ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

БАЗОВЫЙ КУРС
с решениями и указаниями

ЕГЭ
ОЛИМПИАДЫ
ЭКЗАМЕНЫ В ВУЗ

ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

ГЕОМЕТРИЯ

БАЗОВЫЙ КУРС
с решениями и указаниями

Учебно-методическое пособие

Под редакцией
М. В. Федотова

Электронное издание

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2015

УДК 373.3:51
ББК 22.1я729
З-80

Золотарёва Н. Д.

З-80 Геометрия. Базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 296 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — (ВМК МГУ — школе). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-3028-7

Настоящее пособие составлено на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М. В. Ломоносова и задач единого государственного экзамена преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения задач.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 373.3:51
ББК 22.1я729

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Геометрия. Базовый курс с решениями и указаниями : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 291 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе). — ISBN 978-5-9963-1942-8.

ISBN 978-5-9963-3028-7

Оглавление

От редактора

Уважаемый читатель, Вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ – школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета Вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. Сначала были созданы пособия для очных подготовительных курсов, затем были разработаны электронные версии учебников, используемые при дистанционном обучении. На основе этого опыта подготовлена серия книг для старшеклассников, одной из которых и является настоящее пособие.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии и физике. По каждому предмету вышли два пособия: базовый курс и углубленный курс, содержащий сложные задачи единого государственного экзамена и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М.В. Ломоносова). Базовый курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач первой части ЕГЭ и некоторых задач второй части, а также первой половины задач вариантов вступительных экзаменов в вузы. Углубленный курс содержит задачи, научившись решать которые, вы сможете решать все задачи ЕГЭ и все или почти все задачи олимпиад и вступительных экзаменов в вузы (за отведённое время можно просто физически не успеть решить все задачи).

В серии «ВМК МГУ – школе» вышли два пособия по информатике. Первое рекомендуется в качестве пособия при подготовке к ЕГЭ по информатике и ИКТ. Разделы этого пособия соответствуют темам, включенным в ЕГЭ. Второе – пособие по программированию – поможет вам подготовиться к экзамену по информатике, научиться решать задачи по программированию на языке Паскаль.

Отличительной особенностью наших пособий является то, что наряду с традиционными составляющими (теоретический раздел, примеры с решениями, задачи для самостоятельного решения) мы предлагаем **решения** всех предложенных задач **с идеями** и последовательными **подсказками**, помогающими решить задачу оптимальным способом без посторонней помощи. Это позволит ученику самостоятельно продвигаться в решении задачи так, как если бы за его спиной стоял учитель и направлял ход его мысли при решении трудных задач. Конечно, мы понимаем, что настоящего учителя не может заменить никакая книга, но если учителя рядом нет, то, как показал опыт наших дистанционных подготовительных курсов, наличие грамотных подсказок помогает учащимся самостоятельно научиться решать задачи. С помощью нашего пособия приобретение такого опыта учениками будет значительно облегчено. С другой стороны, наши пособия помогут молодым учителям вести занятия. Мы знаем на собственном опыте, что не всегда легко направлять ученика так, чтобы он сам догадался, как решить задачу. **Второй особенностью** наших пособий является **спиралевидная схема подачи материала**, когда каждая тема повторяется несколько раз, причём каждый раз на более сложном уровне, чем в предыдущий. Это позволяет не забывать пройденный материал и постепенно подходить к сложным задачам.

Директор учебного центра
факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
М. В. Федотов

Предисловие

Настоящее пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ и задач единого государственного экзамена. «Базовый курс» рассчитан на закрепление школьного материала по геометрии и приобретение навыков, необходимых для решения задач ЕГЭ и стандартных задач вступительных экзаменов в вуз.

Предлагаемый курс изначально не предполагает знаний, выходящих за рамки базовой школьной программы. Все приёмы, необходимые для решения задач, демонстрируются по ходу изучения материала.

Задачи в разделах расположены по принципу *«от простого – к сложному»*. Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров. Если самостоятельное решение задачи вызывает трудности, рекомендуется воспользоваться системой указаний (подсказок). В случае, если Вам не удалось получить правильный ответ или у Вас возникли сомнения в правильности Вашего решения, рекомендуется изучить решение, предложенное авторами.

Необходимо отметить, что в реальных экзаменационных заданиях в формулировках задач наряду с математически более корректной терминологией типа «длина отрезка AB равна 5» и записью $|AB| = 5$ используется школьная терминология типа «отрезок AB равен 5» и запись $AB = 5$. По этой причине в формулировках задач также встречаются оба вида терминологии.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I. Теория и задачи

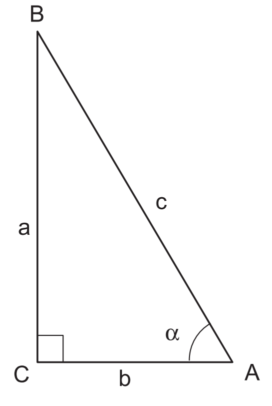
ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Треугольники

1.1. Прямоугольные треугольники

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, связанные с прямоугольными треугольниками. При решении этих задач необходимо знать и уметь применять следующие формулы и теоремы.



Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$, здесь a, b – катеты прямоугольного треугольника, c – гипотенуза.

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a};$$

здесь α – угол, противолежащий катету a.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Значения тригонометрических функций основных углов:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

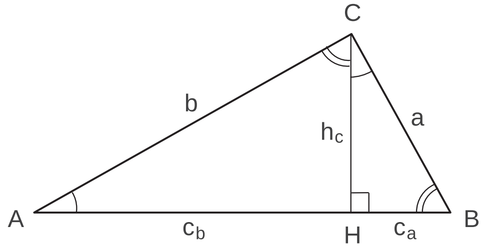
$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Формула длины высоты, проведённой к гипотенузе:

$$h_c = \frac{ab}{c} = \sqrt{c_a c_b},$$

где c_a и c_b – проекции катетов a и b на гипотенузу c.



Для доказательства первого равенства достаточно записать площадь треугольника ABC двумя способами:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}h_c c = \frac{1}{2}ab \quad \Longrightarrow \quad h_c = \frac{ab}{c}.$$

Справедливость второго равенства следует из подобия треугольников, на которые высота, проведённая из вершины прямого угла, разбивает исходный треугольник:

$$\Delta ACH \sim \Delta CBH \quad \Longrightarrow \quad \frac{h_c}{c_b} = \frac{c_a}{h_c} \quad \Longrightarrow \quad h_c = \sqrt{c_a c_b}.$$

Заметим также, что оба треугольника подобны исходному треугольнику ABC по двум углам:

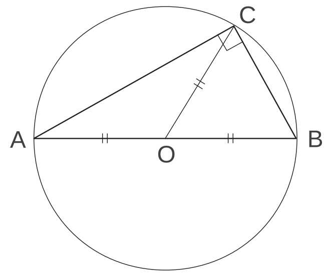
$$\Delta ACH \sim \Delta ABC \quad (\angle AHC = \angle ACB = 90^\circ, \text{ угол } A \text{ общий}),$$

$$\Delta CBH \sim \Delta ABC \quad (\angle CHB = \angle ACB = 90^\circ, \text{ угол } B \text{ общий}).$$

Напомним основные факты, связанные с произвольными треугольниками.

- Сумма углов треугольника равна 180°.
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
- Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка есть центр вписанной окружности. При этом радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен соответствующей стороне треугольника, а отрезки касательных, проведённых из одной вершины – равны.[1]
- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка есть центр описанной окружности.

[1] Более подробно свойства окружностей будут рассмотрены в соответствующем разделе.



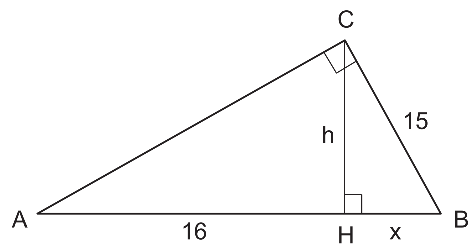
Замечание. Центр описанной окружности лежит внутри треугольника, если треугольник остроугольный, и вне треугольника, если он тупоугольный. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. В этом случае радиус описанной окружности равен медиане, проведённой к гипотенузе, и половине гипотенузы.

Примеры решения задач

Пример 1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Решение. Пусть катет $BC = 15$, а проекция катета AC на гипотенузу AB равна 16.

Поскольку диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен гипотенузе, нам надо найти проекцию катета BC на гипотенузу. Обозначим высоту CH через h, а проекцию катета BC на гипотенузу через x. По свойству высоты, проведённой к гипотенузе, и теореме Пифагора, применённой к ΔBCH, получим



$$\begin{cases} h^2 = 16x, \\ h^2 + x^2 = 15^2; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 16x - 15^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 9,$$

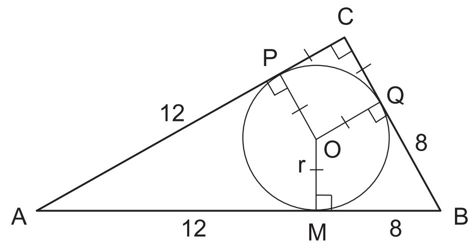
откуда диаметр $d = AB = 25$.

Ответ. 25.

Пример 2. Окружность с центром O вписана в прямоугольный треугольник ABC. Она касается гипотенузы AB в точке M, причём $AM = 12$ и $BM = 8$. Найдите площадь треугольника AOB.

Решение. Для того, чтобы найти площадь треугольника AOB, нам надо найти его высоту OM, которая равна радиусу вписанной окружности. Его и будем искать.

Пусть P и Q – точки касания вписанной окружности с катетами AC и BC. Четырёхугольник $PCQO$ является прямоугольником, поскольку у него $\angle C = 90°$ по условию, а $OP \perp PC$ и $OQ \perp QC$ как радиусы в точках касания. Кроме того, он является квадратом, так как $OP = OQ = r$, где r – радиус вписанной окружности.



По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AP = AM = 12$ и $BQ = BM = 8$.

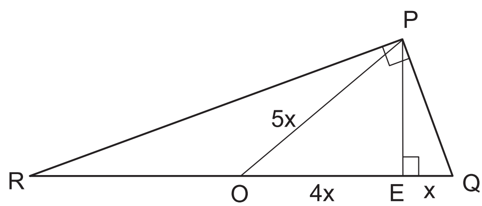
Применив теорему Пифагора к треугольнику ABC, получим:

$$(12+8)^2 = (12+r)^2 + (8+r)^2 \quad \Longrightarrow \quad r = 4 \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot r = 40.$$

Ответ. 40.

Пример 3. Определить отношение длин медианы PO и высоты PE, проведённых из вершины P к гипотенузе QR в прямоугольном треугольнике PQR, если $QO : QE = 5 : 1$.

Решение. Пусть $QE = x$, тогда $QO = 5x$ и, следовательно, $EO = 4x$. Выразим через x высоту PE.



Так как в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы, то

$$PO = \frac{1}{2}QR = QO = 5x.$$

Применив теорему Пифагора к ΔPOE, получим:

$$PE = \sqrt{(5x)^2 - (4x)^2} = 3x \quad \Longrightarrow \quad \frac{PO}{PE} = \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Ответ. $5:3$.

Задачи

1. В прямоугольном треугольнике угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 10°. Найдите острые углы треугольника.

2. Катеты прямоугольного треугольника имеют длину 12 и 5. Найдите длину медианы, проведённой к гипотенузе.

3. В прямоугольном треугольнике острые углы относятся как $1:2$, а больший катет равен $4\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если длина гипотенузы равна $2\sqrt{13}$ см, а длина медианы большего острого угла равна 5 см.

5. Средние линии прямоугольного треугольника, параллельные катетам, равны 5 см и 12 см. Найдите высоту треугольника h, опущенную из вершины прямого угла. В ответе запишите $13h$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, CM – медиана треугольника. Найти острые углы треугольника, если угол AMC равен 42°.

7. Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Угол между AM и высотой AH равен 40°. Найти углы треугольника ABC.

8. В прямоугольном треугольнике ABC $AC = 3$, $BC = 4$. Окружность с центром в точке A проходит через точку C и пересекает гипотенузу AB в точке K. Найти отношение длин отрезков AK и BK.

9. В прямоугольном треугольнике медианы, проведённые к катетам, равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти гипотенузу.

10. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы его вписанной и описанной окружностей равны соответственно 2 см и 5 см.

11. В прямоугольном треугольнике один из катетов больше медианы, проведённой из вершины прямого угла, на $0,5$. Найти его площадь, если второй катет равен 4.

12. В треугольнике ABC известны стороны $AC = 2$, $AB = 3$, $BC = 4$. Пусть BD – высота этого треугольника. Найти длину отрезка AD.

13. Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 20, а проекция другого катета на гипотенузу равна 9.

14. Около окружности с центром O описан прямоугольный треугольник MPK с гипотенузой MK. Луч MO пересекает катет PK в точке C. Найдите длину отрезка CP, если точка касания с окружностью делит катет PK на отрезки $PH = 4$ и $HK = 12$.

15. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной в этот треугольник окружности?

16. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AC = 20$ проведена медиана BM. Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается медианы BM в точке P. Найдите катет BC, если $BP : PM = 3 : 2$.

17. В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$, медиана $BM = 10\sqrt{3}$. Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается гипотенузы AC в точке T. Найдите BC, если $AT : TC = 1 : 3$.

18. Пусть r – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Докажите, что $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

1.2. Общие треугольники. Теоремы синусов, косинусов

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, при решении которых используются следующие теоремы, справедливые для любого треугольника.

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R.$

Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$

Здесь и далее a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – противолежащие им углы; R – радиус описанной около треугольника окружности.

Напомним также и некоторые другие утверждения, справедливые для произвольных треугольников.

- В треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон (*неравенство треугольника*).
- В треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол.
- Площадь треугольника равна

  $$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \frac{1}{2}ch_c, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad S = pr,$$

  где r – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника.

Кроме того, при решении задач этого раздела могут пригодиться следующие тригонометрические формулы.

Формулы приведения: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Формулы для тригонометрических функций от суммы и разности:

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y;$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y.$$

Примеры решения задач

Пример 1. В треугольник со сторонами $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 4$ вписана окружность. Найти длину отрезка DE, где D и E – точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

Решение. Для того, чтобы вычислить DE, необходимо знать AE, AD и косинус угла между ними. Тогда по теореме косинусов можно будет найти DE.

Обозначим равные отрезки касательных

$$BD = BF = x, \; CF = CE = y, \; AE = AD = z.$$

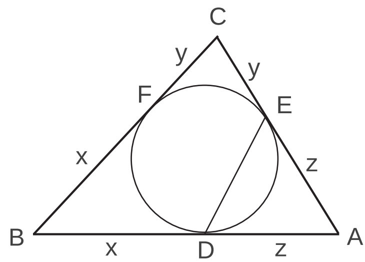
По условию

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ y + z = 4, \\ x + z = 8; \end{cases}$$

откуда $z = 3$.

Из теоремы косинусов, применённой к ΔABC, получим

$$6^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{11}{16}.$$



Теперь применим теорему косинусов к ΔADE:

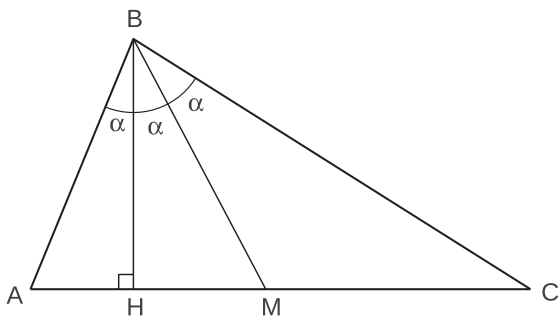
$$DE^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{11}{16} = \frac{45}{8},$$

откуда $DE = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.

О т в е т. $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.

П р и м е р 2. Определить стороны треугольника, если медиана и высота, проведённые из вершины одного угла, делят угол на три равные части, а сама медиана равна 10.

Р е ш е н и е. Пусть BH и BM – соответственно высота и медиана треугольника ABC и $\angle ABH = \angle HBM = \angle MBC = \alpha$, тогда $\angle BAH = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle BCA = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$. Для того, чтобы найти стороны треугольника, достаточно найти угол α.



Применим к треугольникам ABM и BMC теорему синусов:

$$\frac{AM}{\sin 2\alpha} = \frac{BM}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}, \quad \frac{MC}{\sin\alpha} = \frac{BM}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}.$$

Теперь поделим почленно одно равенство на другое. Поскольку $AM = MC$, получим

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin 4\alpha = \sin 2\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \sin 2\alpha \cdot (2\cos 2\alpha - 1) = 0.$$

Так как $0 < 3\alpha < \pi$, то $\sin 2\alpha \neq 0$. Следовательно, $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}$, откуда $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $\angle ABC = 3\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$ и $\angle ACB = \dfrac{\pi}{6}$. По условию медиана $BM = 10$, следовательно, гипотенуза $AC = 2BM = 20$, а катеты $AB = 10$ и $BC = 10\sqrt{3}$.

О т в е т. $20;\ 10;\ 10\sqrt{3}$.

Пример 3. В треугольнике ABC сторона $AB = 24$, $\angle BAC = 60^\circ$, радиус описанной окружности равен 13. Найти сторону AC.

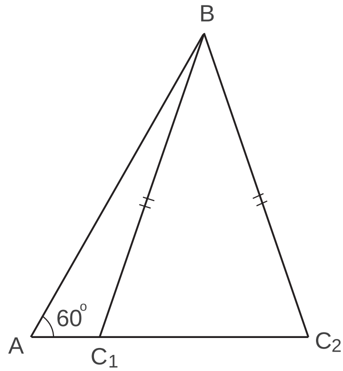
Решение. Для нахождения стороны AC надо знать сторону BC, которую легко найти с помощью теоремы синусов:

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R \quad\Longrightarrow\quad BC = 13\sqrt{3}.$$

Теперь обозначим искомую сторону AC через x и запишем теорему косинусов для ΔABC:

$$(13\sqrt{3})^2 = 24^2 + x^2 - 2 \cdot 24 \cdot x \cdot \cos 60^\circ \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad x^2 - 24x + 69 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x_{1,2} = 12 \pm 5\sqrt{3}.$$



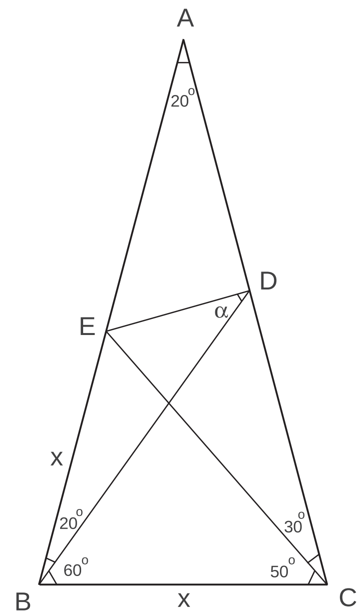
В обоих случаях

$$AB = 24 > BC = 13\sqrt{3} > AC = x_{1,2} = 12 \pm 5\sqrt{3}.$$

Следовательно, существует два треугольника (ΔABC_1 – тупоугольный и ΔABC_2 – остроугольный), удовлетворяющих условиям нашей задачи.

Ответ. $12 \pm 5\sqrt{3}$.

Пример 4. Пусть равнобедренный треугольник ABC имеет углы B и C, равные 80°. На отрезке AC взята точка D, а на отрезке AB – точка E так, что $\angle DBC = 60^\circ$ и $\angle ECB = 50^\circ$. Найти угол EDB.



Решение. Треугольник BCE является равнобедренным, так как у него

$$\angle BEC = 180^\circ - \angle ABC - \angle BCE = 50^\circ = \angle BCE.$$

Обозначим $BC = BE = x$, $\angle BDE = \alpha$ и применим теорему синусов к ΔBDE и ΔBDC:

$$\frac{BD}{\sin(\alpha + 20^\circ)} = \frac{x}{\sin\alpha}, \qquad \frac{BD}{\sin 80^\circ} = \frac{x}{\sin 40^\circ}.$$

Поделив равенства почленно одно на другое, получим

$$\frac{\sin 80^\circ}{\sin(\alpha + 20^\circ)} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin\alpha} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad 2\cos 40^\circ \sin\alpha = \sin(\alpha + 20^\circ) \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad 2\cos(60^\circ - 20^\circ)\sin\alpha = \sin(\alpha + 20^\circ) \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \cos 20^\circ \sin\alpha + \sqrt{3}\sin 20^\circ \sin\alpha = \sin\alpha\cos 20^\circ + \cos\alpha\sin 20^\circ \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \sqrt{3}\sin 20^\circ \sin\alpha = \cos\alpha \sin 20^\circ \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}.$$

Следовательно, искомый угол $\alpha = \angle EDB = 30^\circ$.

Ответ. 30°.

Задачи

1. Есть ли тупой угол у треугольника, стороны которого равны 10, 14 и 7?

2. Стороны треугольника равны 2, 3, 4. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

3. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°. Боковая сторона равна 4. Найдите квадрат длины медианы, проведённой к боковой стороне.

4. Из точки A, лежащей на окружности, проведены две хорды, равные 7 и 15. Найдите диаметр окружности, если расстояние между серединами хорд равно 10.

5. Найти углы треугольника, если высота и медиана, проведённые из одной и той же вершины, образуют с боковыми сторонами углы, равные α.

6. Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в 6 раз короче гипотенузы. Найти острые углы треугольника.

7. Найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{3}$.

8. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, AC соответственно в точках M, D, N. Известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, $\widehat{BCA} = \dfrac{\pi}{3}$. Найти MD.

9. Известны длины двух сторон $a = 7$, $b = 9$ треугольника и его площадь $S = 14\sqrt{5}$. Третья сторона треугольника больше удвоенной медианы, проведённой к ней. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

10. У треугольника известны длины двух сторон и площадь: $a = 6$, $b = 8$, $S = 3\sqrt{15}$. Третья его сторона меньше удвоенной медианы, проведённой к ней. Найти радиус вписанной в этот треугольник окружности.

11. Прямая, проходящая через точки G и K, служит биссектрисой угла FGH. Известно, что $KF \perp GF$, $KH \perp GH$, $KF = KH = 8$, $GK = 17$. Отрезок GL содержит точку F, $FL = 2$. Отрезок GM содержит точку H и $HM = 19$. Найти длину отрезка ML.

12. В треугольнике KMN сторона $KM = 6$, $MN - KN = 2$, $\cos\angle KMN = 3/5$. Найти площадь треугольника KMN.

13. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равняется стороне AB этого треугольника. Найти высоту треугольника ABC, проведённую из точки C, если она меньше $1/2$, а две другие стороны треугольника равны 2 и $\sqrt{3}$.

14. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 7$, $AC = 8$ и $\cos\angle BAC = \dfrac{11}{16}$. На стороне BC выбрана такая точка D, что $DC : BC = 1 : 3$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABD.

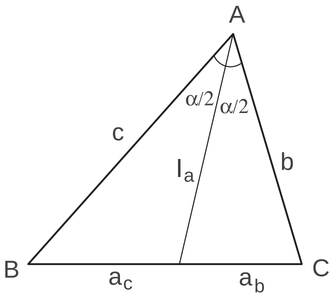
1.3. Медиана, биссектриса, высота

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, связанные с медианами, биссектрисами и высотами. При решении этих задач, помимо утверждений и формул, приведённых в предыдущих разделах, будут полезными следующие теоремы.

Теорема о биссектрисе. Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}.$$



Формулы длины биссектрисы:

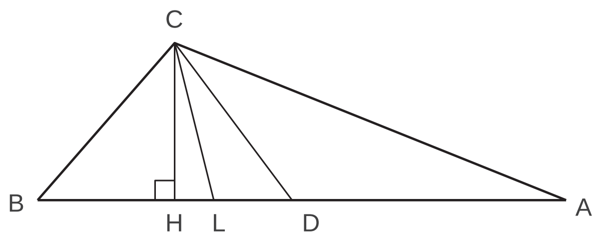
$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}, \quad l_a^2 = bc - a_b a_c.$$

Формула длины медианы: $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}.$

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что если в треугольнике из одной вершины проведены медиана, биссектриса и высота, то биссектриса лежит между медианой и высотой.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, где высота CH, биссектриса CL и медиана CD проведены к стороне AB.



Если $BC = AC$, то CH, CL и CD совпадают. Пусть для определённости $AC > BC$.

По свойству биссектрисы

$$\frac{BL}{AL} = \frac{BC}{AC} < 1 \quad \Longrightarrow \quad BL < AL \quad \Longrightarrow \quad BL < BA/2 = BD$$

и, следовательно, точка L лежит между точками B и D.

Теперь покажем, что $\angle BCH < \angle BCL$:

$$AC > BC \quad \Longrightarrow \quad \angle CBA > \angle CAB \quad \Longrightarrow \quad \angle BCH < \angle ACH \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \angle BCH < \angle BCA/2 = \angle BCL$$

и, следовательно, биссектриса лежит между медианой и высотой.

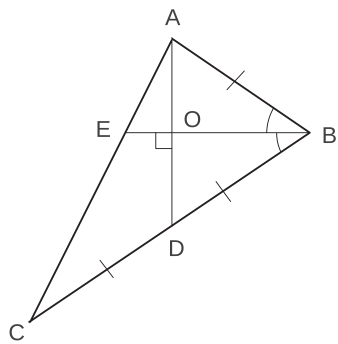
П р и м е р 2. Доказать, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный.

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник со сторонами a, b, c и высотами h_a, h_b, h_c. Площадь треугольника равна

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2}.$$

Следовательно, если $h_a = h_b$, то и $a = b$.

П р и м е р 3. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC.



Р е ш е н и е. Пусть биссектриса BE и медиана AD пересекаются в точке O. В треугольнике ABD отрезок BO является биссектрисой и высотой одновременно, следовательно, треугольник ABD равнобедренный. Пусть $AB = BD = x$.

По свойству биссектрисы

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}.$$

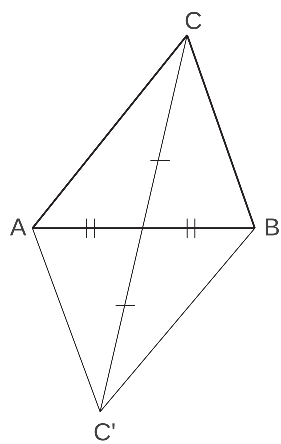
Пусть $AE = y$, тогда $E\mathrm{C} = 2y$. По формулам для квадратов длин медианы и биссектрисы получаем:

$$AD^2 = \frac{2x^2 + 2(3y)^2 - (2x)^2}{4} = 4^2, \quad BE^2 = 2x^2 - 2y^2 = 4^2,$$

откуда $x^2 = 13$, $y^2 = 5$. В итоге: $AB = \sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{13}$, $AC = 3\sqrt{5}$.

О т в е т. $\sqrt{13}$; $2\sqrt{13}$; $3\sqrt{5}$.

П р и м е р 4. Доказать, что сумма медиан треугольника
а) меньше P;
б) больше $\dfrac{3}{4}P$, где P – периметр треугольника.



Р е ш е н и е. а) Достроим ΔABC до параллелограмма $ACBC'$ и запишем неравенство треугольника для $\Delta ACC'$:

$$CC' < AC + AC' \quad \Longleftrightarrow \quad 2m_c < a + b.$$

Аналогичным образом демонстрируется справедливость неравенств

$$2m_b < a + c, \quad 2m_a < b + c.$$

Сложив эти три неравенства и поделив на два, получим:

$$m_a + m_b + m_c < P.$$

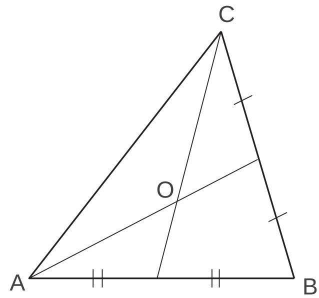
б) Пусть медианы пересекаются в точке O. Запишем неравенство треугольника для ΔACO:

$$AC < CO + AO \iff b < \frac{2}{3}(m_c + m_a).$$

Аналогично можно получить неравенства для сторон a и c. Сложив все три неравенства, получим:

$$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > P \iff m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}P,$$

что и требовалось доказать.



Задачи

1. Доказать, что если у треугольника равны две медианы, то он равнобедренный.

2. Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Доказать, что этот треугольник равнобедренный.

3. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длины 15 и 20.

4. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника, катеты которого равны 18 и 24.

5. В окружность радиуса $4\sqrt{3}$ вписан треугольник ABC, в котором $\angle A = 60°$, а сторона AB в два раза больше стороны AC. В треугольнике проведена биссектриса AM. Найдите длину отрезка MC.

6. В треугольнике BCE угол $\angle C = 60°$, $CE : BC = 3 : 1$. Отрезок CK – биссектриса треугольника. Найдите KE, если радиус описанной около треугольника окружности равен $8\sqrt{3}$.

7. Зная угол α при вершине треугольника, определите острый угол между биссектрисами двух других углов треугольника.

8. Зная углы α и β при основании треугольника, определите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из угла, противолежащего основанию.

9. Медианы треугольника равны 3, 4, 5. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

10. Высоты треугольника равны 3, 4, 5. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

11. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом. Известно, что $AC = 3$, $BC = 4$. Найти сторону AB этого треугольника.

12. В треугольнике известны длины двух его сторон 6 и 3. Полусумма длин высот, опущенных на эти стороны, равна длине третьей высоты. Найти длину его третьей стороны.

13. В треугольнике ABC угол A – прямой. Из вершины A проведены медиана AM, высота AH и биссектриса AL. Доказать, что AL – биссектриса в треугольнике AMH.

14. В треугольнике ABC даны стороны b и c. Угол α вдвое больше угла β. Найти сторону a.

15. Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

16. Две биссектрисы у треугольника равны. Доказать, что он равнобедренный.

17. В треугольнике KLM проведены биссектрисы LE и KF углов KLM и LKM соответственно, которые пересекаются в точке O. Известно, что $KL = LE$, периметр треугольника KLM равен 34, $LO = 3 \cdot OE$. Найти ML.

18. В треугольнике ABC угол C равен 120°, а биссектриса угла C равна 3. Длины сторон AC и BC относятся как 3:2 соответственно. Найти тангенс угла A и сторону BC.

19. В треугольнике KLM длина стороны $KL = 24$, длина биссектрисы $LN = 24$, а длина отрезка $MN = 9$. Определить периметр треугольника LMN.

20. В треугольнике ABC с длинами сторон $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$ проведена биссектриса AD. Вокруг треугольника ABD описана окружность, а в треугольник ACD вписана окружность. Найти произведение их радиусов.

1.4. Подобие треугольников. Теорема Фалеса

Теоретический материал

Два треугольника называются *подобными*, если у них равны все три угла, а соответствующие стороны пропорциональны.

Признаки подобия треугольников:

1. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.

2. Если один угол первого треугольника равен углу второго треугольника, а прилежащие к этим углам стороны треугольников пропорциональны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.

Замечание 1. В подобных фигурах углы между любыми сходственными линейными элементами равны; отношение длин сходственных линейных элементов равно коэффициенту подобия.

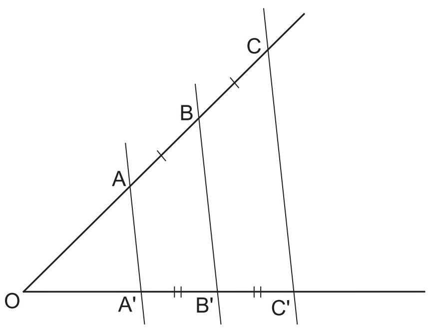
То есть не только длины сходственных сторон, но и длины биссектрис, медиан, высот, периметров, радиусов вписанных и описанных окружностей относятся как коэффициент подобия.

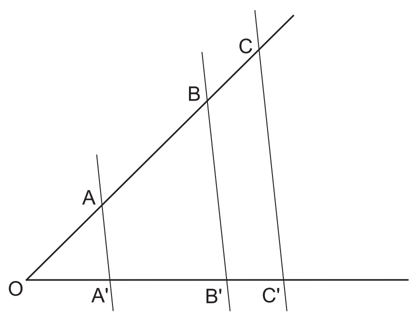
Замечание 2. В подобных фигурах площади любых сходственных элементов относятся как квадрат коэффициента подобия.

Напомним также и некоторые другие полезные сведения.

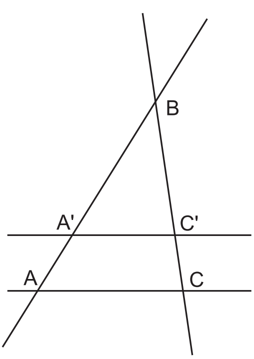
- Соответственные и накрест лежащие углы при параллельных прямых равны.
- **Теорема Фалеса.** Если при пересечении сторон угла параллельными прямыми на одной стороне угла отсекаются равные между собой отрезки, то и на другой стороне угла отсекаются также равные между собой отрезки (левый рисунок).
- **Обобщенная теорема Фалеса.** При пересечении сторон угла параллельными прямыми на сторонах угла отсекаются пропорциональные отрезки (правый рисунок)

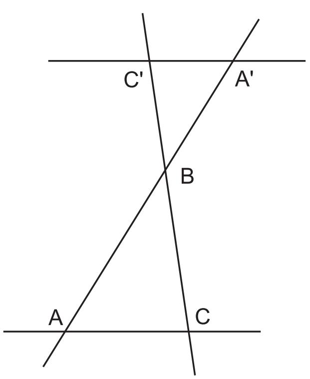
$$\frac{AO}{A'O} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$





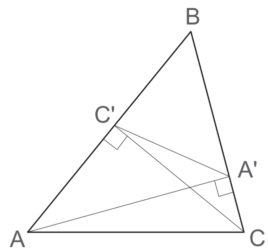
Наиболее распространенными являются ситуации, когда пара подобных треугольников возникает при пересечении параллельными прямыми двух пересекающихся прямых.





В обоих случаях треугольники ABC и $A'BC'$ подобны по первому признаку подобия треугольников. В первом случае углы $\angle A = \angle A'$ и $\angle C = \angle C'$ как соответственные, во втором – как накрест лежащие при параллельных прямых.

В теореме, приведённой ниже, описывается ещё один случай возникновения пары подобных треугольников.



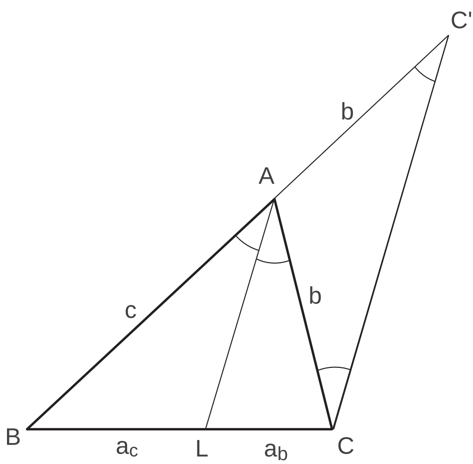
Теорема о высотах. Если AA' и CC' – две высоты остроугольного треугольника ABC, то треугольники $A'BC'$ и ABC подобны с коэффициентом $\cos\angle B$.

Замечание. В треугольнике с тупым углом $\angle B$ коэффициент подобия соответствующих треугольников равен $|\cos\angle B|$.

Примеры решения задач

Пример 1 (теорема о биссектрисе). Доказать, что биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}.$$



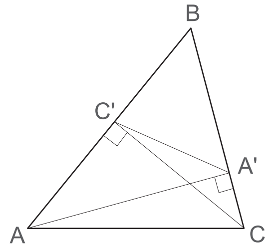
Решение. Пусть AL – биссектриса треугольника ABC. Через вершину C проведём прямую, параллельную AL, которая пересечёт прямую AB в точке C'. Заметим, что $\angle BAL = \angle AC'C$ как соответственные и $\angle CAL = \angle ACC'$ как внутренние накрест лежащие, следовательно, $\angle AC'C = \angle ACC'$ и треугольник ACC' является равнобедренным.

По теореме Фалеса получим

$$\frac{CL}{LB} = \frac{C'A}{AB} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2 (теорема о высотах). Пусть AA' и CC' – две высоты остроугольного треугольника ABC. Доказать, что $\Delta A'BC' \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\cos\angle B$.



Решение. Запишем косинус угла B двумя способами:

$$\cos\angle B = \frac{BA'}{BA} \quad (\Delta ABA'), \quad \cos\angle B = \frac{BC'}{BC} \quad (\Delta CBC').$$

Теперь рассмотрим треугольники $\Delta A'BC'$ и ΔABC. У них угол $\angle B$ общий, а длины соответствующих сторон связаны соотношением

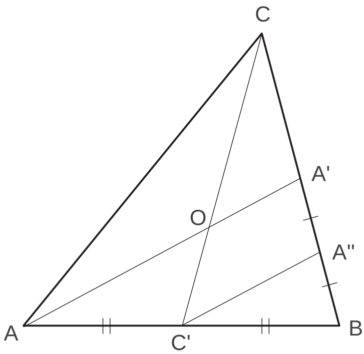
$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \cos\angle B,$$

следовательно, треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников, причем коэффициент подобия равен $\cos\angle B$.

П р и м е р 3 (теорема о медианах). Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

Р е ш е н и е. Пусть AA' и CC' – медианы ΔABC. Проведём отрезок $C'A'' \parallel AA'$. По теореме Фалеса из равенства отрезков $AC' = C'B$ следует равенство отрезков $A'A'' = A''B$, следовательно,

$$A'A'' = \frac{1}{2}A'B = \frac{1}{2}A'C.$$



Теперь применим теорему Фалеса к $\angle BCC'$:

$$\frac{CO}{OC'} = \frac{CA'}{A'A''} = 2.$$

Таким образом, мы доказали, что медиана AA' проходит через точку $O \in CC'$, которая делит медиану CC' в отношении $2:1$. Аналогичным образом показывается, что и медиана BB' тоже проходит через точку O. Следовательно, медианы треугольника пересекаются в точке O и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

Задачи

1. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B?

2. Дан треугольник ABC и точки E и F на сторонах BC и AC соответственно, O – точка пересечения отрезков AE и BF, причём $AO : OE = 3 : 1$ и $AF : FC = 6 : 5$. В каком отношении точка E делит сторону BC?

3. Длина основания треугольника равна 36. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найти длину отрезка этой прямой, заключённого между сторонами треугольника.

4. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как 2:1. В каком отношении, считая от вершины, она делит боковые стороны?

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CD. Вычислите гипотенузу AB, если $AC = 5$, $AD = 2$.

6. Высота CD прямоугольного треугольника ABC делит гипотенузу AB на отрезки $AD = 9$ и $DB = 4$. Найдите CD.

7. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника, площади которых равны соответственно 6 и 54. Найдите гипотенузу треугольника.

8. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к его гипотенузе, делит биссектрису одного из острых углов на отрезки, отношение длин которых равно $3+2\sqrt{3}$, считая от вершины. Найти величины острых углов треугольника.

9. В прямоугольном треугольнике ABC угол C – прямой, CD – высота, опущенная на гипотенузу. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 3 и 4. Найти гипотенузу AB треугольника ABC.

10. Треугольник ABC не имеет тупых углов. На стороне AC этого треугольника взята точка D так, что $AD = \dfrac{3}{4}AC$. Найти угол BAC, если известно, что прямая BD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.

11. Доказать, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами треугольника, образованного отрезками, соединяющими основания высот.

12. В остроугольном треугольнике ABC угол BAC равен α. На стороне BC, как на диаметре, построена окружность. Эта окружность пересекает сторону AC в точке P, а сторону AB в точке Q. Найти отношение площади треугольника APQ к площади треугольника ABC.

13. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CH и AH_1. Известно, что $AC = 2$, площадь круга, описанного около треугольника HBH_1, равна $\dfrac{\pi}{3}$. Найти угол между высотой CH и стороной BC.

14. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C прямой) длина катета BC равна 2 см. В угол ABC вписана окружность радиуса $\sqrt{2}$ см так, что она касается прямой BC в точке C. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

15. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка H так, что длина отрезка BH равна 3, длина отрезка HC равна 2, а сумма углов ABC и AHB равна π. Найти периметр треугольника ABH, если косинус угла ACB равен $\dfrac{11}{16}$.

16. В остроугольном треугольнике ABC опущены высоты AP и CK. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPK равна 2, а длина отрезка PK равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

17. Через точку, взятую на стороне треугольника, проведены две прямые, параллельные двум другим сторонам. Эти прямые разбивают данный треугольник на три части – один параллелограмм и два треугольника; площади треугольников равны S_1 и S_2. Найти площадь параллелограмма.

18. Через точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых – треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найти площадь треугольника.

1.5. Площади

Теоретический материал

При решении задач этого раздела необходимо помнить формулы площади треугольника:

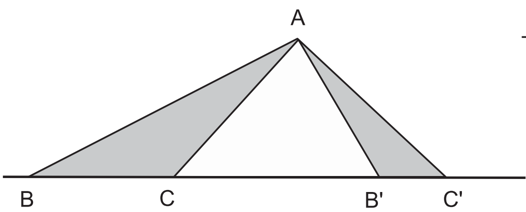
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad S = pr.$$

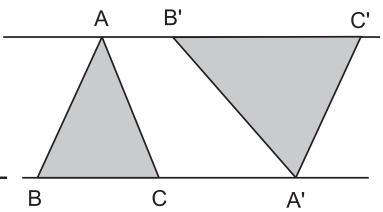
Следствия из формулы $S = \dfrac{1}{2} a h_a$.

- Площади треугольников с общим основанием относятся, как высоты, проведенные к этому основанию.

- Отношение площадей треугольников с общей вершиной и основаниями, лежащими на одной прямой (левый рисунок), равно отношению длин этих оснований:
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'C'}} = \frac{BC}{B'C'}.$$

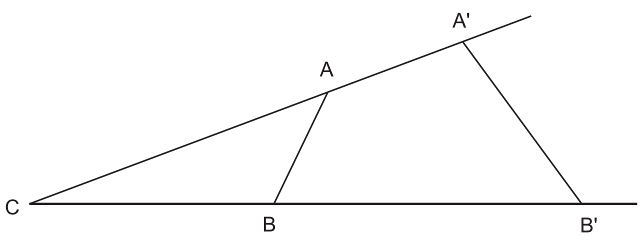
- Отношение площадей двух треугольников с вершинами, лежащими на двух параллельных прямых (правый рисунок), равно отношению длин параллельных сторон:
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{BC}{B'C'}.$$





Следствие из формулы $S = \dfrac{1}{2} ab \sin\gamma$.

Площади треугольников с общим (или равным) углом при вершине относятся, как произведение отношений соответствующих сторон:
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C}} = \frac{CA}{CA'} \cdot \frac{CB}{CB'}.$$



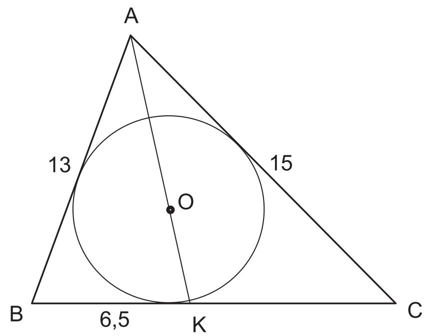
Напомним также утверждения, справедливые для произвольных фигур на плоскости:

- равные фигуры имеют равные площади;

- отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия этих фигур.

Примеры решения задач

Пример 1. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. Луч AO пересекает сторону BC в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 13$, $AC = 15$, $BK = 6,5$.



Решение. Найдём отрезок KC и вычислим площадь по формуле Герона. Так как центр вписанной окружности есть точка пересечения биссектрис, то отрезок AK является биссектрисой ΔABC и по свойству биссектрисы

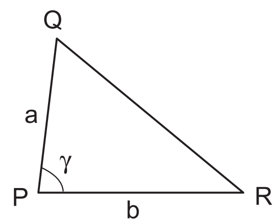
$$\frac{AB}{BK} = \frac{AC}{KC} \implies KC = 7,5 \implies BC = 14.$$

Теперь площадь ΔABC можно вычислить по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84.$$

Ответ. 84.

Пример 2. В треугольнике PQR длина стороны PQ не больше, чем 9, а длина стороны PR не больше, чем 12. Площадь треугольника не меньше, чем 54. Найти длину его медианы, проведенной из вершины P.



Решение. Пусть $PQ = a$, $PR = b$, $\angle QPR = \gamma$. Тогда

$$S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Так как $\sin\gamma \leq 1$, $a \leq 9$, $b \leq 12$, то

$$S_{\Delta PQR} \leq \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \cdot 1 = 54.$$

Но по условию задачи $S_{\Delta PQR} \geq 54$, следовательно, $S_{\Delta PQR} = 54$. Это возможно только в случае, когда $a = 9$, $b = 12$ и $\sin\gamma = 1$. Значит, $\gamma = 90^\circ$, гипотенуза $QP = \sqrt{a^2 + b^2} = 15$, а медиана, проведённая к гипотенузе, равна $QP/2 = 15/2$.

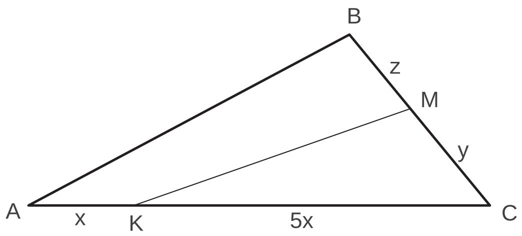
Ответ. $\dfrac{15}{2}$.

Пример 3. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка K, а на стороне BC – точка M так, что $S_{KMC} : S_{AKMB} = 5 : 6$, $\dfrac{CK}{KA} = 5$. Найти $\dfrac{CM}{MB}$.

Решение. Пусть $AK = x$, $CM = y$, $MB = z$, тогда $CK = 5x$.

Если мы будем знать отношение площадей треугольников KMC и ABC, то сможем найти искомое отношение $y:z$ из равенства

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KMC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(x+5x)(y+z)\sin\angle C}{\frac{1}{2}\cdot 5xy\sin\angle C} = \frac{6(y+z)}{5y}.$$



Отношение площадей треугольников ABC и KMC получим следующим образом:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KMC}} = \frac{S_{\Delta KMC}+S_{AKMB}}{S_{\Delta KMC}} = 1+\frac{6}{5} = \frac{11}{5}.$$

Следовательно,

$$\frac{6(y+z)}{5y} = \frac{11}{5} \quad\Longleftrightarrow\quad 5y = 6z \quad\Longleftrightarrow\quad y:z = 6:5.$$

О т в е т. $6:5$.

Задачи

1. Найдите диаметр окружности, вписанной в треугольник со сторонами 20, 20, 24.

2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 4, 13, 15.

3. Найти отношение площадей треугольника и четырёхугольника, на которые делится треугольник своей средней линией.

4. Стороны треугольника ABC разделены пополам точками D, E и F соответственно. Во сколько раз площадь треугольника DEF меньше площади треугольника ABC?

5. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на две равновеликие части. В каком отношении эта прямая делит боковые стороны треугольника?

6. Стороны первого треугольника равны 6, 9 и 12. Произведение длин сторон подобного ему треугольника равно 24. Найти отношение площади первого треугольника к площади второго.

7. Дан треугольник ABC, величина угла между AB и AC равна $\pi/3$. Во сколько раз изменится площадь треугольника, если этот угол увеличится в два раза (длины сторон, образующих данный угол, фиксированы)?

8. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15. Найдите большую высоту треугольника. Ответ округлите до целых.

9. Площадь треугольника ABC равна 8. Точка D лежит на стороне AC, а точка E – на стороне AB. Известно, что $AE = BE$, $AD = 3DC$. Найти площадь треугольника BDE.

10. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, а точка E – на стороне AB. Известно, что $AE = 3BE$, $AD = 2DC$. Найти отношение площадей треугольников BDE и ABC.

11. Биссектрисы BE и AD треугольника ABC пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BQD равна 1 и $2AC = 3AB$, $3BC = 4AB$.

12. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, а угол ABC равен 120°. Найти отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.

13. В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $CD = CE = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE. Площадь треугольника AOE меньше площади треугольника BOD на $1/2$. Кроме того, известно, что $BE = \sqrt{17}$. Найти площадь треугольника ABC.

14. Медианы BK и CL треугольника ABC пересекаются в точке M под прямым углом, $AC = b$, $AB = c$. Найти площадь четырёхугольника $AKML$.

15. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 15, а длина высоты BD равна 5. На стороне AB взята точка P так, что длины отрезков AP и PB равны соответственно 5,8 и 7,2. Найти площадь S треугольника BPC, если известно, что $S > 3$.

16. В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L. Найти площадь треугольника ABC, если площадь четырёхугольника $KCDL$ равна 5.

17. В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 9$, $AC = 10$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке M. На отрезке BM взята точка O так, что $BO : OM = 3 : 1$. Площадь какого из треугольников ABO, BCO или ACO является наименьшей?

18. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части 5 и 7. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника?

19. В треугольнике ABC известны длины всех высот: $h_a = 1/3$, $h_b = 1/4$, $h_c = 1/5$. Найти отношение длины биссектрисы CD к радиусу описанной окружности.

2. Окружности

2.1. Углы в окружностях. Касание окружности и прямой

Теоретический материал

При решении задач, связанных с окружностями, необходимо помнить следующие факты и утверждения.

Теорема о вписанном угле. Вписанный угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается.

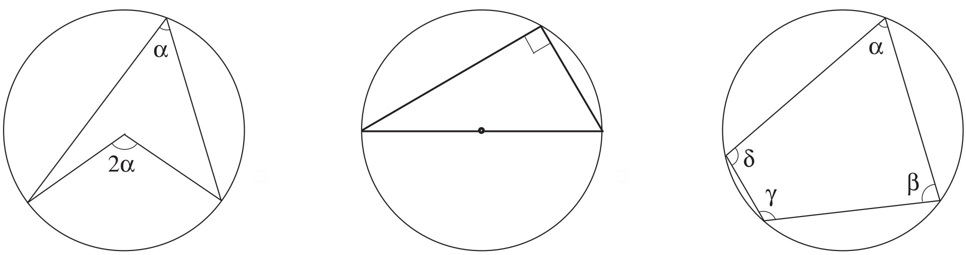
Замечание. Так как дуга измеряется величиной соответствующего центрального угла, то вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Следствие 1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу (или на равные дуги), равны.

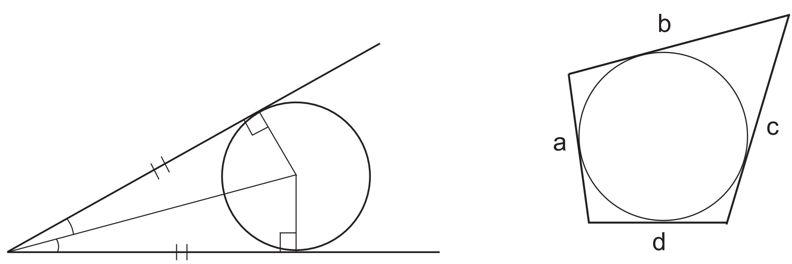
Следствие 2. Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым.

Следствие 3. Сумма противолежащих углов вписанного в окружность четырехугольника равна 180°:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$



Теорема о касательных. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Отрезки касательных, проведенных из одной точки к одной окружности, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



Следствие. В любом описанном около окружности четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны:

$$a + c = b + d.$$

Также полезными могут оказаться следующие утверждения об углах в окружностях.

- *Угол между хордами* равен полусумме мер дуг окружности, которые отсекают на окружности эти хорды (левый рисунок):

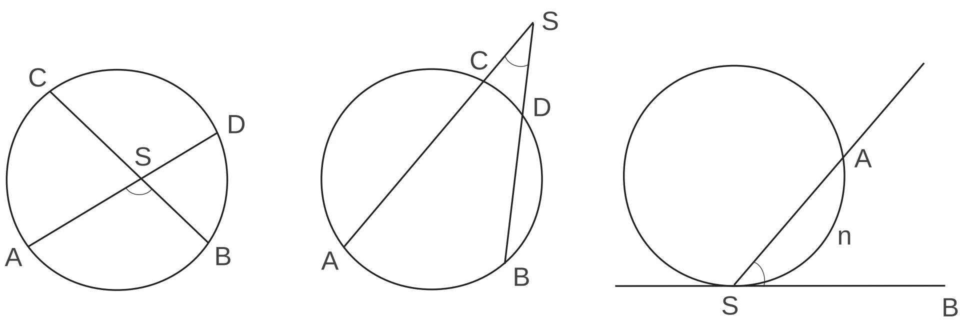
$$\angle ASB = \frac{\smile AB + \smile CD}{2}.$$

- *Угол между секущими*, выходящими из одной точки, равен полуразности мер дуг окружности, заключенных между ними (центральный рисунок):

$$\angle ASB = \frac{\smile AB - \smile CD}{2}.$$

- *Угол между хордой и касательной* измеряется половиной меры заключенной внутри него дуги окружности (правый рисунок):

$$\angle ASB = \frac{\smile AnS}{2}.$$



Примеры решения задач

П р и м е р 1. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность. Параллельно его основанию AC проведена касательная к окружности, пересекающая боковые стороны в точках D и E. Найти радиус окружности, если $DE = 8$, $AC = 18$.

Р е ш е н и е. Опустим из точек D и E перпендикуляры на сторону AC – получим прямоугольник $DEMK$, в котором $KM = DE = 8$.

Диаметр окружности равен перпендикуляру DK, для вычисления длины которого сначала надо найти длину отрезка AD.

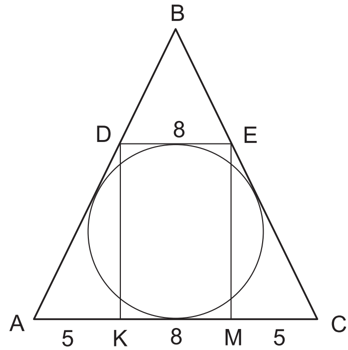
Рассмотрим прямоугольные треугольники ADK и CEM. Они равны по катету ($DK = EM$) и острому углу ($\angle A = \angle C$, так как ΔABC равнобедренный). Из равенства треугольников следует равенство отрезков

$$AK = MC = 5.$$

Так как в описанном около окружности четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны, то

$$AD + EC = DE + AC = 8 + 18 = 26 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad AD = EC = \frac{26}{2} = 13.$$



Диаметр окружности равен

$$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$$

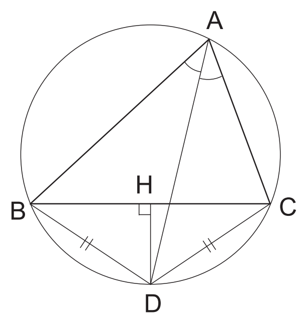
Следовательно, радиус равен $12/2 = 6$.

Ответ. 6.

Пример 2. Доказать, что если из вершины A неравнобедренного треугольника ABC $(AB \neq AC)$ проведена биссектриса, а из середины BC восстановлен перпендикуляр, то точка их пересечения лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Решение. Пусть D – точка пересечения биссектрисы угла BAC треугольника ABC с описанной окружностью.

Из равенства углов BAD и CAD следует равенство хорд $BD = CD$, а из равнобедренности треугольника BDC следует то, что перпендикуляр, опущенный из точки D на отрезок BC делит его пополам.



Таким образом, мы получили, что серединный перпендикуляр к отрезку BC и биссектриса угла BAC пересекаются в точке D, лежащей на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Пример 3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что отрезок OE имеет длину 1, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E, D, O. Найти стороны и углы треугольника EDO.

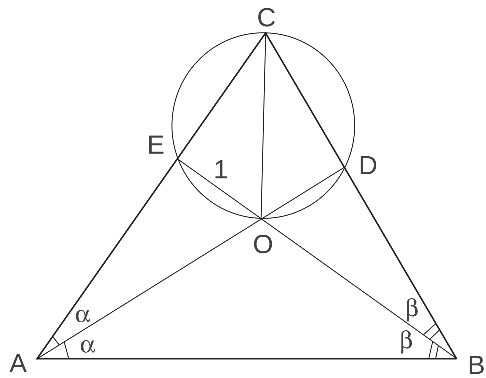
Решение. Пусть $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$, $\angle ABE = \angle CBE = \beta$, тогда

$$\angle ACB = \pi - 2\alpha - 2\beta, \quad \angle DOE = \angle AOB = \pi - \alpha - \beta.$$

Так как вокруг четырехугольника $CEOD$ можно описать окружность, то

$$\angle ACB + \angle DOE = \pi \quad \Longrightarrow \quad (\pi - 2\alpha - 2\beta) + (\pi - \alpha - \beta) = \pi \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \quad \Longrightarrow \quad \angle ACB = \frac{\pi}{3} \quad \Longrightarrow \quad \angle DOE = \frac{2\pi}{3}.$$



Поскольку биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке и O есть точка пересечения двух из них, прямая CO является третьей биссектрисой и

$$\angle ECO = \angle DCO = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{\pi}{6}.$$

В силу того, что равные вписанные углы опираются на равные хорды, $DO = EO = 1$. Следовательно, треугольник DOE равнобедренный и

$$\angle OED = \angle ODE = \frac{\pi - \angle DOE}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Последний элемент треугольника DOE можно найти с помощью теоремы косинусов. Получим $DE = \sqrt{3}$.

Ответ. $EO = DO = 1,\ DE = \sqrt{3},\ \angle DOE = \dfrac{2\pi}{3},\ \ \angle OED = \angle ODE = \dfrac{\pi}{6}.$

Задачи

1. В окружности радиуса 26 проведена хорда, равная 48. Найти длину отрезка, соединяющего середину хорды с центром окружности.

2. В угол величиной 60° вписана окружность. Найти расстояние от центра окружности до вершины угла, если радиус окружности равен 7,5.

3. В окружности с центром в точке O проведена хорда AB и радиус OD, которые пересекаются в точке C, причем известно, что $AB \perp OD$, $OC = 9$, $CD = 32$. Найти хорду.

4. В окружности перпендикулярно диаметру AB проведена хорда CD. Точка их пересечения делит диаметр на отрезки 18 и 32. Найти длину хорды CD.

5. Найти угол между хордой AB и диаметром BC, если хорда AB стягивает дугу в 54°.

6. Из точки A окружности проведены диаметр AB и хорда AC, которая продолжена за C на расстояние CK, равное AC. Найти BK, если радиус окружности равен 4.

7. Определить острые углы прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанного около него круга относится к радиусу вписанного круга как 5:2.
8. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 120°. Найти расстояние между центрами окружностей, если длина хорды равна $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$.
9. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.
10. KD и MC – хорды одной окружности, причем E – точка их пересечения. Найдите угол CDE, если угол DEM в 4 раза больше угла DEC, а угол CMK на 26° больше угла DEC.
11. Найдите углы треугольника, в котором центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон треугольника.
12. Через вершины вписанного в окружность треугольника проведены касательные к этой окружности. Определить углы треугольника, образованного этими касательными, через углы вписанного треугольника.
13. Окружность проходит через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке B. Найти длину диагонали BD, если длины оснований трапеции равны a и b.
14. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, разбивает один из его катетов на отрезки длины m и n, причем $m < n$. Найти длину другого катета.
15. Через точки пересечения двух окружностей P и P' проведены прямые AB и CD (точки A и D лежат на первой окружности, точки B и C – на второй). Через точки A и D проведена прямая m, а через B и C – прямая m'. Доказать, что m параллельна m'.
16. К двум не пересекающимся окружностям проведены две внешние касательные и внутренняя. Точки M и N – точки касания внешней касательной с окружностями, а P и Q – точки пересечения внутренней касательной с внешними. Доказать, что $MN = PQ$.
17. Может ли у треугольника со сторонами меньше 1 радиус описанной окружности быть больше 100?

2.2. Свойства касательных, хорд, секущих

Теоретический материал

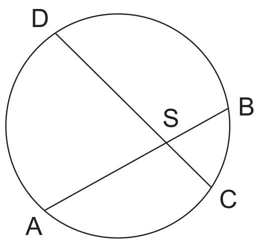
При решении задач этого раздела потребуется знание двух следующих теорем.

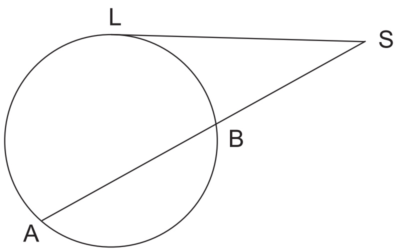
Теорема о касательной и секущей. Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части (правый рисунок):

$$SL^2 = SA \cdot SB.$$

Теорема о хордах. Произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны (левый рисунок):

$$AS \cdot SB = CS \cdot SD.$$

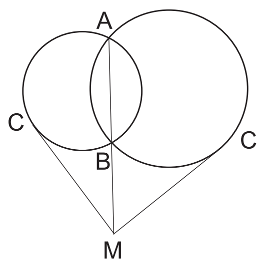




Следствие. Произведение длины отрезка секущей на длину ее внешней части есть величина постоянная для всех секущих, проведенных из одной точки к данной окружности.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. Доказать, что касательные к двум пересекающимся окружностям, проведенные из любой точки продолжения их общей хорды, равны между собой.

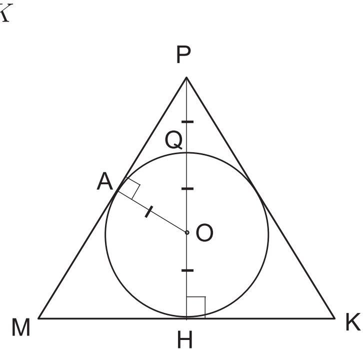


Р е ш е н и е. Пусть окружности пересекаются в точках A и B. Рассмотрим произвольную точку M на прямой AB и проведем касательные MC и MC'. Так как квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части, то

$$MC^2 = MA \cdot MB \quad \text{и} \quad MC'^2 = MA \cdot MB,$$

следовательно, $MC = MC'$, что и требовалось доказать.

П р и м е р 2. В равнобедренный треугольник PMK с основанием MK вписана окружность с радиусом $2\sqrt{3}$. Высота PH делится точкой пересечения с окружностью в отношении $1:2$, считая от вершины P. Найдите периметр треугольника PMK.



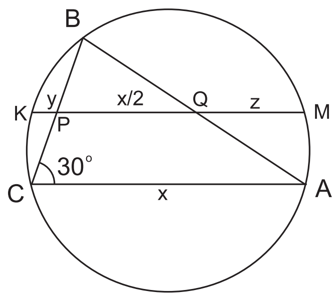
Р е ш е н и е. Обозначим точку пересечения высоты с окружностью через Q. Поскольку треугольник PMK равнобедренный, центр вписанной окружности O лежит на высоте PH и отрезок QH является диаметром, то есть равен $2r$. По условию задачи $QH = 2PQ$, значит $PQ = r$.

Пусть вписанная окружность касается стороны MP в точке A. Тогда в прямоугольном треугольнике APO катет $AO = r$, гипотенуза $PO = 2r$, откуда $\sin\angle APO = 1/2$ и $\angle APO = 30^\circ$. Следовательно, $\angle MPK = 2\angle APO = 60^\circ$ и треугольник PMK является равносторонним. Его периметр равен

$$P_{\Delta PMK} = 3MP = 6AP = 6r\operatorname{ctg} 30^\circ = 36.$$

Ответ. 36.

Пример 3. Треугольник ABC со стороной $BC = 4$ и углом C, равным 30° вписан в окружность, радиуса 6. Найти среднюю линию этого треугольника, параллельную AC, и расстояние между точками, в которых ее продолжение пересекает окружность.



Решение. Поскольку средняя линия треугольника равна половине соответствующей стороны, надо найти сторону AC. Для её нахождения нам достаточно знать AB. Найдём сторону AB по теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2R \quad\Longrightarrow\quad AB = 6.$$

Теперь найдем $x = AC$ с помощью теоремы косинусов:

$$6^2 = 4^2 + x^2 - 2\cdot 4\cdot x\cdot\cos 30^\circ \quad\Longleftrightarrow\quad x = 2\sqrt{3}\pm 4\sqrt{2}.$$

Нам подходит только положительное значение $x = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$. Следовательно, средняя линия $PQ = x/2 = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$.

Пусть прямая, содержащая среднюю линию, пересекает окружность в точках K и M. Обозначим $y = KP$, $z = QM$ и запишем соотношение для пересекающихся хорд BC и KM:

$$BP\cdot PC = KP\cdot PM \quad\Longleftrightarrow\quad 2^2 = y\left(\frac{x}{2} + z\right).$$

Аналогично для хорд AB и KM:

$$AQ\cdot QB = MQ\cdot QK \quad\Longleftrightarrow\quad 3^2 = z\left(\frac{x}{2} + y\right).$$

В результате получаем систему

$$\begin{cases} 4 = y\cdot\dfrac{x}{2} + yz, \\ 9 = z\cdot\dfrac{x}{2} + yz. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго и выразим z через y:

$$5 = \frac{x}{2}(z - y) \quad\Longleftrightarrow\quad z = y + \frac{10}{x}.$$

Подставим выражение для z в первое уравнение системы:

$$4 = y \cdot \frac{x}{2} + y\left(y + \frac{10}{x}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 + 2y\left(\frac{x}{4} + \frac{5}{x}\right) - 4 = 0.$$

Так как $x = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$ и $\dfrac{1}{x} = \dfrac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{10}$, то $\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{x} = 2\sqrt{2}$.
Следовательно, $y^2 + 4\sqrt{2}y - 4 = 0$ и $y = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.
В результате, $z = \sqrt{3}$ и $KM = 4\sqrt{3}$.

Ответ. $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$.

Задачи

1. (Теорема о хордах.) Доказать, что произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны.

2. (Теорема о касательной и секущей.) Доказать, что квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части.

3. KM и CD – хорды одной окружности, причем E – точка их пересечения. Найдите KM, если $CE = 6, ED = 8$ и KE на 8 меньше EM.

4. BD и CE – хорды одной окружности, причем A – точка их пересечения. Найдите BD, если $AC = 6, AE = 12$ и AB на 1 меньше AD.

5. Прямая CK пересекает окружность в точках P и K, а прямая CM – в точках D и M. Найдите DM, если $CK = 16, CP = 6$ и $CM = 24$.

6. Прямая AC пересекает окружность в точках D и C, а прямая AB – касательная к окружности, B – точка касания. Найдите AD, если $AB = 6$, $CD = 5$.

7. AC и BD – хорды одной окружности, причем K – точка их пересечения. Найдите P_{CKD}, если $KB = 12, KC = 30$ и $P_{AKB} = 28$.

8. Радиус круга равен 5. Внутри круга взята точка P на расстоянии 4 от его центра O. Через точку P проведена хорда $AB = 8$. На какие части делится хорда точкой P?

9. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана треугольника AM продлена до пересечения с окружностью в точке K. Найдите сторону AC, если $AM = 18$, $MK = 8$, $BK = 10$.

10. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 и касательная, длина которой составляет $2/3$ внутреннего отрезка секущей. Определить длину касательной.

11. Четырехугольник $ABCD$ с взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность. Найти ее радиус, если $AB = 4$, $CD = 2$.

12. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AB = 9$, $CD = 4$, $AC = 7$ и $BD = 8$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

13. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Угол AEC в 5 раз больше угла BAF, $\angle ABC = 72°$. Найти радиус окружности, если $AC = 6$.

14. Через точку K, находящуюся вне окружности радиуса 4, проведена прямая, пересекающая окружность в точках L и M. Найти расстояние от точки K до центра окружности, если известно, что $KL = 4$, $KM = 5$.

15. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжение стороны AB за точку B пересекается с продолжением стороны CD в точке E. Найти угол ADE, если $CE = 2BE$, $AB : EC = 7 : 2$ и косинус угла AED равен $7/8$.

16. В окружности проведены равные пересекающиеся хорды. Доказать, что соответствующие части этих хорд, на которые они делятся точкой пересечения, равны.

17. Доказать, что расстояние от точки окружности до хорды круга есть среднее пропорциональное между расстояниями от концов хорды до касательной к окружности в этой точке.

2.3. Смешанные задачи

Теоретический материал

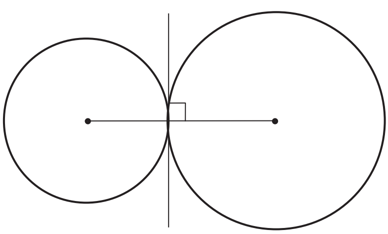
В этом разделе собраны задачи на использование приведенных ранее методов и задачи, связанные с формулами длины окружности и площади круга:

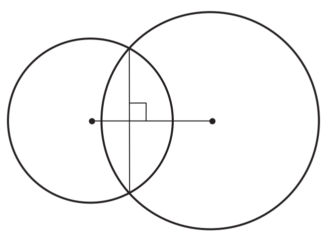
$$l = 2\pi R, \quad S = \pi R^2.$$

Кроме того, в раздел включены задачи с несколькими окружностями.

Напомним основные факты, связанные с взаимным расположением окружностей.

- Точка касания двух окружностей лежит на линии центров этих окружностей.
- Общая касательная, проходящая через точку касания двух окружностей, перпендикулярна линии центров (левый рисунок).
- Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров (правый рисунок).



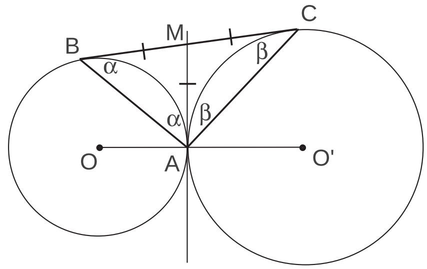


З а м е ч а н и е. Если в задаче сказано, что две окружности касаются друг друга, то, вообще говоря, возможны два случая касания – внутреннее и внешнее.

Примеры решения задач

Пример 1. К двум окружностям с центрами O и O', касающимся внешним образом в точке A, проведена общая касательная BC (B и C – точки касания). Доказать, что угол BAC – прямой.

Решение. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную линии центров OO', она будет общей касательной к окружностям. Обозначим точку ее пересечения с отрезком BC через M.



Получим, что $BM = AM$ (как отрезки касательных к окружности с центром O) и $CM = AM$ (как отрезки касательных к окружности с центром O'). Следовательно, в треугольнике ABC медиана AM равна половине стороны BC. Покажем, что угол BAC – прямой.

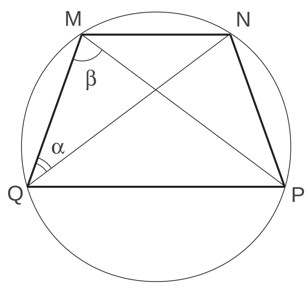
В равнобедренных треугольниках ABM и ACM обозначим

$$\alpha = \angle MAB = \angle ABM, \quad \beta = \angle MAC = \angle ACM,$$

тогда в треугольнике ABC сумма углов равна $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, следовательно, $\angle BAC = \alpha + \beta = 90^\circ$.

Замечание. В процессе решения задачи мы доказали ещё один полезный факт: если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Пример 2. Трапеция $MNPQ$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее меньшее основание $MN = 24$, $\sin\angle MQN = 0,2$ и $\cos\angle PMQ = 0,6$.



Решение. Для того, чтобы найти среднюю линию трапеции, надо найти основание PQ, а для того, чтобы найти PQ, надо узнать радиус окружности. Обозначим $\alpha = \angle MQN$, $\beta = \angle PMQ$ и применим теорему синусов к ΔMNQ:

$$\frac{24}{\sin\alpha} = 2R \quad \Longrightarrow \quad R = 60.$$

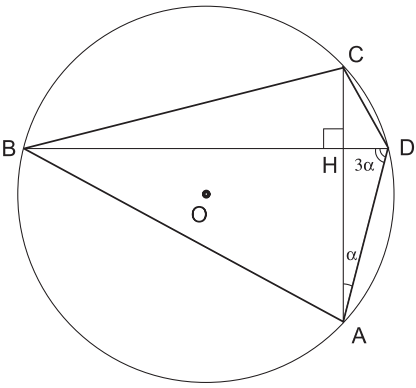
Теперь применим теорему синусов к ΔMPQ:

$$\frac{PQ}{\sin\beta} = 2R \quad \Longrightarrow \quad PQ = 2R \cdot \sqrt{1 - \cos^2\beta} = 96.$$

В результате средняя линия равна $\dfrac{MN + PQ}{2} = 60$.

Ответ. 60.

Пример 3. В окружность с центром в точке O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Известно, что $\angle AOB = 3\angle COD$. Найти площадь круга и сравнить с числом 510, если $CD = 10$.



Решение. Так как треугольник ACD вписан в окружность и длина стороны CD известна, то для нахождения радиуса окружности надо найти величину угла DAC. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке H и $\angle DAC = \alpha$. Так как вписанный угол равен половине центрального, а соответствующий центральный в три раза больше, то угол $ADB = 3\alpha$. Из прямоугольного треугольника ADH получаем $\alpha + 3\alpha = 90^\circ \iff \alpha = 45^\circ/2$. Теперь с помощью теоремы синусов из треугольника ADC определим радиус окружности:

$$\frac{10}{\sin\alpha} = 2R \quad \iff \quad R = \frac{5}{\sin\frac{\pi}{8}}.$$

Следовательно, для искомой площади круга получаем

$$S = \pi R^2 = \frac{25\pi}{\sin^2\frac{\pi}{8}} = \frac{50\pi}{1-\cos\frac{\pi}{4}} = 50\pi\cdot(2+\sqrt{2}) > 50\cdot 3\cdot(2+1,4) = 510.$$

Ответ. $S = 50\pi\cdot(2+\sqrt{2}) > 510$.

Задачи

1. Около окружности диаметром 15 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17. Найдите длину большего основания трапеции.

2. Из точки A, лежащей на окружности, проведены две хорды, равные 7 и 15. Найдите диаметр окружности, если расстояние между серединами хорд равно 10.

3. Две окружности, вписанные в угол 60°, касаются друг друга внешним образом. Найти расстояние от точки касания окружностей до стороны угла, если если радиус большей окружности равен 23.

4. В окружности, радиус которой равен 11, проведены хорды AB и AC. Угол между ними равен 30°. Найти расстояние между точками B и C.

5. В окружности по разные стороны от центра проведены параллельные хорды длиной 12 и 16. Расстояние между ними равно 14. Найти радиус окружности.

6. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги в 60° и 120°. Найти отношение площадей этих кругов.

7. В полукруг помещен круг, касающийся дуги полукруга в ее середине, а также диаметра полукруга. Найдите отношение площадей данного полукруга и данного круга.

8. Определить радиус окружности, если вписанный в нее угол со сторонами, длины которых равны 1 и 2, опирается на дугу 120°.

9. Окружности радиусов r и R касаются внешним образом. Найдите длину их общей внешней касательной.

10. В угол, величина которого равна α, вписаны две окружности, касающиеся друг друга и сторон угла. Определить отношение большего радиуса к меньшему.

11. В круг вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций равны.

12. Вычислите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом α.

13. В окружности диаметра 4 проведены диаметр AB и хорда CD, пересекающиеся в точке E. Известно, что $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCE = 8^\circ$. Найти длину CE.

14. В треугольнике ABC $\angle B = \dfrac{\pi}{6}$. Через точки A и B проведена окружность радиуса 2, касающаяся прямой AC в точке A. Через точки B и C проведена окружность радиуса 3, касающаяся прямой AC в точке C. Найти длину стороны AC.

15. AM – биссектриса треугольника ABC, $BM = 2$, $CM = 3$, D – точка пересечения AM с окружностью, описанной около данного треугольника, $MD = 2$. Найти AB.

16. Окружности радиусов 2 и 3 внешним образом касаются друг друга в точке A. Их общая касательная, проходящая через точку A, пересекает две другие их общие касательные в точках B и C. Найти BC.

17. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке C. Радиусы окружностей равны 2 и 7. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку C, пересекается с другой их общей касательной в точке D. Найти расстояние от центра меньшей окружности до точки D.

18. В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ и $AC = 3$. Сравните величину угла BOC и $112,5^\circ$, если O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.

19. Найти радиус окружности, которая касается двух окружностей, касающихся друг друга внешним образом, радиусов r и R и отрезка их общей касательной.

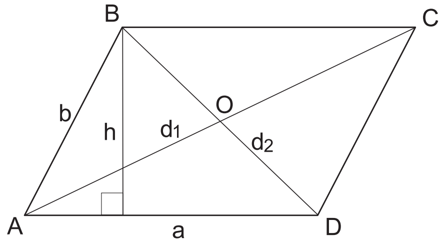
20. $ABCD$ – трапеция. Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, BCD и ACD, равны R_1, R_2 и R_3 соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABD.

3. Многоугольники

3.1. Параллелограммы

Теоретический материал

Параллелограммом называется четырехугольник, противолежащие стороны которого попарно параллельны.



У параллелограмма

- противоположные стороны равны;
- противоположные углы равны;
- диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
- площадь равна: $S = ah = ab\sin\angle BAD = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\angle AOB$;
- сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.

Заметим, что параллелограмм является *выпуклым* четырехугольником, то есть лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Признаки параллелограмма. Четырехугольник является параллелограммом, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- противоположные стороны попарно равны;
- противоположные углы попарно равны;
- диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
- две противоположные стороны равны и параллельны.

Если один из углов параллелограмма прямой, то и все углы – прямые. Такой параллелограмм называется *прямоугольником.*

У прямоугольника

- диагонали равны;
- площадь равна произведению сторон: $S = ab$.

Если у параллелограмма все стороны равны, то такой параллелограмм называется *ромбом.*

У ромба

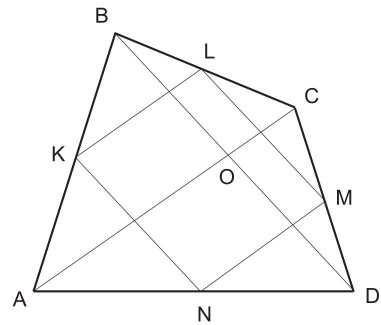
- диагонали перпендикулярны и являются биссектрисами соответствующих углов;
- площадь равна половине произведения диагоналей.

