^2}}{2q}$, $|BC| = \dfrac{\sqrt{l^2(p+q)^2+4p^2q^2}}{2p}$,

$$|AC| = \frac{\sqrt{l^2(p^2-q^2)^2+4p^2q^2(p+q)^2}}{2pq}.$$

Задача 29.

Вычислите величину угла A треугольника ABC, если величина угла B равна $\pi/5$ и известно, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из этой вершины.



Идея. Доказать, что треугольник ABC либо равнобедренный, либо прямоугольный.

Указание. Обозначить $\widehat{ACB} = 2\gamma$, выразить величины углов BAC, AMC, BMC.

Указание. Записать теорему синусов для треугольников ACM и BCM (M – основание медианы CM).

Решение. Отметим, что биссектриса треугольника всегда лежит между его медианой и высотой, проведёнными из той же вершины. Доказательство этого факта можно провести самостоятельно, воспользовавшись основным свойством биссектрисы.

Ясно, что в нашей задаче случай, когда основание H высоты CH лежит на продолжении стороны AC за точку A, невозможен, так как тогда из геометрических соображений мы получим, что величина угла HCL будет больше половины величины угла ACB, а величина угла MCL будет меньше половины угла ACB, что противоречит условию. Далее положим $\widehat{ACB} = 2\gamma$, $\widehat{HCL} = \widehat{MCL} = \varphi$. Тогда, рассматривая прямоугольные треугольники ACH и BCH, мы имеем $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2} - \gamma + \varphi$, $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \gamma - \varphi$. После этого запишем теорему синусов для треугольников ACM и BCM и поделим друг на друга полученные соотношения:

$$\frac{|AM|}{\sin(\gamma+\varphi)} = \frac{|CM|}{\sin(\frac{\pi}{2}-\gamma+\varphi)}; \quad \frac{|BM|}{\sin(\gamma-\varphi)} = \frac{|CM|}{\sin(\frac{\pi}{2}-\gamma-\varphi)} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sin(\gamma-\varphi)}{\sin(\gamma+\varphi)} = \frac{\cos(\gamma+\varphi)}{\cos(\gamma-\varphi)} \Longrightarrow \quad \sin(2\gamma-2\varphi) = \sin(2\gamma+2\varphi) \quad \Longrightarrow$$

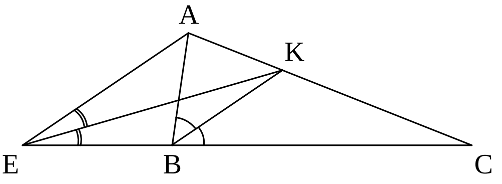
$$\Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2\gamma-2\varphi = 2\gamma+2\varphi, \\ 2\gamma-2\varphi = \pi-2\gamma-2\varphi \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \varphi = 0, \\ 2\gamma = \pi/2. \end{array}\right.$$

Эти соотношения говорят о том, что условие задачи может выполняться в двух случаях. Если $\varphi = 0$, то медиана CM, биссектриса CL и высота CH совпадают, треугольник ABC равнобедренный. Однако из условия следует, что угол между медианой и высотой ненулевой. Поэтому этот случай нам не подходит. Если же $2\gamma = \pi/2$, то треугольник ABC прямоугольный, $\widehat{BAC} = \pi - \pi/2 - \pi/5 = 3\pi/10$.

Ответ. $\dfrac{3\pi}{10}$.

Задача 30.

На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку B расположена точка E так, что биссектрисы углов AEC и ABC пересекаются в точке K, лежащей на стороне AC. Длина отрезка BE равна 1, длина отрезка BC равна 2, градусная мера угла EKB равна $30°$. Найдите длину стороны AB.



Идея. Вычислить градусную меру угла BAE, найти значение отношения $|AB|:|AE|$.

Указание. Воспользоваться основным свойством биссектрисы треугольника и теоремой о сумме градусных мер углов треугольника.

Указание. Рассмотреть треугольники ABC и EAC, показать, что $|AB|:|AE| = |BC|:|EC|$.

Решение. Поскольку отрезки BK и EK являются биссектрисами треугольников ABC и EAC соответственно, то, записывая основное свойство биссектрисы треугольника, мы получаем

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|KC|}, \quad \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AK|}{|KC|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|EC|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|EC|} = \frac{2}{3}.$$

Далее обозначим градусные меры углов ABC и AEC за $2\alpha°$ и $2\beta°$ соответственно. Тогда из треугольника EKB мы находим

$$\beta° + (180° - \alpha°) + 30° = 180° \quad \Longrightarrow \quad \alpha° - \beta° = 30°,$$

и, с учётом полученного соотношения рассматривая треугольник ABE, мы получаем

$$\widehat{BAE} = 180° - 2\beta° - (180° - 2\alpha°) = 2(\alpha° - \beta°) = 60°.$$

Наконец, обозначим $|AB| = 2x$, $|AE| = 3x$ и запишем теорему косинусов для треугольника ABE:

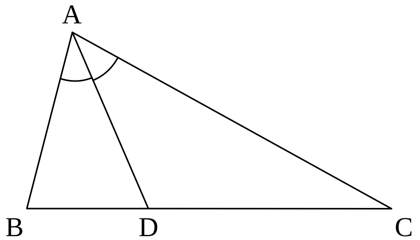
$$|BE|^2 = |AE|^2 + |AB|^2 - 2\cdot|AE|\cdot|AB|\cdot\cos\widehat{BAE} \quad \Longrightarrow \quad 1 = 7x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Осталось учесть, что $|AB| = 2x$, и выписать ответ.

Ответ. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Задача 31.

В треугольнике ABC известно, что $|AC| = |BC| = 12$, $|AB| = 6$, AD – биссектриса. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ADC, и сравните эту длину с числом $13/2$.



Идея. Воспользоваться основным свойством биссектрисы и второй формулой длины биссектрисы треугольника.

Указание. Вычислить длины отрезков CD и AD.

Указание. Используя теорему косинусов, найти косинус величины угла ACD.

Решение. Вычислим длины отрезков CD и AD, пользуясь основным свойством биссектрисы и второй формулой длины биссектрисы треугольника:

$$\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{1}{2}\quad\Longrightarrow\quad |BD|=4,\quad |DC|=8;$$

$$|AD|^2=|AB|\cdot|AC|-|BD|\cdot|DC|\quad\Longrightarrow\quad |AD|=2\sqrt{10}.$$

Далее из треугольника ADC по теореме косинусов найдём косинус величины угла ACD, после чего, найдя синус величины угла ACD, применим теорему синусов:

$$\cos\widehat{ACD}=\frac{|AC|^2+|DC|^2-|AD|^2}{2\cdot|AC|\cdot|DC|}=\frac{144+64-40}{2\cdot 12\cdot 8}=\frac{7}{8}\quad\Longrightarrow\quad \sin\widehat{ACD}=\frac{\sqrt{15}}{8};$$

$$R_{\triangle ADC}=\frac{|AD|}{2\sin\widehat{ACD}}=\frac{2\sqrt{10}\cdot 8}{2\sqrt{15}}=\frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

Наконец, проведём требуемое сравнение.

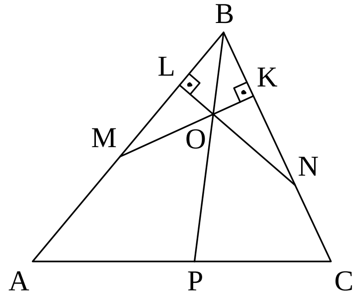
$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{8\sqrt{6}}{3} & \vee & \dfrac{13}{2}\\
\dfrac{64\cdot 6}{9} & \vee & \dfrac{169}{4}\\
128\cdot 4 & \vee & 169\cdot 3\\
512 & > & 507.
\end{array}$$

Поскольку все преобразования были равносильными, то длина радиуса окружности, описанной около треугольника ADC, больше, чем $13/2$.

Ответ. $R_{\triangle ADC}=\dfrac{8\sqrt{6}}{3},\quad R_{\triangle ADC}>\dfrac{13}{2}.$

Задача 32.

В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно, причём $|BM|=|BN|$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная BC, а через точку N – прямая, перпендикулярная AB. Эти прямые пересекаются в точке O. Продолжение отрезка BO пересекает сторону AC в точке P, $|AP|=5, |PC|=4$. Найдите длину отрезка BP, если известно, что $|BC|=6$.



Идея. Рассмотреть различные прямоугольные треугольники с вершиной B.
Указание. Доказать, что BP – биссектриса треугольника ABC, воспользоваться основным свойством биссектрисы треугольника и второй формулой её длины.

Решение. Пусть K – точка пересечения BC и прямой, перпендикулярной BC и проходящей через точку M; L – точка пересечения AB и прямой, проходящей через точку N перпендикулярно AB. Заметим, что треугольник MKB равен треугольнику NLB, так как по условию $|BM| = |BN|$, угол B у них общий, углы MKB и NLB – прямые. Из этого равенства следует, что $|BK| = |BL|$.

Но тогда равны и прямоугольные треугольники BKO и BLO, поскольку $|BK| = |BL|$, BO – общая. Стало быть, углы OBK и OBL равны, то есть прямая OB – биссектриса угла ABC, а BP – биссектриса треугольника ABC.

Теперь воспользуемся основным свойством биссектрисы треугольника и второй формулой её длины:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|PC|} \iff |AB| = \frac{|AP| \cdot |BC|}{|PC|} \implies |AB| = \frac{15}{2};$$

$$|BP|^2 = |AB| \cdot |BC| - |AP| \cdot |PC| \implies |BP|^2 = \frac{15}{2} \cdot 6 - 5 \cdot 4 \implies |BP| = 5.$$

Ответ. 5.

Задача 33.

Вокруг треугольника MKH описана окружность с центром в точке O, длина её радиуса равна r. Длина стороны HM равна a. Известно, что справедливо равенство $|HK|^2 - |HM|^2 = |HM|^2 - |MK|^2$. Найдите площадь треугольника OLK, где L – точка пересечения медиан треугольника MKH.

Идея. Рассмотреть треугольник PKO, где P – середина стороны HM.
Указание. Найти длину отрезка KL, вычислив предварительно с помощью формулы длины медианы и соотношения из условия задачи длину отрезка KP.
Указание. Используя теорему косинусов, найти косинус величины угла PKO.

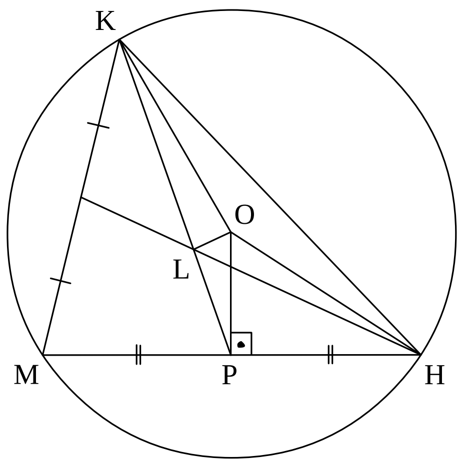
Решение. Для нахождения площади треугольника OLK нам понадобится найти три каких-то его элемента. Нам уже известна длина его стороны OK – она равна r. Длину стороны KL мы сможем найти, вычислив длину медианы KP и умножив её на $2/3$ (медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершин). Применим формулу длины медианы и воспользуемся условием задачи:

$$\begin{cases} 4|KP|^2 = 2|HK|^2 + 2|MK|^2 - |HM|^2, \\ |HK|^2 + |MK|^2 = 2|HM|^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 4|KP|^2 = 4|HM|^2 - |HM|^2 = 3|HM|^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |KP| = \frac{\sqrt{3}}{2}|HM| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad |KL| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Теперь нам осталось найти синус величины угла PKO. Это можно сделать, рассмотрев треугольник KOP. Заметим, что поскольку центр описанной около треугольника окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров, проведённых к сторонам треугольника, то $OP \perp HM$. Из прямоугольного треугольника OPH следует, что



$$|OP|^2 = |OH|^2 - |HP|^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |OP| = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2}.$$

Далее, по теореме косинусов,

$$|OP|^2 = |OK|^2 + |KP|^2 - 2 \cdot |OK| \cdot |KP| \cdot \cos \widehat{PKO} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad r^2 - \frac{a^2}{4} = r^2 + \frac{3a^2}{4} - 2 \cdot r \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \widehat{PKO} \quad \Longrightarrow \quad \cos \widehat{PKO} = \frac{a}{r\sqrt{3}};$$

$$\sin \widehat{PKO} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{PKO}} = \frac{\sqrt{3r^2 - a^2}}{r\sqrt{3}}.$$

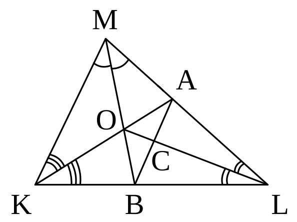
Наконец, считаем искомую площадь:

$$S_{\triangle OLK} = \frac{1}{2} \cdot |KL| \cdot |OK| \cdot \sin \widehat{PKO} = a\frac{\sqrt{3r^2 - a^2}}{6}.$$

О т в е т. $a\dfrac{\sqrt{3r^2 - a^2}}{6}$.

Задача 34.

В треугольнике KLM проведены биссектрисы KA и MB, которые пересекаются в точке O. Диагонали четырёхугольника $AOBL$ пересекаются в точке C. Найдите численные значения отношений $|BC| : |CA|$ и $|LC| : |CO|$, если известно, что $|KL| = m$, $|KM| = l$, $|LM| = k$.



Идея. Доказать, что LO – биссектриса угла KLM.

Указание. Первое отношение найти из треугольника ABL, используя свойство биссектрисы и формулу для вычисления длин отрезков, на которые биссектриса треугольника делит сторону, к которой проведена.

Указание. Рассмотреть треугольники LAB и LAK, воспользоваться основным свойством биссектрисы треугольника, первой формулой её длины, формулой для вычисления длин отрезков, на которые биссектриса треугольника делит сторону, к которой проведена.

Решение. Заметим, что поскольку биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, то LO – биссектриса угла KLM, таким образом, LC – биссектриса треугольника ALB, а LO – биссектриса треугольника LAK. Тогда, пользуясь основным свойством биссектрисы и формулой для вычисления длин отрезков, на которые биссектриса треугольника делит сторону, к которой проведена, находим

$$\frac{|BC|}{|CA|}=\frac{|LB|}{|LA|}=\frac{\dfrac{|KL|\cdot|LM|}{|KM|+|LM|}}{\dfrac{|LM|\cdot|KL|}{|KL|+|KM|}}=\frac{\dfrac{mk}{l+k}}{\dfrac{km}{m+l}}=\frac{m+l}{k+l}.$$

Для вычисления отношения $|LC|:|CO|$ рассмотрим треугольники LAB и LAK и с помощью первой формулы длины биссектрисы треугольника найдём отношение $|LC|$ к $|LO|$:

$$\frac{|LC|}{|LO|}=\frac{\dfrac{2\cdot|LA|\cdot|LB|\cdot\cos(\frac{1}{2}\widehat{KLM})}{|LA|+|LB|}}{\dfrac{2\cdot|LA|\cdot|KL|\cdot\cos(\frac{1}{2}\widehat{KLM})}{|LA|+|KL|}}=\frac{|LB|\cdot(|LA|+|KL|)}{|KL|\cdot(|LA|+|LB|)}=$$

$$=\frac{\dfrac{|LB|}{|LA|}\cdot(|LA|+|KL|)}{|KL|\cdot\left(1+\dfrac{|LB|}{|LA|}\right)}=\frac{\dfrac{m+l}{k+l}\cdot\left(\dfrac{km}{m+l}+m\right)}{m\cdot\left(1+\dfrac{m+l}{k+l}\right)}=\frac{k+m+l}{k+m+2l}.$$

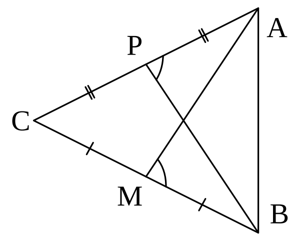
Наконец, с помощью полученного значения мы можем вычислить интересующее нас отношение:

$$\frac{|LC|}{|CO|}=\frac{|LC|}{|LO|-|LC|}=\frac{\dfrac{|LC|}{|LO|}}{1-\dfrac{|LC|}{|LO|}}=\frac{k+l+m}{l}.$$

Ответ. $\dfrac{|BC|}{|CA|}=\dfrac{l+m}{l+k},\quad \dfrac{|LC|}{|CO|}=\dfrac{k+l+m}{l}.$

Задача 35.

Отрезки AM и BP являются медианами треугольника ABC. Известно, что угол APB равен углу BMA, $|BP| = 1$, косинус величины угла ACB равен $4/5$. Найдите площадь треугольника ABC.



Идея. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.
Указание. Воспользоваться формулой длины медианы и теоремой косинусов.

Решение. Заметим, что поскольку равны углы APB и BMA, то равны и смежные с ними углы CPB и CMA. Но тогда, в силу теоремы о сумме величин углов треугольника, равны и углы CBP и CAM. Запишем теорему синусов для треугольников BCP и ACM:

$$\frac{|CP|}{\sin\widehat{CBP}} = \frac{|CB|}{\sin\widehat{CPB}}, \qquad \frac{|CM|}{\sin\widehat{CAM}} = \frac{|CA|}{\sin\widehat{CMA}}.$$

Деля друг на друга эти соотношения и учитывая тот факт, что $|CP| = \dfrac{1}{2}|CA|$, $|CM| = \dfrac{1}{2}|CB|$, получаем

$$\frac{|CP|}{|CM|} = \frac{|CB|}{|CA|} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{|CA|^2}{2} = \frac{|CB|^2}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad |CA| = |CB|.$$

Итак, треугольник ABC – равнобедренный. Далее положим $|CA| = |CB| = a$, тогда по теореме косинусов получаем

$$|AB|^2 = |CA|^2 + |CB|^2 - 2\cdot|CA|\cdot|CB|\cdot\cos\widehat{ACB} = \frac{2a^2}{5}$$

и по формуле длины медианы треугольника находим a^2:

$$4|BP|^2 = 2|AB|^2 + 2|CB|^2 - |CA|^2 \quad\Longrightarrow\quad 4 = \frac{9a^2}{5} \quad\Longrightarrow\quad a^2 = \frac{20}{9}.$$

Наконец,

$$\sin\widehat{ACB} = \frac{3}{5}; \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|CA|\cdot|CB|\cdot\sin\widehat{ACB} = \frac{2}{3}.$$

Замечание. При доказательстве равнобедренности треугольника ABC мы использовали теорему синусов, хотя проще было бы просто сказать, что треугольники CAM и CBP подобны по двум углам. Однако про подобие мы поговорим чуть позже.

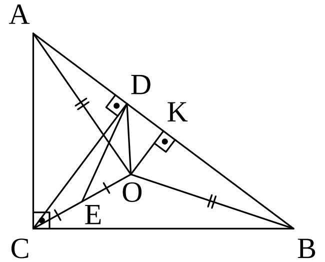
Ответ. $\dfrac{2}{3}$.

Задача 36.

Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C взята точка O таким образом, что $|OA| = |OB| = b$. CD – высота треугольника ABC, точка E – середина отрезка OC, $|DE| = a$. Найдите $|CE|$.

Идея. Воспользоваться свойством высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, и формулой длины медианы.

Указание. Рассмотреть треугольники AKO и OKD, доказать, что $|CD|^2 = |AO|^2 - |OD|^2$.



Решение. Проведём перпендикуляр OK к гипотенузе AB. Поскольку длины отрезков OA и OB равны, то K – середина AB, $|AK| = |BK|$. После этого, применяя свойство высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, получаем

$$|CD|^2 = |AD| \cdot |BD| = (|AK| - |KD|)(|BK| + |KD|) = |AK|^2 - |KD|^2.$$

Далее, по теореме Пифагора

$$|AK|^2 = |AO|^2 - |OK|^2, \quad |KD|^2 = |OD|^2 - |OK|^2,$$

поэтому

$$|CD|^2 = |AO|^2 - |OD|^2 = b^2 - |OD|^2.$$

Наконец, запишем формулу длины медианы:

$$4|DE|^2 = 2|CD|^2 + 2|OD|^2 - |OC|^2 \quad \Longrightarrow \quad 4a^2 = 2b^2 - |OC|^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |OC| = \sqrt{2b^2 - 4a^2} \quad \Longrightarrow \quad |CE| = \frac{1}{2}|OC| = \sqrt{\frac{b^2}{2} - a^2}.$$

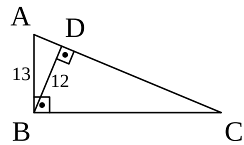
Ответ. $\sqrt{\dfrac{b^2}{2} - a^2}$.

1.4. Подобие треугольников

Задача 1.

В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B опущена высота BD на гипотенузу AC. Известно, что $|AB| = 13$, $|BD| = 12$. Найдите площадь треугольника ABC.

Идея. Воспользоваться подобием треугольников ABC и ADB.
Указание. Найти длину отрезка AD.



Решение. Для нахождения площади треугольника ABC нам достаточно найти длину его гипотенузы AC или длину его катета BC. Это можно сделать из подобия треугольников ABC и ADB (два прямоугольных треугольника с общим углом), так как треугольник ADB полностью определён своими гипотенузой и катетом. Для начала из треугольника ADB с помощью теоремы Пифагора находим длину AD:

$$|AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2 \quad \Longrightarrow \quad |AD| = 5.$$

Далее используем подобие треугольников ABC и ADB, из которого следует

$$\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|AB|}{|AD|} \quad \Longrightarrow \quad |BC| = \frac{|BD| \cdot |AB|}{|AD|} = \frac{156}{5}.$$

Наконец,

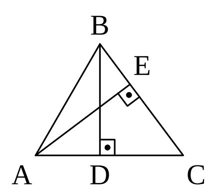
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| = \frac{13 \cdot 156}{2 \cdot 5} = \frac{2028}{10}.$$

Ответ. $202,8$.

Задача 2.

В треугольнике ABC длина высоты BD равна 11,2, а длина высоты AE равна 12. Точка E лежит на стороне BC, причём $|BE| : |EC| = 5 : 9$. Найдите длину стороны AC.

Идея. Доказать, что $\triangle AEC \sim \triangle BDC$.
Указание. Рассмотреть треугольник AEC.



Решение. Обозначим длину отрезка BE как $5x$, тогда по условию задачи длина отрезка EC равна $9x$, а длина стороны BC равна $14x$. По утверждению 3 треугольники AEC и BDC подобны (прямоугольные треугольники с общим углом), поэтому

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|EC|}{|CD|} = \frac{|AE|}{|BD|} \quad \Longrightarrow \quad |AC| = \frac{12}{11,2}|BC| = 15x.$$

Записывая теорему Пифагора для треугольника AEC, получаем

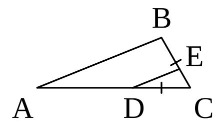
$$|AE|^2 = |AC|^2 - |EC|^2 \quad \Longrightarrow \quad 144 = 225x^2 - 81x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \quad \Longrightarrow \quad |AC| = 15.$$

Ответ. 15.

Задача 3.

В треугольнике ABC длина стороны AB равна 8, величина угла ACB равна $\pi/3$. Прямая, параллельная стороне AB, пересекает сторону AC в точке D, а сторону BC в точке E. Известно, что $|BC| = |DC|$, $|DE| = 3$. Найдите $|BC|$.

Идея. Воспользоваться подобием треугольников ABC и DEC.
Указание. Применить теорему косинусов.



Решение. Обозначим $|BC| = |DC| = x$, $|AC| = y$. Треугольники ABC и DEC подобны, поэтому

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|AC|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{3}{8}.$$

С другой стороны, записывая теорему косинусов для треугольника ABC, получаем

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos \widehat{ACB} \quad \Longrightarrow \quad 64 = y^2 + x^2 - xy.$$

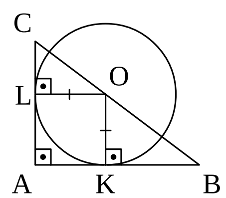
Решая систему полученных уравнений, находим $x = \dfrac{24}{7}$, $y = \dfrac{64}{7}$.

Ответ. $\dfrac{24}{7}$.

Задача 4.

Окружность, центр которой лежит на гипотенузе прямоугольного треугольника, касается его катетов. Найдите длину радиуса этой окружности, если длины катетов треугольника равны 3 и 4.

Идея. Провести отрезки, соединяющие центр окружности и точки её касания с катетами.
Указание. Найти пару подобных прямоугольных треугольников.



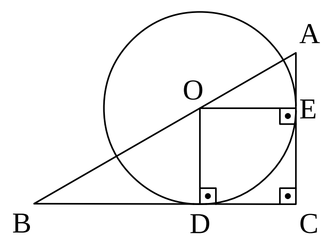
Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC даны катеты $|AC| = 3$, $|AB| = 4$. Соединим центр окружности и точки её касания с катетами отрезками OL и OK. Поскольку $OL \perp AC$, $OK \perp AB$, $AC \perp AB$ и $|OL| = |OK|$, то четырёхугольник $OKAL$ является квадратом. Поэтому, если ввести обозначение $|OL| = |OK| = r$, то $|BK| = 4 - r$, $|CL| = 3 - r$. Заметим, что треугольники OLC и BAC подобны по первому признаку подобия треугольников, стало быть,

$$\frac{|OL|}{|CL|} = \frac{|AB|}{|AC|} \implies \frac{r}{3-r} = \frac{4}{3} \iff 3r = 12 - 4r \iff r = \frac{12}{7}.$$

Ответ. $\dfrac{12}{7}$.

Задача 5.

Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC в точках E и D соответственно. Найдите величину угла ABC, если $|AE| = 1$, $|BD| = 3$.



Идея. Доказать, что $\triangle AOE \sim \triangle OBD$ (O – центр окружности).
Указание. Используя подобие, найти $|OD|$.
Указание. Рассмотреть треугольник OBD.

Решение. Обозначим центр данной в условии окружности буквой O. Заметим, что, поскольку $OE \perp AC$, $OD \perp BC$, $AC \perp BC$ и $|OE| = |OD|$, то $OECD$ – квадрат. Обозначим $|OE| = |OD| = x$, и воспользуемся тем, что $OE||BC$ и $OD||AC$. Из этого по первому признаку следует , что $\triangle AOE \sim \triangle OBD$. Поэтому:

$$\frac{|AE|}{|OD|} = \frac{|OE|}{|BD|} \implies \frac{1}{x} = \frac{x}{3} \implies x = \sqrt{3}.$$

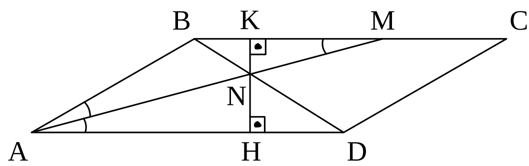
Затем из прямоугольного треугольника OBD находим

$$\operatorname{tg}\widehat{ABC} = \frac{|OD|}{|BD|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \implies \widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{6}$.

Задача 6.

В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AB равна 6, а длина высоты, проведённой к основанию AD, равна 3. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $|MC| = 4$. N – точка пересечения отрезков AM и BD. Вычислите площадь треугольника BNM.



Идея. Воспользоваться подобием треугольников AND и BNM.
Указание. Доказать, что треугольник AMB равнобедренный, найти длины отрезков BM и AD.

Решение. Заметим, что углы AMB и MAD равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AM. А так как равны и углы MAD и MAB, то угол AMB равен углу MAB, т.е. треугольник AMB равнобедренный, поэтому $|AB| = |BM| = 6$. Далее, $|AD| = |BC| = |BM| + |MC| = 10$. Теперь воспользуемся тем, что треугольники AND и BNM подобны по первому признаку подобия треугольников, что даёт нам

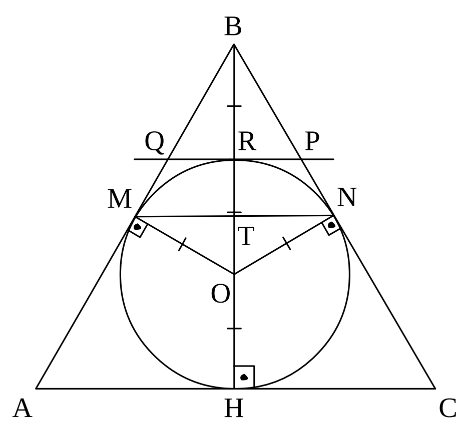
$$\frac{|NK|}{|NH|} = \frac{|BM|}{|AD|} = \frac{3}{5} \quad \Longrightarrow \quad |NK| = \frac{3}{8}|HK| = \frac{9}{8}.$$

Наконец, $S_{\triangle BNM} = \dfrac{1}{2} \cdot |BM| \cdot |NK| = \dfrac{27}{8}$.

Ответ. $\dfrac{27}{8}$.

Задача 7.

В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, длина радиуса которой равна 3. Прямая p касается этой окружности и параллельна прямой AC, но не совпадает с ней. Расстояние от точки B до прямой p равно 3. Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC.



Идея. Найти расстояния от точки B до центра O окружности, вписанной в треугольник ABC, и до точки M её касания со стороной AB.
Указание. Доказать, что треугольники MOT и BOM подобны (T – точка пересечения отрезка BO и отрезка, концами которого являются точки касания вписанной в треугольник ABC окружности с его сторонами AB и BC).

Решение. Обозначим буквой O центр вписанной в треугольник ABC окружности, буквой R — точку касания прямой p и этой окружности, буквами Q и P обозначим точки пересечения прямой p со сторонами AB и BC соответственно. Точки касания вписанной в треугольник ABC окружности с его сторонами обозначим буквами M, N и H ($M \in AB$, $N \in BC$, $H \in AC$).

Поскольку треугольник ABC по условию задачи равнобедренный, то есть его биссектриса BL, проведённая из вершины B, является также его высотой и медианой, то, с одной стороны, $OL \perp AC$, но, с другой стороны, $OH \perp AC$. Поэтому точки L и H совпадают.

Далее, $p||AC$, поэтому треугольник QBP подобен треугольнику ABC. Стало быть, $|QB| = |BP|$. Заметим, что $\triangle MOB = \triangle NOB$ (по гипотенузе и катету), что даёт нам равенство длин отрезков MB и NB. Тогда $|MQ| = |NP|$, а из этого, с учётом того что $\triangle MOQ = \triangle ROQ$ и $\triangle ROP = \triangle NOP$, вытекает, что $|QR| = |RP|$. Но BH — биссектриса угла ABC, следовательно, она проходит через середину отрезка PQ и перпендикулярна ему. Итак, все четыре точки B, R, O, H лежат на одной прямой, поэтому

$$|BR| = 3, |BO| = |BR| + |RO| = 6, \quad |BM| = \sqrt{|BO|^2 - |OM|^2} = 3\sqrt{3}.$$

Аналогичными рассуждениями получаем, что BH проходит через середину отрезка MN (обозначим её T) и перпендикулярна ему. По утверждению 5 треугольники MOT и BOM подобны (прямоугольные треугольники с общим углом), из чего вытекает

$$\frac{|MT|}{|BM|} = \frac{|MO|}{|BO|} \quad \Longrightarrow \quad |MT| = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

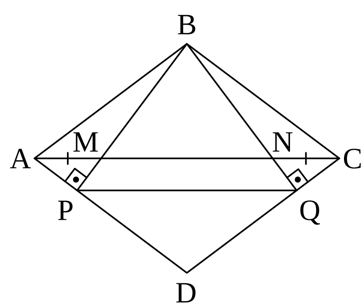
Наконец, $|MN| = 2 \cdot |MT| = 3\sqrt{3}$.

О т в е т. $3\sqrt{3}$.

Задача 8.

В ромбе $ABCD$ проведены высоты BP и BQ. Они пересекают диагональ AC в точках M и N соответственно (M между A и N). Известно, что $|AM| = p$, $|MN| = q$. Найдите $|PQ|$.

И д е я. Доказать, что треугольник AMP подобен треугольнику CMB, а треугольник BMN подобен треугольнику BPQ.
У к а з а н и е. Найти отношение $|BP| : |BM|$.



Р е ш е н и е. Поскольку четырёхугольник $ABCD$ – ромб, то $|AB| = |BC|$, $\angle BAD = \angle BCD$. Из этого вытекает равенство прямоугольных треугольников ABP и CBQ (по гипотенузе и острому углу), стало быть, $|BP| = |BQ|$, $\angle ABP = \angle CBQ$. Так как треугольник ABC – равнобедренный, то $\angle BAC = \angle BCA$. Значит, треугольники ABM и CBN равны по стороне и двум углам, поэтому $|BM| = |BN|$, $|AM| = |CN| = q$, $|CM| = |CN| + |MN| = p + q$.

Далее заметим, что треугольники BMN и BPQ подобны по второму признаку подобия треугольников. Действительно, отношения $|BM| : |BP|$ и $|BN| : |BQ|$

равны в силу полученных ранее фактов, а угол B у них общий. Из этого подобия вытекает, что

$$\frac{|PQ|}{|MN|} = \frac{|BP|}{|BM|} \quad \Longrightarrow \quad |PQ| = |MN| \cdot \frac{|BP|}{|BM|}.$$

Для нахождения отношения $|BP| : |BM|$ заметим, что $AD||BC$. Из этого следует равенство углов CAD и ACB (они внутренние накрест лежащие) и перпендикулярность отрезков BP и BC. Но тогда треугольники AMP и CMB подобны по первому признаку подобия треугольников, стало быть,

$$\frac{|MP|}{|BM|} = \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{p}{p+q}; \quad \frac{|BP|}{|BM|} = \frac{|BM| + |MP|}{|BM|} = 1 + \frac{|MP|}{|BM|} =$$

$$= 1 + \frac{p}{p+q} = \frac{2p+q}{p+q} \quad \Longrightarrow \quad |PQ| = \frac{2pq+q^2}{p+q}.$$

О т в е т. $\dfrac{2pq+q^2}{p+q}$.

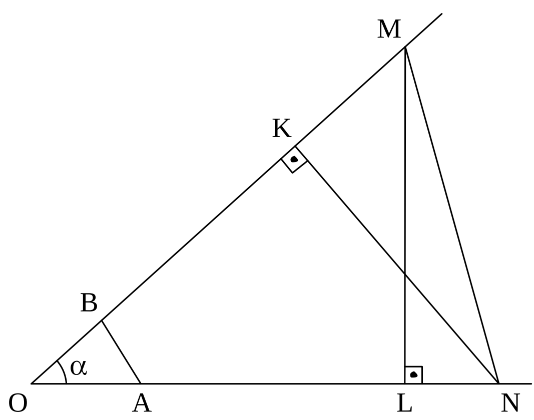
Задача 9.

На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OB взята точка M на расстоянии $3 \cdot |OA|$ от прямой OA, а на луче OA – точка N на расстоянии $3 \cdot |OB|$ от прямой OB. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника AOB, равна 3. Найдите $|MN|$.

И д е я. Доказать, что треугольник AOB подобен треугольнику MON, воспользовавшись вторым признаком подобия треугольников.

У к а з а н и е. Выразить синус величины угла AOB из треугольников OKN и OLM. Доказать, что треугольник AOB подобен треугольнику MON.

У к а з а н и е. Применить теорему синусов к треугольнику AOB.



Р е ш е н и е. Заметим, что конфигурация, получающаяся в этой задаче, кое-чем напоминает конфигурацию из утверждения 3. Для решения этой задачи нам придётся провести рассуждения, похожие на доказательство этого утверждения.

Обозначим $\widehat{AOB} = \alpha$, основания перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые OA и OB, обозначим буквами L и K. Тогда из $\triangle OKN$ и $\triangle OLM$ получаем

$$\sin\alpha = \frac{|KN|}{|ON|} = \frac{3 \cdot |OB|}{|ON|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|OB|}{|ON|} = \frac{\sin\alpha}{3};$$

$$\sin\alpha = \frac{|LM|}{|OM|} = \frac{3\cdot|OA|}{|OM|} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{\sin\alpha}{3}.$$

Следовательно, $\triangle AOB \sim \triangle MON$ по второму признаку подобия треугольников, причём коэффициент их подобия равен $\dfrac{\sin\alpha}{3}$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{|AB|}{|MN|} = \frac{\sin\alpha}{3} \quad\Longrightarrow\quad |MN| = \frac{3\cdot|AB|}{\sin\alpha}.$$

Теперь, записывая теорему синусов для треугольника AOB, мы находим

$$|AB| = 2R_{\triangle AOB}\cdot\sin\alpha.$$

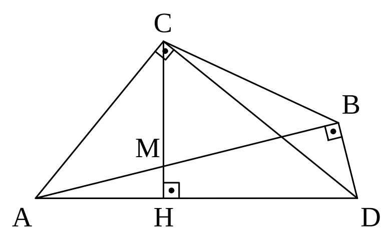
Наконец, ответим на вопрос задачи: $|MN| = \dfrac{3\cdot 2R_{\triangle AOB}\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha} = 6R_{\triangle AOB} = 18$.

Ответ. 18.

Задача 10.

В треугольнике ABC угол C – тупой, D – точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведённая из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $|AM| = a$, $|MB| = b$. Найдите $|AC|$.

Идея. Доказать, что треугольник ACH подобен треугольнику ADC, а треугольник AMH подобен треугольнику ADB.
Указание. Выразить двумя способами произведение длин отрезков AD и AH.



Решение. Самое трудное в этой задаче – найти связь между известными нам величинами и той величиной, которую просят вычислить. Заметим, что известные нам величины входят в пару треугольников AMH и ADB, при этом $\widehat{AHM} = \widehat{ABD} = \pi/2$, а угол MAH – общий угол этих треугольников. Поэтому $\triangle AMH \sim \triangle ADB$. Неизвестная нам величина $|AC|$ входит в три треугольника: в $\triangle ABC$, $\triangle ACH$ и $\triangle ADC$. Заметим, что поскольку $\widehat{AHC} = \widehat{ACD}$, а угол CAD является общим углом треугольников ACH и ADC, то $\triangle ACH \sim \triangle ADC$. Из найденных подобий мы получаем

$$\triangle AMH \sim \triangle ADB \quad\Longrightarrow\quad \frac{|AM|}{|AD|} = \frac{|AH|}{|AB|} \quad\Longrightarrow\quad |AD|\cdot|AH| = |AB|\cdot|AM|;$$

$$\triangle ACH \sim \triangle ADC \quad\Longrightarrow\quad \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AH|}{|AC|} \quad\Longrightarrow\quad |AD|\cdot|AH| = |AC|^2.$$

Сравнивая полученные соотношения, получаем

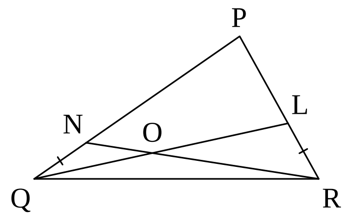
$$|AC|^2 = |AB|\cdot|AM| = (a+b)\cdot a \quad\Longrightarrow\quad |AC| = \sqrt{a^2+ab}.$$

Ответ. $\sqrt{a^2+ab}$.

Задача 11.

На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR – точка L, причём $|NQ| = |LR|$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении $m : n$, считая от точки Q. Найдите значение отношения $|PN| : |PR|$.

Идея. Воспользоваться теоремой Менелая.
Указание. Рассмотреть треугольник LQP.



Решение. Обозначим точку пересечения отрезков QL и NR буквой O. Из условия задачи следует, что $|QO| : |OL| = m : n$. Применим теорему Менелая к треугольнику LQP и секущей NO:

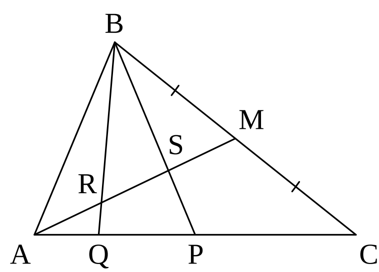
$$\frac{|LO|}{|OQ|}\cdot\frac{|QN|}{|NP|}\cdot\frac{|PR|}{|RL|} = 1 \Longrightarrow \frac{|PN|}{|PR|} = \frac{|LO|}{|OQ|}\cdot\frac{|QN|}{|LR|} = \frac{n}{m}.$$

Ответ. $n : m$.

Задача 12.

В треугольнике ABC на стороне AC взяты точки P и Q таким образом, что $|AP| > |AQ|$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $|PQ| = 3$. Найдите длину стороны AC.

Идея. Применить теорему Менелая в ΔACM.
Указание. Показать, что BP – медиана треугольника ABC.
Указание. Применить теорему Менелая к треугольнику ACM.



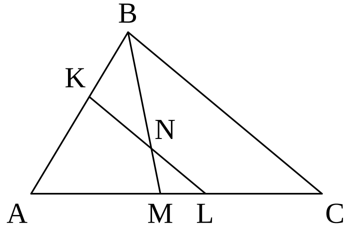
Решение. Обозначим точки пересечения медианы AM с отрезками BQ и BP буквами R и S соответственно. Так как AM – медиана, а отрезок BP разделил её точкой пересечения S в отношении $2 : 1$, считая от вершины, то BP – тоже медиана. Обозначим $|AQ| = x$, тогда $|PC| = |AP| = x+3$. Применяя теорему Менелая к треугольнику ACM и секущей QR, получаем:

$$\frac{|MR|}{|RA|}\cdot\frac{|AQ|}{|QC|}\cdot\frac{|CB|}{|BM|} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{x}{x+6}\cdot\frac{2}{1} = 1 \quad\Longrightarrow\quad x = 2 \quad\Longrightarrow\quad |AC| = 10.$$

Ответ. 10.

Задача 13.

В треугольнике ABC взяты точка K на стороне AB и точка M на стороне AC так, что $|AK| : |KB| = 3 : 2$, $|AM| : |MC| = 4 : 5$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC, делит отрезок BM.



Идея. Воспользоваться теоремой Менелая.

Указание. Используя теорему Фалеса, найти отношение $|AL| : |LC|$, где L – точка пересечения прямой, проходящей через точку K параллельно стороне BC, и отрезка AC.

Указание. Применить теорему Менелая к треугольнику ABM и секущей KL.

Решение. Пусть L – точка пересечения прямой, проходящей через точку K параллельно стороне BC, и отрезка AC, а N – точка пересечения отрезков KL и BM. Поскольку $KL||BC$, то, по теореме Фалеса, $|AL| : |LC| = |AK| : |KB| = 3 : 2$. Обозначим $|AC| = z$, тогда $|AM| = \dfrac{4}{9}z$, $|AL| = \dfrac{3}{5}z$, $|LM| = |AL| - |AM| = \dfrac{7}{45}z$. Наконец, применяя теорему Менелая к треугольнику ABM и секущей KN, находим

$$\frac{|MN|}{|NB|}\cdot\frac{|BK|}{|KA|}\cdot\frac{|AL|}{|LM|} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{|BN|}{|NM|} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{3}{5}z}{\frac{7}{45}z} = \frac{18}{7}.$$

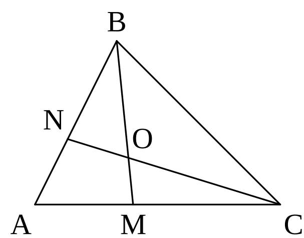
Ответ. $18:7$.

Задача 14.

В треугольнике ABC взяты точка N на стороне AB и точка M на стороне AC. Отрезки CN и BM пересекаются в точке O. Вычислите $|CO| : |ON|$, если известно, что $|AN| : |NB| = 2 : 3$, $|BO| : |OM| = 5 : 2$.

Идея. Воспользоваться теоремой Менелая.

Указание. Найти отношение $|AM| : |MC|$.



Решение. Применяя теорему Менелая к треугольнику ABM и секущей CN, получаем:

$$\frac{|MO|}{|OB|}\cdot\frac{|BN|}{|NA|}\cdot\frac{|AC|}{|CM|} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{|AC|}{|CM|} = \frac{5}{3}.$$

Обозначим $|AC| = 5y$, $|CM| = 3y$, $|AN| = 2x$, $|NB| = 3x$, тогда $|AM| = 2y$, $|AB| = 5x$. Наконец, применим теорему Менелая к треугольнику ACN и секущей BM:

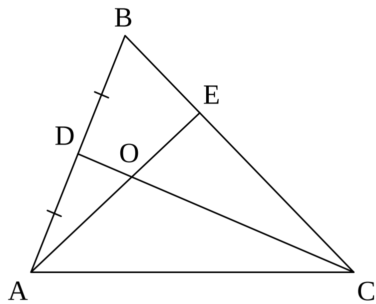
$$\frac{|NO|}{|OC|}\cdot\frac{|CM|}{|MA|}\cdot\frac{|AB|}{|BN|} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{|CO|}{|ON|} = \frac{3y}{2y}\cdot\frac{5x}{3x} = \frac{5}{2}.$$

Ответ. $5:2$.

Задача 15.

В треугольнике ABC точка D делит сторону AB пополам, а точка E лежит на стороне BC, причём $|BC| = 3|BE|$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O, $|AE| = 5$, $|OC| = 4$, $\widehat{AOC} = 120°$. Найдите длину стороны AB.

Идея. Воспользоваться теоремой Менелая.
Указание. Найти длины отрезков OA и DO.



Решение. Так как точка D делит сторону AB пополам, то достаточно найти длину отрезка AD. Для этого нам надо найти длины отрезков OA и DO. В соответствии с условием задачи обозначим $|AD| = |DB| = x$, $|BE| = y$, $|BC| = 3y$. Тогда $|EC| = 2y$. Для того чтобы найти длины отрезков OA и DO, дважды применим теорему Менелая: сначала к треугольнику ABE и секущей DO, затем к треугольнику CBD и секущей EO:

$$\frac{|EO|}{|OA|} \cdot \frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BC|}{|CE|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|EO|}{|OA|} = \frac{x}{x} \cdot \frac{2y}{3y} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad |EO| = 2, \quad |OA| = 3;$$

$$\frac{|DO|}{|OC|} \cdot \frac{|CE|}{|EB|} \cdot \frac{|BA|}{|AD|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|DO|}{4} = \frac{x}{2x} \cdot \frac{y}{2y} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad |DO| = 1.$$

Теперь все просто: заметим, что $\widehat{AOD} = 180° - \widehat{AOC} = 60°$, и запишем теорему косинусов для треугольника AOD:

$$|AD|^2 = |OA|^2 + |DO|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |DO| \cdot \cos\widehat{AOD} = 9 + 1 - 3 \quad \Longrightarrow \quad |AD| = \sqrt{7}.$$

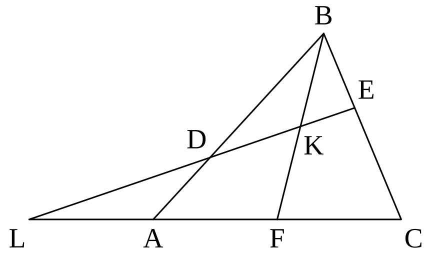
Наконец, $|AB| = 2|AD| = 2\sqrt{7}$.

Ответ. $2\sqrt{7}$.

Задача 16.

В треугольнике ABC точки D, E и F расположены на сторонах AB, BC и AC соответственно. Известно, что $|AD| : |DB| = 1 : 2$, $|BE| : |EC| = 2 : 3$, $|AF| : |FC| = 1 : 1$. Отрезки DE и BF пересекаются в точке K. Вычислите отношение $|BK| : |KF|$.

Идея. Продолжить прямую ED до пересечения с прямой AC.
Указание. Использовать теорему Менелая.



Р е ш е н и е. Поскольку по условию задачи $|BE| : |EC| < |BD| : |DA|$, то прямая ED пересекает прямую AC в точке L, причём точка A лежит между точками L и C. Записывая теорему Менелая для треугольника ABC и секущей ED, находим

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CL|}{|LA|}=1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{|CL|}{|LA|}=3.$$

Обозначим $|LA| = x$, тогда $|CL| = 3x$, $|AC| = 2x$, $|AF| = |FC| = x$. Ещё раз применяя теорему Менелая для треугольника ABF и секущей KD, получаем

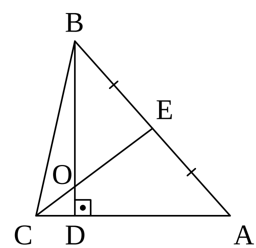
$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BK|}{|KF|}\cdot\frac{|FL|}{|LA|}=1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{|BK|}{|KF|}=\frac{2}{1}\cdot\frac{x}{2x}=1.$$

О т в е т. $1:1$.

Задача 17.

В треугольнике ABC длина высоты BD равна 6, длина медианы CE равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1. Найдите длину стороны AB.

И д е я. Применить теорему Менелая к ΔABD и ΔACE.
У к а з а н и е. Найти расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до точек C и E.
У к а з а н и е. Дважды применить теорему Пифагора.



Р е ш е н и е. Для нахождения искомой длины нам надо найти длину отрезка AD. Пусть O – точка пересечения отрезков BD и CE. Поскольку $OD \perp AC$, то длина отрезка OD и есть расстояние от точки D до прямой AC, значит, $|OD| = 1$, $|BO| = 5$. Также обозначим $|EA| = |BE| = x$. Дважды применим теорему Менелая: сначала к треугольнику ABD и секущей EO, затем к треугольнику ACE и секущей DO:

$$\frac{|DO|}{|OB|}\cdot\frac{|BE|}{|EA|}\cdot\frac{|AC|}{|CD|}=1 \;\Longrightarrow\; \frac{|AC|}{|CD|}=\frac{x}{x}\cdot\frac{5}{1}=5 \;\Longrightarrow\; |AC|=5|CD|,\quad |AD|=4|CD|;$$

$$\frac{|EO|}{|OC|}\cdot\frac{|CD|}{|DA|}\cdot\frac{|AB|}{|BE|}=1 \;\Longrightarrow\; \frac{|EO|}{|OC|}=\frac{4|CD|}{|CD|}\cdot\frac{x}{2x}=2 \;\Longrightarrow\; |EO|=\frac{10}{3},\quad |OC|=\frac{5}{3}.$$

Теперь, записывая теорему Пифагора в треугольнике ODC, получаем

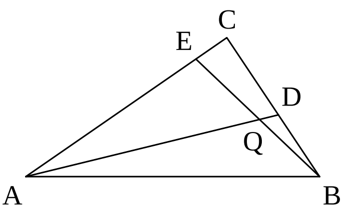
$$|CD|=\sqrt{|OC|^2-|OD|^2}=\sqrt{\frac{25}{9}-1}=\frac{4}{3} \quad\Longrightarrow\quad |AD|=\frac{16}{3}.$$

Наконец, из ΔABD находим $|AB|=\sqrt{|AD|^2+|BD|^2}=\sqrt{\frac{256}{9}+36}=\frac{\sqrt{580}}{3}$.

О т в е т. $\frac{2}{3}\sqrt{145}$.

Задача 18.

В треугольнике ABC из вершин A и B проведены отрезки AD и BE, причём точки D и E лежат на сторонах BC и AC соответственно. Отрезки AD и BE пересекаются в точке Q таким образом, что $|AQ| : |QD| = x$, $|BQ| : |QE| = y$. Найдите значения отношений $|AE| : |EC|$ и $|BD| : |DC|$.



Идея. Применить теорему Менелая.

Указание. Рассмотреть треугольники ADC и BEC.

Указание. Ввести неизвестные $|AE| : |EC| = u$, $|BD| : |DC| = v$.

Решение. Введём неизвестные

$$|AE| : |EC| = u, \quad |BD| : |DC| = v.$$

Положим $|EC| = k$, $|DC| = l$, тогда

$$|AE| = uk, \quad |AC| = (u+1)k, \quad |BD| = vl, \quad |BC| = (v+1)l.$$

Применяя теорему Менелая к треугольникам ACD и BCE, получаем

$$\frac{|DQ|}{|QA|} \cdot \frac{|AE|}{|EC|} \cdot \frac{|CB|}{|BD|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} \cdot \frac{uk}{k} \cdot \frac{(v+1)l}{vl} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad u(v+1) = vx;$$

$$\frac{|EQ|}{|QB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CA|}{|AE|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{vl}{l} \cdot \frac{(u+1)k}{uk} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad v(u+1) = uy.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$u = |AE| : |EC| = \frac{xy-1}{y+1}, \qquad v = |BD| : |DC| = \frac{xy-1}{x+1}.$$

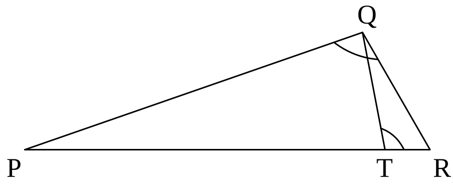
Ответ. $|AE| : |EC| = \dfrac{xy-1}{y+1}$, $\quad |BD| : |DC| = \dfrac{xy-1}{x+1}$.

Задача 19.

В треугольнике PQR точка T лежит на стороне PR так, что $\widehat{QTR} = \widehat{PQR}$. Известно, что $|PT| = 8$, $|TR| = 1$. Найдите:

а) длину стороны QR;

б) величину угла QRP, если длина радиуса описанной около треугольника PQT окружности равна $3\sqrt{3}$.



Идея. Рассмотреть треугольники QTR и PQR, доказать, что они подобны.
Указание. Вычислить значение отношения $|QT| : |PQ|$ и длину отрезка QR.
Указание. Для нахождения длины отрезка PQ воспользоваться в треугольнике PQT формулой Герона и формулой площади $S = \dfrac{abc}{4R}$.

Решение. Заметим, что треугольники QTR и PQR подобны по первому признаку подобия треугольников, так как угол R у них общий, а углы QTR и PQR равны по условию задачи. Из этого подобия получаем

$$\frac{|QT|}{|PQ|} = \frac{|QR|}{|PR|} = \frac{|TR|}{|QR|} \quad \Longrightarrow \quad |QR|^2 = |TR|{\cdot}|PR| = 9 \quad \Longrightarrow \quad |QR| = 3; \ \frac{|QT|}{|PQ|} = \frac{1}{3}.$$

С учётом полученного только что соотношения обозначим $|QT| = x$, $|PQ| = 3x$. Для ответа на второй вопрос задачи нам достаточно найти x, поскольку, применяя теорему косинусов для треугольника PQR, мы имеем

$$\cos\widehat{QRP} = \frac{|QR|^2 + |PR|^2 - |PQ|^2}{2\cdot|QR|\cdot|PR|} = \frac{10 - x^2}{6}.$$

Численное значение x можно найти, например, пользуясь формулой Герона и формулой $S = \dfrac{abc}{4R}$:

$$S_{\triangle PQT} = \sqrt{(2x+4)(2x-4)(x+4)(4-x)} = \frac{x\cdot 3x\cdot 8}{12\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x^4 - 15x^2 + 48 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

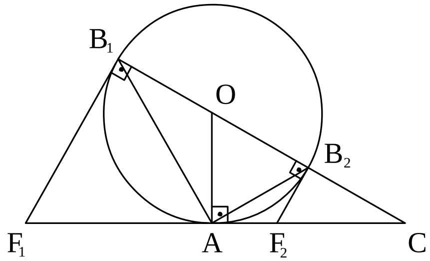
Подставляя найденные значения x^2 в полученную ранее формулу, находим

$$\cos\widehat{QRP} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{12} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{QRP} = \arccos\left(\frac{5 \pm \sqrt{33}}{12}\right).$$

Ответ. $|QR| = 3$, $\widehat{QRP} = \arccos\left(\dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{12}\right)$.

Задача 20.

Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, длина радиуса которой равна $2\sqrt{5}$, отсекающая от прямой BC отрезок длины $4\sqrt{5}$ и касающаяся прямой AC в точке A. Из точки B проведён перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите площадь треугольника ABC, если $|BF| = 2$.



И д е я. Доказать, что прямая AB проходит через центр окружности.
У к а з а н и е. Рассмотреть два случая расположения точки B.
У к а з а н и е. Использовать подобие треугольников AOC и BFC (O – центр окружности).

Р е ш е н и е. Заметим, что если прямая пересекает окружность, то отрезок максимальной длины (эта длина равна длине диаметра этой окружности) будет отсечён от этой прямой в случае, когда она проходит через центр окружности. Верно и обратное утверждение: если прямая проходит через центр окружности, то отсекаемый от неё отрезок будет иметь максимальную длину среди всех тех отрезков, которые получаются при пересечении этой окружности какой-либо другой прямой.

Поэтому прямая BC проходит через центр окружности, данной в условии задачи. Обозначим этот центр буквой O. Возможны два случая: либо точка O лежит на отрезке BC (на чертеже этому случаю соответствует точка B_1), либо точка B лежит на отрезке OC (на чертеже этому случаю соответствует точка B_2). Первый случай невозможен, так как по условию задачи $|OA| > |BF|$, но

$$|OA| = |OC| \cdot \sin\widehat{C} < |B_1C| \cdot \sin\widehat{C} < |B_1C| \cdot \operatorname{tg}\widehat{C} = |B_1F_1|.$$

Поэтому условию задачи соответствует второй случай. Треугольники AOC и B_2F_2C подобны по первому признаку подобия треугольников, так как угол C – их общий угол, а $\widehat{CAO} = \widehat{F_2B_2C} = \pi/2$. Поэтому

$$\frac{|OC|}{|F_2C|} = \frac{|AO|}{|B_2F_2|} = \frac{|AC|}{|B_2C|} \quad \Longrightarrow \quad |AC| = \sqrt{5}|B_2C|.$$

Обозначим $|B_2C| = x$, тогда $|OC| = |OB_2| + |B_2C| = x + 2\sqrt{5}$. Применяя к треугольнику AOC теорему Пифагора, получаем

$$|OC|^2 = |AC|^2 + |AO|^2 \quad \Longrightarrow \quad (x + 2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{5}x)^2 + (2\sqrt{5})^2.$$

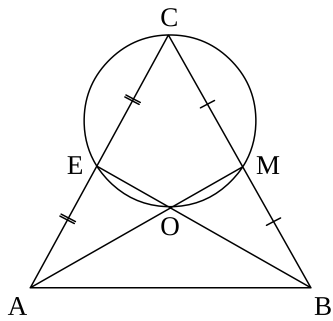
Решая это уравнение, получим $x = \sqrt{5} = |B_2C|$. Тогда $|AC| = 5$, $|OC| = 3\sqrt{5}$. Теперь для нахождения площади треугольника ABC нам не хватает лишь синуса величины угла C. Из прямоугольного треугольника OAC находим

$$\sin\widehat{C} = \frac{|OA|}{|OC|} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin\widehat{C} = \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

О т в е т. $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.

Задача 21.

Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки O, M, E, C лежат на одной окружности, $|BE| = |AM| = 3$. Найдите $|AB|$.



Идея. Доказать, что треугольник ABC – равносторонний.
Указание. Используя равенство медиан, показать, что треугольник ACB – равнобедренный.
Указание. Доказать, что $\triangle BOM \sim \triangle BCE$.

Решение. Так как O – точка пересечения медиан и $|BE| = |AM|$, то

$$|BO| = |AO| = \frac{2}{3}|BE| = 2, |OM| = |OE| = \frac{1}{3}|BE| = 1.$$

Также заметим, что углы AOE и BOM равны, поскольку они вертикальные. Следовательно, треугольники BOM и AOE равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда вытекает, что $|AE| = |BM| \Longrightarrow |AC| = |BC|$, то есть треугольник ABC – равнобедренный.

Тогда треугольники OMC и OEC равны по третьему признаку равенства треугольников, из чего вытекает, что $\widehat{OMC} = \widehat{OEC}$. Далее, в силу того что точки O, M, C и E лежат на одной окружности, $\triangle BOM \sim \triangle BCE$ (по утверждению 4 из теоретических материалов). Поэтому $\widehat{BMO} = \widehat{BEC}$.

Сравнивая последние два соотношения, получаем, что углы OMC и BMO равны. Но эти два угла – смежные. Значит, они прямые, то есть AM – медиана и высота. Стало быть, $|AB| = |AC|$, треугольник ABC – равносторонний, величина угла ABM равна $\pi/3$. Наконец, из прямоугольного треугольника AMB получаем

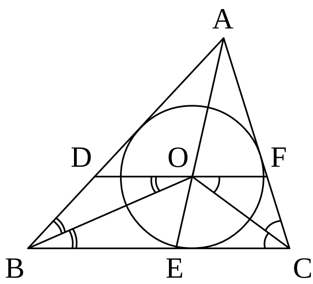
$$|AB| = \frac{|AM|}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ. $2\sqrt{3}$.

Задача 22.

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки D, E и F соответственно. Отрезки AE и DF проходят через центр вписанной в треугольник ABC окружности, а прямые DF и BC параллельны. Найдите длину отрезка BE и периметр треугольника ABC, если известно, что $|BC| = 15$, $|BD| = 6$, $|CF| = 4$.

Идея. Центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис.
Указание. Используя определение биссектрисы, найти DO и FO.
Указание. Воспользоваться подобием треугольников ABC и ADF для нахождения AD и AF.
Указание. Использовать свойство биссектрисы AE для нахождения BE.



Р е ш е н и е. Обозначим центр вписанной в треугольник ABC окружности буквой O. Поскольку точка O лежит на отрезке AE, то AE – биссектриса треугольника ABC, и для ответа на первый вопрос задачи нам желательно найти отношение $|AB|:|AC|$, чтобы воспользоваться основным свойством биссектрисы.

Отрезки BO и CO являются отрезками биссектрис соответствующих углов треугольника ABC. Поэтому $\widehat{OBD} = \widehat{OBE}$, но, в силу параллельности прямых DF и BC, $\widehat{DOB} = \widehat{OBE}$. Следовательно, $\widehat{OBD} = \widehat{DOB}$ и треугольник BDO – равнобедренный. Аналогично доказывается, что треугольник CFO – равнобедренный. Поэтому $|DO| = |BD| = 6$, $|FO| = |CF| = 4$.

Ясно, что треугольники ADF и ABC подобны. Из этого следует, что

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|DF|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AD| + |BD|}{|AD|} = \frac{|AF| + |CF|}{|AF|} = \frac{3}{2}.$$

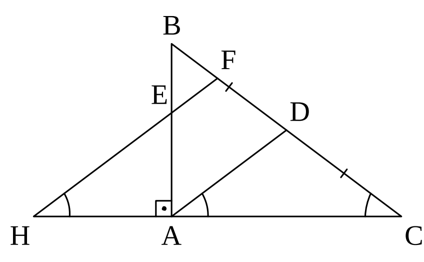
Следовательно, $|AD| = 12$, $|AF| = 8$, $P\Delta ABC = 45$. Теперь найдём $|BE|$:

$$\begin{cases} \dfrac{|BE|}{|EC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{3}{2}, \\ |BE| + |EC| = |BC| = 15 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad |BE| = 9, \quad |EC| = 6.$$

О т в е т. $|BE| = 9$, периметр треугольника ABC равен 45.

Задача 23.

Прямая, параллельная медиане AD прямоугольного треугольника ABC, пересекает его гипотенузу BC в точке F, катет AB в точке E и прямую AC в точке H. Известно, что $|EF| = 1$, $|EH| = 3$. Найдите длину гипотенузы BC.



И д е я. Доказать, что треугольники EAH и BAC подобны, воспользоваться подобием треугольников BEF и BAD.

У к а з а н и е. Воспользоваться свойством медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе.

Р е ш е н и е. Обозначим $|AD| = x$. По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведённой к его гипотенузе,

$$|BD| = |CD| = x, \ \widehat{DAC} = \widehat{DCA}.$$

Поскольку $EF||AD$, то, во-первых, подобны треугольники BEF и BAD и, во-вторых, в силу того, что углы DAC и EHC равны как соответственные, подобны треугольники EAH и BAC. Из этих подобий вытекает

$$\frac{|EF|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|AB|}; \quad \frac{|EH|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|AB|}.$$

Складывая полученные соотношения, получаем

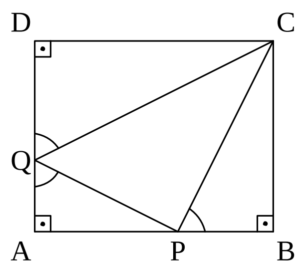
$$\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}=\frac{|BE|+|AE|}{|AB|}=1 \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{5}{2},\ |BC|=5.$$

Ответ. 5.

Задача 24.

На сторонах AB и AD прямоугольника $ABCD$ выбраны точки P и Q $(P \in AB)$ так, что $\angle CQD = \angle AQP = \angle BPC$. Вычислите длину отрезка AP, если $|AB| = b$, $|AD| = d$ $(b > d)$.

Идея. Воспользоваться тем, что треугольники AQP, BPC и DQC попарно подобны.
Указание. Обозначить $|AP| = x$, $|AQ| = y$.



Решение. Обозначим $|AP| = x$, $|AQ| = y$. Тогда ясно, что $|BP| = b - x$, $|DQ| = d - y$. Заметим, что треугольник AQP подобен треугольнику BPC и треугольник DQC подобен треугольнику AQP. Из этих подобий вытекает

$$\frac{|AQ|}{|BP|}=\frac{|AP|}{|BC|} \quad \Longrightarrow \quad dy=x(b-x); \qquad \frac{|AQ|}{|DQ|}=\frac{|AP|}{|DC|} \quad \Longrightarrow \quad by=x(d-y).$$

Выражая y из первого уравнения и подставляя его во второе, находим

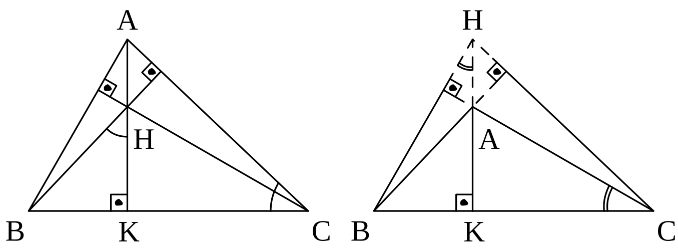
$$b\cdot\frac{x(b-x)}{d}=x\cdot\left(d-\frac{x(b-x)}{d}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad b^2-bx=d^2-bx+x^2 \quad \Longrightarrow \quad x=\sqrt{b^2-d^2}.$$

Ответ. $\sqrt{b^2-d^2}$.

Задача 25.

Прямые, содержащие высоты треугольника ABC, пересекаются в точке H. Известно, что $|BH| = 6$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Найдите длину стороны AC.

Идея. Доказать, что треугольники BHK и ACK подобны (K — основание высоты, опущенной на AC).
Указание. Воспользоваться теоремой о сумме величин углов треугольника и соотношениями между длинами сторон и величинами углов в прямоугольном треугольнике.



Решение. Сначала рассмотрим случай, когда углы BAC и ACB острые. Тогда точка H лежит внутри треугольника ABC и $\widehat{KHB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{HBK} = \widehat{ACK}$. Из этого вытекает, что прямоугольные треугольники BHK и ACK подобны, поэтому

$$\frac{|BH|}{|AC|} = \frac{|BK|}{|AK|} \quad \Longrightarrow \quad |AC| = |BH| \cdot \frac{|AK|}{|BK|} = 6 \cdot \operatorname{tg} \widehat{ABK} = 6\sqrt{3}.$$

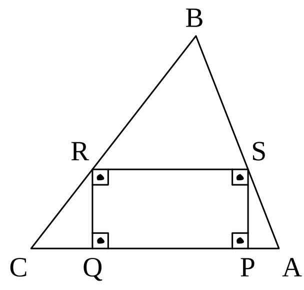
Если предположить, что угол BAC тупой, то конфигурация несколько изменится, но тот факт, что $\widehat{KHB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{HBK} = \widehat{ACK}$, остаётся неизменным. Поэтому опять-таки прямоугольные треугольники BHK и ACK подобны, и, проводя аналогичные рассуждения, мы приходим к тому же ответу. Случай, когда угол ACB тупой, рассматривается аналогично.

Ответ. $6\sqrt{3}$.

Задача 26.

В треугольнике ABC расположен прямоугольник $PQRS$ так, что сторона PQ лежит на отрезке AC, а вершины R и S – на отрезках BC и AB соответственно. Найдите длину отрезка PS, если известно, что $|AP| = 1$, $|PQ| = 5$, $|QC| = 2$, а периметр треугольника BRS равен 15.

Идея. Воспользоваться подобием треугольников SBR и ABC и равенством длин отрезков PS и RQ.
Указание. Используя подобие треугольников SBR и ABC, найти отношения $|BR| : |BC|$ и $|BS| : |BA|$.
Указание. Применить теорему Пифагора для ΔCRQ и ΔASP.



Решение. Из того, что $PQRS$ – прямоугольник, вытекает, что $|PQ| = |RS| = 5$, $|PS| = |RQ|$, $RS \| PQ$. Значит, треугольники SBR и ABC подобны, поэтому

$$\frac{|BR|}{|BC|} = \frac{|BS|}{|BA|} = \frac{|RS|}{|CA|} = \frac{5}{8}.$$

Обозначим $|BC| = 8x$, $|AB| = 8y$, тогда $|BS| = 5y$, $|BR| = 5x$, $|AS| = 3y$, $|CR| = 3x$. Далее, во-первых, $5 + 5x + 5y = 15 \Longrightarrow x + y = 2$ и, во-вторых,

$$|RQ|^2 = |CR|^2 - |CQ^2| = 9x^2 - 4; \; |PS|^2 = |AS|^2 - |AP|^2 = 9y^2 - 1,$$

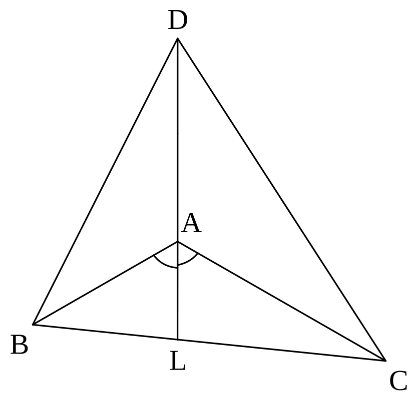
стало быть, $9x^2 = 9y^2 + 3$. Решая полученные уравнения, находим $x = 13/12$, $y = 11/12$, $|PS| = \sqrt{105}/4$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{105}}{4}$.

Задача 27.

На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята точка D таким образом, что $\widehat{BDC} = \widehat{BAL} = \pi/3$, $|AD| = 10$. Найдите площадь треугольника ABC.

Идея. Найти произведение $|AB| \cdot |AC|$.
Указание. Доказать, что треугольники ACD и ADB подобны.



Решение. Ясно, что поскольку величины углов BAL и CAL равны $\pi/3$, то величины смежных с ними углов BAD и CAD равны $2\pi/3$. Обозначим $\widehat{ACD} = \alpha$, тогда

$$\widehat{ADC} = \pi - \widehat{ACD} - \widehat{CAD} = \frac{\pi}{3} - \alpha,$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{BDC} - \widehat{ADC} = \alpha.$$

Значит, треугольники ACD и ADB подобны по первому признаку подобия треугольников, что даёт нам

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AB|} \quad \Longrightarrow \quad |AB| \cdot |AC| = |AD|^2 = 100.$$

Наконец, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\widehat{BAC} = 25\sqrt{3}$.

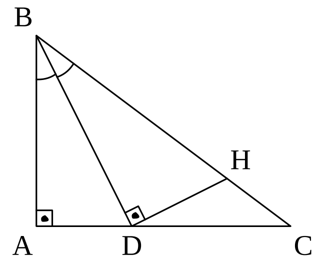
Ответ. $25\sqrt{3}$.

Задача 28.

В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BD, а на гипотенузе BC взята точка H так, что $DH \perp BD$. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $|CH| = 1$, $|CD| = 2$.

Идея. Доказать, что $\Delta CDH \sim \Delta CBD$.
Указание. Доказать, что углы DBC и HDC равны. Используя подобие, найти длину отрезка BC.
Указание. Воспользоваться основным свойством биссектрисы и теоремой Пифагора для нахождения катетов.

Р е ш е н и е. Обозначим $\widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \beta$, тогда



$$\widehat{ADB} = \frac{\pi}{2} - \beta, \ \widehat{HDC} = \pi - \widehat{ADB} - \widehat{BDH} = \beta.$$

Значит, треугольники CDH и CBD подобны по двум углам, из чего следует

$$\frac{|CD|}{|BC|} = \frac{|CH|}{|CD|} \quad \Longrightarrow \quad |BC| = \frac{|CD|^2}{|CH|} = 4.$$

Для нахождения остальных элементов треугольника ABC проще всего поступить так: по основному свойству биссектрисы имеем $|AD| : |AB| = |CD| : |BC| = 1 : 2$, после чего положим $|AD| = y$, $|AB| = 2y$ и воспользуемся теоремой Пифагора:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 \quad \Longrightarrow \quad 16 = 4y^2 + (y+2)^2 \quad \Longrightarrow \quad y = 6/5.$$

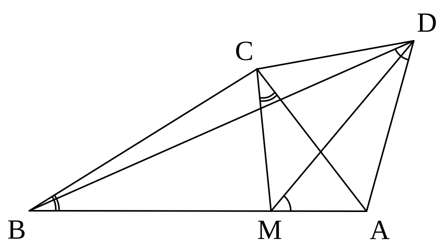
Наконец, $|AB| = 12/5$, $|AC| = 16/5$, $S_{\triangle ABC} = 96/25$.

О т в е т. 96/25.

Задача 29.

На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle AMD = \angle ADB$ и $\angle ACM = \angle ABC$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $|CD| = 20$. Найдите длину радиуса вписанной в треугольник ACD окружности.

И д е я. Использовать равенство углов для нахождения пар подобных треугольников.
У к а з а н и е. Используя равенство углов из условия, показать, что $\triangle AMD \sim \triangle ADB$, $\triangle ACM \sim \triangle ABC$.
У к а з а н и е. Доказать, что треугольник ACD равнобедренный.
У к а з а н и е. Найти отношение высот треугольника ACD.
У к а з а н и е. Для нахождения радиуса вписанной окружности использовать формулу Герона и формулу $S = pr$.



Р е ш е н и е. В задачах, условие которых содержит равенство каких-либо углов, как правило, надо искать пары подобных треугольников. Заметим, что подобны треугольники AMD и ADB (угол A у них общий и по условию задачи равны углы AMD и ADB), а также подобны треугольники ACM и ABC (угол A у них общий и по условию задачи равны угла ACM и ABC). Из этого вытекает, что

$$\frac{|AM|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AB|} \quad \Longrightarrow \quad |AD|^2 = |AM| \cdot |AB|;$$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AM|}{|AC|} \quad \Longrightarrow \quad |AC|^2 = |AM| \cdot |AB|.$$

Таким образом, $|AC| = |AD|$, треугольник ACD — равнобедренный. Далее все более-менее просто. Расстояния от точки A до прямой CD и от точки C до прямой AD есть не что иное, как длины высот треугольника ADC (обозначим эти длины как h_{CD} и h_{AD}). Из условия задачи находим

$$3\left(\frac{h_{CD}}{h_{AD}}\right)^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{h_{CD}}{h_{AD}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

После этого запишем двумя способами площадь треугольника ACD:

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot h_{CD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h_{AD} \quad \Longrightarrow \quad |AD| = |CD| \cdot \frac{h_{CD}}{h_{AD}} = 20\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Наконец, применяя формулу Герона и формулу $S = pr$, получаем

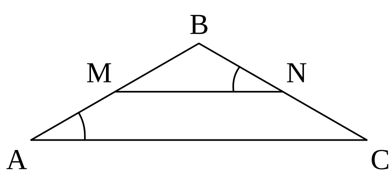
$$p_{\triangle ACD} = 20\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\right); \quad S_{\triangle ACD} = 100\sqrt{\frac{5}{3}}; \quad r_{\triangle ACD} = 4\sqrt{10} - 2\sqrt{15}.$$

Ответ. $4\sqrt{10} - 2\sqrt{15}$.

Задача 30.

На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно таким образом, что $\widehat{BAC} = \widehat{BNM} = \pi/6$. Также известно, что $|AM| = |CN|$. Найдите отношение периметра треугольника ABC к сумме длин его медиан.

Идея. Доказать, что треугольник ABC – равнобедренный.
Указание. Пользуясь тем, что треугольники ABC и NBM подобны, доказать, что треугольник ABC – равнобедренный.
Указание. Выразить стороны и медианы треугольника ABC через радиус описанной окружности.



Решение. Обозначим $|AM| = |CN| = r$, $|MB| = p$, $|NB| = q$. Треугольники ABC и NBM подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{|AB|}{|NB|} = \frac{|BC|}{|MB|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p+r}{q} = \frac{q+r}{p} \quad \Longleftrightarrow \quad p^2 + pr = q^2 + qr \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad p^2 - q^2 + pr - qr = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (p-q)(p+q+r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

Значит, треугольник ABC – равнобедренный, $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \pi/6$, $\widehat{ABC} = 2\pi/3$. Дальше можно поступить, например, так. Пусть длина радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, равна R, тогда по теореме синусов

$$|AB| = |BC| = 2R\sin\frac{\pi}{6} = R, \quad |AC| = 2R\sin\frac{2\pi}{3} = R\sqrt{3}.$$

После этого по формуле длины медианы находим

$$m_{AB} = m_{BC} = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 + 6R^2 - R^2} = \frac{R\sqrt{7}}{2}, \quad m_{AC} = h_{AC} = \frac{R}{2}.$$

Наконец,

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{m_{AB} + m_{AC} + m_{BC}} = \frac{R + R + R\sqrt{3}}{R\sqrt{7} + \frac{R}{2}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{7} + 1}.$$

Ответ. $\dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{7} + 1}$.

Задача 31.

Найдите пару подобных треугольников, длины всех сторон которых выражаются целыми числами, если известно, что длины двух сторон первого треугольника равны длинам двух сторон второго треугольника, а длины их третьих сторон отличаются на 61.

Идея. Использовать целочисленность сторон треугольников и рациональность коэффициента подобия.
Указание. Ввести коэффициент подобия треугольников. Использовать целочисленность сторон треугольников и рациональность коэффициента подобия.
Указание. Доказать, что длины меньшей стороны первого треугольника и большей стороны второго треугольника – кубы целых чисел.

Решение. Пусть длины сторон первого треугольника равны a, b и c, причём $a < b < c$. Будем считать, что коэффициент подобия треугольников равен k, тогда длины сторон второго треугольника равны ka, kb и kc соответственно. Из условия задачи мы получаем $ka = b$, $kb = c$, $kc - a = 61$, стало быть, $c = k^2 a$, $(k^3 - 1)a = 61$.

Далее, поскольку a, b, c целые числа, то k – рациональное, то есть $k = m/n$, где m и n – натуральные числа. Тогда мы имеем

$$\frac{m^3}{n^3} = \frac{61}{a} + 1 = \frac{61 + a}{a}.$$

Отметим, что в силу простоты числа 61, дробь $\dfrac{61 + a}{a}$ сократима, только если a делится на 61. Но тогда $a = 61d$, $\dfrac{61 + a}{a} = \dfrac{d + 1}{d} \neq \dfrac{m^3}{n^3}$. Противоречие. Значит,

$$m^3 = a + 61,\ n^3 = a \quad \Longrightarrow \quad m^3 - n^3 = 61 \quad \Longleftrightarrow \quad (m - n)(m^2 + mn + n^2) = 61.$$

Возможно 2 варианта: $m - n = 1$, $m^2 + mn + n^2 = 61$, тогда $m = 5$, $n = 4$, либо $m - n = 61$, $m^2 + mn + n^2 = 1$, что не выполняется ни при каких целых m и n. Итак, $k = \dfrac{5}{4}$, $a = 64$.

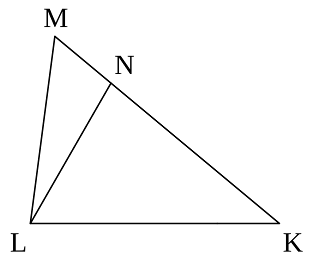
Ответ. $64, 80, 100$ и $80, 100, 125$.

1.5. Площадь треугольника

Задача 1.

На стороне KM треугольника KLM, площадь которого равна 4, взята точка N таким образом, что $|KM| = 4|MN|$. Найдите длину отрезка LN, если длина стороны KL равна $2\sqrt{3}$, а $\widehat{KLN} = \pi/3$.

Идея. Найти площадь треугольника KLN.
Указание. Воспользоваться леммой 1 о площадях для нахождения площади треугольника KLN.
Указание. Использовать формулу площади треугольника для нахождения длины отрезка LN.



Решение. Пользуясь леммой 1 о площадях, получаем

$$\frac{S_{\triangle KLN}}{S_{\triangle KLM}} = \frac{|KN|}{|KM|} = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle KLN} = 3.$$

Теперь применим формулу площади треугольника через полупроизведение сторон на синус угла между ними:

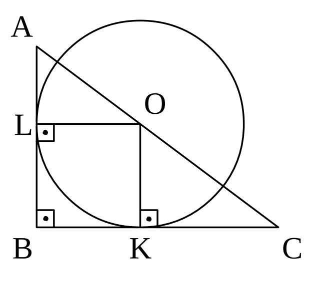
$$S_{\triangle KLN} = \frac{1}{2} \cdot |KL| \cdot |LN| \cdot \sin \widehat{KLN} \quad \Longrightarrow \quad 3 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot |LN| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad |LN| = 2.$$

Ответ. 2.

Задача 2.

Центр O окружности, длина радиуса которой равна 3, лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Его катеты касаются этой окружности. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $|OC| = 5$.

Идея. Воспользоваться подобием треугольников ABC и OKC, где K – точка касания окружности и катета BC.
Указание. Найти длины отрезков KC и BC.



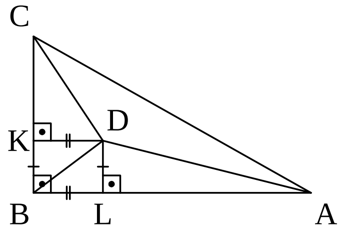
Решение. Четырёхугольник $OKBL$ является квадратом, поэтому $|BK| = |OK| = 3$. По теореме Пифагора находим $|KC| = 4$. Из этого вытекает, что $|BC| = 7$, а площадь треугольника OKC равна 6. Наконец, треугольники ABC и OKC подобны, поэтому

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle OKC}} = \left(\frac{|BC|}{|KC|}\right)^2 = \frac{49}{16} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle ABC} = \frac{49}{16} \cdot 6 = \frac{147}{8}.$$

Ответ. $\dfrac{147}{8}$.

Задача 3.

Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол ABC – прямой) взята точка D таким образом, что площади треугольников ABD и BCD соответственно в три и в четыре раза меньше площади треугольника ABC. Найдите длину отрезка BD, если $|AD| = a$, $|DC| = c$.



И д е я. Опустить из точки D перпендикуляры DK и DL на стороны BC и AB, найти отношения $|BK| : |KC|$ и $|BL| : |LA|$.
У к а з а н и е. Воспользоваться леммой 3.
У к а з а н и е. Записать теорему Пифагора для треугольников ADL, CDK и BDL.

Р е ш е н и е. Опустим из точки D перпендикуляры DK и DL на стороны BC и AB соответственно, будем считать, что $|DK| = x$, $|DL| = y$. Поскольку угол ABC прямой, то $BKDL$ – прямоугольник, из чего следует $|BK| = |DL| = y$ и $|BL| = |DK| = x$. Для того чтобы найти $|BD|$, достаточно найти $|DL|$ и $|BL|$, то есть x и y. Тогда по теореме Пифагора из треугольника BDL получим $|BD|^2 = x^2 + y^2$. Следовательно, нам не надо знать сами x и y, достаточно найти их квадраты.

Далее воспользуемся леммой 3. Получим

$$\frac{1}{3} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|DL|}{|BC|} \quad \Longrightarrow \quad |BC| = 3y, \quad |KC| = |BC| - |BK| = 2y;$$

$$\frac{1}{4} = \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|DK|}{|AB|} \quad \Longrightarrow \quad |AB| = 4x, \quad |LA| = |AB| - |BL| = 3x.$$

Теперь, записав теорему Пифагора для треугольников ADL, CDK, мы получим систему из двух уравнений с двумя переменными:

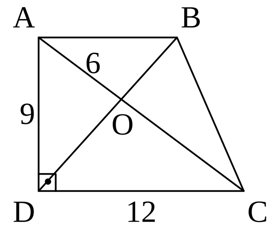
$$\begin{cases} |AD|^2 = |LA|^2 + |DL|^2, \\ |DC|^2 = |KC|^2 + |DK|^2, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 = 9x^2 + y^2, \\ c^2 = 4y^2 + x^2, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{4a^2 - c^2}{35}, \\ y^2 = \dfrac{9c^2 - a^2}{35}. \end{cases}$$

Наконец, $|BD|^2 = |BL|^2 + |DL|^2 = x^2 + y^2 = \dfrac{3a^2 + 8c^2}{35}$.

О т в е т. $\sqrt{\dfrac{3a^2 + 8c^2}{35}}$.

Задача 4.

В трапеции $ABCD$ $|CD| = 12$, боковая сторона AD перпендикулярна основаниям, а её длина равна 9. Длина отрезка AO, где O – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$, равна 6. Найдите площадь треугольника BOC.



Идея. Доказать, что площади треугольников AOD и BOC равны.
Указание. Используя лемму 2, доказать, что площади треугольников AOD и BOC равны.
Указание. Используя лемму 1, выразить $S_{\triangle AOD}$ через $S_{\triangle ACD}$.

Решение. По условию задачи треугольник ACD прямоугольный, поэтому

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |CD| = 54, \quad |AC| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2} = 15.$$

Далее заметим, что по лемме 2 площади треугольников ACD и BCD равны. А из этого вытекает и равенство площадей треугольников AOD и BOC, поскольку

$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle COD}, \quad S_{\triangle BOC} = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle COD}.$$

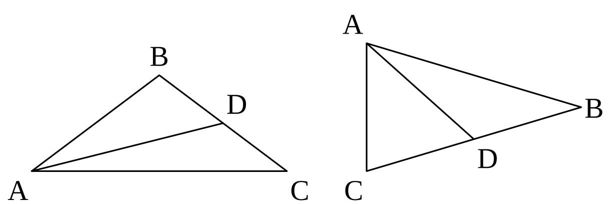
Наконец, по лемме 1

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{|AO|}{|AC|} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ACD} \cdot \frac{2}{5} = 54 \cdot \frac{2}{5} = \frac{108}{5}.$$

Ответ. $\dfrac{108}{5}$.

Задача 5.

Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр делит на части 5 м и 7 м. Найдите площадь треугольника.



Идея. Доказать, что эта прямая проходит через середину боковой стороны треугольника.
Указание. Используя лемму 1 о площадях, показать, что эта прямая проходит через середину боковой стороны треугольника.
Указание. Рассмотреть два случая деления периметра на части 5 м и 7 м.
Указание. Воспользоваться формулой Герона.

Решение. Обозначим вершины треугольника буквами A, B и C, будем считать, что $|AB| = |BC|$. Предположим, что прямая из условия задачи проходит через вершину A, точку её пересечения со стороной BC обозначим буквой D. Пользуясь леммами о площадях, получаем

$$1 = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{|BD|}{|CD|} \quad \Longrightarrow \quad |BD| = |CD|.$$

Теперь обозначим $|AB| = |BC| = x$, тогда $|BD| = |CD| = x/2$, а длину отрезка AC обозначим за y. Поскольку нам не известно, какая из частей периметра треугольника ABC равна 5 м, то придётся разобрать два случая:

$$1)\begin{cases} |AB| + |BD| = 5, \\ |AC| + |CD| = 7; \end{cases} \implies \begin{cases} x + \dfrac{x}{2} = 5, \\ y + \dfrac{x}{2} = 7; \end{cases} \implies x = \frac{10}{3}, \quad y = \frac{16}{3};$$

$$2)\begin{cases} |AB| + |BD| = 7, \\ |AC| + |CD| = 5; \end{cases} \implies \begin{cases} x + \dfrac{x}{2} = 7, \\ y + \dfrac{x}{2} = 5; \end{cases} \implies x = \frac{14}{3}, \quad y = \frac{8}{3}.$$

Для вычисления площади нашего треугольника можно воспользоваться, например, формулой Герона (так как нам известны длины всех его сторон). В первом случае получаем $S = 16/3$ м^2, во втором – $S = 8\sqrt{5}/3$ м^2.

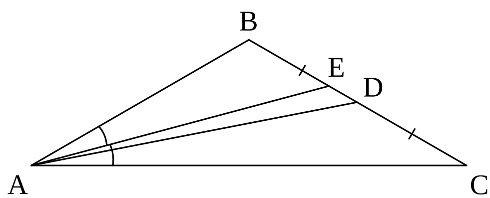
О т в е т. $\dfrac{16}{3}$ м^2 или $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$ м^2.

Задача 6.

В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AC равна 2, величина угла ACB равна $\pi/6$. Из вершины A к боковой стороне BC проведены медиана AD и биссектриса AE. Найдите площадь треугольника ADE.

И д е я. Найти отношение $|ED| : |BC|$, применить леммы о площадях.

У к а з а н и е. Воспользоваться основным свойством биссектрисы треугольника.



Р е ш е н и е. Так как треугольник равнобедренный, то

$$|AB| = |BC| = \frac{1}{\cos\widehat{ACB}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Пользуясь основным свойством биссектрисы, находим

$$\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \sqrt{3} \quad\implies\quad |BE| = \frac{|BC|}{\sqrt{3}+1},$$

$$|ED| = |BD| - |BE| = \frac{|BC|}{2} - \frac{|BC|}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)|BC|}{2(\sqrt{3}+1)}.$$

Наконец,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|ED|}{|BC|} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+1)} \quad\implies\quad S_{\triangle ADE} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}.$$

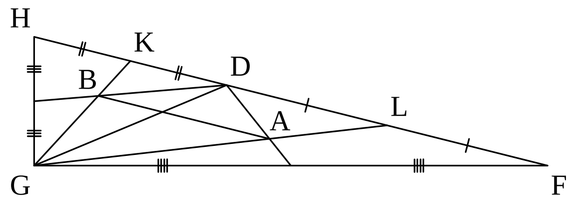
О т в е т. $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{6}$.

Задача 7.

В треугольнике FGH угол G – прямой, $|FG| = 8$, $|GH| = 2$. Точка D лежит на стороне FH, A и B – точки пересечения медиан треугольников FGD и DGH соответственно. Найдите площадь треугольника GAB.

Идея. Провести отрезки GL и GK – медианы треугольников FGD и DGH соответственно. Найти отношение $|KL| : |FH|$.

Указание. Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины. Применить леммы 1 и 4.



Решение. Проведём отрезки GL и GK – медианы треугольников FGD и DGH соответственно. Заметим, что $|DK| = \dfrac{1}{2}|DH|$, $|DL| = \dfrac{1}{2}|DF|$, поэтому

$$|KL| = |DK| + |DL| = \frac{1}{2}|DH| + \frac{1}{2}|DF| = \frac{1}{2}\cdot(|DH| + |DF|) = \frac{1}{2}|FH|.$$

Теперь можно составить план действий. Поскольку площадь исходного треугольника мы легко можем посчитать, то надо протянуть цепочку от треугольника GAB к треугольнику FGH. Вот план, который мы можем реализовать:

$$S_{\triangle GAB} \quad\longrightarrow\quad S_{\triangle GKL} \quad\longrightarrow\quad S_{\triangle GHF}.$$

Сначала воспользуемся тем фактом, что медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины:

$$|GA| = \frac{2}{3}|GL|, \quad |GB| = \frac{2}{3}|GK|.$$

Применяя лемму 4 к треугольникам GAB и GLK, находим

$$\frac{S_{\triangle GAB}}{S_{\triangle GLK}} = \frac{|GA|\cdot|GB|}{|GL|\cdot|GK|} = \frac{\frac{2}{3}|GL|\cdot\frac{2}{3}|GK|}{|GL|\cdot|GK|} = \frac{4}{9} \quad\Longrightarrow\quad S_{\triangle GAB} = \frac{4}{9}S_{\triangle GLK}.$$

Далее, применяя лемму 1 к треугольникам GLK и FGH, получаем

$$\frac{S_{\triangle GLK}}{S_{\triangle FGH}} = \frac{|KL|}{|FH|} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad S_{\triangle GLK} = \frac{1}{2}S_{\triangle FGH} \quad\Longrightarrow\quad S_{\triangle GAB} = \frac{2}{9}S_{\triangle FGH}.$$

Так как $S_{\triangle FGH} = \dfrac{1}{2}\cdot|FG|\cdot|GH| = 8$, то $S_{\triangle GAB} = \dfrac{16}{9}$.

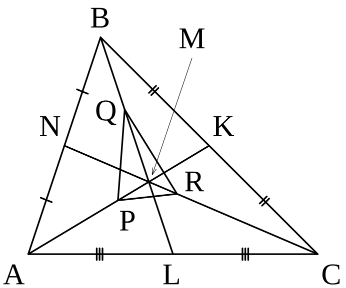
Ответ. $\dfrac{16}{9}$.

Задача 8.

Дан треугольник ABC, площадь которого равна 2. На его медианах AK, BL и CN взяты соответственно точки P, Q и R так, что $|AP| = |PK|$, $|QL| = 2|BQ|$, $|CR| : |RN| = 5 : 4$. Найдите площадь треугольника PQR.

Идея. Представить площадь треугольника PQR как сумму площадей треугольников PMR, PMQ и QMR (M – точка пересечения медиан).

Указание. Воспользоваться леммами о площадях.



Решение. Поскольку нам известны все отношения на медианах, то можно составить план действий. Обозначим точку пересечения медиан треугольника ABC буквой M. Заметим, что, во-первых, точка M находится внутри треугольника PQR (это вытекает из соотношений, данных в условии), поэтому площадь треугольника PQR есть сумма площадей треугольников PMR, PMQ и QMR, и, во-вторых, площади треугольников AMB, AMC и BMC одинаковы (это вытекает из того, что медианы треугольника делят его на шесть равных по площади треугольников, докажите самостоятельно этот факт) и равны, исходя из условия задачи, $2/3$. Поэтому нам надо найти, в каких отношениях точки P, Q и R делят отрезки AM, BM И CM соответственно. Для этого воспользуемся отношениями, данными в условии, и тем фактом, что медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Обозначим $|AK| = 6x$, $|BL| = 6y$, $|CN| = 9z$. Тогда

$$|AM| = 4x, \quad |AP| = 3x, \quad |PM| = x; \quad |BM| = 4y, \quad |BQ| = 2y, \quad |QM| = 2y;$$

$$|CM| = 6z, \quad |CR| = 5z, \quad |RM| = z.$$

Теперь осталось лишь воспользоваться леммами о площадях:

$$\frac{S_{\triangle PMR}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{|PM| \cdot |RM|}{|AM| \cdot |CM|} = \frac{1}{24} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle PMR} = \frac{1}{36};$$

$$\frac{S_{\triangle PMQ}}{S_{\triangle AMB}} = \frac{|PM| \cdot |QM|}{|AM| \cdot |BM|} = \frac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle PMR} = \frac{1}{12};$$

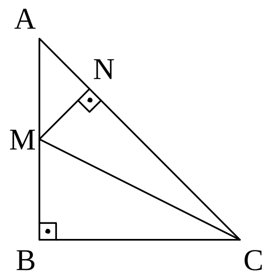
$$\frac{S_{\triangle QMR}}{S_{\triangle BMC}} = \frac{|QM| \cdot |RM|}{|BM| \cdot |CM|} = \frac{1}{12} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle PMR} = \frac{1}{18}.$$

Значит, площадь треугольника PQR равна $1/6$.

Ответ. $\dfrac{1}{6}$.

Задача 9.

Точка N лежит на гипотенузе AC прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точка M расположена на катете AB таким образом, что угол MNC прямой. Известно, что площадь треугольника MNC составляет три восьмых площади треугольника ABC. Вычислите отношение $|AN|:|NC|$.



Идея. Воспользоваться формулой площади прямоугольного треугольника.

Указание. Обозначить $|AN| = x$, $|AB| = a$. Используя условие на площади, выразить x через a.

Решение. Введём обозначение $|AB| = |BC| = a$. Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, поэтому $|AC| = a\sqrt{2}$. Ясно, что треугольник AMN тоже прямоугольный и равнобедренный. Положим $|AN| = x$, тогда $|MN| = x$, $|AM| = x\sqrt{2}$, $|CN| = a\sqrt{2} - x$. Применяя формулу площади прямоугольного треугольника, из условия получаем

$$S_{\triangle CMN} = \frac{3}{8}S_{\triangle ABC} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot x\cdot(a\sqrt{2}-x) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}a^2 \quad\Longrightarrow\quad 8x^2-8\sqrt{2}ax+3a^2 = 0.$$

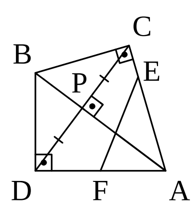
Решая это однородное уравнение, находим $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ или $x = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$. Нам подходит меньший их этих корней, так как, в силу того что точка M лежит на катете AB, длина отрезка AM меньше длины отрезка AB, то есть $x\sqrt{2} < a$.

Наконец, находим требуемое отношение $|AN|:|NC| = x:(a\sqrt{2}-x) = 1:3$.

Ответ. $1:3$.

Задача 10.

Прямоугольные треугольники ABC и ABD имеют общую гипотенузу AB, длина которой равна 5. Точки C и D расположены по разные стороны от прямой AB, $|BC| = |BD| = 3$. Точка E лежит на стороне AC, $|EC| = 1$. Точка F лежит на стороне AD, $|FD| = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ECBDF$.



Идея. Искомую площадь представить как разность площадей четырёхугольника $ACBD$ и треугольника AEF.

Указание. Воспользоваться подобием треугольников, леммами 4 и 5.

Решение. Заметим, что треугольники ABC и ABD равны по гипотенузе и катету. Значит, $|BC| = |BD|$, $|AC| = |AD|$, поэтому точки A и B лежат на серединном перпендикуляре к отрезку CD. Но поскольку через две точки можно провести только одну прямую, то прямая AB и есть серединный перпендикуляр к отрезку CD. Обозначим точку их пересечения буквой P, тогда $|CP| = |DP|$, а треугольник APC равен треугольнику APD.

Искомую площадь удобнее всего искать как разность площадей четырёхугольника $ACBD$ и треугольника AEF. Площадь четырёхугольника $ACBD$ найти просто:

$$|AC|^2 = |AB|^2 - |BC|^2 = 16 \quad\Longrightarrow\quad |AC| = 4, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC| = 6,$$

$$S_{ACBD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD}, \quad \triangle ABC = \triangle ABD \quad\Longrightarrow\quad S_{ACBD} = 2\cdot S_{\triangle ABC} = 12.$$

Для отыскания площади треугольника AEF сначала найдём площадь треугольника ACD, пользуясь подобием треугольников и леммой 5:

$$\triangle APC \sim \triangle ACB,\ k = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{4}{5},\ \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ACB}} = k^2 = \frac{16}{25} \quad\Longrightarrow\quad S_{\triangle APC} = \frac{16}{25}\cdot 6 = \frac{96}{25};$$

$$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle APC} + S_{\triangle APD}, \quad \triangle APC = \triangle APD \quad\Longrightarrow\quad S_{\triangle ACD} = 2\cdot S_{\triangle APC} = \frac{192}{25}.$$

Теперь, учитывая, что $|AE| = |AC| - |EC| = 3$, $|AF| = |AD| - |FD| = 2$, применим лемму 4:

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{|AE|\cdot|AF|}{|AC|\cdot|AD|} = \frac{3\cdot 2}{4\cdot 4} = \frac{3}{8} \quad\Longrightarrow\quad S_{\triangle AEF} = \frac{3}{8}\cdot S_{\triangle ACD} = \frac{72}{25}.$$

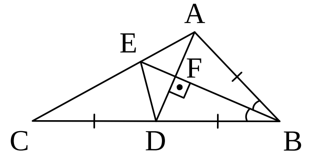
Наконец,

$$S_{ECBDF} = S_{ABCD} - S_{\triangle AEF} = 12 - \frac{72}{25} = \frac{228}{25}.$$

Ответ. $\dfrac{228}{25}$.

Задача 11.

В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника DEF равна 5.



Идея. Найти соотношения между площадями треугольников DEF, DAE и DAC.

Указание. Доказать, что треугольник ABD – равнобедренный.

Указание. Используя определение медианы и свойство биссектрисы, найти $|AE| : |EC|$.

Указание. Составить план и воспользоваться леммой 1.

Решение. Заметим, что в треугольнике ABD отрезок BF является одновременно биссектрисой и высотой. Из этого следует, что треугольник ABD равнобедренный, $|AB| = |BD|$, а отрезок BF является медианой этого треугольника, то есть $|AF| = |DF|$. Далее, поскольку AD – медиана треугольника ABC, то

$|BD| = |DC|$. Обозначим длины отрезков AB и AF за x и y соответственно, тогда из вышесказанного вытекает, что $|DF| = y$, $|DC| = x$, $|AD| = 2y$, $|BC| = 2x$.

Теперь, пользуясь основным свойством биссектрисы треугольника, находим

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2},$$

поэтому если обозначить $|AE| = z$, то $|EC| = 2z$, $|AC| = 3z$. Теперь можно составить план:

$$S_{\triangle DEF} \quad \longrightarrow \quad S_{\triangle ADE} \quad \longrightarrow \quad S_{\triangle ADC} \quad \longrightarrow \quad S_{\triangle ABC}.$$

Применяя лемму 1, получаем:

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle DEF}} = \frac{|AD|}{|DF|} = \frac{2y}{y} = 2 \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle ADE} = 10;$$

$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{3z}{z} = 3 \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle ADC} = 30;$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{2x}{x} = 2 \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle ABC} = 60.$$

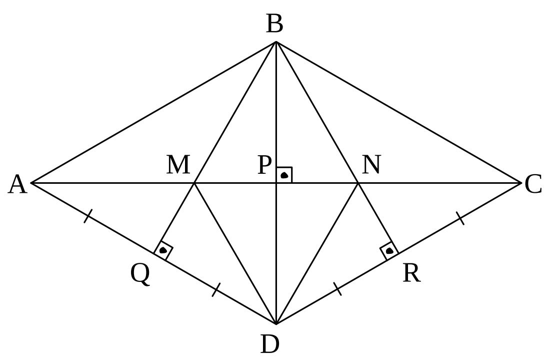
О т в е т. 60.

Задача 12.

В ромбе $ABCD$ перпендикуляр к стороне AD, восстановленный из её середины, пересекает диагональ AC в точке M, а перпендикуляр к стороне CD, восстановленный из её середины, пересекает диагональ AC в точке N. Найдите отношение площадей треугольника MND и ромба $ABCD$, если $\widehat{BAD} = \pi/3$.

И д е я. Доказать, что точки M и N являются точками пересечения медиан треугольников ABD и CBD, найти значение отношения $|MN| : |AC|$.

У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что треугольники ABD и CBD – равносторонние.



Р е ш е н и е. В этой задаче сначала стоит заметить, что ромб $ABCD$ фактически составлен из двух равносторонних треугольников ABD и CBD. Обосновать этот факт легко: $|AB| = |AD|$, поэтому треугольник ABD равнобедренный, а из того, что величина угла BAD равна $\pi/3$, следует, что и $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} = \pi/3$, то есть треугольник ABD – равносторонний,

$|BD| = |AB|$. Значит, $|BD| = |BC| = |CD|$ и треугольник CBD также равносторонний.

Далее обозначим точку пересечения диагоналей ромба $ABCD$ буквой P. Известно, что диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам. Это вытекает, например, из того, что треугольники ABC и ADC равны по трем сторонам, поэтому равны углы BAC и DAC, значит, AP – биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника ABD. Для нас же из вышесказанного актуальным является то, что AP и CP – медианы треугольников ABD и CBD, а площадь треугольника ACD равна половине площади ромба $ABCD$.

Теперь обозначим буквами Q и R середины сторон AD и CD соответственно. Поскольку $|AB| = |BD|$, то точка B лежит на прямой, перпендикулярной стороне AD и проходящей через её середину, то есть на прямой из условия задачи. Итак, точка M есть точка пересечения прямых BQ и AP, а с учётом того, что BQ и AP – медианы треугольника ABD, она является точкой пересечения медиан треугольника ABD. Аналогично доказывается, что N – точка пересечения медиан треугольника CBD.

Наконец, воспользуемся тем, что медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины, и леммой 1:

$$|AM| : |MP| = 2 : 1, \ |AM| + |MP| = |AP| \quad \Longrightarrow \quad |MP| = \frac{1}{3}|AP|;$$

$$|CN| : |NP| = 2 : 1, \ |CN| + |NP| = |CP| \quad \Longrightarrow \quad |NP| = \frac{1}{3}|CP|,$$

$$|MN| = |MP| + |NP| = \frac{1}{3}(|AP| + |CP|) = \frac{1}{3}|AC|;$$

$$\frac{S_{\triangle MND}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{|MN|}{|AC|} = \frac{1}{3}; \quad \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{S_{\triangle MND}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{6}.$$

Ответ. $1:6$.

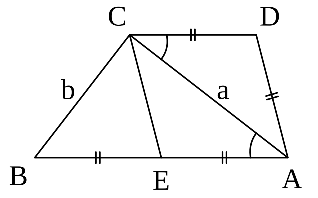
Задача 13.

Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что $|AC| = a$, $|BC| = b$.

Идея. Доказать, что треугольник ABC – прямоугольный.

Указание. Воспользоваться критерием прямоугольности треугольника и доказать, что угол ACB – прямой.

Указание. Применить лемму 2.



Решение. Поскольку $ABCD$ – трапеция, то $AB||CD$. Из этого вытекает, что углы BAC и ACD равны, обозначим их величины за α и положим $|AD| = |CD| = x$, $|AB| = 2x$. Предложим два различных способа решения этой задачи.

Первый способ. Из равнобедренного треугольника ACD имеем $a = 2x\cos\alpha$ и, записывая теорему косинусов для треугольника ABC, получаем

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\cos\widehat{BAC} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad b^2 = a^2 + 4x^2 - 2a\cdot 2x\cos\alpha \quad\Longrightarrow\quad b^2 = a^2 + 4x^2 - 2a^2 \quad\Longrightarrow\quad 4x^2 = a^2 + b^2.$$

Из последнего равенства следует, что треугольник ABC – прямоугольный, поэтому его площадь равна $\dfrac{ab}{2}$. Тогда, применяя лемму 2, находим

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{|AB|}{|CD|} = 2 \quad\Longrightarrow\quad S_{\triangle ADC} = \frac{ab}{4};\quad S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{3ab}{4}.$$

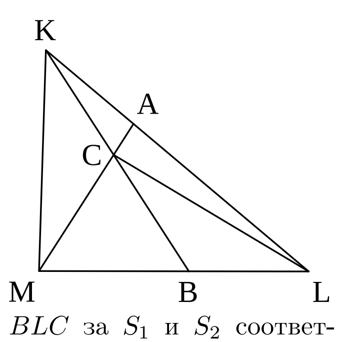
Второй способ. Обозначим середину стороны AD буквой E. Тогда $|AE| = x$, поэтому треугольники ACE и CAD равны по двум сторонам и углу между ними, что даёт нам $|CE| = |AD| = x$. Таким образом, длина медианы CE треугольника ABC равна половине длины его стороны AB, стало быть, по критерию прямоугольности треугольник ABC прямоугольный, угол ACB – прямой. Дальнейшие рассуждения совпадают с рассуждениями из первого способа.

Ответ. $\dfrac{3ab}{4}$.

Задача 14.

На сторонах KL и LM треугольника KLM взяты точки A и B соответственно. Отрезки KB и MA пересекаются в точке C. Найдите площадь треугольника ALC, если известно, что площади треугольников KAC, MBC и KCM равны соответственно 12, 50 и 45.

Идея. Воспользоваться леммами о площадях.
Указание. Найти $|AC| : |CM|$, $|BC| : |CK|$.
Указание. Обозначить площади треугольников ALC и BLC за S_1 и S_2 соответственно и применить леммы о площадях к парам треугольников ALC и MLC, BLC и KLC.



Решение. Сначала заметим, что

$$\frac{|AC|}{|CM|} = \frac{S_{\triangle KAC}}{S_{\triangle KCM}} = \frac{4}{15};\quad \frac{|BC|}{|CK|} = \frac{S_{\triangle MBC}}{S_{\triangle KCM}} = \frac{10}{9}.$$

Далее обозначим площади треугольников ALC и BLC за S_1 и S_2 соответственно и воспользуемся леммами о площадях:

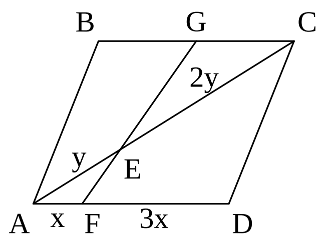
$$\frac{S_{\triangle ALC}}{S_{\triangle MCL}} = \frac{|AC|}{|CM|} \quad\Longrightarrow\quad \frac{S_1}{S_2+50} = \frac{4}{15};\quad \frac{S_{\triangle BLC}}{S_{\triangle KCL}} = \frac{|BC|}{|CK|} \quad\Longrightarrow\quad \frac{S_2}{S_1+12} = \frac{10}{9}.$$

Решая полученную систему уравнений, находим $S_1 = 24$, $S_2 = 40$.

Ответ. 24.

Задача 15.

В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E, а на стороне AD взята точка F, причём $|AC| = 3|AE|$, $|AD| = 4|AF|$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырёхугольника $ABGE$, где G – точка пересечения прямой FE и отрезка BC, равна 8.



Идея. Площадь четырёхугольника $ABGE$ представить в виде разности площадей треугольников ABC и CEG.

Указание. Используя подобие, найти отношение $|CG| : |BC|$.

Указание. Воспользоваться леммами 4 и 2.

Решение. Положим $|AF| = x$, $|AE| = y$. Тогда, по условию задачи, $|AC| = 3y$, $|EC| = 2y$, $|AD| = 4x$, $|FD| = 3x$. Далее, поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то $|BC| = |AD| = 4x$, $AD||BC$, треугольники AEF и CEG подобны. Стало быть,

$$\frac{|AF|}{|CG|} = \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad |CG| = 2|AF| = 2x \quad \Longrightarrow \quad |BG| = |BC| - |CG| = 2x.$$

Теперь заметим, что данная нам в условии площадь четырехугольника $ABGE$ может быть представлена в виде разности площадей треугольников ABC и CEG. Обозначим площадь треугольника CEG за S, тогда площадь треугольника ABC равна $S + 8$. Воспользуемся леммой 4:

$$\frac{S_{\triangle CEG}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|CE| \cdot |CG|}{|AC| \cdot |BC|} \implies \frac{S}{S+8} = \frac{2y \cdot 2x}{3y \cdot 4x} = \frac{1}{3} \implies 3S = S + 8 \implies S = 4.$$

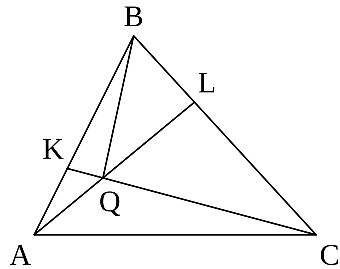
Стало быть, площадь треугольника ABC равна 12. Наконец, из леммы 2 вытекает, что площади треугольников ABC и ACD равны, поэтому площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24.

Ответ. 24.

Задача 16.

В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K, а на стороне BC взята точка L так, что $|AK| : |BK| = 1 : 2$, $|CL| : |BL| = 2 : 1$. Пусть Q – точка пересечения прямых AL и CK. Найдите площадь треугольника ABC, если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.

Идея. Вычислить отношение $|KC| : |QC|$, применить леммы о площадях.



Указание. Воспользоваться теоремой Менелая.