Квадратом называется параллелограмм с прямыми углами и равными сторонами. Так как квадрат есть частный случай прямоугольника и частный случай ромба, то он обладает всеми перечисленными выше свойствами.

Примеры решения задач

Пример 1 (Теорема Вариньона). Доказать, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Решение. Пусть точки K, L, M и N середины сторон AB, BC, CD и AD четырехугольника $ABCD$. Так как отрезок KL является средней линией треугольника ABC, а отрезок MN – средней линией треугольника ADC, то

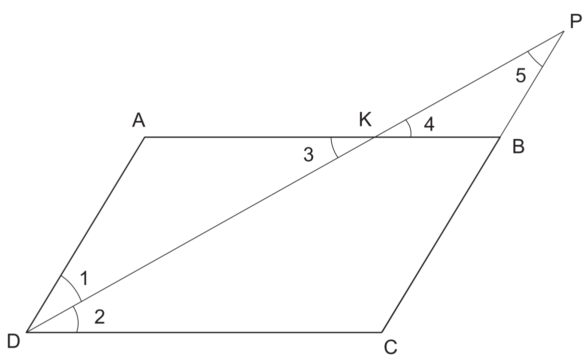


$$KL \parallel AC,\ KL = \frac{1}{2}AC,\ MN \parallel AC,\ MN = \frac{1}{2}AC,$$

следовательно, $KL \parallel MN$, $KL = MN$ и четырехугольник $KLMN$ является параллелограммом по одному из признаков параллелограмма.

Пример 2. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр треугольника CDP, если $AK = 12$, $BK = 9$, $PK = 15$.

Решение. Заметим, что $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5$:
$\angle 1 = \angle 2$ (по условию),
$\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие при параллельных прямых),
$\angle 3 = \angle 4$ (как вертикальные),
$\angle 5 = \angle 1$ (как накрест лежащие при параллельных прямых).



Следовательно, треугольники ΔKPB, ΔDPC и ΔAKD являются равнобедренными и подобными. Так как $DC = AB = 21$ и ΔCDP равнобедренный, то осталось найти только DK.

Из подобия $\Delta KPB \sim \Delta KDA$ получим

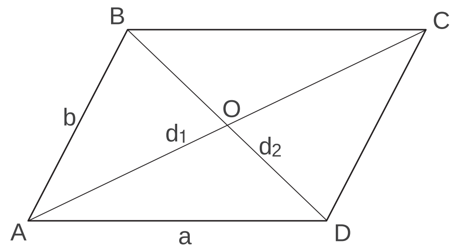
$$\frac{AK}{KB} = \frac{DK}{KP} \iff \frac{12}{9} = \frac{DK}{15} \iff DK = 20.$$

В результате $P_{\Delta CDP} = 21 + 35 + 21 = 77$.

О т в е т. 77.

П р и м е р 3. Доказать, что в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон.

Р е ш е н и е. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Пусть его диагонали $AC = d_1$, $BD = d_2$, а стороны $AD = BC = a$, $AB = CD = b$.



Выразим длины диагоналей через длины сторон с помощью теоремы косинусов, примененной к треугольникам ABC и ABD:

$$\begin{cases} d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle ABC, \\ d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle BAD. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения и, заметив, что $\cos\angle ABC = \cos(\pi - \angle BAD) = -\cos\angle BAD$, получим требуемое равенство

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Задачи

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, причем $\angle COB = 126°$, $\angle CAD = 28°$, и длина отрезка BD вдвое больше стороны AB. Найдите угол D параллелограмма.

2. В прямоугольнике $MNPQ$ сторона MN в 6 раз меньше диагонали NQ. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке E. Периметр треугольника NEM равен 35 см. Найдите диагональ MP.

3. Найдите площадь параллелограмма, если его меньшая диагональ перпендикулярна боковой стороне, и высота, проведенная из вершины тупого угла параллелограмма, делит большую сторону на отрезки 9 см и 25 см.

4. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AD = 4\sqrt{2}$, $\angle ADB = 30°$, $\angle BDC = 45°$. Найдите длину стороны AB.

5. Найдите площадь параллелограмма $MPKN$, если $\angle PKM = 45°$, $PK = 5\sqrt{2}$, $PN = 26$.

6. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $BD = a$, O – точка пересечения диагоналей. Найти площадь параллелограмма, если $\angle DBA = 45°$, а $\angle AOB = 105°$.

7. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AD = 10$, $BD = 8$, а отрезок, соединяющий вершину B с серединой стороны AD, равен $\sqrt{15}$.

8. Дан ромб $ABCD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает большую диагональ ромба AC в точке E. Найдите CE, если $AB = 8\sqrt{5}, BD = 16$.

9. Дан ромб $ABCD$ с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

10. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M. Найдите периметр треугольника CBT, если $AB = 21$, $BM = 35$, $MD = 9$.

11. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M. Найдите периметр треугольника ABM, если $BC = 15$, $BT = 18$, $TM = 12$.

12. Доказать, что из всех прямоугольников с данной диагональю наибольшую площадь имеет квадрат.

13. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке K, причем $AM = 10$, $BK = 6$. Найдите площадь четырехугольника $ABMK$.

14. Расстояния от точки P, находящейся внутри прямоугольника, до трех его вершин равны соответственно a, b и c. Найдите расстояние от точки P до четвертой вершины прямоугольника.

15. Доказать, что если каждая из диагоналей выпуклого четырехугольника делит его на равновеликие треугольники, то этот четырехугольник – параллелограмм.

16. Точка C лежит на стороне MN ромба $KLMN$, причем $CN = 2CM$ и $\angle MNK = 120°$. Найти отношение $\cos\angle CKN : \cos\angle CLN$.

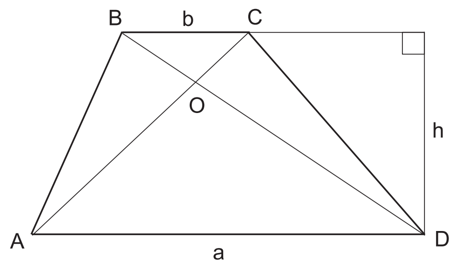
3.2. Трапеции

Теоретический материал

Трапецией называется четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны.

Отметим, что согласно этому определению, параллелограмм является частным случаем трапеции.

З а м е ч а н и е. В некоторых учебных пособиях под трапецией подразумевается четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны.



Параллельные стороны называются *основаниями* трапеции, две другие – *боковыми сторонами.*

Если боковые стороны трапеции равны, но не параллельны, то она называется *равнобедренной* (или *равнобокой*).

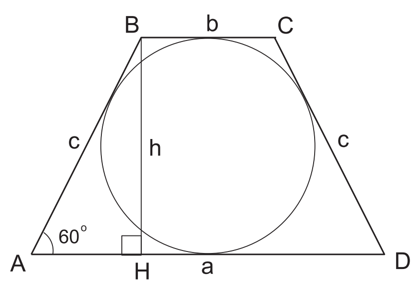
Напомним основные факты, связанные с трапециями.

- Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
- Площадь трапеции равна $S = \frac{1}{2}(a+b)h$.
- У равнобедренной трапеции углы при основании равны и диагонали равны.
- Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.
- Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника, два из которых подобны ($\Delta AOD \sim \Delta COB$), а два других имеют одинаковую площадь ($S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$).

Примеры решения задач

Пример 1. В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен $60°$, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD = a$, $BC = b$, боковые стороны $AB = CD = c$. Опустим из вершины B высоту h на основание AD. Так как диаметр вписанной окружности равен h, то нам надо найти BH из треугольника ABH.



По условию задачи площадь трапеции равна $24\sqrt{3}$, в трапецию вписана окружность и $\angle BAH = 60°$, следовательно,

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} \cdot h = 24\sqrt{3}, \\ a+b = 2c, \\ \dfrac{h}{c} = \sin 60°; \end{cases} \implies \begin{cases} ch = 24\sqrt{3}, \\ \dfrac{h}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \implies h^2 = 36 \implies h = 6,$$

откуда радиус $r = h/2 = 3$.

Ответ. 3.

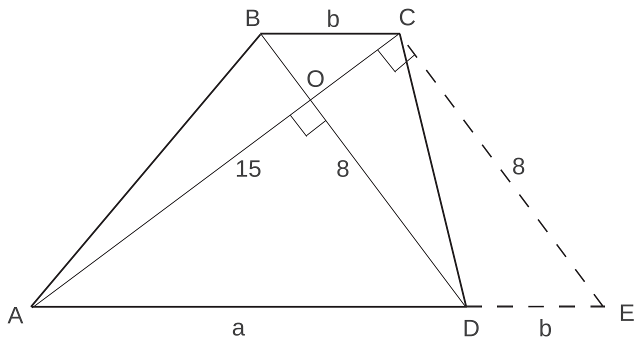
П р и м е р 2. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 8 и 15. Найти среднюю линию трапеции.

Р е ш е н и е. Рассмотрим трапецию $ABCD$, диагонали которой $AC = 15$ и $BD = 8$ взаимно перпендикулярны.

Заметим, что этим условиям удовлетворяет бесконечное множество различных трапеций, то есть, зная только диагонали и угол между ними, мы не сможем найти длины оснований. Однако нам они и не нужны, а нужна их полусумма.

Покажем, что искомая величина (средняя линия исходной трапеции) равна средней линии треугольника, боковые стороны которого равны диагоналям трапеции, а угол между этими сторонами – углу между диагоналями трапеции.

Отложим на прямой AD отрезок $DE = b$. Так как в четырехугольнике $BCED$ стороны BC и DE параллельны и равны, то он является параллелограммом.



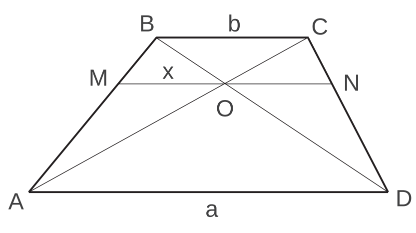
Следовательно, в треугольнике ACE стороны $AC = 15$, $CE = 8$, $AE = a + b$, причем $\angle ACE = \angle AOD = 90°$.

Средняя линия трапеции $ABCD$ равна средней линии треугольника ACE, равна

$$\frac{a+b}{2} = \frac{AE}{2} = \frac{\sqrt{AC^2 + CE^2}}{2} = \frac{\sqrt{15^2 + 8^2}}{2} = \frac{17}{2}.$$

О т в е т. $8{,}5$.

П р и м е р 3. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям. Найти ее отрезок, заключенный между боковыми сторонами.



Р е ш е н и е. Рассмотрим трапецию $ABCD$. Пусть ее диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Для того, чтобы выразить длину искомого отрезка MN через длины оснований трапеции, будем использовать подобие треугольников с взаимно параллельными сторонами.

Пусть x – длина отрезка MO, h – высота трапеции, h_1 – высота треугольника MBO.

Из подобия треугольников $\Delta MBO \sim \Delta ABD$ и $\Delta AMO \sim \Delta ABC$ следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{h_1}{h}, \\ \dfrac{x}{b} = \dfrac{h-h_1}{h}, \end{cases} \implies \quad \frac{x}{b} + \frac{x}{a} = 1 \quad \implies \quad x = \frac{ab}{a+b},$$

то есть $MO = \dfrac{ab}{a+b}$. Рассуждая аналогичным образом, можно получить, что $NO = \dfrac{ab}{a+b}$. В результате $MN = MO + NO = \dfrac{2ab}{a+b}$.

О т в е т. $\dfrac{2ab}{a+b}$.

З а м е ч а н и е. По ходу решения этой задачи мы доказали, что отрезок, заключенный между боковыми сторонами произвольной трапеции, проведенный параллельно основаниям через точку пересечения диагоналей, делится этой точкой пополам.

Задачи

1. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

2. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если средняя линия трапеции равна $\sqrt{10}$, а косинус угла при основании трапеции равен $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

3. Около окружности диаметром 15 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17. Найдите длину большего основания трапеции.

4. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание $AD = 15$, $\sin\angle BAC = 1/3$, $\sin\angle ABD = 5/9$.

5. По основаниям a и b трапеции определить отношение, в котором ее диагонали делят друг друга.

6. Доказать, что если диагонали трапеции равны, то она является равнобедренной.

7. В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна 10, длина основания AD равна 13, а $\angle ABC = 135^\circ$. Выяснить, что больше: длина стороны AB или длина диагонали BD.

8. Основания трапеции равны a и b. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

9. В трапеции $ABCD$ с острыми углами при основании AD проведена диагональ AC, которая разбивает его на два подобных треугольника. Длина основания AD равна a, а длина основания BC равна b. Вычислить длину диагонали AC.

10. В равнобедренной трапеции средняя линия равна a, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

11. Доказать, что биссектрисы углов, прилежащие к одной из не параллельных сторон трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции (или ее продолжении).

12. В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Найдите высоту трапеции, если $AC = 8\sqrt{5}$, $BE = 4\sqrt{5}$.

13. В равнобокой трапеции $ABCD$ основания $AD = 12$, $BC = 6$, высота равна 4. Диагональ AC делит угол BAD трапеции на две части. Какая из них больше?

14. В равнобедренную трапецию площадью 28 вписана окружность радиуса 2. Найти боковую сторону трапеции.

15. Периметр равнобедренной трапеции вдвое больше длины вписанной окружности. Найти угол при основании трапеции.

16. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ равна 128, площадь треугольника BOC, где O – точка пересечения диагоналей трапеции, равна 2. Найти площадь треугольника AOD.

17. Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию. Определить длину отрезка этой прямой между боковыми сторонами трапеции, если средняя линия трапеции равна $4/3$, а точка O делит диагональ трапеции на части, отношение которых равно $1/3$.

18. В равнобедренной трапеции диагональ имеет длину 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, а другое равно 5?

19. В трапеции $ABCD$ основание $AD = 16$, $AB + BD = 40$, $\angle CBD = 60°$. Отношение площадей треугольников ABO и BOC, где O – точка пересечения диагоналей, равно 2. Найти площадь трапеции.

3.3. Общие четырехугольники. Правильные многоугольники

Теоретический материал

Напомним основные факты, связанные с произвольными выпуклыми[2] четырехугольниками.

- *Площадь* выпуклого четырехугольника равна: $S = \dfrac{1}{2} \cdot d_1 d_2 \sin\alpha$, где d_1 и d_2 – диагонали, а α – угол между ними.
- В выпуклый четырехугольник *можно вписать окружность* тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

[2]В этом разделе мы будем рассматривать только выпуклые многоугольники.

- Около выпуклого четырехугольника *можно описать окружность* тогда и только тогда, когда сумма двух его противоположных углов равна $180°$.

- *Теорема Вариньона:* середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Помимо четырехугольников в этом разделе будут рассматриваться правильные n-угольники с $n > 4$.

Правильный многоугольник – это многоугольник с равными сторонами и равными углами.

Напомним основные факты, связанные с правильными многоугольниками.

- Вокруг правильного многоугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность.

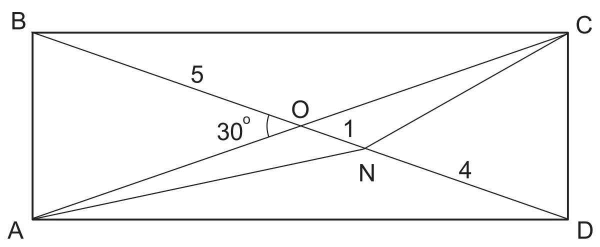
- Центр вписанной окружности совпадает с центром описанной окружности и называется *центром правильного многоугольника.*

- Сумма внутренних углов произвольного выпуклого n-угольника равна $\pi(n-2)$.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. На диагонали BD прямоугольника $ABCD$ взята точка N так, что $BN : ND = 3 : 2$. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $ABCN$, если $AC = 10$ и $\angle AOB = 30°$.

Р е ш е н и е. Так как диагонали прямоугольника равны, то $BD = AC = 10$.

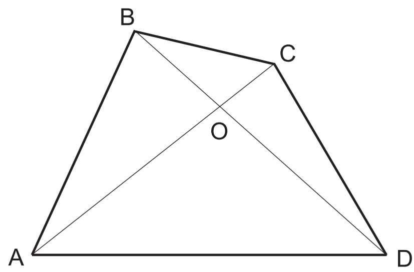


Из условия $BN : ND = 3 : 2$ следует, что $BN = 6$, $ND = 4$ и

$$S_{ABCN} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BN \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

О т в е т. 15.

П р и м е р 2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого $AB + BD \leq$ $\leq AC + CD$. Сравните длины отрезков AB и AC.



Р е ш е н и е. Здесь нам понадобится следующее вспомогательное утверждение: в любом выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей больше суммы двух противоположных сторон.

Для доказательства этого утверждения сложим два неравенства треугольника (для ΔABO и ΔCDO, где O – точка пересечения диагоналей):

$$AB < AO + BO, \quad CD < CO + DO \quad \Longrightarrow \quad AB + CD < AC + BD,$$

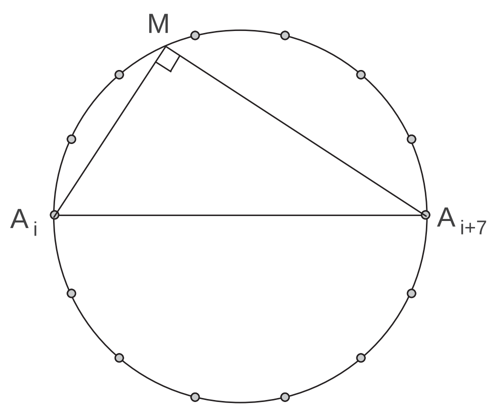
что и требовалось доказать.

Сложив полученное неравенство с исходным неравенством $AB + BD \leq$ $\leq AC + CD$, получим:

$$(AB + CD) + (AB + BD) < (AC + BD) + (AC + CD) \quad \Longleftrightarrow \quad AB < AC.$$

О т в е т. $AB < AC$.

П р и м е р 3. В окружность радиуса 1 вписан правильный четырнадцатиугольник. Найти сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех вершин этого четырнадцатиугольника.



Р е ш е н и е. Пусть M – произвольная точка окружности, A_i (где $i =$ $= 1, 2, ..., 14$) – вершины четырнадцатиугольника. Заметим, что вершины A_i и A_{i+7} (где $i = 1, 2, ..., 7$) являются диаметрально противоположными и если точка M не совпадает ни с A_i, ни с A_{i+7}, то $A_iA_{i+7}M$ – прямоугольный треугольник. В этом случае по теореме Пифагора

$$MA_i^2 + MA_{i+7}^2 = 4.$$

Если же $M = A_i$ (или $M = A_{i+7}$), то также

$$MA_i^2 + MA_{i+7}^2 = 0^2 + 2^2 = 4.$$

Всего у нас 7 таких пар, следовательно, сумма всех MA_i^2 равна 28.

О т в е т. 28.

Задачи

1. Один из внутренних углов правильного n-угольника равен 150°. Найдите число сторон многоугольника.

2. Внешний угол правильного многоугольника меньше внутреннего угла на 140°. Найдите сумму углов данного многоугольника.

3. Вычислите синус угла правильного восьмиугольника.

4. Сторона правильного восьмиугольника равна 1. Найдите площадь описанного круга.

5. Найти расстояние между параллельными сторонами правильного шестиугольника, если радиус описанной около него окружности равен $10\sqrt{3}$.

6. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, у которого отношение длины описанной окружности к стороне многоугольника равно 2π?

7. Около квадрата описана окружность, и в квадрат вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности, если радиус описанной окружности равен $10\sqrt{2}$.

8. Меньшая диагональ правильного шестиугольника равна $5\sqrt{3}$. Найдите его большую диагональ.

9. В окружность вписаны правильные треугольник и шестиугольник. Найти отношение площади шестиугольника к площади треугольника.

10. В правильный шестиугольник вписана окружность, которая в свою очередь описана около квадрата со стороной $\sqrt[4]{12}$. Найти площадь шестиугольника.

11. Центр правильного двенадцатиугольника (точка O) соединен с двумя соседними вершинами A и B. Найти расстояние от точки A до отрезка OB, если длина отрезка OB равна 20.

12. По углам четырехугольника определить угол между биссектрисами двух противоположных углов.

13. Какой четырехугольник с диагоналями d_1 и d_2 имеет максимальную площадь.

14. Из всех четырехугольников, вписанных в окружность, найти четырехугольник наибольшей площади.

15. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что его площадь $S \leq \dfrac{ab+cd}{2}$.

16. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что его площадь $S \leq \dfrac{ac+bd}{2}$.

17. Доказать, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник – трапеция.

18. Внутри выпуклого четырехугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин четырехугольника минимальна.

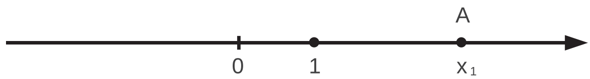
4. Координаты и векторы

4.1. Декартовы координаты и векторы на плоскости

Теоретический материал

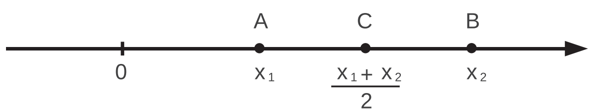
Напомним основные сведения, связанные с декартовыми координатами и векторами на плоскости.

Координатной прямой называется прямая, на которой выбраны: начальная точка, положительное направление и отрезок, принятый за единицу масштаба. В этом случае положение точки на прямой задаётся одним числом – её *координатой*.

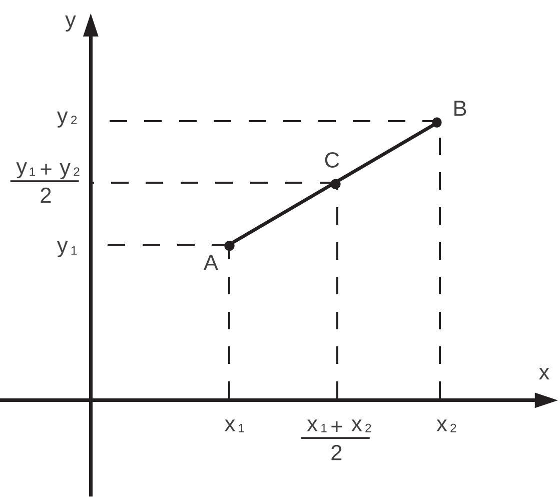


Расстояние между двумя точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ равно $d = |x_1 - x_2|$.

Координата середины отрезка AB равна $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$.



Прямоугольной декартовой системой координат на плоскости называются две взаимно перпендикулярные координатные прямые x (ось абсцисс) и y (ось ординат) с масштабом, одинаковым для обеих осей. Точка пересечения координатных прямых называется *началом координат* и является начальной точкой для каждой из них.



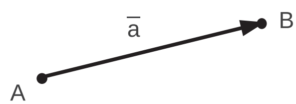
В этом случае каждой точке плоскости ставится в соответствие пара чисел – абсцисса (соответствующая координата прямоугольной проекции этой точки на ось x) и ордината (соответствующая координата прямоугольной проекции этой точки на ось y). Обозначение: $A(x_1; y_1)$ или $(x_1; y_1)$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ равно

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Координаты середины отрезка AB равны $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Вектором называется направленный отрезок. *Абсолютной величиной* (или *модулем*) вектора называется длина этого отрезка. Обозначение: $|\overline{a}|$ или $|\overline{AB}|$.



Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают. Обозначение: $\overline{0}$. Направления нулевой вектор не имеет, а его абсолютная величина равна нулю.

Два отличных от нуля вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *одинаково направленными*, если лучи AB и CD одинаково направлены. Векторы $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ называются *противоположно направленными*, если лучи MN и PQ противоположно направлены.

Два вектора называются *равными*, если они одинаково направлены и равны по абсолютной величине. Все нулевые векторы равны между собой по определению.

Координатами вектора $\overline{a}$ с началом в точке $A(x_1; y_1)$ и концом в точке $B(x_2; y_2)$ называются числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. Обозначение: $\overline{a}(a_1; a_2)$ или $\overline{(a_1; a_2)}$. Заметим, что равенство соответствующих координат двух векторов равносильно равенству самих векторов.

Вектор называется *единичным*, если его абсолютная величина равна единице. Единичные векторы $\overline{e}_1(1; 0)$ и $\overline{e}_2(0; 1)$ называются *координатными векторами* или *ортами*.

Заметим, что любой вектор можно представить в виде:

$$\overline{a} = \overline{(a_1; a_2)} = \overline{(a_1; 0)} + \overline{(0; a_2)} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2.$$

Действия с векторами

Суммой двух векторов называется вектор, координаты которого являются суммами координат данных векторов, следовательно, на плоскости

$$\overline{(a_1; a_2)} + \overline{(b_1; b_2)} = \overline{(a_1 + b_1; a_2 + b_2)}.$$

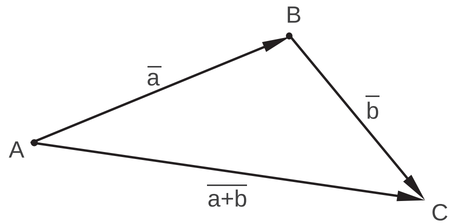
Свойства суммы векторов:

$$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}, \qquad \overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}, \quad \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}.$$

Правило треугольника: для любых точек A, B и C справедливо векторное равенство

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

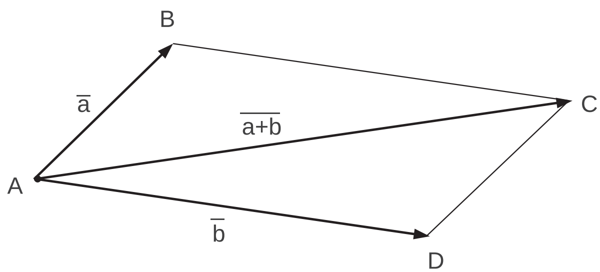
то есть для того, чтобы построить вектор $\overline{a+b}$ достаточно от конца вектора a отложить вектор b.



Правило параллелограмма: для любых точек A, B и D справедливо векторное равенство

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC},$$

где AC – диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.



Произведением вектора на число λ называется вектор, координатами которого являются координаты данного вектора, умноженные на число λ, следовательно, на плоскости

$$\lambda\overline{(a_1; a_2)} = \overline{(a_1; a_2)}\lambda = \overline{(\lambda a_1; \lambda a_2)}.$$

Заметим, что направление вектора $\lambda\overline{a}$ при $\overline{a} \neq \overline{0}$ совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\overline{a}$, если $\lambda < 0$.

Свойства произведения вектора на число:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\overline{a} = \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{a}, \qquad \lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}, \qquad |\lambda\overline{a}| = |\lambda||\overline{a}|.$$

Скалярным произведением векторов называется число, равное сумме попарных произведений координат этих векторов, следовательно, на плоскости

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Заметим, что $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$.

Свойства скалярного произведения:

$$(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{ac}+\overline{bc},\qquad (\lambda\overline{a})\overline{b}=\overline{a}(\lambda\overline{b})=\lambda\overline{a}\overline{b},\qquad \overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

З а м е ч а н и е. Из последнего свойства следует, что скалярное произведение двух отличных от нуля векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Общее уравнение прямой в декартовых координатах на плоскости

Любая прямая в декартовых координатах x, y имеет уравнение вида

$$ax+by+c=0.$$

Если коэффициент при y отличен от нуля, то уравнение можно разрешить относительно y и записать в виде функции от x:

$$y=kx+q,$$

где коэффициент k (*угловой коэффициент прямой*) равен тангенсу угла, который образует прямая с осью x.

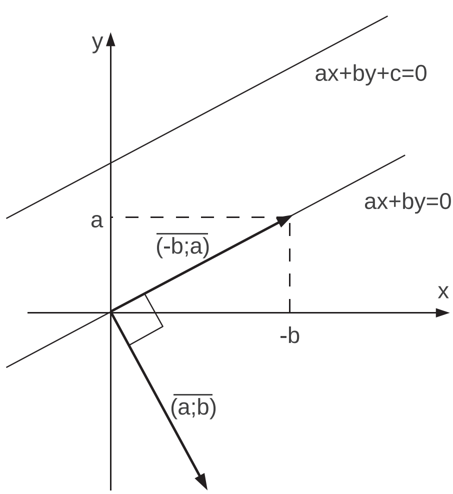
Взаимное расположение прямых на плоскости. Пусть прямые l_1 и l_2 заданы соответственно уравнениями $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$, тогда

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}\quad\Longleftrightarrow\quad l_1\parallel l_2,$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\quad\Longleftrightarrow\quad l_1=l_2,$$

$$a_1a_2+b_1b_2=0\quad\Longleftrightarrow\quad l_1\perp l_2.$$

Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения прямой. Рассмотрим две прямые: основную прямую, заданную уравнением $ax+by+c=0$, и вспомогательную прямую, заданную уравнением $ax+by=0$.



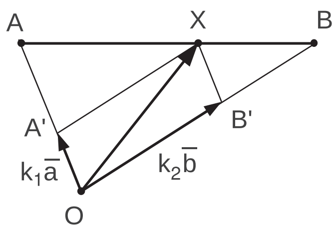
Заметим, что вспомогательная прямая проходит через начало координат и параллельна основной прямой. Так как точка $(-b;a)$ принадлежит вспомогательной прямой, то она направлена вдоль вектора $\overline{(-b;a)}$. А так как $\overline{(a;b)} \perp \overline{(-b;a)}$, то вектор $\overline{(a;b)}$ перпендикулярен вспомогательной прямой.

Следовательно, коэффициенты a и b общего уравнения прямой являются координатами вектора, перпендикулярного этой прямой.

Примеры решения задач

Пример 1. Даны три точки: O, A, B. Точка X делит отрезок AB в отношении $\lambda : \mu$, считая от точки A. Выразите вектор $\overline{OX}$ через векторы $\overline{OA} = \overline{a}$ и $\overline{OB} = \overline{b}$.

Решение. Представим вектор $\overline{OX}$ в виде $\overline{OX} = k_1\overline{a} + k_2\overline{b}$ и выразим коэффициенты разложения k_1 и k_2 через заданные числа λ и μ.



Проведём через точку X прямые, параллельные AO и BO. Полученный четырёхугольник $OA'XB'$ является параллелограммом, следовательно,

$$\overline{OX} = \overline{OA'} + \overline{OB'} = k_1\overline{a} + k_2\overline{b}.$$

Для того, чтобы найти значение k_1 применим теорему Фалеса ($XA' \parallel BO$):

$$k_1 = \frac{OA'}{OA} = \frac{BX}{AB} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

Также с помощью теоремы Фалеса ($XB' \parallel AO$) найдём значение k_2:

$$k_2 = \frac{OB'}{OB} = \frac{AX}{AB} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}.$$

В результате

$$\overline{OX} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}\overline{a} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\overline{b} = \frac{\mu\overline{a} + \lambda\overline{b}}{\mu + \lambda}.$$

Ответ. $\dfrac{\mu\overline{a} + \lambda\overline{b}}{\mu + \lambda}$.

Пример 2. Дана прямая $2x + 3y - 1 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-1;1)$ перпендикулярно данной прямой.

Решение. Прямая $2x + 3y - 1 = 0$ перпендикулярна вектору $\overline{(2;3)}$. Следовательно, искомая прямая параллельна вектору $\overline{(2;3)}$ и её уравнение имеет вид

$$3x - 2y + c = 0.$$

Значение коэффициента c можно определить, используя условие принадлежности точки $(-1;1)$ этой прямой:

$$3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = 5.$$

Ответ. $3x - 2y + 5 = 0$.

Задачи

1. Докажите, что для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполняется неравенство $|\overline{a} + \overline{b}| \leq |\overline{a}| + |\overline{b}|$.

2. Даны вершины треугольника $A(1;2)$, $B(5;1)$, $C(6;5)$. Найдите угол $\angle ABC$.

3. Докажите с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.

4. Даны четыре точки: $A(0;1)$, $B(1;2)$, $C(2;1)$, $D(1;0)$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – квадрат.

5. Даны три точки: $A(3;1)$, $B(-1;2)$, $C(0;3)$. Найдите такую точку $D(x;y)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны.

6. Даны векторы $\overline{a}(1;-1)$, $\overline{b}(-2;1)$, $\overline{c}(-3;0)$. Найдите такие числа λ и μ, чтобы $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$.

7. Выразить вектор $\overline{c}(6;1)$ через векторы $\overline{a}(1;-2)$ и $\overline{b}(3;7)$.

8. Даны точки $A(1;-2)$, $B(2;-1)$, $C(0;3)$, $D(4;1)$. Найдите координаты точки M такой, что $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \overline{0}$.

9. Точка M лежит на стороне AC треугольника ABC, $\angle ABC = \angle AMB = 90^\circ$, $BC = 2\sqrt{5}$, $MC = 2$, $\overline{AM} = x\overline{CM}$. Найдите x.

10. Векторы $\overline{AB}(-3;4)$ и $\overline{BC}(-1;-2)$ являются сторонами треугольника. Найдите длину медианы AM.

11. Дана прямая $2x - y + 1 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(1;1)$ параллельно данной прямой.

12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(0;3)$ и перпендикулярной вектору $\overline{(3;2)}$.

13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2;4)$ и параллельной вектору $\overline{(-2;1)}$.

14. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $\angle BDA = 30^\circ$. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{DB}$ и $\overline{CD}$.

15. В параллелограмме $MNPQ$ точка A делит сторону MN в отношении $1:3$, считая от вершины M, точка B делит сторону NP в отношении $1:3$, считая от вершины P. Выразите вектор $\overline{AB}$ через векторы $\overline{NM}$ и $\overline{NP}$.

16. В равностороннем треугольнике ABC из точки D (середины стороны BC) проведен перпендикуляр DK на сторону AC. Разложите вектор $\overline{DK}$ по векторам $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$.

17. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка O – точка пересечения диагоналей. Выразите вектор $\overline{CO}$ через векторы $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$, если $AD : BC = 4 : 1$.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Введение

Приведём основные стереометрические определения, связанные с взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве.

Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

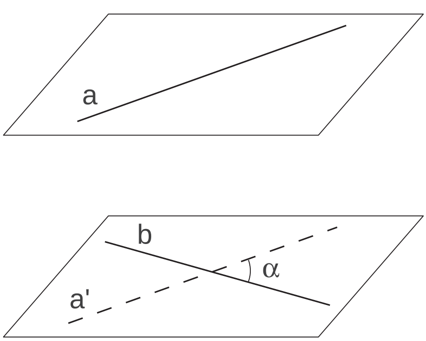
Скрещивающиеся прямые

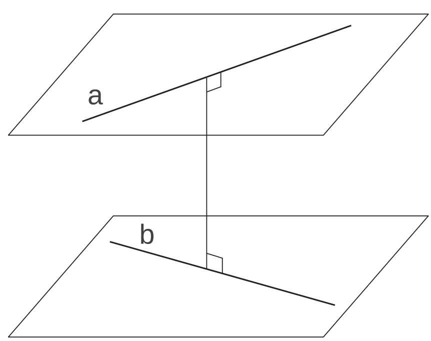
Прямые, которые не лежат в одной плоскости и не пересекаются называются *скрещивающимися.*

Угол между скрещивающимися прямыми определяется как угол между параллельными им прямыми, проходящими через одну точку.

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, концы которого лежат на этих прямых, перпендикулярный к ним (такой отрезок существует и притом только один).

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра (оно же является и расстоянием между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые).

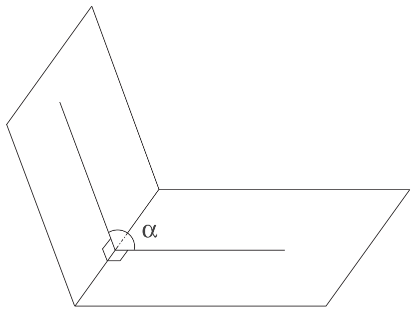




Двугранный угол

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями (*гранями*) с общей ограничивающей их прямой (*ребром двугранного угла*).

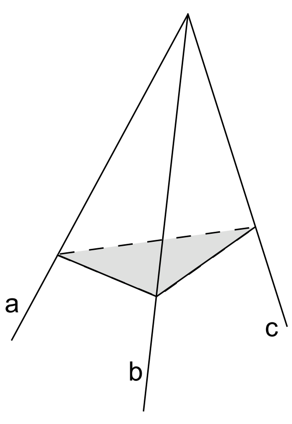
Двугранный угол измеряется своим *линейным углом*, то есть углом между перпендикулярами к ребру, восстановленными в обеих плоскостях из одной точки.

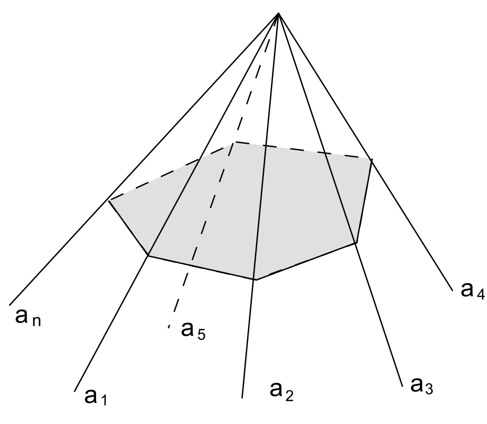


Многогранный угол

Трехгранным углом (abc) называется фигура, составленная из трех плоских углов (ab), (bc) и (ac), не лежащих в одной плоскости. Эти углы называются *гранями трехгранного угла*, а их стороны – *ребрами*. Общая вершина плоских углов называется *вершиной трехгранного угла*. Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называются *двугранными углами трехгранного угла*.

Аналогичным образом определяется понятие n*-гранного угла* $(a_1a_2...a_n)$ – как фигуры, составленной из n плоских углов (a_1a_2), (a_3a_3),...,(a_na_1).





Многогранный угол называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону каждой из ограничивающих его плоскостей.

З а м е ч а н и е 1. Каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.

З а м е ч а н и е 2. Сечением выпуклого n-гранного угла плоскостью, не проходящей через вершину, является выпуклый n-угольник.

З а м е ч а н и е 3. В выпуклом многогранном угле сумма плоских углов не превосходит $360°$.

Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве

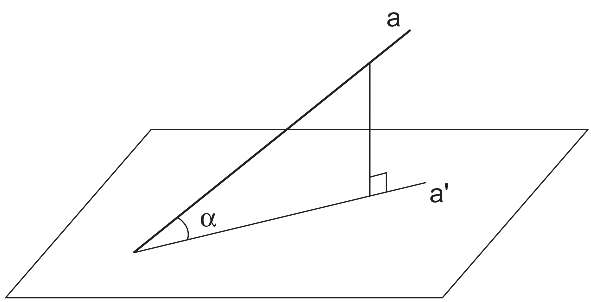
Прямая *перпендикулярна* плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости.

Две плоскости *перпендикулярны*, если соответствующий двугранный угол является прямым.

Наклонная

Наклонной, проведенной к данной плоскости, называется прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная ей. Точка пересечения наклонной и плоскости называется *основанием наклонной.*

Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.



Проекцией наклонной на плоскость называется прямая, состоящая из проекций всех точек наклонной на данную плоскость.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее проекцией.

Теоремы о параллельности прямых и плоскостей:

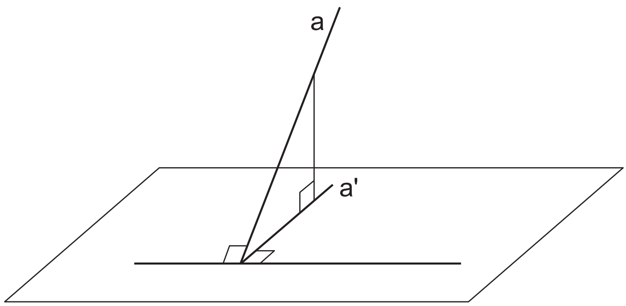
- Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны друг другу (*транзитивность параллельности прямых*).
- Ели прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости (*признак параллельности прямой и плоскости*).
- Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (*признак параллельности плоскостей*).
- Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны (*теорема о параллельных плоскостях*).
- Если плоскость содержит прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту другую плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна первой прямой.

Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей:

- Если прямая, перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*).

- Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны (*признак перпендикулярности плоскостей*).

- Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость тогда и только тогда, когда эта прямая перпендикулярна самой наклонной (*теорема о трех перпендикулярах*).



- Два различных перпендикуляра к одной и той же плоскости параллельны.

- Две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

- Перпендикуляр к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящий через линию пересечения этих плоскостей, целиком лежит во второй плоскости.

З а м е ч а н и е. Последняя теорема имеет важное следствие: если каждая из двух непараллельных плоскостей перпендикулярна третьей плоскости, то прямая пересечения этих двух плоскостей также перпендикулярна этой третьей плоскости.

5. Призма

5.1. Прямая призма

Теоретический материал

Изучение этого раздела начнём с формулировок основных определений и утверждений, связанных с призмами.

Основные определения

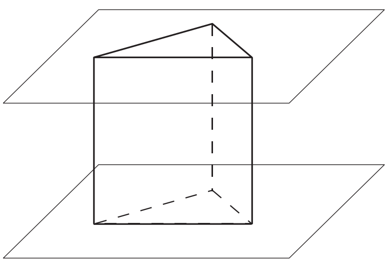
Многогранником называется тело, ограниченное в пространстве конечным числом плоскостей.

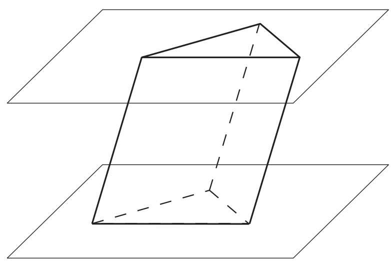
Многогранник называется *выпуклым*[3], если он лежит по одну сторону от каждой из ограничивающих его плоскостей.

Общая часть поверхности многогранника и ограничивающей его плоскости называется *гранью многогранника*[4], стороны граней – *ребрами многогранника*, а вершины – *вершинами многогранника*.

N*-угольной призмой* называется многогранник, две грани которого равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях (*основания призмы*), а остальные грани – параллелограммы (*боковые грани*).

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям; в противном случае призма называется *наклонной*.





Прямая призма называется *правильной*, если ее основаниями являются правильные многоугольники.

Призма, основанием которой является параллелограмм, называется *параллелепипедом*.

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*.

Прямоугольный параллелепипед с равными ребрами называется *кубом*.

Высотой призмы называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

---

[3]В дальнейшем мы будем рассматривать только выпуклые многогранники.
[4]Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

Основные утверждения

Объем произвольной призмы: $V = SH$, где S – площадь основания, H – высота призмы.

Объем прямоугольного параллелепипеда: $V = abc$, где a, b, c – длины трех ребер, выходящих из одной вершины.

Объем куба: $V = a^3$, где a – длина ребра куба.

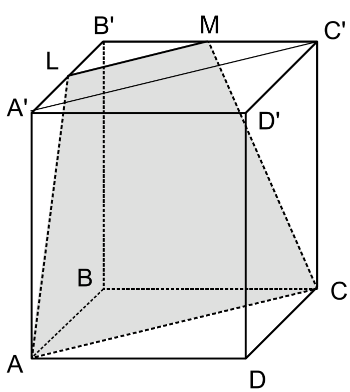
Свойства параллелепипеда:

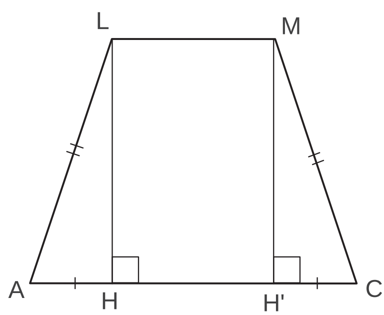
- противолежащие грани попарно равны и параллельны;
- все четыре диагонали пересекаются в одной точке (центре симметрии параллелепипеда) и делятся этой точкой пополам.

Примеры решения задач

Пример 1. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA'B'C'D'$ со стороной основания $2\sqrt{2}$ и высотой $4\sqrt{5}$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, C и середину ребра $A'B'$.

Решение. Пусть L – середина ребра $A'B'$. Построим сечение, проходящее через точки A, C и L. Нижнее основание призмы пересекается с плоскостью искомого сечения по прямой AC. Так как секущая плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым, то прямая пересечения верхнего основания с плоскостью искомого сечения параллельна прямой AC.





Диагонали оснований призмы попарно параллельны, следовательно, искомое сечение пересекает верхнее основание по прямой, проходящей через точку L параллельно диагонали $A'C'$.

Обозначим точку пересечения этой прямой с ребром $B'C'$ через M. Заметим, что отрезок LM является средней линией в треугольнике $A'B'C'$ и, следовательно, равен половине отрезка $A'C'$. Таким образом, искомым сечением является трапеция $ACML$ с основаниями

$$AC = AB\sqrt{2} = 4, \quad ML = \frac{AC}{2} = 2$$

и боковыми сторонами

$$AL = CM = \sqrt{(AA')^2 + (A'L)^2} = \sqrt{82}.$$

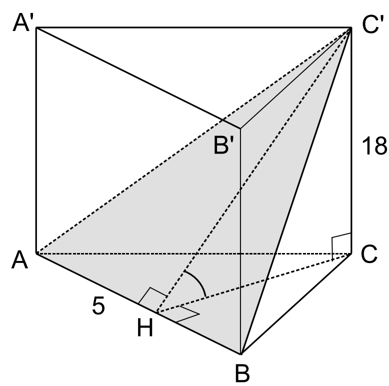
Найдем высоту трапеции LH. Проекции боковых сторон на нижнее основание равны

$$AH = CH' = \frac{AC - LM}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad LH = \sqrt{AL^2 - AH^2} = 9.$$

В результате площадь сечения равна $S = \dfrac{AC + LM}{2} \cdot LH = 27.$

О т в е т. 27.

П р и м е р 2. Высота прямой призмы $ABCA'B'C'$ равна 18. Основание призмы – треугольник ABC, площадь которого равна 12, $AB = 5$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC' и плоскостью основания призмы.



Р е ш е н и е. Двугранный угол измеряется углом между перпендикулярами к ребру, восстановленными в обеих плоскостях из одной точки. В качестве основания перпендикуляра, восстановленного к ребру AB в плоскости ABC', удобно взять основание высоты $C'H$ треугольника ABC'.

Заметим, что прямая CH является проекцией наклонной $C'H$ на плоскость ABC, поскольку ребро CC' перпендикулярно плоскости ABC.

Так как по построению наклонная $C'H$ перпендикулярна отрезку AB, то и ее проекция CH тоже перпендикулярна этому отрезку (по теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, искомым углом является угол $C'HC$. Тангенс этого угла найдем из прямоугольного треугольника $C'HC$.

Катет $CC' = 18$ по условию задачи. Второй катет CH является высотой треугольника ABC. С помощью формулы для площади треугольника получим

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH \quad \Longleftrightarrow \quad 12 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot CH \quad \Longleftrightarrow \quad CH = 4,8.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} \angle C'HC = \dfrac{CC'}{CH} = \dfrac{18}{4,8} = 3,75.$

О т в е т. 3,75.

Задачи

1. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Через точки B, D и середину ребра $D'C'$ проведена секущая плоскость. Найдите площадь полной поверхности куба, если площадь сечения равна 144.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ $AB = 6$, $BC = 8$, $BB' = 1,6\sqrt{91}$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой AC и содержащей прямую BA'.

3. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 1. Найдите градусную меру угла между прямыми AC' и CB'.

4. Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно 4. Точка K – середина ребра DD'. Точки M и H лежат на ребрах $A'B'$ и AB соответственно, причем $A'M : MB' = 1 : 3$, $AH : HB = 3 : 1$. Найдите градусную меру угла между прямыми MH и KC'.

5. Дана прямая призма $ABCDA'B'C'D'$, в основании которой лежит квадрат со стороной 2. Боковое ребро призмы равно $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью треугольника $AB'C$ и плоскостью основания призмы.

6. Основанием прямой призмы $ABCDA'B'C'D'$ является прямоугольник $ABCD$, стороны которого равны $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$. Высота призмы равна 8. Секущая плоскость проходит через вершину D' и середины ребер AD и CD. Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью сечения.

7. Основание прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ правильный треугольник ABC, сторона которого равна $8\sqrt{3}$. На ребре отмечена точка P так, что $BP : PB' = 3 : 5$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ACP, если расстояние между прямыми BC и $A'C'$ равно 16.

8. Основание прямого параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ – параллелограмм $ABCD$, в котором $CD = 2\sqrt{3}$, $\angle D = 60^\circ$. Тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью $A'BC$ равен 6. Найдите высоту параллелепипеда.

9. В правильной призме $MNPM'N'P$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN' образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь сечения, проходящего через середину ребра NP параллельно плоскости MPP'.

10. На диагональ куба, соединяющую две его вершины, не лежащие в одной грани, провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?

5.2. Наклонная призма

Теоретический материал

В отличие от прямой призмы, ребра наклонной призмы не перпендикулярны основаниям, поэтому иногда бывает удобно провести сечение призмы плоскостью, перпендикулярной ребрам. В этом случае справедливы следующие формулы.

Объем наклонной призмы: $V = S_{п}L$, где $S_{п}$ – площадь перпендикулярного сечения, L – боковое ребро призмы.

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = P_{п}L$, где $P_{п}$ – периметр перпендикулярного сечения.

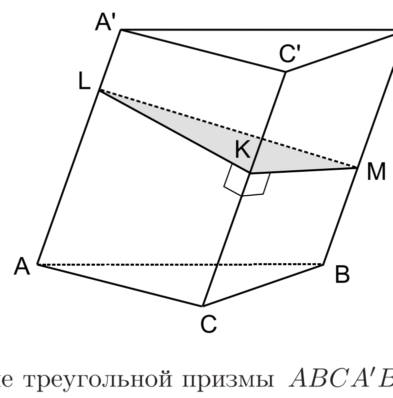
З а м е ч а н и е. Приведенные формулы справедливы и для прямой призмы, причем в качестве перпендикулярного сечения можно использовать основание призмы.

Перед тем, как приступить к решению задач этого раздела, рекомендуется повторить все определения и теоремы, приведенные в предыдущем разделе.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. Площади двух боковых граней наклонной треугольной призмы равны 8 и 6, угол между ними равен 90°, боковое ребро равно 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Р е ш е н и е. Пусть площади граней $AA'C'C$ и $BB'C'C$ равны 8 и 6 соответственно, тогда для вычисления площади боковой поверхности призмы нам необходимо найти площадь параллелограмма $AA'B'B$.



Рассмотрим сечение треугольной призмы $ABCA'B'C'$ плоскостью, перпендикулярной ребрам призмы. Пусть L, M и K – точки пересечения ребер AA', BB' и CC' с этой плоскостью. Так как по построению ребра призмы перпендикулярны плоскости LMK, то они перпендикулярны и любым прямым, лежащим в этой плоскости, в частности прямым LM, MK и KL.

Следовательно, LM, MK и KL – высоты соответствующих параллелограммов, являющихся боковыми гранями призмы. Зная площади граней $AA'C'C$, $BB'C'C$ и длину бокового ребра $AA' = 2$, вычислим длины высот KL и MK:

$$S_{AA'C'C} = 8 \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot KL = 8 \quad \Longrightarrow \quad KL = 4;$$

$$S_{BB'C'C} = 6 \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot MK = 6 \quad \Longrightarrow \quad MK = 3.$$

По условию задачи угол между гранями $AA'C'C$ и $BB'C'C$ прямой, значит, $\angle LKM = 90^\circ$. По теореме Пифагора

$$LM = \sqrt{KL^2 + MK^2} = 5,$$

следовательно, $S_{AA'B'B} = 5 \cdot 2 = 10$ и площадь боковой поверхности призмы равна $8 + 6 + 10 = 24$.

Ответ. 24.

Задачи

1. Основание параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ – ромб $ABCD$, $\angle A'AB = \angle A'AD = 45^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$. Найдите градусную меру угла между плоскостями граней $AA'D'D$ и $AA'B'B$.

2. Дана призма $ABCDA'B'C'D'$, в основании которой лежит квадрат, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 60°. Отрезок $D'A$ перпендикулярен плоскости основания. Найти длину этого отрезка, если площадь боковой поверхности призмы равна $6(\sqrt{3} + 2)$.

3. В наклонной треугольной призме высота равна $\sqrt{6}$, а боковые ребра составляют с плоскостью основания угол 45°. Площади двух боковых граней равны 3 и 6, а угол между ними 120°. Найдите объем призмы.

4. Основанием наклонной призмы $ABCA'B'C'$ является правильный треугольник ABC со стороной 4. Боковое ребро BB' призмы равно 4 и образует с ребрами BA и BC углы по 45°. Найдите объем призмы.

5. В наклонном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ боковое ребро равно 8. Расстояние между ребром AA' и ребрами BB' и DD' соответственно равно 12 и 9, а расстояние между AA' и CC' равно 15. Найти объем параллелепипеда.

6. Основанием наклонной призмы является правильный треугольник ABC со стороной 2. Боковое ребро AA' призмы равно 2 и образует с ребрами AB и AC углы по 60°. Определите площадь грани $BCC'B'$.

7. Все ребра призмы $ABCA'B'C'$ – равны между собой. Углы BAA' и CAA' равны 60° каждый. Найдите расстояние от точки C' до плоскости $CA'B'$, если площадь грани $ABB'A'$ равна $8\sqrt{3}$.

8. Все грани призмы $ABCDA'B'C'D'$ – равные ромбы. Углы BAD, BAA' и DAA' равны 60° каждый. Найдите угол между прямой BA' и плоскостью BDB'.

6. Пирамида

6.1. Правильная пирамида

Теоретический материал

Приведём формулировки основных определений и утверждений, связанных с пирамидами.

Основные определения

N-угольной пирамидой называется многогранник, одной гранью которого является n-угольник (*основание пирамиды*), остальными – треугольники (*боковые грани*), у которых только одна общая вершина (*вершина пирамиды*).

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания пирамиды.

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой*.

Усеченной пирамидой называется многогранник, отсекаемый от пирамиды плоскостью, параллельной основанию, и расположенный между плоскостью сечения и плоскостью основания исходной пирамиды.

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она является частью правильной пирамиды.

Высотой усеченной пирамиды называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

Апофемой правильной усеченной пирамиды называется высота боковой грани (трапеции).

Основные утверждения

Объем произвольной пирамиды: $V = \dfrac{1}{3}SH$,
где S – площадь основания, H – высота пирамиды.

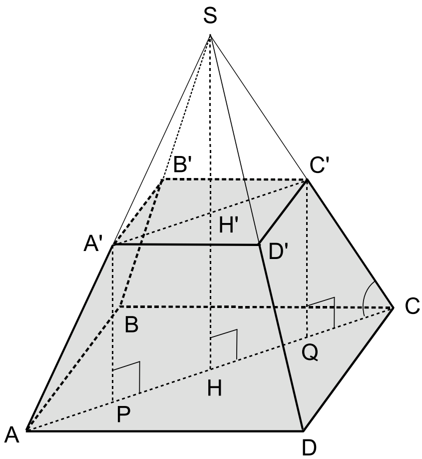
Объем произвольной усеченной пирамиды: $V = \dfrac{1}{3}H\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$,
где S_1 и S_2 – площади оснований, H – высота пирамиды.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды: $S_{\text{бок}} = \dfrac{1}{2}Pl$,
где P – периметр основания, l – апофема.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды: $S_{\text{бок}} = \dfrac{1}{2}(P_1 + P_2)\,l$,
где P_1 и P_2 – периметры оснований, l – апофема.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны $3\sqrt{2}$ и $6\sqrt{2}$, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 45°. Найдите объем усеченной пирамиды.



Р е ш е н и е. Для вычисления объема усеченной пирамиды нам необходимо найти ее высоту и площади ее оснований. Пусть усеченная пирамида $ABCDA'B'C'D'$ получена отсечением плоскостью $A'B'C'D'$ из правильной пирамиды $SABCD$. Площадь меньшего основания равна

$$S_1 = S_{A'B'C'D'} = (A'B')^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18,$$

площадь большего основания равна

$$S_2 = S_{ABCD} = AB^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72.$$

Рассмотрим сечение, проходящее через высоту SH и диагональ основания AC. Искомая высота усеченной пирамиды равна высоте h равнобокой трапеции $AA'C'C$. Основания трапеции равны

$$A'C' = A'B' \cdot \sqrt{2} = 6, \quad AC = AB \cdot \sqrt{2} = 12,$$

проекции боковых сторон трапеции равны

$$AP = QC = \frac{AC - A'C'}{2} = 3.$$

Так как высота SH перпендикулярна плоскости $ABCD$, то угол SCH является углом между боковым ребром и основанием пирамиды и равен 45°. Следовательно, в треугольнике $CC'Q$ углы $\angle CC'Q = \angle C'CQ = 45^\circ$ и он является равнобедренным. В результате, высота $C'Q = CQ = 3$ и объем усеченной пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right) = 126.$$

З а м е ч а н и е. Можно было обойтись без применения специальной формулы объема усеченной пирамиды, а найти разность объемов пирамид $SABCD$ и $SA'B'C'D'$:

$$V = V_{SABCD} - V_{SA'B'C'D'} = \frac{1}{3}SH \cdot S_2 - \frac{1}{3}SH' \cdot S_1 = 126.$$

О т в е т. 126.

Задачи

1. Двугранные углы при основании правильной четырехугольной пирамиды равны 45°, а площадь боковой поверхности равна $36\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды.

2. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $2\sqrt{3}$, а все плоские углы при вершине прямые.

3. В правильной треугольной пирамиде высота равна 4, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 45°. Найдите объем пирамиды V. В ответе запишите $\sqrt{3}V$.

4. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна высоте и равна 4. Найти расстояние (p) от вершины основания до плоскости диагонального сечения, не проходящего через эту вершину. В ответе запишите $\dfrac{p\sqrt{2}}{2}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 2. Найдите расстояние (p) между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания. В ответе запишите $3\sqrt{6}p$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCKEF$ с вершиной M длина стороны основания равна $4\sqrt{3}$, а длина апофемы 10. Найдите площадь сечения (S), проходящего через вершину пирамиды и меньшую из диагоналей основания. В ответе запишите $S/\sqrt{19}$.

7. В правильной шестиугольной пирамиде $MABCKEF$ с вершиной M сечение проходит через вершину пирамиды и меньшую из диагоналей основания. Найти отношение объемов частей пирамиды, на которые она делится плоскостью сечения.

8. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины принадлежат боковым ребрам пирамиды, а четыре другие принадлежат ее основанию. Найдите ребро куба (a), если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{2}$, а ее боковое ребро равно 3. В ответе запишите $3\sqrt{2}a$.

6.2. Тетраэдр

Теоретический материал

Тетраэдром называется треугольная пирамида.

Тетраэдр называется *правильным*, если все его ребра равны.

Тетраэдр называется *прямоугольным*, если все три его плоских угла при какой либо его вершине прямые.

Два ребра, имеющие в качестве одного из своих концов общую вершину, называются *смежными*. Два не смежных ребра называются противоположными (или *скрещивающимися*).

Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, называемой *центроидом*, и делятся этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершины.

Бимедианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий середины противоположных ребер. Бимедианы пересекаются в одной точке (центроиде тетраэдра) и делятся этой точкой пополам.

Высотой тетраэдра называется перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположную грань. Если высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке, то тетраэдр называется *ортоцентрическим*.

Приведем также некоторые полезные сведения относительно расположения основания высоты тетраэдра.

- Основание высоты тетраэдра является центром окружности, описанной около основания тогда и только тогда, когда длины всех боковых ребер равны между собой (или все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом).

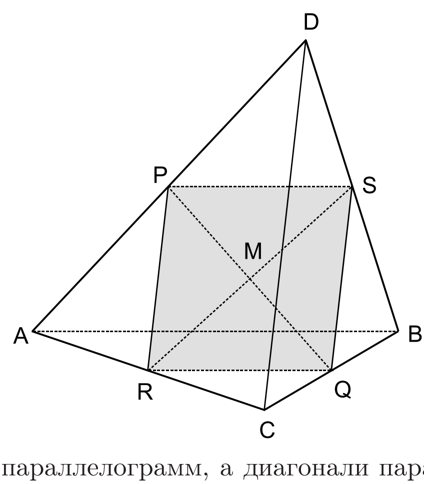
- Основание высоты тетраэдра является центром окружности, вписанной в основание тогда и только тогда, когда все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом.

З а м е ч а н и е. Приведенные утверждения справедливы и для произвольной пирамиды.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. Докажите, что бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Р е ш е н и е. Рассмотрим произвольный тетраэдр $ABCD$. Пусть отрезок PQ соединяет середины ребер AD и BC, отрезок RS соединяет середины ребер AC и BD. Покажем, что четырехугольник $PSQR$ является параллелограммом.



Так как PS – средняя линия треугольника ABD, а RQ – средняя линия треугольника ABC, то

$$PS \parallel AB, \quad PS = \frac{1}{2}AB \quad \text{и}$$

$$RQ \parallel AB, \quad RQ = \frac{1}{2}AB.$$

Следовательно, четырехугольник $PSQR$ – параллелограмм, а диагонали параллелограмма (бимедианы PQ и RS) пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Таким образом, мы показали, что бимедиана RS проходит через точку M – середину бимедианы PQ. Аналогичным образом показывается, что и третья бимедиана, соединяющая середины ребер CD и AB, также проходит через точку M.

Задачи

1. Доказать, что основание высоты тетраэдра является центром окружности, описанной около основания тогда и только тогда, когда длины всех боковых ребер равны между собой (или все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом).

2. Доказать, что основание высоты тетраэдра является центром окружности, вписанной в основание тогда и только тогда, когда все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом.

3. Все ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равны $\sqrt{6}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BDC.

4. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной, равной 2. Одна из боковых граней также равносторонний треугольник и перпендикулярна основанию. Найдите объем пирамиды.

5. Боковое ребро MC пирамиды $MABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC и равно 4. Плоскость, параллельная основанию, проходит через середину высоты пирамиды и пересекает боковые ребра в точках A', B' и C'. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $MA'B'C'$, если $AC = BC = 5$, а высота CK треугольника ABC равна 3.

6. Основание пирамиды – треугольник, две стороны которого равны 3 и $\sqrt{3}$, а угол между ними равен $30°$. Каждое боковое ребро равно $\sqrt{51}$. Найдите объем пирамиды.

7. Основание пирамиды $MABC$ – треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 120°$. Боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы. Найдите объем пирамиды, если $AM = \sqrt{53}$.

8. Основание пирамиды $ABCD$ – прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = 2\sqrt{30}$. CD – высота пирамиды, боковые ребра AD и BD наклонены к плоскости основания под углами $30°$ и $60°$ соответственно. Найдите объем пирамиды.

9. В пирамиде $SABC$ грани SAB и SAC перпендикулярны плоскости основания, ребро BC равно 10, а двугранный угол при ребре BC равен $45°$. Найдите объем пирамиды, если площадь ее основания равна 30.

6.3. Произвольные пирамиды

При решении задач этого раздела могут пригодиться все формулы и утверждения, приведенные в двух предыдущих разделах.

Задачи

1. Основанием пирамиды служит прямоугольник, угол между диагоналями которого равен $30°$, а площадь равна 9. Боковые ребра образуют с плоскостью основания углы в $45°$. Найдите объем пирамиды.

2. Основание пирамиды – квадрат, сторона которого равна 3. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом, тангенс которого равен 4/3. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3. Найдите площадь боковой поверхности четырехугольной пирамиды (S), если в основании пирамиды лежит ромб с диагоналями 30 и 40, и все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. В ответе запишите $S\sqrt{3}$.

4. В четырехугольной пирамиде $SABCD$, основанием которой является прямоугольник, длины ребер $SC = 8$, $CD = 6$, а ребро $SB \perp ABC$. Угол между плоскостями SCD и ABC равен 30°. Во сколько раз площадь основания больше площади грани SBC?

5. В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$. Боковое ребро BS перпендикулярно плоскости основания и равно ребру основания. Найдите градусную меру угла между боковым ребром FS и плоскостью основания.

6. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна $36\sqrt{3}$. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие образуют с плоскостью основания углы 45° и 30°. Найдите объем пирамиды (V). В ответе укажите $V\sqrt{3}$.

7. В основании четырехугольной пирамиды $ABCDF$ лежит квадрат со стороной, равной 4. Боковые грани FAD и FCD перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а высота пирамиды равна диагонали ее основания. Найдите площадь (S) сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AC параллельно прямой FB. В ответе укажите $S\sqrt{2}$.

8. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 5. Точка M делит ребро SB в отношении $2:3$, считая от точки S. Через точку M проходит сечение, параллельное основанию пирамиды. Найдите его площадь.

9. В основании пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle C = 60^\circ$, $AC = 14$, $BC = 8$. Боковые грани DAC и DAB перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а ребро AD равно $4\sqrt{3}$. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD, является основанием второй пирамиды, вершина которой в точке C. Найдите объем второй пирамиды.

10. Основанием пирамиды $FABC$ является треугольник ABC, в котором $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$. Ребро AF перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Отрезки AM и AL являются соответственно высотами треугольников AFB и AFC. Найдите объем пирамиды $AMLC$.

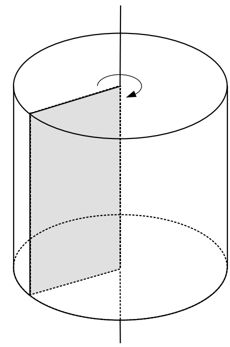
7. Тела вращения

7.1. Цилиндр

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на вычисление элементов цилиндра и задачи, связанные с описанными и вписанными цилиндрами. Приведем основные определения и теоремы.

Основные определения



Цилиндром (точнее, прямым круговым цилиндром) называется фигура, полученная вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Поверхность цилиндра состоит из *оснований цилиндра* – двух равных кругов, лежащих в параллельных плоскостях, и *боковой поверхности*.

Отрезок, с одним концом на окружности одного основания, с другим концом – на окружности другого основания, перпендикулярный плоскостям оснований, называется *образующей цилиндра*.

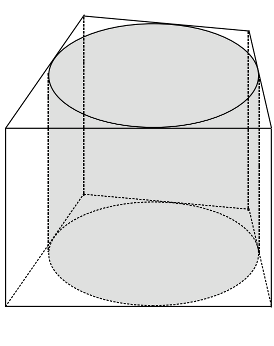
Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований.

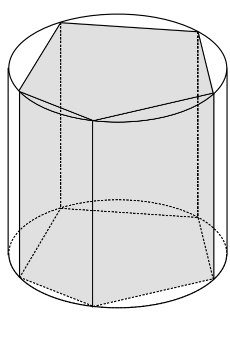
Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось, называется *осевым сечением*.

Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проходящему через эту образующую, называется *касательной плоскостью цилиндра*.

Цилиндр называется *вписанным в призму*, если его основания вписаны в основания призмы, и грани призмы касаются его боковой поверхности. В этом случае призма называется *описанной около цилиндра* (левый рисунок).

Цилиндр называется *описанным около призмы*, если его основания описаны около оснований призмы и ребра призмы являются его образующими. В этом случае призма называется *вписанной в цилиндр* (правый рисунок).





Основные утверждения

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$.

Объем цилиндра: $V = \pi R^2 H$.

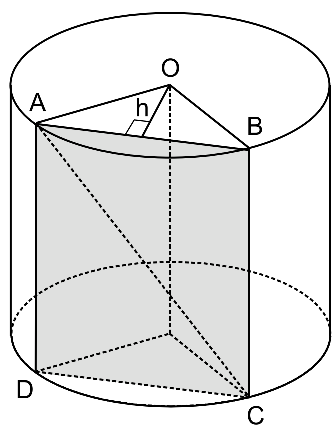
Здесь R – радиус основания цилиндра, H – высота цилиндра.

Напомним также, что

- сечением цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, является прямоугольник;
- плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

Примеры решения задач

Пример 1. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу 60°. Диагональ полученного сечения равна $2\sqrt{6}$ и удалена от оси цилиндра на расстояние $\sqrt{6}$. Найдите объем цилиндра.



Решение. Пусть данным сечением цилиндра является прямоугольник $ABCD$. Вычислим высоту цилиндра H и радиус основания R.

Диагональ сечения и ось цилиндра являются скрещивающимися прямыми, причем плоскость, содержащая диагональ, параллельна оси. Следовательно, расстояние между этими прямыми есть расстояние между плоскостью сечения и осью. Это расстояние равно длине перпендикуляра h, опущенного из центра основания O на хорду AB, следовательно, $h = \sqrt{6}$.

Так как мера дуги, соответствующей хорде AB, равна 60°, то треугольник ABO – равносторонний и $AB = R$. Высота треугольника

$$h = R \cdot \sin 60^\circ \quad \Longrightarrow \quad R = 2\sqrt{2}.$$

Теперь найдем высоту цилиндра из прямоугольного треугольника ABC:

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 4.$$

В результате объем цилиндра равен $V = \pi R^2 H = 32\pi$.

Ответ. 32π.

Задачи

1. Через образующую цилиндра проведены два сечения, одно из которых осевое, а второе параллельное оси цилиндра. Площади сечений равны 26 и 13. Найдите градусную меру угла между плоскостями сечений.

2. Через образующую цилиндра AB проведены два сечения: одно – по диаметру AM, другое – по хорде AD. Угол между плоскостями этих сечений равен 60°. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 60π. Найдите площадь того из данных сечений цилиндра, которое проходит через хорду AD.

3. Концы отрезка BC лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 25, длина отрезка BC равна $14\sqrt{2}$, а угол между прямой BC и плоскостью основания цилиндра равен 45°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки B и C.

4. Радиус основания цилиндра равен 6, а высота равна 2. Отрезки AB и CD – диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок AA' – его образующая. Известно, что $BC = 2\sqrt{21}$. Найдите синус угла между прямыми $A'C$ и BD.

5. Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $16\pi\sqrt{3}$. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.

6. В прямую призму, в основании которой лежит ромб с углом 45°, вписан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $5\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если объем призмы равен 120.

7. В правильной призме $MNPM'N'P'$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN' образует с плоскостью основания угол 45°. На сколько процентов объем описанного цилиндра больше объема вписанного цилиндра?

8. В правильной призме $MNPM'N'P'$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN' образует с плоскостью основания угол 45°. Сколько процентов от площади боковой поверхности описанного цилиндра составляет площадь боковой поверхности вписанного цилиндра?

7.2. Конус

Теоретический материал

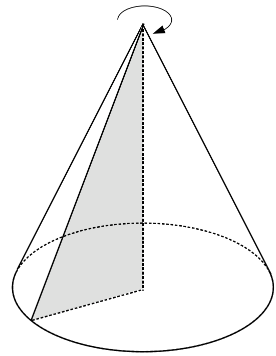
В этом разделе собраны задачи на вычисление элементов конуса и задачи, связанные с описанными и вписанными конусами. Приведем основные определения и теоремы.

Основные определения

Конусом (точнее, прямым круговым конусом) называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.

Поверхность конуса состоит из *основания конуса* (круга) и *боковой поверхности* (кругового сектора).

Отрезок с одним концом в вершине конуса, с другим концом – на окружности основания, называется *образующей конуса*.



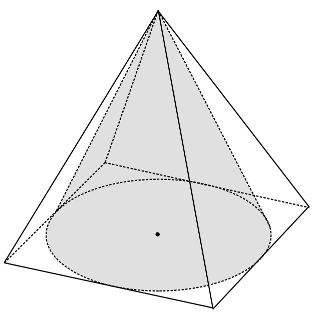
Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания. Основание высоты прямого кругового конуса совпадает с центром основания.

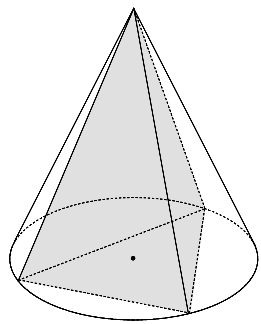
Осью конуса называется прямая, проходящая через вершину конуса и центр основания. Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось, называется *осевым сечением.*

Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная осевому сечению, проходящему через эту образующую, называется *касательной плоскостью конуса.*

Конус называется *вписанным в пирамиду*, если его основание вписано в основание пирамиды и грани пирамиды касаются его боковой поверхности. В этом случае пирамида называется *описанной около конуса* (левый рисунок).

Конус называется *описанным около пирамиды*, если его основание описано около основания пирамиды и боковые ребра пирамиды являются его образующими. В этом случае пирамида называется *вписанной в конус* (правый рисунок).





Плоскость, перпендикулярная оси конуса, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется *усеченным конусом.*

Основные утверждения

Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = \pi RL.$

Объем конуса: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H.$

Здесь R – радиус основания, L – образующая, H – высота конуса.

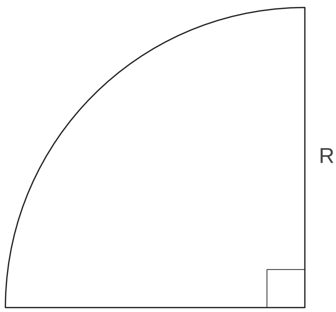
Напомним также, что

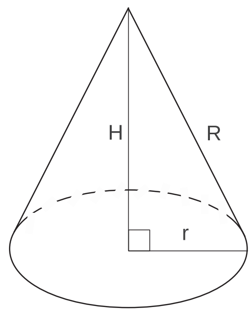
- сечением конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, является равнобедренный треугольник;
- плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает его боковую поверхность по окружности.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. Длина дуги развертки боковой поверхности конуса равна $4\pi\sqrt{15}$, а угол развертки равен 90°. Найдите объем конуса.

Р е ш е н и е. Развертка боковой поверхности конуса представляет собой четверть круга радиуса R, равного образующей исходного конуса.





Так как по условию длина дуги развертки равна $4\pi\sqrt{15}$, то

$$4\pi\sqrt{15} = \frac{2\pi R}{4} \quad \Longrightarrow \quad R = 8\sqrt{15}.$$

Найдем радиус основания конуса по длине окружности основания

$$4\pi\sqrt{15} = 2\pi r \quad \Longrightarrow \quad r = 2\sqrt{15}.$$

Теперь по теореме Пифагора вычислим высоту конуса

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = 30.$$

В результате объем конуса равен $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 H = 600\pi$.

О т в е т. 600π.

Задачи

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6, а высота равна 2. Найдите объем (V) конуса, вписанного в эту пирамиду. В ответе запишите V/π.

2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности (S) конуса, описанного около этой пирамиды. В ответе запишите S/π.

3. Угол между образующими CA и CB конуса равен 60°, высота конуса равна 4, радиус основания равен $\dfrac{4\sqrt{15}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью ABC и плоскостью основания конуса.

4. В основании конуса проведена хорда. Через данную хорду и вершину конуса C проведена плоскость так, что угол при вершине C, образовавшегося в сечении треугольника, равен 60°. Найдите расстояние от центра основания конуса O до данной плоскости, если высота конуса равна 2, а образующая равна $8/3$.
5. Отношение площади боковой поверхности конуса к его объему равно 1,5. Найдите высоту конуса, если его образующая равна диаметру основания.
6. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно 3. Образующая наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем конуса (V). В ответе запишите $\dfrac{V}{\pi\sqrt{3}}$.
7. Длина дуги развертки боковой поверхности конуса равна 6π, а образующая конуса равна 5. Найдите объем конуса.
8. Образующая усеченного конуса равна 2. Диагональ осевого сечения перпендикулярна боковой стороне сечения и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

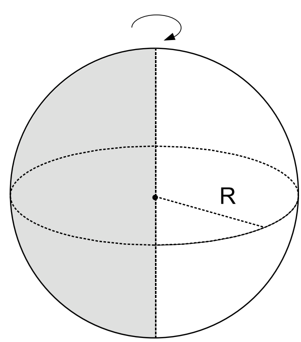
7.3. Шар

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на вычисление элементов шара и задачи, связанные с описанными и вписанными шарами. Приведем основные определения и теоремы.

Основные определения

Шаром называется тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся от данной точки (*центр шара*) на расстоянии, не большем данного (*радиус шара*).



Замечание. Шар также, как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра.

Граница шара называется *шаровой поверхностью* или *сферой*.

Плоскость, проходящая через точку, лежащую на сфере, и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной плоскостью*.

Прямая, проходящая через точку сферы перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной прямой* или просто *касательной*.

Многогранник называется *вписанным в шар*, если все его вершины лежат на поверхности шара. В этом случае шар называется *описанным около многогранника*.

Многогранник называется *описанным около шара*, если все его грани касаются шара. В этом случае шар называется *вписанным в многогранник*.

Основные теоремы

Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку касания. Через любую точку сферы проходит бесконечное число касательных, причем все они лежат в касательной плоскости шара.

Любая диаметральная плоскость (плоскость, проходящая через диаметр) является плоскостью симметрии шара. Центр шара является его центром симметрии.

Площадь поверхности сферы: $S = 4\pi R^2$, где R – радиус сферы.

Объем шара: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Центром шара, вписанного в многогранник, является точка пересечения плоскостей, делящих двугранные углы многогранника пополам.

Если многогранник вписан в шар, то вокруг каждой из его граней можно описать окружность. Центр описанного шара есть точка пересечения перпендикуляров к граням, проведенных через центры этих окружностей.

Для каждого тетраэдра существует вписанный и описанный шар, причем

$$V = \frac{1}{3}Sr,$$

где V – объем тетраэдра, S – площадь его полной поверхности, r – радиус вписанного шара.