Решение. План перехода от треугольника BQC к треугольнику ABC очевиден:

$$S_{\triangle BQC} \longrightarrow S_{\triangle BKC} \longrightarrow S_{\triangle ABC}.$$

Не хватает только отношения $|KC| : |QC|$. Положим $|AK| = x$, $|BK| = 2x$, $|BL| = y$, $|CL| = 2y$. Применяя теорему Менелая к треугольнику BCK и секущей LA, находим

$$\frac{|KQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CL|}{|LB|} \cdot \frac{|BA|}{|AK|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|KQ|}{|QC|} = \frac{y}{2y} \cdot \frac{x}{3x} = \frac{1}{6}.$$

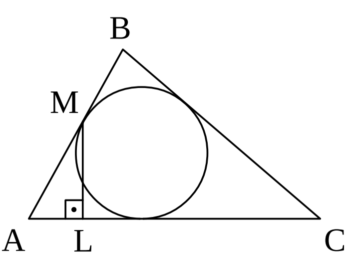
В соответствии с этим обозначим $|KQ| = z$, $|QC| = 6z$, тогда $|KC| = 7z$. Наконец, применяя лемму 1 о площадях, находим

$$\frac{S_{\triangle BKC}}{S_{\triangle BQC}} = \frac{|KC|}{|QC|} = \frac{7}{6} \Longrightarrow S_{\triangle BKC} = \frac{7}{6}; \ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BKC}} = \frac{|AB|}{|BK|} = \frac{3}{2} \Longrightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{7}{4}.$$

Ответ. $\dfrac{7}{4}$.

Задача 17.

В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M. Через точку M проведён перпендикуляр ML к стороне AC треугольника ABC (точка L – основание этого перпендикуляра). Найдите величину угла BCA, если известно, что площадь треугольника ABC равна 1, а площадь четырёхугольника $LMBC$ равна S.



Идея. Воспользоваться леммой 4 и формулой длины отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, разбивает точками касания его стороны.

Указание. Выразить длины отрезков AM, AL и AC через длину стороны AB и величину угла BCA.

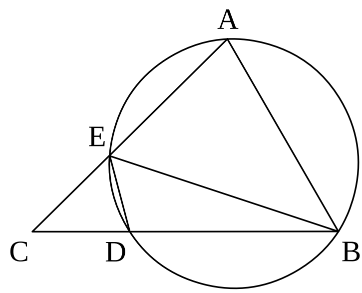
Решение. Пусть $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \alpha$, $|AB| = p$, тогда $|BC| = p$, $|AC| = 2p\cos\alpha$. Пользуясь формулой длины отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, разбивает точками касания его стороны, находим $|AM| = p_{\triangle ABC} - |BC| = p\cos\alpha$, после чего из прямоугольного треугольника AML получаем $|AL| = |AM| \cdot \cos\widehat{BAC} = p\cos^2\alpha$. Наконец, применяя лемму 4, имеем

$$\frac{S_{\triangle AML}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|AM| \cdot |AL|}{|AB| \cdot |AC|} \quad \Longrightarrow \quad 1 - S = \frac{\cos^3\alpha}{2\cos\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{2 - 2S}.$$

Ответ. $\arccos\sqrt{2 - 2S}$.

Задача 18.

Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в 7 раз меньше площади четырёхугольника $ABDE$. Найдите $|DE|$ и длину радиуса окружности, если $|AB| = 4$, $\widehat{C} = 45^\circ$.



Идея. Воспользоваться подобием треугольников ABC и DEC.

Указание. Используя подобие треугольников ABC и DEC, найти $|DE|$.

Указание. Выразить величину угла BEA через величину угла CBE.

Указание. Применить теорему синусов к треугольникам BDE и ABE.

Решение. Заметим, что треугольники ABC и DEC подобны. Тогда, вводя в соответствии с условием задачи обозначения $S_{\triangle DEC} = S$, $S_{ABDE} = 7S$, получаем

$$\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{|DE|}{|AB|}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{S}{S+7S} = \left(\frac{|DE|}{4}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad |DE| = \sqrt{2}.$$

Для нахождения длины радиуса окружности поступим следующим образом: обозначим её за R, а градусную меру угла CBE обозначим за β°. Тогда градусная мера угла AEB, в силу того что это внешний угол треугольника CBE, равна $(\beta+45)^\circ$. Наконец, треугольники BDE и ABE оба вписаны в нашу окружность, поэтому, записывая теорему синусов, получаем

$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{AEB}} = 2R = \frac{|DE|}{\sin\widehat{DBE}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{\sin(\beta+45)^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\beta^\circ} = 2R \quad \Longrightarrow$$

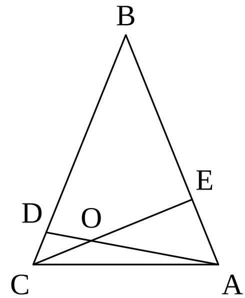
$$\Longrightarrow \quad \frac{\sin(\beta+45)^\circ}{\sin\beta^\circ} = 2\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta^\circ}{\sin\beta^\circ} = 2\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{ctg}\beta^\circ = 3.$$

Значит, $\sin\beta^\circ = 1/\sqrt{10}$, $R = \sqrt{5}$.

Ответ. $|DE| = \sqrt{2}$, длина радиуса окружности равна $\sqrt{5}$.

Задача 19.

На стороне AB треугольника ABC взята точка E, а на стороне BC – точка D так, что $|AE| = 2$, $|CD| = 1$. Прямые AD и CE пересекаются в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $BDOE$, если $|AB| = |BC| = 8$, $|AC| = 6$.



Идея. Площадь четырёхугольника $BDOE$ искать как разность площадей треугольников, например ABD и AOE.
Указание. Применяя теорему Менелая к треугольнику ABD и секущей EC, найти отношение $|AO| : |OD|$.
Указание. Воспользоваться леммами о площадях.

Решение. Площадь четырёхугольника $BDOE$ лучше искать как разность площадей треугольников, например ABD и AOE. Тогда, поскольку площадь треугольника ABC мы можем найти по формуле Герона, план действий выглядит так:

$$S_{\Delta ABC} \longrightarrow S_{\Delta ABD} \longrightarrow S_{\Delta AOE}.$$

Для последнего перехода нам не хватает значения отношения $|AO| : |AD|$. Ясно, что $|BD| = 7$, $|BE| = 6$, $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{55}$. Применяя теорему Менелая к треугольнику ABD и секущей EC, находим

$$\frac{|DO|}{|OA|} \cdot \frac{|AE|}{|EB|} \cdot \frac{|BC|}{|CD|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|DO|}{|OA|} = \frac{3}{8}, \quad \frac{|AO|}{|AD|} = \frac{8}{11}.$$

После этого, применяя леммы о площадях, получаем

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{7}{8}; \quad \frac{S_{\triangle AOE}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{|AO|}{|AD|} \cdot \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{2}{11} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad S_{\triangle ABD} = \frac{7}{8} S_{\triangle ABC}, \quad S_{\triangle AOE} = \frac{7}{44} S_{\triangle ABC},$$

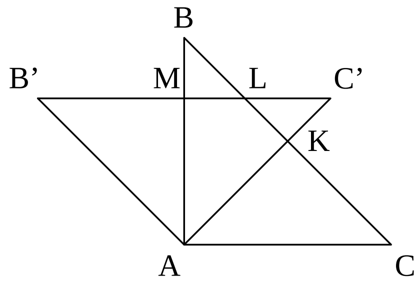
$$S_{BEOD} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOE} = \frac{63}{88} S_{\triangle ABC} = \frac{189\sqrt{55}}{88}.$$

Ответ. $\dfrac{189\sqrt{55}}{88}$.

Задача 20.

На плоскости лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого катеты имеют длину a. Поворотом в этой плоскости данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на угол 45° получается другой равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите площадь четырёхугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.

Идея. Представить искомую площадь в виде разности площади исходного треугольника и суммы площадей отсекаемых треугольников.
Указание. Воспользоваться соотношениями между длинами сторон и величинами углов в прямоугольном треугольнике.



Решение. Обозначим вершины исходного треугольника буквами A, B и C, вершины треугольника, полученного при повороте, обозначим B' и C'. Точку пересечения отрезков AB и $B'C'$ обозначим буквой M, точку пересечения отрезков BC и $B'C'$ обозначим буквой L, точку пересечения отрезков BC и AC' обозначим буквой K. Ясно, что треугольники AKC и BML также прямоугольные и равнобедренные, причём

$$|AK| = |AM| = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad |ML| = |BM| = |AB| - |AM| = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2}{2}, \quad S_{\triangle AKC} = \frac{a^2}{4}, \quad S_{\triangle BML} = \frac{(3-2\sqrt{2})a^2}{4}.$$

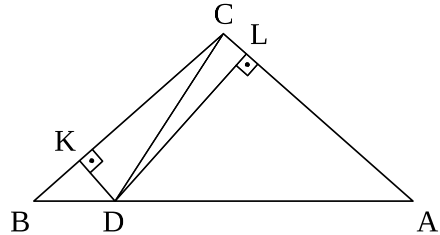
Наконец,

$$S_{AMLK} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AKC} - S_{\triangle BML} = \frac{(\sqrt{2}-1)a^2}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{(\sqrt{2}-1)a^2}{2}$.

Задача 21.

Длина радиуса вписанной в равнобедренный треугольник ABC окружности равна 4, $|AC| = |BC|$. На прямой AB взята точка D, удалённая от прямых AC и BC на расстояния 11 и 3 соответственно. Найдите $\cos\widehat{DBC}$.



Идея. Представить площадь треугольника ABC в виде суммы или разности площадей треугольников ADC и BDC (в зависимости от того, где лежит точка D).

Указание. Воспользоваться различными формулами площади треугольника.

Решение. При решении этой задачи необходимо разобрать все три случая возможного расположения точки D. Обозначим длины сторон AC и BC за x, длину стороны AB обозначим за y. Если точка D лежит на стороне AB (см. рисунок), то, во-первых, угол DBC совпадает с углом ABC и, во-вторых, площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ADC и BDC. Заметим, что расстояние от точки D до прямой AC равно длине высоты треугольника ADC, опущенной из точки D, а расстояние от точки D до прямой BC есть длина высоты треугольника BDC, опущенной из точки D. Осталось лишь воспользоваться теми формулами площади, в которые входят эти длины:

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|DL| = \frac{11x}{2}; \quad S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|DK| = \frac{3x}{2};$$

$$S_{\triangle ABC} = p_{\triangle ABC} \cdot r_{\triangle ABC} = 4x + 2y \quad \Longrightarrow \quad \frac{11x}{2} + \frac{3x}{2} = 4x + 2y \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{3}{2}x;$$

$$\cos \widehat{DBC} = \cos \widehat{ABC} = \frac{y}{2x} = \frac{3}{4}.$$

Теперь предположим, что точка D лежит на продолжении стороны AB за точку A. Этот случай отличается от предыдущего тем, что площадь треугольника ABC теперь будет равна разности площадей треугольников BDC и ADC. Рассуждая абсолютно аналогично, мы получим уравнение $3x/2 - 11x/2 = 4x + 2y$, из которого следует, что числа x и y разного знака. Значит, этот случай невозможен.

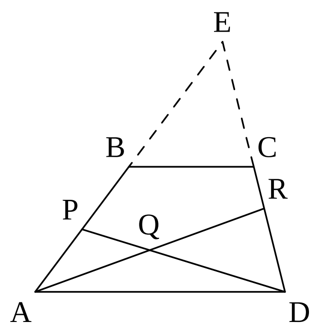
Наконец, если предположить, что точка D лежит на продолжении стороны AB за точку B, то угол DBC станет смежным с углом ABC, а площадь треугольника ABC будет равна разности площадей треугольников ADC и BDC. Опять-таки рассуждая аналогично, мы приходим к равенству $11x/2 - 3x/2 = 4x + 2y$, из которого вытекает, что $y = 0$. Таким образом, и этот случай невозможен.

О т в е т. $\dfrac{3}{4}$.

Задача 22.

Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P – середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2|CD| = 3|RD|$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника APQ, если известно, что $|AD| = 2|BC|$.

И д е я. Достроить трапецию до треугольника, применить свойства средней линии треугольника.
У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой Менелая для нахождения отношения $|AQ| : |QR|$.
У к а з а н и е. Воспользоваться леммами о площадях.



Р е ш е н и е. Отметим, что классическим способом решения задач такого сорта является достроение трапеции до треугольника. Обозначим $|AP| = x$, $|RD| = 2y$, тогда, в силу условия задачи, $|BP| = x$, $|AB| = 2x$, $|CD| = 3y$. Далее продлим боковые стороны AB и CD до пересечения в точке E и заметим, что, поскольку $AD||BC$ и $|AD| = 2|BC|$, то BC – средняя линия треугольника AED. С учётом этого факта находим $|AE| = 4x$, $|ED| = 6y$. Теперь можно составить план действий:

$$S_{ABCD} \quad \longrightarrow \quad S_{\Delta ADE} \quad \longrightarrow \quad S_{\Delta AER} \quad \longrightarrow \quad S_{\Delta APQ}.$$

Для последнего перехода нам не хватает отношения $|AQ| : |AR|$. Найдём его, пользуясь теоремой Менелая для треугольника AER и секущей PQ:

$$\frac{|RQ|}{|QA|} \cdot \frac{|AP|}{|PE|} \cdot \frac{|ED|}{|DR|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|QA|}{|RQ|} = \frac{x}{3x} \cdot \frac{6y}{2y} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AQ|}{|AR|} = \frac{1}{2}.$$

Теперь немного посчитаем. Треугольники EBC и EAD подобны, стало быть,

$$\frac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle ADE}} = \left(\frac{|BC|}{|AD|}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad S_{\triangle ADE} - S_{\triangle EBC} = 30 \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle ADE} = 40.$$

Используя леммы о площадях, получаем

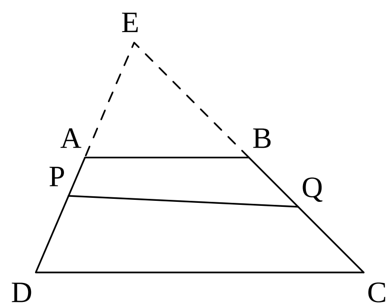
$$\frac{S_{\triangle AER}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{|ER|}{|ED|} = \frac{2}{3}; \quad \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle AER}} = \frac{|AP|\cdot|AQ|}{|AE|\cdot|AR|} = \frac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle APQ} = \frac{10}{3}.$$

О т в е т. $\dfrac{10}{3}$.

Задача 23.

В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны, причём $|CD| = 2|AB|$. На сторонах AD и BC выбраны соответственно точки P и Q таким образом, что $|DP| : |PA| = 2 : 1$, $|BQ| : |QC| = 3 : 4$. Найдите отношение площадей четырёхугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

И д е я. Достроить трапецию до треугольника, применить леммы о площадях.
У к а з а н и е. Площади четырёхугольников искать через разность площадей треугольников.
У к а з а н и е. Воспользоваться свойствами средней линии треугольника для нахождения нужных отношений.



Р е ш е н и е. Обозначим $|PA| = x$, $|BQ| = 3y$, тогда, в силу условия задачи,

$$|DP| = 2x, |AD| = 3x, |QC| = 4y, |BC| = 7y.$$

Продлим боковые стороны AD и BC до пересечения в точке E и заметим, что, поскольку $AB||CD$ и $|CD| = 2|AB|$, то AB – средняя линяя треугольника CED, поэтому $|AE| = 3x$, $|BE| = 7y$. Обозначим $S_{\Delta EAB} = S$. Площади четырёхугольников будем искать через разность площадей треугольников. Теперь составим план действий:

$$S_{\Delta EAB} \longrightarrow S_{\Delta EPQ}, \quad S_{\Delta EAB} \longrightarrow S_{\Delta EDC}.$$

Для нахождения $S_{\Delta EPQ}$ воспользуемся леммой 4 о площадях:

$$\frac{S_{\triangle EPQ}}{S_{\triangle EAB}} = \frac{|PE|\cdot|QE|}{|AE|\cdot|BE|} = \frac{40}{21} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle EPQ} = \frac{40}{21}S \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad S_{ABQP} = S_{\triangle EPQ} - S_{\triangle EAB} = \frac{19}{21}S.$$

Для нахождения $S_{\Delta EDC}$ воспользуемся леммой 5 о площадях ($\Delta EAB \sim \Delta EDC$):

$$\frac{S_{\triangle ECD}}{S_{\triangle EAB}} = \left(\frac{|DC|}{|AB|}\right)^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta ECD} = 4S \quad \Longrightarrow$$

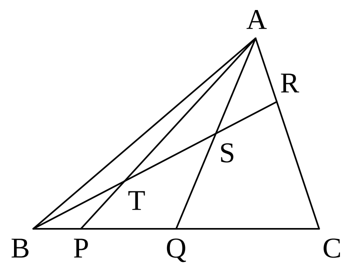
$$\Longrightarrow \quad S_{CDPQ} = S_{\triangle EDC} - S_{\triangle EPQ} = \frac{44}{21}S.$$

Таким образом, искомое отношение равно $19:44$.

Ответ. $\dfrac{19}{44}$.

Задача 24.

Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC таким образом, что $|BP|:|PQ|:|QC| = 1:2:3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника таким образом, что $|AR|:|RC| = 1:2$. Чему равно отношение площади четырёхугольника $PQST$ к площади треугольника ABC, если S и T – точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?



Идея. Площадь четырёхугольника $PQST$ искать через разность площадей треугольников APQ и ATS.
Указание. Применить теорему Менелая для нахождения отношений $|AT|:|AP|$ и $|AS|:|AQ|$.
Указание. Воспользоваться леммами 1 и 4.

Решение. Площадь четырёхугольника $PQST$ лучше всего искать через разность площадей треугольников APQ и ATS. Поэтому план действий таков:

$$S_{\Delta ABC} \quad \longrightarrow \quad S_{\Delta APQ} \quad \longrightarrow \quad S_{\Delta ATS} \quad \longrightarrow \quad S_{PQST}.$$

Для реализации этого плана нам не хватает отношений $|AT|:|AP|$ и $|AS|:|AQ|$. Найдём их, пользуясь теоремой Менелая для треугольников APC и AQC:

$$\frac{|PT|}{|TA|}\cdot\frac{|AR|}{|RC|}\cdot\frac{|CB|}{|BP|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AT|}{|PT|} = 3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AT|}{|AP|} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{|QS|}{|SA|}\cdot\frac{|AR|}{|RC|}\cdot\frac{|CB|}{|BQ|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AS|}{|SQ|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AS|}{|AQ|} = \frac{1}{2}.$$

Далее обозначим $S_{\Delta ABC} = S$ и, пользуясь леммами 1 и 4 о площадях, находим

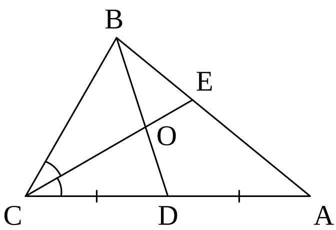
$$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|PQ|}{|BC|} = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta APQ} = \frac{1}{3}S;$$

$$\frac{S_{\triangle ATS}}{S_{\triangle APQ}} = \frac{|AT|\cdot|AS|}{|AP|\cdot|AQ|} = \frac{3}{8} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle ATS} = \frac{1}{8}S \quad \Longrightarrow \quad S_{PQST} = \frac{5}{24}S.$$

Ответ. $\dfrac{5}{24}$.

Задача 25.

В треугольнике ABC, площадь которого равна S, проведены биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $ADOE$, если $|BC| = a$, $|AC| = b$.



И д е я. Площадь четырёхугольника $ADOE$ искать через разность площадей треугольников ABD и EBO.

У к а з а н и е. Используя леммы о площадях, выразить площадь четырёхугольника $ADOE$ через площадь треугольника ABC.

У к а з а н и е. Используя основное свойство биссектрисы, найти отношения $|BE| : |EA|$ и $|BO| : |OD|$.

Р е ш е н и е. Площадь четырёхугольника $ADOE$ лучше всего искать через разность площадей треугольников. Но у нас есть две таких возможности. Поскольку CE – биссектриса в треугольниках ACB и DCB, то, пользуясь основным свойством биссектрисы, можно найти отношения $|BE| : |EA|$ и $|BO| : |OD|$. Поэтому площадь четырёхугольника $ADOE$ будем искать как разность площадей треугольников ABD и EBO. Теперь можно составить план действий:

$$S_{\Delta ABC} \longrightarrow S_{\Delta ABD} \longrightarrow S_{\Delta EBO} \longrightarrow S_{\Delta ADOE}.$$

Сначала, пользуясь леммами 1 и 4 о площадях, выразим площадь четырехугольника $ADOE$ через площадь треугольника ABC:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC};$$

$$\frac{S_{\triangle EBO}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{|BE|\cdot|BO|}{|AB|\cdot|BD|} \quad\Longrightarrow\quad S_{\triangle EBO} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|BE|}{|AB|}\cdot\frac{|BO|}{|BD|} S_{\triangle ABC};$$

$$S_{ADOE} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle EBO} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|BE|}{|AB|}\cdot\frac{|BO|}{|BD|}\right) S_{\triangle ABC}.$$

Теперь посчитаем отношения, входящие в полученную нами формулу. Применяя основное свойство биссектрисы для треугольников ACB и DCB, получаем

$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|BE|}{|AB|} = \frac{a}{a+b},$$

$$\frac{|BO|}{|OD|} = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{2a}{b} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|BO|}{|BD|} = \frac{2a}{2a+b}.$$

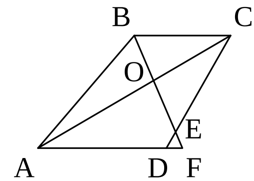
Итак,

$$S_{ADOE} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a+b}\cdot\frac{2a}{2a+b}\right) S_{\triangle ABC} = \frac{b^2+3ab}{2(a+b)(2a+b)} S.$$

О т в е т. $\dfrac{S}{2}\cdot\dfrac{b^2+3ab}{(a+b)(2a+b)}$.

Задача 26.

Длина высоты трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $|AO| : |OC| = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника OEC.



Идея. Продлить отрезок BE до пересечения с прямой AD в точке F.
Указание. Использовать подобие треугольников AOF и COB для нахождения длины отрезка DF.
Указание. Использовать подобие треугольников DEF и CEB для нахождения значения отношения $|CE| : |CD|$.
Указание. Воспользоваться леммами о площадях.

Решение. Поскольку площадь треугольника ACD мы можем посчитать исходя из условия, то для нахождения площади треугольника OEC нам не хватает отношения $|CE| : |CD|$. Продлим отрезок BE до пересечения с прямой AD в точке F. Ясно, что точка D окажется между точками A и F. Треугольники AOF и COB подобны, что даёт нам $|AF| : |BC| = |AO| : |OC| = 3 : 2 \Longrightarrow |AF| = 9,\ |DF| = 1$. Далее заметим, что треугольники DEF и CEB также подобны, поэтому

$$\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|DF|} = 6 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|CE|}{|CD|} = \frac{6}{7}.$$

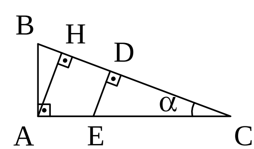
Наконец, пользуясь тем фактом, что высота трапеции $ABCD$ является также и высотой треугольника ACD, и леммой 4 о площадях, получаем $S_{\triangle ACD} = 28$,

$$\frac{S_{\triangle OEC}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{|OC| \cdot |CE|}{|AC| \cdot |CD|} = \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{12}{35} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle OEC} = \frac{48}{5}.$$

Ответ. $\dfrac{48}{5}$.

Задача 27.

В прямоугольном треугольнике величина меньшего из углов равна α. Прямая, перпендикулярная гипотенузе, делит этот треугольник на две части, равные по площади. Найдите, в каком отношении она делит гипотенузу.



Идея. Доказать, что прямая из условия задачи пересекает больший катет.
Указание. Воспользоваться подобием треугольников и леммами о площадях.

Решение. Будем считать, что угол ACB меньший. Обозначим точку пересечения прямой из условия задачи и гипотенузы BC буквой D, а точку её пересечения с прямой AC (таковая обязательно есть) буквой E. Вообще говоря, заранее не известно, попадет ли точка E на катет AC или нет, поэтому сначала необходимо ответить на этот вопрос. Проведём высоту AH, тогда

$$\frac{S_{\triangle ACH}}{S_{\triangle ABH}} = \frac{|CH|}{|BH|} = \frac{|AH|\operatorname{ctg}\alpha}{|AH|\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Но поскольку угол ACB наименьший, то $\alpha < \pi/4$, $\operatorname{ctg}\alpha > 1$. Значит, площадь треугольника ACH больше площади треугольника ABH. Из этого следует, что точка E должна лежать на отрезке AC.

Тогда площадь треугольника CED по условию равна половине площади треугольника ABC. Далее ясно, что треугольники CED и CBA подобны. Из этого подобия находим

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \sqrt{\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ABC}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad |CD| = \frac{|AC|}{\sqrt{2}}.$$

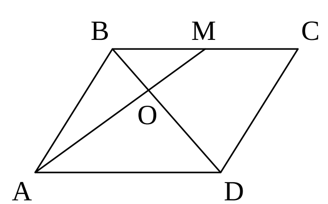
Но, с другой стороны, из прямоугольного треугольника ABC:

$$|BC| = \frac{|AC|}{\cos\alpha} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|BC|-|CD|}{|CD|} = \frac{\dfrac{|AC|}{\cos\alpha} - \dfrac{|AC|}{\sqrt{2}}}{\dfrac{|AC|}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-\cos\alpha}{\cos\alpha}.$$

Ответ. $\left(\sqrt{2}-\cos\alpha\right) : \cos\alpha$.

Задача 28.

Через вершину A и середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $OMCD$.



Идея. Площадь четырёхугольника $OMCD$ искать через разность площадей треугольников CBD и MBO.
Указание. Используя подобие треугольников AOD и MOB, найти $|BO| : |BD|$.
Указание. Воспользоваться леммами о площадях.

Решение. Площадь четырёхугольника $OMCD$ лучше всего искать через разность площадей треугольников CBD и MBO. Поэтому план действий таков:

$$S_{ABCD} \longrightarrow S_{\Delta CBD} \longrightarrow S_{\Delta MBO} \longrightarrow S_{OMCD}.$$

Для реализации этого плана не хватает только отношения $|BO| : |BD|$. Его легко найти. Поскольку противоположные стороны параллелограмма параллельны и равны по длине, то $|BM| = \dfrac{1}{2}|BC| = \dfrac{1}{2}|AD|$, а треугольники AOD и MOB подобны. Из этого подобия вытекает, что

$$\frac{|BO|}{|OD|} = \frac{|BM|}{|AD|} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad |BO| : |BD| = \frac{1}{3}.$$

Начнём реализацию плана. Из-за равенства треугольников ABD и CBD площадь треугольника CBD равна половине площади параллелограмма $ABCD$, то есть $1/2$. По лемме 4 получаем

$$\frac{S_{\Delta MBO}}{S_{\Delta CBD}} = \frac{|BM| \cdot |BO|}{|BC| \cdot |BD|} = \frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta MBO} = \frac{1}{12} \quad \Longrightarrow \quad S_{OMCS} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

Ответ. $\dfrac{5}{12}$.

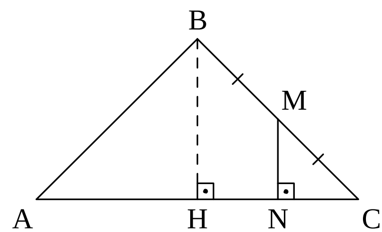
Задача 29.

В треугольнике ABC градусная мера угла A равна $45°$, а угол C – острый. Из середины стороны BC на сторону AC опущен перпендикуляр MN. Найдите градусные меры углов треугольника ABC, если площади треугольников MNC и ABC относятся как $1:8$.

Идея. Использовать подобие и леммы о площадях.

Указание. Провести высоту BH. Используя подобие, вычислить отношение $|CN| : |CH|$.

Указание. Используя леммы о площадях, вычислить отношение $|CN| : |AC|$. Доказать, что BH – медиана треугольника ABC, т.е. треугольник ABC – равнобедренный.



Решение. Проведём высоту BH треугольника ABC. Ясно, что треугольники CMN и CBH подобны с коэффициентом подобия $1/2$, поэтому $|CN| = \dfrac{1}{2}|CH|$. Используя лемму 4 о площадях, находим

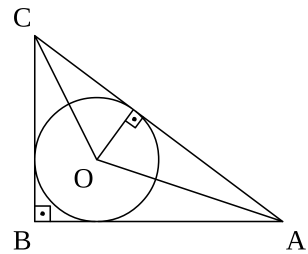
$$\frac{1}{8} = \frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|CN| \cdot |CM|}{|CA| \cdot |CB|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|CN|}{|CA|} = \frac{1}{4}.$$

Стало быть, $|AC| = 4|CN| = 2|CH|$, то есть BH – медиана треугольника ABC. Таким образом, треугольник ABC – равнобедренный, $\widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 45°$, $\widehat{ABC} = 90°$.

Ответ. $\widehat{ACB} = 45°$, $\widehat{ABC} = 90°$.

Задача 30.

Точка O является центром окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. Известно, что отношение площадей треугольников AOC и ABC равно $k : k+1$. Найдите величины острых углов треугольника ABC. При каких k задача имеет решение?



Идея. Выразить все необходимые величины через длину гипотенузы AC и величину угла BAC.

Указание. Обозначить $\widehat{BAC} = \alpha$, $|AC| = 2R$, а длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, обозначить за r. Выразить площади данных треугольников через эти величины.

Решение. Обозначим $\widehat{BAC} = \alpha$, $|AC| = 2R$, а длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, обозначим за r. Тогда, пользуясь соотношениями между длинами сторон и величинами углов в прямоугольном треугольнике, а также формулой площади треугольника, включающей в себя длину радиуса вписанной в треугольник окружности, получаем

$$|AB| = 2R\cos\alpha, \quad |BC| = 2R\sin\alpha; \quad S_{\triangle ABC} = Rr(1+\sin\alpha+\cos\alpha).$$

С другой стороны, $S_{\triangle AOC} = Rr$. Значит,

$$\frac{1}{1+\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{k}{k+1} \quad\Longrightarrow\quad \sin\alpha+\cos\alpha = \frac{1}{k} \quad\Longrightarrow\quad \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}k}.$$

Поскольку $\alpha \in (0;\pi/2)$, то

$$\alpha+\frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right) \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{2}} < \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1 \quad\Longrightarrow\quad k \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right).$$

Следовательно, задача имеет решение при $k \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right)$ и

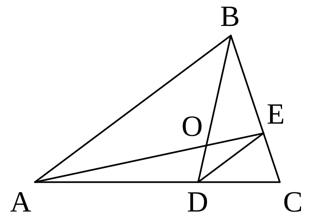
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}k}\right) - \frac{\pi}{4} \qquad \text{или} \qquad \alpha = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}k}\right).$$

Полученные величины в сумме дают $\pi/2$ и являются ответом в задаче.

Ответ. $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}k}\right) - \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}k}\right)$; $k \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right)$.

Задача 31.

В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, $|AD| = 2|DC|$. На стороне BC взята точка E таким образом, что площадь треугольника AED равна 1. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников ABO и OED, если площадь треугольника ABD равна 3.



Идея. Доказать, что $AB||DE$, воспользоваться леммой 5.
Указание. Найти отношение $|BE|:|EC|$, предварительно вычислив площади треугольников BED и CED с помощью леммы 1.
Указание. Доказать, что $AB||DE$.
Указание. Воспользоваться леммой 5.

Решение. Идея решения достаточно проста – с помощью утверждений из теоретических материалов связать площади всевозможных треугольников. Сначала заметим, что по лемме 1

$$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle CED}}=\frac{|AD|}{|DC|}=2 \implies S_{\triangle CED}=\frac{1}{2};\ \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{|AD|}{|DC|}=2 \implies S_{\triangle CBD}=\frac{3}{2}.$$

После этого мы получаем, что $S_{\triangle BED}=S_{\triangle CBD}-S_{\triangle CED}=1$ и, кроме того, $|BE|:|EC|=S_{\triangle BED}:S_{\triangle CED}=2$.

Теперь заметим, что так как $|AD|:|DC|=|BE|:|EC|=2$, то по теореме, обратной теореме Фалеса, прямые AB и DE параллельны, из чего вытекает подобие треугольников AOB и EOD. Коэффициент их подобия равен численному значению отношения $|AB|:|ED|$, найти же эту величину мы можем из того факта, что треугольники CDE и CAB также подобны, и леммы 5. Итак,

$$k=\frac{|AB|}{|ED|}=\frac{|AC|}{|DC|}=\frac{|AD|+|DC|}{|DC|}=\frac{3|DC|}{|DC|}=3 \implies \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle EOD}}=k^2=9.$$

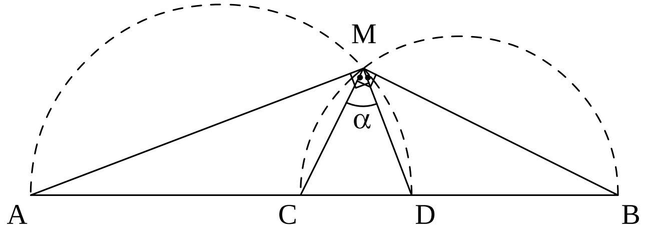
Ответ. 9.

Задача 32.

На отрезке AB лежат точки C и D, причём точка C – между точками A и D. Точка M взята так, что перпендикулярны прямые AM и MD, а также перпендикулярны прямые CM и MB. Найдите площадь треугольника CMD, если известно, что $\widehat{CMD}=\alpha$, а площади треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.

Идея. Доказать, что

$$\frac{S_{\triangle AMC}\cdot S_{\triangle BMD}}{S_{\triangle AMD}\cdot S_{\triangle CMB}}=\cos^2\alpha.$$



Указание. Воспользоваться формулой площади треугольника через длины двух его сторон и синус величины угла между ними.

Решение. Заметим, что величины углов AMC и BMD равны $\pi/2-\alpha$. Также обозначим искомую площадь треугольника CMD за x, тогда $S_{\triangle AMC} = S_1 - x$, $S_{\triangle BMD} = S_2 - x$. Запишем формулы площади этих треугольников:

$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \cdot |AM| \cdot |MC| \cdot \sin \widehat{AMC} = \frac{1}{2} \cdot |AM| \cdot |MC| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$$

$$S_{\triangle BMD} = \frac{1}{2} \cdot |BM| \cdot |MD| \cdot \sin \widehat{BMD} = \frac{1}{2} \cdot |BM| \cdot |MD| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Перемножив полученные соотношения, получаем

$$(S_1 - x)(S_2 - x) = \frac{1}{4} \cdot |AM| \cdot |MC| \cdot |BM| \cdot |MD| \cdot \cos^2 \alpha.$$

С другой стороны,

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot |AM| \cdot |MD|, \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot |BM| \cdot |MC| \quad \Longrightarrow \quad S_1 S_2 = \frac{1}{4} \cdot |AM| \cdot |MD| \cdot |BM| \cdot |MC|.$$

Таким образом,

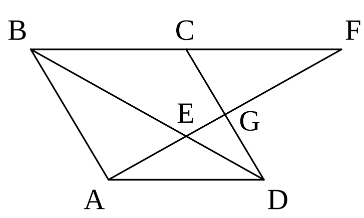
$$(S_1 - x)(S_2 - x) = S_1 S_2 \cos^2 \alpha \quad \Longrightarrow \quad x^2 - x(S_1 + S_2) + S_1 S_2 \sin^2 \alpha = 0.$$

Решая это уравнение, находим $x_{1,2} = \dfrac{S_1 + S_2 \pm \sqrt{(S_1 + S_2)^2 - 4 S_1 S_2 \sin^2 \alpha}}{2}$. Из полученных корней выбираем меньший, так как из того, что $x < S_1$, $x < S_2$, следует, что $x < \dfrac{S_1 + S_2}{2}$. Отметим, что больший корень есть не что иное, как площадь треугольника AMB.

О т в е т. $\dfrac{S_1 + S_2 - \sqrt{(S_1 + S_2)^2 - 4 S_1 S_2 \sin^2 \alpha}}{2}$.

Задача 33.

Точка F лежит на продолжении за точку C стороны BC параллелограмма $ABCD$. Отрезок AF пересекает диагональ BD в точке E и сторону CD в точке G. Известно, что $|GF| = 3$, $|AE| = |EG| + 1$. Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника AED?



И д е я. Воспользоваться тем, что треугольник AGD подобен треугольнику FGC, а треугольник EAB подобен треугольнику EGD.

У к а з а н и е. Обозначить $|EG| = x$, выразить двумя способами отношение $|CD| : |CG|$.

У к а з а н и е. Показать, что $S_{ABCD} = S_{\triangle ABF}$

У к а з а н и е. Воспользоваться леммой 4.

Р е ш е н и е. Обозначим длину отрезка EG за x.
Тогда по условию задачи $|AE| = x + 1$, $|AG| = 2x + 1$, $|AF| = 2x + 4$. Далее,

поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то $|AB| = |CD|$, $AD||BC$ и $AB||CD$. Поэтому подобны треугольники AGD и FGC, а также подобны треугольники EAB и EGD. Из этих подобий мы получаем

$$\frac{|AG|}{|GF|} = \frac{|GD|}{|CG|} \implies \frac{2x+1}{3} = \frac{|GD|}{|CG|} = \frac{|CD|-|CG|}{|CG|} = \frac{|CD|}{|CG|}-1 \implies \frac{|CD|}{|CG|} = \frac{2x+4}{3};$$

$$\frac{|AE|}{|EG|} = \frac{|AB|}{|GD|} \quad \implies \quad \frac{x+1}{x} = \frac{|AB|}{|GD|} = \frac{|CD|}{|GD|} = \frac{|CD|}{|CD|-|CG|} = \frac{\frac{|CD|}{|CG|}}{\frac{|CD|}{|CG|}-1}.$$

Подставляя первое из этих соотношений во второе, приходим к уравнению

$$\frac{x+1}{x} = \frac{\frac{2x+4}{3}}{\frac{2x+1}{3}} \quad \implies \quad \frac{x+1}{x} = \frac{2x+4}{2x+1} \quad \implies \quad x = 1.$$

Теперь мы знаем все необходимые для ответа на вопрос задачи величины. Проще всего было бы воспользоваться явными формулами площади параллелограмма, но мы пока обойдёмся без них. Итак, у нас $|EG| = 1$, $|AE| = 2$, $|AG| = |GF| = 3$, поэтому треугольники AGD и FGC равны (коэффициент их подобия оказался равным единице). Исходя из этого, заметим, что

$$S_{ABCD} = S_{ABCG} + S_{\triangle AGD} = S_{ABCG} + S_{\triangle FGC} = S_{\triangle ABF};$$

$$|AD| = |CF| \quad \implies \quad |BF| = |BC| + |CF| = 2|AD|.$$

Наконец, по лемме 4 находим $\dfrac{S_{\triangle AED}}{S_{ABCD}} = \dfrac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABF}} = \dfrac{|AE|\cdot|AD|}{|AF|\cdot|BF|} = \dfrac{2\cdot|AD|}{6\cdot 2\cdot|AD|} = \dfrac{1}{6}$.

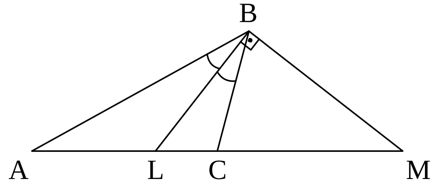
Ответ. $\dfrac{1}{6}$.

Задача 34.

Отрезок BL является биссектрисой треугольника ABC. На продолжении его стороны AC за точку C взята точка M таким образом, что угол LBM прямой. Найдите площадь треугольника CBL, если известно, что площади треугольников ABL и CBM равны 10 и 15 соответственно.

Идея. Доказать, что справедливо соотношение $|AM| : |CM| = |AL| : |LC|$. Воспользоваться леммами о площадях.

Указание. Записать теорему синусов для треугольников ABM и CBM. Использовать основное свойство биссектрисы.



Решение. Заметим, что, в силу лемм о площадях, $\dfrac{|AL|}{|CM|} = \dfrac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle CBM}} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{|LC|}{|CM|} = \dfrac{S_{\triangle CBL}}{S_{\triangle CBM}}$. Таким образом, для вычисления искомой величины нам достаточно найти отношение $|LC| : |CM|$. Обозначим величины углов ABL и CBL за α, тогда величина угла CBM равна $\pi/2-\alpha$, а величина угла ABM равна $\pi/2+\alpha$. Записывая теорему синусов для треугольников ABM и CBM, получаем

$$\frac{|AM|}{\sin(\pi/2+\alpha)} = \frac{|AB|}{\sin\widehat{AMB}}, \quad \frac{|CM|}{\sin(\pi/2-\alpha)} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{CMB}},$$

после чего, почленно деля эти соотношения друг на друга и учитывая тот факт, что $\sin(\pi/2+\alpha) = \sin(\pi/2-\alpha)$, мы находим $|AM| : |CM| = |AB| : |BC|$.

С другой стороны, $|AL| : |CL| = |AB| : |BC|$ по основному свойству биссектрисы треугольника. Стало быть, $|AM| : |CM| = |AL| : |LC|$. Далее обозначим $|AL| = 2x$, $|CM| = 3x$. Тогда

$$\frac{5x+|LC|}{3x} = \frac{2x}{|LC|} \quad \Longrightarrow \quad |LC|^2 + 5x|LC| - 6x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad |LC| = x.$$

Наконец, $S_{\triangle CBL} = \dfrac{x}{3x} S_{\triangle CBM} = 5$.

Замечание. Отметим, что отрезок BM является биссектрисой внешнего угла треугольника ABC (смежного с углом ABC). Полученное нами в ходе решения соотношение $|AM| : |CM| = |AB| : |BC|$ есть не что иное, как основное свойство биссектрисы внешнего угла треугольника, которое, как нетрудно заметить, очень похоже на основное свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника.

Ответ. 5.

Задача 35.

Точки D и E являются соответственно серединами сторон AC и BC равностороннего треугольника ABC. Точка F лежит на отрезке CD, отрезки BF и DE пересекаются в точке M. Найдите длину отрезка MF, если известно, что площадь четырёхугольника $ABMD$ составляет пять восьмых площади треугольника ABC, а $|AB| = a$.

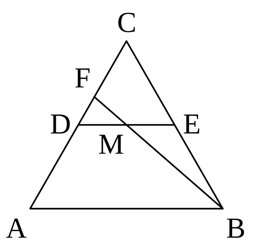
Идея. Использовать теорему косинусов для ΔABF, предварительно вычислив $|AF|$ и отношение $|MF| : |BF|$.

Указание. Найти $S_{\Delta BEM}$.

Указание. Применяя лемму 4 о площадях, найти отношение $|DM| : |ME|$.

Указание. Используя подобие треугольников DFM и AFB, вычислить $|AF|$ и отношение $|MF| : |BF|$.

Указание. Используя теорему косинусов для ΔABF, найти $|BF|$.



Решение. Ключевым моментом в решении этой задачи является вычисление значения отношения $|DM| : |ME|$ и, как следствие, длин входящих в него отрезков. Это можно сделать, например, так. Заметим, что DE — средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE||AB$ и $|DE| = a/2$. Из этого вытекает, что треугольники CDE и CAB подобны с коэффициентом подобия $1/2$, поэтому площадь треугольника CDE составляет $1/4$ площади треугольника ABC, площадь четырёхугольника $BADE$ составляет $3/4$ площади треугольника ABC, а площадь треугольника BEM, с учётом условия задачи, составляет $1/8$ площади треугольника ABC.

Теперь, пользуясь леммой о площадях, находим

$$\frac{1}{2} = \frac{S_{\triangle BEM}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{|BE| \cdot |EM|}{|CE| \cdot |DE|} \quad \Longrightarrow \quad |EM| = \frac{1}{2}|DE| \quad \Longrightarrow \quad |DM| = |ME| = \frac{a}{4}.$$

Наконец, треугольники DFM и AFB также подобны, стало быть,

$$\frac{|MF|}{|BF|} = \frac{|DF|}{|AF|} = \frac{|DM|}{|AB|} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad |MF| = \frac{1}{4}|BF|;$$

$$|DF| = \frac{1}{4}|AF| = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2} + |DF|\right) \quad \Longrightarrow \quad |DF| = \frac{a}{6}, \quad |AF| = \frac{2a}{3}.$$

Нам осталось лишь применить теорему косинусов в треугольнике ABF:

$$|BF|^2 = a^2 + \frac{4a^2}{9} - 2a \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{9} \quad \Longrightarrow \quad |BF| = \frac{a\sqrt{7}}{3}, \quad |MF| = \frac{a\sqrt{7}}{12}.$$

О т в е т. $\dfrac{a\sqrt{7}}{12}$.

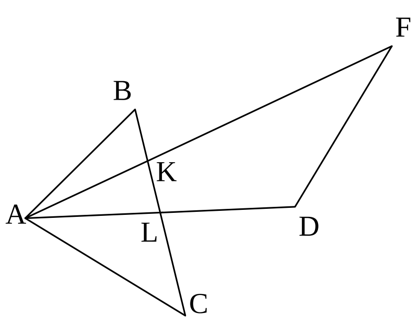
Задача 36.

На стороне BC треугольника ABC выбраны точки K и L таким образом, что $|BL| = |LC|$, $|BK| = |KL|$. Точки D и F лежат соответственно на продолжениях отрезков AL и AK за точки L и K так, что $|KF| = 2|AL|$, $|LD| = |AK|$. Вычислите отношение площадей четырёхугольника $KLDF$ и треугольника ABC, если известно, что $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{ACB} = \gamma$.

И д е я. Площадь четырёхугольника $KLDF$ искать через разность площадей треугольников ADF и AKL.

У к а з а н и е. Применить леммы о площадях. Выразить искомое отношение через отношение $|AK| : |AL|$.

У к а з а н и е. Используя теоремы синусов и косинусов, найти отношение $|AK| : |AL|$.



Р е ш е н и е. План действий в этой задаче очевиден:

$$S_{\Delta ABC} \quad \longrightarrow \quad S_{\Delta AKL} \quad \longrightarrow \quad S_{\Delta ADF} \quad \longrightarrow \quad S_{\Delta KLDF}.$$

Обозначим $|KL| = x$, $|AL| = l$, $|AK| = k$. Тогда, в соответствии с условием задачи, $|BK| = x$, $|LC| = 2x$, $|LD| = k$, $|KF| = 2l$. Применяя леммы о площадях, находим

$$\frac{S_{\triangle AKL}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|KL|}{|BC|} = \frac{1}{4}; \quad \frac{S_{\triangle AKL}}{S_{\triangle ADF}} = \frac{|AK|\cdot|AL|}{|AF|\cdot|AD|} = \frac{kl}{(k+2l)(k+l)} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{S_{KLDF}}{S_{\triangle AKL}} = \frac{1-\dfrac{kl}{(k+2l)(k+l)}}{\dfrac{kl}{(k+2l)(k+l)}} = \frac{k^2+2kl+2l^2}{kl} = \frac{\left(\dfrac{k}{l}\right)^2+2\cdot\dfrac{k}{l}+2}{\dfrac{k}{l}};$$

$$\frac{S_{KLDF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\left(\dfrac{k}{l}\right)^2+2\cdot\dfrac{k}{l}+2}{4\cdot\dfrac{k}{l}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{k}{l}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot\dfrac{k}{l}}.$$

Таким образом, для вычисления искомой величины нам достаточно найти отношение длин отрезков AK и AL. Это можно сделать, например, так: сначала, применяя теорему синусов, получаем

$$|AB| = \frac{|BC|\sin\widehat{ACB}}{\sin\widehat{BAC}} = \frac{4x\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Затем, пользуясь теоремой косинусов для треугольников ABL и ABK, находим

$$|AL|^2 = 4x^2+\frac{16x^2\sin^2\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)}-\frac{16x^2\sin\gamma\cos\beta}{\sin(\beta+\gamma)};$$

$$|AK|^2 = x^2+\frac{16x^2\sin^2\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)}-\frac{8x^2\sin\gamma\cos\beta}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Наконец, поделив полученные соотношения, получаем

$$\frac{|AK|}{|AL|} = \sqrt{\frac{\sin^2(\beta+\gamma)+16\sin^2\gamma-8\sin\gamma\cos\beta\sin(\beta+\gamma)}{4\sin^2(\beta+\gamma)+16\sin^2\gamma-16\sin\gamma\cos\beta\sin(\beta+\gamma)}}.$$

Обозначим $a = \sin(\beta+\gamma)$, $b = \cos\beta$, $c = \sin\gamma$, $d = \sqrt{\dfrac{a^2+16c^2-8abc}{4a^2+16c^2-16abc}}$.
Тогда

$$\frac{S_{KLDF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{d}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2d}.$$

О т в е т. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{d}{4}+\dfrac{1}{2d}$,

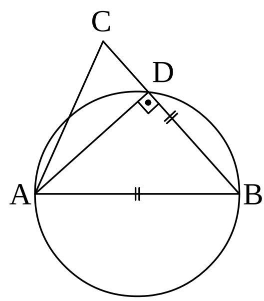
где $a=\sin(\beta+\gamma)$, $b=\cos\beta$, $c=\sin\gamma$, $d=\sqrt{\dfrac{a^2+16c^2-8abc}{4a^2+16c^2-16abc}}$.

2. Окружности

2.1. Углы в окружностях

Задача 1.

В треугольнике ABC известно, что $|AB| = 6$, $|AB| = |BC|$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D так, что $|BD| : |DC| = 2 : 1$. Найдите длину стороны AC.



Идея. Воспользоваться тем, что угол, опирающийся на диаметр, – прямой.
Указание. Рассмотреть прямоугольные треугольники ADB и CDB, применить теорему Пифагора.

Решение. Угол ADB является вписанным углом, опирающимся на диаметр, значит, он прямой. Далее, поскольку $|BC| = 6$, $|BD| : |DC| = 2 : 1$, то $|BD| = 4$, $|DC| = 2$. Применяя теорему Пифагора к треугольникам ADB и CDB, получаем

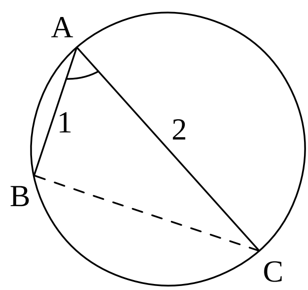
$$|AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2 = 36 - 16 = 20,$$

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2 = 20 + 4 \quad \Longrightarrow \quad |AC| = 2\sqrt{6}.$$

Ответ. $2\sqrt{6}$.

Задача 2.

Найдите длину радиуса окружности, если вписанный в неё угол со сторонами, длины которых равны 1 и 2, опирается на дугу меры $2\pi/3$.



Идея. Воспользоваться свойством вписанного угла.
Указание. Применить теоремы синусов и косинусов.

Решение. Обозначим данный нам угол BAC (A – вершина угла). Будем считать, что $|AB| = 1$, $|AC| = 2$. Тогда, поскольку вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается, получаем, что радианная мера угла BAC равна $\pi/3$. Далее воспользуемся тем, что треугольник ABC вписан в окружность, длину радиуса которой нам надо отыскать. Запишем для него теоремы косинусов и синусов:

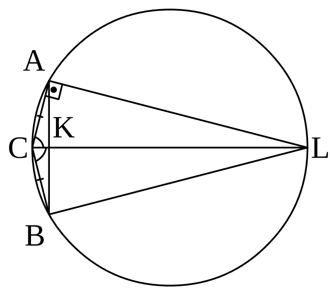
$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\widehat{BAC} \quad \Longrightarrow \quad |BC| = \sqrt{3};$$

$$2R_{\triangle ABC} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BAC}} \quad \Longrightarrow \quad R_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$$

Ответ. 1.

Задача 3.

Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы CK треугольника ABC пересекает эту окружность в точке L, причём CL – диаметр данной окружности. Найдите отношение длин отрезков BL и AC, если известно, что $\sin\widehat{BAC} = 1/4$.



Идея. Применить свойство вписанных углов, опирающихся на диаметр окружности.

Указание. Доказать равенство треугольников ACL и BCL.

Решение. Углы CAL и CBL – вписанные углы, опирающиеся на диаметр окружности. Поэтому $\widehat{CAL} = \widehat{CBL} = \pi/2$. С учётом этого получаем, что треугольники CAL и CBL равны (по гипотенузе и острому углу), значит, $|AC| = |BC|$, $|AL| = |BL|$. Таким образом, треугольник ABC – равнобедренный, значит, его биссектриса CK является также его высотой и медианой, то есть $|AK| = |BK|$, $\widehat{CKB} = \pi/2$, и, кроме того, угол BAC – острый, из чего вытекает положительность его котангенса.

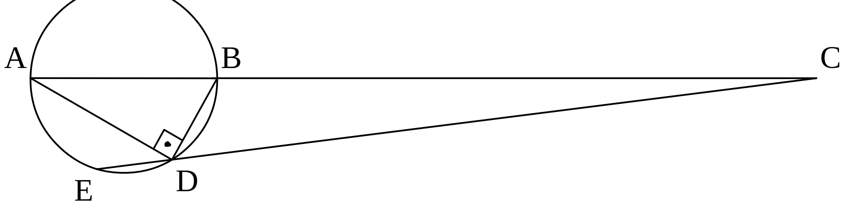
Теперь искомое отношение ищется элементарно:

$$\frac{|BL|}{|AC|} = \frac{|AL|}{|AC|} = \operatorname{tg}\widehat{ACL} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BAC}\right) = \operatorname{ctg}\widehat{BAC} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\widehat{BAC}} - 1} = \sqrt{15}.$$

Ответ. $\sqrt{15}$.

Задача 4.

Диаметр AB окружности γ продолжили за точку B и на этом продолжении отметили точку C. Из точки C провели секущую, пересекающую окружность в точках D и E, считая от точки C. Известно, что $|DC| = 3$, градусные меры углов DAC и ACD равны $30°$ и $7°$ соответственно. Найдите длину диаметра окружности γ.



Идея. Использовать свойство вписанных углов, опирающихся на диаметр окружности, и соотношения в прямоугольных треугольниках.

Указание. Найти величину угла CBD и, используя теорему синусов для треугольника BCD, найти $|BD|$.
Указание. Из прямоугольного треугольника ABD найти $|AB|$.

Решение. Угол ADB является вписанным углом, опирающимся на диаметр, поэтому он прямой. С учётом этого имеем

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{ADB} - \widehat{DAB} = 60^\circ, \quad \widehat{CBD} = 180^\circ - \widehat{ABD} = 120^\circ.$$

Теперь запишем теорему синусов для треугольника BCD:

$$\frac{|DC|}{\sin \widehat{DBC}} = \frac{|BD|}{\sin \widehat{BCD}} \quad \Longrightarrow \quad |BD| = |DC| \cdot \frac{\sin \widehat{BCD}}{\sin \widehat{DBC}} = 2\sqrt{3} \cdot \sin 7^\circ.$$

Из прямоугольного треугольника ABD получаем

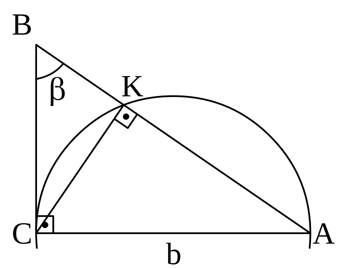
$$|AB| = \frac{|BD|}{\sin \widehat{DAB}} = 4\sqrt{3}\sin 7^\circ.$$

Ответ. $4\sqrt{3}\sin 7^\circ$.

Задача 5.

На катете AC прямоугольного треугольника ABC, как на диаметре, построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите площадь треугольника CKB, если $|AC| = b$, $\widehat{ABC} = \beta$.

Идея. Использовать свойство вписанных углов, опирающихся на диаметр окружности, и соотношения в прямоугольных треугольниках.
Указание. Рассмотреть прямоугольные треугольники AKC и BKC. Найти $|CK|$ и $|BK|$.



Решение. Угол AKC является вписанным углом, опирающимся на диаметр, значит, он прямой. После этого остается только рассмотреть прямоугольные треугольники AKC и BKC и провести некоторые подсчёты:

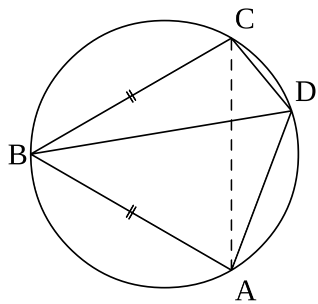
$$|BC| = |AC| \cdot \operatorname{ctg} \widehat{ABC} = b \operatorname{ctg} \beta; \quad |CK| = |BC| \cdot \sin \widehat{ABC} = b \cos \beta;$$

$$|BK| = |BC| \cdot \cos \widehat{ABC} = b \cdot \frac{\cos^2 \beta}{\sin \beta}; \quad S_{\triangle CKB} = \frac{1}{2} \cdot |BK| \cdot |CK| = \frac{b^2 \cos^3 \beta}{2 \sin \beta}.$$

Ответ. $\dfrac{b^2 \cos^3 \beta}{2 \sin \beta}$.

Задача 6.

В окружность, длина радиуса которой равна 7, вписан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Длины сторон AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD как $2:1$, а $\widehat{ADC} = 120^\circ$. Найдите длины всех сторон четырёхугольника $ABCD$.



Идея. Использовать свойство вписанных углов, теорему синусов и теорему косинусов.

Указание. Найти величину угла ADB, затем, записав теорему синусов для треугольника ADB, найти $|AB|$.

Указание. Используя теорему синусов для треугольника ACD, найти AC. Записав для него теорему косинусов, найти $|CD|$ и $|AD|$.

Решение. Поскольку $|AB| = |BC|$, то величины углов ADB и CDB равны. Значит, DB – биссектриса угла ADC. Таким образом, $\widehat{CDB} = \widehat{ADB} = \pi/3$. Треугольники ABD и BCD оба вписаны в данную нам окружность, поэтому применим теорему синусов:

$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{ADB}} = 2R_{\triangle ABD} \quad\Longrightarrow\quad |AB| = 2\cdot 7\cdot\sin\frac{\pi}{3} = 7\sqrt{3}; \quad |BC| = |AB| = 7\sqrt{3}.$$

Теперь воспользуемся условием про отношение площадей треугольников ABD и BCD:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{|AD|}{|CD|} \quad\Longrightarrow\quad |AD| = 2|CD|.$$

После этого для нахождения длин отрезков AD и CD достаточно рассмотреть треугольник ACD. Сначала, с учётом того, что и он тоже вписан в данную нам окружность, воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{ADC}} = 2R_{\triangle ACD} \quad\Longrightarrow\quad |AC| = 2\cdot 7\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = 7\sqrt{3}.$$

Наконец, запишем для него теорему косинусов, обозначив $|CD| = x$, $|AD| = 2x$:

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2\cdot|AD|\cdot|CD|\cdot\cos\widehat{ACD} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad 147 = 4x^2 + x^2 - 2\cdot 2x\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad 147 = 7x^2 \quad\Longrightarrow\quad x = \sqrt{21}.$$

Ответ. $|AB| = |BC| = 7\sqrt{3}$, $|CD| = \sqrt{21}$, $|AD| = 2\sqrt{21}$.

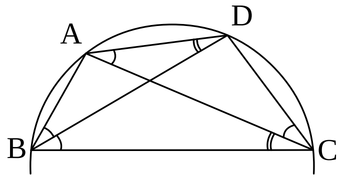
Задача 7.

В треугольнике ABC $|AB| = 3$, $|AC| = 3\sqrt{7}$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Биссектриса угла ABC пересекается в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC. Найдите длину отрезка BD.

Идея. Использовать свойство вписанных углов и теорему синусов.

Указание. Записывая теорему синусов для треугольника ABC, найти $R_{\triangle ABC}$ и $\sin\widehat{ACB}$. Доказав, что угол ACB острый, найти $\cos\widehat{ACB}$.

Указание. Применив теорему синусов для треугольника ABD, найти $|BD|$.



Решение. Так как $|AC| > |AB|$, то $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$, поэтому угол ACB – острый. Запишем теорему синусов для треугольника ABC:

$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{|AC|}{\sin\widehat{ABC}} = 2R_{\triangle ABC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad R_{\triangle ABC} = \sqrt{21}, \quad \sin\widehat{ACB} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \quad \cos\widehat{ACB} = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

Также заметим, что вписанные углы ADB и ACB опираются на одну дугу, значит, $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$. С учётом этого из треугольника ABD получаем

$$\widehat{DAB} = \pi - \widehat{ABD} - \widehat{ADB} = \pi - \frac{1}{2}\widehat{ABC} - \widehat{ADB} = \frac{5\pi}{6} - \widehat{ADB}.$$

Наконец, очевидно, что треугольники ABC и ABD вписаны в одну и ту же окружность. Для подсчёта длины BD осталось применить теорему синусов для треугольника ABD:

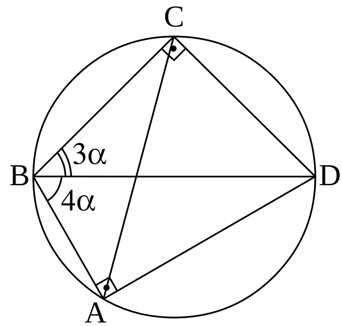
$$\frac{|BD|}{\sin\widehat{DAB}} = 2R_{\triangle ABD} \quad \Longrightarrow \quad |BD| = 2R_{\triangle ABC} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \widehat{ADB}\right) =$$

$$= 2\sqrt{21}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right) = \frac{16\sqrt{21}}{4\sqrt{7}} = 4\sqrt{3}.$$

Ответ. $4\sqrt{3}$.

Задача 8.

Диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около него. Вычислите длину диагонали AC, если $|BD| = 2$, $|AB| = 1$, $\widehat{ABD} : \widehat{DBC} = 4 : 3$.



Идея. Использовать свойство вписанных углов, опирающихся на диаметр, соотношения в прямоугольном треугольнике и теорему синусов.

Указание. Из прямоугольного треугольника ABD найти угол ABD. Используя условие, найти величину угла DBC.

Указание. Используя теорему синусов для треугольника ABC, найти $|AC|$.

Решение. Поскольку углы BAD и BCD являются вписанными углами, опирающимися на диаметр, то они прямые. Из треугольника ABD находим

$$\cos \widehat{ABD} = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{ABD} = \frac{\pi}{3}.$$

Тогда

$$\widehat{DBC} = \frac{3}{4} \cdot \widehat{ABD} = \frac{\pi}{4}.$$

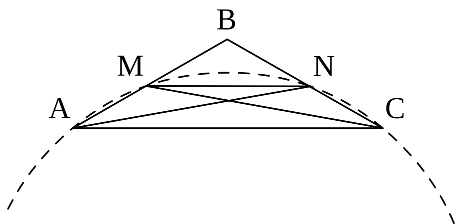
Наконец, в силу того что BD – диаметр окружности, из треугольника ABC с помощью теоремы синусов получаем

$$|AC| = 2R_{\triangle ABC} \cdot \sin \widehat{ABC} = |BD| \cdot \sin \widehat{ABC} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

Задача 9.

В треугольнике ABC AN и CM – медианы, $\widehat{ABC} = 2\pi/3$. Окружность, проходящая через точки A, M и N, проходит также и через точку C. Длина радиуса этой окружности равна 7. Найдите площадь треугольника ABC.



Идея. Использовать свойство вписанных углов, свойство медианы треугольника, соотношения в прямоугольном треугольнике, формулу для медианы треугольника и теорему синусов.

Указание. Используя свойство вписанных углов и свойство медианы треугольника, показать, что треугольник ABC – равнобедренный ($|AB| = |BC|$).

Указание. Выразить длину стороны AC через длину стороны AB. Используя формулу длины медианы треугольника, выразить длину медианы AN через длину стороны AB.

Указание. Использовать теорему синусов для треугольника ANC.

Решение. Поскольку MN – средняя линяя треугольника ABC, то $MN||AC$. Тогда величины углов ANM и NAC равны (т.к. они внутренние накрест лежащие), поэтому равны меры дуг AM и NC. Но тогда равны и длины отрезков AM и NC, стало быть, треугольник ABC – равнобедренный ($|AB| = |BC|$), а величины углов ACB и CAB равны $\pi/6$.

Обозначим $|AB| = |BC| = x$. Тогда $|AC| = 2 \cdot |AB| \cdot \cos \pi/6 = x\sqrt{3}$. Воспользуемся формулой длины медианы:

$$|AN|^2 = \frac{2|AC|^2 + 2|AB|^2 - |BC|^2}{4} = \frac{7}{4}x^2 \quad \Longrightarrow \quad |AN| = \frac{\sqrt{7}}{2}x.$$

Теперь применим теорему синусов для треугольника ANC:

$$2R_{\triangle ANC} = \frac{|AN|}{\sin \widehat{ACN}} \quad \Longrightarrow \quad |AN| = 2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 7 \quad \Longrightarrow \quad x = 2\sqrt{7}.$$

Наконец, найдём искомую площадь:

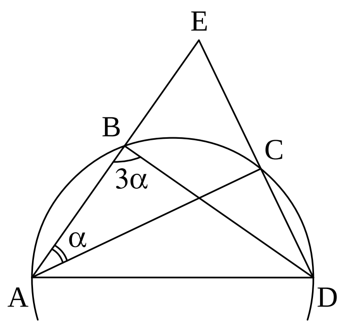
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}.$$

Ответ. $7\sqrt{3}$.

Задача 10.

На окружности γ расположено четыре точки A, B, C, D. Продолжение хорды AB за точку B и продолжение хорды CD за точку C пересекаются в точке E, причём $\widehat{AED} = \pi/3$. Величина угла ABD в три раза больше величины угла BAC. Докажите, что AD – диаметр окружности γ.

Идея. Использовать свойство вписанных углов и углов между секущими.
Указание. Показать, что угол ABD – прямой.



Решение. Обозначим величину угла BAC за α, тогда величина угла ABD будет равна 3α. Применим свойство угла между секущими:

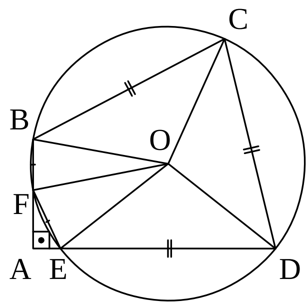
$$\widehat{AED} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \widehat{ABD} - \widehat{BAC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi}{3} = 3\alpha - \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Таким образом, угол ABD – прямой. Из этого и вытекает, что AD – диаметр окружности γ.

Задача 11.

Вершины B, C и D четырёхугольника $ABCD$ расположены на окружности с центром O, которая пересекает сторону AB в точке F, а сторону AD – в точке E. Известно, что угол BAD прямой, длина хорды EF равна длине хорды FB, а также равны длины хорд BC, CD и ED. Найдите величину угла ABO.



Идея. Использовать свойство центральных углов, опирающихся на равные хорды, и свойство углов между секущими.

Указание. Показать, что $\widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE}$ и $\widehat{BOF} = \widehat{EOF}$.

Указание. Используя то, что сумма величин всех центральных углов в окружности равна 2π, и свойство углов между секущими, получить систему для нахождения величин центральных углов.

Решение. Поскольку длины хорд EF и FB равны, то треугольники EOF и BOF равны по третьему признаку равенства треугольников. Стало быть, $\widehat{BOF} = \widehat{EOF}$. Аналогично доказывается, что $\widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE}$.

Обозначим величины углов BOF и BOC за α и β соответственно. Первое уравнение, связывающее эти неизвестные, составляется просто:

$$\widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOE} + \widehat{EOF} + \widehat{BOF} = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad 2\alpha + 3\beta = 2\pi.$$

Далее воспользуемся свойством угла между секущими:

$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\, B\overset{\frown}{C}D - \frac{1}{2}\, \overset{\frown}{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{BOC} + \widehat{COD}) - \frac{1}{2}\widehat{EOF} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi}{2} = \beta - \frac{\alpha}{2}.$$

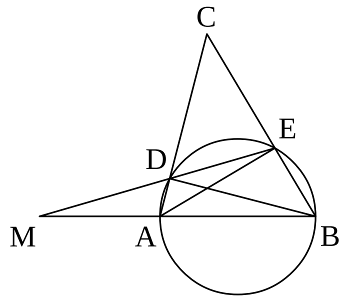
Решив полученную систему уравнений, получаем $\alpha = \pi/7$, $\beta = 4\pi/7$. Наконец, из равнобедренного треугольника BOF находим

$$\widehat{FBO} = \frac{\pi - \widehat{BOF}}{2} = \frac{3\pi}{7}.$$

Ответ. $\dfrac{3\pi}{7}$.

Задача 12.

На стороне AB треугольника ABC, как на диаметре, построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол величины $\pi/12$. Найдите величины углов треугольника ABC.



Идея. Использовать свойство вписанных углов, опирающихся на диаметр, свойство углов между секущими и подобие треугольников.

Указание. Используя то, что BD и AE – высоты треугольника ABC, показать, что треугольники EDC и ABC подобны с коэффициентом подобия $\cos\widehat{ACB}$.

Указание. Используя свойство отношения площадей подобных треугольников, найти величину угла ACB.

Указание. Используя свойство углов между секущими и свойство суммы углов треугольника, найти оставшиеся углы. Не забудьте рассмотреть два случая пересечения прямых DE и AB.

Решение. Заметим, что углы ADB и AEB – прямые, поскольку они являются вписанными углами, опирающимися на диаметр окружности. Поэтому BD и AE – высоты треугольника ABC, стало быть, во-первых, угол ACB острый, во-вторых, треугольники EDC и ABC подобны с коэффициентом подобия $\cos\widehat{ACB}$. Из этого вытекает, что

$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 \quad\Longrightarrow\quad \cos^2\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 3\pi/4$. Далее обозначим точку пересечения прямых AB и DE буквой M и воспользуемся свойством угла между секущими:

$$\widehat{EMB} = \left|\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{BE} - \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AD}\right| = |\widehat{BAE} - \widehat{ABD}| =$$

$$= \left|\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{ABE}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BAD}\right)\right| = |\widehat{BAD} - \widehat{ABE}| \quad\Longrightarrow\quad |\widehat{BAC} - \widehat{ABC}| = \frac{\pi}{12}.$$

Модуль возник из-за того, что, вообще говоря, мы не знаем, где находится точка пересечения прямых AB и DE. Если она лежит на продолжении AB за точку A (см. рисунок), то модуль раскроется с плюсом. Если же наоборот, то соответственно с минусом.

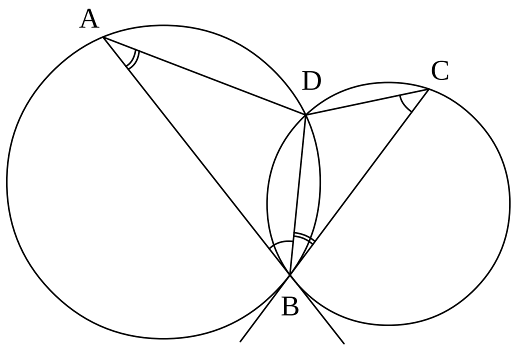
Наконец, решая полученную систему уравнений, находим

$$\begin{cases} \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 3\pi/4; \\ |\widehat{BAC} - \widehat{ABC}| = \pi/12, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \widehat{BAC} = 5\pi/12; \\ \widehat{ABC} = \pi/3, \end{cases} \\ \begin{cases} \widehat{ABC} = 5\pi/12; \\ \widehat{BAC} = \pi/3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{ABC} = \frac{5\pi}{12}$, $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$ или
$\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{12}$, $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$.

Задача 13.

На сторонах острого угла с вершиной B взяты точки A и C. Одна окружность касается прямой AB в точке B и проходит через точку C. Вторая окружность касается прямой BC в точке B и проходит через точку A. Точка D – вторая общая точка этих окружностей. Известно, что $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CD| = d$. Найдите $|AD|$.



И д е я. Использовать свойства вписанных углов и углов между касательной и хордой, подобие треугольников.
У к а з а н и е. Используя свойство вписанных углов и углов между касательной и хордой, показать, что треугольники ABD и BCD подобны по двум углам.

Р е ш е н и е. Обозначим меру дуги BD окружности, содержащей точки A, B и D, за α, а меру дуги BD окружности, содержащей точки B, C и D, за β. Пользуясь свойством угла между касательной и хордой, получаем

$$\widehat{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \beta = \widehat{BCD}, \quad \widehat{CBD} = \frac{1}{2} \cdot \alpha = \widehat{DAB}.$$

Из этого следует, что треугольники ABD и BCD подобны по двум углам. Из этого подобия находим

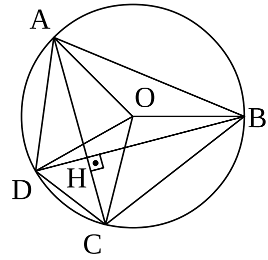
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|BD|}{|CD|} \implies |BD| = \frac{|AB| \cdot |CD|}{|BC|} = \frac{cd}{a}, \; |AD| = \frac{|AB| \cdot |BD|}{|BC|} = \frac{c^2 d}{a^2}.$$

О т в е т. $d\left(\dfrac{c}{a}\right)^2$.

Задача 14.

В окружность γ с центром в точке O вписан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Известно, что величина угла AOB в три раза больше величины угла COD. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью γ, если $|CD| = 10$.

И д е я. Использовать свойство углов между пересекающимися хордами и теорему косинусов.
У к а з а н и е. Используя свойство углов между пересекающимися хордами, найти величину угла COD.
У к а з а н и е. Используя теорему косинусов для треугольника COD, найти длину радиуса окружности.



Р е ш е н и е. Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ буквой H. Тогда, по свойству угла между пересекающимися хордами,

$$\frac{\pi}{2} = \widehat{AHB} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{CD} =$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{AOB} + \frac{1}{2}\widehat{COD} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{AOB} + \widehat{COD} = \pi.$$

С учётом того, что $\widehat{AOB} = 3 \cdot \widehat{COD}$, получаем $\widehat{AOB} = 3\pi/4, \widehat{COD} = \pi/4$. Далее, поскольку $|OC| = |OD| = R_\gamma$, то, применив теорему косинусов для $\triangle COD$, найдём длину радиуса окружности:

$$|CD|^2 = |OD|^2 + |OC|^2 - 2 \cdot |OD| \cdot |OC| \cdot \cos\widehat{COD} \quad \Longrightarrow$$

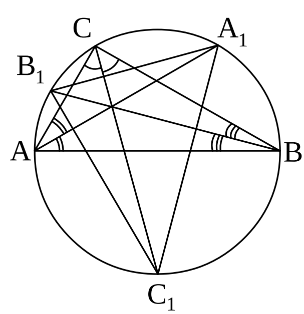
$$\Longrightarrow \quad 100 = 2R_\gamma^2 \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) \quad \Longrightarrow \quad R_\gamma^2 = \frac{50}{\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad S_\gamma = \pi R_\gamma^2 = \frac{50\pi}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{100\pi}{2 - \sqrt{2}} = 50\pi(2 + \sqrt{2}).$$

О т в е т. $50\pi(2 + \sqrt{2})$.

Задача 15.

Биссектрисы углов треугольника ABC, площадь которого равна 2, продолжены до точек пересечения с описанной около треугольника ABC окружностью, отличных от точек A, B, C. Эти точки образуют новый треугольник. Найдите его площадь, если величины углов треугольника ABC равны $\pi/6$, $\pi/3$ и $\pi/2$.



И д е я. Использовать свойство вписанных углов, определение биссектрисы и теорему синусов.

У к а з а н и е. Используя свойство вписанных углов и определение биссектрисы, найти величины углов нового треугольника.

У к а з а н и е. Используя теорему синусов, записать площади треугольников через длину радиуса окружности и величины известных углов.

Р е ш е н и е. Обозначим вершины нового треугольника буквами A_1, B_1 и C_1 (A_1 лежит на биссектрисе угла BAC, B_1 лежит на биссектрисе угла ABC и C_1 лежит на биссектрисе угла ACB). Без ограничения общности будем считать, что $\widehat{CAB} = \pi/3$, $\widehat{ABC} = \pi/6$, $\widehat{ACB} = \pi/2$. Тогда, по свойствам вписанных углов,

$$\widehat{B_1A_1C_1} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{B_1C_1} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{B_1A} + \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AC_1} = \widehat{B_1BA} + \widehat{ACC_1} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3};$$

$$\widehat{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{A_1C_1} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{A_1B} + \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{BC_1} = \widehat{A_1AB} + \widehat{C_1CB} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12};$$

$$\widehat{A_1C_1B_1} = \pi - \widehat{A_1B_1C_1} - \widehat{B_1A_1C_1} = \pi - \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

Теперь выразим площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ через радиус описанной окружности и синусы их углов (эти соотношения элементарно получаются путем подстановки в формулу площади треугольника через две стороны и синус величины угла между ними длин этих сторон, выраженных с помощью теоремы синусов через длину радиуса описанной окружности):

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = 2R^2_{\triangle A_1B_1C_1} \cdot \sin\widehat{B_1A_1C_1} \cdot \sin\widehat{A_1B_1C_1} \cdot \sin\widehat{A_1C_1B_1}.$$

$$2 = S_{\triangle ABC} = 2R^2_{\triangle ABC} \cdot \sin\widehat{BAC} \cdot \sin\widehat{ABC} \cdot \sin\widehat{ACB}.$$

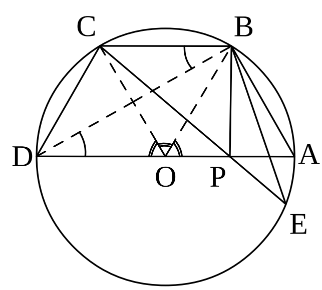
Почленно деля эти равенства, с учётом того что оба треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ вписаны в одну и ту же окружность, получаем

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{2} = \frac{\sin\widehat{B_1A_1C_1} \cdot \sin\widehat{A_1B_1C_1} \cdot \sin\widehat{A_1C_1B_1}}{\sin\widehat{BAC} \cdot \sin\widehat{ABC} \cdot \sin\widehat{ACB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Ответ. $\sqrt{3}+1$.

Задача 16.

В окружность, длина радиуса которой равна $2\sqrt{7}$, вписана трапеция $ABCD$, причём её основание AD является диаметром, а $\widehat{BAD} = \pi/3$. Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P, такой, что $|AP| : |PD| = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника BPE.



Идея. Использовать параллельность прямых BC и AD, свойство центральных углов и свойства равнобедренного треугольника.

Указание. Используя параллельность прямых BC и AD и то, что AD является диаметром, найти меры дуг AB, BC и CD.

Указание. Показать, что треугольники AOB, BOC и COD – равносторонние.

Указание. Доказать, что P – середина отрезка AO.

Решение. Поскольку $ABCD$ – трапеция, то $AD||BC$. Из этого вытекает равенство мер дуг AB и CD. Далее, поскольку $\widehat{BAD} = \pi/3$, то мера дуги BCD равна $2\pi/3$. С другой стороны, AD – диаметр, поэтому мера дуги $ABCD$ равна π. С учётом всего вышесказанного получаем, что

$$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \implies \overset{\frown}{BC} = \frac{\pi}{3} \implies \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \frac{\pi}{3},\ \widehat{BEC} = \frac{\pi}{6}.$$

Далее заметим, что треугольники AOB, BOC и COD – равносторонние (они равнобедренные, а угол при вершине каждого из них равен $\pi/3$). Из этого вытекает, что

$$|AO| = |OD| = |AB| = |BC| = |CD| = 2\sqrt{7}.$$

Поскольку $3|AP| = |PD|$, то $|AP| = \frac{1}{4}|AD|$. С другой стороны, $|AO| = \frac{1}{2}|AD|$. Значит, P – середина отрезка AO, BP – медиана равностороннего треугольника ABO, поэтому $BP \perp AD$, $|BP| = |AB| \cdot \sin\widehat{OAB} = \sqrt{21}$. Из параллельности AD и BC следует, что $BP \perp BC$, стало быть,

$$\operatorname{tg}\widehat{BPC} = \frac{|BC|}{|BP|} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \cos\widehat{BPC} = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\widehat{BPC}}} = \sqrt{\frac{3}{7}},$$

$$\cos\widehat{BPE} = -\cos\widehat{BPC} = -\sqrt{\frac{3}{7}}, \quad \sin\widehat{BPE} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{BPE}} = \frac{2}{\sqrt{7}},$$

$$\sin\widehat{EBP} = \sin(\widehat{BPE}+\widehat{BEP}) = \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

Наконец,

$$S_{\triangle BPE} = \frac{1}{2}\cdot|BP|^2\cdot\frac{\sin\widehat{BPE}\cdot\sin\widehat{EBP}}{\sin\widehat{BEP}} = \frac{21}{2}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}}{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}.$$

Ответ. $3\sqrt{3}$.

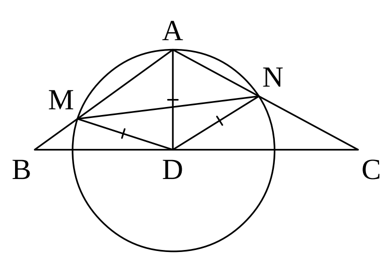
Задача 17.

Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Проведена окружность с центром в точке D, проходящая через точку A и пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислите длину стороны AC, если известно, что $|AB| = c$, $|AM| = n$, $|AN| = m$.

Идея. Использовать свойство вписанных углов, свойство равнобедренного треугольника и подобие треугольников.

Указание. Используя свойство вписанных углов, свойство равнобедренного треугольника и свойство суммы острых углов прямоугольного треугольника, показать, что $\widehat{AMN} = \widehat{ACD}$.

Указание. Использовать подобие треугольников AMN и ACB.



Решение. Проведём отрезки DM, DN и MN. Заметим, что угол AMN является вписанным углом, опирающимся на дугу AN, поэтому $\widehat{AMN} = \frac{1}{2}\widehat{ADN}$. С другой стороны, треугольник AND равнобедренный, треугольник ADC прямоугольный, поэтому

$$\widehat{DAN} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\widehat{ADN}, \quad \widehat{ACD} = \frac{\pi}{2} - \widehat{DAN} = \frac{1}{2}\widehat{ADN}.$$

Итак, мы доказали, что $\widehat{AMN} = \widehat{ACD}$. Таким образом, треугольники AMN и ACB подобны по двум углам (угол A у них общий), из чего вытекает

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AN|}{|AM|} \quad \Longrightarrow \quad |AC| = \frac{|AB| \cdot |AM|}{|AN|} = \frac{nc}{m}.$$

Ответ. $\dfrac{nc}{m}$.

Задача 18.

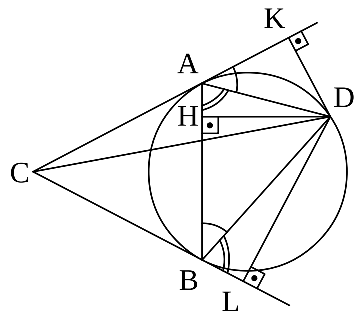
Через точку C проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B. На большей из дуг AB взята точка D так, что $\sin\widehat{ACD}\cdot\sin\widehat{BCD} = 1/3$. Найдите расстояние от точки D до хорды AB, если известно, что $|CD| = 2$.

Идея. Сделать дополнительное построение. Использовать свойство вписанных углов и углов между касательной и хордой. Использовать подобие и соотношения в прямоугольном треугольнике.

Указание. Опустить из точки D перпендикуляры на прямые AB, AC и BC.

Указание. Используя свойства вписанных углов и углов между касательной и хордой, показать, что $\triangle ADH \sim \triangle BDL$ и $\triangle ADK \sim \triangle BDH$.

Указание. Использовать соотношения в прямоугольном треугольнике.



Решение. Опустим из точки D перпендикуляр на прямую AB. Основание этого перпендикуляра обозначим за H. Длина отрезка DH и будет ответом на вопрос задачи. Проведём дополнительное построение: на сторонах угла ABC возьмем точки K и L (K на AC, L на BC) таким образом, что $DK \perp AC$, $DL \perp BC$. Тогда по свойству угла между касательной и хордой $\widehat{DBL} = \widehat{BAD}$ и $\widehat{DAK} = \widehat{ABD}$. Следовательно, $\triangle ADH \sim \triangle BDL$ и $\triangle ADK \sim \triangle BDH$ по двум углам.

Из этих подобий имеем

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|DH|}{|DL|}, \quad \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|DK|}{|DH|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|DH|}{|DL|} = \frac{|DK|}{|DH|} \quad \Longrightarrow \quad |DH|^2 = |DK|\cdot|DL|.$$

Наконец, заметим, что $|DK| = |CD| \cdot \sin\widehat{KCD}$, $|DL| = |CD| \cdot \sin\widehat{LCD}$. С учётом этого

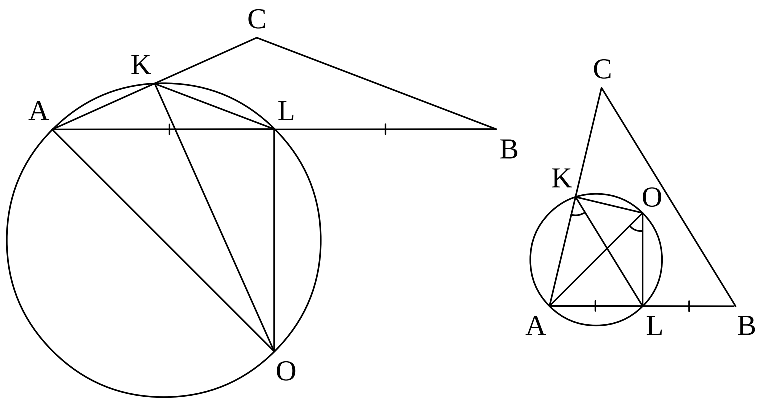
$$|DH|^2 = |CD|^2 \cdot \sin\widehat{KCD} \cdot \sin\widehat{LCD} = \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad |DH| = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 19.

В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, точка L лежит на отрезке AB и $|AL| = |LB|$. Описанная около треугольника ALO окружность пересекает прямую AC в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $\widehat{AOL} = \pi/4$, $|LK| = 8$, $|AK| = 7$.

Идея. Доказать, что K – середина отрезка AC, а $\sin\widehat{AOL} = \sin\widehat{ACB}$.



Указание. Доказать, что AO – диаметр окружности, описанной около треугольника ALO, воспользоваться свойством углов, опирающихся на диаметр.
Указание. Не забудьте рассмотреть оба случая расположения точек O и K относительно прямой AB.

Решение. Поскольку точка O является точкой пересечения серединных перпендикуляров треугольника ABC, а L – середина AB, то $OL \perp AB$. Таким образом, угол OLA прямой. Из этого следует, что AO – диаметр окружности, описанной около треугольника ALO. Но тогда угол AKO тоже прямой, поскольку он опирается на диаметр этой окружности. Значит, $OK \perp AC$, из чего вытекает равенство длин отрезков AK и CK. В самом деле, если предположить, что K – не середина AC, то мы придём к тому, что из точки O можно опустить два различных перпендикуляра на прямую AC: один проходит через середину AC, а второй через точку K. Таким образом, $|AC| = 2\cdot|AK| = 14$. Отметим также, что KL – средняя линия треугольника ABC, поэтому $|BC| = 2\cdot|LK| = 16$ и $\widehat{ACB} = \widehat{AKL}$.

Заметим, что в этой задаче возможно два различных случая, а именно, точки O и K могут лежать как в одной полуплоскости относительно прямой AB, так и в разных. В первом из этих случаев мы получим, что углы AOL и AKL опираются на одну дугу, значит, их величины равны, а во втором они будут опираться на дуги, дополняющие друг друга до полной окружности, то есть сумма величин этих углов равна π. Таким образом, независимо от расположения точек O и K верно равенство $\sin\widehat{AOL} = \sin\widehat{AKL}$.

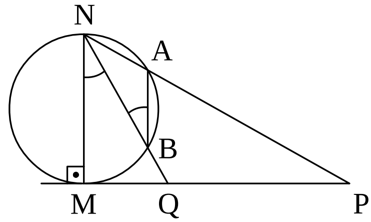
Наконец, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AC|\cdot\sin\widehat{ACB} = 112\cdot\sin\widehat{AOL} = 56\sqrt{2}$.

Ответ. $56\sqrt{2}$.

Задача 20.

В окружности проведены диаметр MN и параллельная ему хорда AB. Касательная к окружности в точке M пересекает прямые NA и NB соответственно в точках P и Q. Известно, что $|MP| = p$, $|MQ| = q$. Найдите длину диаметра MN.

Идея. Использовать свойство вписанных углов, углов между касательной и секущей, подобие.



Указание. Используя свойство вписанных углов, углов между касательной и секущей, показать, что $\widehat{MNQ} = \widehat{MPN}$.

Указание. Использовать подобие прямоугольных треугольников MNQ и MPN.

Решение. Из того, что $MN||AB$, вытекает равенство дуг MB и AN. После этого заметим, что, во-первых, мера дуги $MBAN$ равна π и, во-вторых, $MN \perp MP$. С учётом этого, применяя свойство вписанных углов, получаем

$$\widehat{MNQ} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MB}, \quad \widehat{MPN} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ANM} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABM} = \frac{1}{2}\left(\pi - \overset{\frown}{ABM}\right) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AN}\,.$$

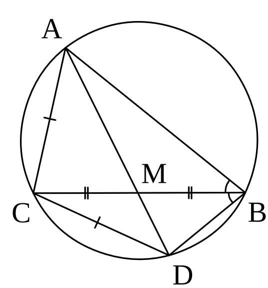
Значит, $\widehat{MNQ} = \widehat{MPN}$. Поэтому прямоугольные треугольники MNQ и MPN подобны, что даёт нам $\dfrac{|MN|}{|MP|} = \dfrac{|MQ|}{|MN|} \iff |MN|^2 = |MP|\cdot|MQ| \Longrightarrow |MN| = \sqrt{pq}$.

Ответ. $\sqrt{pq}$.

Задача 21.

Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины A, пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке D. Найдите длину отрезка BC, если длины отрезков AC и DC равны 1.

Идея. Использовать теорему о продолжении биссектрисы треугольника до пересечения с описанной около него окружностью.



Указание. Доказать, что треугольники CMD и CDB подобны.

Решение. Обозначим середину отрезка BC буквой M. Из равенства длин отрезков AC и DC и свойства вписанных углов вытекает, что $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} = \widehat{CDA}$. Следовательно, треугольники CMD и CDB подобны. Значит,

$$\frac{|MC|}{|DC|} = \frac{|DC|}{|BC|} \quad \Longrightarrow \quad |DC|^2 = |MC| \cdot |BC|.$$

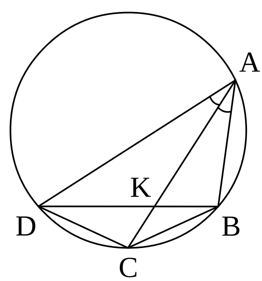
С другой стороны, по условию задачи $|MB| = |MC|$, то есть $|MC| = \frac{1}{2}|BC|$. Подставляя это соотношение в полученное нами равенство, находим

$$1 = |DC|^2 = \frac{|BC|^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad |BC| = \sqrt{2}.$$

Ответ. $\sqrt{2}$.

Задача 22.

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите длину отрезка KC, если известно, что $|AK| = 6$, $|BC| = 4$.



Идея. Использовать теорему о продолжении биссектрисы треугольника до пересечения с описанной около него окружностью.
Указание. Доказать, что треугольники BKC и ABC подобны.

Решение. Обозначим искомую длину отрезка KC за x, тогда $|AC| = x + 6$. Поскольку AC – биссектриса угла BAD, то треугольники BKC и ABC подобны, что даёт нам

$$\frac{|KC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AC|} \iff |BC|^2 = |AC| \cdot |KC| \implies 16 = (x+6) \cdot x \implies x^2 + 6x - 16 = 0.$$

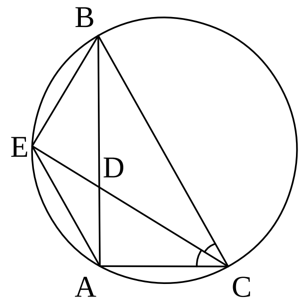
Решая полученное квадратное уравнение и отбрасывая отрицательный корень, получаем $|KC| = 2$.

Ответ. 2.

Задача 23.

Длина стороны AB треугольника ABC равна 3, E – точка пересечения продолжения биссектрисы CD треугольника ABC с описанной около него окружностью, $|BC| = 2 \cdot |AC|$, $|DE| = 1$. Найдите длину стороны AC.

Идея. Использовать теорему о продолжении биссектрисы треугольника до пересечения с описанной около него окружностью.
Указание. Используя свойство биссектрисы и соотношение $|BC| = 2 \cdot |AC|$, найти $|AD|$ и $|DB|$.
Указание. Используя теорему косинусов для треугольников ADE и BDE, найти величину угла ADE, $|AE|$ и $|BE|$.



Указание. Используя подобие треугольников ADE и EAC, найти $|AC|$.

Решение. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $|AD| : |DB| = |AC| : |BC| = 1 : 2$. С другой стороны, $|AD| + |DB| = |AB| = 3$, поэтому $|AD| = 1$, $|DB| = 2$.

Далее из того, что CE – биссектриса угла ACB, вытекает, что $|AE| = |BE|$, а треугольник ADE подобен треугольнику EAC (так как $\widehat{EAD} = \widehat{ECA}$). Обозначим величину угла ADE за α и воспользуемся теоремой косинусов для треугольников ADE и BDE:

$$\begin{cases} |AE|^2 = |AD|^2 + |DE|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |DE| \cdot \cos \widehat{ADE}, \\ |BE|^2 = |BD|^2 + |DE|^2 - 2 \cdot |BD| \cdot |DE| \cdot \cos \widehat{BDE} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} |AE|^2 = 2 - 2\cos\alpha, \\ |BE|^2 = 5 - 4\cos(\pi - \alpha) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{1}{2},\ |AE| = |BE| = \sqrt{3}.$$

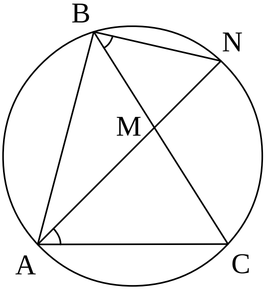
Наконец, подобие треугольников ADE и EAC даёт нам

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|DE|}{|AC|} \quad \Longleftrightarrow \quad |AC| = \frac{|AE| \cdot |DE|}{|AD|} = \sqrt{3}.$$

Ответ. $\sqrt{3}$.

Задача 24.

В треугольнике ABC $\widehat{BAC} = 5\pi/12$, $|AB| = c$, $|AC| = b$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\widehat{BAM} = \pi/6$. Продолжение прямой AM пересекает окружность, описанную вокруг треугольника, в точке N. Найдите длину отрезка AN.



Идея. Использовать свойство вписанных углов, теорему синусов и теорему косинусов.

Указание. Используя теорему косинусов для треугольника ABC, найти длину отрезка BC и значения косинуса и синуса величины угла ABC.

Указание. Применить к треугольникам ABC и ABN теорему синусов.

Решение. При решении этой задачи можно рассуждать, например, так: в треугольнике ABC нам известны три элемента, поэтому мы можем найти длину радиуса описанной около него окружности. Треугольник ABN также вписан в неё, поэтому для нахождения длины AN нам надо найти синус величины угла ABN. Поступим следующим образом: сначала с помощью теоремы косинусов найдём длину отрезка BC и значения косинуса и синуса величины угла ABC:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\cos\widehat{BAC} \Longrightarrow |BC| = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\frac{5\pi}{12}};$$

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad b^2 = c^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos\frac{5\pi}{12} - 2c\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\frac{5\pi}{12}}\cdot\cos\widehat{ABC}\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \cos\widehat{ABC} = \frac{c-b\cos\frac{5\pi}{12}}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\frac{5\pi}{12}}}\quad\Longrightarrow\quad \sin\widehat{ABC} = \frac{b\sin\frac{5\pi}{12}}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\frac{5\pi}{12}}}.$$

Далее, так как вписанные углы CAN и CBN опираются на одну дугу, а величина угла CAN равна разности величин углов BAC и BAN, то $\widehat{CAN} = \widehat{CBN} = \pi/4$,

$$\sin\widehat{ABN} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\widehat{ABC}\right) = \frac{c-b\cos\frac{5\pi}{12}+b\sin\frac{5\pi}{12}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\frac{5\pi}{12}}}.$$

Наконец, применяя к треугольникам ABC и ABN теорему синусов, получаем

$$R = \frac{|BC|}{2\cdot\sin\widehat{BAC}} = \frac{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\frac{5\pi}{12}}}{2\sin\frac{5\pi}{12}}.$$

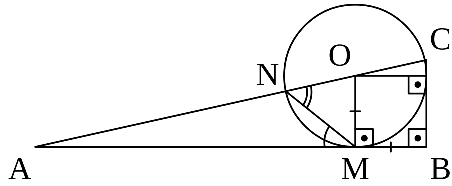
$$|AN| = 2R\cdot\sin\widehat{ABN} = \frac{c-b\cos\frac{5\pi}{12}+b\sin\frac{5\pi}{12}}{\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}} = \frac{c+\frac{b\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} = \frac{2c+\sqrt{2}b}{\sqrt{3}+1}.$$

Ответ. $\dfrac{2c+\sqrt{2}b}{\sqrt{3}+1}$.

Задача 25.

Окружность с центром в точке O, лежащей на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC, касается его катетов AB и BC. Найдите длину AC, если известно, что $|AM| = 20/9$, $|AN| : |MN| = 6 : 1$, где M – точка касания AB с окружностью, а N – точка пересечения окружности с AC, расположенная между точками A и O.

Идея. Обозначить величину угла AMN за α и, используя свойство углов между касательной и хордой, выразить угол MAN через α.



Указание. Применив теорему синусов для треугольника AMN, найти α.
Указание. Используя соотношения в прямоугольном треугольнике, найти $|AC|$.

Решение. Для нахождения $|AC|$ достаточно найти $|BM|$ и $\cos\widehat{BAC}$. Поскольку M – точка касания окружности и AB, то треугольник AOM прямоугольный, поэтому угол MOA – острый и $\widehat{MAO} = \pi/2 - \widehat{MOA}$. По свойству угла между касательной и хордой $\widehat{AMN} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MN} = \frac{1}{2}\widehat{MOA}$. Обозначим величину угла AMN за α, тогда $\widehat{MOA} = 2\alpha$, $2\alpha < \pi/2 \implies \alpha < \pi/4$, и применим к треугольнику AMN теорему синусов:

$$\frac{|AN|}{\sin\widehat{AMN}} = \frac{|MN|}{\sin\widehat{MAN}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|AN|}{|MN|} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad 6\cos 2\alpha = \sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad 12\sin^2\alpha + \sin\alpha - 6 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{2}{3}\,; \\ \sin\alpha = -\dfrac{3}{4}\,. \end{array}\right.$$

Второй из полученных корней нам, очевидно, не подходит, так как синус угла треугольника всегда положителен. Таким образом, с учётом того, что $\alpha < \pi/4$, получаем $\alpha = \arcsin 2/3$ и, следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \cos\widehat{BAC} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{4\sqrt{5}}{9}, \quad \operatorname{tg}\widehat{BAC} = \frac{1}{4\sqrt{5}}.$$

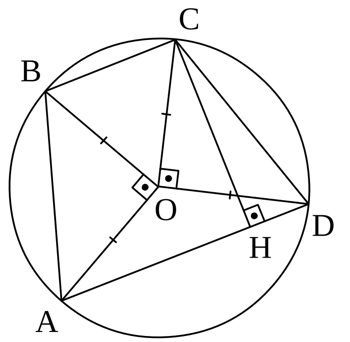
Наконец, примем во внимание тот факт, что $|MO| = |MB|$. Это вытекает из того, что четырёхугольник, образованный точками касания окружности с катетами, точкой O и точкой B, – квадрат. С учётом этого из треугольника AOM получаем $|MO| = |MB| = |AM|\operatorname{tg}\widehat{BAC} = \sqrt{5}/9$. Наконец,

$$|AB| = |AM| + |MB| = \frac{20 + \sqrt{5}}{9}, \quad |AC| = \frac{|AB|}{\cos\widehat{BAC}} = \sqrt{5} + \frac{1}{4}.$$

Ответ. $\sqrt{5} + \dfrac{1}{4}$.

Задача 26.

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Радиус OA перпендикулярен радиусу OB, а радиус OC перпендикулярен радиусу OD. Длина перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD, равна 9, $|AD| = 2|BC|$. Найдите площадь треугольника AOB.



И д е я. Использовать свойство вписанных углов и соотношения в прямоугольном треугольнике.

У к а з а н и е. Обозначив $\widehat{BOC}=\alpha$, из равнобедренных треугольников BOC и AOD, используя соотношение $|AD|=2|BC|$, найти α.

У к а з а н и е. Используя свойство вписанного угла, найти $\widehat{ADC}$. Далее, используя соотношения в прямоугольном треугольнике, найти длину радиуса окружности.

Р е ш е н и е. Поскольку величины углов AOB, BOC, COD и DOA в сумме дают 2π, а углы AOB и COD – прямые, то $\widehat{BOC}+\widehat{DOA}=\pi$. Введём обозначения $\widehat{BOC}=\alpha$, $|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=R$, тогда $\widehat{DOA}=\pi-\alpha$. Из равнобедренных треугольников BOC и AOD получаем

$$\begin{cases} |BC|=2\cdot|OB|\cdot\sin\left(\dfrac{1}{2}\widehat{BOC}\right)=2R\sin\dfrac{\alpha}{2}, \\ |AD|=2\cdot|OD|\cdot\sin\left(\dfrac{1}{2}\widehat{DOA}\right)=2R\sin\left(\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right) \end{cases} \implies \quad 2=\frac{|AD|}{|BC|}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Далее, по свойству вписанного угла

$$\widehat{ADC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}+\frac{1}{2}\widehat{BOC}=\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}.$$

Теперь обозначим буквой H основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD. По условию задачи $|CH|=9$, и из прямоугольного треугольника CDH мы легко находим $|CD|=|CH|/\sin\widehat{CDH}=9/\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Прямоугольные треугольники AOB и COD, очевидно, равны и являются равнобедренными. Поэтому $|AB|=|CD|$, $\widehat{ABO}=\widehat{BAO}=\pi/4$,

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\cdot|AB|^2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{81}{4\sin^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}=\frac{81}{2-2\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)}.$$

Осталось чуть-чуть посчитать:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=2 \quad\implies\quad \sin\alpha=\frac{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4}{5}, \quad 2-2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2+2\sin\alpha=\frac{18}{5}.$$

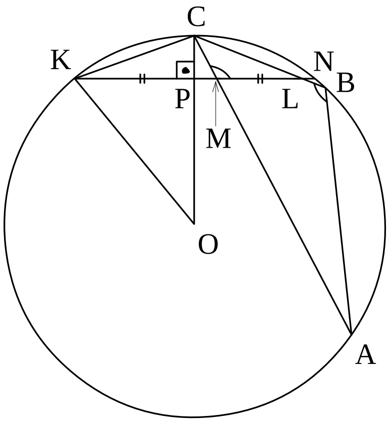
Значит, $S_{\triangle AOB}=\dfrac{45}{2}$.

О т в е т. $\dfrac{45}{2}$.

Задача 27.

В треугольнике ABC $|AB|=3$, $\widehat{ACB}=\arcsin\frac{3}{5}$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает отрезки AC и BC в точках M и L

соответственно. Известно, что $\widehat{ABC} = \widehat{CML}$, площадь четырёхугольника $ABLM$ равна 2, $|LM| = 1$. Найдите длину высоты треугольника KNC, опущенной из вершины C, и площадь этого треугольника.



Идея. Использовать подобие, леммы о площадях, свойство вписанных углов и углов между хордами, теорему синусов и теорему Пифагора.

Указание. Используя подобие треугольников ABC и LMC (по двум углам) и леммы о площадях, найти длину высоты треугольника KNC, опущенной из вершины C.

Указание. Используя свойство угла между пересекающимися хордами и свойство вписанного угла, доказать, что треугольник KNC – равнобедренный.

Указание. Используя теорему синусов и теорему Пифагора, найти сторону KN треугольника KNC.

Решение. Заметим, что из равенства величин углов ABC и CML вытекает подобие треугольников ABC и LMC (по двум углам). Из этого следует, что

$$\frac{S_{\triangle LMC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{|LM|}{|AB|}\right)^2 = \frac{1}{9};\ S_{\triangle LMC}+S_{ABLM} = S_{\triangle ABC} \Longrightarrow S_{\triangle LMC} = \frac{1}{4},\ S_{\triangle ABC} = \frac{9}{4}.$$

Теперь мы в состоянии ответить на первый вопрос задачи. Ясно, что высоты треугольников KNC и LMC, опущенные из вершины C, совпадают. Поэтому, обозначая основание искомой высоты буквой P, с помощью формулы площади мы находим $|CP| = 2S_{\triangle LCM}/|LM| = \frac{1}{2}$. После этого для нахождения площади треугольника KNC нам достаточно найти длину его стороны KN. Для этого сначала докажем, что треугольник KNC — равнобедренный. Воспользуемся свойством угла между пересекающимися хордами и свойством вписанного угла:

$$\widehat{CMN} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{NC} + \overset{\frown}{AK}\right), \quad \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AK} + \overset{\frown}{CK}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \overset{\frown}{CK} = \overset{\frown}{NC} \quad \Longrightarrow \quad |CK| = |NC|.$$

Таким образом, высота CP является и медианой треугольника KNC, то есть серединным перпендикуляром к стороне KN. Центр окружности тоже лежит на этой прямой. Тогда, обозначая его буквой O, получаем $|OK| = \dfrac{|AB|}{2\sin\widehat{ACB}} = \dfrac{5}{2}$,

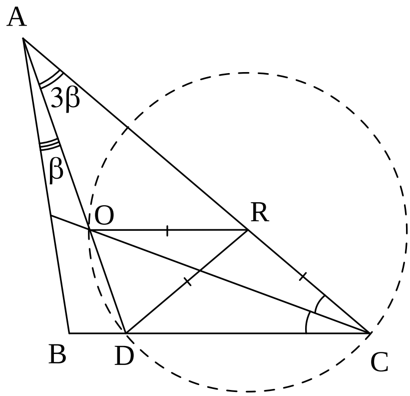
$$|OP| = |OK| - |KP| = 2, \quad |KP| = |PN| = \sqrt{|OK|^2 - |OP|^2} = \frac{3}{2}.$$

Стало быть, $|KN| = 3$, $S_{\triangle KNC} = \frac{1}{2} \cdot |KN| \cdot |CP| = \frac{3}{4}$.

Ответ. $h_{KN} = \dfrac{1}{2}$, $S_{\triangle KNC} = \dfrac{3}{4}$.

Задача 28.

В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC, прямая AD пересекается с биссектрисой угла ACB в точке O. Известно, что точки C, D и O лежат на окружности, центр которой находится на стороне AC, величина угла DAC в три раза больше величины угла DAB, $|AC| : |AB| = 3 : 2$. Найдите косинус величины угла ACB.



И д е я. Использовать свойство вписанных углов и теорему синусов.

У к а з а н и е. Обозначив величину угла ACB за 2α, используя свойство вписанных углов, выразить все углы треугольника ABC через α.

У к а з а н и е. Применить теорему синусов для треугольника ABC.

Р е ш е н и е. Поскольку дано отношение сторон в треугольнике ABC, а требуется найти косинус угла против одной из этих сторон, то надо выразить угол, лежащий против другой стороны, через искомый угол и применить теорему синусов.

Обозначим центр окружности, проходящей через точки C, D и O, буквой R. Величину угла ACB обозначим за 2α, величину угла BAC обозначим за 4β. Тогда, по условию задачи, $\widehat{OCD} = \widehat{OCA} = \alpha$, $\widehat{CAD} = 3\beta$.

Далее, углы OCD и ORD являются вписанным и центральным углами, опирающимися на дугу OD. Значит, $\widehat{ORD} = 2 \cdot \widehat{OCD} = 2\alpha$. С другой стороны, $|RC| = |RD| = |RO|$, то есть треугольники RCD и ROD — равнобедренные. Это даёт нам следующие соотношения:

$$\widehat{RCD} = \widehat{RDC} = 2\alpha, \quad \widehat{RDO} = \widehat{ROD} = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{ORD}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Теперь воспользуемся теоремой о сумме величин углов треугольника:

$$\widehat{RCD} + \widehat{RDC} + \widehat{RDO} + \widehat{OAR} = \pi \implies 2\alpha + 2\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha + 3\beta = \pi \implies \alpha + \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Исходя из этого, получаем $\widehat{BAC} = 4\beta = \dfrac{2\pi}{3} - 4\alpha$, $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{BAC} - \widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{3} + 2\alpha$. Наконец, воспользуемся теоремой синусов:

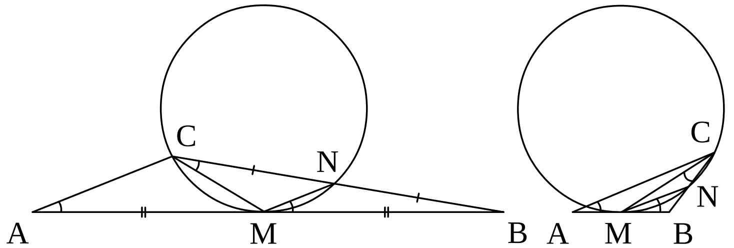
$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{|AC|}{\sin\widehat{ABC}} \iff \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{ACB}} \implies \frac{\sin(\frac{\pi}{3} + 2\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{3}{2} \implies$$

$$\implies 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) = 3\sin 2\alpha \implies \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \cos 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

О т в е т. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Задача 29.

В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность, проведённая через точки M, N и C, касается стороны AB, а длина её радиуса равна $\sqrt{2}$. Найдите $\sin\widehat{ACB}$, если $|AC| = 2$.



Идея. Использовать свойство средней линии треугольника, свойство вписанных углов, углов между касательной и хордой, подобие и теорему синусов.

Указание. Доказать, что $\widehat{BAC} = \widehat{BMN} = \widehat{MCN}$. Для этого применить свойство средней линии треугольника, свойства вписанных углов и углов между касательной и хордой.

Указание. Записав для треугольника MCN теорему синусов, найти $\sin\widehat{BAC}$.

Указание. Используя подобие треугольников MBN и CBM (по двум углам), показать, что $|AB| = \sqrt{2}|BC|$.

Указание. Применить к ΔABC теорему синусов для нахождения $\sin\widehat{ACB}$.

Решение. Поскольку MN – средняя линяя треугольника ABC, соединяющая стороны AB и BC, то $MN||AC$, $|MN| = |AC|/2 = 1$. Теперь заметим, что углы BMN и BAC равны как соответственные при параллельных прямых, а углы BMN и MCN равны по свойству угла между касательной и хордой. Применив к треугольнику MCN теорему синусов, находим

$$\sin\widehat{BAC} = \sin\widehat{MCN} = \frac{|MN|}{2R_{\text{окружности}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Из всего вышесказанного также вытекает и подобие треугольников MBN и CBM (по двум углам). Из этого подобия получаем

$$\frac{|BM|}{|BC|} = \frac{|BN|}{|BM|} \Longleftrightarrow |BM|^2 = |BC|\cdot|BN| \Longleftrightarrow \frac{|AB|^2}{4} = \frac{|BC|^2}{2} \Longleftrightarrow |AB| = \sqrt{2}|BC|.$$

Наконец, применим к треугольнику ABC теорему синусов:

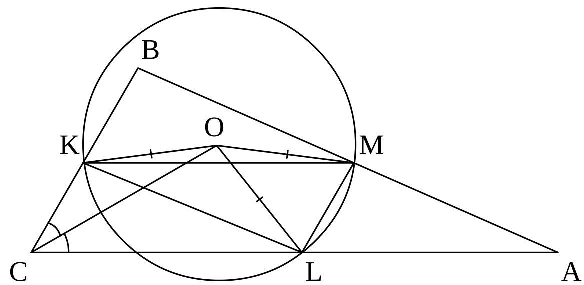
$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BAC}} \quad\Longrightarrow\quad \sin\widehat{ACB} = \frac{|AB|}{|BC|}\cdot\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Существует два различных треугольника ABC, удовлетворяющих условию задачи. У одного из них $\widehat{ACB} = \pi/6$, а у другого $\widehat{ACB} = 5\pi/6$. Оба они изображены на чертеже. Отметим, что приведённое решение не зависело от конфигурации.

Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

Задача 30.

В треугольнике ABC длина стороны BC равна 4, а длина стороны AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проведённой через середины сторон треугольника ABC, лежит на биссектрисе угла C. Найдите длину стороны AC.



Идея. Использовать свойство вписанных углов, теоремы синусов и косинусов, свойство средней линии треугольника и неравенство треугольника.

Указание. Обозначить середины сторон AC, BC и AB треугольника ABC буквами L, K и M соответственно, центр окружности, проходящей через эти точки, обозначим буквой O. Используя теорему синусов для треугольников KOC и LOC, показать, что $\sin\widehat{OKC} = \sin\widehat{OLC}$.

Указание. При рассмотрении случая $\widehat{OKC} = \widehat{OLC}$ показать, что равны треугольники KOC и LOC (по стороне и двум углам). Использовать неравенство треугольника при изучении получившегося результата.

Указание. При анализе случая $\widehat{OKC} + \widehat{OLC} = \pi$, показать, что $\widehat{KCL} = \pi/3$.

Решение. Обозначим середины сторон AC, BC и AB треугольника ABC буквами L, K и M соответственно, центр окружности, проходящей через эти точки, обозначим буквой O. Запишем теорему синусов для треугольников KOC и LOC, заметив, что у них много равных элементов ($|OK| = |OL|$, $\angle OCK = \angle OCL$):

$$\frac{|OK|}{\sin\widehat{OCK}} = \frac{|OC|}{\sin\widehat{OKC}}, \quad \frac{|OL|}{\sin\widehat{OCL}} = \frac{|OC|}{\sin\widehat{OLC}} \quad \Longrightarrow \quad \sin\widehat{OKC} = \sin\widehat{OLC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{OKC} = \widehat{OLC} \text{ или } \widehat{OKC} + \widehat{OLC} = \pi.$$

Разберем поочерёдно эти варианты. Если углы OKC и OLC равны, то равны и треугольники KOC и LOC (по стороне и двум углам). Из этого вытекает, что $|CK| = |CL| \iff |AC| = |BC| = 4$. Но тогда $|AC| + |BC| = 8 < 2\sqrt{19} = |AB|$, то есть для треугольника ABC не выполнено неравенство треугольника. Стало быть, величины углов OKC и OLC в сумме дают π.

Теперь заметим, что поскольку сумма величин углов четырёхугольника $CKOL$ равна 2π, то и $\widehat{KCL} + \widehat{KOL} = \pi$. Это соотношение является ключевым. Действительно, из того, что KM и LM – средние линии треугольника ABC, следует, что четырёхугольник $CKML$ – параллелограмм. Поэтому $\widehat{KML} = \widehat{KCL}$. А так как угол KOL – центральный, то $\widehat{KOL} = 2\cdot\widehat{KML}$. С учётом всего этого имеем

$$\widehat{KCL} + 2\cdot\widehat{KCL} = \pi \quad \Longrightarrow \quad \widehat{KCL} = \frac{\pi}{3}.$$

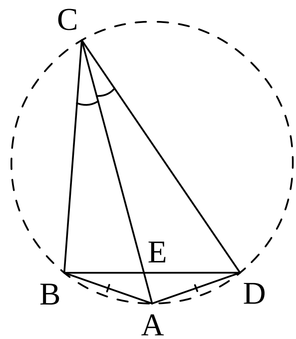
Дальнейшее очевидно. Запишем теорему косинусов для треугольника ABC:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ACB} \implies$$
$$\implies 76 = |AC|^2 + 16 - 4 \cdot |AC| \implies |AC| = 10.$$

Ответ. 10.

Задача 31.

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, CA – биссектриса угла C, $|AB| = |AD|$, $\widehat{BAD} = 7\pi/9$, $\widehat{BEA} = 11\pi/18$. Найдите величину угла CDB.



Идея. Использовать свойство вписанных углов, свойство биссектрисы и свойство серединного перпендикуляра к отрезку.
Указание. Описать окружность вокруг треугольника BCD и доказать, что точка A совпадает с серединой дуги BD.
Указание. Используя свойство вписанных углов, свойство вертикальных углов и свойство суммы углов треугольника, найти величину угла CDB.

Решение. Опишем окружность вокруг треугольника BCD. Так как $|AB| = |AD|$, то точка A и середина дуги BD лежат на биссектрисе угла BCD и на серединном перпендикуляре к отрезку BD. Поэтому точка A совпадает с серединой дуги BD. Значит, $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi$. Тогда

$$\widehat{BCD} = \pi - \widehat{BAD} = \frac{2\pi}{9}, \quad \widehat{ECD} = \frac{1}{2}\widehat{BCD} = \frac{\pi}{9}, \quad \widehat{CED} = \widehat{BEA} = \frac{11\pi}{18}.$$

Следовательно, из треугольника CED получаем

$$\widehat{CDB} = \widehat{CDE} = \pi - \widehat{ECD} - \widehat{CED} = \pi - \frac{\pi}{9} - \frac{11\pi}{18} = \frac{5\pi}{18}.$$

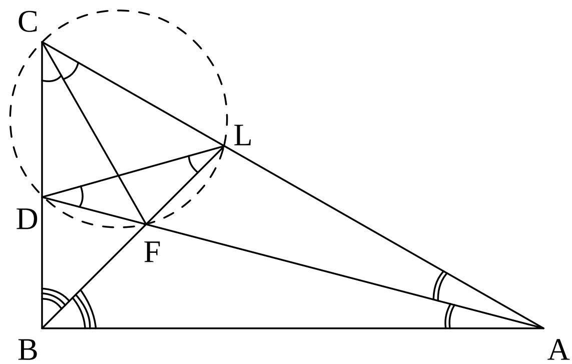
Ответ. $\dfrac{5\pi}{18}$.

Задача 32.

В треугольнике ABC биссектриса AD угла A и биссектриса BL угла B пересекаются в точке F. При этом оказалось, что $\widehat{LFA} = \pi/3$.

1. Найдите величину угла ACB.
2. Зная, что $|AB| = 2$, $\widehat{CLD} = \pi/4$, найдите площадь треугольника ABC.

Идея. Использовать свойство внешнего угла треугольника и определение биссектрисы угла. Использовать теорему о четырёх точках, свойство вписанных углов, свойство суммы углов треугольника.



Указание. Используя свойство внешнего угла треугольника и определение биссектрисы угла, найти величину угла ACB.

Указание. Используя теорему о четырёх точках, показать, что четырехугольник $DFLC$ вписан в окружность.

Решение. Ответить на первый вопрос задачи просто: обозначим величины углов BAC и ABC за 2α и 2β. Тогда $\widehat{ABF} = \beta$, $\widehat{BAF} = \alpha$, $\widehat{ACB} = \pi - 2\alpha - 2\beta$. Угол LFA – внешний угол треугольника ABF, поэтому

$$\widehat{LFA} = \widehat{ABF} + \widehat{BAF} \quad \Longrightarrow \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \widehat{ACB} = \pi - (2\alpha + 2\beta) = \frac{\pi}{3}.$$

Для ответа на второй вопрос задачи заметим, что угол DFL – смежный с углом LFA, значит, его величина равна $2\pi/3$ и $\widehat{DFL} + \widehat{DCL} = \pi$. Поскольку точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой DL, а точка C в этой полуплоскости не лежит, то точки C и F находятся в разных полуплоскостях относительно прямой DL. Таким образом, выполнены все условия теоремы о четырёх точках и вокруг четырехугольника $DFLC$ можно описать окружность.

Далее, точка F – точка пересечения биссектрис, поэтому CF – биссектриса угла ACB, $\widehat{ACF} = \widehat{BCF} = \pi/6$. По свойствам вписанных углов величина угла FLD тоже равна $\pi/6$. С учётом этого находим

$$\widehat{CLB} = \widehat{CLD} + \widehat{FLD} = \frac{5\pi}{12}, \quad \widehat{CBL} = \pi - \widehat{CLB} - \widehat{BCL} = \frac{\pi}{4}, \quad \widehat{ABC} = 2 \cdot \widehat{CBL} = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, треугольник ABC – прямоугольный. Из него мы легко находим

$$|BC| = |AB| \operatorname{ctg} \widehat{ACB} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

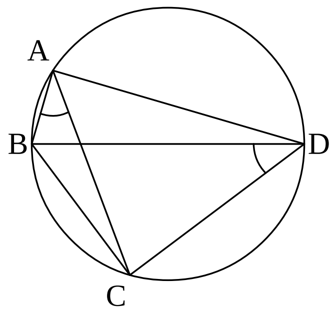
Ответ. $\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{3}$, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Задача 33.

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. При этом оказалось, что $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, а площадь круга, описанного около треугольника BCD, равна $25\pi/4$.

1. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ABC.

2. Зная, что $|BC| = 3$, $|AC| = 4$, $\widehat{BAD} = \pi/2$, найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.



Идея. Использовать теорему синусов. Использовать теорему о четырёх точках, свойство вписанных углов, теоремы косинусов и Пифагора.

Указание. Используя теорему синусов, показать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников BCD и ABC, равны.

Указание. Используя теорему о четырёх точках, показать, что вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность, для которой BD – диаметр.

Указание. Искать площадь четырёхугольника $ABCD$ как сумму площадей двух прямоугольных треугольников ABD и BCD. При этом использовать теоремы косинусов и Пифагора.

Решение. Сначала ответим на первый вопрос задачи. Поскольку

$$R_{\triangle BCD} = \frac{|BC|}{2\sin\widehat{BDC}}; \quad R_{\triangle ABC} = \frac{|BC|}{2\sin\widehat{BAC}},$$

то, очевидно, длины радиусов окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, равны. Применяя формулу площади круга, получаем

$$R_{\triangle ABC} = R_{\triangle BCD} = \sqrt{\frac{S_{\text{круга}}}{\pi}} = \frac{5}{2}.$$

Для ответа на второй вопрос задачи заметим, что поскольку четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, то точки A и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC. Стало быть, выполнены все условия теоремы о четырёх точках, поэтому четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность.

Дальнейший ход решения достаточно прост. Так как $\widehat{BAD} = \pi/2$, то BD – диаметр этой окружности. Длина её радиуса нами уже найдена в пункте 1, стало быть, $|BD| = 5$. Исходя из этого угол BCD также прямой (он опирается на диаметр). Поэтому проще всего искать площадь четырёхугольника $ABCD$ как сумму площадей двух прямоугольных треугольников ABD и BCD.

Из прямоугольного треугольника BCD имеем $|CD| = 4$, $\cos\widehat{BDC} = 4/5$. С учётом того, что $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, запишем теорему косинусов для треугольника ABC:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\cos\widehat{BAC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 9 = |AB|^2 + 16 - \frac{32}{5}|AB| \quad \Longrightarrow \quad 5|AB|^2 - 32|AB| + 35 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} |AB| = 5\,, \\[2mm] |AB| = \dfrac{7}{5}. \end{array}\right.$$

Первый из этих вариантов нам не подходит, поскольку длина катета прямоугольного треугольника должна быть меньше длины его гипотенузы. Наконец,

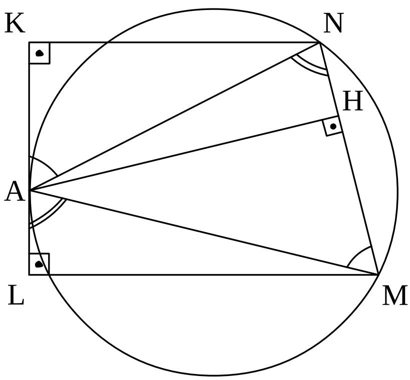
$$|AD| = \sqrt{|BD|^2 - |AB|^2} = \frac{24}{5}, \quad S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AD| = \frac{84}{25},$$

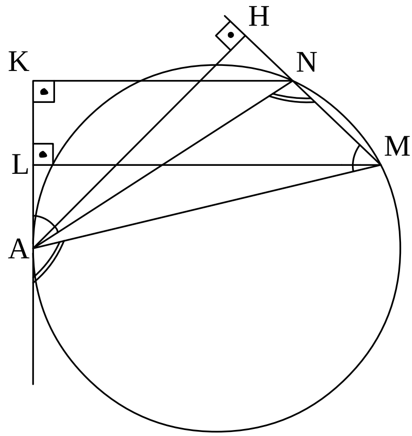
$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|CD| = 6, \quad S_{ABCD} = 6 + \frac{84}{25} = \frac{234}{25}.$$

Ответ. $R_{\triangle ABC} = \dfrac{5}{2}$, $S_{ABCD} = \dfrac{234}{25}$.

Задача 34.

В трапеции $KLMN$ $LM||KN$, $\widehat{KLM} = \pi/2$. Окружность проходит через точки M и N и касается прямой KL в точке A. Найдите площадь треугольника AMN, если известно, что $|LM| = l$, $|KN| = k$, $|MN| = a$.





Идея. Использовать свойства вписанных углов, углов между касательной и хордой и подобие треугольников.
Указание. Показать, что подобны пары треугольников KAN и HMA, LAM и HNA, где H – основание высоты, опущенной из точки A.
Указание. Не забудьте рассмотреть все случаи касания окружности с прямой KL.

Решение. Поскольку мы знаем длину отрезка MN, то для нахождения площади треугольника AMN нам необходимо найти длину его высоты, опущенной из точки A. Обозначим основание этой высоты буквой H.

Далее нам придётся рассмотреть два случая: точка A может либо попасть на отрезок KL, либо не попасть. Если она на него попадает, то, во-первых, углы KAN и LAM будут обязательно острыми, поскольку диаметр, проходящий через точку A, лежит между прямыми KN и LM, и, во-вторых, по свойству угла между касательной и хордой,

$$\widehat{KAN} = \widehat{AMN}, \quad \widehat{LAM} = \widehat{ANM}.$$

Из всего этого вытекает, что точка H обязательно попадает на отрезок MN и, кроме того, подобие пар треугольников KAN и HMA, LAM и HNA. Из этих подобий вытекает

$$\frac{|KN|}{|AH|} = \frac{|AN|}{|AM|}, \quad \frac{|LM|}{|AH|} = \frac{|AM|}{|AN|}.$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$\frac{|KN| \cdot |LM|}{|AH|^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |AH| = \sqrt{|KN| \cdot |LM|} = \sqrt{kl},$$

$$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot |AH| = \frac{a\sqrt{kl}}{2}.$$

Теперь разберем случай, когда точка A не попадает на отрезок KL. Для определенности будем считать, что L лежит между A и K. Тогда углы KAN и LAM снова будут обязательно острыми и, по свойству угла между касательной и хордой, выполнено

$$\widehat{KAN} = \widehat{AMN}, \quad \pi - \widehat{LAM} = \widehat{ANM}.$$

Значит, угол AMN – тупой, точка H попадает на продолжение отрезка MN за точку N, поэтому $\widehat{ANH} = \pi - \widehat{ANM} = \widehat{LAM}$. Итак, мы опять получили подобие пар треугольников KAN и HMA, LAM и HNA. Дальнейшие вычисления проводятся аналогично.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{a^2kl}}{2}$.

Задача 35.

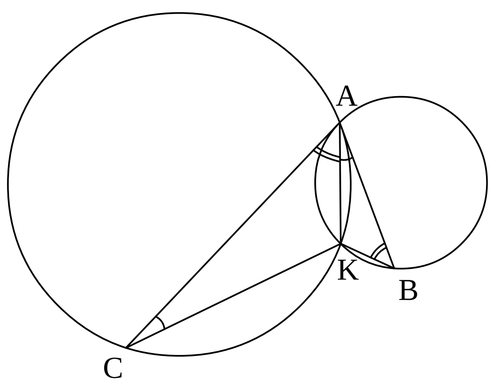
Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. $|BK| = 1$, $|CK| = 4$, а тангенс величины угла CAB равен $1/\sqrt{15}$. Найдите площадь треугольника ABC.

Идея. Использовать свойства вписанных углов и углов между касательной и хордой, подобие, свойство суммы углов треугольника, теорему косинусов.

Указание. Используя свойство вписанных углов и углов между касательной и хордой, показать, что треугольники ACK и BAK подобны по двум углам. Найти $|AK|$.

Указание. Используя теорему о сумме величин углов треугольника, показать, что $\widehat{AKB} = \widehat{AKC} = \pi - \widehat{CAB}$.

Указание. Пользуясь теоремой косинусов для треугольников BAK и ACK, найти $|AB|$ и $|AC|$.



Решение. Обозначим величины углов BAK и CAK за α и β соответственно. По свойству угла между касательной и хордой $\widehat{BAK} = \widehat{ACK}$, $\widehat{CAK} = \widehat{ABK}$. Из этого следует, что треугольники ACK и BAK подобны по двум углам. С учётом этого получаем

$$\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|CK|}{|AK|} \iff |AK|^2 = |BK| \cdot |CK| \implies |AK| = 2.$$

Далее заметим, что

$$\widehat{CAB} = \widehat{BAK} + \widehat{CAK} = \alpha + \beta \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad \Longrightarrow \quad \cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{15}}{4};$$

$$\widehat{AKB} = \pi - \widehat{BAK} - \widehat{ABK} = \pi - (\alpha+\beta), \quad \widehat{AKC} = \pi - \widehat{CAK} - \widehat{ACK} = \pi - (\alpha+\beta).$$

Теперь воспользуемся теоремой косинусов для треугольников BAK и ACK:

$$|AB|^2 = |AK|^2 + |KB|^2 - 2\cdot|AK|\cdot|KB|\cdot\cos\widehat{AKB} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |AB|^2 = 5 - 4\cos(\pi - (\alpha+\beta)) = 5 + 4\cos(\alpha+\beta) \quad \Longrightarrow \quad |AB| = \sqrt{5+\sqrt{15}};$$

$$|AC|^2 = |AK|^2 + |KC|^2 - 2\cdot|AK|\cdot|KC|\cdot\cos\widehat{AKC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |AC|^2 = 20 - 16\cos(\pi-(\alpha+\beta)) \quad \Longrightarrow \quad |AC| = 2\sqrt{5+\sqrt{15}}.$$

Наконец,

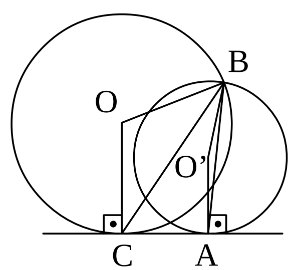
$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{4}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\widehat{CAB} = \frac{5+\sqrt{15}}{4}.$$

О т в е т. $\dfrac{5+\sqrt{15}}{4}$.

Задача 36.

В треугольнике ABC величина угла B равна $\pi/6$. Через точки A и B проведена окружность, длина радиуса которой равна 2, касающаяся прямой AC в точке A. Через точки B и C проведена окружность, длина радиуса которой равна 3, касающаяся прямой AC в точке C. Найдите $|AC|$.

И д е я. Использовать свойство вписанных углов и углов между касательной и хордой, теорему синусов.



У к а з а н и е. Обозначить центр окружности, длина радиуса которой равна 3, буквой O, центр другой окружности обозначить за O', величину угла BAC обозначить буквой α. Используя свойство вписанных углов и углов между касательной и хордой, выразить углы $AO'B$ и BOC через α.

У к а з а н и е. Выразить $|AB|$ и $|BC|$ через α. Записывая в треугольнике ABC теорему синусов, найти $R_{\triangle ABC}$.

Р е ш е н и е. Обозначим центр окружности, длина радиуса которой равна 3, буквой O, центр другой окружности обозначим за O', величину угла BAC обозначим буквой α. Тогда $\widehat{ACB} = \pi - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 5\pi/6 - \alpha$.

По свойству угла между касательной и хордой величина угла $AO'B$ треугольника $AO'B$ будет равна либо 2α (если $\alpha < \pi/2$), либо $2\pi - 2\alpha$ (если $\alpha > \pi/2$).

Рассуждая аналогично, получаем, что величина угла BOC треугольника BOC равна либо $5\pi/3-2\alpha$, либо $2\alpha+\pi/3$. Тем не менее, независимо от этих вариантов

$$|BC|=2|OB|\cdot\sin\left(\frac{\widehat{BOC}}{2}\right)=6\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right),\ |AB|=2|O'B|\cdot\sin\left(\frac{\widehat{AO'B}}{2}\right)=4\sin\alpha.$$

Записывая в треугольнике ABC теорему синусов, получаем

$$2R_{\triangle ABC}=\frac{|AB|}{\sin\widehat{ACB}}=\frac{|BC|}{\sin\widehat{BAC}}\implies 2R_{\triangle ABC}=\frac{4\sin\alpha}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)}=\frac{6\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin\alpha}\implies$$

$$\implies\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)}\right)^2=\frac{3}{2}\implies\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)}=\sqrt{\frac{3}{2}}\implies R_{\triangle ABC}=2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}.$$

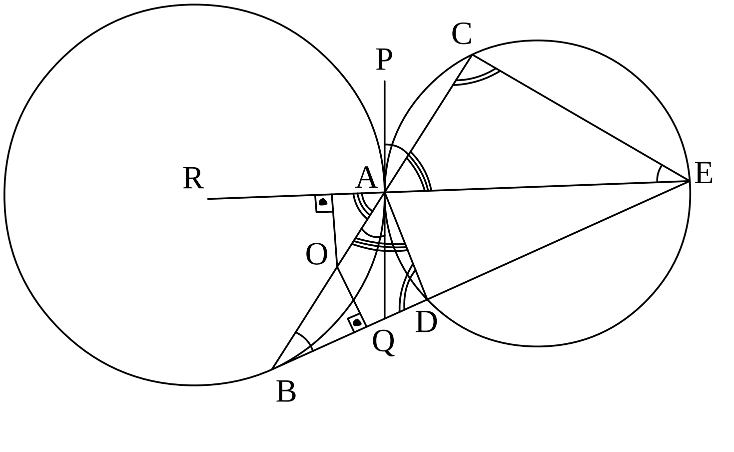
И, наконец, по теореме синусов находим

$$|AC|=2\cdot R_{\triangle ABC}\cdot\sin\widehat{ABC}=\sqrt{6}.$$

Ответ. $\sqrt{6}$.

Задача 37.

Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке B, а вторую – в точке C. Касательная к первой окружности, проходящая через точку B, пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $|AB|=5$ и $|AC|=4$. Найдите длину отрезка CE и расстояние от точки A до центра окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.



Идея. Использовать свойства вписанных углов и углов между касательной и хордой, подобие, свойство биссектрисы треугольника.

Указание. Используя свойство вписанных углов и углов между касательной и хордой, доказать подобие треугольников BEC и EAC. Найти длину отрезка CE.
Указание. Показать, что центр окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно, лежит на отрезке AB.
Указание. Использовать свойство биссектрисы треугольника и подобие треугольников BDA и BCE для нахождения требуемого расстояния.

Решение. Проведём общую касательную PQ к окружностям, проходящую через точку A ($Q \in [BE]$, $A \in [PQ]$). Тогда по свойству угла между касательной и хордой $\widehat{ABQ} = \widehat{BAQ} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$. С другой стороны, углы BAQ и PAC равны как вертикальные и опять-таки по свойству угла между касательной и хордой $\widehat{PAC} = \widehat{CEA}$. Таким образом, мы доказали равенство углов ABE и AEC, что даёт нам подобие треугольников BEC и EAC, из которого мы получаем

$$\frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|CE|}{|BC|} \quad \Longleftrightarrow \quad |CE|^2 = |AC| \cdot |BC| = 4 \cdot (5+4) \quad \Longrightarrow \quad |CE| = 6.$$

Со вторым пунктом дело обстоит несколько сложнее. Обозначим центр окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A, буквой O, на продолжении EA за A возьмем точку R. Тогда

$$\widehat{BAD} = \pi - \widehat{CAD} = \widehat{BEC} = \widehat{CAE},$$

последнее равенство следует из доказанного выше подобия треугольников BEC и EAC. Углы CAE и BAR равны как вертикальные. Поэтому луч AB является биссектрисой угла RAD.

Поскольку окружность, расстояние от центра которой до точки A мы ищем, вписана в угол RAD, то её центр лежит на биссектрисе этого угла, то есть на луче AB. Но она также вписана и в угол BDA, значит, её центр лежит на отрезке AB.

Так как DO – биссектриса треугольника ABD, то по свойству биссектрисы и используя подобие треугольников BDA и BCE получаем

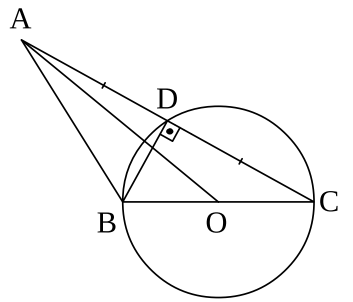
$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|CE|} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad |OA| = \frac{2}{5}|AB| = 2.$$

Ответ. $|CE| = 6$, $d = 2$.

2.2. Касательные, хорды, секущие

Задача 1.

На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC, как на диаметре, построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D. Найдите расстояние от её центра до точки A, если $|AD| = \sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 2\pi/3$.



Идея. Определить, какая из сторон треугольника ABC является его основанием, воспользоваться свойством угла, опирающегося на диаметр.

Указание. Найти длины всех сторон треугольника.

Указание. Воспользоваться теоремой косинусов для треугольника ABO, где O – центр окружности.

Решение. Заметим, что угол ABC – тупой, поэтому он не может быть углом при основании равнобедренного треугольника ABC. Стало быть, AC – его основание, $|AB| = |BC|$, $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \pi/6$.

Далее, поскольку BC – диаметр окружности, то угол BDC – прямой. Таким образом, BD – высота равнобедренного треугольника ABC, проведённая к его основанию. Поэтому она также является медианой и биссектрисой треугольника ABC, то есть $|AD| = |DC|$, $|AC| = 2|AD| = 2\sqrt{3}$.

Наконец, из прямоугольного треугольника BCD получаем

$$|BC| = \frac{|DC|}{\cos\widehat{DCB}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2.$$

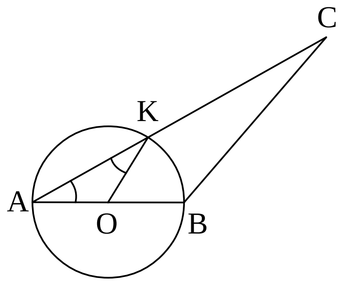
Итак, в треугольнике ABC нам известны длины всех его сторон: $|AB| = |BC| = 2$, $|AC| = 2\sqrt{3}$. Обозначим центр окружности буквой O, тогда O – середина отрезка BC. Воспользуемся теоремой косинусов для треугольника ABO:

$$|AO|^2 = |AB|^2 + |BO|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BO|\cdot\cos\widehat{ABO} = 7 \quad\Longrightarrow\quad |AO| = \sqrt{7}.$$

Ответ. $\sqrt{7}$.

Задача 2.

В треугольнике ABC $|AB| = 4$, градусные меры углов BAC и ABC равны 30° и 130° соответственно. На стороне AB, как на диаметре, построен круг. Найдите площадь части этого круга, лежащей внутри треугольника ABC.



Идея. Доказать, что сторона BC не имеет общих точек с кругом, отличных от точки B. Искомую площадь представить в виде суммы простых фигур.
Указание. Представить искомую площадь в виде суммы площадей треугольника AOK и сектора BOK, где O – центр круга, K — точка пересечения окружности и стороны AC.

Решение. Поскольку градусная мера угла ABC равна 130°, то отрезок BC не имеет общих точек с кругом, отличных от точки B. Обосновать этот факт просто: если предположить противное, то, обозначая точку пересечения отрезка BC и окружности буквой R, мы получим, что угол ARB – прямой и тогда $\widehat{ARB}+\widehat{ABR}>180^\circ$, что невозможно. Отрезок же AC, напротив, пересекает окружность. Точку их пересечения обозначим буквой K, а буквой O обозначим центр окружности.

Искомую площадь, очевидно, можно найти как сумму площадей треугольника AOK и сектора BOK. Треугольник AOK – равнобедренный, $|AO|=|OK|=2$, $\widehat{OAK}=\widehat{AKO}=30^\circ$, $\widehat{AOK}=120^\circ$. Тогда $\widehat{BOK}=60^\circ$,

$$S_{\triangle AOK}=\frac{1}{2}\cdot|AO|\cdot|OK|\cdot\sin 120^\circ=\sqrt{3},\ S_{\text{сектора}BOK}=\frac{1}{2}\cdot\frac{60^\circ\cdot\pi}{180^\circ}\cdot|OB|^2=\frac{2\pi}{3}.$$

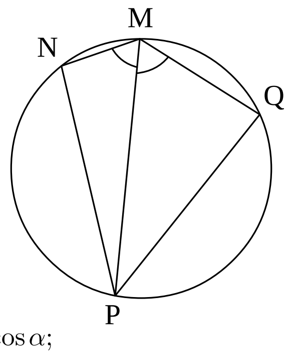
Осталось сложить полученные значения и выписать ответ.

Ответ. $\dfrac{3\sqrt{3}+2\pi}{3}$.

Задача 3.

Из точки M на окружности проведены три хорды MN, MP и MQ таким образом, что $|MN|=1$, $|MP|=6$, $|MQ|=2$. При этом величины углов NMP и PMQ равны. Найдите длину радиуса этой окружности.

Идея. Доказать, что $|NP|=|PQ|$.
Указание. Воспользоваться теоремами синусов и косинусов.



Решение. Обозначим величины углов NMP и PMQ за α. Поскольку треугольники MNP и MPQ вписаны в одну и ту же окружность, то, используя теорему синусов для этих треугольников, мы сразу получаем, что $|NP|=|PQ|=2R\sin\alpha$ (за R обозначена длина радиуса окружности).

Запишем теорему косинусов для этих треугольников:

$$|NP|^2=|MN|^2+|MP|^2-2\cdot|MN|\cdot|MP|\cdot\cos\widehat{NMP}=37-12\cos\alpha;$$

$$|PQ|^2=|MQ|^2+|MP|^2-2\cdot|MQ|\cdot|MP|\cdot\cos\widehat{PMQ}=40-24\cos\alpha.$$

Приравнивая правые части полученных соотношений, находим, что

$$\cos\alpha = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad |NP| = \sqrt{34} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{|NP|}{2\sin\alpha} = 2\sqrt{\frac{34}{15}}.$$

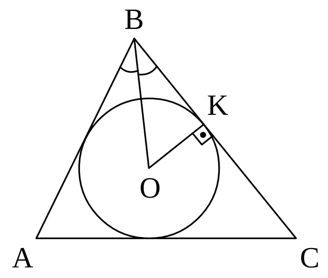
Ответ. $2\sqrt{\dfrac{34}{15}}$.

Задача 4.

В треугольнике ABC с периметром $2p$ длина стороны AC равна a и величина острого угла ABC равна α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK.

Идея. Воспользоваться теоремой о длинах отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, делит его стороны и тем, что центр этой окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника.

Указание. Найти длину отрезка BK, затем рассмотреть прямоугольный треугольник BOK.



Решение. Пользуясь теоремой о длинах отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, делит его стороны, находим

$$|BK| = p_{\triangle ABC} - |AC| = p - a.$$

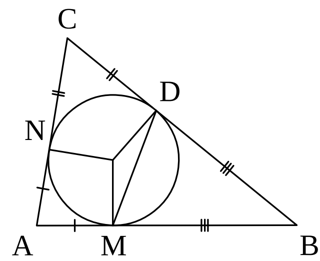
Далее, O – центр вписанной в треугольник ABC окружности, поэтому BO – биссектриса угла ABC. Таким образом, $\widehat{OBK} = \alpha/2$. Наконец, K – точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC, и стороны BC, поэтому $OK \perp BC$, и из прямоугольного треугольника BOK находим

$$|OK| = |BK| \cdot \operatorname{tg}\widehat{BOK} = (p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|BK|\cdot|OK| = \frac{1}{2}(p-a)^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{2}(p-a)^2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Задача 5.

В треугольник ABC вписана окружность, которая касается его сторон AB, BC и AC в точках M, D и N соответственно. Вычислите длину отрезка MD, если известно, что $|NA| = 2$, $|NC| = 3$, $\widehat{BCA} = \pi/3$.



Идея. Воспользоваться теоремой о равенстве длин отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки.
Указание. Обозначить $|BD| = |BM| = x$. Воспользоваться теоремой косинусов для треугольника ABC, найти x и $\cos\widehat{ABC}$.

Решение. Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны, то

$$|AM| = |AN| = 2, \quad |CN| = |CD| = 3, \quad |BD| = |BM|.$$

Обозначим длины отрезков BD и BM за x и запишем теорему косинусов для треугольника ABC:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|AC|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ACB} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad (x+2)^2 = 25+(x+3)^2-5(x+3) \quad\Longrightarrow\quad x=5 \quad\Longrightarrow\quad |AB|=7, \quad |BC|=8.$$

Теперь ещё два раза воспользуемся теоремой косинусов для треугольников ABC и BDM:

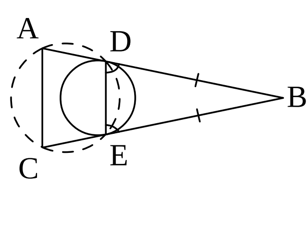
$$|AC|^2 = |AB|^2+|BC|^2-2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC} \quad\Longrightarrow\quad \cos\widehat{ABC} = \frac{49+64-25}{2\cdot7\cdot8} = \frac{11}{14};$$

$$|MD|^2 = |BM|^2+|BD|^2-2\cdot|BD|\cdot|BM|\cdot\cos\widehat{ABC} \quad\Longrightarrow\quad |MD| = \sqrt{50-\frac{550}{14}} = 5\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Ответ. $5\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Задача 6.

Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E. Найдите длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A, если $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, а точки A, D, E и C лежат на одной окружности.



Идея. Выяснить, что даёт то, что точки A, D, E и C лежат на одной окружности.
Указание. Воспользоваться теоремой о равенстве длин отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, и свойством выпуклого четырёхугольника, вписанного в окружность.
Указание. Для нахождения длины высоты воспользоваться двумя формулами площади треугольника.

Решение. Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны, то $|BD| = |BE|$, значит, треугольник BDE – равнобедренный, из чего вытекает $\widehat{BDE} = \widehat{BED}$. Далее, четырёхугольник $ADEC$ – выпуклый и вписан в окружность, поэтому $\widehat{ADE}+\widehat{ACE} = \widehat{DAC}+\widehat{DEC}$.

А так как углы ADE и DEC – смежные с равными углами BDE и BED, то их величины также равны. Значит, равны и величины углов ACE и DAC, то есть треугольник ABC – равнобедренный, $|AB| = |BC| = 5$.

Наконец, найдём длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A, с помощью формул площади:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p_{\triangle ABC}(p_{\triangle ABC} - |AB|)(p_{\triangle ABC} - |BC|)(p_{\triangle ABC} - |AC|)} = 2\sqrt{6};$$

$$h_{BC} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|BC|} = \frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

Ответ. $\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$.

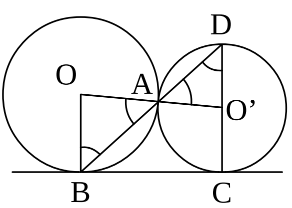
Задача 7.

Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Их общая касательная касается первой окружности в точке B, а второй – в точке C. Прямая, проходящая через точки A и B, пересекает вторую окружность в точке D. Известно, что $|AB| = 5$, $|AD| = 4$. Найдите $|CD|$.

Идея. Доказать, что $CD \perp BC$.

Указание. Обозначить центры окружностей буквами O и O'. Рассмотрев равнобедренные треугольники AOB и $AO'D$, доказать, что $OB || O'D$.

Указание. Воспользоваться теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части.



Решение. Обозначим центр первой окружности буквой O, а центр второй – буквой O'. Заметим, что треугольник AOB равнобедренный ($|AO| = |OB|$), поэтому $\angle OAB = \angle OBA$. Треугольник $AO'D$ тоже равнобедренный ($|AO'| = |O'D|$), значит, $\angle O'AD = \angle O'DA$. Далее, поскольку окружности касаются друг друга, то точки O, A и O' лежат на одной прямой, то есть углы OAB и $O'AD$ – вертикальные.

Из всех этих рассуждений следует, что $\angle OBA = \angle O'DA$. Эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых OB и $O'D$ и секущей BD, значит, $OB || O'D$. Тогда с учётом того, что $OB \perp BC$, мы получаем, что $O'D \perp BC$, но $O'C \perp BC$, поскольку C – точка касания. Поэтому точки D, O' и C лежат на одной прямой и треугольник BDC – прямоугольный.

Теперь воспользуемся теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части:

$$|BC|^2 = |BD| \cdot |BA| \quad \Longrightarrow \quad |BC|^2 = (|AB| + |AD|) \cdot |AB| = 45.$$

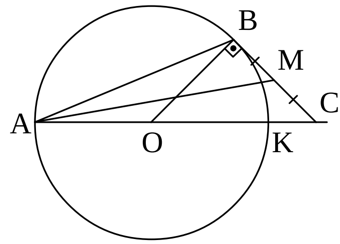
Наконец, запишем теорему Пифагора для треугольника BCD:

$$|CD|^2 = |BD|^2 - |BC|^2 = 81 - 45 \quad \Longrightarrow \quad |CD| = 6.$$

Ответ. 6.

Задача 8.

В окружности, длина радиуса которой равна 4, проведены хорда AB и диаметр AK, причём $\widehat{BAK} = \pi/8$. В точке B проведена касательная к этой окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C. Найдите длину медианы AM треугольника ABC.



Идея. Найти величины углов треугольника ABC.
Указание. Воспользоваться тем, что треугольник AOB – равнобедренный, где O – центр окружности.
Указание. Воспользоваться теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части. Применить теорему косинусов.

Решение. Обозначим центр окружности буквой O, середину отрезка BC обозначим буквой M. Тогда $|AO| = |OB| = |OK| = 4$, треугольник AOB – равнобедренный. Значит,

$$\widehat{BAO} = \widehat{OBA} = \frac{\pi}{8}, \quad \widehat{BOK} = \widehat{BAO} + \widehat{OBA} = \frac{\pi}{4}, \quad \widehat{AOB} = \frac{3\pi}{4}.$$

Поскольку $BC \perp OB$, то $\widehat{BCO} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BOK} = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, треугольник OBC – тоже равнобедренный, $|BC| = |OB| = 4$. По свойству секущей получаем: $|CK| \cdot |CA| = |CB|^2 \quad \Longrightarrow$

$$|CK|^2 + 8|CK| - 16 = 0 \quad \Longrightarrow \quad |CK| = 4\sqrt{2} - 4 \quad \Longrightarrow \quad |AC| = 4 + 4\sqrt{2}.$$

Наконец, пользуясь теоремой косинусов, найдём $|AM|$ из треугольника ACM:

$$|AM|^2 = |AC|^2 + |CM|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |CM| \cdot \cos\widehat{ACM} = 36 + 24\sqrt{2} \quad \Longrightarrow$$

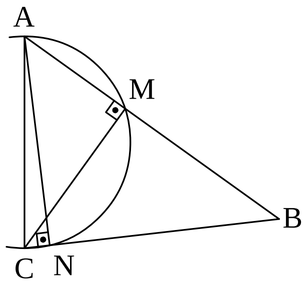
$$\Longrightarrow \quad |AM| = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}.$$

Ответ. $2(\sqrt{6} + \sqrt{3})$.

Задача 9.

В треугольнике ABC на стороне AC, как на диаметре, построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке M и сторону BC в точке N. Известно, что длина отрезка AB равна 3, длина отрезка AC равна 2, $|AM| : |MB| = 2 : 3$. Найдите длину отрезка AN.

Идея. Воспользоваться тем, что вписанные углы, опирающиеся на диаметр окружности, являются прямыми.
Указание. Рассмотреть прямоугольные треугольники AMC, BMC и ANB.



Р е ш е н и е. По условию задачи AC – диаметр окружности, поэтому углы AMC и ANC – прямые. Найдём длины отрезков AM и MB: пусть $|AM| = 2x$, тогда $|MB| = 3x$, $|AB| = 3 = |AM| + |MB| = 5x \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow x = \frac{3}{5},\ |AM| = \frac{6}{5},\ |MB| = \frac{9}{5}.$$

Теперь рассмотрим прямоугольные треугольники AMC, BMC и ANB:

$$|MC|^2 = |AC|^2 - |AM|^2 = 4 - \frac{36}{25} = \frac{64}{25} \quad \Longrightarrow \quad |MC| = \frac{8}{5};$$

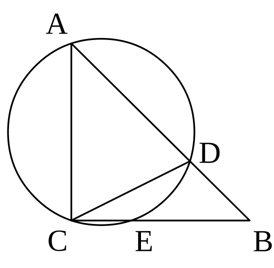
$$|BC|^2 = |MB|^2 + |MC|^2 = \frac{81}{25} + \frac{64}{25} = \frac{145}{25} \quad \Longrightarrow \quad |BC| = \frac{\sqrt{145}}{5};$$

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{|MC|}{|BC|} = \frac{8}{\sqrt{145}}, \quad |AN| = |AB| \cdot \sin\widehat{ABC} = \frac{24}{\sqrt{145}}.$$

О т в е т. $\dfrac{24}{\sqrt{145}}$.

Задача 10.

Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E. Найдите величину угла CDB, если $|AD| = 5$, $|AC| = 2\sqrt{7}$, $|BE| = 4$, $|BD| : |CE| = 3 : 2$.



И д е я. Воспользоваться теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части.
У к а з а н и е. Применить теорему косинусов к треугольникам ADC и BDC.

Р е ш е н и е. Обозначим $|BD| = 3x$, $|CE| = 2x$ и воспользуемся теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части: $|BD| \cdot |BA| = |BE| \cdot |BC| \quad \Longrightarrow$ $3x \cdot (3x + 5) = 4 \cdot (4 + 2x) \quad \Longrightarrow \quad x = 1, \ \ |BC| = 6, \ \ |AB| = 8.$ Обозначим $\widehat{CDB} = \alpha, |CD| = y$ и запишем теорему косинусов для треугольников BDC и ADC:

$$\left\{ \begin{array}{l} |BC|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BD| \cdot |CD| \cdot \cos\alpha, \\ |AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |CD| \cdot \cos(\pi - \alpha); \end{array} \right. \quad \Longrightarrow$$

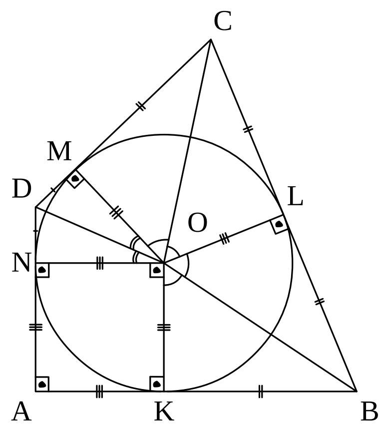
$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 36 = 9 + y^2 - 6y \cdot \cos\alpha, \\ 28 = 25 + y^2 + 10y \cdot \cos\alpha; \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad y = 3\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Значит, $\widehat{CDB} = \arccos\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

О т в е т. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Задача 11.

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, длина радиуса которой равна 2. Угол DAB прямой, $|AB| = 5$, $|BC| = 6$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.



И д е я. Использовать свойство касательных и формулу площади выпуклого четырёхугольника через полупериметр и радиус вписанной окружности.

У к а з а н и е. Используя свойство касательных и тот факт, что величина полного угла равна 2π, найти длины всех сторон четырёхугольника.

Р е ш е н и е. Обозначим центр вписанной в четырёхугольник $ABCD$ окружности буквой O, точки её касания со сторонами AB, BC, CD и AD обозначим буквами K, L, M и N соответственно. Тогда, во-первых, $OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp CD$, $ON \perp AD$, во-вторых, $|AK| = |AN|$, $|BK| = |BL|$, $|CL| = |CM|$, $|DM| = |DN|$ и, в-третьих, $|OK| = |OL| = |OM| = |ON| = 2$.

Из этих фактов и из условия задачи вытекает, что $AKON$ – квадрат. Действительно, у этого четырёхугольника три угла – прямые, следовательно, прямой и четвёртый его угол, поэтому он – прямоугольник. А раз у него равны две соседние стороны, то он – квадрат. Из этого мы получаем, что $|AK| = |AN| = 2$, тогда $|BK| = |BL| = 3$ и $|CL| = |CM| = 3$ и, кроме того, $\widehat{KON} = \pi/2$.

Теперь для ответа на вопрос задачи нам достаточно найти длины отрезков DM и DN, после чего воспользоваться тем фактом, что площадь любого выпуклого многоугольника, описанного около окружности, равна произведению длины радиуса этой окружности и его полупериметра.

Треугольники KBO, LBO, LCO и MCO равны между собой (по двум катетам). Поэтому равны между собой углы KOB, LOB, LOC и MOC. Аналогично равны треугольники MOD и NOD, а, стало быть, равны между собой углы MOD и NOD. Положим $\widehat{KOB} = \alpha$, $\widehat{MOD} = \beta$.

Из треугольника KOB получаем $\operatorname{tg}\alpha = |BK| : |OK| = 3/2$. Далее, ясно, что

$$4\alpha + 2\beta + \frac{\pi}{2} = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{3\pi}{4} - 2\alpha \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\beta = -\frac{1 + \operatorname{tg}2\alpha}{1 - \operatorname{tg}2\alpha} = \frac{1 + 2\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1} = \frac{7}{17}.$$

Наконец, из треугольника DOM находим

$$|DM| = |OM|\operatorname{tg}\beta = 14/17, \quad |DN| = |DM| \quad \Longrightarrow$$

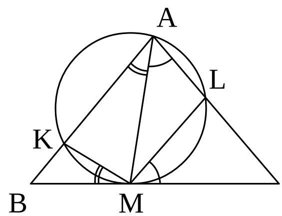
$$\Longrightarrow \quad P_{ABCD} = 2\cdot 2 + 4\cdot 3 + 2\cdot\frac{14}{17} = \frac{300}{17}, \quad S_{ABCD} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{300}{17} = \frac{300}{17}.$$

О т в е т. $\dfrac{300}{17}$.

Задача 12.

Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, касается стороны BC в точке M и пересекает стороны AC и AB в точках L и K соответственно. Найдите отношение $|AC|:|AB|$, если известно, что длина отрезка CL в два раза больше длины отрезка BK, $|CM|:|BM| = 3:2$.

Идея. Воспользоваться теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части.
Указание. Рассмотреть секущие BA и CA и касательные BM и CM.



Решение. Дважды применяя теорему о произведении длины секущей на длину её внешней части, получаем

$$\begin{cases} |AC|\cdot|CL| = |CM|^2, \\ |AB|\cdot|BK| = |BM|^2 \end{cases} \implies \frac{|AC|}{|AB|}\cdot\frac{|CL|}{|BK|} = \left(\frac{|CM|}{|BM|}\right)^2 \implies 2\cdot\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{9}{4}.$$

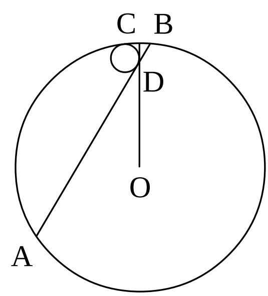
Таким образом, $|AC|:|AB| = 9:8$.

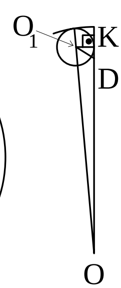
Ответ. $9:8$.

Задача 13.

В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причём величина угла ADC равна $2\pi/3$. Найдите длину радиуса окружности, касающейся отрезков AD, DC и дуги AC, если $|OC| = 2$, $|OD| = \sqrt{3}$.

Идея. Воспользоваться тем, что центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе и тем, что точка касания двух окружностей и их центры лежат на одной прямой.
Указание. Рассмотреть треугольник OO_1K, где O_1 – центр окружности, касающейся отрезков AD, DC и дуги AC, а K – точка касания этой окружности отрезка DC.
Указание. Воспользоваться тем, что DO_1 – биссектриса угла ACD, а длина отрезка OO_1 равна разности длин радиусов окружностей.





Решение. Обозначим центр окружности, касающейся отрезков AD, DC и дуги AC, буквой O_1. Поскольку эта окружность касается отрезков AD и DC, то она вписана в угол ADC, стало быть, её центр лежит на биссектрисе этого угла. С учётом этого, обозначив буквой K точку касания этой окружности с отрезком DC, мы получаем, что величина угла O_1DK равна половине величины угла ADC, то есть $\pi/3$.

С другой стороны, окружности из условия задачи касаются друг друга, поэтому их центры и точка касания лежат на одной прямой. Таким образом, длина отрезка OO_1 может быть вычислена как разность длин радиусов окружностей.

Обозначим искомую длину буквой x. Тогда, исходя из вышесказанного,

$$|OO_1| = 2 - x, \quad |O_1K| = x, \quad |DK| = |O_1K| \cdot \operatorname{ctg} \widehat{O_1DK} = \frac{x}{\sqrt{3}},$$

$$|OK| = |OD| + |DK| = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x+3}{\sqrt{3}}.$$

Записывая для треугольника OO_1K теорему Пифагора, получаем

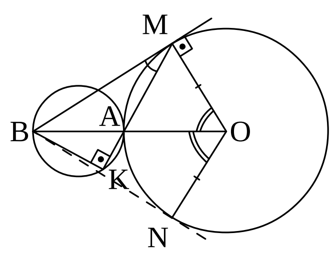
$$|OO_1|^2 = |O_1K|^2 + |OK|^2 \quad \Longrightarrow \quad (2-x)^2 = x^2 + \frac{1}{3}(x+3)^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 18x - 3 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня $x_{1,2} = -9 \pm 2\sqrt{21}$, из которых нам подходит только положительный.

Ответ. $2\sqrt{21} - 9$.

Задача 14.

Две окружности с радиусами разной длины касаются в точке A одной и той же прямой и расположены по разные стороны от неё. Отрезок AB – диаметр окружности меньшего радиуса. Из точки B проведены две прямые, касающиеся окружности большего радиуса в точках M и N. Прямая, проходящая через точки M и A, пересекает меньшую окружность в точке K. Известно, что $|MK| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\widehat{BMA} = \pi/12$. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных BM, BN и той дугой MN большей окружности, которая не содержит точку A.



Идея. Воспользоваться свойством угла между касательной и секущей, найти длину радиуса большей окружности.

Указание. Рассмотреть прямоугольные треугольники MKB и MOB, искомую площадь представить как сумму площадей треугольников BOM, BON и площади сектора MON.

Решение. Обозначим центр окружности большего радиуса буквой O. По теореме о величине угла между касательной и секущей угол BMA измеряется половиной дуги AM. Таким образом, мера дуги AM равна $\pi/6$. С другой стороны, центральный угол AOM измеряется дугой AM, поэтому $\widehat{AOM} = \pi/6$.

Далее, поскольку угол AKB опирается на диаметр меньшей окружности, то он прямой. Из прямоугольного треугольника MKB получаем

$$|BM| = \frac{|MK|}{\cos \widehat{BMK}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{2})^2}}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 2.$$

Так как BM – касательная к окружности большего радиуса, то угол BMO – прямой. Из прямоугольного треугольника BMO находим

$$|OM| = R = |BM|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{BOM} = 2\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}.$$

Наконец, искомую площадь можно представить как сумму площадей треугольников BOM и BON и сектора MON, не содержащего точку A. Треугольники BOM и BON, очевидно, равны, поэтому

$$S_{\triangle BOM} + S_{\triangle BON} = 2S_{\triangle BOM} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot|BM|\cdot|OM| = 4\sqrt{3}.$$

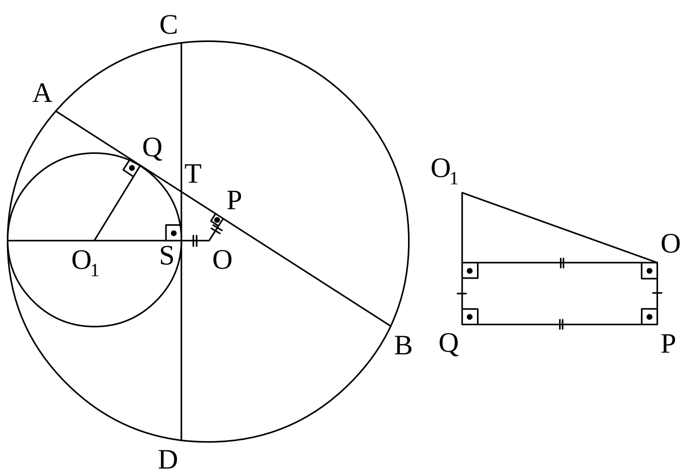
Величина угла MON (опирающегося на дугу MN, содержащую точку A) равна удвоенной величине угла BOM, то есть $\pi/3$, поэтому величина центрального угла сектора, площадь которого нам надо найти, равна $2\pi-\pi/3$, то есть $5\pi/3$. Исходя из этого,

$$S_{\text{сектора } MON} = R^2\cdot\frac{\frac{5\pi}{3}}{2} = (2\sqrt{3})^2\cdot\frac{5\pi}{6} = 10\pi.$$

Ответ. $4\sqrt{3}+10\pi$.

Задача 15.

Две окружности, длины радиусов которых относятся как $(9-4\sqrt{3}):1$, касаются друг друга внутренним образом. Проведены две равные по длине хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найдите величину угла между этими хордами.



Идея. Рассмотреть четырёхугольник, образованный центрами окружностей и их проекциями на хорду, не перпендикулярную отрезку, соединяющему центры окружностей. Доказать, что один из его углов равен искомому.
Указание. Выразить длины сторон четырёхугольника, образованного центрами окружностей и их проекциями на хорду, не перпендикулярную отрезку, соединяющему центры окружностей, через длину радиуса меньшей окружности.
Указание. Доказать, что равные хорды окружности равноудалены от её центра.

Решение. Обозначим хорду, перпендикулярную отрезку, соединяющему центры окружностей, CD, а вторую хорду – AB. Центр большей окружности обозначим буквой O, меньшей окружности – O_1.

Обозначим радиус меньшей окружности за R, тогда радиус большей окружности равен $(9-4\sqrt{3})R$. Заметим, что $(9-4\sqrt{3})R > 2R$, поэтому точка O лежит вне меньшей окружности.

Пусть S – точка пересечения меньшей окружности с отрезком OO_1. Тогда она является точкой касания меньшей окружности с хордой CD, поскольку в противном случае радиус меньшей окружности, соединяющий её центр с этой точкой касания, также перпендикулярен хорде CD, но из одной точки можно провести только один перпендикуляр к прямой.

Наконец, обозначим точку касания хорды AB с меньшей окружностью буквой Q, точку пересечения хорд буквой T и середину хорды AB буквой P, тогда $OP \perp AB$.

Так как величиной угла между отрезками (прямыми) называется величина острого или прямого угла, образованного ими, то в нашем случае это будет величина угла QTC, смежного с углом QTS. Поскольку сумма величин углов четырёхугольника равна 2π, из четырёхугольника O_1QTS вытекает, что величина угла QO_1S равна величине угла QTC. Поэтому будем искать $\widehat{QO_1S}$.

Поскольку $|AB| = |CD|$, то равны равнобедренные треугольники OAB и OCD (по трём сторонам). Из этого равенства вытекает, что равны и высоты этих треугольников, опущенные на стороны AB и CD, то есть $|OP| = |OS|$.

Теперь проведём некоторые подсчёты. Ясно, что

$$|O_1Q| = |O_1S| = R, \quad |OP| = |OS| = (9-4\sqrt{3})R - 2R = (7-4\sqrt{3})R,$$

$$|OO_1| = (9-4\sqrt{3})R - R = (8-4\sqrt{3})R.$$

Из четырёхугольника POO_1Q находим (см. отдельный чертёж), что

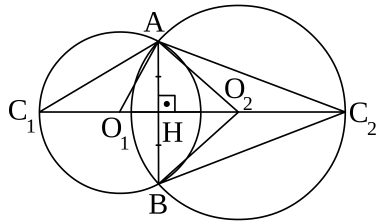
$$\cos\widehat{OO_1Q} = \frac{|O_1Q| - |OP|}{|OO_1|} = \frac{R-(7-4\sqrt{3})R}{(8-4\sqrt{3})R} = \frac{(4\sqrt{3}-6)R}{(8-4\sqrt{3})R} = \frac{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому величина угла OO_1Q, а, следовательно, и искомого угла равна $\pi/6$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{6}$.

Задача 16.

Две окружности, длины радиусов которых равны 6 и 8, пересекаются в точках A и B. Через центры O_1 и O_2 этих окружностей проведена прямая; C_1 и C_2 – две из четырёх точек пересечения этой прямой с окружностями, причём точка C_1 лежит на окружности с центром O_1, а длина отрезка C_1C_2 больше 20. Найдите расстояние между точками O_1 и O_2, если произведение площадей треугольников C_1O_1A и C_2O_2B равно 336.



Идея. Воспользоваться тем, что общая хорда двух окружностей перпендикулярна прямой, соединяющей их центры, и делится ею пополам.
Указание. Выяснить порядок расположения точек O_1, O_2, C_1 и C_2.
Указание. Выразить площади треугольников C_1O_1A и C_2O_2B через длину хорды AB и длины радиусов окружностей.

Решение. Всего, очевидно, возможно четыре варианта взаимного расположения точек C_1 и C_2, однако под условие задачи подходит только один – тот, когда отрезок C_1C_2 содержит обе точки O_1 и O_2. В противном случае длина отрезка C_1C_2 не будет превышать удвоенную длину большего из радиусов окружностей, то есть 16.

Далее, поскольку отрезок AB перпендикулярен прямой O_1O_2 и делится ею пополам, то, обозначая за H точку их пересечения, получаем, что $|AH| = |BH|$ и, кроме того,

$$S_{\triangle C_1O_1A} = \frac{1}{2}\cdot|C_1O_1|\cdot|AH| = 3|AH|, \quad S_{\triangle C_2O_2B} = \frac{1}{2}\cdot|C_2O_2|\cdot|BH| = 4|BH|.$$

Пользуясь условием задачи, имеем $12\cdot|AH|\cdot|BH| = 336 \Longrightarrow |AH| = |BH| = 2\sqrt{7}$. После этого запишем теорему Пифагора для треугольников AO_1H и AO_2H:

$$|O_1H|^2 + |AH|^2 = |AO_1|^2 \quad \Longrightarrow \quad |O_1H| = 2\sqrt{2},$$
$$|O_2H|^2 + |AH|^2 = |AO_2|^2 \quad \Longrightarrow \quad |O_2H| = 6.$$

Наконец, ещё раз воспользуемся тем, что длина отрезка C_1C_2 больше 20. Вообще говоря, мы заранее не знаем, попадает ли точка H на отрезок O_1O_2. Поэтому возможно два варианта: либо точка H лежит на отрезке O_1O_2, либо точка H лежит вне отрезка O_1O_2. Первый из этих вариантов даёт нам

$$|O_1O_2| = |O_1H| + |O_2H| = 2\sqrt{2} + 6 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad |C_1C_2| = |C_1O_1| + |O_1O_2| + |C_2O_2| = 20 + 2\sqrt{2} > 20.$$

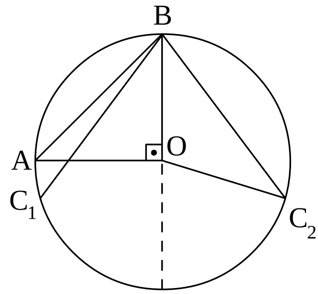
Для второго же варианта получаем

$$|O_1O_2| = |O_2H| - |O_1H| = 6 - 2\sqrt{2} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad |C_1C_2| = |C_1O_1| + |O_1O_2| + |C_2O_2| = 20 - 2\sqrt{2} < 20.$$

Ответ. $2\sqrt{2} + 6$.

Задача 17.

В круге, длина радиуса которого равна 1, проведены хорды AB и BC. Найдите площадь части этого круга, лежащей внутри угла ABC, если угол BAC острый, $|AB| = \sqrt{2}$ и $|BC| = 10/7$.



Идея. Искомую площадь представить в виде суммы простых фигур.

Указание. Доказать, что точки A и C лежат по разные стороны от прямой, проходящей через точку B и центр окружности (O). Найти площади треугольников AOB и BOC и площадь сектора AOC.

Решение. Обозначим центр круга буквой O. Заметим, что в треугольнике AOB $|AO| = |BO| = 1$, $|AB| = \sqrt{2}$, поэтому он прямоугольный и равнобедренный, и величина угла AOB равна $\pi/2$.

Проведём прямую через точки B и O. Она делит окружность на две равные дуги, точка A попадает на середину одной из них. Поскольку точка C удалена от точки B на расстояние, равное $10/7$, то точка C есть точка пересечения окружности с центром в точке B, длина радиуса которой равна $10/7$, и нашей исходной окружности. Ясно, что они пересекаются в двух точках, то есть точка C может лежать как на дуге, на которой лежит точка A (на рисунке этот вариант представлен точкой C_1), так и на дуге, на которой не лежит точка A (на рисунке этому варианту соответствует точка C_2). В первом из этих случаев вписанный угол BAC, очевидно, опирается на дугу, мера которой больше π, значит, его мера больше $\pi/2$, что противоречит условию, а во втором случае он опирается на дугу, мера которой меньше π, значит, его мера меньше $\pi/2$.

Итак, нам подходит случай, когда точки A и C лежат по разные стороны от прямой BO. Тогда искомая площадь может быть посчитана как сумма площадей треугольников AOB и BOC и сектора AOC. Сначала вычислим площади треугольников:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}, \quad p_{\triangle BOC} = \frac{12}{7}, \quad S_{\triangle BOC} = \sqrt{\frac{12}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7}} = \frac{10\sqrt{6}}{49}.$$

Теперь с помощью теоремы косинусов найдём величину угла BOC:

$$|BC|^2 = |BO|^2 + |OC|^2 - 2 \cdot |BO| \cdot |OC| \cdot \cos\widehat{BOC} \quad \Longrightarrow \quad \cos\widehat{BOC} = -\frac{1}{49}.$$

Тогда $\widehat{AOC} = 2\pi - \widehat{AOB} - \widehat{BOC} = \dfrac{3\pi}{2} - \arccos\left(-\dfrac{1}{49}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \arccos\left(\dfrac{1}{49}\right)$.

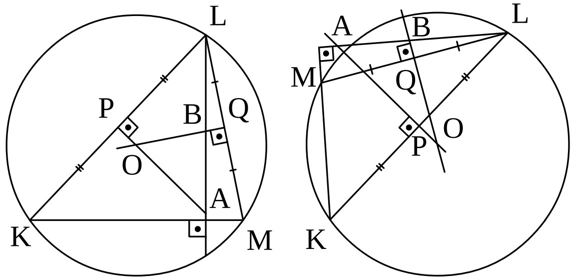
Наконец, $S_{\text{сектора}AOC} = 1^2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} + \arccos\left(\dfrac{1}{49}\right)\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{1}{49}\right)$.

Складывая полученные выражения, получаем ответ.

Ответ. $\dfrac{49 + 20\sqrt{6}}{98} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{1}{49}\right)$. Возможны и другие формы его записи.

Задача 18.

Длина радиуса окружности, описанной около треугольника KLM, равна R. Через вершину L проведена прямая, перпендикулярная стороне KM. Эту прямую пересекают в точках A и B серединные перпендикуляры к сторонам KL и LM. Известно, что $|AL| = a$. Найдите $|BL|$.



И д е я. Рассмотреть треугольники LAP и LBQ, P – середина KL, а Q – середина LM.

У к а з а н и е. Выразить произведение $|AL|\cdot|BL|$ через длины сторон KL и LM и синусы величин углов KLM и LKM. Использовать теорему синусов.

Р е ш е н и е. В этой задаче надо рассмотреть два случая: основание перпендикуляра, опущенного из вершины L на прямую KM, попадает на отрезок KM (левый чертёж) или не попадает (правый чертёж).

Обозначим середину отрезка KL буквой P, а середину отрезка LM – буквой Q. В первом случае из прямоугольных треугольников LAP и LBQ получаем

$$|AL| = \frac{|LP|}{\cos\widehat{ALP}} = \frac{\frac{1}{2}|KL|}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{LKM}\right)} = \frac{|KL|}{2\sin\widehat{LKM}};$$

$$|BL| = \frac{|LQ|}{\cos\widehat{BLQ}} = \frac{\frac{1}{2}|LM|}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{LMK}\right)} = \frac{|LM|}{2\sin\widehat{LMK}}.$$

Перемножая эти равенства, получаем $|AL|\cdot|BL| = \dfrac{|KL|\cdot|LM|}{2\sin\widehat{LKM}\cdot 2\sin\widehat{LMK}}$. Но по теореме синусов для треугольника KLM

$$\frac{|KL|}{\sin\widehat{LMK}} = 2R, \quad \frac{|LM|}{\sin\widehat{LKM}} = 2R \quad \Longrightarrow \quad |AL|\cdot|BL| = R^2 \quad \Longrightarrow \quad |BL| = \frac{R^2}{a}.$$

Во втором случае будем действовать абсолютно аналогично. Единственная разница с первым случаем возникнет при рассмотрении треугольников LAP и LBQ:

$$|AL| = \frac{|LP|}{\cos\widehat{ALP}} = \frac{\frac{1}{2}|KL|}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{LKM}\right)} = \frac{|KL|}{2\sin\widehat{LKM}};$$

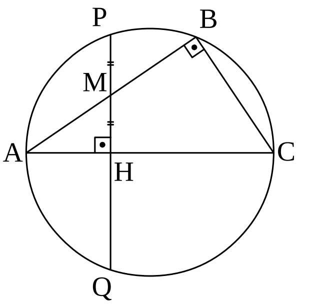
$$|BL| = \frac{|LQ|}{\cos\widehat{BLQ}} = \frac{\frac{1}{2}|LM|}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\pi - \widehat{LMK})\right)} = \frac{|LM|}{2\sin\widehat{LMK}}.$$

Дальнейшие выкладки полностью совпадают с первым случаем.

О т в е т. $\dfrac{R^2}{a}$.

Задача 19.

В окружности, длина радиуса которой равна R, проведены хорда AB и диаметр AC. Хорда PQ, перпендикулярная диаметру AC, пересекает хорду AB в точке M. Известно, что $|AB| = a$, $|PM| : |MQ| = 1 : 3$. Найдите длину отрезка AM.



Идея. Применить теорему о произведении длин отрезков пересекающихся хорд.

Указание. Найти величину угла BAC, выразить длины отрезков, на которые хорда PQ делит диаметр AC, через длину отрезка PM.

Указание. Применить теорему о произведении длин отрезков пересекающихся хорд AC и PQ.

Решение. Обозначим буквой H точку пересечения диаметра AC и хорды PQ, длину хорды PQ обозначим за $4x$. Поскольку $PQ \perp AC$, то $|PH| = |HQ| = 2x$. Из условия задачи вытекает, что $|PM| = x, |MQ| = 3x$, поэтому $|MH| = x$.

Угол ABC опирается на диаметр, поэтому он прямой. Из прямоугольного треугольника ABC, в котором нам известна длина гипотенузы $(2R)$ и длина катета (a), находим

$$|BC|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 \implies |BC| = \sqrt{4R^2 - a^2}; \quad \operatorname{ctg}\widehat{BAC} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{a}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник MAH:

$$|AH| = |MH| \cdot \operatorname{ctg}\widehat{MAH} = \frac{ax}{\sqrt{4R^2 - a^2}} \implies |HC| = |AC| - |AH| = 2R - \frac{ax}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Наконец, применим теорему о произведении длин отрезков пересекающихся хорд:

$$|AH| \cdot |HC| = |PH| \cdot |HQ| \implies \frac{ax}{\sqrt{4R^2 - a^2}} \cdot \left(2R - \frac{ax}{\sqrt{4R^2 - a^2}}\right) = 4x^2 \implies$$

$$\implies 2R = x\left(\frac{a}{\sqrt{4R^2 - a^2}} + \frac{4\sqrt{4R^2 - a^2}}{a}\right) \implies x = \frac{2aR\sqrt{4R^2 - a^2}}{16R^2 - 3a^2} = |MH|.$$

Осталось выразить AM. Для этого из треугольника ABC найдём

$$\sin\widehat{BAC} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$$

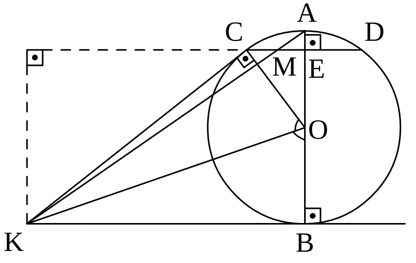
и из треугольника AMH находим

$$|AM| = \frac{|MH|}{\sin\widehat{MAH}} = \frac{4aR^2}{16R^2 - 3a^2}.$$

Ответ. $\dfrac{4aR^2}{16R^2 - 3a^2}$.

Задача 20.

Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E таким образом, что $|CE| = |DE|$. Через точки B и C проведены две касательные к этой окружности, которые пересекаются в точке K. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника CKM, если $|AB| = 10$, $|AE| = 1$.



И д е я. Найти длины отрезков KB и CM. Воспользоваться тем, что $CD||KB$, поэтому длина отрезка BE равна длине высоты треугольника CKM.

У к а з а н и е. Рассмотреть треугольник COE, где O – центр окружности. Найти $|CE|$ и величину угла COE.

У к а з а н и е. Найти величину угла BOC и длину отрезка KB.

У к а з а н и е. Воспользоваться подобием треугольников AME и AKB для нахождения $|ME|$.

Р е ш е н и е. Поскольку $|CE| = |DE|$, то хорда CD перпендикулярна диаметру AB. Обозначим центр окружности буквой O, тогда

$$|AO| = |OB| = |OC| = 5, \quad |EO| = |AO| - |AE| = 4.$$

После этого из прямоугольного треугольника COE можно найти длину отрезка CE и величину угла COE:

$$|CE| = \sqrt{|OC|^2 - |EO|^2} = 3, \quad \cos\widehat{COE} = \frac{|EO|}{|OC|} = \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{COE} = \arccos\left(\frac{4}{5}\right).$$

Далее, треугольники KOB и KOC равны между собой (по катету и гипотенузе), поэтому равны и углы KOB и KOC. Если обозначить их величины за α, то

$$\cos\left(\widehat{KOB} + \widehat{KOC}\right) = \cos\left(\pi - \widehat{COE}\right) \quad \Longrightarrow \quad \cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Теперь из прямоугольного треугольника KOB находим

$$|OK| = \frac{|OB|}{\cos\alpha} = 5\sqrt{10}, \quad |BK| = \sqrt{|OK|^2 - |OB|^2} = 15.$$

Наконец, прямые KB и CD перпендикулярны отрезку AB, поэтому $KB||CD$ и треугольники MAE и KAB подобны. Из этого подобия получаем

$$\frac{|ME|}{|KB|} = \frac{|AE|}{|AB|} \quad \Longrightarrow \quad |ME| = \frac{1 \cdot 15}{10} = \frac{3}{2}, \quad |CM| = |CE| - |ME| = \frac{3}{2}.$$

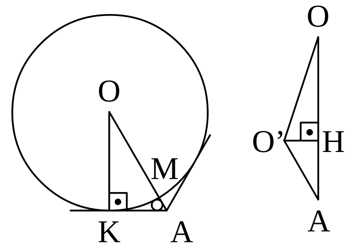
Площадь треугольника CKM можно легко найти, заметив, что длина отрезка BE равна длине высоты этого треугольника, опущенной из вершины K. Значит,

$$S_{\triangle CKM} = \frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |BE| = \frac{27}{4}.$$

О т в е т. $\dfrac{27}{4}$.

Задача 21.

Дана окружность с центром в точке O, длина радиуса которой равна 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности. Величина угла OAK равна $\pi/3$. Найдите длину радиуса окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.



Идея. Рассмотреть треугольник, образованный центрами окружностей и точкой A.

Указание. Воспользоваться тем, что центр окружности, длину радиуса которой надо найти, лежит как на биссектрисе угла KAM, так и на прямой, проходящей через точку O и через точку касания окружностей.

Указание. Выразить стороны треугольника HOO' через искомый радиус, где O' – центр искомой окружности, а H – точка касания этой окружности с отрезком AM. Записать теорему Пифагора.

Решение. Обозначим центр окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK, буквой O', точку касания этой окружности с отрезком AM обозначим буквой H. Ясно, что $O'H \perp AM$.

Поскольку окружность, длину радиуса которой нам нужно найти, касается отрезков AK и AM, то она вписана в угол KAM, стало быть, её центр лежит на биссектрисе этого угла. Из этого вытекает, что $\widehat{O'AO} = \pi/6$. С другой стороны, она касается окружности с центром в точке O, поэтому их центры и точка их касания лежат на одной прямой, то есть длина отрезка OO' равна сумме длин радиусов окружностей. Обозначим искомую длину за r, тогда

$$|OO'| = r + 2, \quad |O'H| = r, \quad |AH| = |O'H| \cdot \operatorname{ctg} \widehat{O'AO} = \sqrt{3}r.$$

Далее, AK – касательная, поэтому $AK \perp OK$. Из треугольника AOK находим

$$|AO| = \frac{|OK|}{\sin \widehat{OAK}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad |OH| = |AO| - |AH| = \frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}r.$$

Теперь запишем теорему Пифагора для треугольника HOO':

$$|OO'|^2 = |HO|^2 + |HO'|^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (r+2)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}r\right)^2 + r^2 \quad \Longrightarrow \quad 3r^2 - 12r + \frac{4}{3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{3}.$$

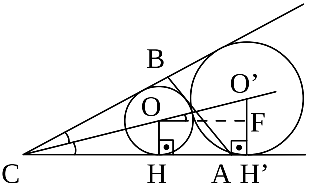
Какой же из этих ответов нам подходит? Так как $|OH| > 0$, то $r < 4/3$. Поэтому подходит только меньшее из значений r. Оно и является ответом к задаче. Большее же из полученных значений соответствует окружности, которая касается продолжений отрезков AM и AK за точки M и K и исходной окружности внешним образом.

Ответ. $\dfrac{6 - 4\sqrt{2}}{3}$.

Задача 22.

Площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$, а длина радиуса вписанной в него окружности равна $\sqrt{15}/3$. Окружность, длина радиуса которой равна $5\sqrt{15}/9$, касается лучей, образующих угол ACB, и вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите $\operatorname{tg}\widehat{ABC}$, если наибольшей из сторон треугольника ABC является сторона AC.

Идея. Найти ещё один элемент треугольника ABC.
Указание. Рассмотреть прямоугольную трапецию, образованную центрами окружностей и точками их касания с одной из сторон угла, найти величину угла ACB.
Указание. Воспользоваться формулами площади и теоремой косинусов для нахождения сторон треугольника ABC.



Решение. По условию даны два элемента в треугольнике ABC, не хватает ещё одного. Здесь легко найти величину угла ACB.

Обозначим центр окружности, вписанной в треугольник ABC, буквой O, центр второй окружности – буквой O', точки их касания с лучом CA обозначим буквами H и H' соответственно. Поскольку обе они вписаны в угол ACB, то точки O и O' лежат на биссектрисе этого угла, а из того, что они касаются друг друга, вытекает, что длина отрезка OO' равна сумме длин их радиусов. Наконец, заметим, что длина радиуса окружности с центром O' больше, чем длина радиуса окружности с центром O, стало быть, точка O лежит между точками C и O'.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $OO'H'H$. Проведём $OF||CA$, тогда

$$|O'F| = |O'H'| - |OH| = \frac{2\sqrt{15}}{9}, \quad \widehat{O'OF} = \widehat{OCA},$$

$$\sin\widehat{O'OF} = \frac{|O'F|}{|OO'|} = \frac{\frac{2\sqrt{15}}{9}}{\frac{\sqrt{15}}{3} + \frac{5\sqrt{15}}{9}} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{ACB}\right) = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \cos\left(\frac{1}{2}\widehat{ACB}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \sin\widehat{ACB} = \frac{\sqrt{15}}{8}, \quad \cos\widehat{ACB} = \frac{7}{8}.$$

Теперь задача сведена к классической: по трем элементам треугольника ABC надо определить величину одного из его углов. Положим $|BC| = x$, $|AC| = y$, $|AB| = z$ и запишем для треугольника ABC две формулы площади и теорему косинусов:

$$S_{\triangle ABC} = p_{\triangle ABC} \cdot r_{\triangle ABC} \quad \Longrightarrow \quad x + y + z = \frac{2S_{\triangle ABC}}{r_{\triangle ABC}} = 18;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin\widehat{ACB} \quad \Longrightarrow \quad xy = \frac{2S_{\triangle ABC}}{\sin\widehat{ACB}} = 48;$$

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ACB} \quad \Longrightarrow \quad z^2 = x^2 + y^2 - \frac{7}{4}xy.$$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} x + y = 18 - z, \\ xy = 48, \\ z^2 = (x+y)^2 - 2xy - \dfrac{7}{4}xy \end{cases} \Longrightarrow \ z^2 = (18-z)^2 - 180 \ \Longrightarrow \ z = 4; \ \begin{cases} x + y = 14, \\ xy = 48. \end{cases}$$

Поскольку AC – наибольшая сторона, то $y > x$. Поэтому $y = 8$, $x = 6$. Для нахождения искомой величины осталось ещё раз воспользоваться теоремой косинусов:

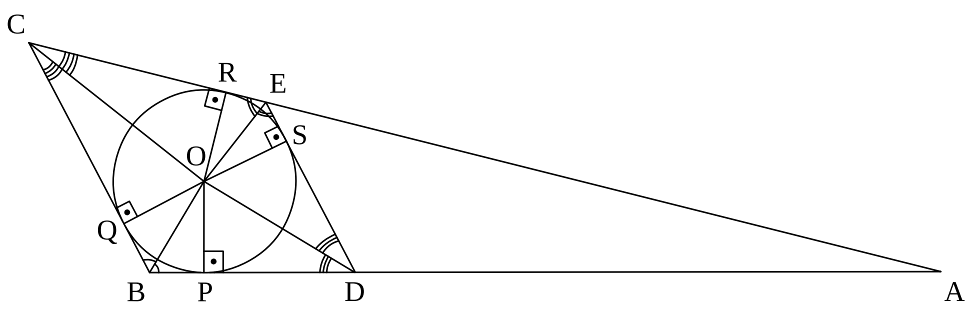
$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ABC} \quad \Longrightarrow \quad 64 = 16 + 36 - 48\cos\widehat{ABC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\widehat{ABC} = -\frac{1}{4}, \quad \sin\widehat{ABC} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \operatorname{tg}\widehat{ABC} = -\sqrt{15}.$$

Ответ. $-\sqrt{15}$.

Задача 23.

В треугольник ABC вписана окружность γ. Касательная к этой окружности, параллельная стороне BC, пересекает сторону AB в точке D и сторону AC в точке E. Периметры треугольников ABC и ADE равны соответственно 40 и 30, $\widehat{ABC} = 2\beta$. Найдите длину радиуса окружности γ.



Идея. Воспользоваться подобием треугольников ADE и ABC и свойством касательных к окружности.

Указание. Используя свойство касательных, найти $|AP|$, где P – точка касания окружности и отрезка AB.

Указание. Используя подобие треугольников ADE и ABC, найти отношение $|AD| : |AB|$.

Указание. Выразить длины отрезков AD и AB через длину радиуса окружности и величину угла ABC.

Решение. Рассмотрим четырёхугольник $BCED$, описанный около окружности, вписанной в треугольник ABC. Обозначим точки её касания с отрезками

BC, CE, ED и DB буквами Q, R, S и P соответственно, а её центр обозначим буквой O. Точка O является точкой пересечения биссектрис углов BCE, CED, EDB и DBC (это вытекает из того, что точка O равноудалена от сторон этих углов). Тогда с учётом того, что $BC||ED$, получаем

$$\widehat{OBP} = \widehat{OBQ} = \beta, \quad \widehat{ODP} = \widehat{ODS} = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

По свойству касательных $|DS| = |DP|$, $|ES| = |ER|$ и $|AP| = |AR|$. Поэтому

$$P_{\Delta ADE} = |AP| + |AR| = 2|AP| \quad \Longrightarrow \quad |AP| = 15.$$

Поскольку $ED||BC$, то треугольники ADE и ABC подобны, причём коэффициент их подобия равен отношению их периметров, то есть $3/4$. Таким образом, $|AD| : |AB| = 3 : 4$. Обозначим искомую длину за r и выразим $|AD|$ и $|AB|$ через r. Для этого надо выразить $|BP|$ и $|PD|$ через r.

Рассматривая прямоугольные треугольники BPO и DPO, находим

$$|BP| = r \operatorname{ctg} \beta, \quad |DP| = r \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = r \operatorname{tg} \beta.$$

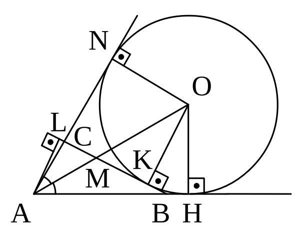
Теперь, используя отношение $|AD| : |AB| = 3 : 4$, получим

$$\frac{3}{4} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AP| - |PD|}{|AP| + |BP|} = \frac{15 - r \operatorname{tg} \beta}{15 + r \operatorname{ctg} \beta} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{15}{3 \operatorname{ctg} \beta + 4 \operatorname{tg} \beta}.$$

О т в е т. $\dfrac{15}{3 \operatorname{ctg} \beta + 4 \operatorname{tg} \beta}$.

Задача 24.

В угол с вершиной A, величина которого равна $\pi/3$, вписана окружность с центром в точке O. К этой окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C. Отрезок BC пересекается с отрезком AO в точке M. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, если $|AM| : |MO| = 2 : 3$, $|BC| = 7$.



И д е я. Использовать две формулы площади треугольника ABC.

У к а з а н и е. Записав площадь треугольника ABC двумя способами, выразить искомый радиус через периметр треугольника и его высоту, проведённую к стороне BC.

У к а з а н и е. Используя подобие, выразить высоту треугольника ABC через радиус окружности с центром в точке O.

У к а з а н и е. Используя свойство касательных и соотношения в прямоугольном треугольнике, выразить периметр треугольника ABC через радиус окружности с центром в точке O.

Решение. Поскольку $|AM| < |AO|$, то конфигурация такая, как приведено на рисунке. Радиус r окружности, вписанной в треугольник, можно искать из формулы площади треугольника, записав её двумя способами:

$$S_{\Delta ABC} = p_{ABC} \cdot r, \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AL| \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{7 \cdot |AL|}{P_{ABC}},$$

где AL – высота треугольника ABC. Обозначим точки касания окружности с лучами AB, AC и отрезком BC буквами H, N и K соответственно, длину её радиуса обозначим за R. Треугольники AML и OMK подобны. Поэтому

$$\frac{|AL|}{|OK|} = \frac{|AM|}{|OM|} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad |AL| = \frac{2R}{3}.$$

По свойству касательных $|CK| = |CN|$, $|BK| = |BH|$ и $|AN| = |AH|$. Поэтому

$$P_{ABC} = |AH| + |AN| = 2 \cdot |AH|.$$

Окружность вписана в угол BAC, поэтому её центр лежит на биссектрисе этого угла. С учётом этого из прямоугольного треугольника AOH получаем

$$\widehat{OAH} = \pi/6, \quad |AH| = |OH| \cdot \operatorname{ctg} \widehat{OAH} = \sqrt{3}R \quad \Longrightarrow \quad P_{ABC} = 2\sqrt{3}R.$$

Следовательно,

$$r = \frac{7 \cdot \frac{2R}{3}}{2\sqrt{3}R} = \frac{7\sqrt{3}}{9}.$$

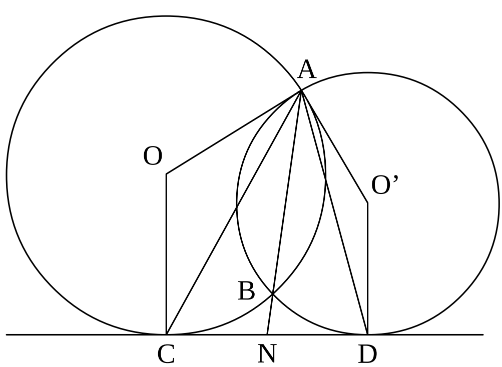
Ответ. $\dfrac{7\sqrt{3}}{9}$.

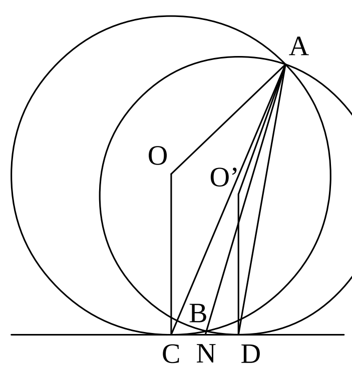
Задача 25.

Две окружности, длины радиусов которых равны R и r, пересекаются в точках A и B и касаются некоторой прямой в точках C и D; N – точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите:

1) длину радиуса окружности, описанной около треугольника ACD;

2) отношение длин высот треугольников NAC и NAD, опущенных из вершины N.





Идея. Выразить длины сторон AC и AD через длины радиусов окружностей и величины углов ACD и ADC, доказать, что $|NC| = |ND|$.
Указание. Применить теорему синусов для треугольника ACD, теорему о произведении длины секущей на длину её внешней части и формулу площади треугольника, в которую входит длина его высоты.

Решение. Обозначим величину угла ACD за α, а величину угла ADC за β, центры окружностей обозначим буквами O (центр окружности, длина радиуса которой равна R) и O' (центр окружности, длина радиуса которой равна r). Тогда по теореме об угле, образованном касательной и хордой,

$$\widehat{ACD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}, \quad \widehat{ADC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}\,.$$

С другой стороны,

$$\widehat{AOC} = \overset{\frown}{AC}, \quad \widehat{AO'D} = \overset{\frown}{AD},$$

поэтому если $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$, то $\widehat{AOC} = 2\alpha$, $\widehat{AO'D} = 2\beta$. Ну а если один из углов ACD или ADC тупой (для определённости будем считать, что это будет угол ADC), то $\widehat{AOC} = 2\alpha$, $\widehat{AO'D} = 2\pi - 2\beta$.

Далее из равнобедренных треугольников AOC и $AO'D$ выразим длины сторон AC и AD. Важно, что независимо от того, будут ли углы ACD и ADC острыми или тупыми, результат получится один и тот же (за счёт формул приведения):

$$|AC| = 2|AO| \cdot \sin\frac{1}{2}\widehat{AOC} = 2R\sin\alpha, \quad |AD| = 2|AO'| \cdot \sin\frac{1}{2}\widehat{AO'D} = 2r\sin\beta.$$

Теперь запишем теорему синусов для треугольника ACD:

$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{ADC}} = \frac{|AD|}{\sin\widehat{ACD}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2R\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2r\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{r}{R}};$$

$$R_{\triangle ACD} = \frac{|AC|}{2\sin\widehat{ADC}} \quad \Longrightarrow \quad R_{\triangle ACD} = \frac{R\sin\alpha}{\sin\beta} = R\cdot\sqrt{\frac{r}{R}} = \sqrt{rR}.$$

Ответ на первый вопрос задачи нами получен. Для ответа на второй вопрос задачи нам понадобятся формулы площади и теорема о произведении длины секущей на длину её внешней части. Запишем её, заметив, что NA – секущая для обеих окружностей:

$$|NC|^2 = |NB|\cdot|NA|, \quad |ND|^2 = |NB|\cdot|NA| \quad \Longrightarrow \quad |NC| = |ND|.$$

Ну а поскольку высоты треугольников ANC и AND, опущенные из точки A, совпадают, то и их площади равны (это следует из того, что площадь треугольника равна половине произведения длины его стороны и длины его высоты, опущенной на эту сторону). Наконец, обозначим длины высот из второго вопроса задачи за h_{AC} и h_{AD} и ещё раз запишем площади треугольников ANC и AND:

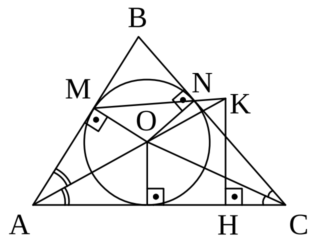
$$S_{\triangle ANC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot h_{AC}, \quad S_{\triangle AND} = \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot h_{AD} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{h_{AC}}{h_{AD}} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{2r\sin\beta}{2R\sin\alpha} = \frac{r}{R}\cdot\sqrt{\frac{R}{r}} = \sqrt{\frac{r}{R}}.$$

Ответ. 1)$\sqrt{Rr}$; 2)$\sqrt{\dfrac{r}{R}}$.

Задача 26.

В треугольнике ABC $\widehat{BAC} = \alpha$, $|AC| = b$. Вписанная в него окружность касается сторон AB и BC в точках M и N, биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке K. Найдите расстояние от точки K до прямой AC.



Идея. Доказать, что треугольники AMK и AOC подобны, где O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Указание. Обозначить величину угла B за β, воспользоваться равенством длин отрезков BM и BN, посчитать величины углов, входящих в треугольники AMK и AOC.

Решение. Обозначим величину угла ABC за β, центр окружности, вписанной в треугольник ABC, обозначим буквой O. Докажем, что треугольники AMN и AOC подобны. Пользуясь теоремой о сумме величин углов треугольника, тем фактом, что треугольник BMN равнобедренный ($|BM| = |BN|$), а также тем, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис, получаем

$$\widehat{BMN} = \widehat{BNM} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}, \quad \widehat{OCA} = \frac{\pi - \widehat{ABC} - \widehat{BAC}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

$$\widehat{AMN} = \pi - \widehat{BMN} = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}, \quad \widehat{AKM} = \pi - \widehat{AMK} - \widehat{KAM} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, треугольники AMK и AOC подобны по двум углам. Из этого подобия, с учётом того что треугольник AOM прямоугольный, получаем

$$\frac{|AK|}{|AC|} = \frac{|AM|}{|AO|} = \cos\frac{\alpha}{2} \quad \Longrightarrow \quad |AK| = b\cos\frac{\alpha}{2}.$$

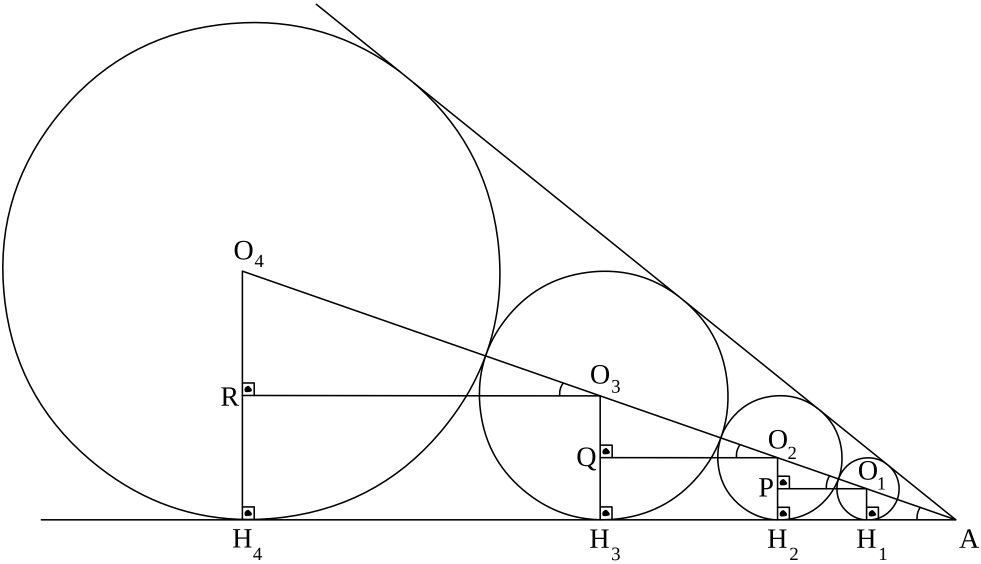
Наконец, искомое расстояние есть длина отрезка KH. Из прямоугольного треугольника AKH находим

$$|KH| = |AK| \cdot \sin\widehat{KAH} = b\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b\sin\alpha}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{b\sin\alpha}{2}$.

Задача 27.

В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найдите сумму длин второй и третьей окружностей, если длина радиуса первой равна 1, а площадь круга, ограниченного четвёртой окружностью, равна 64π.



Идея. Доказать, что длины радиусов окружностей образуют геометрическую прогрессию.
Указание. Рассмотреть несколько подобных прямоугольных треугольников, гипотенузами которых являются отрезки с концами в центрах окружностей.

Решение. Обозначим центры окружностей буквами O_1, O_2, O_3, O_4, вершину угла обозначим буквой A, точки касания окружностей с одной из сторон угла обозначим как H_1, H_2, H_3, H_4. Построим отрезки O_1P, O_2Q, O_3R, параллельные стороне угла, на которой лежат точки H_1, H_2, H_3, H_4, так, что $P \in O_2H_2$, $Q \in O_3H_3$, $R \in O_4H_4$. Тогда, если принять длины радиусов окружностей за r_1, r_2, r_3, r_4, то

$$|O_1O_2| = r_1 + r_2, \quad |O_2O_3| = r_2 + r_3, \quad |O_3O_4| = r_3 + r_4,$$

$$|O_2P| = r_2 - r_1, \quad |O_3Q| = r_3 - r_2, \quad |O_4R| = r_4 - r_3.$$

Далее ясно, что $\triangle O_1PO_2 \sim \triangle O_2QO_3$, $\triangle O_2QO_3 \sim \triangle O_3RO_4$. Из первого из этих подобий получаем

$$\frac{|O_2P|}{|O_3Q|} = \frac{|O_1O_2|}{|O_2O_3|} \iff \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2} \iff r_2^2 = r_1r_3.$$

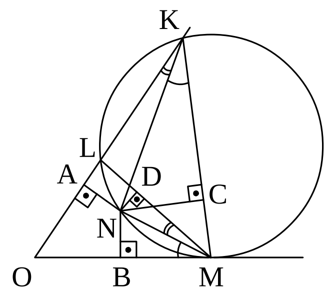
Аналогичным образом задействовав второе подобие, получаем $r_3^2 = r_2r_4$. Таким образом, числа r_1, r_2, r_3 образуют геометрическую прогрессию и числа r_2, r_3, r_4 образуют геометрическую прогрессию. Из этого вытекает, что и все четыре числа r_1, r_2, r_3, r_4 образуют геометрическую прогрессию.

По условию задачи $r_1 = 1$, $\pi r_4^2 = 64\pi \iff r_4 = 8$. Тогда ясно, что $r_2 = 2$, $r_3 = 4$, длина второй окружности равна 4π, длина третьей окружности равна 8π.

Ответ. 12π.

Задача 28.

На стороне OK острого угла KOM взята точка L (L между O и K). Окружность проходит через точки K и L и касается луча OM в точке M. На дуге этой окружности LM, не содержащей точку K, взята точка N. Расстояния от точки N до прямых OM, OK и KM равны m, k и l соответственно. Найдите расстояние от точки N до прямой LM.



Идея. Найти две пары подобных треугольников.

Указание. Опустить из точки N перпендикуляры на прямые OK, OM, KM и LM.

Указание. Воспользоваться свойствами вписанных углов и свойством угла между касательной и хордой.

Указание. Доказать, что $\widehat{NMO} = \widehat{NKM}$ и, с другой стороны, $\widehat{NKO} = \widehat{NML}$.

Решение. Опустим из точки N перпендикуляры на прямые OK, OM, KM и LM, их основания обозначим буквами A, B, C и D соответственно. Тогда, по условию задачи, $|AN| = k$, $|BN| = m$, $|CN| = l$, а $|DN|$ – величина, которую нужно найти.

Теперь, с учётом того что

$$\widehat{NMO} = \widehat{NKM} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{MN}, \quad \widehat{NKO} = \widehat{NML} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{LN},$$

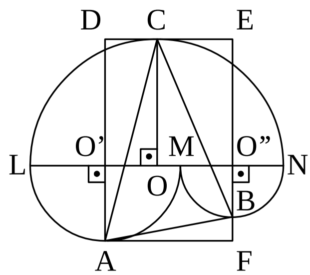
заметим, что $\triangle BMN \sim \triangle CKN$ и $\triangle DMN \sim \triangle AKN$ (по двум углам). Из этих подобий получаем

$$\begin{cases} \dfrac{|BN|}{|CN|} = \dfrac{|MN|}{|KN|}, \\[2ex] \dfrac{|DN|}{|AN|} = \dfrac{|MN|}{|KN|}; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|BN|}{|CN|} = \frac{|DN|}{|AN|} \quad \Longleftrightarrow \quad |DN| = \frac{|AN|\cdot|BN|}{|CN|} = \frac{mk}{l}.$$

Ответ. $\dfrac{mk}{l}$.

Задача 29.

На прямой взяты три точки L, M и N (M между L и N, $|LM| \neq |MN|$). На отрезках LM, MN и LN, как на диаметрах, построены полуокружности, серединами которых являются точки A, B и C соответственно. Точка C лежит по одну сторону, а точки A и B – по другую сторону от прямой LN. Найдите отношение площади фигуры, ограниченной этими тремя полуокружностями, к площади треугольника ABC.



Идея. Искать площадь треугольника как разность площади прямоугольника и прямоугольных треугольников.

Указание. Обозначим середины отрезков LM, MN и LN буквами O', O'' и O соответственно. Обозначим $|LM| = 2R$, $|MN| = 2r$. Провести через точки A и C прямые, параллельные прямой LN, до пересечения с прямыми AO' и BO''. Выразить искомые площади через R и r.

Указание. Площадь фигуры, ограниченной полуокружностями, равна сумме их площадей.

Решение. Обозначим середины отрезков LM, MN и LN буквами O', O'' и O соответственно. Обозначим $|LM| = 2R$, $|MN| = 2r$, тогда $|LN| = 2(R + r)$. Проведём отрезки $O'A$, $O''B$ и OC. В силу того что A, B и C – середины полуокружностей, все эти отрезки будут перпендикулярны прямой LN, $|O'A| = R$, $|O''B| = r$, $|OC| = R + r$.

Площадь фигуры, ограниченной полуокружностями, очевидно, равна сумме их площадей, то есть

$$S_{\text{фиг.}} = \frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi(R + r)^2 = \pi(R^2 + Rr + r^2).$$

Для нахождения площади треугольника ABC проведём через точки A и C прямые, параллельные прямой LN, до пересечения с прямыми AO' и BO'' в точках A, D и F, E соответственно. Тогда площадь треугольника ABC можно выразить через разность площади прямоугольника $ADEF$ и площадей прямоугольных треугольников ADC, BCE и ABF:

$$S_{ABC} = S_{ADEF} - S_{ADC} - S_{BCE} - S_{ABF} =$$

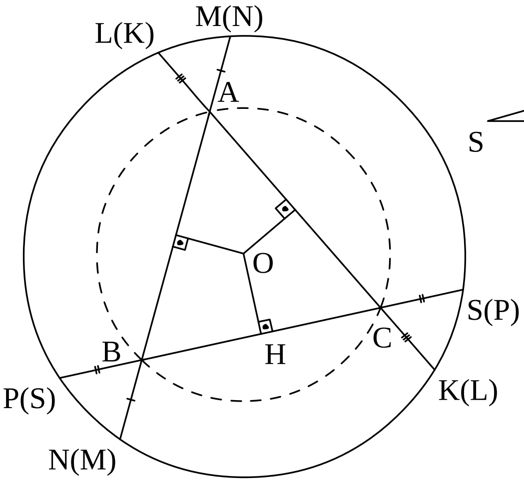
$$= (2R+r)\cdot(R+r) - \frac{1}{2}\cdot((2R + r)\cdot r + (R + 2r)\cdot R + (R + r)\cdot(R - r)) = R^2 + Rr + r^2.$$

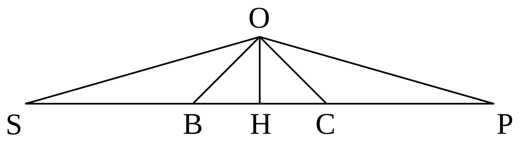
Таким образом, искомое отношение равно π.

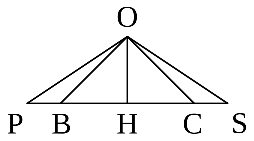
Ответ. π.

Задача 30.

В окружности γ проведены хорды KL, MN, PS. Хорды KL и PS пересекаются в точке C, хорды KL и MN пересекаются в точке A, а хорды MN и PS пересекаются в точке B, причём $|AL| = |CK|$, $|AM| = |BN|$, $|BS| = 5$, $|BC| = 4$. Найдите длину радиуса окружности γ, если величина угла BAC равна $\pi/4$.







Идея. Доказать, что центры окружности γ и окружности, описанной около треугольника ABC, совпадают.
Указание. Воспользоваться теоремой о произведении длин отрезков пересекающихся хорд и доказать, что $|BP| = |CS|$.
Указание. Воспользоваться свойством хорды, перпендикулярной диаметру, и доказать, что центры окружности γ и окружности, описанной около треугольника ABC, совпадают.
Указание. Рассмотреть все случаи взаимного расположения точек K и L, M и N, P и S.

Решение. В этой задаче возможно достаточно большое количество случаев. Связано это с тем, что пары точек K и L, M и N, P и S могут располагаться произвольным образом. Этот факт отражен на чертеже.

Будем рассуждать следующим образом: каждая из хорд KL, MN и PS точками пересечения с двумя другими хордами делится на 3 отрезка: два "крайних"и один "средний". Поскольку $|AM| = |BN|$, то в любом случае (т.е. независимо от того, как конкретно расположены точки M и N) длины "крайних"отрезков хорды MN равны. Обозначим эти длины за x. Аналогично из того, что $|AL| = |CK|$, вытекает равенство длин "крайних"отрезков хорды KL, эти длины мы обозначим за y. Длины же "крайних"отрезков хорды PS обозначим за b и c.

Трижды применяя теорему о произведении длин отрезков пересекающихся хорд, получаем

$$\begin{cases} x\cdot(|AB|+x) = y\cdot(|AC|+y), \\ x\cdot(|AB|+x) = b\cdot(|BC|+c), \\ y\cdot(|AC|+y) = c\cdot(|BC|+b) \end{cases} \implies b\cdot(|BC|+c) = c\cdot(|BC|+b) \iff b = c.$$

Таким образом, длины "крайних"отрезков хорды PS также равны. Теперь самое интересное: если мы опустим из центра окружности γ (обозначим его буквой O) перпендикуляры на хорды KL, MN и PS, то их основания попадут на середины этих хорд. А поскольку длины "крайних"отрезков каждой хорды равны, то середины хорд будут также являться и серединами их "средних"отрезков. Таким образом, точка O есть точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника ABC, то есть является центром описанной около него окружности.

Наконец, немного посчитаем. Поскольку угол BOC является центральным углом, опирающимся на дугу BC, то $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAC} = \pi/2$. Обозначим середину отрезка BC буквой H, заметим, что треугольник BOC прямоугольный и равнобедренный. Из этого вытекает, что $|OH| = |BH| = \frac{1}{2}|BC| = 2$. Осталось не упустить из виду, что точки P и S могут расположиться двумя способами (см. чертёж). В одном из этих случаев мы получим, что

$$|SH| = |BS| + |BH| = 7, \quad |OS| = \sqrt{|SH|^2 + |OH|^2} = \sqrt{53},$$

а во втором случае имеем

$$|SH| = |BS| - |BH| = 3, \quad |OS| = \sqrt{|SH|^2 + |OH|^2} = \sqrt{13}.$$

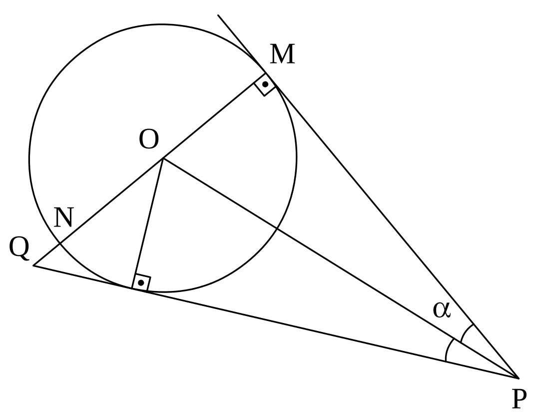
Ответ. $\sqrt{53}$ или $\sqrt{13}$.

Задача 31.

Дана окружность, длина диаметра MN которой равна 16. На касательной к этой окружности в точке M отложен отрезок MP, длина которого больше 15. Из точки P проведена вторая касательная к окружности, пересекающая прямую MN в точке Q. Найдите площадь треугольника MPQ, если его периметр равен 72.

Идея. Выразить длины сторон треугольника MPQ через длину отрезка MN и величину угла MPQ.

Указание. Рассмотреть прямоугольные треугольники MOP и MPQ, где O – центр окружности.



Решение. Поскольку MP и PQ – касательные к окружности, то, во-первых, окружность вписана в угол MPQ, из чего следует, что её центр лежит на биссектрисе угла MPQ, и, во-вторых, $MP \perp MN$, то есть $MP \perp MQ$. Обозначим центр окружности буквой O, величину острого угла OPM обозначим за α. Тогда $|OM| = \frac{1}{2}|MN| = 8$, $\widehat{MPQ} = 2\alpha$.

Далее из прямоугольных треугольников OMP и QMP получаем

$$|MP| = |OM| \cdot \operatorname{ctg} \widehat{OMP} = 8 \operatorname{ctg} \alpha, \quad |MQ| = |MP| \cdot \operatorname{tg} \widehat{MPQ} = 8 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha,$$

$$|PQ| = \frac{|MP|}{\cos \widehat{MPQ}} = \frac{8 \operatorname{ctg} \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

По условию задачи $|MP| > 15$, значит, $\operatorname{ctg}\alpha > 15/8$. Пользуясь тем, что периметр треугольника MPQ равен 72, мы получаем уравнение

$$8\operatorname{ctg}\alpha + 8\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha + \frac{8\operatorname{ctg}\alpha}{\cos 2\alpha} = 72 \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{ctg}\alpha\left(1 + \operatorname{tg}2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha}\right) = 9.$$

Путем применения формул $\cos 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$, $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$ наше уравнение преобразуется к виду

$$\operatorname{ctg}\alpha\left(1 + \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1} + \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}\right) = 9 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad 2\operatorname{ctg}^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) = 9(1 + \operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{ctg}\alpha - 1).$$

Поскольку $\alpha < \pi/2$, то $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, $\operatorname{ctg}\alpha + 1 \neq 0$. С учётом этого получаем

$$2\operatorname{ctg}^2\alpha - 9\operatorname{ctg}\alpha + 9 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{ctg}\alpha = 3 \text{ или } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}.$$

Второй из полученных котангенсов меньше $15/8$, стало быть, нам подходит только вариант $\operatorname{ctg}\alpha = 3$. Тогда $\operatorname{tg}2\alpha = 3/4$ и, значит,

$$|MP| = 8\cdot 3 = 24, \quad |MQ| = 8\cdot 3\cdot\frac{3}{4} = 18.$$

Наконец,

$$S_{\triangle MPQ} = \frac{1}{2}\cdot|MP|\cdot|MQ| = 216.$$

Ответ. 216.

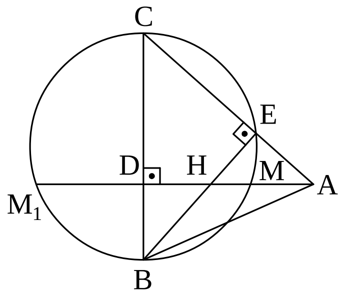
Задача 32.

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$), как на диаметре, построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, H – точка пересечения высот треугольника ABC, $|AD| = a$, $|MD| = b$. Найдите $|AH|$.

Идея. Воспользоваться теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части.

Указание. Точку пересечения стороны AC с окружностью обозначить буквой E. Пользуясь теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части, найти $|AE|\cdot|AC| = a^2 - b^2$.

Указание. Из прямоугольных треугольников AEH и ACD выразить произведение $|AE|\cdot|AC|$ через произведение $|AH|\cdot|AD|$.



Р е ш е н и е. Достроим полуокружность из условия задачи до полной окружности и продлим высоту AD за точку D до второго пересечения с этой окружностью. Полученную точку пересечения обозначим M_1. Точку пересечения стороны AC с окружностью обозначим буквой E. Угол BEC опирается на диаметр, стало быть, он прямой, значит, BE – высота треугольника ABC и H – точка пересечения отрезков AD и BE.

Далее заметим, что, поскольку хорда MM_1 перпендикулярна диаметру BC, то $|DM_1| = |DM| = b$. Тогда $|AM_1| = |AD| + |DM_1| = a + b$, $|AM| = |AD| - |DM| = a - b$.

Теперь воспользуемся теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части. Получим

$$|AE| \cdot |AC| = |AM| \cdot |AM_1| = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

С другой стороны, из прямоугольных треугольников AEH и ACD вытекает

$$|AE| \cdot |AC| = |AH| \cdot \cos\widehat{DAC} \cdot \frac{|AD|}{\cos\widehat{DAC}} = |AH| \cdot |AD|.$$

Значит, $a^2 - b^2 = |AH| \cdot a$. Осталось выписать ответ.

О т в е т. $\dfrac{a^2 - b^2}{a}$.

З а м е ч а н и е. Для доказательства того, что $|AE| \cdot |AC| = |AH| \cdot |AD|$, можно было использовать подобие треугольников AEH и ADC.

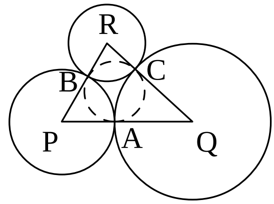
Задача 33.

Три круга с центрами в точках P, Q и R попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Известно, что $\widehat{PQR} = 2\arcsin(1/3)$, а сумма длин радиусов всех трёх кругов равна $12\sqrt{2}$. Какую наибольшую длину может иметь окружность, проходящая через точки A, B, C?

И д е я. Доказать, что окружность, проходящая через точки A, B и C, является вписанной в треугольник PQR. Доказать, что окружность наибольшего радиуса будет вписана в равнобедренный треугольник, если в треугольнике задан угол и полупериметр.

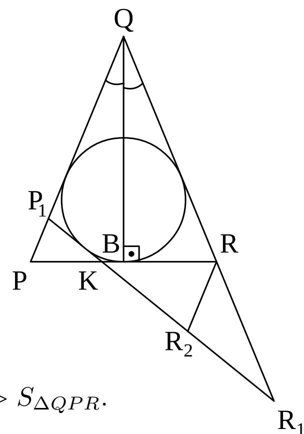
У к а з а н и е. Центр окружности, проходящей через точки A, B и C, лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BC, AC и AB. Но в силу равнобедренности треугольников BRC, AQC и APB эти серединные перпендикуляры являются также и биссектрисами углов BRC, AQC и APB.

У к а з а н и е. Пусть PQR – равнобедренный треугольник и в него вписана окружность, а $P'QR'$ – неравнобедренный треугольник, в который вписана та же окружность и у которого угол $P'QR'$ равен углу PQR. Показать, что тогда его периметр больше, чем периметр треугольника PQR.



Р е ш е н и е. Сначала докажем, что окружность, проходящая через точки A, B и C, является вписанной в треугольник PQR. Это можно сделать, например, так. Очевидно, что точки A, B и C лежат на отрезках PQ, PR и QR соответственно. Центр окружности, проходящей через точки A, B и C, лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BC, AC и AB. Но в силу равнобедренности треугольников BRC, AQC и APB эти серединные перпендикуляры являются также и биссектрисами углов BRC, AQC и APB. Поэтому центр окружности, описанной около треугольника ABC, является также и центром окружности, вписанной в треугольник PQR. Значит, окружность, проходящая через точки A, B и C, является вписанной в треугольник PQR.

Теперь докажем, что окружность наибольшего радиуса будет вписана в равнобедренный треугольник, если в треугольнике задан угол и полупериметр.