Вокруг любой правильной пирамиды можно описать шар, причем центр описанного шара будет лежать на высоте пирамиды.

В любую правильную пирамиду можно вписать шар. Причем центр вписанного шара будет лежать на высоте пирамиды, а точки касания шара с боковыми гранями – на соответствующих апофемах.

Вокруг любой правильной призмы можно описать шар, причем центром этого шара будет середина высоты, проведенной через центры оснований призмы.

Сечением шара плоскостью является круг. Его центр есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Линия пересечения двух сфер есть окружность.

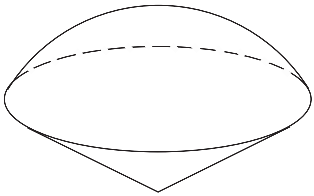
Части шара

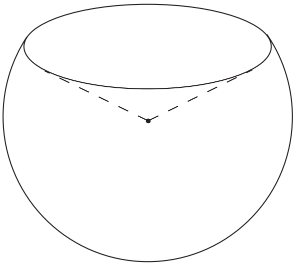
Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

Шаровым слоем называется часть шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар.

Шаровым сектором называется тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, который имеет общее основание с сегментом и вершину в центре шара.

З а м е ч а н и е. Шаровой сектор получается из шарового сегмента и конуса следующим образом. Если шаровой сегмент меньше полушара, то он дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основанием является основание сегмента. Если же сегмент больше полушара, то конус из него удаляется.





Основные формулы для шарового сегмента:

- площадь боковой поверхности: $S = 2\pi RH$;
- объем: $V = \pi H^2 \left(R - \dfrac{H}{3}\right)$,
  где R – радиус шара, H – высота сегмента.

Основные формулы для шарового слоя:

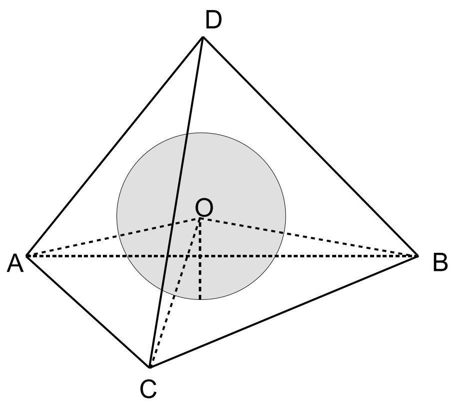
- площадь боковой поверхности: $S = 2\pi RH$;
- объем: $V = \dfrac{\pi H}{6}\left(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2\right)$,
  где R – радиус шара, R_1 и R_2 – радиусы оснований, H – высота слоя.

Основные формулы для шарового сектора:

- площадь боковой поверхности: $S = 2\pi RH$;
- объем: $V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 H$,
  где R – радиус шара, H – высота сектора.

Примеры решения задач

Пример 1. Докажите, что объем тетраэдра равен одной трети произведения площади его полной поверхности на радиус вписанного шара.



Решение. Рассмотрим произвольный тетраэдр $ABCD$ и шар с центром O, вписанный в него. Объем данного тетраэдра складывается из объемом четырех тетраэдров, основаниями которых являются грани исходного тетраэдра, а вершиной – точка O.

Расстояния от точки O до граней исходного тетраэдра равны радиусу шара, следовательно,

$$V_{ABCD} = V_{ABCO} + V_{ABDO} + V_{BCDO} + V_{ACDO} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad V = \frac{1}{3}\left(S_{ABC} + S_{ABD} + S_{BCD} + S_{ACD}\right) r = \frac{1}{3} Sr,$$

где r – радиус шара, S – площадь полной поверхности исходного тетраэдра.

Задачи

1. Сфера проходит через вершины равнобедренного треугольника с основанием 4 и углом при вершине $\arcsin(1/3)$. Расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно 8. Найдите радиус сферы.

2. Все стороны ромба с диагоналями 30 и 40 касаются поверхности шара радиуса 20. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.

3. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 2. Найдите радиус описанного шара.

4. Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, с высотой, равной 8, и апофемой, равной 10.

5. Угол наклона боковой грани к плоскости основания правильной треугольной пирамиды равен $60°$. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен 35. Найдите радиус вписанного шара.

6. В треугольной пирамиде с равными боковыми ребрами известны длины сторон основания 6, 8, 10 и длина высоты 1. Найдите радиус описанного шара.

7. Около правильной призмы $MNPM'N'P'$ описан шар. Найдите площадь его поверхности (S), если сторона основания призмы равна 12, а диагональ грани MN' образует с плоскостью основания угол $45°$. В ответе запишите S/π.

8. Около пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной, равной 3, описан шар. Найдите радиус шара, если известно, что одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно ее основанию и равно 2.

9. В шар радиуса $\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$. Прямая AB' образует с плоскостью ACC' угол $45°$. Найдите объем призмы.

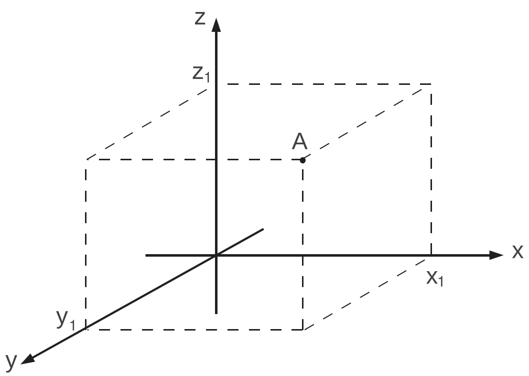
8. Координаты и векторы

8.1. Декартовы координаты и векторы в пространстве

Теоретический материал

Напомним основные сведения, связанные с декартовыми координатами и векторами в пространстве.

Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве называются три взаимно перпендикулярные координатные прямые x, y и z, пересекающиеся в одной точке. Точка пересечения координатных прямых называется *началом координат* и является начальной точкой для каждой из них. Плоскость, проходящая через прямые x и y, называется *координатной плоскостью* xy. Две другие плоскости называются соответственно *координатными плоскостями* xz *и* yz.



Каждой точке пространства ставится в соответствие тройка чисел – координаты прямоугольных проекций этой точки на оси x, y и z соответственно. Обозначение: $A(x_1; y_1; z_1)$ или $(x_1; y_1; z_1)$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Координаты середины отрезка AB равны $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}; \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Координатами вектора $\overline{a}$ с началом в точке $A(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке $B(x_2; y_2; z_2)$ называются числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$. Обозначение: $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ или $\overline{(a_1; a_2; a_3)}$.

Любой вектор в пространстве можно представить в виде линейной комбинации

$$\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3,$$

где $\overline{e}_1(1; 0; 0)$, $\overline{e}_2(0; 1; 0)$, $\overline{e}_3(0; 0; 1)$ – *координатные орты.*

Сумма двух векторов в пространстве определяется аналогично сумме двух векторов на плоскости, то есть

$$\overline{(a_1; a_2; a_3)} + \overline{(b_1; b_2; b_3)} = \overline{(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)},$$

и обладает теми же свойствами:

$$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}, \qquad \overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}, \quad \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}.$$

Произведение вектора на число в пространстве определяется аналогично произведению на плоскости, то есть

$$\lambda\overline{(a_1; a_2; a_3)} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}\lambda = \overline{(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)},$$

и обладает теми же свойствами:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\overline{a} = \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{a}, \qquad \lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}, \qquad |\lambda\overline{a}| = |\lambda||\overline{a}|.$$

Скалярное произведение векторов определяется аналогично произведению векторов на плоскости, то есть

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

и обладает теми же свойствами:

$$|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}, \qquad (\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{ac} + \overline{bc}, \qquad (\lambda\overline{a})\overline{b} = \overline{a}(\lambda\overline{b}) = \lambda\overline{a}\overline{b}, \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi.$$

Уравнение плоскости

Любая плоскость в декартовых координатах x, y, z имеет уравнение вида

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Геометрический смысл коэффициентов уравнения плоскости: коэффициенты a, b, c в уравнении плоскости являются координатами вектора, перпендикулярного этой плоскости.

Замечание. Любую прямую в пространстве можно задать двумя линейными уравнениями – уравнениями плоскостей, проходящих через эту прямую.

Примеры решения задач

Пример 1. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(3;3;4)$, $B(0;4;3)$, $C(1;3;2)$, $D(4;2;3)$ является параллелограммом.

Решение. Покажем, что отрезки AC и BD пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Для этого найдем координаты точек $O(x_1;y_1;z_1)$ и $O'(x_2;y_2;z_2)$ – середин отрезков AC и BD соответственно:

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y_1 = \frac{3+3}{2} = 3, \quad z_1 = \frac{4+2}{2} = 3,$$

$$x_2 = \frac{0+4}{2} = 2, \quad y_2 = \frac{4+2}{2} = 3, \quad z_1 = \frac{3+3}{2} = 3.$$

Так как координаты середин отрезков совпадают, то точка $O = O'$ является точкой пересечения этих отрезков. Следовательно, точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости и диагонали четырехугольника $ABCD$ делятся точкой O пополам. Значит этот четырехугольник параллелограмм.

Пример 2. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой AB, где $A(1;-2;2)$, $B(3;1;3)$.

Решение. Искомая плоскость должна быть перпендикулярна вектору $\overline{AB} = (3-1; 1-(-2); 3-2) = (2;3;1)$, следовательно, ее уравнение имеет вид

$$2x + 3y + z + d = 0.$$

Значение коэффициента d можно определить, используя условие принадлежности точки $A(1;-2;2)$ этой плоскости:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2 + d = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = 2.$$

Ответ. $2x + 3y + z + 2 = 0$.

Задачи

1. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если координаты трех остальных его вершин известны: $A(2;-2;0)$, $B(1;0;-1)$, $C(0;-1;1)$.

2. Даны три точки: $A(-1;1;0)$, $B(0;-1;3)$, $C(2;1;1)$. Найдите косинус угла C треугольника ABC.

3. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(-2;3;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;1;2)$, $D(-1;3;2)$ является ромбом.

4. При каком значении n векторы $\overline{a}(n;2;4)$ и $\overline{b}(n;-2n;1)$ перпендикулярны?

5. При каких значениях m и n векторы $\overline{a}(3;n;2)$ и $\overline{b}(m;2;5)$ коллинеарны?

6. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найдите угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b} - \overline{c}$.

7. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найдите угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b} + \overline{c}$.

8. Докажите, что если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – единичные неколлинеарные векторы, то векторы $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$ перпендикулярны.

9. Векторы $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.

10. Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a} = 3\overline{p} + 2\overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} - 4\overline{q}$, где $\overline{p}$ и $\overline{q}$ единичные перпендикулярные векторы.

11. Плоскость задана уравнением $3x - y + 2z = 2$. Укажите какой-нибудь вектор, параллельный плоскости.

12. Прямая является пересечением плоскостей $3x - y + 2z = 2$ и $x + y + z = 0$. Укажите какой-нибудь вектор, параллельный этой прямой.

13. Дана точка $A(2; 0; -1)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через начало координат O и перпендикулярной прямой OA.

14. Найдите отрезки, которые плоскость $ax + by + cz + d = 0$ отсекает на осях координат, если a, b, c, d отличны от нуля.

15. Найдите точку пересечения трех плоскостей, заданных уравнениями

$$x - y = 1, \quad x + y - z = 3, \quad x + z = 2.$$

16. Докажите, что плоскости, заданные уравнениями

$$x - y + 2z = 1, \quad 2x - 3y + z + 1 = 0, \quad x + 5z - 1 = 0,$$

не имеют ни одной общей точки.

17. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой AB, где $A(2; 0; -1)$, $B(3; -2; 1)$.

Часть II. Указания и решения

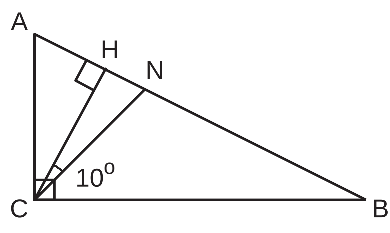
ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Треугольники

1.1. Прямоугольные треугольники

Задача 1.

В прямоугольном треугольнике угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 10°. Найдите острые углы треугольника.



Идея. Использовать определение биссектрисы угла и теорему о сумме внутренних углов треугольника.
Указание. Использовать определение биссектрисы угла.
Указание. Воспользоваться свойством суммы острых углов прямоугольного треугольника.

Решение. Пусть CN – биссектриса прямого угла треугольника ABC, тогда $\angle ACN = \angle NCB = 45^\circ$. Обозначим через CH высоту, проведённую к гипотенузе AB. По условию $\angle NCH = 10^\circ$.

В прямоугольном треугольнике ACH

$$\angle ACH = \angle ACN - \angle NCH = 45^\circ - 10^\circ = 35^\circ; \quad \angle A = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ.$$

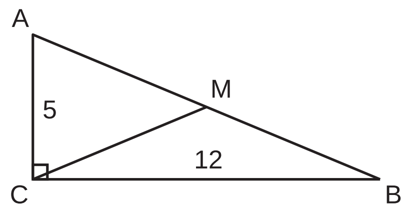
Поскольку в любом прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90°,

$$\angle B = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

Ответ. $35^\circ; 55^\circ$.

Задача 2.

Катеты прямоугольного треугольника имеют длину 12 и 5. Найдите длину медианы, проведённой к гипотенузе.



Идея. Медиана, проведённая из вершины прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы.
Указание. Найти длину гипотенузы по теореме Пифагора.

Решение. В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

По теореме Пифагора:

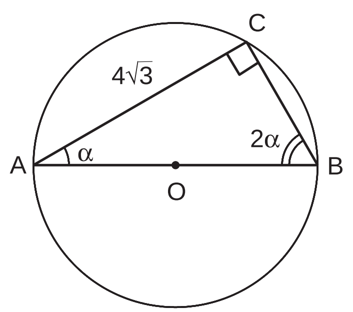
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \quad\Longrightarrow\quad AB = 13 \quad\Longrightarrow\quad CM = \frac{AB}{2} = 6,5.$$

Ответ. $6,5$.

Задача 3.

В прямоугольном треугольнике острые углы относятся как $1:2$, а больший катет равен $4\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

Идея. Гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной окружности.
Указание. Определить острые углы треугольника.
Указание. Найти длину гипотенузы по катету и прилежащему углу.
Указание. В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен половине гипотенузы.



Решение. Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда по условию $\angle CBA = 2\alpha$.

Заметим, что $\alpha + 2\alpha = 90^\circ \iff \alpha = 30^\circ$. Найдём длину гипотенузы по катету и прилежащему углу:

$$AB = \frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8.$$

Поскольку гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной окружности, радиус окружности равен половине гипотенузы:

$$AO = \frac{AB}{2} = 4.$$

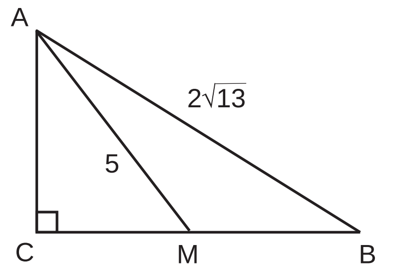
Ответ. 4.

Задача 4.

Найдите площадь прямоугольного треугольника, если длина гипотенузы равна $2\sqrt{13}$ см, а длина медианы большего острого угла равна 5 см.

Идея. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.
Указание. Для нахождения длин катетов воспользоваться теоремой Пифагора.
Указание. Площадь прямоугольного треугольника найти как полупроизведение катетов.

Решение. Введём обозначения: $AC = x$, $BC = y$. Пусть AM – медиана большего острого угла, тогда $BM = MC = \dfrac{y}{2}$. Запишем теорему Пифагора для треугольника ABC:



$$x^2 + y^2 = 52$$

и для треугольника AMC:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 25.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\frac{3y^2}{4} = 27 \iff y^2 = 36 \implies y = 6 \text{ см};$$

тогда

$$x^2 = 52 - 36 = 16 \implies x = 4 \text{ см}.$$

Площадь треугольника ABC найдём по формуле:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ см}^2.$$

Ответ. 12 см^2.

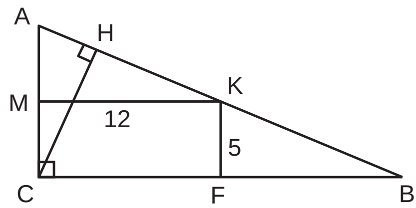
Задача 5.

Средние линии прямоугольного треугольника, параллельные катетам, равны 5 см и 12 см. Найдите высоту треугольника h, опущенную из вершины прямого угла. В ответе запишите $13h$.

Идея. Воспользоваться различными формулами для вычисления площади прямоугольного треугольника.
Указание. Найти длины сторон треугольника, используя информацию о средних линиях и теорему Пифагора.
Указание. Выразить площадь двумя различными способами (через катеты и через гипотенузу и искомую величину); из полученного соотношения определить высоту.

Решение. Пусть KF и KM – средние линии прямоугольного треугольника ABC, параллельные катетам. Найдём длины сторон треугольника. Катеты равны удвоенным средним линиям:

$$AC = 2KF = 10 \text{ см}, \quad BC = 2KM = 24 \text{ см}.$$



Гипотенузу находим по теореме Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 100 + 576 = 676 \quad \Longrightarrow \quad AB = 26 \text{ см}.$$

Выразим площадь треугольника двумя способами:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CH,$$

где $CH = h$ – высота, проведённая из вершины прямого угла к гипотенузе. Из последнего соотношения определяем

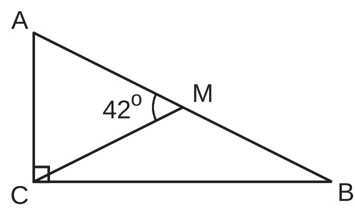
$$h = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{10 \cdot 24}{26} = \frac{120}{13} \quad \Longrightarrow \quad 13h = 120 \text{ см}.$$

О т в е т. 120 см.

Задача 6.

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, CM – медиана треугольника. Найти острые углы треугольника, если угол AMC равен 42°.

И д е я. Медиана, проведённая из вершины прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы.



У к а з а н и е. Воспользовавшись свойством медианы, проведённой к гипотенузе прямоугольного треугольника, найти один острый угол.

У к а з а н и е. Для вычисления второго острого угла использовать теорему о сумме внутренних углов треугольника.

Р е ш е н и е. Поскольку CM – медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, $AM = MB = MC$. Значит, треугольник AMC – равнобедренный; углы при основании AC равны. По теореме о сумме внутренних углов треугольника для ΔAMC

$$2\angle MAC + 42^\circ = 180^\circ \quad \Longrightarrow \quad \angle MAC = \frac{138^\circ}{2} = 69^\circ.$$

По свойству суммы острых углов прямоугольного треугольника для ΔABC

$$\angle ABC = 90^\circ - 69^\circ = 21^\circ.$$

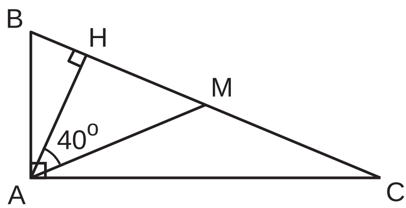
О т в е т. $21^\circ; 69^\circ$.

Задача 7.

Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Угол между AM и высотой AH равен $40°$. Найти углы треугольника ABC.

Идея. Показать, что треугольник ABC – прямоугольный.
Указание. Воспользоваться равнобедренностью треугольников AMC и BMC и доказать, что $\angle BAC = 90°$.
Указание. Для поиска $\angle ABC$ воспользоваться равенством углов при основании равнобедренного треугольника и теоремой о сумме внутренних углов треугольника.
Указание. Заметить, что точка M совпадает с центром описанной окружности; треугольник ABC является прямоугольным.
Указание. Второй острый угол треугольника ΔABC найти по свойству суммы острых углов прямоугольного треугольника.

Решение. Докажем сначала, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то угол, из вершины которого она проведена – прямой.



Так как $CM = MA = MB$, то треугольники AMC и BMC – равнобедренные. Значит, по теореме о сумме внутренних углов треугольника

$$\angle MAB = \frac{180° - \angle AMB}{2}, \quad \angle MAC = \frac{180° - \angle AMC}{2},$$

поэтому

$$\angle BAC = \angle MAB + \angle MAC = 180° - \frac{\angle AMB + \angle AMC}{2} = 180° - \frac{180°}{2} = 90°.$$

Таким образом, ΔABC – прямоугольный. Найдём его острые углы. Рассмотрим прямоугольный треугольник HMA. По свойству суммы острых углов прямоугольного треугольника

$$\angle M = 90° - 40° = 50°.$$

Так как ΔAMB равнобедренный, то по теореме о сумме внутренних углов треугольника

$$2\angle MBA + 50° = 180° \quad \Longrightarrow \quad \angle MBA = \frac{130°}{2} = 65°.$$

По свойству суммы острых углов прямоугольного треугольника для ΔABC

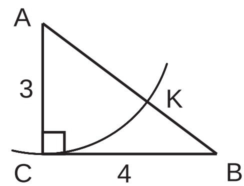
$$\angle ACB = 90° - 65° = 25°.$$

О т в е т. $90°; 65°; 25°$.

З а м е ч а н и е. При решении этой задачи мы доказали полезный факт: *если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то угол, из вершины которого проведена медиана, прямой.*

Задача 8.

В прямоугольном треугольнике ABC $AC = 3$, $BC = 4$. Окружность с центром в точке A проходит через точку C и пересекает гипотенузу AB в точке K. Найти отношение длин отрезков AK и BK.



И д е я. Воспользоваться теоремой Пифагора и определением окружности.
У к а з а н и е. Найти длину гипотенузы по теореме Пифагора.
У к а з а н и е. Использовать равенство длин отрезков AC и AK, следующее из определения окружности.

Р е ш е н и е. Длину гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC найдём по теореме Пифагора:

$$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \quad \Longrightarrow \quad AB = 5.$$

Из определения окружности следует, что $AK = AC$, поэтому

$$BK = AB - AK = AB - AC = 5 - 3 = 2; \quad AK : BK = 3 : 2.$$

О т в е т. $3 : 2$.

Задача 9.

В прямоугольном треугольнике медианы, проведённые к катетам, равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти гипотенузу.

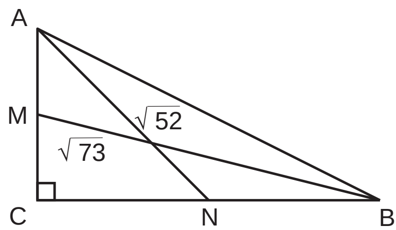
И д е я. Использовать определение медианы и теорему Пифагора.
У к а з а н и е. Записать теорему Пифагора для трёх прямоугольных треугольников.

Р е ш е н и е. Пусть BM и AN – медианы, проведённые к катетам AC и BC прямоугольного треугольника ABC. Введём обозначения: $AM = MC = x$, $BN = NC = y$. Требуется найти гипотенузу

$$AB = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Запишем теорему Пифагора для прямоугольных треугольников MCB и ACN:

$$x^2 + (2y)^2 = 73; \quad (2x)^2 + y^2 = 52.$$



Сложив два последних уравнения, получаем

$$5\left(x^2+y^2\right)=125 \iff x^2+y^2=25 \implies AB=2\cdot 5=10.$$

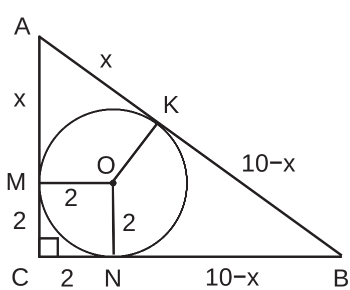
Ответ. 10.

Задача 10.

Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы его вписанной и описанной окружностей равны соответственно 2 см и 5 см.

Идея. Воспользоваться теоремой Пифагора.
Указание. По радиусу описанной окружности найти длину гипотенузы.
Указание. Обозначить через новую переменную длину части катета от точки касания вписанной окружности до вершины острого угла; выразить через неё остальные стороны треугольника.
Указание. Используя теорему Пифагора, найти значение новой переменной; вычислить длины катетов.
Указание. Найти площадь треугольника как полупроизведение длин катетов.

Решение. Гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной окружности. Значит, $AB=2\cdot 5=10$ см.



Обозначим точки касания вписанной окружности с центром O со сторонами AB, BC и AC треугольника, соответственно, через K, N и M. Поскольку четырёхугольник $CMON$ является квадратом, $CN=CM=2$. Пусть $AM=x$, тогда из равенства прямоугольных треугольников AMO и AKO (по катету и гипотенузе) следует, что $AK=x$. Далее,

$$BK=AB-AK=10-x, \quad BN=BK=10-x.$$

Запишем теорему Пифагора для ΔABC:

$$100=(x+2)^2+(12-x)^2 \iff 2x^2-20x+48=0 \iff x^2-10x+24=0;$$

$$x=4 \quad \text{или} \quad x=6.$$

При $x = 4$ $AC = 6$ см, $BC = 8$ см; при $x = 6$ $AC = 8$ см, $BC = 6$ см. Площадь прямоугольного треугольника ABC вычислим как полупроизведение катетов:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ см}^2.$$

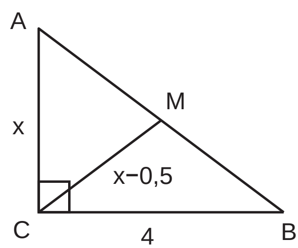
О т в е т. 24 см^2.

Задача 11.

В прямоугольном треугольнике один из катетов больше медианы, проведённой из вершины прямого угла, на 0,5. Найти его площадь, если второй катет равен 4.

И д е я. Воспользоваться свойством медианы, проведённой к гипотенузе, и теоремой Пифагора.
У к а з а н и е. Обозначив длину неизвестного катета за новую переменную, выразить через неё длину медианы и гипотенузы.
У к а з а н и е. Для поиска значения новой переменной воспользоваться теоремой Пифагора.
У к а з а н и е. Найти площадь треугольника как полупроизведение длин катетов.

Р е ш е н и е. Пусть $AC = x$, тогда по условию $CM = x - 0,5$. В прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы, поэтому



$$AB = 2(x - 0,5) = 2x - 1.$$

Запишем теорему Пифагора для ΔABC:

$$16 + x^2 = (2x - 1)^2 \iff 3x^2 - 4x - 15 = 0 \implies x = 3.$$

Площадь ΔABC найдём по формуле:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

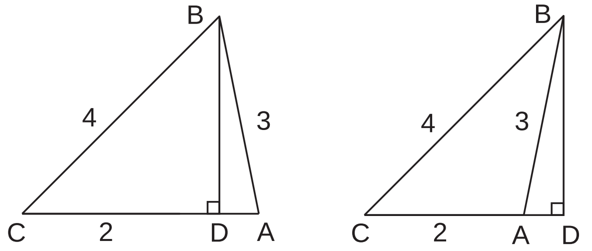
О т в е т. 6.

Задача 12.

В треугольнике ABC известны стороны $AC = 2$, $AB = 3$, $BC = 4$. Пусть BD – высота этого треугольника. Найти длину отрезка AD.

И д е я. Рассмотреть два случая ($\angle BAC$ острый или тупой); применить теорему Пифагора.
У к а з а н и е. Показать, что условию задачи удовлетворяет тупоугольный треугольник ($\angle BAC$ тупой).
У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой Пифагора.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два возможных случая расположения точки D на прямой AC.



1) Если $\angle BAC$ является острым, то точка D находится между точками A и C (рисунок слева). Пусть $AD = x$, тогда $CD = 2 - x$. По теореме Пифагора для ΔABD и ΔCBD получаем

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2;$$

$$9 - x^2 = 16 - (2 - x)^2 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{3}{4} < 0.$$

Значит, угол BAC не может быть острым.

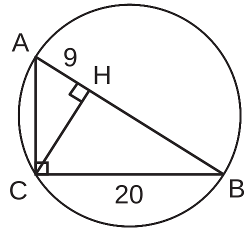
2) Если $\angle BAC$ является тупым, то точка A находится между точками C и D (рисунок справа). Обозначим $AD = x$, тогда $CD = 2+x$. Воспользуемся теоремой Пифагора для ΔABD и ΔCBD:

$$BD^2 = 9 - x^2 = 16 - (2 + x)^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{3}{4}.$$

О т в е т. $\dfrac{3}{4}$.

Задача 13.

Найти диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 20, а проекция другого катета на гипотенузу равна 9.



И д е я. Воспользоваться подобием прямоугольных треугольников.

У к а з а н и е. Диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен гипотенузе.

У к а з а н и е. Провести высоту к гипотенузе; использовать подобие полученных прямоугольных треугольников.

Р е ш е н и е. Так как диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен гипотенузе, то надо найти гипотенузу. Пусть точка H – основание высоты, опущенной на гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC. По условию $AH = 9$. Найдём AB.

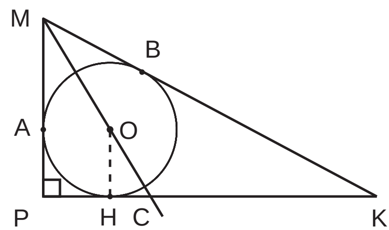
Так как $\Delta CHB \sim \Delta ACB$ (прямоугольные треугольники с общим острым углом $\angle B$), то $\dfrac{CB}{BH} = \dfrac{AB}{CB}$.

Следовательно, $\dfrac{20}{x} = \dfrac{9+x}{20} \implies x = 16 \implies AB = x + 9 = 25.$

Ответ. 25.

Задача 14.

Около окружности с центром O описан прямоугольный треугольник MPK с гипотенузой MK. Луч MO пересекает катет PK в точке C. Найдите длину отрезка CP, если точка касания с окружностью делит катет PK на отрезки $PH = 4$ и $HK = 12$.



Идея. Найти второй катет треугольника и выразить тангенс угла CMP через длину отрезка CP.

Указание. Используя теорему о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности, и теорему Пифагора, найти длину второго катета.

Указание. Вычислить тангенс угла OMA и выразить через него длину отрезка CP.

Решение. Прежде всего найдём длину второго катета. Обозначим точки касания окружности со сторонами MP и KP соответственно через A и B. Согласно теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности, $PA = PH = 4$, $KH = KB = 12$, $MA = MB$. Пусть $MA = x$. Запишем теорему Пифагора для ΔMPK:

$$(12+x)^2 = 16^2+(4+x)^2 \iff 16x = 128 \iff x = 8 \implies MP = 4+8 = 12.$$

В силу свойства касательной к окружности (касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания) $OA \perp MA$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\angle OMA = \frac{OA}{MA} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

С другой стороны

$$\operatorname{tg}\angle OMA = \operatorname{tg}\angle CMP = \frac{CP}{MP} = \frac{CP}{12} \implies CP = 6.$$

Ответ. 6.

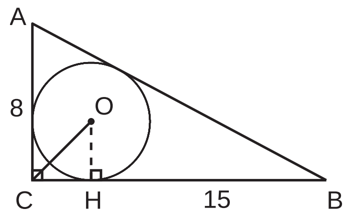
Задача 15.

Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной в этот треугольник окружности?

Идея. Найти радиус вписанной окружности.

Указание. По теореме Пифагора вычислить длину гипотенузы треугольника.

Указание. Для определения радиуса воспользоваться равенством отрезков касательных, проведённых из одной точки.



Решение. Вычислим радиус r вписанной окружности. Для этого по теореме Пифагора определим длину гипотенузы:

$$AB^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2 \implies$$

$$\implies AB = 17.$$

Заметим также, что

$$AB = (15 - r) + (8 - r) = 23 - 2r$$

в силу равенства отрезков касательных, проведённых из одной точки. Поэтому

$$23 - 2r = 17 \iff r = 3.$$

В силу свойства касательной к окружности $OH \perp BC$, где H – точка касания вписанной окружности с катетом BC. Прямоугольный треугольник CHO является равнобедренным; по теореме Пифагора находим длину гипотенузы:

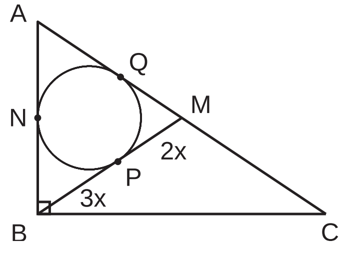
$$CO^2 = 2 \cdot 9 \implies CO = 3\sqrt{2}.$$

Ответ. $3\sqrt{2}$.

Задача 16.

В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AC = 20$ проведена медиана BM. Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается медианы BM в точке P. Найдите катет BC, если $BP : PM = 3 : 2$.

Идея. В равнобедренном треугольнике ABM найти длину основания AB, используя теорему о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности.
Указание. Показать, что треугольник ABM – равнобедренный.
Указание. Найти длину основания AB треугольника ABM, используя теорему о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности.
Указание. По теореме Пифагора найти длину второго катета треугольника ABC.



Решение. По условию $AM = MC = 10$. Поскольку BM – медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, $BM = 10$. Пусть $BP = 3x$, тогда по условию $PM = 2x$. Получаем

$$3x + 2x = 10 \iff x = 2.$$

Значит, $BP = 6$, $PM = 4$. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AM треугольника ABM соответственно через

N и Q. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности, $BN = BP = 6$, $MQ = MP = 4$, $AN = AQ = 10 - 4 = 6$. Значит,

$$AB = AN + BN = 6 + 6 = 12.$$

Длину катета BC находим по теореме Пифагора для ΔABC:

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 400 - 144 = 256 \quad \Longrightarrow \quad BC = 16.$$

Ответ. 16.

Задача 17.

В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, медиана $BM = 10\sqrt{3}$. Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается гипотенузы AC в точке T. Найдите BC, если $AT : TC = 1 : 3$.

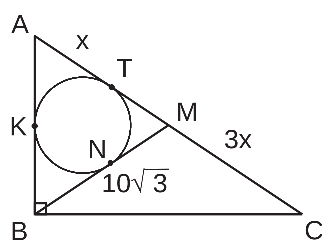
Идея. Использовать свойство медианы, проведённой к гипотенузе прямоугольного треугольника, и теорему о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности.

Указание. Найти длину гипотенузы AC прямоугольного треугольника, используя свойство медианы, проведённой из вершины прямого угла.

Указание. На основе теоремы о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности, найти катет AB.

Указание. Найти длину катета BC по теореме Пифагора.

Решение. В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы; следовательно,



$$AC = 2BM = 20\sqrt{3}.$$

Пусть $AT = x$, тогда по условию $TC = 3x$. Получаем

$$x + 3x = 20\sqrt{3} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5\sqrt{3}.$$

Значит, $AT = 5\sqrt{3}$; $AM = 10\sqrt{3}$; $TM = AM - AT = 5\sqrt{3}$. Обозначим через K и N точки касания окружности со сторонами AB и BM треугольника ABM. Из теоремы о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности, следует:

$$AT = AK = 5\sqrt{3}; \quad TM = NM = 5\sqrt{3};$$

$$BK = BN = BM - NM = 5\sqrt{3}.$$

Значит, $AB = AK + BK = 10\sqrt{3}$. Длину катета BC находим по теореме Пифагора для ΔABC:

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 400 \cdot 3 - 100 \cdot 3 = 300 \cdot 3 = 30^2 \quad \Longrightarrow \quad BC = 30.$$

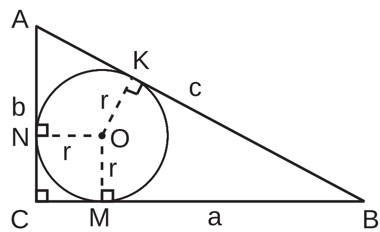
Ответ. 30.

Задача 18.

Пусть r – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Докажите, что $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

Идея. При доказательстве использовать теорему о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности.
Указание. Использовать свойство касательной к окружности (касательная перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания).
Указание. Использовать свойство отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Обозначим через M, N, K точки касания сторон треугольника с вписанной окружностью с центром O. Проведём радиусы в точки касания.



По свойству касательной к окружности построенные радиусы будут перпендикулярны сторонам треугольника. Значит, четырёхугольник $CNOM$ – квадрат и

$$CN = CM = r, \quad BM = a - r, \quad AN = b - r.$$

Воспользуемся теоремой о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности:

$$AB = AK + KB = AN + BM \quad \Longrightarrow \quad c = b - r + a - r \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{a+b-c}{2},$$

что и требовалось доказать.

1.2. Общие треугольники. Теоремы синусов, косинусов

Задача 1.

Есть ли тупой угол у треугольника, стороны которого равны 10, 14 и 7?

Идея. Косинус тупого угла отрицательный.
Указание. Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол.
Указание. Применить теорему косинусов для большей стороны и противолежащего ей угла.

Решение. В тупоугольном треугольнике косинус большего угла отрицательный. Запишем теорему косинусов для большей стороны и противолежащего ей угла α:

$$14^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{49 + 100 - 196}{140} = -\frac{47}{140} < 0.$$

Значит, угол α тупой.

Ответ. Да.

Задача 2.

Стороны треугольника равны 2, 3, 4. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

Идея. Косинус тупого угла отрицательный; косинус прямого угла равен нулю; косинус острого угла положительный.
Указание. Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол.
Указание. Применить теорему косинусов для большей стороны и противолежащего ей угла.

Решение. Запишем теорему косинусов для большей стороны и противолежащего ей угла α:

$$4^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{9+4-16}{12} = -\frac{3}{12} < 0.$$

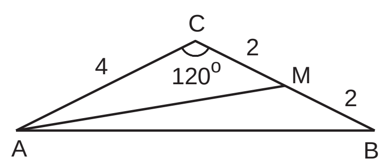
Значит, угол α тупой; треугольник со сторонами 2, 3, 4 тупоугольный.

Ответ. Тупоугольный.

Задача 3.

Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°. Боковая сторона равна 4. Найдите квадрат длины медианы, проведённой к боковой стороне.

Идея. Воспользоваться определением медианы и теоремой косинусов.
Указание. Квадрат длины медианы найти по теореме косинусов.



Решение. Пусть AM – медиана в треугольнике ABC. По определению медианы $BM = MC = 2$. Квадрат длины медианы найдём из треугольника AMC по теореме косинусов:

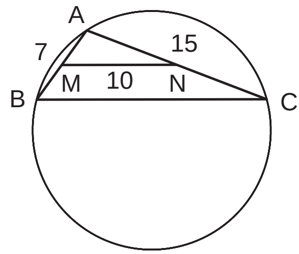
$$AM^2 = AC^2 + CM^2 - 2 \cdot AC \cdot CM \cdot \cos 120^\circ = 16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 28.$$

Ответ. 28.

Задача 4.

Из точки A, лежащей на окружности, проведены две хорды, равные 7 и 15. Найдите диаметр окружности, если расстояние между серединами хорд равно 10.

Идея. Применить теорему косинусов и теорему синусов.
Указание. Найти третью сторону треугольника.



Указание. По теореме косинусов вычислить косинус одного из углов.
Указание. Из основного тригонометрического тождества найти синус выбранного угла.
Указание. По теореме синусов определить диаметр описанной окружности.

Решение. Отрезок MN является средней линией треугольника BAC; значит, $BC = 20$. В треугольнике ABC известны все стороны. По теореме косинусов найдём косинус одного из углов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle B;$$

$$225 = 49 + 400 - 2 \cdot 7 \cdot 20 \cdot \cos\angle B \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\angle B = \frac{224}{7 \cdot 40} = \frac{4}{5}.$$

Из основного тригонометрического тождества получаем

$$\sin\angle B = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

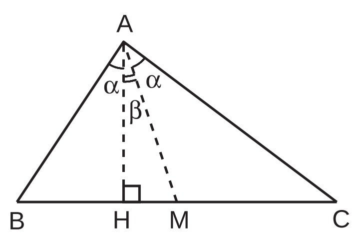
Диаметр вычисляем по теореме синусов:

$$2R = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{15 \cdot 5}{3} = 25.$$

Ответ. 25.

Задача 5.

Найти углы треугольника, если высота и медиана, проведённые из одной и той же вершины, образуют с боковыми сторонами углы, равные α.



Идея. Получить тригонометрическое уравнение, содержащее угол α и угол между медианой и высотой.
Указание. Выразить длины отрезков, на которые основания высоты и медианы разбивают сторону треугольника, через высоту, угол α и угол между медианой и высотой.
Указание. Приравнять длины отрезков, на которые основание медианы делит сторону треугольника.
Указание. Из полученного уравнения найти углы.

Решение. Проведём в треугольнике ABC высоту $AH = h$ и медиану AM. Пусть $\angle BAH = \angle CAM = \alpha$, $\angle HAM = \beta$. Из прямоугольных треугольников ABH, AMH и ACH получаем соответственно

$$BH = h \cdot \operatorname{tg}\alpha; \quad HM = h \cdot \operatorname{tg}\beta; \quad HC = h \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

Так как $MC = BM$, то $HC - HM = BH + HM$ и

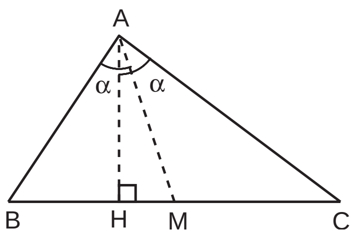
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta \iff \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \implies$$

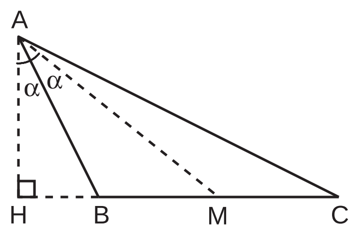
$$\implies \sin\alpha\cos\alpha = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) \iff \sin 2\alpha = \sin 2(\alpha+\beta) \iff$$

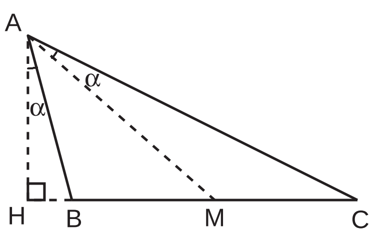
$$\iff \sin 2(\alpha+\beta) - \sin 2\alpha = 0 \iff \sin\beta\cos(2\alpha+\beta) = 0.$$

Равенство возможно в одном из двух случаев: либо $\beta = 0$, то есть ΔABC равнобедренный с углами $2\alpha,\ \frac{\pi}{2}-\alpha,\ \frac{\pi}{2}-\alpha$; либо $2\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, то есть ΔABC прямоугольный с углами $\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}$.

Отметим, что условие задачи может быть проиллюстрировано ещё тремя чертежами. Рассмотрение дополнительных случаев проводится по той же схеме и приводит к аналогичному результату.







О т в е т. α; $\frac{\pi}{2}-\alpha$; $\frac{\pi}{2}$ или 2α; $\frac{\pi}{2}-\alpha$; $\frac{\pi}{2}-\alpha$.

Задача 6.

Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в 6 раз короче гипотенузы. Найти острые углы треугольника.

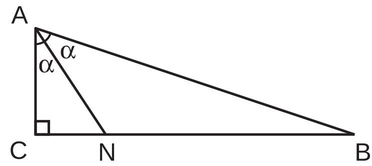
И д е я. Применить теорему синусов.

У к а з а н и е. Принять половину острого угла, в котором проведена биссектриса, за новую переменную. Выразить через неё углы треугольника, сторонами которого являются биссектриса и гипотенуза исходного прямоугольного треугольника.

У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой синусов и отношением из условия задачи.

Р е ш е н и е. Обозначим через AN биссектрису острого угла $\angle CAB$ прямоугольного треугольника ABC. По теореме о сумме внутренних углов треугольника для ΔABC $\angle ABC = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. Из ΔABN $\angle ANB = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

Итак, в треугольнике ANB известны все углы как функции α. Применим теорему синусов и воспользуемся известным из условия отношением длин гипотенузы и биссектрисы:



$$\frac{AN}{\sin\angle ABN}=\frac{AB}{\sin\angle ANB};$$

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{6}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\iff 6\cos(2\alpha)=\cos\alpha\iff$$

$$\iff 12\cos^2\alpha-\cos\alpha-6=0\iff \cos\alpha=\frac{3}{4}\quad\text{или}\quad\cos\alpha=-\frac{2}{3}.$$

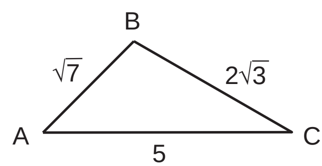
- $\cos\alpha=\frac{3}{4}\implies\alpha=\arccos\frac{3}{4},\quad\angle CAB=2\arccos\frac{3}{4},\quad\angle ABC=\frac{\pi}{2}-2\arccos\frac{3}{4}$;
- при $\cos\alpha=-\frac{2}{3}\quad\alpha>\frac{\pi}{2}$, что невозможно.

Ответ. $2\arccos\frac{3}{4};\ \frac{\pi}{2}-2\arccos\frac{3}{4}$.

Задача 7.

Найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами $5,\ \sqrt{7},\ 2\sqrt{3}$.

Идея. Применить теорему косинусов и теорему синусов.
Указание. По теореме косинусов найти косинус одного из углов треугольника.
Указание. Из основного тригонометрического тождества найти синус выбранного угла.
Указание. По теореме синусов вычислить радиус описанной окружности.



Решение. В треугольнике ABC известны все стороны. По теореме косинусов найдём косинус одного из углов. Например,

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle B;$$

$$25=7+12-2\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos\angle B\iff\cos\angle B=-\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

Из основного тригонометрического тождества

$$\sin\angle B=\sqrt{1-\frac{9}{4\cdot 21}}=\sqrt{\frac{75}{4\cdot 21}}=\frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

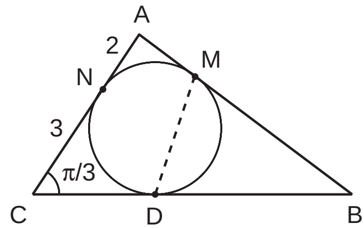
Далее применим теорему синусов:

$$\frac{AC}{\sin\angle B}=2R\iff R=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\cdot 2\sqrt{7}}{5}=\sqrt{7}.$$

Ответ. $\sqrt{7}$.

Задача 8.

В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, AC соответственно в точках M, D, N. Известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, $\widehat{BCA} = \dfrac{\pi}{3}$. Найти MD.



Идея. Вычислить стороны и углы треугольника ABC; искомую величину найти по теореме косинусов.

Указание. С помощью теоремы косинусов для ΔABC определить длину отрезка BM и $\cos\angle B$.

Указание. Для нахождения искомой величины воспользоваться теоремой косинусов для ΔMBD.

Решение. Прежде всего заметим, что по теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности, $AM = AN = 2$, $CD = CN = 3$, $BM = BD$. Обозначим $BM = x$. Запишем для ΔABC теорему косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB;$$

$$(2+x)^2 = 5^2 + (3+x)^2 - 2 \cdot 5 \cdot (3+x) \cdot \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4 + 4x + x^2 = 25 + 9 + 6x + x^2 - (15 + 5x) \quad \Longleftrightarrow \quad 3x = 15 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5.$$

Итак, известны стороны ΔABC: $AB = 2+5 = 7$, $BC = 5+3 = 8$, $AC = 3+2 = 5$. По теореме косинусов для ΔABC

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{49 + 64 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{11}{14}.$$

Далее применим теорему косинусов для ΔMBD:

$$MD^2 = BM^2 + BD^2 - 2 \cdot BM \cdot BD \cdot \cos\angle MBD;$$

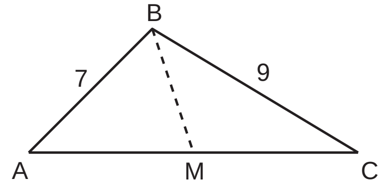
$$MD^2 = 25 + 25 - 50 \cdot \frac{11}{14} = 50 \cdot \frac{14 - 11}{14} = \frac{75}{7} \quad \Longrightarrow \quad MD = 5\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Ответ. $5\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Задача 9.

Известны длины двух сторон $a = 7$, $b = 9$ треугольника и его площадь $S = 14\sqrt{5}$. Третья сторона треугольника больше удвоенной медианы, проведённой к ней. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Идея. Найти длину третьей стороны треугольника и воспользоваться формулой для вычисления площади через полупериметр и радиус вписанной окружности.



Указание. Зная площадь треугольника и длины двух сторон, вычислить синус угла.
Указание. Обосновать утверждение: треугольник тупоугольный.
Указание. По теореме косинусов найти третью сторону.
Указание. По площади и трём сторонам вычислить радиус вписанной окружности.

Решение. По площади и двум сторонам треугольника можно найти синус угла между ними:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC \quad\Longleftrightarrow\quad \sin\angle ABC = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB\cdot BC} = \frac{2\cdot 14\sqrt{5}}{7\cdot 9} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

Из основного тригонометрического тождества

$$|\cos\angle ABC| = \sqrt{1-\frac{80}{81}} = \frac{1}{9}.$$

Докажем, что треугольник ABC тупоугольный, а именно $\angle ABC > \dfrac{\pi}{2}$. Воспользуемся свойством: против большей стороны треугольника лежит больший угол. По условию $AM = MC > BM$. Значит, $\angle ABM > \angle BAM$ (ΔABM) и $\angle CBM > \angle BCM$ (ΔCBM). Сложив неравенства почленно, получим

$$\angle ABM + \angle CBM > \angle BAM + \angle BCM \quad\Longleftrightarrow\quad \angle ABC > \angle BAM + \angle BCM \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \angle ABC + \angle ABC > \angle BAM + \angle BCM + \angle ABC = \pi \quad\Longleftrightarrow\quad \angle ABC > \frac{\pi}{2}.$$

Значит, $\cos\angle ABC = -\dfrac{1}{9} < 0$. По теореме косинусов для ΔABC

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC;$$

$$AC^2 = 49 + 81 + 2\cdot 7\cdot 9\cdot\frac{1}{9} = 130 + 14 = 144 \quad\Longrightarrow\quad AC = 12.$$

Осталось определить радиус вписанной окружности по площади треугольника и его сторонам:

$$S_{\Delta ABC} = pr \quad\Longleftrightarrow\quad r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p},$$

где p – полупериметр треугольника;

$$r = \frac{2\cdot 14\cdot\sqrt{5}}{7+9+12} = \frac{28\cdot\sqrt{5}}{28} = \sqrt{5}.$$

Ответ. $\sqrt{5}$.

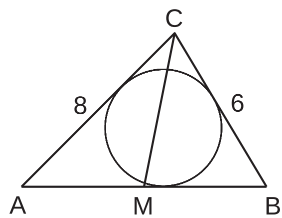
Замечание. По ходу решения этой задачи мы доказали полезный факт: *если медиана треугольника меньше половины стороны, к которой она проведена, то угол, из вершины которого проведена медиана, тупой.*

Задача 10.

У треугольника известны длины двух сторон и площадь: $a = 6$, $b = 8$, $S = 3\sqrt{15}$. Третья его сторона меньше удвоенной медианы, проведённой к ней. Найти радиус вписанной в этот треугольник окружности.

И д е я. Найти длину третьей стороны треугольника и воспользоваться формулой для вычисления площади через полупериметр и радиус вписанной окружности.
У к а з а н и е. Найти синус и косинус угла, противолежащего неизвестной стороне. Показать, что треугольник остроугольный.
У к а з а н и е. По теореме косинусов вычислить длину неизвестной стороны.
У к а з а н и е. Радиус вписанной окружности выразить через полупериметр и площадь треугольника.

Р е ш е н и е. Путь CM – медиана угла C треугольника ABC, $AC = 8$, $BC = 6$, $AB < 2CM$, $S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{15}$. По формуле для площади треугольника



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\angle ACB$$

находим синус угла ACB:

$$\sin\angle ACB = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC \cdot BC} = \frac{6\sqrt{15}}{8 \cdot 6} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Модуль косинуса угла ACB определим из основного тригонометрического тождества:

$$|\cos\angle ACB| = \sqrt{1 - \frac{15}{64}} = \frac{7}{8}.$$

Докажем, что $\angle ACB$ острый. Воспользуемся свойством: против большей стороны треугольника лежит больший угол. По условию $AM = MB < CM$. Значит, $\angle ACM < \angle CAM$ (ΔACM) и $\angle BCM < \angle CBM$ (ΔCBM). Сложив неравенства почленно, получим

$$\angle ACM + \angle BCM < \angle CAM + \angle CBM \iff \angle ACB < \angle CAM + \angle CBM \iff$$

$$\iff \angle ACB + \angle ACB < \angle BAM + \angle BCM + \angle ACB = \pi \iff \angle ACB < \frac{\pi}{2}.$$

Значит, $\cos\angle ACB > 0$. По теореме косинусов находим третью сторону ΔABC:

$$AB^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{7}{8} = 16 \implies AB = 4.$$

Осталось применить формулу для вычисления площади треугольника через полупериметр и радиус вписанной окружности:

$$S_{\Delta ABC} = pr \iff r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{3\sqrt{15}}{9} = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

О т в е т. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

З а м е ч а н и е. При решении этой задачи мы доказали полезный факт: *если медиана треугольника больше половины стороны, к которой она проведена, то угол, из вершины которого проведена медиана, острый.*

Задача 11.

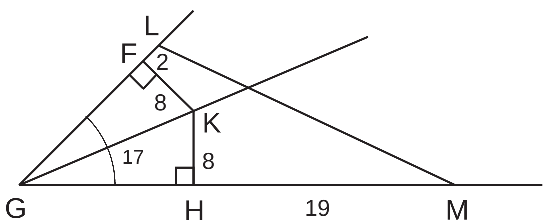
Прямая, проходящая через точки G и K, служит биссектрисой угла FGH. Известно, что $KF \perp GF$, $KH \perp GH$, $KF = KH = 8$, $GK = 17$. Отрезок GL содержит точку F, $FL = 2$. Отрезок GM содержит точку H и $HM = 19$. Найти длину отрезка ML.

Идея. Найти катет FG и угол $\angle KGF$ прямоугольного треугольника KFG; применить теорему косинусов в ΔLGM.
Указание. В прямоугольном ΔKFG найти катет FG по теореме Пифагора и косинус $\angle KGF$.
Указание. Воспользоваться теоремой косинусов для ΔLGM.

Решение. По условию ΔKFG и ΔKHG прямоугольные, причём они равны по гипотенузе и катету. Из ΔKFG

$$FG = \sqrt{GK^2 - KF^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{(17-8)(17+8)} = \sqrt{9 \cdot 25} = 15;$$

$$\cos\angle KGF = \frac{GF}{GK} = \frac{15}{17}.$$



Так как $\Delta KFG = \Delta KHG$, то

$$\angle FGM = 2\angle KGF; \quad GH = GF = 15.$$

Тогда в ΔLGM находим

$$GL = GF + FL = 15 + 2 = 17; \quad GM = GH + HM = 15 + 19 = 34;$$

$$\cos\angle LGM = 2\cos^2\angle KGF - 1 = 2\left(\frac{15}{17}\right)^2 - 1 = \frac{161}{289}.$$

Длину отрезка ML найдём по теореме косинусов:

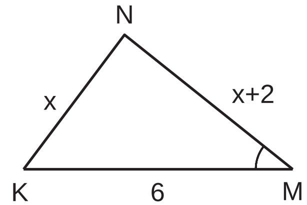
$$ML^2 = GL^2 + GM^2 - 2 \cdot GL \cdot GM \cdot \cos\angle LGM;$$

$$ML^2 = 17^2 + 34^2 - 2 \cdot 17 \cdot 34 \cdot \frac{161}{289} = 289 + 1156 - 644 = 801 \quad \Longrightarrow \quad ML = \sqrt{801}.$$

Ответ. $\sqrt{801}$.

*Задача 12.**

В треугольнике KMN сторона $KM = 6$, $MN - KN = 2$, $\cos\angle KMN = 3/5$. Найти площадь треугольника KMN.



Идея. Найти длины сторон треугольника, применив теорему косинусов.
Указание. Вычислить длины неизвестных сторон треугольника по теореме косинусов.
Указание. Для определения площади треугольника воспользоваться формулой Герона.

Решение. Пусть $KN = x$, тогда по условию $MN = x + 2$. Неизвестную величину x найдём по теореме косинусов:

$$KN^2 = MN^2 + KM^2 - 2 \cdot MN \cdot KM \cdot \cos\angle KMN;$$

$$x^2 = (x+2)^2 + 6^2 - 2 \cdot (x+2) \cdot 6 \cdot \frac{3}{5} \quad \Longleftrightarrow \quad 16x = 128 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 8.$$

Значит, $KN = 8$, $MN = 10$. Площадь треугольника вычислим по формуле

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр; a, b, c – длины сторон треугольника;

$$S_{\Delta KMN} = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 24.$$

Замечание. Треугольник со сторонами 6, 8, 10 – прямоугольный; его площадь $S = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Ответ. 24.

*Задача 13.**

Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равняется стороне AB этого треугольника. Найти высоту треугольника ABC, проведённую из точки C, если она меньше 1/2, а две другие стороны треугольника равны 2 и $\sqrt{3}$.

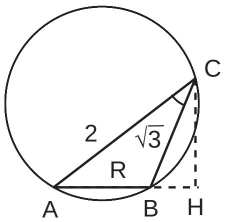
Идея. Используя теорему синусов, найти $\sin\angle C$; высоту найти по площади.
Указание. Используя теорему синусов, найти $\sin\angle C$.
Указание. Рассмотреть варианты: угол C острый, угол C тупой.
Указание. Найти длину неизвестной стороны по теореме косинусов.
Указание. Определить искомую величину по площади треугольника, произвести отбор по условию.

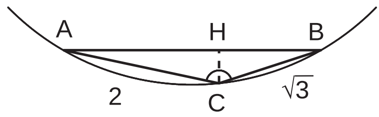
Решение. По теореме синусов легко найти $\sin\angle C$, однако по синусу угла треугольника нельзя однозначно определить сам угол: он может быть как острым, так и тупым. Значит, надо будет рассмотреть два случая.

Используя теорему синусов для ΔABC, с учётом условия $AB = R$, где R – радиус описанной окружности, получаем

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = 2R \quad \Longrightarrow \quad \sin\angle C = \frac{1}{2}; \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin\angle C = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Рассмотрим возможные варианты.





- Если $\angle C = 30^\circ$, то по теореме косинусов для ΔABC

$$AB^2 = 4 + 3 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad AB = 1,$$

тогда $CH = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \sqrt{3} > \dfrac{1}{2}$, не подходит.

- Если $\angle C = 150^\circ$, то

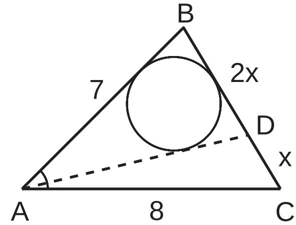
$$AB^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 13 \quad \Longrightarrow \quad AB = \sqrt{13},$$

тогда $CH = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \sqrt{\dfrac{3}{13}} < \dfrac{1}{2}$, подходит.

Ответ. $\sqrt{\dfrac{3}{13}}$.

*Задача 14.**

В треугольнике ABC известны стороны $AB = 7$, $AC = 8$ и $\cos\angle BAC = \dfrac{11}{16}$. На стороне BC выбрана такая точка D, что $DC : BC = 1 : 3$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABD.



Идея. Найти длину отрезка AD и воспользоваться разными формулами для площади треугольника.

Указание. По теореме косинусов найти длину стороны BC и отрезка AD.

Указание. Определить искомую величину по площади треугольника.

Решение. Прежде всего найдём длину стороны BC. Для этого воспользуемся теоремой косинусов для ΔABC:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC;$$

$$BC^2 = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{11}{16} = 36 \quad \Longrightarrow \quad BC = 6;\; BD = 4;\; DC = 2.$$

Далее найдём длину отрезка AD. Для этого предварительно по теореме косинусов для ΔABC посчитаем $\cos\angle ABC$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \cos\angle ABC = \frac{-AC^2 + AB^2 + BC^2}{2AB\cdot BC} = \frac{-64+49+36}{2\cdot 7\cdot 6} = \frac{1}{4}$$

и применим теорему косинусов для ΔABD:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB\cdot BD\cdot\cos\angle ABC = 49 + 16 - 14 = 51 \quad\Longrightarrow\quad AD = \sqrt{51}.$$

Из основного тригонометрического тождества

$$\sin\angle ABC = \sin\angle ABD = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Искомый радиус вычислим по площади ΔABD:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BD\cdot\sin\angle ABD = \frac{AB+BD+AD}{2}\cdot r \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad r = \frac{7\sqrt{15}}{11+\sqrt{51}} = \frac{\sqrt{15}(11-\sqrt{51})}{10}.$$

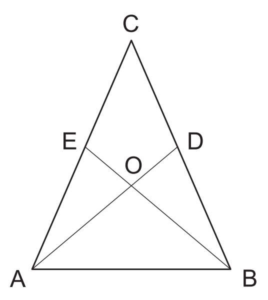
О т в е т. $\dfrac{\sqrt{15}(11-\sqrt{51})}{10}$.

1.3. Медиана, биссектриса, высота

Задача 1.

Доказать, что если у треугольника равны две медианы, то он равнобедренный.

И д е я. Использовать признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.
У к а з а н и е. Медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, начиная от вершины.



Р е ш е н и е. Пусть медианы $AD = BE = m$, тогда

$$AO = BO = \frac{2}{3}m, \quad EO = DO = \frac{1}{3}m.$$

Так как углы при вершине O вертикальные, то $\Delta AOE = \Delta BOD$ по первому признаку (две стороны и угол между ними).

Следовательно, $AE = BD$ и сторона AC (равная $2AE$) равна стороне BC (равной $2BD$).

Задача 2.

Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Доказать, что этот треугольник равнобедренный.

И д е я. Использовать свойство биссектрисы.
У к а з а н и е. Биссектриса угла α делит сторону a на отрезки a_b и a_c, которые пропорциональны сторонам b и c: $a_b : a_c = b : c$.

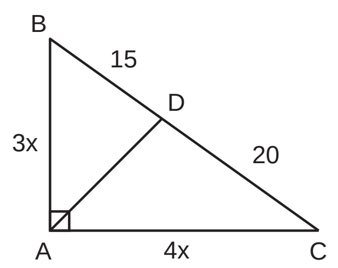
Р е ш е н и е. Поскольку медиана совпадает с биссектрисой, в равенстве

$$a_b : a_c = b : c$$

отрезки a_b и a_c равны. Следовательно, $b : c = 1$, то есть $b = c$.

Задача 3.

Найдите площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длины 15 и 20.



И д е я. Использовать свойство биссектрисы.
У к а з а н и е. Биссектриса угла α делит сторону a на отрезки a_b и a_c, пропорциональные сторонам b и c: $\alpha_b : a_c = b : c$.
У к а з а н и е. Площадь треугольника найти как полупроизведение катетов. Катеты найти, используя свойство биссектрисы и теорему Пифагора.

Р е ш е н и е. Пусть AD – биссектриса прямого угла треугольника ABC. По свойству биссектрисы

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

Обозначим $AB = 3x$, тогда $AC = 4x$. По теореме Пифагора для ΔABC

$$9x^2 + 16x^2 = 35^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 49.$$

Площадь ΔABC вычислим как полупроизведение катетов:

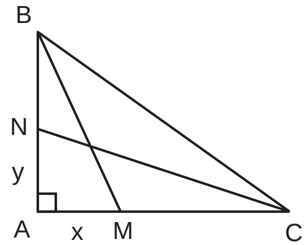
$$S_{\Delta ABC} = \frac{3x \cdot 4x}{2} = 6x^2 = 6 \cdot 49 = 294.$$

О т в е т. 294.

Задача 4.

Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника, катеты которого равны 18 и 24.

И д е я. Использовать свойство биссектрисы.
У к а з а н и е. По теореме Пифагора вычислить длину гипотенузы.



Указание. Воспользоваться свойством биссектрисы: биссектриса угла α делит сторону a на отрезки a_b и a_c, пропорциональные сторонам b и c: $a_b : a_c = b : c$.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 18$, $AC = 24$. Прежде всего по теореме Пифагора найдём длину гипотенузы BC:

$$BC^2 = AB^2+AC^2 = 18^2+24^2 = 324+576 = 900 \quad \Longrightarrow \quad BC = 30.$$

Пусть BM и CN – биссектрисы острых углов $\angle B$ и $\angle C$. Введём обозначения: $AM = x$, $AN = y$. По свойству биссектрисы

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{24-x} = \frac{18}{30} \quad \Longleftrightarrow \quad 5x = 3(24-x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = 9;$$

по теореме Пифагора для ΔABM

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 = 18^2 + 9^2 = 9^2 \cdot 5 \quad \Longrightarrow \quad BM = 9\sqrt{5}.$$

Аналогично находим длину биссектрисы CN:

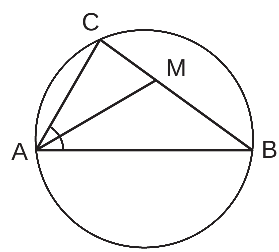
$$\frac{AN}{NB} = \frac{AC}{BC} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y}{18-y} = \frac{24}{30} \quad \Longleftrightarrow \quad 5y = 4(18-y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 8;$$

по теореме Пифагора для ΔANC

$$NC^2 = AC^2 + AN^2 = 24^2 + 8^2 = 8^2 \cdot 10 \quad \Longrightarrow \quad NC = 8\sqrt{10}.$$

Ответ. $9\sqrt{5}; 8\sqrt{10}$.

Задача 5.



В окружность радиуса $4\sqrt{3}$ вписан треугольник ABC, в котором $\angle A = 60^\circ$, а сторона AB в два раза больше стороны AC. В треугольнике проведена биссектриса AM. Найдите длину отрезка MC.

Идея. Использовать свойство биссектрисы.
Указание. Найти длину стороны BC по теореме синусов.
Указание. Воспользоваться свойством биссектрисы: биссектриса угла α делит сторону a на отрезки a_b и a_c, пропорциональные сторонам b и c: $a_b : a_c = b : c$.

Решение. По условию $AB = 2AC$. Длину стороны BC треугольника ABC можно вычислить, используя теорему синусов:

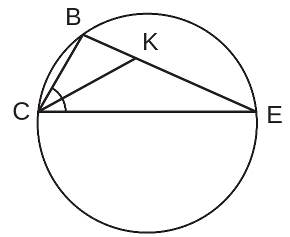
$$BC = 2R \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12.$$

По свойству биссектрисы $\quad \dfrac{MC}{12 - MC} = \dfrac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad MC = 4.$

Ответ. 4.

Задача 6.

В треугольнике BCE угол $\angle C = 60^\circ$, $CE : BC = 3 : 1$. Отрезок CK – биссектриса треугольника. Найдите KE, если радиус описанной около треугольника окружности равен $8\sqrt{3}$.



Идея. Использовать свойство биссектрисы.
Указание. Найти длину стороны BE по теореме синусов.
Указание. Воспользоваться свойством биссектрисы: биссектриса угла α делит сторону a на отрезки a_b и a_c, пропорциональные сторонам b и c: $a_b : a_c = b : c$.

Решение. По условию $CE = 3BC$. Длину стороны BE треугольника BCE найдём, используя теорему синусов:

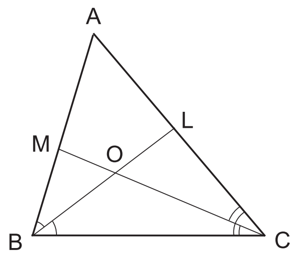
$$BE = 2R \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24.$$

По свойству биссектрисы $\quad \dfrac{KE}{24 - KE} = \dfrac{3}{1} \quad \Longleftrightarrow \quad KE = 18.$

Ответ. 18.

Задача 7.

Зная угол α при вершине треугольника, определите острый угол между биссектрисами двух других углов треугольника.



Идея. Воспользоваться теоремой о сумме внутренних углов треугольника.
Указание. Используя определение биссектрисы и теорему о сумме внутренних углов треугольника, выразить углы между биссектрисами через α.
Указание. Произвести отбор острого угла.

Решение. Пусть $\angle A = \alpha$; BL и CM – биссектрисы углов $\angle B$ и $\angle C$, соответственно; O – точка пересечения биссектрис. Из треугольника BOC получаем, что

$$\angle BOC = \pi - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C.$$

Так как $\angle B + \angle C = \pi - \alpha$, то

$$\angle BOC = \frac{\pi + \alpha}{2} > \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, угол BOC – тупой, а угол LOC – острый; $\angle LOC = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$.

Ответ. $\dfrac{\pi - \alpha}{2}$.

Задача 8.

Зная углы α и β при основании треугольника, определите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из угла, противолежащего основанию.

Идея. Выразить искомый угол через угол при вершине треугольника и угол между высотой и боковой стороной.
Указание. Рассмотреть два варианта взаимного расположения высоты и биссектрисы.

Решение. Рассмотрим ΔABC с высотой CH и биссектрисой CL.

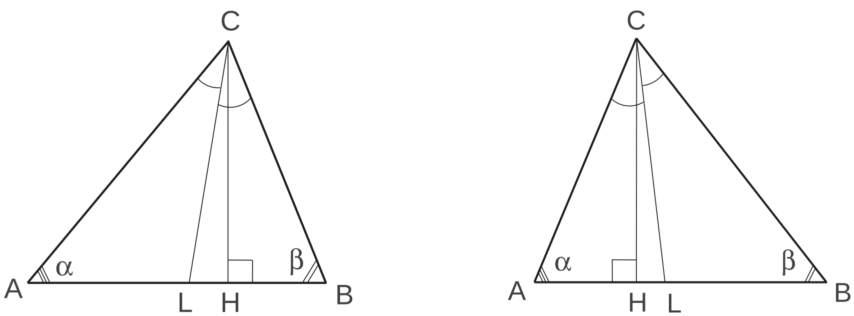
1) Если точки H и L совпадают, то искомый угол равен нулю.

2) Пусть точка L лежит между A и H (левый рисунок). Тогда

$$\angle LCH = \angle LCB - \angle HCB.$$

Так как $\angle LCB = \dfrac{\angle ACB}{2} = \dfrac{180^\circ - (\alpha+\beta)}{2}$, а $\angle HCB = 90^\circ - \beta$, то

$$\angle LCH = \frac{180^\circ - (\alpha+\beta)}{2} - 90^\circ + \beta = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$



3) Если точка L лежит между B и H (правый рисунок), то аналогично получаем

$$\angle LCH = \angle HCB - \angle LCB = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

В общем виде ответ будет выглядеть так: $\angle LCH = \dfrac{|\alpha - \beta|}{2}$.

Ответ. $\dfrac{|\alpha-\beta|}{2}$.

Задача 9.

Медианы треугольника равны 3, 4, 5. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

Идея. Сравнить квадрат одной стороны треугольника с суммой квадратов двух других сторон.

Указание. Вычислить квадраты длин сторон треугольника, используя формулы длины медианы.

Решение. Для трёх медиан имеем:

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$
$$4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2,$$
$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Найдём a^2, b^2, c^2. Сложим второе и третье уравнения:

$$4(m_b^2 + m_c^2) = 4a^2 + (b^2 + c^2).$$

Выразив из последнего уравнения $(b^2 + c^2)$ и подставив в первое, получим

$$4m_a^2 = 8(m_b^2 + m_c^2) - 9a^2,$$

откуда

$$a^2 = \frac{4}{9}\left(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2\right).$$

Аналогичные формулы справедливы для b и c. В результате

$$a^2 = \frac{4}{9} \cdot 73, \quad b^2 = \frac{4}{9} \cdot 52, \quad c^2 = \frac{4}{9} \cdot 25.$$

Поскольку для квадрата большей стороны треугольника выполняется неравенство $a^2 < b^2 + c^2$, треугольник является остроугольным.

Ответ. Остроугольный.

Задача 10.

Высоты треугольника равны 3, 4, 5. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

Идея. Сравнить квадрат одной стороны треугольника с суммой квадратов двух других сторон.
Указание. Выразить стороны треугольника через его высоты и площадь.

Решение. Пусть a, b, c – стороны треугольника; соответствующие им высоты $h_a = 3$, $h_b = 4$, $h_c = 5$. Для площади треугольника имеем:

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{2S}{h_a} = \frac{2S}{3}, \quad b = \frac{2S}{h_b} = \frac{S}{2}, \quad c = \frac{2S}{h_c} = \frac{2S}{5},$$

откуда $a^2 = \dfrac{4S^2}{9}$, $b^2 = \dfrac{S^2}{4}$, $c^2 = \dfrac{4S^2}{25}$. В результате получаем

$$b^2 + c^2 = \frac{41S^2}{100} < a^2 = \frac{4S^2}{9};$$

следовательно, треугольник тупоугольный.

Ответ. Тупоугольный.

Задача 11.

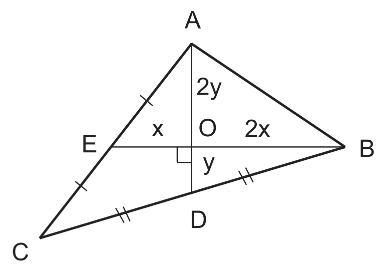
В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом. Известно, что $AC = 3$, $BC = 4$. Найти сторону AB этого треугольника.

Идея. Использовать теорему о пересечении медиан (медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины).
Указание. Получить систему из двух уравнений с двумя неизвестными, дважды применив теорему Пифагора.

Решение. Пусть медианы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Обозначим $EO = x$, $DO = y$. Тогда по теореме о пересечении медиан $OB = 2x$, $OA = 2y$.

Сторону AB будем искать из прямоугольного треугольника AOB по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$



Теперь применим теорему Пифагора к треугольникам ΔAOE и ΔBOD:

$$\begin{cases} x^2 + (2y)^2 = (3/2)^2, \\ (2x)^2 + y^2 = 2^2. \end{cases}$$

Сложив уравнения и поделив на 5, получим $x^2 + y^2 = 5/4$.

Следовательно, $AB = 2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}$.

Ответ. $\sqrt{5}$.

Задача 12.

В треугольнике известны длины двух его сторон 6 и 3. Полусумма длин высот, опущенных на эти стороны, равна длине третьей высоты. Найти длину его третьей стороны.

Идея. Записать площадь треугольника тремя способами.
Указание. Использовать формулу площади через высоту и основание.

Решение. Пусть высота, опущенная на сторону a длины 6, равна h_a, а высота, опущенная на сторону b длины 3, равна h_b. По условию $h_c = \dfrac{h_a + h_b}{2}$. Выразим площадь треугольника через высоты:

$$S = \frac{6h_a}{2}, \quad S = \frac{3h_b}{2}, \quad S = \frac{c\frac{h_a + h_b}{2}}{2}.$$

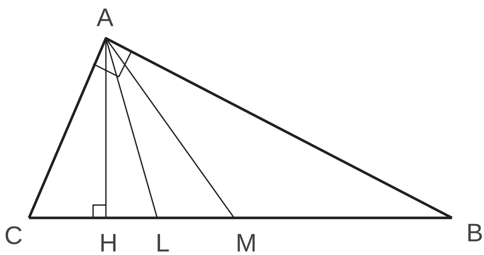
Выразив h_a, h_b из первых двух уравнений и подставив в третье, получим $c = 4$.

Ответ. 4.

Задача 13.

В треугольнике ABC угол A – прямой. Из вершины A проведены медиана AM, высота AH и биссектриса AL. Доказать, что AL – биссектриса в треугольнике AMH.

Идея. Выразить $\angle HAL$, $\angle MAL$ через углы треугольника.



Указание. $\angle HAL = \angle MAL = \dfrac{\pi}{4} - \angle ABC$.

Решение. В любом треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой. Так как AM – медиана $\triangle ABC$, проведённая из вершины прямого угла к гипотенузе, то $AM = \dfrac{1}{2}BC$ и $\triangle ABM$, $\triangle ACM$ – равнобедренные. Значит,

$$\angle ABM = \angle BAM = \alpha; \quad \angle MCA = \angle MAC = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Поскольку AH – высота треугольника, то

$$\angle HAC = \alpha; \qquad \angle HAB = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

$$\angle HAL = \angle LAC - \angle HAC = \frac{\pi}{4} - \alpha;$$

$$\angle MAL = \angle MAC - \angle LAC = \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \alpha.$$

Следовательно, $\angle HAL = \angle MAL$, то есть AL – биссектриса угла MAH.

Задача 14.

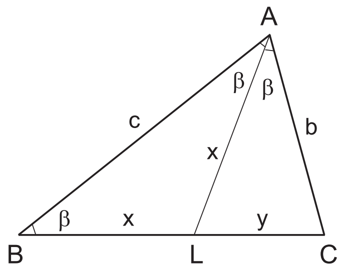
В треугольнике ABC даны стороны b и c. Угол α вдвое больше угла β. Найти сторону a.

Идея. Провести биссектрису угла A. Записать систему двух уравнений с двумя неизвестными.
Указание. Использовать свойство биссектрисы и формулу её длины.

Р е ш е н и е. Проведём биссектрису AL, тогда ΔABL будет равнобедренным.

Пусть $BL = AL = x$, $LC = y$, тогда квадрат биссектрисы равен

$$x^2 = cb - xy.$$



Кроме того, по свойству биссектрисы $c/b = x/y$. Из этих уравнений найдём

$$x^2 = \frac{c^2 b}{b+c}, \quad y^2 = \frac{b^3}{b+c}.$$

В результате

$$a = BC = x + y = \sqrt{\frac{c^2 b}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^3}{b+c}} = \sqrt{b}\left(\frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{b+c}}\right) =$$

$$= \sqrt{b}\sqrt{b+c} = \sqrt{b^2 + bc}.$$

О т в е т. $\sqrt{b^2 + bc}$.

*Задача 15.**

Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

И д е я. Воспользоваться формулой для биссектрисы, содержащей косинус половинного угла.
У к а з а н и е. Использовать то, что в треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол.