Пусть PQR – равнобедренный треугольник и в него вписана окружность, а P_1QR_1 – неравнобедренный треугольник, в который вписана та же окружность и у которого угол P_1QR_1 равен углу PQR. Покажем, что тогда его периметр больше, чем периметр треугольника PQR.

Пусть K – точка пересечения отрезков P_1R_1 и PR. Проведём $RR_2||P_1P$. Тогда треугольники KPP_1 и KRR_2 подобны по двум углам, причём $|KR| > |KP|$, так как $|PB| = |BR|$. Поэтому

$$S_{\Delta KRR_2} > S_{\Delta KPP_1} \Longrightarrow S_{\Delta KRR_1} > S_{\Delta KPP_1} \Longrightarrow S_{\Delta QP_1R_1} > S_{\Delta QPR}.$$

Следовательно, $P_{\Delta QP_1R_1} > P_{\Delta QPR}$, так как $P = \dfrac{2S}{r}$.

Значит, если мы возьмём неравнобедренный треугольник такого же периметра, что и ΔPQR, то в него можно будет вписать окружность меньшего радиуса, а следовательно, и меньшей длины.

Таким образом, мы доказали, что окружность наибольшего радиуса будет вписана в равнобедренный треугольник, если в треугольнике задан угол и полупериметр. Осталось найти этот радиус.

Обозначим $|PB| = x$. Тогда $|PQ| = 12\sqrt{2}-x$. Из прямоугольного треугольника PBQ получаем

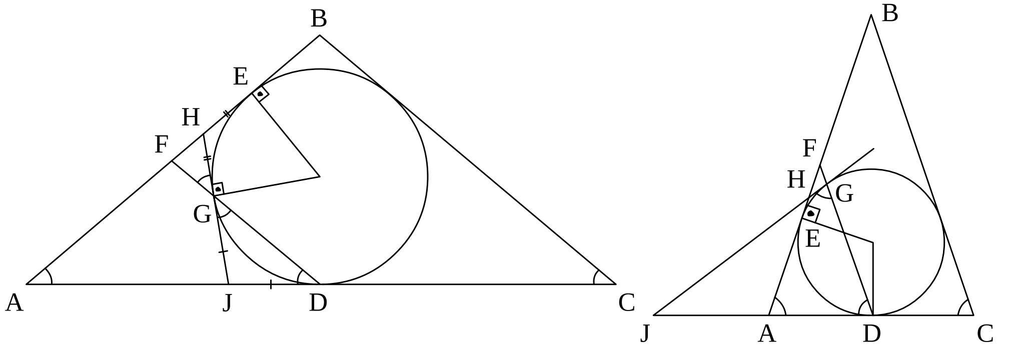
$$\frac{|PB|}{|PQ|} = \sin\widehat{PQB} \quad\Longrightarrow\quad \frac{x}{12\sqrt{2}-x} = \frac{1}{3} \quad\Longleftrightarrow\quad x = 3\sqrt{2} \;\Longrightarrow\; |QP| = 9\sqrt{2} \;\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(9\sqrt{2})^2\cdot\sin\widehat{PQR}}{12\sqrt{2}} = \frac{81\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}}{12\sqrt{2}} = 3 \quad\Longrightarrow\quad l_{\text{окружности}} = 6\pi.$$

О т в е т. 6π.

Задача 34.

Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его основания AC в точке D и боковой стороны AB в точке E. Точка F – середина стороны AB, а точка G – точка пересечения окружности и отрезка FD, отличная от D. Касательная к окружности, проходящая через точку G, пересекает сторону AB в точке H. Найдите величину угла BCA, если известно, что $|FH| : |HE| = 2 : 3$.



Идея. Найти треугольник, в который входят величины, данные в условии или равные им.

Указание. Рассмотреть два различных случая: $|AC| > |AB|$ и $|AC| < |AB|$, выразить величины углов треугольника FGH через величину угла BCA.

Указание. Воспользоваться тем, что D – середина AC, и теоремой о равенстве длин отрезков касательных, проведённых из точки к окружности.

Решение. Обозначим величину угла BCA за α и попытаемся найти треугольник, в который входят величины, данные в условии или равные им. Треугольник ABC – равнобедренный, поэтому величина угла BAC также равна α, а D – середина AC. Тогда DF – его средняя линяя, поэтому $DF||BC$, $\widehat{FDA} = \widehat{BCA} = \alpha$, $\widehat{AFD} = \pi - 2\alpha$, $\widehat{BFD} = 2\alpha$.

Далее нам придётся рассмотреть два различных случая: либо точка E попадает на отрезок BF, либо точка E попадает на отрезок AF. Заметим, что первый из этих случаев возникает, если $|AC| > |AB|$, а второй возникает, если $|AC| < |AB|$.

В первом из этих случаев прямая HG пересечёт отрезок AC в точке J. Поскольку отрезки касательных, проведённых из точки к окружности, равны, то $|GJ| = |JD|$, $|HE| = |HG|$. Таким образом, треугольник DGJ – равнобедренный, $\widehat{DGJ} = \widehat{JDG} = \alpha$. Углы DGJ и FGH – вертикальные, значит, и величина угла FGH равна α. Наконец, положим $|FH| = 2x$, $|HE| = 3x$, тогда $|HG| = 3x$ и нам удалось свести все необходимые величины в один треугольник FGH. Запишем для него теорему синусов:

$$\frac{|FH|}{\sin\widehat{FGH}} = \frac{|HG|}{\sin\widehat{HFG}} \implies \frac{2x}{\sin\alpha} = \frac{3x}{\sin 2\alpha} \iff \frac{2}{\sin\alpha} = \frac{3}{2\sin\alpha\cos\alpha} \implies \cos\alpha = \frac{3}{4}.$$

Проверим, выполнено ли условие $|AC| > |AB|$. Это сделать очень просто: ясно, что $|AC| = 2|AB|\cos\alpha = \frac{3}{2}|AB|$. Таким образом, этот случай даёт нам ответ к задаче.

Во втором из этих случаев прямая HG пересечёт продолжение отрезка AC за точку A в точке J. Рассуждая аналогично, получим $|GJ| = |JD|$, $|HE| = |HG|$, $\widehat{DGJ} = \widehat{JDG} = \alpha$. Углы DGJ и FGH – смежные, значит, $\widehat{FGH} = \pi - \alpha$. Опять положим $|FH| = 2x$, $|HE| = 3x$, тогда $|HG| = 3x$, и запишем для треугольника FGH теорему синусов:

$$\frac{|FH|}{\sin \widehat{FGH}} = \frac{|HG|}{\sin \widehat{HFG}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2x}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{3x}{\sin(\pi - 2\alpha)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{\sin \alpha} = \frac{3}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \quad \Longrightarrow \quad \cos \alpha = \frac{3}{4}.$$

Значение α получилось такое же, поэтому условие $|AC| < |AB|$ не выполнено. Таким образом, этот случай невозможен.

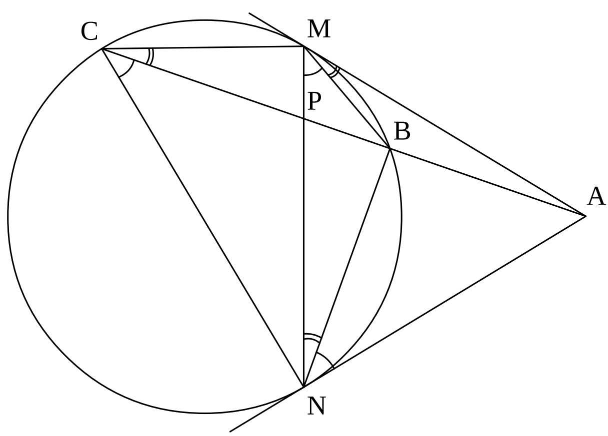
О т в е т. $\arccos\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

Задача 35.

Из точки A проведены к окружности две касательные (M и N – точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN – в точке P. Известно, что $|AB| : |BC| = 2 : 3$. Найдите $|AP| : |PC|$.

И д е я. Рассмотреть схемы доказательства теорем о квадрате длины касательной и о равенстве произведений длин отрезков пересекающихся хорд. С их помощью доказать, что $|BM| : |CM| = |BN| : |CN|$, $|BP| : |CP| = (|BN| : |CN|)^2$.

У к а з а н и е. Полностью разобрать подобия пар треугольников ABM и AMC, ABN и ANC, MPB и CPN, MPC и BPN, вычислить отношение $|BN| : |CN|$.



Р е ш е н и е. В этой задаче достаточно сложно понять, какие свойства имеет данная геометрическая конструкция. Сначала докажем, что $|BM| : |CM| = |BN| : |CN|$. Одним из способов проведения доказательства этого утверждения является более внимательное рассмотрение схемы, используемой в теореме о квадрате длины касательной.

Для того чтобы наши рассуждения имели наиболее общий вид, будем считать, что $|AB| : |BC| = a : b$, положим $|AB| = ax$, $|BC| = bx$, $|AC| = (a + b)x$. Как известно, треугольники ABM и AMC подобны (так как угол A у них общий, углы AMB и ACM равны по теореме об угле, образованном касательной и хордой). Из этого подобия мы получаем

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AM|} = \frac{|BM|}{|CM|}.$$

Из этих соотношений вытекает, что $|AM|^2 = |AB| \cdot |AC|$ (известный всем факт), стало быть, $|AM| = x\sqrt{a^2 + ab}$. Тогда $|BM| : |CM| = \sqrt{a^2 + ab} : (a + b)$. После этого аналогичные рассуждения необходимо применить для треугольников ABN и ANC, отношение длин отрезков BN и CN получится таким же. Утверждение доказано.

Теперь внимательно рассмотрим схему доказательства свойства пересекающихся хорд. Известно, что $\triangle MPB \sim \triangle CPN$, $\triangle MPC \sim \triangle BPN$. Полностью записывая отношения длин соответственных сторон этих пар треугольников, мы имеем

$$\frac{|BP|}{|NP|} = \frac{|BM|}{|CN|} = \frac{|MP|}{|CP|}, \quad \frac{|CP|}{|NP|} = \frac{|CM|}{|BN|} = \frac{|MP|}{|BP|},$$

откуда получаем

$$|BP| = \frac{|BM| \cdot |NP|}{|CN|}, \ |CP| = \frac{|CM| \cdot |NP|}{|BN|} \Longrightarrow \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|BM| \cdot |BN|}{|CM| \cdot |CN|} = \frac{(a^2 + ab)}{(a + b)^2}.$$

Теперь осталось подставить числа из условия задачи. У нас $a = 2$, $b = 3$, значит, $|AB| = 2x$, $|BC| = 3x$,

$$|BP| : |CP| = \frac{2^2 + 2 \cdot 3}{(2 + 3)^2} = \frac{2}{5} \quad \Longrightarrow \quad |BP| = \frac{6x}{7}, \quad |CP| = \frac{15x}{7},$$

$$|AP| : |AC| = \frac{|AB| + |BP|}{|AB| + |BC|} = \frac{2x + 6x/7}{2x + 3x} = \frac{4}{7}.$$

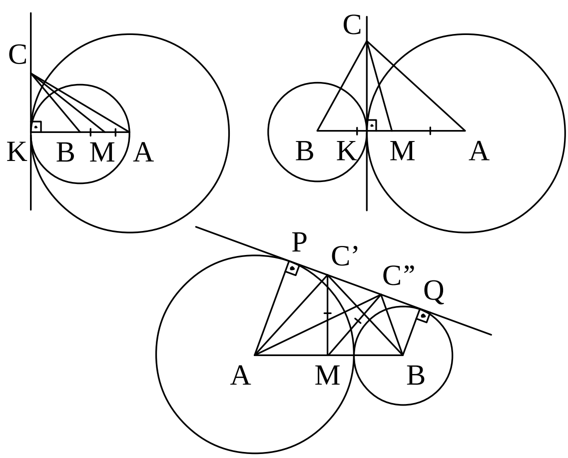
О т в е т. $4 : 7$.

Задача 36.

Две окружности с центрами A и B и длинами радиусов соответственно 2 и 1 касаются друг друга. Точка C лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей, и находится на расстоянии $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ от середины отрезка AB. Найдите площадь S треугольника ABC, если известно, что $S > 2$.

И д е я. Рассмотреть все способы касания окружностей, учесть, что точка C может лежать как на общей внешней, так и на общей внутренней касательной.
У к а з а н и е. Для случая внутреннего касания окружностей и для случая, когда окружности касаются внешним образом, но точка C лежит на общей внутренней касательной, найти длину стороны AB и длину высоты, опущенной на эту сторону (или её продолжение).
У к а з а н и е. Для случая, когда окружности касаются внешним образом, а точка C лежит на общей внешней касательной, рассмотреть трапецию, образованную точками A, B и их проекциями на общую внешнюю касательную к окружностям. Площадь треугольника ABC представить как разность площади указанной трапеции и двух треугольников.

Р е ш е н и е. В этой задаче есть три принципиально различных случая. Первый случай возникает, когда окружности касаются внутренним образом и точка C лежит на единственной их общей касательной. Второй и третий же случаи возникают, если окружности касаются внешним образом, тогда точка C лежит либо на их общей касательной, проходящей через точку их касания, либо лежит на их общей касательной, не проходящей через точку их касания. Все эти случаи представлены на чертеже.



Обозначим точку касания окружностей буквой K, тогда $|AK| = 2, |BK| = 1$, середину отрезка AB обозначим буквой M и разберём по очереди все варианты, заметив предварительно, что в первых двух случаях искомая площадь может быть вычислена как половина произведения длин отрезков AB и CK.

Первый случай. Если окружности касаются внутренним образом, то

$$|AB| = |AK| - |BK| = 1,\ |AM| = |BM| = \frac{1}{2},\ |KM| = |BK| + |BM| = \frac{3}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника CKM получаем

$$|CK| = \sqrt{|CM|^2 - |KM|^2} = \sqrt{\frac{27}{8} - \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

тогда площадь треугольника ABC равна $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$, что меньше, чем 2. Значит, конфигурация, получающаяся в этом случае, не удовлетворяет условию задачи.

Второй случай. Если окружности касаются внешним образом и точка C лежит на их общей касательной, проходящей через точку K, то

$$|AB| = |AK| + |BK| = 3, \quad |AM| = |BM| = \frac{3}{2} \quad |KM| = |BM| - |BK| = \frac{1}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника CKM находим

$$|CK| = \sqrt{|CM|^2 - |KM|^2} = \sqrt{\frac{27}{8} - \frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{4},$$

стало быть, площадь треугольника ABC равна $\dfrac{15\sqrt{2}}{8}$, что больше, чем 2. Таким образом, этот случай удовлетворяет условию задачи.

Третий случай. Окружности касаются внешним образом, и точка C лежит на их общей касательной, не проходящей через точку K. Здесь придется провести несколько более сложные рассуждения, нежели в первых двух случаях. Обозначим буквами P и Q соответственно точки касания большей и меньшей окружностей с прямой, на которой лежит точка C. Тогда $APQB$ – прямоугольная трапеция, $|AP| = 2$, $|BQ| = 1$, $|AB| = 3$. Найдём длину отрезка PQ:

$$|PQ|^2 = |AB|^2 - (|AP| - |BQ|)^2 = 8 \quad \Longrightarrow \quad |PQ| = 2\sqrt{2}.$$

Далее введём на прямой PQ систему координат. Координатой точки P положим число 0, координатой точки Q положим число $2\sqrt{2}$, а координату точки C обозначим за x. Тогда $|PC| = |x|$, $|CQ| = |2\sqrt{2} - x|$. Ясно, что если $x < 0$ или $x > 2\sqrt{2}$, то точка C не попадает на отрезок PQ.

По теореме Пифагора из треугольников APC и BQC получаем

$$|AC|^2 = |AP|^2 + |PC|^2 = x^2 + 4, \quad |BC|^2 = |BQ|^2 + |CQ|^2 = x^2 - 4\sqrt{2}x + 9,$$

после чего воспользуемся формулой длины медианы для треугольника ABC:

$$4|CM|^2 = 2|AC|^2 + 2|BC|^2 - |AB|^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{27}{2} = 4x^2 - 8\sqrt{2}x + 17.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим $x_1 = \sqrt{2}/4$, $x_2 = 7\sqrt{2}/4$. Оба этих значения лежат в промежутке $[0, 2\sqrt{2}]$, что означает, что есть два различных положения точки C, удовлетворяющих условию задачи (на рисунке они обозначены как C' и C''), причём в обоих этих случаях точка C попадает на отрезок PQ. Из этого вытекает, что площадь треугольника ABC может быть посчитана как разность площади трапеции $APQB$ и суммы площадей треугольников APC и BQC.

Проведём эти подсчёты. Сначала найдём площадь трапеции $APQB$:

$$S_{APQB} = \frac{1}{2} \cdot (|AP| + |BQ|) \cdot |PQ| = 3\sqrt{2}.$$

Теперь разберемся с каждым из положений точки C:

1. $$|PC| = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \Longrightarrow \quad |CQ| = \frac{7\sqrt{2}}{4}, \quad S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |PC| = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$S_{\triangle CQB} = \frac{1}{2} \cdot |CQ| \cdot |BQ| = \frac{7\sqrt{2}}{8}, \quad S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{7\sqrt{2}}{8} = \frac{15\sqrt{2}}{8} > 2;$$

2. $$|PC| = \frac{7\sqrt{2}}{4} \quad \Longrightarrow \quad |CQ| = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |PC| = \frac{7\sqrt{2}}{4},$$

$$S_{\triangle CQB} = \frac{1}{2} \cdot |CQ| \cdot |BQ| = \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{2} - \frac{7\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{9\sqrt{2}}{8} < 2.$$

Таким образом, под условие задачи подходит только первый из этих двух вариантов и площадь треугольника ABC равна $\dfrac{15\sqrt{2}}{8}$.

Ответ. $\dfrac{15\sqrt{2}}{8}$.

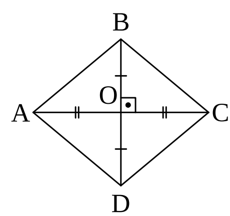
3. Четырёхугольники и многоугольники

3.1. Параллелограммы

Задача 1.

Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями длины 10 и 12.

Идея. Доказать, что диагонали ромба перпендикулярны друг другу и делятся точкой пересечения пополам.
Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора и формулой площади треугольника.

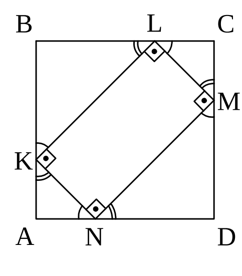


Решение. Рассмотрим ромб $ABCD$, будем считать, что $|AC| = 12$, $|BD| = 10$, буквой O обозначим точку пересечения его диагоналей. По определению ромб – это четырёхугольник, длины сторон которого равны, значит, $|AB| = |CD|$ и $|AD| = |BC|$. А это значит, что, по признаку параллелограмма, ромб является параллелограммом, поэтому его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Но тогда треугольники AOB и COB равны по трём сторонам, что даёт нам равенство углов AOB и COB. Эти углы являются смежными, стало быть, они прямые.

Наконец, по теореме Пифагора находим $|AB| = \sqrt{|AO|^2 + |OB|^2} = \sqrt{61}$. Площадь же равностороннего треугольника, длина стороны которого равна $\sqrt{61}$, равна $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{61})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть $61\sqrt{3}/4$.

Ответ. $\dfrac{61\sqrt{3}}{4}$.

Задача 2.



В квадрат, площадь которого равна 18, вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон этого прямоугольника относятся, как 1:2. Найдите площадь прямоугольника.

Идея. Доказать, что треугольники, отсеченные прямоугольником от квадрата, подобны друг другу. Найти длины отрезков, на которые стороны квадрата разбиты вершинами прямоугольника.
Указание. Воспользоваться тем, что внутренние углы прямоугольника и квадрата – прямые.

Решение. Обозначим вершины квадрата буквами A, B, C и D, вершины прямоугольника обозначим буквами K, L, M и N, причем $K \in [AB]$, $L \in [BC]$, $M \in [CD]$, $N \in [AD]$, $|KL| = 2|KN|$. Величину угла AKN обозначим за α, тогда с учётом того, что угол LKN – прямой, имеем $\widehat{BKL} = \pi - \alpha - \pi/2 = \pi/2 - \alpha$. Далее, угол ABC также прямой, поэтому $\widehat{BLK} = \pi - \pi/2 - (\pi/2 - \alpha) = \alpha$. Продолжая цепочку этих рассуждений, получаем

$$\widehat{AKN} = \widehat{BLK} = \widehat{CML} = \widehat{DNM} = \alpha, \quad \widehat{BKL} = \widehat{CLM} = \widehat{DMN} = \widehat{ANK} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Из этих равенств вытекает подобие треугольников AKN, BLK, CML и DNM. Обозначив $|AK| = x$ и $|AN| = y$ и рассмотрев эти подобия, находим

$$\frac{|AK|}{|BL|} = \frac{|AN|}{|BK|} = \frac{|KN|}{|KL|} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad |BL| = 2x, \quad |BK| = 2y;$$

$$\frac{|CM|}{|BL|} = \frac{|CL|}{|BK|} = \frac{|LM|}{|KL|} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad |CM| = x, \quad |CL| = y.$$

Но $ABCD$ – квадрат, поэтому

$$|AB| = |BC| \iff |AK| + |BK| = |BL| + |CL| \Longrightarrow x + 2y = 2x + y \Longrightarrow x = y.$$

Наконец, если обозначить длину стороны квадрата $ABCD$ за a и воспользоваться формулой площади прямоугольника и теоремой Пифагора, мы получим

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot |BC| \quad \Longrightarrow \quad a^2 = 18 \quad \Longrightarrow \quad a = 3\sqrt{2};$$

$$|AK| + |BK| = |AB| \quad \Longrightarrow \quad 3x = 3\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{2};$$

$$|KN| = \sqrt{|AK|^2 + |AN|^2} = 2 \quad \Longrightarrow \quad |KL| = 4, \quad S_{KLMN} = |KL| \cdot |KN| = 8.$$

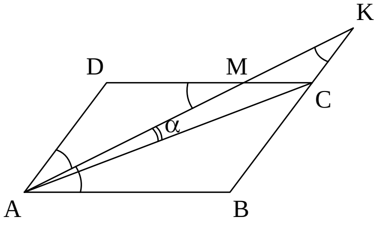
Ответ. 8.

Задача 3.

В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M таким образом, что $|DM| : |MC| = 2$. Найдите величину угла BAD, если известно, что $\widehat{CAM} = \alpha$.

Идея. Продолжить отрезок AM до пересечения с продолжением прямой BC за точку C в точке K. Доказать, что треугольники ABK и AMD равнобедренные.

Указание. Выразить длины сторон параллелограмма и длину отрезка AK через длину отрезка MC и величину угла BAD, воспользоваться теоремой синусов.



Решение. Обозначим точку пересечения прямой AM с продолжением прямой BC за точку C буквой K. Поскольку AK – биссектриса угла BAD, то углы BAK и KAD равны. С другой стороны, прямые AD и BC параллельны, AK – секущая, поэтому углы AKB и KAD равны как внутренние накрест лежащие. Таким образом, угол BAK равен углу AKB, стало быть, треугольник ABK равнобедренный, $|AB| = |BK|$.

Также отметим, что из параллельности прямых AD и BC вытекает подобие треугольников AMD и KMC. Обозначим длину отрезка AD за $2x$, учтём, что $|AD| = |BC|$. Из этого подобия имеем

$$\frac{|AD|}{|CK|} = \frac{|DM|}{|MC|} = 2 \quad \Longrightarrow \quad |CK| = x, \quad |AB| = |BK| = |BC| + |CK| = 3x.$$

Теперь обозначим величины углов KAD, BAK и AKB за γ. Тогда, во-первых,

$$\widehat{BAD} = 2\gamma,\ \widehat{ABK} = \pi - \widehat{BAK} - \widehat{AKB} = \pi - 2\gamma,\ \widehat{ACK} = \pi - \widehat{CAK} - \widehat{AKC} = \pi - \alpha - \gamma$$

и, во-вторых, из равнобедренного треугольника ABK находим $|AK| = 2|AB|\cos\gamma$. Наконец, запишем теорему синусов для треугольника ACK:

$$\frac{|AK|}{\sin\widehat{ACK}} = \frac{|CK|}{\sin\widehat{CAK}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{6x\cos\gamma}{\sin(\pi-\alpha-\gamma)} = \frac{x}{\sin\alpha} \quad \Longrightarrow$$

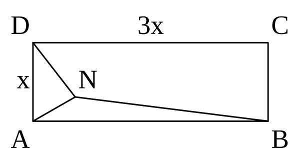
$$\Longrightarrow \quad 6\sin\alpha\cos\gamma = \sin(\alpha+\gamma) \quad \Longleftrightarrow \quad 6\sin\alpha\cos\gamma = \sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\gamma = 5\operatorname{tg}\alpha \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}\alpha) \quad \Longrightarrow \quad \widehat{BAD} = 2\operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}\alpha).$$

Ответ. $2\operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}\alpha)$.

Задача 4.

В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB втрое длиннее стороны BC. Внутри него лежит точка N, причём $|AN| = \sqrt{2}$, $|BN| = 4\sqrt{2}$, $|DN| = 2$. Найдите косинус величины угла BAN и площадь прямоугольника $ABCD$.



Идея. Положить $|AD| = x$, $\widehat{BAN} = \alpha$, воспользоваться теоремой косинусов.

Указание. Рассмотреть треугольники BAN и DAN.

Решение. Обозначим длину стороны AB за $3x$, тогда по условию задачи $|BC| = |AD| = x$, а величину угла BAN обозначим за α, что, с учётом того что угол BAD прямой, даёт нам $\widehat{DAN} = \pi/2 - \alpha$. Запишем теорему косинусов для треугольников BAN и DAN:

$$|BN|^2 = |AB|^2 + |AN|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|AN|\cdot\cos\widehat{BAN} \quad \Longrightarrow \quad 30 = 9x^2 - 6\sqrt{2}x\cos\alpha,$$

$$|DN|^2 = |AD|^2 + |AN|^2 - 2\cdot|AD|\cdot|AN|\cdot\cos\widehat{DAN} \quad \Longrightarrow \quad 2 = x^2 - 2\sqrt{2}x\sin\alpha.$$

Для того чтобы решить полученную систему, умножим её второе уравнение на 15, вычтем из него первое и подставим полученное выражение для x во второе уравнение:

$$15x^2 - 30\sqrt{2}x\sin\alpha - 9x^2 + 6\sqrt{2}x\cos\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 5\sqrt{2}\sin\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha;$$

$$2 = (5\sqrt{2}\sin\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha)^2 - 2\sqrt{2}(5\sqrt{2}\sin\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha)\sin\alpha \implies$$

$$\implies 28\sin^2\alpha = 16\sin\alpha\cos\alpha \implies \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{7},\ \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}},\ \cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}},\ x = \frac{13\sqrt{2}}{\sqrt{65}}.$$

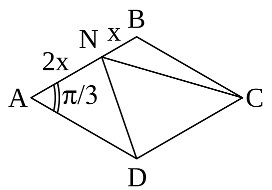
Наконец, $S_{ABCD} = |AB|\cdot|AD| = 3x^2 = \dfrac{78}{5}$.

Ответ. $\cos\widehat{BAN} = \dfrac{7}{\sqrt{65}}$, $S_{ABCD} = \dfrac{78}{5}$.

Задача 5.

В ромбе $ABCD$ величина угла при вершине A равна $\pi/3$. Точка N делит сторону AB в отношении $2:1$, считая от точки A. Найдите $\operatorname{tg}\widehat{DNC}$.

Идея. Выразить длины отрезков DN и CN через длину стороны ромба.
Указание. Воспользоваться теоремой косинусов.



Решение. Положим $|AN| = 2x$, $|BN| = x$. Тогда длины всех сторон ромба равны $3x$. Величина угла BAD равна $\pi/3$, значит, в силу того что ромб является параллелограммом, величина угла ABC равна $2\pi/3$. Выразим длины отрезков DN и CN, воспользовавшись теоремой косинусов:

$$|DN|^2 = |AN|^2+|AD|^2-2\cdot|AN|\cdot|AD|\cdot\cos\widehat{BAD} \implies |DN|^2 = 7x^2, \quad |DN| = \sqrt{7}x;$$

$$|CN|^2 = |BN|^2+|BC|^2-2\cdot|BN|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC} \implies |CN|^2 = 13x^2, \quad |CN| = \sqrt{13}x.$$

Наконец, запишем теорему косинусов в треугольнике CDN:

$$\cos\widehat{DNC} = \frac{|CN|^2+|DN|^2-|CD|^2}{2\cdot|CN|\cdot|DN|} = \frac{11x^2}{2\sqrt{91}x^2} = \frac{11}{2\sqrt{91}} \implies$$

$$\implies \sin\widehat{DNC} = \sqrt{1-\frac{121}{364}} = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{91}} \implies \operatorname{tg}\widehat{DNC} = \frac{9\sqrt{3}}{11}.$$

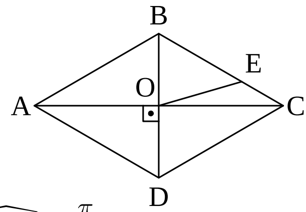
Ответ. $\dfrac{9\sqrt{3}}{11}$.

Задача 6.

В ромбе $ABCD$, длина стороны которого равна 6, на стороне BC взята точка E таким образом, что $|CE| = 2$. Найдите расстояние от точки E до центра ромба, если $\widehat{BAD} = \pi/3$.

Идея. Использовать теорему косинусов для треугольника COE.
Указание. Найти $|OC|$ из прямоугольного треугольника BOC.

Р е ш е н и е. Воспользуемся тем фактом, что центр ромба – это точка пересечения его диагоналей. Обозначим её буквой O. Поскольку диагонали ромба перпендикулярны друг другу и являются биссектрисами его внутренних углов, а величины его противоположных углов равны, то



$$\widehat{BOC} = \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{BCD} = \frac{\pi}{3}, \quad \widehat{BCO} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BCD} = \frac{\pi}{6}.$$

Используя соотношения в прямоугольном треугольнике, найдём $|CO|$:

$$|CO| = |BC| \cdot \cos \widehat{BCO} = 3\sqrt{3}$$

и затем по теореме косинусов из треугольника COE находим $|OE|$:

$$|OE|^2 = |CE|^2 + |CO|^2 - 2 \cdot |CE| \cdot |CO| \cdot \cos \widehat{ECO} = 13 \quad \Longrightarrow \quad |OE| = \sqrt{13}.$$

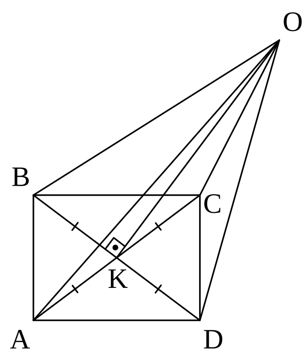
О т в е т. $\sqrt{13}$.

Задача 7.

Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а длина его диагонали равна 10. На плоскости, в которой расположен прямоугольник $ABCD$, выбрана точка O так, что $|OB| = |OD| = 13$. Найдите расстояние от точки O до наиболее удалённой от неё вершины прямоугольника $ABCD$.

И д е я. Найти длины сторон прямоугольника, воспользоваться тем, что точка O лежит на серединном перпендикуляре к BD.

У к а з а н и е. Рассмотреть треугольники AOK и COK, где K – точка пересечения диагоналей прямоугольника. Для нахождения величины угла OKC предварительно найти величину угла BKC.



Р е ш е н и е. Сначала найдём длины всех сторон прямоугольника $ABCD$. Обозначим длины отрезков AB и CD за x, длины отрезков AD и BC обозначим за y, без ограничения общности будем считать, что $x \leqslant y$. Воспользуемся формулой площади прямоугольника и теоремой Пифагора:

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot |AD| \implies xy = 48, \quad |BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 \implies x^2 + y^2 = 100.$$

Решив полученную систему уравнений, находим $x = 6$, $y = 8$. Далее обозначим точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ буквой K. Поскольку диагонали прямоугольника равны по длине и делятся пополам точкой пересечения, то $|AK| = |BK| = |CK| = |DK| = 5$. Точка O равноудалена от вершин

B и D, поэтому она лежит на прямой, проходящей через точку K и перпендикулярной BD. Применяя теорему Пифагора к треугольнику OBK, находим $|OK| = \sqrt{|OB|^2 - |BK|^2} = 12$.

Ясно, что возможно два варианта расположения точки O – либо она лежит в той же полуплоскости относительно прямой BD, что и точка C, либо в другой. Рассмотрим первый из этих вариантов. Длины отрезков OA и OC проще всего искать из треугольников AOK и COK, в которых мы уже знаем длины двух сторон. Для нахождения величин углов OKC и OKA обозначим величину угла BKC за α и запишем теорему косинусов для треугольника BCK:

$$|BC|^2 = |BK|^2 + |CK|^2 - 2 \cdot |BK| \cdot |CK| \cdot \cos \widehat{BKC} \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{25+25-64}{2\cdot 5\cdot 5} = -\frac{7}{25}.$$

Таким образом, угол BKC – тупой, поэтому

$$\widehat{OKC} = \widehat{BKC} - \frac{\pi}{2}, \quad \cos\widehat{OKC} = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25};$$

$$|OC| = \sqrt{|OK|^2 + |CK|^2 - 2\cdot|OK|\cdot|CK|\cdot\cos\widehat{OKC}} = \sqrt{144 + 25 - \frac{576}{5}} = \sqrt{\frac{269}{5}}.$$

Для вычисления длины отрезка OA можно рассуждать аналогично, а можно заметить, что OK – медиана треугольника AOC, поэтому

$$|OK|^2 = \frac{2|OA|^2 + 2|OC|^2 - |AC|^2}{4} \iff |OA|^2 = \frac{4|OK|^2 - 2|OC|^2 + |AC|^2}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |OA|^2 = \frac{576 - \frac{538}{5} + 100}{2} = \frac{1421}{5} \quad \Longrightarrow \quad |OA| = \sqrt{\frac{1421}{5}} = 7\sqrt{\frac{29}{5}}.$$

Очевидно, что $|OA| > |OB| > |OC|$, поэтому ответом к задаче будет длина отрезка OA.

Если рассмотреть второй вариант расположения точки O, то из соображений симметрии очевидно, что численное значение ответа останется таким же, единственная разница будет заключаться в том, что наиболее удаленной от точки O вершиной окажется не вершина A, а вершина C.

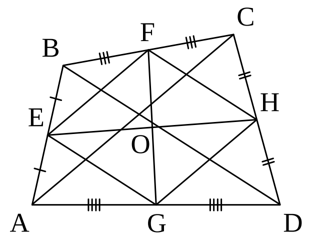
Ответ. $7\sqrt{\dfrac{29}{5}}$.

Задача 8.

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки E, F, H и G являются соответственно серединами отрезков AB, BC, CD и AD; O – точка пересечения отрезков EH и FG. Известно, что $|EH| = a$, $|FG| = b$, $\widehat{FOH} = \alpha$. Найдите длины диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

Идея. Доказать, что четырёхугольник $EFHG$ – параллелограмм, а длины его сторон равны половинам длин диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

Указание. Используя свойства средней линии треугольника, доказать, что четырёхугольник $EFHG$ – параллелограмм.
Указание. Использовать теорему косинусов для нахождения $|EF|$ и $|FH|$.



Решение. Поскольку точки E и F являются серединами сторон AB и BC, то EF является средней линией треугольника ABC, из чего вытекает $EF||AC$ и $|EF| = \frac{1}{2}|AC|$. С другой стороны, точки G и H являются серединами сторон AD и CD, поэтому GH – средняя линяя треугольника ACD, что даёт нам $GH||AC$ и $|GH| = \frac{1}{2}|AC|$.

Из полученных фактов вытекает, что $EF||GH$, $|EF| = |GH|$, поэтому $EFHG$ – параллелограмм. Но тогда отрезки EH и FG, являющиеся его диагоналями, точкой пересечения делятся пополам, то есть

$$|OG| = |OF| = \frac{1}{2}|FG| = \frac{b}{2}, \quad |OE| = |OH| = \frac{1}{2}|EH| = \frac{a}{2}.$$

Теперь нам надо всего лишь записать теорему косинусов для треугольников EOF и FOH и ещё раз учесть тот факт, что $|EF| = \frac{1}{2}|AC|$, а $|FH| = \frac{1}{2}|BD|$ (в силу того, что FH – средняя линяя треугольника BCD):

$$|EF|^2 = |OE|^2 + |OF|^2 - 2 \cdot |OE| \cdot |OF| \cdot \cos\widehat{EOF} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{ab\cos\alpha}{2};$$

$$|FH|^2 = |OF|^2 + |OH|^2 - 2 \cdot |OF| \cdot |OH| \cdot \cos\widehat{FOH} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{ab\cos\alpha}{2};$$

$$|AC| = 2|EF| = 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{ab\cos\alpha}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha},$$

$$|BD| = 2|FH| = 2\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{ab\cos\alpha}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.$$

Ответ. $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$ и $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$.

Задача 9.

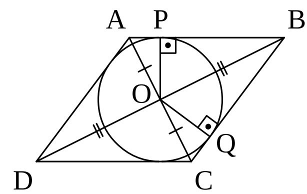
Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O. Найдите его периметр, если известно, что $|AO| = |OC| = 1$, $|BO| = |OD| = 2$.

Идея. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ – ромб.
Указание. Обозначить буквами P и Q точки касания окружности со сторонами AB и BC, рассмотреть треугольники AOP, COQ, BOP и BOQ.

Решение. Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ – ромб. Для этого обозначим буквами P и Q точки касания окружности со сторонами AB и BC. Тогда $|OP| =$

$|OQ|$ и ясно, что, во-первых, прямоугольные треугольники AOP и COQ равны по гипотенузе и катету и, во-вторых, прямоугольные треугольники BOP и BOQ равны по гипотенузе и катету. Из этого следует $|AP| = |CQ|$, $|BP| = |BQ|$, стало быть,

$$|AB| = |AP| + |BP| = |CQ| + |BQ| = |BC|.$$

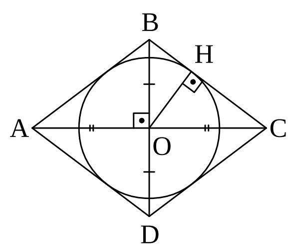


Далее, рассматривая точки касания окружности со сторонами CD и AD и проводя совершенно аналогичные рассуждения, мы можем доказать, что $|AB| = |AD|$, $|BC| = |CD|$. Значит, $ABCD$ – ромб. Но тогда его диагонали являются биссектрисами его внутренних углов, поэтому точка O и есть точка пересечения его диагоналей (поскольку центр окружности, вписанной в многоугольник, лежит на пересечении биссектрис его внутренних углов). Наконец, диагонали ромба перпендикулярны друг другу, $|AB| = \sqrt{|AO|^2 + |BO|^2} = \sqrt{5}$, а $P_{ABCD} = 4\sqrt{5}$.

О т в е т. $4\sqrt{5}$.

Задача 10.

В ромб, одна из диагоналей которого имеет длину 10, вписан круг площади 9π. Вычислите площадь части ромба, расположенной вне круга.



И д е я. Воспользоваться тем, что центр круга, вписанного в ромб, лежит на пересечении его диагоналей.

У к а з а н и е. Провести радиус круга в одну из точек его касания со сторонами ромба, учесть, что диагонали ромба перпендикулярны, рассмотреть полученные прямоугольные треугольники.

Р е ш е н и е. Обозначим вершины ромба буквами A, B, C и D, точку пересечения его диагоналей обозначим буквой O, опустим перпендикуляр OH на сторону BC. Без ограничения общности будем считать, что $|AC| = 10$.

Далее заметим, что поскольку диагонали ромба делятся пополам точкой их пересечения и являются биссектрисами его внутренних углов, то, во-первых, $|AO| = |OC| = 5$ и, во-вторых, точка O является центром круга, вписанного в ромб $ABCD$. Но тогда отрезок OH является радиусом этого круга, а его длина равна $\sqrt{9\pi/\pi}$, то есть 3.

Теперь заметим, что для нахождения площади ромба нам достаточно найти длину его второй диагонали BD, поскольку площадь ромба равна половине произведения длин его диагоналей. Это можно легко сделать, рассмотрев прямоугольные треугольники OCH и BOC:

$$\sin\widehat{BCO} = \frac{|OH|}{|OC|} = \frac{3}{5} \Longrightarrow \cos\widehat{BCO} = \frac{4}{5},\ \operatorname{tg}\widehat{BCO} = \frac{3}{4},\ |BO| = |OC| \cdot \operatorname{tg}\widehat{BCO} = \frac{15}{4}.$$

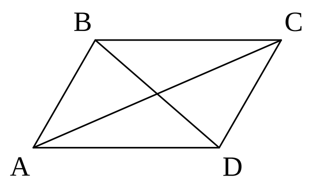
Таким образом,

$$|BD| = 2|BO| = \frac{15}{2},\ S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD| = \frac{75}{2},\ S_{ABCD} - S_{\text{круга}} = \frac{75}{2} - 9\pi.$$

О т в е т. $\dfrac{75}{2} - 9\pi$.

Задача 11.

В параллелограмме $ABCD$ длины диагоналей AC и BD равны d_1 и d_2 $(d_1 \neq d_2)$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $\widehat{ABC} = \alpha$.



И д е я. Воспользоваться тем, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.
У к а з а н и е. Записать теорему косинусов в треугольнике ABC. Учесть, что площадь параллелограмма равна произведению длин двух его соседних сторон и синуса величины угла между ними.

Р е ш е н и е. Обозначим длины сторон AB и AC за x и y соответственно, будем считать, что $|AC| = d_1$, $|BD| = d_2$. Учтём, что площадь параллелограмма равна произведению длин двух его соседних сторон и синуса величины угла между ними, то есть нам надо искать не сами величины x и y, а их произведение. Воспользуемся тем, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон, а также запишем теорему косинусов в треугольнике ABC, предварительно заметив, что из того, что длины диагоналей параллелограмма различны, следует, что он не является прямоугольником и $\cos\alpha \neq 0$:

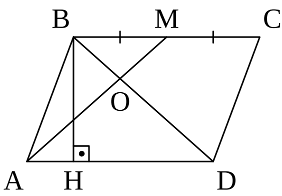
$$\begin{cases} d_1^2 + d_2^2 = 2x^2 + 2y^2, \\ d_1^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2), \\ xy = \dfrac{x^2 + y^2 - d_1^2}{2\cos\alpha} \end{cases} \Longrightarrow \quad xy = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4\cos\alpha}.$$

Наконец, площадь параллелограмма $ABCD$ равна $xy\sin\alpha$, то есть $\dfrac{d_2^2 - d_1^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

О т в е т. $\dfrac{d_2^2 - d_1^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

Задача 12.

Через вершину A и середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырёхугольника $OMCD$.



Идея. Представить площадь четырёхугольника $OMCD$ как разность площадей треугольника BCD и треугольника BOM.

Указание. Воспользоваться леммами о площадях треугольников.

Решение. Проведём высоту BH параллелограмма $ABCD$. Заметим, что

$$S_{ABCD} = |BC| \cdot |BH|, \quad S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |BH|,$$

поэтому площадь треугольника BCD равна половине площади параллелограмма $ABCD$, то есть $1/2$.

Далее обозначим $|BM| = |MC| = x$. Тогда $|AD| = 2x$. Треугольники BOM и DOA подобны, стало быть,

$$\frac{|BO|}{|OD|} = \frac{|BM|}{|AD|} = \frac{1}{2}.$$

Наконец, заметим, что

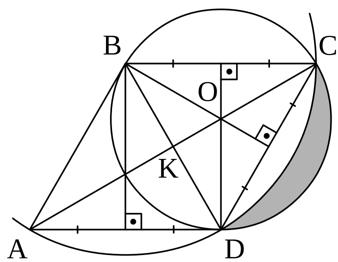
$$\frac{S_{\triangle BOM}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{|BM| \cdot |BO|}{|BC| \cdot |BD|} = \frac{x}{2x} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle BOM} = \frac{1}{12}.$$

Значит, $S_{OMCD} = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle BOM} = 5/12$.

Ответ. $\dfrac{5}{12}$.

Задача 13.

В параллелограмме $ABCD$ $|AB| = |BD| = 1$, а длины его диагоналей относятся как $1 : \sqrt{3}$. Найдите площадь той части круга, описанного около треугольника BDC, которая не принадлежит кругу, описанному около треугольника ADC.



Идея. Найти длины сторон и величины углов параллелограмма $ABCD$, вычислить длины радиусов и расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BDC и ADC.

Указание. Рассмотреть два случая.

Указание. Отбор случаев провести, используя неравенство треугольника.

Указание. Доказать, что B – центр окружности, описанной около треугольника ACD, а треугольник BCD – равносторонний, искомую площадь вычислить как разность площадей двух сегментов.

Решение. Поскольку в условии задачи не сказано, какая из диагоналей параллелограмма $ABCD$ длиннее, то нам придётся рассмотреть два случая. Сначала будем считать, что $|AC| = 1/\sqrt{3}$. Обозначим буквой K точку пересечения диагоналей параллелограмма. Тогда в треугольнике ABK известны все стороны: $|AB| = 1, |BK| = \frac{1}{2}, |AK| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Но такой треугольник не существует, поскольку не выполняется неравенство треугольника.

Пусть теперь $|AC| = \sqrt{3}$. В этом случае $|AB| = 1, |BK| = \frac{1}{2}, |AK| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Но тогда треугольник ABK – прямоугольный и, значит, диагонали параллелограмма перпендикулярны, т.е. $ABCD$ – ромб и, кроме того, треугольники ABD и CBD равносторонние. Из всего этого вытекает, что точка B лежит, во-первых, на серединном перпендикуляре к AC и, во-вторых, на серединном перпендикуляре к AD. Значит, точка B – не что иное, как центр окружности, описанной около треугольника ADC, а длина радиуса этой окружности равна длине отрезка BC, то есть 1. Центром же окружности, описанной около равностороннего треугольника BCD будет точка O, которая является точкой пересечения его медиан. Длину её радиуса посчитать легко (например, с помощью теоремы синусов) – она равна $1/\sqrt{3}$.

Итак, перед нами стоит следующая задача: даны два круга, известны длины их радиусов и расстояние между их центрами. Необходимо найти площадь той части одного из них, которая не лежит внутри другого круга. Решение этой задачи в общем случае рекомендуем провести самостоятельно.

В нашей же задаче ясно, что CD – общая хорда этих двух кругов и искомая площадь может быть вычислена как разность площадей сегмента CD круга, описанного около треугольника BCD и сегмента CD круга, описанного около треугольника ACD. Поскольку величина угла CBD равна $\pi/3$, то величина угла COD равна $2\pi/3$ (по свойствам центральных и вписанных углов). Наконец, пользуясь формулой площади сегмента, получаем

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{18}.$$

Ответ. $\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{18}$.

Задача 14.

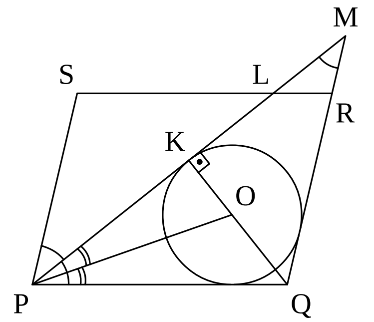
В параллелограмме $PQRS$ биссектриса угла при вершине P, градусная мера которого равна 80°, пересекает сторону RS в точке L. Найдите длину радиуса окружности, касающейся отрезка PQ и лучей QR и PL, если известно, что $|PQ| = 7$.

Идея. Рассмотреть треугольник, образованный точками P, Q и точкой пересечения прямой PL с продолжением прямой QR за точку R, доказать, что он равнобедренный, а окружность из условия задачи в него вписана.
Указание. Для доказательства равнобедренности треугольника воспользоваться свойствами внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых.
Указание. Воспользоваться тем, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.

Решение. Обозначим точку пересечения прямой PL с продолжением прямой QR за точку R буквой M. Поскольку PM – биссектриса угла QPS, то $\angle QPM = \angle SPM$. С другой стороны, прямые PS и QR параллельны, PM –

секущая, поэтому углы PMQ и SPM равны как внутренние накрест лежащие. Таким образом, угол PMQ равен углу QPM, стало быть, треугольник PQM равнобедренный, $|PQ| = |QM| = 7$, $\widehat{PMQ} = \widehat{QPM} = 40^\circ$.

Далее, окружность, касающаяся отрезка PQ и лучей QR и PL, является вписанной в треугольник PQM, поскольку она касается всех его сторон. Если обозначить её центр буквой O, а точку её касания со стороной PM буквой K, то из равнобедренности треугольника PQM вытекает, что K – середина PM, а поскольку центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис, то градусная мера угла OPK равна 20°. Наконец, из прямоугольных треугольников PQK и OPK мы получаем



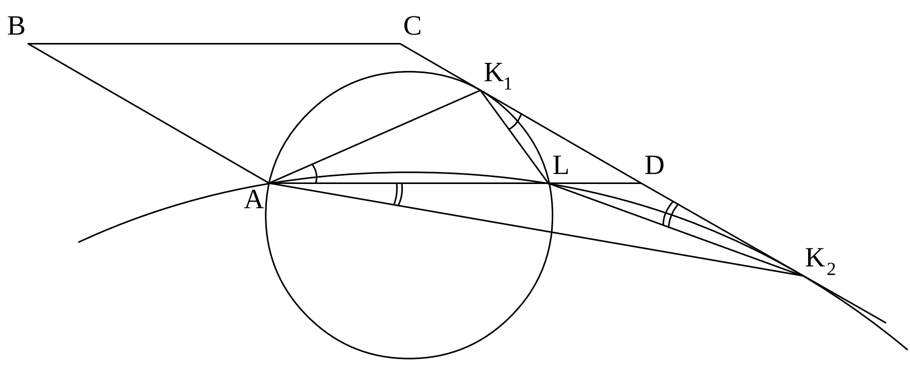
$$|PK| = |PQ| \cdot \cos\widehat{QPK} = 7\cos 40^\circ, \quad |OK| = |PK| \cdot \operatorname{tg}\widehat{OPK} = 7\cos 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ.$$

О т в е т. $7\cos 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ$.

Задача 15.

В параллелограмме $ABCD$ величина угла BCD равна $5\pi/6$, а длина основания AD равна 8. Найдите длину радиуса окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A, а также пересекающей основание AD на расстоянии 2 от точки D.

И д е я. Рассмотреть треугольники AKL и KLD, применить теорему синусов.
У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части. Найти длину отрезка KL и синус величины угла LKD.
У к а з а н и е. Длину радиуса окружности искать по теореме синусов для треугольника AKL. Воспользоваться свойством угла между касательной и хордой для нахождения величины угла LAK.
У к а з а н и е. Рассмотреть оба варианта расположения точки K.



Р е ш е н и е. В этой задаче возможно два различных случая: K – точка касания прямой CD и окружности из условия задачи может лежать на луче $[DC)$ (этому случаю на чертеже соответствует точка K_1), а может лежать на луче, дополнительном к нему (этому случаю на чертеже соответствует точка K_2). Обозначим точку пересечения окружности и основания AD буквой L, тогда по условию $|LD| = 2$, $|AD| = 8$ и независимо от расположения точки K по теореме о квадрате длины касательной мы находим

$$|KD|^2 = |LD| \cdot |AD| = 16 \quad \Longrightarrow \quad |KD| = 4.$$

Дальше будем рассуждать следующим образом. Опять-таки независимо от расположения точки K углы LKD и LAK равны по теореме об угле между касательной и хордой. Обозначим величину этих углов за α, тогда, записывая теорему синусов для треугольника AKL, вписанного в нашу окружность, мы получаем

$$R_{\text{окружности}} = \frac{|KL|}{2\sin\widehat{KAL}} = \frac{|KL|}{2\sin\alpha}.$$

С другой стороны, применение теоремы синусов к треугольнику LKD даёт нам

$$\frac{|KL|}{\sin\widehat{KDL}} = \frac{|LD|}{\sin\widehat{LKD}} \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{|LD|\sin\widehat{KDL}}{|KL|}.$$

Но по свойствам углов параллелограмма величина угла KDL равна либо $\pi/6$ (в первом случае), либо $5\pi/6$ (во втором случае). Это означает, что $\sin\widehat{KDL}$ независимо от конфигурации равен $1/2$, стало быть,

$$\sin\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{|KL|} = \frac{1}{|KL|}, \quad R_{\text{окружности}} = \frac{|KL|}{2\cdot\frac{1}{|KL|}} = \frac{|KL|^2}{2}.$$

Квадрат длины отрезка KL ищется элементарно: надо всего лишь воспользоваться теоремой косинусов для треугольника KDL. Для первого случая (точки K_1) мы имеем

$$\widehat{K_1DL} = \frac{\pi}{6}, \quad |K_1L|^2 = |K_1D|^2 + |LD|^2 - 2\cdot|K_1D|\cdot|LD|\cdot\cos\widehat{K_1DL} = 20 - 8\sqrt{3},$$

а для второго случая получаем

$$\widehat{K_2DL} = \frac{5\pi}{6}, \quad |K_2L|^2 = |K_2D|^2 + |LD|^2 - 2\cdot|K_2D|\cdot|LD|\cdot\cos\widehat{K_2DL} = 20 + 8\sqrt{3}.$$

Осталось поделить пополам полученные величины и выписать ответ.

Ответ. $10 \pm 4\sqrt{3}$.

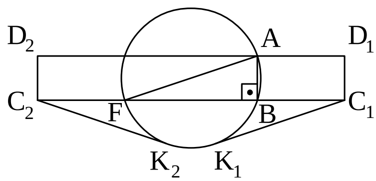
Задача 16.

Окружность, длина диаметра которой равна $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведённой из точки C к этой окружности, равна 3, а $|AB| = 1$. Найдите все возможные значения, которые может принимать длина стороны BC.

И д е я. Воспользоваться свойствами вписанных углов и теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части.

У к а з а н и е. Доказать, что прямая BC пересекается с окружностью из условия задачи в двух точках, найти длину отрезка, отсекаемого от этой прямой окружностью.

У к а з а н и е. Рассмотреть оба возможных варианта расположения точки C.



Р е ш е н и е. В этой задаче возможны две различные конфигурации, а именно: окружность из условия задачи может не пересекать сторону BC (этому случаю на чертеже соответствуют прямоугольник ABC_1D_1 и касательная C_1K_1), а может и пересекать (этому случаю на чертеже соответствуют прямоугольник ABC_2D_2 и касательная C_2K_2). Теперь заметим, что прямая BC не является касательной к окружности. В противном случае мы бы получили, что она перпендикулярна как диаметру окружности, проведённому через точку B, так и отрезку AB, который этим диаметром не является (его длина не равна длине диаметра), что невозможно. Поэтому прямая BC пересекает окружность ещё и в некоторой точке F, отличной от B.

Далее заметим, что треугольник ABF прямоугольный, поэтому AF – диаметр окружности, $|AF| = \sqrt{10}$ и по теореме Пифагора $|BF| = \sqrt{10-1} = 3$. Наконец, обозначим искомую длину стороны BC за x и воспользуемся теоремой о квадрате длины касательной. В первом случае $|C_1F| = |BC_1| + |BF| = x + 3$,

$$|C_1K_1|^2 = |C_1B| \cdot |C_1F| \quad \Longrightarrow \quad x(x+3) = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2},$$

а во втором случае $|C_2F| = |BC_2| - |BF| = x - 3$,

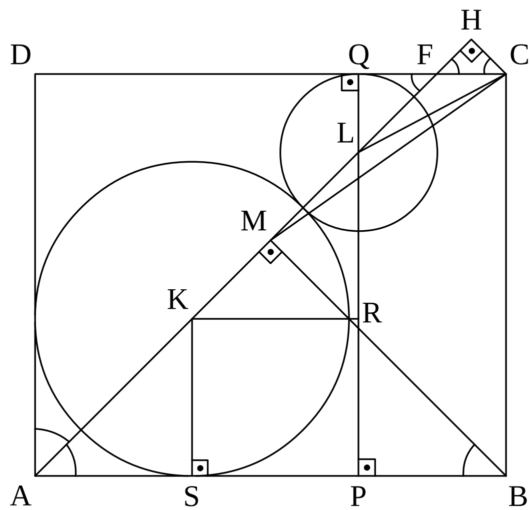
$$|C_2K_2|^2 = |C_2B| \cdot |C_2F| \quad \Longrightarrow \quad x(x-3) = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}.$$

О т в е т. $\dfrac{3(\sqrt{5} \pm 1)}{2}$.

Задача 17.

В прямоугольнике $ABCD$, в котором $|AD| = 3 + 3\sqrt{2}/2$, а $|AB| = 6$, расположены две окружности. Окружность с центром в точке K, длина радиуса которой равна 2, касается сторон AB и AD. Окружность с центром в точке L, длина радиуса которой равна 1, касается стороны CD и первой окружности. Найдите площадь треугольника CLM, если M – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую, проходящую через точки K и L.

И д е я. Доказать, что точки A, K, L лежат на одной прямой, площадь треугольника CLM искать как половину произведения длины отрезка LM на длину перпендикуляра CH, опущенного из точки C на прямую KL.



Указание. Провести через точку L прямую, параллельную AD, опустить на неё перпендикуляр KR. Показать, что сумма величин углов AKR и LKR равна π.

Указание. Обозначить буквой F точку пересечения прямой KL и стороны CD, воспользоваться тем, что треугольники ADF, CFH и ABM прямоугольные и равнобедренные.

Решение. Отправной точкой для решения этой задачи является доказательство того, что точки A, K, L лежат на одной прямой. Обозначим точку касания окружности с центром в точке K со стороной AB буквой S. KA – биссектриса угла BAD, поэтому $\widehat{KAS} = \widehat{AKS} = \pi/4$, $|KS| = 2$, $|AK| = 2\sqrt{2}$. Проведём через точку L прямую PQ, параллельную AD (P лежит на прямой AB, Q лежит на прямой CD), и опустим на неё перпендикуляр KR. Тогда $ADQP$ – прямоугольник, $|PQ| = |AD| = 3 + 3\sqrt{2}/2$, а Q – точка касания второй окружности и отрезка CD, стало быть, $|LQ| = 1$.

С другой стороны, $KRPS$ тоже прямоугольник, то есть $|PR| = |KS| = 2$, $|LR| = |PQ| - |LQ| - |PR| = 3\sqrt{2}/2$. Окружности касаются друг друга, поэтому длина отрезка KL равна сумме длин их радиусов, то есть $|KL| = 3$. Из прямоугольного треугольника KLR мы находим $\sin\widehat{LKR} = \sqrt{2}/2$, то есть $\widehat{LKR} = \pi/4$.

Но тогда $\widehat{AKS}+\widehat{SKR}+\widehat{LKR} = \pi$, а это означает, что угол AKL – развёрнутый, точки A, K и L лежат на одной прямой, $|AL| = |AK| + |KL| = 3 + 2\sqrt{2}$.

Второй ключевой идеей решения является следующее: площадь треугольника CLM проще всего искать как половину произведения длины отрезка LM на длину перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую KL. Мы выяснили, что прямая KL проходит через точку A и является биссектрисой угла BAD. Поэтому треугольник ABM прямоугольный и равнобедренный, $|AM| = |AB|/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. Значит, $|LM| = |AL| - |AM| = 3 - \sqrt{2}$.

Наконец, обозначим буквой F точку пересечения прямой KL и стороны CD, а буквой H обозначим основание перпендикуляра, опущенного из C на KL. Треугольник ADF прямоугольный и равнобедренный, $|DF| = |AD| = 3 + 3\sqrt{2}/2$, $|CF| = |CD| - |DF| = 3 - 3\sqrt{2}/2$. Треугольник CFH тоже прямоугольный и равнобедренный, поэтому $|CH| = |CF|/\sqrt{2} = (3\sqrt{2} - 3)/2$.

Теперь можно найти площадь треугольника CLM:

$$S_{\triangle CLM} = \frac{1}{2} \cdot |CH| \cdot |LM| = \frac{1}{2} \cdot (3 - \sqrt{2}) \cdot \frac{3\sqrt{2} - 3}{2} = \frac{12\sqrt{2} - 15}{4}.$$

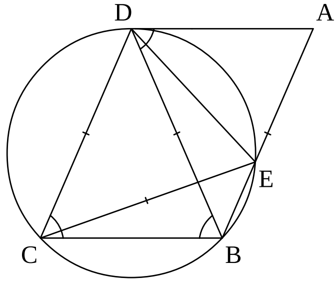
Ответ. $\dfrac{12\sqrt{2} - 15}{4}$.

Задача 18.

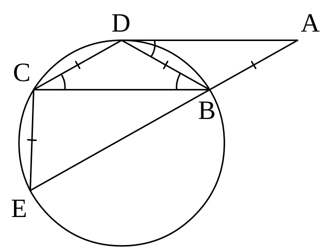
Окружность, проходящая через вершины B, C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите длину отрезка AE, если $|AD| = 4$ и $|CE| = 5$.

Идея. Использовать теорему о квадрате длины касательной и теорему об угле между касательной и хордой. Рассмотреть два случая.
Указание. Показать, что треугольник DBC равнобедренный.
Указание. Использовать то, что четырёхугольник $BCDE$ ($BDCE$) является трапецией, вписанной в окружность.

Решение. Заметим, что в этой задаче возможны два случая: окружность пересекает отрезок AB и окружность пересекает продолжение отрезка AB за точку B. Причём большая часть рассуждений одинакова для обоих случаев.



Сразу отметим для себя, что по условию задачи AD – касательная к окружности. Это означает, что нам могут пригодиться две классических теоремы: теорема о квадрате длины касательной и теорема об угле между касательной и хордой. Первая из них даёт нам соотношение $|AD|^2 = |AE| \cdot |AB|$, из чего мы делаем вывод, что для решения задачи нам достаточно каким-то образом найти длину стороны AB.



Далее, использовав вторую из перечисленных теорем, мы получаем, что углы ADB и DCB равны (оба они измеряются половиной дуги DB). Но, с другой стороны, $AD||BC$, поэтому углы ADB и DBC равны в силу свойств внутренних накрест лежащих углов. Значит, угол DBC равен углу DCB, стало быть, ΔDBC равнобедренный, $|BD| = |CD|$.

Единственным не использованным нами фактом является то, что прямые AB и CD также параллельны. Исходя из этого заметим, что в первом случае четырёхугольник $BCDE$ является трапецией, вписанной в окружность, а во втором случае четырёхугольник $BDCE$ является трапецией, вписанной в окружность. Но вписанная в окружность трапеция является равнобедренной, а у равнобедренной трапеции равны не только боковые стороны, но и диагонали. Таким образом, в обоих случаях получаем, что $|BD| = |CE| = 5$ и длина отрезка CD по доказанному выше также равна 5, ну и поскольку $|AB| = |CD|$ в силу свойств параллелограмма, то $|AB| = 5$.

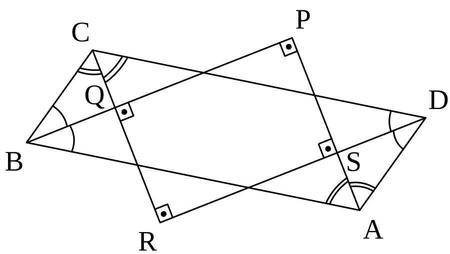
В первом случае получаем $|AD|^2 = |AE| \cdot |AB| \Rightarrow 16 = 5|AE| \Rightarrow |AE| = 16/5$.

Второй же случай невозможен, так как длина отрезка касательной, проведённой из точки к окружности, всегда больше длины внешней части секущей, проведённой из этой точки к той же окружности, т.е. в нашем случае должно выполняться условие $|AD| > |AB|$, но $|AD| = 4, |AB| = 5$.

Ответ. $\dfrac{16}{5}$.

Задача 19.

В параллелограмме проведены биссектрисы всех внутренних углов. Четырёхугольник, образованный точками пересечения этих биссектрис, имеет площадь, равную двум третям площади исходного параллелограмма. Найдите отношение длин большей и меньшей сторон исходного параллелограмма.



Идея. Доказать, что четырёхугольник ($PQRS$), образованный точками пересечения биссектрис всех внутренних углов исходного параллелограмма ($ABCD$), является прямоугольником.

Указание. Показать, что биссектрисы двух соседних углов параллелограмма пересекаются под прямым углом.

Указание. Выразить длины сторон четырёхугольника $PQRS$ через длины сторон параллелограмма $ABCD$ и величину одного из его внутренних углов, рассматривая различные прямоугольные треугольники.

Решение. Обозначим вершины параллелограмма буквами A, B, C и D, точку пересечения биссектрис углов BAD и ABC обозначим буквой P, точку пересечения биссектрис углов ABC и BCD обозначим буквой Q, точку пересечения биссектрис углов BCD и ADC обозначим буквой R, а точку пересечения биссектрис углов ADC и BAD обозначим буквой S.

Ключевым моментом в решении этой задачи является доказательство того, что четырёхугольник $PQRS$ – прямоугольник. Поступим следующим образом: обозначим величину угла BAD за α, тогда, по свойствам параллелограмма и условию задачи,

$$\widehat{BCD} = \alpha, \ \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \pi - \alpha,$$

$$\widehat{BAP} = \widehat{DAP} = \widehat{BCR} = \widehat{DCR} = \frac{\alpha}{2},$$

$$\widehat{ABP} = \widehat{CBP} = \widehat{ADR} = \widehat{CDR} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

С учётом этого, применяя теорему о сумме величин углов треугольника к треугольникам ABP, BCQ, CDR и DAS, мы получаем, что все четыре угла P, Q, R и S – прямые. Значит, $PQRS$ – прямоугольник.

Теперь нам надо связать между собой площади параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $PQRS$. Обозначим длины сторон AB и AD за b и d соответственно. Рассматривая прямоугольные треугольники ABP и DAS, находим

$$|AS| = |AD| \cdot \cos\widehat{DAS} = d\cos\frac{\alpha}{2}, \quad |AP| = |AB| \cdot \cos\widehat{BAP} = b\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Отметим, что мы, вообще говоря, не знаем, как точно расположены точки A, P и S. Однако мы можем утверждать, что точка A никак не может лежать между точками P и S, поэтому

$$|PS| = ||AP| - |AS|| = |b - d|\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Далее, проводя аналогичные рассуждения для треугольников ABP и BCQ, получаем

$$|BQ| = |BC| \cdot \sin \widehat{BCQ} = d \sin \frac{\alpha}{2}, \quad |BP| = |AB| \cdot \sin \widehat{BAP} = b \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Стало быть, $|PQ| = ||BP| - |BQ|| = |b-d| \sin \dfrac{\alpha}{2}$. Теперь воспользуемся формулами площади:

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot |AD| \cdot \sin \widehat{BAD} = bd \sin \alpha,$$

$$S_{PQRS} = |PQ| \cdot |PS| = |b-d|^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(b-d)^2 \sin \alpha.$$

Деля друг на друга полученные соотношения, имеем

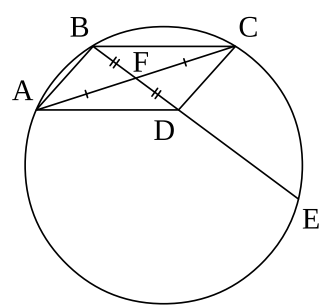
$$\frac{2}{3} = \frac{S_{PQRS}}{S_{ABCD}} = \frac{(b-d)^2}{2bd} \quad \Longleftrightarrow \quad 4bd = 3(b^2 - 2bd + d^2) \quad \Longleftrightarrow \quad 3b^2 - 10bd + 3d^2 = 0.$$

Решая последнее уравнение как квадратное относительно b, находим $b = 3d$ или $b = \dfrac{d}{3}$. Ясно, что в любом случае отношение длин большей и меньшей сторон параллелограмма $ABCD$ равно 3.

Ответ. $3:1$.

Задача 20.

Через вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E таким образом, что $|BE| = 9$. Найдите $|BD|$, если $|AB| = 3$, $|BC| = 5$.



Идея. Использовать свойство пересекающихся хорд и свойство параллелограмма, связывающее диагонали и стороны параллелограмма.

Указание. Выяснить взаимное расположение точек B, D и E.

Указание. Обозначить половины диагоналей параллелограмма за x и y. Использовать свойство пересекающихся хорд и свойство параллелограмма, связывающее диагонали и стороны параллелограмма.

Решение. Для начала отметим, что $|CD| = 3$, $|AD| = 5$, и попытаемся понять, где находится точка E: на отрезке BD или на его продолжении за точку D. Это сделать достаточно просто. Если E находится на отрезке BD, то $|BD| > |BE| = 9$, но, с другой стороны, по неравенству треугольника $|BD| < |AB| + |AD| = 8$. Противоречие. Итак, точка E лежит вне параллелограмма $ABCD$.

Теперь, когда мы определились с конфигурацией, немного порассуждаем. В общем-то ясно, что отрезок BD, длину которого просят найти, является частью хорды BE. Поэтому мы должны каким-то образом использовать свойство пересекающихся хорд.

Проведём диагональ AC и обозначим буквой F точку пересечения диагоналей. Так как диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, то обозначим $|AF| = |FC| = x$, $|BF| = |FD| = y$. Теперь используем свойство пересекающихся хорд и одно из свойств параллелограмма, связывающее диагонали и стороны параллелограмма:

$$\begin{cases} |AF|\cdot|FC| = |BF|\cdot|FE|, \\ |AC|^2 + |BD|^2 = 2(|AB|^2 + |BC|^2); \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 = y\cdot(9-y), \\ 4x^2 + 4y^2 = 2(3^2+5^2); \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x^2 + y^2 = 9y, \\ x^2 + y^2 = 17; \end{cases} \implies y = \frac{17}{9} \implies |BD| = 2y = \frac{34}{9}.$$

О т в е т. $\dfrac{34}{9}$.

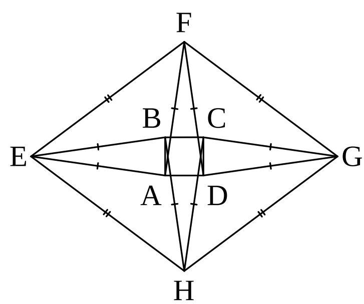
Задача 21.

Стороны ромба $EFGH$ являются гипотенузами прямоугольных равнобедренных треугольников EAF, FDG, GCH и HBE, причём все эти треугольники имеют общие внутренние точки с ромбом $EFGH$. Сумма площадей четырёхугольника $ABCD$ и ромба $EFGH$ равна 12. Найдите $|GH|$.

И д е я. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ является квадратом.

У к а з а н и е. Показать, что равнобедренные треугольники ABE, BCH, CDG и DAF равны и $\widehat{ADC} = \pi/2$.

У к а з а н и е. Выразить площади квадрата $ABCD$ и ромба $EFGH$ через длину стороны ромба и величину его острого угла.



Р е ш е н и е. Обозначим длину стороны ромба $EFGH$ за $a\sqrt{2}$, тогда длины отрезков AE, AF, BH, BE, CH, CG, DF, DG будут равны a. Помимо этого, величину угла FEH обозначим за α, без ограничения общности будем считать, что $\alpha \leqslant \pi/2$. Ясно, что тогда

$$\widehat{FGH} = \alpha, \quad \widehat{EFG} = \widehat{EHG} = \pi - \alpha.$$

Далее заметим, что величины всех углов AEF, AFE, BEH, BHE, CHG, CGH, DFG, DGF равны $\pi/4$ и

$$\widehat{AEB} = \widehat{AEF} + \widehat{BEH} - \widehat{FEH} = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \widehat{CGD} = \widehat{DGF} + \widehat{CGH} - \widehat{FGH} = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

$$\widehat{AFD} = \widehat{EFG} - \widehat{AFE} - \widehat{DFG} = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \widehat{CHB} = \widehat{EHG} - \widehat{BHE} - \widehat{CHG} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Из этого вытекает, что все четыре равнобедренных треугольника ABE, BCH, CDG и DAF равны по двум сторонам и углу между ними, стало быть, $ABCD$ – ромб. Более того, с учётом этого равенства мы находим, что

$$\widehat{ADC} = \widehat{FDG} + \widehat{ADF} - \widehat{CDG} = \widehat{FDG} = \frac{\pi}{2},$$

то есть $ABCD$ – квадрат.

Теперь немного посчитаем.

$$|AB| = 2 \cdot |AE| \cdot \sin \frac{\widehat{AEB}}{2} = 2a \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$S_{ABCD} = |AB|^2 = 4a^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2a^2(1 - \cos(\pi/2 - \alpha)) = 2a^2(1 - \sin\alpha),$$

$$S_{EFGH} = |EF| \cdot |EH| \cdot \sin \widehat{FEH} = 2a^2 \sin\alpha;$$

$$12 = S_{ABCD} + S_{EFGH} = 2a^2 \quad\Longrightarrow\quad a = \sqrt{6} \quad\Longrightarrow\quad |GH| = a\sqrt{2} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ. $2\sqrt{3}$.

Задача 22.

В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся трех его сторон и другой окружности каждая. Длина радиуса одной из них равна 1. Также известно, что длина одного из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания с одной из окружностей равна $\sqrt{3}$. Найдите площадь параллелограмма.

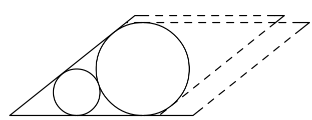
Идея. Доказать, что обе окружности касаются одной и той же пары противоположных сторон параллелограмма.

Указание. Показать, что окружности одинаковые, воспользоваться тем, что центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе.

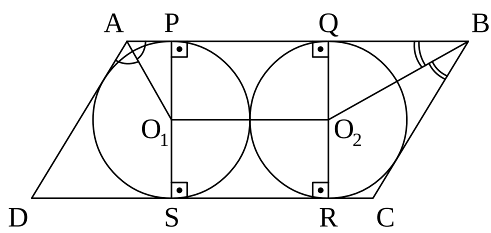
Указание. Рассмотреть все отрезки сторон параллелограмма, концами которых являются вершина параллелограмма и точка касания с одной из окружностей.

Решение. Основная трудность в этой задаче заключается в однозначном определении конфигурации, удовлетворяющей условию задачи. Будем рассуждать следующим образом: у параллелограмма всего четыре стороны, а каждая окружность касается трёх их них. Это означает, что есть как минимум две стороны параллелограмма, касающиеся обеих окружностей.

Если эти стороны смежные, то обе окружности вписаны в угол, ими образованный, поэтому их центры лежат на биссектрисе этого угла. Учитывая тот факт, что окружности ещё и касаются друг друга, мы получаем, что касаться они могут только внешним образом и одна из окружностей будет больше другой. Но тогда ясно, что меньшая окружность не может иметь общих точек с двумя другими сторонами параллелограмма (на чертеже пунктирными прямыми показаны варианты расположения этих других сторон). Противоречие.



Итак, эти стороны противоположные. Но противоположные стороны параллелограмма параллельны, поэтому длины диаметров обеих окружностей будут равны между собой (и равны расстоянию между этими сторонами). Стало быть, окружности одинаковые, поэтому касаются они внешним образом, а конфигурация выглядит так, как показано на чертеже. Обозначим вершины параллелограмма буквами A, B, C и D, центр первой окружности обозначим буквой O_1, точки её касания со сторонами AB и CD обозначим буквами P и S соответственно. Центр второй окружности обозначим буквой O_2, точки её касания со сторонами AB и CD обозначим буквами Q и R соответственно. Ясно, что $|O_1O_2| = |PQ| = 2$, $|PS| = 2$, $PQRS$ – квадрат.



Теперь надо понять, длина какого из отрезков может равняться $\sqrt{3}$. В силу того, что отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, имеют равную длину, нам достаточно перебрать отрезки AP, AQ, BP и BQ. Понятно, что $|AQ| > |PQ| = 2 > \sqrt{3}$ и $|BP| > |PQ| = 2 > \sqrt{3}$ и возможно всего два варианта: $|AP| = \sqrt{3}$ или $|BQ| = \sqrt{3}$.

Если $|AP| = \sqrt{3}$, то, учитывая, что центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, мы находим

$$\operatorname{tg}\widehat{O_1AP} = \frac{|O_1P|}{|AP|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad\Longrightarrow\quad \widehat{O_1AP} = \frac{\pi}{6}, \quad \widehat{DAB} = 2\widehat{O_1AP} = \frac{\pi}{3},$$

$$\widehat{ABC} = \pi - \widehat{DAB} = \frac{2\pi}{3}, \quad \widehat{O_2BQ} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}, \quad |BQ| = |O_2Q|\cdot\operatorname{ctg}\widehat{O_2BQ} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$|AB| = |AP| + |PQ| + |BQ| = \frac{4\sqrt{3}+6}{3}, \quad S_{ABCD} = |AB|\cdot|PS| = \frac{8\sqrt{3}+12}{3}.$$

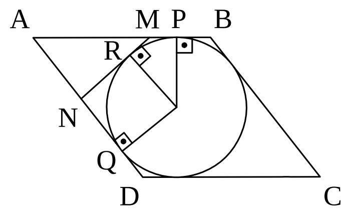
Если же $|BQ| = \sqrt{3}$, то, проводя аналогичные вычисления, мы приходим к тому же ответу. Причём приведённый рисунок соответствует второму случаю, поскольку на нём угол DAB – тупой, а ABC – острый.

О т в е т. $\dfrac{4(3+2\sqrt{3})}{3}$.

Задача 23.

В ромб $ABCD$, у которого $|AB| = l$ и $\widehat{BAD} = 2\alpha$, вписана окружность. Касательная к этой окружности пересекает сторону AB в точке M, а сторону AD – в точке N. Известно, что $|MN| = 2a$. Найдите длины отрезков MB и ND, если известно, что $|MB| \leqslant |ND|$.

И д е я. Искать не длины отрезков MB и ND, а длины их дополнений до сторон ромба, т.е. длины отрезков AM и AN.
У к а з а н и е. Применить теорему косинусов к треугольнику AMN.
У к а з а н и е. Рассмотреть треугольник AMN. Доказать что его периметр равен удвоенной длине отрезка с концами в точке A и точке касания окружности из условия задачи со стороной AB. Воспользоваться свойством отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности, а также тем, что центр окружности из условия задачи лежит в точке пересечения диагоналей ромба.



Р е ш е н и е. Заметим, что отрезки, длины которых требуется найти, очень неудобно расположены. Поэтому искать лучше не их, а их дополнения до сторон ромба, т.е. длины отрезков AM и AN, особенно если учесть тот факт, что в треугольнике AMN известны сторона и угол. Значит, одно уравнение, связывающее длины отрезков AM и AN, уже есть – теорема косинусов. Осталось найти ещё одно.

Обозначим буквой O центр вписанной в ромб $ABCD$ окружности, а буквами P, Q и R – точки её касания с отрезками AB, AD и MN соответственно. Поскольку диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов, то точка O является точкой их пересечения. Также заметим, то угол AOB – прямой. Тогда из прямоугольных треугольников AOB, AOP и AOQ мы находим

$$|AO| = |AB|\cos\widehat{BAO} = l\cos\alpha, \quad |AP| = |AQ| = |AO|\cos\widehat{OAB} = l\cos^2\alpha.$$

Далее, $|MR| = |MP|$ и $|NR| = |NQ|$ по свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности. Обозначим $|AM| = x$ и $|AN| = y$ (из условия следует, что $x \geqslant y$). С учётом этого получаем

$$2l\cos^2\alpha = |AP| + |AQ| = |AM| + |MP| + |AN| + |NQ| =$$
$$= |AM| + |MR| + |AN| + |NR| = x + y + 2a.$$

Для того чтобы получить второе уравнение, связывающее x и y, запишем теорему косинусов для треугольника AMN:

$$|MN|^2 = |AM|^2 + |AN|^2 - 2\cdot|AM|\cdot|AN|\cdot\cos\widehat{MAN} \quad\Longrightarrow\quad x^2+y^2-2xy\cos 2\alpha = 4a^2.$$

Осталось решить полученную систему:

$$\begin{cases} x+y = 2l\cos^2\alpha - 2a, \\ x^2+y^2-2xy\cos 2\alpha = 4a^2; \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x+y = 2l\cos^2\alpha - 2a, \\ (x+y)^2 - 2xy(1+\cos 2\alpha) = 4a^2; \end{cases} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \begin{cases} x+y = 2l\cos^2\alpha - 2a, \\ 4xy\cos^2\alpha = 4l^2\cos^4\alpha - 8al\cos^2\alpha; \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x+y = 2l\cos^2\alpha - 2a, \\ xy = l^2\cos^2\alpha - 2al. \end{cases}$$

В этом месте стоит применить теорему, обратную теореме Виета. Она утверждает, что x и y являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 - 2(l\cos^2\alpha - a)t + l^2\cos^2\alpha - 2al = 0.$$

Вычислим его дискриминант:

$$\frac{D}{4} = (l\cos^2\alpha - a)^2 - (l^2\cos^2\alpha - 2al) = a^2 + 2al\sin^2\alpha - l^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Значит, с учётом условия $x \geqslant y$, получаем

$$\left[\begin{array}{l} x = l\cos^2\alpha - a + \sqrt{a^2 + 2al\sin^2\alpha - l^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}, \\ y = l\cos^2\alpha - a - \sqrt{a^2 + 2al\sin^2\alpha - l^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}. \end{array}\right.$$

Наконец, $|MB| = |AB| - |AM| = l - x$ и $|ND| = |AD| - |AN| = l - y$.

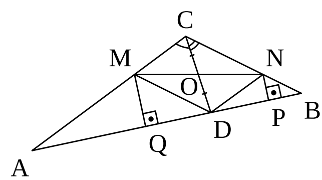
О т в е т. $|MB| = a + l^2\sin^2\alpha - \sqrt{a^2 + 2al\sin^2\alpha - l^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$,
$|ND| = a + l^2\sin^2\alpha + \sqrt{a^2 + 2al\sin^2\alpha - l^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$.

Задача 24.

На стороне AB треугольника ABC взята точка D таким образом, что $|CD| = \sqrt{13}$ и $\sin\widehat{ACD} : \sin\widehat{BCD} = 4 : 3$. Через середину отрезка CD проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $\widehat{ACB} = 2\pi/3$, площадь треугольника MCN равна $3\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до прямой AB в два раза больше расстояния от точки N до этой же прямой. Найдите площадь треугольника ABC.

Идея. Доказать, что четырёхугольник $CMDN$ – параллелограмм, а треугольники AMD и DNB подобны.
Указание. Показать, что $|CM| = |DN|$, $|CN| = |DM|$.
Указание. Найти величины углов ACD и BCD.
Указание. Представить площадь треугольника MCN как сумму площадей треугольников MCO и NCO, воспользоваться формулой площади. Найти $|CM|$ и $|CN|$.
Указание. Применить теорему косинусов в треугольниках MCD и NCD. Найти $|DN|$ и $|DM|$.

Решение. Это довольно трудная задача. Явно не хватает данных, чтобы составить план решения задачи. А это значит, что в численных значениях, которые мы можем получить в этой задаче, скрыта дополнительная информация. Поэтому сначала вычислим все, что можно, а потом подумаем, какие выводы можно будет сделать из полученных результатов.



Начнем с вычисления величин углов ACD и BCD. Введём обозначение $\widehat{ACD} = \alpha$, тогда по условию задачи $\widehat{BCD} = 2\pi/3 - \alpha$. Пользуясь данным нам соотношением на синусы величин углов ACD и BCD, имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha)} = \frac{4}{3} \iff 3\sin\alpha = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) \implies \operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{3} \implies$$

$$\implies \sin\widehat{ACD} = \sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \quad \sin\widehat{BCD} = \frac{3}{4}\sin\widehat{ACD} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.$$

После этого мы можем вычислить длины сторон треугольника MCN. Обозначим середину отрезка CD буквой O, тогда по условию задачи $|CO| = \sqrt{13}/2$. Положим $|CM| = x$, $|CN| = y$ и дважды выразим площадь треугольника MCN:

$$S_{\triangle MCN} = \frac{1}{2}\cdot|CM|\cdot|CN|\cdot\sin\widehat{ACB} \implies 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}xy}{4} \implies xy = 12;$$

$$S_{\triangle MCN} = S_{\triangle MCO} + S_{\triangle NCO} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|CM|\cdot|CO|\cdot\sin\widehat{ACD} + \frac{1}{2}\cdot|CN|\cdot|CO|\cdot\sin\widehat{BCD} \implies$$

$$\implies 3\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} + \frac{1}{2}\cdot y\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \implies 4x + 3y = 24.$$

Решая полученную систему уравнений, мы находим $|CM| = x = 3$, $|CN| = y = 4$. Дальше наиболее логичным будет вычислить длины отрезков DM и DN, чтобы хоть как-то подобраться к условию про расстояния от точек M и N до прямой AB. Вспомним, что тангенс величины угла ACD равен $2\sqrt{3}$, поэтому она лежит в пределах от $\pi/3$ до $\pi/2$. Из этого вытекает, что величина угла BCD лежит в пределах от $\pi/6$ до $\pi/3$, стало быть, углы ACD и BCD острые,

$$\cos\widehat{ACD} = \sqrt{1-\sin^2\widehat{ACD}} = \frac{1}{\sqrt{13}}, \quad \cos\widehat{BCD} = \sqrt{1-\sin^2\widehat{BCD}} = \frac{5}{2\sqrt{13}}.$$

После этого, записывая теорему косинусов для треугольников MCD и NCD, находим

$$|DM|^2 = |CM|^2 + |CD|^2 - 2\cdot|CM|\cdot|CD|\cdot\cos\widehat{ACD} = 16 \quad\Longrightarrow\quad |DM| = 4;$$

$$|DN|^2 = |CN|^2 + |CD|^2 - 2\cdot|CN|\cdot|CD|\cdot\cos\widehat{BCD} = 9 \quad\Longrightarrow\quad |DN| = 3.$$

Теперь, собственно, наступает ключевой момент решения. Совершенно неожиданно получилось, что $|CM| = |DN|$, $|CN| = |DM|$. Из этого следует, что четырёхугольник $CMDN$ – параллелограмм, стало быть, $DM||BC$, $DN||AC$. Но тогда треугольники AMD и DNB подобны по двум углам (угол ADM равен углу DBN, а угол DAM равен углу BDN по свойствам соответственных углов при параллельных прямых). А тот факт, что расстояние от точки M до прямой AB в два раза больше расстояния от точки N до этой же прямой, означает то, что коэффициент подобия этих треугольников равен 2, поскольку эти расстояния есть не что иное, как соответствующие друг другу высоты этих треугольников.

Наконец, из этого подобия мы получаем

$$\frac{|AM|}{|DN|} = \frac{|DM|}{|BN|} = 2 \quad\Longrightarrow\quad |AM| = 6,\ \ |BN| = 2 \quad\Longrightarrow\quad |AC| = 9,\ \ |BC| = 6$$

и, применяя формулу площади треугольника, находим

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$.

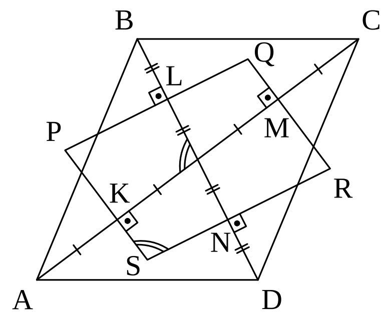
Задача 25.

В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 16. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника AOB, равна 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Идея. Доказать, что четырёхугольник, образованный центрами окружностей, описанных около треугольников AOB, BOC, COD и AOD, – параллелограмм, причём длины его высот равны половинам длин диагоналей параллелограмма $ABCD$, длина одной из диагоналей равна удвоенной длине радиуса окружности, описанной около треугольника AOB, а один из углов между его сторонами равен углу между диагоналями параллелограмма $ABCD$.

Указание. Воспользоваться тем, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам, а также равенством треугольников AOB и COD.

Указание. Воспользоваться формулами площади параллелограмма и теоремой косинусов.



Решение. Обозначим буквами P, Q, R и S центры окружностей, описанных около треугольников AOB, BOC, COD и AOD соответственно. Воспользуемся тем, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам. Значит, точки P и S лежат на прямой, проходящей через середину отрезка AO и перпендикулярной ему, а точки Q и R лежат на прямой, проходящей через середину отрезка OC и перпендикулярной ему. Итак, $PS \perp AC$, $QR \perp AC$, стало быть, $PS||QR$. Рассуждая абсолютно аналогично, мы получаем, что $PQ||RS$, поэтому $PQRS$ – параллелограмм, причём, по условию задачи, $|RS| = 16$.

Далее заметим, что треугольник AOB равен треугольнику COD. Из этого следует, что, во-первых, длины радиусов описанных около них окружностей также равны, то есть $|OR| = |OP| = 5$, и, во-вторых, равны и углы POB и ROD, из чего вытекает, что точки P, O и R лежат на одной прямой (для обоснования этого факта достаточно воспользоваться свойством вертикальных углов). Таким образом, $|PR| = |OP| + |OR| = 10$, точка O является серединой диагонали PR параллелограмма $PQRS$.

Обозначим середины отрезков AO, BO, OC и OD буквами K, L, M и N соответственно. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, поэтому $|AK| = |OK| = |OM| = |CM|$, а $|BL| = |OL| = |ON| = |DN| = 3$. Так как $PQ \perp BD$ и $RS \perp BD$, то отрезок LN является высотой параллелограмма $PQRS$, а его длина равна 6. Также отметим, что отрезок KM, длина которого равна половине диагонали AC, тоже является высотой параллелограмма $PQRS$. Наконец, учтём ещё и тот факт, что углы AOB и PSR равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

Подводя итог под всеми этими рассуждениями, делаем вывод: площадь параллелограмма $ABCD$ уместно искать по формуле $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\widehat{AOB}$, причём недостающие величины $|AC|$ и $\sin\widehat{AOB}$ мы можем найти, рассматривая параллелограмм $PQRS$, в котором нам известно $|RS| = 16$, $|PR| = 10$, $|LN| = 6$. Введём обозначения $\widehat{AOB} = \widehat{PSR} = \alpha$, $|KM| = x$. Пользуясь формулой площади параллелограмма и учитывая тот факт, что независимо от того, где лежит точка N, $|LN| = |PS| \cdot \sin\widehat{PSR}$, имеем

$$S_{PQRS} = |RS|\cdot|LN| = 96 = |PS|\cdot|KM| \Longrightarrow |PS| = \frac{96}{x};\ \frac{96}{x}\cdot\sin\alpha = 6 \Longrightarrow x = 16\sin\alpha.$$

После этого запишем теорему косинусов для треугольника PRS:

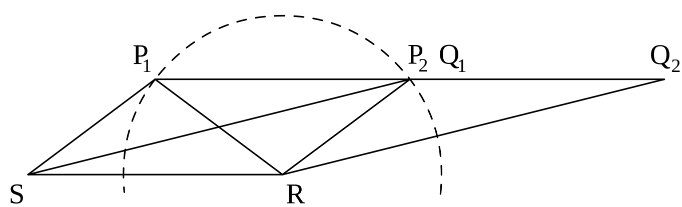
$$|PR|^2 = |PS|^2+|RS|^2-2\cdot|PS|\cdot|RS|\cdot\cos\widehat{PSR} \Longrightarrow 100 = \left(\frac{96}{x}\right)^2+256-2\cdot\frac{96}{x}\cdot 16\cdot\cos\alpha.$$

Подставляя в это уравнение x, получаем

$$100 = \frac{36}{\sin^2\alpha} + 256 - 192\operatorname{ctg}\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad 9(\operatorname{ctg}^2\alpha+1) - 48\operatorname{ctg}\alpha + 39 = 0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3\operatorname{ctg}^2\alpha - 16\operatorname{ctg}\alpha + 16 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $\operatorname{ctg}\alpha = 4/3$ и $\operatorname{ctg}\alpha = 4$. Тот факт, что мы получили два разных значения, можно проиллюстрировать следующим образом: для того чтобы построить параллелограмм $PQRS$, удовлетворяющий условиям $|RS| = 16$, $|PR| = 10$, $|LN| = 6$, надо провести две параллельные прямые на расстоянии 6 друг от друга, на одной из них отложить отрезок RS, длина которого равна 16, и построить окружность, длина радиуса которой равна 10, с центром в точке R. Точки её пересечения со второй прямой и дадут два варианта расположения точки P – на чертеже они обозначены как P_1 и P_2. Точки Q_1 и Q_2 достраиваются из условия $|PQ| = 16$. В данном случае получилось так, что точки P_2 и Q_1 совпали – это случайность.



Наконец, заметим, что

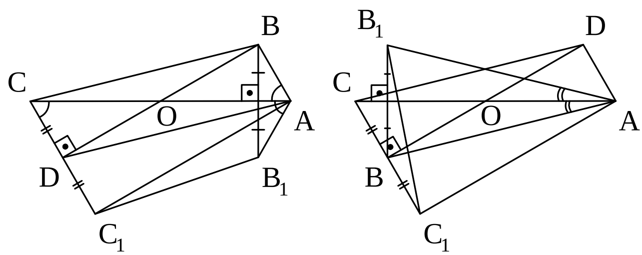
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 12\cdot\sin\alpha = 16\sin\alpha\cdot 12\sin\alpha = 192\sin^2\alpha = \frac{192}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}.$$

Подставляя в эту формулу полученные значения $\operatorname{ctg}\alpha$, находим ответ:

О т в е т. $\dfrac{1728}{25}$ или $\dfrac{192}{17}$.

Задача 26.

В параллелограмме $ABCD$ величина угла между диагоналями AC и BD равна $\pi/6$. Известно, что $|AC| : |BD| = 2 : \sqrt{3}$. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AC, а точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите отношение площадей треугольника AB_1C_1 и параллелограмма $ABCD$.



И д е я. Выразить длины отрезков AB_1 и AC_1 через длины сторон параллелограмма $ABCD$, вычислить величину угла B_1AC_1. Рассмотреть два случая: $\widehat{AOB} = \pi/6$ и $\widehat{AOD} = \pi/6$.

У к а з а н и е. Обозначить половины длин диагоналей параллелограмма $ABCD$ за $2x$ и $\sqrt{3}x$, с помощью теоремы косинусов выразить длины сторон параллелограмма и найти величины различных углов.

У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что $|AB_1| = |AB|$, $\widehat{B_1AC} = \widehat{BAC}$. Рассмотреть треугольник ACC_1.

Р е ш е н и е. В этой задаче возможно два различных случая. Поскольку углом между прямыми по определению является меньший из образованных ими углов, то может оказаться, что $\widehat{AOB} = \pi/6$ (первый случай, левый чертёж), а может оказаться, что $\widehat{AOD} = \pi/6$ (второй случай, правый чертёж). Также сразу отметим, что понятие "две точки симметричны относительно прямой"подразумевает тот факт, что отрезок, их соединяющий, перпендикулярен этой прямой и делится ею пополам.

Сначала рассмотрим первый случай. Обозначим точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ буквой O. Поскольку диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то $|AO| : |BO| = 2 : \sqrt{3}$. Введём обозначения $|AO| = |OC| = 2x$, $|BO| = |OD| = \sqrt{3}x$. Записывая теорему косинусов для треугольника AOB, мы можем выразить длины сторон AB и CD и найти величины различных углов:

$$|AB|^2 = 4x^2 + 3x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x^2 \quad \Longrightarrow \quad |AB| = |CD| = x,$$

$$\cos\widehat{ABO} = \frac{x^2 + 3x^2 - 4x^2}{2 \cdot x \cdot \sqrt{3}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{ABO} = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{BAO} = \frac{\pi}{3}.$$

Итак, мы получили, что $AB \perp BD$. Это означает, что и $CD \perp BD$. Стало быть, точки C, D и C_1 лежат на одной прямой, $|CC_1| = 2|CD| = 2x$. $AB||CD$, поэтому $\widehat{ACD} = \widehat{BAO} = \pi/3$, и из треугольника ACC_1 мы находим

$$|AC_1| = \sqrt{|AC|^2 + |CC_1|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |CC_1| \cdot \cos\widehat{ACC_1}} = 2\sqrt{3}x,$$

$$\cos\widehat{C_1AC} = \frac{|AC|^2 + |AC_1|^2 - |CC_1|}{2 \cdot |AC| \cdot |AC_1|} = \frac{16x^2 + 12x^2 - 4x^2}{2 \cdot 4x \cdot 2\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{C_1AC} = \frac{\pi}{6}.$$

Далее, AC – серединный перпендикуляр к отрезку BB_1. Из этого вытекает, что $|AB_1| = |AB| = x$, $\widehat{B_1AC} = \widehat{BAC} = \pi/3$. Наконец,

$$\widehat{B_1AC_1} = \widehat{B_1AC} - \widehat{C_1AC} = \frac{\pi}{6}; \quad S_{\triangle AB_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot |AB_1| \cdot |AC_1| \cdot \sin \widehat{B_1AC_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2,$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \widehat{AOB} = 2\sqrt{3}x^2, \quad \frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x^2}{2\sqrt{3}x^2} = \frac{1}{4}.$$

Рассуждения для второго случая похожи на рассуждения для первого случая. Положим $|AO| = |OC| = 2x$, $|BO| = |OD| = \sqrt{3}x$. Записывая теорему косинусов для треугольника BOC, мы находим $|BC| = |AD| = x$, $\widehat{CBO} = \pi/2$, $\widehat{BCO} = \pi/3$, а из треугольника AOB мы имеем

$$|AB|^2 = 4x^2 + 3x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \sqrt{3}x \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 13x^2 \quad \Longrightarrow \quad |AB| = |CD| = \sqrt{13}x,$$

$$\cos \widehat{BAO} = \frac{13x^2 + 4x^2 - 3x^2}{2 \cdot \sqrt{13}x \cdot 2x} = \frac{7}{2\sqrt{13}}.$$

Далее в силу того, что $CB \perp BD$, точки C, B и C_1 лежат на одной прямой, $|BC_1| = |BC| = x$. Отметим, что $BC_1 || AD$, $|BC_1| = |AD|$, поэтому AC_1BD – параллелограмм, $|AC_1| = |BD| = 2\sqrt{3}x$. Более того, $BC_1 \perp BD$, поэтому AC_1BD – прямоугольник, угол AC_1C – прямой,

$$\cos \widehat{C_1AC} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{4x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{C_1AC} = \frac{\pi}{6}.$$

Теперь опять воспользуемся тем, что AC – серединный перпендикуляр к отрезку BB_1. Значит, $|AB_1| = |AB| = \sqrt{13}x$, $\widehat{B_1AC} = \widehat{BAC} = \arccos(7/2\sqrt{13})$. Наконец,

$$\sin \widehat{B_1AC} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{B_1AC}} = \sqrt{1 - \frac{49}{52}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}, \quad \widehat{B_1AC_1} = \widehat{B_1AC} + \widehat{C_1AC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sin \widehat{B_1AC_1} = \sin \widehat{B_1AC} \cdot \cos \widehat{C_1AC} + \cos \widehat{B_1AC} \cdot \sin \widehat{C_1AC} = \frac{5}{2\sqrt{13}},$$

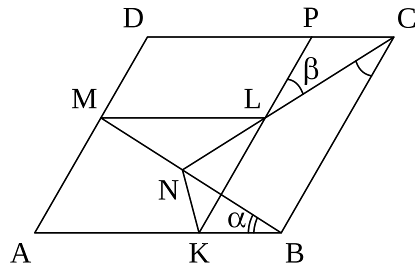
$$S_{\triangle AB_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot |AB_1| \cdot |AC_1| \cdot \sin \widehat{B_1AC_1} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x^2,$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \widehat{AOB} = 2\sqrt{3}x^2, \quad \frac{S_{\triangle AB_1C_1}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}x^2}{2\sqrt{3}x^2} = \frac{5}{4}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{4}$ или $\dfrac{5}{4}$.

Задача 27.

Дан параллелограмм $ABCD$, $|AB| = 3$, $|AD| = \sqrt{3} + 1$, $\widehat{BAD} = \pi/3$. На стороне AB взята точка K таким образом, что $|AK| : |KB| = 2 : 1$. Через точку K параллельно AD проведена прямая. На этой прямой внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка L, а на стороне AD выбрана точка M, $|AM| = |KL|$. Прямые BM и CL пересекаются в точке N. Найдите величину угла BKN.



Идея. Обозначить $|KL| = x$, выразить через x величины углов ABM и BCL, рассмотреть треугольники BKN и BCN.
Указание. Записать теорему синусов для треугольников ABM, CLP, BKN и BCN (P – точка пересечения прямых KL и CD), выразить котангенс величины угла BKN через котангенсы величин углов ABM и BCL.
Указание. Использовать формулу

$$\frac{\sin(x \pm y)}{\sin y} = \sin x \operatorname{ctg} y \pm \cos x.$$

Решение. Из условия задачи следует, что $|AK| = 2$, $|KB| = 1$. Обозначим буквой P точку пересечения стороны BC с прямой, проходящей через точку K и параллельной AD. Ясно, что $KPCB$ – параллелограмм, $|CP| = 1$, $|KP| = \sqrt{3}+1$. С другой стороны, $|AM| = |KL|$, $AM||KL$, поэтому $AMLK$ – тоже параллелограмм, $ML||AB$.

Поскольку мы не знаем, где точно расположена точка L, то введём обозначение $|KL| = |AM| = x$ и попытаемся каким-то образом выразить длины различных отрезков и величины различных углов, присутствующих на чертеже, через эту переменную. Так как точка L расположена внутри параллелограмма $ABCD$, то $|LP| = |KP| - |KL| = \sqrt{3} + 1 - x$. Понятно, что единственным разумным способом нахождения искомой величины является рассмотрение треугольника BKN. В нём мы можем попытаться выразить длину отрезка BN и величину угла ABM – для этого воспользуемся теоремой синусов. Для сокращения записи отметим, что справедлива формула

$$\frac{\sin(x \pm y)}{\sin y} = \sin x \operatorname{ctg} y \pm \cos x,$$

которой мы будем постоянно пользоваться при решении задачи. Сначала рассмотрим треугольник ABM, поскольку в нём мы знаем величину угла BAD – она равна $\pi/3$, и длины двух сторон. Пусть $\widehat{ABM} = \alpha$, тогда $\widehat{AMB} = 2\pi/3 - \alpha$,

$$\frac{|AM|}{\sin \widehat{ABM}} = \frac{|AB|}{\sin \widehat{AMB}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} = \frac{3}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{6 - x}{\sqrt{3}x}.$$

После этого рассмотрим треугольник CLP, в котором мы знаем величину угла CPL – она, очевидно, равна $2\pi/3$, и длины двух сторон. Пусть $\widehat{CLP} = \beta$, тогда $\widehat{LCP} = \pi/3 - \beta$,

$$\frac{|CP|}{\sin \widehat{CLP}} = \frac{|LP|}{\sin \widehat{LCP}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{3} + 1 - x}{\sin(\frac{\pi}{3} - \beta)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \beta - \frac{1}{2} = \sqrt{3} + 1 - x \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{2\sqrt{3} + 3 - 2x}{\sqrt{3}}.$$

Теперь обозначим величину искомого угла BKN за φ. Тогда $\widehat{KNB} = \pi - \alpha - \varphi$. Величина угла ABC равна $2\pi/3$, поэтому величина угла NBC равна $2\pi/3 - \alpha$, а $\widehat{BNC} = \pi/3 + \alpha - \beta$. Записывая теорему синусов для треугольников BKN и BCN, имеем

$$\frac{|BN|}{\sin \widehat{BKN}} = \frac{|KB|}{\sin \widehat{BNK}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|BN|}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sin(\alpha + \varphi)};$$

$$\frac{|BN|}{\sin \widehat{BCN}} = \frac{|BC|}{\sin \widehat{BNC}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|BN|}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha - \beta)}.$$

Поделив полученные соотношения, получаем

$$\frac{\sin \beta}{\sin \varphi} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha - \beta)}{(\sqrt{3}+1)\sin(\alpha + \varphi)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\sqrt{3}+1)(\sin\alpha \operatorname{ctg}\varphi + \cos\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\operatorname{ctg}\beta - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\sqrt{3}+1)(\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg}\alpha) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{2}\right)\operatorname{ctg}\beta - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Наконец, подставим сюда полученные ранее выражения для $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$:

$$(\sqrt{3}+1)\left(\operatorname{ctg}\varphi + \frac{6-x}{\sqrt{3}x}\right) = \frac{3}{x} \cdot \frac{2\sqrt{3}+3-2x}{\sqrt{3}} - \frac{6-x}{2\sqrt{3}x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{12\sqrt{3}+12-8x}{(\sqrt{3}+1)\cdot 2\sqrt{3}x} - \frac{6-x}{\sqrt{3}x} = \frac{(\sqrt{3}-3)x}{(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{3}x} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}.$$

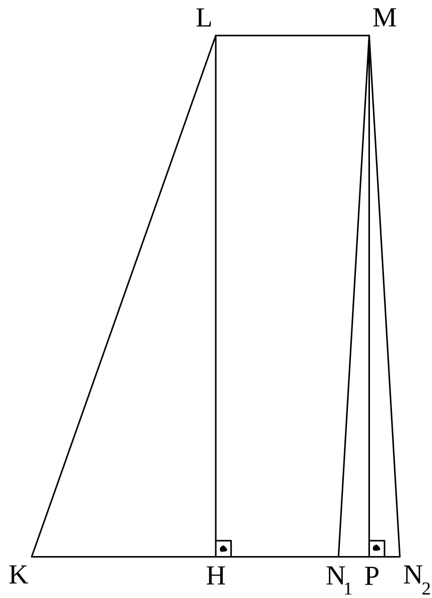
Отметим, что $\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right) = \dfrac{7\pi}{12}$. Докажите это самостоятельно.

Ответ. $\dfrac{7\pi}{12}$.

3.2. Трапеции

Задача 1.

В трапеции $KLMN$ отрезки KN и LM являются основаниями, а также известно, что $|KL| = 36$, $|MN| = 34$, $|LM| = 10$. Найдите длину диагонали LN, если косинус величины угла KLM равен $-1/3$.



Идея. Провести высоты LH и MP трапеции $KLMN$. Рассмотреть два случая расположения точки N.

Указание. Используя теорему Пифагора и соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, вычислить длины отрезков LH, MP, KH, HP и PN.

Решение. Проведём высоты LH и MP трапеции $KLMN$. Тогда $LMPH$ – прямоугольник, стало быть, $|HP| = |LM| = 10$. Так как углы LKN и KLM – односторонние при параллельных прямых KN и LM и секущей KL, то сумма их величин равна π, поэтому $\cos\widehat{LKN} = -\cos\widehat{KLM} = 1/3$. С учётом этого из прямоугольных треугольников LKH и MPN находим

$$|KH| = |KL| \cdot \cos\widehat{LKH} = 12,$$

$$|LH| = \sqrt{|KL|^2 - |KH|^2} = 24\sqrt{2} = |MP|;$$

$$|NP| = \sqrt{|MN|^2 - |MP|^2} = 2.$$

Далее заметим, что возможны два варианта расположения точки N: она либо попадает на отрезок KP, либо нет. На чертеже эти варианты обозначены как N_1 и N_2 соответственно. Длину диагонали LN найти совсем просто:

$$|HN_1| = |HP| - |PN_1| = 8, \quad |LN_1|^2 = \sqrt{|LH|^2 + |HN_1|^2} = 8\sqrt{19};$$

$$|HN_2| = |HP| + |PN_2| = 12, \quad |LN_2|^2 = \sqrt{|LH|^2 + |HN_2|^2} = 36.$$

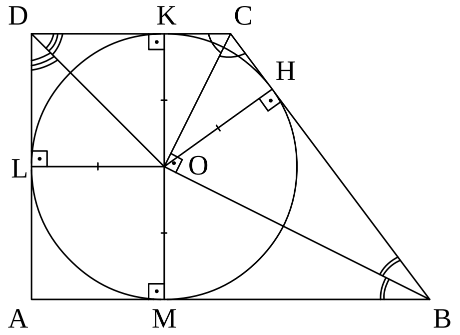
Ответ. 36 или $8\sqrt{19}$.

Задача 2.

В трапецию вписана окружность. Точка касания делит одну из боковых сторон этой трапеции на отрезки длиной 12 и 3, длина её меньшего основания равна 9. Найдите площадь трапеции.

Идея. Воспользоваться тем, что треугольник, образованный центром вписанной в трапецию окружности и концами боковой стороны, которая делится на отрезки длиной 12 и 3, – прямоугольный.

Указание. Найти длину радиуса окружности, вписанной в трапецию, воспользоваться теоремой о равенстве длин отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности.



Решение. Так как в трапецию вписана окружность, то высота трапеции равна диаметру вписанной окружности, а сумма оснований трапеции равна сумме её боковых сторон.

Обозначим вершины трапеции буквами A, B, C и D ($AB||CD$), точки касания окружности, вписанной в $ABCD$, со сторонами AB, BC, CD и AD обозначим буквами M, H, K и L соответственно, а центр этой окружности обозначим буквой O. Будем считать, что $|BH| = 12$, $|HC| = 3$. Тогда угол BOC – прямой. Из прямоугольного треугольника BOC получаем

$$|OH|^2 = |BH| \cdot |CH| = 36 \quad \Longrightarrow \quad |OH| = 6 \quad \Longrightarrow \quad |MK| = 12.$$

Далее воспользуемся теоремой о равенстве длин отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности. Она даёт нам

$$|MB| = |BH| = 12, \quad |HC| = |CK| = 3.$$

Видно, что длина основания AB не меньше 12, поэтому CD – меньшее основание, $|CD| = 9$, $|KD| = |CD| - |CK| = 6$. Далее, треугольник OKD – прямоугольный, $|OK| = |OH| = 6$, $|KD| = 6$, поэтому $\widehat{ODK} = \pi/4$. С учётом того что OD – биссектриса угла ADC, из этого вытекает, что угол ADC – прямой, стало быть, трапеция $ABCD$ – прямоугольная, $|AD| = |MK| = 12$. Наконец,

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC| = 27 \quad \Longrightarrow \quad S_{ABCD} = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |MK| = 162.$$

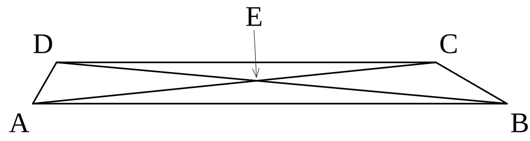
Ответ. 162.

Задача 3.

В трапеции $ABCD$ отрезки AB и CD являются основаниями. Диагонали трапеции пересекаются в точке E. Известно, что $|AB| = 30$, $|CD| = 24$, $|AD| = 3$, $\widehat{DAB} = \pi/3$. Найдите площадь треугольника BEC.

Идея. Найти соотношение между площадями треугольника BEC и трапеции $ABCD$.

Указание. Найти длину высоты трапеции $ABCD$, затем воспользоваться свойством треугольников, на которые трапеция делится своими диагоналями.



Решение. Опустим перпендикуляр DH из точки D на основание AB. Он будет являться высотой трапеции, его длину можно легко найти из прямоугольного треугольника ADH: $|DH| = |AD| \cdot \sin \widehat{DAB} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. После этого вычислим площадь трапеции $ABCD$:

$$S_{ABCD} = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |DH| = \frac{81\sqrt{3}}{2}.$$

Обозначим площадь треугольника CED за S. Тогда, используя свойства треугольников, на которые трапеция делится своими диагоналями, получаем

$$S_{\triangle AED} = S_{\triangle BEC} = \frac{|AB|}{|CD|} \cdot S_{\triangle CED} = \frac{5S}{4}, \quad S_{\triangle AEB} = \left(\frac{|AB|}{|CD|}\right)^2 \cdot S_{\triangle CED} = \frac{25S}{16}.$$

С учётом этих соотношений имеем

$$S_{ABCD} = S_{\triangle AEB} + S_{\triangle BEC} + S_{\triangle CED} + S_{\triangle AED} \implies \frac{81\sqrt{3}}{2} = S + \frac{5S}{4} + \frac{5S}{4} + \frac{25S}{16} \implies$$

$$\implies S = 8\sqrt{3} \implies S_{\triangle BEC} = \frac{5}{4} \cdot 8\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

Ответ. $10\sqrt{3}$.

Задача 4.

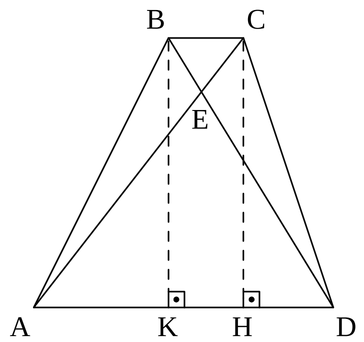
В трапеции $ABCD$ даны длины оснований $|AD| = 4$, $|BC| = 1$ и углы BAD и ADC, величины которых равны соответственно $\operatorname{arctg} 2$ и $\operatorname{arctg} 3$. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник BEC, где E – точка пересечения диагоналей трапеции.

Идея. Вычислить площадь и полупериметр треугольника BEC.

Указание. Провести из точек B и C высоты трапеции $ABCD$, найти её площадь, рассмотрев получившиеся прямоугольные треугольники.

Указание. Воспользоваться свойствами треугольников, на которые трапеция делится своими диагоналями.

Указание. Для нахождения периметра треугольника BEC использовать подобие.



Решение. Проведём высоты трапеции BK и CH, их длины обозначим за h. Отметим, что углы при основании AD трапеции $ABCD$ острые, поэтому точки K и H будут лежать на основании AD и $|AD| = |AK| + |KH| + |HD|$. Далее, $BCHK$ – прямоугольник, стало быть, $|KH| = 1$, а из прямоугольных треугольников ABK и CDH мы получаем, что $|AK| = h/2$, $|HD| = h/3$. С учётом всего вышесказанного имеем

$$4 = \frac{h}{2} + 1 + \frac{h}{3} \implies h = \frac{18}{5}, \ |AK| = \frac{9}{5},$$

$$|HD| = \frac{6}{5}, \ |AH| = \frac{14}{5}, \ |KD| = \frac{11}{5}.$$

После этого вычислим площадь трапеции $ABCD$:

$$S_{ABCD} = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot |BK| = 9.$$

Теперь обозначим площадь треугольника BEC за S. Тогда

$$S_{\triangle AEB} = S_{\triangle CED} = \frac{|AD|}{|BC|} \cdot S_{\triangle BEC} = 4S, \quad S_{\triangle DEA} = \left(\frac{|AD|}{|BC|}\right)^2 \cdot S_{\triangle BEC} = 16S.$$

Пользуясь тем, что $S_{ABCD} = S_{\triangle AEB} + S_{\triangle BEC} + S_{\triangle CED} + S_{\triangle DEA}$, получаем

$$9 = S + 4S + 4S + 16S \quad \implies \quad S = \frac{9}{25}.$$

Для ответа на вопрос задачи нам осталось найти полупериметр треугольника BEC. Это можно сделать, например, следующим образом: с помощью теоремы Пифагора найдём длины отрезков AC и BD, после чего воспользуемся подобием треугольников DEA и BEC:

$$|BD| = \sqrt{|BK|^2 + |KD|^2} = \frac{\sqrt{445}}{5}, \quad |AC| = \sqrt{|CH|^2 + |AH|^2} = \frac{\sqrt{520}}{5},$$

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|DE|}{|EB|} = \frac{|AD|}{|BC|} = 4 \implies |EC| = \frac{1}{5}|AC| = \frac{\sqrt{520}}{25}, \quad |EB| = \frac{1}{5}|BD| = \frac{\sqrt{445}}{25}.$$

Наконец,

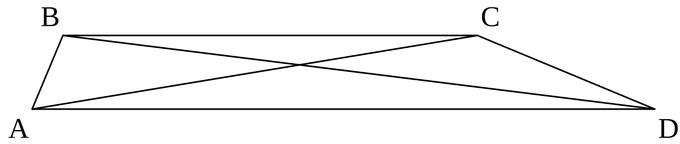
$$r_{\triangle BEC} = \frac{S_{\triangle BEC}}{p_{\triangle BEC}} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{520}}{25} + \frac{\sqrt{445}}{25}\right)} = \frac{18}{25 + 2\sqrt{130} + \sqrt{445}}.$$

Ответ. $\dfrac{18}{25 + 2\sqrt{130} + \sqrt{445}}$.

Задача 5.

В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $|AD| = 39$ и $|BC| = 26$, а также известны длины боковых сторон $|AB| = 5$ и $|CD| = 12$. Найдите длины её диагоналей.

Идея. Обозначить величины углов при одном из оснований трапеции за α и β, воспользоваться теоремой косинусов.



Указание. Записать теорему косинусов для треугольников ABD и BCD, затем для треугольников ABC и ACD, применив предварительно свойство внутренних односторонних углов.

Решение. Введём обозначения $\widehat{BAD} = \alpha$, $\widehat{ADC} = \beta$. Тогда, поскольку $AD||BC$, по свойствам внутренних односторонних углов мы имеем $\widehat{ABC} = \pi - \alpha$, $\widehat{BCD} = \pi - \beta$. Далее запишем теорему косинусов для треугольников ABD, BCD, ABC и ACD:

$$|BD|^2 = 39^2 + 5^2 - 2 \cdot 39 \cdot 5 \cos\alpha = 26^2 + 12^2 - 2 \cdot 26 \cdot 12 \cos(\pi - \beta);$$

$$|AC|^2 = 39^2 + 12^2 - 2 \cdot 39 \cdot 12 \cos\beta = 26^2 + 5^2 - 2 \cdot 26 \cdot 5 \cos(\pi - \alpha).$$

Приводя подобные слагаемые, получаем

$$\begin{cases} 195\cos\alpha + 312\cos\beta = 363, \\ 65\cos\alpha + 234\cos\beta = 241 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 5/13, \\ \cos\beta = 12/13. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения косинусов в выражения для $|AC|^2$ и $|BD|^2$, находим $|AC| = 3\sqrt{89}$, $|BD| = 2\sqrt{349}$.

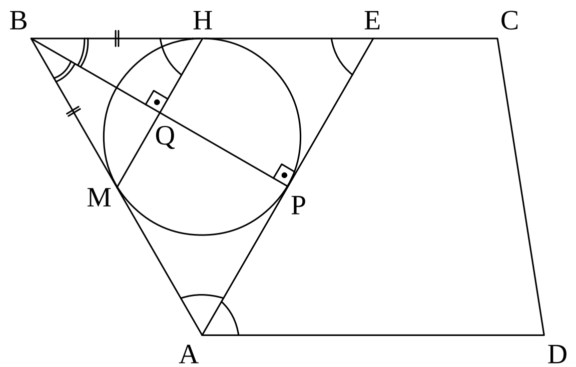
Ответ. $|AC| = 3\sqrt{89}$, $|BD| = 2\sqrt{349}$.

Задача 6.

В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E. В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке H, $|MH| = 1$. Найдите величину угла BAD.

Идея. Доказать, что треугольник ABE – равнобедренный, после чего найти величины его углов.
Указание. Воспользоваться свойством внутренних накрест лежащих углов.
Указание. Применить формулу для вычисления длин отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, точками касания делит его стороны, а также использовать подобие треугольников ABE и MBH.

Решение. Поскольку AE – биссектриса угла BAD, то углы BAE и DAE равны. С другой стороны, прямые AD и BC параллельны, AE – секущая, поэтому углы DAE и AEB равны как внутренние накрест лежащие. Из этого следует, что угол BAE равен углу AEB, то есть треугольник ABE – равнобедренный, $|AB| = |BE| = 2$.



Теперь надо рассмотреть треугольник ABE. Длину отрезка BH обозначим за x, длину отрезка AE обозначим за y.

Заметим, что отрезки BH и BM тоже равны как отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, поэтому $MH||AE$ по теореме, обратной к теореме Фалеса, что даёт нам подобие треугольников ABE и MBH. Используя это подобие и применяя формулу для вычисления длин отрезков, на которые окружность, вписанная в треугольник, делит его стороны, получаем

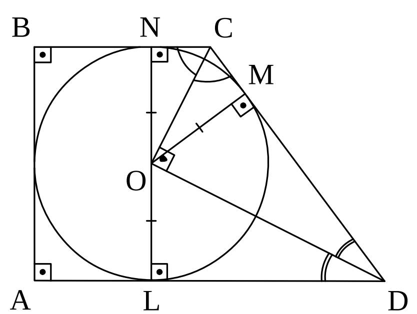
$$\frac{|BH|}{|BE|} = \frac{|MH|}{|AE|} \implies \frac{x}{2} = \frac{1}{y}, \quad |BH| = \frac{|AB| + |BE| + |AE|}{2} - |AE| \implies x = \frac{4-y}{2}.$$

Полученную систему уравнений решить совсем нетрудно: она имеет единственное решение $x = 1$, $y = 2$. Таким образом, треугольник ABE – равносторонний, поэтому величина угла BAE равна $\pi/3$, а величина угла BAD равна $2\pi/3$.

Ответ. $\dfrac{2\pi}{3}$.

Задача 7.

В трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана окружность с центром O. Найдите площадь трапеции, если угол DAB прямой, $|OC| = 2$, $|OD| = 4$.



Идея. Воспользоваться тем, что треугольник, образованный центром вписанной в трапецию окружности и концами боковой стороны – прямоугольный.

Указание. Найти длину радиуса окружности, вписанной в $ABCD$, длины её боковых сторон и высоты, воспользоваться свойством четырёхугольника, описанного около окружности.

Решение. Обозначим точки касания вписанной в трапецию $ABCD$ окружности со сторонами BC, CD и AD буквами N, M и L соответственно, а центр этой окружности обозначим буквой O. Тогда $|OM| = |ON| = |OL|$, а угол COD – прямой. Из прямоугольного треугольника COD получаем

$$|CD|^2 = |OC|^2 + |OD|^2 = 20 \implies |CD| = 2\sqrt{5}, \quad |OM| = \frac{|OC| \cdot |OD|}{|CD|} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Далее, поскольку угол DAB – прямой, то трапеция $ABCD$ – прямоугольная и $ABNL$ – прямоугольник, кроме того, по свойству четырёхугольника, описанного около окружности, $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$. С учётом всего этого находим

$$|AB| = |NL| = 2|OM| = \frac{8}{\sqrt{5}}, \quad |AD| + |BC| = 2\sqrt{5} + \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{5}},$$

$$S_{ABCD} = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot |NL| = \frac{9}{\sqrt{5}} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{72}{5}.$$

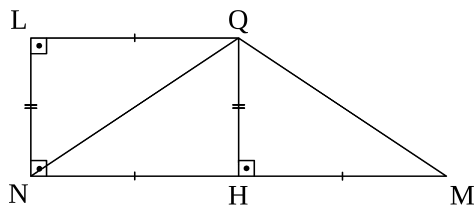
О т в е т. $\frac{72}{5}$.

Задача 8.

В выпуклом четырёхугольнике $MNLQ$ углы при вершинах N и L – прямые, а тангенс величины угла при вершине M равен $2/3$. Найдите длину диагонали NQ, если известно, что длина стороны LQ вдвое меньше длины стороны MN и на 2 больше длины стороны LN.

И д е я. Доказать, что четырёхугольник $MNLQ$ – трапеция, провести высоту QH.

У к а з а н и е. Рассмотреть прямоугольные треугольники MQH и NLQ.



Р е ш е н и е. Поскольку $MN \perp LN$ и $LQ \perp LN$, то $MN||QL$, значит, $MNLQ$ – прямоугольная трапеция. Обозначим длину отрезка LN за x, тогда, по условию, $|LQ| = x + 2$, $|MN| = 2x + 4$. После этого проведём высоту QH, тогда $QHNL$ – прямоугольник,

$$|QH| = |LN| = x, \quad |LQ| = |NH| = x + 2, \quad |MH| = |MN| - |NH| = x + 2.$$

Рассматривая прямоугольный треугольник MQH, получаем

$$\frac{|QH|}{|MH|} = \operatorname{tg}\widehat{M} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{x+2} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = 4.$$

Стало быть, $|LN| = 4$, $|LQ| = 6$. Осталось записать теорему Пифагора для треугольника NLQ:

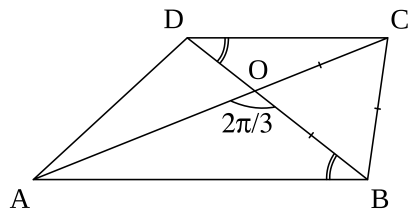
$$|NQ|^2 = |LN|^2 + |LQ|^2 = 52 \quad \Longrightarrow \quad |NQ| = 2\sqrt{13}.$$

О т в е т. $2\sqrt{13}$.

Задача 9.

В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна стороне CD. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, причём треугольник BOC является равносторонним. Найдите длину стороны BC, если $|AB| = 5$, $|CD| = 3$.

Идея. Воспользоваться подобием треугольников AOB и COD.
Указание. Применить теорему косинусов к треугольнику AOB.



Решение. Треугольники AOB и COD подобны, что даёт нам

$$\frac{|AO|}{|OC|} = \frac{|BO|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{5}{3}.$$

Обозначим $|OC|$ за $3x$, тогда из последнего соотношения вытекает, что $|AO| = 5x$. Треугольник BOC равносторонний, значит, $|BO| = |BC| = 3x$, $\widehat{BOC} = \pi/3$. Углы AOB и BOC смежные, поэтому $\widehat{AOB} = \pi - \widehat{BOC} = 2\pi/3$. Наконец, применим теорему косинусов к треугольнику AOB:

$$|AB|^2 = |AO|^2 + |BO|^2 - 2 \cdot |AO| \cdot |BO| \cdot \cos\widehat{AOB} \quad \Longrightarrow$$

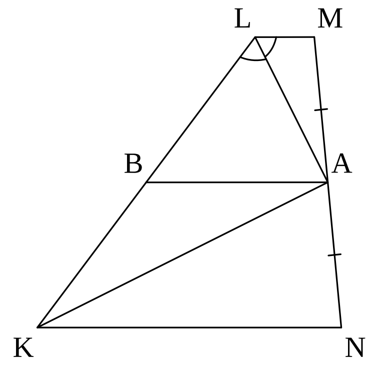
$$\Longrightarrow \quad 25 = 25x^2 + 9x^2 + 15x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{5}{7} \quad \Longrightarrow \quad |BC| = \frac{15}{7}.$$

Ответ. $\dfrac{15}{7}$.

Задача 10.

В трапеции $KLMN$ $KN||LM$, LA – биссектриса угла KLM, точка A – середина отрезка MN. Длина средней линии трапеции $KLMN$ равна $\sqrt{5}$, $|AK| = 4$. Найдите $|AL|$.

Идея. Доказать, что треугольник LAB – равнобедренный.
Указание. Воспользоваться свойством внутренних накрест лежащих углов. Применить формулу длины медианы.



Решение. Проведём среднюю линию AB трапеции $KLMN$. Тогда $AB||LM$, поэтому углы LAB и ALM равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB, LM и секущей AL. С другой стороны, поскольку LA – биссектриса угла KLM, то углы ALM и ALB тоже равны. Итак, треугольник LAB равнобедренный, $|AB| = |LB| = \sqrt{5}$.

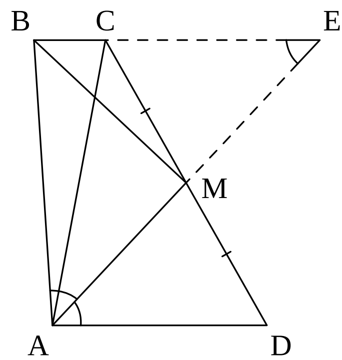
Далее отметим, что B – середина отрезка KL, поэтому $|KL| = 2\sqrt{5}$, AB – медиана треугольника AKL. Наконец, воспользуемся формулой длины медианы треугольника:

$$4|AB|^2 = 2|AL|^2 + 2|AK|^2 - |KL|^2 \quad \Longrightarrow \quad 20 = 2|AL|^2 + 32 - 20 \quad \Longrightarrow \quad |AL| = 2.$$

Ответ. 2.

Задача 11.

В трапеции $ABCD$ $AD||BC$, биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке M. Найдите длину отрезка AM, если известно, что треугольники ACM и ADM имеют одинаковую площадь, $|BM| = 8$, $|BC| + |AD| = 17$.



Идея. Доказать, что M – середина CD, продлить отрезок AM за точку M до пересечения с прямой BC в точке E.

Указание. Воспользоваться леммами о площадях треугольников.

Указание. Рассмотреть треугольник ABE, доказать, что он равнобедренный.

Решение. Сначала заметим, что из того, что треугольники ACM и ADM имеют одинаковую площадь, вытекает, что $|CM| = |DM|$, то есть M – середина CD. Далее продлим отрезок AM за точку M до пересечения с прямой BC в точке E. Тогда треугольники CEM и DAM равны по второму признаку равенства треугольников (углы CME и DMA равны как вертикальные, углы MCE и MDA равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD, BC и секущей CD). Из этого равенства следует, что $|CE| = |AD|$, $|AM| = |ME|$.

Далее заметим, что точка E обязательно попадает на продолжение отрезка BC за точку C, поэтому $|BE| = |BC|+|CE| = |BC|+|AD| = 17$. Наконец, в силу того, что углы CEM и DAM равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD, BC и секущей AE, а углы BAM и DAM равны, так как AM – биссектриса, то мы получаем, что равны углы BAM и BEM. Значит, треугольник ABE – равнобедренный, $|AB| = |BE| = 17$, BM – медиана этого треугольника. Но тогда она является и его высотой, значит, $|AM| = \sqrt{|AB|^2 - |BM|^2} = 15$.

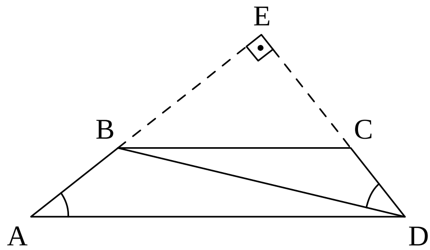
Ответ. 15.

Задача 12.

Непараллельные стороны трапеции перпендикулярны друг другу. Длина одной из них равна 3, а градусная мера угла, образованного ею и одной из диагоналей, равна 40°. Другая из них образует с одним из оснований такой же угол. Найдите длину средней линии этой трапеции.

Идея. Рассмотреть различные варианты, понять, какую конфигурацию описывает условие задачи.

Указание. Обозначить вершины трапеции буквами A, B, C и D, считая, что $|AD| > |BC|$, доказать, что если $\widehat{BAD} = 40^\circ$, то $\widehat{BDC} = 40^\circ$.



Указание. Воспользоваться свойствами внутренних накрест лежащих углов и теоремой о сумме градусных мер углов треугольника.

Указание. Применить теорему синусов.

Решение. При решении этой задачи основная трудность заключается в однозначном определении конфигурации, удовлетворяющей условию. Обозначим вершины трапеции буквами A, B, C и D, будем считать, что AD – её большее основание, то есть прямые AB и CD пересекаются в точке E, лежащей на продолжении отрезков AB и CD за точки B и C соответственно. Тогда по условию задачи $\widehat{AED} = 90^\circ$.

Будем считать, что длина стороны CD равна 3. Тогда сторона AB образует с одним из оснований угол, градусная мера которого равна 40°. Это может быть лишь основание AD, поскольку треугольник AED – прямоугольный, углы EAD и EDA – острые, а углы ABC и BCD – тупые. Итак,

$$\widehat{BAD} = 40^\circ \Longrightarrow \widehat{ADC} = 50^\circ,\ \widehat{ABC} = 140^\circ,\ \widehat{BCD} = 130^\circ.$$

Далее нам надо понять, с какой конкретно из диагоналей сторона CD образует угол, градусная мера которого равна 40°. Если мы предположим, что это диагональ AC, то тогда $\widehat{ACD} = 40^\circ$, $\widehat{CAD} = 180^\circ - \widehat{ADC} - \widehat{ACD} = 90^\circ$. Но точка C лежит внутри угла BAD, поэтому градусная мера угла CAD меньше градусной меры угла BAD, то есть 40°. Противоречие.

Итак, под условие задачи подходит лишь один вариант, а именно $\widehat{BDC} = 40^\circ$. Тогда $\widehat{CBD} = 10^\circ$, $\widehat{ADB} = 10^\circ$, $\widehat{ABD} = 130^\circ$. Записывая теорему синусов для треугольников ABD и BCD, находим

$$\frac{|CD|}{\sin\widehat{CBD}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BDC}} = \frac{|BD|}{\sin\widehat{BCD}} \Longrightarrow |BC| = \frac{3\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ},\ |BD| = \frac{3\sin 130^\circ}{\sin 10^\circ};$$

$$\frac{|BD|}{\sin\widehat{BAD}} = \frac{|AD|}{\sin\widehat{ABD}} \Longrightarrow |AD| = \frac{|BD|\sin 130^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{3\sin^2 130^\circ}{\sin 10^\circ\sin 40^\circ}.$$

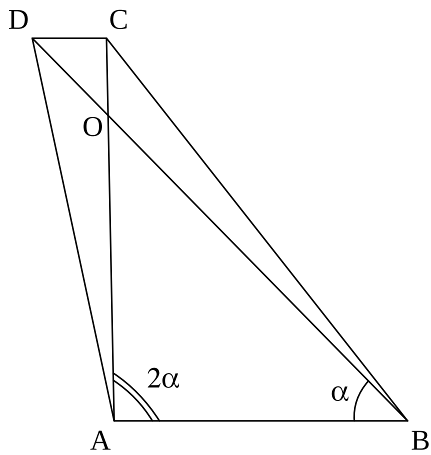
Наконец, длина l средней линии трапеции равна полусумме длин её оснований, то есть

$$l = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sin^2 130^\circ + \sin^2 40^\circ}{\sin 10^\circ\sin 40^\circ} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ}{\sin 10^\circ\sin 40^\circ} = \frac{3}{2\sin 10^\circ\sin 40^\circ}.$$

Ответ. $\dfrac{3}{2\sin 10^\circ\sin 40^\circ}$.

Задача 13.

Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB||CD$, $\widehat{CAB} = 2\widehat{DBA}$, $|AC| = 5$, $|BD| = 7$.



Идея. Воспользоваться тем, что треугольники AOB и COD подобны (O – точка пересечения диагоналей трапеции).

Указание. Применив теорему синусов к треугольнику AOB, найти величину угла между AC и BD.

Указание. Площадь трапеции $ABCD$ вычислить с помощью формулы площади произвольного четырёхугольника.

Решение. Обозначим буквой O точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Тогда треугольники AOB и COD подобны, из чего вытекает

$$\frac{|AO|}{|OC|}=\frac{|BO|}{|OD|};\quad \frac{|AO|}{|BO|}=\frac{|OC|}{|OD|}.$$

С другой стороны,

$$\frac{5}{7}=\frac{|AC|}{|BD|}=\frac{|AO|+|OC|}{|BO|+|OD|}=\frac{|OC|}{|OD|}\cdot\frac{1+\frac{|AO|}{|OC|}}{1+\frac{|BO|}{|OD|}}=\frac{|OC|}{|OD|}=\frac{|AO|}{|BO|}.$$

Теперь обозначим величины углов CAB и DBA за 2α и α соответственно и воспользуемся теоремой синусов для треугольника AOB:

$$\frac{|AO|}{\sin\widehat{ABO}}=\frac{|BO|}{\sin\widehat{BAO}}\iff\frac{|AO|}{|BO|}=\frac{\sin\widehat{ABO}}{\sin\widehat{BAO}}\implies\frac{5}{7}=\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}\implies\cos\alpha=\frac{7}{10}.$$

Теперь для нахождения площади трапеции $ABCD$ проще всего воспользоваться общей формулой для площади четырёхугольника:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\widehat{AOB}\implies S_{ABCD}=\frac{35}{2}\sin(\pi-3\alpha)=\frac{35}{2}\sin 3\alpha.$$

Осталось применить формулы тригонометрии:

$$\cos\alpha=\frac{7}{10}\implies\sin\alpha=\frac{\sqrt{51}}{10};\ \sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\frac{3\sqrt{51}}{10}-\frac{204\sqrt{51}}{1000}=\frac{12\sqrt{51}}{125}.$$

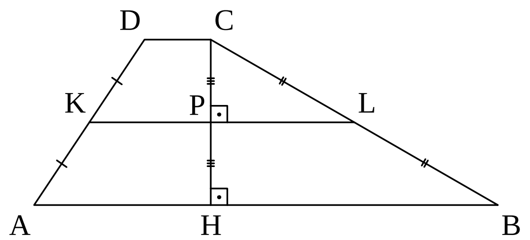
Подставляя это значение в формулу для площади $ABCD$, получаем ответ.

Ответ. $\dfrac{42\sqrt{51}}{25}$.

Задача 14.

Длины боковых сторон описанной около окружности трапеции равны 3 и 5. Известно, что средняя линия этой трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $5/11$. Найдите длины оснований трапеции.

Идея. Воспользоваться тем, что средняя линяя трапеции делит её на две трапеции, длины высот которых равны половине длины высоты исходной трапеции.
Указание. Воспользоваться свойством описанной около окружности трапеции, применить формулу площади трапеции.



Решение. Обозначим вершины трапеции буквами A, B, C и D ($AB||CD$), её среднюю линию обозначим KL ($K \in AD$). Проведём высоту трапеции CH, точку её пересечения с KL обозначим буквой P. Поскольку $KL||AB$, то $AKLB$ и $KDCL$ – трапеции, $CH \perp KL$, а треугольники CPL и CHB подобны, поэтому

$$\frac{|CP|}{|CH|} = \frac{|CL|}{|CB|} \implies |CH| = 2|CP| \implies |CP| = |PH|.$$

Теперь обозначим длины оснований AB и CD за x и y соответственно, будем считать, что $x > y$. Тогда $|KL| = \dfrac{x+y}{2}$ и, кроме того, $S_{AKLB} > S_{KDCL}$. Воспользуемся формулой площади трапеции:

$$\begin{cases} S_{AKLB} = \dfrac{|AB| + |KL|}{2} \cdot |PH| = \dfrac{3x+y}{4} \cdot |PH|, \\ S_{KDCL} = \dfrac{|CD| + |KL|}{2} \cdot |CP| = \dfrac{x+3y}{4} \cdot |CP|. \end{cases}$$

Поделив друг на друга эти соотношения, получаем $\dfrac{5}{11} = \dfrac{S_{KDCL}}{S_{AKLB}} = \dfrac{x+3y}{3x+y}$. С другой стороны, трапеция $ABCD$ описана около окружности, поэтому

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC| \implies x + y = 8.$$

Наконец, решим полученную систему уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{x+3y}{3x+y} = \dfrac{5}{11}, \\ x + y = 8; \end{cases} \implies \begin{cases} 5(3x+8-x) = 11(x+3(8-x)), \\ y = 8 - x; \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7, \\ y = 1. \end{cases}$$

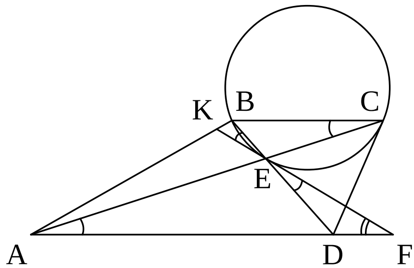
Ответ. 1 и 7.

Задача 15.

В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке E. Около треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведённая в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D, F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $|AF| = a$, $|AD| = b$. Найдите длину отрезка EF.

Идея. Доказать, что треугольники AEF и EDF подобны.
Указание. Доказать, что углы EAF и DEF равны.

Р е ш е н и е. Обозначим буквой K точку пересечения прямой AF с отрезком AB. Заметим, что угол EAF равен углу ECB в силу параллельности прямых AD и BC. Угол ECB равен половине меры дуги BE и, следовательно, он равен углу BEK, который равен углу DEF. Поэтому углы EAF и DEF равны. Значит, треугольники AEF и EDF подобны. Из этого подобия получаем



$$\frac{|AF|}{|EF|} = \frac{|EF|}{|DF|} \implies |EF|^2 = |AF| \cdot |DF| = a \cdot (a-b) \implies |EF| = \sqrt{a^2 - ab}.$$

О т в е т. $\sqrt{a^2 - ab}$.

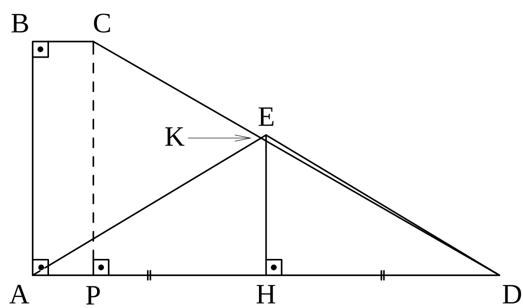
Задача 16.

В трапеции $ABCD$ длина основания AD больше длины основания BC. Известно, что $|AD| = |CD| = 14/3$, $\widehat{BAD} = \pi/2$, $\widehat{BCD} = 5\pi/6$. На основании AD построен треугольник AED так, что точки B и E лежат по одну сторону от прямой AD, причём $|AE| = |DE|$. Длина высоты этого треугольника, проведённой из вершины E, равна $7/5$. Найдите площадь общей части трапеции $ABCD$ и треугольника AED.

И д е я. Доказать, что отрезок AE пересекается с отрезком CD, то есть общая часть трапеции $ABCD$ и треугольника AED – треугольник, образованный точками A, D и точкой пересечения AE и CD.

У к а з а н и е. Опустить из точки E перпендикуляр EH на сторону AD, показать, что $|EH| < |AB|$ и, кроме того, $\widehat{EDA} > \widehat{CDA}$.

У к а з а н и е. Нужную площадь выразить через $|AD|$, $\widehat{CDA}$ и $\widehat{EAD}$.



Р е ш е н и е. Из условия задачи вытекает, что трапеция $ABCD$ – прямоугольная. Опустим из точки C высоту трапеции CP, тогда из того, что $|AD| > |BC|$, мы получаем, что точка P лежит на основании AD, то есть $|AD| = |AP| + |PD|$. Также заметим, что $ABCP$ – прямоугольник, поэтому $|AP| = |BC|$.

Далее, с учётом того что $\widehat{CDP} = \pi - \widehat{BCD} = \pi/6$, из прямоугольного треугольника CDP находим

$$|PD| = |CD| \cdot \cos\widehat{CDP} = \frac{14}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{3}; \quad |CP| = |CD| \cdot \sin\widehat{CDP} = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3}.$$

Теперь, если опустить из точки E перпендикуляр EH на основание AD, мы видим, что $7/5 = |EH| < |CP| = 7/3$. Из этого вытекает, что точка E лежит между прямыми AD и BC.

Рассмотрим треугольник AED. Он равнобедренный, поэтому точка H – середина отрезка AD. С учётом этого находим

$$\operatorname{tg}\widehat{EAD} = \operatorname{tg}\widehat{EDA} = \frac{|EH|}{\frac{1}{2}|AD|} = \frac{3}{5} > \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{EDA} > \widehat{CDA}.$$

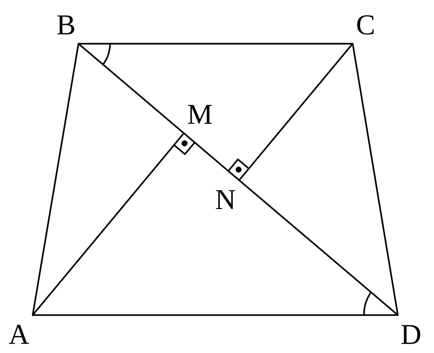
Итак, с одной стороны, точки A и E лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CD, а с другой стороны, точка E лежит между прямыми AD и BC. Из этого вытекает, что отрезки AE и CD пересекаются в некоторой точке K и площадь общей части трапеции $ABCD$ и треугольника AED есть площадь треугольника ADK. В нем нам известны следующие величины: $|AD| = 14/3$, $\widehat{ADK} = \pi/6$, $\widehat{KAD} = \operatorname{arctg} 3/5$. Площадь его можно найти, например, так:

$$S_{\triangle ADK} = \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot\frac{|AD|}{\operatorname{ctg}\widehat{ADK} + \operatorname{ctg}\widehat{KAD}} = \frac{98}{9(\sqrt{3}+\frac{5}{3})} = 49\left(\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right).$$

Ответ. $49\left(\sqrt{3}-\dfrac{5}{3}\right)$.

Задача 17.

В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 4, длина основания BC равна 3, длины сторон AB и CD равны. Точки M и N лежат на диагонали BD, причём точка M расположена между точками B и N, а отрезки AM и CN перпендикулярны диагонали BD. Найдите длину отрезка CN, если $|BM| : |DN| = 2 : 3$.



Идея. Воспользоваться подобием треугольников AMD и CNB.
Указание. Найти соотношение между длинами отрезков BM, MN и DN, применить теорему Пифагора для треугольников AMB, CND и CNB.

Решение. Поскольку $AD||BC$, то углы ADB и DBC равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD. Это даёт нам подобие прямоугольных треугольников AMD и CNB (по двум углам). Из этого подобия мы находим

$$\frac{|BN|}{|DM|} = \frac{|CN|}{|AM|} = \frac{|BC|}{|AD|} = 3:4.$$

С учётом полученного соотношения введём обозначения: $|BN| = 3x$, $|DM| = 4x$, $|CN| = 3y$, $|AM| = 4y$. Поскольку точка M расположена между точками B и N, то $|BM| = |BN| - |MN|$, $|DN| = |DM| - |MN|$. Используя условие задачи, имеем

$$\frac{|BM|}{|DN|} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x - |MN|}{4x - |MN|} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad |MN| = x, \quad |BM| = 2x, \quad |DN| = 3x.$$

Теперь учтем, что трапеция $ABCD$ – равнобедренная. Применим теорему Пифагора к треугольникам AMB и CND и воспользуемся тем, что $|AB| = |CD|$:

$$|AB|^2 = |AM|^2 + |BM|^2,\ |CD|^2 = |CN|^2 + |DN|^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 16y^2 + 4x^2 = 9y^2 + 9x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{7y^2}{5}.$$

После этого запишем теорему Пифагора для треугольника CNB:

$$|BC|^2 = |BN|^2 + |CN|^2 \quad \Longrightarrow \quad 9 = 9y^2 + 9x^2 \quad \Longrightarrow \quad 1 = y^2 + \frac{7y^2}{5} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}.$$

Наконец, $|CN| = 3y = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

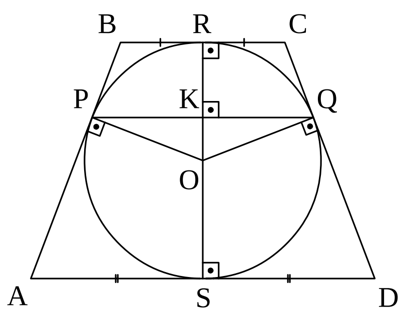
Ответ. $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Задача 18.

Около окружности, длина радиуса которой равна R, описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции, параллельна основаниям трапеции. Длина этой хорды равна b. Найдите площадь трапеции.

Идея. Доказать, что трапеция из условия задачи равнобедренная, вычислить величины её углов.

Указание. Рассмотреть треугольник, образованный центром окружности, вписанной в трапецию, и точками её касания с боковыми сторонами трапеции, воспользоваться тем, что он равнобедренный.



Решение. Обозначим вершины трапеции буквами A, B, C и D $(AD||BC)$, центр окружности, вписанной в эту трапецию, обозначим буквой O, а её точки касания со сторонами AB, BC, CD и AD обозначим буквами P, R, Q и S соответственно. Также обозначим буквой K точку пересечения отрезка PQ и прямой RS.

Тогда, во-первых, $|OP| = |OR| = |OQ| = |OS| = R$, $|PQ| = b$ и, во-вторых, прямая RS перпендикулярна основаниям трапеции. Но тогда она перпендикулярна и отрезку PQ, поскольку по условию задачи $PQ||AD||BC$. Из этого вытекает, что OK – высота равнобедренного треугольника OPQ, значит, она является и его биссектрисой и медианой. Таким образом, $\widehat{POR} = \widehat{QOR}$. Но тогда равны и углы PBR и QCR, поскольку в каждом из четырёхугольников $PBRO$ и $QCRO$ есть два прямых угла, и поэтому $\widehat{POR} + \widehat{PBR} = \widehat{QOR} + \widehat{QCR} = \pi$. Итак, трапеция $ABCD$ – равнобедренная.

Наконец, заметим, что $\widehat{BAD} = \pi - \widehat{ABC} = \pi - (\pi - \widehat{POR}) = \widehat{POR}$, и произведём необходимые подсчёты, воспользовавшись тем, что, в силу того что трапеция $ABCD$ описана около окружности, $|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$.

$$\sin\widehat{POR} = \sin\widehat{QOR} = \frac{|PK|}{|OP|} = \frac{b}{2R}; \quad |AB| = |CD| = \frac{|RS|}{\sin\widehat{BAD}} = \frac{|RS|}{\sin\widehat{POR}} = \frac{4R^2}{b};$$

$$S_{ABCD} = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot |RS| = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |RS| = \frac{4R^2}{b} \cdot 2R = \frac{8R^3}{b}.$$

О т в е т. $\dfrac{8R^3}{b}$.

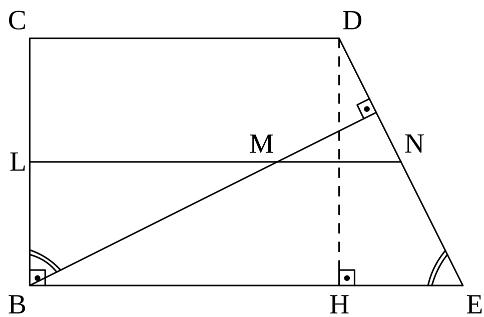
Задача 19.

В трапеции $BCDE$ $(CD||BE)$ проведена средняя линяя LN (точка L лежит на стороне BC). Прямая, проходящая через точку B и перпендикулярная к стороне DE, пересекает отрезок LN в точке M, $|LM| : |MN| = 2 : 1$. Также известно, что $|BE| = 14$, $|CD| = 10$, $BC \perp BE$. Найдите площадь трапеции $BCDE$.

И д е я. Воспользоваться тем, что трапеция $ABCD$ – прямоугольная, провести её высоту DH.

У к а з а н и е. Найти $|LM|$ и $|HE|$, доказать, что треугольники DEH и MBL подобны.

У к а з а н и е. Введя обозначение $|BC| = |DH| = x$, составить уравнение с этой неизвестной.



Р е ш е н и е. Из того, что $BC \perp BE$, а $BE||CD$, следует, что $BC \perp CD$, трапеция $BCDE$ – прямоугольная. Таким образом, если мы проведём её высоту DH, то четырёхугольник $BCDH$ окажется прямоугольником, поэтому $|BH| = |CD| = 10$, $|HE| = |BE| - |BH| = 4$. Также отметим, что $|LN| = \dfrac{1}{2}(|BE| + |CD|) = 12$, $|LM| = \dfrac{2}{3}|LN| = 8$.

Ясно, что для ответа на вопрос задачи нам достаточно вычислить длину высоты трапеции $BCDE$. Проще всего это сделать так: положим $|BC| = |DH| = x$, тогда $|BL| = x/2$, и заметим, что прямоугольные треугольники DEH и MBL подобны по двум углам, поскольку $\widehat{DEH} = \widehat{MBL} = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{MBE}$. Из этого подобия получаем

$$\frac{|HE|}{|DH|} = \frac{|BL|}{|LM|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{x} = \frac{x/2}{8} \quad \Longrightarrow \quad x = 8.$$

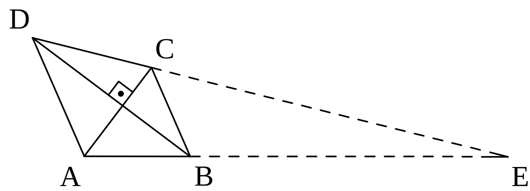
Наконец, $S_{BCDE} = \dfrac{1}{2} \cdot (|BE| + |CD|) \cdot |DH| = 96$.

О т в е т. 96.

Задача 20.

В трапеции $ABCD$ $(AD||BC)$ $|AD| = 8, |BC| = 6$, а величина угла между прямыми AB и CD равна $\operatorname{arctg} 0{,}25$. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что её диагонали перпендикулярны.

Идея. Продлить стороны AB и CD до пересечения в точке E, площадь трапеции $ABCD$ представить как разность площадей подобных треугольников ADE и BCE.



Указание. Воспользоваться теоремой косинусов и свойством четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями.

Решение. Это довольно сложная задача. Обозначим длины боковых сторон AB и CD за x и y соответственно, а также продлим эти стороны до пересечения в точке E. Тогда треугольники EBC и EAD подобны, что даёт нам

$$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|DE|}{|CE|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{8}{6} = \frac{|AB| + |BE|}{|BE|} = \frac{|DC| + |CE|}{CE} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{4}{3} = \frac{x + |BE|}{|BE|} = \frac{y + |CE|}{CE} \quad \Longrightarrow \quad |BE| = 3x, \;\; |CE| = 3y, \;\; |AE| = 4x, \;\; |DE| = 4y.$$

После этого заметим, что площадь трапеции $ABCD$ может быть вычислена как разность площадей треугольников ADE и BCE, то есть

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ADE} - S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |DE| \cdot \sin \widehat{E} - \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot |CE| \cdot \sin \widehat{E} =$$

$$= \frac{16xy \sin \widehat{E}}{2} - \frac{9xy \sin \widehat{E}}{2} = \frac{7}{2} xy \sin \widehat{E}.$$

Таким образом, поскольку мы знаем величину угла E, нам надо вычислить xy. Это можно сделать, воспользовавшись свойством четырёхугольника, диагонали которого перпендикулярны, и записав теорему косинусов для треугольника BCE:

$$|AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = 100;$$

$$|BC|^2 = |BE|^2 + |CE|^2 - 2 \cdot |BE| \cdot |CE| \cdot \cos \widehat{E} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2xy \cos \widehat{E} = 4.$$

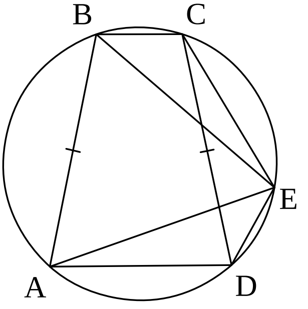
Вычитая второе из полученных уравнений из первого, имеем $xy = 48/ \cos \widehat{E}$. Подставляя это значение в выражение для площади трапеции $ABCD$, находим

$$S_{ABCD} = \frac{7}{2} \cdot \frac{48}{\cos \widehat{E}} \cdot \sin \widehat{E} = 168 \operatorname{tg} \widehat{E} = 42.$$

Ответ. 42.

Задача 21.

Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана в окружность. На дуге CD взята точка E и соединена со всеми вершинами трапеции. Известно, что величина угла CED равна $2\pi/3$, $\widehat{ABE} - \widehat{BAE} = \delta$. Найдите отношение периметра треугольника ABE к длине радиуса вписанной в него окружности.



Идея. Найти величины всех углов треугольника ABE.
Указание. Воспользоваться свойствами вписанных углов и равнобедренностью трапеции $ABCD$.
Указание. Используя теорему синусов, выразить стороны треугольника ABE через радиус окружности, описанной около треугольника ABE.

Решение. Поскольку трапеция $ABCD$ вписана в окружность, то она равнобедренная, что даёт нам равенство длин сторон AB и CD и равенство дуг CED и AB (не содержащей точку E). Так как вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается, то мера дуги $CBAD$ равна $4\pi/3$, тогда мера дуги CED равна $2\pi - 4\pi/3 = 2\pi/3$. Но дуги CED и AB равны, поэтому мера дуги AB также равна $2\pi/3$, из чего вытекает, что $\widehat{AEB} = \pi/3$. Таким образом,

$$\begin{cases} \widehat{ABE} + \widehat{BAE} = \pi - \widehat{AEB} = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \widehat{ABE} - \widehat{BAE} = \delta; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \widehat{ABE} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\delta}{2}, \\ \widehat{BAE} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\delta}{2}. \end{cases}$$

Теперь задача свелась к вычислению отношения элементов треугольника ABE, в котором нам известны величины всех его углов. Обозначим за R длину радиуса окружности, описанной около этого треугольника, тогда, пользуясь теоремой синусов и формулами площади треугольника, находим

$$|AB| = 2R\sin\frac{\pi}{3} = R\sqrt{3}, \ |AE| = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\delta}{2}\right), \ |BE| = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\delta}{2}\right);$$

$$S_{\triangle ABE} = 2R^2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\delta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\delta}{2}\right) = \sqrt{3}R^2\left(\cos^2\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4}\right);$$

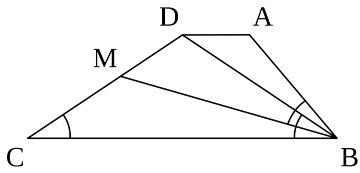
$$p_{\triangle ABE} = R\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\delta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\delta}{2}\right)\right) = R\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \cos\frac{\delta}{2}\right);$$

$$r_{\triangle ABE} = \frac{S_{\triangle ABE}}{p_{\triangle ABE}} = R \cdot \frac{\cos^2\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \cos\frac{\delta}{2}} = R \cdot \left(\cos\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}\right); \qquad \frac{P_{\triangle ABE}}{r_{\triangle ABE}} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{2\cos\frac{\delta}{2} + 1}{2\cos\frac{\delta}{2} - 1}.$$

Ответ. $2\sqrt{3} \cdot \dfrac{2\cos\frac{\delta}{2} + 1}{2\cos\frac{\delta}{2} - 1}$.

Задача 22.

Точка M лежит на боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Найдите длину отрезка BM, если известно, что $\widehat{BCD} = \widehat{CBD} = \widehat{ABM} = \arccos(5/6)$, $|AB| = 9$.



Идея. Доказать, что треугольники ABD и MBC подобны.

Указание. Найти две пары равных углов в треугольниках ABD и MBC и, используя подобие этих треугольников, выразить длину отрезка BM через отношение длин отрезков BC и BD.

Указание. Найти отношение длин отрезков BC и BD из треугольника BCD.

Решение. Заметим, что в условии этой задачи присутствует равенство нескольких углов. Как часто бывает в таких случаях, идея решения этой задачи заключается в нахождении пары подобных треугольников. Заметим, что углы ADB и CBD равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD, BC и секущей BD, а углы CBD и BCD равны по условию задачи, поэтому $\widehat{ADB} = \widehat{BCD}$. С другой стороны,

$$\widehat{ABD} = \widehat{ABM} - \widehat{DBM}, \quad \widehat{CBM} = \widehat{CBD} - \widehat{DBM},$$

из чего, с учётом равенства углов ABM и CBD, мы получаем $\widehat{ABD} = \widehat{CBM}$. Таким образом, треугольники ABD и MBC подобны по первому признаку подобия треугольников, стало быть,

$$\frac{|AB|}{|BM|} = \frac{|BD|}{|BC|} \quad \Longrightarrow \quad |BM| = |AB| \cdot \frac{|BC|}{|BD|} = 9 \cdot \frac{|BC|}{|BD|}.$$

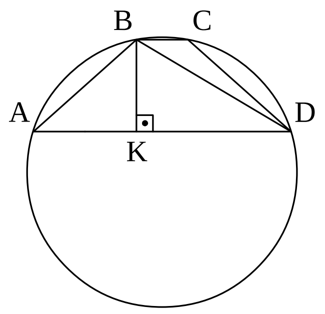
Наконец, отношение длин отрезков BC и BD элементарно считается из треугольника BCD, который является равнобедренным по условию задачи:

$$\cos\widehat{CBD} = \frac{|BC|}{2|BD|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{5}{3} \quad \Longrightarrow \quad |BM| = 9 \cdot \frac{5}{3} = 15.$$

Ответ. 15.

Задача 23.

В трапеции $ABCD$ $BC||AD$, $|BC| < |AD|$, длина диагонали BD в $4/3$ раза больше длины радиуса окружности, описанной около $ABCD$. Найдите отношение длин CD и радиуса этой окружности, если отношение площадей треугольников ABD и BCD равно 5.



Идея. Вычислить отношение длин оснований трапеции $ABCD$, выразить длины всех её сторон и диагоналей через длину радиуса описанной около неё окружности.

Указание. Воспользоваться тем, что длины высот треугольников ABD и BCD, проведённых к сторонам AD и BC, равны. Применить теорему синусов и свойства равнобедренной трапеции.

Решение. Сначала выясним, что нам даёт условие про отношение площадей треугольников ABD и BCD. Ясно, что высоты этих треугольников, проведённые к сторонам AD и BC равны между собой (и обе являются высотами трапеции $ABCD$). Поэтому, если провести высоту BK трапеции $ABCD$, то

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|BK|}{\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|BK|} = \frac{|AD|}{|BC|} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|AD|}{|BC|} = 5.$$

Далее, поскольку трапеция $ABCD$ вписана в окружность, то она равнобедренная и, кроме того, треугольник ABD вписан в эту же окружность. Применяя к нему теорему синусов и учитывая тот факт, что углы BAD и ADC – острые (это вытекает из того, что $|AD|>|BC|$), находим

$$\sin\widehat{BAD} = \frac{|BD|}{2R_{\triangle ABD}} = \frac{\frac{4}{3}R_{ABCD}}{2R_{ABCD}} = \frac{2}{3} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}\widehat{BAD} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Теперь обозначим длины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ за $5x$ и x соответственно. По свойствам равнобедренной трапеции

$$|AK| = \frac{|AD|-|BC|}{2} = 2x, \quad |KD| = |AD|-|AK| = 3x,$$

а из прямоугольного треугольника ABK мы имеем $|BK| = |AK|\cdot\operatorname{tg}\widehat{BAK} = \dfrac{4x}{\sqrt{5}}$.

Наконец, запишем теорему Пифагора для треугольников ABK и BDK:

$$|AB|^2 = |AK|^2+|BK|^2 = \frac{36}{5}x^2, \quad |BD|^2 = |KD|^2+|BK|^2 = \frac{61}{5}x^2.$$

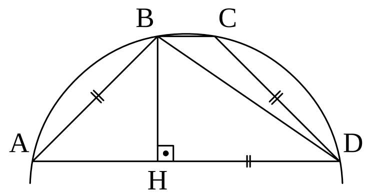
Осталось разделить полученные соотношения и ещё раз вспомнить, что трапеция $ABCD$ – равнобедренная:

$$\frac{|AB|^2}{|BD|^2} = \frac{36}{61} \Longrightarrow |AB| = |CD| = \frac{6}{\sqrt{61}}\cdot|BD| = \frac{6}{\sqrt{61}}\cdot\frac{4}{3}\cdot R_{ABCD} \Longrightarrow \frac{|CD|}{R_{ABCD}} = \frac{8}{\sqrt{61}}.$$

Ответ. $\dfrac{8}{\sqrt{61}}$.

Задача 24.

Дана трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение длины высоты этой трапеции к длине радиуса описанной около неё окружности равно $\sqrt{2/3}$. Найдите величины углов трапеции.



Идея. Воспользоваться свойствами равнобедренной трапеции и свойством четырёхугольника, описанного около окружности.
Указание. Выразить длину диагонали этой трапеции через длину её высоты и синус величины угла при основании, воспользоваться теоремой синусов.

Решение. Обозначим вершины трапеции буквами A, B, C и D. Будем считать, что $AD||BC$, $|AD| \geqslant |BC|$. Поскольку трапеция $ABCD$ вписана в окружность, то она равнобедренная, то есть $|AB| = |CD|$ и $\angle BAD = \angle ADC$, а поскольку она описана около окружности, то $|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$, из чего вытекает, что

$$|AB| = |CD| = \frac{|AD| + |BC|}{2}.$$

Далее опустим высоту BH этой трапеции, обозначим её длину за h, а величины углов BAD и ADC обозначим за α. Поскольку $|AD| \geqslant |BC|$, то $0 < \alpha \leqslant \pi/2$, точка H попадает на отрезок AD и, по свойствам равнобедренной трапеции,

$$|AH| = \frac{|AD| - |BC|}{2}, \quad |HD| = |AD| - |AH| = \frac{|AD| + |BC|}{2},$$

то есть $|HD| = |AB| = |CD|$.

Теперь рассмотрим треугольники ABH, BDH и ABD. Первые два из них прямоугольные, поэтому

$$|HD| = |AB| = \frac{|BH|}{\sin\widehat{BAD}} = \frac{h}{\sin\alpha}, \quad |BD| = \sqrt{|BH|^2 + |HD|^2} = h \cdot \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}{\sin\alpha},$$

а третий вписан в ту же окружность, что и трапеция $ABCD$. Применяя к нему теорему синусов и обозначая длину радиуса окружности, описанной около трапеции $ABCD$, за R, находим

$$R = \frac{|BD|}{2\sin\widehat{BAD}} = h \cdot \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}{2\sin^2\alpha}.$$

Таким образом,

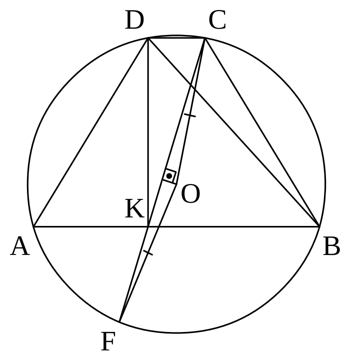
$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{h}{R} = \frac{2\sin^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + 1}} \iff \frac{4\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha + 1} = \frac{2}{3} \iff 6\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 1 = 0.$$

Решая полученное биквадратное уравнение с учётом того, что $\sin\alpha \geqslant 0$, находим $\sin\alpha = \sqrt{2}/2$. Значит, $\alpha = \pi/4$. Величины углов при другом основании трапеции $ABCD$ равны, очевидно, $3\pi/4$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$.

Задача 25.

В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD, $|AB| = 5$, $|DC| = 1$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Точка K лежит на отрезке AB таким образом, что $|AK| = 2$. Прямая CK пересекает окружность в точке F, отличной от точки C. Найдите площадь треугольника OFC.



Идея. Доказать, что $DK \perp AB$, найти длины всех сторон треугольника OFC.

Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора, теоремой синусов и свойством пересекающихся хорд.

Решение. Поскольку трапеция $ABCD$ вписана в окружность, то она равнобедренная, поэтому $\widehat{ABC} = \widehat{BAD}$. Заметим, что если опустить высоту трапеции $ABCD$ из точки D и обозначить её основание за K', то $|AK'| = \dfrac{1}{2}(|AB| - |CD|) = 2 = |AK|$. Таким образом, K – основание высоты, опущенной из точки D, $DK \perp CD$, $DK \perp AB$.

Из прямоугольных треугольников ADK, CDK и BDK получаем

$$|DK| = |AK| \cdot \operatorname{tg} \widehat{BAD} = 2\sqrt{3}, \quad |CK| = \sqrt{|DK|^2 + |CD|^2} = \sqrt{13};$$

$$|KB| = |AB| - |AK| = 3, \quad |BD| = \sqrt{|DK|^2 + |KB|^2} = \sqrt{21}.$$

Теперь можно найти длину радиуса окружности, описанной около трапеции $ABCD$, применив теорему синусов к треугольнику ABD:

$$|OC| = |OF| = \frac{|BD|}{2\sin\angle BAD} = \sqrt{7}.$$

После этого с помощью свойства пересекающихся хорд найдём $|KF|$:

$$|AK| \cdot |KB| = |CK| \cdot |KF| \quad \Longrightarrow \quad |KF| = \frac{6}{\sqrt{13}}; \quad |CF| = |CK| + |KF| = \frac{19}{\sqrt{13}}.$$

Наконец, вычислим площадь равнобедренного треугольника OFC, предварительно отыскав длину его высоты, опущенной из точки O:

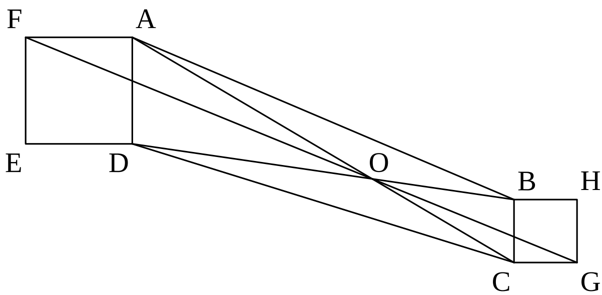
$$h_{CF} = \sqrt{|OC|^2 - \frac{|CF|^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{52}}; \; S_{\triangle OFC} = \frac{1}{2} \cdot |CF| \cdot h_{CF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{\frac{3}{52}} = \frac{19\sqrt{3}}{52}.$$

Ответ. $\dfrac{19\sqrt{3}}{52}$.

Задача 26.

На основаниях AD и BC трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка AD, если $|BC| = 2$, $|GO| = 7$, а $|GF| = 18$.

Идея. Доказать, что точки G, O и F лежат на одной прямой.
Указание. Рассмотреть треугольники CGO и AFO, доказать, что они подобны.



Решение. Для решения этой задачи необходимо доказать, что точки G, O и F лежат на одной прямой. Сначала воспользуемся тем, что треугольники AOD и COB подобны. Из этого подобия имеем $\dfrac{|AD|}{|BC|} = \dfrac{|AO|}{|OC|}$.

Далее заметим, что, поскольку по условию задачи $ADEF$ и $BCGH$ – квадраты, то, во-первых, $AF \perp AD$ и $CG \perp BC$, поэтому $AF||GC$ и углы GCO и FAO равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AF и GC и секущей AC, и, во-вторых, $|AF| = |AD|$ и $|GC| = |BC|$. Из всего вышеперечисленного следует подобие треугольников CGO и AFO (по двум сторонам и углу между ними). Это подобие даёт нам равенство углов COG и AOF, из которого и следует, что точки G, O и F лежат на одной прямой. В самом деле, если предположить противное, то мы получим, что луч OF и продолжение луча GO за точку O, во-первых, не совпадают, во-вторых, лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC и, в-третьих, образуют одинаковые углы с лучом OA, что невозможно.

Наконец, из доказанного нами факта и подобия треугольников CGO и AFO вытекает, что

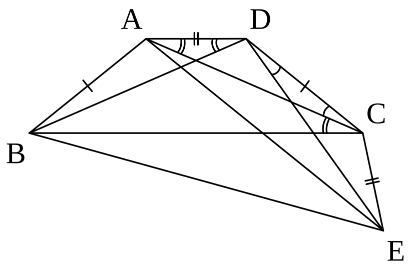
$$|OF| = |GF| - |GO| = 11, \quad \frac{|AF|}{|GC|} = \frac{|OF|}{|GO|} = \frac{11}{7} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |AD| = |AF| = \frac{11}{7} \cdot |GC| = \frac{11}{7} \cdot |BC| = \frac{22}{7}.$$

Ответ. $\dfrac{22}{7}$.

Задача 27.

Известно, что трапеция $ABCD$ – равнобедренная, $AD||BC$ и $|BC| > |AD|$. Трапеция $ECDA$ также равнобедренная, причём $AE||CD$ и $|AE| > |CD|$. Найдите $|BE|$, если известно, что $|DE| = 7$, а $\widehat{CDE} + \widehat{BDA} = \arccos(1/3)$.



Идея. Воспользоваться тем, что длины диагоналей равнобедренной трапеции равны.
Указание. Доказать, что треугольник BDE равнобедренный, найти величину его угла BDE.

Решение. Заметим, что поскольку трапеции $ABCD$ и $ECDA$ равнобедренные, то длины их диагоналей равны: $|AC| = |BD|$ и $|AC| = |DE|$. Значит, во-первых, треугольник BDE равнобедренный, $|BD| = |DE| = 7$, и, во-вторых, треугольник BDA равен треугольнику CAD, а треугольник CAD равен треугольнику EDC (по трём сторонам). Из этих равенств вытекает, что $\widehat{BDA} = \widehat{CAD}$, а $\widehat{ACD} = \widehat{CDE}$. Также отметим, что $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ в силу свойств внутренних накрест лежащих углов, а $\widehat{ADC} = \pi - \widehat{BCD}$ в силу свойств внутренних односторонних углов. Пользуясь этими фактами, имеем

$$\widehat{ACB} = \widehat{BDA}; \quad \widehat{BDE} = \widehat{ADC} - \widehat{BDA} - \widehat{CDE} = \pi - \widehat{BCD} - \widehat{BDA} - \widehat{CDE} =$$

$$= \pi - \left(\widehat{ACB} + \widehat{ACD}\right) - \left(\widehat{BDA} + \widehat{CDE}\right) = \pi - 2\left(\widehat{BDA} + \widehat{CDE}\right) = \pi - 2\arccos\frac{1}{3}.$$

Наконец, из равнобедренного треугольника BDE получаем

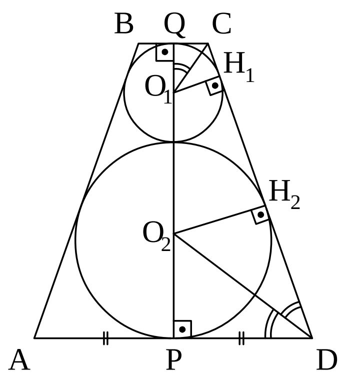
$$|BE| = 2 \cdot |DE| \cdot \sin\frac{1}{2}\widehat{BDE} = 14 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{3}\right) = 14 \cdot \cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{14}{3}$.

Замечание. Условия $|BC| > |AD|$ и $|AE| > |CD|$, не использованные нами при решении задачи, нужны для того, чтобы конфигурация, описываемая условием, существовала. В этом легко убедиться, попробовав нарисовать чертёж.

Задача 28.

В равнобедренной трапеции, длины оснований которой равны 1 и 4, расположены две окружности, каждая из которых касается двух боковых сторон трапеции, другой окружности и одного из оснований трапеции. Найдите площадь этой трапеции.



И д е я. Доказать, что окружности касаются оснований в их серединах, воспользоваться теоремой о равенстве длин отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности, найти длину боковой стороны трапеции.

У к а з а н и е. Рассмотреть два треугольника, каждый из которых образован центром одной из окружностей, точкой её касания с основанием и одной из вершин трапеции. Доказать, что они подобны.

У к а з а н и е. Рассмотреть трапецию, образованную центрами окружностей и точками их касания с одной из боковых сторон.

Р е ш е н и е. Обозначим вершины трапеции буквами A, B, C и D, будем считать, что $|AD| = 4$, $|BC| = 1$. Сначала докажем, что окружности из условия задачи касаются оснований в их серединах. Это сделать достаточно просто: обозначим центр окружности, касающейся основания AD и боковых сторон, буквой O_2, точку её касания с AD обозначим буквой P. Поскольку она вписана в углы BAD и ADC, то её центр лежит на пересечении биссектрис этих углов. Но трапеция $ABCD$ – равнобедренная, стало быть, углы BAD и ADC равны. Значит, равны и углы O_2AD и O_2DA, то есть треугольник AO_2D – равнобедренный. Отрезок O_2P является его высотой, поэтому он будет и его медианой, то есть P – середина AD, $|AP| = |DP| = 2$.

После этого обозначим центр окружности, касающейся основания BC и боковых сторон, буквой O_1, а точку её касания с основанием BC обозначим буквой Q. Проводя абсолютно аналогичные рассуждения, мы получаем, что Q – середина BC, $|BQ| = |CQ| = 1/2$.

Далее рассмотрим треугольники DO_2P и O_1CQ. Положим $|O_1Q| = r$, $|O_2P| = R$, $\widehat{ADC} = \alpha$. Тогда $\widehat{O_2DP} = \alpha/2$, $\widehat{BCD} = \pi - \alpha$ в силу свойств внутренних односторонних углов, $\widehat{O_1CQ} = \pi/2 - \alpha/2$, $\widehat{CO_1Q} = \alpha/2$. Значит, треугольники DO_2P и O_1CQ подобны по двум углам, из чего вытекает

$$\frac{|O_2P|}{|CQ|} = \frac{|DP|}{|O_1Q|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{R}{1/2} = \frac{2}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad Rr = 1.$$

Теперь обозначим точки касания окружностей с боковой стороной CD буквами H_1 и H_2 соответственно. Четырёхугольник $O_1H_1H_2O_2$ является прямоугольной трапецией, $|O_1H_1| = r$, $|O_2H_2| = R$, а $|O_1O_2| = R + r$, так как окружности касаются друг друга. Поэтому

$$|H_1H_2| = \sqrt{|O_1O_2|^2 - (|O_2H_2| - |O_1H_1|)^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} = 2.$$

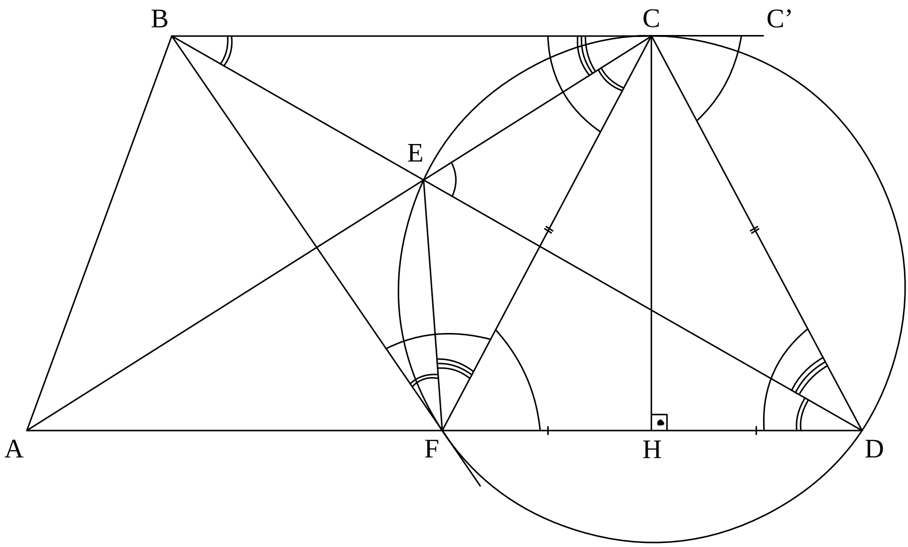
Наконец, заметим, что по теореме о равенстве длин отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности, $|CH_1| = |CQ| = 1/2$, $|DH_2| = |DP| = 2$. Стало быть, $|CD| = |CH_1| + |H_1H_2| + |DH_2| = 9/2$. Теперь всё просто:

$$|QP| = \sqrt{|CD|^2 - (|DP| - |CQ|)^2} = 3\sqrt{2}; \quad S_{ABCD} = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot |QP| = \frac{15}{\sqrt{2}}.$$

О т в е т. $\dfrac{15}{\sqrt{2}}$.

Задача 29.

В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, а величины углов AED и BCD равны. Окружность, длина радиуса которой равна 17, проходит через точки C, D и E, пересекает основание AD в точке F и касается прямой BF. Найдите длины оснований и высоты трапеции $ABCD$, если $|CD| = 30$.



Идея. Доказать, что BC – касательная к окружности из условия задачи, треугольники CDF и BCF – равнобедренные и подобны друг другу.

Указание. Воспользоваться свойствами вписанных углов и углов между касательной и хордой.

Указание. Воспользоваться соотношениями между длинами сторон и величинами углов в равнобедренном треугольнике.

Указание. Пользуясь теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части, доказать, что $|BC| \cdot |AD| = |BD|^2 - |BC|^2$.

Решение. Возьмём произвольную точку C' на продолжении отрезка BC за точку C. Тогда углы $C'CD$ и CED равны как смежные с равными углами BCD и AED, из чего вытекает, что BC – касательная к окружности, проходящей через точки C, D и E. Это легко доказать от противного: если она таковой не является, то проведём прямую, касающуюся в точке C рассматриваемой окружности. По свойству угла между касательной и хордой угол между этой касательной и отрезком CD будет равен углу CED. Значит, через точку C проходят две различные прямые, образующие одинаковые углы с отрезком CD. Противоречие.

Итак, BC – касательная. Поскольку $AD||BC$, CD – секущая, то углы $C'CD$ и CDA равны как внутренние накрест лежащие. С другой стороны, углы CED и CFD равны как опирающиеся на одну дугу. Стало быть, угол CDA равен углу CFD, поэтому треугольник CDF – равнобедренный, $|CD| = |CF| = 30$, длина радиуса описанной около него окружности равна 17.

Проведём высоту CH этого треугольника, величины углов CDA и CFD (заметив, что они острые) обозначим за α и воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{|CF|}{\sin\widehat{CDF}} = 2R_{CDF} \quad\Longrightarrow\quad \sin\alpha = \frac{15}{17},\quad \cos\alpha = \frac{8}{17},\quad |CH| = |CD|\sin\alpha = \frac{450}{17}.$$

На один вопрос задачи ответ получен. Для нахождения длины основания BC заметим, что BC и BF – отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности. Значит, $|BC| = |BF|$, треугольник BCF также равнобедренный, а величины его углов BCF и BFC тоже равны α, поскольку углы BCF и CDF равны по свойствам углов между касательной и хордой и вписанных углов. Значит,

$$|BC| = \frac{\frac{1}{2}|CF|}{\cos\widehat{BCF}} = \frac{15}{\frac{8}{17}} = \frac{255}{8}.$$

Нахождение длины основания AD – более сложная задача. Для начала воспользуемся подобием треугольников AED и CEB, а также теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части:

$$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|BE|},\quad |BC|^2 = |BD|\cdot|BE| \quad\Longrightarrow\quad |BC|\cdot|AD| = |BD|\cdot|DE|.$$

Преобразуя правую часть полученного соотношения, находим

$$|BC|\cdot|AD| = |BD|\cdot(|BD| - |BE|) = |BD|^2 - |BD|\cdot|BE| = |BD|^2 - |BC|^2.$$

Но по теореме косинусов из треугольника BCD вытекает

$$|BD|^2 - |BC|^2 = |CD|^2 - 2\cdot|BC|\cdot|CD|\cdot\cos\widehat{BCD} = |CD|^2 + 2\cdot|BC|\cdot|CD|\cdot\cos\alpha.$$

Наконец, вспомним, что $|BC| = |CD|/2\cos\alpha$. С учётом этого имеем

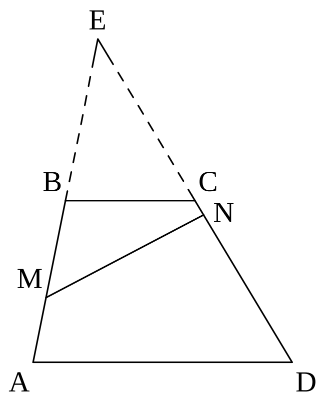
$$\frac{|CD|}{2\cos\alpha}\cdot|AD| = |CD|^2 + 2\cdot\frac{|CD|}{2\cos\alpha}\cdot|CD|\cdot\cos\alpha \quad\Longrightarrow\quad |AD| = 4|CD|\cos\alpha = \frac{960}{17}.$$

Ответ. Длины оснований равны $\dfrac{255}{8}$ и $\dfrac{960}{17}$, длина высоты равна $\dfrac{450}{17}$.

Задача 30.

На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята точка M таким образом, что $|AM| : |MB| = 2 : 3$. На противоположной стороне CD взята такая точка N, что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найдите отношение $|CN| : |ND|$, если известно, что $|BC| : |AD| = 1 : 2$.

Идея. Продлить боковые стороны трапеции до пересечения в точке E, представить площади частей, на которые трапеция делится отрезком MN, как разности площадей треугольников.



Указание. Воспользоваться леммами о площадях треугольников.

Указание. Выразить всевозможные площади через площадь треугольника AED.

Решение. В задачах, где известно отношение длин оснований трапеции, как правило, надо достраивать трапецию до треугольника. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD буквой E. Ясно, что треугольники BEC и AED подобны, причём

$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|CE|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|AD|} = \frac{1}{2}.$$

Из этого вытекает, что $|AB| = |BE|$, $|CD| = |CE|$. Введём обозначения

$$|AM| = 3x, \quad |MB| = 2x, \quad |CN| = ky, \quad |ND| = y.$$

Тогда k – величина, которую нас просят отыскать,

$$|AB| = |BE| = 5x, \quad |CD| = |CE| = (k+1)y, \quad |ME| = 8x, \quad |NE| = (2k+1)y.$$

Далее заметим, что $S_{MBCN} = S_{\triangle MEN} - S_{\triangle BEC}$, $S_{AMNB} = S_{\triangle AED} - S_{\triangle MEN}$. Положим $S_{\triangle AED} = S$ и с помощью лемм о площадях треугольников выразим всевозможные площади через эту величину:

$$\frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle AED}} = \left(\frac{|BC|}{|AD|}\right)^2 = \frac{1}{4}; \quad \frac{S_{\triangle MEN}}{S_{\triangle AED}} = \frac{|ME| \cdot |NE|}{|AE| \cdot |DE|} = \frac{8x}{10x} \cdot \frac{(2k+1)y}{(2k+2)y} = \frac{4k+2}{5k+5},$$

стало быть,

$$S_{\triangle BEC} = \frac{1}{4}S, \quad S_{\triangle MEN} = \frac{4k+2}{5k+5}S;$$

$$S_{MBCN} = \left(\frac{4k+2}{5k+5} - \frac{1}{4}\right)S, \quad S_{AMND} = \left(1 - \frac{4k+2}{5k+5}\right)S.$$

Наконец, по условию задачи либо $S_{MBCN} = 3S_{AMND}$, либо $3S_{MBCN} = S_{AMND}$. В первом из этих случаев мы имеем

$$\left(\frac{4k+2}{5k+5} - \frac{1}{4}\right)S = 3\left(1 - \frac{4k+2}{5k+5}\right)S \iff \frac{11k+3}{4(5k+5)} = \frac{3k+9}{5k+5} \implies k = -33.$$

Понятно, что $k > 0$, стало быть, этот случай невозможен. Рассматривая второй случай, мы получаем

$$3\left(\frac{4k+2}{5k+5} - \frac{1}{4}\right)S = \left(1 - \frac{4k+2}{5k+5}\right)S \iff \frac{33k+9}{4(5k+5)} = \frac{k+3}{5k+5} \implies k = \frac{3}{29}.$$

Ответ. $3:29$.

Задача 31.

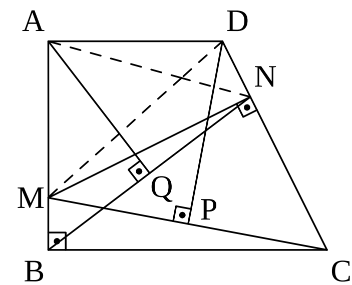
В трапеции $ABCD$ $BC||AD$, $\widehat{ABC} = \pi/2$. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD – в точке N. Известно, что расстояние от точки D до прямой MC равно c, $|MC| = a$, $|BN| = b$. Найдите расстояние от точки A до прямой BN.

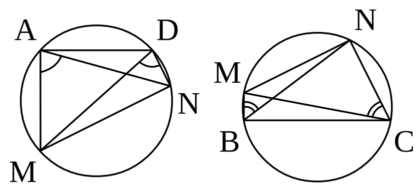
Идея. Доказать подобие треугольников ABN и DCM.

Указание. Показать, что вокруг четырёхугольников $ADNM$ и $MBCN$ можно описать окружности.

Указание. Показать, что углы MAN и MDN равны, как опирающиеся на одну дугу. Поэтому равны углы BAN и MDC наших треугольников.

Указание. Показать, что углы MBN и MCN равны, как опирающиеся на одну дугу. Поэтому равны углы ABN и MCD наших треугольников.





Решение. Опустим из точек A и D перпендикуляры на прямые BN и CM, основания этих перпендикуляров обозначим буквами Q и P соответственно. Тогда $|DP| = c$, а $|AQ|$ – величина, которую нам необходимо вычислить.

В этой задаче достаточно нелегко найти связь между величинами, данными в условии, и величиной, которую надо найти. Но если внимательно присмотреться, то видно, что отрезки BN и AQ являются основанием и высотой в треугольнике ABN, а отрезки MC и DP являются основанием и высотой в треугольнике DCM. Если бы эти треугольники оказались подобными, то $|AQ|$ мы бы легко нашли. Попробуем доказать подобие треугольников ABN и DCM.

Рассмотрим четырёхугольник $ADNM$. Так как углы DAM и DNM прямые, то вокруг четырёхугольника $ADNM$ можно описать окружность. Тогда углы MAN и MDN равны, как опирающиеся на одну дугу. Поэтому равны углы BAN и MDC наших треугольников.

Теперь рассмотрим четырёхугольник $MBCN$. Так как углы MBC и MNC прямые, то вокруг четырёхугольника $MBCN$ можно описать окружность. Тогда углы MBN и MCN равны, как опирающиеся на одну дугу. Поэтому равны углы ABN и MCD наших треугольников.

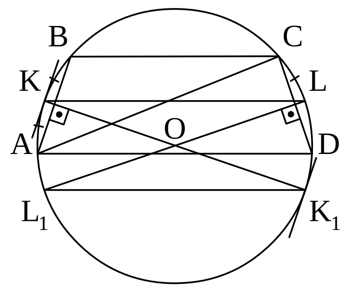
Следовательно, треугольники ABN и DCM подобны. Поэтому

$$\frac{|BN|}{|CM|} = \frac{|AQ|}{|DP|} \quad \Longrightarrow \quad |AQ| = \frac{|BN| \cdot |DP|}{|CM|} = \frac{bc}{a}.$$

Ответ. $\dfrac{bc}{a}$.

Задача 32.

В окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{7}$, вписана трапеция. Длина её меньшего основания равна 4. Через точку этой окружности, касательная в которой параллельна одной из боковых сторон трапеции, проведена хорда, параллельная основаниям трапеции. Длина этой хорды равна 5. Найдите площадь трапеции и длину её диагоналей.



И д е я. Доказать, что длина хорды из условия задачи равна длине диагоналей трапеции. Воспользоваться теоремой синусов.

У к а з а н и е. Доказать, что хорда из условия задачи либо проходит через середины дуг, отсекаемых боковыми сторонами, либо равна ей по длине. Рассмотреть дугу, заключённую между противоположными основаниями трапеции, и дугу, заключённую между серединами дуг, отсекаемых боковыми сторонами, показать, что они равны.

У к а з а н и е. Найти синус величины угла при меньшем основании, вычислить длину боковой стороны, затем найти длину высоты и большего основания.

Р е ш е н и е. Обозначим вершины трапеции буквами A, B, C и D, будем считать, что BC – меньшее основание, то есть $|BC| = 4$. Поскольку трапеция $ABCD$ вписана в окружность, то она равнобедренная, $|AB| = |CD|$. Центр окружности, описанной около $ABCD$, обозначим буквой O.

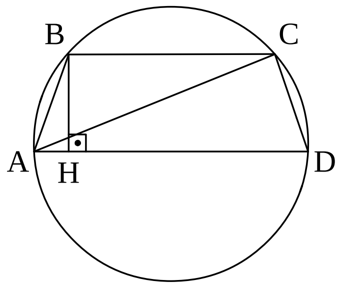
Рассмотрим некую точку окружности, касательная в которой параллельна AB. Заметим, что касательная к окружности перпендикулярна диаметру, проходящему через точку касания, поэтому AB также будет перпендикулярна этому диаметру и, в силу свойства хорды, перпендикулярной диаметру, будет делиться им пополам. Из этого следует, что у нас есть два варианта расположения этой точки – она в любом случае является концом диаметра, проходящего через середину стороны AB и ей перпендикулярного. На рисунке они обозначены буквами K и K_1. Отметим, что точка K лежит на дуге AB, не содержащей других вершин трапеции.

Рассмотрим хорды KL и K_1L_1, параллельные AD. Обе они удовлетворяют условию задачи. Однако ясно, что они параллельны друг другу, поэтому углы LKO и L_1K_1O равны, как внутренние накрест лежащие, из чего следует равенство равнобедренных треугольников KOL и K_1OL_1. Стало быть, $|KL| = |K_1L_1|$. А это значит, что вне зависимости от того, какая хорда (KL или K_1L_1) имелась в виду в условии задачи, длина хорды KL равна 5.

Теперь докажем, что длина хорды KL равна длине диагоналей трапеции $ABCD$. Для этого заметим, что треугольник AOB – равнобедренный, $OK \perp AB$, поэтому OK – биссектриса угла AOB. Из этого вытекает, что дуги AK и KB равны. Далее, $KL||BC$, поэтому $KBCL$ – трапеция, вписанная в окружность, стало быть, она равнобедренная, $|KB| = |CL|$. Но равные хорды стягивают равные дуги, поэтому дуги KB и CL также равны. Сопоставляя эти факты, имеем

$$\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{AK} + \overset{\frown}{KB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CL} + \overset{\frown}{KB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{KBCL}.$$

Итак, мы доказали, что дуги ABC и $KBCL$ равны. А из этого следует, что длины хорд AC и KL, стягивающих эти дуги, тоже равны. Значит, $|AC| = 5$. Ну а так как длины диагоналей равнобедренной трапеции $ABCD$ равны, то и $|BD| = 5$.



Для нахождения площади трапеции $ABCD$ поступим следующим образом: сначала, для того чтобы задействовать длину радиуса описанной около неё окружности, рассмотрим треугольник ABC, также вписанный в эту окружность. Записывая для него теорему синусов, имеем

$$\frac{|AC|}{\sin\widehat{ABC}} = 2R \quad\Longrightarrow\quad \sin\widehat{ABC} = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

Поскольку BC – меньшее основание, то угол ABC тупой, $\cos\widehat{ABC} = -\sqrt{1-\sin^2\widehat{ABC}} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$. Теперь воспользуемся теоремой косинусов:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{ABC} \quad\Longrightarrow\quad 25 = |AB|^2 + 16 + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}|AB|.$$

Решая это квадратное уравнение, находим $|AB| = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. Наконец, проведём высоту BH и учтём, что $\sin\widehat{BAC} = \sin\widehat{ABC}$. Тогда

$$|BH| = |AB|\cdot\sin\widehat{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{15\sqrt{3}}{14}; \quad |AH| = \sqrt{|AB|^2 - |BH|^2} = \frac{9}{14};$$

$$|AH| = \frac{|AD| - |BC|}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|AD| + |BC|}{2} = |AH| + |BC| = \frac{65}{14};$$

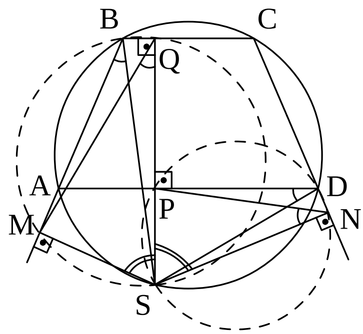
$$S_{ABCD} = \frac{|AD| + |BC|}{2}\cdot|BH| = \frac{975\sqrt{3}}{196}.$$

Ответ. Длины диагоналей равны 5, площадь равна $\dfrac{975\sqrt{3}}{196}$.

Задача 33.

В окружность вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, $|AD| > |BC|$. На дуге AD, не содержащей вершин B и C, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки S на прямые AD, BC, AB и CD соответственно. Известно, что $|SP| = a$, $|SQ| = b$, $|SN| = c$. Найдите отношение площадей треугольников MQS и NQS.

Идея. Доказать, что искомое отношение равно отношению длин отрезков SM и SN. Доказать, что треугольники SMQ и SPN подобны.



Указание. Воспользоваться леммами о площадях треугольников. Показать, что точки S, M, B и Q лежат на одной окружности, а точки S, N, D и P лежат на другой окружности.
Указание. Воспользоваться теоремой о четырёх точках и свойствами вписанных углов.

Решение. Сразу заметим, что трапеция $ABCD$ является равнобедренной в силу того, что она вписана в окружность. Из этого следует, что углы ABC и BCD равны. Значит, из того, что $SM \perp AB$, $SQ \perp BC$ и $SN \perp CD$ вытекает равенство углов MSQ и NSQ. Поэтому $\dfrac{S_{\triangle MQS}}{S_{\triangle NQS}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot|SM|\cdot|SQ|\cdot\sin\widehat{MSQ}}{\frac{1}{2}\cdot|SN|\cdot|SQ|\cdot\sin\widehat{NSQ}} = \dfrac{|SM|}{|SN|}$.

В этой задаче серьёзным препятствием при решении является тот факт, что существует весьма большое количество вариантов расположения точек M, Q и N. Тем не менее, по теореме о четырёх точках в любом случае точки S, M, B и Q лежат на одной окружности, а точки S, N, D и P лежат на другой окружности. Из этого следует, что угол SNP равен углу SDP, а угол SQM равен углу SBM в силу свойств вписанных углов. Но углы SDP и SBM опираются на дугу AS, стало быть, они равны. Значит, равны и углы SNP и SQM. Таким образом, треугольники SMQ и SPN подобны по двум углам,

$$\frac{|SM|}{|SP|} = \frac{|SQ|}{|SN|} \quad\Longleftrightarrow\quad |SM| = \frac{|SP|\cdot|SQ|}{|SN|} \quad\Longrightarrow\quad \frac{|SM|}{|SN|} = \frac{|SP|\cdot|SQ|}{|SN|^2} = \frac{ab}{c^2}.$$

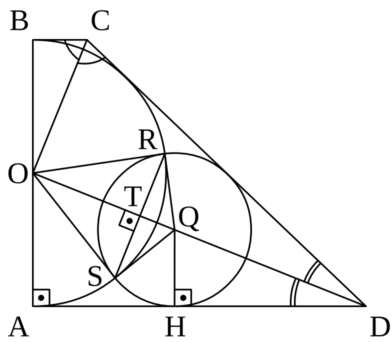
Ответ. $\dfrac{ab}{c^2}$.

Задача 34.

Дана трапеция $ABCD$, сторона AB которой перпендикулярна основаниям AD и BC. На стороне AB, как на диаметре, построена окружность, касающаяся стороны CD. Длина радиуса этой окружности равна $\sqrt{6}$. Другая окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{2}$, касается сторон AD и CD и пересекает первую окружность так, что длина их общей хорды равна $\sqrt{6}$, а центры окружностей расположены по разные стороны от этой хорды. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Идея. Доказать, что центр O первой окружности лежит на пересечении биссектрис углов ADC и BCD, вычислить величину угла ADC, затем, рассматривая треугольники ADO и BCO, найти длины оснований трапеции.
Указание. Доказать, что центры обеих окружностей лежат на биссектрисе угла ADC, рассмотреть четырёхугольник, образованный центрами окружностей и точками их пересечения, найти расстояние между центрами окружностей.
Указание. Для нахождения величины угла ADC рассмотреть треугольники AOD и HQD (Q – центр второй окружности, H – проекция Q на AD).

Решение. Обозначим буквами O и Q центры первой и второй окружностей соответственно.



Сразу заметим, что поскольку прямая AD перпендикулярна диаметру первой окружности AB, то она является касательной к ней. Поэтому обе окружности касаются сторон AD и CD, то есть обе они вписаны в угол ACD и их центры O и Q лежат на биссектрисе этого угла. Также отметим, что первая окружность касается и стороны BC (это обосновывается так же, как и её касание со стороной AD), поэтому она вписана и в угол BCD, стало быть, CO – биссектриса угла BCD. Ясно, что для ответа на вопрос задачи нам достаточно найти величину угла ADC, потому что тогда, рассмотрев треугольники AOD и BOC, мы сможем найти и длины оснований трапеции.

Понятно, что O – середина AB, $|AO| = |BO| = \sqrt{6}$, $|AB| = 2\sqrt{6}$. Обозначим буквами R и S точки пересечения первой и второй окружностей, тогда, по условию задачи, $|OR| = |OS| = \sqrt{6}$, $|QR| = |QS| = \sqrt{2}$, а $|RS| = \sqrt{6}$; а буквой T обозначим точку пересечения отрезков RS и OQ (они пересекаются в силу того, что точки O и Q лежат по разные стороны от RS по условию задачи). Треугольники ORQ и OSQ, очевидно, равны по трём сторонам, поэтому углы ROQ и SOQ равны. Стало быть, OQ – биссектриса угла ROS. Но треугольник ORS равнобедренный, значит, $OQ \perp RS$, $|RT| = |TS| = \sqrt{6}/2$. Пользуясь теоремой Пифагора и тем, что $|OQ| = |OT| + |QT|$, находим

$$|OT| = \sqrt{|OR|^2 - |RT|^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad |QT| = \sqrt{|QR|^2 - |RT|^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad |OQ| = 2\sqrt{2}.$$

Далее проведём отрезок QH, перпендикулярный стороне AD ($H \in AD$), и обозначим величину острого угла ADO за α. Из прямоугольных треугольников AOD и HQD мы получаем

$$|OD| = \frac{|AO|}{\sin\widehat{ADO}} = \frac{\sqrt{6}}{\sin\alpha}, \quad |QD| = \frac{|QH|}{\sin\widehat{ADO}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}; \quad |OQ| = |OD| - |QD| \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sin\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Наконец, пользуясь свойствами внутренних односторонних углов и рассматривая треугольники AOD и BOC, получаем

$$\widehat{ADC} = 2\widehat{ADO} = 2\alpha, \quad \widehat{BCD} = \pi - \widehat{ACD} = \pi - 2\alpha, \quad \widehat{BCO} = \frac{1}{2}\widehat{BCD} = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

$$|AD| = |AO| \cdot \operatorname{ctg}\widehat{ADO} = \sqrt{6}\operatorname{ctg}\alpha, \quad |BC| = |BO| \cdot \operatorname{ctg}\widehat{BCO} = \sqrt{6}\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\frac{|AD| + |BC|}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = \frac{\sqrt{6}}{2\sin\alpha\cos\alpha};$$

$$S_{ABCD} = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot |AB| = \frac{\sqrt{6}}{2\sin\alpha\cos\alpha} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{6(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\sqrt[4]{3}}.$$

О т в е т. $\dfrac{6(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\sqrt[4]{3}}$.

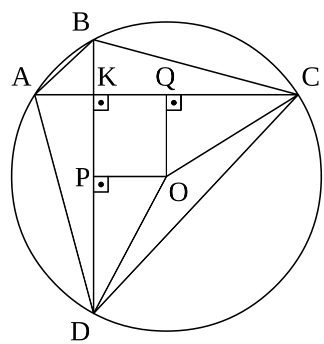
3.3. Общие четырёхугольники и многоугольники

Задача 1.

В окружность, длина радиуса которой равна 17, вписан четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и находятся на расстоянии 8 и 9 от центра окружности. Найдите длины сторон этого четырёхугольника.

Идея. Воспользоваться свойством хорды, перпендикулярной диаметру.
Указание. Опустить из центра окружности перпендикуляры на диагонали четырёхугольника, воспользоваться теоремой Пифагора.

Решение. Обозначим вершины четырёхугольника буквами A, B, C и D, центр окружности обозначим буквой O, точку пересечения его диагоналей обозначим буквой K, опустим перпендикуляры OQ и OP на диагонали AC и BD соответственно. Будем считать, что диагональ BD находится ближе к центру окружности, чем диагональ AC. Тогда, по условию задачи, $|OC| = |OD| = 17$, $|OP| = 8$, $|OQ| = 9$.



Заметим, что, во-первых, $KQOP$ – прямоугольник, поэтому $|OP| = |KQ| = 8$, $|OQ| = |KP| = 9$, и, во-вторых, по свойству хорды, перпендикулярной диаметру, $|AQ| = |QC|$, $|BP| = |PD|$. После этого по теореме Пифагора находим

$$|AQ| = |QC| = \sqrt{|OC|^2 - |OQ|^2} = 4\sqrt{13}, \quad |BP| = |PD| = \sqrt{|OD|^2 - |OP|^2} = 15.$$

Значит,

$$|AK| = |AQ| - |KQ| = 4\sqrt{13} - 8, \quad |KC| = |QC| + |KQ| = 4\sqrt{13} + 8;$$

$$|BK| = |BP| - |KP| = 6, \quad |KD| = |PD| + |KP| = 24.$$

Наконец, применяя теорему Пифагора в треугольниках AKB, BKC, CKD и AKD, получаем

$$|AB| = \sqrt{308 - 64\sqrt{13}}, \quad |BC| = \sqrt{308 + 64\sqrt{13}},$$

$$|CD| = \sqrt{848 + 64\sqrt{13}}, \quad |AD| = \sqrt{848 - 64\sqrt{13}}.$$

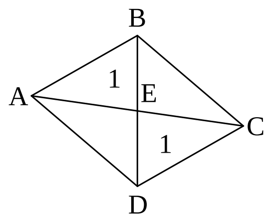
Ответ. $\sqrt{848 \pm 64\sqrt{13}}$, $\sqrt{308 \pm 64\sqrt{13}}$.

Задача 2.

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка E – точка пересечения диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь четырёхугольника $ABCD$ не превосходит 4, $|AD| = 3$. Найдите длину стороны BC.

Идея. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм.
Указание. Воспользоваться свойством площадей треугольников, на которые выпуклый четырёхугольник делится диагоналями, доказать, что площади треугольников BCE и ADE равны 1.

Решение. Пользуясь свойством площадей треугольников, на которые выпуклый четырёхугольник делится диагоналями, и условием задачи, получаем



$$\begin{aligned} &S_{\triangle BCE} \cdot S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABE} \cdot S_{\triangle DCE} = 1, \\ &S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ADE} + S_{\triangle ABE} + S_{\triangle DCE} \leqslant 4 \end{aligned} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad S_{\triangle BCE} = \frac{1}{S_{\triangle ADE}}, \quad S_{\triangle ADE} + \frac{1}{S_{\triangle ADE}} \leqslant 2.$$

С другой стороны, сумма двух положительных взаимно обратных чисел всегда больше либо равна двум, поэтому

$$S_{\triangle ADE} + \frac{1}{S_{\triangle ADE}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad S_{\triangle ADE} = 1, \quad S_{\triangle BCE} = 1.$$

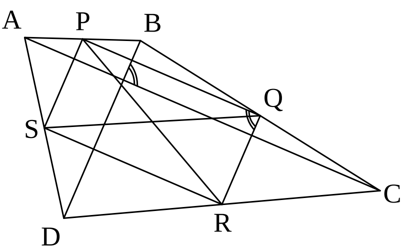
Итак, треугольники, на которые четырёхугольник $ABCD$ поделен диагоналями равновелики, поэтому он параллелограмм, $|BC| = |AD| = 3$.

Ответ. 3.

Задача 3.

В выпуклом четырёхугольнике длины диагоналей равны 1 и 2. Найдите его площадь, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

Идея. Доказать, что диагонали четырёхугольника из условия задачи перпендикулярны.
Указание. Воспользоваться теоремой Вариньона.



Решение. Обозначим вершины четырёхугольника буквами A, B, C и D, середины его сторон AB, BC, CD и AD обозначим как P, Q, R и S соответственно. С одной стороны, четырёхугольник $PQRS$ по теореме Вариньона является параллелограммом, а с другой стороны, длины его диагоналей равны по условию задачи. Из этого вытекает, что четырёхугольник $PQRS$ – прямоугольник. Но поскольку $PQ||AC$, а $QR||BD$, то величина угла между диагоналями AC и BD четырёхугольника $ABCD$ равна величине угла PQR, то есть $\pi/2$. Наконец, применяя формулу площади четырёхугольника, находим

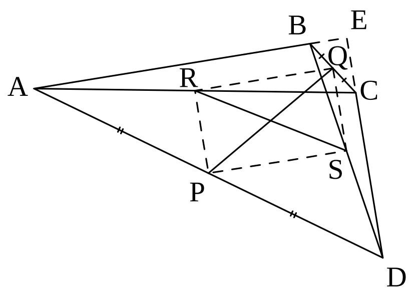
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Ответ. 1.

Задача 4.

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найдите величину угла между прямыми AB и CD.

Идея. Доказать, что четырёхугольник, вершинами которого являются середины диагоналей и середины двух противоположных сторон произвольного четырёхугольника – параллелограмм.
Указание. Воспользоваться тем, что параллелограмм, длины диагоналей которого равны, – прямоугольник.



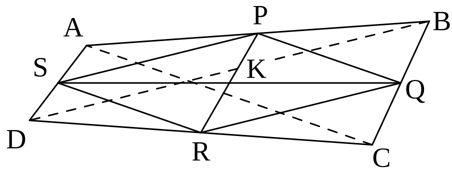
Решение. Обозначим середины сторон AD и BC буквами P и Q, а середины диагоналей AC и BD обозначим буквами R и S соответственно. Будем рассуждать так же, как и при доказательстве теоремы Вариньона. Поскольку R – середина AC, а Q – середина BC, то RQ – средняя линяя треугольника ABC, стало быть, $RQ||AB$. Рассуждая абсолютно аналогично, мы находим, что $PS||AB$, $PR||CD$, $QS||CD$. Из этих параллельностей мы получаем, что противоположные стороны четырёхугольника $PRQS$ параллельны, поэтому он является параллелограммом. Далее, по условию задачи длины его диагоналей равны, стало быть, четырёхугольник $PRQS$ – прямоугольник. Наконец, поскольку $RQ||AB$, а $QS||CD$, то величина угла между прямыми AB и CD равна величине угла RQS, то есть $\pi/2$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 5.

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ величина угла, под которым пересекаются отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равна $\pi/3$, а длины этих отрезков относятся как 1:3. Чему равна длина меньшей диагонали четырёхугольника $ABCD$, если длина большей равна $\sqrt{39}$?

Идея. Воспользоваться теоремой Вариньона.
Указание. Выразить длины диагоналей четырёхугольника $ABCD$ через длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон.



Решение. Обозначим середины сторон AB, BC, CD и AD буквами P, Q, R и S соответственно, точку пересечения отрезков PR и QS обозначим буквой K. Без ограничения общности будем считать, что $|PR| : |QS| = 1 : 3$, $\widehat{PKQ} = \pi/3$, $\widehat{QKR} = 2\pi/3$. По теореме Вариньона мы заключаем, что четырёхугольник $PQRS$ является параллелограммом, причем $|PQ| = \frac{1}{2}|AC|$ и $|QR| = \frac{1}{2}|BD|$. Положим $|PR| = x$, $|QS| = 3x$, тогда, по свойствам параллелограмма, $|PK| = |KR| = x/2$, $|QK| = 3x/2$. Пользуясь теоремой косинусов, находим

$$|PQ|^2 = |PK|^2 + |QK|^2 - 2 \cdot |PK| \cdot |QK| \cdot \cos\widehat{PKQ} = \frac{7x^2}{4} \quad\Longrightarrow\quad |PQ| = \frac{x\sqrt{7}}{2};$$

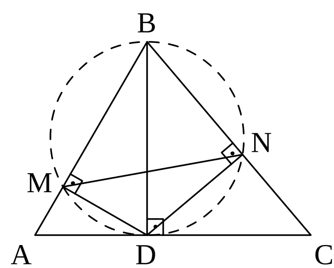
$$|QR|^2 = |QK|^2 + |KR|^2 - 2 \cdot |QK| \cdot |KR| \cdot \cos\widehat{QKR} = \frac{13x^2}{4} \quad\Longrightarrow\quad |QR| = \frac{x\sqrt{13}}{2}.$$

С учётом вышесказанного получаем $|AC| = x\sqrt{7}$, $|BD| = x\sqrt{13}$. Очевидно, что $|BD| > |AC|$, стало быть, $|BD| = \sqrt{39}$, $x = \sqrt{3}$, $|AC| = \sqrt{21}$.

Ответ. $\sqrt{21}$.

Задача 6.

В остроугольном треугольнике ABC из основания D высоты BD опущены перпендикуляры DM и DN на стороны AB и BC. Известно, что $|MN| = a$, $|BD| = b$. Найдите величину угла ABC.



Идея. Доказать, что четырёхугольник $BMDN$ вписан в окружность с диаметром BD.
Указание. Воспользоваться теоремой синусов.

Решение. Заметим, что поскольку $\widehat{BMD} = \pi/2$, $\widehat{BND} = \pi/2$, а точки M и N лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BD, то четырёхугольник $BMDN$ является выпуклым и сумма величин его противоположных углов равна π. Значит, он вписан в окружность, причём отрезок BD является её диаметром. Поскольку треугольник MBN вписан в ту же окружность, то по теореме синусов получаем

$$|BD| = 2R_{\triangle MBN} = \frac{|MN|}{\sin\widehat{MBN}} \quad\Longrightarrow\quad \sin\widehat{MBN} = \frac{|MN|}{|BD|} = \frac{a}{b}.$$

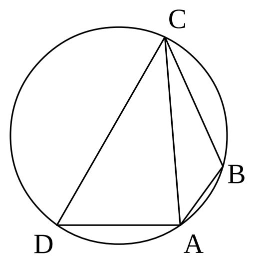
Так как треугольник ABC остроугольный, то $\widehat{ABC} = \arcsin\frac{a}{b}$.

Ответ. $\arcsin\dfrac{a}{b}$.

Задача 7.

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ длина стороны AD равна 4, длина стороны CD равна 7, косинус величины угла ADC равен $1/2$, синус величины угла BCA равен $1/3$. Найдите длину стороны BC, если известно, что окружность, описанная около треугольника ABC, проходит также и через точку D.

Идея. Воспользоваться свойством четырёхугольника, вписанного в окружность.
Указание. Применить теоремы синусов и косинусов.



Решение. Из условия вытекает, что величина угла ADC равна $\pi/3$, а четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Таким образом, в неё же вписан и треугольник ADC. Пользуясь теоремами синусов и косинусов, вычислим длину её радиуса:

$$|AC| = \sqrt{|CD|^2 + |AD|^2 - 2\cdot|CD|\cdot|AD|\cdot\cos\widehat{ADC}} = \sqrt{37};$$

$$R_{ABCD} = \frac{|AC|}{2\sin\widehat{ADC}} = \sqrt{\frac{37}{3}}.$$

Далее, пользуясь свойством выпуклого четырёхугольника, вписанного в окружность, находим $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{ADC} = 2\pi/3$. Поскольку сумма величин углов треугольника ABC равна π, то величина угла BCA должна быть меньше $\pi/3$, то есть $\widehat{BCA} = \arcsin 1/3$. Наконец,

$$\widehat{BAC} = \pi - \widehat{ABC} - \widehat{BCA} = \frac{\pi}{3} - \arcsin\frac{1}{3}; \quad |BC| = 2R_{ABCD}\cdot\sin\widehat{BAC} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{37}{3}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\frac{1}{3}\right) = 2\sqrt{\frac{37}{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{37}(2\sqrt{6}-1)}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{37}(2\sqrt{6}-1)}{3\sqrt{3}}$.

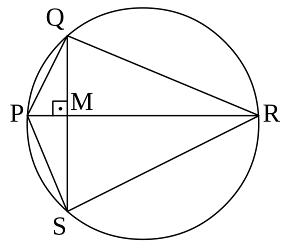
Задача 8.

Четырёхугольник $PQRS$ вписан в окружность. Его диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $|PS| = 13$, $|QM| = 10$, $|QR| = 26$. Найдите площадь четырёхугольника $PQRS$.

Идея. Доказать, что треугольники MPS и MQR подобны.
Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора и формулой площади четырёхугольника, в которую входят длины его диагоналей.

Решение. Записывая теорему Пифагора для треугольника MQR, находим

$$|MR| = \sqrt{QR^2 - MQ^2} = 24.$$



После этого заметим, что треугольники MPS и MQR подобны по первому признаку подобия треугольников (углы PMS и QMR прямые, а углы SPM и RQM равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Из этого подобия мы получаем

$$\frac{|PM|}{|QM|} = \frac{|MS|}{|MR|} = \frac{|PS|}{|QR|} \implies |PM| = \frac{|PS| \cdot |QM|}{|QR|} = 5, \; |MS| = \frac{|PM| \cdot |MR|}{|QM|} = 12.$$

Наконец, пользуясь формулой площади четырёхугольника, находим

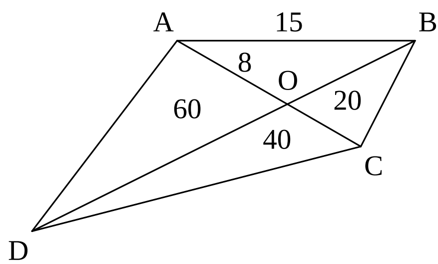
$$S_{PQRS} = \frac{1}{2} \cdot |QS| \cdot |PR| = \frac{1}{2} \cdot (|MS| + |QM|) \cdot (|PM| + |MR|) = 11 \cdot 29 = 319.$$

Ответ. 319.

Задача 9.

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD и AOD равны соответственно 20, 40 и 60. Найдите градусную меру угла BAO, если известно, что $|AB| = 15$, $|AO| = 8$, а градусная мера угла BOA больше 31°.

Идея. Применить свойство площадей треугольников, на которые четырёхугольник разбивается своими диагоналями.
Указание. Найти площадь треугольника AOB, записать формулу его площади.



Решение. Пользуясь свойством площадей треугольников, на которые четырёхугольник разбивается своими диагоналями, находим

$$S_{\triangle AOB} \cdot S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOC} \cdot S_{\triangle AOD} \implies S_{\triangle AOB} = \frac{20 \cdot 60}{40} = 30.$$

После этого, применяя формулу площади треугольника, получаем

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot |AO| \cdot |AB| \cdot \sin \widehat{BAO} \implies \sin \widehat{BAO} = \frac{2 \cdot 30}{8 \cdot 15} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, градусная мера угла BAO равна либо 30°, либо 150°. Второй из этих вариантов невозможен, поскольку сумма градусных мер углов BOA и BAO не может превосходить 180°.

Ответ. 30°.

Задача 10.

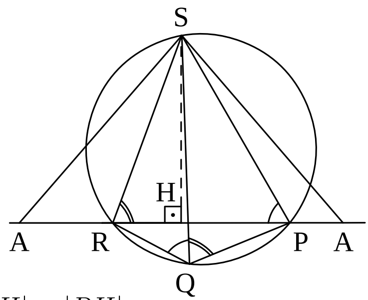
Диагонали четырёхугольника $PQRS$, вписанного в окружность, пересекаются в точке D. На прямой PR взята точка A, $\widehat{SAD} = 50°$, $\widehat{PQS} = 70°$, $\widehat{RQS} = 60°$. Где расположена точка A: на диагонали PR или на её продолжении? Ответ обосновать.

Идея. Найти величины углов SPR, SRP и PSR.
Указание. Воспользоваться свойствами вписанных углов, сравнить длины отрезков AH, RH и PH, где H – основание высоты SH треугольника SPR.

Решение. Поскольку четырёхугольник $PQRS$ вписан в окружность, то, пользуясь свойствами вписанных углов, мы находим

$$\widehat{SRP} = \widehat{SQP} = 70°, \quad \widehat{SPR} = \widehat{SQR} = 60°, \quad \widehat{PSR} = 180° - \widehat{RQP} = 50°.$$

Теперь можно обосновать, что точка A в любом случае лежит на продолжении диагонали PR (за точку R или за точку P). Треугольник PRS оказался остроугольным, поэтому если мы проведём его высоту SH, то точка H попадет на основание PR. Наконец, выразим длины отрезков AH, PH и RH:



$$|AH| = |SH| \operatorname{ctg} 50°, \quad |RH| = |SH| \operatorname{ctg} 70°,$$

$$|PH| = |SH| \operatorname{ctg} 60°.$$

Поскольку $\operatorname{ctg} 50° > \operatorname{ctg} 60° > \operatorname{ctg} 70°$, то $|AH| > |PH| > |RH|$.

Ответ. На продолжении.

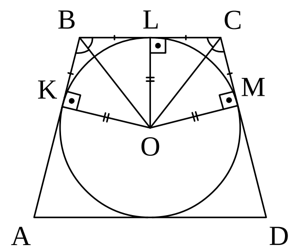
Задача 11.

В трапецию, длины оснований которой равны 3 и 5, можно вписать окружность и около неё можно описать другую окружность. Вычислите площадь пятиугольника, образованного радиусами вписанной окружности, перпендикулярными боковым сторонам трапеции, её меньшим основанием и соответствующими отрезками боковых сторон.

Идея. Представить искомую площадь как сумму площадей треугольников.
Указание. Воспользоваться свойствами четырёхугольников, описанных около окружности, и четырёхугольников, вписанных в окружность.

Решение. Обозначим вершины трапеции буквами A, B, C и D, точки касания окружности, вписанной в эту трапецию, со сторонами AB, BC и CD обозначим буквами K, L и M соответственно, а центр этой окружности обозначим буквой O. Будем считать, что $AD||BC$, $|AD| = 5$, $|BC| = 3$. Сразу заметим, что по свойству четырёхугольника, описанного около окружности, $|AB|+|CD| = |AD|+|BC| = 8$.

Далее, поскольку трапеция $ABCD$ вписана в окружность, то она равнобедренная. Значит, длины сторон AB и CD равны, поэтому, с учётом предыдущего соотношения, $|AB| = |CD| = 4$.



После этого воспользуемся тем, что длина радиуса окружности, вписанной в трапецию, равна половине длины её высоты. По свойствам равнобедренной трапеции

$$h_{ABCD} = \sqrt{|AB|^2 - \left(\frac{|AD| - |BC|}{2}\right)^2} = \sqrt{15} \quad\Longrightarrow\quad |OK| = |OL| = |OM| = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Наконец, искомая площадь может быть представлена в виде суммы площадей треугольников BOK, BOL, COL и COM. Они все являются прямоугольными, причем $\triangle BOK = \triangle BOL$ и $\triangle COL = \triangle COM$ (по гипотенузе и катету). Тогда

$$S_{\text{пятиугольника}} = 2(S_{\triangle BOL} + S_{\triangle COL}) = 2S_{\triangle BOC} = |BC| \cdot |OL| = \frac{3\sqrt{15}}{2}.$$

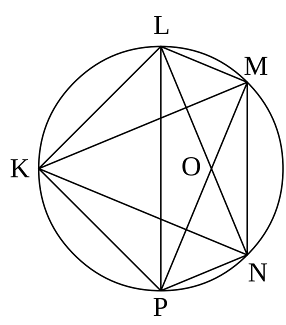
Ответ. $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$.

Задача 12.

Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности, длина радиуса которой равна $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM, если известно, что $LM||KN$, $KM||NP$, $MN||LP$, а $\widehat{LOM} = \pi/4$, где O – точка пересечения хорд LN и MP.

Идея. Воспользоваться тем, что четырёхугольники $KLMN$, $KMNP$ и $LMNP$ – трапеции, вписанные в окружность.
Указание. Пользуясь тем фактом, что равные хорды стягивают равные дуги, найти величины различных углов.

Решение. Ключевым шагом в решении этой задачи является использование того факта, что четырёхугольники $KLMN$, $KMNP$ и $LMNP$ по условию задачи являются трапециями, вписанными в окружность. Из этого вытекает, что все они равнобедренные, $|KL| = |MN|$, $|MN| = |KP|$, $|LM| = |PN|$. Далее, пользуясь тем, что равные хорды стягивают равные дуги, мы имеем



$$\overset{\frown}{KL} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{KP}, \ \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{PN}.$$

Теперь обозначим $\overset{\frown}{KL} = \alpha$, $\overset{\frown}{LM} = \beta$, воспользуемся тем, что сумма мер всех пяти упомянутых дуг равна 2π, и свойством угла между пересекающимися хордами:

$$\frac{\pi}{4} = \widehat{LOM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overset{\frown}{LM} + \overset{\frown}{PN}\right) \Longrightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2\beta \Longleftrightarrow \beta = \frac{\pi}{4};\ 3\alpha + 2\beta = 2\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

После этого по свойствам вписанных углов получаем

$$\widehat{KLM} = \frac{1}{2}\cdot \overset{\frown}{KPNM} = \frac{2\alpha+\beta}{2} = \frac{5\pi}{8},\ \widehat{LKM} = \frac{1}{2}\cdot \overset{\frown}{LM} = \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{8},$$

$$\widehat{KML} = \frac{1}{2}\cdot \overset{\frown}{KL} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Наконец, с помощью формулы $S_{\triangle KLM} = 2R^2_{\triangle KLM}\cdot\sin\widehat{KLM}\cdot\sin\widehat{LKM}\cdot\sin\widehat{KML}$ находим

$$S_{\triangle KLM} = 16\sin\frac{5\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{4} = 8\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} = 4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 4.$$

Ответ. 4.