Р е ш е н и е. Пусть a – наибольшая сторона треугольника и α – наибольший угол треугольника. Биссектрисы, проведённые к сторонам a и b треугольника, вычисляются по формулам $l_a = \dfrac{2bc \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c}$; $\quad l_b = \dfrac{2ac \cdot \cos\dfrac{\beta}{2}}{a+c}$. Сравним их:

$$\frac{2bc \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c} \vee \frac{2ac \cdot \cos\dfrac{\beta}{2}}{a+c} \quad \Longleftrightarrow \quad b\,(a+c) \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \ \vee \ a\,(b+c) \cdot \cos\frac{\beta}{2}.$$

Так как $\alpha > \beta$ и $b < a$, то $0 < \cos\dfrac{\alpha}{2} < \cos\dfrac{\beta}{2} < 1$ и $ba + bc < ba + ac$. Следовательно, $b\,(a+c) \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} < a\,(b+c) \cdot \cos\dfrac{\beta}{2}$ и $l_a < l_b$.

Задача 16.

Две биссектрисы у треугольника равны. Доказать, что он равнобедренный.

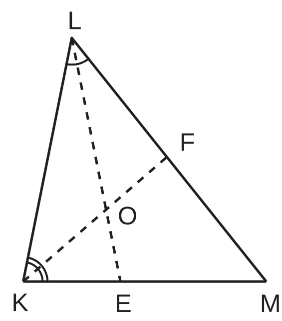
Идея. Доказательство проводить методом от противного.
Указание. В любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

Решение. Пусть $l_a = l_b$. Предположим, что треугольник не является равнобедренным. Следовательно, $\angle\alpha \neq \angle\beta$. Для определённости пусть $\angle\alpha > \angle\beta$ и $a > b$. Так как в треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса, то $l_a < l_b$. Получили противоречие; значит, наш треугольник равнобедренный.

*Задача 17.**

В треугольнике KLM проведены биссектрисы LE и KF углов KLM и LKM соответственно, которые пересекаются в точке O. Известно, что $KL = LE$, периметр треугольника KLM равен 34, $LO = 3 \cdot OE$. Найти ML.

Идея. Использовать свойство биссектрисы и формулу для вычисления квадрата её длины.
Указание. Обозначить $KL = LE = x$, $LM = y$; используя свойство биссектрисы, выразить KE и ME через новые переменные.
Указание. Используя формулу для квадрата биссектрисы, найти связь между x и y.
Указание. Записать периметр через x и y.



Решение. Введём обозначения:

$$KL = LE = x, \quad LM = y.$$

По свойству биссектрисы для ΔKLE

$$\frac{LK}{KE} = \frac{LO}{OE} = \frac{3}{1} \quad \Longrightarrow \quad KE = \frac{x}{3}.$$

По свойству биссектрисы для ΔKLM

$$\frac{KL}{LM} = \frac{KE}{EM} \quad \Longrightarrow \quad EM = \frac{y}{3}.$$

Применим теорему о квадрате длины биссектрисы:

$$LE^2 = x^2 = xy - \frac{xy}{9} = \frac{8xy}{9} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{8y}{9}.$$

Наконец, воспользуемся условием

$$P_{\Delta KLM} = 34 = x + y + \frac{x}{3} + \frac{y}{3} \quad \Longrightarrow \quad x + y = \frac{3 \cdot 17}{2};$$

$$\frac{8y}{9} + y = \frac{3 \cdot 17}{2} \quad \Longrightarrow \quad y = ML = \frac{27}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{27}{2}$.

*Задача 18.**

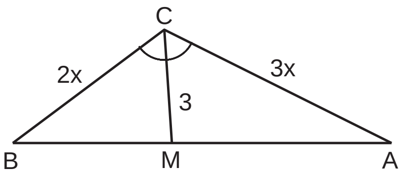
В треугольнике ABC угол C равен 120°, а биссектриса угла C равна 3. Длины сторон AC и BC относятся как $3:2$ соответственно. Найти тангенс угла A и сторону BC.

Идея. Тангенс угла A найти, используя теорему синусов. Для нахождения стороны BC использовать одну из формул длины биссектрисы.
Указание. Обозначить $\angle A = \alpha$, тогда $\angle B = 180^\circ - \alpha - 120^\circ$. Записать теорему синусов для ΔABC.
Указание. Длина биссектрисы: $l_a = \frac{2bc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$.

Решение. Введём обозначения: $AC = 3x$, $\angle A = \alpha$, тогда по условию $BC = 2x$, $\angle B = 180^\circ - \alpha - 120^\circ$. Запишем теорему синусов для ΔABC:

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B} \iff \frac{2x}{\sin\alpha} = \frac{3x}{\sin(180^\circ - (\alpha + 120^\circ))} \iff$$

$$\iff 2\sin(\alpha + 120^\circ) = 3\sin\alpha \iff 4\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha \iff \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$



Теперь найдём сторону BC. Пусть CM – биссектриса угла C. Применим формулу $l_a = \frac{2bc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$ для длины биссектрисы:

$$3 = \frac{2\cdot 2x\cdot 3x\cdot\cos 60^\circ}{2x+3x} \iff 3 = \frac{6x^2}{5x} \iff x = \frac{5}{2} \iff BC = 5.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 5.

*Задача 19.**

В треугольнике KLM длина стороны $KL = 24$, длина биссектрисы $LN = 24$, а длина отрезка $MN = 9$. Определить периметр треугольника LMN.

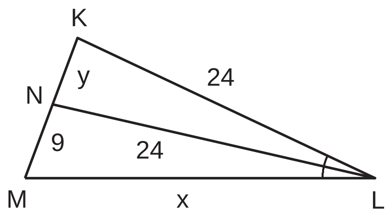
Идея. Использовать свойство биссектрисы и формулу для вычисления квадрата её длины.
Указание. Свойство биссектрисы: биссектриса угла α делит сторону a на отрезки a_b и a_c, пропорциональные сторонам b и c: $a_b : a_c = b : c$.
Указание. Квадрат длины биссектрисы: $l_a^2 = bc - a_b a_c$.

Р е ш е н и е. Введём обозначения: $LM = x$, $NK = y$. По свойству биссектрисы

$$\frac{KL}{LM} = \frac{KN}{NM} \quad \Longrightarrow \quad \frac{24}{x} = \frac{y}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad xy = 24 \cdot 9.$$

Воспользуемся формулой для вычисления квадрата длины биссектрисы:

$$LN^2 = KL \cdot LM - KN \cdot NM \quad \Longrightarrow \quad 24^2 = 24x - 9y \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{8}{3}(x - 24).$$



Подставим найденную зависимость в первое уравнение:

$$8x(x - 24) = 24 \cdot 9 \cdot 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 24x - 81 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 27 \quad \Longrightarrow \quad y = 8.$$

Тогда $\quad P_{\Delta LMN} = 24 + 27 + 9 = 60.$

О т в е т. 60.

*Задача 20.**

В треугольнике ABC с длинами сторон $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$ проведена биссектриса AD. Вокруг треугольника ABD описана окружность, а в треугольник ACD вписана окружность. Найти произведение их радиусов.

И д е я. Найти длины всех сторон треугольников ABD и ACD; выразить произведение радиусов через стороны и площади соответствующих треугольников и воспользоваться известным отношением площадей.
У к а з а н и е. Использовать свойство биссектрисы: биссектриса угла α делит сторону a на отрезки a_b и a_c, пропорциональные сторонам b и c: $\quad a_b : a_c = b : c$.
У к а з а н и е. Найти длину биссектрисы по формуле: $\quad l_a^2 = bc - a_b a_c$.
У к а з а н и е. Выразить радиусы через площади соответствующих треугольников.
У к а з а н и е. Произведение радиусов будет содержать отношение площадей треугольников, равное $BD : CD$.

Р е ш е н и е. Прежде всего найдём длины отрезков BD и CD. По свойству биссектрисы

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \quad \Longrightarrow \quad BD = \frac{3}{8}BC = \frac{21}{8}, \quad CD = \frac{5}{8}BC = \frac{35}{8}.$$

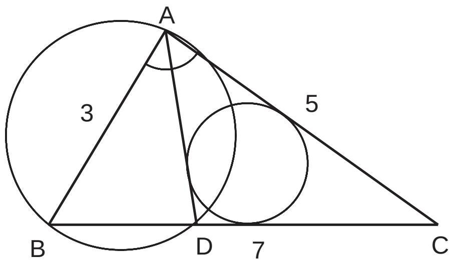
Длину биссектрисы вычислим по формуле:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD = 15 - \frac{21}{8} \cdot \frac{35}{8} = \frac{15^2}{8^2} \quad \Longrightarrow \quad AD = \frac{15}{8}.$$

Радиусы описанной и вписанной окружностей выразим через площади соответствующих треугольников:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4R} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4 \cdot S_{\Delta ABD}} = \frac{3 \cdot 21 \cdot 15}{4 \cdot 64 \cdot S_{\Delta ABD}};$$

$$S_{\Delta ADC} = pr \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{S_{\Delta ADC}}{p} = \frac{8 \cdot S_{\Delta ADC}}{45}.$$



Искомая величина

$$Rr = \frac{3 \cdot 21 \cdot 15}{4 \cdot 64 \cdot S_{\Delta ABD}} \cdot \frac{8 \cdot S_{\Delta ADC}}{45} = \frac{21 \cdot S_{\Delta ADC}}{32 \cdot S_{\Delta ABD}}.$$

Поскольку треугольники ADC и ABD имеют общую высоту, опущенную из вершины A, то отношение их площадей равно отношению длин оснований:

$$\frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{CD}{BD} = \frac{5}{3},$$

окончательно получаем

$$Rr = \frac{21 \cdot 5}{32 \cdot 3} = \frac{35}{32}.$$

О т в е т. $\dfrac{35}{32}$.

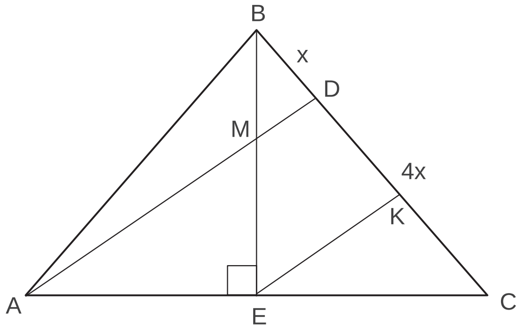
1.4. Подобие треугольников. Теорема Фалеса

Задача 1.

В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC, считая от вершины B?

И д е я. Выполнив дополнительные построения, использовать теорему Фалеса.
У к а з а н и е. Провести через точку E прямую параллельно прямой AD. Определить, в каком отношении точка пересечения построенной прямой и прямой BC разделит отрезок DC. Применить теорему Фалеса к углу ACD.
У к а з а н и е. Найти искомое отношение с помощью теоремы Фалеса, применённой к углу CBE.

Р е ш е н и е. Пусть M – точка пересечения высоты BE с прямой AD. Обозначим $BD = x$, тогда $DC = 4x$. Проведём через точку E прямую, параллельную прямой AD, до пересечения с прямой BC в точке K. Так как треугольник ABC равнобедренный, то E – середина отрезка AC. Тогда по теореме Фалеса, применённой к углу ACD, точка K – середина отрезка DC; следовательно, $DK = KC = 2x$.



Теперь применим теорему Фалеса к углу CBE:

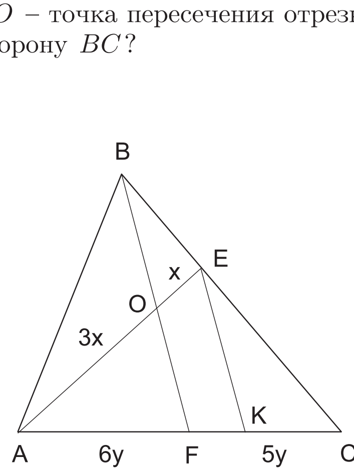
$$\frac{BM}{ME} = \frac{BD}{DK} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

О т в е т. 1 : 2.

Задача 2.

Дан треугольник ABC и точки E и F на сторонах BC и AC соответственно, причём $AO : OE = 3 : 1$ и $AF : FC = 6 : 5$, где O – точка пересечения отрезков AE и BF. В каком отношении точка E делит сторону BC?

И д е я. Выполнив дополнительные построения, использовать теорему Фалеса.
У к а з а н и е. Провести через точку E прямую параллельно прямой BF. Определить, в каком отношении точка пересечения построенной прямой и прямой AC разделит отрезок AC. Применить теорему Фалеса к углу EAC.
У к а з а н и е. Найти искомое отношение с помощью теоремы Фалеса, применённой к углу ACB.



Р е ш е н и е. Пусть $AF = 6y$, $FC = 5y$. Проведём через точку E прямую, параллельную прямой BF, до пересечения с прямой AC в точке K. Так как O делит отрезок AE в отношении $3 : 1$, то по теореме Фалеса, применённой к углу EAC, точка F делит отрезок AK также в отношении $3 : 1$; следовательно, $FK = AF/3 = 2y$.

Теперь применим теорему Фалеса к углу ACB:

$$\frac{BE}{EC} = \frac{FK}{KC} = \frac{2y}{5y - 2y} = \frac{2}{3}.$$

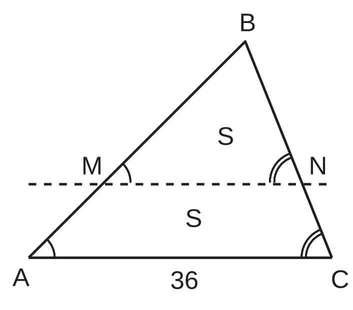
Ответ. $2:3$.

Задача 3.

Длина основания треугольника равна 36. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найти длину отрезка этой прямой, заключённого между сторонами треугольника.

Идея. Воспользоваться подобием треугольников; квадрат коэффициента подобия найти из отношения площадей.
Указание. Обосновать подобие треугольников.
Указание. Из отношения площадей треугольников найти квадрат коэффициента подобия.
Указание. Искомую величину найти из отношения подобия.

Решение. Пусть MN – отрезок прямой, заключённый между сторонами треугольника; $S_{\Delta MBN} = S_{AMNC} = S \implies S_{\Delta ABC} = 2S$.



$$\Delta ABC \sim \Delta MBN \quad \text{(по двум углам);}$$

квадрат коэффициента подобия равен отношению площадей (согласно замечания 2 из теоретического материала):

$$k^2 = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBN}} = \frac{2S}{S} = 2 \implies k = \sqrt{2};$$

$$\frac{AC}{MN} = k \implies MN = \frac{36}{\sqrt{2}} = 18\sqrt{2}.$$

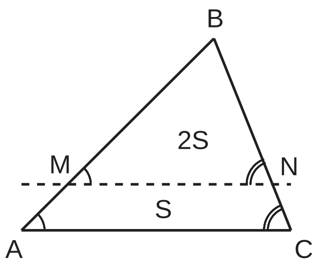
Ответ. $18\sqrt{2}$.

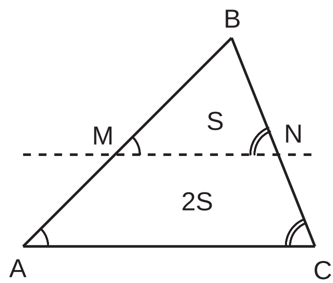
Задача 4.

Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как 2:1. В каком отношении, считая от вершины, она делит боковые стороны?

Идея. Использовать подобие треугольников; квадрат коэффициента подобия найти из отношения площадей.
Указание. Обосновать подобие треугольников.
Указание. Из отношения площадей треугольников найти квадрат коэффициента подобия.

Р е ш е н и е. Пусть прямая, параллельная основанию, пересекает боковые стороны треугольника в точках M и N. Рассмотрим возможные варианты.





1) $S_{\Delta MBN} = 2S,\ S_{AMNC} = S \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta ABC} = 3S$.

$$\Delta ABC \sim \Delta MBN \quad \text{(по двум углам);}$$

$$k^2 = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBN}} = \frac{3S}{2S} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad k = \sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$\frac{AB}{MB} = \frac{AM + MB}{MB} = k \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{AM}{MB} = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{MB}{AM} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{6} + 2.$$

2) Возможен и второй вариант: $S_{\Delta MBN} = S,\ S_{AMNC} = 2S \Longrightarrow S_{\Delta ABC} = 3S$. Тогда $k^2 = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBN}} = \dfrac{3}{1} \quad \Longrightarrow \quad k = \sqrt{3}; \quad \dfrac{AM}{MB} = \sqrt{3} - 1;$

$$\frac{MB}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

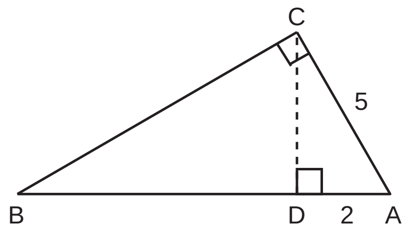
О т в е т. $\dfrac{\sqrt{6} + 2}{1}$ или $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

Задача 5.

В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CD. Вычислите гипотенузу AB, если $AC = 5$, $AD = 2$.

И д е я. Воспользоваться подобием прямоугольных треугольников.
У к а з а н и е. Найти пару подобных прямоугольных треугольников.
У к а з а н и е. Искомую величину найти из отношения подобия.

Решение. Треугольники ABC и ADC подобны по двум углам. Следовательно,



$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \iff \frac{5}{2} = \frac{AB}{5} \iff AB = \frac{25}{2}.$$

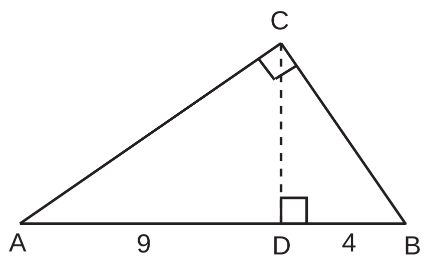
Ответ. $\dfrac{25}{2}$.

Задача 6.

Высота CD прямоугольного треугольника ABC делит гипотенузу AB на отрезки $AD = 9$ и $DB = 4$. Найдите CD.

Идея. Воспользоваться подобием прямоугольных треугольников.
Указание. Найти пару подобных прямоугольных треугольников.
Указание. Искомую величину найти из отношения подобия.

Решение. Треугольники CDB и ADC подобны по двум углам. Следовательно,



$$\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD} \iff \frac{CD}{9} = \frac{4}{CD} \iff CD^2 = 9 \cdot 4 \iff CD = 6.$$

Ответ. 6.

Задача 7.

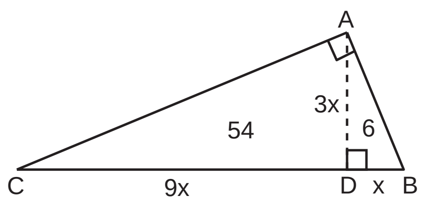
Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника, площади которых равны соответственно 6 и 54. Найдите гипотенузу треугольника.

Идея. Воспользоваться подобием прямоугольных треугольников.
Указание. Найти пару подобных прямоугольных треугольников.
Указание. По отношению площадей определить коэффициент подобия.
Указание. Зная отношение катетов и площадь одного из прямоугольных треугольников, найти его катеты.

Решение. Треугольники CAD и ABD подобны по двум углам. Так как

$$\frac{S_{\Delta CAD}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{54}{6} = 9,$$

то коэффициент подобия равен $k = \sqrt{9} = 3$.



Пусть $BD = x$, тогда $AD = k \cdot BD = 3x$ и $CD = k \cdot AD = 3 \cdot 3x = 9x$.

По площади ΔABD найдём значение переменной x:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AD \quad \Longleftrightarrow \quad 6 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 3x \quad \Longrightarrow \quad x = 2; \quad BC = 20.$$

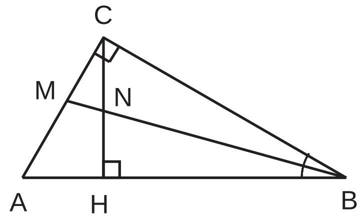
Ответ. 20.

Задача 8.

Высота прямоугольного треугольника, проведённая к его гипотенузе, делит биссектрису одного из острых углов на отрезки, отношение длин которых равно $3 + 2\sqrt{3}$, считая от вершины. Найти величины острых углов треугольника.

Идея. Использовать подобие прямоугольных треугольников.
Указание. Выписать отношения подобия для прямоугольных треугольников.
Указание. Использовать соотношения между сторонами и тригонометрическими функциями углов прямоугольного треугольника.

Решение. Путь BM – биссектриса острого угла B прямоугольного треугольника ABC, CH – высота, проведённая к гипотенузе, N – точка пересечения биссектрисы BM и высоты CH.



По условию $\dfrac{BN}{NM} = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{1}$. Из прямоугольного ΔHBC $\cos\angle HBC = \dfrac{BH}{BC}$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники NHB и MCB. Они подобны (по двум углам), так как $\angle HBN = \angle CBM$.

Значит, $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BN}{BM}$. Получаем

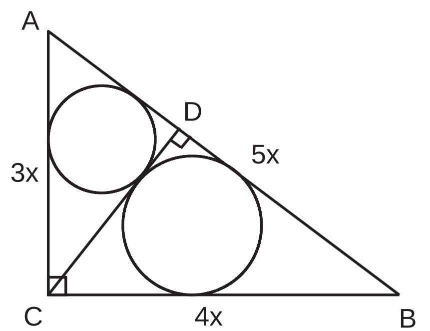
$$\cos\angle HBC = \frac{BH}{BC} = \frac{BN}{BM} = \frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \angle HBC = 30^\circ, \quad \angle BAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

О т в е т. $30^\circ; 60^\circ$.

Задача 9.

В прямоугольном треугольнике ABC угол C – прямой, CD – высота, опущенная на гипотенузу. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 3 и 4. Найти гипотенузу AB треугольника ABC.



И д е я. Использовать подобие прямоугольных треугольников.

У к а з а н и е. $\Delta ADC \sim \Delta CDB$, $k = \dfrac{3}{4}$.

У к а з а н и е. Используя отношения подобия и теорему Пифагора, выразить длины сторон треугольников ADC, CDB и ACB через новую переменную.

У к а з а н и е. Воспользоваться разными формулами площади прямоугольного треугольника.

Р е ш е н и е. Прежде всего отметим, что $\Delta ADC \sim \Delta CDB$ (по двум углам) с коэффициентом подобия, равным отношению радиусов вписанных окружностей (см. теоретический материал, замечание 1), $k = \dfrac{3}{4}$. Обозначим $AC = 3x$, $BC = 4x$. По теореме Пифагора $AB = 5x$. Из подобия ΔACB и ΔCDB (по двум углам) следует:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} \quad \Longleftrightarrow \quad CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{12}{5}x.$$

По теореме Пифагора для ΔADC

$$AD^2 = 9x^2 - \frac{144}{25}x^2 = \frac{81}{25}x^2 \quad \Longrightarrow \quad AD = \frac{9}{5}x.$$

Найдём x. Для этого выразим площадь ΔADC двумя способами: через полупериметр и радиус вписанной окружности и как полупроизведение катетов:

$$S_{\Delta ADC} = \frac{AD + DC + AC}{2} \cdot 3 = \frac{AD \cdot DC}{2};$$

$$\left(\frac{9}{5}x + \frac{12}{5}x + 3x\right) \cdot 3 = \frac{9}{5}x \cdot \frac{12}{5}x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5 \quad \Longrightarrow \quad AB = 25.$$

О т в е т. 25.

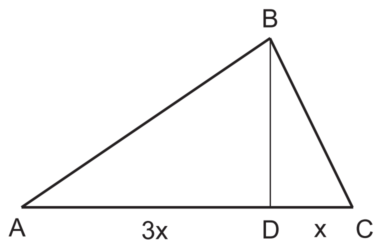
*Задача 10.**

Треугольник ABC не имеет тупых углов. На стороне AC этого треугольника взята точка D так, что $AD = \frac{3}{4}AC$. Найти угол BAC, если известно, что прямая BD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.

И д е я. Показать, что оба подобных треугольника – прямоугольные.

У к а з а н и е. Рассмотреть соответствующие смежные углы: в сумме они дают $180°$; показать, что подобные треугольники могут быть только прямоугольными.

У к а з а н и е. Тангенс искомого угла найти как отношение соответствующих катетов, воспользовавшись формулой длины высоты, проведённой к гипотенузе.



Р е ш е н и е. Из условия следует, что углы $\angle BAD$, $\angle ABD$, $\angle CBD$, $\angle BCD$ не являются тупыми.

Рассмотрим ΔABD. Если у него $\angle ADB$ тупой, то у ΔCBD угол $\angle BDC$ острый, и ΔCBD – не тупоугольный. Но ΔABD подобен ΔCBD; значит, у ΔABD нет тупых углов. Получили противоречие.

Если же $\angle ADB$ острый, то $\angle BDC$ тупой. Значит, ΔCBD тупоугольный, а ΔABD не тупоугольный; как и в предыдущем случае, они не могут быть подобны. Противоречие.

Следовательно, $\angle ADB$ прямой и BD – высота.

По условию треугольники ΔABD и ΔCBD подобны; значит, равны их соответствующие острые углы. Если $\angle BAD = \angle BCD$, то ΔABC равнобедренный и $AD = DC$, что противоречит условию. Следовательно, $\angle BAD = \angle DBC$ и

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3x}{BD} = \frac{BD}{x}.$$

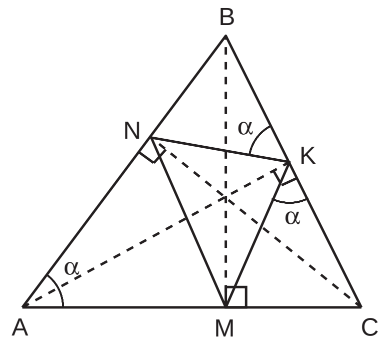
Значит, $BD = \sqrt{3}x$ и $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{\sqrt{3}x}{3x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \angle BAC = 30°.$

О т в е т. $30°$.

Задача 11.

Доказать, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами треугольника, образованного отрезками, соединяющими основания высот.

Идея. Воспользоваться теоремой о высотах (пример 2).
Указание. По теореме о высотах найти подобные треугольники; отметить равные углы; использовать определение биссектрисы.



Решение. Обозначим через AK, BM и CN высоты остроугольного треугольника ABC. Пусть далее $\angle BAC = \alpha$. По теореме о высотах (пример 2)

$$\Delta BAC \sim \Delta BKN \quad \Longrightarrow \quad \angle BKN = \alpha;$$

$$\Delta CAB \sim \Delta CKM \quad \Longrightarrow \quad \angle CKM = \alpha.$$

Значит, $\angle AKN = 90^\circ - \alpha = \angle AKM$. Другими словами, AK – биссектриса угла $\angle NKM$.

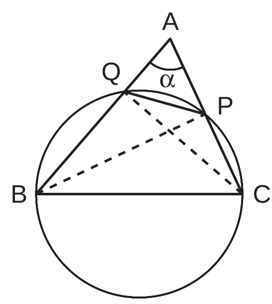
Аналогично доказывается, что прямые BM и CN являются биссектрисами $\angle NMK$ и $\angle MNK$ соответственно.

Утверждение доказано.

Задача 12.

В остроугольном треугольнике ABC угол BAC равен α. На стороне BC, как на диаметре, построена окружность. Эта окружность пересекает сторону AC в точке P, а сторону AB в точке Q. Найти отношение площади треугольника APQ к площади треугольника ABC.

Идея. Использовать теорему о высотах (пример 2).
Указание. Доказать, что BP и CQ являются высотами ΔABC.
Указание. Воспользоваться подобием треугольников ABC и APQ.



Решение. Поскольку по условию BC является диаметром окружности, а точки P и Q лежат на окружности и не совпадают с точками B и C, треугольники BQC и BPC – прямоугольные. Значит, BP и CQ – высоты треугольника ABC.

По теореме о высотах (пример 2)

$$\Delta APQ \sim \Delta ABC; \quad k = \cos\alpha.$$

Согласно замечанию 2 из теоретического материала отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия:

$$\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = \cos^2 \alpha.$$

О т в е т. $\cos^2 \alpha$.

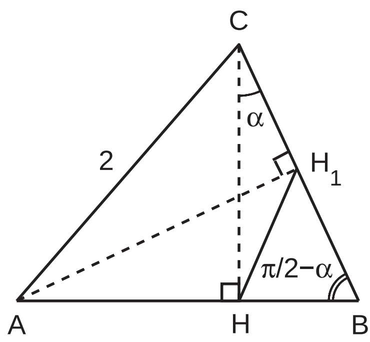
Задача 13.

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CH и AH_1. Известно, что $AC = 2$, площадь круга, описанного около треугольника HBH_1, равна $\dfrac{\pi}{3}$. Найти угол между высотой CH и стороной BC.

И д е я. Использовать теорему о высотах (пример 2).
У к а з а н и е. Воспользоваться подобием треугольников BAC и BH_1H и теоремой синусов.

Р е ш е н и е. Обозначим искомый угол через α, тогда $\angle HBC = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$. По теореме о высотах (пример 2)

$$\Delta BH_1H \sim \Delta BAC; \quad k = \cos\angle ABC = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$



Значит, $HH_1 = AC \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha$. По теореме синусов для ΔBH_1H

$$\frac{HH_1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = 2R \quad \Longrightarrow \quad \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2R \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = R.$$

Радиус описанной окружности можно найти по площади круга:

$$S = \pi R^2 \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Получаем: $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

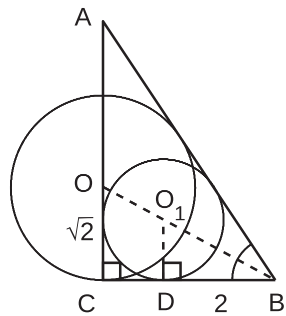
О т в е т. $\dfrac{\pi}{6}$.

Задача 14.

В прямоугольном треугольнике ABC (угол C прямой) длина катета BC равна 2 см. В угол ABC вписана окружность радиуса $\sqrt{2}$ см так, что она касается прямой BC в точке C. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Идея. Центры окружностей и вершина B лежат на одной прямой.
Указание. Центры окружностей, вписанных в угол, лежат на его биссектрисе.
Указание. Найти пару подобных прямоугольных треугольников.

Решение. Пусть O – центр окружности радиуса $\sqrt{2}$, вписанной в угол ABC и касающейся прямой BC в точке C, O_1 – центр окружности радиуса r, вписанной в треугольник ABC. Заметим, что центр любой окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому точки B, O и O_1 принадлежат одной прямой.



Проведём радиус O_1D в точку касания окружности, вписанной в ΔABC, и катета BC.

$\Delta BOC \sim \Delta BO_1D$ (по двум углам) $\Longrightarrow \dfrac{BC}{OC} = \dfrac{BD}{O_1D}$;

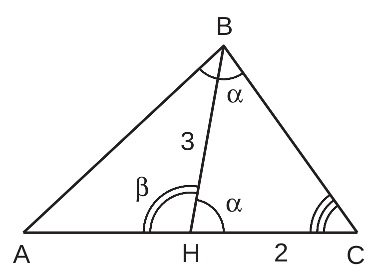
$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2-r}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad r(2+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = 2\sqrt{2}-2.$$

Ответ. $2\sqrt{2}-2$.

*Задача 15.**

В треугольнике ABC на стороне AC взята точка H так, что длина отрезка BH равна 3, длина отрезка HC равна 2, а сумма углов ABC и AHB равна π. Найти периметр треугольника ABH, если косинус угла ACB равен $\dfrac{11}{16}$.

Идея. Воспользоваться подобием треугольников.
Указание. По теореме косинусов найти длину стороны BC.
Указание. Треугольники ABC и BHC подобны.



Решение. Пусть $\angle ABC = \alpha$, $\angle AHB = \beta$. По условию $\alpha + \beta = \pi$.

Заметим, что $\angle BHC = \pi - \beta = \alpha$. Значит, треугольники ABC и BHC подобны (по двум углам) с коэффициентом подобия $k = \dfrac{BC}{HC}$. По теореме косинусов для ΔBHC найдём длину третьей стороны BC:

$$BH^2 = HC^2 + BC^2 - 2 \cdot HC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB;$$

$$9 = 4 + BC^2 - \frac{11}{4}BC \iff 4BC^2 - 11BC - 20 = 0 \implies BC = 4 \implies k = 2.$$

Поскольку в ΔBHC длины всех сторон известны, можем вычислить и длины сторон ΔABC и ΔABH:

$$AB = k \cdot BH = 6; \quad AC = k \cdot BC = 8; \quad AH = AC - HC = 6.$$

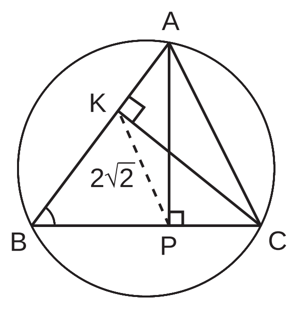
$$P_{\Delta ABH} = AB + BH + AH = 6 + 6 + 3 = 15.$$

Ответ. 15.

*Задача 16.**

В остроугольном треугольнике ABC опущены высоты AP и CK. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPK равна 2, а длина отрезка PK равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Идея. Воспользоваться теоремой о высотах (пример 2).
Указание. По теореме о высотах $\Delta PBK \sim \Delta ABC$.
Указание. Квадрат коэффициента подобия равен отношению площадей подобных треугольников.



Решение. По теореме о высотах (пример 2 из теоретического материала)

$$\Delta PBK \sim \Delta ABC, \quad k = \cos\angle B.$$

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия (замечание 2), поэтому

$$k^2 = \frac{S_{\Delta PBK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \implies k = \frac{1}{3}.$$

Итак, $\cos^2\angle B = \dfrac{1}{9}$; $\sin^2\angle B = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9} \implies \sin\angle B = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Далее по теореме синусов найдём радиус окружности, описанной около ΔPBK:

$$R_1 = \frac{PK}{2\sin\angle B} = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{2}.$$

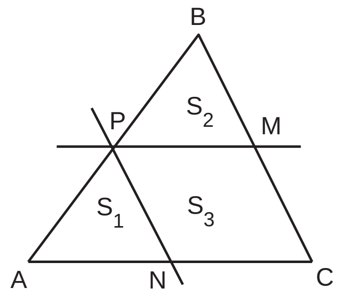
Поскольку для подобных треугольников отношение длин радиусов описанных окружностей равно коэффициенту подобия (замечание 1), радиус окружности, описанной около ΔABC, определяется по формуле:

$$R_2 = \frac{R_1}{k} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}.$$

Ответ. 4,5.

*Задача 17.**

Через точку, взятую на стороне треугольника, проведены две прямые, параллельные двум другим сторонам. Эти прямые разбивают данный треугольник на три части – один параллелограмм и два треугольника; площади треугольников равны S_1 и S_2. Найти площадь параллелограмма.



И д е я. Использовать подобие треугольников.
У к а з а н и е. Найти две пары подобных треугольников; квадрат коэффициента подобия равен отношению площадей.
У к а з а н и е. Выразить площадь параллелограмма через площадь исходного треугольника и коэффициенты подобия.

Р е ш е н и е. Пусть на стороне AB треугольника ABC взята точка P. Проведём через неё прямые, параллельные двум другим сторонам: $PM||AC$, $PN||BC$. Обозначим

$$S_{\Delta APN} = S_1, \quad S_{\Delta PBM} = S_2, \quad S_{NPMC} = S_3.$$

Поскольку $\angle BPM = \angle BAC$ как соответственные при параллельных прямых AC и PM и секущей AB,

$$\Delta PBM \sim \Delta ABC; \quad k_1 = \sqrt{\frac{S_2}{S_1+S_2+S_3}}; \quad PM = k_1 \cdot AC.$$

С другой стороны,

$$\Delta APN \sim \Delta ABC; \quad k_2 = \sqrt{\frac{S_1}{S_1+S_2+S_3}}; \quad PN = k_2 \cdot BC.$$

Заметим, что четырёхугольник $NPMC$ удовлетворяет определению параллелограмма (противоположные стороны попарно параллельны). Выразим его площадь:

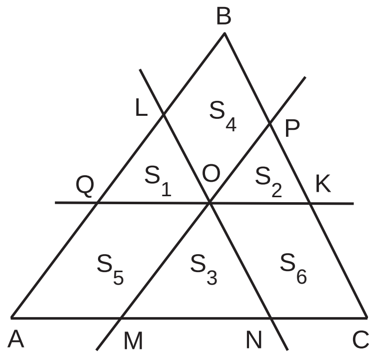
$$S_{NPMC} = CM \cdot CN \cdot \sin\angle MCN = PM \cdot PN \cdot \sin\angle MCN =$$
$$= k_1 \cdot AC \cdot k_2 \cdot BC \cdot \sin\angle MCN = 2S_{\Delta ABC} \cdot k_1 \cdot k_2 =$$
$$= 2(S_1+S_2+S_3)\sqrt{\frac{S_2}{S_1+S_2+S_3}} \cdot \sqrt{\frac{S_1}{S_1+S_2+S_3}} = 2\sqrt{S_1S_2}.$$

О т в е т. $2\sqrt{S_1S_2}$.

*Задача 18.**

Через точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых – треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найти площадь треугольника.

И д е я. Использовать подобие треугольников.
У к а з а н и е. Воспользоваться результатами предыдущей задачи.



Решение. Условию задачи удовлетворяет точка, расположенная внутри треугольника, не лежащая на его сторонах и не являющаяся вершиной. Обозначим её через O. Проведём через неё прямые, параллельные сторонам треугольника: $OP||AB$, $ON||BC$, $OK||AC$. Другие точки пересечения данных прямых со сторонами треугольника обозначим соответственно через M, L и Q. Воспользуемся результатами предыдущей задачи. Рассмотрим ΔALN; $S_5 = 2\sqrt{S_1S_3}$. Для ΔQBK $S_4 = 2\sqrt{S_1S_2}$. Для ΔPMC $S_6 = 2\sqrt{S_2S_3}$.

$$S_{\Delta ABC} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 =$$

$$= S_1 + S_2 + S_3 + 2\sqrt{S_1S_2} + 2\sqrt{S_1S_3} + 2\sqrt{S_2S_3} = \left(\sqrt{S}_1 + \sqrt{S}_2 + \sqrt{S}_3\right)^2.$$

Ответ. $(\sqrt{S}_1 + \sqrt{S}_2 + \sqrt{S}_3)^2$.

1.5. Площади

Задача 1.

Найдите диаметр окружности, вписанной в треугольник со сторонами 20, 20, 24.

Идея. Использовать разные формулы площади треугольника – через радиус вписанной окружности и формулу Герона.
Указание. Вычислить площадь треугольника по формуле Герона.
Указание. Найти радиус вписанной окружности из формулы площади треугольника.

Решение. Вычислим площадь треугольника по формуле Герона:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{где} \quad p = \frac{a+b+c}{2} \text{– полупериметр.}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+20+24}{2} = 32; \quad S_{\Delta ABC} = \sqrt{32 \cdot 12^2 \cdot 8} = 192.$$

По площади найдём радиус и диаметр вписанной окружности:

$$r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{192}{32} = 6; \quad d = 2r = 12.$$

Ответ. 12.

Задача 2.

Найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 4, 13, 15.

Идея. Использовать разные формулы площади треугольника – через радиус описанной окружности и формулу Герона.

Указание. Вычислить площадь треугольника по формуле Герона.
Указание. Радиус описанной окружности определить по площади треугольника.

Решение. Найдём площадь треугольника по формуле Герона:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{где p – полупериметр.}$$

$$p = \frac{4+13+15}{2} = 16; \quad S_{\Delta ABC} = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24.$$

По площади вычислим радиус описанной окружности:

$$R = \frac{abc}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 24} = 8,125.$$

Ответ. $8,125$.

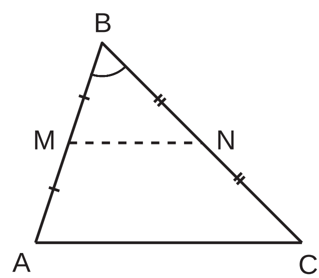
Задача 3.

Найти отношение площадей треугольника и четырёхугольника, на которые делится треугольник своей средней линией.

Идея. Использовать подобие.
Указание. Используя определение средней линии, показать, что она отсекает треугольник, подобный данному.

Решение. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC, параллельная основанию AC. Тогда из определения средней линии следует, что $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ с коэффициентом подобия $k = 2$. Обозначим $S_{\Delta MBN} = S$. Тогда $S_{\Delta ABC} = 4S$, поэтому $S_{AMNC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta MBN} = 3S$. Таким образом, получаем

$$\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{AMNC}} = \frac{1}{3}.$$

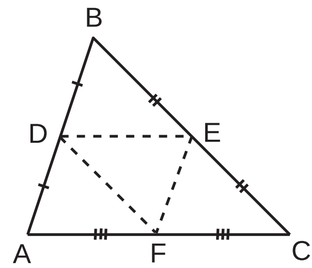


Ответ. $1:3$.

Задача 4.

Стороны треугольника ABC разделены пополам точками D, E и F соответственно. Во сколько раз площадь треугольника DEF меньше площади треугольника ABC?

Идея. Использовать подобие треугольников ABC и DEF.
Указание. Обосновать подобие ΔABC и ΔDEF; определить значение коэффициента подобия.
Указание. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.



Р е ш е н и е. Пусть DE, EF и DF – средние линии треугольника ABC, параллельные сторонам AC, AB и BC соответственно. Заметим, что $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ с коэффициентом подобия $k = 2$. Следовательно,

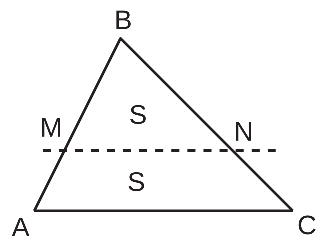
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEF}} = k^2 = 4.$$

О т в е т. В 4 раза.

Задача 5.

Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на две равновеликие части. В каком отношении эта прямая делит боковые стороны треугольника?

И д е я. Воспользоваться подобием треугольников.
У к а з а н и е. Найти пару подобных треугольников; по отношению площадей вычислить квадрат коэффициента подобия.
У к а з а н и е. Для определения искомой величины воспользоваться отношениями подобия.



Р е ш е н и е. Построим прямую MN, которая параллельна основанию AC треугольника ABC и делит треугольник на две равновеликие части площади S.

Заметим, что углы $\angle BAC$ и $\angle BMN$ равны как соответственные при параллельных прямых AC и MN и секущей AB. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику MBN (по двум углам); квадрат коэффициента подобия равен отношению площадей:

$$k^2 = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBN}} = \frac{2S}{S} = 2 \quad \Longrightarrow \quad k = \sqrt{2}.$$

Значит,

$$\frac{AB}{MB} = \frac{AM + MB}{MB} = \frac{AM}{MB} + 1 = \sqrt{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{AM}{MB} = \sqrt{2} - 1;$$

$$\frac{MB}{AM} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

О т в е т. $(\sqrt{2} + 1) : 1$, считая от вершины, противолежащей основанию.

Задача 6.

Стороны первого треугольника равны 6, 9 и 12. Произведение длин сторон подобного ему треугольника равно 24. Найти отношение площади первого треугольника к площади второго.

Идея. Воспользоваться подобием треугольников.
Указание. По произведению длин сторон найти куб коэффициента подобия.
Указание. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Решение. По условию $\Delta ABC \sim \Delta MNK$. Пусть коэффициент подобия равен k. Тогда $AB = k \cdot MN$, $BC = k \cdot NK$, $AC = k \cdot MK$. Получаем:

$$AB \cdot BC \cdot AC = k^3 \cdot MN \cdot NK \cdot MK \quad \Longleftrightarrow \quad 9 \cdot 6 \cdot 12 = k^3 \cdot 24 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad k^3 = 27 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 3.$$

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия (см. теоретический материал):

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNK}} = 9.$$

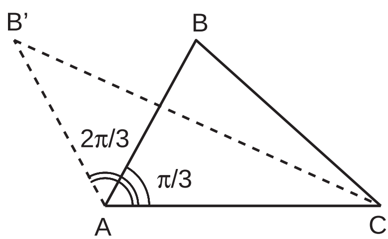
Ответ. $9:1$.

Задача 7.

Дан треугольник ABC, величина угла между AB и AC равна $\pi/3$. Во сколько раз изменится площадь треугольника, если этот угол увеличится в два раза (длины сторон, образующих данный угол, фиксированы)?

Идея. Площадь треугольника равна половине произведения длин сторон на синус угла между ними.
Указание. Выразить площади двух треугольников как полупроизведение сторон на синус угла между ними; сопоставить результаты.

Решение. Рассмотрим треугольник $AB'C$ такой, что $AB' = AB$, $\angle B'AC = \dfrac{2\pi}{3}$.



Его площадь можно вычислить по формуле:

$$S_{\Delta AB'C} = \frac{1}{2} AB' \cdot AC \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\frac{\pi}{3} = S_{\Delta ABC}.$$

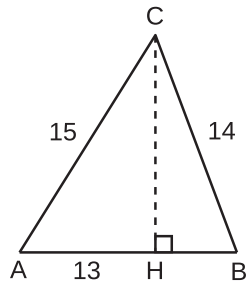
Использовано равенство: $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ. Площадь не изменится.

Задача 8.

Стороны треугольника равны 13, 14 и 15. Найдите большую высоту треугольника. Ответ округлите до целых.

Идея. Большая высота треугольника всегда опущена на меньшую сторону.
Указание. Вычислить площадь треугольника по формуле Герона.
Указание. Большая высота проведена к меньшей стороне; найти большую высоту по площади и меньшему основанию.



Решение. Вычислим площадь треугольника ABC по формуле Герона:

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21;$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84.$$

С другой стороны, площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту. Заметим, что большая высота треугольника будет проведена к меньшей из сторон, то есть к стороне AB:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH \quad \Longrightarrow \quad CH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 84}{13} > 12,9.$$

Ближайшее целое число 13.

Ответ. 13.

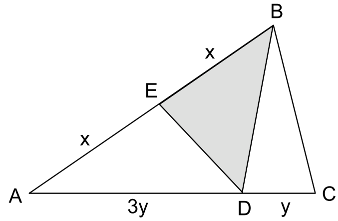
Задача 9.

Площадь треугольника ABC равна 8. Точка D лежит на стороне AC, а точка E – на стороне AB. Известно, что $AE = BE$, $AD = 3DC$. Найти площадь треугольника BDE.

Идея. Выразить площадь ΔABD через площадь ΔABC, а затем площадь ΔBDE через площадь ΔABD.

Указание. Показать, что $S_{\Delta ABD} = \dfrac{3}{4} S_{\Delta ABC}$.

Указание. Выразить площадь ΔBDE через площадь ΔABD.



Решение. Используя известное значение площади ΔABC, вычислим последовательно площади треугольников

$$S_{\Delta ABC} \longrightarrow S_{\Delta ABD} \longrightarrow S_{\Delta BDE}.$$

Пусть $AE = BE = x$, $DC = y$, $AD = 3y$. Так как $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{3}{4}$, то получаем $S_{\Delta ABD} = \dfrac{3}{4} S_{\Delta ABC} = 6$. Так как $\dfrac{BE}{AB} = \dfrac{1}{2}$, то $S_{\Delta BDE} = \dfrac{1}{2} S_{\Delta ABD} = 3$.

О т в е т. 3.

Задача 10.

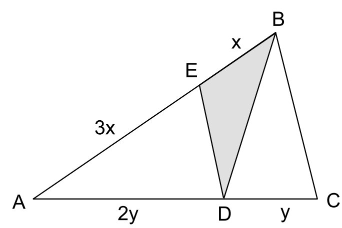
В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, а точка E – на стороне AB. Известно, что $AE = 3BE$, $AD = 2DC$. Найти отношение площадей треугольников BDE и ABC.

И д е я. Выразить площадь ΔABD через площадь ΔABC, а затем площадь ΔBDE через площадь ΔABD.

У к а з а н и е. Показать, что $S_{\Delta ABD} = \dfrac{2}{3} S_{\Delta ABC}$.

У к а з а н и е. Выразить площадь ΔBDE через площадь ΔABD.

Р е ш е н и е. Выразим через площадь треугольника ABC последовательно площади треугольников $S_{\Delta ABC} \longrightarrow S_{\Delta ABD} \longrightarrow S_{BDE}$.



Пусть $AE = 3x$, $BE = x$, $DC = y$, $AD = 2y$. Так как $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{2}{3}$, то $S_{\Delta ABD} = \dfrac{2}{3} S_{\Delta ABC}$.

Так как $\dfrac{BE}{AB} = \dfrac{1}{4}$, то

$$S_{\Delta BDE} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}.$$

О т в е т. $1:6$.

Задача 11.

Биссектрисы BE и AD треугольника ABC пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BQD равна 1 и $2AC = 3AB$, $3BC = 4AB$.

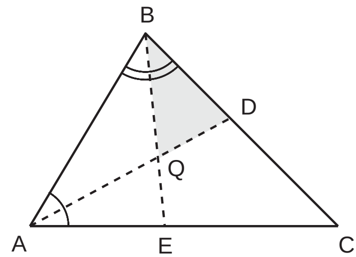
И д е я. Выразить площадь ΔABD через площадь ΔBQD, а затем площадь ΔABC через площадь ΔABD.

У к а з а н и е. Воспользовавшись свойством биссектрисы, выразить длины отрезков BD и DC через длину отрезка AB.

У к а з а н и е. Выразить площадь ΔABD через площадь ΔBQD.

У к а з а н и е. Используя свойство биссектрисы, выразить площадь ΔABC через площадь ΔABD.

Р е ш е н и е. Пусть $AB = x$, тогда $AC = \dfrac{3}{2}x$, $BC = \dfrac{4}{3}x$. Так как AD – биссектриса угла $\angle BAC$, то по свойству биссектрисы



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad BD = \frac{8}{15}x, \quad DC = \frac{4}{5}x.$$

Пусть $AQ = y$, тогда $DQ = \dfrac{8}{15}y$, поскольку BQ является биссектрисой в треугольнике ABD со сторонами x и $\dfrac{8}{15}x$.

Сначала найдём площадь треугольника ABD:

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta BQD}} = \frac{AD}{DQ} = \frac{y + \frac{8}{15}y}{\frac{8}{15}y} = \frac{23}{8} \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta ABD} = \frac{23}{8}.$$

Теперь найдём площадь треугольника ABC:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{BC}{BD} = \frac{\frac{4}{3}x}{\frac{8}{15}x} = \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta ABC} = \frac{5}{2} \cdot S_{\Delta ABD} = \frac{115}{16}.$$

О т в е т. $\dfrac{115}{16}$.

Задача 12.

В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, а угол ABC равен $120°$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.

И д е я. Ввести новую переменную $x = 0,5 \cdot AC$ и выразить через неё площади круга и треугольника.

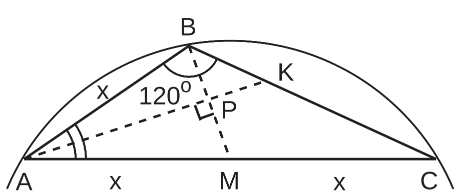
У к а з а н и е. Ввести новую переменную x, равную половине длины стороны AC.

У к а з а н и е. Выразить радиус описанной окружности через новую переменную по теореме синусов.

У к а з а н и е. Доказать, что $AB = x$.

У к а з а н и е. Выразить длину стороны BC через переменную x по теореме косинусов.

Р е ш е н и е. Пусть биссектриса AK и медиана BM пересекаются в точке P. Заметим, что прямоугольные треугольники ABP и AMP равны (по катету и прилежащему острому углу). Значит, $AB = AM$. Обозначим $AB = AM = MC = x$.



Площадь круга вычисляется по формуле $S_{\text{кр}} = \pi R^2$, где R – радиус. Воспользуемся теоремой синусов и найдём зависимость радиуса описанной окружности от переменной x:

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{2x}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

Значит, $S_{\text{кр}} = \dfrac{4\pi x^2}{3}$. Площадь треугольника ABC будем определять по формуле

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB\cdot BC\cdot\sin 120^\circ}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{4}BC.$$

Применим к треугольнику ABC теорему косинусов и выразим длину стороны BC через переменную x:

$$4x^2 = x^2+BC^2+2x\cdot BC\cdot\frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad BC^2+x\cdot BC-3x^2=0 \quad\Longrightarrow\quad BC = x\frac{\sqrt{13}-1}{2}.$$

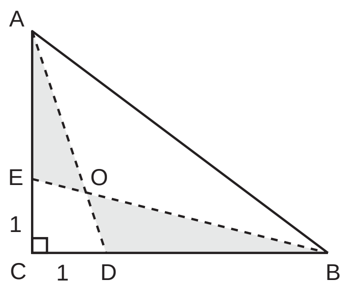
Значит, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{13}-1\right)x^2}{8}$. Отношение площадей:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\text{кр}}} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{13}-1\right)x^2}{8}\cdot\frac{3}{4\pi x^2} = \frac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{13}-1\right)}{32\pi}.$$

О т в е т. $\dfrac{3\sqrt{3}\left(\sqrt{13}-1\right)}{32\pi}$.

*Задача 13.**

В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $CD = CE = 1$. Точка O есть точка пересечения отрезков AD и BE. Площадь треугольника AOE меньше площади треугольника BOD на $1/2$. Кроме того, известно, что $BE = \sqrt{17}$. Найти площадь треугольника ABC.



И д е я. Найти длины катетов ΔABC, для чего использовать теорему Пифагора и информацию о площадях ΔAOE и ΔBOD.
У к а з а н и е. По теореме Пифагора найти длину катета BC.
У к а з а н и е. Используя условие задачи, вычислить площадь ΔACD; найти длину второго катета AC.

Р е ш е н и е. Будем искать площадь прямоугольного ΔABC по формуле

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC.$$

Длину катета BC вычислим по теореме Пифагора из ΔBEC:

$$BC = \sqrt{BE^2 - EC^2} = \sqrt{17-1} = 4 \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CE = 2.$$

Для определения длины катета AC воспользуемся условием:

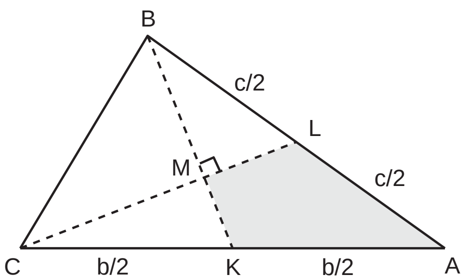
$$S_{\Delta AOE} = S_{\Delta BOD} - \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta ACD} = S_{\Delta BCE} - \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta ACD} = 1,5\,.$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot AC \quad \Longrightarrow \quad AC = 3 \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6.$$

Ответ. 6.

*Задача 14.**

Медианы BK и CL треугольника ABC пересекаются в точке M под прямым углом, $AC = b$, $AB = c$. Найти площадь четырёхугольника $AKML$.



Идея. Площадь четырёхугольника $AKML$ равна площади треугольника BMC.

Указание. Показать, что площадь четырёхугольника $AKML$ равна площади прямоугольного треугольника BMC.

Указание. Воспользовавшись теоремой о пересечении медиан и теоремой Пифагора, выразить длины медиан через b и c.

Решение. Обозначим $S_{\Delta ABC} = S$.
Выразим через S площади четырёхугольника $AKML$ и треугольника BMC:

$$S_{AKML} = S_{\Delta ABK} - S_{\Delta BML} = \frac{S}{2} - S_{\Delta BML};$$

$$S_{\Delta BMC} = S_{\Delta BCL} - S_{\Delta BML} = \frac{S}{2} - S_{\Delta BML};$$

значит, $S_{AKML} = S_{\Delta BMC}$, а площадь треугольника BMC искать проще.

Обозначим $MK = x$, $ML = y$. По теореме о пересечении медиан $BM = 2x$, $CM = 2y$. Запишем теорему Пифагора для ΔBML и ΔCMK:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = \dfrac{c^2}{4}, \\ x^2 + 4y^2 = \dfrac{b^2}{4}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{4c^2 - b^2}{60},\ y^2 = \frac{4b^2 - c^2}{60};$$

$$S_{AKML} = S_{\Delta MCB} = \frac{2x \cdot 2y}{2} = \frac{\sqrt{(4c^2 - b^2)(4b^2 - c^2)}}{30}.$$

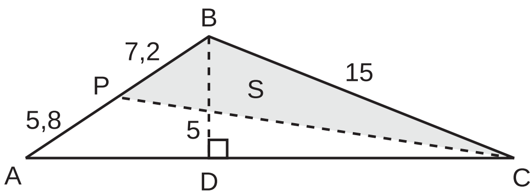
Ответ. $\dfrac{\sqrt{(4c^2 - b^2)(4b^2 - c^2)}}{30}$.

Задача 15.[*]

В треугольнике ABC длина стороны BC равна 15, а длина высоты BD равна 5. На стороне AB взята точка P так, что длины отрезков AP и PB равны соответственно 5,8 и 7,2. Найти площадь S треугольника BPC, если известно, что $S > 3$.

Идея. Рассмотреть два чертежа с острым или тупым углом A; использовать леммы о площадях.
Указание. По теореме Пифагора вычислить длину стороны AC; найти площадь ΔABC.
Указание. Используя лемму о площадях треугольников с общей вершиной и основаниями, лежащими на одной прямой, найти площадь ΔBPC; сравнить полученное значение с числом 3.

Решение. 1) Предположим, что в треугольнике ABC угол при вершине A острый.



Из прямоугольных треугольников ABD и BDC находим

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12;$$

$$DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 5^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

Значит,

$$AC = AD + DC = 12 + 10\sqrt{2};$$

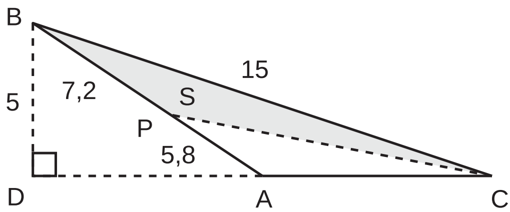
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (12 + 10\sqrt{2}) \cdot 5 = 5(6 + 5\sqrt{2}).$$

Заметим, что треугольники PBC и ABC имеют общую вершину C и основания, лежащие на одной прямой, поэтому

$$\frac{S_{\Delta PBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{PB}{AB} = \frac{7,2}{13} = \frac{36}{65};$$

$$S_{\Delta PBC} = \frac{36}{65} S_{\Delta ABC} = \frac{36(6 + 5\sqrt{2})}{13} > 3.$$

2) Если в треугольнике ABC угол при вершине A тупой, то



$$AC = DC - AD = 10\sqrt{2} - 12;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot (10\sqrt{2} - 12) \cdot 5 = 5(5\sqrt{2} - 6);$$

$$S_{\Delta PBC} = \frac{36}{65} S_{\Delta ABC} = \frac{36(5\sqrt{2} - 6)}{13}.$$

Сравним числа:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{36(5\sqrt{2} - 6)}{13} & \vee & 3 \\ 12(5\sqrt{2} - 6) & \vee & 13 \\ 12 \cdot 5\sqrt{2} & \vee & 85 \\ 12\sqrt{2} & \vee & 17 \\ 288 & < & 289. \end{array}$$

Условие задачи не выполнено.

Ответ. $\dfrac{36(6 + 5\sqrt{2})}{13}$.

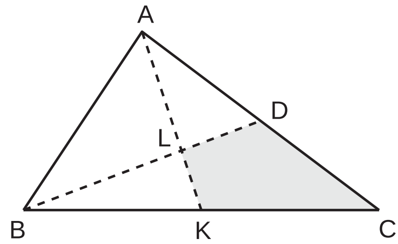
*Задача 16.**

В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L. Найти площадь треугольника ABC, если площадь четырёхугольника $KCDL$ равна 5.

Идея. Используя леммы о площадях, найти площадь ΔDAL.
Указание. Используя лемму о площадях треугольников с общим углом, найти площадь ΔDAL.
Указание. Используя лемму о площадях треугольников с общей вершиной и основаниями, лежащими на одной прямой, найти площадь ΔABC.

Решение. Заметим, что ΔDAL и ΔCAK имеют общий угол при вершине, поэтому отношение их площадей равно отношению произведений сторон, образующих общий угол:

$$\frac{S_{\Delta DAL}}{S_{\Delta CAK}} = \frac{S_{\Delta DAL}}{S_{\Delta DAL} + S_{KCDL}} = \frac{AD \cdot AL}{AC \cdot AK}.$$



Поскольку по условию BD – медиана, а L – точка пересечения медиан, то

$$\frac{S_{\Delta DAL}}{S_{\Delta DAL} + S_{KCDL}} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta DAL} = \frac{5}{2}.$$

Треугольники CAK и KAB имеют общую вершину A и равные основания, лежащие на одной прямой, поэтому

$$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta CAK} = 2\left(\frac{5}{2} + 5\right) = 15.$$

Ответ. 15.

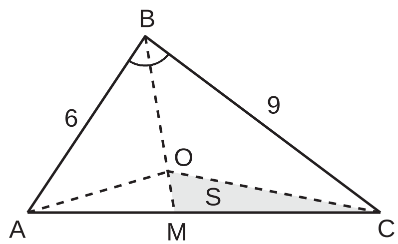
*Задача 17.**

В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 9$, $AC = 10$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке M. На отрезке BM взята точка O так, что $BO : OM = 3 : 1$. Площадь какого из треугольников ABO, BCO или ACO является наименьшей?

Идея. Обозначить через S площадь ΔMOC; воспользоваться леммами о площадях.
Указание. Ввести новую переменную $S = S_{\Delta MOC}$; выразить через неё площади треугольников ABO, BCO или ACO, используя леммы о площадях.
Указание. Сравнить результаты.

Решение. Пусть $S_{\Delta MOC} = S$. Треугольники MOC и OBC имеют общую вершину C и основания, лежащие на одной прямой, поэтому

$$\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta MOC}} = \frac{3}{1} \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta OBC} = 3S.$$



Треугольники ABO и OBC имеют равные углы при вершине C, поэтому отношение их площадей равно отношению произведений сторон, образующих угол C:

$$\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta OBC}} = \frac{AB \cdot BO}{BO \cdot BC} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad S_{\Delta ABO} = 2S.$$

Наконец,

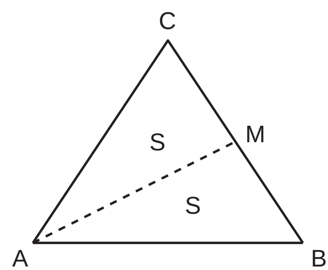
$$S_{\Delta AMO} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABO} = \frac{2}{3} S; \quad S_{\Delta ACO} = \frac{2}{3} S + S = \frac{5}{3} S.$$

Наименьшую площадь имеет треугольник ACO.

О т в е т. ΔACO.

*Задача 18.**

Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части 5 и 7. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника?



И д е я. Прямая проходит через середину боковой стороны треугольника; найти длины всех сторон.
У к а з а н и е. Отметить, что прямая проходит через середину боковой стороны.
У к а з а н и е. Рассмотреть различные варианты расположения частей периметра; найти длины всех сторон.
У к а з а н и е. По формуле Герона вычислить площадь ΔABC.
У к а з а н и е. По теореме косинусов определить знак косинуса большего угла.
У к а з а н и е. Центр описанной окружности тупоугольного треугольника лежит вне треугольника, остроугольного – внутри.

Р е ш е н и е. Пусть AM – прямая, которая делит площадь треугольника ABC пополам. Значит, она проходит через середину стороны BC, то есть $BM = MC$. Обозначим $BM = a$, тогда $AC = CB = 2a$. Рассмотрим два случая.

1) Если $AC + CM = 5$, то $2a + a = 5 \quad \Longrightarrow \quad a = \dfrac{5}{3}$.

Следовательно, $AC = CB = \dfrac{10}{3}$, $AB + \dfrac{5}{3} = 7 \quad \Longrightarrow \quad AB = \dfrac{16}{3}$. Тогда

$$p_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(5+7) = 6; \quad S_{\Delta ABC} = \sqrt{6 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{16}{3}.$$

Найдём больший угол. По теореме косинусов

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos\angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} < 0,$$

то есть ΔABC тупоугольный, и центр описанной окружности лежит вне треугольника.

2) Если $AC + CM = 7$, то $2a + a = 7 \implies a = \dfrac{7}{3}$.

Следовательно, $AC = CB = \dfrac{14}{3}$, $AB + \dfrac{7}{3} = 5 \implies AB = \dfrac{8}{3}$. Тогда

$$p_{\Delta ABC} = 6; \quad S_{\Delta ABC} = \sqrt{6 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{10}{3}} = \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Поскольку боковая сторона треугольника больше основания, угол при основании больше угла при вершине. Угол при основании равнобедренного треугольника всегда острый; следовательно, ΔABC остроугольный, и центр описанной окружности лежит внутри треугольника.

Ответ. $\dfrac{16}{3}$, вне треугольника; $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$, внутри.

*Задача 19.**

В треугольнике ABC известны длины всех высот: $h_a = 1/3$, $h_b = 1/4$, $h_c = 1/5$. Найти отношение длины биссектрисы CD к радиусу описанной окружности.

Идея. Используя формулы для вычисления площади, выразить длины сторон треугольника через новую переменную.
Указание. Используя формулы для вычисления площади, выразить длины сторон треугольника через новую переменную.
Указание. Показать, что треугольник ABC – прямоугольный.
Указание. Выразить длину биссектрисы и радиус описанной окружности через новую переменную.

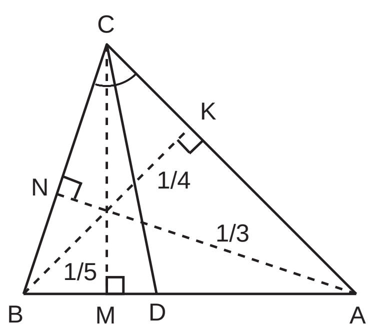
Решение. Построим высоты $AN = h_a$, $BK = h_b$, $CM = h_c$.

Запишем формулы для вычисления площади ΔABC:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB}{2 \cdot 5} = \frac{BC}{2 \cdot 3} = \frac{AC}{2 \cdot 4}.$$

Значит, можно выразить длины всех сторон треугольника через новую переменную z:

$$AB = 5z, \quad BC = 3z, \quad AC = 4z.$$



Заметим, что треугольник с такими сторонами является прямоугольным (AB – гипотенуза), поскольку

$$25z^2 = 16z^2 + 9z^2.$$

Длину биссектрисы прямого угла можно вычислить, например, через площади:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta DCB};$$

$$\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AC \cdot CD \cdot \sin\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{BC \cdot CD \cdot \sin\frac{\pi}{4}}{2};$$

$$12z^2 = \frac{4z}{\sqrt{2}} \cdot CD + \frac{3z}{\sqrt{2}} \cdot CD \quad \Longrightarrow \quad CD = \frac{12z\sqrt{2}}{7}.$$

Радиус описанной окружности прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы:

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{5z}{2}.$$

Тогда искомое отношение равно

$$\frac{CD}{R} = \frac{12z\sqrt{2}}{7} \cdot \frac{2}{5z} = \frac{24\sqrt{2}}{35}.$$

Ответ. $\dfrac{24\sqrt{2}}{35}$.

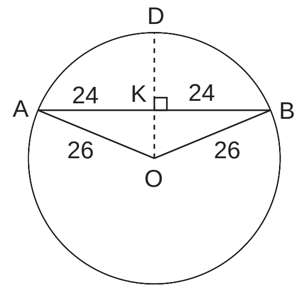
2. Окружности

2.1. Углы в окружностях. Касание окружности и прямой

Задача 1.

В окружности радиуса 26 проведена хорда, равная 48. Найти длину отрезка, соединяющего середину хорды с центром окружности.

Идея. Прямая, проходящая через центр окружности и середину хорды, перпендикулярна хорде.
Указание. Рассмотреть прямоугольный треугольник; воспользоваться теоремой Пифагора.



Решение. Пусть AB – хорда, проведённая в окружности радиуса 26, $AB = 48$, $AK = KB = 24$. Заметим, что прямая, проходящая через центр окружности O и середину K хорды AB, перпендикулярна хорде AB, так как медиана в равнобедренном треугольнике является также и высотой. Значит, треугольник AOK прямоугольный. По теореме Пифагора

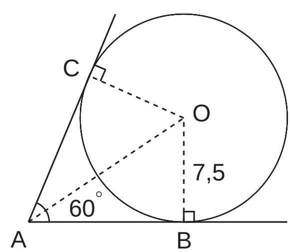
$$OK^2 = AO^2 - AK^2 = 26^2 - 24^2 = (26-24)(26+24) = 100 \quad \Longrightarrow \quad OK = 10.$$

Ответ. 10.

Задача 2.

В угол величиной 60° вписана окружность. Найти расстояние от центра окружности до вершины угла, если радиус окружности равен 7,5.

Идея. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания; центр вписанной в угол окружности лежит на его биссектрисе.
Указание. Провести радиус в точку касания; рассмотреть прямоугольный треугольник.
Указание. Воспользоваться свойством окружности, вписанной в угол, и соотношениями в прямоугольном треугольнике.



Решение. Пусть O – центр окружности, вписанной в угол с вершиной A, B и C – точки касания.

По свойству касательной к окружности стороны угла перпендикулярны радиусам, проведённым в точки касания, то есть $AB \perp OB$, $AC \perp OC$.

Поскольку центр вписанной в угол окружности лежит на биссектрисе угла, $\angle BAO = \angle CAO = 30^\circ$.

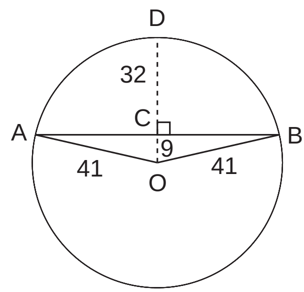
Из прямоугольного треугольника AOB с известными катетом и противолежащим ему углом находим гипотенузу:

$$AO = \frac{OB}{\sin\angle OAB} = \frac{7,5}{\sin 30^\circ} = \frac{7,5}{0,5} = 15.$$

Ответ. 15.

Задача 3.

В окружности с центром в точке O проведена хорда AB и радиус OD, которые пересекаются в точке C, причём известно, что $AB \perp OD$, $OC = 9$, $CD = 32$. Найти хорду.



Идея. Прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная хорде, проходит через её середину.
Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора.

Решение. По следствию из утверждения о взаимном расположении прямой и окружности прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная хорде, проходит через её середину. Следовательно, $AC = CB$. По условию OD – радиус, поэтому $OB = OD = 41$. Из прямоугольного ΔCOB по теореме Пифагора

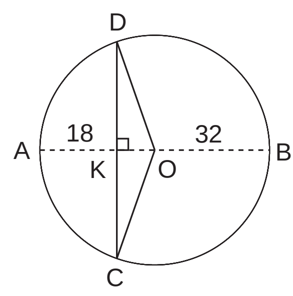
$$CB^2 = OB^2 - CO^2 = 41^2 - 9^2 = (41-9)(41+9) = 32 \cdot 50 \quad \Longrightarrow \quad CB = 40,$$

$$AB = 2 \cdot CB = 80.$$

Ответ. 80.

Задача 4.

В окружности перпендикулярно диаметру AB проведена хорда CD. Точка их пересечения делит диаметр на отрезки 18 и 32. Найти длину хорды CD.



Идея. Прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная хорде, проходит через её середину.
Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора.

Решение. Пусть диаметр окружности AB и хорда CD пересекаются в точке K. По следствию из утверждения о взаимном расположении прямой и окружности прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная хорде, проходит через её середину. Значит, $CK = KD$. Вычислим радиус окружности:

$$AB = AK + KB = 18 + 32 = 50 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow OD = AO = 25, \quad KO = AO - AK = 25 - 18 = 7.$$

Из прямоугольного ΔKDO по теореме Пифагора

$$KD^2 = OD^2 - KO^2 = 25^2 - 7^2 = 576 \quad \Longrightarrow \quad KD = 24,\ CD = 2 \cdot KD = 48.$$

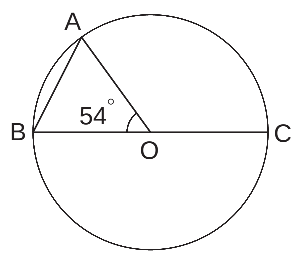
Замечание. Длину отрезка CK можно было найти из прямоугольного треугольники как длину высоты, проведённой к гипотенузе:

$$CK = \sqrt{AK \cdot BK} = \sqrt{18 \cdot 32} = 24.$$

Ответ. 48.

Задача 5.

Найти угол между хордой AB и диаметром BC, если хорда AB стягивает дугу в 54°.



Идея. Построить равнобедренный треугольник с основанием AB и вершиной в центре окружности; угол при вершине треугольника задан в условии, углы при основании равны.
Указание. Соединив концы хорды с центром окружности O, получить равнобедренный треугольник AOB.
Указание. Угол при вершине O треугольника AOB задан в условии задачи, углы при основании AB равны.

Решение. По условию $\angle AOB = 54^\circ$. Рассмотрим треугольник AOB. Он является равнобедренным, $OA = OB$; угол при основании AB определяется и по формуле $\angle OBA = \dfrac{180^\circ - 54^\circ}{2} = 63^\circ$.

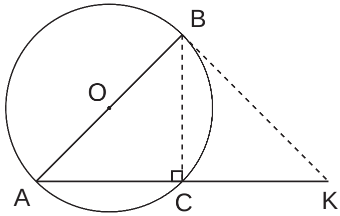
Ответ. 63°.

Задача 6.

Из точки A окружности проведены диаметр AB и хорда AC, которая продолжена за C на расстояние CK, равное AC. Найти BK, если радиус окружности равен 4.

Идея. Прямоугольный ΔACB равен ΔKBC.
Указание. Доказать, что $\angle ACB = 90^\circ$.

У к а з а н и е. Показать, что треугольники ACB и KBC равны.



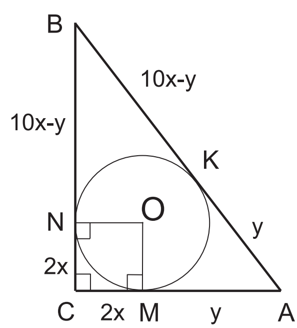
Р е ш е н и е. Угол $\angle ACB$ опирается на диаметр AB, поэтому по следствию из теоремы об угле, вписанном в окружность, он является прямым. Заметим, что $\Delta ABC = \Delta KBC$ (по двум сторонам и углу между ними). Значит, $BK = AB = 8$.

О т в е т. 8.

Задача 7.

Определить острые углы прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанного около него круга относится к радиусу вписанного круга как $5:2$.

И д е я. Использовать равенство касательных, проведённых из одной точки, и теорему Пифагора.
У к а з а н и е. Обозначить через $2x$ радиус вписанной окружности, через $5x$ радиус описанной окружности. Выразить стороны треугольника через две неизвестных, одна из которых x.
У к а з а н и е. С помощью теоремы Пифагора получить зависимость длин сторон треугольника от x.



Р е ш е н и е. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Его гипотенуза AB является диаметром описанной окружности. Пусть радиус вписанной окружности $r = 2x$, тогда радиус описанной окружности $R = 5x$ и $AB = 10x$.

Обозначим через K, M, N точки касания вписанной окружности и сторон AB, AC, BC (соответственно), пусть $AM = AK = y$. Тогда $KB = NB = 10x - y$. По теореме Пифагора

$$(2x+y)^2+(12x-y)^2 = (10x)^2 \iff y^2-10xy+24x^2 = 0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} y = 4x; \\ y = 6x; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} \sin A = \dfrac{6x}{10x} = \dfrac{3}{5}, & \sin B = \dfrac{8x}{10x} = \dfrac{4}{5}; \\[2ex] \sin A = \dfrac{8x}{10x} = \dfrac{4}{5}, & \sin B = \dfrac{6x}{10x} = \dfrac{3}{5}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $\arcsin\dfrac{3}{5}$ и $\arcsin\dfrac{4}{5}$.

Задача 8.

Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 120°. Найти расстояние между центрами окружностей, если длина хорды равна $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$.

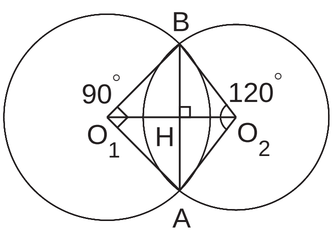
Идея. Прямая, проходящая через центры пересекающихся окружностей, является серединным перпендикуляром к их общей хорде.
Указание. Доказать, что отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, перпендикулярен их общей хорде и проходит через её середину.
Указание. Использовать соотношения в прямоугольных треугольниках.

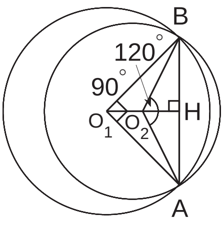
Решение. Пусть O_1 и O_2 – центры двух пересекающихся окружностей, AB – их общая хорда.

Треугольники AO_1O_2 и BO_1O_2 равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle AO_1H = \angle BO_1H$. Поэтому треугольники AO_1H и BO_1H равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AH = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{8}$. Далее, так как отрезок O_1H является медианой в равнобедренном треугольнике AO_1B, то он является высотой и биссектрисой. Для треугольника AO_2B этот факт доказывается аналогично.

Таким образом, мы доказали полезный факт: *отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, перпендикулярен их общей хорде и проходит через её середину.*

Возможны два случая расположения окружностей (см. рисунок).





Далее, O_1O_2 – биссектриса углов $\angle AO_1B$ и $\angle AO_2B$, то есть

$$\angle AO_1H = \angle HO_1B = 45^\circ, \quad \angle AO_2H = \angle HO_2B = 60^\circ.$$

Из прямоугольных треугольников AO_1H и AO_2H

$$O_1H = AH\cdot\operatorname{ctg}\angle AO_1H = \frac{3+\sqrt{3}}{8};\ HO_2 = AH\cdot\operatorname{ctg}\angle AO_2H = \frac{3+\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{8}.$$

В первом случае $O_1O_2 = O_1H + HO_2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$;

во втором случае получаем $O_1O_2 = O_1H - HO_2 = \dfrac{1}{4}$.