Задача 13.

В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к прямой AB, пересекает сторону CD в точке M. Докажите, что EM – медиана треугольника CED, и найдите её длину, если $|AD| = 8$, $|AB| = 4$ и $\widehat{CDB} = \alpha$.

Идея. Доказать, что треугольники DEM и CEM равнобедренные.
Указание. Воспользоваться свойствами вписанных углов.

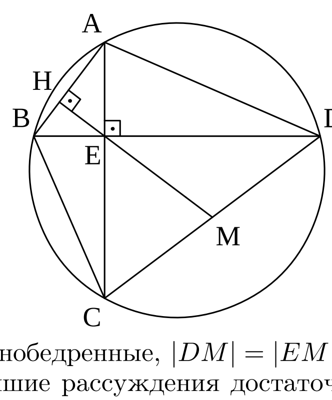
Решение. Заметим, что

$$\widehat{ACD} = \pi/2 - \widehat{CDB} = \pi/2 - \alpha,$$

и по свойствам углов, вписанных в окружность, $\widehat{CAB} = \widehat{CDB} = \alpha$. С другой стороны, если обозначить буквой H точку пересечения прямой EM и стороны AB, то

$$\widehat{MEC} = \widehat{AEH} = \frac{\pi}{2} - \widehat{HAE} = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$\widehat{DEM} = \frac{\pi}{2} - \widehat{MEC} = \alpha.$$



Таким образом, треугольники DEM и CEM оба равнобедренные, $|DM| = |EM|$, $|CM| = |EM|$. Значит, M – середина CD. Дальнейшие рассуждения достаточно просты. Сначала из прямоугольного треугольника ABE мы легко находим $|AE| = |AB|\cdot\cos\widehat{BAE} = 4\cos\alpha$, затем из прямоугольного треугольника AED по теореме Пифагора получаем $|DE| = \sqrt{|AD|^2 - |AE|^2} = 4\sqrt{4-\cos^2\alpha}$ и, наконец, рассматривая прямоугольный треугольник CED, имеем

$$|CD| = \frac{|DE|}{\cos\widehat{CDB}} = \frac{4\sqrt{4-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = 4\sqrt{\frac{4}{\cos^2\alpha} - 1} = 4\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha + 3};$$

$$|EM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|CD| = 2\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha + 3}.$$

Ответ. $2\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha + 3}$.

Задача 14.

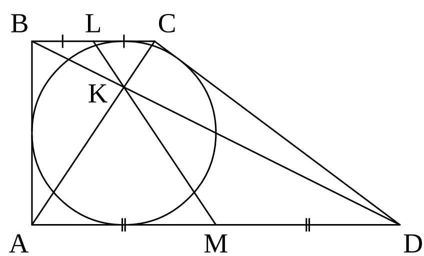
В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Точки L и M являются соответственно серединами сторон BC и AD. Отрезок LM содержит точку K. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность. Найдите длину радиуса этой окружности, если $|AB| = 3$, $|AC| = \sqrt{13}$ и $|LK| : |KM| = 1 : 3$.

Идея. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ является трапецией.
Указание. Рассмотреть треугольники AKM, DKM, BKL и CKL, записать для них формулу площади. Вывести из этого, что треугольники AKD и CKD подобны.
Указание. Ввести обозначения

$$|BC| = x, |AD| = 3x, \widehat{CAD} = \widehat{ACB} = \alpha.$$

Записать теорему косинусов для треугольников ABC и ADC.

Решение. Ключевым шагом в решении этой задачи является доказательство того факта, что четырёхугольник $ABCD$ является трапецией. На эту мысль нас наводит свойство произвольной трапеции: отрезок соединяющий середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения её диагоналей.



Так как отрезки KL и KM являются медианами треугольников BKC и AKD соответственно, то площадь треугольника AKM равна площади треугольника DKM, а площадь треугольника BKL равна площади треугольника CKL. Записывая формулы площадей этих треугольников, имеем

$$S_{\triangle AKM} = S_{\triangle DKM} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot |AK| \cdot |KM| \cdot \sin\widehat{AKM} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |DK| \cdot |KM| \cdot \sin\widehat{DKM} \quad \Longrightarrow \quad |AK| \cdot \sin\widehat{AKM} = |DK| \cdot \sin\widehat{DKM};$$

$$S_{\triangle CKL} = S_{\triangle BKL} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot |CK| \cdot |KL| \cdot \sin\widehat{CKL} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |BK| \cdot |KL| \cdot \sin\widehat{BKL} \quad \Longrightarrow \quad |CK| \cdot \sin\widehat{CKL} = |BK| \cdot \sin\widehat{BKL}$$

и, почленно деля эти соотношения, с учётом того что в силу свойства вертикальных углов угол BKL равен углу DKM, а угол CKL равен углу AKM, получаем $|AK| : |CK| = |DK| : |BK|$. Это означает, что треугольники AKD и CKB подобны по второму признаку подобия треугольников, поэтому угол KAD равен углу KCB и $|BC| : |AD| = |LK| : |KM| = 1 : 3$. Эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых AD и BC и секущей AC, стало быть, $AD||BC$, то есть четырёхугольник $ABCD$ – трапеция.

Исходя из этого введём обозначения $|BC| = x$, $|AD| = 3x$, $\widehat{CAD} = \widehat{ACB} = \alpha$. Трапеция $ABCD$ описана около окружности, значит,

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC| = 4x, \ |CD| = 4x - 3.$$

Запишем теорему косинусов для треугольников ABC и ADC:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos\widehat{ACB} \quad \Longrightarrow \quad 9 = x^2 + 13 - 2\sqrt{13}x\cos\alpha;$$

$$|CD|^2 = |AC|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AD| \cdot \cos\widehat{CAD} \quad \Longrightarrow \quad (4x-3)^2 = 9x^2 + 13 - 6\sqrt{13}x\cos\alpha.$$

Умножая первое из этих уравнений на три и вычитая его из второго, получаем

$$(4x-3)^2 - 27 = 6x^2 - 26 \quad \Longrightarrow \quad 10x^2 - 24x + 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \text{ или } x = \frac{2}{5}.$$

Заметим, что $x = 2/5$ – посторонний корень в силу того, что тогда длина отрезка CD будет равна $-7/5$, что невозможно. Итак, $x = 2$, поэтому

$$\cos\alpha = \frac{x^2+4}{2\sqrt{13}x} = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

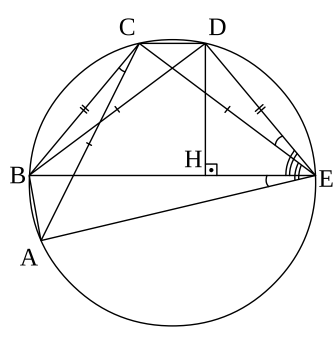
Так как диаметр окружности, вписанной в трапецию, является высотой трапеции, то

$$2r_{ABCD} = |AC| \cdot \sin\alpha = 3 \quad \Longrightarrow \quad r_{ABCD} = \frac{3}{2}.$$

О т в е т. $\dfrac{3}{2}$.

Задача 15.

В трапеции $BCDE$ $CD||BE$, $|BE| = 13$, $|CD| = 3$, $|CE| = 10$. На описанной около $BCDE$ окружности взята отличная от E точка A так, что $|AC| = 10$. Найти длину отрезка AB и площадь пятиугольника $ABCDE$.



И д е я. Доказать, что $|AB| = |CD|$. Площадь пятиугольника $ABCDE$ представить как сумму площадей треугольников ABC, ACE и CDE.
У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что равные хорды стягивают равные дуги.

Р е ш е н и е. Поскольку трапеция $BCDE$ вписана в окружность, то она является равнобедренной, $|BC| = |DE|$ и $|BD| = |CE| = 10$. По условию задачи $|AC| = |CE|$, поэтому $|AC| = |BD|$, стало быть, равны дуги AC и BD (не содержащие точку E), что дает нам равенство углов AEC и BED. Заметим, что дуга BC меньше дуги BCD, значит, она меньше и дуги AC, то есть точка A лежит на дуге BE, не содержащей точки C и D. Тогда ясно, что

$$\widehat{AEB} = \widehat{AEC} - \widehat{BEC}, \quad \widehat{CED} = \widehat{BED} - \widehat{BEC} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{AEB} = \widehat{CED},$$

и, кроме того, $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$, поскольку углы AEB и ACB опираются на одну дугу. Итак, $\widehat{ACB} = \widehat{CED}$, $|BC| = |DE|$, $|AC| = |BE|$, поэтому треугольники ABC и CDE равны по первому признаку равенства треугольников. Из их равенства мы получаем, что $|AB| = |CD| = 3$.

Для нахождения площади пятиугольника $ABCDE$ разобьём его на треугольники ABC, ACE и CDE и немного посчитаем. Проведём высоту DH трапеции $BCDE$, тогда, по свойствам равнобедренной трапеции,

$$|HE| = \frac{|BE| - |CD|}{2} = 5, \quad |BH| = |BE| - |HE| = 8.$$

После этого, обозначив величины равных углов AEC и BED за α, из прямоугольных треугольников BDH и DEH находим

$$|DH| = \sqrt{|BD|^2 - |BH|^2} = 6, \quad |DE| = \sqrt{|HE|^2 + |DH|^2} = \sqrt{61},$$

$$\cos\alpha = \frac{|HE|}{|DE|} = \frac{5}{\sqrt{61}}, \quad \sin\alpha = \frac{|DH|}{|DE|} = \frac{6}{\sqrt{61}} \quad \Longrightarrow \quad \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{61}} \cdot \frac{6}{\sqrt{61}} = \frac{60}{61}.$$

Наконец, длина высоты треугольника CDE, опущенной из вершины E, равна длине отрезка DH, а треугольник ACE – равнобедренный, при этом нам в нем известны длины боковых сторон и величина угла при основании. Значит,

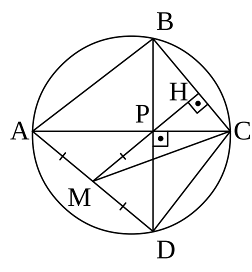
$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |DH| = 9; \quad S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |CE| \cdot \sin(\pi - 2\alpha) = \frac{3000}{61},$$

$$S_{ABCDE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACE} + S_{\triangle CDE} = 9 + \frac{3000}{61} + 9 = \frac{4098}{61}.$$

О т в е т. $|AB| = 3$, $S_{ABCDE} = \dfrac{4098}{61}$.

Задача 16.

В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке P. Точка M является серединой отрезка AD, длина отрезка CM равна $5/4$. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $1/2$, $|AP| = 1$. Найдите длину отрезка AD, если известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.



И д е я. Доказать, что точки M, P и H лежат на одной прямой.

У к а з а н и е. Показать, что угол APM равен углу HPC. Воспользоваться свойствами вписанных углов.

Р е ш е н и е. Обозначим величину угла CAD за α, тогда величина угла ADB равна $\pi/2 - \alpha$ и по свойству медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, $|AM| = |PM|$, $\widehat{APM} = \widehat{MAP} = \alpha$. После этого заметим, что по свойствам углов, вписанных в окружность, $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. С другой стороны, если обозначить буквой H основание перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону BC (тогда, по условию, $|PH| = 1/2$), то $\widehat{HPC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ACB} = \alpha$. Значит, углы APM и HPC равны, поэтому точки M, P и H лежат на одной прямой.

Положим $|AD| = x$, тогда из вышесказанного вытекает, что $|PM| = x/2$, $|MH| = |PM| + |PH| = x/2 + 1/2$. Заметим, что прямоугольные треугольники APD и PHC подобны, что дает нам

$$\frac{|AP|}{|AD|} = \frac{|PH|}{|PC|} \quad \Longrightarrow \quad |PC| = \frac{|PH| \cdot |AD|}{|AP|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{1} = \frac{x}{2}.$$

Наконец, воспользуемся теоремой Пифагора:

$$|CH|^2 = |CM|^2 - |MH|^2 = |PC|^2 - |PH|^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{25}{16} - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow$$

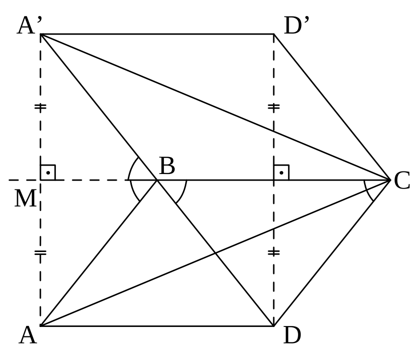
$$\Longrightarrow \quad \frac{25}{4} - x^2 - 2x - 1 = x^2 - 1 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 + 2x - \frac{25}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{54} - 2}{4}.$$

О т в е т. $\dfrac{\sqrt{54} - 2}{4}$.

Задача 17.

Параллелограммы $ABCD$ и $A'BCD'$ имеют общую сторону BC и расположены симметрично относительно прямой BC (точка A' симметрична точке A, точка D' симметрична точке D). Диагональ BD первого параллелограмма и сторона BA' второго параллелограмма лежат на одной прямой. Величина угла между диагоналями AC и $A'C$ двух параллелограммов равна $\pi/4$, площадь пятиугольника $ADCD'A'$ равна $15\sqrt{2}$. Найдите длины сторон параллелограмма $ABCD$.

И д е я. Доказать, что параллелограммы из условия задачи равны, площадь пятиугольника $ADCD'A'$ представить в виде суммы площадей равных трапеций $ADCM$ и $A'D'CM$, где M – точка пересечения отрезка AA' и прямой BC.



У к а з а н и е. Рассмотреть треугольники BCD, ABM и ACM, положив $|AB| = x$, $\widehat{DBC} = \alpha$. Составить два уравнения с этими неизвестными.

Р е ш е н и е. Обозначим точку пересечения отрезка AA' и прямой BC буквой M. Тогда из того, что точки A и A' симметричны относительно прямой BC, мы имеем $|AM| = |A'M|$, $AA' \perp BC$. Из этого следует, что прямоугольные треугольники AMB и $A'MB$ равны по двум катетам, $|AB| = |A'B|$, $\angle ABM = \angle A'BM$. Далее заметим, что поскольку по условию задачи диагональ BD и сторона BA' лежат на одной прямой, то углы $A'BM$ и DBC равны, как вертикальные. А поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то $|AB| = |CD|$, $AB||CD$ и углы ABM и BCD равны, как соответственные при параллельных прямых AB и CD и секущей BC. Суммируя все вышесказанное, получаем, что треугольник BCD равнобедренный, $|AB| = |BD| = |CD|$.

Далее отметим, что углы $A'BC$ и ABC также равны (как смежные с равными углами ABM и $A'BM$), поэтому параллелограммы $ABCD$ и $A'BCD'$ равны, $|A'C| = |AC|$. Положим $|AB| = x$, $\widehat{DBC} = \alpha$. Тогда из равнобедренного треугольника BCD мы находим $|BC| = 2x\cos\alpha$, а из прямоугольного треугольника ABM мы имеем $|AM| = x\sin\alpha$, $|BM| = x\cos\alpha$. Треугольник $A'AC$ также равнобедренный, стало быть, $\widehat{MCA} = \pi/8$, и из прямоугольного треугольника ACM мы находим

$$\operatorname{tg}\widehat{ACM} = \frac{|AM|}{|MC|} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{x\sin\alpha}{3x\cos\alpha} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = 3(\sqrt{2}-1).$$

Данную нам в условии задачи площадь пятиугольника $ADCD'A'$ представим в виде суммы площадей равных трапеций $ADCM$ и $A'D'CM$. Пользуясь формулой площади трапеции, получаем

$$15\sqrt{2} = 2S_{ADCM} = (|AD| + |CM|)\cdot|AM| = 5x\cos\alpha\cdot x\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad x^2\sin 2\alpha = 6\sqrt{2}.$$

Осталось немного посчитать:

$$\operatorname{tg}\alpha = 3(\sqrt{2}-1) \quad\Longrightarrow\quad \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{14-9\sqrt{2}};$$

$$x^2 = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{6\sqrt{2}(14-9\sqrt{2})}{3(\sqrt{2}-1)} = 4(5-2\sqrt{2}) \quad\Longrightarrow\quad x = 2\sqrt{5-2\sqrt{2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}} = \frac{1}{\sqrt{28-18\sqrt{2}}} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad |BC| = 2x\cos\alpha = 4\sqrt{\frac{5-2\sqrt{2}}{28-18\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

О т в е т. $|AD| = |BC| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\quad |AB| = |CD| = 2\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

Задача 18.

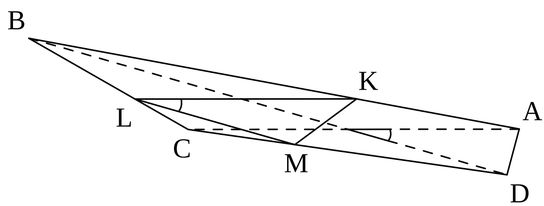
Точки K, L и M расположены на сторонах AB, BC и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно, причём выполнены соотношения $|AK| : |BK| = |CL| : |BL| = |CM| : |DM| = 1 : 2$. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника KLM, равна $5/2$, $|KL| = 4$, $|LM| = 3$. Чему равна площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $|KM| < |KL|$?

И д е я. Доказать, что треугольник ABC подобен треугольнику KBL, а треугольник BCD подобен треугольнику LCM, найти длины диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

Указание. Воспользоваться вторым признаком подобия треугольников, показать, что угол между диагоналями четырёхугольника $ABCD$ равен углу KLM.

Решение. Заметим, что из того, что $|AK| : |BK| = |CL| : |BL| = 1 : 2$, вытекает, что $|AB| : |BK| = |BC| : |BL| = 3 : 2$. Это означает, что треугольники ABC и KBL подобны по второму признаку подобия треугольников. Тогда мы имеем $|AC| : |KL| = 3 : 2$, $|AC| = 6$. Далее, рассуждая совершенно аналогично, мы получаем $|BC| : |CL| = |CD| : |CM| = 3 : 1$, треугольники BCD и LCM подобны по второму признаку подобия треугольников, $|BD| : |LM| = 3 : 1$, $|BD| = 9$. Таким образом, мы нашли длины диагоналей четырёхугольника $ABCD$, поэтому для нахождения его площади нам достаточно вычислить синус величины угла между ними.

Это можно сделать, например, так: из найденных нами подобий также следует, что $KL||AC$, $LM||BD$, поэтому $\sin(\widehat{AC, BD}) = \sin\widehat{KLM}$. Обозначим величину угла KLM за α и воспользуемся теоремами синусов и косинусов применительно к треугольнику KLM:



$$\frac{|KM|}{\sin\widehat{KLM}} = 2R_{\triangle KLM} \quad \Longrightarrow \quad |KM| = 5\sin\alpha;$$

$$|KM|^2 = |KL|^2 + |LM|^2 - 2\cdot|KL|\cdot|LM|\cdot\cos\widehat{KLM} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 25\sin^2\alpha = 16+9-24\cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad 24\cos\alpha = 25\cos^2\alpha \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0, \\ \cos\alpha = \dfrac{24}{25}. \end{array}\right.$$

Если $\cos\alpha = 0$, то треугольник KLM прямоугольный, $|KM| = 5 > |KL|$, что противоречит условию задачи. Если же $\cos\alpha = 24/25$, то $|KM| = 7/5 < |KL|$. Итак, $\cos\alpha = 24/25$, поэтому $\sin\alpha = 7/25$ и

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\alpha = \frac{189}{25}.$$

Ответ. $\dfrac{189}{25}$.

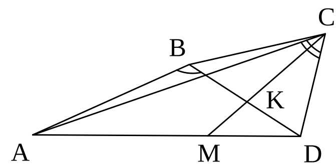
Задача 19.

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок CM, соединяющий вершину C с точкой M, расположенной на стороне AD, пересекает диагональ BD в точке K. Известно, что $|CK| : |KM| = 2 : 1$, $|CD| : |DK| = 5 : 3$, $\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = \pi$. Найдите отношение длин стороны AB и диагонали AC.

Идея. Рассмотрев треугольники ABD и ACD, доказать, что

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\sin\widehat{ADB}}{\sin\widehat{ADC}}.$$

Указание. Воспользоваться теоремой синусов. Рассмотрев треугольники MKD и MCD, найти отношение синусов величин углов ADB и ADC.



Решение. Начнем решать задачу с конца, а именно, попытаемся понять, с помощью каких теорем можно подобраться к искомой величине. Как правило, отношение длин отрезков, являющихся сторонами некоего треугольника, вычисляют с помощью теоремы синусов. Однако формальное применение её к треугольнику ABC ничего не даст, так как нам придется искать отношение синусов величин углов ABC и ACB, а эти углы никак не относятся к данным нам в условии задачи отношениям. Главным шагом в решении этой задачи является рассмотрение треугольников ABD и ACD, в которые входят как интересующие нас отрезки AB и AC, так и углы ABD и ACD, синусы которых по условию задачи равны. Применяя к этим треугольникам теорему синусов и почленно деля полученные соотношения, получаем

$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{ADB}} = \frac{|AD|}{\sin\widehat{ABD}}, \quad \frac{|AC|}{\sin\widehat{ADC}} = \frac{|AD|}{\sin\widehat{ACD}} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{|AB|}{|AC|}\cdot\frac{\sin\widehat{ADC}}{\sin\widehat{ADB}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\sin\widehat{ADB}}{\sin\widehat{ADC}}.$$

Итак, нам надо найти отношение синусов величин углов ADB и ADC. Это легко сделать, применяя теорему синусов к треугольникам MKD и MCD, в которые входят как отрезки, отношения которых даны в условии, так и эти углы, и опять-таки деля почленно полученные соотношения:

$$\frac{|KM|}{\sin\widehat{ADB}} = \frac{|DK|}{\sin\widehat{CMD}}, \quad \frac{|CM|}{\sin\widehat{ADC}} = \frac{|CD|}{\sin\widehat{CMD}} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{|KM|}{|CM|}\cdot\frac{\sin\widehat{ADC}}{\sin\widehat{ADB}} = \frac{|DK|}{|CD|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sin\widehat{ADB}}{\sin\widehat{ADC}} = \frac{|CD|}{|DK|}\cdot\frac{|KM|}{|CM|} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{9}.$$

Ответ. $5:9$.

Задача 20.

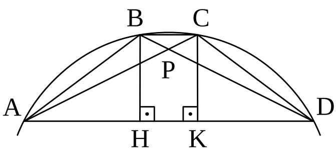
В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, P – точка пересечения его диагоналей, $|AB| = |CD| = 5$, $|AD| > |BC|$. Длина высоты, опущенной из точки B на сторону AD, равна 3, а площадь треугольника ADP равна $25/2$. Найдите длины сторон AD и BC, а также длину радиуса окружности.

Идея. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ является трапецией, воспользоваться свойством треугольников, на которые трапеция делится своими диагоналями.

Указание. Выразить площадь трапеции $ABCD$ двумя способами.

Указание. Воспользоваться теоремой синусов.

Р е ш е н и е. Сначала докажем, что четырёхугольник $ABCD$ является трапецией. Это можно сделать, например, так: поскольку длины отрезков AB и CD равны, то равны и дуги AB и CD, из чего, по свойствам вписанных углов, вытекает равенство углов CAD и ACB. Но эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых AD и BC и секущей AC, стало быть, $AD||BC$ и четырёхугольник $ABCD$ – трапеция.



Далее опустим из точек B и C перпендикуляры BH и CK на прямую AD. Тогда по условию задачи $|BH| = 3$, и, записывая теорему Пифагора для прямоугольного треугольника ABH, мы находим $|AH| = \sqrt{|AB|^2 - |BH|^2} = 4$. Также заметим, что, поскольку $AD||BC$, то $|BH| = |CK|$, треугольники ABH и DCK равны по гипотенузе и катету, поэтому $|AH| = |DK| = 4$. Четырёхугольник $BCKH$, очевидно, является прямоугольником, значит, $|BC| = |HK|$. Обозначим длины этих двух отрезков за x и вспомним, что по условию задачи $|AD| > |BC|$, из чего следует, что точки H и K попадают на отрезок AD и $|AD| = |AH| + |HK| + |DK| = x + 8$.

После этого воспользуемся свойствами треугольников, на которые трапеция разбивается своими диагоналями:

$$S_{\triangle BCP} = \left(\frac{|BC|}{|AD|}\right)^2 S_{\triangle ADP} = \frac{\frac{25}{2}x^2}{(x+8)^2},\ S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP} = \frac{|BC|}{|AD|}\cdot S_{\triangle ADP} = \frac{\frac{25}{2}x}{x+8},$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle BCP} + S_{\triangle ADP} + S_{\triangle ABP} + S_{\triangle CDP} = \frac{25}{2}\left(1 + \frac{x^2}{(x+8)^2} + 2\frac{x}{x+8}\right).$$

С другой стороны, $S_{ABCD} = |BH| \cdot \dfrac{|AD| + |BC|}{2} = 3x + 12$.

Теперь найдём x, приравнивая полученные выражения для площади трапеции $ABCD$:

$$3x + 12 = \frac{25}{2}\left(1 + \frac{x^2}{(x+8)^2} + 2\frac{x}{x+8}\right) \iff 3(x+4) = \frac{25}{2}\left(1 + \frac{x}{x+8}\right)^2 \iff$$

$$\iff 3(x+4) = \frac{50(x+4)^2}{(x+8)^2} \iff 3(x+8)^2 = 50(x+4) \iff 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 2.$$

Итак, $|BC| = x = 2$, $|AD| = x + 8 = 10$. Наконец, для нахождения длины радиуса окружности, описанной около трапеции $ABCD$, применим теорему синусов для треугольника ADB, вписанного в эту же окружность:

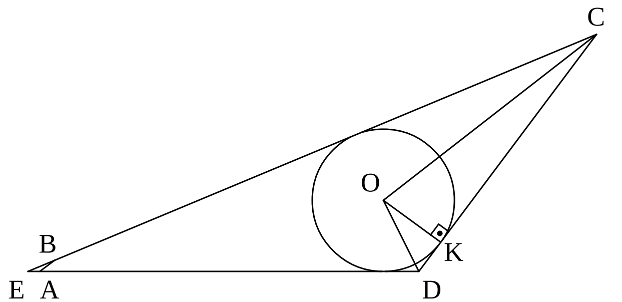
$$|BD| = \sqrt{|BH|^2 + |DH|^2} = 3\sqrt{5};\ \sin\widehat{BAD} = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{3}{5};\ R = \frac{|BD|}{2\sin\widehat{BAD}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

О т в е т. $|AD| = 10$, $|BC| = 2$, $R = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

Задача 21.

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что угол DAB острый, угол ADC тупой, $\sin\widehat{DAB} = 3/5$, $\cos\widehat{ABC} = -63/65$. Окружность с центром в точке O касается сторон BC, CD и AD. Найдите длину отрезка OC, если $|AB| = 25/64$, $|BC| = 793/64$, $|CD| = 25/4$.

Идея. Воспользоваться тем, что окружность, касающаяся сторон BC, CD и AD, является вписанной в треугольник DEC, где E – точка пересечения продолжений сторон AD и BC за точки A и B соответственно.
Указание. Найти длины сторон треугольника DEC, пользуясь теоремами синусов и косинусов.
Указание. Длину радиуса вписанной окружности искать по формуле $S = pr$.



Решение. Основой решения этой задачи является тот факт, что окружность, касающаяся сторон BC, CD и AD, является вписанной в треугольник DEC, где E – точка пересечения продолжений сторон AD и BC за точки A и B соответственно. Обоснуем, почему эти продолжения действительно пересекаются. Из условия задачи следует, что

$$\cos\widehat{DAB} = \sqrt{1-\sin^2\widehat{DAB}} = \frac{4}{5}, \quad \sin\widehat{ABC} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{ABC}} = \frac{16}{65};$$

$$\sin\left(\widehat{ABC}+\widehat{DAB}\right) = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{63}{65}\right) + \frac{4}{5}\cdot\frac{16}{65} = -\frac{5}{13}.$$

Таким образом, сумма величин углов ABC и DAB больше, чем π. Из этого и вытекает нужный нам факт.

Дальнейший ход решения заключается в вычислении длин сторон треугольника DEC. Сначала рассмотрим треугольник ABE и найдём длины отрезков AE и BE. Ясно, что

$$\sin\widehat{BAE} = \sin\widehat{DAB} = \frac{3}{5}, \quad \sin\widehat{ABE} = \sin\widehat{ABC} = \frac{16}{65};$$

$$\sin\widehat{AEB} = \sin\left(\widehat{BAE}+\widehat{ABE}\right) = \sin\left(\pi - \widehat{DAB} + \pi - \widehat{ABC}\right) =$$

$$= \sin\left(2\pi - \left(\widehat{ABC}+\widehat{DAB}\right)\right) = -\sin\left(\widehat{ABC}+\widehat{DAB}\right) = \frac{5}{13}.$$

Теперь, применяя теорему синусов, находим

$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{AEB}} = \frac{|BE|}{\sin\widehat{BAE}} \implies \frac{\frac{25}{64}}{\frac{5}{13}} = \frac{|BE|}{\frac{3}{5}} \implies |BE| = \frac{39}{64}, \ \ |CE| = |BE|+|BC| = 13.$$

После этого перейдём к вычислению длины стороны DE. Ясно, что угол BAE – тупой, поэтому угол AEB – острый, значит, $\cos\widehat{AEB} = \sqrt{1-\sin^2\widehat{AEB}} = \dfrac{12}{13}$. Обозначим $|DE| = x$ и запишем теорему косинусов для треугольника DEC:

$$|CD|^2 = |DE|^2+|CE|^2-2\cdot|DE|\cdot|CE|\cdot\cos\widehat{DEC} \implies \frac{625}{16} = x^2+169-24x \implies$$

$$\implies x^2-24x+144 = \frac{625}{16}-25 \implies (x-12)^2 = \frac{225}{16} \implies \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{33}{4}, \\ x = \dfrac{63}{4}. \end{array}\right.$$

Вспомним, что по условию задачи угол ADC – тупой. По критерию тупоугольности треугольника это эквивалентно тому, что

$$|CE|^2 > |DE|^2+|CD|^2 \implies 169 > x^2+\frac{625}{16} \iff x^2 < \frac{2079}{16}.$$

Этому условию удовлетворяет лишь меньший из полученных корней. Итак, $|DE| = 33/4$, длины всех сторон треугольника DEC найдены. Теперь обозначим буквой K точку касания стороны CD и окружности, вписанной в треугольник DEC, и воспользуемся формулами длины радиуса окружности, вписанной в треугольник, и длин отрезков, на которые вписанная в треугольник окружность делит его стороны:

$$p_{\triangle DEC} = \frac{|CD|+|DE|+|CE|}{2} = \frac{55}{4}, \quad |KC| = p_{\triangle DEC}-|DE| = \frac{11}{2};$$

$$S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}\cdot|CE|\cdot|DE|\cdot\sin\widehat{DEC} = \frac{165}{8}, \quad |OK| = r_{\triangle DEC} = \frac{S_{\triangle DEC}}{p_{\triangle DEC}} = \frac{3}{2}.$$

Наконец, $|OC| = \sqrt{|OK|^2+|KC|^2} = \sqrt{130}/2$.

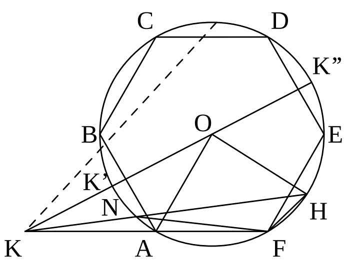
О т в е т. $\dfrac{\sqrt{130}}{2}$.

Задача 22.

В окружность, длина радиуса которой равна 2, вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K, лежащей на продолжении стороны AF таким образом, что $|KA| < |KF|$ и $|KA| = \sqrt{11}-1$, проведена секущая KH, пересекающая окружность в точках N и H, причём точка N лежит между точками K и H. Известно, что $|KN| = 2$, а угол NFH – тупой. Найдите величину угла HKF.

И д е я. Найти расстояние от точки K до центра окружности.

Указание. Записать теорему о произведении длины секущей и длины её внешней части для секущих KH и KF.
Указание. Провести прямую через точку K и центр окружности, записать теорему о произведении длины секущей и длины её внешней части для этой прямой и секущей KH.
Указание. Искомую величину представить как разность величин двух углов, воспользоваться теоремой косинусов.



Решение. Ясно, что нам придётся вычислить длину стороны шестиугольника $ABCDEF$. Найти её очень просто – обозначим $|AF| = x$ и, пользуясь формулой длины радиуса окружности, описанной около правильного n-угольника, имеем

$$2 = \frac{x}{2\sin\frac{\pi}{6}} \quad\Longrightarrow\quad x = 2.$$

Итак, $|AF| = 2$, $|KF| = |KA| + |AF| = \sqrt{11} + 1$. Теперь воспользуемся теоремой о произведении длины секущей на длину её внешней части:

$$|KA|\cdot|KF| = |KN|\cdot|KH| \quad\Longrightarrow\quad (\sqrt{11}-1)(\sqrt{11}+1) = 2\cdot|KH| \quad\Longrightarrow\quad |KH| = 5.$$

Отметим, что секущую KH, вообще говоря, можно провести двумя способами. Однако по условию задачи угол NFH тупой. Это означает, что мера дуги NH, не содержащей точку F, больше чем π. Поэтому, если мы проведём прямую через точку K и центр окружности O (точки её пересечения с окружностью обозначим за K' и K'', K' лежит между точками K и K''), то точки N, F и H лежат в одной полуплоскости относительно неё (на рисунке пунктиром обозначен вариант секущей KH, не удовлетворяющий условию задачи).

Дальнейший ход решения построен на сделанном нами дополнительном построении (прямой KO). Соединим точку O с точками A и H. Отрезки OA, OH, OK' и OK'' – радиусы окружности, поэтому их длины равны 2. Искомую величину с учётом вышесказанного мы будем искать как разность величин углов OKA и OKH, для их нахождения нам понадобится длина отрезка KO. Положим $|KO| = y$, тогда $|KK'| = |KO| - |OK'| = y - 2$, $|KK''| = |KO| + |OK''| = y + 2$. Ещё раз применяя теорему о произведении длины секущей на длину её внешней части, имеем

$$|KK'|\cdot|KK''| = |KN|\cdot|KH| \quad\Longrightarrow\quad (y-2)(y+2) = 2\cdot 5 \quad\Longrightarrow\quad y = \sqrt{14}.$$

Теперь осталось лишь записать теорему косинусов для треугольников KOA и KOH:

$$\cos\widehat{OKA} = \frac{|KO|^2 + |KA|^2 - |OA|^2}{2\cdot|KO|\cdot|KA|} = \frac{14 + (\sqrt{11}-1)^2 - 4}{2\sqrt{14}(\sqrt{11}-1)} = \sqrt{\frac{11}{14}};$$

$$\cos\widehat{OKH} = \frac{|KO|^2 + |KH|^2 - |OH|^2}{2\cdot|KO|\cdot|KH|} = \frac{14 + 25 - 4}{10\sqrt{14}} = \frac{7}{2\sqrt{14}}.$$

Итак,

$$\widehat{OKA} = \arccos\sqrt{\frac{11}{14}}, \quad \widehat{OKH} = \arccos\frac{7}{2\sqrt{14}},$$

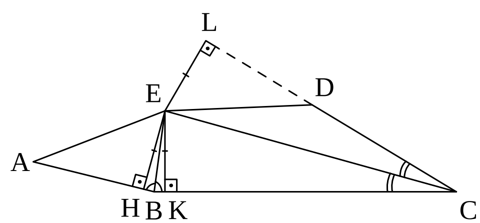
$$\widehat{HKF} = \widehat{OKA} - \widehat{OKH} = \arccos\sqrt{\frac{11}{14}} - \arccos\frac{7}{2\sqrt{14}}.$$

О т в е т. $\arccos\sqrt{\dfrac{11}{14}} - \arccos\dfrac{7}{2\sqrt{14}}$.

Задача 23.

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами внутренних углов при вершинах B и C соответственно, $\widehat{A} = 35^\circ$, $\widehat{D} = 145^\circ$, а площадь треугольника BCE равна 11. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

И д е я. Доказать, что $\Delta BHE = \Delta BKE$, $\Delta CKE = \Delta CLE$, а $\Delta AHE = \Delta DLE$.
У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Разбить пятиугольник $ABCDE$ на треугольники.



Р е ш е н и е. Поскольку диагонали BE и CE являются биссектрисами углов ABC и BCD соответственно, то, по основному свойству биссектрисы угла, точка E, во-первых, равноудалена от прямых AB и BC и, во-вторых, равноудалена от прямых BC и CD. Из этого вытекает, что она равноудалена от всех трех указанных прямых. Опустим на прямую AB перпендикуляр EH, на прямую BC перпендикуляр EK, и на прямую CD – перпендикуляр EL. Из вышесказанного следует, что $|EH| = |EK| = |EL|$.

После этого нам необходимо уточнить, как расположены точки H, K и L. Поскольку пятиугольник $ABCDE$ выпуклый, то величины всех его внутренних углов лежат в интервале $(0, \pi)$. Из этого следует, что углы ABE, CBE и BCE – острые. Также заметим, что угол BAE, градусная мера которого равна 35°, тоже острый. Таким образом, в треугольнике ABE углы BAE и ABE – острые, поэтому точка H лежит на стороне AB, а в треугольнике BCE углы CBE и BCE – острые, поэтому точка K лежит на стороне BC. Угол же CDE по условию является тупым, поэтому точка L лежит на продолжении стороны CD за точку D.

Далее заметим, что треугольники BHE и BKE равны по гипотенузе и катету, поэтому их площади также равны. То же самое верно и для треугольников CKE и CLE. С другой стороны, треугольники AHE и DLE тоже равны (по катету и острому углу), так как градусная мера угла LDE равна $180^\circ - 145^\circ$, то есть 35°.

Наконец, разбивая пятиугольник $ABCDE$ на треугольники и пользуясь установленными ранее фактами, мы получаем

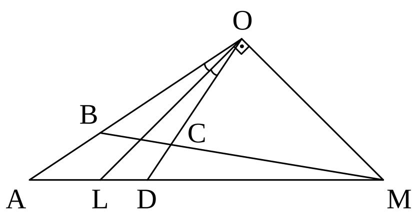
$$S_{ABCDE} = S_{\triangle AHE} + S_{\triangle BHE} + S_{\triangle BKE} + S_{\triangle CKE} + S_{\triangle CDE} =$$

$$= S_{\triangle AHE} + 2S_{\triangle BKE} + S_{\triangle CKE} + S_{\triangle CLE} - S_{\triangle DLE} =$$
$$= 2S_{\triangle BKE} + 2S_{\triangle CKE} = 2S_{\triangle BCE} = 22.$$

Ответ. 22.

Задача 24.

Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD – в точке O. Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD. Найдите отношение площадей треугольника AOD и четырёхугольника $ABCD$, если $|OA| = 12$, $|OD| = 8$, $|CD| = 2$.



Идея. Показать, что луч MO является биссектрисой угла, смежного с углом AOD. Доказать, что

$$\frac{|AM|}{|DM|} = \frac{|AL|}{|DL|} = \frac{|AO|}{|OD|}.$$

Указание. Воспользоваться теоремой синусов.

Указание. Записать теорему Менелая для треугольника AOD и секущей BM. Воспользоваться леммами о площадях треугольников.

Решение. Поскольку отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD, то он является биссектрисой угла, смежного с углом AOD, т.е. является биссектрисой внешнего угла треугольника AOD. Но тогда, по свойству биссектрисы внешнего угла треугольника (оно доказывается аналогично свойству биссектрисы треугольника),

$$\frac{|AM|}{|DM|} = \frac{|AL|}{|DL|} = \frac{|AO|}{|OD|}.$$

Теперь обозначим $|OB| = x$, тогда $|BA| = 12 - x$, и запишем теорему Менелая для треугольника AOD и секущей BM:

$$\frac{|DC|}{|CO|} \cdot \frac{|OB|}{|BA|} \cdot \frac{|AM|}{|MD|} = 1.$$

Подставляя в это равенство выраженное ранее отношение $|AM| : |DM|$, и учитывая, что $|OC| = 6$, получаем

$$\frac{|CD|}{|OC|} \cdot \frac{|OB|}{|BA|} \cdot \frac{|AO|}{|OD|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{6} \cdot \frac{x}{12 - x} \cdot \frac{12}{8} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{12 - x} = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 8.$$

Наконец, воспользуемся соотношениями между площадями треугольников:

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{|OA| \cdot |OD|}{|OB| \cdot |OC|} = \frac{12 \cdot 8}{8 \cdot 6} = 2.$$

Итак, площадь треугольника BOC равна половине площади треугольника AOD, из чего вытекает, что площадь четырёхугольника $ABCD$ также равна половине площади треугольника AOD, то есть искомое отношение равно 2.

Ответ. 2.

Задача 25.

В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E, лежащей на стороне CD. Известно, что отношение длины отрезка CD к длине отрезка BC равно m. Найдите:

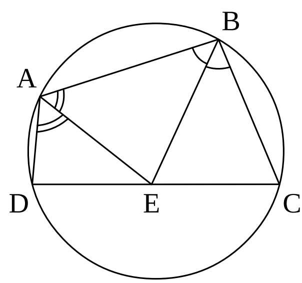
1) отношение расстояний от точки E до прямых AD и BC,

2) отношение площадей треугольников ADE и BCE.

Идея. Доказать, что точка E равноудалена от прямых AD и AB. Выразить искомое отношение и данное в условие отношение через синусы величин углов ABE и BAE.

Указание. Воспользоваться тем, что любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.

Указание. Записать теорему синусов для треугольников BCE, ABE и ADE.



Решение. Ответить на первый вопрос этой задачи совсем просто. Поскольку точка E лежит на биссектрисе угла A, то она равноудалена от сторон этого угла, то есть от прямых AD и AB. А так как она лежит и на биссектрисе угла B, то она равноудалена и от сторон этого угла, то есть от прямых BC и BA. Значит, она равноудалена от прямых AD и BC, то есть ответом на первый вопрос задачи будет $1:1$.

Получить ответ на второй вопрос этой задачи гораздо сложнее. Для начала отметим, что расстояния от точки E до прямых AD и BC есть не что иное, как длины высот EH и EK треугольников ADE и BCE соответственно. Ранее мы доказали, что $|EH| = |EK|$, поэтому

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BCE}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|EH|\cdot|AD|}{\frac{1}{2}\cdot|EK|\cdot|BC|} = \frac{|AD|}{|BC|}.$$

Итак, фактически нам надо вычислить отношение $|AD|:|BC|$. Введём обозначения

$$\widehat{DAE} = \widehat{BAE} = \alpha, \quad \widehat{ABE} = \widehat{CBE} = \beta.$$

Тогда, пользуясь свойствами вписанных углов и теоремой о сумме величин углов треугольника, имеем

$$\widehat{D} = \pi - 2\beta, \quad \widehat{C} = \pi - 2\alpha, \quad \widehat{BEC} = 2\alpha - \beta, \quad \widehat{AED} = 2\beta - \alpha.$$

Теперь, записывая теорему синусов для треугольников BCE, ABE и ADE, выразим длины всех отрезков через длину отрезка BC:

$$\frac{|BC|}{\sin\widehat{BEC}} = \frac{|BE|}{\sin\widehat{C}} = \frac{|CE|}{\sin\widehat{CBE}} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |BE| = |BC|\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha-\beta)}, \quad |CE| = |BC|\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha-\beta)};$$

$$\frac{|BE|}{\sin\widehat{BAE}} = \frac{|AE|}{\sin\widehat{ABE}} \quad \Longrightarrow \quad |AE| = |BE|\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = |BC|\cdot\frac{\sin 2\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin(2\alpha-\beta)};$$

$$\frac{|AD|}{\sin\widehat{AED}} = \frac{|AE|}{\sin\widehat{D}} = \frac{|DE|}{\sin\widehat{DAE}} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad |AD| = |AE|\cdot\frac{\sin(2\beta-\alpha)}{\sin 2\beta} = |BC|\cdot\frac{\sin 2\alpha\sin\beta\sin(2\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin(2\alpha-\beta)\sin 2\beta} =$$

$$= |BC|\cdot\frac{\cos\alpha\sin(2\beta-\alpha)}{\sin(2\alpha-\beta)\cos\beta} = |BC|\cdot\frac{\sin 2\beta-\sin(2\alpha-2\beta)}{\sin 2\alpha+\sin(2\alpha-2\beta)};$$

$$|DE| = |AE|\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 2\beta} = |BC|\cdot\frac{\sin 2\alpha\sin\beta}{\sin(2\alpha-\beta)\sin 2\beta} = |BC|\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2\sin(2\alpha-\beta)\cos\beta};$$

$$|CD| = |DE| + |CE| = |BC|\cdot\left(\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha-\beta)} + \frac{\sin 2\alpha}{2\sin(2\alpha-\beta)\cos\beta}\right) =$$

$$= |BC|\cdot\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{2\sin(2\alpha-\beta)\cos\beta} = |BC|\cdot\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{\sin 2\alpha+\sin(2\alpha-2\beta)}.$$

Итак, мы получили, что

$$\frac{|CD|}{|BC|} = \frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{\sin 2\alpha+\sin(2\alpha-2\beta)}, \qquad \frac{|AD|}{|BC|} = \frac{\sin 2\beta-\sin(2\alpha-2\beta)}{\sin 2\alpha+\sin(2\alpha-2\beta)}.$$

Вычитая второе из этих соотношений из первого, имеем

$$\frac{|CD|}{|BC|} - \frac{|AD|}{|BC|} = \frac{\sin 2\alpha+\sin(2\alpha-2\beta)}{\sin 2\alpha+\sin(2\alpha-2\beta)} = 1.$$

Таким образом, $\dfrac{|AD|}{|BC|} = \dfrac{|CD|}{|BC|} - 1 = m-1$.

Ответ. 1) $1:1$, 2) $m-1$.

Задача 26.

Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, причём $|AD|\cdot|CE| = |DC|\cdot|AE|$, $|BD| = 6$, $\widehat{ADB} = \pi/8$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

Идея. Доказать, что отрезок DE является биссектрисой треугольника ADC.
Указание. Записать теорему синусов для треугольников ADE и CDE.
Указание. Воспользоваться формулой площади четырёхугольника и свойствами вписанных углов.

Решение. Первым шагом в решении этой задачи является обоснование того факта, что отрезок DE является биссектрисой треугольника ADC. Заметим, что из соотношения, данного в условии задачи, вытекает, что

$$|AD| : |DC| = |AE| : |CE|,$$

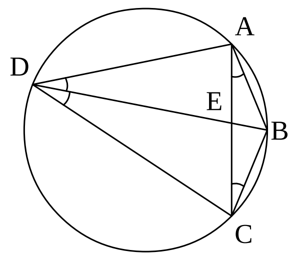
то есть фактически нам надо установить справедливость утверждения, обратного к основному свойству биссектрисы треугольника. Записывая теорему синусов для треугольников ADE и CDE, имеем

$$\frac{|AD|}{\sin\widehat{AED}}=\frac{|AE|}{\sin\widehat{ADE}};\quad \frac{|DC|}{\sin\widehat{CED}}=\frac{|CE|}{\sin\widehat{CDE}}.$$

Почленно деля эти соотношения и учитывая, что $\sin\widehat{AED}=\sin\widehat{CED}$ в силу того, что углы AED и CED смежные, получаем

$$\frac{|AD|}{|DC|}\cdot\frac{\sin\widehat{CED}}{\sin\widehat{AED}}=\frac{|AE|}{|CE|}\cdot\frac{\sin\widehat{CDE}}{\sin\widehat{ADE}}\Longrightarrow \sin\widehat{ADE}=\sin\widehat{CDE}\Longrightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{ADE}+\widehat{CDE}=\pi,\\ \widehat{ADE}=\widehat{CDE}.\end{array}\right.$$

Ясно, что сумма величин углов ADE и CDE не может быть равна π, поэтому $\widehat{ADE}=\widehat{CDE}$, что, собственно, нам и нужно было получить.



После этого отметим, что в силу свойств вписанных углов

$$\widehat{ADE}=\widehat{CDE}=\widehat{ACB}=\widehat{BAC}=\frac{\pi}{8},$$

поэтому $\widehat{ADC}=\pi/4$, треугольник ABC является равнобедренным, $|AB|=|BC|$. После этого можно рассуждать двумя способами.

Первый способ. Логично предположить, что для вычисления площади четырёхугольника $ABCD$, раз уж мы знаем длину диагонали BD, надо воспользоваться формулой

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\widehat{AEB}.$$

Заметим, что, с одной стороны, по свойству внешнего угла треугольника

$$\widehat{AEB}=\widehat{ADE}+\widehat{DAE}=\widehat{DAE}+\frac{\pi}{8}$$

и, с другой стороны, $\widehat{BAD}=\widehat{BAE}+\widehat{DAE}=\widehat{DAE}+\frac{\pi}{8}$, то есть $\widehat{BAD}=\widehat{AEB}$. После этого выразим длину диагонали AC, пользуясь теоремой синусов для треугольников ABD и ACD, вписанных в одну и ту же окружность:

$$2R=\frac{|BD|}{\sin\widehat{BAD}}=\frac{|AC|}{\sin\widehat{ADC}}\quad\Longrightarrow\quad |AC|=|BD|\cdot\frac{\sin\widehat{ADC}}{\sin\widehat{BAD}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sin\widehat{BAD}}.$$

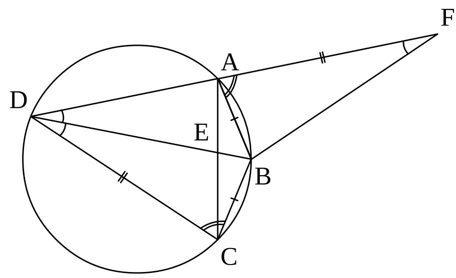
Наконец, пользуясь тем, что $\widehat{BAD}=\widehat{AEB}$, находим

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\widehat{AEB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{\sin\widehat{BAD}}\cdot 6\cdot\sin\widehat{AEB}=9\sqrt{2}.$$

Второй способ. Сделаем дополнительное построение: отложим на продолжении отрезка AD за точку A точку F таким образом, что $|AF|=|CD|$.

Заметим, что, с одной стороны, $\widehat{BAF}=\pi-\widehat{BAD}$ и, с другой стороны, в силу свойств вписанных углов $\widehat{BCD}=\pi-\widehat{BAD}$. Значит, углы BAF и BCD равны.

Помимо этого нами ранее было получено, что $|AB| = |BC|$. Поэтому треугольники BAF и BCD равны по первому признаку равенства треугольников. Из этого следует, что



$$|BF| = |BD| = 6,$$

$$\widehat{AFB} = \widehat{CDB} = \frac{\pi}{8}, \ \widehat{DBF} = \frac{3\pi}{4}.$$

Поэтому

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BAF} = S_{\triangle BDF};$$

$$S_{\triangle BDF} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |BF| \cdot \sin \widehat{DBF} = 9\sqrt{2}.$$

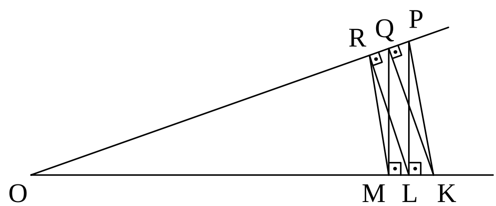
О т в е т. $9\sqrt{2}$.

Задача 27.

На одной стороне угла O взяты точки K, L и M, а на другой его стороне – точки P, Q и R таким образом, что $KQ \perp PR$, $PL \perp KM$, $LR \perp PQ$, $QM \perp KL$. Известно, что отношение расстояния от точки O до центра вписанной в четырёхугольник $KPRM$ окружности к длине отрезка KP равно $17 : 6$. Найдите величину угла O.

И д е я. Доказать, что четырёхугольник $KPRM$ – трапеция.
У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой о высотах.
У к а з а н и е. Показать, что центр окружности, вписанной в четырёхугольник $KPRM$, лежит на биссектрисе угла O.

Р е ш е н и е. Решение этой задачи достаточно трудное и состоит из двух этапов. Сначала выясним, какими свойствами обладает четырёхугольник $KPRM$. Ясно, что угол O острый (в противном случае отрезки KQ и PR не смогут быть перпендикулярны). Заметим, что по условию задачи отрезки PL и QK являются высотами треугольника OPK.



Из этого по теореме о высотах следует, что

$$\widehat{OPK} = \widehat{OLQ}, \quad \widehat{OKP} = \widehat{OQL}, \quad \frac{|QL|}{|KP|} = \cos \widehat{O}.$$

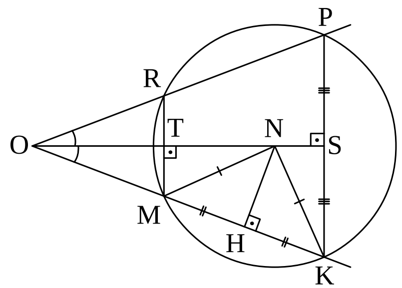
С другой стороны, отрезки LR и QM являются высотами треугольника OQL, что, по той же самой теореме о высотах, дает нам

$$\widehat{ORM} = \widehat{OLQ}, \quad \widehat{OMR} = \widehat{OQL}, \quad \frac{|MR|}{|QL|} = \cos \widehat{O}.$$

Объединяя вместе полученные соотношения, мы находим

$$\widehat{OPK} = \widehat{ORM}, \quad \widehat{OKP} = \widehat{OMR}, \quad \frac{|MR|}{|KP|} = \cos^2 \widehat{O}.$$

Ну а поскольку углы OPK и ORM являются соответственными при прямых KP и MR, то эти прямые параллельны. Итак, четырёхугольник $KPRM$ – трапеция.



Далее сразу отметим, что по условию задачи трапеция $KPRM$ вписана в окружность, из чего вытекает, что она равнобедренная. Значит, углы OPK, OKP, ORM и OMR равны, а треугольники OPK и ORM равнобедренные, $|OP| = |OK|$, $|OR| = |OM|$.

После этого будем рассуждать следующим образом. Проведём биссектрису угла O, точки её пересечения с отрезками MR и KP обозначим буквами T и S соответственно. Тогда, в силу того что биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является также его медианой и высотой, $|MT| = |RT|$, $|KS| = |PS|$, $OS \perp MR$, $OS \perp KP$. Таким образом, прямая TS является серединным перпендикуляром к сторонам MR и KP трапеции $KPRM$. Учитывая тот факт, что центр окружности, описанной около произвольного многоугольника, лежит на пересечении его серединных перпендикуляров, мы находим, что центр окружности, описанной около трапеции $KPRM$ (обозначим его буквой N), лежит на прямой TS, а отрезок, соединяющий точку N и середину H стороны MK, перпендикулярен прямой OK.

Теперь в соответствии с условием задачи обозначим $|ON| = 17x$, $|KP| = 6x$, а искомую величину угла O обозначим за 2α. Тогда, с учётом вышесказанного,

$$|KS| = |SP| = 3x, \quad |MR| = 6x\cos^2 2\alpha, \quad \widehat{KOS} = \alpha, \quad \widehat{OKS} = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Затем, рассматривая ΔOSK и ΔONH, а также трапецию $KPRM$, мы получаем

$$|OK| = \frac{|KS|}{\sin \widehat{KOS}} = \frac{3x}{\sin\alpha}, \quad |OH| = |ON| \cdot \cos \widehat{NOH} = 17x\cos\alpha,$$

$$|MK| = \frac{|KP| - |MR|}{2\cos \widehat{OPK}} = \frac{6x - 6x\cos^2 2\alpha}{2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{3x\sin^2 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Наконец, пользуясь тем, что $|OH| = |OK| - |KH| = |OK| - \frac{1}{2}|MK|$, получаем

$$17x\cos\alpha = \frac{3x}{\sin\alpha} - \frac{3x\sin^2 2\alpha}{2\sin\alpha} \iff$$

$$\iff \quad 34\sin\alpha\cos\alpha = 6 - 3\sin^2 2\alpha \quad \iff \quad 3\sin^2 2\alpha + 17\sin 2\alpha - 6 = 0,$$

откуда $\sin 2\alpha = 1/3$ и, в силу того что угол O – острый, $\widehat{O} = 2\alpha = \arcsin(1/3)$.

О т в е т. $\arcsin(1/3)$.

4. Задачи на доказательство

4.1. Треугольники

Задача 1.

Какого вида треугольник, у которого высоты $3, 4, 5$?

И д е я. Сравнить квадрат одной стороны треугольника с суммой квадратов двух других сторон.
У к а з а н и е. Выразить стороны треугольника через его высоты и площадь.

Р е ш е н и е. Пусть a, b, c стороны треугольника и соответствующие им высоты равны $h_a = 3$, $h_b = 4$, $h_c = 5$. Для площади треугольника имеем

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{2S}{h_a} = \frac{2S}{3}, \quad b = \frac{2S}{h_b} = \frac{S}{2}, \quad c = \frac{2S}{h_c} = \frac{2S}{5},$$

откуда $a^2 = \dfrac{4S^2}{9}$, $b^2 = \dfrac{S^2}{4}$, $c^2 = \dfrac{4S^2}{25}$. В результате получаем

$$b^2 + c^2 = \frac{41S^2}{100} < a^2 = \frac{4S^2}{9},$$

следовательно, треугольник тупоугольный.

О т в е т. Тупоугольный.

Задача 2.

Доказать, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный.

И д е я. Использовать формулу площади треугольника через высоту.
У к а з а н и е. Приравнять два выражения для площади.

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник со сторонами a, b, c и высотами h_a, h_b, h_c. Площадь треугольника равна $S = ah_a/2 = bh_b/2$. Следовательно, если $h_a = h_b$, то и $a = b$.

Задача 3.

Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Доказать, что этот треугольник равнобедренный.

И д е я. Использовать свойство биссектрисы.
У к а з а н и е. Биссектриса угла α делит сторону a на отрезки a_b и a_c, которые пропорциональны сторонам b и c:

$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}.$$

Р е ш е н и е. Поскольку медиана совпадает с биссектрисой, в равенстве

$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}$$

отрезки a_b и a_c равны. Следовательно, $\dfrac{b}{c} = 1$, то есть $b = c$.

Задача 4.

Доказать, что если у треугольника равны две медианы, то он равнобедренный.

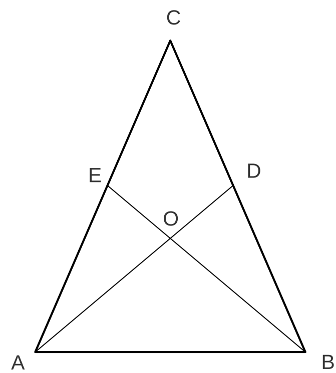
И д е я. Доказать, что $\Delta AOE = \Delta BOD$.
У к а з а н и е. Использовать то, что медианы точкой пересечения делятся в отношении 1 к 2.

Р е ш е н и е. Пусть медианы $AD = BE = m$, тогда

$$AO = BO = \frac{2}{3}m, \quad EO = DO = \frac{1}{3}m.$$

Так как углы при вершине O вертикальные, то $\Delta AOE = \Delta BOD$ по первому признаку.

Следовательно, $AE = BD$ и сторона AC (равная $2AE$) равна стороне BC (равной $2BD$).



Задача 5.

Пусть длины сторон прямоугольного треугольника – натуральные числа. Доказать, что длина одного из катетов кратна трём.

И д е я. Перебрать остатки от деления на 3.
У к а з а н и е. Применить теорему Пифагора.

Р е ш е н и е. Предположим, что длины катетов не кратны трём, то есть

$$a = 3k \pm 1, \quad b = 3l \pm 1, \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

По теореме Пифагора

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9k^2 + 9l^2 \pm 6k \pm 6l + 2,$$

то есть c^2 при делении на 3 дает остаток 2. Переберем возможные варианты:
1) Если c делится на 3, то остаток у c^2 равен нулю.
2) Если c не делится на 3, то $c = 3m \pm 1$, $m \in \mathbb{N}$ и остаток у c^2 равен 1.

В любом случае остаток не равен 2, следовательно, наше предположение неверно и длина одного из катетов кратна трём.

Задача 6.

Доказать, что все прямоугольные треугольники, стороны которых образуют арифметическую прогрессию, подобны "египетскому"треугольнику (длины его сторон равны 3, 4, 5).

Идея. Использовать теорему Пифагора.
Указание. Выразить все стороны треугольника через среднюю сторону и разность прогрессии.

Решение. Пусть длина большего катета равна b, тогда длины гипотенузы и меньшего катета равны соответственно $b+d$ и $b-d$, где $d>0$ разность арифметической прогрессии. По теореме Пифагора получаем

$$(b+d)^2 = b^2 + (b-d)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 4bd = b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 4d.$$

Следовательно, стороны треугольника равны $3d, 4d, 5d$, что и требовалось доказать.

Задача 7.

Пусть a, b, c – длины сторон треугольника. Доказать, что

$$2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) > a^4 + b^4 + c^4.$$

Идея. Использовать неравенство треугольника.
Указание. При каждом возведении неравенства в квадрат проверять неотрицательность обеих частей неравенства.

Решение. Пусть в треугольнике со сторонами a, b, c для определенности угол напротив b острый и $c \geq a$. Тогда из неравенства треугольника следует, что $c-a < b$. После возведения в квадрат (обе части неотрицательны, так как $c \geq a$) получим

$$c^2 - 2ca + a^2 < b^2 \iff c^2 + a^2 - b^2 < 2ca.$$

После возведения в квадрат (обе части неотрицательны, так как угол напротив b острый) получим

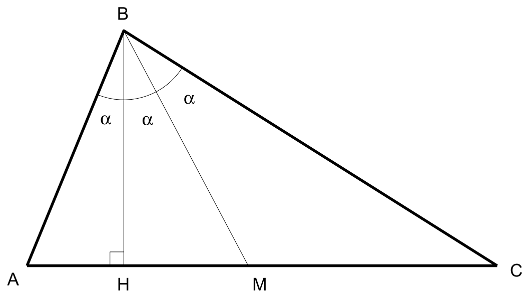
$$c^4 + a^4 + 2c^2a^2 + b^4 - 2c^2b^2 - 2a^2b^2 < 4c^2a^2 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) > a^4 + b^4 + c^4.$$

Задача 8.

Доказать, что если медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят его угол на три равные части, то треугольник – прямоугольный.

Идея. Обозначить одну из равных частей через α, выразить углы треугольника через α и с помощью теоремы синусов получить уравнение для α.
Указание. Применить теорему синусов к двум треугольникам, на которые медиана разбивает исходный треугольник.

Р е ш е н и е. Пусть BH и BM – соответственно высота и медиана $\triangle ABC$ и $\angle ABH = \angle HBM = \angle MBC = \alpha$, тогда $\angle BAH = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle BCA = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$.



Применим к треугольникам ABM и BMC теорему синусов:

$$\frac{AM}{\sin 2\alpha} = \frac{BM}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}, \quad \frac{MC}{\sin\alpha} = \frac{BM}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}.$$

Разделим одно равенство на другое, учитывая, что $AM = MC$, получим

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} \iff \sin 4\alpha = \sin 2\alpha \iff \sin 2\alpha\cdot(2\cos 2\alpha - 1) = 0.$$

Так как $0 < 3\alpha < \pi$, то $\sin 2\alpha \neq 0$. Следовательно, $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}$, откуда $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ и $\angle ABC = 3\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 9.

Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

И д е я. Воспользоваться формулой для биссектрисы, содержащей косинус половинного угла.
У к а з а н и е. Использовать то, что в треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол.

Р е ш е н и е. Пусть a – наибольшая сторона треугольника, тогда лежащий против этой стороны угол α – наибольший угол треугольника. Биссектрисы, проведенные к сторонам a и b треугольника, вычисляются по формулам $l_a = \dfrac{2bc\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c}$ и $l_b = \dfrac{2ac\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}}{a+c}$. Сравним их:

$$\frac{2bc\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c} \vee \frac{2ac\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}}{a+c} \iff b\,(a+c)\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \vee a\,(b+c)\cdot\cos\frac{\beta}{2}.$$

Так как $\alpha > \beta$ и $b < a$, то $0 < \cos\dfrac{\alpha}{2} < \cos\dfrac{\beta}{2} < 1$ и $ba+bc < ba+ac$. Следовательно, $b\,(a+c)\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2} < a\,(b+c)\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}$ и $l_a < l_b$.

Задача 10.

Две биссектрисы у треугольника равны. Доказать, что он равнобедренный.

Идея. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.
Указание. В любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

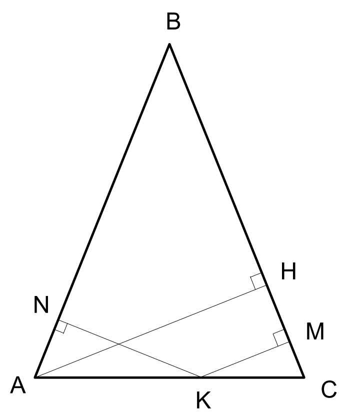
Решение. Пусть $l_a = l_b$. Предположим, что треугольник не является равнобедренным. Следовательно, $\angle\alpha \neq \angle\beta$. Для определенности пусть $\angle\alpha > \angle\beta$ и $a > b$. Так как в треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса, то $l_a < l_b$. Получили противоречие, значит, наш треугольник равнобедренный.

Задача 11.

Доказать, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон равна боковой высоте.

Идея. Разрезать исходный треугольник на две части и использовать формулу площади через высоту.
Указание. $S_{ABC} = S_{AKB} + S_{BKC}$.

Решение. Пусть дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$,



AH – высота и произвольная точка K на его основании AC. Проведем из точки K перпендикуляр KM к стороне BC и перпендикуляр KN к стороне AB.

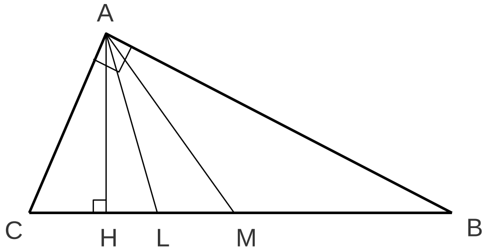
$$S_{ABC} = S_{AKB} + S_{BKC} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}AH\cdot BC = \frac{1}{2}NK\cdot AB + \frac{1}{2}KM\cdot BC.$$

Учитывая, что $AB = BC$, получим $AH = NK + KM$.

Задача 12.

В треугольнике ABC угол A – прямой. Из вершины A проведены медиана AM, высота AH и биссектриса AL. Доказать, что AL – биссектриса в треугольнике AMH.

Идея. Выразить $\angle HAL$, $\angle MAL$ через углы треугольника.



Указание. $\angle HAL = \angle MAL = \dfrac{\pi}{4} - \angle ABC$.

Решение. В любом треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой. Так как AM медиана $\triangle ABC$, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе, то $AM = \dfrac{1}{2}BC$ и $\triangle ABM$, $\triangle ACM-$ равнобедренные, тогда $\angle ABM = \angle BAM = \alpha$ и $\angle MCA = \angle MAC = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

Поскольку AH – высота треугольника, $\angle HAC = \alpha$. Тогда

$$\angle HAL = \angle LAC - \angle HAC = \frac{\pi}{4} - \alpha,$$

$$\angle MAL = \angle MAC - \angle LAC = \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \alpha.$$

Следовательно, $\angle HAL = \angle MAL$, то есть AL – биссектриса угла MAH.

Задача 13.

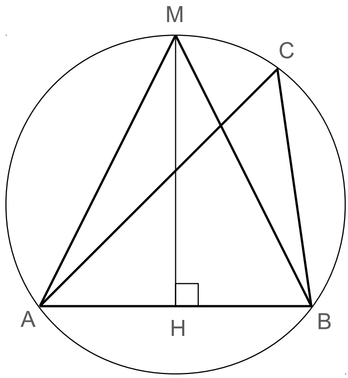
Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом, противолежащим основанию, равнобедренный треугольник имеет наибольшую площадь.

Идея. Наибольшую площадь будет иметь треугольник с наибольшей высотой.
Указание. Геометрическим местом точек, из которых заданный отрезок виден под заданным углом, является дуга окружности.

Решение. Пусть даны сторона a и противолежащий ей угол α. Рассмотрим ΔABC со стороной $AB = a$ и углом $\angle C = \alpha$. Опишем вокруг него окружность.

Найдём геометрическое место точек (в верхней полуплоскости относительно отрезка AB), из которых данный отрезок a виден под заданным углом α.

Для любой точки C_1, лежащей на дуге ACB, $\angle AC_1B = \alpha$, для любой точки C_1, лежащей вне окружности, $\angle AC_1B < \alpha$, для любой точки C_1, лежащей внутри окружности, $\angle AC_1B > \alpha$.



Следовательно, геометрическое место точек, из которых заданный отрезок виден под заданным углом, есть дуга окружности ACB. Среди треугольников с вершинами на этой дуге наибольшую высоту, а, следовательно, и наибольшую площадь будет иметь равнобедренный треугольник AMB .

Задача 14.

Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом, противолежащим основанию, равнобедренный треугольник имеет наибольший периметр.

Идея. Использовать результат предыдущей задачи.
Указание. Использовать теорему косинусов и формулу площади треугольника через произведение сторон и синус угла.

Решение. Пусть даны сторона a и противолежащий ей угол α. По теореме косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

отсюда

$$b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2bc(1+\cos\alpha).$$

Так как площадь ΔABC равна $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$, то $2bc = \dfrac{4S}{\sin\alpha}$. И, следовательно,

$$(b+c)^2 = a^2 + \frac{4S}{\sin\alpha}(1+\cos\alpha).$$

Значит, чем больше площадь, тем больше сумма сторон b и c, то есть наибольший периметр (как и наибольшая площадь) будет у равнобедренного треугольника.

Задача 15.

Доказать, что сумма медиан треугольника
а) меньше P,
б) больше $\dfrac{3}{4}P$, где P – периметр треугольника.

Идея. Использовать неравенство треугольника.

Указание.

а) Достроить треугольник до параллелограмма.

б) Рассмотреть треугольник, образованный одной из сторон и отрезками медиан.

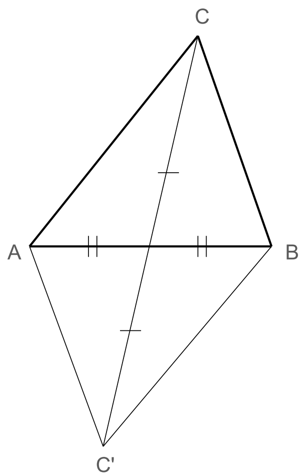
Решение.

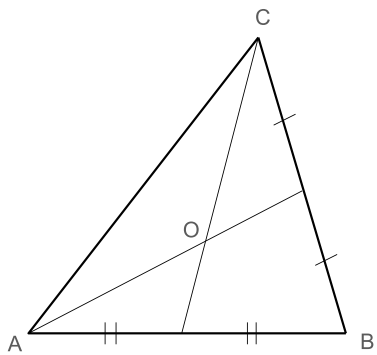
а) Достроим ΔABC до параллелограмма $ACBC'$ (левый рисунок) и запишем неравенство треугольника для $\Delta ACC'$:

$$CC' < AC + AC' \iff 2m_c < a + b.$$

Аналогичным образом можно получить неравенства $2m_b < a + c$, $2m_a < b + c$. Сложив три эти неравенства и поделив на 2, получим

$$m_a + m_b + m_c < P.$$





б) Пусть медианы пересекаются в точке O (правый рисунок). Запишем неравенство треугольника для ΔACO:

$$AC < CO + AO \iff b < \frac{2}{3}(m_c + m_a).$$

Аналогично можно получить неравенства для сторон a и c, сложив которые получим

$$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > P \iff m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}P,$$

что и требовалось доказать.

Задача 16.

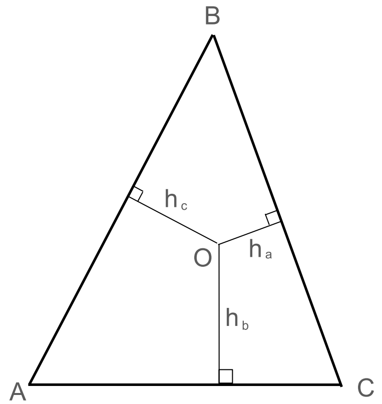
Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри (или на стороне) треугольника, до трех его сторон заключена между наибольшей и наименьшей его высотами. Найти точку в треугольнике, сумма расстояний от которой до сторон наибольшая.

Идея. Разбить треугольник на три и записать его площадь через расстояния от точки до сторон.
Указание. В треугольнике из условия на длины сторон $a \geq b \geq c$ следует условие на длины высот $H_a \leq H_b \leq H_c$.

Решение. Пусть H_a, H_b, H_c – высоты треугольника, опущенные на стороны a, b, c. Пусть для определенности $a \geq b \geq c$, тогда $H_a \leq H_b \leq H_c$ и

$$aH_a = 2S_{\Delta ABC} = ah_a + bh_b + ch_c \leq a(h_a + h_b + h_c),$$

$$cH_c = 2S_{\Delta ABC} = ah_a + bh_b + ch_c \geq c(h_a + h_b + h_c).$$



Следовательно, $H_a \leq h_a + h_b + h_c \leq H_c$. Сумма расстояний от точки O до сторон треугольника принимает свое наибольшее значение, равное H_c, тогда, когда O совпадает с вершиной C.

Задача 17.

Какого вида треугольник, у которого медианы 3, 4 и 5?

Идея. Вычислить длины сторон треугольника.
Указание. Использовать формулы длины медианы.

Решение. Для трех медиан имеем

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$

$$4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2,$$

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Найдем a, b, c. Сложив второе и третье уравнения, получим

$$4(m_b^2 + m_c^2) = 4a^2 + (b^2 + c^2).$$

Выразив отсюда (b^2+c^2) и подставив в первое уравнение, получим

$$4m_a^2 = 8(m_b^2+m_c^2) - 9a^2,$$

откуда

$$a^2 = \frac{4}{9}(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2).$$

Аналогичные формулы справедливы для b и c. В результате

$$a^2 = \frac{4}{9}\cdot 73, \quad b^2 = \frac{4}{9}\cdot 52, \quad c^2 = \frac{4}{9}\cdot 25.$$

Поскольку для квадрата большей стороны треугольника выполняется $a^2 < b^2+c^2$, треугольник является остроугольным.

О т в е т. Остроугольный.

Задача 18.

Пусть α,β,γ – углы треугольника. Доказать, что $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

И д е я. Использовать оценку $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$.
У к а з а н и е. С помощью тригонометрических преобразований доказать, что:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Р е ш е н и е. Покажем, что для углов треугольника справедливо

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Преобразуем левую часть неравенства следующим образом:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = \sin\alpha + 2\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) \le \sin\alpha + 2\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) =$$

$$= \sin\alpha + 2\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+1\right).$$

Докажем, что это выражение не превосходит $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Положим $t=\sin\frac{\alpha}{2}$ и возведем неравенство $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+1\right) \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ в квадрат. Получим

$$4(1-t^2)(t^2+2t+1) \le \frac{27}{4} \quad\Longleftrightarrow\quad t^4+2t^3-2t+\frac{11}{16} \ge 0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\iff \quad \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(t^2+3t+\frac{11}{4}\right) \geq 0 \quad \iff \quad \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Таким образом, доказана справедливость вспомогательного неравенства

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Теперь перейдем к доказательству основного неравенства. Так как для трех положительных чисел a, b, c выполняется неравенство $\sqrt[3]{abc} \leq \dfrac{a+b+c}{3}$, то

$$\sqrt[3]{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma} \leq \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \iff \quad \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Задача 19.

Доказать, что для любого треугольника верно неравенство $h_a \leq \sqrt{p\cdot(p-a)}$.

И д е я. Воспользоваться формулой Герона.
У к а з а н и е. Приравнять друг другу выражения для площади через высоту и полупериметр и выразить из этого равенства высоту.

Р е ш е н и е. Площадь произвольного треугольника равна

$$S = \frac{ah_a}{2} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Откуда получаем, что

$$h_a = \sqrt{p\,(p-a)}\cdot\frac{2\sqrt{(p-b)\,(p-c)}}{a}.$$

Докажем, что $\dfrac{2\sqrt{(p-b)\,(p-c)}}{a}$ меньше единицы. Имеем

$$\sqrt{(p-b)\,(p-c)} \leq \frac{a}{2} \quad \iff \quad (a+c-b)\cdot(a+b-c) \leq a^2 \quad \iff \quad a^2-(b-c)^2 \leq a^2.$$

Получили верное неравенство, следовательно, $h_a \leq \sqrt{p\cdot(p-a)}$.

Задача 20.

Доказать, что для любого треугольника справедливо неравенство

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

И д е я. Воспользоваться формулой площади через высоту и формулой Герона.
У к а з а н и е. Использовать оценку предыдущей задачи для высоты: $h_a^2 \leq p(p-a)$.

Р е ш е н и е. Домножим левую часть неравенства на $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, первое слагаемое правой части на $S^2 = \frac{1}{4}{h_a}^2a^2$, второе на $S^2 = \frac{1}{4}{h_b}^2b^2$, третье на $S^2 = \frac{1}{4}{h_c}^2c^2$. Получим

$$p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b) \geq \frac{1}{2}(a{h_a}^2 + bh_b^2 + ch_c^2).$$

Поскольку $h_a^2 \leq p(p-a)$, $h_b^2 \leq p(p-b)$, $h_c^2 \leq p(p-c)$ (см. предыдущую задачу), нам достаточно доказать более сильное неравенство

$$p(p-b)(p-c)+p(p-a)(p-c)+p(p-a)(p-b) \geq \frac{1}{2}(ap(p-a)+bp(p-b)+cp(p-c)).$$

Поделим неравенство на $p/2$, перенесём всё в одну сторону и вынесем общие множители:

$$(p-a)(2p-2c-a) + (p-b)(2p-2a-b) + (p-c)(2p-2b-c) \geq 0.$$

Заменим во втором множителе каждого слагаемого $2p$ на $a+b+c$, получим

$$(p-a)(b-c) + (p-b)(c-a) + (p-c)(a-b) \geq 0.$$

Теперь заменим p на $(a+b+c)/2$ в первом множителе каждого слагаемого и приведём подобные члены. Получим $0 \geq 0$. Таким образом, поскольку все преобразования были эквивалентными, неравенство доказано.

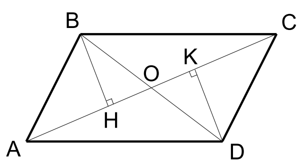
4.2. Многоугольники

Задача 1.

Доказать, что если каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника делит его на равновеликие треугольники, то этот четырехугольник – параллелограмм.

И д е я. Доказать, что диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам.
У к а з а н и е. Показать, что перпендикуляры, опущенные из противолежащих вершин на диагональ, равны.

Р е ш е н и е. Пусть диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, $S_{ABC} = S_{ACD}$, $S_{ABD} = S_{BCD}$. Опустим перпендикуляры из точек B и D на диагональ AC.



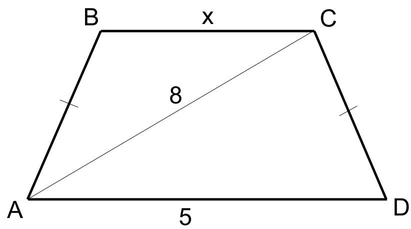
Так как $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BH$ и $S_{ACD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot DK$, то $BH = DK$. Откуда следует, что $\Delta BHO = \Delta DKO$ по катету и острому углу, следовательно, $BO = OD$. Аналогично доказывается, что $AO = OC$. То есть диагонали четырехугольника $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам и, следовательно, он является параллелограммом.

Задача 2.

В равнобедренной трапеции диагональ имеет длину 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, а другое равно 5?

Идея. Для получения противоречия использовать неравенство треугольника и теорему синусов.
Указание. Рассмотреть отдельно случаи, когда диагональ является биссектрисой угла при большем основании трапеции и когда при меньшем.

Решение. Возможно два варианта, либо AC – биссектриса угла при большем основании трапеции, либо – при меньшем.



1) Пусть AC – биссектриса угла BAD и $AD = 5$, тогда

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle BCA$$

и ΔABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, если $BC < 4$, то

$$AB + BC < 8 = AC,$$

то есть треугольник ABC не может существовать и этот вариант невозможен.

2) Пусть AC – биссектриса угла BCD и $AD = 5$, тогда

$$\angle BCA = \angle ACD = \angle CAD = \alpha$$

и ΔACD равнобедренный, следовательно, $AD = CD = AB = 5$. Из ΔACD имеем $\cos\alpha = 4/5$, тогда

$$\cos\angle BCD = \cos 2\alpha = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25} > 0,$$

то есть $\angle BCD$ – острый, что противоречит условию.

Ответ. Нет.

Задача 3.

Доказать, что из всех прямоугольников с данной диагональю наибольшую площадь имеет квадрат.

Идея. Использовать формулу площади четырёхугольника через произведение диагоналей на синус угла между ними.
Указание. Из формулы площади четырёхугольника через произведение диагоналей на синус угла между ними следует, что максимальную площадь будет иметь прямоугольник, диагонали которого перпендикулярны.

Решение. Используем формулу площади через произведение диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2}d^2 \cdot \sin\alpha \leq \frac{1}{2}d^2.$$

Следовательно, наибольшую площадь будет иметь прямоугольник, диагонали которого перпендикулярны, то есть квадрат.

Задача 4.

Какой четырехугольник с диагоналями d_1 и d_2 имеет максимальную площадь?

Идея. Использовать формулу площади четырехугольника через диагонали и угол между ними.
Указание. $S = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$.

Решение. Пусть α угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$, тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha \leq \frac{1}{2}d_1d_2.$$

Следовательно, площадь четырехугольника $ABCD$ достигает своего максимального значения при $\sin\alpha = 1$. То есть $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ и диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

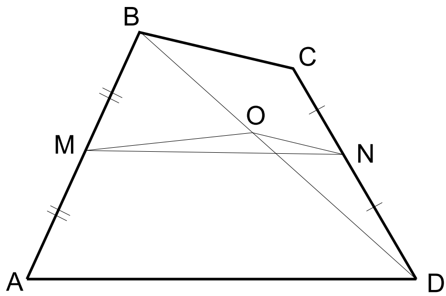
Ответ. Четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны.

Задача 5.

Доказать, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник – трапеция.

Идея. Разрезать четырехугольник на два треугольника и использовать свойство средних линий.
Указание. Средние линии полученных треугольников составляют отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон данного четырехугольника.

Решение. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, у которого точка M – середина стороны AB, точка N – середина CD и точка O – середина диагонали BD.



Отрезки MO и NO – средние линии $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$, следовательно,

$$MO = \frac{1}{2}AD, \quad MO \| AD \quad \text{и} \quad NO = \frac{1}{2}BC, \quad NO \| BC,$$

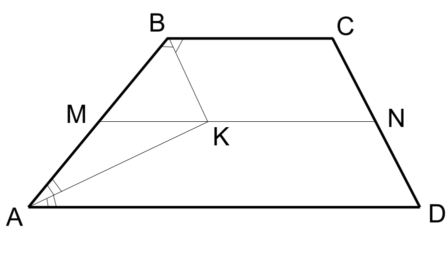
то есть $MO + NO = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Но по условию задачи $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$, значит, точки M, O и N лежат на одной прямой. Следовательно, $MN \| AD$ и $MN \| BC$, то есть $ABCD$ трапеция.

Задача 6.

Доказать, что биссектрисы углов, прилежащих к одной из непараллельных сторон трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции (или её продолжении).

Идея. Использовать то, что сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых равна $180°$.
Указание. Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух параллельных прямых, является прямая, параллельная данным и находящаяся на равном от них расстоянии.

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$. Пусть AK и BK биссектрисы углов BAD и ABC соответственно.



Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle ABC = \pi - \alpha$ и

$$\angle AKB = \pi - \frac{1}{2}\angle BAD - \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{\pi}{2}.$$

Осталось доказать, что точка K лежит на средней линии трапеции MN. Так как точка K лежит на биссектрисах углов A и B, то она равноудалена от сторон

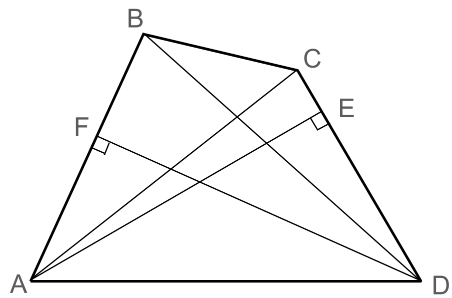
AB, AD и BC. Поскольку геометрическим местом точек, равноудаленных от двух параллельных прямых, является прямая, параллельная данным и находящаяся на равном от них расстоянии, точка K принадлежит средней линии MN трапеции $ABCD$ (или её продолжению).

Задача 7.

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с диагоналями AC и BD на стороны CD и AB опущены соответственно высоты AE и DF. Известно, что $AE \geq BD$, $DF \geq AC$, $AD = 2 \cdot AB$. Найти меры углов четырехугольника $ABCD$.

Идея. Точка E совпадает с точкой C, точка F совпадает с точкой B.
Указание. Использовать то, что перпендикуляр короче наклонной.

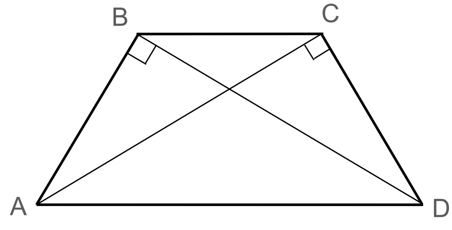
Решение. Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, отрезок AE перпендикулярен CD, отрезок DF перпендикулярен AB.



Так как перпендикуляр короче наклонной, то справедливы неравенства

$$AC \geq AE \geq BD \quad \text{и} \quad BD \geq DF \geq AC,$$

следовательно, $AC = AE = DF = BD$ и точка E совпадает с точкой C, точка F совпадает с точкой B.



Следовательно, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ и $\triangle ABD$ равен $\triangle ACD$ по гипотенузе и катету. Так как высоты, опущенные на гипотенузы, тоже равны, то $AD \parallel BC$ и четырехугольник является трапецией.

По условию $AD = 2 \cdot AB$, значит,

$$\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ \quad \text{и} \quad \angle ABC = \angle BCD = 120^\circ.$$

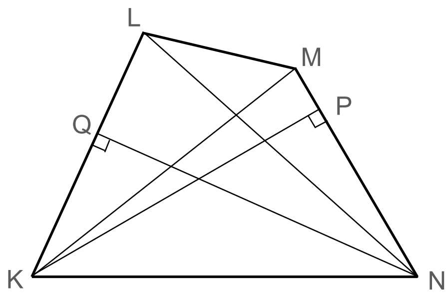
Ответ. $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$, $\angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$.

Задача 8.

В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ с диагоналями LN и KM на стороны MN и KL опущены соответственно высоты KP и NQ. Известно, что $KP \geq LN$, $NQ \geq KM$, $KL = 3$, $KN = 5$. Найти KM.

Идея. Как и в предыдущей задаче, показать, что все неравенства должны обратиться в равенства. Попробуйте доказать это самостоятельно.
Указание. Использовать то, что перпендикуляр короче наклонной.

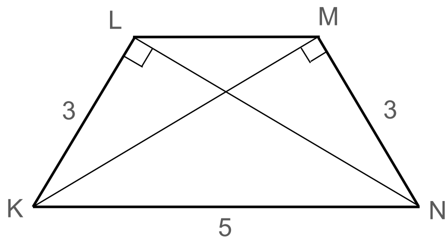
Решение. Пусть $KLMN$ данный четырехугольник.



Так как перпендикуляр короче наклонной, то справедливы неравенства

$$KM \geq KP \geq LN \quad \text{и} \quad LN \geq NQ \geq KM,$$

следовательно, $KM = KP = LN = NQ$ и точка P совпадает с точкой M, точка Q совпадает с точкой L.



Следовательно, $\angle KLN = \angle KMN = 90^\circ$ и $\triangle KLN$ равен $\triangle KMN$ по гипотенузе и катету.

По теореме Пифагора $LN = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. В результате $KM = LN = 4$.

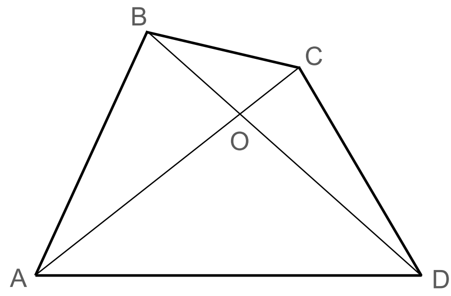
Ответ. $KM = 4$.

Задача 9.

Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого $AB + BD \leq AC + CD$. Сравните длины отрезков AB и AC.

Идея. Доказать вспомогательное неравенство: в любом выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей больше суммы двух противоположных сторон.
Указание. Использовать неравенство треугольника.

Решение. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O.



Из неравенства треугольника для ΔABO и ΔCDO следует, что

$$AB < AO + BO, \quad CD < CO + DO.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$AB + CD < AC + BD.$$

Теперь сложим полученное неравенство с исходным неравенством $AB + BD \leq AC + CD$ и приведём подобные члены:

$$(AB + CD) + (AB + BD) < (AC + BD) + (AC + CD) \quad \Longleftrightarrow \quad AB < AC.$$

Ответ. $AB < AC$.

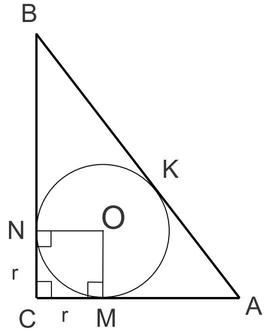
4.3. Окружности

Задача 1.

Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.

Идея. Использовать теорему о равенстве касательных, проведённых из одной точки.
Указание. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна диаметру описанной окружности.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть M, N, K – точки касания вписанной в треугольник окружности со сторонами, а R и r радиусы описанной и вписанной в треугольник окружностей.



Четырехугольник $OMCN$ квадрат и, следовательно, $CM = CN = r$. По теореме о равенстве касательных, проведённых из одной точки к окружности, имеем $BK = BN$, $AM = AK$. Тогда получаем, что

$$AC + BC = r + AM + r + BN = 2r + AK + BK = 2r + AB.$$

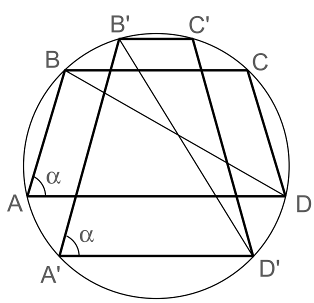
Так как гипотенуза прямоугольного треугольника равна диаметру описанной окружности, то $AC + BC = 2r + 2R$.

Задача 2.

В круг вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций равны.

Идея. Выразить диагонали с помощью теоремы синусов.
Указание. Рассмотреть треугольники, на которые диагональ разбивает трапецию.

Решение. Пусть стороны трапеции $ABCD$ параллельны соответствующим сторонам трапеции $A'B'C'D'$. Рассмотрим ΔABD.



Обозначим $\angle BAD$ через α. По теореме синусов

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = 2R \quad \Longleftrightarrow \quad BD = 2R\sin\alpha.$$

Теперь рассмотрим $\Delta A'B'D'$. У него $\angle B'A'D' = \angle BAD = \alpha$, следовательно, по теореме синусов $B'D' = 2R\sin\alpha = BD$.

Задача 3.

Может ли у треугольника со сторонами меньше 1 радиус описанной окружности быть больше 100?

Идея. Привести соответствующий пример.
Указание. Сначала построить окружность, потом вписанный в неё треугольник.

Решение. Рассмотрим окружность радиуса больше 100 и произвольную точку A на ней. Отложим на окружности от точки A точки B и C на расстоянии $1/2$. Стороны полученного треугольника будут меньше 1.

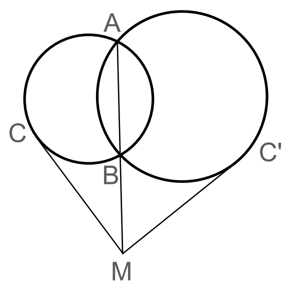
Ответ. Да.

Задача 4.

Доказать, что касательные к двум пересекающимся окружностям, проведённые из любой точки продолжения их общей хорды, равны между собой.

Идея. Использовать свойство касательных и секущих, проведённых из одной точки.
Указание. Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину её внешней части.

Решение. Пусть окружности пересекаются в точках A и B. Рассмотрим произвольную точку M на прямой AB и проведем касательные MC и MC'.



Так как квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину её внешней части, то

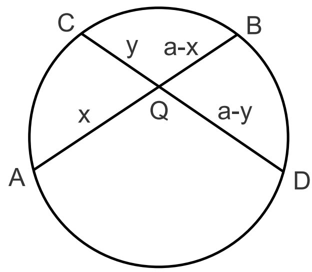
$$MC^2 = MA \cdot MB \quad \text{и} \quad MC'^2 = MA \cdot MB \quad \Longrightarrow \quad MC = MC'.$$

Задача 5.

В окружности проведены равные пересекающиеся хорды. Доказать, что соответствующие части этих хорд, на которые они делятся точкой пересечения, равны.

Идея. Использовать свойство пересекающихся хорд.
Указание. Произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны.

Р е ш е н и е. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке Q и $AB = CD = a$.



Обозначим $AQ = x$, $CQ = y$, тогда $BQ = a - x$, $DQ = a - y$. По свойству пересекающихся хорд получаем

$$AQ \cdot BQ = CQ \cdot DQ \quad \Longleftrightarrow \quad x(a-x) = y(a-y) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad a(x-y) = x^2 - y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-y)(a-x-y) = 0.$$

То есть либо $x = y$, либо $x = a - y$, что и требовалось доказать.

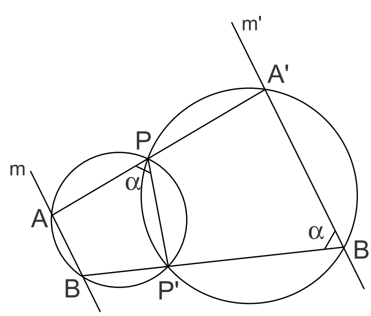
Задача 6.

Через точки пересечения двух окружностей P и P' проводятся произвольные прямые, пересекающие окружности. Через точки пересечения этих прямых с окружностями проводятся прямые m и m'. Доказать, что m параллельна m'.

И д е я. Рассмотреть два случая: отрезки прямых, проходящих через точки P и P', лежащие внутри окружностей, не пересекаются и пересекаются. В первом случае доказать, что сумма внутренних односторонних углов при пересечении секущей прямых m и m' равна $180°$. Во втором случае доказать, что внутренние накрест лежащие углы при пересечении секущей прямых m и m' равны.
У к а з а н и е. Использовать то, что у вписанного четырехугольника сумма противоположных углов равна $180°$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два случая: отрезки прямых, проходящих через точки P и P', лежащие внутри окружностей, не пересекаются и пересекаются.

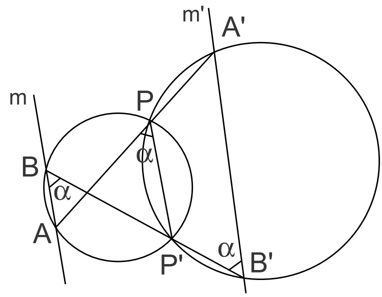
1 случай (отрезки AA' и BB' не пересекаются).
Покажем, что $\angle ABP' + \angle A'B'P' = 180°$.



Пусть $\angle A'B'P' = \alpha$. Так как у вписанного четырехугольника сумма противоположных углов равна $180°$, то $\angle A'PP' = 180° - \alpha$ и смежный с ним угол $\angle APP' = \alpha$. Поскольку четырехугольник $APP'B$ также является вписанным, $\angle ABP' = 180° - \alpha$.

Мы доказали, то $\angle ABP' + \angle A'B'P' = 180°$ и, следовательно, прямые m и m' параллельны.

2 случай (отрезки AA' и BB' пересекаются).
Покажем, что $\angle ABP' = \angle A'B'P'$.



Пусть $\angle A'B'P' = \alpha$. Так как у вписанного четырехугольника сумма противоположных углов равна $180°$, то $\angle A'PP' = 180° - \alpha$ и смежный с ним угол $\angle APP' = \alpha$. Поскольку угол ABP' опирается на ту же дугу, что и угол APP', то $\angle ABP' = \alpha$.

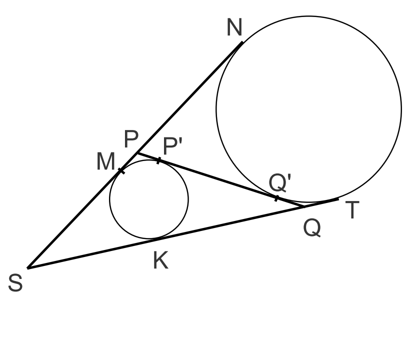
Мы доказали, то $\angle ABP' = \angle A'B'P'$ и, следовательно, прямые m и m' параллельны.

Задача 7.

К двум непересекающимся окружностям проведены две общие внешние касательные и внутренняя. Точки M и N – точки касания внешней касательной с окружностями, а P и Q – точки пересечения внутренней касательной с внешними. Доказать, что $MN = PQ$.

Идея. Использовать равенство касательных, проведенных из одной точки.
Указание. Продолжить внешние касательные до пересечения и выразить MN и PQ через отрезки касательных.

Решение. Продолжим две внешние касательные до пересечения в точке S.



По свойству касательных, проведённых из точки S, имеем $SN = ST$ и $SM = SK$, откуда $MN = KT$.

По свойству касательных, проведенных из точек P и Q, имеем $PM = PP'$, $PN = PQ'$, $QT = QQ'$, $QK = QP'$, откуда следует, что

$$2 \cdot MN = MN + KT = MP + PN + KQ + QT = PP' + PQ' + QP' + QQ' = 2 \cdot PQ.$$

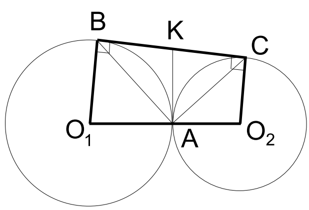
Следовательно, $MN = PQ$.

Задача 8.

К двум окружностям с центрами O_1 и O_2, касающимся внешним образом в точке A, проведена общая касательная BC (B и C – точки касания). Доказать, что угол BAC – прямой.

Идея. Использовать то, что угол между касательной и хордой измеряется половиной меры дуги, стягиваемой этой хордой.
Указание. Сделать дополнительное построение – провести общую внутреннюю касательную.

Решение. Через точку A касания окружностей проведем их общую внутреннюю касательную AK.



Так как $O_1B \| O_2C$, то $\angle BO_1A + \angle AO_2C = \pi$. По свойству угла между касательной и хордой получим

$$\angle BAK = \frac{1}{2}\angle BO_1A, \quad \angle CAK = \frac{1}{2}\angle AO_2C.$$

Тогда

$$\angle BAC = \angle BAK + \angle CAK = \frac{1}{2}\left(\angle BO_1A + \angle AO_2C\right) = \frac{\pi}{2}.$$

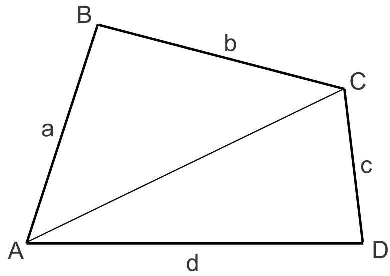
4.4. Площади

Задача 1.

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что для его площади S имеет место неравенство $S \leq \frac{1}{2}(ab + cd)$. В каких случаях это неравенство обращается в равенство?

Идея. Разрезать четырехугольник на два треугольника и у каждого из них оценить площадь.
Указание. Максимум достигается, когда синусы соответствующих углов равны 1.

Решение. Проведем диагональ AC в четырехугольнике $ABCD$. Имеем



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}\left(ab\sin\angle B + cd\sin\angle D\right) \leq \frac{1}{2}\left(ab + cd\right).$$

Равенство достигается, когда оба синуса равны 1, то есть $\angle B = \angle D = 90^\circ$.

Ответ. Равенство достигается, когда $\angle B = \angle D = 90^\circ$.

Задача 2.

Все стороны выпуклого четырехугольника меньше 7. Доказать, что его площадь строго меньше 50.

Идея. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.
Указание. $S \leq \dfrac{1}{2}\left(ab + cd\right)$.

Решение. В предыдущей задаче было доказано, что у четырехугольника со сторонами a, b, c, d площадь

$$S \leq \frac{1}{2}\left(ab + cd\right).$$

Следовательно, $S \leq 49 < 50$, что и требовалось доказать.

Задача 3.

В треугольнике ABC заданы длины двух его сторон a и b. Доказать, что для его площади S справедливо неравенство $S \leq \dfrac{a^2 + b^2}{4}$. В каком случае это неравенство обращается в равенство?

Идея. В качестве S взять половину произведения сторон на синус угла между ними.
Указание. Для получения оценки площади воспользоваться неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел.

Р е ш е н и е. Пусть α угол между сторонами a и b. Тогда

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha \leq \frac{1}{2}ab \leq \frac{a^2+b^2}{4}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что среднее геометрическое двух чисел не превосходит среднего арифметического. Первое неравенство обращается в равенство при $\sin\alpha = 1$, второе – при $a = b$. Следовательно, $S = \dfrac{a^2+b^2}{4}$ у равнобедренного прямоугольного треугольника.

О т в е т. Неравенство обращается в равенство, если a и b равные катеты прямоугольного треугольника.

Задача 4.

Может ли уменьшиться площадь треугольника при увеличении всех его сторон?

И д е я. Привести соответствующий пример.

Р е ш е н и е. В качестве первого треугольника возьмем равносторонний треугольник со стороной $a = 1$ и площадью $S_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. В качестве второго треугольника возьмем равнобедренный треугольник со сторонами $a = 2,\ b = c = 1,01$ и площадью $S_2 = \sqrt{0,0201} < S_1$.

О т в е т. Может.

5. Задачи на построение

5.1. Алгебраический метод

Задача 1.

Дан отрезок a. Построить отрезок $x = a\cdot\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Идея. Использовать построение отрезка $x=\sqrt{ab}$.
Указание. Сначала построить отрезок $b = n\cdot a$.

Решение. Сначала надо построить отрезок $b = n\cdot a$, потом $x=\sqrt{ab}$. В результате получим, что $x = a\cdot\sqrt{n}$.

Задача 2.

Даны отрезки a, b, c. Построить отрезок $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Идея. Использовать построение отрезка $x=\sqrt{a^2+b^2}$.
Указание. Построить прямоугольный треугольник с катетами a и b. Его гипотенуза d равна $\sqrt{a^2+b^2}$.

Решение. Построим прямоугольный треугольник с катетами a и b. Его гипотенуза d равна $\sqrt{a^2+b^2}$. Теперь построим прямоугольный треугольник с катетами d и c. Искомым отрезком будет гипотенуза этого треугольника.

Задача 3.

Дан отрезок a. Построить отрезок $x = a\cdot\sqrt[4]{2}$.

Идея. Использовать построение отрезка $x=\sqrt{ab}$, где $b=\sqrt{2}\cdot a$.
Указание. $b=\sqrt{2}\cdot a$ – гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, равными a.

Решение. Построим прямоугольный треугольник с катетами, равными a. Его гипотенуза b будет равна $\sqrt{2}\cdot a$. Теперь, построив отрезок $x=\sqrt{ab}$, получим, что $x = a\cdot\sqrt[4]{2}$.

Задача 4.

Даны отрезки a, b. Построить отрезок $x=\dfrac{a^{1995}}{b^{1994}}$.

Идея. Использовать построение отрезка $\dfrac{ac}{b}$.

Указание. Построить отрезок $\dfrac{a^2}{b}$.

Указание. Построить отрезок $\dfrac{a^3}{b^2}$ и т.д.

Решение. По трём известным отрезкам a, b, c мы умеем строить отрезок $\dfrac{ac}{b}$, значит, мы умеем домножать отрезок на отношение известных отрезков.

Домножив отрезок a на $\dfrac{a}{b}$, получим отрезок длины $\dfrac{a^2}{b}$. Домножив полученный отрезок на $\dfrac{a}{b}$, получим отрезок длины $\dfrac{a^3}{b^2}$. Проделав эту процедуру 1994 раза, получим искомый отрезок.

Замечание. При решении этой задачи, так же как и остальных задач на построение, не надо проводить все построения, достаточно рассказать схему.

Задача 5.

Даны два отрезка: длины 1 и длины a. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длины $x = \sqrt[4]{a^3 - 4a^2 + 3a}$.

Идея. Использовать построение отрезка $x = \sqrt{ab}$.
Указание. Разложить подкоренное выражение на множители:

$$x = \sqrt[4]{a^3 - 4a^2 + 3a} = \sqrt[4]{a \cdot (a-3) \cdot (a-1) \cdot 1}.$$

Указание. Построить сначала отрезки $y = \sqrt{a \cdot (a-3)}$ и $z = \sqrt{(a-1) \cdot 1}$.

Решение. Разложим подкоренное выражение на множители:

$$x = \sqrt[4]{a^3 - 4a^2 + 3a} = \sqrt[4]{a \cdot (a-3) \cdot (a-1) \cdot 1}.$$

Построим сначала отрезки $y = \sqrt{a \cdot (a-3)}$ и $z = \sqrt{(a-1) \cdot 1}$, а потом отрезок $x = \sqrt{y \cdot z}$.

Задача 6.

Даны отрезки a, b. Построить отрезок $x = \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$.

Идея. Использовать все четыре приведенные в теоретической части формулы.
Указание. Разложить числитель дроби на множители

$$x = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = \frac{(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)}{a^2 + b^2}.$$

Указание. Последовательно построить отрезки:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad d = \sqrt{ab}, \quad e = \sqrt{c^2 - d^2}, \quad f = \frac{(a+b)e}{c}.$$

Р е ш е н и е. Разложим числитель дроби на множители

$$x = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = \frac{(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)}{a^2 + b^2}$$

и будем последовательно строить отрезки:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad d = \sqrt{ab}, \quad e = \sqrt{c^2 - d^2}, \quad f = \frac{(a+b)e}{c}.$$

Искомый отрезок $x = \dfrac{fe}{c}$.

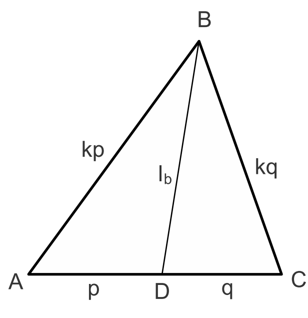
Задача 7.

Построить треугольник ABC, если известна биссектриса BD и отрезки AD и DC, на которые она делит противоположную сторону.

И д е я. Сначала построить две другие стороны треугольника.
У к а з а н и е. Пусть биссектриса BD равна l, отрезки $AD = p$, $DC = q$. Тогда по свойству биссектрисы боковые стороны $AB = kp$, $BC = kq$. По формуле для биссектрисы:

$$l^2 = k^2pq - pq \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{l^2}{p} = k^2q - q \quad \Longleftrightarrow \quad k^2q = \frac{l^2}{p} + q.$$

У к а з а н и е. Построить боковую сторону $kq = \sqrt{k^2q \cdot q}$.



Р е ш е н и е. Пусть биссектриса BD равна l, отрезки $AD = p$, $DC = q$. Тогда по свойству биссектрисы боковые стороны $AB = kp$, $BC = kq$. По формуле для биссектрисы имеем

$$l^2 = k^2pq - pq \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{l^2}{p} = k^2q - q.$$

Отрезок длины $\dfrac{l^2}{p}$ мы можем построить, следовательно, можем построить и

$$k^2q = \frac{l^2}{p} + q.$$

Теперь построим боковую сторону $kq = \sqrt{k^2 q \cdot q}$. Аналогично строим сторону kp. Осталось построить треугольник по трём сторонам.

Замечание. Эту задачу можно было решить и чисто геометрически, например, с помощью окружности Аполлония.

Задача 8.

Построить треугольник по основанию a, h_a и $\sqrt{b^2 - c^2}$.

Идея. Сравнить a и $\sqrt{b^2 - c^2}$, чтобы определить, где лежит основание высоты: на стороне BC или на продолжении стороны BC за точку B.
Указание. Найти расстояние от точки B до основания высоты.
Указание. Пусть точка H – основание высоты h_a. Обозначим $BH = x$, $d = \sqrt{b^2 - c^2}$. Если $H \in BC$, то $CH = a - x$. По теореме Пифагора

$$b^2 = h_a^2 + (a-x)^2, \quad c^2 = h_a^2 + x^2 \quad \Longrightarrow \quad b^2 - c^2 = a^2 - 2ax \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{a^2 - d^2}{2a}.$$

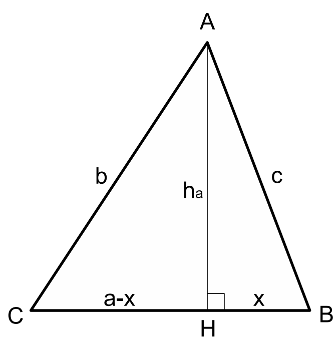
Решение. Пусть точка H – основание высоты h_a. Обозначим $BH = x$, $d = \sqrt{b^2 - c^2}$. Рассмотрим три случая расположения точки H на прямой BC.

1) Если $H \in BC$, то $CH = a - x$. По теореме Пифагора

$$b^2 = h_a^2 + (a-x)^2, \quad c^2 = h_a^2 + x^2,$$

откуда

$$b^2 - c^2 = a^2 - 2ax \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{a^2 - d^2}{2a}.$$



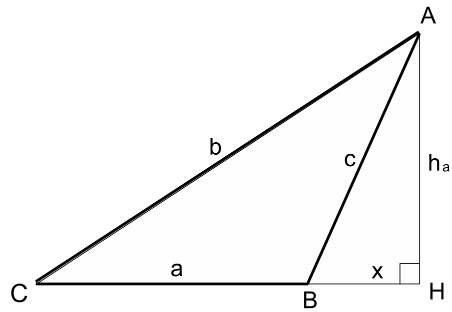
Для неотрицательности x достаточно, чтобы $a \geq d$. В этом случае сначала надо построить отрезок $y = \sqrt{a^2 - d^2}$, потом $x = \dfrac{y \cdot y}{2a}$.

2) Точка H не может лежать левее C, так как тогда нарушается условие неотрицательности подкоренного выражения $\sqrt{b^2 - c^2}$, поскольку в этом случае $b < c$.

3) Если точка H лежит правее B, то $CH = a + x$. По теореме Пифагора

$$b^2 = h_a^2 + (a+x)^2, \quad c^2 = h_a^2 + x^2,$$

откуда $\quad b^2 - c^2 = a^2 + 2ax \quad \Longleftrightarrow \quad x = \dfrac{d^2 - a^2}{2a}.$



Для неотрицательности x достаточно, чтобы $a \leq d$. В этом случае сначала надо построить отрезок $y = \sqrt{d^2 - a^2}$, потом $x = \dfrac{y \cdot y}{2a}$.

В результате общая последовательность действий такова.

а) Если $d = \sqrt{b^2 - c^2} = 0$, то $b = c$ и нам надо построить равнобедренный треугольник по основанию и высоте (восстановленной из середины основания).

б) Если $a = d$, то $x = 0$ и, следовательно, точки B и H совпадают; нам надо построить прямоугольный треугольник по двум катетам a и h_a.

в) Если $a > d$, то основание высоты лежит на отрезке BC и построение надо выполнять согласно пункту 1).

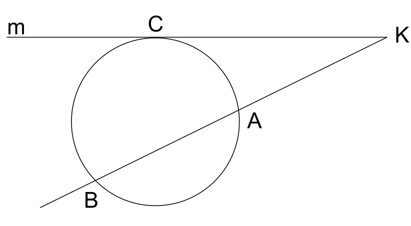
г) Если $a < d$, то построение надо выполнять согласно пункту 3).