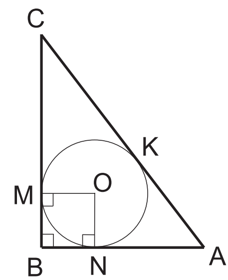
Ответ. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ или $\dfrac{1}{4}$.

Задача 9.

Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.

Идея. Использовать теорему о равенстве касательных, проведённых из одной точки.
Указание. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна диаметру описанной окружности.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть M, N, K – точки касания вписанной в треугольник окружности со сторонами, а R и r – радиусы описанной и вписанной в треугольник окружностей. Четырёхугольник $OMBN$ – квадрат; следовательно, $BM = BN = r$. По теореме о равенстве касательных, проведённых из одной точки к окружности, $CM = CK$, $AN = AK$. Получаем



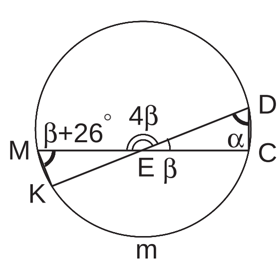
$$AB + BC = r + AN + r + CM = 2r + AK + CK = 2r + AC.$$

Так как гипотенуза прямоугольного треугольника равна диаметру описанной окружности, то $AB + BC = 2r + 2R$.

Задача 10.

KD и MC – хорды одной окружности, причём E – точка их пересечения. Найдите угол CDE, если угол DEM в 4 раза больше угла DEC, а угол CMK на 26° больше угла DEC.

Идея. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.
Указание. Вычислить угол DEC.
Указание. Воспользоваться равенством вписанных углов, опирающихся на одну дугу.



Решение. Пусть $\angle CDE = \alpha$, $\angle DEC = \beta$. По условию $\angle CMK = \beta + 26^\circ$, $\angle DEM = 4\beta$. Значит,

$$\angle CEM = 180^\circ = 5\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = 36^\circ.$$

Вписанные углы CDK и CMK опираются на одну дугу $\smile CmK$, поэтому они равны

$$\alpha = \beta + 26^\circ = 36^\circ + 26^\circ = 62^\circ.$$

Ответ. 62°.

*Задача 11.**

Найдите углы треугольника, в котором центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон треугольника.

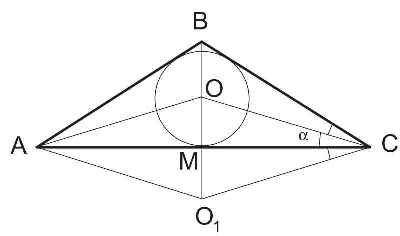
Идея. Пусть в ΔABC центр вписанной окружности O и центр описанной окружности O_1 симметричны относительно AC. Рассмотреть ΔBCO_1 и ΔBCM, где M является точкой касания вписанной окружности с AC, и выразить их общий угол двумя способами.

Указание. Обозначить $\angle MCO_1 = \alpha$, тогда $\angle BCO_1 = 3\alpha$.

Указание. ΔBCO_1 равнобедренный, поэтому $\angle CBO_1 = 3\alpha$.

Указание. Из ΔBCM угол $\angle CBM = 90^\circ - 2\alpha$.

Решение. Рассмотрим ΔABC. Пусть O и O_1 – центры вписанной и описанной окружностей. Пусть они симметричны относительно стороны AC. Тогда $\angle MCO_1 = \angle MCO$ и $CM \perp OO_1$.



Обозначим $\alpha = \angle MCO_1 = \angle MCO$. Так как CO – биссектриса, то

$$\angle BCO = \angle MCO = \alpha.$$

Заметим, что треугольник ABC является равнобедренным. Для обоснования этого факта докажем равенство углов при основании треугольника:

$$\angle BAC = 2\angle OAM = 2\angle O_1AM = 2\angle O_1CM = 2\alpha = \angle BCA.$$

В ΔBCO_1 стороны $BO_1 = CO_1 = R$; следовательно,

$$\angle CBO_1 = \angle BCO_1 = 3\alpha.$$

С другой стороны, из ΔMCB следует $\angle MBC = 90^\circ - 2\alpha$. Значит,

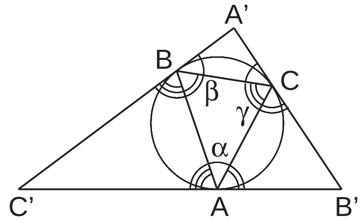
$$3\alpha = 90^\circ - 2\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 18^\circ$$

и углы исходного треугольника равны 36°, 36° и 108°.

Ответ. 36°, 36°, 108°.

*Задача 12.**

Через вершины вписанного в окружность треугольника проведены касательные к этой окружности. Определить углы треугольника, образованного этими касательными, через углы вписанного треугольника.



Идея. Применить теорему об угле между хордой и касательной.
Указание. Рассмотреть углы, образованные сторонами вписанного треугольника и касательными; по теореме об угле между хордой и касательной установить соответствие между ними и углами треугольника.
Указание. Воспользоваться теоремой о сумме внутренних углов треугольника.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$. Через вершины треугольника проведём касательные к описанной окружности. Обозначим точки пересечения касательных через A', B', C'. По теореме об угле между хордой и касательной

$$\angle BCA' = \angle CBA' = \alpha; \quad \angle CAB' = \angle ACB' = \beta; \quad \angle ABC' = \angle BAC' = \gamma.$$

По теореме о сумме внутренних углов треугольника для $\Delta BCA'$, $\Delta ACB'$ и $\Delta ABC'$

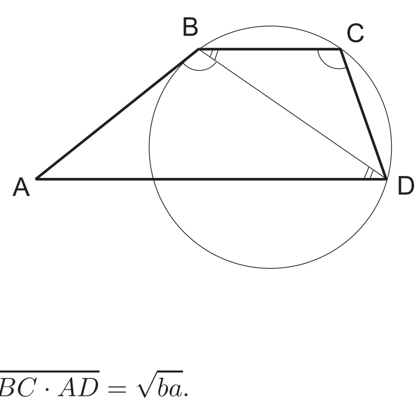
$$\angle BA'C = 180^\circ - 2\alpha;$$
$$\angle AB'C = 180^\circ - 2\beta;$$
$$\angle AC'B = 180^\circ - 2\gamma.$$

Ответ. $\angle A' = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle B' = 180^\circ - 2\beta$, $\angle C' = 180^\circ - 2\gamma$.

Замечание. Если воспользоваться тем, что $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то ответ можно привести к виду $\angle A' = \beta + \gamma - \alpha$, $\angle B' = \alpha + \gamma - \beta$, $\angle C' = \beta + \alpha - \gamma$.

*Задача 13.**

Окружность проходит через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке B. Найти длину диагонали BD, если длины оснований трапеции равны a и b.



Идея. Выразить BD из соотношения подобия.
Указание. Показать, что $\angle ABD = \angle BCD$.
Указание. $\Delta ABD \sim \Delta DCB$ по двум углам.

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$. Угол ABD равен углу BCD, как вписанный угол и угол между касательной и хордой, опирающиеся на одну дугу, $\angle CBD = \angle BDA$, как накрест лежащие. Значит, $\Delta ABD \sim \Delta DCB$ и

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BD} \quad \Longrightarrow \quad BD = \sqrt{BC \cdot AD} = \sqrt{ba}.$$

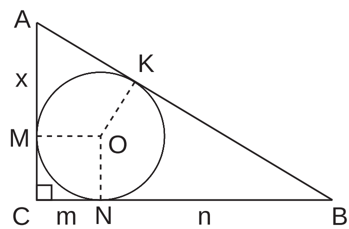
Ответ. $\sqrt{ab}$.

*Задача 14.**

Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, разбивает один из его катетов на отрезки длины m и n, причём $m < n$. Найти длину другого катета.

И д е я. Использовать теорему о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности.
У к а з а н и е. Для отрезков, на которые стороны треугольника делятся точками касания, применить теорему о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности.
У к а з а н и е. Записать теорему Пифагора.

Р е ш е н и е. Обозначим точки касания окружности, вписанной в прямоугольный ΔABC, с катетами AC, BC и гипотенузой AB соответственно через M, N и K.



Пусть $CN = m$, $NB = n$, $AM = x$.

По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности, $CM = m$, $BK = n$, $AK = x$.

По теореме Пифагора для ΔABC

$$(x+n)^2 = (m+n)^2 + (m+x)^2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2xn + n^2 = m^2 + 2mn + n^2 + m^2 + 2mx + x^2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x(n-m) = 2m^2 + 2mn \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{m^2+mn}{n-m}, \quad AC = x + m = \frac{2mn}{n-m}.$$

О т в е т. $\dfrac{2mn}{n-m}$.

*Задача 15.**

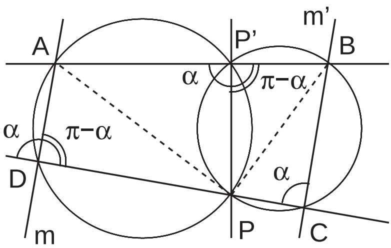
Через точки пересечения двух окружностей P и P' проведены прямые AB и CD (точки A и D лежат на первой окружности, точки B и C – на второй). Через точки A и D проведена прямая m, а через B и C – прямая m'. Доказать, что m параллельна m'.

И д е я. Использовать свойство четырёхугольника, вписанного в окружность.
У к а з а н и е. Рассмотреть два четырёхугольника, вписанных в окружности; найти в них равные углы.
У к а з а н и е. Воспользоваться признаком параллельности прямых на плоскости.

Р е ш е н и е. Рассмотрим две окружности, пересекающиеся в точках P и P'. Проведём через точки P и P' произвольные прямые, пересекающие окружности в точках A, B, C и D. Обозначим $\angle BCP = \alpha$.

Четырёхугольник $CBP'P$ вписан в окружность, поэтому по следствию 3 теоремы о вписанном угле (см. теоретический материал)

$$\angle BCP + \angle BP'P = \pi \quad \Longrightarrow \quad \angle BP'P = \pi - \alpha.$$



Угол $BP'A$ – развёрнутый; значит,

$$\angle PP'A = \pi - (\pi - \alpha) = \alpha.$$

Далее, четырёхугольник $DAP'P$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle PP'A + \angle PDA = \pi \quad \Longrightarrow \quad \angle PDA = \pi - \alpha.$$

По признаку параллельности прямых (сумма внутренних односторонних углов BCP и PDA равна развёрнутому углу) прямая AD (она же m) параллельна прямой BC (или m').

Утверждение доказано.

*Задача 16.**

К двум не пересекающимся окружностям проведены две внешние касательные и внутренняя. Точки M и N – точки касания внешней касательной с окружностями, а P и Q – точки пересечения внутренней касательной с внешними. Доказать, что $MN = PQ$.

Идея. Использовать теорему о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности.

Указание. Обозначить все точки касания окружностей с касательными; воспользоваться равенством касательных, проведённых из одной точки к окружности.

Решение. Обозначим точки касания окружностей со второй внешней касательной через M' и N', а точки касания окружностей с внутренней касательной через F и E. Пусть $PF = x$, $FE = y$, $EQ = z$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности, получаем

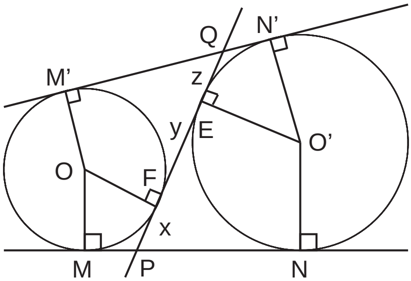
$$MP = PF = x, \quad PN = PE = x + y \quad \Longrightarrow \quad MN = 2x + y.$$

С другой стороны,

$$QN' = QE = z, \quad QM' = QF = z + y \quad \Longrightarrow \quad M'N' = 2z + y.$$

Из равенства $MN = M'N'$ следует, что $x = z$, поэтому

$$MN = 2x + y = x + z + y = PQ.$$



Утверждение доказано.

*Задача 17.**

Может ли у треугольника со сторонами меньше 1 радиус описанной окружности быть больше 100?

Идея. Привести соответствующий пример.
Указание. Сначала построить окружность, потом вписанный в неё треугольник.

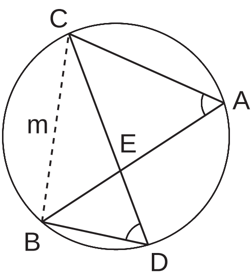
Решение. Рассмотрим окружность радиуса больше 100 и произвольную точку A на ней. Отложим на окружности по разные стороны от точки A точки B и C на расстоянии $1/2$. Стороны полученного треугольника будут меньше 1.

Ответ. Да.

2.2. Свойства касательных, хорд, секущих

Задача 1.

Доказать, что произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны.



И д е я. Воспользоваться подобием треугольников.
У к а з а н и е. Найти равные углы по теореме о вписанных углах.
У к а з а н и е. Указать пару подобных треугольников; выписать отношения подобия.

Р е ш е н и е. Пусть AB и CD – две хорды в окружности, пересекающиеся в точке E. Согласно следствию из теоремы о вписанном угле $\angle BAC = \angle BDC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу $\smile BmC$; $\angle AEC = \angle BED$ как вертикальные. Следовательно, $\Delta AEC \sim \Delta DEB$ (по двум углам), поэтому

$$\frac{AE}{EC} = \frac{DE}{EB} \quad\Longleftrightarrow\quad AE \cdot EB = DE \cdot EC,$$

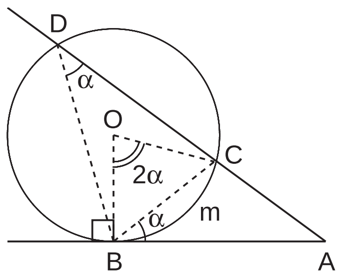
что и требовалось доказать.

Задача 2.

Доказать, что квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину её внешней части.

И д е я. Воспользоваться подобием треугольников.
У к а з а н и е. Найти равные углы по теореме об угле между хордой и касательной и теореме о вписанных углах.
У к а з а н и е. Указать пару подобных треугольников; выписать отношения подобия.

Р е ш е н и е. Рассмотрим окружность с центром O, к которой из точки A проведены касательная AB (B – точка касания) и секущая AD, где C и D – точки её пересечения с окружностью, причём точка C лежит между точками A и D. Докажем, что



$$AB^2 = AC \cdot AD.$$

Рассмотрим угол $\angle ABC$; пусть он равен α. Тогда по теореме об угле между хордой и касательной $\angle BOC = 2\alpha$.

С другой стороны, $\angle BDC = \alpha$, так как это вписанный угол, опирающийся на ту же дугу $\smile BmC$.

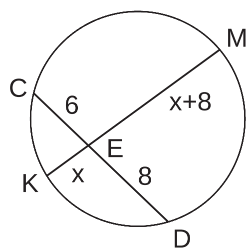
Следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta ADB$ по двум углам (угол A общий), поэтому

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \quad \Longleftrightarrow \quad AB^2 = AC \cdot AD,$$

что и требовалось доказать.

Задача 3.

KM и CD – хорды одной окружности, причём E – точка их пересечения. Найдите KM, если $CE = 6, ED = 8$ и KE на 8 меньше EM.



Идея. Использовать теорему о хордах.
Указание. Обозначить длину одного из отрезков хорды KM за новую переменную.
Указание. Воспользоваться теоремой о хордах.

Решение. Пусть $KE = x$, тогда $EM = x + 8$.
По теореме о пересекающихся хордах

$$x \cdot (x+8) = 6 \cdot 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+8x-48 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 4 \quad \Longrightarrow \quad KM = 2x+8 = 16.$$

Ответ. 16.

Задача 4.

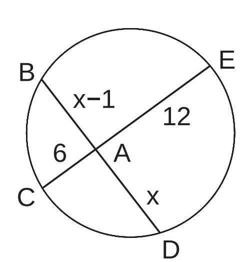
BD и CE – хорды одной окружности, причём A – точка их пересечения. Найдите BD, если $AC = 6, AE = 12$ и AB на 1 меньше AD.

Идея. Использовать теорему о хордах.
Указание. Обозначить длину одного из отрезков хорды BD за новую переменную.
Указание. Воспользоваться теоремой о хордах.

Решение. Пусть $AD = x$, тогда $AB = x - 1$.
По теореме о пересекающихся хордах

$$x \cdot (x-1) = 6 \cdot 12 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x - 72 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x = 9 \quad \Longrightarrow \quad BD = 2x - 1 = 17.$$



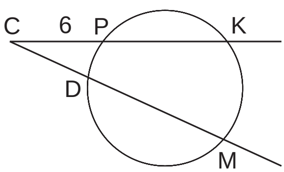
Ответ. 17.

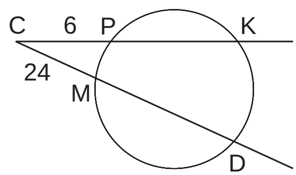
Задача 5.

Прямая CK пересекает окружность в точках P и K, а прямая CM – в точках D и M. Найдите DM, если $CK = 16, CP = 6$ и $CM = 24$.

Идея. Использовать следствие из теоремы о касательной и секущей.
Указание. Рассмотреть два варианта взаимного расположения точек D, C и M на прямой.
Указание. Воспользоваться следствием из теоремы о касательной и секущей.

Решение. Возможны два варианта: точка D расположена между точками C и M или точка M расположена между точками C и D.





По следствию из теоремы о касательной и секущей

$$CK \cdot CP = CM \cdot CD \quad \Longrightarrow \quad CD = \frac{CK \cdot CP}{CM} = \frac{6 \cdot 16}{24} = 4.$$

В первом случае (рисунок слева) $DM = 24 - 4 = 20$. Во втором случае (рисунок справа) получили противоречие: $CD < CM$; значит, такое расположение точек D, C и M невозможно.

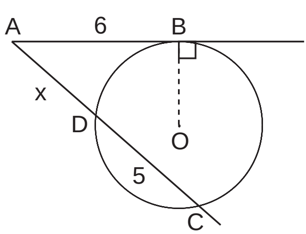
Ответ. 20.

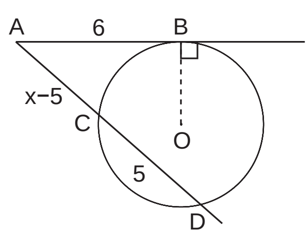
Задача 6.

Прямая AC пересекает окружность в точках D и C, а прямая AB – касательная к окружности, B – точка касания. Найдите AD, если $AB = 6, CD = 5$.

Идея. Использовать теорему о касательной и секущей.
Указание. Ввести новую переменную: $AD = x$. Рассмотреть два случая расположения точек C и D.
Указание. Записать теорему о касательной и секущей; решить квадратное уравнение, отобрать корень.

Решение. По теореме о касательной и секущей $AB^2 = AD \cdot AC$.





Рассмотрим два чертежа. В первом случае точка D лежит между точками A и C. Обозначим $AD = x$. Тогда

$$36 = x \cdot (x+5) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 5x - 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 4.$$

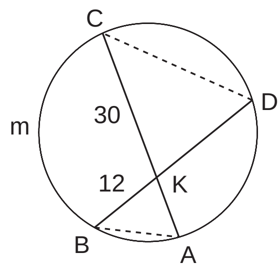
Во втором случае точка C лежит между точками A и D; значит,

$$36 = x \cdot (x-5) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 5x - 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 9.$$

О т в е т. 4 или 9.

Задача 7.

AC и BD – хорды одной окружности, причём K – точка их пересечения. Найдите P_{CKD}, если $KB = 12, KC = 30$ и $P_{AKB} = 28$.



И д е я. Воспользоваться подобием треугольников.
У к а з а н и е. Найти равные углы по теореме о вписанных углах.
У к а з а н и е. Обосновать подобие треугольников CKD и AKB; вычислить коэффициент подобия.
У к а з а н и е. Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

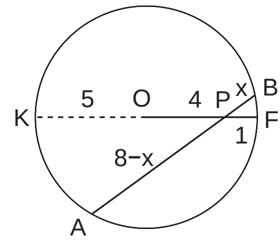
Р е ш е н и е. Углы $\angle BAC$ и $\angle BDC$ равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу $\smile BmC$; $\angle AKB = \angle DKC$ как вертикальные. Следовательно, $\Delta AKB \sim \Delta DKC$ (по двум углам) с коэффициентом подобия $k = \dfrac{BK}{CK} = \dfrac{12}{30}$, поэтому $\dfrac{P_{AKB}}{P_{CKD}} = k \quad \Longrightarrow \quad P_{CKD} = \dfrac{5}{2} \cdot 28 = 70.$

О т в е т. 70.

Задача 8.

Радиус круга равен 5. Внутри круга взята точка P на расстоянии 4 от его центра O. Через точку P проведена хорда $AB = 8$. На какие части делится хорда точкой P?

И д е я. Использовать теорему о хордах.
У к а з а н и е. Провести через точку P диаметр окружности.
У к а з а н и е. Обозначить длину одного из отрезков хорды AB за новую переменную.
У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой о хордах.



Р е ш е н и е. Проведём через точку P диаметр KF, тогда $KP = 9$, $PF = 1$.

Пусть $PB = x$, тогда $AP = 8 - x$. По теореме о хордах $KP \cdot PF = AP \cdot PB$;

$$9 \cdot 1 = (8 - x) \cdot x \iff x^2 - 8x + 9 = 0 \implies$$

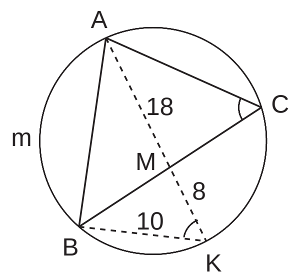
$$\implies PB = x = 4 \pm \sqrt{7}, \quad AP = 8 - x = 4 \mp \sqrt{7}.$$

О т в е т. $4 + \sqrt{7}$; $4 - \sqrt{7}$.

Задача 9.

Около треугольника ABC описана окружность. Медиана треугольника AM продлена до пересечения с окружностью в точке K. Найдите сторону AC, если $AM = 18$, $MK = 8$, $BK = 10$.

И д е я. Воспользоваться подобием треугольников.
У к а з а н и е. Найти равные углы по теореме о вписанных углах.
У к а з а н и е. Обосновать подобие треугольников AMC и BMK; выписать отношения подобия; найти коэффициент подобия.
У к а з а н и е. Искомую величину найти из отношения подобия.



Р е ш е н и е. Согласно следствию из теоремы о вписанном угле $\angle ACB = \angle AKB$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу $\smile AmB$; $\angle AMC = \angle BMK$ как вертикальные. Следовательно, $\Delta AMC \sim \Delta BMK$ (по двум углам), поэтому $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{MC}{MK}$. По условию $BM = MC$; значит,

$$BM^2 = 18 \cdot 8 = 144 \implies BM = 12.$$

Найдём коэффициент подобия $k = \dfrac{AM}{BM} = \dfrac{3}{2}$.
Осталось вычислить AC:

$$AC = k \cdot BK = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15.$$

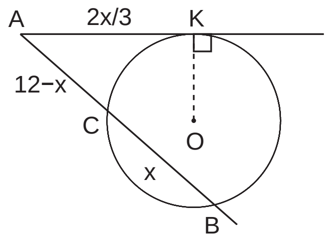
О т в е т. 15.

Задача 10.

Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 и касательная, длина которой составляет 2/3 внутреннего отрезка секущей. Определить длину касательной.

И д е я. Воспользоваться теоремой о касательной и секущей.
У к а з а н и е. Обозначить через новую переменную внутренний отрезок секущей.
У к а з а н и е. Записать теорему о касательной и секущей.
У к а з а н и е. Решить квадратное уравнение, отобрать корни.

Р е ш е н и е. Проведём к окружности касательную AK, где A – внешняя точка, K – точка касания. Построим секущую AB; обозначим через C вторую точку пересечения секущей с окружностью. Пусть $BC = x$, тогда $AC = 12 - x$, $AK = \dfrac{2x}{3}$. По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AC \cdot AB$. Тогда

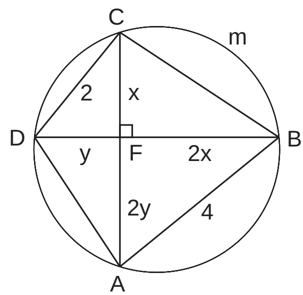


$$\frac{4}{9}x^2 = (12-x)\cdot 12 \iff x^2+27x-324 = 0 \implies x = 9 \implies AK = \frac{2x}{3} = 6.$$

О т в е т. 6.

Задача 11.

Четырёхугольник $ABCD$ с взаимно перпендикулярными диагоналями AC и BD вписан в окружность. Найти её радиус, если $AB = 4$, $CD = 2$.



И д е я. Воспользоваться подобием треугольников и теоремой синусов.

У к а з а н и е. Найти равные углы по теореме о вписанных углах.

У к а з а н и е. Обосновать подобие треугольников AFB и DFC; найти коэффициент подобия.

У к а з а н и е. Из прямоугольного ΔCFB найти $\sin\angle FCB$.

У к а з а н и е. Применить теорему синусов к ΔABC.

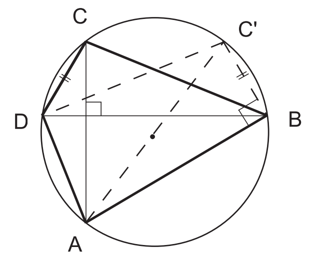
Р е ш е н и е. Согласно следствию из теоремы о вписанном угле $\angle CAB = \angle CDB$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу $\smile CmB$. Следовательно, прямоугольные треугольники AFB и DFC подобны (по острому углу) с коэффициентом подобия $k = \dfrac{AB}{CD} = 2$. Из подобия следует, что если $FC = x$, то $BF = 2x$; аналогично если $DF = y$, то $AF = 2y$. Из прямоугольного ΔCFB найдём синус угла FCB:

$$\operatorname{tg}\angle FCB = \frac{FB}{FC} = 2 \implies \sin\angle FCB = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Осталось применить теорему синусов к ΔABC:

$$\frac{AB}{\sin\angle FCB} = 2R \implies R = \sqrt{5}.$$

О т в е т. $\sqrt{5}$.



Замечание. Можно решить задачу проще, если сделать дополнительное построение. Построим треугольник BDC', симметричный треугольнику BDC ($DC' = BC$, $BC' = DC$). Так как угол между хордами AC и BD прямой, то

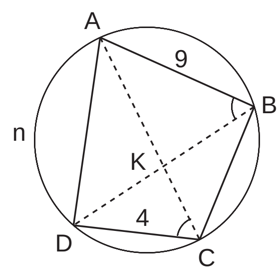
$$\smile AB + \smile CD = 180^\circ \quad \Longrightarrow \quad \smile AB + \smile BC' = 180^\circ \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \angle ABC' = 90^\circ$$

и по теореме Пифагора $AC' = 2\sqrt{5}$, откуда радиус $R = \sqrt{5}$.

*Задача 12.**

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $AB = 9$, $CD = 4$, $AC = 7$ и $BD = 8$. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$.



Идея. Воспользоваться подобием треугольников и теоремой косинусов для нахождения угла между диагоналями.

Указание. Найти равные углы по теореме о вписанных углах.

Указание. Обосновать подобие ΔAKB и ΔDKC, где K – точка пересечения диагоналей; найти коэффициент подобия.

Указание. В треугольнике AKB найти длины всех сторон.

Указание. По теореме косинусов определить $\cos\angle AKB$; по основному тригонометрическому тождеству вычислить $\sin\angle AKB$.

Указание. Площадь четырёхугольника найти как полупроизведение длин диагоналей на синус угла между ними.

Решение. Будем искать площадь $ABCD$ по формуле

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\angle AKB = 28 \sin\angle AKB,$$

где K – точка пересечения диагоналей. Значение $\sin\angle AKB$ не известно. Поступим так. В треугольнике AKB найдём длины всех сторон, далее по теореме косинусов определим $\cos\angle AKB$, затем по основному тригонометрическому тождеству вычислим $\sin\angle AKB$ и, наконец, найдём S_{ABCD}.

По следствию из теоремы о вписанном угле $\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу $\smile AnD$; $\angle AKB = \angle DKC$ как вертикальные. Следовательно, $\Delta AKB \sim \Delta DKC$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{9}{4}$. Используя условие задачи и подобие, найдём длины отрезков AK и KB:

$$\frac{AK}{KD} = \frac{9}{4} \quad \Longrightarrow \quad AK = 9x, \quad KD = 4x;$$

$$\frac{KB}{KC} = \frac{9}{4} \quad \Longrightarrow \quad KB = 9y, \quad KC = 4y;$$

$$\begin{cases} 9x + 4y = 7; \\ 4x + 9y = 8; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{31}{65}, \quad y = \frac{44}{65}.$$

Получаем $AK = 9x = \dfrac{31 \cdot 9}{65}$, $KB = 9y = \dfrac{44 \cdot 9}{65}$. Запишем теорему косинусов для ΔAKB:

$$AB^2 = AK^2 + KB^2 - 2 \cdot AK \cdot KB \cdot \cos\angle AKB \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos\angle AKB = \frac{AK^2 + KB^2 - AB^2}{2 \cdot AK \cdot KB} = -\frac{166}{31 \cdot 11};$$

$$\sin\angle AKB = \sqrt{1 - \cos^2\angle AKB} = \frac{65\sqrt{21}}{31 \cdot 11}.$$

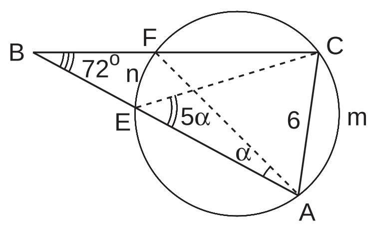
Осталось вычислить площадь:

$$S_{ABCD} = 28 \sin\angle AKB = \frac{1820\sqrt{21}}{341}.$$

О т в е т. $\dfrac{1820\sqrt{21}}{341}$.

Задача 13.

Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Угол AEC в 5 раз больше угла BAF, $\angle ABC = 72°$. Найти радиус окружности, если $AC = 6$.



И д е я. Использовать теорему об угле между секущими, выходящими из одной точки.

У к а з а н и е. Воспользовавшись теоремой об угле между секущими, выходящими из одной точки, найти угол AEC.

У к а з а н и е. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы.

Р е ш е н и е. Пусть $\angle BAF = \alpha$, $\angle AEC = 5\alpha$.
Тогда угол между секущими равен

$$72° = \frac{1}{2}(\breve{AmC} - \breve{EnF}) = 5\alpha - \alpha = 4\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 18°; \quad 5\alpha = 90°.$$

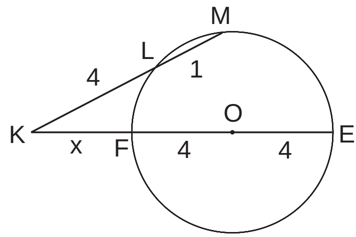
Значит, AC – диаметр описанной окружности, поэтому её радиус $R = \dfrac{AC}{2} = 3$.

О т в е т. 3.

Задача 14.

Через точку K, находящуюся вне окружности радиуса 4, проведена прямая, пересекающая окружность в точках L и M. Найти расстояние от точки K до центра окружности, если известно, что $KL = 4$, $KM = 5$.

Идея. Воспользоваться следствием из теоремы о касательной и секущей.
Указание. Провести прямую, проходящую через точку K и центр окружности.
Указание. Использовать следствие из теоремы о касательной и секущей.



Решение. Проведём прямую, проходящую через точку K и центр окружности O. Точки её пересечения с окружностью обозначим через F и E. Необходимо найти KO. Пусть $KF = x$. По следствию из теоремы о касательной и секущей $KL \cdot KM = KF \cdot KE$, поэтому

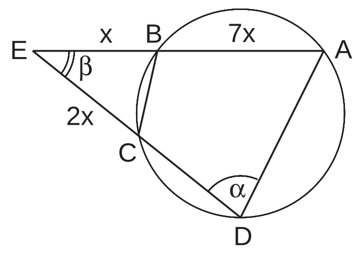
$$4 \cdot 5 = x \cdot (x+8) \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 8x - 20 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x = 2 \quad \Longrightarrow \quad KO = 6.$$

Ответ. 6.

Задача 15. *

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжение стороны AB за точку B пересекается с продолжением стороны CD в точке E. Найти угол ADE, если $CE = 2BE$, $AB : EC = 7 : 2$ и косинус угла AED равен $7/8$.



Идея. Воспользоваться следствием из теоремы о касательной и секущей и теоремой косинусов.
Указание. Выразить через новую переменную все отрезки секущих, для чего воспользоваться следствием из теоремы о касательной и секущей.
Указание. По теореме косинусов для ΔADE найти AD как функцию новой переменной.
Указание. Для поиска $\cos\angle ADE$ ещё раз использовать теорему косинусов для ΔADE.

Решение. Пусть $\angle ADC = \alpha$, $\angle AEC = \beta$. По условию $\cos\beta = \dfrac{7}{8}$. Обозначим далее $BE = x$, тогда по условию $CE = 2x$, $AB = 7x$. По следствию из теоремы о касательной и секущей

$$CE \cdot DE = BE \cdot AE \quad \Longrightarrow \quad DE = 4x \quad \Longrightarrow \quad DC = 2x.$$

По теореме косинусов для ΔADE

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2 \cdot AE \cdot DE \cdot \cos\beta = 64x^2 + 16x^2 - 56x^2 = 24x^2 \quad \Longrightarrow \quad AD = 2\sqrt{6}x.$$

Ещё раз запишем теорему косинусов для ΔADE:

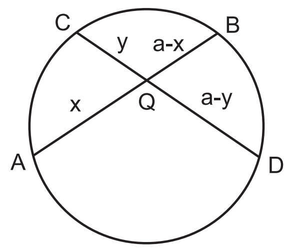
$$AE^2 = AD^2 + DE^2 - 2 \cdot AD \cdot DE \cdot \cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{24x^2 + 16x^2 - 64x^2}{16\sqrt{6}x^2} = -\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

З а м е ч а н и е. Искомый угол $\angle ADE$ равен углу $\angle CBE$, который можно найти по теореме косинусов из треугольника BCE, предварительно вычислив длину отрезка BC. При такой последовательности действий часть условия задачи (а именно, $AB : EC = 7 : 2$) не используется при решении, что является довольно редким случаем в экзаменационных задачах.

О т в е т. $\arccos(-\sqrt{6}/4)$.

Задача 16.

В окружности проведены равные пересекающиеся хорды. Доказать, что соответствующие части этих хорд, на которые они делятся точкой пересечения, равны.



И д е я. Использовать свойство пересекающихся хорд.
У к а з а н и е. Произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны.

Р е ш е н и е. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке Q и $AB = CD = a$, $AQ = x$, $CQ = y$, тогда $BQ = a-x$, $DQ = a-y$. По свойству пересекающихся хорд получаем

$$AQ \cdot BQ = CQ \cdot DQ \quad \Longleftrightarrow \quad x(a-x) = y(a-y) \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad a(x-y) = x^2 - y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-y)(a-x-y) = 0,$$

то есть либо $x = y$, либо $x = a - y$, что и требовалось доказать.

*Задача 17.**

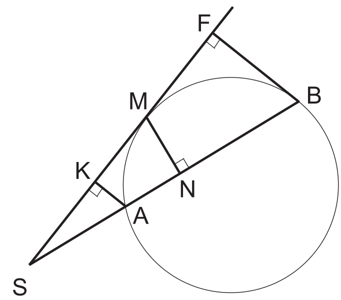
Доказать, что расстояние от точки окружности до хорды круга есть среднее пропорциональное между расстояниями от концов хорды до касательной к окружности в этой точке.

И д е я. Воспользоваться теоремой о касательной и секущей.
У к а з а н и е. Продолжить касательную и прямую, содержащую хорду, до пересечения.
У к а з а н и е. Использовать подобие прямоугольных треугольников и теорему о касательной и секущей.

Р е ш е н и е. Если хорда AB параллельна касательной, проведённой в точке M, то все три расстояния равны и утверждение задачи справедливо.

Рассмотрим случай, когда продолжение хорды AB и касательная пересекаются. Обозначим точку пересечения S; MN – расстояние от точки M до хорды AB; AK и BF – расстояния от концов хорды до касательной.

Требуется доказать, что $MN = \sqrt{BF \cdot AK}$. Воспользуемся подобием треугольников:



$$\Delta SMN \sim \Delta SBF \quad \Longrightarrow \quad \frac{SM}{SB} = \frac{MN}{BF},$$

$$\Delta SMN \sim \Delta SAK \quad \Longrightarrow \quad \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AK}.$$

Перемножив равенства, получим

$$\frac{SM^2}{SB \cdot SA} = \frac{MN^2}{BF \cdot AK}.$$

По свойству касательной и секущей $SM^2 = SB \cdot SA$, следовательно,

$$MN^2 = BF \cdot AK \quad \Longleftrightarrow \quad MN = \sqrt{BF \cdot AK}.$$

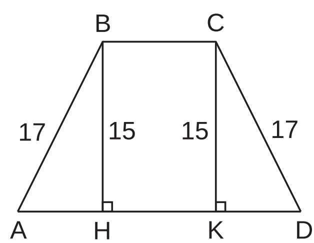
2.3. Смешанные задачи

Задача 1.

Около окружности диаметром 15 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17. Найдите длину большего основания трапеции.

Идея. Использовать свойство описанного четырёхугольника.
Указание. Провести обе высоты трапеции. Найти расстояние от оснований высот до вершин большего основания трапеции.
Указание. Использовать свойство описанного четырёхугольника: суммы противолежащих сторон равны.

Решение. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$. Проведём высоты BH и CK; они равны диаметру вписанной окружности, то есть $BH = CK = 15$. Так как трапеция равнобедренная, то треугольники ABH и DCK равны по гипотенузе и катету, поэтому по теореме Пифагора



$$AH = DK = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8.$$

Так как $BCKH$ – прямоугольник, то $BC = KH$. Используя свойство описанного четырёхугольника, получаем

$$AD + BC = AB + CD \quad \Longleftrightarrow \quad AD + AD - 2 \cdot 8 = 17 + 17 \quad \Longleftrightarrow \quad AD = 25\,.$$

Замечание. На рисунке нет окружности. Она и не нужна, важно понимать, что она даёт нам. В этой задаче, зная, что в трапецию вписана окружность, мы получили сразу два факта: во-первых, высоту трапеции, а, во-вторых, то, что суммы противоположных сторон равны.

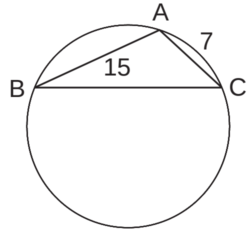
Ответ. 25.

Задача 2.

Из точки A, лежащей на окружности, проведены две хорды, равные 7 и 15. Найдите диаметр окружности, если расстояние между серединами хорд равно 10.

Идея. Использовать теорему синусов.
Указание. Используя теорему косинусов, найти угол A.
Указание. Используя теорему синусов, найти диаметр окружности.

Решение. Обозначим концы хорд за B и C. Расстояние между серединами хорд – это средняя линия треугольника ABC. Значит, сторона $BC = 20$. Таким образом, даны три стороны треугольника, а надо найти диаметр описанной окружности. Сначала по теореме косинусов найдём $\cos\angle A$, а затем по теореме синусов найдём диаметр окружности.



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle A \implies \cos\angle A = -\frac{3}{5} \implies$$

$$\implies \sin\angle A = \frac{4}{5} \implies 2R = \frac{BC}{\sin\angle A} = 25\,.$$

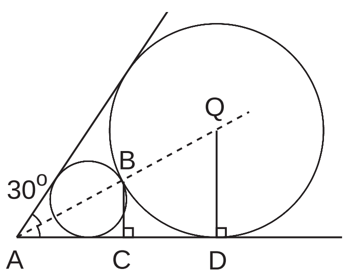
Ответ. 25.

Задача 3.

Две окружности, вписанные в угол 60°, касаются друг друга внешним образом. Найти расстояние от точки касания окружностей до стороны угла, если радиус большей окружности равен 23.

Идея. Использовать соотношения в прямоугольном треугольнике.
Указание. Найти расстояние от вершины угла до центра большей окружности.
Указание. Найти расстояние от вершины угла до точки касания окружностей.

Решение. Обозначим за A вершину угла, за Q – центр большей окружности. Пусть B – точка касания окружностей, D – точка касания большей окружности с одной из сторон угла. Проведём перпендикуляр BC на ту же сторону угла. Его длину и надо найти.



Так как центры окружностей и их точка касания лежат на биссектрисе угла, то $\angle BAC = 30^\circ$. Поэтому достаточно найти отрезок AB, половина которого и даст нам искомый отрезок BC (катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы). В прямоугольном треугольнике ADQ с острым углом $\angle A = 30^\circ$ гипотенуза AQ равна $2QD = 46$.

Следовательно, $AB = AQ - BQ = 46 - 23 = 23 \implies BC = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{23}{2}$.

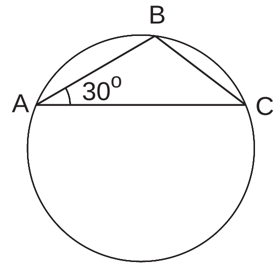
Ответ. $\dfrac{23}{2}$.

Задача 4.

В окружности, радиус которой равен 11, проведены хорды AB и AC. Угол между ними равен $30°$. Найти расстояние между точками B и C.

И д е я. Использовать теорему синусов.

У к а з а н и е. Использовать теорему синусов для ΔABC.



Р е ш е н и е. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 11. Надо, зная угол, найти противолежащую ему сторону. Это теорема синусов в чистом виде:

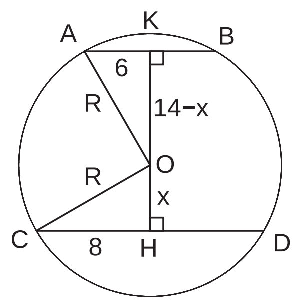
$$BC = 2R\sin\angle A = 11\,.$$

З а м е ч а н и е. Вообще говоря, в этой задаче можно и не приводить рисунок, настолько всё очевидно.

О т в е т. 11.

Задача 5.

В окружности по разные стороны от центра проведены параллельные хорды длиной 12 и 16. Расстояние между ними равно 14. Найти радиус окружности.



И д е я. Использовать теорему Пифагора.

У к а з а н и е. Провести через центр окружности перпендикуляр к хордам.

У к а з а н и е. Соединив центр окружности с концами хорд, дважды использовать теорему Пифагора.

Р е ш е н и е. Рассмотрим две параллельные хорды $AB = 12$ и $CD = 16$ соответственно. Проведём через центр окружности O перпендикуляр к этим хордам KH. Тогда $AK = 6, CH = 8$.

Обозначим $AO = CO = R$, $OH = x$, тогда $OK = 14 - x$. Запишем теорему Пифагора для ΔAKO и ΔCHO:

$$\left\{\begin{array}{l} AO^2 = AK^2 + KO^2, \\ CO^2 = CH^2 + OH^2; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} R^2 = 6^2 + (14-x)^2, \\ R^2 = 8^2 + x^2; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 6, \\ R = 10. \end{array}\right.$$

О т в е т. 10.

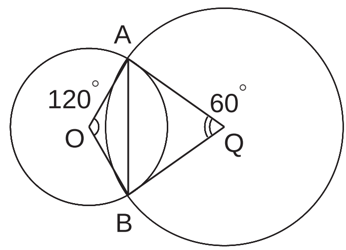
Задача 6.

Общей хордой двух кругов стягиваются дуги в 60° и 120°. Найти отношение площадей этих кругов.

Идея. Использовать теорему косинусов.

Указание. Выразить квадрат хорды по теореме косинусов из двух треугольников. Найти отношение квадратов радиусов.

Решение. Так как величина центрального угла равна величине угловой меры дуги окружности, то $\angle AOB = 120^\circ, \angle AQB = 60^\circ$. Обозначим через R и r радиусы большей и меньшей окружностей, соответственно. Так как площадь круга пропорциональна квадрату радиуса, то искомое отношение площадей двух кругов равно $\dfrac{R^2}{r^2}$. Это отношение легко находится, если AB^2 выразить по теореме косинусов из ΔABO и ΔABQ и приравнять:



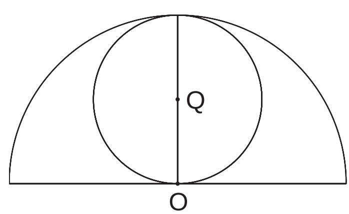
$$AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos\angle AOB = AQ^2 + BQ^2 - 2 \cdot AQ \cdot BQ \cdot \cos\angle AQB \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos 120^\circ = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos 60^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{R^2}{r^2} = \frac{3}{1}.$$

Ответ. $3:1$.

Задача 7.

В полукруг помещён круг, касающийся дуги полукруга в её середине, а также диаметра полукруга. Найдите отношение площадей данного полукруга и данного круга.



Идея. Радиус полукруга является диаметром вписанного круга.

Указание. $S_{\text{круга}} = \pi R^2$.

Решение. Так как радиус полукруга является диаметром вписанного круга, то решение очевидно:

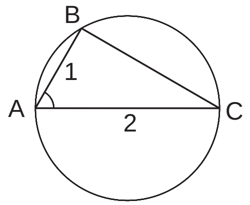
$$\frac{S_{\text{полукруга}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{0,5\pi(2r)^2}{\pi r^2} = 2.$$

Ответ. 2.

Задача 8.

Определить радиус окружности, если вписанный в неё угол со сторонами, длины которых равны 1 и 2, опирается на дугу $120°$.

Идея. Использовать теорему синусов.
Указание. Найти угол между хордами. Затем найти расстояние между концами хорд, используя теорему косинусов.
Указание. По теореме синусов найти радиус окружности.



Решение. Пусть хорды $AB = 1, AC = 2$. Так как величина вписанного угла равна половине величины дуги, на которую он опирается, то $\angle BAC = 60°$. Значит, треугольник ABC полностью определён, а найти надо радиус описанной окружности. Его легко будет найти по теореме синусов, если знать BC. Этот отрезок легко находится по теореме косинусов:

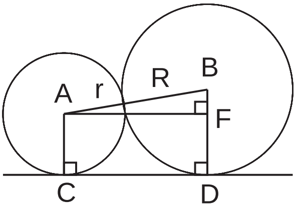
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = 3 \quad \Longrightarrow \quad BC = \sqrt{3}.$$

Теперь по теореме синусов находим радиус окружности: $R = \dfrac{BC}{2 \sin \angle BAC} = 1$.

Ответ. 1.

Задача 9.

Окружности радиусов r и R касаются внешним образом. Найдите длину их общей внешней касательной.



Идея. Дополнительное построение: опустить перпендикуляр из центра меньшей окружности на радиус, проведённый в точку касания большей окружности с внешней касательной.
Указание. Провести дополнительное построение: опустить перпендикуляр из центра меньшей окружности на радиус, проведённый в точку касания большей окружности с внешней касательной.
Указание. Длина получившегося перпендикуляра равна длине отрезка касательной. Найти его по теореме Пифагора.

Решение. Пусть A, B – центры окружностей, а C, D – точки касания окружностей с общей внешней касательной, соответственно. Надо найти длину отрезка CD. Опустим перпендикуляр AF на радиус BD. Так как $ACDF$ – прямоугольник, то $AF = CD$. Длину отрезка AF легко найти по теореме Пифагора из треугольника $ABF (AB = R + r, BF = R - r)$:

$$AF^2 = AB^2 - BF^2 \implies AF = 2\sqrt{Rr}.$$

Если $R = r$, то длина отрезка касательной равна расстоянию между центрами окружностей, то есть $2R$, что также равно $2\sqrt{Rr}$.

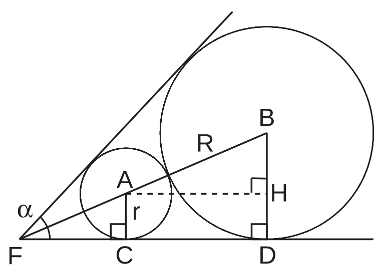
З а м е ч а н и е. Дополнительное построение, проведённое в этой задаче, является классическим (часто используемым) в задачах с двумя касающимися окружностями.

О т в е т. $2\sqrt{Rr}$.

Задача 10.

В угол, величина которого равна α, вписаны две окружности, касающиеся друг друга и сторон угла. Определить отношение большего радиуса к меньшему.

И д е я. С помощью дополнительного построения получить прямоугольный треугольник, гипотенуза и катет которого выражаются через радиусы данных окружностей, а острый угол – через α.
У к а з а н и е. Провести радиусы в точки касания окружностей с одной из сторон угла и перпендикуляр из точки меньшей окружности к радиусу большей.
У к а з а н и е. Выразить гипотенузу и катет полученного прямоугольного треугольника через радиусы данных окружностей, а острый угол – через α.



Р е ш е н и е. Пусть A, B – центры окружностей с радиусами r и R. Пусть C, D – точки касания этих окружностей с одной из сторон угла с вершиной F величины α, а точка H – основание перпендикуляра, проведённого из точки A к отрезку BD.

Так как центры вписанных в угол окружностей лежат на его биссектрисе, то углы $\angle BAH = \angle BFD = \dfrac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника BAH получим

$$\frac{BH}{AB} = \sin\frac{\alpha}{2} \iff \frac{R-r}{R+r} = \sin\frac{\alpha}{2} \iff R-r = (R+r)\sin\frac{\alpha}{2} \iff$$

$$\iff R\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right) = r\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right) \iff \frac{R}{r} = \frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

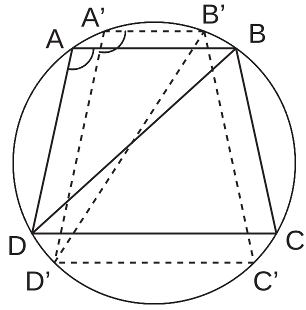
О т в е т. $\dfrac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 11.

В круг вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций равны.

И д е я. Использовать свойство вписанных углов: равным вписанным углам соответствуют равные хорды, на которые они опираются.
У к а з а н и е. Доказать, что углы трапеций, образованные соответственно параллельными сторонами, равны.

Указание. Использовать следствие из теоремы о вписанном угле: равным вписанным углам соответствуют равные хорды, на которые они опираются.



Решение. Рассмотрим вписанные в круг трапеции $ABCD$ и $A'B'C'D'$ с соответственно параллельными сторонами: $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$, $AD \parallel A'D'$.

Поскольку соответственные стороны трапеций параллельны, соответственные углы равны. В частности, $\angle A = \angle A'$.

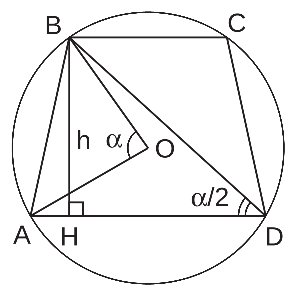
Равным вписанным углам соответствуют равные хорды, на которые они опираются, поэтому $BD = B'D'$.

Наконец, заметим, что любая вписанная в окружности трапеция является равнобедренной, поэтому $AC = BD$, $A'C' = B'D'$.

Утверждение доказано.

Задача 12.

Вычислите площадь равнобедренной трапеции, если её высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом α.



Идея. Использовать теорему о вписанном угле.
Указание. По теореме о вписанном угле выразить угол между диагональю трапеции и основанием.
Указание. Провести высоту к основанию трапеции; из прямоугольного треугольника по высоте и углу найти второй катет, который равен полусумме оснований.

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$, вписанную в окружность с центром O. По условию $\angle AOB = \alpha$. Центральному углу AOB соответствует вписанный угол ADB, поэтому $\angle ADB = \dfrac{\alpha}{2}$.

Опустим высоту BH из вершины B на основание AD; $BH = h$. Площадь трапеции будем считать по формуле

$$S_{ABCD} = h \cdot \frac{AD + BC}{2} = h \cdot HD.$$

Здесь использован тот факт, что если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная, поэтому $HD = (AD + BC)/2$. Длину отрезка HD найдём из прямоугольного треугольника BHD:

$$HD = h \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad \Longrightarrow \quad S_{ABCD} = h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Замечание. Для нахождения площади трапеции можно было воспользоваться формулой площади произвольного четырёхугольника $S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma$, где d_1 и d_2 – диагонали, а γ – угол между ними. В нашем случае

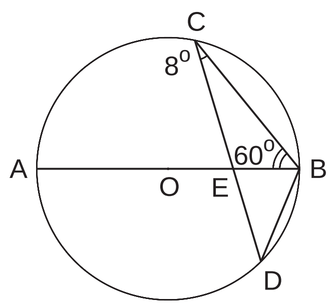
$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{h}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{h}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = h^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ. $h^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Задача 13.

В окружности диаметра 4 проведены диаметр AB и хорда CD, пересекающиеся в точке E. Известно, что $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCE = 8^\circ$. Найти длину CE.

Идея. Дважды использовать теорему синусов.
Указание. Найти $\angle BDC$ и, используя теорему синусов для ΔBCD, найти BC.
Указание. По теореме синусов из ΔBCE найти CE.



Решение. Так как $\angle ABC = 60^\circ$, то дуга AC равна 120°. Следовательно, дуга BC равна 60°. Значит, $\angle BDC = 30^\circ$. Тогда по теореме синусов из ΔBCD находим BC:

$$BC = 4\cdot\sin 30^\circ = 2\,.$$

Теперь по теореме синусов из ΔBCE находим CE:

$$\frac{CE}{\sin\angle CBE} = \frac{BC}{\sin\angle BEC} \quad\Longleftrightarrow\quad CE = \frac{2\cdot\sin 60^\circ}{\sin(180^\circ - 68^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 68^\circ}\,.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 68^\circ}$.

*Задача 14.**

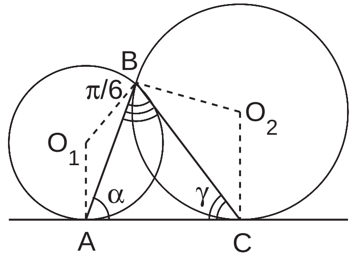
В треугольнике ABC $\angle B = \pi/6$. Через точки A и B проведена окружность радиуса 2, касающаяся прямой AC в точке A. Через точки B и C проведена окружность радиуса 3, касающаяся прямой AC в точке C. Найти длину стороны AC.

Идея. *Первый способ.* Воспользоваться теоремой об угле между хордой и касательной и теоремой синусов.
Указание. Используя теорему об угле между хордой и касательной и свойства равнобедренных треугольников, выразить стороны AB и BC треугольника ABC через его углы.

Указание. Выразить стороны AB и BC через радиус окружности, описанной вокруг ΔABC, используя теорему синусов.

Указание. Приравняв произведение длин сторон, вычислить радиус описанной окружности.

Указание. По теореме синусов из ΔABC найти AC.



Решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. В окружности с центром O_1 радиуса 2 мера одной из двух дуг $\smile{AB}$ равна 2α. Значит,

$$AB = 2 \cdot O_1B \cdot \sin\alpha = 4\sin\alpha.$$

Аналогично

$$BC = 2 \cdot O_2B \cdot \sin\gamma = 6\sin\gamma.$$

С другой стороны, по теореме синусов из ΔABC

$$AB = 2R\sin\gamma,\ BC = 2R\sin\alpha,$$

где R – радиус окружности, описанной около ΔABC. Получаем

$$AB \cdot BC = 24\sin\alpha\sin\gamma = 4R^2\sin\alpha\sin\gamma \quad \Longrightarrow \quad R = \sqrt{6}.$$

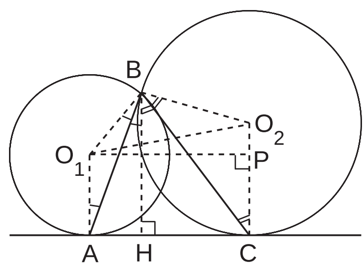
По теореме синусов для ΔABC находим

$$AC = 2R\sin\frac{\pi}{6} = R = \sqrt{6}.$$

Идея. *Второй способ.* Рассмотреть треугольник O_1O_2P, где O_1 и O_2 – центры данных окружностей, а P – основание перпендикуляра, проведённого из точки O_1 к радиусу O_2C.

Указание. Найти градусную меру угла O_1BO_2 и по теореме косинусов найти длину отрезка O_1O_2.

Указание. По теореме Пифагора найти длину отрезка O_1P из прямоугольного треугольника O_1O_2P.



Решение. Проведём высоту BH в треугольнике ABC и перпендикуляр O_1P к радиусу O_2C. Заметим, что $AC = O_1P$, а для нахождения O_1P (по теореме Пифагора из треугольника O_1O_2P) нам потребуется длина отрезка O_1O_2.

Для того, чтобы найти O_1O_2 по теореме косинусов из треугольника O_1BO_2 нам надо найти угол O_1BO_2.

Воспользуемся равенством углов при основании равнобедренного треугольника и равенством накрест лежащих углов при параллельных прямых:

$$\angle O_1BA = \angle O_1AB = \angle ABH, \quad \angle O_2BC = \angle O_2CB = \angle CBH.$$

По условию задачи $\angle ABH + \angle CBH = \pi/6$, следовательно,

$$\angle O_1BO_2 = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

По теореме косинусов из треугольника O_1BO_2 :

$$O_1O_2^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 4 + 9 - 6 = 7.$$

По теореме Пифагора из треугольника O_1O_2P:

$$O_1P^2 = O_1O_2^2 - O_2P^2 = 7 - 1 = 6.$$

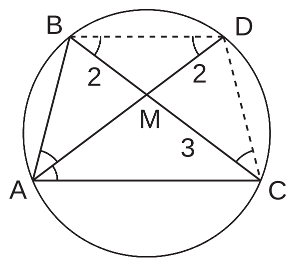
Следовательно, $AC = O_1P = \sqrt{6}$.

О т в е т. $\sqrt{6}$.

Задача 15.

AM – биссектриса треугольника ABC, $BM = 2$, $CM = 3$, D – точка пересечения AM с окружностью, описанной около данного треугольника, $MD = 2$. Найти AB.

И д е я. Использовать свойство вписанных углов.
У к а з а н и е. Используя свойство вписанных углов и условие задачи, найти все равные углы.
У к а з а н и е. Используя признак равнобедренных треугольников, показать, что $AB = BD$.
У к а з а н и е. Используя подобие треугольников BDC и BMD, найти BD.



Р е ш е н и е. Так как AD – биссектриса угла BAC, то $\angle BAD = \angle CAD$. В силу равенства углов, опирающихся на одну и ту же или равные дуги, получаем

$$\angle DBC = \angle DAC = \angle BAD = \angle BCD.$$

Поскольку $BM = MD$ по условию, то треугольник BMD равнобедренный и, следовательно, $\angle ADB = \angle DBC$. Отсюда следует, что и треугольник ABD тоже равнобедренный, то есть $AB = BD$.

Значит, можно искать не AB, а BD, что легко сделать, учитывая подобие треугольников BDC и BMD (по двум углам):

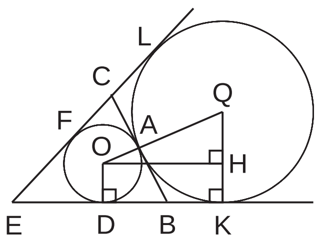
$$\frac{BD}{BC} = \frac{BM}{BD} \quad \Longrightarrow \quad BD = \sqrt{10}.$$

З а м е ч а н и е. При решении геометрических задач часто применяют подобный ход: сводят задачу к поиску того, что проще искать.

О т в е т. $\sqrt{10}$.

Задача 16.

Окружности радиусов 2 и 3 внешним образом касаются друг друга в точке A. Их общая касательная, проходящая через точку A, пересекает две другие их общие касательные в точках B и C. Найти BC.



Идея. Показать, что BC равно расстоянию между точками касания внешней касательной с окружностями.
Указание. Показать, что BC равно расстоянию между точками касания внешней касательной с окружностями.
Указание. Провести дополнительное построение: опустить перпендикуляр из центра меньшей окружности на радиус, проведённый в точку касания большей окружности с внешней касательной.
Указание. Длина получившегося перпендикуляра равна длине отрезка касательной. Найти его по теореме Пифагора.

Решение. Пусть O, Q – центры меньшей и большей окружностей, D, K, F, L – точки касания окружностей с внешними касательными, а E – точка пересечения внешних касательных. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $ED = EF$, $EK = EL$, следовательно, $DK = FL$.

По той же причине $BD = BA = BK$ и $CF = CA = CL$. Значит, $BC = DK = FL$, поэтому вместо BC можно искать DK.

Опустим перпендикуляр OH на радиус QK. Так как $ODKH$ – прямоугольник, то $DK = OH$. Значит, чтобы найти BC, можно искать OH, а это легко сделать по теореме Пифагора из ΔOQH:

$$OH = \sqrt{OQ^2 - QH^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}\,.$$

Замечание. Заметьте, мы снова применили этот трюк: свели задачу к поиску того, что проще искать.

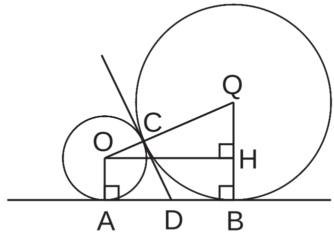
Ответ. $2\sqrt{6}$.

Задача 17.

Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке C. Радиусы окружностей равны 2 и 7. Общая касательная к обеим окружностям, проведённая через точку C, пересекается с другой их общей касательной в точке D. Найти расстояние от центра меньшей окружности до точки D.

Идея. Показать, что точка D делит отрезок между точками касания внешней касательной пополам.
Указание. Используя свойство отрезков касательных, проведённых из одной точки к окружности, показать, что точка D делит отрезок между точками касания внешней касательной пополам.

Указание. Провести дополнительное построение: опустить перпендикуляр из центра меньшей окружности на радиус, проведённый в точку касания с внешней касательной, большей окружности.
Указание. Длина получившегося перпендикуляра равна длине отрезка касательной. Найти его по теореме Пифагора.



Решение. Пусть O, Q – центры меньшей и большей окружностей соответственно, а A, B – их точки касания с внешней касательной. Поскольку известен радиус $AO = 2$, то для нахождения OD не хватает только AD. По свойству касательных, проведённых из одной точки к окружности, получаем, что $AD = DC = DB$, то есть $AD = AB/2$. Опустим перпендикуляр OH на радиус QB. Так как $ABHO$ – прямоугольник, то $AB = OH$. Отрезок OH находим по теореме Пифагора из ΔOQH:

$$OH = \sqrt{OQ^2 - QH^2} = \sqrt{9^2 - 5^2} = 2\sqrt{14}$$

Значит, $AD = \sqrt{14}$. Тогда по теореме Пифагора из ΔADO находим OD:

$$OD = \sqrt{OA^2 + AD^2} = 3\sqrt{2}\,.$$

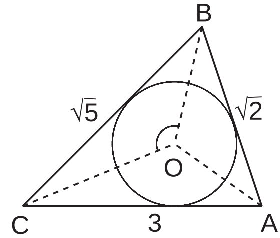
Замечание. Если заметить то, что треугольник ODQ является прямоугольным с прямым углом D и высотой DC, то катет OD можно выразить через его проекцию на гипотенузу и саму гипотенузу следующим образом:

$$OD = \sqrt{OC \cdot OQ} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}.$$

Ответ. $3\sqrt{2}$.

Задача 18.

В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ и $AC = 3$. Сравните величину угла BOC и $112{,}5^\circ$, если O – центр вписанной в треугольник ABC окружности.



Идея. Воспользоваться теоремой об окружности, вписанной в треугольник: центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис.
Указание. Используя свойство вписанной окружности и теорему о сумме внутренних углов треугольника, выразить искомый угол через $\angle BAC$.
Указание. По теореме косинусов найти $\angle BAC$.

Решение. Величину угла BOC можно найти из ΔBOC, используя свойство вписанной окружности и теорему о сумме внутренних углов треугольника:

$$\angle BOC = 180^\circ - \frac{\angle ABC}{2} - \frac{\angle ACB}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}\,(180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}.$$

Неизвестную величину $\angle BAC$ определим по теореме косинусов для ΔABC:

$$\cos\angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{2+9-5}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $\angle BAC = 45^\circ$. Подставляем:

$$\angle BOC = 90^\circ + \frac{45^\circ}{2} = 112{,}5^\circ.$$

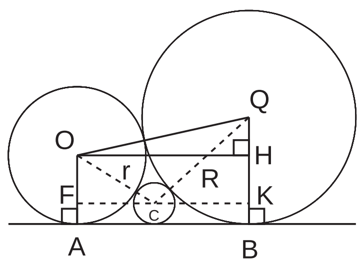
Ответ. $\angle BOC = 112{,}5^\circ$.

*Задача 19.**

Найти радиус окружности, которая касается двух окружностей, касающихся друг друга внешним образом, радиусов r и R и отрезка их общей касательной.

Идея. Выполнив дополнительные построения, воспользоваться свойством касательной к окружности и теоремой Пифагора.
Указание. Дополнительное построение: провести прямые, параллельные общей касательной первых двух окружностей и проходящие через центры окружности меньшего радиуса и третьей окружности.
Указание. Воспользовавшись теоремой Пифагора, выразить длину отрезка общей касательной через радиусы двумя различными способами; из полученного соотношения найти искомую величину.

Решение. Рассмотрим две окружности с центрами O и Q и радиусами соответственно r и R, касающиеся друг друга внешним образом. Пусть AB – отрезок их общей внешней касательной. Обозначим через C центр третьей окружности, радиус x которой необходимо найти. Проведём прямые FK и OH, параллельные AB. Они будут перпендикулярны радиусу QB, проведённому в точку касания. Из прямоугольного треугольника OQH:



$$OH^2 = OQ^2 - QH^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr \quad\Longrightarrow\quad OH = AB = 2\sqrt{Rr}.$$

С другой стороны,

$$AB = FK = FC + CK;$$

из ΔFOC и ΔKQC:

$$FC^2 = OC^2 - OF^2 = (r+x)^2 - (r-x)^2 = 4rx \quad\Longrightarrow\quad FC = 2\sqrt{rx};$$

$$KC^2 = QC^2 - QK^2 = (R+x)^2 - (R-x)^2 = 4Rx \quad\Longrightarrow\quad KC = 2\sqrt{Rx}.$$

Итак,

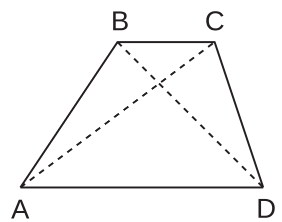
$$2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{rx} + 2\sqrt{Rx} \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}.$$

Ответ. $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$.

Задача 20.[*]

$ABCD$ – трапеция. Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, BCD и ACD, равны R_1, R_2 и R_3 соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABD.

И д е я. Воспользоваться теоремой синусов.
У к а з а н и е. Записать теорему синусов для четырёх треугольников, основаниями которых являются боковые стороны трапеции.
У к а з а н и е. Из полученных соотношений выразить длины боковых сторон.



Р е ш е н и е. Рассмотрим трапецию $ABCD$. Заметим, что $\angle ACB = \angle CAD$, $\angle CBD = \angle ADB$ как накрест лежащие при параллельных прямых. Применим теорему синусов к ΔABC, ΔBCD, ΔACD и ΔABD:

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = 2R_1; \quad \frac{CD}{\sin\angle CBD} = 2R_2;$$

$$\frac{CD}{\sin\angle CAD} = 2R_3; \quad \frac{AB}{\sin\angle ADB} = 2R_4.$$

Выразим длины боковых сторон трапеции и приравняем полученные выражения:

$$R_1 \sin\angle ACB = R_4 \sin\angle ADB;$$

$$R_2 \sin\angle CBD = R_3 \sin\angle CAD.$$

Перемножив эти равенства и сократив равные значения синусов, получим

$$R_1R_2 = R_3R_4 \quad \Longrightarrow \quad R_4 = \frac{R_1R_2}{R_3}.$$

О т в е т. $\dfrac{R_1R_2}{R_3}$.

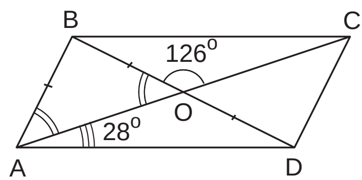
3. Многоугольники

3.1. Параллелограммы

Задача 1.

В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, причём $\angle COB = 126^\circ$, $\angle CAD = 28^\circ$, и длина отрезка BD вдвое больше стороны AB. Найдите угол D параллелограмма.

Идея. Использовать свойство точки пересечения диагоналей параллелограмма.
Указание. Используя свойство смежных углов, найти угол AOB.
Указание. Используя свойство точки пересечения диагоналей параллелограмма, показать, что треугольник ABO – равнобедренный; найти угол BAO.



Решение. Так как в параллелограмме

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle BAD,$$

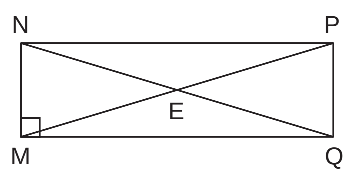
то будем искать $\angle BAD$. Рассмотрим $\triangle ABO$. Он равнобедренный, так как по свойству точки пересечения диагоналей параллелограмма BO равна половине BD, а, значит, по условию, равна AB. Поэтому $\angle BAO = \angle BOA$. Так как $\angle BOA$ и $\angle BOC$ являются смежными, то $\angle BOA = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$. Значит, $\angle BAD = 54^\circ + 28^\circ = 82^\circ$. Отсюда получаем $\angle ADC = 98^\circ$.

Ответ. 98° .

Задача 2.

В прямоугольнике $MNPQ$ сторона MN в 6 раз меньше диагонали NQ. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке E. Периметр треугольника NEM равен 35 см. Найдите диагональ MP.

Идея. Использовать свойство точки пересечения диагоналей параллелограмма.
Указание. Обозначить $NM = x$ и выразить две другие стороны треугольника NEM через x.
Указание. Диагонали прямоугольника равны и делятся точкой пересечения пополам.



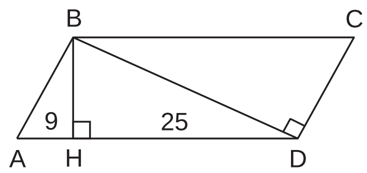
Решение. Так как диагонали прямоугольника равны, то будем искать диагональ NQ. Обозначим $NM = x$, тогда $NQ = 6x$. Так как диагонали в прямоугольнике делятся точкой пересечения пополам, то $NE = 3x$. Тогда и $ME = 3x$. Значит, периметр треугольника NEM равен $7x$. Следовательно, $x = 5$ см, поэтому $MP = NQ = 6x = 30$ см.

Ответ. 30 см.

Задача 3.

Найдите площадь параллелограмма, если его меньшая диагональ перпендикулярна боковой стороне, и высота, проведённая из вершины тупого угла параллелограмма, делит большую сторону на отрезки 9 см и 25 см.

Идея. Найти высоту параллелограмма из прямоугольного треугольника.
Указание. Используя известную формулу для высоты прямоугольного треугольника (см. параграф 1.1), найти высоту параллелограмма.



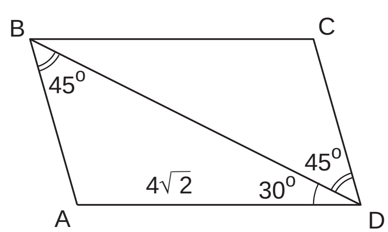
Решение. Так как меньшая диагональ параллелограмма соединяет вершины его тупых углов, то картинка такая, как на рисунке. Чтобы найти площадь параллелограмма, нам не хватает только высоты BH. Заметим, что высота параллелограмма BH является и высотой прямоугольного треугольника ABD. Используя известную формулу для высоты прямоугольного треугольника (см. параграф 1.1), найдём её:

$$BH^2 = AH \cdot HD \quad \Longrightarrow \quad BH = 15 \quad \Longrightarrow \quad S_{ABCD} = AD \cdot BH = 34 \cdot 15 = 510.$$

Ответ. 510 см^2.

Задача 4.

В параллелограмме $ABCD$ сторона $AD = 4\sqrt{2}$, $\angle ADB = 30^\circ$, $\angle BDC = 45^\circ$. Найдите длину стороны AB.



Идея. Использовать теорему синусов для треугольника ABD.
Указание. Используя свойство углов при параллельных прямых, найти угол ABD.
Указание. Использовать теорему синусов для треугольника ABD.

Решение. В треугольнике ABD нам не хватает только угла ABD, чтобы по теореме синусов найти сторону AB.

По свойству углов при параллельных прямых $\angle ABD = \angle BDC = 45^\circ$. Тогда по теореме синусов для треугольника ABD находим AB:

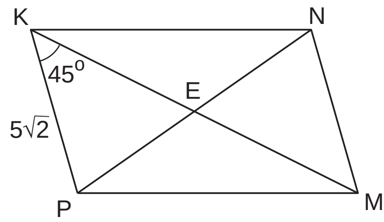
$$\frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{AD}{\sin\angle ABD} \quad \Longrightarrow \quad AB = 4\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Ответ. 4.

Задача 5.

Найдите площадь параллелограмма $MPKN$, если $\angle PKM = 45°$, $PK = 5\sqrt{2}$, $PN = 26$.

Идея. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.
Указание. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.
Указание. Используя теорему косинусов для треугольника PKE, найти KE.



Решение. Так как диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника, то для нахождения площади параллелограмма не хватает диагонали KM (и тогда можно найти площадь треугольника PKM, а, значит, и площадь всего параллелограмма) или угла KPN. Проще найти диагональ KM. Так как диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, то достаточно найти KE, где E – точка пересечения диагоналей.

Запишем теорему косинусов для треугольника PKE:

$$PE^2 = PK^2 + KE^2 - 2 \cdot PK \cdot KE \cdot \cos\angle PKE \iff$$

$$\iff KE^2 - 10 \cdot KE - 119 = 0 \implies KE = 17 \implies KM = 34.$$

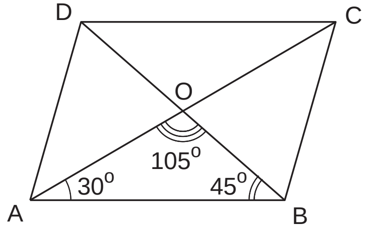
Теперь легко найти площадь параллелограмма:

$$S_{MPKN} = 2 \cdot S_{PKM} = PK \cdot KM \cdot \sin\angle PKM = 170.$$

Ответ. 170.

Задача 6.

В параллелограмме $ABCD$ диагональ $BD = a$, O – точка пересечения диагоналей. Найти площадь параллелограмма, если $\angle DBA = 45°$, а $\angle AOB = 105°$.



Идея. Воспользоваться формулой площади произвольного четырёхугольника через полупроизведение диагоналей на синус угла между ними.
Указание. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, поэтому достаточно найти половину второй диагонали.
Указание. Найти AO по теореме синусов из треугольника ABO.

Решение. Так как известна одна диагональ параллелограмма и угол между диагоналями, то для нахождения площади параллелограмма не хватает второй диагонали. Поскольку диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, то достаточно найти половину второй диагонали. Это легко сделать по теореме синусов из треугольника ABO, так как в нём известна одна сторона и все углы ($\angle BAO = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$):

$$\frac{AO}{\sin\angle ABO} = \frac{BO}{\sin\angle BAO} \quad\Longrightarrow\quad AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad\Longrightarrow\quad AC = a\sqrt{2}\,.$$

Для вычисления площади параллелограмма воспользуемся формулой площади произвольного четырёхугольника через полупроизведение диагоналей на синус угла между ними. Вычислим сначала $\sin 105^\circ$:

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ + \cos 60^\circ\cdot\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\,.$$

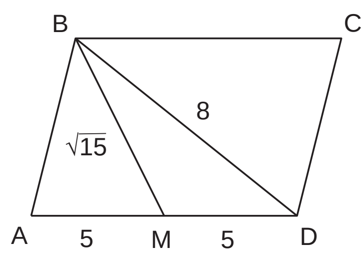
Теперь вычислим площадь параллелограмма:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{a^2(\sqrt{3}+1)}{4}\,.$$

Ответ. $\dfrac{a^2(\sqrt{3}+1)}{4}$.

Задача 7.

Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AD = 10$, $BD = 8$, а отрезок, соединяющий вершину B с серединой стороны AD, равен $\sqrt{15}$.



Идея. Использовать формулу для медианы.

Указание. Записав формулу медианы для треугольника ABD, найти недостающую сторону AB.

Решение. Для нахождения периметра параллелограмма не хватает стороны AB. Её легко найти из треугольника ABD, в котором известны две стороны AD, BD и медиана BM, где M – середина стороны AD. Запишем формулу для медианы (см. параграф 1.3):

$$BM^2 = \frac{BD^2 + BA^2}{2} - \frac{AD^2}{4} \quad\Longleftrightarrow\quad 15 = \frac{64 + BA^2}{2} - 25 \quad\Longrightarrow\quad BA = 4.$$

Зная стороны параллелограмма, находим периметр:

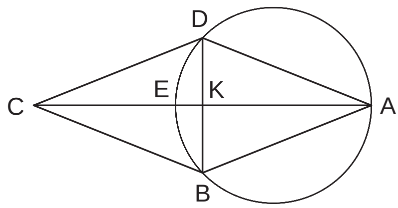
$$P_{ABCD} = 2\cdot(AB + AD) = 28\,.$$

Ответ. 28.

Задача 8.

Дан ромб $ABCD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает большую диагональ ромба AC в точке E. Найдите CE, если $AB = 8\sqrt{5}, BD = 16$.

Идея. Использовать свойство пересекающихся хорд.
Указание. Записать теорему Пифагора для $\triangle ABK$, где K – точка пересечения диагоналей ромба.
Указание. Воспользоваться свойством пересекающихся хорд и найти KE.



Решение. Пусть K –– точка пересечения диагоналей. Так как диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам, то $BK = 8$. По теореме Пифагора из $\triangle ABK$ найдём AK:

$$AK^2 = AB^2 - BK^2 = (8\sqrt{5})^2 - 8^2 = 8^2(5-1) = 16^2 \quad\Longrightarrow\quad AK = 16.$$

Используя свойство пересекающихся хорд, получим

$$DK \cdot KB = AK \cdot KE \quad\Longleftrightarrow\quad 8 \cdot 8 = 16 \cdot KE \quad\Longrightarrow\quad KE = 4.$$

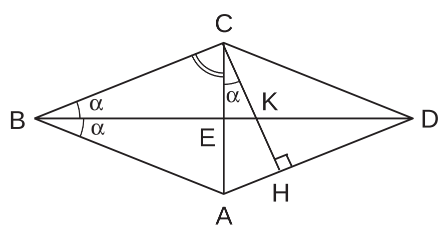
Теперь найдём CE: $CE = CK - KE = 16 - 4 = 12$.

Ответ. 12.

Задача 9.

Дан ромб $ABCD$ с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

Идея. Длину отрезка CK искать из треугольника BCK.
Указание. Показать, что $\angle BCK$ прямой.
Указание. Из $\triangle BCK$ определить CK через сторону ромба.
Указание. Сторону ромба BC найти, зная его площадь и острый угол.



Решение. Так как $AD \parallel BC$, то высота CH перпендикулярна не только стороне AD, но и стороне BC. Значит, треугольник BCK прямоугольный, поэтому

$$CK = BC \cdot \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{где} \quad \alpha = \angle CBK = \angle ABK.$$

Сторону ромба BC найдём, зная его площадь и острый угол:

$$320 = BC^2 \cdot \sin\angle B \quad\Longrightarrow\quad BC = 20\,.$$

Так как $\angle B = 2\alpha$, то легко найти $\operatorname{tg}\alpha$:

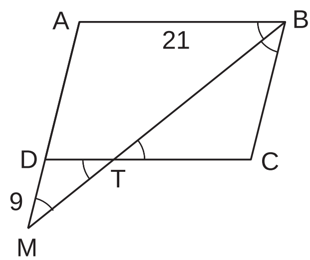
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = 0,5\,.$$

Таким образом, $CK = BC \cdot \operatorname{tg}\alpha = 10$.

Ответ. 10.

Задача 10.

В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M. Найдите периметр треугольника CBT, если $AB = 21$, $BM = 35$, $MD = 9$.



Идея. Использовать равенство углов при параллельных прямых.
Указание. Используя равенство углов при параллельных прямых, показать, что $\triangle BCT$ и $\triangle MDT$ – равнобедренные с равными углами.
Указание. Используя подобие $\triangle BCT$ и $\triangle MDT$, найти BT.

Решение. Так как BM – биссектриса угла B, то $\angle ABT = \angle CBT$. Так как $AB||DC$, то $\angle ABT = \angle BTC$. Значит, треугольник BCT – равнобедренный. Далее, так как $AM||BC$, то $\angle AMT = \angle CBT$, но $\angle MTD = \angle BTC$ как вертикальные. Значит, $\triangle MDT$ – тоже равнобедренный, причём он подобен $\triangle BCT$.

Из равнобедренности $\triangle MDT$ получаем, что $DT = MD = 9$. Следовательно, $CT = DC - DT = 12$, а, значит, и $BC = CT = 12$. Из подобия $\triangle BCT$ и $\triangle MDT$ находим BT:

$$\frac{BT}{MT} = \frac{BC}{DM} \quad \Longrightarrow \quad \frac{BT}{MT} = \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad BT = \frac{4}{7}\cdot BM = 20.$$

Таким образом, получаем

$$P_{BCT} = 2\cdot BC + BT = 2\cdot 12 + 20 = 44\,.$$

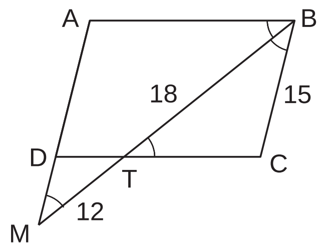
Ответ. 44.

Задача 11.

В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M. Найдите периметр треугольника ABM, если $BC = 15$, $BT = 18$, $TM = 12$.

Идея. Использовать равенство углов при параллельных прямых.

У к а з а н и е. Используя равенство углов при параллельных прямых, показать, что $\triangle BCT$ и $\triangle ABM$ – равнобедренные с равными углами.
У к а з а н и е. Используя подобие $\triangle BCT$ и $\triangle ABM$, найти AB.



Р е ш е н и е. Так как BM – биссектриса угла B, то $\angle ABT = \angle CBT$. Так как $AB||DC$, то $\angle ABT = \angle BTC$. Значит, треугольник BCT – равнобедренный. Далее, так как $AM||BC$, то $\angle AMT = \angle CBT$. Значит, $\triangle ABM$ – тоже равнобедренный, причём он подобен $\triangle BCT$.

Из подобия $\triangle BCT$ и $\triangle ABM$ находим AB:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MB}{BT} \quad \Longrightarrow \quad \frac{AB}{15} = \frac{30}{18} \quad \Longrightarrow \quad AB = 25.$$

Так как $\triangle ABM$ – равнобедренный, то получаем

$$P_{ABM} = 2 \cdot AB + BM = 2 \cdot 25 + 30 = 80\,.$$

О т в е т. 80.

Задача 12.

Доказать, что из всех прямоугольников с данной диагональю наибольшую площадь имеет квадрат.

И д е я. Записать площадь прямоугольника через полупроизведение диагоналей на синус угла между ними.
У к а з а н и е. Записав площадь прямоугольника через полупроизведение диагоналей на синус угла между ними, показать, что наибольшую площадь будет иметь прямоугольник, диагонали которого перпендикулярны.

Р е ш е н и е. Запишем площадь прямоугольника через полупроизведение диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \sin\alpha \le \frac{1}{2} \cdot d^2.$$

Следовательно, наибольшую площадь будет иметь прямоугольник, диагонали которого перпендикулярны, то есть квадрат.

Задача 13.

Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке K, причём $AM = 10$, $BK = 6$. Найдите площадь четырёхугольника $ABMK$.

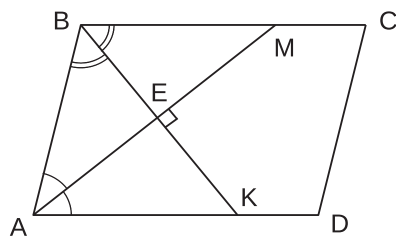
И д е я. Использовать определение биссектрисы.

Указание. Используя определение биссектрисы, показать, что диагонали четырёхугольника $ABMK$ перпендикулярны.

Решение. Так как AM и BK являются диагоналями четырёхугольника $ABMK$, то для того, чтобы найти его площадь, не хватает только угла между этими диагоналями, а его легко найти из $\triangle ABE$, где E – точка пересечения AM и BK:

$$\angle BEA = 180^\circ - (\angle BAE + \angle ABE) =$$

$$= 180^\circ - \frac{\angle DAB + \angle ABC}{2} = 90^\circ,$$



так как в параллелограмме сумма соседних углов равна 180°. Значит, диагонали четырёхугольника $ABMK$ перпендикулярны. Поэтому

$$S_{ABMK} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BK = 30\,.$$

Ответ. 30.

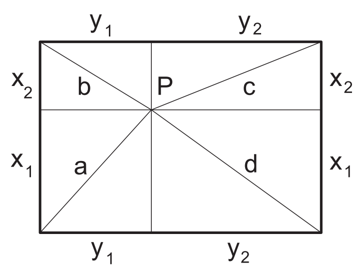
*Задача 14.**

Расстояния от точки P, находящейся внутри прямоугольника, до трёх его вершин равны соответственно a, b и c. Найдите расстояние от точки P до четвёртой вершины прямоугольника.

Идея. Провести через точку P прямые, параллельные сторонам прямоугольника, и применить несколько раз теорему Пифагора.

Указание. Обозначить расстояния от точки P до сторон прямоугольника через x_1, x_2, y_1, y_2 и четыре раза записать теорему Пифагора.

Решение. Опустим из точки P перпендикуляры на стороны прямоугольника и обозначим полученные отрезки через x_1, x_2, y_1, y_2. Искомый отрезок d можно выразить с помощью теоремы Пифагора: $d^2 = x_1^2 + y_2^2$. Из теоремы Пифагора, применённой к треугольникам с гипотенузами a, b, c следует, что



$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = a^2, \\ x_2^2 + y_1^2 = b^2, \\ x_2^2 + y_2^2 = c^2. \end{cases}$$

Если из суммы первого и третьего уравнений вычесть второе, то получим, что

$$x_1^2 + y_2^2 = a^2 + c^2 - b^2 \quad \Longrightarrow \quad d^2 = a^2 + c^2 - b^2\,.$$

Ответ. $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.

Задача 15.*

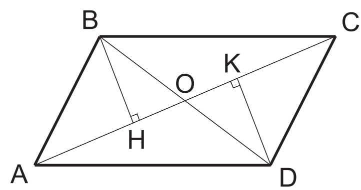
Доказать, что если каждая из диагоналей выпуклого четырёхугольника делит его на равновеликие треугольники, то этот четырёхугольник – параллелограмм.

Идея. Доказать, что диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам.
Указание. Показать, что перпендикуляры, опущенные из противолежащих вершин на диагональ, равны.

Решение. Пусть диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, $S_{ABC} = S_{ACD}$, $S_{ABD} = S_{BCD}$. Опустим перпендикуляры из точек B и D на диагональ AC.

Так как $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BH$ и $S_{ACD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot DK$, то $BH = DK$.

Следовательно, треугольник BHO равен треугольнику DKO (по катету и острому углу), поэтому $BO = OD$.



Аналогично доказывается, что $AO = OC$.

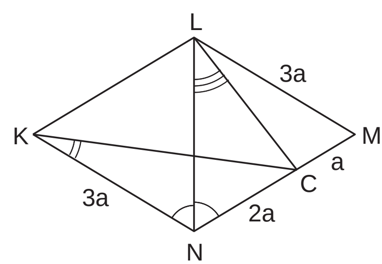
Таким образом, диагонали четырёхугольника $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам и, следовательно, он является параллелограммом.

Задача 16.*

Точка C лежит на стороне MN ромба $KLMN$, причём $CN = 2CM$ и $\angle MNK = 120°$. Найти отношение $\cos\angle CKN : \cos\angle CLN$.

Идея. Выразить $\cos\angle CKN$ и $\cos\angle CLN$ по теореме косинусов из треугольников CKN и CLN.
Указание. Обозначить сторону ромба за $3a$ и выразить стороны треугольников CKN и CLN через a.
Указание. Используя теорему косинусов, найти требуемые косинусы углов.

Решение. Можно выразить $\cos\angle CKN$ и $\cos\angle CLN$ по теореме косинусов из треугольников CKN и CLN. Для этого надо все стороны этих треугольников выразить через сторону ромба. Обозначим сторону ромба за $3a$. Тогда из условия задачи получим, что $CN = 2a$, $CM = a$. Найдём из $\triangle CKN$ по теореме косинусов сначала сторону KC, а затем косинус угла CKN:



$$KC^2 = KN^2 + CN^2 - 2 \cdot KN \cdot CN \cdot \cos\angle KNC = 19a^2 \implies KC = \sqrt{19}a\,.$$

$$CN^2 = KN^2 + CK^2 - 2 \cdot KN \cdot CK \cdot \cos\angle CKN \implies \cos\angle CKN = \frac{4}{\sqrt{19}}\,.$$

Так как $\angle MNK = 120°$, то $\triangle LMN$ – равносторонний. Следовательно, $LN = 3a$. Найдём из $\triangle CLN$ по теореме косинусов сначала сторону LC, а затем косинус угла CLN:

$$LC^2 = LN^2 + CN^2 - 2 \cdot LN \cdot CN \cdot \cos\angle LNC = 7a^2 \quad \Longrightarrow \quad LC = \sqrt{7}a\,.$$

$$CN^2 = LN^2 + CL^2 - 2 \cdot LN \cdot CL \cdot \cos\angle CLN \quad \Longrightarrow \quad \cos\angle CLN = \frac{2}{\sqrt{7}}\,.$$

Таким образом, получаем $\dfrac{\cos\angle CKN}{\cos\angle CLN} = \dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{19}}$.

О т в е т. $\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{19}}$.

3.2. Трапеции

Задача 1.

Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

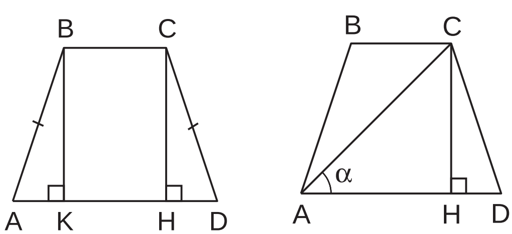
И д е я. Использовать следующий факт: если в равнобедренной трапеции $ABCD$, где BC – меньшее основание, опустить высоту CH, то отрезок AH равен полусумме оснований.

У к а з а н и е. Доказать, что в равнобедренной трапеции $ABCD$ с высотой CH отрезок $AH = (BC + AD)/2$.

У к а з а н и е. AH и CH найти из прямоугольного треугольника ACH.

Р е ш е н и е. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ и докажем сначала одно известное свойство равнобедренной трапеции. Опустим высоты BK, CH и покажем, что $AH = \dfrac{1}{2}(BC + AD)$.

Так как трапеция равнобедренная, то прямоугольные треугольники ABK и DCH равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $AK = \dfrac{1}{2}(AD - BC)$. И так как $KH = BC$, то получаем требуемое.



Зная это свойство, легко найти площадь трапеции, так как из прямоугольного треугольника ACH просто находятся AH и CH. Обозначим угол между диагональю и основанием за α и запишем площадь трапеции с учётом полученного выше равенства:

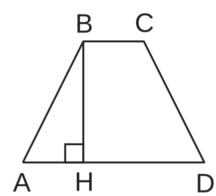
$$S_{ABCD} = AH \cdot CH = AC \cdot \cos\alpha \cdot AC \cdot \sin\alpha = 100 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{100}} = 14\,.$$

О т в е т. 14.

Задача 2.

Найти радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если средняя линия трапеции равна $\sqrt{10}$, а косинус угла при основании трапеции равен $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

И д е я. Если в трапецию вписана окружность, то сумма боковых сторон равна сумме оснований.
У к а з а н и е. Так как в трапецию вписана окружность, то сумма боковых сторон равна сумме оснований. А поскольку трапеция равнобедренная, то боковая сторона равна средней линии.
У к а з а н и е. Высота трапеции является диаметром вписанной окружности.



Р е ш е н и е. По условию в трапецию вписана окружность; значит, сумма боковых сторон равна сумме оснований. А поскольку трапеция равнобедренная, то боковая сторона равна полусумме оснований, то есть равна средней линии. С учётом того, что высота трапеции является диаметром вписанной окружности, задача становится элементарной. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ и опустим высоту BH. С учётом вышеизложенного из условия следует, что $AB = \sqrt{10}$, а $\cos\angle BAH = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Высоту BH находим из прямоугольного треугольника ABH:

$$BH = AB \cdot \sin\angle BAH = \sqrt{10} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = 3 \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{3}{2}\,.$$

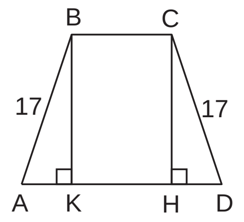
О т в е т. 1,5.

Задача 3.

Около окружности диаметром 15 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17. Найдите длину большего основания трапеции.

И д е я. Показать, что если в равнобедренной трапеции $ABCD$, где BC – меньшее основание, опустить высоту BK, то отрезок AK равен полуразности оснований.
У к а з а н и е. Так как в трапецию вписана окружность, то сумма боковых сторон равна сумме оснований. А поскольку трапеция равнобедренная, то боковая сторона равна полусумме оснований.

Указание. Диаметр вписанной окружности является высотой трапеции.
Указание. Показать, что если в равнобедренной трапеции $ABCD$, где BC – меньшее основание, опустить высоту BK, то отрезок AK равен полуразности оснований.



Решение. Так как в трапецию вписана окружность, то сумма боковых сторон равна сумме оснований. А поскольку трапеция равнобедренная, то боковая сторона равна полусумме оснований. Диаметр вписанной окружности является высотой трапеции. Рассмотрим трапецию $ABCD$ и опустим высоты BK и CH. Покажем, что AK равняется полуразности оснований. Так как трапеция равнобедренная, то прямоугольные треугольники ABK и DCH равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $AK = \dfrac{1}{2}(AD - BC)$. Отрезок AK легко находится по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABK:

$$AK^2 = AB^2 - BK^2 = 17^2 - 15^2 = 8^2 \quad \Longrightarrow \quad AK = 8\,.$$

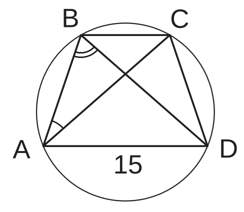
Таким образом, мы знаем полусумму и полуразность оснований трапеции. Обозначим $AD = b, BC = a$. Тогда из вышеизложенного получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{b+a}{2} = 17, \\ \dfrac{b-a}{2} = 8; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad b = 25\,.$$

Ответ. 25.

Задача 4.

Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если её большее основание $AD = 15$, $\sin\angle BAC = 1/3$, $\sin\angle ABD = 5/9$.



Идея. Использовать теорему синусов.
Указание. Искать меньшее основание, используя теорему синусов для треугольников ABD и ABC.

Решение. Поскольку большее основание трапеции дано, то для нахождения средней линии осталось найти меньшее основание. Так как треугольники ABD и ABC вписаны в одну окружность, то по теореме синусов для этих треугольников получаем

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle BAC}, \quad 2R = \frac{AD}{\sin\angle ABD} \quad \Longrightarrow \quad BC = 15 \cdot \frac{1}{3} : \frac{5}{9} = 9.$$

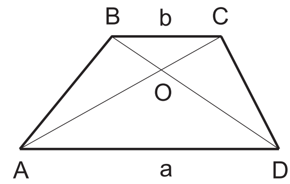
Значит, средняя линия равна $\dfrac{15+9}{2} = 12$.

Ответ. 12.

Задача 5.

По основаниям a и b трапеции определить отношение, в котором её диагонали делят друг друга.

И д е я. Использовать подобие треугольников.
У к а з а н и е. Пусть диагонали трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Тогда $\Delta AOD \sim \Delta COB$.



Р е ш е н и е. Из равенства внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых AD и BC следует, что $\Delta AOD \sim \Delta COD$, следовательно,

$$\frac{a}{b} = \frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB}.$$

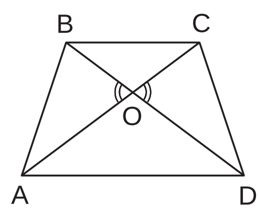
Значит, диагонали делят друг друга в отношении $a : b$.

О т в е т. $a : b$.

Задача 6.

Доказать, что если диагонали трапеции равны, то она является равнобедренной.

И д е я. Использовать подобие треугольников.
У к а з а н и е. Пусть диагонали трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Тогда $\Delta AOD \sim \Delta COB$.
У к а з а н и е. Используя тот факт, что диагонали трапеции равны, показать, что $BO = OC, AO = OD$.

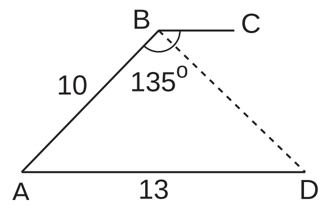


Р е ш е н и е. Так как диагонали трапеции делятся точкой пересечения в одинаковом отношении, то есть $\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{CO}{OA}$ (это следует из подобия ΔBOC и ΔAOD), и диагонали трапеции равны, то $BO = OC, AO = OD$. Значит, треугольники ABO и DCO равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AB = CD$, что и требовалось доказать.

Задача 7.

В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна 10, длина основания AD равна 13, а $\angle ABC = 135°$. Выяснить, что больше: длина стороны AB или длина диагонали BD.

И д е я. Использовать теорему косинусов для нахождения диагонали BD.
У к а з а н и е. Найти $\angle BAD$.
У к а з а н и е. Использовать теорему косинусов для нахождения диагонали BD.



Решение. Так как $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$, а $\angle ABC = 135^\circ$, то а $\angle BAD = 45^\circ$. Тогда по теореме косинусов из треугольника ABD находим BD:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD =$$

$$= 10^2 + 13^2 - 130\sqrt{2}\,.$$

Сравним квадраты длин отрезков AB и BD:

$$\begin{array}{rcl} AB^2 & \vee & BD^2 \\ 10^2 & \vee & 10^2 + 13^2 - 130\sqrt{2} \\ 130\sqrt{2} & \vee & 13^2 \\ 10\sqrt{2} & \vee & 13 \\ 200 & > & 169\,. \end{array}$$

Значит, $AB > BD$.

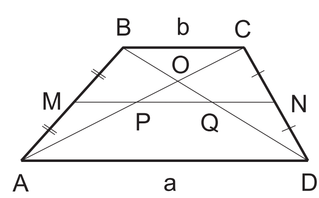
Замечание. На рисунке нет точки C. Исходя из условий задачи, нельзя определить её местоположение, да она и не нужна для нахождения диагонали BD.

Ответ. $AB > BD$.

Задача 8.

Основания трапеции равны a и b. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

Идея. Выразить искомый отрезок через средние линии треугольников, на которые диагонали разбивают трапецию.
Указание. Показать, что середины диагоналей лежат на средней линии трапеции.



Решение. Пусть точки P и Q – середины диагоналей AC и BD, а M и N – середины боковых сторон AB и CD. Пусть $AD = a$, $BC = b$ и $a \geq b$. В ΔABC отрезок MP является средней линией, следовательно,

$$MP = b/2, \quad MP \| BC \quad \text{и} \quad P \in MN.$$

В ΔABD отрезок MQ является средней линией, следовательно,

$$MQ = a/2, \quad MQ \| AD \quad \text{и} \quad Q \in MN.$$

В результате $PQ = MQ - MP = \dfrac{a-b}{2}$.

Ответ. $\dfrac{a-b}{2}$.

Задача 9.

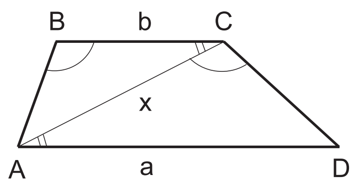
В трапеции $ABCD$ с острыми углами при основании AD проведена диагональ AC, которая разбивает её на два подобных треугольника. Длина основания AD равна a, а длина основания BC равна b. Вычислить длину диагонали AC.

Идея. Длину диагонали получить из соотношения сторон подобных треугольников.
Указание. Оба треугольника – тупоугольные.

Решение. По условию $\angle A$ трапеции $ABCD$ острый, следовательно, $\angle B = 180° - \angle A$ тупой и ΔABC тупоугольный.

Найдём соответствующий тупой угол у подобного треугольника ΔACD.

Из условия следует, что углы $\angle ADC$ и $\angle CAD$ острые, следовательно, $\angle ACD$ тупой и $\angle ABC = \angle ACD$. Кроме того, $\angle ACB = \angle CAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых. Тогда из подобия треугольников получаем



$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{ab}.$$

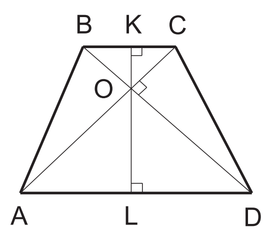
Ответ. $\sqrt{ab}$.

Задача 10.

В равнобедренной трапеции средняя линия равна a, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

Идея. Доказать, что высота трапеции равна a.
Указание. Найти пару подобных равнобедренных треугольников.

Решение. Проведём в трапеции $ABCD$ через точку пересечения диагоналей O высоту KL. Из того, что трапеция равнобедренная, следует, что треугольники ΔBOC и ΔAOD тоже равнобедренные (докажите этот факт самостоятельно). Значит, углы этих треугольников равны $45°, 45°, 90°$, и высота, опущенная на гипотенузу, равна половине основания:



$$KO = \frac{BC}{2}, \quad LO = \frac{AD}{2}.$$

По условию $\dfrac{BC + AD}{2} = a$; значит, $KL = a$ и $S_{ABCD} = a^2$.

Замечание. Можно было решить задачу по-другому. По аналогии с примером 2 из учебника сделать классическое для трапеции дополнительное построение: провести отрезок $CE||BD$. Тогда получившийся прямоугольный треугольник ACE

будет равнобедренным, и его площадь будет равна площади трапеции. В треугольнике известна средняя линия, а значит, и гипотенуза будет известна, а высота, опущенная на гипотенузу, будет являться также и медианой (так как треугольник равнобедренный), и, значит тоже известна. Отсюда, очевидно, площадь равна a^2.

Ответ. $S = a^2$.

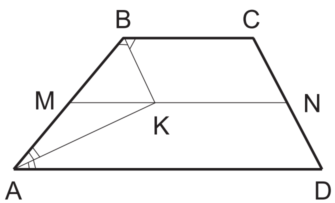
Задача 11.

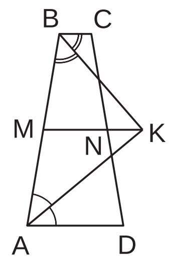
Доказать, что биссектрисы углов, прилежащие к одной из не параллельных сторон трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции (или её продолжении).

Идея. Использовать то, что сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых равна 180°.
Указание. Геометрическим местом точек, равноудалённых от двух параллельных прямых, является прямая, параллельная данным и находящаяся на равном от них расстоянии.

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$. Пусть AK и BK – биссектрисы углов BAD и ABC, соответственно. Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle ABC = \pi - \alpha$ и

$$\angle AKB = \pi - \frac{1}{2}\angle BAD - \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{\pi}{2}.$$





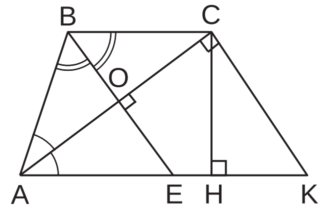
Осталось доказать, что точка K лежит на средней линии трапеции MN. Так как точка K лежит на биссектрисах углов A и B, то она равноудалена от сторон AB, AD и BC. Поскольку геометрическим местом точек, равноудалённых от двух параллельных прямых, является прямая, параллельная данным и находящаяся на равном от них расстоянии, точка K принадлежит средней линии MN трапеции $ABCD$ (или её продолжению, см. второй рисунок).

Задача 12.

В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Найдите высоту трапеции, если $AC = 8\sqrt{5}$, $BE = 4\sqrt{5}$.

Идея. Отрезки AC и BE перпендикулярны.

У к а з а н и е. Показать, что отрезки AC и BE перпендикулярны. Использовать определение биссектрисы и свойство углов при параллельных прямых.
У к а з а н и е. Сделать дополнительное построение: провести отрезок $CK||BE$. Тогда высота CH прямоугольного треугольника ACK будет и высотой трапеции $ABCD$.



Р е ш е н и е. Так как сумма углов A и B равна $180°$, а отрезки AC и BE являются их биссектрисами, то угол AOB – прямой, где O – точка пересечения отрезков AC и BE. Это следует из того, что $\angle BAO + \angle ABO = \dfrac{180°}{2} = 90°$. Сделаем дополнительное построение. Проведём отрезок $CK||BE$. Тогда высота CH прямоугольного треугольника ACK будет и высотой трапеции $ABCD$. При известных двух катетах ($CK = BE = 4\sqrt{5}$) найти высоту прямоугольного треугольника не составит труда. Это можно сделать, используя две формулы для площади треугольника ACK:

$$S_{ACK} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CK = \frac{1}{2}\cdot AK\cdot CH \quad\Longrightarrow\quad CH = \frac{8\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}}{20} = 8\,,$$

где гипотенуза $AK = 20$ найдена из треугольника ACK по теореме Пифагора.

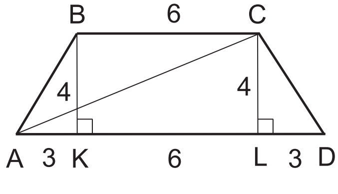
З а м е ч а н и е. На рисунке нет точки D. Исходя из условий задачи, нельзя определить её местоположение, да она и не нужна для нахождения высоты CH.

О т в е т. 8.

Задача 13.

В равнобокой трапеции $ABCD$ основания $AD = 12$, $BC = 6$, высота равна 4. Диагональ AC делит угол BAD трапеции на две части. Какая из них больше?

И д е я. Рассмотреть соответствующие прямоугольные треугольники и вычислить тангенсы этих углов.
У к а з а н и е. Сделать дополнительное построение: опустить высоты из точек B и C на основание AD.
У к а з а н и е. Найти тангенсы углов BAC и CAD.



Р е ш е н и е. Пусть K и L – основания высот, опущенных из точек B и C на AD. Тогда $KL = 6$, $AK = LD = 3$. Из соответствующих прямоугольных треугольников получим

$$\operatorname{tg}\angle BAK = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{tg}\angle CAL = \frac{4}{9}.$$

По формуле тангенса разности

$$\operatorname{tg}\angle BAC = \operatorname{tg}(\angle BAK - \angle CAL) = \frac{\frac{4}{3}-\frac{4}{9}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{9}} = \frac{24}{43}.$$

Так как оба угла лежат в пределах от нуля до 90°, то

$$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{24}{43} > \operatorname{tg}\angle CAL = \frac{4}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad \angle BAC > \angle CAL.$$

Ответ. $\angle BAC > \angle CAD$.

Задача 14.

В равнобедренную трапецию площадью 28 вписана окружность радиуса 2. Найти боковую сторону трапеции.

Идея. По-максимуму использовать тот факт, что в равнобедренную трапецию вписана окружность.
Указание. Заметить, что высота трапеции равна диаметру вписанной окружности.
Указание. Показать, что боковая сторона равнобедренной трапеции равна полусумме оснований.

Решение. То, что в трапецию вписана окружность, даёт нам сразу два факта. Во-первых, высота трапеции равна диаметру вписанной окружности, то есть 4. Во-вторых, сумма боковых сторон равна сумме оснований, а с учётом равнобедренности трапеции получаем, что боковая сторона трапеции равна полусумме оснований, которая легко находится по известным площади и высоте трапеции: полусумма оснований равна частному площади и высоты, то есть равна 7.

Замечание. В этой задаче нам даже и не потребовался рисунок. Главное – грамотно проанализировать условие!

Ответ. 7.

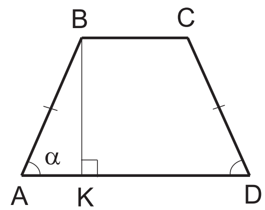
Задача 15.

Периметр равнобедренной трапеции вдвое больше длины вписанной окружности. Найти угол при основании трапеции.

Идея. Используя тот факт, что в трапецию вписана окружность, выразить периметр трапеции через радиус вписанной окружности и угол при основании.
Указание. Выразить боковую сторону через радиус вписанной окружности и угол при основании.
Указание. Показать, что периметр трапеции равен четырём боковым сторонам.

Решение. Пусть дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Высота $BK = 2r$, где r – радиус вписанной окружности, $\angle BAD = \angle CDA = \alpha$.

Из прямоугольного треугольника ABK получаем $AB = \dfrac{2r}{\sin\alpha}$. Так как в трапецию можно вписать окружность, то $AB + CD = BC + AD$ и



$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + CD) = 4 \cdot AB = \frac{8r}{\sin\alpha}.$$

Длина вписанной окружности равна $2\pi r$, следовательно,

$$\frac{8r}{\sin\alpha} = 2 \cdot 2\pi r \quad \Longleftrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{2}{\pi} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \arcsin\frac{2}{\pi}.$$

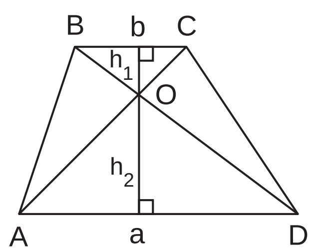
Ответ. $\arcsin\frac{2}{\pi}$.

Задача 16. *

Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ равна 128, площадь треугольника BOC, где O – точка пересечения диагоналей трапеции, равна 2. Найти площадь треугольника AOD.

Идея. Использовать подобие треугольников BOC и AOD.
Указание. Опустить из точки O высоты треугольников AOD и BOC.
Указание. Зная площадь трапеции и площадь треугольника BOC, найти коэффициент подобия треугольников AOD и BOC.

Решение. Обозначим $AD = a$, $BC = b$ и опустим из точки O высоты h_2 и h_1 треугольников AOD и BOC соответственно. Так как эти треугольники подобны (обозначим коэффициент подобия через k), то $a = k \cdot b$, $h_2 = k \cdot h_1$. Запишем площадь трапеции:



$$128 = \frac{a+b}{2} \cdot (h_1 + h_2) = \frac{k \cdot b + b}{2} \cdot (h_1 + k \cdot h_1) =$$

$$= \frac{b \cdot h_1}{2} \cdot (1+k)^2 = 2(1+k)^2.$$

В последнем переходе учтено, что $S_{BOC} = \dfrac{b \cdot h_1}{2} = 2$.
В результате получаем уравнение для определения коэффициента подобия:

$$128 = 2(1+k)^2 \quad \Longrightarrow \quad k = 7.$$

Зная коэффициент подобия треугольников AOD и BOC и площадь ΔBOC, находим

$$S_{AOD} = k^2 \cdot S_{BOC} = 98\,.$$

Ответ. 98.

*Задача 17.**

Через точку O пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию. Определить длину отрезка этой прямой между боковыми сторонами трапеции, если средняя линия трапеции равна $\frac{4}{3}$, а точка O делит диагональ трапеции на части, отношение которых равно $\frac{1}{3}$.

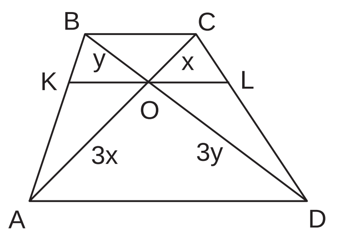
Идея. Выразить искомый отрезок через каждое из оснований трапеции.
Указание. Используя подобие, выразить части искомого отрезка через каждое из оснований трапеции.
Указание. Записать искомый отрезок через полусумму оснований трапеции.

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$, AD – большее основание. Обозначим через KL искомый отрезок. По условию точка пересечения диагоналей трапеции делит диагональ трапеции на части, отношение которых равно $\frac{1}{3}$, поэтому, если $OC = x$, то $AO = 3x$, если $OB = y$, то $OD = 3y$.

Так как $\Delta AKO \sim \Delta ABC$, то $KO = \frac{3}{4}BC$. Аналогично, из подобия треугольников DOL и DBC следует, что и $LO = \frac{3}{4}BC$. Значит, $KL = \frac{3}{2}BC$.

Теперь рассмотрим пары треугольников $\Delta BKO \sim \Delta BAD$ и $\Delta COL \sim \Delta CAD$. Аналогичным образом получим, что $KO = OL = \frac{1}{4}AD$. Значит, $KL = \frac{1}{2}AD$.

Так как $\frac{1}{3}KL = \frac{1}{2}BC$ и $KL = \frac{1}{2}AD$, то $\frac{4}{3}KL = \frac{BC + AD}{2}$, а это равно средней линии трапеции. Следовательно, $KL = 1$.



Замечание. По ходу решения задачи мы доказали, что $KO = OL$. Это верно для любой трапеции.

Ответ. 1.

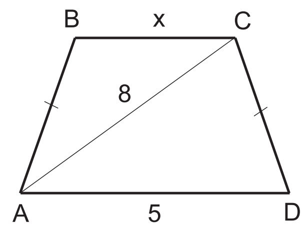
*Задача 18.**

В равнобедренной трапеции диагональ имеет длину 8 и является биссектрисой одного из углов. Может ли одно из оснований этой трапеции быть меньше 4, а другое равно 5?

Идея. Для получения противоречия использовать неравенство треугольника и теорему косинусов.
Указание. Рассмотреть отдельно случаи, когда диагональ является биссектрисой угла при большем основании трапеции, и когда при меньшем.

Решение. Возможно два варианта: либо AC – биссектриса угла при большем основании трапеции, либо – при меньшем.

1) Пусть AC – биссектриса острого угла BAD и $AD = 5$, тогда



$$\angle BAC = \angle CAD = \angle BCA$$

и ΔABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, если $BC < 4$, то

$$AB + BC < 8 = AC,$$

то есть треугольник ABC не может существовать и этот вариант невозможен.

2) Пусть AC – биссектриса тупого угла BCD и $AD = 5$, тогда

$$\angle BCA = \angle ACD = \angle CAD = \alpha$$

и ΔACD равнобедренный, следовательно, $AD = CD = AB = 5$. Из ΔACD получаем $\cos\alpha = 4/5$, тогда

$$\cos\angle BCD = \cos 2\alpha = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25} > 0,$$

то есть $\angle BCD$ – острый, что противоречит предположению.

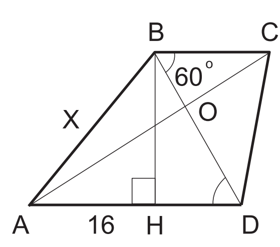
О т в е т. Нет.

*Задача 19.**

В трапеции $ABCD$ основание $AD = 16$, $AB + BD = 40$, $\angle CBD = 60°$. Отношение площадей треугольников ABO и BOC, где O – точка пересечения диагоналей, равно 2. Найти площадь трапеции.

И д е я. Найти второе основание и высоту трапеции.
У к а з а н и е. Используя условие на соотношение площадей, найти второе основание трапеции.
У к а з а н и е. Используя теорему косинусов, найти диагональ BD.
У к а з а н и е. Высоту трапеции BH найти из треугольника ABH.

Р е ш е н и е. Для того чтобы вычислить площадь трапеции, нам надо найти основание BC и высоту BH. По условию задачи



$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{AO}{OC} = 2,$$

следовательно, $\Delta AOD \sim \Delta COB$ с коэффициентом подобия $k = 2$, поэтому

$$\frac{AD}{BC} = 2 \quad \Longrightarrow \quad BC = 8.$$

Теперь найдём высоту BH из треугольника ABD. Заметим, что

$$\angle ADB = \angle CBD = 60^\circ$$

(как накрест лежащие при параллельных прямых). Пусть $AB = x$, тогда $BD = 40 - x$, и по теореме косинусов

$$x^2 = (40-x)^2 + 16^2 - 2\cdot(40-x)\cdot 16\cdot\cos 60^\circ,$$

откуда $x = 19$. Следовательно, $BD = 21$.

Высоту BH найдём из треугольника DBH:

$$BH = BD\sin 60^\circ = \frac{21\sqrt{3}}{2}.$$

В итоге искомая площадь трапеции равна

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot BH = \frac{16+8}{2}\cdot\frac{21\sqrt{3}}{2} = 126\sqrt{3}.$$

Ответ. $126\sqrt{3}$.

3.3. Общие четырёхугольники. Правильные многоугольники

Задача 1.

Один из внутренних углов правильного n-угольника равен 150°. Найдите число сторон многоугольника.

Идея. Использовать формулу для суммы внутренних углов произвольного выпуклого $n-$угольника.
Указание. Сумма внутренних углов произвольного выпуклого $n-$угольника равна $180^\circ(n-2)$.

Решение. Так как сумма внутренних углов произвольного выпуклого $n-$угольника равна $180^\circ(n-2)$, то для определения n получаем уравнение

$$180^\circ(n-2) = 150^\circ n \quad\Longleftrightarrow\quad n = 12.$$

Ответ. 12.

Задача 2.

Внешний угол правильного многоугольника меньше внутреннего угла на 140°. Найдите сумму углов данного многоугольника.

Идея. Использовать формулу для суммы внутренних углов произвольного выпуклого $n-$угольника.

Указание. Исходя из условия, найти сначала внутренний угол многоугольника.
Указание. Найти количество углов многоугольника, используя формулу для суммы внутренних углов произвольного выпуклого $n-$угольника.

Решение. Для того чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо найти внутренний угол многоугольника и количество углов.

Обозначим внутренний угол правильного многоугольника за α, тогда внешний угол будет равен $180° - \alpha$. Теперь из условия легко найти α:

$$\alpha - (180° - \alpha) = 140° \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 160°.$$

Так как сумма внутренних углов произвольного выпуклого $n-$угольника равна $180°(n-2)$, то для определения n получаем уравнение:

$$180°(n-2) = 160°n \quad \Longleftrightarrow \quad n = 18\,.$$

Следовательно, сумма внутренних углов данного многоугольника равна $18 \cdot 160° = 2880°$.

Ответ. $2880°$.

Задача 3.

Вычислите синус угла правильного восьмиугольника.

Идея. Использовать формулу для суммы внутренних углов произвольного выпуклого $n-$угольника.
Указание. Так как сумма внутренних углов произвольного выпуклого $n-$угольника равна $180°(n-2)$, то легко найти угол правильного восьмиугольника.

Решение. Сначала найдём угол правильного восьмиугольника. Так как сумма внутренних углов произвольного выпуклого $n-$угольника равна $180°(n-2)$, то для определения угла α правильного восьмиугольника получаем уравнение

$$8 \cdot \alpha = 180° \cdot (8-2) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 135° \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Замечание. Для решения задачи нет необходимости делать чертёж.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 4.

Сторона правильного восьмиугольника равна 1. Найти площадь описанного круга.

Идея. Найти радиус круга, соединив центр круга с вершинами восьмиугольника.
Указание. Соединив центр круга с двумя соседними вершинами восьмиугольника, найти угол при вершине получившегося треугольника.

Указание. По теореме косинусов найти радиус круга.

Решение. Для того чтобы найти площадь круга, надо знать квадрат его радиуса. Если соединить центр описанного круга с вершинами правильного восьмиугольника, то получится восемь одинаковых равнобедренных треугольников, основаниями которых будут являться стороны восьмиугольника, а боковыми сторонами – радиусы круга. При этом угол при вершине этих треугольников будет равен $\alpha = \dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Зная основание равнобедренного треугольника и угол при вершине, легко найти его боковую сторону, то есть радиус круга. Можно воспользоваться, например, теоремой косинусов:

$$1^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot \cos 45^\circ \quad \Longrightarrow \quad R^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad S = \pi R^2 = \frac{\pi(2+\sqrt{2})}{2}.$$

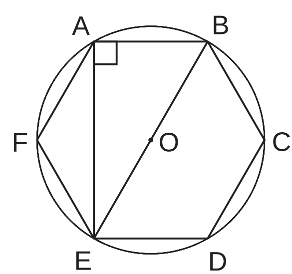
Замечание. В этой задаче опять можно не делать чертёж.

Ответ. $\dfrac{\pi(2+\sqrt{2})}{2}$.

Задача 5.

Найти расстояние между параллельными сторонами правильного шестиугольника, если радиус описанной около него окружности равен $10\sqrt{3}$.

Идея. Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности.
Указание. Показать, что сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности.



Решение. Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ и описанную около него окружность. Если центр окружности соединить со всеми вершинами правильного шестиугольника, то получим шесть равных равнобедренных треугольников с углом при вершине O, равным $\dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, а значит, равносторонних треугольников. Следовательно, ΔABO равносторонний, то есть сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности и $\angle ABO = 60^\circ$.

Так как диагональ BE является диаметром описанной окружности, то ΔABE – прямоугольный, и длина отрезка AE есть расстояние между параллельными сторонами правильного шестиугольника $ABCDEF$. Из прямоугольного ΔABE находим

$$AE = BE \cdot \sin\angle ABE = 20\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30.$$

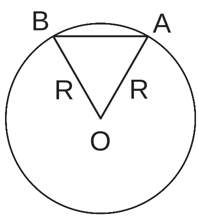
Ответ. 30.

Задача 6.

Сколько сторон имеет правильный многоугольник, у которого отношение длины описанной окружности к стороне многоугольника равно 2π?

Идея. Выразить сторону многоугольника через радиус описанной окружности.
Указание. Выразить сторону многоугольника через радиус описанной окружности.
Указание. Найти угол, под которым видна сторона многоугольника из центра описанной окружности.

Решение. Поскольку длина окружности равна $2\pi R$, то сторона правильного многоугольника равна радиусу описанной окружности. Если соединить концы стороны AB правильного многоугольника с центром описанной окружности, то получится равносторонний треугольник ABO. Значит, $\angle AOB = 60^\circ$. Следовательно, число сторон равно $\dfrac{360^\circ}{60^\circ} = 6$.



Ответ. 6.

Задача 7.

Около квадрата описана окружность, и в квадрат вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности, если радиус описанной окружности равен $10\sqrt{2}$.

Идея. Диаметр вписанной окружности равен стороне квадрата, а диаметр описанной окружности равен диагонали квадрата.
Указание. Задача простая – по диагонали квадрата определить его сторону.

Решение. Так как диаметр вписанной окружности равен стороне квадрата, а диаметр описанной окружности равен диагонали квадрата, то задача перед нами стоит очень простая – по диагонали квадрата определить его сторону.

Так как диагональ квадрата равна $20\sqrt{2}$, то сторона квадрата, очевидно, равна 20. Следовательно, радиус вписанной окружности равен 10.

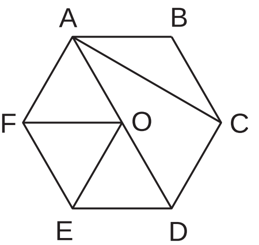
Ответ. 10.

Задача 8.

Меньшая диагональ правильного шестиугольника равна $5\sqrt{3}$. Найдите его большую диагональ.

Идея. Большая диагональ правильного шестиугольника в два раза больше стороны.

Указание. Показать, что большая диагональ правильного шестиугольника в два раза больше стороны.
Указание. Сторону шестиугольника найти по теореме косинусов.



Решение. Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$. O – центр описанной окружности. Тогда OA, OF, OE и OD – радиусы. Следовательно, треугольники AOF, FOE, EOD – равнобедренные с углом $60°$ при вершине, а, значит, равносторонние. Таким образом, большая диагональ AD равна двум сторонам правильного шестиугольника.

Обозначим сторону шестиугольника за x. Так как внутренний угол при вершине равен $120°$, то из треугольника ABC по теореме косинусов найдём x:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC \quad \Longleftrightarrow \quad 25 \cdot 3 = 3x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = 5\,.$$

Значит большая диагональ равна 10.

Замечание. По ходу решения задачи мы доказали, что *сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности.*

Ответ. 10.

Задача 9.

В окружность вписаны правильные треугольник и шестиугольник. Найти отношение площади шестиугольника к площади треугольника.

Идея. Выразить площади шестиугольника и треугольника через радиус описанной окружности.
Указание. Соединить центр окружности с вершинами шестиугольника и выразить площадь шестиугольника через радиус окружности.
Указание. Сначала по теореме синусов выразить сторону треугольника через радиус, а потом найти площадь треугольника.

Решение. Если соединить центр описанной окружности с вершинами правильного шестиугольника, то получится шесть равносторонних треугольников, поэтому легко выразить площадь правильного шестиугольника через радиус описанной окружности:

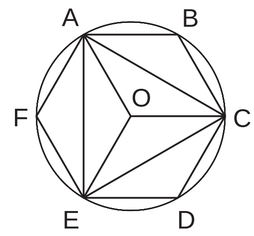
$$S_6 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2\,.$$

Для равностороннего треугольника, вписанного в ту же окружность, тоже все просто. Сначала по теореме синусов найдём сторону треугольника, а потом – его площадь:

$$a = 2R \cdot \sin 60° = R\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad S_3 = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2\,.$$

Следовательно, отношение площади шестиугольника к площади треугольника равно 2.

З а м е ч а н и е. Все рассуждения мы провели без использования рисунка. Если использовать рисунок, то можно проще доказать, что отношение площадей равно 2.



Рассмотрим правильные шестиугольник $ABCDEF$ и треугольник ACE, вписанные в одну окружность с центром в точке O. Так как сторона шестиугольника равна радиусу описанной окружности, то шесть треугольников ABC, AOC, CDE, COE, AFE и AOE равны по трём сторонам. Следовательно, площадь шестиугольника ровно в два раза больше площади треугольника.

О т в е т. 2.

Задача 10.

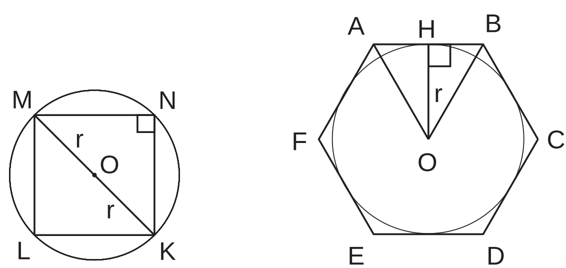
В правильный шестиугольник вписана окружность, которая в свою очередь описана около квадрата со стороной $\sqrt[4]{12}$. Найти площадь шестиугольника.

И д е я. Искать площадь по формуле $S = pr$.
У к а з а н и е. Зная сторону квадрата, найти радиус описанной окружности.
У к а з а н и е. Зная радиус вписанной окружности, найти сторону правильного шестиугольника.

Р е ш е н и е. Задача, очевидно, состоит из двух частей. Сначала, зная сторону квадрата, надо найти радиус описанной около него окружности. А затем по радиусу вписанной в правильный шестиугольник окружности найти его площадь.

Рассмотрим квадрат $MNKL$, вписанный в окружность. Так как $\angle MNK$ прямой, то диагональ квадрата MK является диаметром описанной окружности, найдём её по теореме Пифагора из ΔMNK:

$$MK^2 = MN^2 + NK^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 4r^2 = \sqrt{12} + \sqrt{12} \quad \Longleftrightarrow \quad r^2 = \sqrt{3}.$$



Теперь рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ и вписанную в него окружность радиуса r. Для нахождения площади шестиугольника воспользуемся формулой $S = pr$, где p – полупериметр шестиугольника. Если H – точка касания, то ΔAHO – прямоугольный с известным катетом $OH = r$ и известным острым углом $\angle OAH = 60^\circ$. Поэтому

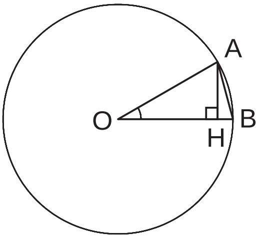
$$AB = 2 \cdot AH = 2 \cdot OH \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{2r}{\sqrt{3}}. \Longrightarrow S = pr = 3 \cdot AB \cdot r = 2\sqrt{3}r^2 = 6.$$

О т в е т. 6.

Задача 11.

Центр правильного двенадцатиугольника (точка O) соединен с двумя соседними вершинами A и B. Найти расстояние от точки A до отрезка OB, если длина отрезка OB равна 20.

Идея. Рассмотреть ΔAOH, где H – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на отрезок OB.
Указание. Найти угол AOB.
Указание. Рассмотреть ΔAOH, где H – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на отрезок OB.



Решение. Так как OA и OB являются радиусами описанной окружности, то $OA = OB = 20$. Значит, для нахождения AH (расстояния от точки A до отрезка OB) нам не хватает только угла AOB. Его легко найти:

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$$

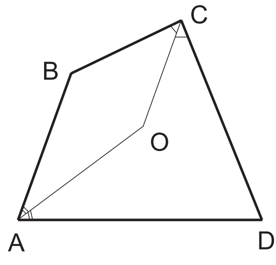
Тогда из ΔAOH находим $AH = AO \cdot \sin 30^\circ = 10$.

Ответ. 10.

Задача 12.

По углам четырёхугольника определить угол между биссектрисами двух противоположных углов.

Идея. Использовать теорему о сумме внутренних углов выпуклого четырёхугольника.
Указание. Рассмотреть четырёхугольник, одной из вершин которого является точка пересечения биссектрис.
Указание. Использовать теорему о сумме внутренних углов выпуклого четырёхугольника.



Решение. Пусть биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Рассмотрим четырёхугольник $ABCO$. У него

$$\angle AOC = 360^\circ - \left(\angle B + \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2}\right).$$

Заменив $\angle A + \angle C$ на $360^\circ - (\angle B + \angle D)$, получим

$$\angle AOC = 180^\circ - \left(\frac{\angle B}{2} - \frac{\angle D}{2}\right).$$

В качестве ответа можно указать этот угол или угол, смежный с этим углом: $\dfrac{\angle B - \angle D}{2}$.

З а м е ч а н и е. В случае, когда биссектрисы параллельны, искомый угол равен нулю.

О т в е т. Угол между биссектрисами двух противоположных углов равен полуразности двух других углов.

Задача 13.

Какой четырёхугольник с диагоналями d_1 и d_2 имеет максимальную площадь?

И д е я. Использовать формулу площади четырёхугольника через диагонали и угол между ними.

У к а з а н и е. $S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$.

Р е ш е н и е. Пусть α – угол между диагоналями четырёхугольника $ABCD$, тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha \le \frac{1}{2}d_1 d_2.$$

Следовательно, площадь четырёхугольника $ABCD$ достигает своего максимального значения при $\sin\alpha = 1$, то есть $\alpha = 90^\circ$; другими словами, диагонали четырёхугольника взаимно перпендикулярны.

О т в е т. Четырёхугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны.

Задача 14.

Из всех четырёхугольников, вписанных в окружность, найти четырёхугольник наибольшей площади.

И д е я. Использовать формулу площади четырёхугольника через диагонали и угол между ними.

У к а з а н и е. $S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$.

Р е ш е н и е. Пусть d_1, d_2 – диагонали четырёхугольника (диагонали четырёхугольника являются хордами окружности), α – угол между диагоналями четырёхугольника, тогда

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha \le \frac{1}{2}d_1 d_2.$$

Следовательно, площадь четырёхугольника достигает своего максимального значения, если диагонали являются наибольшими хордами окружности и $\sin\alpha = 1$. Иначе говоря, диагонали четырёхугольника являются взаимно перпендикулярными диаметрами окружности. Это значит, что четырёхугольник должен быть квадратом, так как углы четырёхугольника опираются на диаметры и, следовательно, прямые, а стороны четырёхугольника являются гипотенузами одинаковых прямоугольных треугольников.

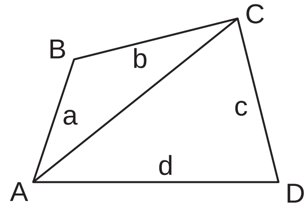
О т в е т. Квадрат.

Задача 15.

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что его площадь $S \le \dfrac{ab+cd}{2}$.

Идея. Разбить четырёхугольник на два треугольника ΔABC и ΔACD.

Указание. Записать площадь четырёхугольника через сумму площадей двух треугольников ΔABC и ΔACD.



Указание. Использовать формулу площади $S_\Delta = \dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$ и ограниченность синуса.

Решение. Если четырёхугольник разбить на два треугольника ΔABC и ΔACD, то неравенство легко доказывается:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}ab\sin\angle ABC + \frac{1}{2}cd\sin\angle ADC \le \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd\,.$$

Последнее неравенство возникает в силу ограниченности синуса.

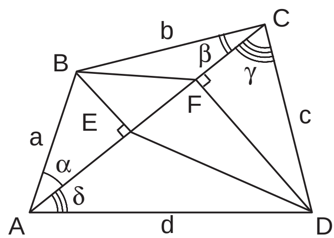
*Задача 16.**

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что его площадь $S \le \dfrac{ac+bd}{2}$.

Идея. Провести диагональ AC и опустить на неё перпендикуляры BE и DF. Записать площадь четырёхугольника через сумму площадей четырёх треугольников:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABF} + S_{\Delta BCF} + S_{\Delta AED} + S_{\Delta CED}.$$

Указание. Провести диагональ AC и опустить на неё перпендикуляры BE и DF. Обозначим углы $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $\angle ACD = \gamma$, $\angle CAD = \delta$. Записать площадь четырёхугольника через сумму площадей четырёх треугольников:



$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABF} + S_{\Delta BCF} + S_{\Delta AED} + S_{\Delta CED}.$$

Указание. Применить формулу для площади $S = ah/2$. Используя соотношения в прямоугольном треугольнике, записать основание и высоту каждого треугольника через противолежащие стороны четырёхугольника и углы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Решение. Проведём диагональ AC и опустим на неё перпендикуляры BE и DF. Обозначим углы $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $\angle ACD = \gamma$, $\angle CAD = \delta$. Запишем площадь четырёхугольника через сумму площадей четырёх треугольников:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABF} + S_{\Delta BCF} + S_{\Delta AED} + S_{\Delta CED} =$$

$$= \frac{1}{2}(AF \cdot BE + CF \cdot BE + AE \cdot DF + CE \cdot DF) =$$

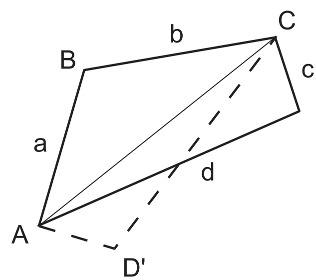
$$= \frac{1}{2}(d \cdot \cos\delta \cdot b \cdot \sin\beta + c \cdot \cos\gamma \cdot a \cdot \sin\alpha + a \cdot \cos\alpha \cdot c \cdot \sin\gamma + b \cdot \cos\beta \cdot d \cdot \sin\delta) =$$

$$= \frac{1}{2}(ac \cdot \sin(\alpha+\gamma) + bd \cdot \sin(\beta+\delta)) \le \frac{ac+bd}{2}.$$

Последнее неравенство возникает в силу ограниченности синуса.

З а м е ч а н и е. Эту задачу можно решить проще, если сделать следующее дополнительное построение. Построим треугольник ACD', симметричный треугольнику ACD так, чтобы $AD' = CD = c$ и $CD' = AD = d$. Применив к четырёхугольнику $ABCD'$ результат предыдущей задачи, получим нужное неравенство:

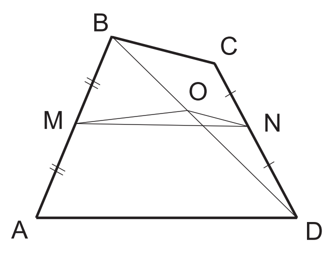
$$S_{ABCD} = S_{ABCD'} \le \frac{ac+bd}{2}.$$



*Задача 17.**

Доказать, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырёхугольник – трапеция.

И д е я. Разрезать четырёхугольник на два треугольника и использовать свойство средних линий.
У к а з а н и е. Средние линии полученных треугольников составляют отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон данного четырёхугольника.



Р е ш е н и е. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, у которого точка M – середина стороны AB, точка N – середина CD и точка O – середина диагонали BD. Отрезки MO и NO – средние линии $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$, следовательно,

$$MO = \frac{1}{2}AD, \quad MO \| AD \quad \text{и} \quad NO = \frac{1}{2}BC, \quad NO \| BC,$$

то есть $MO + NO = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

По условию задачи $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$, значит, точки M, O и N лежат на одной прямой. Следовательно, $MN \| AD$ и $MN \| BC$, то есть $ABCD$ – трапеция.

*Задача 18.**

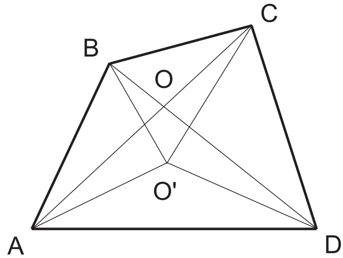
Внутри выпуклого четырёхугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин четырёхугольника минимальна.

Идея. Использовать неравенство треугольника.
Указание. Рассмотреть точку пересечения диагоналей и любую другую точку внутри многоугольника.
Указание. При сравнении сумм расстояний от точки до вершин четырёхугольника использовать неравенство треугольника.

Решение. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O.

Расстояние от точки O до вершин четырёхугольника равно

$$AO + BO + CO + DO = AC + BD.$$



Рассмотрим произвольную точку O', лежащую внутри четырёхугольника. Имеем

$$AO' + O'C \geq AC, \quad BO' + O'D \geq BD,$$

следовательно,

$$AO' + O'C + BO' + O'D \geq AC + BD,$$

то есть точка пересечения диагоналей четырёхугольника есть та точка, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

Ответ. Точка пересечения диагоналей.

4. Координаты и векторы

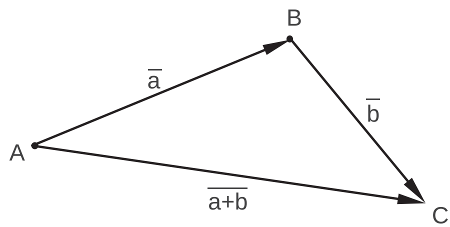
4.1. Декартовы координаты и векторы на плоскости

Задача 1.

Докажите, что для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполняется неравенство $|\overline{a}+\overline{b}| \leq$ $\leq |\overline{a}|+|\overline{b}|$.

Идея. Воспользоваться геометрической интерпретацией суммы двух векторов.
Указание. Использовать правило треугольника.

Решение. Если хотя бы один из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен нулю, то неравенство $|\overline{a}+\overline{b}| \leq$ $\leq |\overline{a}|+|\overline{b}|$ выполняется. Докажем справедливость неравенства при $\overline{a} \neq \overline{0}$ и $\overline{b} \neq \overline{0}$.



1) Геометрическое решение. Так как векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{a}+\overline{b}$ являются сторонами треугольника, то справедливость неравенства $|\overline{a}+\overline{b}| \leq |\overline{a}|+|\overline{b}|$ следует из справедливости "неравенства треугольника".

2) Алгебраическое решение. С помощью эквивалентных преобразований сведём исходное неравенство к очевидному неравенству:

$$|\overline{a}+\overline{b}|^2 \leq (|\overline{a}|+|\overline{b}|)^2 \iff (\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}+\overline{b}) \leq |\overline{a}|^2+2|\overline{a}||\overline{b}|+|\overline{b}|^2 \iff$$

$$\iff \overline{a}\cdot\overline{a}+2\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{b} \leq \overline{a}\cdot\overline{a}+2|\overline{a}||\overline{b}|+\overline{b}\cdot\overline{b} \iff \overline{a}\cdot\overline{b} \leq |\overline{a}||\overline{b}| \iff$$

$$\iff |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi \leq |\overline{a}||\overline{b}| \iff \cos\varphi \leq 1.$$

Задача 2.

Даны вершины треугольника $A(1;2)$, $B(5;1)$, $C(6;5)$. Найдите угол $\angle ABC$.

Идея. Использовать формулу для вычисления скалярного произведения через косинус угла между векторами и произведение их длин.
Указание. Найти угол между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$.

Решение. Искомый угол равен углу между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$. Так как

$$\overline{BA}=\overline{(1-5;2-1)}=\overline{(-4;1)}, \quad \overline{BC}=\overline{(6-5;5-1)}=\overline{(1;4)}, \quad \text{то}$$

$$\cos\angle ABC=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}=\frac{-4\cdot1+1\cdot4}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}=0 \quad\Longrightarrow\quad \angle ABC=90^\circ.$$

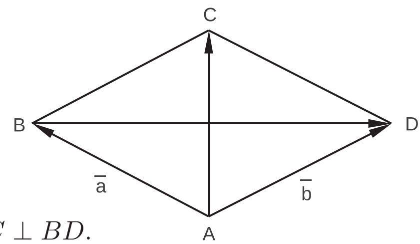
Ответ. 90°.

Задача 3.

Докажите с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.

Идея. Показать, что скалярное произведение соответствующих векторов равно нулю.
Указание. Выразить векторы-диагонали через векторы-стороны.
Указание. Используя то, что векторы-стороны имеют равные абсолютные величины, найти численное значение скалярного произведения векторов диагоналей.

Решение. Рассмотрим произвольный ромб $ABCD$. Обозначим $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{AD}$. Так как стороны ромба равны, то $|\overline{a}| = |\overline{b}|$. Тогда для диагоналей получим
$\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$ (по правилу параллелограмма),
$\overline{BD} = -\overline{a} + \overline{b}$ (по правилу треугольника),
$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = (\overline{a}+\overline{b})(-\overline{a}+\overline{b}) = |\overline{b}|^2 - |\overline{a}|^2 = 0 \implies AC \perp BD$.



Задача 4.

Даны четыре точки: $A(0;1)$, $B(1;2)$, $C(2;1)$, $D(1;0)$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – квадрат.

Идея. Последовательно провести доказательство того, что четырёхугольник является параллелограммом, ромбом, квадратом.
Указание. Доказать равенство векторов $\overline{AB} = \overline{DC}$.
Указание. Доказать равенство $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$.
Указание. Доказать, что угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ прямой.

Решение. 1) Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, поскольку

$$\overline{AB} = \overline{(1-0;2-1)} = \overline{(1;1)}, \quad \overline{DC} = \overline{(2-1;1-0)} = \overline{(1;1)} \quad \implies \quad \overline{AB} = \overline{DC}.$$

2) Параллелограмм $ABCD$ является ромбом, поскольку

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad |\overline{AD}| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \quad \implies \quad |\overline{AB}| = |\overline{AD}|.$$

3) Ромб $ABCD$ является квадратом, поскольку

$$\overline{AB}\cdot\overline{AD} = 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 0 \quad \implies \quad \angle BAD = 90^\circ.$$

Задача 5.

Даны три точки: $A(3;1)$, $B(-1;2)$, $C(0;3)$. Найдите такую точку $D(x;y)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны.

Идея. Координаты равных векторов равны.
Указание. Выразить через x и y координаты вектора $\overline{CD}$ и приравнять их координатам вектора $\overline{AB}$.

Решение. Поскольку $\overline{AB} = \overline{(-1-3;2-1)} = \overline{(-4;1)}$, $\overline{CD} = \overline{(x-0;y-3)} = \overline{(x;y-3)}$, равенство этих векторов выполняется при

$$-4 = x, \quad 1 = y-3 \quad \Longrightarrow \quad x = -4, \quad y = 4.$$

Ответ. $(-4;4)$.

Задача 6.

Даны векторы $\overline{a}(1;-1)$, $\overline{b}(-2;1)$, $\overline{c}(-3;0)$. Найдите такие числа λ и μ, чтобы $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$.

Идея. Получить для каждой из координат вектора $\overline{c}$ уравнение с неизвестными λ и μ.

Решение. $$\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} \iff \begin{cases} -3 = \lambda\cdot 1 + \mu\cdot(-2), \\ 0 = \lambda\cdot(-1) + \mu\cdot 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 3, \\ \mu = 3. \end{cases}$$

Ответ. 3; 3.

Задача 7.

Выразить вектор $\overline{c}(6;1)$ через векторы $\overline{a}(1;-2)$ и $\overline{b}(3;7)$.

Идея. Представить вектор $\overline{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Составить для каждой из координат вектора $\overline{c}$ соответствующее уравнение.

Решение. $$\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} \iff \begin{cases} 6 = \lambda\cdot 1 + \mu\cdot 3, \\ 1 = \lambda\cdot(-2) + \mu\cdot 7; \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 3, \\ \mu = 1. \end{cases}$$

Ответ. $3\overline{a} + \overline{b}$.

Задача 8.

Даны точки $A(1;-2), B(2;-1), C(0;3), D(4;1)$. Найдите координаты точки M такой, что $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \overline{0}$.

Идея. Выразить координаты всех векторов через координаты точки M и составить для каждой из координат вектора $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD}$ соответствующее уравнение.

Решение. Обозначим $M(x;y)$, тогда $\overline{MA} = \overline{(1-x;-2-y)}$, $\overline{MB} = \overline{(2-x;-1-y)}$, $\overline{MC} = \overline{(-x;3-y)}$, $\overline{MD} = \overline{(4-x;1-y)}$ и

$$\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+\overline{MD} = \overline{0} \iff \begin{cases} (1-x)+(2-x)+(-x)+(4-x) = 0, \\ (-2-y)+(-1-y)+(3-y)+(1-y) = 0; \end{cases}$$

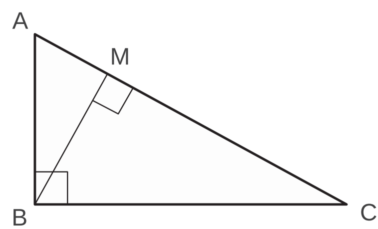
$$\iff \begin{cases} 7-4x=0, \\ 1-4y=0; \end{cases} \iff \begin{cases} x=1,75, \\ y=0,25. \end{cases}$$

О т в е т. $(1,75;\ 0,25)$.

Задача 9.

Точка M лежит на стороне AC треугольника ABC, $\angle ABC = \angle AMB = 90^\circ$, $BC = 2\sqrt{5}$, $MC = 2$, $\overline{AM} = x\overline{CM}$. Найдите x.

И д е я. Искомое x есть отношение длин отрезков AM и CM, взятое со знаком минус.
У к а з а н и е. Вычислить длину отрезка AM, используя то, что произведение проекций катетов на гипотенузу равно квадрату высоты, проведённой к гипотенузе.



Р е ш е н и е. Так как векторы $\overline{AM}$ и $\overline{CM}$ противоположно направлены, то

$$x = -\frac{|\overline{AM}|}{|\overline{CM}|} = -\frac{AM}{2}.$$

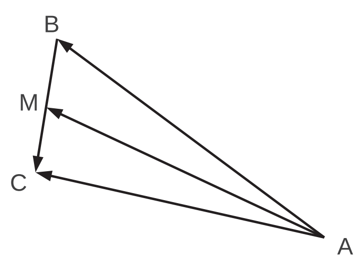
Отрезок BM является высотой, проведённой к гипотенузе, следовательно,

$$AM{\cdot}MC = BM^2 \implies AM = \frac{BM^2}{MC} = \frac{BC^2 - MC^2}{MC} = 8 \implies x = -\frac{8}{2} = -4.$$

О т в е т. -4.

Задача 10.

Векторы $\overline{AB}(-3;4)$ и $\overline{BC}(-1;-2)$ являются сторонами треугольника. Найдите длину медианы AM.



И д е я. Выразить $\overline{AM}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

У к а з а н и е. $\overline{AM} = \overline{AB} + \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

Р е ш е н и е. Так как $\overline{BM} = \dfrac{1}{2}\overline{BC}$, то

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \frac{\overline{BC}}{2} = \overline{(-3;4)} + \frac{\overline{(-1;-2)}}{2} = \overline{\left(-\frac{7}{2};3\right)} \implies |\overline{AM}| = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{85}}{2}.$$

О т в е т. $\sqrt{85}/2$.

Задача 11.

Дана прямая $2x - y + 1 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(1;1)$ параллельно данной прямой.

И д е я. Прямые, параллельные данной, имеют вид $2x - y + \mathrm{c} = 0$.
У к а з а н и е. В уравнении прямой $2x - y + \mathrm{c} = 0$ определить значение коэффициента c из условия принадлежности точки $(1;1)$ этой прямой.

Р е ш е н и е. Прямые, параллельные данной, имеют вид $2x - y + \mathrm{c} = 0$. Так как точка $(1;1)$ принадлежит искомой прямой, то

$$2 \cdot 1 - 1 + \mathrm{c} = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -1.$$

О т в е т. $2x - y - 1 = 0$.

Задача 12.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(0;3)$ и перпендикулярной вектору $\overline{(3;2)}$.

И д е я. Использовать геометрический смысл коэффициентов общего уравнения прямой.
У к а з а н и е. Уравнение прямой, перпендикулярной вектору $\overline{(3;2)}$, имеет вид $3x + 2y + \mathrm{c} = 0$.

Р е ш е н и е. Искомая прямая перпендикулярна вектору $\overline{(3;2)}$, значит, её уравнение имеет вид $3x + 2y + \mathrm{c} = 0$. Поскольку точка $(0;3)$ принадлежит этой прямой,

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -6.$$

О т в е т. $3x + 2y - 6 = 0$.

Задача 13.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2;4)$ и параллельной вектору $\overline{(-2;1)}$.

И д е я. Использовать геометрический смысл коэффициентов общего уравнения прямой.
У к а з а н и е. Рассмотреть вспомогательный вектор, перпендикулярный данному, и составить уравнение прямой, перпендикулярной этому вспомогательному вектору.

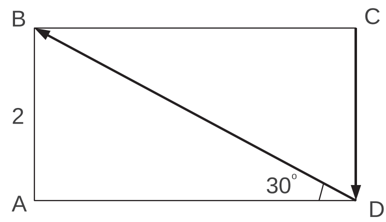
Р е ш е н и е. Вектор $\overline{(1;2)}$ перпендикулярен данному вектору $\overline{(-2;1)}$ и, следовательно, перпендикулярен искомой прямой. Значит её уравнение имеет вид $x + 2y + \mathrm{c} = 0$. Так как точка $(2;4)$ принадлежит этой прямой, то

$$2 + 2 \cdot 4 + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -10.$$

О т в е т. $x + 2y - 10 = 0$.

Задача 14.

В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $\angle BDA = 30^\circ$. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{DB}$ и $\overline{CD}$.



Идея. Использовать формулу для вычисления скалярного произведения через косинус угла между векторами и произведение их длин.

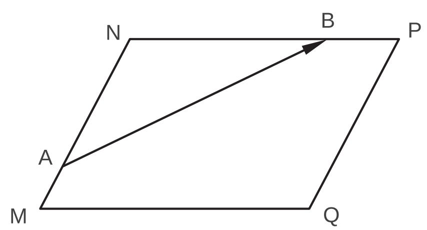
Решение.

$$\overline{DB}\cdot\overline{CD} = -\overline{DB}\cdot\overline{DC} = -DB\cdot DC\cdot\cos\angle BDC = -\frac{AB}{\sin 30^\circ}\cdot 2\cdot\cos 60^\circ = -4\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = -4.$$

Ответ. -4.

Задача 15.

В параллелограмме $MNPQ$ точка A делит сторону MN в отношении $1:3$, считая от вершины M, точка B делит сторону NP в отношении $1:3$, считая от вершины P. Выразите вектор $\overline{AB}$ через векторы $\overline{NM}$ и $\overline{NP}$.



Идея. Выразить вектор $\overline{AB}$ через векторы $\overline{NA}$ и $\overline{NB}$.

Указание. $\overline{NA} = \frac{3}{4}\overline{NM}$, $\overline{NB} = \frac{3}{4}\overline{NP}$.

Решение. $\overline{AB} = -\overline{NA} + \overline{NB} = -\frac{3}{4}\overline{NM} + \frac{3}{4}\overline{NP}$.

Ответ. $\frac{3}{4}\left(\overline{NP} - \overline{NM}\right)$.

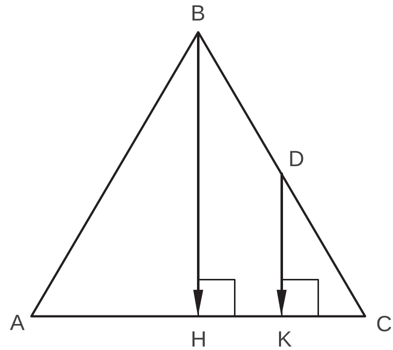
Задача 16.

В равностороннем треугольнике ABC из точки D (середины стороны BC) проведен перпендикуляр DK на сторону AC. Разложите вектор $\overline{DK}$ по векторам $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$.

Идея. Выразить через $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ высоту $\overline{BH} = 2\overline{DK}$.

Указание. Использовать правило треугольника.

Решение. Проведём в треугольнике ABC высоту BH. Так как отрезок DK является средней линией в ΔBCH, то $\overline{DK} = \dfrac{1}{2}\overline{BH}$. Выразим вектор $\overline{BH}$ через векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ с помощью правила треугольника:



$$\overline{BH} = -\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{DK} = \frac{1}{2}\overline{BH} = -\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC}.$$

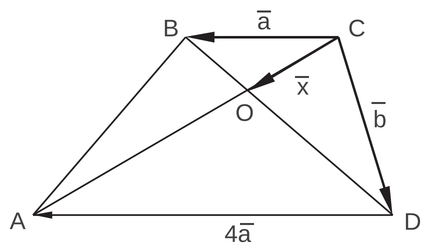
Ответ. $\dfrac{1}{4}\overline{AC} - \dfrac{1}{2}\overline{AB}$.

Задача 17.

В трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ точка O – точка пересечения диагоналей. Выразите вектор $\overline{CO}$ через векторы $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$, если $AD : BC = 4 : 1$.

Идея. Использовать результат, полученный в примере №1 теоретического материала.

Указание. Определить в каком отношении точка O делит отрезок BD, то есть найти λ и μ для формулы из примера №2.



Решение. Обозначим $\overline{a} = \overline{CB}$, $\overline{b} = \overline{CD}$, $\overline{x} = \overline{CO}$. Тогда с помощью формулы примера №2 получим

$$\overline{x} = \frac{\mu\overline{a} + \lambda\overline{b}}{\mu + \lambda}, \quad \text{где} \quad \lambda : \mu = BO : OD.$$

Отношение $BO : OD$ можно найти из треугольников BCO и DAO. Они подобны с коэффициентом подобия

$$k = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{BO}{OD} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $\lambda = 1$, $\mu = 4$ и $\overline{x} = \dfrac{4\overline{a} + \overline{b}}{5}$.

Ответ. $\dfrac{4}{5}\overline{CB} + \dfrac{1}{5}\overline{CD}$.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

5. Призма

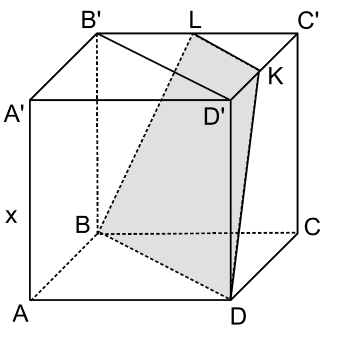
5.1. Прямая призма

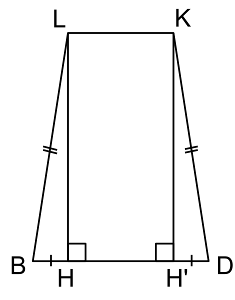
Задача 1.

Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Через точки B, D и середину ребра $D'C'$ проведена секущая плоскость. Найдите площадь полной поверхности куба, если площадь сечения равна 144.

Идея. Выразить площадь сечения через длину ребра куба и получить соответствующее уравнение, приравняв полученное выражение заданному значению.
Указание. При построении сечения воспользоваться тем, что секущая плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым.
Указание. Выразить площадь полученной трапеции через длину ребра куба.
Указание. Приравнять полученное для площади выражение числу 144 и найти длину ребра куба из этого уравнения, после чего найти площадь полной поверхности куба.

Решение. Построим сечение, проходящее через вершины куба B, D и середину ребра $D'C'$ – точку K. Так как секущая плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым, то прямая пересечения верхнего основания с плоскостью данного сечения параллельна прямой BD, а значит, и прямой $B'D'$.





Обозначим через L точку пересечения ребра $B'C'$ с прямой, проходящей через точку K параллельно диагонали $B'D'$. Так как отрезок LK является средней линией в треугольнике $B'C'D'$, то он равен половине отрезка $B'D'$.

Таким образом, сечением является равнобедренная трапеция $BLKD$ с основаниями

$$BD = x\sqrt{2}, \quad LK = \frac{BD}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

и боковыми сторонами

$$BL = KD = \sqrt{(DD')^2 + (D'K)^2} = \frac{\sqrt{5}x}{2},$$

где x – длина ребра куба.

Найдём высоту трапеции LH. Проекции боковых сторон на нижнее основание равны

$$BH = DH' = \frac{BD - LK}{2} = \frac{\sqrt{2}x}{4} \quad \Longrightarrow \quad LH = \sqrt{BL^2 - BH^2} = \frac{3x}{2\sqrt{2}}.$$

В результате площадь сечения равна

$$S_{BLKD} = \frac{BD + LK}{2} \cdot LH = \frac{9}{8}x^2.$$

По условию задачи $S_{BLKD} = 144$, следовательно, $x^2 = 128$ и площадь поверхности куба равна $S = 6x^2 = 768$.

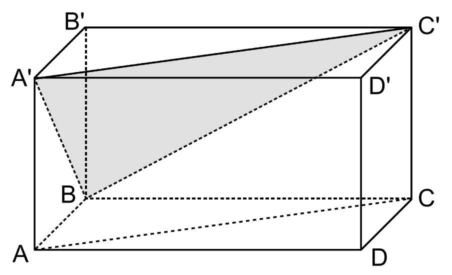
Ответ. 768.

Задача 2.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ известны $AB = 6$, $BC = 8$, $BB' = 1,6\sqrt{91}$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой AC и содержащей прямую BA'.

Идея. При построении сечения использовать то, что плоскость сечения должна содержать прямую, параллельную прямой AC.
Указание. Так как $A'C' \parallel AC$ и по условию плоскость сечения параллельна прямой AC, то сечение содержит диагональ $A'C'$.
Указание. Найти площадь треугольника $A'BC'$, являющегося искомым сечением, предварительно вычислив длины его сторон.

Решение. Искомое сечение содержит диагональ верхнего основания, так как $A'C' \parallel AC$, а по условию плоскость сечения параллельна прямой AC. Кроме того, сечение содержит отрезок BA', следовательно, сечением является треугольник $A'BC'$. Для того чтобы найти его площадь, достаточно вычислить его стороны. Воспользуемся теоремой Пифагора:



$$A'B = \sqrt{A'A^2 + AB^2} = \sqrt{1,6^2 \cdot 91 + 6^2} = 16,4;$$

$$A'C' = \sqrt{(A'B')^2 + (B'C')^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10;$$

$$BC' = \sqrt{B'B^2 + (B'C')^2} = \sqrt{1,6^2 \cdot 91 + 8^2} = \sqrt{296,96}.$$

Теперь, зная стороны, мы можем найти площадь треугольника, причём из-за иррациональности стороны BC' удобнее всего вычислять так:

$$S_{A'BC'} = \frac{1}{2} \cdot A'B \cdot A'C' \cdot \sin\angle BA'C' = 82 \sin\angle BA'C'.$$

Найдём $\cos\angle BA'C'$ с помощью теоремы косинусов:

$$(BC')^2 = A'B^2 + (A'C')^2 - 2A'B\cdot A'C'\cdot\cos\angle BA'C' \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad 296{,}96 = 16{,}4^2 + 10^2 - 2\cdot 164\cdot\cos\angle BA'C' \quad\Longrightarrow\quad \cos\angle BA'C' = \frac{9}{41}.$$

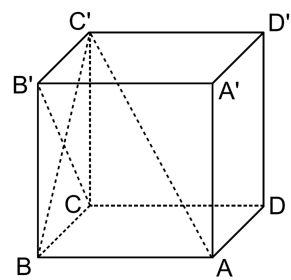
В итоге $S_{A'BC'} = 82\sin\angle BA'C' = 82\sqrt{1-\left(\dfrac{9}{41}\right)^2} = 82\cdot\dfrac{40}{41} = 80.$

Ответ. 80.

Задача 3.

Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 1. Найдите градусную меру угла между прямыми AC' и CB'.

Идея. Применить теорему о трёх перпендикулярах.
Указание. Рассмотреть проекцию отрезка AC' на плоскость $BCC'B'$.
Указание. Найти угол между этой проекцией и отрезком CB' и воспользоваться теоремой о трёх перпендикулярах.



Решение. Заметим, что отрезок BC' является проекцией наклонной AC' на плоскость $BCC'B'$ (так как ребро AB перпендикулярно плоскости $BCC'B'$), и эта проекция перпендикулярна отрезку CB' (так как диагонали квадрата перпендикулярны).

Из теоремы о трёх перпендикулярах следует, что и сама наклонная перпендикулярна отрезку CB', то есть $AC' \perp CB'$.

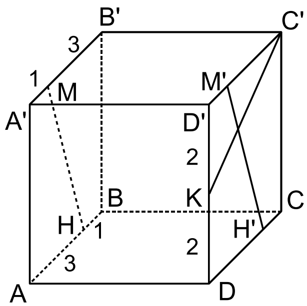
Ответ. 90.

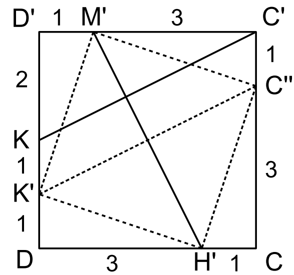
Задача 4.

Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно 4. Точка K – середина ребра DD'. Точки M и H лежат на рёбрах $A'B'$ и AB соответственно, причём $A'M : MB' = 1 : 3$, $AH : HB = 3 : 1$. Найдите градусную меру угла между прямыми MH и KC'.

Идея. Искомый угол равен углу между проекциями данных скрещивающихся прямых на плоскость, параллельную обеим прямым.
Указание. Найти угол между прямой KC' и проекцией прямой MH на грань $CDD'C'$.

Решение. Так как угол между скрещивающимися прямыми равен углу между их проекциями на плоскость, параллельную обеим прямым, то искомый угол – это угол между прямыми KC' и $M'H'$ – проекцией прямой MH на грань $CDD'C'$.





Приведём один из способов вычисления этого угла. Перенесём вниз на 1 отрезок KC' и рассмотрим четырёхугольник $K'M'C''H'$. Его стороны равны, поскольку

$$K'M' = M'C'' = C''H' = H'K' = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10},$$

значит, он является ромбом. Так как диагонали ромба перпендикулярны, то искомый угол равен 90°.

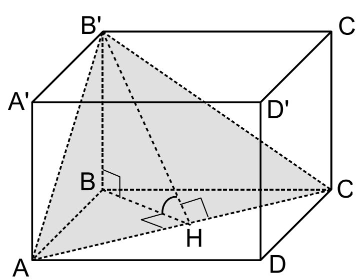
Ответ. 90.

Задача 5.

Дана прямая призма $ABCDA'B'C'D'$, в основании которой лежит квадрат со стороной 2. Боковое ребро призмы равно $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью треугольника $AB'C$ и плоскостью основания призмы.

Идея. На прямой пересечения заданных плоскостей выбрать точку таким образом, чтобы угол между перпендикулярами, восстановленными из неё в обеих плоскостях, легко вычислялся.
Указание. Основанием перпендикуляров, опущенных из точек B и B' на прямую AC, является середина AC.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC. Он равнобедренный, поэтому основанием его высоты BH является середина стороны AC. Заметим, что треугольник $AB'C$ тоже равнобедренный и основанием высоты, опущенной из вершины B', тоже является точка H. Итак, отрезки BH и $B'H$ перпендикулярны прямой AC и лежат в заданных плоскостях, следовательно, угол $\angle BHB'$ – угол между этими плоскостями. Найдём величину этого угла из прямоугольного треугольника $BB'H$:



$$\operatorname{tg}\angle BHB' = \frac{BB'}{BH} = \frac{\sqrt{6}/3}{2\cdot\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad\Longrightarrow\quad \angle BHB' = 30^\circ.$$

Ответ. 30.

Задача 6.

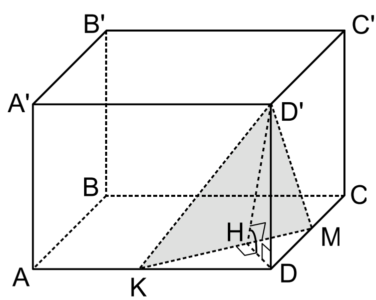
Основанием прямой призмы $ABCDA'B'C'D'$ является прямоугольник $ABCD$, стороны которого равны $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$. Высота призмы равна 8. Секущая плоскость проходит через вершину D' и середины ребер AD и CD. Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью сечения.

И д е я. На прямой пересечения заданных плоскостей выбрать точку таким образом, чтобы угол между перпендикулярами, восстановленными из неё в обеих плоскостях, легко вычислялся.

У к а з а н и е. Показать, что перпендикуляр, опущенный из точки D на прямую пересечения заданных плоскостей, является проекцией перпендикуляра, опущенного из точки D' на эту же прямую.

У к а з а н и е. Применить теорему о трёх перпендикулярах.

У к а з а н и е. Вычислить косинус искомого угла из соответствующего прямоугольного треугольника.



Р е ш е н и е. Рассмотрим прямоугольный треугольник DKM, где K – середина ребра AD, M – середина ребра CD. Его высота DH является проекцией отрезка $D'H$, поскольку ребро DD' перпендикулярно плоскости основания. А так как проекция DH перпендикулярна прямой KM, то и сама наклонная $D'H$ также перпендикулярна этой прямой по теореме о трёх перпендикулярах. Итак, отрезки DH и $D'H$ перпендикулярны прямой KM и лежат в заданных плоскостях, следовательно, угол $\angle DHD'$ – угол между этими плоскостями. Найдём величину этого угла из прямоугольного треугольника $DD'H$. Катет $DD' = 8$ по условию задачи. Для вычисления второго катета воспользуемся формулой площади треугольника:

$$S_{KMD} = \frac{1}{2} \cdot KD \cdot MD = \frac{1}{2} \cdot KM \cdot DH \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{KD^2 + MD^2} \cdot DH \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 45 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{180 + 45} \cdot DH \quad \Longrightarrow \quad DH = 6.$$

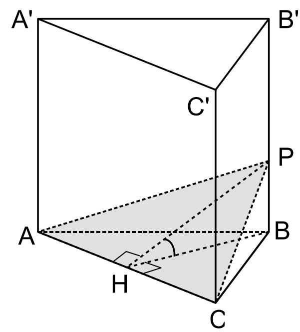
Зная оба катета прямоугольного треугольника $DD'H$, вычислим искомую величину

$$\cos \angle DHD' = \frac{DH}{D'H} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 0,6\,.$$

О т в е т. $0,6$.

Задача 7.

Основание прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ – правильный треугольник ABC, сторона которого равна $8\sqrt{3}$. На ребре отмечена точка P так, что $BP : PB' = 3 : 5$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ACP, если расстояние между прямыми BC и $A'C'$ равно 16.



Идея. На прямой пересечения заданных плоскостей выбрать точку таким образом, чтобы угол между перпендикулярами, восстановленными из неё в обеих плоскостях, легко вычислялся.

Указание. Показать, что основанием перпендикуляров, опущенных из точек B и P на прямую пересечения заданных плоскостей, является середина ребра AC.

Указание. Найти длину ребра призмы, используя то, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые.

Указание. Вычислить длину отрезка PB и тангенс искомого угла из соответствующего прямоугольного треугольника.

Решение. Так как в основании правильной призмы лежит равносторонний треугольник, то его высота BH является одновременно и его медианой.

Заметим, что в треугольнике APC основанием высоты, проведённой к AC, также является точка H, поскольку он равнобедренный.

Следовательно, угол $\angle PHB$ есть угол между плоскостью сечения и основанием призмы. Найдём его тангенс из прямоугольного треугольника PHB.

Катет $BP = \dfrac{3}{8}BB'$, а длина ребра BB' есть расстояние между параллельными плоскостями, содержащими прямые $A'C'$ и BC, поэтому $BB' = 16$ и $BP = 6$.

Длину катета BH можно найти из прямоугольного треугольника BHC:

$$BH = BC \cdot \sin 60^\circ = 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg} \angle PHB = \frac{BP}{BH} = 0,5\,.$$

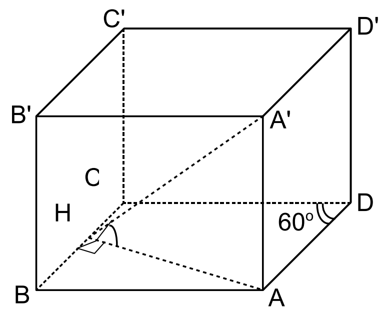
Ответ. $0,5$.

Задача 8.

Основание прямого параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ – параллелограмм $ABCD$, в котором $CD = 2\sqrt{3}$, $\angle D = 60^\circ$. Тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью $A'BC$ равен 6. Найдите высоту параллелепипеда.

Идея. На прямой пересечения заданных плоскостей выбрать точку таким образом, чтобы тангенс угла между перпендикулярами, восстановленными из неё

в обеих плоскостях, легко выражался через высоту параллелепипеда и высоту параллелограмма.
Указание. Показать, что основанием перпендикуляров, опущенных из точек A и A' на прямую пересечения заданных плоскостей, является одна и та же точка.
Указание. Применить теорему о трёх перпендикулярах.
Указание. Вычислить длину высоты параллелепипеда через тангенс данного угла из соответствующего прямоугольного треугольника.



Решение. Пусть H – основание высоты параллелограмма $ABCD$, проведённой из вершины A. Заметим, что отрезок AH является проекцией наклонной $A'H$, так как ребро AA' перпендикулярно плоскости основание призмы. По теореме о трёх перпендикулярах наклонная $A'H$ перпендикулярна (также как и её проекция) прямой BC. Следовательно, $\angle AHA'$ есть угол между плоскостью $A'BC$ и плоскостью основания призмы и $\operatorname{tg}\angle AHA' = 6$.

Для того, чтобы найти высоту призмы AA', нам надо вычислить AH – высоту параллелограмма, лежащего в основании:

$$AH = AB \cdot \sin\angle ABC = CD \cdot \sin\angle ADC = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Теперь из прямоугольного треугольника AHA' найдём длину катета AA':

$$AA' = AH \cdot \operatorname{tg}\angle AHA' = 3 \cdot 6 = 18.$$

Ответ. 18.

Задача 9.

В правильной призме $MNPM'N'P$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN' образует с плоскостью основания угол $45°$. Найдите площадь сечения, проходящего через середину ребра NP параллельно плоскости MPP'.

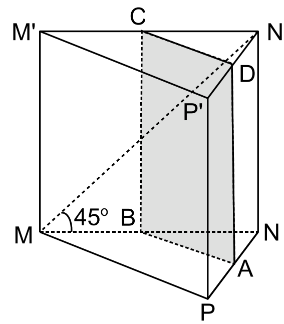
Идея. При построении сечения использовать следующий факт: если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.
Указание. Показать, что секущая плоскость пересекает основания призмы по средним линиям соответствующих треугольников.
Указание. Зная сторону основания призмы и угол между диагональю грани MN' и плоскостью основания, вычислить высоту призмы.

Решение. Секущая плоскость параллельна плоскости MPP', следовательно, плоскость основания пересекает эти две параллельные плоскости по параллельным прямым: $AB \parallel MP$. Точка A – середина стороны PN, значит AB – средняя линия треугольника MNP и $AB = 6$.

Плоскость $PNN'P'$ также пересекает параллельные плоскости MPP' и секущую плоскость по параллельным прямым: $PP' \parallel AD$.

Заметим, что DP' (сторона прямоугольника $APP'D$) равна

$$DP' = AP = \frac{1}{2}PN = 6.$$



Из аналогичных соображений $M'C = 6$ и, следовательно, CD – средняя линия треугольника $M'N'P'$.

Для того, чтобы вычислить площадь сечения $ABCD$, нам надо найти сторону AD прямоугольника $ABCD$. Рассмотрим прямоугольный треугольник MNN'.

По условию задачи $MN = 12$, $\angle NMN' = 45°$, следовательно,

$$NN' = MN = 12 \quad \text{и} \quad S = AB \cdot AD = 6 \cdot 12 = 72.$$

Ответ. 72.

*Задача 10.**

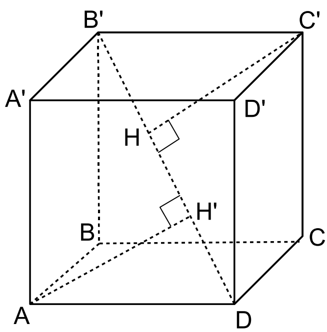
На диагональ куба, соединяющую две его вершины, не лежащие в одной грани, провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?

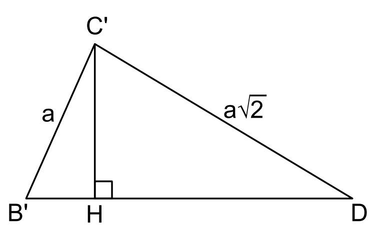
Идея. Выразить длину проекции ребра куба на его диагональ через длину ребра куба.

Указание. Рассмотреть прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является диагональ куба, а вершиной прямого угла – одна из вершин куба, не являющаяся концом диагонали.

Указание. Выразить через длину ребра куба стороны этого треугольника и проекции катетов на гипотенузу.

Решение. Рассмотрим куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром, равным a. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C' на диагональ $B'D$. Выразим через a длину отрезка $B'H$.





Рассмотрим треугольник $B'C'D$. Он прямоугольный, так как ребро $B'C'$ перпендикулярно плоскости грани $CDD'C'$, а отрезки $B'H$ и HD являются проекциями его катетов на гипотенузу. Выразим их через a.

Катет $B'C' = a$. Катет $C'D = a\sqrt{2}$, так как является диагональю квадрата со стороной a. Гипотенуза равна

$$B'D = \sqrt{(B'C')^2 + C'D^2} = a\sqrt{3}.$$

Теперь воспользуемся следующей цепочкой следствий:

$$\angle C'DB' = \angle B'C'H \quad \Longrightarrow \quad \sin\angle C'DB' = \sin\angle B'C'H \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{B'H}{a} \quad \Longrightarrow \quad B'H = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

следовательно, основание перпендикуляра $C'H$ отсекает от диагонали одну треть.

Заметим, что аналогичная ситуация имеет место и с перпендикулярами, проведёнными из вершин A' и B. Их основания также отсекают от диагонали одну треть и, следовательно, приходят в точку H.

Симметричная ситуация возникает с перпендикулярами, проведёнными из вершин A, C и D'. Их основания отсекают одну треть с другой стороны диагонали. Полученные таким образом точки H и H' делят диагональ на три равные части.

О т в е т. На три равные части.

5.2. Наклонная призма

Задача 1.

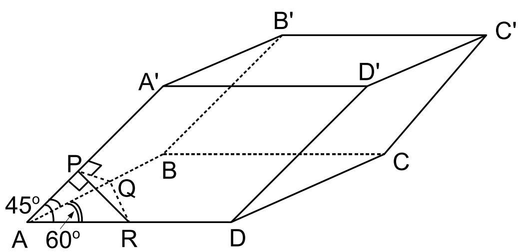
Основание параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ – ромб $ABCD$, $\angle A'AB = \angle A'AD = 45^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$. Найдите градусную меру угла между плоскостями граней $AA'D'D$ и $AA'B'B$.

Идея. Выбрать точку на прямой пересечения заданных плоскостей, восстановить из неё в обеих плоскостях перпендикуляры и выразить угол между ними через расстояние от вершины A до основания этих перпендикуляров.
Указание. Взять произвольную точку на ребре AA', восстановить из неё перпендикуляры в плоскостях $AA'D'D$ и $AA'B'B$. Рассмотреть треугольник, боковыми сторонами которого являются отрезки перпендикуляров, заключенные внутри призмы.
Указание. Выразить элементы этого треугольника через расстояние от вершины A до основания перпендикуляров.

Решение. Рассмотрим произвольную точку P на ребре AA'. Пусть перпендикуляры, восстановленные из P в плоскостях $AA'D'D$ и $AA'B'B$, пересекают ребра основания в точках R и Q.

Для того, чтобы вычислить искомый угол $\angle QPR$ выразим элементы треугольника QPR через $a = AP$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник APR. У него $\angle PAR = 45^\circ$ по условию, $\angle APR = 90^\circ$ по построению, следовательно, $PR = AP = a$, $AR = a\sqrt{2}$. Из аналогичных соображений в треугольнике APQ стороны $PQ = AP = a$, $AQ = a\sqrt{2}$.



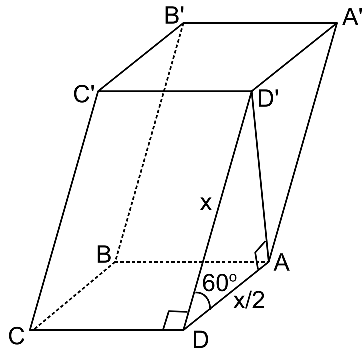
Получилось, что треугольник AQR с углом $\angle QAR = 60^\circ$ является равнобедренным, следовательно, он равносторонний и $QR = a\sqrt{2}$.

Теперь в треугольнике QPR известны все стороны: $PQ = PR = a$, $QR = a\sqrt{2}$. Зная стороны, получаем, что $\angle QPR = 90^\circ$.

Ответ. 90.

Задача 2.

Дана призма $ABCDA'B'C'D'$, в основании которой лежит квадрат, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 60°. Отрезок $D'A$ перпендикулярен плоскости основания. Найти длину этого отрезка, если площадь боковой поверхности призмы равна $6(\sqrt{3}+2)$.



Идея. Выразить площадь боковой поверхности призмы через длину бокового ребра и получить уравнение, приравняв полученное выражение заданному значению.
Указание. Для определения углов боковых граней воспользоваться тем, что плоскость, содержащая прямую, перпендикулярную основанию, сама перпендикулярна основанию.
Указание. Показать, что одна пара боковых граней – параллелограммы с углом 60°, другая пара – прямоугольники.
Указание. Выразить площадь боковой поверхности призмы через длину бокового ребра.
Указание. Приравнять полученное для площади выражение числу $6(\sqrt{3}+2)$ и найти длину бокового ребра призмы из этого уравнения. После чего найти искомый отрезок.

Решение. Рассмотрим боковую грань $AA'D'D$. Ребро DD' наклонено к плоскости основания под углом 60°, отрезок $D'A$ перпендикулярен плоскости основания, следовательно, угол $ADD' = 60^\circ$.

Пусть $DD' = x$, тогда $AD = x/2$ (из прямоугольного $\Delta ADD'$) и

$$S_{AA'D'D} = DD' \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Теперь выразим через x площадь грани $CC'D'D$. Так как по условию $ABCD$ – квадрат, то AD (проекция наклонной DD') перпендикулярна прямой CD. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах наклонная $DD' \perp CD$. Значит, четырёхугольник $CC'D'D$ – прямоугольник. Так как $DD' = x$, $CD = AD = x/2$, то площадь боковой поверхности призмы равна

$$S = 2S_{AA'D'D} + 2S_{CC'D'D} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + x^2 = \frac{x^2}{2}(\sqrt{3}+2),$$

что по условию равно числу $6(\sqrt{3}+2)$. Поэтому $x^2 = 12$ и $D'A = x \cdot \sin 60^\circ = 3$.

Ответ. 3.

Задача 3.

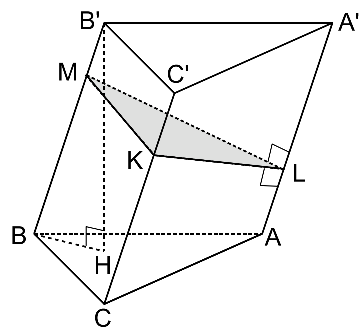
В наклонной треугольной призме высота равна $\sqrt{6}$, а боковые ребра составляют с плоскостью основания угол 45°. Площади двух боковых граней равны 3 и 6, а угол между ними 120°. Найдите объём призмы.

Идея. Использовать формулу $V = S_{п}l$, где $S_{п}$ – площадь перпендикулярного сечения, l – боковое ребро призмы.

Указание. Найти длину ребра призмы, используя информацию о величине угла между боковым ребром и основанием и длине высоты призмы.

Указание. Зная площади граней $AA'C'C$, $BB'C'C$ и длину бокового ребра, найти расстояния между боковыми ребрами.

Указание. Вычислить площадь перпендикулярного сечения и применить формулу $V = S_{п}l$.



Решение. Пусть площади граней $AA'C'C$ и $BB'C'C$ равны 3 и 6 соответственно. Рассмотрим сечение треугольной призмы $ABCA'B'C'$ плоскостью, перпендикулярной рёбрам призмы. Пусть L, M и K – точки пересечения рёбер AA', BB' и CC' с этой плоскостью. Так как по построению рёбра призмы перпендикулярны плоскости LMK, то они перпендикулярны и любым прямым, лежащим в этой плоскости, в частности, прямым LM, MK и KL.

Следовательно, LM, MK и KL – высоты соответствующих параллелограммов, являющихся боковыми гранями призмы.

Объём наклонной призмы равен $V = S_{п}l$, где $S_{п}$ – площадь перпендикулярного сечения, l – боковое ребро призмы. Сначала найдём длину l.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $BB'H$, где H – основание высоты призмы, проведённой из вершины B'. По условию задачи $B'H = \sqrt{6}$ и угол $B'BH = 45^\circ$ как угол между боковым ребром и плоскостью основания. Следовательно, боковое ребро призмы $l = BB' = B'H \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$.

Теперь найдём площадь треугольника KLM. Зная площади граней $AA'C'C$, $BB'C'C$ и длину бокового ребра, вычислим длины высот KL и MK:

$$S_{AA'C'C} = 3 \quad \Longrightarrow \quad 2\sqrt{3} \cdot KL = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad KL = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$S_{BB'C'C} = 6 \quad \Longrightarrow \quad 2\sqrt{3} \cdot MK = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad MK = \sqrt{3}.$$

По условию задачи угол между гранями $AA'C'C$ и $BB'C'C$ равен 120°, значит, $\angle LKM = 120^\circ$ и

$$S_{KLM} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot MK \cdot \sin\angle LKM = \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

следовательно, объём призмы $V = S_{п}l = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \cdot 2\sqrt{3} = \dfrac{9}{4} = 2,25$.

Ответ. $2,25$.

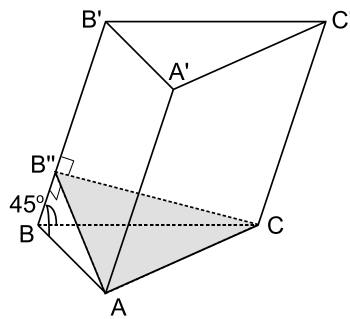
Задача 4.

Основанием наклонной призмы $ABCA'B'C'$ является правильный треугольник ABC со стороной 4. Боковое ребро BB' призмы равно 4 и образует с рёбрами BA и BC углы по $45°$. Найдите объём призмы.

Идея. Использовать формулу $V = S_{п}l$, где $S_{п}$ – площадь перпендикулярного сечения, l – боковое ребро призмы.

Указание. Провести перпендикулярное сечение через ребро AC.

Указание. Вычислить площадь перпендикулярного сечения и применить формулу $V = S_{п}l$.



Решение. Боковые грани $AA'B'B$ и $BB'C'C$ являются равными ромбами (стороны равны 4, острый угол равен $45°$). Следовательно, их высоты, проведённые к общей стороне BB', имеют общее основание B''.

Объём наклонной призмы равен $V = S_{п}l$, где $S_{п}$ – площадь перпендикулярного сечения, l – боковое ребро призмы.

Поскольку $AB'' \perp BB''$ и $CB'' \perp BB''$, плоскость треугольника $AB''C$ перпендикулярна боковым рёбрам призмы. Найдём площадь треугольника $AB''C$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $BB''A$. У него $\angle BAB'' = \angle ABB'' = 45°$, следовательно, $AB'' = 4 \cdot \sin 45° = 2\sqrt{2}$. Так как высоты равных ромбов равны, то $CB'' = AB'' = 2\sqrt{2}$.

Теперь, когда известны длины всех сторон треугольника $AB''C$, вычислим его площадь. С учётом того, что он оказался прямоугольным, получим

$$S_{AB''C} = \frac{1}{2} \cdot AB'' \cdot CB'' = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 = 4,$$

следовательно, объём призмы $V = S_{п}l = 4 \cdot 4 = 16$.

Ответ. 16.

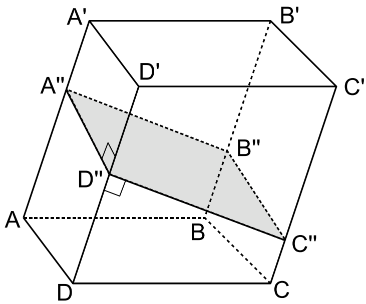
Задача 5.

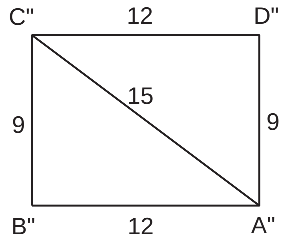
В наклонном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ боковое ребро равно 8. Расстояния между ребром AA' и рёбрами BB' и DD' соответственно равны 12 и 9, а расстояние между AA' и CC' равно 15. Найти объём параллелепипеда.

Идея. Использовать формулу $V = S_{п}l$, где $S_{п}$ – площадь перпендикулярного сечения, l – боковое ребро призмы.

Указание. Найти площадь перпендикулярного сечения призмы, используя информацию о расстояниях между боковыми рёбрами.

Решение. Рассмотрим сечение призмы $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, перпендикулярной рёбрам призмы. Пусть A'', B'', C'' и D'' – точки пересечения соответствующих рёбер с этой плоскостью. Так как по построению рёбра призмы перпендикулярны секущей плоскости, то они перпендикулярны каждой из сторон параллелограмма $A''B''C''D''$.





Следовательно, $A''B'' = 12$, $A''D'' = 9$ и $A''C'' = 15$.

Объём наклонной призмы равен $V = S_{\text{п}} l$, где $S_{\text{п}}$ – площадь перпендикулярного сечения, l – боковое ребро призмы.

Теперь найдём площадь параллелограмма $A''B''C''D''$. Рассмотрим треугольник $A''B''C''$. Его стороны $A''B'' = 12$, $B''C'' = 9$, $A''C'' = 15$. Заметим, что он является прямоугольным. Следовательно,

$$S_{A''B''C''D''} = 2S_{A''B''C''} = 12 \cdot 9 = 108$$

и объём призмы $V = S_{\text{п}} l = 108 \cdot 8 = 864$.

Ответ. 864.

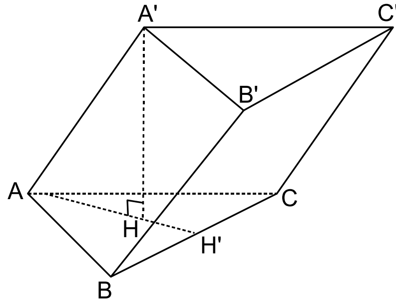
Задача 6.

Основанием наклонной призмы является правильный треугольник ABC со стороной 2. Боковое ребро AA' призмы равно 2 и образует с ребрами AB и AC углы по 60°. Определите площадь грани $BCC'B'$.

Идея. Используя симметрию призмы относительно плоскости, содержащей ребро AA' и высоту призмы, доказать, что грань $BCC'B'$ является прямоугольником.

Указание. Показать, что проекция ребра AA' перпендикулярна ребру BC.

Указание. Применить теорему о трёх перпендикулярах.



Решение. В треугольниках ABA' и ACA' две стороны имеют длину 2, а угол между этими сторонами равен 60°. Значит, эти треугольники равносторонние и $BA' = CA' = 2$.

Пусть высота призмы $A'H = h$. Из прямоугольных треугольников $A'HA$, $A'HB$ и $A'HC$ получим $AH = BH = CH = \sqrt{2^2 - h^2}$.

Из равенства отрезков $AH = BH = CH$ следует, что H – центр описанной окружности треугольника ABC.

Так как треугольник ABC правильный, то отрезок AH' является одновременно биссектрисой и высотой треугольника ABC.

Итак, мы показали, что отрезок AH (проекция наклонной AA') перпендикулярен ребру BC. Но тогда, по теореме о трёх перпендикулярах, ребро $AA' \perp BC$. Так как боковые рёбра призмы параллельны, то и два других боковых ребра перпендикулярны ребру BC. Следовательно, параллелограмм $BCC'B'$ является прямоугольником.

По условию задачи $BC = BB' = 2$, значит, $S_{BCC'B'} = 2 \cdot 2 = 4$.

Замечание. Для доказательства того, что грань $BCC'B'$ является прямоугольником, было бы достаточно просто равенства углов между боковым ребром и рёбрами основания (не обязательно 60°). Это более общее утверждение будет доказано в следующей задаче.

Ответ. 4.

*Задача 7.**

Все рёбра призмы $ABCA'B'C'$ равны между собой. Углы BAA' и CAA' равны 60° каждый. Найдите расстояние от точки C' до плоскости $CA'B'$, если площадь грани $ABB'A'$ равна $8\sqrt{3}$.

Идея. Доказать вспомогательное утверждение: если боковое ребро треугольной призмы образует равные углы с равными сторонами основания, выходящими из той же вершины, то боковая грань, не имеющая общих точек с данным ребром, является прямоугольником.
Указание. Для доказательства вспомогательного утверждения использовать то, что проекция данного бокового ребра на основание попадает на биссектрису (медиану и высоту) равнобедренного треугольника, лежащего в основании призмы.
Указание. Применить теорему трёх перпендикулярах.

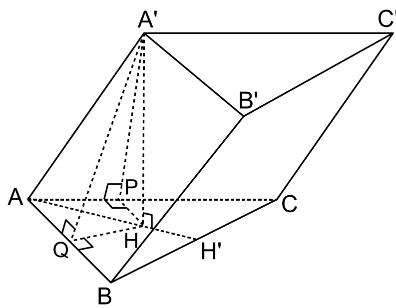
Решение. Из-за симметрии призмы относительно плоскости, содержащей ребро AA' и высоту призмы, возникает мысль о том, что грань $BCC'B'$ также симметрична относительно плоскости симметрии и $BCC'B'$ является прямоугольником.

Сформулируем это в виде вспомогательного утверждения и докажем его.

Утверждение. Если боковое ребро треугольной призмы образует равные углы с равными сторонами основания, выходящими из той же вершины, то боковая грань, не имеющая общих точек с данным ребром, является прямоугольником.

Доказательство. Рассмотрим наклонную треугольную призму $ABCA'B'C'$, ребро AA' которой образует с ребрами AB и AC равные углы. Так как по условию $AB = AC$, то параллелограммы $ACC'A' = ABB'A'$ и их высоты $A'P = A'Q$.

Рассмотрим треугольники $A'HP$ и $A'HQ$, где H – основание высоты призмы $A'H$. Треугольники равны по катету ($A'H$ – общий) и гипотенузе ($A'P = A'Q$), следовательно, $HP = HQ$.



Эти отрезки являются проекциями наклонных $A'P$ и $A'Q$ и по теореме о трёх перпендикулярах перпендикулярны ребрам AC и AB соответственно. Получилось, что точка H находится на одном расстоянии от рёбер AC и AB; значит, она лежит на биссектрисе AH'. А так как в равнобедренном треугольнике биссектриса является высотой, то отрезок AH (проекция наклонной AA') перпендикулярен ребру BC и (по теореме о трёх перпендикулярах) $AA' \perp BC$.

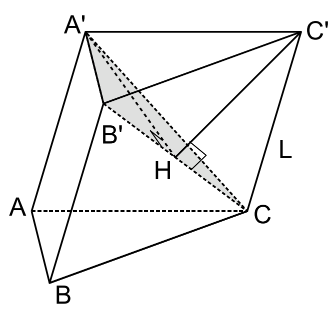
В силу параллельности боковых ребер призмы получаем $BB' \perp BC$, $CC' \perp BC$; значит, параллелограмм $BCC'B'$ – прямоугольник. Утверждение доказано.

По условию задачи все ребра призмы равны, найдем длину ребер a. Так как площадь грани $ABB'A'$ равна $8\sqrt{3}$ и угол $\angle BAA' = 60^\circ$, то

$$S_{ABB'A'} = a^2 \sin 60^\circ = 8\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad a = 4.$$

Следовательно, прямоугольник $BCC'B'$ является квадратом со стороной 4, а его диагональ $B'C = 4\sqrt{2}$.

Теперь найдём угол между гранью $BCC'B'$ и плоскостью сечения $CA'B'$. Заметим сначала, что $\Delta AA'C$ – равнобедренный с углом при вершине, равным 60°, а, значит, равносторонний, поэтому $A'C = a = 4$. Основанием перпендикуляров, проведённых из вершин A' и C' к прямой $B'C$, является середина отрезка $B'C$ – точка H, в силу равнобедренности треугольников $B'A'C$ и $B'C'C$, где высоты совпадают с медианами.



Вычислим угол $\angle A'HC'$ (который и есть угол между плоскостями) из треугольника $A'HC'$. Его стороны равны $A'H = C'H = 2\sqrt{2}$, $A'C' = 4$. Заметим, что треугольник $A'HC'$ оказался прямоугольным. Следовательно, прямая $C'H$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости $A'B'C$ (прямым $A'H$ и $B'C$) и по признаку перпендикулярности прямой и плоскости перпендикулярна плоскости $A'B'C$. Значит, расстояние от точки C' до плоскости $A'B'C$ равно длине перпендикуляра $C'H = 2\sqrt{2}$.

Ответ. $2\sqrt{2}$.

*Задача 8.**

Все грани призмы $ABCDA'B'C'D'$ – равные ромбы. Углы BAD, BAA' и DAA' равны 60° каждый. Найдите угол между прямой BA' и плоскостью BDB'.

Идея. Использовать вспомогательное утверждение из предыдущей задачи о том, что если боковое ребро треугольной призмы образует равные углы с равными сторонами основания, выходящими из той же вершины, то боковая грань, не имеющая общих точек с данным ребром, является прямоугольником.
Указание. Рассмотреть треугольную призму $ABDA'B'D'$. Показать, что её грань $BB'D'D$ – прямоугольник.
Указание. Опустить перпендикуляр из точки A' на плоскость $BB'D'D$ и вычислить угол между наклонной BA' и её проекцией на эту плоскость.

Решение. В предыдущей задаче мы доказали следующее вспомогательное утверждение: если боковое ребро треугольной призмы образует равные углы с равными сторонами основания, выходящими из той же вершины, то боковая грань, не имеющая общих точек с данным ребром, является прямоугольником.

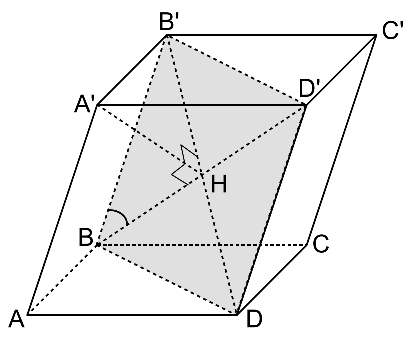
Применим его к треугольной призме $ABDA'B'D'$. Получим, что параллелограмм $BB'D'D$ является прямоугольником.

По условию задачи все грани призмы $ABCDA'B'C'D'$ – равные ромбы, значит все рёбра исходной четырёхугольной призмы равны. Обозначим длину рёбер через a. Так как углы BAD, BAA' и DAA' равны 60° каждый, то отрезки

$$B'D' = BD = BA' = a.$$

Следовательно, прямоугольник $BB'D'D$ является квадратом со стороной a.

Теперь найдём угол между прямой BA' и плоскостью BDB'.



Основанием перпендикуляров, проведённых из вершин A' и B' к прямой BD', является середина отрезка BD' – точка H, в силу равнобедренности треугольников $A'BD'$ и $BB'D'$, где высоты совпадают с медианами.

Так как прямая $A'H$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости BDB' (прямым $B'H$ и BH), то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости эта прямая перпендикулярна плоскости BDB'. Значит, угол между прямой BA' и плоскостью BDB' есть угол между наклонной BA' и её проекцией BH. Найдём его величину из прямоугольного треугольника $A'BH$:

$$\cos\angle A'BH = \frac{BH}{BA'} = \frac{BD'/2}{BA'} = \frac{a\sqrt{2}/2}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \angle A'BH = 45^\circ.$$

Ответ. 45°.

6. Пирамида

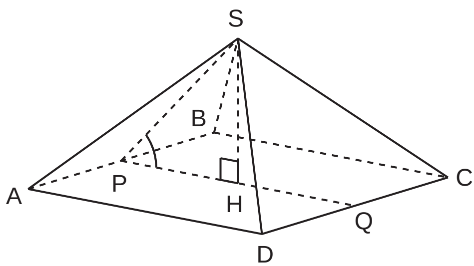
6.1. Правильная пирамида

Задача 1.

Двугранные углы при основании правильной четырёхугольной пирамиды равны 45°, а площадь боковой поверхности равна $36\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.

Идея. Выразить площадь боковой поверхности пирамиды через длину ребра основания и получить уравнение, приравняв полученное выражение заданному значению.
Указание. Провести сечение через апофему и высоту пирамиды.
Указание. Выразить элементы этого треугольника через длину ребра основания и величину двугранного угла при основании пирамиды.
Указание. Выразить площадь боковой поверхности пирамиды через длину ребра основания.
Указание. Приравнять полученное для площади выражение числу $36\sqrt{2}$ и найти длину ребра из этого уравнения, после чего найти объём пирамиды.

Решение. Пусть ребро основания правильной пирамиды $ABCDS$ равно a. Выразим площадь боковой поверхности через a.



Рассмотрим сечение, проходящее через высоту SH и отрезок PQ, параллельный ребру основания AD. Заметим, что точки P и Q будут серединами рёбер AB и CD, а отрезок SP будет апофемой грани ABS.

Так как высота SH перпендикулярна плоскости $ABCD$, то отрезок PH является проекцией апофемы SP на плоскость основания пирамиды. Значит, $\angle SPH$ есть угол между боковой гранью ABS и плоскостью основания и равен 45°.

Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник SPH. У него $\angle SPH = 45^\circ$, катет $PH = AD/2 = a/2$. Следовательно, второй катет $SH = a/2$ и гипотенуза $SP = a\sqrt{2}/2$.

Выразим площадь боковой поверхности через a:

$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot S_{ABS} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a^2\sqrt{2}.$$

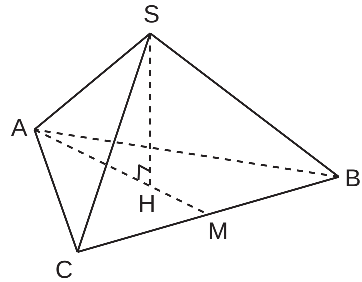
Так как по условию $S_{\text{бок}} = 36\sqrt{2}$, то $a = 6$. В результате объём пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = 36.$$

Ответ. 36.

Задача 2.

Вычислите объём правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $2\sqrt{3}$, а все плоские углы при вершине прямые.



Идея. Выразить высоту пирамиды, все плоские углы при вершине которой прямые, через длину ребра основания и получить уравнение, приравняв полученное выражение заданному значению.
Указание. Провести сечение через одну из вершин основания и высоту пирамиды.
Указание. Рассмотреть прямоугольный треугольник, катетом которого является высота пирамиды, гипотенузой – ребро пирамиды. Выразить элементы этого треугольника через длину ребра основания.

Решение. Пусть ребро основания правильной пирамиды $ABCS$ равно a. Так как плоские углы при вершине прямые, то боковые ребра равны $a/\sqrt{2}$.

Поскольку пирамида правильная, основанием высоты пирамиды является центр правильного треугольника ABC, то есть точка H, делящая медиану AM в отношении $2:1$, считая от вершины A. Следовательно,

$$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник SAH. У него катет $AH = a/\sqrt{3}$, гипотенуза $SA = a/\sqrt{2}$. Следовательно, второй катет $SH = a/\sqrt{6}$. Так как по условию $SH = 2\sqrt{3}$, то $a = 6\sqrt{2}$. В результате объём пирамиды равен

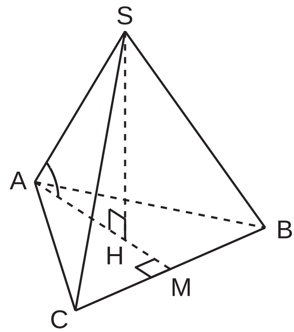
$$V = \frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{3} = 36.$$

Ответ. 36.

Задача 3.

В правильной треугольной пирамиде высота равна 4, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 45°. Найдите объём пирамиды V. В ответе запишите $\sqrt{3}V$.

Идея. Выразить длину ребра основания через высоту пирамиды.
Указание. Провести сечение через одну из вершин основания и высоту пирамиды.
Указание. Рассмотреть прямоугольный треугольник, катетом которого является высота пирамиды, гипотенузой – ребро пирамиды. Выразить элементы этого треугольника через высоту.



Р е ш е н и е. Поскольку пирамида правильная, основанием высоты пирамиды является центр правильного треугольника ABC, то есть точка H, делящая медиану AM в отношении $2:1$, считая от вершины A. Так как высота SH перпендикулярна плоскости основания, то AH есть проекция ребра AS и $\angle SAH = 45°$, поскольку является углом между боковым ребром и плоскостью основания.

Рассмотрим прямоугольный треугольник SAH. У него катет $SH = 4$ и $\angle SAH = 45°$. Следовательно, второй катет $AH = 4$.

Так как $AH = 4$ и $AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, где a – сторона основания, то $a = 4\sqrt{3}$. В результате объём пирамиды равен

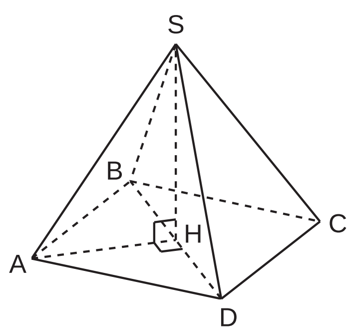
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 16\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{3}V = 48.$$

О т в е т. 48.

Задача 4.

В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна высоте и равна 4. Найти расстояние (p) от вершины основания до плоскости диагонального сечения, не проходящего через эту вершину. В ответе запишите $\dfrac{p\sqrt{2}}{2}$.

И д е я. Показать, что перпендикуляр, опущенный из вершины A на диагональное сечение, лежит в плоскости основания пирамиды.
У к а з а н и е. Провести перпендикуляр из A к прямой BD и показать, что он является перпендикуляром к плоскости диагонального сечения.
У к а з а н и е. Воспользоваться признаком перпендикулярности прямой и плоскости.



Р е ш е н и е. Рассмотрим правильную пирамиду $ABCDS$ с высотой $SH = 4$ и стороной основания, равной 4.

Заметим, что H является серединой диагонали BD. Так как высота SH перпендикулярна плоскости основания, то $AH \perp SH$. А так как $AH \perp BD$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости AH перпендикулярна плоскости BDS.

Следовательно, расстояние от вершины основания до плоскости диагонального сечения равно

$$p = AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p\sqrt{2}}{2} = 2.$$

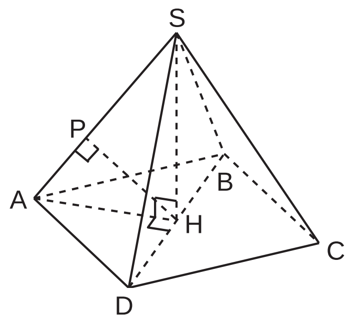
О т в е т. 2.

Задача 5.

В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 2. Найдите расстояние (p) между боковым ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания. В ответе запишите $3\sqrt{6}p$.

Идея. Построить общий перпендикуляр к этим скрещивающимся прямым и вычислить его длину.
Указание. Провести через одну из диагоналей основания диагональное сечение и показать, что оно перпендикулярно другой диагонали.
Указание. Построить общий перпендикуляр в этом диагональном сечении.

Решение. Рассмотрим правильную пирамиду $ABCDS$ с высотой $SH = 2$ и стороной основания, равной 4.



Заметим, что прямая BD перпендикулярна плоскости AHS, так как перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости AH и SH.

Следовательно, если мы проведём в этой плоскости отрезок $HP \perp AS$, то HP будет перпендикулярен и BD, так как лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку BD, то есть отрезок HP – общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AS и BD. Вычислим его длину.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ASH. Его катет $AH = AC/2 = 2\sqrt{2}$, а катет $SH = 2$, откуда гипотенуза равна $AS = 2\sqrt{3}$. Тогда получаем, что

$$S_{\Delta ASH} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot SH = 2\sqrt{2}.$$

С другой стороны,

$$S_{\Delta ASH} = \frac{1}{2}\cdot AS\cdot HP \implies 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot HP \implies HP = \frac{4}{\sqrt{6}} \implies 3\sqrt{6}\cdot HP = 12.$$

Ответ. 12.

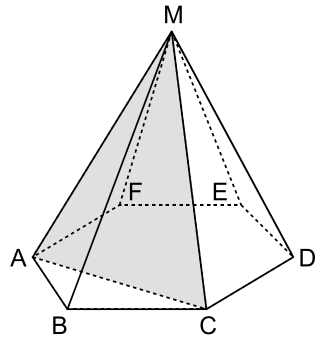
Задача 6.

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCKEF$ с вершиной M длина стороны основания равна $4\sqrt{3}$, а длина апофемы 10. Найдите площадь сечения (S), проходящего через вершину пирамиды и меньшую из диагоналей основания. В ответе запишите $S/\sqrt{19}$.

Идея. Найти площадь сечения, предварительно вычислив длину бокового ребра пирамиды и длину меньшей диагонали основания.
Указание. Зная высоту и основание треугольника, являющегося боковой гранью, вычислить ребро пирамиды.

Указание. Для вычисления меньшей диагонали основания рассмотреть равнобедренный треугольник, отсекаемый от шестиугольника меньшей диагональю.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABM. Его основание равно $4\sqrt{3}$, а высота равна 10. Следовательно, боковые стороны



$$AM = BM = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 10^2} = 4\sqrt{7}.$$

Найдём AC. Так как у правильного шестиугольника все углы по 120°, то по теореме косинусов, применённой к треугольнику ABC, получим

$$AC^2 = (4\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot \cos 120^\circ = 144,$$

откуда $AC = 12$. Теперь рассмотрим треугольник ACM. Найдём его площадь. Пусть h – длина высоты треугольника ACM, проведённой к основанию AC, тогда

$$S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{(4\sqrt{7})^2 - 6^2} = 12\sqrt{19} \quad \Longrightarrow \quad \frac{S}{\sqrt{19}} = 12.$$

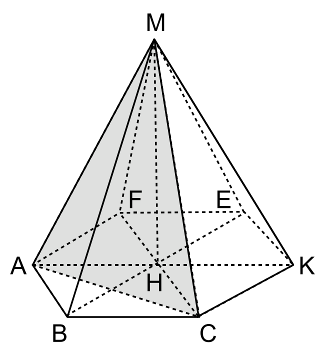
Ответ. 12.

Задача 7.

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCKEF$ с вершиной M сечение проходит через вершину пирамиды и меньшую из диагоналей основания. Найти отношение объёмов частей пирамиды, на которые она делится плоскостью сечения.

Идея. Отношение объёмов пирамид с общей вершиной и основаниями, лежащими в одной плоскости, равно отношению площадей оснований.

Указание. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого меньшей диагональю от шестиугольника, лежащего в основании исходной пирамиды.



Решение. Искомое отношение равно

$$\frac{V_{MABC}}{V_{MACKEF}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot MH}{\frac{1}{3} \cdot S_{ACKEF} \cdot MH} = \frac{S_{ABC}}{S_{ACKEF}}.$$

Заметим, что правильный шестиугольник со стороной a состоит из шести равносторонних треугольников со стороной a, значит $S_{ABCKEF} = 6S_{ABH}$, причём $S_{ABH} = S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Следовательно,

$$\frac{V_{MABC}}{V_{MACKEF}} = \frac{S_{ABC}}{6S_{ABH} - S_{ABC}} = \frac{1}{5} = 0,2\,.$$

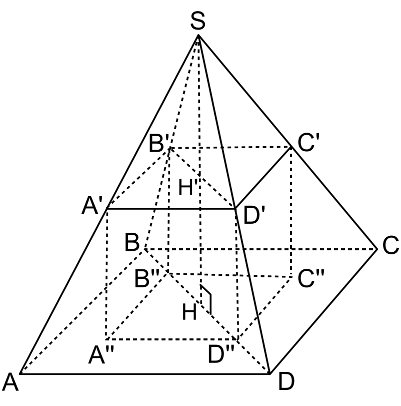
Ответ. $0,2$.

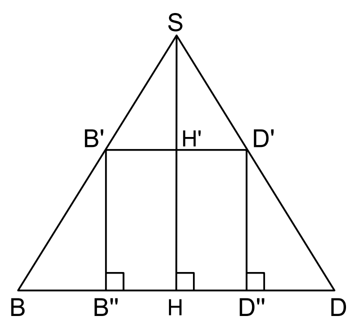
*Задача 8.**

В правильную четырёхугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины принадлежат боковым рёбрам пирамиды, а четыре другие принадлежат её основанию. Найдите ребро куба (a), если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{2}$, а её боковое ребро равно 3. В ответе запишите $3\sqrt{2}a$.

Идея. Использовать то, что диагональное сечение куба вписано в диагональное сечение пирамиды.
Указание. Показать, что вершины куба, принадлежащие основанию пирамиды, лежат на диагоналях этого основания.
Указание. Рассмотреть диагональное сечение пирамиды и вписанное в него диагональное сечение куба. Зная стороны треугольника, определить стороны вписанного в него прямоугольника с соотношением сторон $1:\sqrt{2}$.

Решение. Пусть куб $A'B'C'D'A''B''C''D''$ вписан в пирамиду указанным в условии задачи образом. Рассмотрим диагональное сечение BDS правильной четырёхугольной пирамиды $ABCDS$. Так как сечение содержит высоту SH (H является серединой диагонали BD), то плоскость сечения перпендикулярна плоскости основания пирамиды. Следовательно, проекции всех точек плоскости BDS принадлежат прямой BD, в частности, проекции B'' и D'' точек B' и D', то есть диагональное сечение куба вписано в диагональное сечение пирамиды.





Рассмотрим треугольник BDS и вписанный в него прямоугольник $B'D'D''B''$. Боковые стороны треугольника BDS равны $BS = DS = 3$, основание $BD = \sqrt{2}\cdot AD = 2$, высота $SH = \sqrt{3^2-1} = 2\sqrt{2}$. Пусть стороны прямоугольника $B'D'D''B''$ равны $B'B'' = D'D'' = a$, тогда $B'D' = B''D'' = a\sqrt{2}$. Найдём a.

Заметим, что $\Delta BSD \sim \Delta B'SD'$, поскольку $BD \parallel B'D'$. Следовательно,

$$\frac{SH'}{SH} = \frac{B'D'}{BD} \quad\Longrightarrow\quad \frac{SH-a}{SH} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{2\sqrt{2}-a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad a = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad\Longrightarrow\quad 3\sqrt{2}a = 4.$$

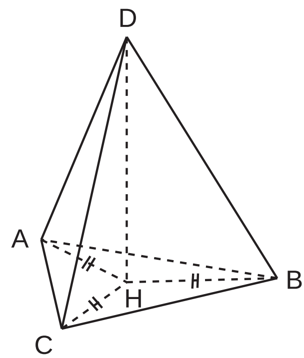
Ответ. 4.

6.2. Тетраэдр

Задача 1.

Доказать, что основание высоты тетраэдра является центром окружности, описанной около основания, тогда и только тогда, когда длины всех боковых рёбер равны между собой (или все боковые рёбра наклонены к плоскости основания под одним углом).

Идея. Показать, что равенство рёбер равносильно равенству их проекций.
Указание. Доказать равенство прямоугольных треугольников, общим катетом которых является высота тетраэдра, а гипотенузами – боковые рёбра тетраэдра.



Решение. Пусть H – основание высоты DH тетраэдра $ABCD$. Рассмотрим прямоугольные треугольники ADH, BDH и CDH.

Если боковые рёбра тетраэдра равны, то все три треугольника равны по гипотенузе и катету (DH – общий). Из равенства треугольников следует равенство отрезков $AH = BH = CH$, значит, точка H есть центр окружности, описанной около треугольника ABC.

И наоборот, если основание высоты DH есть центр описанной окружности около треугольника ABC, то из равенства прямоугольных треугольников ADH, BDH и CDH следует равенство боковых рёбер $AD = BD = CD$.

Доказательство проводится аналогично, если вместо равенства боковых рёбер дано равенство углов наклона боковых ребер к плоскости основания.

Задача 2.

Доказать, что основание высоты тетраэдра является центром окружности, вписанной в основание, тогда и только тогда, когда все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом.

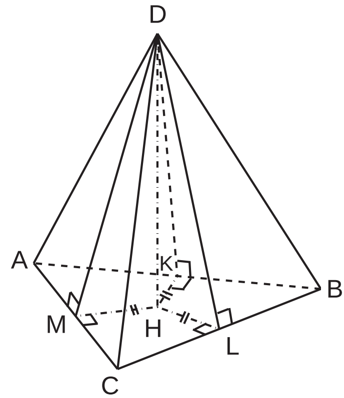
Идея. Показать, что равенство углов наклона боковых граней равносильно равенству проекций высот боковых граней на основание тетраэдра.
Указание. Доказать равенство прямоугольных треугольников, общим катетом которых является высота тетраэдра, а гипотенузами – высоты боковых граней тетраэдра.

Решение. Пусть H – основание высоты DH тетраэдра $ABCD$, а точки K, L и M – основания высот, проведённых из вершины D к рёбрам AB, BC и AC.

Так как прямая DH перпендикулярна плоскости основания, то отрезок KH является проекцией наклонной KD и по теореме о трёх перпендикулярах, также как и наклонная, перпендикулярен ребру AB. Следовательно, угол $\angle DKH$ есть угол между боковой гранью ABD и плоскостью основания ABC. Из аналогичных соображений углы $\angle DLH$ и $\angle DMH$ являются углами между соответствующей боковой гранью и плоскостью основания.

Рассмотрим прямоугольные треугольники KDH, LDH и MDH. Если все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то все эти треугольники равны по острому углу и катету (DH – общий). Из равенства треугольников следует равенство отрезков $KH = LH = MH$, значит, точка H равноудалена от сторон треугольника ABC и является центром окружности вписанной в треугольник ABC.

И наоборот, если основание высоты DH есть центр окружности, вписанной в треугольник ABC, то из равенства прямоугольных треугольников KDH, LDH и MDH следует равенство углов наклона боковых граней к плоскости основания.



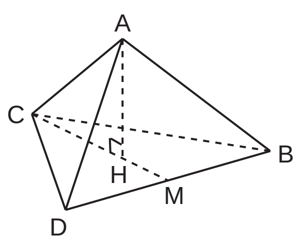
Задача 3.

Все рёбра правильного тетраэдра $ABCD$ равны $\sqrt{6}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BDC.

Идея. Высота тетраэдра – это высота треугольника, являющегося сечением, проведённым через боковое ребро и центр основания.
Указание. Провести сечение через боковое ребро и центр основания, выразить элементы этого треугольника через длину ребра тетраэдра.

Решение. Основанием высоты AH правильного тетраэдра $ABCD$ является центр треугольника BCD, то есть точка пересечения его медиан. Следовательно, $CH = \dfrac{2}{3}CM$, где CM – медиана, проведённая к стороне BD.

Выразим длину AH через длину стороны тетраэдра a.



Рассмотрим прямоугольный треугольник ACH. У него гипотенуза $AC = a$, катет $CH = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Следовательно, второй катет равен $AH = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = 2$.

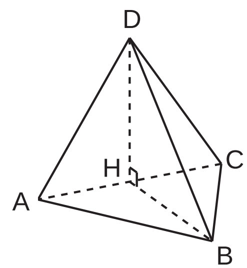
Ответ. 2.

Задача 4.

В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной, равной 2. Одна из боковых граней также равносторонний треугольник и перпендикулярна основанию. Найдите объём пирамиды.

Идея. Воспользоваться формулой $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$.
Указание. Показать, что высотой тетраэдра является высота боковой грани, перпендикулярной основанию.

Решение. Пусть боковая грань ACD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярна основанию ABC. Рассмотрим точку H – середину ребра AC. Так как треугольники ACD и ABC равносторонние, то их медианы DH и BH являются высотами и угол DHB – прямой как угол между плоскостями этих треугольников. Следовательно, отрезок DH перпендикулярен плоскости ABC, поскольку он перпендикулярен двум пересекающимся прямым этой плоскости (AC и HB). Найдём длину высоты тетраэдра



$$DH = AD \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}.$$

В результате объём равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BH \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{3})^2 = 1.$$

Ответ. 1.

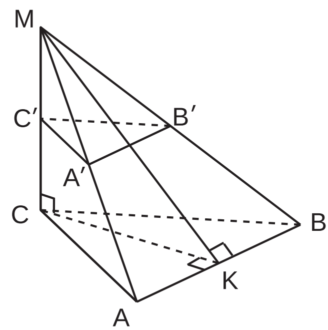
Задача 5.

Боковое ребро MC пирамиды $MABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC и равно 4. Плоскость, параллельная основанию, проходит через середину высоты пирамиды и пересекает боковые рёбра в точках A', B' и C'. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $MA'B'C'$, если $AC = BC = 5$, а высота CK треугольника ABC равна 3.

Идея. Воспользоваться тем, что пирамида $MA'B'C'$ подобна $MABC$ с коэффициентом подобия, равным 2.
Указание. Найти площади граней пирамиды $MABC$.
Указание. Так как пирамида $MA'B'C'$ подобна $MABC$ с коэффициентом подобия равным 2, то площади их боковых поверхностей относятся как 1 к 4.

Решение. По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ACK и BCK получим $AK = KB = 4$, а из прямоугольного треугольника MCK получим $MK = 5$. Площадь боковой поверхности пирамиды $MABC$ равна:

$$S = S_{MCA} + S_{MCB} + S_{ABM} = 2S_{MCA} + S_{ABM} = 2 \cdot 10 + 20 = 40.$$



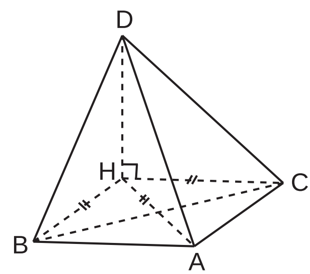
Теперь рассмотрим пирамиду $MA'B'C'$. Так как любая плоскость, пересекающая две параллельных плоскости, пересекает их по параллельным прямым (а плоскость $A'B'C'$ параллельна плоскости ABC), то $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ и $AC \parallel A'C'$. Следовательно, боковые грани пирамиды $MA'B'C'$ подобны боковым граням пирамиды $MABC$. Коэффициент подобия равен 2, поскольку точка C' – середина ребра MC. Значит, площади боковых граней этих пирамид относятся как 1 к 4 и площадь боковой поверхности пирамиды $MA'B'C'$ равна $40 : 4 = 10$.

Ответ. 10.

Задача 6.

Основание пирамиды – треугольник, две стороны которого равны 3 и $\sqrt{3}$, а угол между ними равен 30°. Каждое боковое ребро равно $\sqrt{51}$. Найти объём пирамиды.

Идея. Воспользоваться тем, что если боковые ребра тетраэдра равны, то основание высоты тетраэдра является центром окружности, описанной около основания тетраэдра.
Указание. Вычислить длину высоты тетраэдра, используя то, что длины проекций рёбер равны радиусу окружности, описанной около основания тетраэдра.



Решение. Пусть в основании тетраэдра $ABCD$ лежит треугольник ABC, у которого $\angle ABC = 30^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3$.

В задаче 1 было показано, что если боковые рёбра равны, то основанием высоты тетраэдра является центр окружности, описанной около основания тетраэдра, а длины проекций рёбер равны её радиусу. Поэтому для того, чтобы найти высоту тетраэдра DH, нам достаточно найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

По теореме косинусов третья сторона треугольника ABC равна $AC = \sqrt{3}$. По теореме синусов найдём радиус:

$$R = \frac{AC}{2\sin 30^\circ} = \sqrt{3}.$$

Следовательно, $AH = BH = CH = \sqrt{3}$. Теперь из прямоугольного треугольника CDH по теореме Пифагора найдём высоту DH:

$$DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{51 - 3} = 4\sqrt{3}.$$

В итоге объём тетраэдра равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ \cdot 4\sqrt{3} = 3.$$

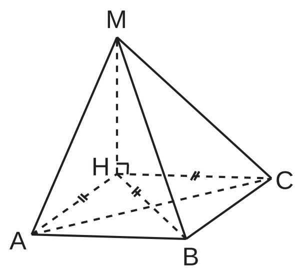
Ответ. 3.

Задача 7.

Основание пирамиды $MABC$ – треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $AC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 120°$. Боковые рёбра образуют с плоскостью основания равные углы. Найдите объём пирамиды, если $AM = \sqrt{53}$.

Идея. Воспользоваться тем, что если боковые рёбра образуют с плоскостью основания равные углы, то основание высоты тетраэдра является центром окружности, описанной около основания тетраэдра.
Указание. Вычислить длину высоты тетраэдра, используя то, что длины проекций рёбер равны радиусу окружности, описанной около основания тетраэдра.

Решение. В задаче 1 было показано, что если боковые рёбра образуют с плоскостью основания равные углы, то основанием высоты тетраэдра является центр окружности, описанной около основания тетраэдра, а длины проекций рёбер равны её радиусу.



Поэтому для того, чтобы найти высоту тетраэдра MH, нам достаточно найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Его найдём по теореме синусов:

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5}.$$

Следовательно, $AH = BH = CH = \sqrt{5}$. Теперь из прямоугольного треугольника CMH по теореме Пифагора найдём высоту MH:

$$MH = \sqrt{CM^2 - CH^2} = \sqrt{53 - 5} = 4\sqrt{3}.$$

По теореме косинусов можно получить, что в треугольнике ABC стороны $AB = BC = \sqrt{5}$. В итоге объём тетраэдра равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot MH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin 120° \cdot 4\sqrt{3} = 5.$$

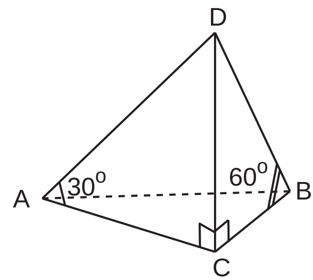
Ответ. 5.

Задача 8.

Основание пирамиды $ABCD$ – прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = 2\sqrt{30}$. CD – высота пирамиды, боковые рёбра AD и BD наклонены к плоскости основания под углами $30°$ и $60°$ соответственно. Найдите объём пирамиды.

Идея. Выразить катеты треугольника ABC через высоту пирамиды, записать теорему Пифагора и из этого уравнения найти высоту.
Указание. Выразить AC и BC через $h = CD$, используя тот факт, что боковые рёбра AD и BD наклонены к плоскости основания под углами $30°$ и $60°$ соответственно.

Указание. Записать теорему Пифагора для треугольника ABC и из этого уравнения найти высоту пирамиды.



Решение. Так как ребро CD перпендикулярно плоскости основания, то угол $\angle DAC$ есть угол наклона ребра AD к плоскости основания и, следовательно, $\angle DAC = 30^\circ$. Угол $\angle DBC$ есть угол наклона ребра BD к плоскости основания и, следовательно, $\angle DBC = 60^\circ$. Обозначим $DC = h$, тогда из прямоугольных треугольников DAC и DBC получим, что $AC = h\sqrt{3}$, $BC = h/\sqrt{3}$. По теореме Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \Longrightarrow \quad (2\sqrt{30})^2 = 3h^2 + \frac{h^2}{3} \quad \Longrightarrow \quad h = 6.$$

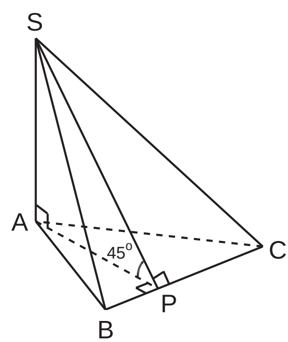
Следовательно, объём пирамиды равен $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{h^2}{2} \cdot 6 = 36.$

Ответ. 36.

Задача 9.

В пирамиде $SABC$ грани SAB и SAC перпендикулярны плоскости основания, ребро BC равно 10, а двугранный угол при ребре BC равен 45°. Найдите объём пирамиды, если площадь её основания равна 30.

Идея. Найти высоту пирамиды из прямоугольного треугольника с катетом SA и острым углом 45°.
Указание. Показать, что ребро SA перпендикулярно плоскости основания пирамиды.
Указание. Рассмотреть прямоугольный треугольник ASP, где P – основание высоты, проведённой из вершины A к стороне BC.



Решение. Если две плоскости перпендикулярны третьей, то прямая пересечения этих двух плоскостей перпендикулярна третьей плоскости. Следовательно, ребро SA перпендикулярно плоскости основания пирамиды ABC. Рассмотрим точку P – основание высоты AP треугольника ABC. Отрезок AP есть проекция наклонной SP и по теореме о трёх перпендикулярах наклонная также перпендикулярна прямой BC.

В прямоугольном треугольнике APS угол $\angle APS = 45^\circ$ как двугранный угол при ребре BC. Катет SA равен

$$SA = AP = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 30}{10} = 6,$$

следовательно, искомый объём пирамиды равен $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SA = 60.$

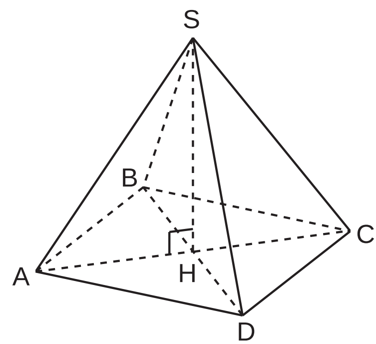
Ответ. 60.

6.3. Произвольные пирамиды

Задача 1.

Основанием пирамиды служит прямоугольник, угол между диагоналями которого равен 30°, а площадь равна 9. Боковые рёбра образуют с плоскостью основания углы в 45°. Найдите объём пирамиды.

Идея. Найти высоту пирамиды из треугольника, являющимся диагональным сечением пирамиды.
Указание. Показать, что основанием высоты является точка пересечения диагоналей прямоугольника, лежащего в основании пирамиды.



Решение. Пусть SH – высота пирамиды $SABCD$ и $SH = h$. Так как боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45°, то проекции боковых рёбер на основание равны h, то есть точка H равноудалена от вершин прямоугольника $ABCD$. Следовательно, она лежит на пересечении его серединных перпендикуляров; значит, H – это центр прямоугольника – точка пересечения его диагоналей. Площадь прямоугольника равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2h \cdot 2h \cdot \frac{1}{2} = h^2.$$

Из условия $S = 9$ получим $h = 3$. Следовательно, искомый объём пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = 9.$$

Ответ. 9.

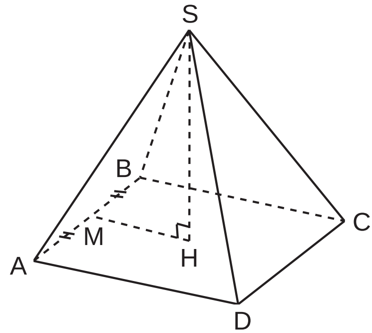
Задача 2.

Основание пирамиды – квадрат, сторона которого равна 3. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом, тангенс которого равен $4/3$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Идея. Найти высоту пирамиды из треугольника, являющегося сечением пирамиды, проходящим через высоту пирамиды и середину ребра основания.
Указание. Показать, что основанием высоты является точка пересечения диагоналей квадрата, лежащего в основании пирамиды.

Решение. Пусть SH – высота пирамиды $SABCD$ и $SH = h$. Так как боковые грани наклонены к плоскости основания под углом с тангенсом равным $4/3$, то проекции высот боковых граней равны $3h/4$, то есть точка H равноудалена от сторон квадрата $ABCD$. Следовательно, она лежит на пересечении его биссектрис; следовательно, H – это центр квадрата – точка пересечения его диагоналей.

Сторона квадрата равна $AB = 2 \cdot \dfrac{3h}{4} = \dfrac{3h}{2}$. Из условия $AB = 3$ получим $h = 2$. Из прямоугольного треугольника MHS найдём высоту боковой грани MS:



$$MS^2 = SH^2 + MH^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad MS = \frac{5}{2}.$$

Следовательно, искомая площадь боковой поверхности пирамиды равна

$$S = 4 \cdot S_{ABS} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MS = 15.$$

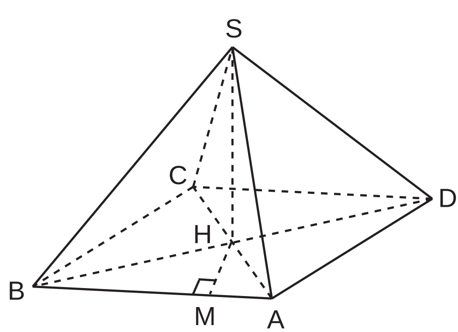
О т в е т. 15.

Задача 3.

Найдите площадь боковой поверхности четырёхугольной пирамиды (S), если в основании пирамиды лежит ромб с диагоналями 30 и 40 и все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°. В ответе запишите $S\sqrt{3}$.

И д е я. Найти высоту пирамиды из треугольника, являющегося сечением пирамиды, проходящим через высоту пирамиды и высоту боковой грани.

У к а з а н и е. Показать, что основанием высоты является точка пересечения диагоналей ромба, лежащего в основании пирамиды.



Р е ш е н и е. Пусть SH – высота пирамиды $SABCD$ и $SH = h$. Так как боковые грани наклонены к плоскости основания под углом, равным 30°, то проекции высот боковых граней равны $h/\operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}h$, то есть точка H равноудалена от сторон ромба $ABCD$. Следовательно, она лежит на пересечении его биссектрис; следовательно, H – это центр ромба – точка пересечения его диагоналей.

Сторона ромба равна $AB = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$. Из прямоугольного треугольника ABH найдём высоту HM:

$$HM = \frac{2S_{ABH}}{AB} = \frac{300}{25} = 12.$$

Так как проекция высоты боковой грани $HM = \sqrt{3}h$, то $h = 4\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника MHS найдём высоту боковой грани MS:

$$MS^2 = SH^2 + MH^2 = h^2 + 3h^2 = 4h^2 \quad \Longrightarrow \quad MS = 8\sqrt{3}.$$

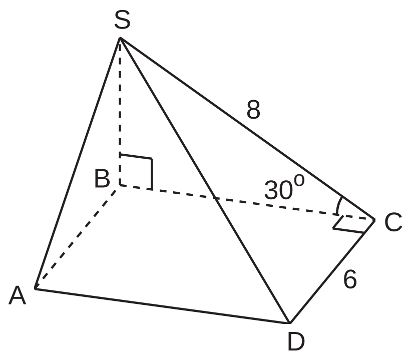
Следовательно, искомая площадь боковой поверхности пирамиды равна

$$S = 4 \cdot S_{ABS} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MS = 400\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad S\sqrt{3} = 1200.$$

Ответ. 1200.

Задача 4.

В четырёхугольной пирамиде $SABCD$, основанием которой является прямоугольник, длины рёбер $SC = 8$, $CD = 6$, а ребро $SB \perp ABC$. Угол между плоскостями SCD и ABC равен $30°$. Во сколько раз площадь основания больше площади грани SBC?



Идея. Выразить отношение площадей через заданные величины.
Указание. Показать, что $\angle BCS$ есть угол между плоскостями SCD и ABC.
Указание. Выразить отношение площадей через длины отрезков SC, CD и $\angle BCS = 30°$.

Решение. Заметим, что отрезок BC есть проекция наклонной SC на плоскость основания пирамиды, а так как $BC \perp CD$, то по теореме о трёх перпендикулярах и сама наклонная $SC \perp CD$. Следовательно, угол $\angle BCS$ есть угол между плоскостями SCD и ABC и равен $30°$.

Искомое отношение площадей равно

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{SBC}} = \frac{BC \cdot CD}{\frac{1}{2} \cdot SB \cdot BC} = \frac{2CD}{SB} = \frac{2 \cdot 6}{SC \cdot \sin 30°} = \frac{12}{4} = 3.$$

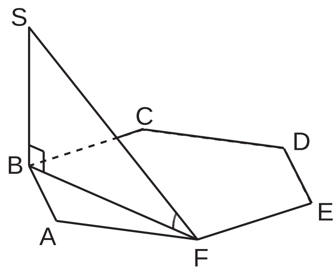
Ответ. 3.