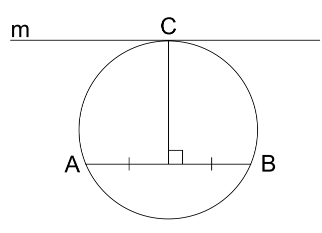
Задача 9.

Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

Идея. Найти точку касания окружности и данной прямой. Рассмотреть два случая: прямая, проходящая через две данные точки, параллельна данной прямой или нет.
Указание. Если прямая, проходящая через две данные точки, не параллельна данной прямой, то точку касания найти, используя свойство секущей и касательной, проведённых к окружности из одной точки.

Решение. Пусть даны точки A, B и прямая m. Рассмотрим два случая.





1) Отрезок AB не параллелен прямой m. Пусть C – точка касания, а K – точка пересечения прямых m и AB. По свойству секущей и касательной, проведённых к окружности из одной точки, имеем $CK^2 = AK \cdot BK$. Следовательно, от точки K на прямой m надо отложить отрезок $CK = \sqrt{AK \cdot BK}$ и построить окружность по трём точкам A, B и C.

2) Если отрезок AB параллелен прямой m, то точка касания C есть точка пересечения серединного перпендикуляра к AB с прямой m. Осталось построить окружность по трём точкам A, B и C.

Задача 10.

Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и сумме катетов s.

Идея. Используя теорему Пифагора, выразить длину одного из катетов через гипотенузу и сумму катетов.

Указание. Пусть x – длина одного из катетов, тогда длина другого $s-x$ и по теореме Пифагора

$$c^2 = x^2 + (s-x)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 2sx + s^2 - c^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{s}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 - s^2}.$$

Решение. Пусть x – длина одного из катетов, тогда длина другого $s-x$ и по теореме Пифагора

$$c^2 = x^2 + (s-x)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 2sx + s^2 - c^2 = 0,$$

откуда при $2c^2 \geq s^2$ имеем $x = \dfrac{s}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{2c^2 - s^2}$, а такие отрезки мы уже умеем строить. Осталось по катету и гипотенузе построить прямоугольный треугольник.

Задача 11.

Дан угол в 19°, построить угол в 1°.

Идея. $19^2 = 361$.

Указание. Отложить от произвольного луча 19 раз угол 19°.

Решение. Отложим от произвольного луча 19 раз угол 19°. Острый угол между исходным и полученным лучами будет равен 1°.

Задача 12.

Дан отрезок длины a и угол, равный α. Построить отрезки длины

$$a\cos\alpha, \quad a\sin\alpha, \quad \frac{a}{\cos\alpha}, \quad \frac{a}{\sin\alpha}, \quad a\cdot\operatorname{tg}\alpha, \quad a\cdot\operatorname{ctg}\alpha.$$

Идея. Использовать соотношения в прямоугольном треугольнике.

Указание. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе a и острому углу, равному α. Его катеты будут равны $a\cos\alpha$ и $a\sin\alpha$.

Р е ш е н и е. 1) Построим прямоугольный треугольник по гипотенузе a и острому углу, равному α. Его катеты будут равны $a\cos\alpha$ и $a\sin\alpha$.

2) Построим прямоугольный треугольник по катету a и прилежащему углу, равному α. Тогда его гипотенуза будет равна $\dfrac{a}{\cos\alpha}$, а второй катет $a\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

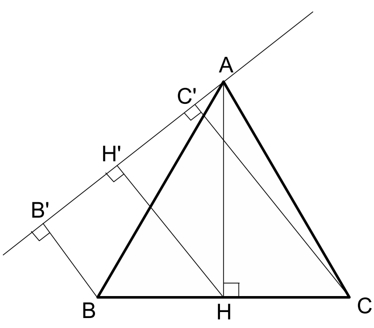
3) Построим прямоугольный треугольник по катету a и противолежащему углу, равному α. Тогда его гипотенуза будет равна $\dfrac{a}{\sin\alpha}$, а второй катет $a\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

Задача 13.

Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Через вершину A с помощью циркуля и линейки провести такую прямую, что сумма расстояний от точек B и C до этой прямой равна $\sqrt{2}$.

И д е я. Расстояние от основания высоты AH до этой прямой равно $\sqrt{2}/2$.
У к а з а н и е. На AH, как на диаметре, построить окружность. С центром в точке H провести окружность радиусом $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. В пересечении двух окружностей получится вторая точка прямой.

Р е ш е н и е. Пусть нужная прямая уже построена, а C', B', H' – проекции на неё точек C, B и H, где H – основание высоты AH.



В прямоугольной трапеции $C'CBB'$ отрезок HH' будет средней линией и, следовательно,

$$HH' = (CC' + BB')/2 = \sqrt{2}/2.$$

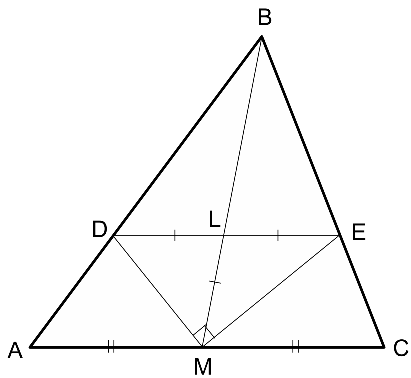
На AH, как на диаметре, строим окружность. С центром в точке H проводим окружность радиусом $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. В пересечении двух окружностей получим две искомые точки H'.

Задача 14.

Дан ΔABC. Построить отрезок DE с концами на сторонах AB и BC так, что $DE \parallel AC$ и DE виден из середины AC под прямым углом.

Идея. Предположить, что отрезок DE построен и найти, на каком расстоянии от точки B он пересекает медиану BM, выражая это расстояние через элементы треугольника.
Указание. Используя подобие, выразить длину отрезка медианы от вершины до точки пересечения с отрезком DE через половину основания AC и длину медианы BM.

Решение. Пусть отрезок DE уже построен. Обозначим медиану $BM = b$ и половину основания $AM = a$ и выразим длину DE через a и b.



Из параллельности прямых AC и DE следует равенство соответствующих углов ΔABC и ΔDBE. Следовательно, они подобны с некоторым коэффициентом k. Тогда $DL = ka, BL = kb$ и, так как медиана прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы, то $LM = DL = ka$.

В результате получаем

$$BM = BL + LM \quad \Longleftrightarrow \quad b = kb + ka \quad \Longleftrightarrow \quad k = \frac{b}{a+b} \quad \Longrightarrow \quad BL = \frac{b^2}{a+b}.$$

Для того чтобы построить отрезок DE, надо на медиане BM отложить отрезок $BL = \dfrac{b^2}{a+b}$ и провести через точку L прямую параллельно AC. Она пересечёт стороны AB и BC в точках D и E.

Задача 15.

Построить угол, равный трём градусам.

Идея. Построить углы, равные 15° и 18°.
Указание. $15 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 60$. В равностороннем треугольнике все углы равны 60°.
Указание. Для вычисления $\sin 18^\circ$ использовать равенство $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$.

Р е ш е н и е. Сначала построим угол 15°. Для этого построим равносторонний треугольник и дважды поделим один из его углов пополам.

Теперь построим угол 18°. После этого, отняв от него угол 15°, получим искомый угол 3°.

Для вычисления $\sin 18^\circ$ используем равенство

$$\sin(2\cdot 18^\circ) = \sin 36^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ) = \cos 54^\circ = \cos(3\cdot 18^\circ).$$

Распишем синус двойного угла и косинус тройного угла

$$2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ.$$

Сократив на $\cos 18^\circ$ и заменив $\cos^2 18^\circ$ на $1-\sin^2 18^\circ$, получим

$$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0,$$

откуда, с учётом положительности $\sin 18^\circ$, находим $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Построим угол с таким синусом. Возьмём произвольный отрезок длины a и построим отрезок длины $c = (\sqrt{5}+1)a$. Потом построим прямоугольный треугольник с гипотенузой c и катетом a. Синус угла против катета a будет равен $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Отняв от него угол 15°, получим искомый угол 3°.

З а м е ч а н и е. Теперь, имея угол 3°, мы сможем построить любой, кратный ему угол.

Задача 16.

С помощью циркуля и линейки разделите угол 54° на три равные части.

И д е я. Построить угол 18°.
У к а з а н и е. Вычислить $\sin 18^\circ$.
У к а з а н и е. Смотри предыдущую задачу.

Р е ш е н и е. Проведём внутри исходного угла два луча, составляющие со сторонами угла 18° (см. пред. задачу). Эти лучи разделят угол на три равные части.

Задача 17.

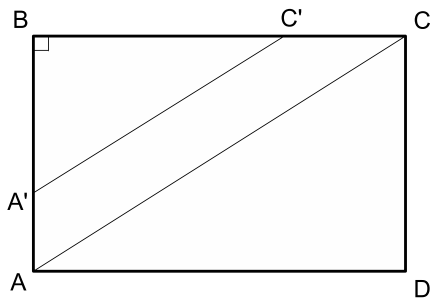
Провести прямую, параллельную диагонали и пересекающую две смежные стороны данного прямоугольника так, чтобы его площадь разделилась в отношении $1:3$.

И д е я. Использовать подобие.
У к а з а н и е. Прямая отсекает треугольник, площадь которого в два раза меньше площади половины прямоугольника.
У к а з а н и е. Стороны получившегося треугольника относятся к сторонам прямоугольника как $1:\sqrt{2}$.

Р е ш е н и е. Пусть $A'C'$ – искомая прямая. Из условия следует, что

$$S_{A'BC'} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Из параллельности прямых AC и $A'C'$ следует подобие треугольников $A'BC'$ и ABC. Так как их площади относятся как $1:2$, то коэффициент подобия равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Пусть $AB = a, BC = b$, тогда $A'B = a/\sqrt{2}, BC' = b/\sqrt{2}$. Отрезок длины $a/\sqrt{2}$ можно получить, построив равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой a. Катеты такого треугольника будут иметь длину $a/\sqrt{2}$.

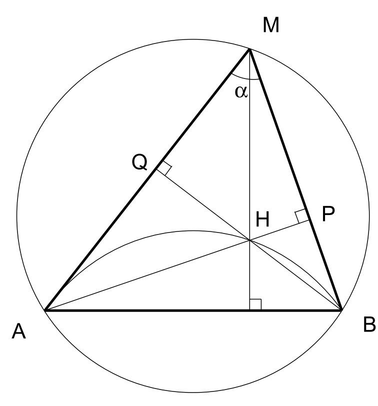


Аналогично строится отрезок $BC' = b/\sqrt{2}$. Прямая, проходящая через точки A' и C', будет искомой прямой, то есть будет делить площадь прямоугольника в отношении $1:3$.

5.2. Метод геометрических мест точек

Задача 1.

По данной дуге окружности "бегает"точка M. Хорда AB фиксирована. Какую кривую при этом пробегает в треугольнике AMB точка пересечения высот?



И д е я. Найти угол между высотами, опущенными из точек A и B.
У к а з а н и е. Угол треугольника при вершине M – постоянный.

Р е ш е н и е. Если точка M принадлежит дуге окружности, то угол AMB постоянен. Обозначим его через α. Пусть P и Q — основания высот, опущенных из точек A и B, а H — точка их пересечения.

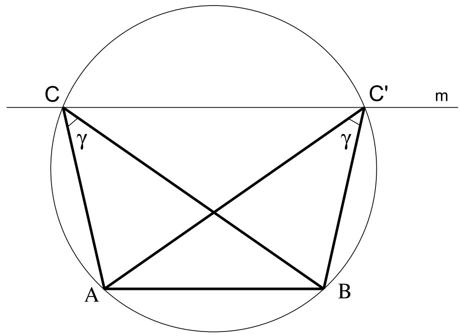
Из четырёхугольника $PHQM$ получим: $\angle PHQ = 180° - \alpha$.

Следовательно, $\angle AHB = \angle PHQ = 180° - \alpha$, как вертикальный. Значит, ГМТ пересечения высот – это дуга, опирающаяся на отрезок AB и содержащая вписанные углы с градусной мерой $180° - \alpha$.

Задача 2.

Построить треугольник по заданной стороне, противолежащему ей углу и проведённой к ней высоте.

Идея. Найти ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом.
Указание. Используя высоту, найти требуемый треугольник. Провести анализ: при каких соотношениях между данными задачи такой треугольник существует.



Решение. Пусть дана сторона AB, равная c, и противолежащий ей угол γ. Сначала построим дугу, из каждой точки которой отрезок AB виден под углом γ (см. замечание).

Для того чтобы найти точку C, проведём параллельную AB прямую m на расстоянии, равном высоте h.

В случае $h < \dfrac{c}{2\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}}$ эта прямая пересечёт окружность в двух точках C и C' и мы получим два симметричных треугольника ABC и ABC', обладающих заданными элементами.

Если $h = \dfrac{c}{2\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}}$, то треугольник будет единственным.

При $h > \dfrac{c}{2\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}}$ решений нет.

Замечание. Для того чтобы построить дугу, из каждой точки которой отрезок длины c виден под углом γ, достаточно описать окружность вокруг прямоугольного треугольника, построенного по катету $AB = c$ и острому углу $\angle ACB = \gamma$. Из всех точек дуги $\smile ACB$ отрезок AB будет виден под углом γ.

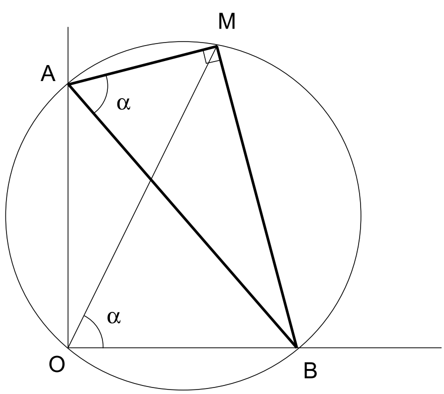
Задача 3.

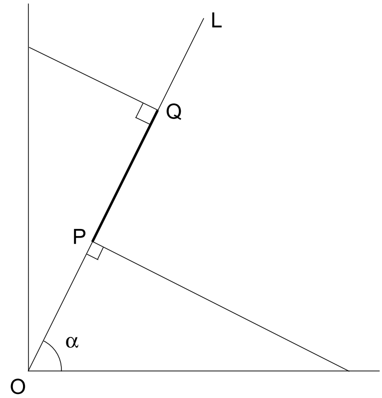
По сторонам прямого угла скользит гипотенуза прямоугольного треугольника. Найти геометрическое место вершин прямого угла этого треугольника.

Идея. Вокруг получившегося четырёхугольника можно описать окружность.
Указание. Вписанные углы, опирающиеся на одну хорду, равны.

Решение. Пусть ABM — заданный прямоугольный треугольник. Рассмотрим четырёхугольник $AMBO$. Так как у него $\angle M + \angle O = 180^\circ$, то вокруг него можно описать окружность.

Тогда $\angle MOB = \angle MAB = \alpha$, как опирающиеся на одну дугу, то есть отрезок MB виден из O под постоянным углом α.





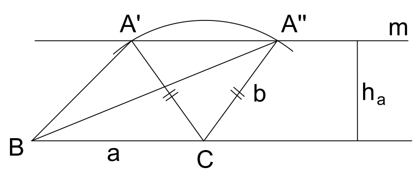
Искомое ГМТ – это отрезок PQ на луче OL, где P и Q – крайние положения точки M, когда гипотенуза треугольника оказывается на одной из сторон данного угла.

Задача 4.

Построить треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из этих сторон.

Идея. Найти ГМТ вершин треугольников с данными основанием и высотой.
Указание. ГМТ вершин треугольников с данными основанием и высотой – прямая, параллельная основанию и находящаяся от него на расстоянии, равном высоте.

Решение. Пусть даны стороны a, b и высота h_a. Построим отрезок $BC = a$ и проведём прямую $m \parallel BC$ на расстоянии, равном h_a.



Теперь из точки C раствором циркуля, равным b, сделаем засечки на прямой m.

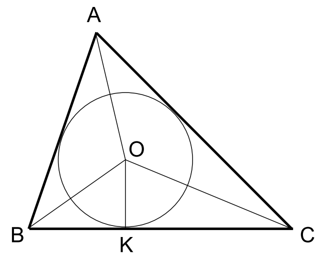
При $b > h_a$ мы получим две точки A' и A'' и, следовательно, два треугольника $A'BC$ и $A''BC$. Если $b = h_a$, то треугольник будет единственным. При $b < h_a$ решений нет.

Задача 5.

Построить треугольник по α, a, r.

Идея. Построить треугольник BOC, где $BC=a$, O – центр вписанной окружности.
Указание. В ΔBOC известны сторона $BC=a$, высота, равная r, и угол $\angle BOC=\dfrac{\pi+\alpha}{2}$.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC со стороной $BC=a$ и углом BAC, равным α, в который вписана окружность с центром в точке O радиуса r. Пусть $\angle ABC=\beta$, $\angle ACB=\gamma$, тогда $\beta+\gamma=\pi-\alpha$. Так как BO и CO – биссектрисы углов ABC и ACB соответственно, то



$$\angle BOC=\pi-\angle OBC-\angle OCB=\pi-\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi+\alpha}{2}.$$

В треугольнике BOC известны сторона $BC=a$, высота $OK=r$ и $\angle BOC=\dfrac{\pi+\alpha}{2}$.

Следовательно, $\triangle BOC$ можно построить по стороне, противолежащему ей углу и высоте, опущенной на эту сторону. Потом от отрезков OB и OC надо отложить углы, равные $\angle OBK$ и $\angle OCK$, стороны которых пересекутся в вершине A треугольника ABC.

Задача 6.

Построить треугольник по α, r, R.

Идея. Свести задачу к предыдущей.
Указание. Вписать в окружность радиуса R угол, равный α. Длина хорды, на которую он будет опираться, будет равна a.

Решение. Впишем в окружность радиуса R угол, равный α. Длина хорды, на которую он будет опираться, будет равна a. Таким образом, задача свелась к предыдущей.

Задача 7.

Построить треугольник по a, r, R.

Идея. Свести задачу к предыдущей.
Указание. Из произвольной точки окружности радиуса R раствором циркуля, равным a, отложить хорду. Угол, опирающийся на неё, равен α.

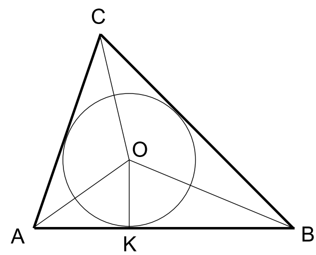
Решение. Рассмотрим окружность радиуса R. Из произвольной точки окружности раствором циркуля, равным a, отложим хорду. Угол, опирающийся на неё, равен α. Таким образом, задача свелась к предыдущей.

Задача 8.

Построить треугольник по α, β, r.

И д е я. Построить треугольник по двум углам $\alpha/2$, $\beta/2$ и высоте, равной r.

У к а з а н и е. Пусть O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. В треугольнике ABO известны два угла $\alpha/2$, $\beta/2$ и высота, равная r.



Р е ш е н и е. Пусть O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Мы можем построить треугольник ABO по двум углам $\alpha/2$, $\beta/2$ и высоте, равной r.

Для того чтобы построить точку C, достаточно отложить от отрезка AB углы, равные α и β.

Задача 9.

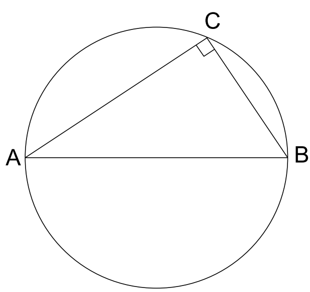
Построить треугольник по заданной стороне a, противолежащему ей углу α и проведённой к ней медиане m_a.

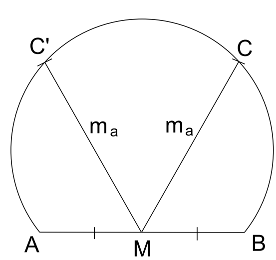
И д е я. Построить геометрическое место точек, из которых отрезок a виден под углом α.

У к а з а н и е. Рассмотреть три случая: угол α – прямой, острый, тупой. Провести анализ: при каких соотношениях на данные задачи есть решение.

Р е ш е н и е. Построим отрезок AB, равный a, и дугу, из любой точки которой отрезок виден под углом α. Обозначим через M середину отрезка AB. Рассмотрим следующие случаи.

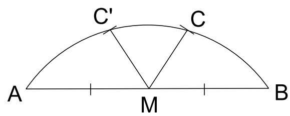
1) Если угол α прямой и $m_a \neq \dfrac{a}{2}$, то решений нет. При $m_a = \dfrac{a}{2}$ решений бесконечно много, так как любой треугольник с вершиной C, взятой на окружности с диаметром AB, удовлетворяет условиям задачи.





2) Пусть угол α острый. Сделаем засечки радиусом, равным m_a, из точки M на дуге, вмещающей угол α . При $\dfrac{a}{2} < m_a < \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ мы получим две точки C и C' таких, что оба треугольника ABC и ABC' обладают заданными элементами. При $m_a = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ точки C и C' совпадают.

3) Если угол α тупой, то засечки из M радиусом m_a на дуге, вмещающей угол α, дадут две точки C и C' при $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} < m_a < \frac{a}{2}$. При $m_a = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ точки C и C' совпадут. В противном случае решений не будет.

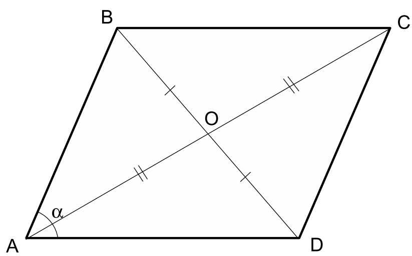


Задача 10.

Построить параллелограмм по углу и диагоналям.

Идея. Использовать результат предыдущей задачи.
Указание. Построить треугольник по углу, противолежащей ему диагонали и половине второй диагонали.

Решение. Пусть даны отрезки d_1, d_2 и $\angle\alpha$. Отрезок AO будет медианой в ΔABD. После того, как мы построим ΔABD по стороне $BD = d_2$, медиане $AO = d_1/2$ и углу α (см. пред. задачу) нам останется построить точку C.



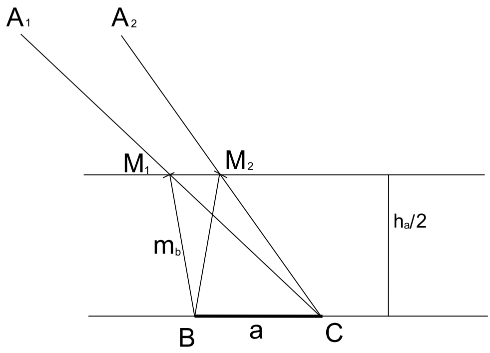
Для этого достаточно отложить отрезок $OC = d_1/2$ от точки O на прямой AO.

Задача 11.

Построить треугольник по стороне, высоте, опущенной на эту сторону, и медиане другой стороны.

Идея. Построить прямую, на которой лежит основание медианы.
Указание. Основание медианы лежит на прямой, параллельной известной стороне и отстоящей от неё на расстоянии, равном половине высоты.

Решение. Пусть даны a, h_a, m_b. Сначала построим отрезок BC длины a и параллельно ему прямую m на расстоянии, равном $h_a/2$. На этой прямой раствором циркуля, равным m_b, сделаем две засечки M_i, $i = 1; 2$. Отложив от точки M_i отрезок длины CM_i, получим точку A_i, отстоящую от прямой BC на расстоянии h_a.



Таким образом, мы получили два треугольника ΔA_1BC и ΔA_2BC с заданными элементами. Задача имеет решение при $m_b \geq h_a/2$.

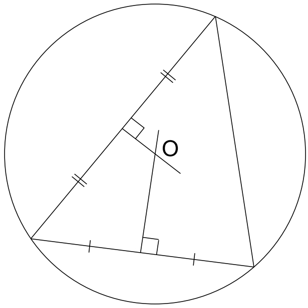
Замечание. В случае, когда $m_b = h_a/2$, точки A_1 и A_2 совпадают.

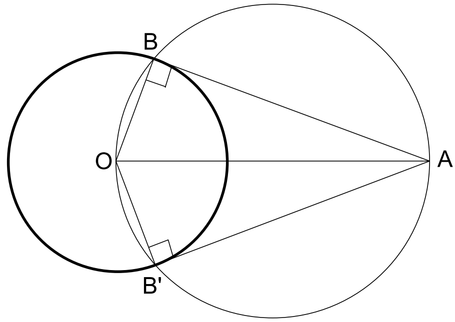
Задача 12.

Дана окружность и точка A, лежащая вне круга, ограниченного окружностью. Построить касательные к окружности, проходящие через эту точку.

Идея. Использовать свойство касательной.
Указание. Касательная перпендикулярна радиусу. На отрезке AO, как на диаметре, построить окружность ($O-$ центр окружности).

Решение. Для начала найдём центр окружности. Возьмём произвольно три точки на окружности и проведём серединные перпендикуляры к полученным отрезкам. Они пересекутся в точке O, которая является центром описанной вокруг построенного треугольника окружности.





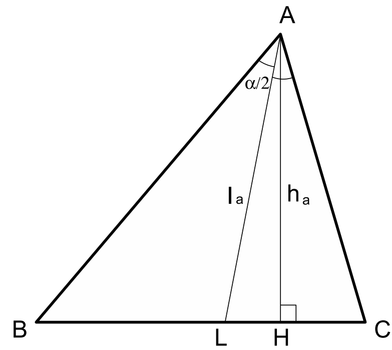
Теперь, когда найден центр окружности, построим на отрезке AO, как на диаметре, другую окружность. Получим точки B и B'. Углы $\angle ABO = \angle AB'O = 90°$, как опирающиеся на диаметр AO. Следовательно, отрезки AB и AB' перпендикулярны радиусам исходной окружности и являются искомыми касательными.

Задача 13.

Построить треугольник по заданным α, h_a, l_a.

Идея. Построить прямоугольный треугольник, у которого h_a – катет, l_a – гипотенуза.

Указание. Построить отрезок AH длины h_a и прямую, ему перпендикулярную и проходящую через точку H. На этой прямой сделать засечку радиусом l_a с центром в точке A.



Решение. Построим отрезок AH длины h_a и прямую, ему перпендикулярную и проходящую через точку H. На этой прямой сделаем засечку радиусом l_a с центром в точке A. Получим точку L. От отрезка AL отложим два луча под углом $\alpha/2$. Они пресекут прямую LH в точках B и C. Треугольник ABC (а также симметричный ему треугольник, у которого L лежит правее, чем H) обладает заданными элементами.

Задача имеет решение при $l_a \geq h_a$ и $\dfrac{\alpha}{2} + \arccos\dfrac{h_a}{l_a} < 90°$.

Задача 14.

Построить треугольник по следующим данным: $\alpha, a, b : c$.

Идея. Использовать окружность Аполлония.

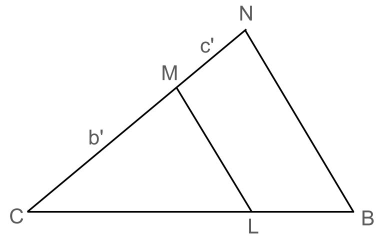
Указание. Вершина A лежит на пересечении окружности Аполлония, построенной для отрезка $BC = a$ и соотношения $b : c$, и дуги окружности, из точек которой отрезок BC виден под углом α.

Решение. Пусть даны угол α, сторона $BC = a$ и отрезки b' и c' такие, что $\dfrac{b'}{c'} = \dfrac{b}{c} \neq 1$ (в случае $b = c$ задача сводится к построению равнобедренного треугольника по основанию и противолежащему углу). Для определенности пусть $b > c$. Построим $BC = a$. Вершина A должна быть выбрана так, что $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{b}{c}$. Геометрическим местом таких точек является окружность, построенная на отрезке LL', как на диаметре, где точки L и L' лежат на прямой CB и

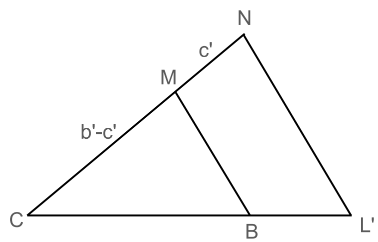
$$\frac{CL}{LB} = \frac{CL'}{L'B} = \frac{b}{c}.$$

Сначала построим точку $L \in CB$ такую, что $\dfrac{CL}{LB} = \dfrac{b}{c}$. Для этого из точки C под произвольным углом к отрезку CB проведём луч, на котором отложим отрезки $CM = b'$ и $MN = c'$.

Проведём через точку M прямую, параллельную NB. Она пересечёт отрезок CB в точке L, причём по теореме Фалеса $\dfrac{CL}{LB} = \dfrac{b'}{c'} = \dfrac{b}{c}$.

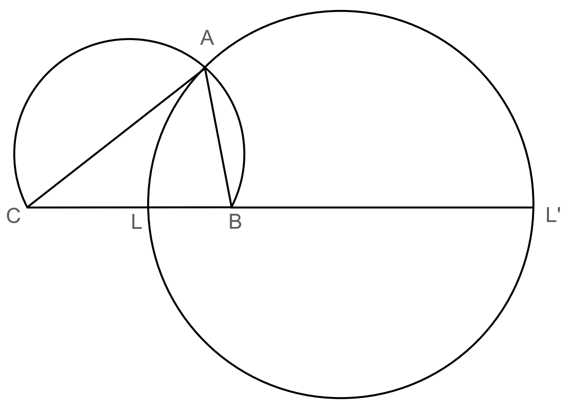


Теперь построим точку $L' \notin CB$ такую, что $\frac{CL'}{L'B} = \dfrac{b}{c}$. Для этого из точки C под произвольным углом к лучу CB проведём второй луч, на котором отложим отрезки $CM = b' - c'$ и $MN = c'$.



Проведём через точку N прямую, параллельную MB. Она пересечёт луч CB в точке L', причём по теореме Фалеса $\dfrac{CL'}{L'B} = \dfrac{b'}{c'} = \dfrac{b}{c}$.

Теперь построим на отрезке LL', как на диаметре, окружность Аполлония, а на отрезке CB – дугу, из точек которой отрезок CB виден под углом α. Они пересекутся в точке A.



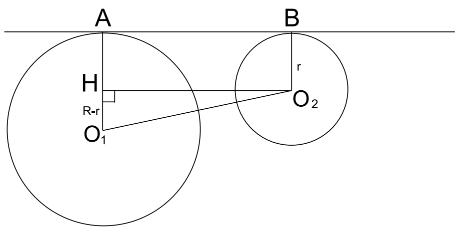
Таким образом, мы получили ΔABC, у которого $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$ и AC относится к AB как $b : c$.

Задача 15.

Провести общую внешнюю касательную к двум данным окружностям (то есть даны их центры и радиусы).

Идея. Предположить, что касательная уже проведена и проанализировать рисунок.
Указание. Предположить, что касательная уже проведена, провести радиусы в точки касаний и опустить перпендикуляр O_2H из центра меньшей окружности на радиус большей окружности O_1A.
Указание. Прямоугольный треугольник O_1O_2H легко построить по гипотенузе O_1O_2 и катету O_1H, равному $R-r$.

Решение. Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 имеют радиусы R и r такие, что $R > r$. Пусть A и B – точки касания окружностей с их общей касательной, а H – основание перпендикуляра, опущенного на AO_1 из точки O_2.



Для того чтобы построить точки A и B, надо сначала построить прямоугольный треугольник O_1O_2H по гипотенузе O_1O_2 и катету, равному $R-r$. Пересечение прямой O_1H с первой окружностью даст нам точку A. Прямая, параллельная O_1A, проведённая через точку O_2, пересечёт вторую окружность в точке B. Прямая AB (так же как и симметричная ей относительно линии центров) будет внешней касательной к двум данным окружностям.

Замечание. В случае, когда $R = r$, точки O_1 и H совпадают и точка A находится как точка пересечения перпендикуляра к линии центров, проведённого из точки O_1, с первой окружностью.

Задача 16.

На сторонах угла даны два отрезка AB и CD и точка M внутри угла. Найти геометрическое место точек N таких, что $S_{ABN} + S_{CDN} = S_{ABM} + S_{CDM}$.

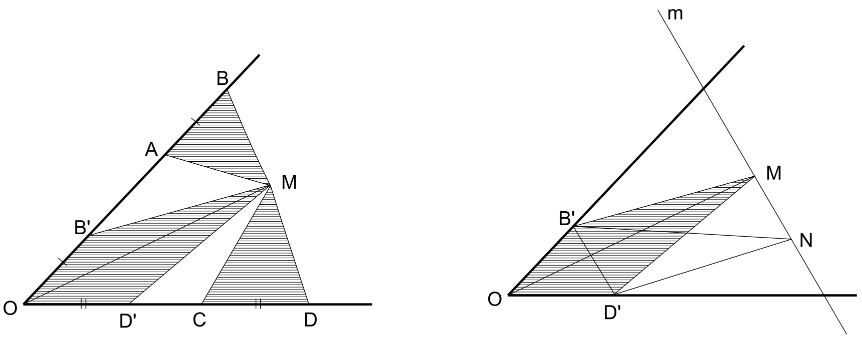
Идея. Сдвинуть отрезки AB и CD по соответствующим сторонам угла до вершины.
Указание. Пусть O – вершина угла. Взять точки B' и D' на сторонах угла OB и OD так, что $OB' = AB$, $OD' = CD$. Следовательно,

$$S_{ABM} = S_{OB'M}, \quad S_{CDM} = S_{OD'M} \quad \text{и} \quad S_{ABM} + S_{CDM} = S_{OB'MD'}.$$

Указание. Через точку M провести прямую $m \parallel B'D'$ и рассмотреть произвольную точку $N \in m$.

Решение. Сдвинем отрезки AB и CD по соответствующим сторонам угла до вершины. Получим $OB' = AB$, $OD' = CD$. Следовательно,

$$S_{ABM} = S_{OB'M}, \quad S_{CDM} = S_{OD'M} \quad \text{и} \quad S_{ABM} + S_{CDM} = S_{OB'MD'}.$$



Теперь через точку M проведём прямую $m \parallel B'D'$ и рассмотрим произвольную точку $N \in m$. Заметим, что

$$S_{OB'MD'} = S_{OB'D'} + S_{B'MD'} = S_{OB'D'} + S_{B'ND'} = S_{OB'ND'} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad S_{ABN} + S_{CDN} = S_{ABM} + S_{CDM}.$$

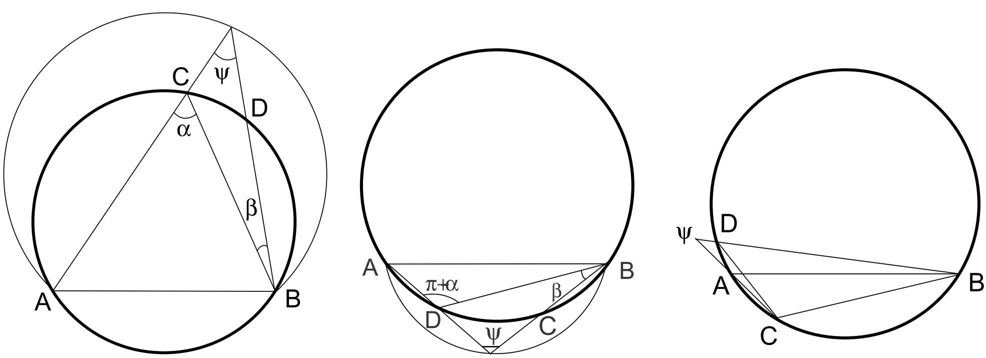
Следовательно, эта прямая m и есть искомое ГМТ.

Задача 17.

По окружности "бегает" дуга данной длины CD, хорда AB задана, $CD < AB$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых AC и BD.

Идея. Использовать свойство угла между секущими.
Указание. Рассмотреть три случая взаимного расположения точек A, B, C, D.

Решение. Рассмотрим три случая.



1) Пусть точки C и D обе лежат на большей дуге AB данной окружности. Тогда по свойству углов между секущими $\psi = \alpha - \beta$. Следовательно, в этом случае искомое ГМТ – это дуга, вмещающая угол $\psi = \alpha - \beta$.

2) Если точки C и D обе лежат на меньшей дуге данной окружности, то по свойству углов между секущими $\psi = (\pi - \alpha) - \beta$. Следовательно, в этом случае искомое ГМТ – это дуга, вмещающая угол $\psi = \pi - \alpha - \beta$.

3) Рассмотрим случай, когда одна из точек C или D лежит на большей дуге окружности, другая – на меньшей. Имеем

$$\psi = \angle BDC - \angle DBA = (\angle BDA - \angle CDA) - (\angle DBC - \angle ABC) = \alpha - \beta.$$

То есть мы получили один из уже рассмотренных случаев.

В результате получаем: искомое ГМТ – это две дуги, опирающиеся на отрезок AB и вмещающие углы $\alpha - \beta$ и $\pi - \alpha - \beta$.

Задача 18.

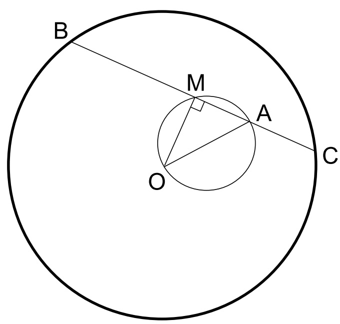
Через точку A внутри окружности проводятся всевозможные хорды. Найти геометрическое место середин этих хорд.

Идея. Соединить точку M – середину произвольной хорды BC, проходящей через точку A, с центром окружности O.

Указание. По свойству отрезка, соединяющего центр окружности с серединой хорды, $OM \perp BC$.

Решение. Проведём через точку A хорду BC. Пусть точка M – середина BC.

По свойству отрезка, соединяющего центр окружности с серединой хорды, $OM \perp BC$.



Следовательно, угол $\angle OMA$ прямой и геометрическим местом середин хорд, проходящих через точку A, будет окружность, построенная на отрезке AO как на диаметре.

Задача 19.

Найти на стороне угла точку, из которой данный отрезок AB, лежащий на другой стороне угла, виден под наибольшим углом.

Идея. Использовать свойства вписанного в окружность угла и угла между секущими.

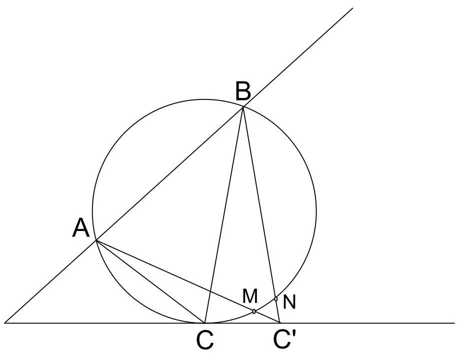
Указание. Провести через точки A и B окружность, касающуюся другой стороны угла.

Указание. Показать, что точка касания – это искомая точка.

Р е ш е н и е. Проведём через точки A и B окружность, касающуюся другой стороны угла. Обозначим через C точку касания и рассмотрим любую другую точку C' на этой стороне.

Так как угол между секущими равен полуразности соответствующих дуг, то

$$\angle AC'B = \frac{\smile AB}{2} - \frac{\smile MN}{2} < \angle ACB = \frac{\smile AB}{2}.$$



Следовательно, точка C – искомая точка.

З а м е ч а н и е. Точку C легко найти, используя свойство касательной и секущей, проведённых из одной точки.

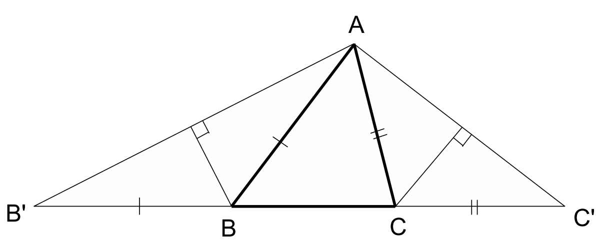
5.3. Метод симметрии и спрямления

Задача 1.

Построить треугольник, зная P, α и h_a.

И д е я. Развернуть треугольник на прямую.
У к а з а н и е. Пусть треугольник ABC уже построен. На прямой BC отложить отрезки $BB' = AB$ и $CC' = AC$.
У к а з а н и е. $\Delta AB'C'$ легко построить по стороне, противолежащему углу и высоте.

Р е ш е н и е. Пусть треугольник ABC уже построен. На прямой BC отложим отрезки $BB' = AB$ и $CC' = AC$.



Треугольники $BB'A$ и $CC'A$ равнобедренные с углами при основании соответственно $\frac{\beta}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$. Следовательно, у треугольника $AB'C'$ сторона $B'C' = P$ и $\angle B'AC' = \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$.

Таким образом, для того чтобы построить ΔABC, сначала нам надо построить $\Delta AB'C'$ по стороне, противолежащему углу и высоте.

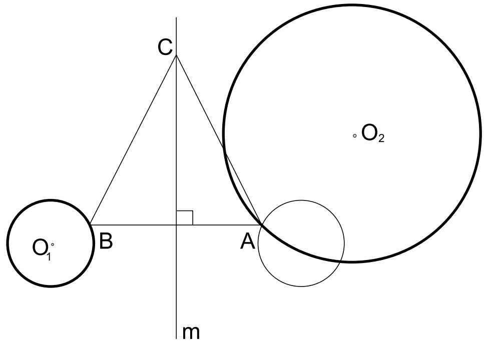
Серединные перпендикуляры к сторонам AB' и AC' пересекут $B'C'$ в точках B и C.

Задача 2.

Даны две окружности и между ними прямая. Начертить равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины были на окружностях, а одна из высот лежала на данной прямой.

И д е я. Отразить одну из окружностей относительно прямой.
У к а з а н и е. Точка пересечения окружностей – одна из вершин искомого треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть даны окружности с центрами O_1 и O_2 и прямая m. Отразим первую окружность относительно прямой. Пусть A – точка пересечения отражённой окружности со второй окружностью, а B – симметричная ей точка на первой окружности.



Теперь отметим на прямой m точку C так, чтобы $AC = AB$. Треугольник ΔABC будет равносторонним и его высота будет лежать на m.

В зависимости от числа точек пересечения окружностей задача может иметь одно, два или ни одного решения.

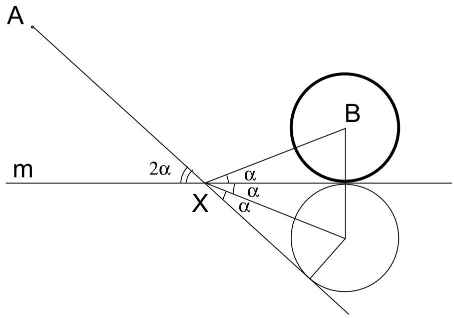
Задача 3.

Дана прямая m и две точки A и B по одну сторону от неё. Найти на m такую точку X, чтобы AX составлял с m угол, вдвое больший, чем BX.

И д е я. Построить окружность, касающуюся прямой m с центром в точке B.

Указание. Отразить построенную окружность относительно прямой m и провести к отражённой окружности касательную через точку A.

Решение. Построим окружность, касающуюся прямой m с центром в точке B. Отразим её относительно прямой m и проведём к отражённой окружности касательную через точку A.



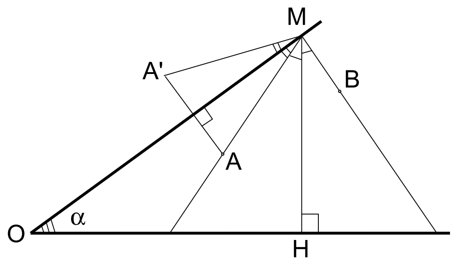
Точка пересечения этой касательной с прямой m и есть искомая точка (см. рисунок).

Задача 4.

Внутри угла даны точки A и B. Построить равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной стороне угла, вершина – на другой, а боковые стороны проходят через точки A и B.

Идея. Отразить точку A симметрично относительно прямой OM в точку A', где O – вершина угла, а M – вершина искомого равнобедренного треугольника.
Указание. Выразить $\angle A'MB$ через величину данного угла.

Решение. Пусть O – вершина данного угла α, MH – высота искомого треугольника. Отразим точку A относительно прямой OM, получим A'. Имеем $\angle A'MB = 2\angle OMH = 2\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - 2\alpha$.



Следовательно, для того чтобы определить вершину M, надо найти точку пересечения дуги, опирающейся на отрезок $A'B$ и вмещающей угол $\pi - 2\alpha$, со стороной данного угла.

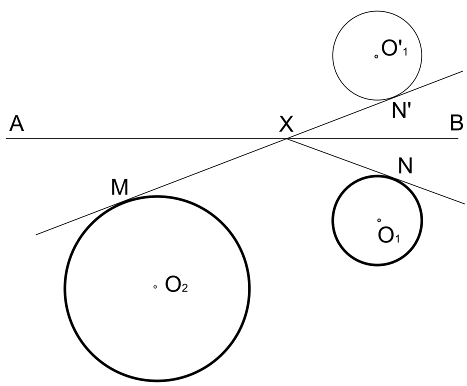
Задача 5.

Дана прямая AB и две окружности, лежащие по одну сторону от прямой. Найти на прямой AB точку, касательные из которой составляют с этой прямой равные углы.

Идея. Отразить одну из окружностей относительно прямой AB.
Указание. Провести внутреннюю касательную ко второй окружности и отражённой окружности.

Решение. Пусть даны окружности с центрами O_1 и O_2 и прямая AB. Рассмотрим отражение первой окружности относительно прямой AB. Внутренняя касательная к окружностям с центрами O_1' и O_2 пересечет прямую AB в точке X. Обозначим через M, N, N' точки касания окружностей с центрами O_2, O_1, O_1' с касательными, проведёнными из точки X.

Заметим, что $\angle NXB = \angle N'XB$, как симметричные, и $\angle MXA = \angle N'XB$, как вертикальные. Следовательно, точка X есть искомая точка.



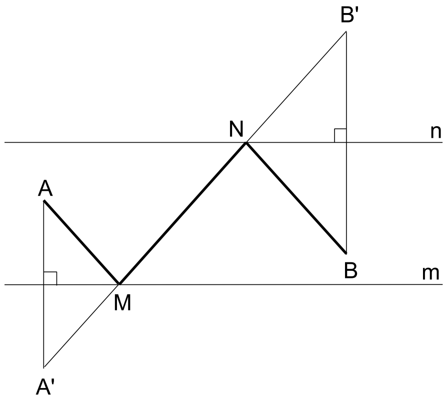
Задача 6.

Точки A и B расположены между параллельными прямыми m и n. Постройте точки $M \in m$, $N \in n$ так, чтобы длина ломаной $AMNB$ была наименьшей.

Идея. Отразить точки A и B относительно прямых m и n соответственно.
Указание. Соединить получившиеся точки A' и B'.

Решение. Рассмотрим A' – отражение относительно m точки A и B' – отражение относительно n точки B.

Ломаные $AMNB$ и $A'MNB'$ имеют одинаковую длину. Эта длина принимает своё минимальное значение в случае, когда точки M и N лежат на отрезке $A'B'$. Следовательно, искомые M и N есть точки пересечения прямых m и n с отрезком $A'B'$.

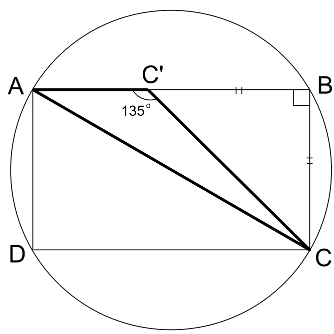


Задача 7.

В данную окружность вписать прямоугольник, зная разность основания и высоты.

Идея. Диагональ прямоугольника является диаметром окружности.
Указание. Отложить на большей стороне прямоугольника известную разность сторон.

Решение. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, вписанный в окружность. Отметим на AB точку C' такую, что $BC = BC'$. Треугольник $\Delta BCC'$ равнобедренный с углами при основании 45°.



Следовательно, $\angle AC'C = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ и треугольник $\Delta AC'C$ можно построить по сторонам AC (равна $2R$), AC' (равна данной в условии разности) и углу $\angle AC'C = 135^\circ$.

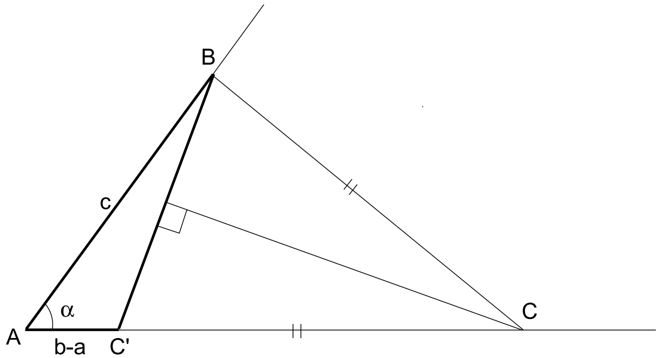
Точку B можно получить как точку пересечения прямой AC' с окружностью, а вершину D как точку, симметричную B относительно центра окружности.

Задача 8.

Построить треугольник по стороне, прилежащему углу и разности остальных сторон.

Идея. Предположить, что искомый треугольник построен, и проанализировать данные.
Указание. Отложить на большей из двух неизвестных сторон отрезок, равный меньшей стороне.

Решение. Пусть требуемый треугольник ABC построен по известной стороне $AB = c$, углу A, равному α, и разности двух других сторон, равной $b-a$. Отложим на стороне CA отрезок CC', равный CB. Тогда $AC' = b - a$. Треугольник ABC' легко построить по сторонам c, $b - a$ и углу между ними α.



Так как треугольник BCC' равнобедренный, то точку C можно найти как точку пересечения серединного перпендикуляра к BC' с прямой AC'.

Задача 9.

Построить четырёхугольник $ABCD$, зная его стороны, если диагональ AC делит угол A пополам.

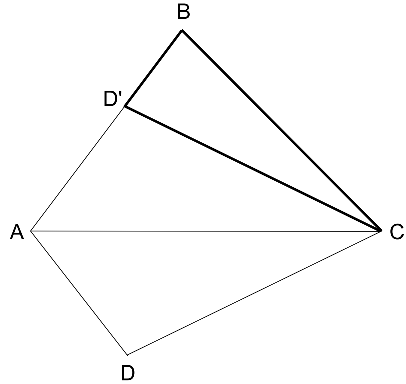
Идея. Отразить вершину D относительно прямой AC.
Указание. Треугольник BCD' легко построить по трём сторонам.

Решение. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Так как $\angle CAD = \angle CAB$, то D' (отражение точки D относительно AC) будет лежать на прямой AB. В треугольнике BCD' стороны

$$BC, \quad CD' = CD, \quad BD' = AB - AD$$

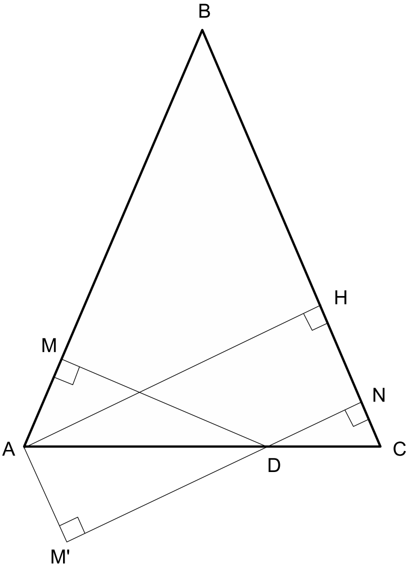
выражаются через данные стороны четырёхугольника. Следовательно, мы можем построить его по трём сторонам.

Вершину A можно получить, отложив от B на прямой BD' отрезок, равный BA. Вершина D есть отражение D' относительно прямой AC.



Задача 10.

Найти сумму перпендикуляров, опущенных на стороны равнобедренного треугольника из точки, взятой на основании.



И д е я. Отразить основание одного из перпендикуляров относительно основания.
У к а з а н и е. Показать, что искомая сумма равна высоте, проведённой к боковой стороне треугольника.

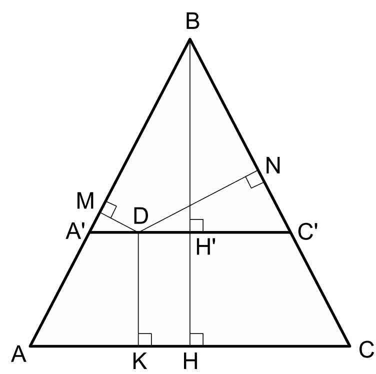
Р е ш е н и е. Пусть DM и DN – перпендикуляры, опущенные на боковые стороны из точки D. Рассмотрим M' – отражение точки M относительно основания AC. Из равенства углов $\angle M'AD = \angle MAD = \angle NCD$ следует параллельность прямых $AM' \parallel BC$.

Так как $M'D$ и DN перпендикулярны параллельным прямым, то точки M', D и N лежат на одной прямой и их сумма равна расстоянию между этими прямыми.

В результате сумма $DM + DN = DM' + DN$ равна расстоянию от точки A до стороны BC, то есть высоте, проведённой к боковой стороне треугольника.

Задача 11.

Найти сумму перпендикуляров, опущенных из точки, взятой внутри равностороннего треугольника, на его стороны.



И д е я. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.
У к а з а н и е. Провести через точку, из которой опущены перпендикуляры, прямую, параллельную одной из сторон треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть дан равносторонний треугольник ΔABC и точка D внутри него. Обозначим через M, N, K основания перпендикуляров, опущенных из D на стороны AB, BC, AC.

Проведём через D отрезок $A'C' \parallel AC$. Согласно утверждению предыдущей задачи,

$$DM + DN = BH',$$

где BH' – одна из равных высот равностороннего треугольника $\Delta A'BC'$.

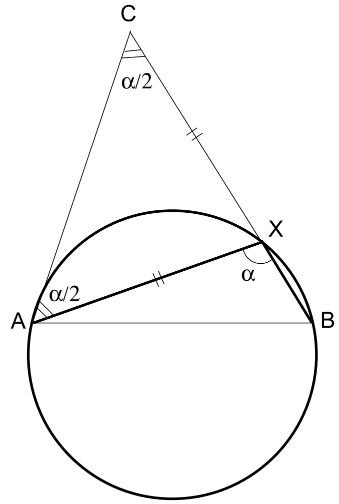
Так как $DK = H'H$, то

$$DM + DN + DK = BH' + H'H = BH,$$

то есть сумма перпендикуляров из точки внутри равностороннего треугольника равна высоте исходного треугольника.

Задача 12.

На окружности даны точки A и B. Отыскать на ней точку X такую, что $AX+BX=a$, где a – заданный отрезок.



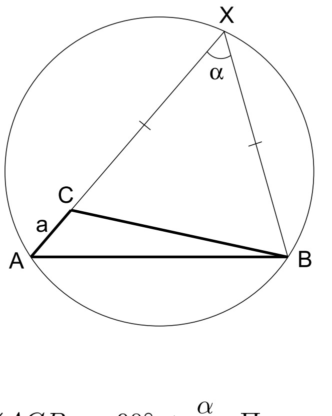
Идея. Пусть задача решена и точка X уже найдена. Отложить на прямой BX отрезок $XC=AX$.
Указание. Треугольник ABC легко построить.

Решение. Пусть задача решена и точка X уже найдена. Отложим отрезок $XC = AX$ на прямой BX. Заметим, что угол $\angle AXB = \alpha$ известен как угол, опирающийся на известную дугу. Тогда в равнобедренном треугольнике ΔAXC углы при основании равны $\dfrac{\alpha}{2}$.

Следовательно, треугольник ΔABC мы можем построить по основанию AB, противолежащему углу $\dfrac{\alpha}{2}$ и боковой стороне, равной a. Его сторона BC пересечёт окружность в искомой точке X.

Задача 13.

На окружности даны точки A и B. Отыскать на ней точку X такую, что $AX-BX=a$, где a – заданный отрезок.



Идея. Пусть задача решена и точка X уже найдена. Отложить на отрезке AX отрезок $XC=BX$.
Указание. Треугольник ABC легко построить.

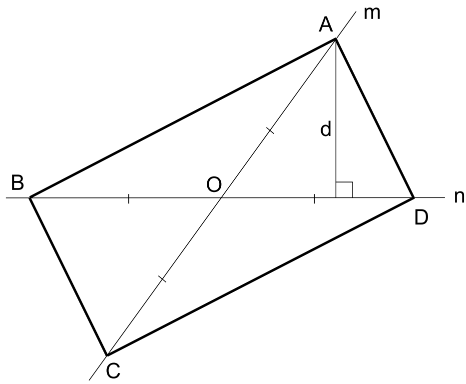
Решение. Пусть задача решена и точка X уже найдена. Отложим на отрезке AX отрезок $XC = BX$. В равнобедренном треугольнике BXC углы при основании равны $90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$, где угол $\alpha = \angle AXB$ известен как угол, опирающийся на известную дугу.

Рассмотрим треугольник ABC. У него известны основание AB, сторона $AC = a$ и угол $\angle ACB = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$. Построив треугольник ABC и продолжив его сторону AC до пересечения с окружностью, мы получим искомую точку X.

Задача 14.

Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных пересекающихся прямых равна заданному отрезку.

Идея. Использовать одну из предыдущих задач про сумму расстояний от точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон.
Указание. Отложить от точки пересечения прямых во все четыре стороны отрезки, равные заданному отрезку.
Указание. Соединить последовательно получившиеся четыре точки на прямых и показать, что получившийся прямоугольник – искомое ГМТ.



Решение. Пусть прямые m и n пересекаются в точке O. Отметим на прямой m точку A, находящуюся на заданном расстоянии d от прямой n. Отложим отрезки, равные OA, на других лучах, выходящих из O. Получим четыре точки A, B, C и D, которые являются вершинами четырёх равнобедренных треугольников с общей вершиной O.

Согласно одной из предыдущих задач, сумма расстояний от любой точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон равна высоте, проведённой к боковой стороне. Следовательно, искомое ГМТ есть четыре отрезка, являющиеся сторонами прямоугольника $ABCD$.

Задача 15.

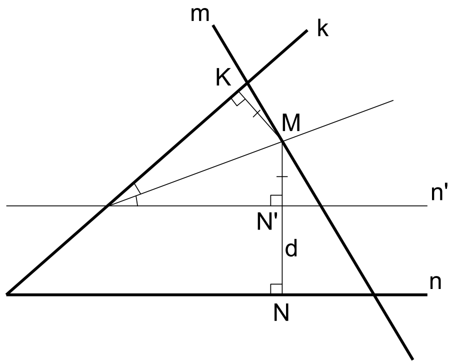
На данной прямой найти такую точку, что разность расстояний от неё до сторон данного угла равна данному отрезку.

Идея. Провести прямую, параллельную одной из сторон угла и отстоящую от неё на расстоянии, равном длине данного в условии задачи отрезка.
Указание. Показать, что биссектриса нового угла пересечёт данную прямую в искомой точке.

Решение. Пусть дана прямая m и угол со сторонами k и n. Построим прямую $n' \parallel n$ на расстоянии d, равном длине данного в условии задачи отрезка. Биссектриса угла со сторонами k и n' пересечёт прямую m в искомой точке M.

Действительно, если через K, N и N' обозначить основания перпендикуляров на соответствующих прямых, то

$$MN - MK = MN' + N'N - MK = N'N = d.$$



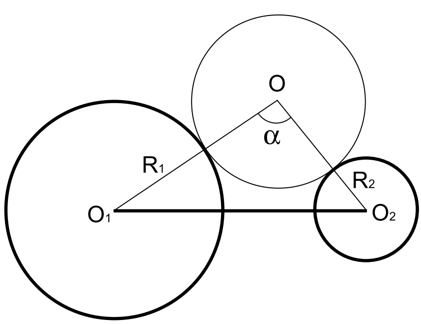
Задача 16.

Провести окружность, касающуюся двух данных окружностей, так, чтобы радиусы, проведённые из центра искомой окружности к точкам касания, образовывали данный угол.

Идея. Предположить, что искомая окружность уже построена и проанализировать, что известно.
Указание. В треугольнике, вершинами которого являются центры трёх окружностей, известна сторона, угол против этой стороны и разность двух других сторон.
Указание. Использовать одну из предыдущих задач.

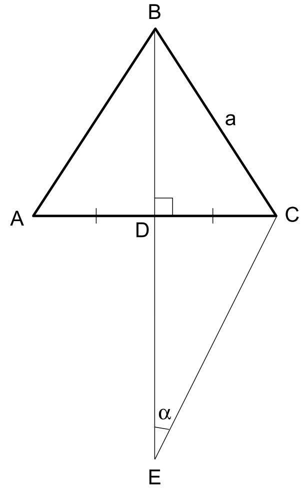
Решение. Рассмотрим окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2. Пусть искомая окружность с центром O уже построена.

В треугольнике O_1O_2O известны основание O_1O_2, противолежащий угол α и разность сторон $O_1O - O_2O = R_1 - R_2$. Для того чтобы построить этот треугольник, надо на отрезке O_1O_2 построить дугу, вмещающую угол α, а на этой дуге найти точку O такую, что разность получившихся хорд будет равна $R_1 - R_2$. А такую задачу мы умеем решать (см. одну из предыдущих задач).



Задача 17.

Построить равнобедренный треугольник, зная его боковую сторону a и сумму высоты с основанием s.



И д е я. Отложить от основания высоты BD на её продолжении отрезок DE, равный основанию AC треугольника.
У к а з а н и е. Треугольник BCE легко построить по двум сторонам и углу, равному $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

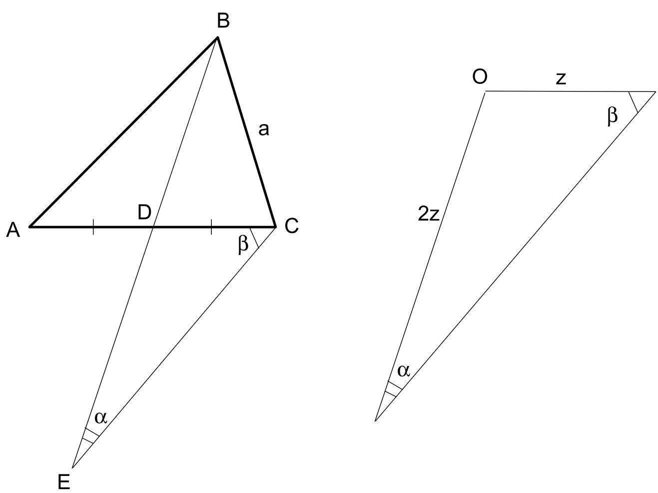
Р е ш е н и е. Пусть в ΔABC с высотой BD стороны $AB = BC = a$, $BD + AC = s$. Отложим на продолжении BD отрезок $DE = AC$. Так как $DE = 2DC$, то $\operatorname{tg}\angle DEC = 1/2$.

Для того чтобы построить треугольник ABC, сначала построим отрезок $BE = s$, отложим от него угол $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$, потом на стороне этого угла сделаем засечку из точки B радиусом a. Так мы получим точку C. Вершину A можно получить как отражение точки C относительно прямой BE.

Задача 18.

Построить треугольник по a, $m_b + b$ и $\angle(m_b, b)$.

И д е я. Отложить от основания медианы BD на её продолжении отрезок DE, равный стороне AC треугольника.
У к а з а н и е. Зная угол $\angle(m_b, b)$, легко построить угол DEC.
У к а з а н и е. Треугольник BCE легко построить по двум сторонам и углу BEC.



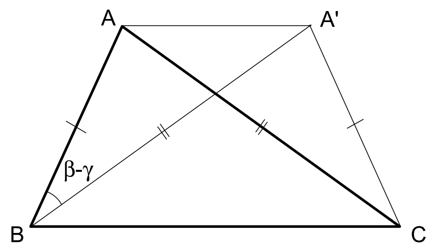
Р е ш е н и е. Пусть в треугольнике ABC с медианой BD сторона $BC = a$, $BD + AC = s$. Отложим на продолжении BD отрезок $DE = AC$.

Определим углы $\alpha = \angle DEC$ и $\beta = \angle DCE$ в треугольнике DEC. Для этого на одной стороне угла $\angle O$, равного $180° - \angle(m_b, b)$, отложим отрезок произвольной длины z, на другой – отрезок длины $2z$. Углы напротив сторон длины z и $2z$ будут равны α и β.

Итак, для построения треугольника ABC сначала надо построить отрезок $BE = s$, потом отложить от него угол α и на стороне этого угла сделать засечку из точки B радиусом a. Из полученной точки C под углом β к EC проведём луч. Он пересечёт BE в точке D. Отложив $AD = DC$, найдём вершину A.

Задача 19.

Построить треугольник по b, c и $\beta - \gamma$.



И д е я. Рассмотреть треугольник, симметричный данному, с общей третьей стороной.
У к а з а н и е. Пусть в ΔABC $AC = b$, $AB = c$. Рассмотреть $\Delta A'BC$, симметричный исходному, со сторонами $A'B = b$, $A'C = c$.
У к а з а н и е. Треугольник $AA'B$ легко построить по двум сторонам и углу между ними.

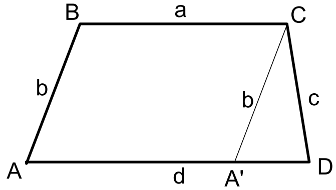
Р е ш е н и е. Пусть в ΔABC $AC = b$, $AB = c$. Рассмотрим $\Delta A'BC$, симметричный исходному, со сторонами $A'B = b$, $A'C = c$.

В треугольнике $\Delta AA'B$ $AB = c$, $A'B = b$ и $\angle ABA' = \beta - \gamma$.

Следовательно, треугольник $AA'B$ мы можем построить по двум сторонам и углу между ними. Для того чтобы построить вершину C, проведём через B прямую параллельно AA' и отложим на ней C так, что $AC = b$.

5.4. Метод параллельного переноса

Задача 1.



Построить трапецию по четырём сторонам.

И д е я. Произвести параллельный перенос боковой стороны трапеции.
У к а з а н и е. После параллельного переноса боковой стороны трапеции получится треугольник, который легко построить по трём сторонам.

Р е ш е н и е. Пусть даны стороны трапеции $BC = a$, $AB = b$, $CD = c$, $AD = d$. Перенесём боковую сторону b вдоль основания a, получим параллелограмм $ABCA'$.

Отрезок $A'D = d - a$. Следовательно, треугольник $A'CD$ можно построить по трём сторонам. Для того, чтобы получить точки A и B, достаточно перенести отрезок $A'C$ вдоль прямой $A'D$ на расстояние, равное a.

Задача 2.

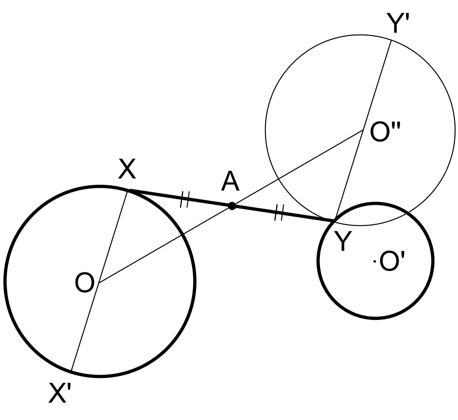
Между двумя окружностями провести отрезок, делящийся пополам в данной точке A.

Идея. Предположить, что искомый отрезок построен, и воспользоваться параллельным переносом.

Указание. Рассмотреть окружности с центрами O и O'. Пусть XY – искомый отрезок. Продолжить XO до X' и перенести первую окружность так, чтобы X' совместилась с Y.

Указание. Так как $XY'YX'$ – параллелограмм с диагональю XY, то точка A – её середина.

Решение. Рассмотрим окружности с центрами O и O'. Пусть XY – искомый отрезок. Продолжим XO до X' и перенесём первую окружность так, чтобы X' совместилась с Y. Получим параллелограмм $XY'YX'$ с диагональю XY, серединой которой будет точка A.



Для решения задачи надо перенести первую окружность вдоль прямой OA на расстояние $OO'' = 2OA$. Проведя прямую через полученную точку пересечения Y и точку A, найдём точку X.

Задача может иметь одно, два или ни одного решения.

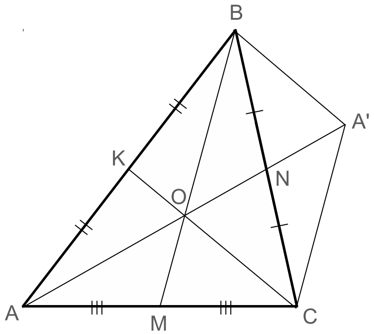
Задача 3.

Построить треугольник, зная m_a, m_c и $\angle(m_b, a)$.

Идея. Предположить, что треугольник построен, и провести дополнительное построение.

Указание. Пусть даны медианы $AN = m_a$ и $CK = m_c$ треугольника ABC и угол $MBC = \alpha$. Пусть медианы пересекаются в точке O. Достроить ΔBOC до параллелограмма $BOCA'$.
Указание. Сначала построить треугольник $\Delta OBA'$. Для этого на отрезке $OA' = \frac{2}{3}m_a$ отметить середину N и получить вершину B как точку пересечения двух дуг: дуги, опирающейся на отрезок ON и вмещающей угол α, и дуги, проведённой из точки A' радиусом $\frac{2}{3}m_c$.

Решение. Пусть даны медианы $AN = m_a$ и $CK = m_c$ треугольника ABC и угол $MBC = \alpha$. Пусть медианы пересекаются в точке O. Достроим ΔBOC до параллелограмма $BOCA'$.



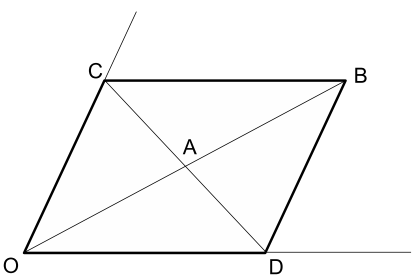
Общая последовательность действий такова.

1) Сначала построим треугольник $\Delta OBA'$. Для этого на отрезке $OA' = \frac{2}{3}m_a$ отметим середину N и получим вершину B как точку пересечения двух дуг: дуги, опирающейся на отрезок ON и вмещающей угол α, и дуги, проведённой из точки A' радиусом $\frac{2}{3}m_c$.

2) Вершину A получим, отложив на прямой OA' отрезок $OA = OA'$.

3) Вершину C получим, отложив на прямой BN отрезок $NC = NB$.

Задача 4.



Через точку A внутри угла провести прямую так, чтобы отрезок, заключённый между сторонами, делился точкой A пополам.

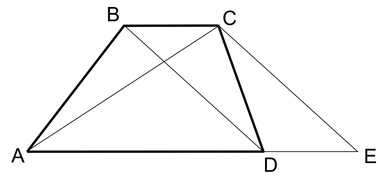
Идея. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.
Указание. Отложить на прямой OA отрезок $AB = OA$. Через точку B провести прямые, параллельные сторонам угла.

Решение. Отложим на прямой OA отрезок $AB = OA$. Через точку B проведём прямые, параллельные сторонам угла. Получим параллелограмм $OCBD$.

Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то $CA = AD$. Следовательно, CD – искомая прямая.

Задача 5.

Построить трапецию, зная диагонали, угол между ними и одну из боковых сторон.



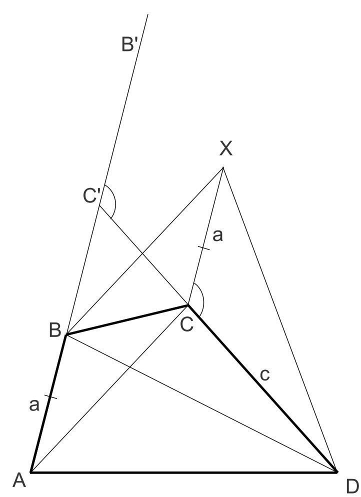
Идея. Использовать параллельный перенос одной из диагоналей трапеции.
Указание. Пусть даны длины диагоналей AC и BD и длина боковой стороны CD. Перенести диагональ BD в отрезок CE вдоль основания BC.
Указание. Треугольник ACE легко построить по двум сторонам и углу между ними.

Решение. Пусть даны длины диагоналей AC и BD и длина боковой стороны CD. Перенесём диагональ BD в отрезок CE вдоль основания BC.

В треугольнике ACE боковые стороны равны диагоналям трапеции, а угол $\angle ACE$ равен углу между диагоналями. Следовательно, этот треугольник мы можем построить. Для того чтобы найти вершину D, надо сделать засечку циркулем из C на прямой AE радиусом, равным длине боковой стороны CD. После этого, достроив ΔCDE до параллелограмма, получим вершину B.

Задача 6.

Построить четырёхугольник, зная две диагонали, две противолежащие стороны и угол между ними.



Идея. Использовать параллельный перенос одной из диагоналей четырёхугольника.
Указание. Пусть даны стороны $AB = a$, $CD = c$, угол между ними $\angle AC'D = \alpha$ и две диагонали четырёхугольника. Тогда $\angle B'C'D = \pi - \alpha$. Достроить ΔABC до параллелограмма $ABXC$.
Указание. ΔXCD можно построить по двум сторонам и углу между ними.
Указание. ΔBDX легко построить по трём сторонам.

Решение. Пусть даны стороны $AB = a$, $CD = c$, угол между ними $\angle AC'D = \alpha$ и две диагонали четырёхугольника. Тогда $\angle B'C'D = \pi - \alpha$. Достроим ΔABC до параллелограмма $ABXC$.

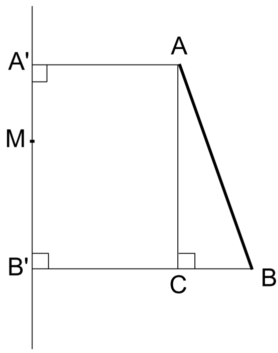
Тогда $CX = a$ и $\angle XCD = \angle B'C'D = \pi - \alpha$. Следовательно, ΔXCD мы можем построить по двум сторонам и углу между ними. Поскольку отрезки BX и BD равны диагоналям трапеции, мы можем построить ΔBDX по трём сторонам. Так получим вершину B. Достроив ΔBCX до параллелограмма, найдём вершину A.

Задача 7.

Через данную точку M провести прямую так, чтобы разность расстояний до неё от двух данных точек A и B была равна данной длине.

Идея. Предположить, что прямая проведена, опустить на неё перпендикуляры из данных точек и использовать параллельный перенос.
Указание. Пусть A' и B' – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на искомую прямую. Перенести отрезок $A'B'$ параллельно в отрезок AC.
Указание. Прямоугольный треугольник ABC легко построить по гипотенузе AB и катету CB, равному данной в условии задачи разности расстояний.

Решение. Пусть A' и B' – основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на искомую прямую. Перенесём отрезок $A'B'$ параллельно в отрезок AC.



Треугольник ABC является прямоугольным с известной гипотенузой AB и катетом CB, равным данной в условии задачи разности расстояний.

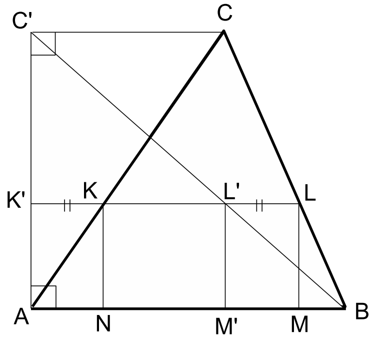
Для того чтобы построить нужную прямую, надо сначала построить треугольник ΔABC по катету и гипотенузе, а потом провести через точку M прямую, параллельную отрезку AC.

Задача 8.

В данный остроугольный треугольник вписать прямоугольник с наименьшей диагональю (одна сторона прямоугольника лежит на основании треугольника).

Идея. Вершину треугольника перенести параллельно основанию так, чтобы получился прямоугольный треугольник.
Указание. Пусть в треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$. Перенести вершину C параллельно AB так, чтобы треугольник ABC' был прямоугольным. Так как $LL' = KK'$, то прямоугольник $KLMN$ при этом перейдёт в равный ему прямоугольник $K'L'M'A$.
Указание. Диагональ прямоугольника $K'L'M'A$ будет принимать минимальное значение в случае, когда $AL' \perp BC'$.

Решение. Пусть в треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$. Перенесём вершину C параллельно AB так, чтобы треугольник ABC' был прямоугольным. Так как $LL' = KK'$, то прямоугольник $KLMN$ при этом перейдёт в равный ему прямоугольник $K'L'M'A$.



Диагональ прямоугольника $K'L'M'A$ будет принимать минимальное значение в случае, когда $AL' \perp BC'$. То есть в $\Delta ABC'$ надо провести $AL' \perp BC'$ и построить прямоугольник $K'L'M'A$ с такой диагональю. Этот прямоугольник и будет искомым прямоугольником.

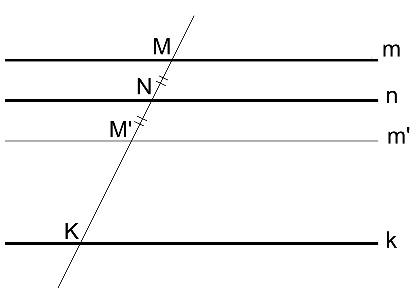
Осталось совершить обратный параллельный перенос прямоугольника вдоль AB на расстояние $L'L$.

Задача 9.

Даны три параллельные прямые. Провести через данную точку секущую так, чтобы разность отрезков между параллелями была равна заданной величине.

Идея. Использовать методы симметрии и параллельного переноса.
Указание. Пусть даны прямые $m \parallel n \parallel k$, точка A и отрезок d, равный разности отрезков между параллелями. Провести прямую m', симметричную прямой m относительно n.
Указание. Пусть секущая пересекает параллельные прямые в точках M, N, M', K. Из равенства отрезков $MN = M'N$ следует, что $KM' = KN - MN$, то есть является разностью отрезков секущей.

Решение. Пусть даны прямые $m \parallel n \parallel k$, точка A и отрезок d, равный разности отрезков между параллелями.



Проведём прямую m', симметричную прямой m относительно n. Пусть секущая пересекает параллельные прямые в точках M, N, M', K. Из равенства отрезков $MN = M'N$ следует, что $KM' = KN - MN$, то есть является разностью отрезков секущей.

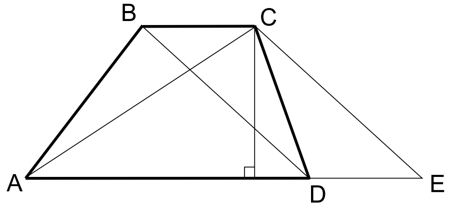
В целом построение выглядит так: сначала строим m', потом из произвольной точки K прямой k делаем засечку на m' радиусом, равным d. Так мы получим точку M'. Осталось провести через данную точку A прямую, параллельную построенной секущей.

Задача 10.

Построить трапецию $ABCD$, зная боковую сторону CD, угол между диагоналями, расстояние между параллельными сторонами и отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Идея. Пусть трапеция построена. Перенести диагональ BD в отрезок CE параллельно вдоль основания BC.
Указание. Треугольник ACE можно построить по основанию, высоте и известному углу.

Решение. Пусть нам дана высота трапеции, длина средней линии и длина боковой стороны CD. Перенесём диагональ BD в отрезок CE параллельно вдоль основания BC.



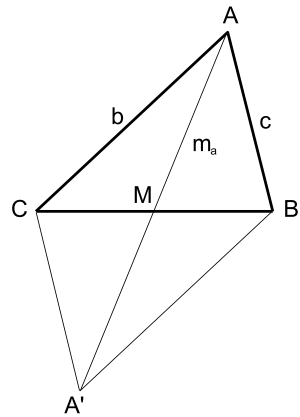
Рассмотрим треугольник ACE. Так как средняя линия трапеции равна полусумме оснований, то отрезок AE равен двум средним линиям, угол $\angle ACE$ равен углу между диагоналями, а высота ΔACE равна высоте трапеции. Следовательно, этот треугольник мы можем построить по основанию, высоте и известному углу. Для того чтобы найти вершину D, надо сделать засечку циркулем из C на прямой AE радиусом, равным длине боковой стороны CD. После этого, достроив ΔCDE до параллелограмма, получим вершину B.

Задача 11.

Построить треугольник по b, c и m_a.

Идея. Пусть треугольник построен. Достроить его до параллелограмма.

Указание. Рассмотрим треугольник ABC с данными сторонами $AC = b$, $AB = c$ и медианой $AM = m_a$. Отложить точку A' на прямой AM так, что $MA' = AM$.
Указание. Построить $\Delta ABA'$ по трём известным сторонам.



Решение. Рассмотрим треугольник ABC с данными сторонами $AC = b$, $AB = c$ и медианой $AM = m_a$.

Отложим точку A' на прямой AM так, что $MA' = AM$. Четырёхугольник $ABA'C$ будет параллелограммом со сторонами, равными b и c, и диагональю $AA' = 2m_a$.

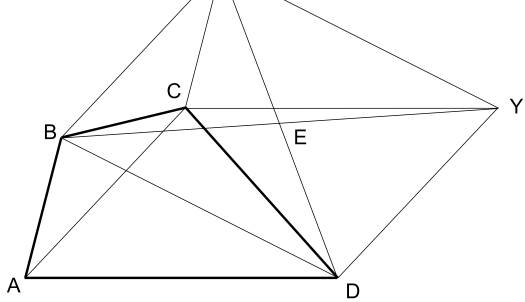
Для построения ΔABC надо сначала построить $\Delta ABA'$ по трём известным сторонам, а потом, достроив его до параллелограмма, получить вершину C.

Задача 12.

Построить четырёхугольник, зная его стороны и отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон.

Идея. Использовать вспомогательный параллелограмм, стороны которого параллельны и равны диагоналям искомого четырёхугольника.
Указание. Пусть $ABCD$ – искомый четырёхугольник, а точки X и Y взяты таким образом, что четырёхугольники $ABXC$ и $ACYD$ являются параллелограммами. Цель – построить вспомогательный параллелограмм $BXYD$, а потом восстановить четырёхугольник $ABCD$.
Указание. Построить ΔBCY по трём сторонам.
Указание. Построить ΔCXD по медиане и двум сторонам.

Решение. Пусть $ABCD$ – искомый четырёхугольник, а точки X и Y взяты таким образом, что четырёхугольники $ABXC$ и $ACYD$ являются параллелограммами. Наша цель – построить вспомогательный параллелограмм $BXYD$, а потом восстановить четырёхугольник $ABCD$.



В теоретической части было показано, что диагонали параллелограмма $BXYD$ вдвое больше средних линий исходного четырёхугольника.

Рассмотрим ΔBCY. У него стороны BC и CY $(CY = AD)$ равны сторонам исходного четырёхугольника, а сторона BY вдвое больше отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD. Следовательно, ΔBCY мы можем построить по трём сторонам.

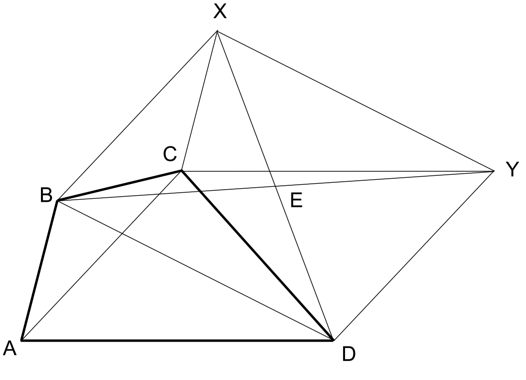
Теперь построим точки X и D. Обозначим через E середину стороны BY и рассмотрим ΔCXD. Точки C и E уже построены. То есть в ΔCXD дана медиана и стороны CX $(CX = AB)$ и CD, которые равны данным в условии задачи сторонам четырёхугольника. Построив ΔCXD по медиане и двум сторонам (см. пред. задачу), мы определим точки X и D. А достроив ΔBCX до параллелограмма, получим вершину A.

Задача 13.

Построить четырёхугольник, зная четыре его стороны и угол между двумя противоположными сторонами.

Идея. Использовать вспомогательный параллелограмм, стороны которого параллельны и равны диагоналям искомого четырёхугольника.
Указание. Построить сначала вспомогательный параллелограмм $BXYD$, стороны которого параллельны и равны диагоналям искомого четырёхугольника $ABCD$.
Указание. Построить ΔCXD по двум сторонам и углу между ними.
Указание. Построить ΔBCY по медиане CE и двум сторонам BC и CY.

Решение. Построим сначала вспомогательный параллелограмм $BXYD$, стороны которого параллельны и равны диагоналям искомого четырёхугольника $ABCD$.



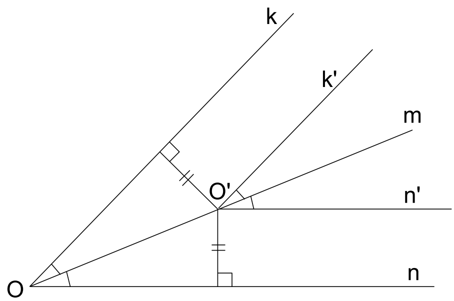
Угол $\angle XCD$ равен углу между прямыми, содержащими стороны AB и CD (см. теоретическую часть). Следовательно, в ΔCXD стороны CX $(CX = AB)$ и CD равны сторонам исходного четырёхугольника и угол $\angle XCD$ известен. Построив ΔCXD, мы определим точки X и D. Для того чтобы построить точки B и Y, построим ΔBCY по медиане CE и двум сторонам BC и CY $(CY = AD)$, которые равны сторонам четырёхугольника $ABCD$. Достроив ΔBCX до параллелограмма, получим вершину A.

Задача 14.

Построить биссектрису угла, вершина которого недоступна.

Идея. Предположить, что биссектриса построена, и провести из любой точки биссектрисы две прямые, параллельные сторонам угла.
Указание. Расстояния от построенных прямых до соответствующих сторон угла будут одинаковыми.

Решение. Пусть стороны угла лежат на прямых k и n, пересекающихся в точке O. Через точку O', лежащую на биссектрисе m, проведём прямые, параллельные сторонам угла.



В силу равенства углов при параллельных прямых биссектрисой построенного угла будет также прямая m. Отметим, что расстояния между параллельными прямыми будут равными.

Следовательно, если вершина O недоступна, то надо провести две прямые на равном расстоянии от сторон исходного угла и для угла с уже доступной вершиной построить биссектрису.

Задача 15.

Даны две точки A и B и между ними две параллели m и n. Провести между этими параллелями в известном направлении отрезок CD так, чтобы сумма $AC+CD+BD$ была минимальной.

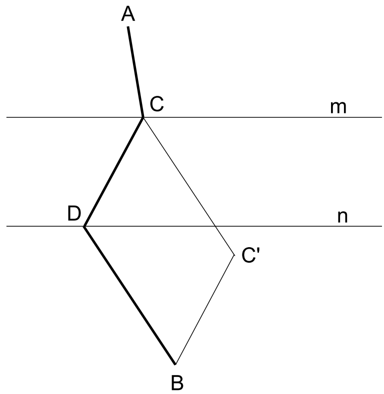
Идея. Использовать параллельный перенос отрезка CD.
Указание. Пусть отрезок CD с концами на параллелях m и n проведён в заданном направлении. Перенести его параллельно в отрезок $C'B$, тогда

$$AC+CD+BD = AC+CC'+BC'.$$

Решение. Пусть отрезок CD с концами на параллелях m и n проведён в заданном направлении. Перенесём его параллельно в отрезок $C'B$, тогда

$$AC+CD+BD = AC+CC'+BC'.$$

Следовательно, задача свелась к отысканию на прямой m точки C такой, что сумма $AC+CC'$ минимальна. Значит, в качестве точки C надо взять точку пересечения прямой m с отрезком AC'.

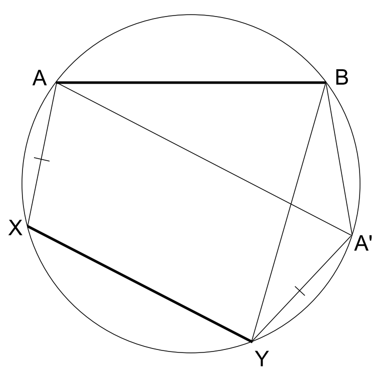


Задача 16.

На окружности даны две точки A и B. В данном направлении провести хорду XY так, чтобы сумма хорд AX и BY была равна заданной величине.

Идея. Провести хорду AA' параллельно заданному в условии направлению и использовать метод симметрии и спрямления для нахождения точки Y.
Указание. Надо построить точку Y такую, что $BY + YA'$ имеет заданную длину, а эта задача была решена в предыдущем параграфе методом симметрии и спрямления.

Решение. Пусть X, Y искомые точки. Проведём хорду AA' в заданном в условии направлении.



Отрезок $A'Y = AX$, так как у вписанной трапеции $AA'YX$ боковые стороны равны.

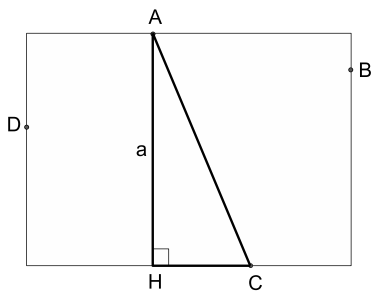
Итак, всё свелось к построению точки Y такой, что $BY + YA'$ имеет заданную длину, а эта задача была решена нами в предыдущем параграфе методом симметрии и спрямления.

Задача 17.

Построить прямоугольник с данной стороной так, чтобы стороны его проходили через четыре заданные точки.

Идея. Пусть прямоугольник построен. Проанализировать, что нам известно.
Указание. Пусть даны точки A, B, C, D и отрезок длины a. Рассмотреть перпендикуляр AH, опущенный из точки A на противоположную сторону искомого прямоугольника.
Указание. Треугольник ACH можно построить по известной гипотенузе AC и катету $AH = a$.

Решение. Пусть даны точки A, B, C, D и отрезок длины a. Рассмотрим перпендикуляр AH, опущенный из точки A на противоположную сторону искомого прямоугольника.



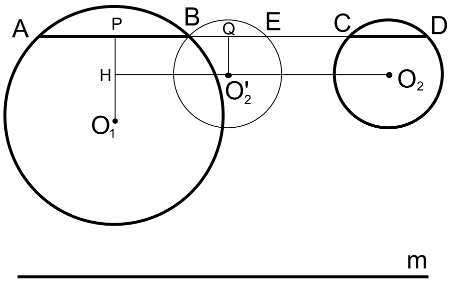
Треугольник ACH мы можем построить по известной гипотенузе AC и катету $AH = a$. Для того чтобы построить искомый прямоугольник, надо через точки D и B провести прямые, параллельные AH, а через A и C прямые, параллельные HC. Точки пересечения этих прямых и будут вершинами искомого прямоугольника.

Задача 18.

Даны две окружности и прямая. Провести секущую параллельно этой прямой, отсекающую в окружностях хорды, сумма которых равна заданному отрезку длины s.

Идея. Предположить, что искомая прямая проведена, и провести параллельный перенос одной из окружностей.
Указание. Рассмотрим две окружности с центрами O_1 и O_2 и прямую m. Пусть $AD \parallel m$ и $AB + CD = s$. Перенести вторую окружность так, что хорда CD перейдёт в хорду BE.
Указание. Пусть P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из точек O_1 и O_2' на прямую AD. Отрезок $PQ = s/2$.

Решение. Рассмотрим две окружности с центрами O_1 и O_2 и прямую m. Пусть $AD \parallel m$ и $AB + CD = s$. Перенесём вторую окружность так, что хорда CD перейдёт в хорду BE.



Пусть P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из точек O_1 и O_2' на прямую AD. Отрезок $PQ = s/2$.

В целом построение выглядит следующем образом. Проведём через O_2 прямую параллельно m и через O_1 прямую перпендикулярно m. Так мы найдём точку H. Отложив от неё отрезок $HO_2' = s/2$, получим центр перенесённой окружности O_2'. Эта окружность пересечёт первую окружность в точке B. В результате осталось провести прямую через B параллельно прямой m.

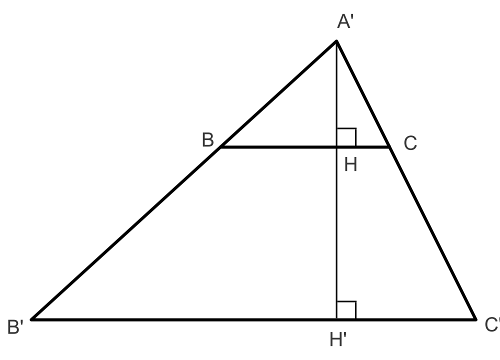
5.5. Метод подобия

Задача 1.

Построить треугольник по двум углам и высоте, проведённой из третьего угла.

Идея. Построить треугольник, подобный искомому.
Указание. По двум данным углам построить $\Delta A'B'C'$.

Решение. Сначала по двум данным углам построим $\Delta A'B'C'$.



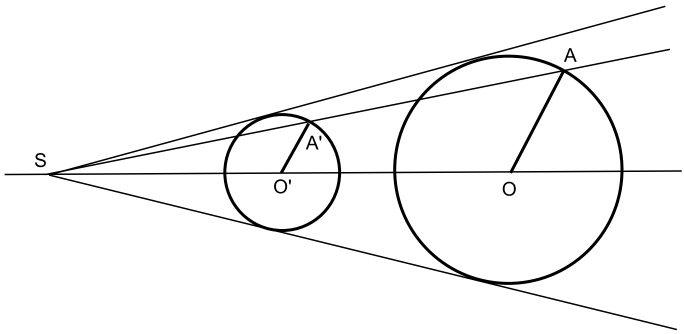
Для того чтобы построить искомый треугольник $A'BC$ с высотой h_a, достаточно в треугольнике $A'B'C'$ на прямой, содержащей высоту $A'H'$, отложить отрезок $A'H = h_a$ и через точку H провести прямую BC, параллельную $B'C'$.

Задача 2.

Построить окружность, касающуюся сторон данного угла и проходящую через заданную внутри него точку.

Идея. Построить вспомогательную окружность с центром O', касающуюся сторон угла.
Указание. Соединить вершину угла S с заданной точкой A.

Решение. Построим вспомогательную окружность с центром O', касающуюся сторон угла.

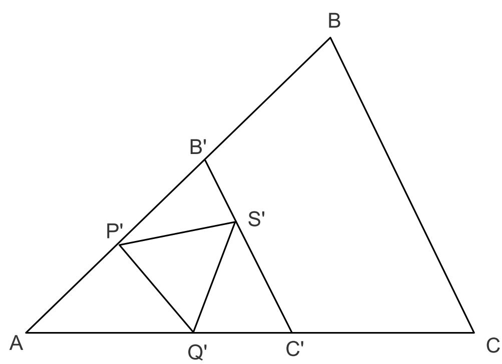


Соединим вершину угла S с заданной точкой A. Пусть A' — точка пересечения прямой SA с окружностью. Проведём через A прямую параллельно отрезку $A'O'$. Она пересечёт луч SO' в точке O – центре искомой окружности.

Замечание. Если за A' обозначить вторую точку пересечения прямой SA со вспомогательной окружностью, то, действуя аналогично, получим вторую окружность, проходящую через точку A и касающуюся сторон угла.

Задача 3.

Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 5,\ BC = 6,\ AC = 7$. Построить точку $S \in BC$, точку $Q \in AC$ и точку $P \in AB$ так, чтобы треугольник SQP был равносторонним.



Идея. Построить треугольник (со вписанным в него равносторонним треугольником), подобный данному, а потом с помощью гомотетии преобразовать вписанный треугольник в искомый.
Указание. Вписать в угол A равносторонний $\Delta P'Q'S'$.

Решение. На сторонах угла A возьмём произвольно точки P', Q' и построим равносторонний $\Delta P'Q'S'$. Если точка S' попала на сторону BC, то наша задача выполнена. Если нет, то проведём прямую через точку S' параллельно BC. Пусть B', C' – точки пересечения этой прямой с лучами AB и AC соответственно.

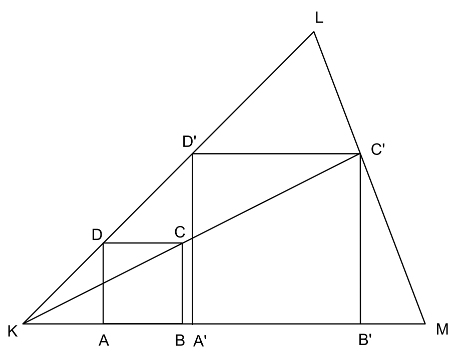
Треугольники ABC и $AB'C'$ подобны с коэффициентом подобия $k = \dfrac{AB}{AB'}$, поэтому если мы применим гомотетию с этим коэффициентом с центром в точке A, то $\Delta AB'C'$ перейдёт в ΔABC, а вписанный в него равносторонний треугольник $S'Q'P'$ перейдёт в искомый треугольник SQP. Для того чтобы построить точку $P \in AB$, достаточно отложить от точки A отрезок длины $AP' \cdot \dfrac{AB}{AB'}$ (это мы умеем делать). Аналогично строятся точки Q и S.

Задача 4.

В данный треугольник вписать квадрат.

И д е я. Построить вспомогательный квадрат и воспользоваться преобразованием гомотетии.
У к а з а н и е. Пусть дан треугольник KLM. Построить вспомогательный квадрат $ABCD$ такой, что $A, B \in KM$, $D \in KL$.
У к а з а н и е. Провести прямую KC до пересечения со стороной ML.

Р е ш е н и е. Пусть дан треугольник KLM. Построим вспомогательный квадрат $ABCD$ такой, что $A, B \in KM$, $D \in KL$. Проведём прямую KC, она пересечёт сторону ML в точке C'. Далее проведём $B'C' \perp KM$, $C'D' \perp B'C'$ и $D'A' \perp D'C'$. Четырёхугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ подобны (один получается из другого с помощью гомотетии с центром в точке K), следовательно, $A'B'C'D'$ также является квадратом.

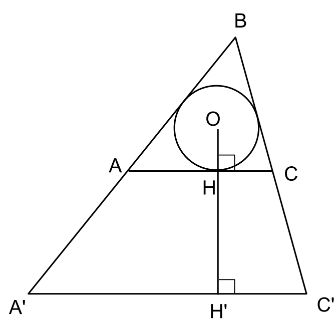


Задача 5.

Построить треугольник по α, β, r.

И д е я. Вписать окружность данного радиуса в треугольник, подобный данному.
У к а з а н и е. По двум данным углам построить $\Delta A'BC'$, подобный искомому. В угол B вписать окружность данного радиуса.

Р е ш е н и е. По двум данным углам построим $\Delta A'BC'$, подобный искомому. В угол B впишем окружность данного радиуса. Из центра O опустим перпендикуляр OH' на сторону $A'C'$, на котором отложим $OH = r$. Через точку H проведём $AC \perp OH$. Полученный треугольник ΔABC удовлетворяет заданным условиям.



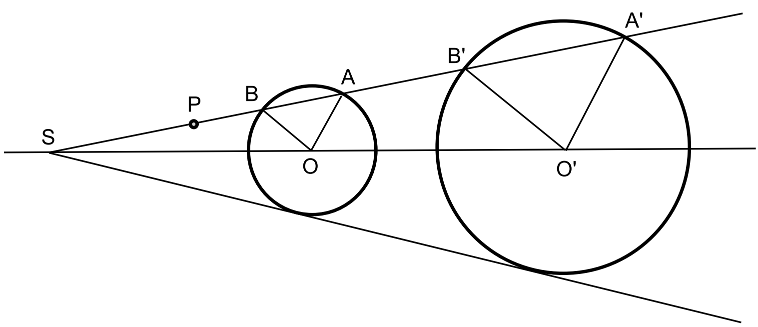
З а м е ч а н и е. Задача решается аналогичным образом, если вместо угла α задано отношение сторон a и c.

Задача 6.

Через данную точку провести прямую, отсекающую от двух данных окружностей хорды, пропорциональные их радиусам.

И д е я. Использовать свойства центра подобия окружностей.
У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что любая секущая, проведённая через центр подобия окружностей, отсекает от окружностей хорды, пропорциональные радиусам.

Р е ш е н и е. Воспользуемся тем, что любая секущая, проведённая через центр подобия окружностей, пересекает окружности таким образом, что треугольники ΔABO и $\Delta A'B'O'$ являются гомотетическими. Проведём через центр подобия S и данную точку P прямую. Из подобия треугольников ΔABO и $\Delta A'B'O'$ следует пропорциональность соответствующих отрезков.

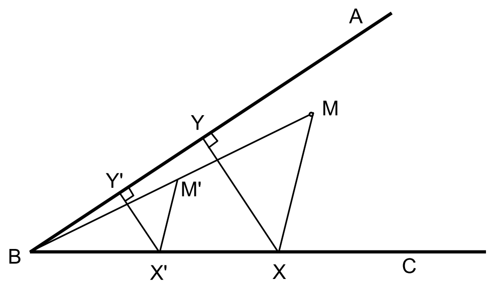


Задача 7.

Дан угол ABC и точка M внутри него. Найти на стороне BC точку X, равноудалённую от AB и точки M.

И д е я. Использовать преобразование гомотетии.
У к а з а н и е. Из произвольной точки $X' \in BC$ опустить перпендикуляр $X'Y'$ на прямую AB и отметить на луче BM точку M' такую, что $X'M' = X'Y'$.
У к а з а н и е. Провести через точку M прямую, параллельную прямой $M'X'$.

Р е ш е н и е. Из произвольной точки $X' \in BC$ опустим перпендикуляр $X'Y'$ на прямую AB и отметим на луче BM точку M' такую, что $X'M' = X'Y'$. Теперь проведём через точку M прямую, параллельную прямой $M'X'$, и получим искомую точку X. Треугольник MXY (где Y – основание перпендикуляра, опущенного из X на AB) гомотетичен треугольнику $M'X'Y'$ и, следовательно, также является равнобедренным.



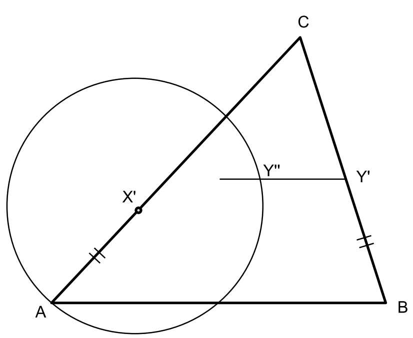
З а м е ч а н и е. Задача решается аналогичным образом, если вместо перпендикуляра XY требуется провести отрезок, образующий с AB заданный угол и находящийся в известном отношении к MX.

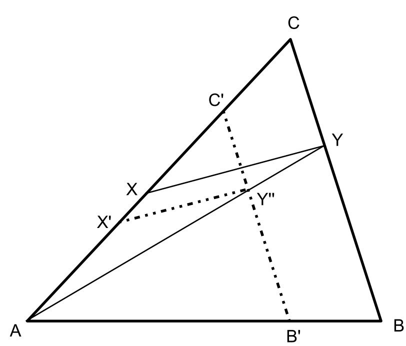
Задача 8.

Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Провести прямую, пересекающую отрезок AC в точке X, а отрезок BC – в точке Y таким образом, что $AX = XY = YB$.

И д е я. Построить четырёхугольник, подобный четырёхугольнику $AXYB$.
У к а з а н и е. На стороне AC отложить отрезок AX' произвольной длины d, а на стороне BC – отрезок $BY' = AX' = d$. Провести окружность с центром в X' радиусом d и прямую через Y' параллельно AB. Пусть Y'' точка их пересечения. Провести через неё прямую параллельно BC и получить точки B' и C'.
У к а з а н и е. Четырёхугольник $AX'Y''B'$ $(AX' = X'Y'' = Y''B' = d)$ подобен искомому.

Р е ш е н и е. Построим четырёхугольник, подобный искомому четырёхугольнику $AXYB$. На стороне AC отложим отрезок AX' произвольной длины d, а на стороне BC – отрезок $BY' = AX' = d$. Проведем окружность с центром в X' радиусом d и прямую через Y' параллельно AB. Пусть Y'' точка их пересечения. Проведём через неё прямую параллельно BC, получим точки B' и C'. Треугольник $AB'C'$ подобен ΔABC, а четырёхугольник $AX'Y''B'$ $(AX' = X'Y'' = Y''B' = d)$ подобен искомому.





Проведём прямую через точки A и Y'' до пересечения со стороной BC – получим точку Y. Теперь через точку Y проведём прямую, параллельную $X'Y''$, до пересечения со стороной AC – получим точку X.

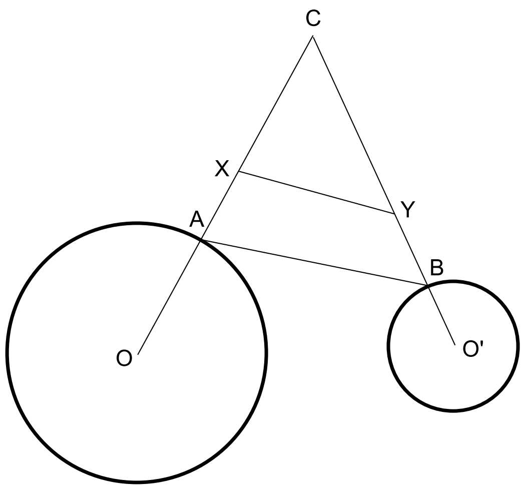
З а м е ч а н и е. Задача решается аналогичным образом, если вместо равенства отрезков задано отношение $AX : XY : YB$.

Задача 9.

Даны две окружности и на них по точке. Провести две равные окружности, касающиеся в данных точках данных окружностей и между собой.

И д е я. Использовать замечание к предыдущей задаче.
У к а з а н и е. Пусть O и O' – центры данных окружностей, а A и B – данные на них точки. Обозначим через C точку пересечения прямых OA и $O'B$. В треугольнике ABC нам надо отыскать точки $X \in AC$ и $Y \in BC$, такие, что $AX : XY : YB = 1 : 2 : 1$, которые и будут центрами искомых окружностей.

Р е ш е н и е. Пусть O и O' – центры данных окружностей, а A и B – данные на них точки. Обозначим через C точку пересечения прямых OA и $O'B$. В треугольнике ABC нам надо отыскать точки $X \in AC$ и $Y \in BC$, такие, что $AX : XY : YB = 1 : 2 : 1$, которые и будут центрами искомых окружностей. Точки X и Y строятся способом, указанным в предыдущей задаче.



З а м е ч а н и е. Если прямые OA и $O'B$ параллельны, то радиусы искомых окружностей равны половине расстояния между этими прямыми.

Задача 10.

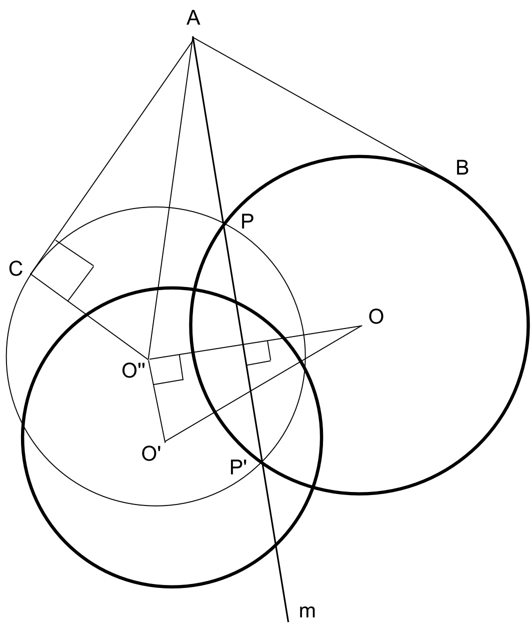
Через данную точку A провести к двум данным окружностям секущую, отсекающую в окружностях

а) равные хорды;
б) хорды, длины которых находятся в заданном соотношении.

Идея. а) Предположить, что секущая построена, и параллельно перенести одну из окружностей. б) Использовать результат пункта а).
Указание. а) Пусть O и O' – центры данных окружностей, R и R' – их радиусы, а m – искомая прямая. Перенести вторую окружность вдоль этой прямой так, чтобы хорды совпали.
Указание. Построив вспомогательную окружность с центром в O'', найти точки P и P', через которые проходит искомая секущая.

Решение. Пусть O и O' – центры данных окружностей, R и R' – их радиусы, а m – искомая прямая.

а) Перенесём вторую окружность вдоль этой прямой так, чтобы хорды совпали. Заметим, что, построив вспомогательную окружность с центром в O'', мы найдем точки P и P', через которые проходит искомая секущая.



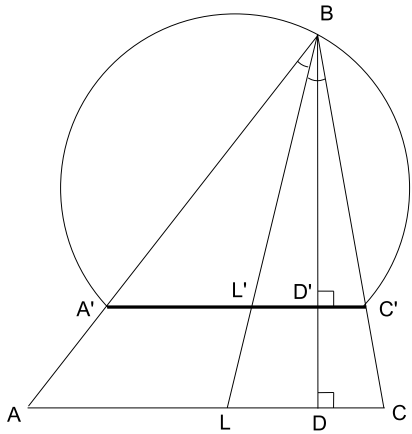
Для начала построим отрезок длины AO''. Это есть гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами длины R' и AC, где $AC = AB$. Теперь точку O'' можно построить как пересечение окружности с центром в A радиусом, равным уже построенному отрезку длины AO'', и окружности, построенной на OO', как на диаметре (так как $\angle OO''O' = 90^\circ$).

б) Преобразуем первую окружность с помощью гомотетии с центром в точке A с коэффициентом, равным данному в условии отношению. Теперь для второй окружности и этой преобразованной окружности построим секущую, отсекающую равные хорды (см. пункт а).

Задача 11.

Построить треугольник, зная β, l_b и $AD : DC$, где BD – высота.

И д е я. Построить треугольник, подобный требуемому.
У к а з а н и е. На произвольном отрезке $A'C'$ построить дугу, вмещающую угол β. Из точки $D' \in A'C'$ такой, что $A'D' : D'C' = AD : DC$, восстановить перпендикуляр к отрезку $A'C'$.

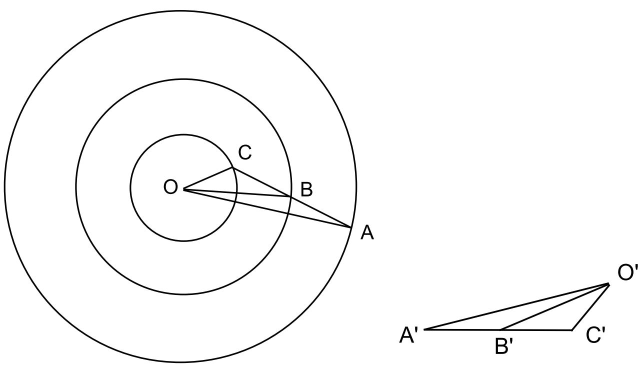


Р е ш е н и е. На произвольном отрезке $A'C'$ построим дугу, вмещающую угол β. Из точки $D' \in A'C'$ такой, что $A'D' : D'C' = AD : DC$, восстановим перпендикуляр к отрезку $A'C'$. Он пересечёт дугу в точке B. На биссектрисе угла B треугольника $A'BC'$ отложим отрезок $BL = l_b$ и проведём через точку L прямую параллельно $A'C'$. Получим точки A и C. Построенный таким образом треугольник ABC удовлетворяет заданным условиям.

Задача 12.

Даны три концентрические окружности. Провести секущую ABC так, чтобы точки A, B и C лежали на разных окружностях и $AB = BC$.

И д е я. Использовать окружность Аполлония.
У к а з а н и е. Используя окружность Аполлония, построить треугольник, подобный треугольнику AOC, где O – центр окружностей.



Р е ш е н и е. Пусть радиусы данных окружностей $R_1 < R_2 < R_3$. Рассмотрим произвольный отрезок $A'C'$ с серединой в точке B'. Построим геометрическое место точек, расстояния от которых до A' и B' относятся как $R_3 : R_2$ (окружность

Аполлония). Затем пересечём его с геометрическим местом точек, расстояния от которых до B' и C' относятся как $R_2 : R_1$, и получим точку O' такую, что $\Delta A'C'O'$ подобен искомому ΔACO. Для построения точек A и C достаточно построить угол, равный $\angle A'O'C'$, с вершиной в центре данных окружностей O.