Задача 5.

В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$. Боковое ребро BS перпендикулярно плоскости основания и равно ребру основания. Найдите градусную меру угла между боковым ребром FS и плоскостью основания.

Идея. Выразить проекцию ребра FS на плоскость основания через ребро основания пирамиды и найти угол между самим ребром и его проекцией.

Указание. Проекцией ребра FS на плоскость основания пирамиды является диагональ BF.
Указание. Выразить длину отрезка BF через длину ребра основания из треугольника ABF.
Указание. Найти угол BFS из треугольника BFS.



Решение. Так как ребро BS перпендикулярно плоскости основания пирамиды, то отрезок BF является проекцией наклонной FS, а угол BFS является искомым углом между ребром FS и плоскостью основания.

Пусть сторона основания равна a, тогда ребро $BS = a$ и из прямоугольного треугольника BFS получим

$$\operatorname{tg}\angle BFS = \frac{BS}{BF} = \frac{a}{BF}.$$

Осталось выразить длину BF через a. Рассмотрим треугольник ABF. У него стороны $AB = AF = a$, угол $\angle BAF = 120^\circ$. По теореме косинусов

$$BF^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos 120^\circ = 3a^2 \quad \Longrightarrow \quad BF = a\sqrt{3} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{tg}\angle BFS = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \angle BFS = 30^\circ.$$

Ответ. 30.

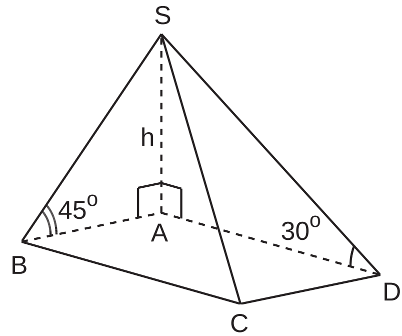
Задача 6.

Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна $36\sqrt{3}$. Две боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие образуют с плоскостью основания углы 45° и 30°. Найти объём пирамиды (V). В ответе укажите $V\sqrt{3}$.

Идея. Выразить стороны основания через высоту пирамиды и, приравняв произведение этих сторон площади основания, получить уравнение для высоты.
Указание. Показать, что высотой пирамиды является общее ребро двух граней, перпендикулярных основанию.
Указание. Выразить стороны основания через высоту пирамиды из прямоугольных треугольников с углами 45° и 30°.
Указание. Приравнять произведение сторон площади основания и найти высоту из полученного уравнения.

Решение. Пусть грани ABS и ADS перпендикулярны основанию $ABCD$. Если две плоскости перпендикулярны третьей, то прямая пересечения этих двух плоскостей перпендикулярна третьей плоскости. Следовательно, ребро SA перпендикулярно плоскости основания пирамиды.

Заметим, что проекция AB ребра BS перпендикулярна прямой BC. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах и само ребро перпендикулярно прямой BC, то есть угол $\angle ABS$ есть угол между плоскостями BCS и $ABCD$ и равен $45°$. Из аналогичных соображений угол $\angle ADS$ есть угол между плоскостями CDS и $ABCD$ и равен $30°$.



Пусть длина высоты SA равна h. Тогда из прямоугольных треугольников ABS и ADS получим $AB = h$ и $AD = h\sqrt{3}$. По условию площадь основания равна $36\sqrt{3}$, значит

$$h\cdot h\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad h = 6 \quad\Longrightarrow\quad V = \frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{ABCD} = 72\sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad V\sqrt{3} = 216.$$

Ответ. 216.

Задача 7.

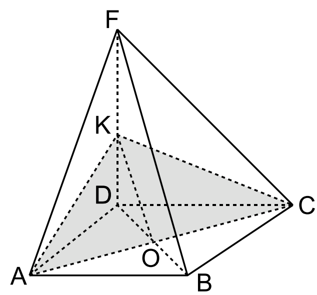
В основании четырёхугольной пирамиды $ABCDF$ лежит квадрат со стороной, равной 4. Боковые грани FAD и FCD перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а высота пирамиды равна диагонали её основания. Найдите площадь (S) сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AC параллельно прямой FB. В ответе укажите $S\sqrt{2}$.

Идея. Плоскость искомого сечения проходит через диагональ AC и середину ребра DF.

Указание. Показать, что высотой пирамиды является общее ребро двух граней, перпендикулярных основанию.

Указание. Показать, что плоскость искомого сечения содержит среднюю линию треугольника BDF.

Указание. Найти площадь сечения, проходящего через диагональ AC и середину ребра DF.



Решение. Если две плоскости перпендикулярны третьей, то прямая пересечения этих двух плоскостей перпендикулярна третьей плоскости. Следовательно, ребро DF является высотой пирамиды и $DF = BD = 4\sqrt{2}$.

Пусть O – точка пересечения диагоналей основания, K – середина ребра DF. Так как отрезок OK – средняя линия треугольника BDF, то $OK \parallel BF$ и, следовательно, прямая BF параллельна плоскости ACK и плоскость ACK – искомая плоскость.

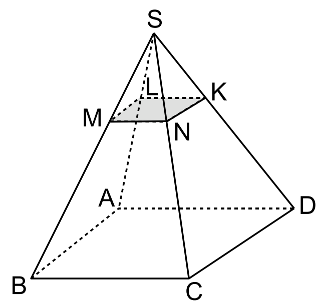
Заметим, что медиана KO является высотой в равнобедренном треугольнике ACK. Искомая площадь равна

$$S_{ACK} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot KO = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{DO^2 + DK^2} = 8\sqrt{2} \quad\Longrightarrow\quad S\sqrt{2} = 16.$$

Ответ. 16.

Задача 8.

В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 5. Точка M делит ребро SB в отношении $2:3$, считая от точки S. Через точку M проходит сечение, параллельное основанию пирамиды. Найдите его площадь.



Идея. Использовать то, что плоскость, параллельная основанию пирамиды, отсекает от неё подобную пирамиду.
Указание. Определить коэффициент подобия отсечённой пирамиды из условия, что точка M делит ребро SB в отношении $2:3$, считая от точки S.

Решение. Заметим, что плоскость, параллельная основанию пирамиды, пересекает боковые грани по прямым, параллельным соответствующим рёбрам основания. Следовательно, треугольники, являющиеся боковыми гранями отсечённой пирамиды, подобны боковым граням исходной пирамиды. В нашем случае коэффициент подобия равен $k = 2/5$ и площадь основания отсечённой пирамиды равна

$$k^2 \cdot S_{ABCD} = \frac{2^2}{5^2} \cdot 5^2 = 4.$$

Ответ. 4.

*Задача 9.**

В основании пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle C = 60^\circ$, $AC = 14$, $BC = 8$. Боковые грани DAC и DAB перпендикулярны плоскости основания пирамиды, а ребро AD равно $4\sqrt{3}$. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра DB параллельно прямым BC и AD, является основанием второй пирамиды, вершина которой в точке C. Найдите объём второй пирамиды.

Идея. Использовать то, что плоскость данного сечения проходит через середины соответствующих рёбер.
Указание. Показать, что сечение проходит через середины рёбер AB, AC и DC.
Указание. Вычислить высоту второй пирамиды, предварительно показав, что она лежит в плоскости основания исходной пирамиды.

Решение. Найдём площадь основания второй пирамиды и её высоту.

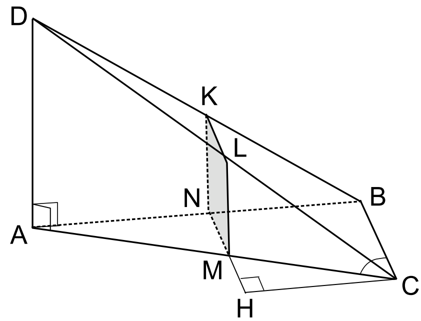
Так как данное сечение параллельно прямой BC, которая является прямой пересечения плоскостей DBC и ABC, то плоскость нашего сечения пересекает плоскости DBC и ABC по прямым $KL \parallel BC$ и $MN \parallel BC$ (см. рисунок), причём KL является средней линией треугольника DBC, поскольку K – середина отрезка BD по условию задачи.

Из аналогичных соображений $KN \parallel AD$ и $ML \parallel AD$ и отрезок KN является средней линией треугольника ABD. Так как точка N оказалась серединой ребра AB и $MN \parallel BC$, то MN – средняя линия треугольника ABC, а M – середина ребра AC.

Мы показали, что сечение $KLMN$ – параллелограмм со сторонами

$$KL = MN = \frac{1}{2}BC = 4, \quad LM = KN = \frac{1}{2}AD = 2\sqrt{3}.$$

Так как боковые грани DAC и DAB перпендикулярны плоскости основания пирамиды, то ребро $AD \perp ABC$, значит, $KN \perp NM$ и параллелограмм $KLMN$ является прямоугольником с площадью



$$S = KN \cdot NM = 8\sqrt{3}.$$

Осталось найти высоту h пирамиды $KLMNC$. Опустим высоту CH на прямую MN. Заметим, что $CH \perp LM$, так как $LM \parallel AD$ и $AD \perp ABC$, то есть прямая CH перпендикулярна двум прямым плоскости $KLMN$; следовательно CH есть высота пирамиды $KLMNC$.

Вычислим её длину из прямоугольного треугольника MCH:

$$CH = MC \cdot \sin\angle CMH = MC \cdot \sin\angle ACB = 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{3} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{2} = 28.$$

О т в е т. 28.

*Задача 10.**

Основанием пирамиды $FABC$ является треугольник ABC, в котором $\angle ABC = 90°$, $AB = 3$, $BC = 4$. Ребро AF перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Отрезки AM и AL являются соответственно высотами треугольников AFB и AFC. Найдите объём пирамиды $AMLC$.

И д е я. Вычислить расстояние от точки M до плоскости ALC как высоту тетраэдра $AMCF$.

У к а з а н и е. Найти объём пирамиды V_{AMCF} как разность объёмов V_{ABCF} и V_{AMCB}.

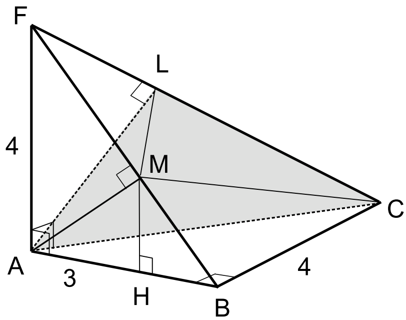
У к а з а н и е. Вычислить высоту пирамиды V_{AMCF}, опущенную из вершины M.

У к а з а н и е. Найти площадь основания и вычислить объём искомой пирамиды.

Р е ш е н и е. Для вычисления объёма пирамиды $AMCL$ нам надо найти высоту h, опущенную из вершины M на плоскость ACF. Заметим, что искомая высота является высотой для пирамиды $AMCF$ и, следовательно,

$$V_{AMCF} = \frac{1}{3}S_{ACF} \cdot h \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{3V_{AMCF}}{S_{ACF}} = \frac{3V_{AMCF}}{10}.$$

Объём пирамиды V_{AMCF} можно найти как разность объёмов V_{ABCF} и V_{AMCB}.



Сначала найдем объём V_{AMCB}. Высота MH треугольника AMB параллельна ребру $AF \perp ABC$; следовательно, $MH \perp ABC$ и

$$V_{AMCB} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot MH,$$

где $S_{ABC} = 6$, а высота

$$MH = MB \sin \angle ABF = AB \cos \angle ABF \sin \angle ABF = \frac{3}{2} \sin (2\angle ABF) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \angle ABF}{1 + \operatorname{tg}^2 \angle ABF} = 3 \cdot \frac{4/3}{1 + (4/3)^2} = \frac{36}{25}.$$

В результате

$$V_{AMCF} = V_{ABCF} - V_{AMCB} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot AF - \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot MH =$$

$$= \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot (AF - MH) = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \left(4 - \frac{36}{25}\right) = \frac{128}{25}.$$

Следовательно, высота пирамиды $AMCL$ равна

$$h = \frac{3V_{AMCF}}{10} = \frac{3 \cdot 128}{250}.$$

Теперь найдём площадь основания S_{ACL}:

$$S_{ACL} = \frac{1}{2} AL \cdot CL = \frac{1}{2} (AC \sin \angle ACL) \cdot (AC \cos \angle ACL) =$$

$$= \frac{1}{4} AC^2 \sin (2\angle ACL) = \frac{1}{4} AC^2 \frac{2 \operatorname{tg} \angle ACL}{1 + \operatorname{tg}^2 \angle ACL} = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \frac{4/5}{1 + (4/5)^2} = \frac{250}{41}.$$

В итоге искомый объём равен

$$V_{AMCL} = \frac{1}{3} S_{ACL} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{250}{41} \cdot \frac{3 \cdot 128}{250} = \frac{128}{41}.$$

О т в е т. 128/41.

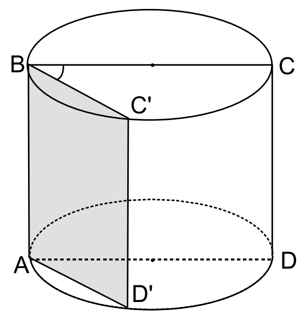
7. Тела вращения

7.1. Цилиндр

Задача 1.

Через образующую цилиндра проведены два сечения, одно из которых осевое, а второе параллельное оси цилиндра. Площади сечений равны 26 и 13. Найдите градусную меру угла между плоскостями сечений.

Идея. Найти угол между прямыми, по которым плоскости данных сечений пересекают основание цилиндра.
Указание. Использовать то, что сечением цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, является прямоугольник.
Указание. Найти отношение длин хорд, по которым плоскости данных сечений пересекают основание цилиндра, используя отношение площадей данных сечений.



Решение. Пусть площадь осевого сечения $ABCD$ цилиндра равна 26, а площадь сечения $ABC'D'$ равна 13. Так как сечением цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, является прямоугольник, то $\angle ABC = \angle ABC' = 90^\circ$ и угол $\angle CBC'$ является углом между плоскостями сечений, то есть искомым углом.

Из того, что площадь прямоугольника $ABCD$ в два раза больше площади прямоугольника $ABC'D'$ и они имеют общую сторону, следует, что другие их стороны относятся как $2:1$, то есть $BC = 2BC'$.

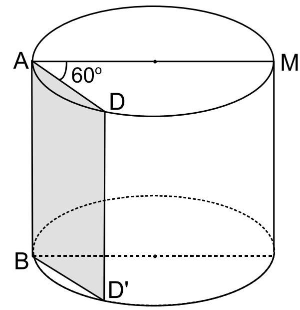
Теперь рассмотрим треугольник BCC'. У него угол C' прямой, так как опирается на диаметр, и катет BC' в два раза меньше гипотенузы BC. Следовательно, $\angle CBC' = 60^\circ$.

Ответ. 60.

Задача 2.

Через образующую цилиндра AB проведены два сечения: одно – по диаметру AM, другое – по хорде AD. Угол между плоскостями этих сечений равен 60°. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 60π. Найдите площадь того из данных сечений цилиндра, которое проходит через хорду AD.

Идея. Зная площадь боковой поверхности, найти произведение длины образующей на радиус основания и выразить площадь искомого сечения через это произведение.
Указание. Найти произведение длины образующей на радиус основания.
Указание. Выразить AD через радиус основания.
Указание. Выразить площадь искомого сечения через произведение длины образующей на радиус основания.



Р е ш е н и е. Пусть $ADD'B$ – искомое сечение и $AB = l$. Рассмотрим треугольник ADM. У него угол D прямой, так как опирается на диаметр, а угол $\angle A = 60°$ как угол между плоскостями данных сечений. Следовательно, $AD = AM/2 = R$, где R – радиус основания цилиндра. Значит,

$$S_{ADD'B} = AB \cdot AD = l \cdot R.$$

Так как площадь боковой поверхности цилиндра равна 60π, то

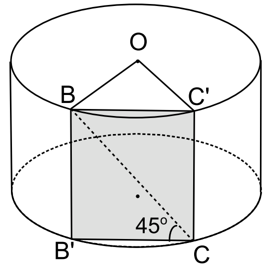
$$60\pi = 2\pi Rl \quad \Longrightarrow \quad Rl = 30 \quad \Longrightarrow \quad S_{ADD'B} = 30.$$

О т в е т. 30.

Задача 3.

Концы отрезка BC лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 25, длина отрезка BC равна $14\sqrt{2}$, а угол между прямой BC и плоскостью основания цилиндра равен $45°$. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки B и C.

И д е я. Найти искомое расстояние из равнобедренного треугольника, основанием которого является линия пересечения данного сечения с основанием цилиндра, боковыми сторонами – радиусы основания.
У к а з а н и е. Построить искомое сечения, используя то, что оно параллельно оси цилиндра и, значит, содержит образующие, проходящие через точки B и C.
У к а з а н и е. Найти длину хорды, по которой плоскость данного сечения пересекается с основанием цилиндра, зная длину отрезка BC и угол между прямой BC и плоскостью основания цилиндра.



Р е ш е н и е. Плоскость искомого сечения параллельна оси цилиндра и содержит точки B и C, значит она содержит образующие, проходящие через точки B и C. Следовательно, сечение $BC'CB'$ является прямоугольником с диагональю $BC = 14\sqrt{2}$ и углом $BCB' = 45°$, то есть $BC'CB'$ – квадрат со стороной 14.

Теперь рассмотрим треугольник OBC', где O – центр верхнего основания. Так как ось цилиндра OO' параллельна плоскости $BC'CB'$, то высота OH треугольника OBC' и есть расстояние между осью цилиндра и плоскостью $BC'CB'$. По теореме Пифагора

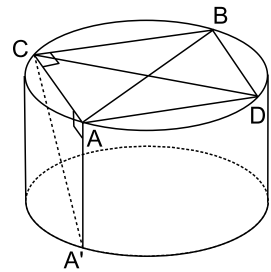
$$OH^2 = OB^2 - BH^2 = 25^2 - 7^2 = 24^2 \quad \Longrightarrow \quad OH = 24.$$

О т в е т. 24.

Задача 4.

Радиус основания цилиндра равен 6, а высота равна 2. Отрезки AB и CD – диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок AA' – его образующая. Известно, что $BC = 2\sqrt{21}$. Найдите синус угла между прямыми $A'C$ и BD.

Идея. Показать, что $AC \parallel BD$.
Указание. Используя то, что AB и CD – диаметры основания цилиндра, показать, что $AC \parallel BD$.
Указание. Вычислить синус угла ACA' из треугольника ACA'.



Решение. Так как AB и CD диаметры, то $ACBD$ – прямоугольник, следовательно, $AC \parallel BD$ и угол между прямыми $A'C$ и BD равен углу ACA'. Из прямоугольного треугольника ABC получим

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 12^2 - (2\sqrt{21})^2 = 60.$$

Из прямоугольного треугольника ACA' получим

$$A'C^2 = AC^2 + A'A^2 = 64 \quad\Longrightarrow\quad A'C = 8 \quad\Longrightarrow\quad \sin\angle ACA' = \frac{A'A}{A'C} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

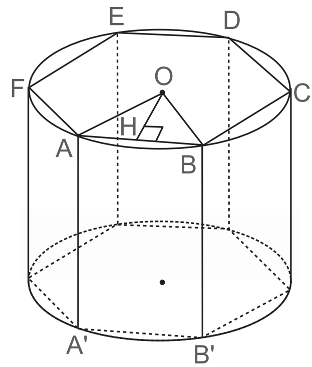
Ответ. 0,25.

Задача 5.

Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $16\pi\sqrt{3}$. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите объём призмы.

Идея. Зная расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы, найти радиус основания цилиндра; зная площадь боковой поверхности цилиндра, найти длину его образующей.
Указание. Показать, что расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы есть длина перпендикуляра, проведённого из центра основания призмы к ребру основания. Найти радиус окружности, описанной около шестиугольника, лежащего в основании призмы.
Указание. Зная площадь боковой поверхности цилиндра и радиус его основания, найти длину образующей цилиндра.

Решение. Заметим, что боковая грань правильной шестиугольной призмы параллельна оси описанного цилиндра и диагональ боковой грани призмы с осью цилиндра являются скрещивающимися прямыми.



Следовательно, расстояние между ними равно расстоянию между осью цилиндра и плоскостью, содержащей данную диагональ, то есть боковой гранью призмы. А поскольку боковая грань $ABB'A'$ перпендикулярна плоскости основания цилиндра, расстояние от оси цилиндра до плоскости $ABB'A'$ равно высоте треугольника ABO, то есть $OH = 2\sqrt{3}$. Так как шестиугольник $ABCDEF$ правильный, то треугольник ABO равносторонний. Следовательно, радиус основания равен

$$R = AO = \frac{OH}{\sin 60^\circ} = 4.$$

Теперь найдём длину образующей цилиндра l:

$$S_{\text{бок}} = 16\pi\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad 2\pi Rl = 16\pi\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad l = 2\sqrt{3}.$$

Поскольку высота призмы равна образующей цилиндра, искомый объём призмы равен

$$V = S_{\text{осн}} \cdot l = 6S_{ABO} \cdot l = 3R^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot l = 144.$$

О т в е т. 144.

Задача 6.

В прямую призму, в основании которой лежит ромб с углом 45°, вписан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $5\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если объём призмы равен 120.

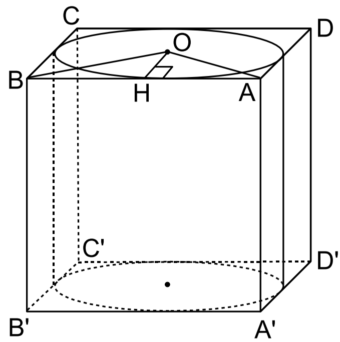
И д е я. Зная расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы, найти радиус основания цилиндра; зная объём призмы, найти её высоту.
У к а з а н и е. Показать, что расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы есть длина перпендикуляра, проведённого из центра основания призмы к ребру основания. Найти радиус окружности, вписанной в ромб, лежащий в основании призмы.
У к а з а н и е. Зная объём призмы, найти её высоту.

Р е ш е н и е. Заметим, что боковая грань призмы параллельна оси вписанного цилиндра и диагональ боковой грани призмы с осью цилиндра являются скрещивающимися прямыми. Следовательно, расстояние между ними равно расстоянию между осью цилиндра и плоскостью, содержащей данную диагональ, то есть боковой гранью призмы. А поскольку боковая грань $ABB'A'$ перпендикулярна плоскости основания цилиндра, расстояние от оси цилиндра до плоскости $ABB'A'$ равно высоте треугольника ABO, то есть $OH = R = 5\sqrt{2}$, где R – радиус основания цилиндра.

Площадь полной поверхности цилиндра равна

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rl = 100\pi + 10\sqrt{2}\pi l,$$

то есть осталось найти l – образующую цилиндра. Для этого используем объём призмы.



Пусть сторона ромба $AB = a$. Для того, чтобы её найти, запишем площадь ромба двумя способами и приравняем друг другу оба выражения:

$$4S_{AOB} = AB \cdot BC \cdot \sin 45^\circ \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 2Ra = a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad a = 20.$$

Следовательно, площадь основания призмы равна

$$S_{\text{осн}} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 200\sqrt{2}.$$

Так как объём призмы равен 120, то

$$S_{\text{осн}} \cdot l = 120 \quad \Longrightarrow \quad l = \frac{3}{5\sqrt{2}}.$$

В результате искомая площадь полной поверхности цилиндра равна

$$S = 100\pi + 10\sqrt{2}\pi \cdot \frac{3}{5\sqrt{2}} = 106\pi.$$

Ответ. 106π.

*Задача 7.**

В правильной призме $MNPM'N'P'$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN' образует с плоскостью основания угол 45°. На сколько процентов объём описанного цилиндра больше объёма вписанного цилиндра?

Идея. Выразить искомую величину через отношение радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника, лежащего в основании призмы.
Указание. Выразить искомую величину через отношение площадей оснований вписанного и описанного цилиндров.
Указание. Получить представление полученной величины через отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

Решение. Пусть $V_{\text{вп}}$ и $V_{\text{оп}}$ – объёмы вписанного и описанного цилиндров, $S_{\text{вп}}$ и $S_{\text{оп}}$ – площади оснований этих цилиндров, а h – высота призмы. Тогда искомая величина равна

$$\frac{V_{\text{оп}} - V_{\text{вп}}}{V_{\text{вп}}} \cdot 100\% = \frac{S_{\text{оп}} \cdot h - S_{\text{вп}} \cdot h}{S_{\text{вп}} \cdot h} \cdot 100\% = \left(\frac{\pi R^2 \cdot h}{\pi r^2 \cdot h} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) \cdot 100\%.$$

Следовательно, нам достаточно найти отношение радиусов описанной и вписанной окружностей. Так как у равностороннего треугольника $R/r = 2$, то искомая величина равна 300%.

Замечание. Часть условия для решения задачи не потребовалась, так как высота призмы сокращается и никак не влияет на ответ.

Ответ. 300.

Задача 8.[*]

В правильной призме $MNPM'N'P'$ сторона основания равна 12, а диагональ грани MN' образует с плоскостью основания угол 45°. Сколько процентов от площади боковой поверхности описанного цилиндра составляет площадь боковой поверхности вписанного цилиндра?

Идея. Выразить искомую величину через отношение радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника, лежащего в основании призмы.
Указание. Выразить искомую величину через отношение боковых поверхностей вписанного и описанного цилиндров.
Указание. Получить представление полученной величины через отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

Решение. Пусть $S_{\text{вп}}$ и $S_{\text{оп}}$ – площади боковых поверхностей вписанного и описанного цилиндров, а h – высота цилиндра. Тогда искомая величина равна

$$\frac{S_{\text{оп}} - S_{\text{вп}}}{S_{\text{оп}}} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{2\pi r \cdot h}{2\pi R \cdot h}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot 100\%.$$

Так как у равностороннего треугольника $R/r = 2$, то искомая величина равна 50%.

Замечание. Часть условия для решения задачи не потребовалась, так как высота цилиндра сокращается и никак не влияет на ответ.

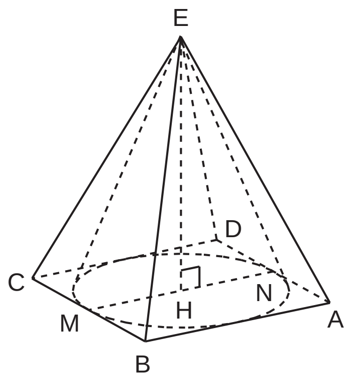
Ответ. 50.

7.2. Конус

Задача 1.

В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 6, а высота равна 2. Найдите объём (V) конуса, вписанного в эту пирамиду. В ответе запишите V/π.

И д е я. Найти радиус основания конуса как радиус окружности, вписанной в основание пирамиды.
У к а з а н и е. Радиус основания конуса равен половине стороны квадрата, лежащего в основании пирамиды.



Р е ш е н и е. Так как радиус R основания конуса равен половине стороны квадрата, лежащего в основании пирамиды, то $R = 6/2 = 3$, следовательно,

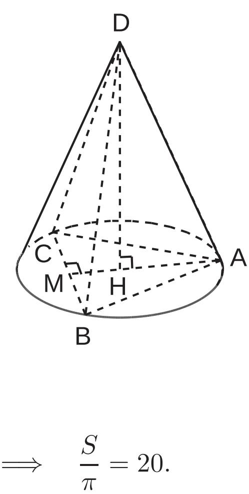
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 h = 6\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{V}{\pi} = 6.$$

О т в е т. 6.

Задача 2.

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности (S) конуса, описанного около этой пирамиды. В ответе запишите S/π.

И д е я. Найти радиус основания конуса как радиус окружности, описанной около основания пирамиды.
У к а з а н и е. Радиус основания конуса равен $2/3$ медианы равностороннего треугольника, лежащего в основании пирамиды.



Р е ш е н и е. Так как радиус R основания конуса равен $2/3$ медианы равностороннего треугольника, лежащего в основании пирамиды, то

$$R = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 4$$

и площадь боковой поверхности конуса равна

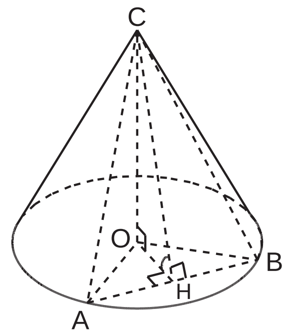
$$S = \pi R l = 4\pi l = 4\pi\sqrt{h^2 + R^2} = 4\pi\sqrt{3^2 + 4^2} = 20\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{S}{\pi} = 20.$$

О т в е т. 20.

Задача 3.

Угол между образующими CA и CB конуса равен $60°$, высота конуса равна 4, радиус основания равен $\dfrac{4\sqrt{15}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью ABC и плоскостью основания конуса.

Идея. Найти угол между перпендикулярами, восстановленными из середины отрезка AB в обеих плоскостях.
Указание. Вычислить длину высоты CH треугольника ABC.
Указание. Найти искомый угол из прямоугольного треугольника COH, где O – центр основания конуса.



Решение. Пусть H – середина отрезка AB, тогда медианы CH и OH являются высотами в равнобедренных треугольниках ABC и ABO соответственно. Следовательно, угол $\angle CHO$ есть угол между плоскостями этих треугольников и

$$\sin\angle CHO = \frac{CO}{CH} = \frac{4}{CH},$$

то есть нам надо найти CH.

Так как в равнобедренном треугольнике ABC угол $\angle ACB = 60°$, то треугольник является равносторонним и

$$AB = BC = AC = \sqrt{CO^2 + AO^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{4\sqrt{15}}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{6}}{3} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad CH = AC\cdot\sin 60° = 4\sqrt{2} \quad\Longrightarrow\quad \sin\angle CHO = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Longrightarrow\quad \angle CHO = 45°.$$

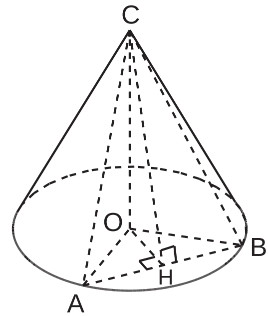
Ответ. 45.

Задача 4.

В основании конуса проведена хорда. Через данную хорду и вершину конуса C проведена плоскость так, что угол при вершине C, образовавшегося в сечении треугольника, равен $60°$. Найдите расстояние от центра основания конуса O до данной плоскости, если высота конуса равна 2, а образующая равна $8/3$.

Идея. Найти искомое расстояние, записав объём соответствующего тетраэдра двумя способами.
Указание. Рассмотреть тетраэдр с вершиной O, в основании которого лежит данное сечение.
Указание. Записать объём этого тетраэдра двумя способами и вычислить искомую высоту.

Решение. Рассмотрим данное сечение ABC. Это равносторонний треугольник со стороной, равной 8/3. Для того чтобы найти искомое расстояние h от точки O до плоскости ABC, запишем объём тетраэдра $ABCO$ двумя способами и приравняем оба выражения друг другу:



$$\frac{1}{3}\cdot S_{ABO}\cdot CO = \frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot h \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow h = CO\cdot\frac{S_{ABO}}{S_{ABC}} = CO\cdot\frac{OH}{CH},$$

где H – середина стороны AB. Вычислим длину OH:

$$AO^2 = AC^2 - CO^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2^2 = \frac{28}{9} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad OH^2 = AO^2 - AH^2 = \frac{28}{9} - \frac{16}{9} = \frac{4}{3} \quad\Longrightarrow\quad OH = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Теперь найдём длину отрезка CH и затем вычислим h:

$$CH = AC\cdot\sin 60^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad\Longrightarrow\quad h = CO\cdot\frac{OH}{CH} = 2\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = 1.$$

Ответ. 1.

Задача 5.

Отношение площади боковой поверхности конуса к его объёму равно 1,5. Найдите высоту конуса, если его образующая равна диаметру основания.

Идея. Приравнять отношение выражения для площади боковой поверхности и объёма числу 1,5 и выразить из этого уравнения высоту.

Указание. Записать площадь боковой поверхности конуса и его объём через образующую, радиус основания и высоту. Приравнять отношение этих выражений заданному числу и найти из этого уравнения высоту.

Решение. Пусть R – радиус основания конуса, $l = 2R$ – образующая и h – высота. Тогда, согласно условию задачи,

$$\frac{S_{\text{бок}}}{V} = 1,5 \;\Longrightarrow\; \frac{\pi Rl}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = 1,5 \;\Longrightarrow\; \frac{3l}{Rh} = 1,5 \;\Longrightarrow\; \frac{3\cdot 2R}{Rh} = 1,5 \;\Longrightarrow\; h = 4.$$

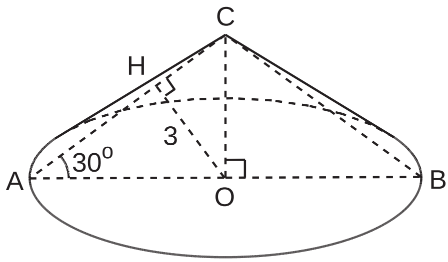
Ответ. 4.

Задача 6.

Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно 3. Образующая наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объём конуса (V). В ответе запишите $\dfrac{V}{\pi\sqrt{3}}$.

Идея. Найти радиус основания и высоту конуса, рассмотрев его осевое сечение.
Указание. Рассмотреть осевое сечение конуса. Найти высоту и основание этого треугольника, используя данные в условии задачи величины.

Решение. Рассмотрим осевое сечение конуса ΔABC и перпендикуляр OH, опущенный из центра основания O на образующую AC.



Согласно условию задачи $OH = 3$, $\angle OAC = 30^\circ$. Следовательно, радиус основания $R = AO = 3/\sin 30^\circ = 6$ и высота $CO = 3/\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$. В результате искомый объём равен

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot CO = 12\pi\cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\pi \quad\Longrightarrow\quad \frac{V}{\pi\sqrt{3}} = 24.$$

Ответ. 24.

Задача 7.

Длина дуги развертки боковой поверхности конуса равна 6π, а образующая конуса равна 5. Найдите объём конуса.

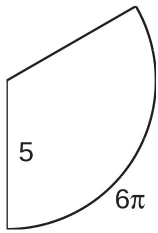
Идея. Найти радиус основания конуса, зная длину дуги развертки его боковой поверхности.
Указание. Получить уравнение для радиуса R основания конуса, приравняв длину дуги развертки выражению $2\pi R$.
Указание. Рассмотреть осевое сечение и найти высоту конуса.

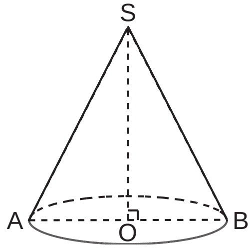
Решение. Развертка боковой поверхности конуса представляет собой сектор круга радиуса 5. Так как по условию длина дуги развертки равна 6π, то радиус основания конуса R можно найти следующим образом:

$$6\pi = 2\pi R \quad\Longrightarrow\quad R = 3.$$

Теперь рассмотрим осевое сечение конуса ASB, где $AB = 2R = 6$ и найдём высоту конуса, равную высоте этого треугольника:

$$SO^2 = AS^2 - AO^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2.$$



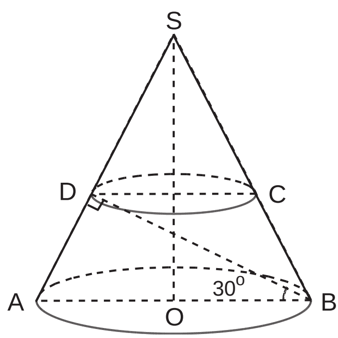


В результате объём конуса равен $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot SO = 12\pi$.

О т в е т. 12π.

*Задача 8.**

Образующая усечённого конуса равна 2. Диагональ осевого сечения перпендикулярна боковой стороне сечения и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.



И д е я. Рассмотреть осевое сечение усечённого конуса и найти радиусы его оснований.
У к а з а н и е. Выразить радиус большего основания конуса через его образующую.
У к а з а н и е. Рассмотреть осевое сечение и найти радиус меньшего основания конуса.

Р е ш е н и е. Пусть трапеция $ABCD$ – осевое сечение конуса. Рассмотрим треугольник ABD. У него $AD = 2$ как образующая усечённого цилиндра, угол $\angle ABD = 30^\circ$ как угол наклона диагонали осевого сечения к плоскости основания конуса, угол $\angle ADB = 90^\circ$, так как диагональ осевого сечения перпендикулярна боковой стороне сечения. Следовательно, гипотенуза $AB = 4$ и радиус большего основания конуса $R = AO = AB/2 = 2$.

Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник ASO. Он равен треугольнику ABD, так как угол A у них общий и катеты $AD = AO$. Следовательно, $SD = AS - AD = 4 - 2 = 2$. Так как образующая меньшего конуса в два раза меньше образующей L большего конуса, то площадь боковой поверхности меньшего конуса в 4 раза меньше площади боковой поверхности большего конуса.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна разности боковых площадей большего и меньшего конусов:

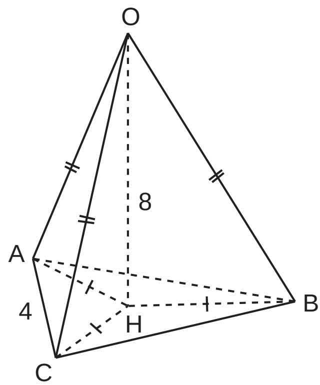
$$\pi RL - \frac{\pi RL}{4} = \frac{3}{4} \cdot \pi RL = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4 = 6\pi.$$

О т в е т. 6π.

7.3. Шар

Задача 1.

Сфера проходит через вершины равнобедренного треугольника с основанием 4 и углом при вершине $\arcsin(1/3)$. Расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно 8. Найдите радиус сферы.



Идея. Найти длину боковых рёбер тетраэдра, основанием которого является данный треугольник, высота равна 8, а боковые рёбра являются радиусами сферы.

Указание. Рассмотреть тетраэдр, вершинами которого являются вершины данного треугольника и центр данной сферы. Показать, что основанием высоты тетраэдра, опущенной на плоскость данного треугольника, является центр описанной окружности.

Указание. Найти радиус этой окружности и длину боковых рёбер с помощью теоремы Пифагора.

Решение. Проведём перпендикуляр OH из центра сферы к плоскости данного треугольника ABC. Согласно условию $OH = 8$. Наша цель найти радиус сферы $R = AO = BO = CO$. Прямоугольные треугольники $\Delta AOH = \Delta BOH = \Delta COH$ по катету и гипотенузе. Следовательно, $AH = BH = CH$ и точка H есть центр окружности, описанной около треугольника ABC. По теореме синусов

$$2AH = \frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{4}{1/3} = 12 \quad\Longrightarrow\quad AH = 6.$$

Теперь применим теорему Пифагора к ΔAOH:

$$AO^2 = OH^2 + AH^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \quad\Longrightarrow\quad AO = 10.$$

Ответ. 10.

Задача 2.

Все стороны ромба с диагоналями 30 и 40 касаются поверхности шара радиуса 20. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.

Идея. Показать, что основанием перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость ромба, является точка пересечения диагоналей ромба.

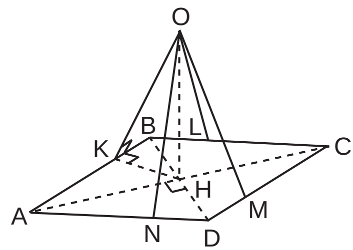
Указание. Показать, что основанием перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость ромба, является центр вписанной в ромб окружности.

Указание. Найти радиус этой окружности и длину высоты с помощью теоремы Пифагора.

Р е ш е н и е. Проведём перпендикуляр OH из центра сферы к плоскости ромба $ABCD$. Пусть K, L, M, N – точки касания сторон ромба и шара.

Рассмотрим сторону ромба AB и радиус шара OK. Так как шар касается отрезка AB, то $OK \perp AB$. По теореме о трёх перпендикулярах проекция наклонной OK также перпендикулярна отрезку AB; следовательно, $KH \perp AB$.

Аналогичным образом показывается, что отрезки LH, MH и NH также перпендикулярны соответствующим сторонам ромба. Кроме того, они все равны между собой. Значит, точка H равноудалена от сторон ромба и, следовательно, является центром вписанной в него окружности, то есть точкой пересечения диагоналей.



В прямоугольном ΔABH известны катеты $AH = 20, BH = 15$, следовательно, $AB = 25$. Найдём длину отрезка KH, записав площадь треугольника ABH двумя способами:

$$S_{ABH} = \frac{1}{2}KH \cdot AB = \frac{1}{2}AH \cdot BH \quad \Longrightarrow \quad KH \cdot 25 = 15 \cdot 20 \quad \Longrightarrow \quad KH = 12.$$

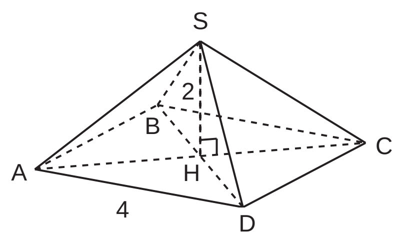
Теперь применим теорему Пифагора к треугольнику KOH:

$$OH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16.$$

О т в е т. 16.

Задача 3.

В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 2. Найдите радиус описанного шара.



И д е я. Центром описанного шара является центр окружности, описанной вокруг диагонального сечения пирамиды.

У к а з а н и е. Показать, что основанием перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость основания пирамиды, является центр основания.

У к а з а н и е. Рассмотреть диагональное сечение пирамиды. Найти радиус описанной около него окружности.

Р е ш е н и е. Заметим, что геометрическим местом точек, равноудалённых от вершин основания пирамиды $SABCD$, является перпендикуляр, восстановленный из центра квадрата (точки пересечения диагоналей). Следовательно, центр описанного шара O лежит на прямой, содержащей высоту SH.

Так как точка O равноудалена от точек A, C и S, то O есть центр описанной около треугольника ACS окружности. Диагональ квадрата со стороной 4 равна

$AC = 4\sqrt{2}$. Боковые ребра

$$AS = CS = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{12}.$$

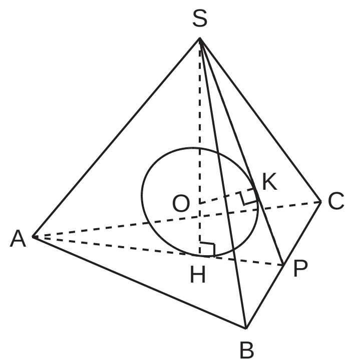
Осталось найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника с известными сторонами. По теореме синусов

$$2R = \frac{CS}{\sin\angle CAS} = \frac{\sqrt{12}}{SH/AS} = \frac{\sqrt{12}}{2/\sqrt{12}} = 6 \quad \Longrightarrow \quad R = 3.$$

Ответ. 3.

Задача 4.

Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, с высотой, равной 8, и апофемой, равной 10.



Идея. Найти радиус вписанного шара, рассмотрев сечение пирамиды, проведённое через её высоту и апофему одной из боковых граней.
Указание. Использовать то, что центр вписанного в правильную пирамиду шара лежит на высоте пирамиды, а точки касания шара, вписанного в правильную пирамиду принадлежат апофемам.
Указание. Найти искомый радиус из соотношения подобия соответствующих прямоугольных треугольников в сечении пирамиды, проведённом через ее высоту и апофему одной из боковых граней.

Решение. Рассмотрим правильную пирамиду $ABCS$ с высотой $SH = 8$ и апофемой $SP = 10$. Так как центр вписанного в правильную пирамиду шара лежит на высоте пирамиды, то центр шара $O \in SH$. Так как точки касания шара, вписанного в правильную пирамиду принадлежат апофемам, то шар касается грани BCS в точке $K \in SP$, а грани ABC в точке $H \in AP$.

Рассмотрим треугольник APS и найдём радиус окружности r, вписанной в угол $\angle APS$ с центром на высоте SH.

Заметим, что прямоугольные треугольники SKO и SHP подобны по острому углу, следовательно,

$$\frac{OK}{HP} = \frac{SO}{SP} \quad \Longrightarrow \quad \frac{r}{HP} = \frac{8-r}{10}.$$

Длину отрезка HP можно найти из прямоугольного треугольника SHP по теореме Пифагора:

$$HP = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

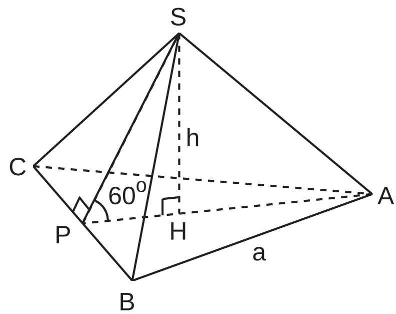
В результате

$$\frac{r}{6} = \frac{8-r}{10} \quad \Longrightarrow \quad r = 3.$$

Ответ. 3.

Задача 5.

Угол наклона боковой грани к плоскости основания правильной треугольной пирамиды равен 60°. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен 35. Найдите радиус вписанного шара.



Идея. Найти длину стороны основания пирамиды и её высоту, после этого вычислить радиус вписанного шара.

Указание. Рассмотреть сечение, проведённое через высоту пирамиды и апофему одной из боковых граней. Найти длину медианы основания с помощью теоремы Пифагора из соответствующих прямоугольных треугольников.

Указание. Для вычисления радиуса вписанного шара использовать то, что его центр лежит на высоте пирамиды, а точки касания шара, вписанного в правильную пирамиду, принадлежат апофемам.

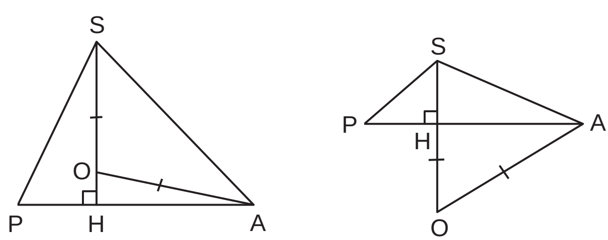
Решение. Пусть $ABCS$ – правильная пирамида со стороной основания, равной a, и высотой $SH = h$. Выразим h через a. Для этого рассмотрим треугольник APS, где SP – апофема грани BCS.

Так как ABC равносторонний треугольник со стороной a, то его медиана $AP = \sqrt{3}a/2$. Следовательно, $PH = AP/3 = \sqrt{3}a/6$, $AH = 2AP/3 = \sqrt{3}a/3$.

По условию задачи $\angle SPH = 60^\circ$, значит $h = SH = PH \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = a/2$. Теперь вычислим значение a, используя то, что радиус описанного шара $R = 35$. Возможны два варианта: центр описанного шара O лежит на высоте SH или на её продолжении. В обоих случаях из теоремы Пифагора, записанной для треугольника AOH, получим

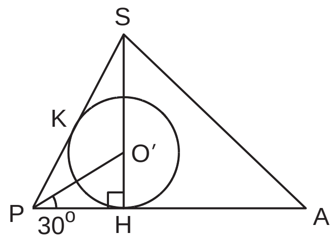
$$OH^2 + AH^2 = AO^2 \quad \Longrightarrow \quad (h-35)^2 + (\sqrt{3}a/3)^2 = 35^2.$$

Решив это уравнение (с учётом того, что $h = a/2$), найдём $a = 60$.



Так как точки касания шара, вписанного в правильную пирамиду, принадлежат апофемам, то шар касается грани BCS в точке $K \in SP$.

Центр вписанного шара лежит на высоте правильной пирамиды, значит, в треугольнике APS нам надо найти радиус окружности r, вписанной в угол $\angle APS$ с центром на высоте SH. Центр вписанного шара O' лежит на биссектрисе угла $\angle KPH = 60^\circ$, следовательно, $\angle O'PH = 30^\circ$ и



$$r = O'H = PH \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{6} = 10.$$

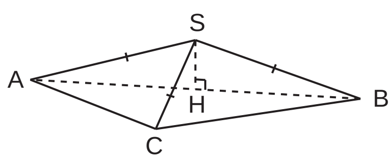
Ответ. 10.

Задача 6.

В треугольной пирамиде с равными боковыми рёбрами известны длины сторон основания 6, 8, 10 и длина высоты 1. Найдите радиус описанного шара.

Идея. Использовать то, что центр описанного шара лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведённом через центр окружности, описанной около основания пирамиды.
Указание. Показать, что основанием высоты пирамиды является середина большей стороны основания.
Указание. Использовать то, что центр описанной окружности большей боковой грани является центром описанного шара.

Решение. Пусть в основании пирамиды $ABCS$ лежит треугольник со сторонами $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$ и высота $SH = 1$. Так как по условию боковые рёбра равны, то основанием высоты пирамиды является центр окружности, описанной около треугольника ABC. Заметим, что этот треугольник прямоугольный и центр описанной вокруг него окружности есть середина гипотенузы, значит, точка H есть середина гипотенузы AB.



Центр описанного шара лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведённом через центр окружности, описанной около основания пирамиды, следовательно, центр описанного шара O лежит на прямой SH. Так как центр шара равноудалён от точек A, B, S и лежит в плоскости ABS, то O есть центр окружности, описанной около треугольника ABS. Найдём ее радиус R. Для этого запишем площадь треугольника ABS двумя способами:

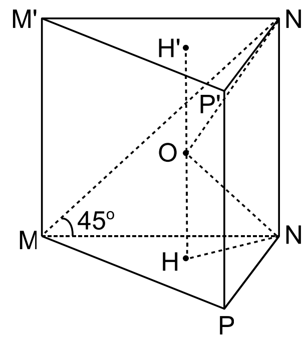
$$S_{ABS} = \frac{1}{2}SH \cdot AB = \frac{AB \cdot AS \cdot BS}{4R} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad R = \frac{AS \cdot BS}{2SH} = \frac{AS^2}{2} = \frac{AH^2 + SH^2}{2} = \frac{5^2 + 1^2}{2} = 13.$$

Ответ. 13.

Задача 7.

Около правильной призмы $MNPM'N'P'$ описан шар. Найдите площадь его поверхности (S), если сторона основания призмы равна 12, а диагональ грани MN' образует с плоскостью основания угол 45°. В ответе запишите S/π.



Идея. Использовать то, что центр описанного шара лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведённом через центр окружности, описанной около основания призмы.
Указание. Зная угол, который диагональ MN' образует с плоскостью основания, найти высоту призмы.
Указание. Рассмотрев сечение, проходящее через одно из боковых рёбер и центр основания, найти радиус описанного шара с помощью теоремы Пифагора.

Решение. Центр описанного шара лежит на перпендикуляре к плоскостям оснований, проведённом через центры H и H' окружностей, описанных около оснований призмы, следовательно, центр описанного шара O лежит на прямой HH'. Так как центр шара равноудалён от точек N и N' и лежит на отрезке HH', то O есть середина этого отрезка.

Найдём искомый радиус $R = ON$. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник OHN. Его катет HN равен радиусу окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 12, то есть $HN = 4\sqrt{3}$. Второй катет

$$OH = \frac{1}{2}HH' = \frac{1}{2}NN' = \frac{1}{2}MN \cdot \operatorname{tg}\angle NMN' = \frac{1}{2}MN = 6.$$

По теореме Пифагора

$$ON^2 = OH^2 + HN^2 = 36 + 48 = 84 \quad \Longrightarrow \quad \frac{S}{\pi} = \frac{4\pi R^2}{\pi} = 4 \cdot 84 = 336.$$

Ответ. 336.

*Задача 8.**

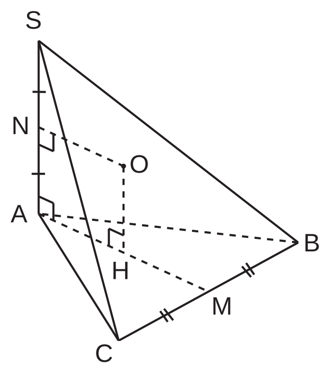
Около пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной, равной 3, описан шар. Найдите радиус шара, если известно, что одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно её основанию и равно 2.

Идея. Использовать то, что центр описанного шара лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведённом через центр окружности, описанной около основания пирамиды.
Указание. Центр описанного шара лежит на перпендикуляре, проведённом через центр треугольника, лежащего в основании пирамиды.

Указание. Использовать то, что центр шара лежит на серединном перпендикуляре к боковому ребру.

Решение. Пусть боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания пирамиды $ABCS$. Пусть H – центр основания ABC, то есть точка H лежит на медиане AM и $AH = \frac{2}{3}AM$.

Центр описанного шара лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведённом через точку H. Следовательно, $OH \parallel SA$ и центр O лежит в плоскости ASH. Так как центр шара равноудалён от точек A и S, то O принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку SA, проведённому в плоскости ASH.



Таким образом, точка O есть точка пересечения этого серединного перпендикуляра и перпендикуляра, проведённого к отрезку AM из точки H в плоскости ASH. Заметим, что полученный четырёхугольник $AHON$ (см. рисунок) является прямоугольником.

Искомый радиус OA найдём из прямоугольного треугольника AOH, катеты которого равны соответственно

$$OH = \frac{1}{2}SA = 1, \quad AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \sqrt{3}.$$

По теореме Пифагора

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 = 1 + 3 = 4 \quad \Longrightarrow \quad OA = 2.$$

Ответ. 2.

*Задача 9.**

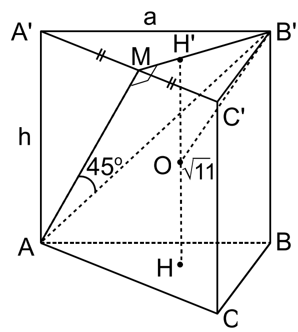
В шар радиуса $\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$. Прямая AB' образует с плоскостью ACC' угол 45°. Найдите объём призмы.

Идея. Используя информацию об угле, найти отношение высоты к длине стороны основания призмы.

Указание. Опустить перпендикуляр из B' на плоскость ACC' и, рассмотрев соответствующие прямоугольные треугольники, с помощью теоремы Пифагора выразить боковое ребро призмы через сторону основания.

Указание. Рассмотреть сечение, проходящее через боковое ребро и центр шара. Найти длину стороны основания, используя информацию о радиусе описанного шара.

Решение. Для вычисления объёма призмы нам надо узнать длину стороны основания a и высоту призмы h.



Опустим перпендикуляр $B'M$ из точки B' на плоскость ACC'. Плоскость боковой грани ACC' перпендикулярна плоскости основания $A'B'C'$ (так как боковые ребра правильной призмы перпендикулярны основаниям); следовательно, основание перпендикуляра принадлежит прямой пересечения этих плоскостей и сам отрезок $B'M$ этой прямой перпендикулярен.

Так как треугольник $A'B'C'$ равносторонний, то M есть середина $A'C'$. Выразим h через a.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AMB'. Согласно условию задачи $\angle MAB' = 45°$. Следовательно, $AM = MB' = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

С другой стороны,

$$AM^2 = A'A^2 + A'M^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3a^2}{4} = h^2 + \frac{a^2}{4} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Пусть H – центр основания ABC, H' – центр основания $A'B'C'$. Центр описанного шара O есть середина отрезка HH'. Запишем теорему Пифагора для прямоугольного треугольника $OB'H'$:

$$B'O^2 = H'O^2 + (B'H')^2 \quad \Longrightarrow \quad 11 = \frac{h^2}{4} + \left(\frac{2}{3}B'M\right)^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 11 = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{3} \quad \Longrightarrow \quad a^2 = 24.$$

В результате объём равен

$$V = S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h = 36.$$

Ответ. 36.

8. Координаты и векторы

8.1. Декартовы координаты и векторы в пространстве

Задача 1.

Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если координаты трех остальных его вершин известны: $A(2;-2;0)$, $B(1;0;-1)$, $C(0;-1;1)$.

И д е я. Определить координаты точки $D(x;y;z)$ так, чтобы $\overline{AB}=\overline{DC}$.
У к а з а н и е. Выразить координаты вектора $\overline{DC}$ через x,y,z и приравнять их координатам вектора $\overline{AB}$.

Р е ш е н и е. Необходимым и достаточным условием того, что фигура $ABCD$ есть параллелограмм, является равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

В нашем случае $\overline{AB}=\overline{(-1;2;-1)}$, $\overline{DC}=\overline{(-x;-1-y;1-z)}$ и равенство выполняется при $x=1$, $y=-3$, $z=2$.

О т в е т. $(1;-3;2)$.

Задача 2.

Даны три точки: $A(-1;1;0)$, $B(0;-1;3)$, $C(2;1;1)$. Найдите косинус угла C треугольника ABC.

И д е я. Использовать формулу для вычисления скалярного произведения через косинус угла между векторами и произведение их длин.
У к а з а н и е. Найти угол между векторами $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$.

Р е ш е н и е. Найдём угол между векторами $\overline{CA}=\overline{(-3;0;-1)}$ и $\overline{CB}=\overline{(-2;-2;2)}$ с помощью формулы для скалярного произведения векторов:

$$\cos\angle C=\frac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{|\overline{CA}|\cdot|\overline{CB}|}=\frac{(-3)\cdot(-2)+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 2}{\sqrt{3^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{2}{15}}.$$

О т в е т. $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{15}}$.

Задача 3.

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(-2;3;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;1;2)$, $D(-1;3;2)$ является ромбом.

И д е я. Показать, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, две соседние стороны которого равны.
У к а з а н и е. Доказать равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.
У к а з а н и е. Доказать равенство длин векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

Р е ш е н и е. Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, поскольку

$$\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{(1; -2; 0)}.$$

Параллелограмм $ABCD$ является ромбом, поскольку

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}, \quad |\overline{AD}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad |\overline{AB}| = |\overline{AD}|.$$

Задача 4.

При каком значении n векторы $\overline{a}(n; 2; 4)$ и $\overline{b}(n; -2n; 1)$ перпендикулярны?

И д е я. Рассмотреть скалярное произведение этих векторов.
У к а з а н и е. Перпендикулярность ненулевых векторов равносильна равенству нулю их скалярного произведения.

Р е ш е н и е. Так как данные векторы не являются нулевыми векторами, то

$$\overline{a} \perp \overline{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 - 4n + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n = 2.$$

О т в е т. 2.

Задача 5.

При каких значениях m и n векторы $\overline{a}(3; n; 2)$ и $\overline{b}(m; 2; 5)$ коллинеарны?

И д е я. Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Р е ш е н и е. Найдём значения m и n, при которых координаты векторов $\overline{a}(3; n; 2)$ и $\overline{b}(m; 2; 5)$ пропорциональны:

$$\frac{3}{m} = \frac{n}{2} = \frac{2}{5} \quad \Longrightarrow \quad m = 7,5 \quad \text{и} \quad n = 0,8.$$

О т в е т. $m = 7,5$; $n = 0,8$.

Задача 6.

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найдите угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b} - \overline{c}$.

И д е я. Использовать формулу для вычисления скалярного произведения через косинус угла между векторами и произведение их длин.

Р е ш е н и е. Угол φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b} - \overline{c}$ можно найти с помощью формулы для скалярного произведения векторов

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} - \overline{c}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b} - \overline{c}| \cdot \cos\varphi.$$

Найдём значение левой части этого равенства:

$$\overline{a}\cdot(\overline{b}-\overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{b}-\overline{a}\cdot\overline{c} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos 60^\circ - |\overline{a}|\cdot|\overline{c}|\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0.$$

Следовательно, $\cos\varphi = 0 \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 90^\circ$.

Ответ. 90°.

Задача 7.

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найдите угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}+\overline{c}$.

Идея. Использовать формулу для вычисления скалярного произведения через косинус угла между векторами и произведение их длин.

Решение. Угол φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}+\overline{c}$ можно найти с помощью формулы для скалярного произведения векторов

$$\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c}) = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}+\overline{c}|\cdot\cos\varphi.$$

Сначала вычислим значение левой части этого равенства:

$$\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos 60^\circ + |\overline{a}|\cdot|\overline{c}|\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Теперь найдём величину $|\overline{b}+\overline{c}|$. Согласно правилу параллелограмма, вектор $\overline{b}+\overline{c}$ является диагональю ромба, построенного на векторах $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Так как стороны этого ромба равны 1, а острый угол равен 60°, то большая диагональ равна $\sqrt{3}$ и, следовательно, $|\overline{b}+\overline{c}| = \sqrt{3}$. В результате

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}+\overline{c}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 8.

Докажите, что если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – единичные неколлинеарные векторы, то векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ перпендикулярны.

Идея. Доказать равенство нулю соответствующего скалярного произведения.

Решение. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не являются нулевыми векторами (их длины равны 1) и не являются коллинеарными, следовательно, $\overline{a}+\overline{b}\neq\overline{0}$ и $\overline{a}-\overline{b}\neq\overline{0}$. В этом случае перпендикулярность векторов равносильна равенству нулю их скалярного произведения и так как

$$(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}-\overline{b}) = \overline{a}\cdot\overline{a}-\overline{b}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|^2-|\overline{b}|^2 = 1-1 = 0,$$

то векторы перпендикулярны.

Задача 9.

Векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.

Идея. Рассмотреть соответствующее скалярное произведение.

Решение.

$$(\overline{a}+\overline{b}) \perp (\overline{a}-\overline{b}) \quad \Longrightarrow \quad 0 = (\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}-\overline{b}) = \overline{a}\cdot\overline{a}-\overline{b}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|^2 - |\overline{b}|^2 \quad \Longrightarrow \quad |\overline{a}| = |\overline{b}|.$$

Задача 10.

Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a} = 3\overline{p}+2\overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p}-4\overline{q}$, где $\overline{p}$ и $\overline{q}$ единичные перпендикулярные векторы.

Идея. Использовать свойства скалярного произведения.

Решение.

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = (3\overline{p}+2\overline{q})(\overline{p}-4\overline{q}) = 3\overline{p}\cdot\overline{p} - 10\overline{p}\cdot\overline{q} - 8\overline{q}\cdot\overline{q} = 3\cdot 1 - 10\cdot 0 - 8\cdot 1 = -5.$$

Ответ. -5.

Задача 11.

Плоскость задана уравнением $3x - y + 2z = 2$. Укажите какой-нибудь вектор, параллельный плоскости.

Идея. Использовать геометрический смысл коэффициентов уравнения плоскости.
Указание. Вектор $\overline{(a;b;c)}$ перпендикулярен плоскости $ax+by+cz+d=0$. Искомый вектор должен быть перпендикулярен этому вектору.

Решение. Так как вектор $\overline{(3;-1;2)}$ перпендикулярен плоскости $3x-y+2z=2$, то любой вектор, перпендикулярный вектору $\overline{(3;-1;2)}$, будет параллелен данной плоскости. Например, вектор $\overline{(0;2;1)}$.

Ответ. $\overline{(0;2;1)}$.

Задача 12.

Прямая является пересечением плоскостей $3x - y + 2z = 2$ и $x + y + z = 0$. Укажите какой-нибудь вектор, параллельный этой прямой.

Идея. Любой ненулевой вектор, начало и конец которого принадлежат обеим плоскостям, параллелен прямой их пересечения.

Р е ш е н и е. Координаты точек, принадлежащих прямой пересечения данных плоскостей, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений. Найдём любые два. Для этого выразим x и y через z:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2 - 3z}{4}, \\ y = \dfrac{-z - 2}{4}; \end{cases}$$

и рассмотрим два различных значения z, например, $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$. В этом случае $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $x_2 = -\dfrac{1}{4}$, $y_2 = -\dfrac{3}{4}$. Так как точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ принадлежат прямой пересечения плоскостей, то вектор $\overline{AB} = \overline{\left(-\dfrac{3}{4}; -\dfrac{1}{4}; 1\right)}$ и есть искомый вектор.

З а м е ч а н и е. В ответе может быть указан любой вектор, пропорциональный полученному, например, вектор $\overline{(-3; -1; 4)}$.

О т в е т. $\overline{(-3; -1; 4)}$.

Задача 13.

Дана точка $A(2; 0; -1)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через начало координат O и перпендикулярной прямой OA.

И д е я. Использовать геометрический смысл коэффициентов уравнения плоскости.
У к а з а н и е. Вектор $\overline{(a; b; c)}$ перпендикулярен плоскости $ax + by + cz + d = 0$.

Р е ш е н и е. Плоскость, перпендикулярная вектору $\overline{OA} = \overline{(2; 0; -1)}$, имеет уравнение вида $2x - z + d = 0$. Так как точка $(0; 0; 0)$ принадлежит искомой плоскости, то $d = 0$.

О т в е т. $2x - z = 0$.

Задача 14.

Найдите отрезки, которые плоскость $ax + by + cz + d = 0$ отсекает на осях координат, если a, b, c, d отличны от нуля.

И д е я. Определить координаты точек пересечения данной плоскости с осями координат.

Р е ш е н и е. Найдём длину отрезка, отсекаемого плоскостью $ax+by+cz+d=0$ от оси x. Точка пересечения плоскости с осью x принадлежит оси x, то есть её координаты $(x_0;0;0)$. Так как эта точка лежит в плоскости $ax+by+cz+d=0$, то

$$ax_0+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0 \quad\Longrightarrow\quad x_0=-\frac{d}{a}$$

и искомая точка имеет координаты $\left(-\dfrac{d}{a};0;0\right)$. Из аналогичных соображений следует, что точки пересечения данной плоскости с осями y и z имеют координаты $\left(0;-\dfrac{d}{b};0\right)$ и $\left(0;0;-\dfrac{d}{c}\right)$ соответственно. В результате длины отрезков, отсекаемых от осей координат, равны $\left|\dfrac{d}{a}\right|$, $\left|\dfrac{d}{b}\right|$, $\left|\dfrac{d}{c}\right|$.

О т в е т. $\left|\dfrac{d}{a}\right|$, $\left|\dfrac{d}{b}\right|$, $\left|\dfrac{d}{c}\right|$.

Задача 15.

Найдите точку пересечения трех плоскостей, заданных уравнениями

$$x-y=1,\quad x+y-z=3,\quad x+z=2.$$

И д е я. Найти решение соответствующей системы уравнений.

Р е ш е н и е. Общая точка должна удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x-y=1,\\ x+y-z=3,\\ x+z=2; \end{cases} \iff \begin{cases} x-y=1,\\ x+y-z=3,\\ z=2-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x-y=1,\\ x+y-(2-x)=3,\\ z=2-x; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y=x-1,\\ 2x+(x-1)=5,\\ z=2-x; \end{cases} \iff \begin{cases} y=x-1,\\ x=2,\\ z=2-x; \end{cases} \iff \begin{cases} y=1,\\ x=2,\\ z=0. \end{cases}$$

О т в е т. $(2;1;0)$.

Задача 16.

Докажите, что плоскости, заданные уравнениями

$$x-y+2z=1,\quad 2x-3y+z+1=0,\quad x+5z-1=0,$$

не имеют ни одной общей точки.

И д е я. Показать, что система из данных уравнений несовместна.

Р е ш е н и е. Общая точка должна удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ 2x - 3y + z + 1 = 0, \\ x + 5z - 1 = 0. \end{cases}$$

Покажем, что эта система не имеет решений. Сложив второе уравнение с третьим, получим $3x - 3y + 6z = 0$, откуда $x - y + 2z = 0$, что противоречит первому уравнению системы.

Задача 17.

Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой AB, где $A(2; 0; -1)$, $B(3; -2; 1)$.

И д е я. Использовать геометрический смысл коэффициентов уравнения плоскости.
У к а з а н и е. Вектор $\overline{(a; b; c)}$ перпендикулярен плоскости $ax + by + cz + d = 0$.

Р е ш е н и е. Искомая плоскость перпендикулярна вектору $\overline{AB} = \overline{(1; -2; 2)}$, значит, её уравнение имеет вид $x - 2y + 2z + d = 0$. Так как точка $A(2; 0; -1)$ принадлежит этой плоскости, то

$$2 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + d = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = 0.$$

О т в е т. $x - 2y + 2z = 0$.

Ответы

ПЛАНИМЕТРИЯ

1.1.

1. $35^\circ, 55^\circ$.
2. $6,5$.
3. 4.
4. 12.
5. 120.
6. $21^\circ, 69^\circ$.
7. $90^\circ, 65^\circ, 25^\circ$.
8. 3:2.
9. 10.
10. 24.
11. 6.
12. $3/4$.
13. 25.
14. 6.
15. $3\sqrt{2}$.
16. 16.
17. 30.

1.2.

1. Да.
2. Тупоугольный.
3. 28.
4. 25.
5. $\alpha,\ \frac{\pi}{2}-\alpha,\ \frac{\pi}{2}$ или $2\alpha,\ \frac{\pi}{2}-\alpha,\ \frac{\pi}{2}-\alpha$.
6. $2\arccos\frac{3}{4},\ \frac{\pi}{2}-2\arccos\frac{3}{4}$.
7. $\sqrt{7}$.
8. $5\sqrt{\frac{3}{7}}$.
9. $\sqrt{5}$.
10. $\frac{\sqrt{15}}{3}$.
11. $\sqrt{801}$.
12. 24.
13. $\sqrt{\frac{3}{13}}$.
14. $\frac{\sqrt{15}(11-\sqrt{51})}{10}$.

1.3.

3. 294.
4. $9\sqrt{5},\ 8\sqrt{10}$.
5. 4.
6. 18.
7. $(\pi-\alpha)/2$.
8. $|\alpha-\beta|/2$.
9. Остроугольный.
10. Тупоугольный.
11. $\sqrt{5}$.
12. 4.
14. $\sqrt{b^2+bc}$.
17. $27/2$.
18. $\frac{\sqrt{3}}{4};\ 5$.
19. 60.
20. $35/32$.

1.4.

1. $1:2$.
2. $2:3$.
3. $18\sqrt{2}$.
4. $(\sqrt{3}+1):2,\ (\sqrt{6}+2):1$.
5. 12,5.
6. 6.
7. 20.
8. $30^\circ,\ 60^\circ$.
9. 25.
10. 30°.
12. $\cos^2\alpha$.
13. 30°.
14. $2\sqrt{2}-2$.
15. 15.
16. $4,5$.
17. $2\sqrt{S_1S_2}$.
18. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

1.5.

1. 12.
2. 8,125.
3. $1:3$.
4. В 4 раза.

5. $(\sqrt{2}+1) : 1$, начиная с вершины, противолежащей основанию.
6. $9:1$.
7. Не изменится.
8. 13.
9. 3.
10. $1:6$.
11. $115/16$.
12. $\dfrac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$.
13. 6.
14. $\dfrac{1}{30}\sqrt{(4b^2-c^2)(4c^2-b^2)}$.
15. $\dfrac{36(6+5\sqrt{2})}{13}$.
16. 15.
17. ΔACO.
18. 1) $\dfrac{16}{3}$, вне треугольника;
    2) $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$, внутри.
19. $\dfrac{24\sqrt{2}}{35}$.

2.1.

1. 10.
2. 15.
3. 80.
4. 48.
5. 63°.
6. 8.
7. $\arcsin(3/5)$, $\arcsin(4/5)$.
8. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ или $\dfrac{1}{4}$.
10. 62°.
11. 36°, 36°, 108°.
12. $\angle A'=\beta+\gamma-\alpha$,
    $\angle B'=\alpha+\gamma-\beta$,
    $\angle C'=\beta+\alpha-\gamma$.
13. $\sqrt{ba}$.
14. $\dfrac{2mn}{n-m}$.
17. Да.

2.2.

3. 16.
4. 17.
5. 20.
6. 4 или 9.
7. 70.
8. $4+\sqrt{7}$; $4-\sqrt{7}$.
9. 15.
10. 6.
11. $\sqrt{5}$.
12. $\dfrac{1820\sqrt{21}}{341}$.
13. 3.
14. 6.
15. $\arccos(-\sqrt{6}/4)$.

2.3.

1. 25.
2. 25.
3. $23/2$.
4. 11.
5. 10.
6. $3:1$.
7. 2.
8. 1.
9. $2\sqrt{Rr}$
10. $\dfrac{1+\sin(\alpha/2)}{1-\sin(\alpha/2)}$
12. $h^2\operatorname{ctg}(\alpha/2)$.
13. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 68^\circ}$.
14. $\sqrt{6}$.
15. $\sqrt{10}$
16. $2\sqrt{6}$.
17. $3\sqrt{2}$.
18. $\angle BOC = 112{,}5^\circ$.
19. $\dfrac{Rr}{\left(\sqrt{r}+\sqrt{R}\right)^2}$.
20. $R_4=\dfrac{R_1R_2}{R_3}$.

3.1.

1. 98°.
2. 30 см.

3. 510 см^2.
4. 4.
5. 170.
6. $a^2(1+\sqrt{3})/4$.
7. 28.
8. 12.
9. 10.
10. 44.
11. 80.
13. 30.
14. $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$.
16. $2\sqrt{\dfrac{7}{19}}$.

3.2.

1. 14.
2. 1,5.
3. 25.
4. 12.
5. $a:b$.
7. $AB > BD$.
8. $(a-b)/2$.
9. $\sqrt{ab}$.
10. a^2.
12. 8.
13. $\angle BAC > \angle CAD$.
14. 7.
15. $\arcsin(2/\pi)$.
16. 98.
17. 1.
18. Нет.
19. $126\sqrt{3}$.

3.3.

1. 12.
2. 2880°.
3. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
4. $\pi(2+\sqrt{2})/2$.
5. 30.
6. 6.
7. 10.
8. 10.
9. 2.
10. 6.
11. 10.
12. Угол между биссектрисами двух противоположных углов равен полуразности двух других углов.
13. Четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны.
14. Квадрат.
18. Точка пересечения диагоналей.

4.1.

2. 90°.
5. $(-4;4)$.
6. $3;\ 3$.
7. $3\overline{a}+\overline{b}$.
8. $(1,75;\ 0,25)$.
9. -4.
10. $\sqrt{85}/2$.
11. $2x-y-1=0$.
12. $3x+2y-6=0$.
13. $x+2y-10=0$.
14. -4.
15. $\dfrac{3}{4}\left(\overline{NP}-\overline{NM}\right)$.
16. $\dfrac{1}{4}\overline{AC}-\dfrac{1}{2}\overline{AB}$.
17. $\dfrac{4}{5}\overline{CB}+\dfrac{1}{5}\overline{CD}$.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

5.1.

1. 768.
2. 80.
3. 90.
4. 90.
5. 30.
6. $0,6$.
7. $0,5$.
8. 18.
9. 72.
10. На три равные части.

5.2.

1. 90.
2. 3.
3. 2,25.
4. 16.
5. 864.
6. 4.
7. $2\sqrt{2}$.
8. 45°.

6.1.

1. 36.
2. 36.
3. 48.
4. 2.
5. 12.
6. 12.
7. $0,2$.
8. 4.

6.2.

3. 2.
4. 1.
5. 10.
6. 3.
7. 5.
8. 36.
9. 60.

6.3.

1. 9.
2. 15.
3. 1200.
4. 3.
5. 30.
6. 216.
7. 16.
8. 4.
9. 28.
10. $128/41$.

7.1.

1. 60.
2. 30.
3. 24.
4. $0,25$.
5. 144.
6. 106π.
7. 300.
8. 50.

7.2.

1. 6.
2. 20.
3. 45.
4. 1.
5. 4.
6. 24.
7. 12π.
8. 6π.

7.3.

1. 10.
2. 16.
3. 3.
4. 3.
5. 10.
6. 13.
7. 336.
8. 2.
9. 36.

8.1.

1. $(1;-3;2)$.
2. $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{15}}$.
4. 2.
5. $m=7,5;\ n=0,8$.
6. 90°.
7. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
10. -5.
11. $\overline{(0;2;1)}$.
12. $\overline{(-3;-1;4)}$.
13. $2x-z=0$.
14. $|d/a|,\ |d/b|,\ |d/c|$.
15. $(2;1;0)$.
17. $x-2y+2z=0$.

Литература

1. *Золотарёва Н. Д., Семендяева Н. Л., Федотов М. В.* Геометрия. Базовый курс с решениями и указаниями (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). – М.: Фойлис, 2010. – 296 с.

2. *Федотов М. В., Золотарёва Н. Д.* Геометрия. Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ. – М.: МАКС Пресс, 2009. – 132 с.

3. *Федотов М. В., Хайлов Е. Н.* Задачи устного экзамена по математике.– М.: МАКС Пресс, 2002. – 144 с.

4. Математика. Задачи вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М. В. Ломоносова с ответами и решениями (1999–2004 гг.) Сост. Е. А. Григорьев. – М.: Издательство УНЦ ДО, 2005. – 399 с.

5. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (2000–2002, 2003, 2004 гг.). – М.: Механико-математический факультет МГУ.

6. *Сергеев И. Н.* Математика. Единый государственный экзамен. Задания типа С. – М.: Изд-во "Экзамен", 2009. – 318 с.

7. *Денищева Л. О., Бойченко Е. М., Глазков Ю. А. и др.* Единый государственный экзамен 2003–2004: Контрольные измерительные материалы: Математика. – М.: Просвещение, 2003. – 191 с.

8. *Денищева Л. О., Рязановский А. Р., Семенов П. В., Сергеев И. Н.* ЕГЭ 2008. Математика. Федеральный банк экзаменационных материалов. – М.: Эксмо, 2008. – 240 с.

9. *Галеев Э. М.* Подготовка к ЕГЭ по математике. Задания типа В и С. – М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2009. – 96 с.

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Золотарёва Наталья Дмитриевна
Семендяева Наталья Леонидовна
Федотов Михаил Валентинович

ГЕОМЕТРИЯ.
БАЗОВЫЙ КУРС С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ
Учебно-методическое пособие

Подписано к использованию 19.03.15. Формат 145×225 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

– на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;
– для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;
– сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

Декан факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАН ***Е. И. Моисеев***

Сайт факультета ВМК МГУ:

http://www.cs.msu.ru