Задача 13.

Через две точки, лежащие вне данной окружности, провести окружность, касающуюся заданной окружности.

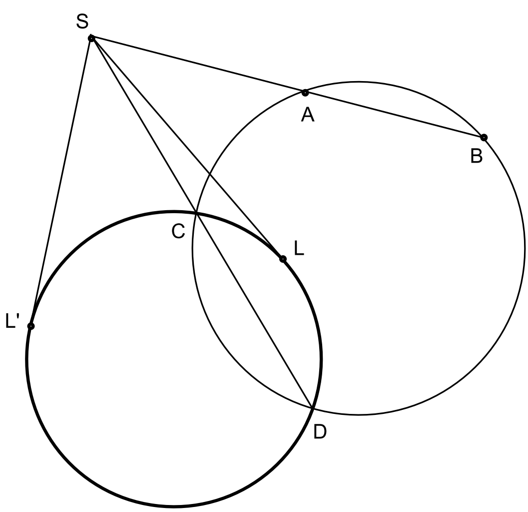
З а м е ч а н и е. Эта задача не на метод подобия, она потребуется для решения одной из следующих задач.

И д е я. Использовать свойство секущих к окружности.
У к а з а н и е. Провести через заданные точки A, B произвольную окружность, пресекающую данную в точках C, D. Пусть S – точка пересечения прямых CD и AB. Провести касательные SL и SL' к заданной окружности.
У к а з а н и е. По свойству секущих имеем $SA \cdot SB = SC \cdot SD = SL^2 = SL'^2$.

Р е ш е н и е. Проведём через заданные точки A, B произвольную окружность, пресекающую данную в точках C, D. Обозначим через S точку пересечения прямых CD и AB. Рассмотрим касательные SL и SL' к заданной окружности. По свойству секущих имеем

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD = SL^2 = SL'^2.$$

Теперь проведём окружность через точки A, B и L. По свойству секущих длина касательной, проведённой к этой новой окружности, равна $\sqrt{SA \cdot SB}$, следовательно, отрезок SL будет касаться этой окружности, а построенная окружность будет касается данной окружности (внешним образом). Окружность, проведённая через точки A, B и L', также будет касаться данной окружности (внутренним образом).



Задача 14.

Даны две окружности с центрами в точках O и O'. Через центр их подобия S проведены касательная и секущая. Касательная касается окружностей в точках C и C' соответственно, секущая отсекает от окружностей хорды AB и $A'B'$. Доказать, что $CS \cdot C'S = AS \cdot B'S = BS \cdot A'S$.

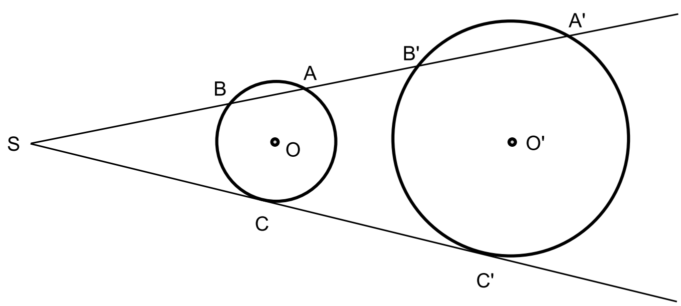
З а м е ч а н и е. Эта задача не на построение, она потребуется для решения следующей задачи.

И д е я. Использовать подобие окружностей и свойство секущих.
У к а з а н и е. Используя подобие окружностей, доказать второе равенство.
У к а з а н и е. Используя свойство секущих и доказанное равенство, доказать первое равенство.

Р е ш е н и е. Пусть k есть коэффициент подобия окружностей, тогда

$$\frac{AS}{A'S} = \frac{BS}{B'S} = k,$$

откуда $AS \cdot B'S = BS \cdot A'S$ и второе требуемое равенство доказано.



Для доказательства первого равенства воспользуемся свойством секущих:

$$CS^2 = AS \cdot BS, \quad C'S^2 = A'S \cdot B'S \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (CS \cdot C'S)^2 = (AS \cdot B'S) \cdot (BS \cdot A'S) = (AS \cdot B'S)^2 = (BS \cdot A'S)^2$$

$$\Longrightarrow \quad CS \cdot C'S = AS \cdot B'S = BS \cdot A'S.$$

Задача 15.

Через данную точку A провести окружность, касающуюся двух данных окружностей.

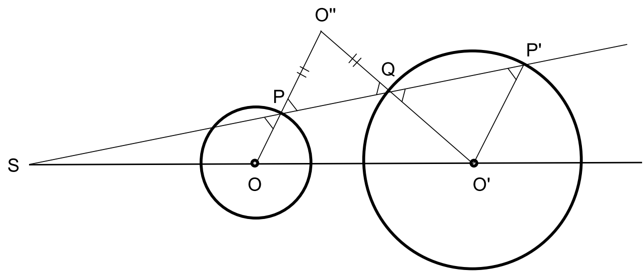
И д е я. Использовать результаты двух предыдущих задач.
У к а з а н и е. Предположить, что окружность построена, и провести две прямые – одну через точки касания и вторую через центры данных окружностей.

Указание. Показать, что точка пересечения этих прямых есть центр подобия данных окружностей.
Указание. Для нахождения второй точки, лежащей на искомой окружности, использовать результат предыдущей задачи.
Указание. Для построения искомой окружности использовать задачу №13.

Решение. Пусть O и O' – центры данных окружностей, R и R' – их радиусы, O'' - центр искомой окружности, P и Q – точки касания искомой окружности с данными, S – точка пересечения прямой PQ с линией центров OO'.

Из равенства вертикальных углов и равенства углов при основаниях равнобедренных треугольников $\Delta PQO''$ и $\Delta QP'O'$ следует, что

$$\angle SPO = \angle QPO'' = \angle PQO'' = \angle P'QO' = \angle QP'O'.$$



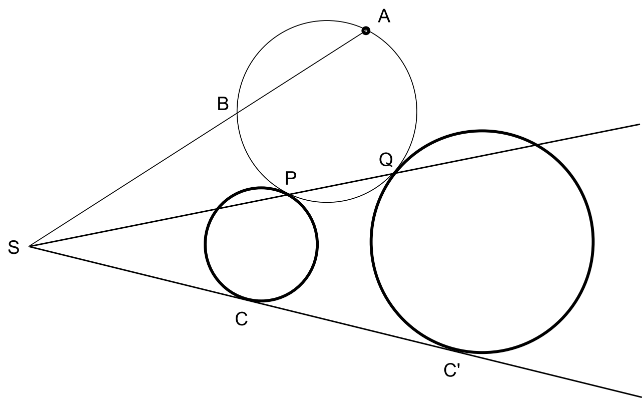
Таким образом, треугольники ΔSPO и $\Delta SP'O'$ подобны по двум углам и коэффициент их подобия равен $k = R/R'$. Следовательно, точка S лежит на линии центров двух данных окружностей и

$$\frac{SO}{SO'} = \frac{R}{R'};$$

значит, S есть центр подобия этих окружностей. Используя результат предыдущей задачи и свойство секущих, получим

$$CS \cdot C'S = PS \cdot QS = AS \cdot BS,$$

где C, C' – точки касания данных окружностей с касательной, проходящей через точку S, а B – точка пересечения секущей SA с искомой окружностью.



Итак, для построения искомой окружности сначала надо найти центр подобия данных окружностей S, потом построить точку B, отложив на отрезке SA отрезок длины $BS = CS \cdot C'S/AS$. Далее через точки A и B (см. задачу №13) провести окружность, касающуюся любой из данных окружностей.

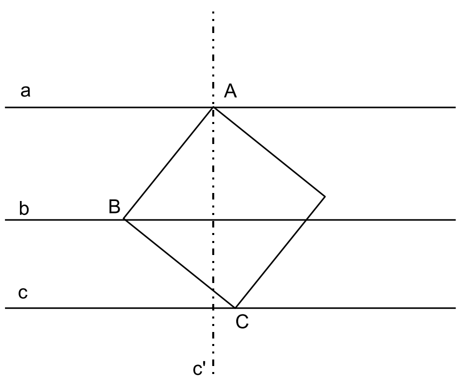
5.6. Метод поворота и смешанные задачи

Задача 1.

Даны три параллельные прямые. Построить квадрат, три вершины которого лежат на этих прямых.

Идея. Использовать поворот одной из прямых на 90°.
Указание. Взять произвольную точку на средней прямой и повернуть относительно неё одну из крайних прямых на 90°.

Решение. Пусть a, b, c – три данные параллельные прямые.



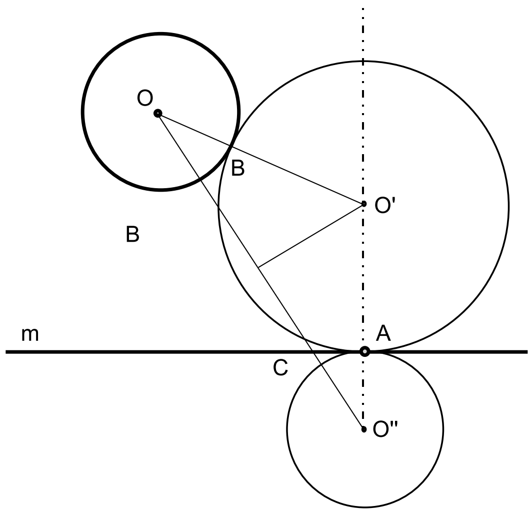
Рассмотрим произвольную точку $B \in b$ и повернём относительно неё прямую c на 90°, получим прямую c' и точку $A \in a$. При обратном повороте A перейдет в $C \in c$. Осталось достроить равнобедренный прямоугольный треугольник ΔABC (по построению $BA = BC$ и $\angle B = 90^\circ$) до квадрата.

Задача 2.

Даны прямая и окружность. Построить окружность, касающуюся данной окружности и прямой в данной точке.

Идея. Предположить, что искомая окружность построена, и использовать поворот данной окружности относительно центра построенной окружности.
Указание. Пусть дана прямая m с точкой A и окружность с центром в точке O. Пусть искомая окружность (с центром в O') касается данной окружности в точке B, тогда при повороте на угол $\angle OO'A$ относительно точки O' точка B переходит в A, а центр окружности O – в центр повёрнутой окружности O''.

Р е ш е н и е. Пусть дана прямая m с точкой A и окружность с центром в точке O и радиусом r. Пусть искомая окружность (с центром в O') касается данной окружности в точке B, тогда при повороте на угол $\angle OO'A$ относительно точки O' точка B переходит в точку A, а центр окружности O – в центр повёрнутой окружности O''.



Для того чтобы построить центр искомой окружности O', надо сначала построить вспомогательную окружность с центром в точке O'' радиуса r, касающуюся прямой m в точке A. Потом к отрезку OO'' провести серединный перпендикуляр, он пересечёт перпендикуляр из точки A к прямой m в искомой точке O'.

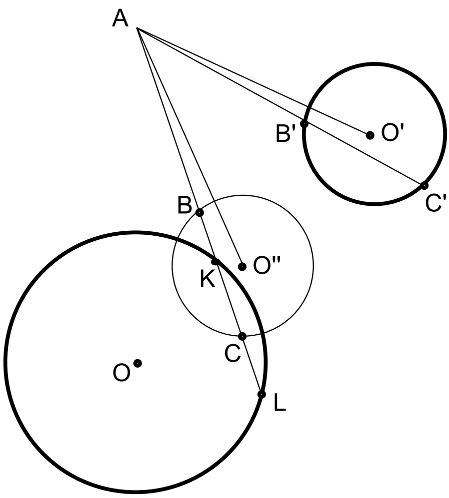
Задача 3.

Даны две окружности. Провести к ним через заданную точку две секущие, пересекающиеся под заданным углом и отсекающие
а) равные хорды;
б) хорды, длины которых находятся в заданном отношении.

И д е я. Использовать поворот и задачу №9 предыдущего раздела.
У к а з а н и е. а) Повернуть первую окружность относительно заданной точки A на заданный угол. Провести через точку A секущую, отсекающую от второй окружности и этой вспомогательной окружности равные хорды (см. задачу №9 пред. раздела).
У к а з а н и е. б) Преобразовать первую окружность с помощью гомотетии с центром в точке A с коэффициентом, равным данному в условии отношению.

Р е ш е н и е. Пусть O и O' – центры заданных окружностей.

а) Повернём первую окружность относительно заданной точки A на заданный угол. Теперь проведём через точку A секущую, отсекающую от второй окружности и этой вспомогательной окружности равные хорды (см. задачу №9 пред. раздела). Получим $BC = KL$. С помощью обратного поворота найдём искомые $B'C' = KL$.



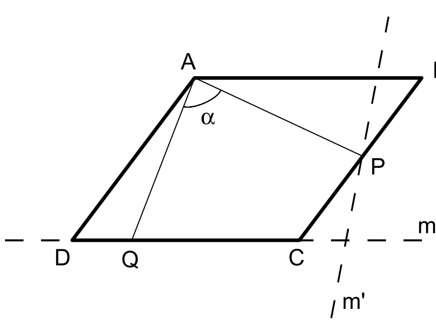
б) Преобразуем первую окружность с помощью гомотетии с центром в точке A с коэффициентом, равным данному в условии отношению. Теперь для второй окружности и этой преобразованной окружности построим секущие, пересекающиеся под заданным углом и отсекающие равные хорды (см. пункт а).

Задача 4.

В данный параллелограмм $ABCD$ вписать равнобедренный треугольник APQ ($AP = AQ$) с данным углом при вершине A.

Идея. Повернуть прямую, на которой лежат вершины C и D, на данный в условии угол относительно точки A.
Указание. Повернув прямую, на которой лежат вершины C и D, на данный в условии угол относительно точки A, получить на стороне BC точку P.

Решение. Повернём прямую m, на которой лежат вершины C и D, на данный в условии угол α относительно точки A. Получим прямую m'. Пусть она пересекает сторону BC в точке P. При обратном повороте точка P перейдёт в точку $Q \in m$, причём $\angle PAQ = \alpha$ и $AP = AQ$.



Задача 5.

Построить четырёхугольник, вписываемый в окружность, зная его стороны a, b, c и d.

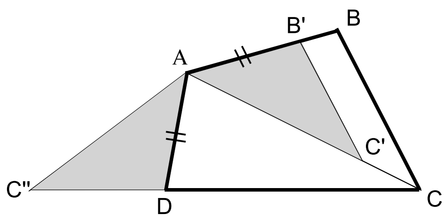
Идея. Использовать поворот и окружность Аполлония.
Указание. Пусть $ABCD$ – искомый четырёхугольник со сторонами $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ и $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Отложить на прямой AB отрезок $AB' = AD = d$ и провести через B' отрезок $B'C' \parallel BC$. Повернуть треугольник $AB'C'$ относительно точки A на угол $\angle BAD$.
Указание. При таком повороте B' перейдет в точку D, а C' в точку C'', лежащую на прямой CD.
Указание. Для построения искомого четырёхугольника сначала построить треугольник ACC''. У него известны

$$CD = c, \quad AD = d, \quad DC'' = b \cdot \frac{d}{a}, \quad AC : AC'' = a : d.$$

С помощью окружности Аполлония можно построить этот треугольник.

Решение. Пусть $ABCD$ – искомый четырёхугольник со сторонами $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ и $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Отложим на прямой AB отрезок $AB' = AD = d$ и проведём через B' отрезок $B'C' \parallel BC$. Теперь повернём треугольник $AB'C'$ относительно точки A на угол $\angle BAD$. При этом B' перейдет в точку D, а C' в точку C'', лежащую на прямой CD, так как

$$\angle ADC'' + \angle ADC = \angle ABC + \angle ADC = 180°.$$



Для построения искомого четырёхугольника сначала надо построить треугольник ACC''. У него известны

$$CD = c, \quad AD = d, \quad DC'' = b \cdot \frac{d}{a}, \quad AC : AC'' = a : d.$$

С помощью окружности Аполлония можно построить этот треугольник.

Далее от прямой AC надо отложить под углом, равным $\angle C''AD$, отрезок $AB = a$.

Задача 6.

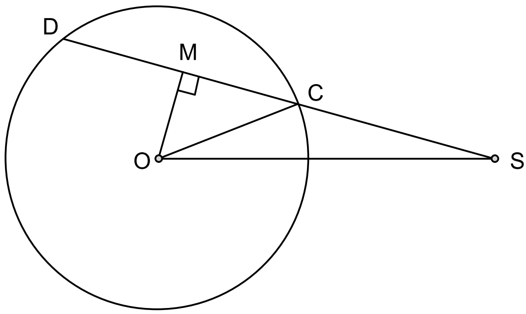
Провести через заданную точку прямую, отсекающую от данной окружности хорду заданной длины.

Идея. Предположить, что искомая прямая построена, и исследовать, что известно.

Указание. Пусть S – данная точка, R – радиус окружности, a – длина отсекаемой хорды CD. Пусть M – середина хорды CD. Построив прямоугольный треугольник с катетом $a/2$ и гипотенузой R, получить отрезок длины MO.

Указание. Построить прямоугольный треугольник с гипотенузой SO и катетом MO.

Решение. Пусть S – данная точка, R – радиус окружности, a – длина отсекаемой хорды CD. Предположим, что искомая прямая проведена.



Пусть M – середина хорды CD. Построив прямоугольный треугольник с катетом $a/2$ и гипотенузой R, получим отрезок длины MO. Теперь построим прямоугольный треугольник с гипотенузой SO и катетом MO. Проведем прямую через точки M и S.

Задача 7.

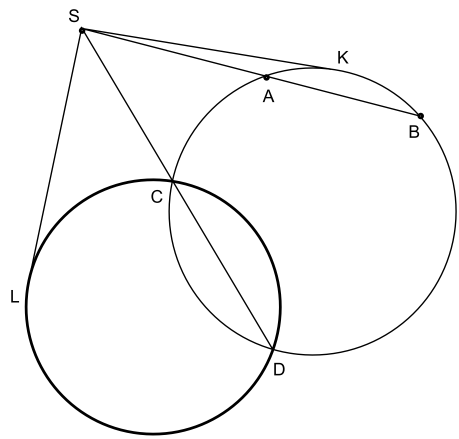
При помощи циркуля и линейки построить окружность, проходящую через две данные точки и отсекающую от данной окружности хорду данной длины.

Идея. Найти точку, лежащую на прямой, проходящей через точки пересечения окружностей, и воспользоваться результатом предыдущей задачи.

Указание. Провести через заданные точки A, B произвольную окружность, пресекающую данную в точках C, D. Показать, что местоположение точки S – точки пересечения прямых CD и AB, не изменится, если через заданные точки A, B провести другую окружность, пересекающую данную окружность в других точках.

Указание. При доказательстве использовать свойство секущих.

Решение. Проведём через заданные точки A, B произвольную окружность, пресекающую данную в точках C, D. Обозначим через S точку пересечения прямых CD и AB.

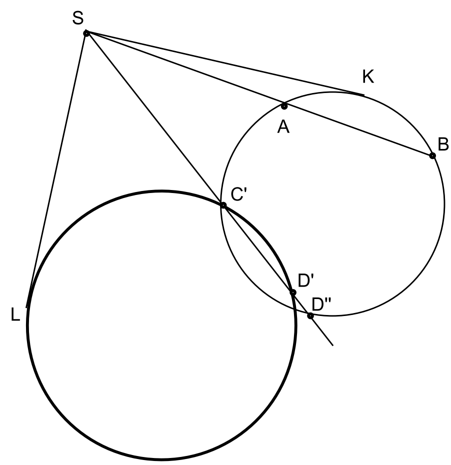


Рассмотрим касательные SK и SL к нашим двум окружностям. По свойству секущих имеем

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD = SK^2 = SL^2.$$

То есть S – такая точка на прямой AB, что отрезки касательных, проведенных из неё к заданной и искомой окружностям, равны между собой.

Проведём другую окружность через точки A, B и покажем, что продолжение общей хорды пересечёт прямую AB в точке S. Пусть новая окружность пересекает заданную в условии в точке C'. Обозначим через D', D'' точки пересечения прямой SC' с заданной и новой окружностями.



По свойству секущих имеем

$$SC' \cdot SD'' = SA \cdot SB = SK^2 = SL^2 = SC' \cdot SD'.$$

Откуда $SC' \cdot SD'' = SC' \cdot SD'$ и, следовательно, точки D' и D'' совпадают.

Для того чтобы построить точку S, достаточно провести через A, B произвольную окружность и продолжить общую хорду до пересечения с прямой AB.

Теперь осталось провести через точку S прямую, отсекающую от данной окружности хорду CD заданной длины (см. пред. задачу), и описать вокруг четырёхугольника $ABDC$ окружность (то, что это можно сделать, следует из подобия треугольников SAC и SBD).

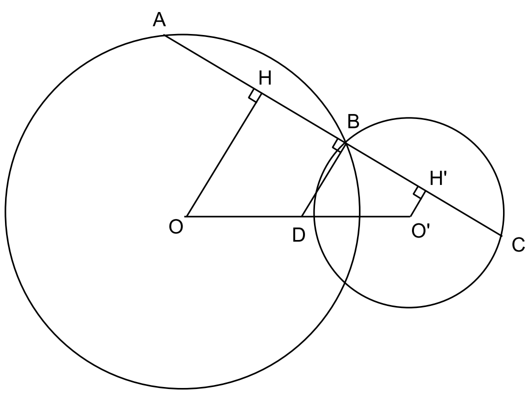
Задача 8.

Провести через точку B пересечения двух окружностей прямую, высекающую из окружностей равные хорды.

Идея. Предположить, что требуемая прямая проведена, опустить на неё перпендикуляры из центров окружностей и проанализировать рисунок.
Указание. Пусть AC – искомая прямая ($AB = BC$) и H, H' – основания перпендикуляров, опущенных на неё из центров окружностей O, O'. Тогда $HB = H'B = AB/2 = BC/2$.
Указание. Четырёхугольник $OHH'O'$ является прямоугольной трапецией с средней линией BD, где D – середина отрезка OO'.

Решение. Пусть AC – искомая прямая ($AB = BC$) и H, H' – основания перпендикуляров, опущенных на неё из центров окружностей O, O'.

Тогда $HB = H'B = AB/2 = BC/2$, так как перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду, делит её пополам. Четырёхугольник $OHH'O'$ является прямоугольной трапецией с средней линией BD, где D – середина отрезка OO'.



Для того чтобы построить AC, надо к прямой BD (где D середина отрезка OO') провести перпендикуляр, который пересечёт окружности в точках A и C.

Задача 9.

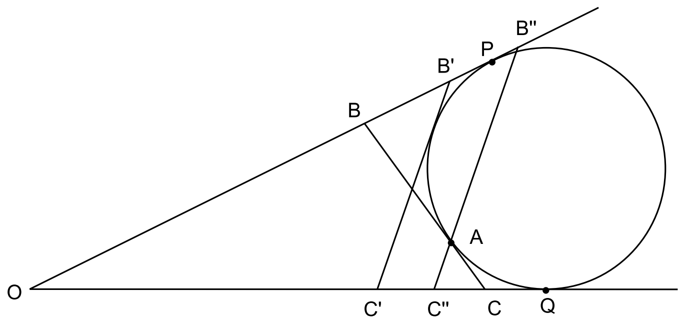
Через точку A внутри угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник минимального периметра.

Идея. Провести через точку A окружность, касающуюся сторон данного угла (см. пред. параграф), и провести через точку A касательную к этой окружности.

Указание. Показать, что эта касательная отсекает от угла треугольник минимального периметра.
Указание. Доказательство провести от противного, предположив, что искомая прямая является не касательной, а секущей.

Решение. Проведём через точку A окружность, касающуюся сторон данного угла (см. пред. параграф) в точках P и Q, и проведём через точку A касательную к этой окружности. Покажем, что эта касательная отсекает от угла треугольник OBC минимального периметра, причём

$$P_{OBC} = (OB + BA) + (OC + CA) = (OB + BP) + (OC + CQ) = OP + OQ.$$



Пусть искомая прямая $C''B''$ является не касательной, а секущей. Проведём параллельно ей касательную $C'B'$. Получаем

$$P_{OC''B''} > P_{OC'B'} = OP + OQ = P_{OBC},$$

что противоречит нашему предположению. Следовательно, искомая прямая является не секущей, а касательной.

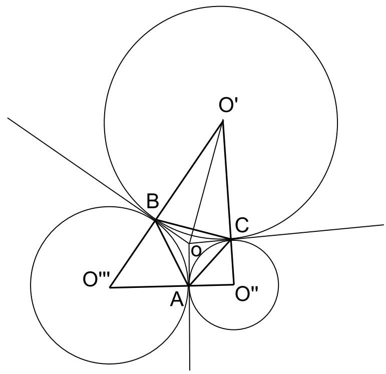
Задача 10.

Даны три точки. Построить окружности, попарно касающиеся в этих точках.

Идея. Предположить, что искомые окружности построены и провести через точки касания касательные к ним.
Указание. Эти касательные пересекаются в точке, которая по свойству касательных равноудалена от точек касания A, B и C, а значит, является центром описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности.

Решение. Предположим, что искомые окружности построены. Касательные к ним, проведенные через точки касания A, B и C, пересекаются в точке O, которая по свойству касательных равноудалена от точек A, B и C. Значит, O – центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности.

Проведём через точки A, B, C прямые, перпендикулярные радиусам описанной окружности. Точки пересечения этих прямых обозначим через O', O'', O'''. Покажем, что они являются центрами искомых окружностей.

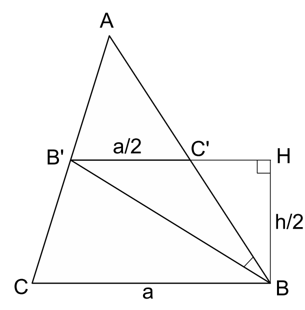


Отрезок $O'C$ равен отрезку $O'B$. Это следует из равенства прямоугольных треугольников $\Delta O'CO$ и $\Delta O'BO$ по катету и гипотенузе. Проведём окружность с центром в точке O' радиусом $R' = O'C = O'B$. Отрезок OC будет касаться этой окружности, так как он перпендикулярен радиусу. Аналогично показывается, что OC касается окружности с центром O'' с радиусом $R'' = O''C = O''A$. Следовательно, первая и вторая окружности касаются друг друга. Подобным образом показывается, что вторая окружность касается третьей, а третья — первой.

Задача 11.

Построить треугольник, зная a, h_a и $\angle(m_b, c)$.

Идея. Предположить, что треугольник построен, и провести в нём среднюю линию, параллельную стороне a.
Указание. Рассмотреть треугольник, отсекаемый данной медианой и средней линией $B'C'$, параллельной стороне a.
Указание. $\Delta B'BC'$ можно построить по основанию, противолежащему углу и высоте.



Решение. Рассмотрим треугольник, отсекаемый данной медианой и средней линией $B'C'$, параллельной стороне a. Угол $\angle B'BC'$ известен из условия задачи. Основание $B'C' = a/2$, так как является средней линией ΔABC. Высота $BH = h_a/2$. Следовательно, $\Delta B'BC'$ мы можем построить по основанию, противолежащему углу и высоте.

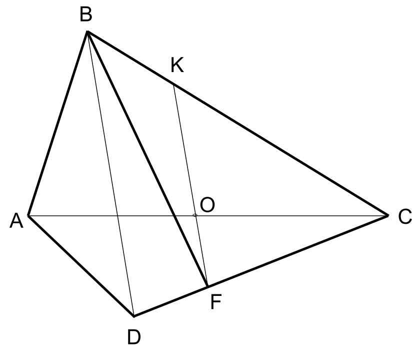
После этого, отложив на прямой BC' отрезок $C'A = BC'$, получим вершину A. Отложив отрезок $CB' = B'A$ на прямой $B'A$, построим вершину C.

Задача 12.

Через вершину выпуклого четырёхугольника провести прямую, которая делит его площадь пополам.

Идея. Если середину диагонали четырёхугольника соединить с противолежащими вершинами, то площадь получившегося четырёхугольника будет вдвое меньше площади исходного четырёхугольника.

Указание. Провести прямую через середину диагонали параллельно другой диагонали.



Решение. Пусть O – середина диагонали AC четырёхугольника $ABCD$.

Проведем через точку O параллельно BD отрезок KF. Прямая BF будет делить площадь четырёхугольника пополам. Это следует из того, что

$$\frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABOD} = S_{ABD} + S_{BOD} = S_{ABD} + S_{BDF} = S_{ABFD}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $S_{BOD} = S_{BDF}$, так как у этих треугольников общее основание и одинаковые высоты.

6. Стереометрия

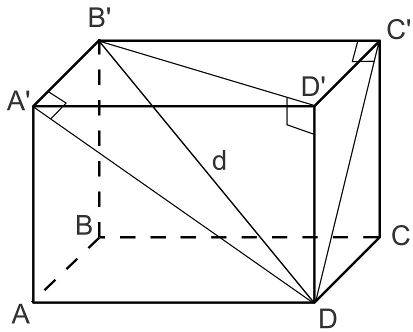
6.2. Многогранники

Задача 1.

В прямоугольном параллелепипеде диагональ, равная d, образует с боковыми гранями углы β и γ. Найти объём параллелепипеда.

Идея. Выразить длины рёбер параллелепипеда через длину диагонали и данные в условии углы.
Указание. Рассмотреть прямоугольные треугольники с гипотенузой d.

Решение. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с диагональю $B'D = d$, которая образует с гранью $CC'D'D$ угол β, а с гранью $ADD'A'$ угол γ.



Так как ребро $B'C'$ перпендикулярно плоскости грани $CC'D'D$, то $B'C' \perp C'D$ и катет прямоугольного треугольника $B'C'D$ равен $B'C' = d\sin\beta$. Из аналогичных соображений треугольник $A'B'D$ также является прямоугольным и $A'B' = d\sin\gamma$. Для вычисления объёма параллелепипеда осталось найти DD'. Воспользуемся теоремой Пифагора

$$DD' = \sqrt{d^2 - (B'D')^2} = \sqrt{d^2 - ((B'C')^2 + (A'B')^2)} = d\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\gamma}.$$

В результате объём параллелепипеда равен

$$V = A'B' \cdot B'C' \cdot DD' = d^3 \sin\beta \sin\gamma \sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\gamma}.$$

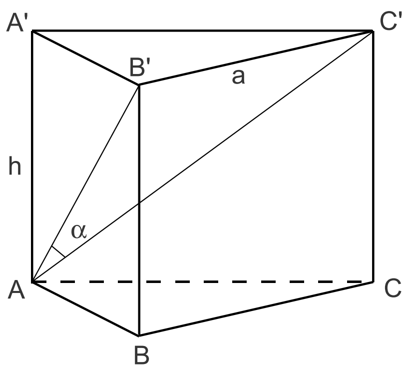
Ответ. $d^3 \sin\beta \sin\gamma \sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\gamma}$.

Задача 2.

Объём правильной треугольной призмы равен V. Угол между диагоналями двух боковых граней, проведёнными из одной вершины, равен α. Определить сторону основания призмы.

Идея. Ввести две неизвестные (сторона основания и высота призмы) и составить два уравнения с этими неизвестными.
Указание. Первое уравнение – объём призмы, второе – теорема косинусов для угла α.

Решение. Пусть дана правильная прямоугольная призма $ABCA'B'C'$ со стороной основания a и высотой h. Составим два уравнения с переменными a и h.



По условию задачи объём призмы равен V, следовательно,

$$V = S_{ABC} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 h.$$

Теперь рассмотрим треугольник $B'AC'$. У него $\angle B'AC' = \alpha$ по условию, а стороны $B'A = C'A = \sqrt{a^2 + h^2}$. По теореме косинусов

$$a^2 = B'A^2 + C'A^2 - 2 \cdot B'A \cdot C'A \cdot \cos\alpha = 2(a^2 + h^2)(1 - \cos\alpha).$$

Выразив из первого уравнения $h = \dfrac{4V}{\sqrt{3}a^2}$ и подставив во второе, получим

$$a^2 = 2\left(a^2 + \frac{16V^2}{3a^4}\right)(1 - \cos\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad 3a^6 = 2\left(3a^6 + 16V^2\right)(1 - \cos\alpha) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^6 = \frac{32V^2(1 - \cos\alpha)}{3(2\cos\alpha - 1)} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{2\sqrt[3]{V\sin(\alpha/2)}}{\sqrt[6]{3(2\cos\alpha - 1)}}.$$

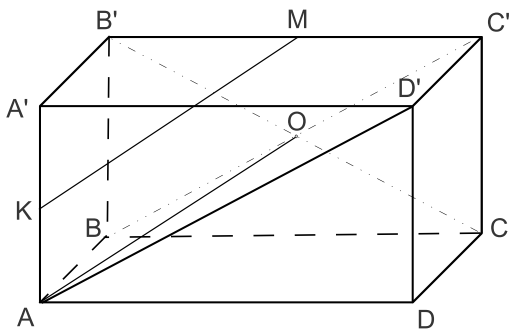
Ответ. $\dfrac{2\sqrt[3]{V\sin(\alpha/2)}}{\sqrt[6]{3(2\cos\alpha - 1)}}$.

Задача 3.

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$ и $AA' = 2$. Найдите угол между прямой AC' и прямой, проходящей через середины ребер AA' и $B'C'$.

Идея. Перенести прямую, проходящую через середины ребер AA' и $B'C'$ таким образом, чтобы она проходила через вершину A.
Указание. Искомый угол равен углу между отрезком AC' и отрезком, соединяющим вершину A с центром грани $BB'C'C$.

Решение. Пусть K и M – середины рёбер AA' и $B'C'$ соответственно. Перенесём отрезок KM так, чтобы точка K перешла в вершину A. Тогда точка M перейдёт в центр грани $BB'C'C$ – точку O и искомый угол будет равен углу OAC', который можно найти из соответствующего треугольника.



Вычислим длины сторон треугольника OAC':

$$OC' = \frac{1}{2}BC' = \frac{1}{2}\sqrt{C'C^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{10},$$

$$AC' = \sqrt{AC^2 + C'C^2} = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 7,$$

$$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{3^2 + 10} = \sqrt{19}.$$

Теперь применим теорему косинусов к $\Delta OAC'$ и найдём искомый угол:

$$10 = 7^2 + 19 - 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{19} \cdot \cos\angle OAC' \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\angle OAC' = \frac{29}{7\sqrt{19}}.$$

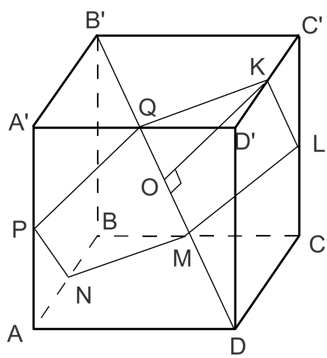
Ответ. $\arccos\dfrac{29}{7\sqrt{19}}$.

Задача 4.

Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, в нём через вершину B' проведена диагональ. Найти отношение площади сечения этого куба плоскостью, перпендикулярной указанной диагонали и проходящей через её середину, к площади его полной поверхности.

Идея. Доказать, что искомым сечением будет многоугольник, вершинами которого являются середины рёбер куба, не имеющие общих точек с концами указанной диагонали.
Указание. Использовать то, что отрезок, соединяющий середину каждого из этих рёбер с серединой диагонали, перпендикулярен этой диагонали.

Решение. Рассмотрим куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром a. Пусть K – середина ребра $C'D'$, а O – середина диагонали $B'D$. Покажем, что $OK \perp B'D$. Для этого рассмотрим треугольник $B'KD$. Он равнобедренный (равенство сторон $B'K = KD$ следует из равенства прямоугольных треугольников $B'C'K$ и $DD'K$) и, следовательно, его медиана KO является высотой. Таким образом, точка K (середина ребра $C'D'$) принадлежит плоскости, перпендикулярной диагонали $B'D$ и проходящей через её середину.



Аналогичным образом доказывается, что точки L, M, N, P, Q (середины рёбер куба, не имеющие общих точек с концами диагонали $B'D$) также принадлежат указанной плоскости. Заметим, что расстояния от вершин полученного шестиугольника до точки O равны, как медианы соответствующих равных равнобедренных треугольников, а стороны шестиугольника равны $a/\sqrt{2}$. Следовательно, он является правильным и состоит из шести равносторонних треугольников со стороной, равной $a/\sqrt{2}$. Его площадь равна

$$6 \cdot S_{KLO} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Отношение площади сечения к площади полной поверхности куба равно

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2}{6a^2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

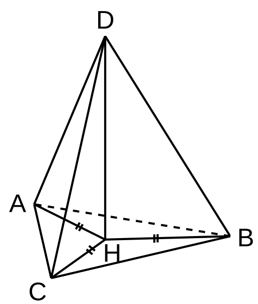
Ответ. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Задача 5.

В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $7,\ 8,\ 9$. Боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найти высоту пирамиды.

Идея. Воспользоваться тем, что если боковые рёбра наклонены к плоскости основания под одним углом, то основание высоты пирамиды является центром окружности, описанной около основания пирамиды.
Указание. В пирамиде $ABCD$ провести высоту DH и воспользоваться равенством треугольников AHD, BHD и CHD.

Решение. Рассмотрим пирамиду $ABCD$ с высотой DH. Прямоугольные треугольники AHD, BHD, CHD равны по катету (DH – общий) и острому углу ($\angle DAH = \angle DBH = \angle DCH = 60^\circ$ по условию).



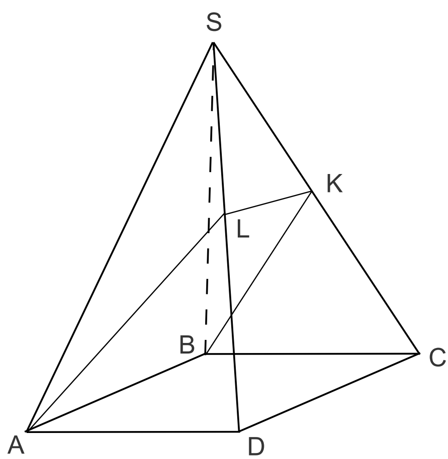
Следовательно, $AH = BH = CH = R$, где радиус описанной вокруг ΔABC окружности равен
$$R = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{4S}.$$
Найдём площадь ΔABC по формуле Герона
$$S = \sqrt{p(p-7)(p-8)(p-9)} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}.$$
В результате
$$DH = R \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{4S} \cdot \sqrt{3} = \frac{21\sqrt{15}}{10}.$$

Ответ. $\dfrac{21\sqrt{15}}{10}$.

Задача 6.

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды?

Идея. Разбить отсекаемый пятигранник на две пирамиды (треугольную и четырёхугольную) и выразить объёмы этих пирамид через объём исходной пирамиды.
Указание. Использовать формулу объёма пирамиды для нахождения отношений объёмов пирамид.



Решение. Рассмотрим правильную четырёхугольную пирамиду $SABCD$. Покажем, что плоскость, проходящая через A, B и середину ребра SC, пересекает ребро SD в его середине.

Проведём в треугольнике CDS среднюю линию KL. Так как $KL \parallel CD$, а $CD \parallel AB$, то $KL \parallel AB$. Следовательно, искомая плоскость содержит прямую KL и пересекает ребро SD в точке L.

Выразим объём пятигранника $ABCDKL$ через объём исходной пирамиды V.

Сначала рассмотрим пирамиду $ABCDL$. Её объём равен $V/2$, так как её основание совпадает с основанием исходной пирамиды, а высота, опущенная на плоскость основания – в два раза меньше.

Теперь выразим через V объём пирамиды $BCKL$. Заметим, что

$$V_{BCKL} = \frac{1}{2} V_{BCKD},$$

поскольку длина перпендикуляра, опущенного на плоскость BCK из точки L, в два раза меньше длины перпендикуляра, опущенного из точки D. Кроме того,

$$V_{BCKD} = \frac{1}{2} V_{BCSD},$$

поскольку $S_{BCK} = \dfrac{1}{2} S_{BCS}$. В результате получаем

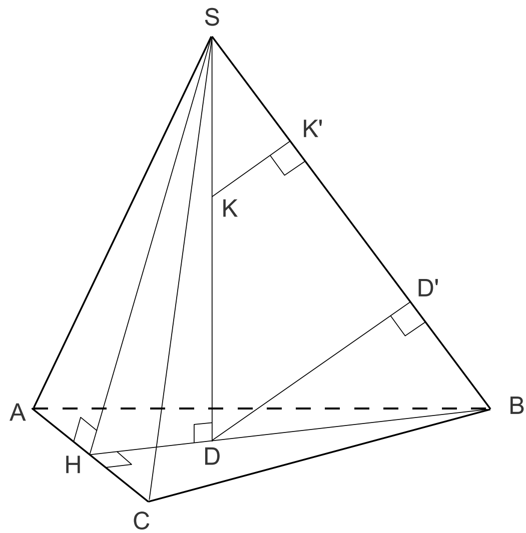
$$V_{ABCDKL} = V_{ABCDL} + V_{BCKL} = \frac{V}{2} + \frac{V_{BCKD}}{2} = \frac{V}{2} + \frac{V_{BCSD}}{4} = \frac{V}{2} + \frac{V}{8} = \frac{5V}{8}.$$

Ответ. $3:5$.

Задача 7.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD. На отрезке SD взята точка K так, что $SK : KD = 1 : 2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\frac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $\frac{4}{\sqrt{13}}$. Найти объём пирамиды.

Идея. Рассмотреть сечение пирамиды плоскостью, проходящей через её высоту и боковое ребро.
Указание. Опустить перпендикуляры из точек K и D на ребро SB и воспользоваться подобием полученных прямоугольных треугольников.



Решение. Рассмотрим высоту BH правильного треугольника ABC, лежащего в основании правильной пирамиды $SABC$. Так как основание высоты пирамиды совпадает с центром треугольника ABC, то $D \in BH$ и $BD = 2HD$.

Заметим, что HD является проекцией наклонной HS и $HD \perp AC$. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах $SH \perp AC$. Значит, угол между основанием и боковой гранью равен $\angle SHD = 30^\circ$.

Пусть $HD = x$, тогда $BD = 2x$ и $SD = x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}$. По теореме Пифагора из ΔBDS получим, что $SB = x\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Теперь проведём высоту DD' в прямоугольном треугольнике BDS. Так как $SK : SD = 1 : 3$ по условию, то из подобия треугольников SKK' и SDD' следует, что $DD' = 3 \cdot KK' = \frac{12}{\sqrt{13}}$.

Найдём x из соотношения подобия треугольников SBD и DBD':

$$\frac{SB}{SD} = \frac{DB}{DD'} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x\sqrt{\frac{13}{3}}}{\frac{x}{\sqrt{3}}} = \frac{2x}{\frac{12}{\sqrt{13}}} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 6.$$

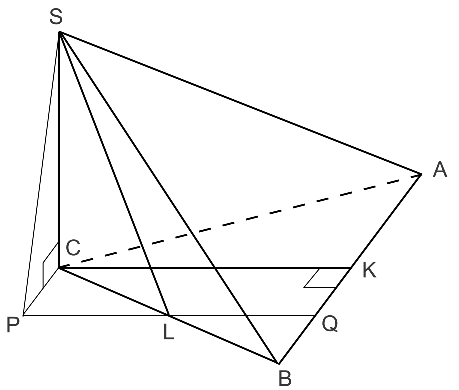
Следовательно, $BH = 3x = 18$, $S_{ABC} = 3\sqrt{3}x^2 = 108\sqrt{3}$ и

$$V = \frac{1}{3} \cdot SD \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 108\sqrt{3} = 216.$$

Ответ. 216.

Задача 8.

Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.



И д е я. Перенести одну из скрещивающихся прямых таким образом, чтобы искомый угол можно было найти как угол между двумя пересекающимися прямыми.

У к а з а н и е. Рассмотреть прямую, проходящую через середину отрезка BC и параллельную прямой CK, где K – середина AB.

Р е ш е н и е. Пусть K – середина AB, а L – середина BC. Перенесём отрезок CK в отрезок PQ вдоль прямой AB так, что $L \in PQ$. Искомый угол равен углу $\angle SLP$, который можно найти из соответствующего треугольника. Вычислим длины его сторон SP и PL. Так как $SC \perp ABC$, то треугольник SCP – прямоугольный и

$$SP = \sqrt{SC^2 + CP^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{KB}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6}.$$

Поскольку CK – медиана равностороннего треугольника, $\angle CKQ = 90^\circ$, параллелограмм $CKQP$ является прямоугольником и $PL = \sqrt{CL^2 - CP^2} = \sqrt{6}$.

Теперь найдём угол $\angle SPL$. Отрезок CP (проекция наклонной SP) перпендикулярен прямой PL, следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах, и сама наклонная SP перпендикулярна этой прямой. То есть треугольник SLP является равнобедренным прямоугольным треугольником и искомый угол $\angle SLP = 45^\circ$.

Осталось найти расстояние между скрещивающимися прямыми CK и SL. Так как $CK \parallel PQ \subset SLP$, то $CK \parallel SLP$. Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от прямой CK до плоскости SLP и равно высоте h тетраэдра $PCLS$, проведённой из вершины C. Для того чтобы найти эту высоту, воспользуемся формулой объёма тетраэдра. С одной стороны,

$$V_{PCLS} = \frac{SC}{3} \cdot S_{CLP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

С другой стороны,

$$V_{PCLS} = \frac{h}{3} \cdot S_{SLP} = \frac{h}{3} \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{2} = h \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

О т в е т. $2/\sqrt{3}$.

6.3. Тела вращения

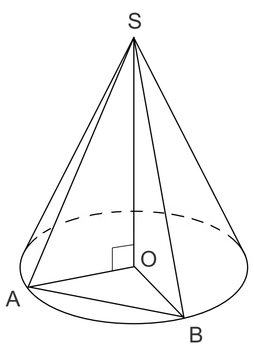
Задача 1.

Плоское сечение SAB, проходящее через вершину S прямого кругового конуса, имеет площадь $60\,\text{см}^2$. Точки A и B, лежащие на окружности основания конуса, делят её длину в отношении $1:5$. Найти объём конуса, если угол $\angle SAB$ равен $\arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)$.

Идея. Найти радиус основания конуса из уравнения для площади сечения.
Указание. Выразить стороны треугольника SAB через радиус основания конуса и приравнять выражение для площади ΔSAB числу 60.

Решение. Сначала выразим длину отрезка AB через радиус основания R. Пусть O – центр основания конуса. По условию задачи длина дуги AB составляет одну шестую всей длины окружности, следовательно, $\angle AOB = 60^\circ$, треугольник AOB – равносторонний и $AB = R$. Теперь выразим через R длину отрезка SA:

$$SA = \frac{AB}{2} : \cos\angle SAB = \frac{R}{2} : \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{R\sqrt{29}}{4}.$$



Приравняем выражение для площади ΔSAB числу 60:

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}\cdot SA\cdot AB\cdot\sin\angle SAB = 60 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{29}}{4}\cdot R\cdot\frac{5}{\sqrt{29}} = 60 \quad\Longleftrightarrow\quad R = 4\sqrt{6}.$$

Из прямоугольного треугольника ΔAOS найдём высоту конуса SO:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{29R^2}{16} - R^2} = R\frac{\sqrt{13}}{4} = \sqrt{78}.$$

В результате объём конуса равен

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot SO = \frac{1}{3}\cdot 96\pi\cdot\sqrt{78} = 32\pi\sqrt{78}.$$

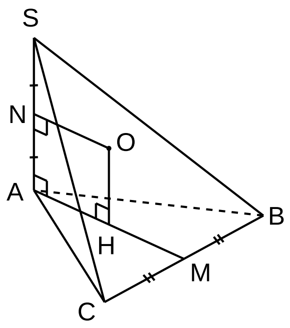
Ответ. $32\pi\sqrt{78}\,\text{см}^3$.

Задача 2.

Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной 6. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 4. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

Идея. Использовать то, что центр описанного шара лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведённом через центр окружности, описанной около основания пирамиды.
Указание. Центр описанного шара лежит на перпендикуляре, проведённом через центр треугольника, лежащего в основании пирамиды.
Указание. Использовать то, что центр шара лежит на серединном перпендикуляре к боковому ребру.

Решение. Пусть боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания пирамиды $ABCS$. Пусть H – центр основания ABC, то есть точка H лежит на медиане AM и $AH = \dfrac{2}{3}AM$.



Центр описанного шара лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведённом через точку H. Следовательно, $OH \parallel SA$ и центр O лежит в плоскости ASH. Так как центр шара равноудалён от точек A и S, то O принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку SA, проведённому в плоскости ASH.

Таким образом, точка O есть точка пересечения этого серединного перпендикуляра и перпендикуляра, проведённого к отрезку AM из точки H в плоскости ASH. Заметим, что полученный четырёхугольник $AHON$ (см. рисунок) является прямоугольником.

Искомый радиус OA найдём из прямоугольного треугольника AOH, катеты которого равны соответственно

$$OH = \frac{1}{2}SA = 2, \quad AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot AC = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6 = 2\sqrt{3}.$$

По теореме Пифагора

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 = 2^2 + 4\cdot 3 = 16 \quad\Longrightarrow\quad OA = 4.$$

Ответ. 4.

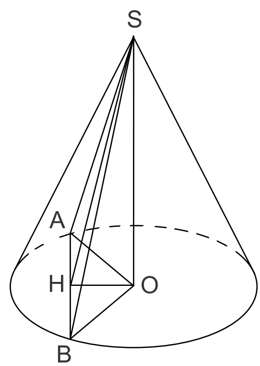
Задача 3.

Угол в осевом сечении прямого кругового конуса равен α. Через его вершину под углом β к оси конуса $(\beta < \dfrac{\alpha}{2})$ проведена плоскость. Найти угол x между двумя образующими конуса, по которым проведенная плоскость пересекает его поверхность.

Идея. Рассмотреть тетраэдр, основанием которого является указанное сечение, а вершиной – центр основания конуса. Выразить высоту конуса и высоту равнобедренного треугольника, являющегося основанием тетраэдра, через длину образующей.

Указание. Угол между осью конуса и высотой равнобедренного треугольника, получившегося в сечении конуса, является углом между плоскостью сечения и осью конуса.

Решение. Пусть S – вершина прямого кругового конуса, l – его образующая, O – центр основания, ABS – сечение конуса, проведённое под углом β к оси конуса, H – середина AB.



Покажем, что $\angle HSO = \beta$. Так как $SH \perp AB$ и $OH \perp AB$ (как медиана равнобедренного треугольника), то вся плоскость $SHO \perp AB$ и любая прямая этой плоскости при проектировании на плоскость сечения проектируется в прямую SH. Следовательно, SH есть проекция наклонной SO и угол $\angle HSO$ есть угол между плоскостью сечения ABS и осью конуса, то есть $\angle HSO = \beta$.

Найдём $\cos\dfrac{x}{2}$ из прямоугольного треугольника HSB. Для этого сначала найдём SO из прямоугольного треугольника BSO:

$$SO = BS\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = l\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Теперь найдём SH из прямоугольного треугольника HSO:

$$SH = \frac{SO}{\cos\beta} = \frac{l\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\beta}.$$

В результате косинус половины искомого угла равен

$$\cos\angle HSB = \frac{SH}{BS} = \frac{l\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\beta} : l = \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\beta}.$$

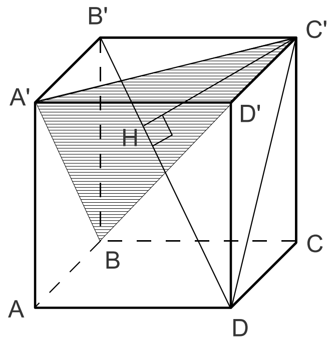
Ответ. $2\arccos\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$.

Задача 4.

Ребро куба равно a. Найти объём прямого кругового цилиндра, вписанного в куб так, что осью его является диагональ l куба, а окружности оснований касаются тех диагоналей граней куба, которые не имеют общих точек с диагональю l куба.

Идея. Для каждого из концов диагонали l рассмотреть треугольник, вершинами которого являются три ближайших вершины куба, и показать, что основание цилиндра вписано в этот треугольник.

Указание. Доказать, что плоскость этого треугольника перпендикулярна диагонали l.



Решение. Рассмотрим куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром, равным a и диагональю $l = DB'$. Покажем, что плоскость $A'BC'$ перпендикулярна диагонали DB'.

Рассмотрим треугольник $B'C'D$ с высотой $C'H$. Он прямоугольный, так как ребро $B'C'$ перпендикулярно плоскости грани $CDD'C'$. Из аналогичных соображений треугольник $B'A'D$ также является прямоугольным. Из равенства этих треугольников (по катету и гипотенузе) следует равенство проекций катетов на гипотенузу. Следовательно, точка H является основанием высоты и для $\Delta B'A'D$.

Поскольку диагональ l перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости $A'HC'$, плоскость $A'HC' \perp l$. Другими словами, плоскость, перпендикулярная прямой l и проходящая через точку H, содержит вершину куба A'. Из аналогичных соображений эта плоскость содержит и вершину B.

По условию задачи окружности оснований цилиндра касаются тех диагоналей граней куба, которые не имеют общих точек с диагональю l, в частности диагоналей $A'B$, BC' и $A'C'$. Так как плоскость $A'BC' \perp l$, то этих диагоналей может касаться только одна из окружностей основания конуса, причём только если она вписана в треугольник $A'BC'$. Выразим радиус этой окружности и диагональ куба через a:

$$r = \frac{1}{3}\cdot\sin 60^\circ\cdot A'C' = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}a = \frac{a}{\sqrt{6}};\quad l = B'D = \sqrt{(B'C')^2 + C'D^2} = a\sqrt{3},$$

Для того чтобы найти высоту цилиндра, выразим через a длину отрезка $B'H$:

$$\sin\angle C'DB' = \sin\angle B'C'H \quad\Longrightarrow\quad \frac{a}{l} = \frac{B'H}{a} \quad\Longrightarrow\quad B'H = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

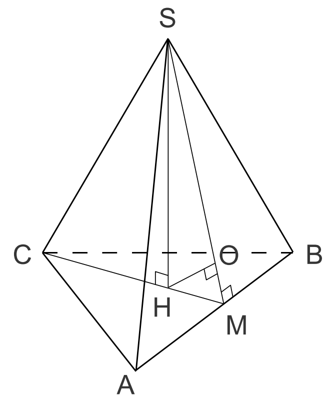
Заметим, что второе основание цилиндра вписано в треугольник ACD', плоскость которого также отсекает от диагонали l одну треть. Следовательно, высота цилиндра равна

$$h = \frac{l}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad\Longrightarrow\quad V = \pi r^2\cdot h = \pi\cdot\frac{a^2}{6}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}.$$

Ответ. $\pi a^3\sqrt{3}/18$.

Задача 5.

Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.



И д е я. Рассмотреть сечение пирамиды, проходящее через высоту пирамиды и ось конуса.

У к а з а н и е. Использовать подобие прямоугольных треугольников и то, что центр основания конуса является точкой пересечения биссектрис соответствующей боковой грани пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть SH – высота пирамиды $ABCS$, а окружность основания конуса с вершиной H вписана в боковую грань ABS. В этом случае осью конуса будет являться отрезок HO, где O – центр окружности, вписанной в треугольник ABS. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту пирамиды и боковое ребро SC. Поскольку пирамида правильная, сечение будет проходить через середину ребра AB, точку M. Центр основания конуса O будет лежать на биссектрисе SM, причём отрезок OM будет радиусом основания конуса r. Обозначим $\angle OAM = \alpha$. Так как AO – биссектриса угла $\angle SAM$, то $\angle SAM = 2\alpha$. Выразим $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$ через r и составим соответствующее уравнение для r с помощью формулы тангенса двойного угла.

Из прямоугольного треугольника AOM получим $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{OM}{AM} = \dfrac{r}{\sqrt{7}}$. Из прямоугольного треугольника ASM получим $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{SM}{AM} = \dfrac{SM}{\sqrt{7}}$. Для того чтобы выразить длину отрезка SM через r, воспользуемся подобием прямоугольных треугольников HOM и SHM. Получим

$$\frac{r}{HM} = \frac{HM}{SM} \quad \Longrightarrow \quad SM = \frac{HM^2}{r}.$$

Так как $HM = \dfrac{1}{3}CM = \dfrac{1}{3}\cdot AC\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$, то $SM = \dfrac{7}{3r}$ и $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{SM}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3r}$.

Теперь составим уравнение для r с помощью формулы тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{7}}{3r} = \frac{2r\sqrt{7}}{7-r^2} \quad \Longleftrightarrow \quad 7-r^2 = 6r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 = 1,$$

откуда $r = 1$.

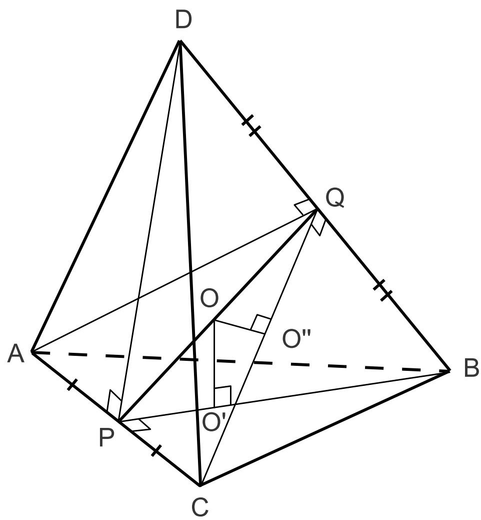
О т в е т. 1.

Задача 6.

В треугольной пирамиде длины двух непересекающихся рёбер равны 12 и 4, а остальные рёбра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Найти расстояние от центра сферы до ребра длины 12.

Идея. Найти на бимедиане, соединяющей середины неравных рёбер, точку, равноудалённую от всех граней тетраэдра.
Указание. Показать, что любая точка этой бимедианы находится на одинаковом расстоянии от равных граней.

Решение. Рассмотрим пирамиду $ABCD$, у которой рёбра $AC = 4$, $BD = 12$, а длины остальных рёбер равны 7. Пусть PQ – бимедиана, соединяющая середины рёбер AC и BD. Найдём точку $O \in PQ$, равноудалённую от всех четырёх граней тетраэдра. Это и будет центр вписанной сферы.



Заметим, что плоскость $BDP \perp AC$ и угол $\angle BPD$ есть угол между плоскостями ADC и ABC, поскольку $DP \perp AC$ (как медиана равнобедренного треугольника ADC), а $BP \perp AC$ (как медиана равнобедренного треугольника ABC). Так как PQ биссектриса угла BPD (как медиана равнобедренного треугольника BDP) и $PQ \perp AC$ $(PQ \subset BPD \perp AC)$, то $\angle(ADC, AQC) = \angle(ABC, AQC)$, то есть PQ лежит в биссекторной плоскости и любая точка прямой PQ равноудалена от плоскостей ADC и ABC.

Аналогичным образом показывается, что любая точка прямой PQ равноудалена от плоскостей BAD и BCD. Следовательно, если мы найдём точку $O \in PQ$ такую, что расстояния от неё до плоскостей ABC и BCD равны, то O будет равноудалена от всех четырёх граней тетраэдра.

Рассмотрим точку $O \in PQ$ и точку O' – проекцию точки O на прямую BP. Так как $OO' \subset BPD \perp AC$, то $OO' \perp AC$. Значит, OO' перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости ABC и, следовательно, $OO' \perp ABC$. Аналогичным образом доказывается, что отрезок OO'' (где O'' – основание перпендикуляра, опущенного из O на CQ) перпендикулярен плоскости BCD.

Пусть искомый отрезок $OQ = x$. Составим уравнение для x, приравняв длины отрезков OO' и OO'':

$$PO \cdot \sin\angle BPQ = QO \cdot \sin\angle CQP \iff (PQ - x) \cdot \frac{BQ}{BP} = x \cdot \frac{CP}{CQ}.$$

Найдём длины отрезков CQ, BP и PQ:

$$CQ = \sqrt{BC^2 - BQ^2} = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{13},$$

$$BP = \sqrt{BC^2 - CP^2} = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45},$$

$$PQ = \sqrt{CQ^2 - CP^2} = \sqrt{13 - 2^2} = 3.$$

Подставив эти значения в уравнение, получим

$$(3 - x) \cdot \frac{6}{\sqrt{45}} = x \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \iff \sqrt{13}(3 - x) = x\sqrt{5} \iff x = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13} + \sqrt{5}}.$$

О т в е т. $\dfrac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13} + \sqrt{5}}$.

Задача 7.

Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы радиуса 4 с центром в точке O. Найти угол BAC, если известно, что площадь треугольника OBC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

И д е я. Рассмотреть сечение сферы, проходящее через центр сферы перпендикулярно данным прямым.
У к а з а н и е. Найти синус угла $\angle BOC$, использовав информацию о том, что площадь треугольника OBC равна 4. Рассмотреть возможные значения величины угла $\angle BAC$. Произвести отбор согласно условию: площадь треугольника ABC больше 16.

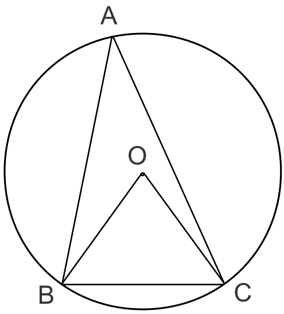
Р е ш е н и е. Так как радиусы OA, OB и OC перпендикулярны данным параллельным прямым и имеют общую точку, то все три отрезка (OA, OB и OC) лежат в одной плоскости. Рассмотрим сечение сферы этой плоскостью.

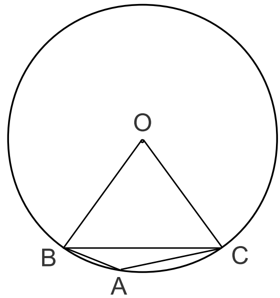
По условию задачи $S_{\Delta OBC} = 4$, следовательно,

$$\frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin\angle BOC = 4 \iff \sin\angle BOC = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим возможные варианты.

1) Если $\angle BOC = \dfrac{\pi}{6}$, то $\angle BAC = \dfrac{\pi}{12}$ (левый рисунок) или $\angle BAC = \dfrac{11\pi}{12}$ (правый рисунок).





В любом случае будет

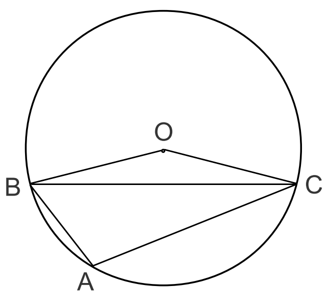
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC < \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16,$$

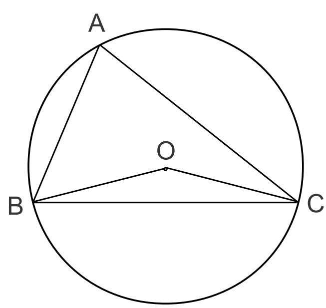
что противоречит условию.

2) Если $\angle BOC = \dfrac{5\pi}{6}$ и $\angle BAC = \dfrac{7\pi}{12}$ (левый рисунок), то

$$S_{\Delta ABC} < \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OA < \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16,$$

что также противоречит условию.





Остаётся единственно возможный вариант (правый рисунок): $\angle BOC = \dfrac{5\pi}{6}$ и $\angle BAC = \dfrac{5\pi}{12}$.

О т в е т. $\dfrac{5\pi}{12}$.

6.4. Комбинации тел

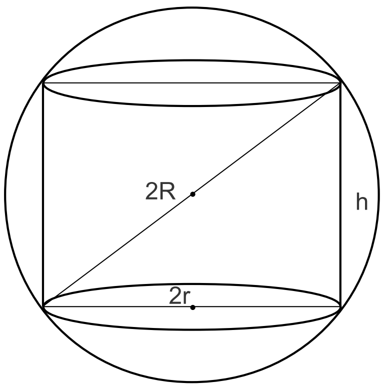
Задача 1.

В сферу радиуса R вписан прямой круговой цилиндр. Найти наибольшее значение площади боковой поверхности цилиндра и отношение его высоты к радиусу сферы в этом случае.

Идея. Представить выражение площади боковой поверхности цилиндра в виде функции от радиуса его основания и найти максимум этой функции.
Указание. Рассмотреть осевое сечение цилиндра и с помощью теоремы Пифагора выразить его высоту через радиус основания и радиус сферы.

Решение. Так как осевым сечением цилиндра будет прямоугольник с диагональю $2R$ и сторонами, равными $2r$ и h, где r – радиус основания цилиндра, h – его высота, то

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh = 2\pi r\sqrt{(2R)^2 - (2r)^2}.$$



Заметим, что функция $S^2_{\text{бок}} = 16\pi^2 r^2(R^2 - r^2)$ является квадратичной по r^2, её максимальное значение достигается при $r^2 = R^2/2$ и равно $(2\pi R^2)^2$.

Искомое отношение в этом случае равно

$$\frac{h}{R} = \frac{\sqrt{(2R)^2 - 2R^2}}{R} = \sqrt{2}.$$

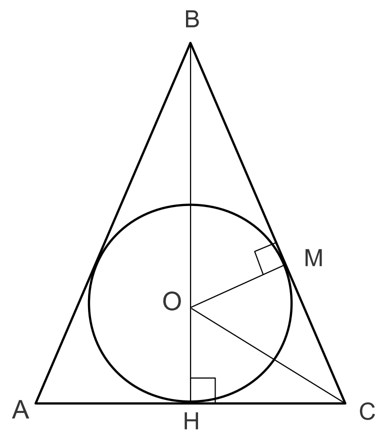
Ответ. $2\pi R^2$, $\sqrt{2}$.

Задача 2.

В прямой круговой конус вписан шар. Отношение объёма конуса и шара равно двум. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

Идея. Составить систему из трёх уравнений с четырьмя неизвестными: высота конуса, образующая, радиус основания и радиус вписанного шара. Выразить все неизвестные через какую-нибудь одну и подставить в искомое выражение.
Указание. Рассмотреть осевое сечение конуса.

Решение. Пусть треугольник ABC – осевое сечение конуса, тогда сечение сферы, вписанной в конус, будет окружностью, вписанной в этот треугольник, причём центр O этой окружности будет лежать на высоте BH. Обозначим $h = BH$, $l = BC$, $R = HC$, r – радиус вписанной окружности и выпишем уравнения, связывающие эти переменные.



1) Объём конуса в 2 раза больше объёма вписанного шара:

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2) Теорема Пифагора для треугольника BCH:

$$l^2 = h^2 + R^2.$$

3) Подобие треугольников OMB и CHB:

$$\frac{r}{R} = \frac{h-r}{l}.$$

Теперь выпишем искомое выражение (отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара):

$$\frac{\pi R^2 + \pi Rl}{4\pi r^2} = \frac{R^2 + Rl}{4r^2}.$$

Заметим, что для всех конусов, подобных нашему, мы получим один и тот же ответ, то есть мы можем рассмотреть наиболее удобный для нас с вычислительной точки зрения конус, например со вписанным шаром радиуса $r = 1$. В этом случае система примет вид

$$\begin{cases} R^2 h = 8, \\ l^2 = h^2 + R^2, \\ l = R(h-1), \\ \dfrac{R^2 + Rl}{4} - ? \end{cases}$$

Далее можно действовать одним из следующих способов.

1) Честно решить систему из трёх нелинейных уравнений, найти значения всех переменных ($R = \sqrt{2}$, $h = 4$, $l = 3\sqrt{2}$) и подставить эти значения в искомое выражение.

2) Подставить выражение для l в искомое выражение и использовать первое равенство системы:

$$\frac{R^2 + Rl}{4} = \frac{R^2 + R^2(h-1)}{4} = \frac{R^2 h}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

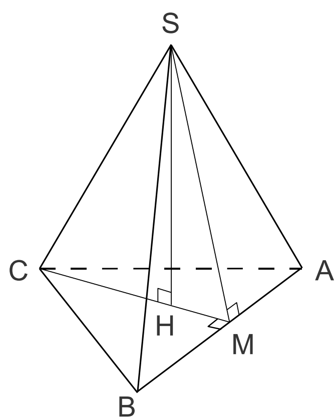
Ответ. 2.

Задача 3.

В правильную треугольную пирамиду помещены три шара так, что первый шар касается всех боковых граней пирамиды и второго шара, второй шар касается боковых граней пирамиды и третьего шара, а третий шар касается боковых граней, основания пирамиды и второго шара. Какую долю объёма пирамиды занимают три шара, если её боковые грани наклонены к основанию под углом α?

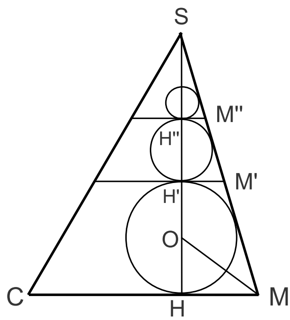
Идея. Рассмотреть сечение, проходящее через высоту пирамиды и апофему боковой грани.
Указание. Провести к трём окружностям, полученным в этом сечении, общие касательные и использовать подобие трёх полученных треугольников.
Указание. Выразить радиусы шаров, сторону основания пирамиды и её высоту через MH и α, где H – центр основания пирамиды, а M – середина стороны основания.

Решение. Рассмотрим сечение правильной пирамиды $ABCS$, проходящее через апофему SM и боковое ребро CS. Поскольку пирамида является правильной, $MC \perp AB$ и $\angle SMC$ есть угол между боковой гранью и основанием, то есть $\angle SMC = \alpha$.



Заметим, что третий шар касается всех граней пирамиды, то есть является шаром, вписанным в правильную пирамиду, следовательно, точка касания боковой грани принадлежит апофеме. Кроме того, центр шара O лежит на высоте пирамиды SH, причём H является центром треугольника ABC и точкой касания шара с основанием пирамиды.

Первый и второй шары также вписаны в трёхгранный угол с вершиной S, следовательно, их центры также принадлежат высоте SH (прямой пересечения биссекторных плоскостей трёхгранного угла), а точки касания с боковой гранью ABS принадлежат апофеме SM. Поэтому в сечении SMC мы получим три окружности, касающиеся отрезка SM, с центрами на SH. Обозначим через H' и H'' точки касания третьего шара со вторым и второго с первым. Проведём через них общие касательные, которые пересекут отрезок SM в точках M' и M'' соответственно.



Пусть $a = MH$, $h_1 = SH$, $h_2 = SH'$, $h_3 = SH''$, тогда $r_1 = OH = a\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $h_1 = a\operatorname{tg}\alpha$. Выразим радиусы второго и третьего шара через r_1 и h_1.

Треугольники $SM'H'$ и SMH подобны с коэффициентом подобия

$$k_1 = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_1 - 2r_1}{h_1} = 1 - \frac{2r_1}{h_1} \quad \Longrightarrow \quad r_2 = k_1 r_1 = r_1\left(1 - \frac{2r_1}{h_1}\right).$$

Треугольники $SM''H''$ и $SM'H'$ подобны с коэффициентом подобия

$$k_2 = \frac{h_3}{h_2} = \frac{h_2 - 2r_2}{h_2} = 1 - \frac{2r_2}{h_2} \quad \Longrightarrow \quad r_3 = k_2 r_2 = r_2\left(1 - \frac{2r_2}{h_2}\right) = r_1\left(1 - \frac{2r_1}{h_1}\right)^2.$$

Сумма объёмов всех трёх шаров равна

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) = \frac{4}{3}\pi r_1^3\left(1 + \left(1 - \frac{2r_1}{h_1}\right)^3 + \left(1 - \frac{2r_1}{h_1}\right)^6\right).$$

Воспользовавшись тем, что $r_1 = a\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ и $h_1 = a\operatorname{tg}\alpha$, упростим выражение во внутренних скобках:

$$1 - \frac{2r_1}{h_1} = 1 - \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{4}{3}\pi a^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^6\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^{12}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Теперь выразим через a и α объём пирамиды

$$V = \frac{h_1}{3}\cdot\frac{MC\cdot AB}{2} = \frac{h_1}{3}\cdot\frac{3a\cdot 2\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}h_1a^2 = \sqrt{3}a^3\operatorname{tg}\alpha.$$

Искомое отношение равно

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3}{V} = \frac{\dfrac{4}{3}\pi a^3\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^6\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^{12}\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{3}a^3\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4\sqrt{3}\pi\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}}{9\operatorname{tg}\alpha}\left(1 + \operatorname{tg}^6\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^{12}\frac{\alpha}{2}\right).$$

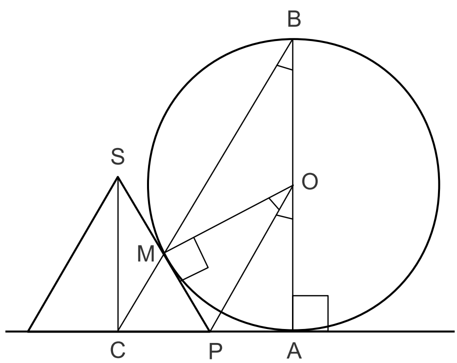
Ответ. $\dfrac{4\sqrt{3}\pi\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}}{9\operatorname{tg}\alpha}\left(1 + \operatorname{tg}^6\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^{12}\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Задача 4.

Сфера радиуса 2 касается плоскости в точке A. В той же плоскости лежит основание конуса. Прямая, проходящая через центр основания конуса (точку C) и точку сферы, диаметрально противоположную точке A, проходит через точку M. Точка M является точкой касания сферы и конуса (их единственная общая точка). Найдите высоту конуса, если $AC = 1$.

Идея. Рассмотреть сечение, проходящее через высоту конуса и центр сферы.
Указание. С помощью теоремы Фалеса показать, что радиус основания конуса равен половине отрезка AC.

Решение. Пусть S – вершина конуса, O – центр сферы. Высота конуса SC и радиус сферы OA параллельны, так как оба отрезка перпендикулярны данной плоскости. Рассмотрим секущую плоскость, проходящую через них. В этой плоскости будут лежать и точка B (диаметрально противоположная точке A), и точка M (точка касания сферы и конуса, которая принадлежит прямой CB по условию задачи).



Обозначим через P вершину треугольника, являющегося сечением конуса, ближайшую к точке A. Высоту конуса SC будем искать из прямоугольного треугольника SCP:

$$SC = CP \cdot \operatorname{tg} \angle CPS.$$

Сначала найдём CP. Пусть угол $\angle MBA = \alpha$, тогда

$$\angle MOA = 2\alpha, \quad \angle POA = \frac{\angle MOA}{2} = \alpha.$$

Из равенства соответственных углов следует параллельность прямых CB и PO, а из равенства $AO = OB$ и теоремы Фалеса следует равенство отрезков $CP = PA$. Так как по условию $AC = 1$, то $CP = PA = 1/2$.

Теперь выразим угол $\angle CPS$ через α и найдём длину катета SC:

$$\angle CPS = 180^\circ - \angle APM = 180^\circ - (180^\circ - \angle AOM) = 2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PA}{AO} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad SC = CP \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - (\operatorname{tg} \alpha)^2} = \frac{4}{15}.$$

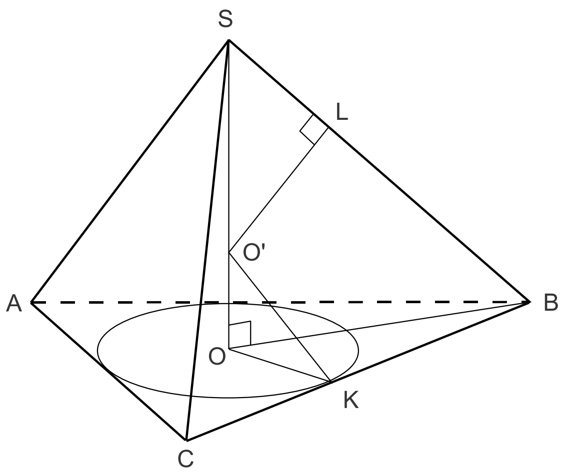
Ответ. $\dfrac{4}{15}$.

Задача 5.

Основанием правильной пирамиды является равносторонний треугольник со стороной a, а высота, опущенная на это основание, равна H, причём все шесть рёбер пирамиды касаются некоторой сферы. Найти радиус этой сферы.

Идея. Найти такую точку на прямой, содержащей высоту пирамиды $ABCS$, что расстояния от неё до ребра BC и прямой BS равны.
Указание. Опустить перпендикуляры на прямые BC, BS и получить систему из двух уравнений с двумя неизвестными, применив теорему Пифагора к двум получившимся прямоугольным треугольникам.

Решение. Рассмотрим правильную пирамиду $ABCS$ с высотой SO, в основании которой лежит равносторонний треугольник ABC со стороной a. Поскольку сфера касается рёбер основания пирамиды, сечение этой сферы плоскостью ABC есть окружность, вписанная в треугольник ABC. Так как пирамида является правильной, то основание её высоты (точка O) есть центр этой окружности. При этом центр самой искомой сферы будет лежать на прямой, перпендикулярной плоскости ABC, проходящей через точку O.



Найдём точку O' на прямой SO такую, что расстояния от неё до ребра BC и прямой BS равны. Обозначим основания соответствующих перпендикуляров через K и L соответственно. Заметим, что точка K есть точка касания окружности, вписанной в ΔABC, со стороной BC. Тогда искомый радиус равен $R = O'K = O'L$.

Пусть $h = OO'$, $r = OK$. По теореме Пифагора $h^2 + r^2 = R^2$. Теперь рассмотрим прямоугольные треугольники $O'SL$ и BSO. Они подобны по острому углу, следовательно,

$$\frac{O'L}{BO} = \frac{SO'}{SB}.$$

В случае, если точка O' лежит на отрезке SO, уравнение имеет вид:

$$\frac{R}{2r} = \frac{H - h}{\sqrt{H^2 + (2r)^2}}.$$

Если же точка O' лежит на продолжении отрезка SO за точку O, уравнение имеет вид:

$$\frac{R}{2r} = \frac{H+h}{\sqrt{H^2+(2r)^2}}.$$

В любом случае для h^2 получаем следующее выражение:

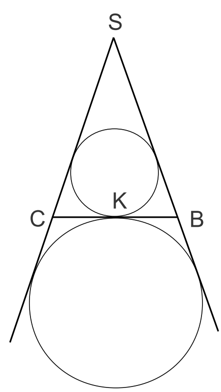
$$h^2 = \left(\frac{R\sqrt{H^2+(2r)^2}}{2r} - H\right)^2.$$

Таким образом, искомое значение R удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} h^2 + r^2 = R^2, \\ h^2 = \left(\dfrac{R\sqrt{H^2+(2r)^2}}{2r} - H\right)^2 \end{cases} \Longrightarrow \quad \left(\frac{R\sqrt{H^2+(2r)^2}}{2r} - H\right)^2 + r^2 = R^2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$R^2H^2 - 4RrH\sqrt{H^2+(2r)^2} + 4r^2H^2 + 4r^4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad R = \frac{2r\sqrt{H^2+(2r)^2}}{H} \pm \frac{2\sqrt{3}r^2}{H}.$$

Заметим, что существуют две различных сферы, касающиеся прямых, содержащих рёбра нашей пирамиды. Сечение первой сферы плоскостью боковой грани BCS есть окружность, вписанная в треугольник BCS, сечение второй сферы этой плоскостью есть вневписанная окружность.



По условию задачи интересующая сфера касается боковых рёбер (а не их продолжений), поэтому в качестве её радиуса возьмём меньшее из полученных значений,

$$R = \frac{2r\sqrt{H^2+(2r)^2}}{H} - \frac{2\sqrt{3}r^2}{H}.$$

Осталось выразить ответ через H и a:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{a\sqrt{3H^2+a^2}}{3H} - \frac{a^2}{2\sqrt{3}H}.$$

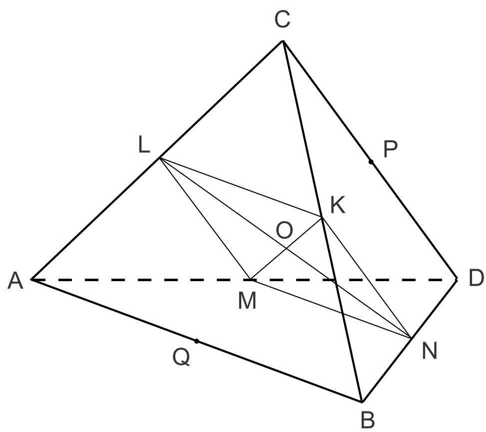
О т в е т. $\dfrac{a\sqrt{3H^2+a^2}}{3H} - \dfrac{a^2}{2\sqrt{3}H}$.

Задача 6.

Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD. Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра BC параллельно прямым CD и AB. Площадь боковой поверхности конуса равна $9\pi\sqrt{3}$. Найдите длину ребра тетраэдра.

Идея. Доказать, что данное сечение является квадратом.

Указание. Показать, что бимедианы правильного тетраэдра перпендикулярны друг другу и равны между собой.



Решение. Пусть плоскость данного сечения α правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром длины a проходит через точку K – середину ребра CB.

Так как по условию задачи $\alpha \parallel CD$, то α пересекает плоскость BCD по прямой $KN \parallel CD$, причём KN – средняя линия равностороннего треугольника BCD.

Так как $\alpha \parallel AB$, то α пересекает плоскость ABC по прямой $KL \parallel AB$, причём KL – средняя линия равностороннего треугольника ABC.

Рассмотрим отрезок MN – среднюю линию треугольника ABD:

$$MN \parallel AB, \quad AB \parallel KL \quad \Longrightarrow \quad MN \parallel KL \quad \Longrightarrow \quad MN \subset \alpha,$$

следовательно, сечением данного тетраэдра плоскостью α является четырёхугольник $KLMN$, вершинами которого являются середины соответствующих рёбер. Заметим, что стороны этого четырёхугольника являются средними линиями соответствующих граней тетраэдра, следовательно, $KLMN$ – ромб со стороной $a/2$. Более того, $KLMN$ – квадрат, поскольку

$$AD = AC = a, \quad AK = KD = AN = NC \text{ (как медианы равных граней тетраэдра)}$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta AKD = \Delta ANC \quad \Longrightarrow \quad MK = LN \text{ (как медианы равных треугольников).}$$

Замечание. По ходу дела мы доказали, что бимедианы правильного тетраэдра, во-первых, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам (это верно и для любого произвольного тетраэдра), во-вторых, равны и взаимно перпендикулярны.

Получается, что основание конуса вписано в квадрат $KLMN$ со стороной $a/2$, то есть радиус основания конуса равен $R = a/4$. Согласно замечанию, бимедиана PQ проходит через точку O (центр квадрата $KLMN$) и $PQ \perp MK$, $PQ \perp LN$, следовательно, $PQ \perp \alpha$ и PO – высота конуса.

Найдём длину бимедианы PQ из треугольника CDQ со сторонами

$$CD = a, \quad CQ = DQ = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

и высотой

$$PQ = \sqrt{DQ^2 - DP^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, высота конуса

$$h = PO = \frac{PQ}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{4},$$

а площадь боковой поверхности

$$S_{\text{бок}} = \pi Rl = \pi R\sqrt{R^2 + h^2} = \frac{\pi a}{4}\sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{2a^2}{16}} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{16}.$$

Приравняв это выражение значению $9\pi\sqrt{3}$, найдём a:

$$\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{16} = 9\pi\sqrt{3} \quad \Longleftrightarrow \quad a = 12.$$

Ответ. 12.

Задача 7.

В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $DC = 9$, ребро $DB = AD$, а ребро AC перпендикулярно к грани ABD. Сфера радиуса 2 касается грани ABC, ребра DC, а также грани ABD в точке пересечения её медиан. Найти объём пирамиды.

Идея. Обозначить за неизвестные длины рёбер, выходящих из вершины A, и составить систему из трёх уравнений с этими неизвестными.
Указание. Записать теорему Пифагора для ΔADC. Выразить длину медианы DH треугольника ABD через радиус сферы и записать теорему Пифагора для ΔADH.
Указание. Последнее уравнение можно получить, применив теорему Пифагора к треугольнику $\Delta CO''Q$, где O'' – проекция центра сферы O на плоскость ABC, а Q – проекция точки O'' на прямую AC.

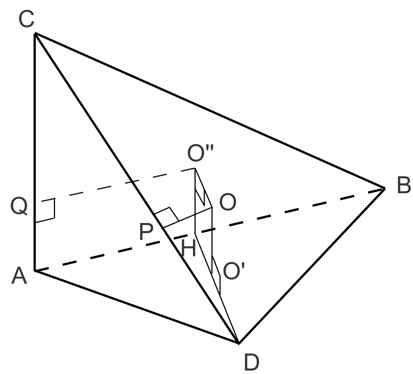
Решение. Пусть O – центр данной сферы, а O', O'' и P – точки касания этой сферы с гранями ABD, ABC и ребром DC соответственно.

Рассмотрим плоскость α, перпендикулярную прямой AB, проходящую через точку O. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной плоскости, то $OO' \subset \alpha$ и $OO'' \subset \alpha$. Обозначим через H точку пересечения прямой AB с плоскостью α.

Покажем, что $OO'HO''$ – квадрат. Поскольку $\alpha \perp AB$, отрезки $O'H$ и $O''H$ перпендикулярны AB. Кроме того, $\angle O'HO'' = 90^\circ$, так как из перпендикулярности ребра AC и плоскости ABD следует перпендикулярность плоскостей ABC и ABD. Таким образом, углы при вершинах O', O'' и H четырёхугольника $OO'HO''$ прямые, следовательно, он является прямоугольником. Так как две смежные стороны равны ($OO' = OO'' = 2$), то этот прямоугольник является квадратом.

Для того чтобы найти площадь основания тетраэдра, нам надо найти высоту треугольника ABD. Так как по условию задачи O' есть точка пересечения медиан равнобедренного треугольника ABD, то $O' \in DH$, где DH является медианой и высотой одновременно. Следовательно,

$$DO' = 2HO' = 2OO'' = 4 \quad \Longrightarrow \quad DH = 6.$$



Обозначим $h = AC$, $a = AD$, $b = AH$ и составим три уравнения с этими неизвестными. По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников AHD и ACD получим

$$a^2 = b^2 + 6^2, \quad a^2 + h^2 = 9^2.$$

Теперь запишем теорему Пифагора для треугольника $CO''Q$, где Q – основание перпендикуляра, опущенного из точки O'' на прямую AC. Так как четырёхугольник $AHO''Q$ является прямоугольником, то $AQ = HO'' = 2$, $QO'' = AH = b$, следовательно,

$$O''C^2 = (h-2)^2 + b^2.$$

Длину гипотенузы $O''C$ найдём с помощью равенства касательных, проведённых из одной точки:

$$O''C = CP = 9 - DP = 9 - DO' = 9 - 4 = 5.$$

Из полученной системы найдём b и h:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 6^2, \\ a^2 + h^2 = 9^2, \\ (h-2)^2 + b^2 = 5^2; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} b^2 + h^2 = 45, \\ (h-2)^2 + b^2 = 5^2; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b = 3, \\ h = 6. \end{cases}$$

Следовательно, объём тетраэдра равен

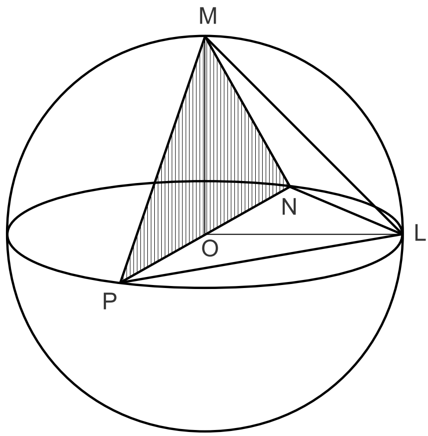
$$V = \frac{h}{3} \cdot S_{ABD} = \frac{h}{3} \cdot 6b = 36.$$

Ответ. 36.

Задача 8.

Отрезок PN – диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN, если T – середина ребра ML.

Идея. Объём пирамиды $PNML$ максимален в случае, когда отрезки OM и OL перпендикулярны диаметру PN и друг другу.
Указание. Показать, что проекцией наклонной NT является отрезок NH, где H – середина MO.



Р е ш е н и е. Сначала определим положение точек M и L на сфере. Так как расстояние от любой точки сферы до диаметра не превосходит радиуса сферы R, то

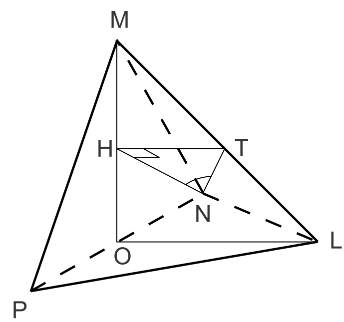
$$V_{PNML} \le \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta PNL} \cdot R \le \frac{1}{3} \cdot \frac{PN \cdot R}{2} \cdot R,$$

причём максимум достигается тогда, когда перпендикуляры, опущенные из точки L на прямую PN и из точки M на плоскость PNL, приходят в центр сферы O. Это значит, что грани тетраэдра PNM и PNL являются равными равнобедренными треугольниками с взаимно перпендикулярными высотами $MO = R$ и $LO = R$ соответственно.

Рассмотрим треугольник MOL. Его средняя линия $TH \perp PMN$, так как $TH \parallel OL$, а $OL \perp PMN$. Следовательно, отрезок NH есть проекция наклонной NT и искомый угол между прямой NT и плоскостью PMN есть угол $\angle TNH$. Для того чтобы вычислить $\sin\angle TNH$, нам понадобится найти HT и NT.

Отрезок HT – средняя линия треугольника MOL, следовательно,

$$HT = \frac{OL}{2} = \frac{R}{2}.$$



Отрезок NT найдём как медиану треугольника MNL. Заметим, что все стороны этого треугольника равны $R\sqrt{2}$, следовательно, его медиана равна

$$NT = R\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{6}}{2}.$$

В результате

$$\sin\angle TNH = \frac{HT}{NT} = \frac{R/2}{R\sqrt{6}/2} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

О т в е т. $1/\sqrt{6}$.

Ответы

1.1.

1. $|AC| > |BK|$.
2. $|AB| = 5$.
3. Длины боковых сторон равны $\dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, длина основания равна $\dfrac{2mn}{\sqrt{4m^2-n^2}}$.
4. $\dfrac{c\sin 2\alpha}{\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)}$.
5. $|BL| > |BG|$.
6. $|AC| = \sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{5}}$.
7. $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$.
8. $|AB| = 1+6\sqrt{2}$, $|BC| = 5\sqrt{3}$, $|AC| = 2$.
9. $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{24}{25}$ и $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{24}{25}$.
10. $\dfrac{b}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma}$.
11. $\sqrt{\dfrac{2}{4-\pi}}$.
12. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.
13. $\dfrac{\pi}{2}$.
14. $\dfrac{200}{3}$.
15. $\dfrac{6}{5}$.
16. 10.
17. 3 и 4 или $\sqrt{\dfrac{5}{2}}+\sqrt{\dfrac{15}{2}}$ и $\sqrt{\dfrac{15}{2}}+\sqrt{\dfrac{45}{2}}$.
18. $\operatorname{arctg} 3$.
19. $\dfrac{3\pi}{8}$.
20. $|BN| < |CL|$.
21. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\varphi\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi-8}}{4}\right)$, $\varphi\in[\operatorname{arctg}2\sqrt{2};\pi/2)$.
22. 12.
23. $\dfrac{\sqrt{25a^2+36b^2}}{10}$.
24. $h\sqrt{2}$.
25. $\dfrac{8\sqrt{10}}{3}$.
26. $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.
27. $\dfrac{9\sqrt{65}}{5}$ или $\sqrt{25+\dfrac{96}{\sqrt{17}}}$.
28. $|AC| = \sqrt{7}$.
29. $\dfrac{5\sqrt{13}}{12}$.
30. 6.
31. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.
32. $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha(2\cos 2\alpha+1)^2$.
33. 40.
34. $\dfrac{12}{5}$.
35. 25.

1.2.

1. $\dfrac{3(\sqrt{3}\pm 1)}{2}$.
2. $\dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.
3. $10\sqrt{3}$.

5. $\dfrac{\pi}{3}$.
6. $\sqrt{2}$.
7. а) $\dfrac{|AM|}{|MC|} = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$.

   б) $|AM| = \dfrac{4\sqrt{2}}{5+4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{41-10(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$,

   $|MC| = \dfrac{5}{5+4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{41-10(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$.
8. $\dfrac{5}{13}\sqrt{119}$.
9. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.
10. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}$.
11. $R\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$.
12. 2.
13. $\dfrac{a\sin(\alpha+\beta)(4-3\cos^2\beta)}{12\sin\alpha\sin\beta}$.

14. 11.

15. $\widehat{BOC} = 112,5^\circ$.

16. $\dfrac{23}{17}$.

17. $|AB| = |BC| = 4 + 2\sqrt{3}$,
$|AC| = 6 + 4\sqrt{3}$.

18. $\dfrac{91(6-\sqrt{6})}{30}$.

19. $\dfrac{25}{3}$.

20. $3 + 6\sqrt{6}$.

21. 5.

22. $\dfrac{15}{4}$.

23. $6\sqrt{\dfrac{3}{19}}$.

24. $|AC| = |BC| = 2 + \sqrt{2}$,
$|AB| = 2 + 2\sqrt{2}$.

25. 1.

26. $2\sqrt{\dfrac{183}{7}}$.

27. $\dfrac{78 - 30\sqrt{2}}{17}$.

28. $\dfrac{8}{5}$.

29. $\dfrac{39}{24}$.

30. $\widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 2\arcsin\dfrac{\sqrt{8k^2+1}-1}{4k}$,
$\widehat{ABC} = \pi - 4\arcsin\dfrac{\sqrt{8k^2+1}-1}{4k}$,
задача имеет решение при всех $k > 0$.

31. 1.

32. 6.

33. 4.

34. $1 + \sqrt{6}$, $\quad 2\sqrt{10}$.

35. $5\sqrt{5}$.

36. $\dfrac{1}{2k}$.

1.3.

1. $\sqrt{\dfrac{2S}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}}$.

2. $\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$.

3. 1.

4. $\sqrt{2c^2 + \dfrac{c^3}{b}}$.

5. $S = \dfrac{1}{\sqrt{abcd}}$, где
$a = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$, $b = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}$,
$c = \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$, $d = -\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$.

6. 30.

7. 18.

8. $\dfrac{12}{5}$.

9. $3 - \sqrt{3}$.

10. $\sqrt{7}$.

11. $\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}$.

12. $\dfrac{\pi}{28}$.

13. $\dfrac{15}{16}\sqrt{7}$.

14. $30^\circ, 90^\circ$.

15. $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

16. $\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)$.

17. $\arccos\dfrac{4m^2 - b^2 - c^2}{2bc}$.

18. $\dfrac{\pi}{3}$.

19. $\dfrac{8\sqrt{15}}{3}$.

20. $\arccos\dfrac{3}{5}, \arccos\dfrac{4}{5}$.

21. $2\sqrt{10} - 5$.

22. $3(\sqrt{2} - 1)$.

23. $\dfrac{\sqrt{190}}{2}$.

24. $6\sqrt{19}$.

25. $|NA| = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, $|NB| = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$,
$|NC| = R$.

26. $\dfrac{\sqrt{c^2k^2 + c^2h^2 \pm 2ckh\sqrt{c^2-k^2}}}{k}$.

27. $\dfrac{7\sqrt{3}h^2}{12}$, $\dfrac{7\sqrt{3}h^2}{30}$, $\dfrac{(-13\sqrt{3} + \sqrt{627})h^2}{120}$.

28. $|AB| = \dfrac{\sqrt{l^2(p+q)^2 + 4p^2q^2}}{2q}$,

$|BC| = \dfrac{\sqrt{l^2(p+q)^2 + 4p^2q^2}}{2p}$,

$|AC| = \dfrac{\sqrt{l^2(p^2-q^2)^2 + 4p^2q^2(p+q)^2}}{2pq}$.

29. $\dfrac{3\pi}{10}$.

30. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

31. $R_{\triangle ADC} = \dfrac{8\sqrt{6}}{3}$, $R_{\triangle ADC} > \dfrac{13}{2}$.

32. 5.

33. $a\dfrac{\sqrt{3r^2-a^2}}{6}$.

34. $\dfrac{|BC|}{|CA|} = \dfrac{l+m}{l+k}$, $\dfrac{|LC|}{|CO|} = \dfrac{k+l+m}{l}$.

35. $\dfrac{2}{3}$.

36. $\sqrt{\dfrac{b^2}{2} - a^2}$.

1.4.

1. $202,8$.
2. 15.
3. $\dfrac{24}{7}$.
4. $\dfrac{12}{7}$.
5. $\dfrac{\pi}{6}$.
6. $\dfrac{27}{8}$.
7. $3\sqrt{3}$.
8. $\dfrac{2pq+q^2}{p+q}$.
9. 18.
10. $\sqrt{a^2+ab}$.
11. $n : m$.
12. 10.
13. $18 : 7$.
14. $5 : 2$.
15. $2\sqrt{7}$.
16. $1 : 1$.
17. $\dfrac{2}{3}\sqrt{145}$.
18. $|AE| : |EC| = \dfrac{xy-1}{y+1}$,

$|BD| : |DC| = \dfrac{xy-1}{x+1}$.

19. $|QR| = 3$, $\widehat{QRP} = \arccos\left(\dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{12}\right)$.
20. $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.
21. $2\sqrt{3}$.
22. $|BE| = 9$, $P_{\Delta ABC} = 45$.
23. 5.
24. $\sqrt{b^2-d^2}$.
25. $6\sqrt{3}$.
26. $\dfrac{\sqrt{105}}{4}$.
27. $25\sqrt{3}$.
28. $\dfrac{96}{25}$.
29. $4\sqrt{10} - 2\sqrt{15}$.
30. $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}+1}$.
31. $64, 80, 100$ и $80, 100, 125$.

1.5.

1. 2.
2. $\dfrac{147}{8}$.
3. $\sqrt{\dfrac{3a^2+8c^2}{35}}$.
4. $\dfrac{108}{5}$.
5. $\dfrac{16}{3}$ м^2 или $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$ м^2.
6. $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{6}$.
7. $\dfrac{16}{9}$.
8. $\dfrac{1}{6}$.
9. $1 : 3$.
10. $\dfrac{228}{25}$.
11. 60.
12. $1 : 6$.
13. $\dfrac{3ab}{4}$.

14. 24.

15. 24.

16. $\dfrac{7}{4}$.

17. $\arccos\sqrt{2-2S}$.

18. $|DE| = \sqrt{2}$, длина радиуса окружности равна $\sqrt{5}$.

19. $\dfrac{189\sqrt{55}}{88}$.

20. $\dfrac{(\sqrt{2}-1)a^2}{2}$.

21. $\dfrac{3}{4}$.

22. $\dfrac{10}{3}$.

23. $\dfrac{19}{44}$.

24. $\dfrac{5}{24}$.

25. $\dfrac{S}{2}\cdot\dfrac{b^2+3ab}{(a+b)(2a+b)}$.

26. $\dfrac{48}{5}$.

27. $\left(\sqrt{2}-\cos\alpha\right):\cos\alpha$.

28. $\dfrac{5}{12}$.

29. $\widehat{ACB} = 45^\circ$, $\widehat{ABC} = 90^\circ$.

30. $\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}k}\right)-\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{3\pi}{4}-\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}k}\right)$; $k\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};1\right)$.

31. 9.

32. $\dfrac{S_1+S_2-\sqrt{(S_1+S_2)^2-4S_1S_2\sin^2\alpha}}{2}$.

33. $\dfrac{1}{6}$.

34. 5.

35. $\dfrac{a\sqrt{7}}{12}$.

36. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{d}{4}+\dfrac{1}{2d}$, где $a=\sin(\beta+\gamma)$, $b=\cos\beta$, $c=\sin\gamma$, $d=\sqrt{\dfrac{a^2+16c^2-8abc}{4a^2+16c^2-16abc}}$.

2.1.

1. $2\sqrt{6}$.

2. 1.

3. $\sqrt{15}$.

4. $4\sqrt{3}\sin 7^\circ$.

5. $\dfrac{b^2\cos^3\beta}{2\sin\beta}$.

6. $|AB| = |BC| = 7\sqrt{3}$, $|CD| = \sqrt{21}$, $|AD| = 2\sqrt{21}$.

7. $4\sqrt{3}$.

8. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

9. $7\sqrt{3}$.

10.

11. $\dfrac{3\pi}{7}$.

12. $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$, $\widehat{ABC} = \dfrac{5\pi}{12}$, $\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{4}$ или $\widehat{BAC} = \dfrac{5\pi}{12}$, $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{3}$, $\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{4}$.

13. $d\left(\dfrac{c}{a}\right)^2$.

14. $50\pi(2+\sqrt{2})$.

15. $\sqrt{3}+1$.

16. $3\sqrt{3}$.

17. $\dfrac{nc}{m}$.

18. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

19. $56\sqrt{2}$.

20. $\sqrt{pq}$.

21. $\sqrt{2}$.

22. 2.

23. $\sqrt{3}$.

24. $\dfrac{2c+\sqrt{2}b}{\sqrt{3}+1}$.

25. $\sqrt{5}+\dfrac{1}{4}$.

26. $\dfrac{45}{2}$.

27. $h_{KN} = \dfrac{1}{2}$, $S_{\triangle KNC} = \dfrac{3}{4}$.

28. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

29. $\dfrac{1}{2}$.
30. 10.
31. $\dfrac{5\pi}{18}$.
32. $\widehat{ACB} = \pi/3,\ S_{\triangle ABC} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
33. $R_{\triangle ABC} = \dfrac{5}{2},\ S_{ABCD} = \dfrac{234}{25}$.
34. $\dfrac{\sqrt{a^2kl}}{2}$.
35. $\dfrac{5+\sqrt{15}}{4}$.
36. $\sqrt{6}$.
37. $|CE| = 6, d = 2$.

2.2.

1. $\sqrt{7}$.
2. $\dfrac{3\sqrt{3}+2\pi}{3}$.
3. $2\sqrt{\dfrac{34}{15}}$.
4. $\dfrac{1}{2}(p-a)^2 \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.
5. $5\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.
6. $\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$.
7. 6.
8. $2(\sqrt{6}+\sqrt{3})$.
9. $\dfrac{24}{\sqrt{145}}$.
10. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.
11. $\dfrac{300}{17}$.
12. $9:8$.
13. $2\sqrt{21}-9$.
14. $4\sqrt{3}+10\pi$.
15. $\dfrac{\pi}{6}$.
16. $2\sqrt{2}+6$.
17. $\dfrac{49+20\sqrt{6}}{98} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{1}{49}\right)$. Возможны и другие формы записи.
18. $\dfrac{R^2}{a}$.
19. $\dfrac{4aR^2}{16R^2-3a^2}$.
20. $\dfrac{27}{4}$.
21. $\dfrac{6-4\sqrt{2}}{3}$.
22. $-\sqrt{15}$.
23. $\dfrac{15}{3\operatorname{ctg}\beta + 4\operatorname{tg}\beta}$.
24. $\dfrac{7\sqrt{3}}{9}$.
25. 1) $\sqrt{Rr}$; 2) $\sqrt{\dfrac{r}{R}}$.
26. $\dfrac{b\sin\alpha}{2}$.
27. 12π.
28. $\dfrac{mk}{l}$.
29. π.
30. $\sqrt{53}$ или $\sqrt{13}$.
31. 216.
32. $\dfrac{a^2-b^2}{a}$.
33. 6π.
34. $\arccos\left(\dfrac{3}{4}\right)$.
35. $4:7$.
36. $\dfrac{15\sqrt{2}}{8}$.

3.1.

1. $\dfrac{61\sqrt{3}}{4}$.
2. 8.
3. $2\operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}\alpha)$.
4. $\cos\widehat{BAN} = \dfrac{7}{\sqrt{65}},\ S_{ABCD} = \dfrac{78}{5}$.
5. $\dfrac{9\sqrt{3}}{11}$.
6. $\sqrt{13}$.
7. $7\sqrt{\dfrac{29}{5}}$.
8. $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$ и $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$.
9. $4\sqrt{5}$.

10. $\dfrac{75}{2}-9\pi$.
11. $\dfrac{d_2^2-d_1^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$.
12. $\dfrac{5}{12}$.
13. $\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{18}$.
14. $7\cos 40^\circ\cdot\operatorname{tg}20^\circ$.
15. $10\pm 4\sqrt{3}$.
16. $\dfrac{3(\sqrt{5}\pm 1)}{2}$.
17. $\dfrac{12\sqrt{2}-15}{4}$.
18. $\dfrac{16}{5}$.
19. $3:1$.
20. $\dfrac{34}{9}$.
21. $2\sqrt{3}$.
22. $\dfrac{4(3+2\sqrt{3})}{3}$.
23. $|MB|=a+l^2\sin^2\alpha-$
$-\sqrt{a^2+2al\sin^2\alpha-l^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha},$
$|ND|=a+l^2\sin^2\alpha+$
$+\sqrt{a^2+2al\sin^2\alpha-l^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$
24. $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$.
25. $\dfrac{1728}{25}$ или $\dfrac{192}{17}$.
26. $\dfrac{1}{4}$ или $\dfrac{5}{4}$.
27. $\dfrac{7\pi}{12}$.

3.2.

1. 36 или $8\sqrt{19}$.
2. 162.
3. $10\sqrt{3}$.
4. $\dfrac{18}{25+2\sqrt{130}+\sqrt{445}}$.
5. $|AC|=3\sqrt{89},\ |BD|=2\sqrt{349}$.
6. $\dfrac{2\pi}{3}$.
7. $\dfrac{72}{5}$.
8. $2\sqrt{13}$.
9. $\dfrac{15}{7}$.
10. 2.
11. 15.
12. $\dfrac{3}{2\sin 10^\circ\sin 40^\circ}$.
13. $\dfrac{42\sqrt{51}}{25}$.
14. 1 и 7.
15. $\sqrt{a^2-ab}$.
16. $49\left(\sqrt{3}-\dfrac{5}{3}\right)$.
17. $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.
18. $\dfrac{8R^3}{b}$.
19. 96.
20. 42.
21. $2\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\cos\frac{\delta}{2}+1}{2\cos\frac{\delta}{2}-1}$.
22. 15.
23. $\dfrac{8}{\sqrt{61}}$.
24. $\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}$.
25. $\dfrac{19\sqrt{3}}{52}$.
26. $\dfrac{22}{7}$.
27. $\dfrac{14}{3}$.
28. $\dfrac{15}{\sqrt{2}}$.
29. Длины оснований равны $\dfrac{255}{8}$ и $\dfrac{960}{17}$, длина высоты равна $\dfrac{450}{17}$.
30. $3:29$.
31. $\dfrac{bc}{a}$.
32. Длины диагоналей равны 5, площадь равна $\dfrac{975\sqrt{3}}{196}$.
33. $\dfrac{ab}{c^2}$.
34. $\dfrac{6(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt[4]{3}}$.

3.3.

1. $\sqrt{848 \pm 64\sqrt{13}}$, $\sqrt{308 \pm 64\sqrt{13}}$.
2. 3.
3. 1.
4. $\dfrac{\pi}{2}$.
5. $\sqrt{21}$.
6. $\arcsin \dfrac{a}{b}$.
7. $\dfrac{\sqrt{37}(2\sqrt{6}-1)}{3\sqrt{3}}$.
8. 319.
9. 30°.
10. На продолжении.
11. $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$.
12. 4.
13. $2\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha + 3}$.
14. $\dfrac{3}{2}$.
15. $|AB| = 3$, $S_{ABCDE} = \dfrac{4098}{61}$.
16. $\dfrac{\sqrt{54}-2}{4}$.
17. $|AD| = |BC| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$,
    $|AB| = |CD| = 2\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.
18. $\dfrac{189}{25}$.
19. $5:9$.
20. $|AD| = 10$, $|BC| = 2$, $R = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.
21. $\dfrac{\sqrt{130}}{2}$.
22. $\arccos\sqrt{\dfrac{11}{14}} - \arccos\dfrac{7}{2\sqrt{14}}$.
23. 22.
24. 2.
25. 1) $1:1$, 2) $m-1$.
26. $9\sqrt{2}$.
27. $\arcsin\dfrac{1}{3}$.

4.1

3. Тупоугольный.
20. Остроугольный.

4.2

2. Нет.
4. Четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны.
7. $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$,
   $\angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$.
8. $KM = 4$.
9. $AB < AC$.

4.3

3. Да.

4.4

1. Равенство достигается, когда $\angle B = \angle D = 90^\circ$.
3. Неравенство обращается в равенство, если a и b равные катеты прямоугольного треугольника.
4. Может.

6.2

1. $d^3 \sin\beta \sin\gamma \sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\gamma}$.
2. $\dfrac{2\sqrt[3]{V\sin(\alpha/2)}}{\sqrt[6]{3(2\cos\alpha - 1)}}$.
3. $\arccos\dfrac{29}{7\sqrt{19}}$.
4. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.
5. $\dfrac{21\sqrt{15}}{10}$.
6. $3:5$.
7. 216.
8. 45°, $2/\sqrt{3}$.

6.3

1. $32\pi\sqrt{78}\,\text{см}^3$.
2. 4.
3. $2\arccos\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}$.

4. $\pi a^3\sqrt{3}/18$.
5. 1.
6. $\dfrac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}$.
7. $\dfrac{5\pi}{12}$.

6.4

1. $2\pi R^2$, $\sqrt{2}$.
2. 2.
3. $\dfrac{4\sqrt{3}\pi \operatorname{tg}^3 \dfrac{\alpha}{2}}{9 \operatorname{tg}\alpha}\left(1+\operatorname{tg}^6 \dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^{12}\dfrac{\alpha}{2}\right)$.
4. $\dfrac{4}{15}$.
5. $\dfrac{a\sqrt{3H^2+a^2}}{3H}-\dfrac{a^2}{2\sqrt{3}H}$.
6. 12.
7. 36.
8. $1/\sqrt{6}$.

Литература

1. *Золотарёва Н.Д., Семендяева Н.Л., Федотов М.В.* Геометрия. Базовый курс с решениями и указаниями (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). – М.: Фойлис, 2010. – 296 с.

2. *Федотов М.В., Золотарёва Н.Д.* Геометрия. Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ. – М.: МАКС Пресс, 2009. – 132 с.

3. *Федотов М.В., Хайлов Е.Н.* Задачи устного экзамена по математике.– М.: МАКС Пресс, 2002. – 144 с.

4. Математика. Задачи вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М.В. Ломоносова с ответами и решениями (1999–2004 гг.) Сост. Е.А. Григорьев. – М.: Издательство УНЦ ДО, 2005. – 399 с.

5. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (2000–2002, 2003, 2004 гг.). – М.: Механико-математический факультет МГУ.

6. *Сергеев И.Н.* Математика. Единый государственный экзамен. Задания типа С. – М.: Изд-во "Экзамен", 2009. – 318 с.

7. *Денищева Л.О., Бойченко Е.М., Глазков Ю.А. и др.* Единый государственный экзамен 2003–2004: Контрольные измерительные материалы: Математика. – М.: Просвещение, 2003. – 191 с.

8. *Денищева Л.О., Рязановский А.Р., Семенов П.В., Сергеев И.Н.* ЕГЭ 2008. Математика. Федеральный банк экзаменационных материалов. – М.: Эксмо, 2008. – 240 с.

9. *Галеев Э.М.* Подготовка к ЕГЭ по математике. Задания типа В и С. – М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2009. – 96 с.

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Будак Борис Александрович
Золотарёва Наталья Дмитриевна
Федотов Михаил Валентинович

ГЕОМЕТРИЯ.
УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ

Учебно-методическое пособие

Корректор *И. В. Бабаева*

Подписано к использованию 12.03.15. Формат 145×225 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru
http://www.Lbz.ru, http://e-umk.Lbz.ru, http://metodist.Lbz.ru

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

– на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;
– для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;
– сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

*Декан факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАН **Е. И. Моисеев***

Сайт факультета ВМК МГУ:

http://www.cs.msu.ru